O Problema de Scarborough-Stone

Rodrigo Rey Carvalho

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Programa: Mestrado em Matemática
Orientadora: Prof^a. Dr^a. Lúcia Renato Junqueira

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da FAPESP

São Paulo, fevereiro de 2018

O Problema de Scarborough-Stone

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 27/03/2018. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof^a. Dr^a. Lúcia Renato Junqueira (orientadora) - IME-USP
- Prof. Dr. Marcelo Dias Passos - UFBA
- Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi - ICMC-USP

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a meus pais pelo apoio e incentivo que ajudaram a realizar esse trabalho. A minha orientadora Lúcia pela paciência e orientação durante o mestrado. Aos professores Rodrigo Roque Dias, Ofélia Tereza Alas e ao amigo Guilherme Trajano pelas presenças nos seminários e comentários sobre os resultados desse trabalho.

Aos amigos do IME-USP pelo apoio e pelas seções de estudo que ajudaram a manter a sanidade durante as matérias. Aos amigos da época do colégio pelos encontros e conversas, sem os quais tudo seria mais difícil.

Por fim gostaria de agradecer a FAPESP pelo incentivo fornecido durante o mestrado na forma do processo 2015/26326-5.

Resumo

Carvalho, R. R. **O Problema de Scarborough-Stone**. 2018. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

O problema de Scarborough-Stone consiste em perguntar se o produto de espaços topológicos sequencialmente compactos precisa ser enumeravelmente compacto. Nesse trabalho estudamos alguns resultados que surgiram tentando resolver tal problema. Começamos com uma resposta negativa em ZFC usando espaços T_2 e depois especificamos melhor condições sobre os axiomas de separação envolvendo os espaços do produto. Veremos respostas positivas envolvendo alguns axiomas de separação mais fortes como T_6 (usando MA e a negação de CH) e T_5 (usando o PFA). Além disso construímos mais respostas negativas usando construções como a Reta de Ostaszewski, espaços de Franklin-Rajagopalan e estruturas envolvendo álgebras Booleanas.

Palavras-chave: Compacidade, Pequenos cardinais, Problema de Scarborough-Stone.

Abstract

Carvalho, R. R. **The Scarborough-Stone Problem**. 2018. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

The Scarborough-Stone problem asks if every product of sequentially compact spaces must be a countably compact space. In this work we study some results that have arisen in attempt to solve this problem. We start our results with a negative answer in ZFC using T_2 spaces and specify our conditions about the separability axioms of the spaces of the product. We will see positive answers assuming stronger separability axioms like T_6 (using MA and the negation of CH) and T_5 (using the PFA). We also construct more negative answers using constructions like the Ostaszewski line, Franklin-Rajagopalan spaces and structures involving Boolean algebras.

Keywords: Compactness, Small Cardinals, Scarborough-Stone Problem.

Sumário

1	Introdução	1
2	Preliminares	3
2.1	Conceitos Básicos	3
2.2	Pequenos Cardinais	5
3	Resultados clássicos de compacidade e generalizações	7
3.1	Compacidade e funções cardinais	7
3.2	Pequenos cardinais e produtividade	12
4	O Problema de Scarborough-Stone	17
4.1	Ψ -espaços e a resposta negativa	17
4.2	Revisitando Scarborough-Stone e uma resposta positiva parcial	25
5	Construções do Tipo de Ostaszewski	31
5.1	A Reta de Ostaszewski	31
5.2	Uma construção com $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$	36
6	Espaços de Franklin-Rajagopalan, o γN e o Open Coloring Axiom	43
6.1	FR espaços	43
6.2	O γN , preliminares e o Open Colouring Axiom	48
6.3	OCA, uma equivalência e o contra-exemplo	51
7	Álgebras Booleanas e o Problema de Scarborough-Stone	61
7.1	Álgebras Booleanas coerentemente minimamente geradas	61
7.2	Espaços de Stone	65
7.3	Jogos e o problema de Scarborough-Stone	67
	Referências Bibliográficas	77

Capítulo 1

Introdução

Começamos o estudo do mestrado desenvolvendo alguns resultados sobre funções cardinais, e estudando os conceitos de pequenos cardinais. Após tal introdução resolvemos olhar o artigo [12] de Michael Hrušák e Justin Tatch Moore, referentes a vinte problemas de topologia que estão abertos. Nesse artigo nos interessamos com o problema de Scarborough-Stone e fomos pesquisar um pouco melhor sobre os resultados já obtidos.

Sendo assim, resolvemos tomar como foco central dessa dissertação o estudo do problema de Scarborough-Stone. Tal problema foi introduzido em 1966 por C. T. Scarborough e A. H. Stone no artigo [23], e ele se reduz a seguinte pergunta, o produto de espaços sequencialmente compactos é enumeravelmente compacto? Estudamos esse problema conforme o artigo de Jerry E. Vaughan em [28], seguindo alguns exemplos e construções.

Sabemos que, em ZFC, para espaços T_2 , temos uma resposta negativa para o problema de Scarborough-Stone. O artigo [20], de Peter J. Nyikos e Jerry E. Vaughan, publicado em 1992 nos dá duas construções que comprovam a negação. Fica então a pergunta, o que acontece quando exigimos um pouco mais da separação dos espaços?

Assumindo no mínimo regularidade dos espaços topológicos, ainda não temos resposta para o problema de Scarborough-Stone em ZFC. Estudamos então respostas parciais usando axiomas adicionais. Para uma resposta negativa temos o artigo [26] de Jerry E. Vaughan, onde foi feita um contra-exemplo usando $\clubsuit$ e a hipótese do contínuo, aproveitando a construção da Reta de Ostaszewski. Quando tratamos de uma resposta positiva temos apenas afirmações parciais para classes específicas de espaços topológicos. Uma dessas demonstrações trata dos espaços T_5 e é explorada nos artigos [17] de P. J. Nyikos, L. Soukup e B. Veličković e [18] de P. J. Nyikos.

Uma das construções mais recentes de um contra-exemplo foi trabalhada no artigo [7] de Miguel Ángel Gaspar-Arreola, Fernando Hernández-Hernández e Michael Hrušák. Tal construção envolve álgebras Booleanas e um tipo particular de princípio diamante, a saber o $\diamond(\mathfrak{s})$. Foi esse artigo uma das motivações que nos levou a estudar melhor como a álgebra Booleana está ligada a construções de espaços topológicos e, mais especificamente, ao problema de Scarborough-Stone. Para tal fim estudamos, nessa dissertação, o artigo [4] de A. Dow e S. Shelah.

Explicaremos agora como a dissertação está estruturada, dando um resumo sobre os tópicos desenvolvidos em cada capítulo.

No Capítulo 2 fazemos um resumo de alguns conceitos e propriedades, topológicos e conjuntísticos, que serão utilizados nos capítulos seguintes.

No Capítulo 3 discutimos alguns resultados clássicos envolvendo compacidade, compacidade

enumerável e compacidade sequencial. Motivados pela equivalência entre esses conceitos em espaços métricos, discutimos como elas se relacionam em espaços topológicos em geral. Para tanto, apresentamos contra-exemplos e discutimos a relação de funções cardinais e pequenos cardinais. Por fim discutimos como as compacidades se comportam com relação ao produto de espaços topológicos, começando a motivar o problema central dessa dissertação.

No Capítulo 4 desenvolvemos melhor o problema de Scarborough-Stone. Para tanto, enunciamos algumas versões dele e introduzimos uma equivalência para a resposta negativa, como visto em [28]. Além disso nós faremos uma resposta negativa em ZFC, para o caso de espaços T_2 , envolvendo Ψ -espaços. Por fim, estudamos uma resposta parcial positiva para essa pergunta. Tal resposta, que assume $(MA + \neg CH)$, foi investigada no artigo [29], de William Weiss, usando alguns resultados anteriores dos artigos [9] e [24]. No final apontamos o que foi usado de cada hipótese, observando que podemos diminuir as hipóteses necessárias para apenas $(\mathfrak{p} \geq \aleph_2)$.

No Capítulo 5 estudamos algumas variantes de uma construção específica, a saber, a construção da Reta de Ostaszewski. Primeiro introduzida por A. J. Ostaszewski no artigo [21], usamos esse tipo de construção, que envolve definir uma topologia recursivamente, como motivação para as duas outras. O primeiro exemplo estudado envolve a construção original usando $(\clubsuit + CH)$. Nos baseamos nos artigos [26], [21] e [22] para montar esse exemplo. No segundo exemplo estudamos uma construção semelhante, feita no artigo [27], que usa $(\mathfrak{b} = \mathfrak{c})$. Por fim concluímos a seção analisando os contra-exemplos e apresentando suas similaridades.

O Capítulo 6 é dividido em duas seções, ambas conectadas por um elemento em comum, o γN . Na primeira seção estudamos um tipo específico de espaço, os espaços de Franklin-Rajagopalan, que foram introduzidos em [6]. Prosseguimos a estudar os FR-espaços usando o artigo [19]. Primeiro, usando o conceito clássico de torre, classificamos os espaços de Franklin-Rajagopalan que são sequencialmente compactos e não compactos. Depois definimos o conceito de T-pontos para mencionar uma resposta negativa para o problema de Scarborough-Stone. Na segunda seção estudamos os artigos [17] e [18]. Temos como foco usar o γN , que é um espaço de Franklin-Rajagopalan, e o axioma adicional PFA para demonstrar uma equivalência entre compacidade sequencial e compacidade enumerável para espaços T_5 . Tal equivalência também nos ajuda a mostrar que, para espaços T_5 , sob PFA, o problema de Scarborough-Stone tem resposta positiva.

Para o último capítulo estudamos uma parte do artigo [4]. Tal artigo tem como objetivo estudar o problema dos espaços de Efimov, porém, a maneira como ele aborda tal problema, permite o estudo de outras técnicas para resolver o problema de Scarborough-Stone. Trazemos assim a linguagem de álgebras Booleanas e a linguagem de jogos para criar uma resposta negativa para o tal problema, assumindo que $(\mathfrak{b} = \mathfrak{c})$.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Conceitos Básicos

Assumimos conceitos básicos de teoria dos conjuntos como ordinais e cardinais, como vistos no Capítulo 1 de [15] e conceitos básicos de topologia como os axiomas de enumerabilidade e separação, como vistos no livro [5], nessa dissertação todos os espaços topológicos serão pelo menos T_2 , exceto quando explicitado o contrário.

Definição 2.1.1. *Dado conjunto A e κ cardinal denotamos $[A]^\kappa$ o conjunto dos subconjuntos de A com cardinalidade κ , de maneira análoga denotamos $[A]^{<\kappa}$ e $[A]^{\leq\kappa}$, respectivamente, o conjunto dos subconjuntos de A com cardinalidade menor (menor ou igual) que κ .*

Nesse trabalho usaremos com muita frequência o conjunto $[\omega]^\omega$ e portanto definiremos, de uma maneira mais geral, uma relação muito útil entre os elementos desse conjunto.

Definição 2.1.2. *Dados dois conjuntos A e B quaisquer dizemos que $A \subset^* B$ se, e somente se, $|A \setminus B| < \aleph_0$ e $|B \setminus A| \geq \aleph_0$. De maneira análoga dizemos que $A \subseteq^* B$ se, e somente se, $|A \setminus B| < \aleph_0$.*

Ademais trabalharemos com filtros e ultrafiltros e, a seguinte notação ω^* , representa o conjunto dos ultrafiltros livres de ω .

Definição 2.1.3. *Dados X conjunto e $\mathcal{A} \subset [X]^\omega$. Dizemos que $\mathcal{A}$ é quasi-disjunta se, e somente se, para todos $A, B \in \mathcal{A}$ diferentes, temos que $A \cap B$ é finito.*

Nessa dissertação CH representa a hipótese do contínuo, isto é, $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, e, denotaremos $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Ademais MA é a afirmação que, para todo cardinal $\kappa < \mathfrak{c}$, o Axioma de Martin $MA(\kappa)$ é válido. Além dos axiomas adicionais em relação à ZFC mencionados acima, trabalharemos com outros, como por exemplo $\diamond$ e $\clubsuit$, que serão definidos e explorados em seus devidos capítulos.

Agora faremos algumas definições que serão utilizadas na dissertação e estão mais relacionadas com a topologia.

Definição 2.1.4. *Fixamos um espaço topológico $\langle X, \tau \rangle$. Um subconjunto infinito enumerável $A \subset X$ é dito convergir para um ponto $x \in X$ se, e somente se, para todo aberto U contendo x , o conjunto $A \setminus U$ é finito.*

A definição acima é uma interpretação da convergência de sequências, uma vez que, dado um conjunto convergente podemos montar uma sequência convergente. Porém, não cobrimos o caso das sequências eventualmente constantes.

Dado um espaço topológico, dizemos que um subconjunto é sequencialmente fechado se, todo limite de seqüências de pontos do subconjunto está no subconjunto.

Um espaço topológico $\langle X, \tau \rangle$ é dito:

- Compacto se todo recobrimento de X por abertos admite subrecobrimento finito;
- Enumeravelmente compacto se todo subconjunto infinito enumerável de X possui ponto de acumulação;
- Sequencialmente compacto se todo subconjunto infinito enumerável de X possui um subconjunto infinito convergente;
- Sequencial se, para todo $F \subset X$ sequencialmente fechado, temos que F é fechado;
- Subsequencial se, dados subconjunto infinito enumerável $A \subset X$ e p ponto de acumulação de A , existe um subconjunto infinito de A que converge para p .

As formas de compacidade acima estão diretamente relacionadas com os conceitos de ponto de acumulação e limite de seqüências, e, mais adiante, usaremos outras formas de convergência, como por exemplo:

Definição 2.1.5. *Dados X espaço topológico, $p \in \omega^*$ e $s : \omega \rightarrow X$ seqüência, dizemos que $x \in X$ é um p -limite se, e somente se, para toda V vizinhança de x em X , temos $\{n \in \omega : s(n) \in V\} \in p$. Note que, assim como o conceito de limite, caso X seja um espaço T_2 , então o p -limite é único.*

Um espaço topológico é dito zero dimensional se é T_1 não vazio e possui uma base de abertos-fechados.

Trabalharemos com as seguintes funções cardinais peso, caráter e tightness, como definidas abaixo,

- $w(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ é uma base para } X\} + \omega$ (peso);
- $\chi(X) = \sup\{\chi(p, X) : p \in X\}$ (caráter), onde $\chi(p, X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ é base de abertos para } p\}$;
- $t(X) = \sup\{t(p, X) : p \in X\}$ (tightness), onde $t(p, X)$ é o mínimo das cardinalidades κ tais que, para todo $Y \subset X$ com $p \in \overline{Y}$, existe $A \subset Y$ com $|A| \leq \kappa$ e $p \in \overline{A}$.

O próximo resultado é um resultado clássico e pode ser encontrado em [5].

Lema 2.1.6. *Dado X um espaço topológico zero dimensional temos que X é homeomorfo a um subespaço de $2^{w(X)}$.*

Outro conceito que está relacionado com o tópico de funções cardinais é o de seqüência livre. Dado um espaço topológico X e um cardinal κ dizemos que $\{x_\xi : \xi < \kappa\} \subset X$ é uma seqüência livre se, para todo $\alpha < \kappa$, temos $\overline{\{x_\xi : \xi < \alpha\}} \cap \{x_\xi : \xi \geq \alpha\} = \emptyset$. Desenvolveremos melhor algumas propriedades relacionando seqüências livres com a tightness em capítulos futuros.

Trabalharemos com $\beta\omega$, a compactificação de Stone-Cech dos naturais, e, para maiores referências, usaremos [5]. Enunciamos agora algumas proposições sobre esse espaço.

Proposição 2.1.7. *Toda função contínua $f : X \rightarrow Z$ de um espaço Tychonoff X , para um espaço compacto Z pode ser estendida continuamente para uma função $F : \beta X \rightarrow Z$.*

Proposição 2.1.8. *Se toda função contínua $f : X \rightarrow Z$ de um espaço Tychonoff X para um espaço compacto Z pode ser estendida continuamente a uma compactificação αX , então αX é homeomorfa à βX .*

2.2 Pequenos Cardinais

Pequenos cardinais são, como o nome sugere, cardinais que estão situados entre ω_1 e $\mathfrak{c}$, para uma melhor referência pode-se consultar [25] e [3]. Nessa seção trataremos de alguns dos pequenos cardinais que usaremos durante esse trabalho e provaremos alguns resultados referentes a eles.

Dado o ordinal ω , uma família de subconjuntos infinitos de ω , $\mathcal{S} \subset [\omega]^\omega$, é dita família divisora se, para todo $Y \in [\omega]^\omega$ existe $X \in \mathcal{S}$ de maneira que $|Y \cap X| = |Y \cap (\omega \setminus X)| = \omega$.

Dado $\mathcal{F} \subset [\omega]^\omega$, dizemos que $\mathcal{F}$ tem a propriedade da interseção finita forte (S.F.I.P.) se toda interseção finita de elementos de $\mathcal{F}$ é infinita. Ademais, dizemos que $\mathcal{F}$ tem pseudo interseção infinita se existe $P \in [\omega]^\omega$ tal que $P \subset^* F$ para todo $F \in \mathcal{F}$.

Agora, dada família $\mathcal{T} \subset [\omega]^\omega$, dizemos que $\mathcal{T}$ é uma torre se é bem ordenada pela ordem $\supset^*$, não vazia e não tem pseudo interseção infinita.

Usando esses conceitos definimos os seguintes pequenos cardinais:

- $\mathfrak{s} = \min\{|\mathcal{S}| : \mathcal{S} \text{ é família divisora}\};$
- $\mathfrak{t} = \min\{|\mathcal{T}| : \mathcal{T} \text{ é torre}\};$
- $\mathfrak{p} = \min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \text{ tem a S.F.I.P. mas não tem pseudo interseção infinita}\}.$

Considere ω^ω o conjunto das funções de ω em ω e considere a ordem parcial $\leq^*$ em ω^ω dada por $f \leq^* g$ se, e somente se, $|\{n \in \omega : f(n) > g(n)\}| < \omega$. Uma família $\mathcal{B} \subset \omega^\omega$ é dita ser ilimitada se não existe $g \in \omega^\omega$ tal que para toda $f \in \mathcal{B}$ seja valido $f \leq^* g$.

- $\mathfrak{b} = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ é ilimitada em } \omega^\omega\};$
- $\mathfrak{m} = \min\{\kappa : MA(\kappa) \text{ não é válido}\}.$

Agora verificaremos algumas desigualdades entre esses pequenos cardinais e algumas propriedades dos mesmos, que serão úteis no decorrer desse trabalho.

Teorema 2.2.1. $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{t}$.

Demonstração. Para verificar essa desigualdade fixamos $\kappa < \mathfrak{p}$ e veremos que $\kappa < \mathfrak{t}$. Fixe $\mathcal{T} \subset [\omega]^\omega$ conjunto bem ordenado por $\supset^*$. Note que $\mathcal{T}$ tem a SFIP. Com efeito, dado $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ finito, podemos tomar $M \in \mathcal{T}'$ o maior elemento. Sendo assim, como $M \subset^* P$ para todo $P \in \mathcal{T}'$, temos

$$\left| M \cap \left(\bigcap_{P \in \mathcal{T}' \setminus \{M\}} P \right) \right| = \aleph_0$$

e

$$M \cap \left(\bigcap_{P \in \mathcal{T}' \setminus \{M\}} P \right) \subset \bigcap_{T \in \mathcal{T}'} T.$$

Segue daí que, caso $|\mathcal{T}| = \kappa$, então $\mathcal{T}$ tem pseudo interseção infinita e não pode ser uma torre, isto é, $\kappa < \mathfrak{t}$. □

Teorema 2.2.2. $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{p}$.

Demonstração. Fixe $\kappa < \mathfrak{m}$ infinito, veremos que $\kappa < \mathfrak{p}$. Considere $\Theta \subset [\omega]^\omega$ tal que $|\Theta| = \kappa$ e Θ tem a SFIP. Como $\kappa < \mathfrak{m}$, temos que vale $\text{MA}(\kappa)$. Considere então o seguinte poset

$$\mathbb{P} = \{p = (S_p, W_p) : S_p \in [\omega]^{<\omega} \text{ e } W_p \in [\Theta]^{<\omega}\}$$

com a seguinte ordem parcial, dados $p, q \in \mathbb{P}$, temos $p \leq q$ se, e somente se, $S_p \supset S_q$, $W_p \supset W_q$ e, para todo $Z \in W_q$, $S_p \setminus S_q \subset Z$.

Note que $(\mathbb{P}, \leq)$ é uma ordem parcial. Dados $p, q, t \in \mathbb{P}$ temos que é imediato $p \leq p$, agora, caso $p \leq q$ e $q \leq t$ temos $S_p = S_q$ e $W_p = W_q$, donde $p = q$; por fim, se $p \leq q$ e $q \leq t$ temos que $S_p \supset S_t$ e $W_p \supset W_t$ e, dado $Z \in W_t$ temos que $S_p \setminus S_t \subset (S_p \setminus S_q) \cup (S_q \setminus S_t) \subset Z$ pois, $Z \in W_t \subset W_q$, donde $S_p \setminus S_q \subset Z$ e $q \leq t$ donde $S_q \setminus S_t \subset Z$.

Veremos agora que $\mathbb{P}$ tem a propriedade c.c.c. Com efeito, se $\mathcal{A} \subset \mathbb{P}$ for não enumerável, como $|\omega|^{<\omega} = \aleph_0$ deve existir $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ tal que, dados $p, q \in \mathcal{A}$, $S_p = S_q$. Note ainda que, dados os mesmos p e q , $t = (S_p, W_p \cup W_q)$ é tal que $t \leq p, q$. Com efeito, as duas primeiras condições são imediatas e a última condição é satisfeita pois $S_p \setminus S_p = \emptyset$.

Considere agora os seguintes conjuntos $D_n = \{p \in \mathbb{P} : |S_p| \geq n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $D_Z = \{p \in \mathbb{P} : Z \in W_p\}$ para todo $Z \in \Theta$. Note que tais conjuntos são densos pois, dado $q \in \mathbb{P}$ temos que $p = (S_q, W_q \cup \{Z\}) \in D_Z$ e estende q e, para ver que D_n é denso, basta notar que, como Θ tem a SFIP, podemos tomar $B \subset \bigcap W_q$ tal que $|B| = n$ e então $p = (S_q \cup B, W_q)$ estende q e $p \in D_n$. Defino $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{D_Z : Z \in \Theta\}$.

Agora, como $|\mathcal{D}| = \kappa$ e $\text{MA}(\kappa)$ é válido, existe um filtro G em $\mathbb{P}$ que intercepta todos os densos de $\mathcal{D}$. Definimos $R = \bigcup \{S_p : p \in G\}$, e veremos que R é pseudo interseção de Θ e, portanto, $\kappa < \mathfrak{p}$. Com efeito, $|R| = \aleph_0$ pois, para cada $n \in \omega$, existe $S_p \in G \cap D_n$ logo, como $S_p \subset R$ temos $|R| \geq n$. Agora, dado $Z \in \Theta$, existe $q \in G \cap D_Z$, agora, para todo $p \in G$ existe $t \in G$ tal que $t \leq p, q$ donde $S_t \setminus S_q \subset Z$, donde $S_p \setminus S_q \subset Z$. Segue daí que, para todo $p \in G$, $S_p \setminus Z \subset S_q$, portanto, $R \setminus Z \subset S_q$ e, portanto é finito. □

Teorema 2.2.3. $\mathfrak{t}$ é cardinal regular.

Demonstração. De fato, caso $\mathfrak{t}$ não fosse regular, dada uma torre $\mathcal{T}$ tal que $|\mathcal{T}| = \mathfrak{t}$, podemos enumerá-la de acordo com a boa ordem, $\mathcal{T} = \{T_\xi : \xi < \alpha\}$ de maneira que $|\alpha| = \mathfrak{t}$. Agora, sabemos que, como $\mathfrak{t}$ não é regular, então $cf(\alpha) < \mathfrak{t}$; consideramos então a sequência crescente $s : cf(\alpha) \rightarrow \alpha$, de comprimento $cf(\alpha)$ que é cofinal em α . Note que $\mathcal{T}' = \{T_{s(\xi)} : \xi < cf(\alpha)\}$ é torre pois é bem ordenada e não tem pseudo interseção pois $\mathcal{T}$ não tem pseudo interseção, mas $|\mathcal{T}'| < \mathfrak{t}$, o que é um absurdo. □

Capítulo 3

Resultados clássicos de compacidade e generalizações

Nesse capítulo trabalharemos com alguns resultados mais conhecidos que envolvem algumas funções cardinais, pequenos cardinais e as formas de compacidade. Começaremos introduzindo, durante a primeira secção, as relações clássicas entre as formas de compacidade, ilustrando alguns contra-exemplos. A maioria destes resultados podem ser vistos no livro [5]. Após essa pequena ilustração, trabalharemos com alguns resultados obtidos estudando o artigo [27]. Primeiramente definiremos alguns novos pequenos cardinais envolvendo algumas dessas formas de compacidade e as funções cardinais peso e caráter. Depois trabalharemos como esses pequenos cardinais se relacionam com alguns pequenos cardinais já existentes, a saber, $\mathfrak{s}$ e $\mathfrak{p}$. Além disso, demonstramos um resultado relacionando topologia à teoria da medida, o que mostra o quão interessantes são essas caracterizações dos pequenos cardinais.

Durante a segunda secção continuaremos a estudar os resultados de [27], porém, nos concentramos agora alguns resultados clássicos com relação a preservação dos tipos de compacidade sob o produto de espaços topológicos. Primeiramente construiremos um contra-exemplo clássico da não preservação da compacidade enumerável, utilizando o $\beta\omega$. Motivados por esse contra-exemplo e pelos resultados da secção anterior, continuamos a ideia de estudar como os pequenos cardinais se relacionam às propriedades topológicas envolvendo o produto. Desta vez, porém, trabalharemos com o pequeno cardinal $\mathfrak{t}$ para obter uma generalização de um resultado clássico de C. T. Scarborough e A. H. Stone.

3.1 Compacidade e funções cardinais

O resultado a seguir é um início para o estudo das relações entre as formas de compacidade, uma vez que ele se refere a suas relações em um caso específico de espaço topológico, os espaços métricos.

Proposição 3.1.1. *Dados $\langle X, d \rangle$ um espaço métrico e τ a topologia gerada por d , temos que as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) X é compacto;
- (b) X é enumeravelmente compacto;
- (c) X é sequencialmente compacto.

Sabemos então que, para o caso dos espaços métricos temos que vale a equivalência entre as formas de compacidade. O que acontece no caso mais geral então? É um resultado conhecido que a compacidade e a compacidade sequencial ambas implicam a compacidade enumerável. Daremos agora um exemplo de espaço que tem uma das propriedades mas não outra.

Exemplo 3.1.2. *O espaço topológico dado por $[0, \omega_1)$, com a topologia da ordem é sequencialmente compacto mas não compacto.*

Com efeito, dado qualquer conjunto infinito enumerável $A \subset [0, \omega_1)$, fixe $a_n \in A$, para todo $n \in \omega$, sequência estritamente crescente. Sabemos que $\alpha = \sup\{a_n : n \in \omega\}$ existe e é tal que $\alpha < \omega_1$. Agora, para todo $\beta < \alpha$, temos que $\{n \in \omega : a_n < \beta\}$ é finito. Caso contrário, devemos ter que $\beta > a_n$ para todo n , pois, a sequência escolhida é crescente, contradizendo a escolha de α como o supremo. Comprovamos assim, que $(a_n)_{n \in \omega}$ converge para α .

A seguinte proposição nos dá uma maneira de garantir que um espaço enumeravelmente compacto é sequencialmente compacto.

Proposição 3.1.3. *Se X é um espaço topológico enumeravelmente compacto e sequencial, então X é sequencialmente compacto.*

Demonstração. Fixamos $R \subset X$ conjunto infinito enumerável. Como X é enumeravelmente compacto existe $x \in X$ ponto de acumulação em R . Note que $x \in \overline{R \setminus \{x\}}$, donde, $R \setminus \{x\}$ não é fechado. Pela sequencialidade do espaço temos que $R \setminus \{x\}$ não pode ser sequencialmente fechado, isto é, existe sequência de elementos de $R \setminus \{x\}$ que converge para algum $y \in X \setminus (R \setminus \{x\})$. $\square$

Deve existir algum tipo de controle sobre as situações onde ocorrem um mas não a outro tipo de compacidade? É de se imaginar que devem existir restrições para tais situações. Perguntamo-nos então, o que acontece com o peso de um espaço topológico compacto, ou enumeravelmente compacto, que não é sequencialmente compacto? Tais questões nos levam a definir os seguintes cardinais:

- $\mathfrak{s}_p = \min\{\kappa : 2^\kappa \text{ não é sequencialmente compacto}\}$
- $\mathfrak{s}_c = \min\{\kappa : \text{existe } X \text{ compacto com } w(X) = \kappa \text{ e } X \text{ não é sequencialmente compacto}\}$
- $\mathfrak{s}_{cc} = \min\{\kappa : \text{existe } X \text{ enumeravelmente compacto com } w(X) = \kappa \text{ e } X \text{ não é sequencialmente compacto}\}.$

O teorema a seguir nos mostra como esses novos cardinais se relacionam com o pequeno cardinal $\mathfrak{s}$.

Teorema 3.1.4. $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_p = \mathfrak{s}_c = \mathfrak{s}_{cc}$.

Demonstração. Para provar esse teorema, primeiro notamos que 2^κ é compacto para qualquer κ , pois é produto de compactos, e $w(2^\kappa) = \kappa$, sendo assim, claramente $\mathfrak{s}_p \geq \mathfrak{s}_c \geq \mathfrak{s}_{cc}$, onde a última desigualdade provém do fato de que um espaço compacto é também enumeravelmente compacto. Resta ver agora apenas que $\mathfrak{s}_{cc} \geq \mathfrak{s}$ e $\mathfrak{s} \geq \mathfrak{s}_p$.

Verificaremos a primeira desigualdade. Para tanto fixamos um espaço topológico X enumeravelmente compacto tal que $w(X) < \mathfrak{s}$, e verificamos que X deve ser sequencialmente compacto e, portanto, $\mathfrak{s}_{cc} \geq \mathfrak{s}$. Com efeito, sejam $N \subset X$ infinito enumerável e $\mathcal{B}$ base de abertos para X tal que $|\mathcal{B}| < \mathfrak{s}$; definimos $\mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{B} : |B \cap N| = \aleph_0\} \subset \mathcal{B}$. Identificamos agora N com ω , apenas para facilitar a nomenclatura, e consideramos $\mathcal{B}'|_N = \{B \cap N : B \in \mathcal{B}'\}$. Note que, $|\mathcal{B}'|_N| \leq |\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{B}| < \mathfrak{s}$, sendo assim $|\mathcal{B}'|_N|$ não é família divisora de N , traduzindo, existe $Y \subset N$ tal que $|Y| = \aleph_0$ e, para todo $B \in \mathcal{B}'$, $|Y \setminus B| < \aleph_0$ ou $|Y \cap B| < \aleph_0$. Pela compacidade enumerável existe $x \in X$ ponto de acumulação para Y , veremos que Y converge para x . De fato, seja $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$, como x é ponto de acumulação de Y e X é T_1 , temos que $|B \cap Y| = \aleph_0$, donde $B \in \mathcal{B}'$ e, portanto,

$|Y \setminus B| < \aleph_0$, isto é, Y converge para x .

Veremos agora a última desigualdade, para tanto considere $\mathcal{S}$ uma família divisora de ω . Mostraremos que $2^{\mathcal{S}}$ não pode ser sequencialmente compacto e, portanto, $\mathfrak{s} \geq \mathfrak{s}_p$ dado que podemos tomar família divisora de tamanho $\mathfrak{s}$. Para tanto, defina $\sigma : \omega \rightarrow 2^{\mathcal{S}}$ pela projeção nas coordenadas $S \in \mathcal{S}$ $\sigma(n)_S = 1$ se, e somente se, $n \in S$. Veremos então que $Im(\sigma)$ é infinito enumerável e não possui nenhum subconjunto convergente. Claramente $|Im(\sigma)| \leq \aleph_0$ pela definição, caso $|Im(\sigma)| < \aleph_0$ então existe $y \in Im(\sigma)$ tal que $|\sigma^{-1}[\{y\}]| = \aleph_0$. Temos então, do fato de $\mathcal{S}$ ser família divisora, que existe $S \in \mathcal{S}$ tal que $|\sigma^{-1}[\{y\}] \cap S| = |\sigma^{-1}[\{y\}] \setminus S| = \aleph_0$. Sendo assim, dados $m \in \sigma^{-1}[\{y\}] \cap S$ e $n \in \sigma^{-1}[\{y\}] \setminus S$, temos $\sigma(m)_S = y_S = \sigma(n)_S$, o que é um absurdo.

Resta ver agora que $Im(\sigma)$ não possui subconjunto infinito convergente. Suponha, por absurdo, que existem $A \subset Im(\sigma)$ infinito e $x \in 2^{\mathcal{S}}$ tais que A converge para x . Sendo assim, fixado $S \in \mathcal{S}$, defino o aberto básico U_S onde apenas a coordenada S está fixada em x_S . Como $x \in U_S$ temos que $|\{a \in A : a_S \neq x_S\}| < \aleph_0$, mas $A \subset Im(\sigma)$ nos dá que a desigualdade acima é $|\{i \in \sigma^{-1}[A] : \sigma(i)_S \neq x_S\}| < \aleph_0$. Concluimos, pela definição de σ , que, para todo $S \in \mathcal{S}$, dependendo do valor de x_S , ou $|\sigma^{-1}[A] \cap S| < \aleph_0$ ou $|\sigma^{-1}[A] \setminus S| < \aleph_0$, o que é um absurdo pois $\mathcal{S}$ é divisora. $\square$

Note que esse teorema nos dá um mínimo para o peso de um espaço que é compacto, ou enumeravelmente compacto, mas não é sequencialmente compacto, resultando no seguinte corolário.

Corolário 3.1.5. *Se X é um espaço topológico compacto, ou enumeravelmente compacto, e $w(X) < \mathfrak{s}$ então X é sequencialmente compacto.*

Novamente usando o Teorema 3.1.4 podemos criar um novo contra-exemplo para espaços compacto que não são sequencialmente compactos.

Corolário 3.1.6. *$2^{\mathfrak{c}}$ é compacto mas não é sequencialmente compacto.*

Demonstração. Com efeito, temos que $2^{\mathfrak{c}}$ é compacto pois é produto de compactos. Agora, como $\mathfrak{s}_p = \mathfrak{s}$ temos que, para todo $\kappa \geq \mathfrak{s}$, 2^{κ} não é sequencialmente compacto pois possui uma cópia fechada de $2^{\mathfrak{s}_p}$. $\square$

O Teorema 3.1.4 nos dá uma nova maneira de interpretar o pequeno cardinal $\mathfrak{s}$. Agora, o teorema seguinte nos dará um resultado que nos permite fazer uma conexão com a teoria da medida.

Teorema 3.1.7. *Se 2^{κ} é sequencialmente compacto, então, para todo $A \subset \mathbb{R}$ tal que $|A| = \kappa$, temos que $m(A) = 0$, isto é, A tem medida de Lebesgue 0.*

Demonstração. Definimos $d : [\omega]^{\omega} \rightarrow [0, 1]$ da seguinte forma $d(T) = \sum \{\chi_T(n) 2^{-n-1} : n \in \omega\}$. A imagem de d é $(0, 1]$ pela maneira como tomamos a série e a função é bijetora. Fixamos S subconjunto de $(0, 1]$ tal que $|S| \leq \kappa$. Como 2^{κ} é sequencialmente compacto, pelo Teorema 3.1.4, temos que $\kappa < \mathfrak{s}$. Definimos, para todo $x \in [0, 1]$, um conjunto $T_x \in [\omega]^{\omega}$, tal que $d(T_x) = x$. Note que está bem definido, pois, podemos fixar uma representação binária de x para representar T_x . Agora, como $|S| \leq \kappa < \mathfrak{s}$, temos que $\{T_x : x \in S\}$ não pode ser família divisora. Fixamos então $M \in [\omega]^{\omega}$ tal que, ou $M \subset^* T_x$, ou $M \subset^* (\omega \setminus T_x)$ para todo $x \in S$. Sendo assim, temos que $S \subset \{d(T) : M \subset^* T\} \cup \{d(T) : M \subset^* (\omega \setminus T)\}$. Note que

$$\{d(T) : M \subset^* T\} = \bigcup_{F \in [\omega]^{<\omega}} \{d(T) : (M \setminus F) \subset T\},$$

e vale o análogo para $\{d(T) : M \subset^* (\omega \setminus T)\}$. Assumindo que, para todo $N \in [\omega]^{\omega}$, os conjuntos $\{d(T) : N \subset T\}$ e $\{d(T) : N \subset (\omega \setminus T)\}$ tem medida nula, obtemos que S está contido na

união enumerável de conjuntos de medida nula e, portanto, tem medida nula. Resta provar o que assumimos acima, e o faremos apenas para $\{d(T) : N \subset T\}$, pois o outro caso é análogo. Com efeito, fixado $n \in \omega$, existe $k \in \omega$ tal que, para todo $T \in [\omega]^\omega$, se $T \cap k = N \cap k$, então

$$d(T) \in \left] d(N) - \frac{1}{4n}, d(N) + \frac{1}{4n} \right[.$$

Tal conclusão é imediata pela representação binária. Note agora que deixamos apenas de pegar uma quantidade finita de T 's tais que $N \subset T$, a saber os T 's tais que $T \cap k \supsetneq N \cap k$. Nessa situação, podemos pegar um aberto V que contém os pontos negligenciados e tem medida menor que $\frac{1}{2n}$. Nessa situação

$$\{d(T) : N \subset T\} \subset \left] d(N) - \frac{1}{4n}, d(N) + \frac{1}{4n} \right[\cup V,$$

donde, $m(\{d(T) : N \subset T\}) < \frac{1}{n}$.

□

Nos perguntamos agora, já que temos um controle sobre o peso, o que acontece com o caráter de um espaço topológico que é compacto ou enumeravelmente compacto mas não é sequencialmente compacto? Para responder essa pergunta, de maneira análoga às definições dos pequenos cardinais acima, definimos os seguintes pequenos cardinais:

- $\mathfrak{p}_p = \min\{\kappa : 2^\kappa \text{ não é subsequencial}\}$
- $\mathfrak{p}_c = \min\{\kappa : \text{existe } X \text{ compacto com } \chi(X) = \kappa \text{ e } X \text{ não é subsequencial}\}$
- $\mathfrak{p}_{cc} = \min\{\kappa : \text{existe } X \text{ enumeravelmente compacto com } \chi(X) = \kappa \text{ e } X \text{ não é subsequencial}\}$
- $\mathfrak{p}_\chi = \min\{\kappa : \text{existe } X \text{ com } \chi(X) = \kappa \text{ e } X \text{ não é subsequencial}\}.$

Veremos no teorema a seguir como esses novos cardinais se relacionam com o pequeno cardinal $\mathfrak{p}$.

Teorema 3.1.8. $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_p = \mathfrak{p}_c = \mathfrak{p}_{cc} = \mathfrak{p}_\chi$.

Demonstração. Pelo mesmo argumento utilizado na demonstração anterior temos que $\mathfrak{p}_p \geq \mathfrak{p}_c \geq \mathfrak{p}_{cc}$ é imediato. Agora $\mathfrak{p}_{cc} \geq \mathfrak{p}_\chi$ é imediato pela definição dos conjuntos da qual estamos tomando o mínimo. Resta apenas ver que $\mathfrak{p}_\chi \geq \mathfrak{p}$ e $\mathfrak{p} \geq \mathfrak{p}_p$.

Provaremos então a primeira desigualdade, para tanto fixamos $\kappa < \mathfrak{p}$ e mostraremos que $\kappa < \mathfrak{p}_\chi$. Seja X espaço topológico com $\chi(X) = \kappa$, veremos que X é subsequencial. Com efeito, fixados $N \subset X$ infinito enumerável e $x \in X$ ponto de acumulação de N , tomo $\mathcal{B}_x$ base de abertos para x tal que $|\mathcal{B}_x| \leq \kappa$. Considero $\mathcal{B}'_x = \{B \cap N : B \in \mathcal{B}_x\}$ e observo que $|\mathcal{B}'_x| \leq |\mathcal{B}_x| \leq \kappa < \mathfrak{p}$, note ainda que $\mathcal{B}'_x$ tem a SFIP pois a interseção finita de abertos é aberta e, usando T_1 e o fato de x ser ponto de acumulação, devemos ter uma quantidade infinita de elementos de N nessa interseção. Logo, usando a definição de $\mathfrak{p}$ deve existir A pseudo interseção de $\mathcal{B}'_x$. Veremos que A converge para x , de fato, dado $B \in \mathcal{B}_x$, pela definição de A como pseudo interseção temos $|A \setminus B| < \aleph_0$.

Por último veremos que $\mathfrak{p} \geq \mathfrak{p}_p$, para tanto basta ver que $2^\mathfrak{p}$ não é subsequencial. Note que isto equivale a achar um subespaço de $2^\mathfrak{p}$ que não é subsequencial pois, se um ponto de acumulação de um subconjunto do subespaço não tem sequência do subconjunto convergindo para ele no subespaço, então ele também não o terá no espaço original. Considero então $\mathcal{U} \subset [\omega]^\omega$ tal que $|\mathcal{U}| = \mathfrak{p}$, tem a SFIP, e não tem pseudo interseção, ademais podemos assumir que $\mathcal{U}$ é fechado por intersecções finitas e que $\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$, pois não afeta o tamanho do conjunto nem a não existência de

pseudointersecção, para tanto basta adicionar os cofinitos de ω e fechar o conjunto por intersecções finitas. Tomamos agora $X = \omega \cup \{\mathcal{U}\}$, de maneira que ω seja discreto e a base para $\mathcal{U}$ seja dada pelos abertos da forma $\{\mathcal{U}\} \cup U$ para $U \in \mathcal{U}$. Note que tal base de fato gera uma topologia e ela é T_1 e zero dimensional. Com efeito, pela maneira que escolhemos $\mathcal{U}$, temos que $\{\mathcal{U}\}$ pode ser separada de todo ponto de ω , uma vez que $\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$, e os pontos de ω podem ser separados dos demais uma vez que os unitários são abertos, o que nos garante que X é T_1 . Agora, para verificar que X é zero dimensional, basta notar que os unitários de ω são aberto-fechados e base para seus respectivos pontos e, para toda vizinhança aberta de $\mathcal{U}$, temos que seu complementar aberto pois é subconjunto de ω , isto é, ela é aberto-fechado. Ademais, temos que $\mathcal{U} \in \bar{\omega}$, mas não podemos ter $A \subset \omega$ convergindo para $\mathcal{U}$. Caso contrário devemos ter $|A \setminus U| < \aleph_0$ para todo $U \in \mathcal{U}$, um absurdo pois contraria a não existência da pseudo intersecção. Note ainda que $w(X) \leq \kappa < \mathfrak{p}$ por construção.

Interpretamos X como um subespaço de $2^{\mathfrak{p}}$. Mas, pelo lema 2.1.6, sabemos que, todo espaço zero dimensional, com $w(X) \leq \kappa < \mathfrak{p}$, é homeomorfo a um subespaço de $2^{\mathfrak{p}}$, concluindo assim o resultado. $\square$

De maneira análoga ao que foi visto anteriormente, temos que esse teorema nos dá um mínimo para o caráter de um espaço topológico compacto, ou enumeravelmente compacto, que não é subsequencial. Obtemos assim o seguinte corolário.

Corolário 3.1.9. *Se X é um espaço topológico compacto, ou enumeravelmente compacto, e $\chi(X) < \mathfrak{p}$ então X é subsequencial.*

Note ainda que, se X é um espaço compacto, ou enumeravelmente compacto, e subsequencial devemos ter que X é sequencialmente compacto. Com efeito, dado subconjunto infinito enumerável A de X , usamos uma das compacidade para obter um ponto de acumulação x , e depois usamos o fato de X ser subsequencial para obter um subconjunto de A que converge para x . Sendo assim obtemos um novo corolário.

Corolário 3.1.10. *Se X é um espaço topológico compacto, ou enumeravelmente compacto, e $\chi(X) < \mathfrak{p}$ então X é sequencialmente compacto.*

O teorema a seguir, de maneira semelhante aos outros acima, procura nos dar uma estimativa do tamanho de um espaço que é compacto mas não é sequencialmente compacto.

Teorema 3.1.11. *Seja X um espaço topológico. Se X é compacto mas não sequencialmente compacto, então $|X| \geq 2^{\mathfrak{t}}$.*

Demonstração. Notamos primeiramente que, para todo $A, B \subset X$, temos que $A \subset^* B$ implica $A' \subset B'$. Aqui, para todo $Y \subset X$, Y' representa o conjunto de pontos de acumulação de Y . Consideramos $N \subset X$ subconjunto infinito enumerável que testemunha que X não é sequencialmente compacto. Para todo $T \in [N]^\omega$, existem $T_0, T_1 \in [T]^\omega$ de modo que $T'_0 \cap T'_1 = \emptyset$. Com efeito, pela compacidade fixamos $x_0 \in T'$. Como X não é sequencialmente compacto deve existir uma vizinhança aberta V , de x_0 , tal que $|T \setminus V| = \aleph_0$. Tome x_1 ponto de acumulação de $T \setminus V$, usando a compacidade. Note que $x_0 \neq x_1$, logo, usando que o espaço é normal, pois é T_2 e compacto, tomamos dois abertos com fechos disjuntos que separam os dois pontos, U_0 e U_1 . Sendo assim $T_i = T \cap U_i$ é como desejado.

Tome então $T_\emptyset = N$ e suponha construídos $T_f \subset N$, para todo $f \in 2^{<\alpha}$ com $\alpha < \mathfrak{t}$, satisfazendo as seguintes condições:

- (1) para todo $f, g \in 2^{<\alpha}$ temos que $f \leq g$ implica $T_f \supset^* T_g$;

(2) para todo $f, g \in 2^{<\alpha}$ temos que, se f é incompatível com g , então $T'_f \cap T'_g = \emptyset$.

Para construir T_g para $g \in 2^\alpha$ trabalharemos em dois casos. Caso $\alpha = \gamma + 1$ seja sucessor, colocamos $T = T_{g|_\gamma}$ e o dividimos como no resultado acima colocando $T_0 = T_{g|_\gamma \cup \{(\gamma, 0)\}}$ e $T_1 = T_{g|_\gamma \cup \{(\gamma, 1)\}}$, definindo assim T_g como desejado. Com efeito, $T_{g|_\gamma} \supset T_g$ logo (1) é válido. Para verificar (2) basta notar que caso f e g sejam incompatíveis então deve existir $\xi < \alpha$ menor ordinal tal que $f(\xi) \neq g(\xi)$, logo, caso $\xi < \gamma$, temos $T_{f|_{\xi+1}} \supset^* T_f$ e $T_{g|_{\xi+1}} \supset^* T_g$ donde $T'_f \cap T'_g \subset T'_{f|_{\xi+1}} \cap T'_{g|_{\xi+1}} = \emptyset$ por (2); agora, caso $\xi = \gamma$, temos que os conjuntos dos pontos de acumulação que desejamos comparar são T_0 e T_1 como acima e, portanto, são disjuntos.

Consideramos agora o caso em que α é limite e defino T_g como sendo uma pseudo interseção de $\{T_{g|_\xi} : \xi < \alpha\}$, note que isso é possível pois $\alpha < \mathfrak{t}$. Agora temos que (1) é válido por construção e (2) é válido pois dados f e g incompatíveis deve existir $\xi < \alpha$ tal que $f|_{\xi+1}$ e $g|_{\xi+1}$ sejam incompatíveis, logo $T'_f \cap T'_g \subset T'_{f|_{\xi+1}} \cap T'_{g|_{\xi+1}} = \emptyset$ pela observação inicial e por (2) aplicado para $2^{\xi+1}$.

Note agora que, para todo $h \in 2^{\mathfrak{t}}$ temos que $\{T'_{h|_\xi} : \xi < \mathfrak{t}\}$ é uma família de fechados, e portanto compactos, encaixante, sendo assim, como X é compacto, temos que existe $x_h \in \bigcap \{T'_{h|_\xi} : \xi < \mathfrak{t}\}$. Observamos por fim que, dados $f, g \in 2^{\mathfrak{t}}$ diferentes então, por (2), devemos ter que $x_f \neq x_g$, e portanto, $|X| \geq |\{x_h : h \in 2^{\mathfrak{t}}\}| = 2^{\mathfrak{t}}$. □

Todos teoremas e corolários que exploramos nessa seção tiveram como propósito fornecer alguma estimativa sobre como as funções cardinais se comportam quando exigimos diferentes formas de compacidade. Mas, além disso, conseguimos descrever os pequenos cardinais clássicos em função de condições topológicas. Tais descrições são muito úteis, uma vez que elas nos permitem observar os pequenos cardinais sob outra perspectiva, possibilitando novas interpretações e resultados.

3.2 Pequenos cardinais e produtividade

Na seção anterior nós analisamos como diferentes formas de compacidade se relacionam num mesmo espaço topológico, além da importância dos pequenos cardinais e das funções cardinais. Agora vamos analisar o que acontece com essas propriedades quando fazemos o produto de espaços topológicos. Nossa motivação vem do seguinte teorema.

Teorema 3.2.1 (Teorema de Tychonoff). *O produto de qualquer número de espaços topológicos compactos é um espaço topológico compacto.*

Tal resultado nos motiva a perguntar: o mesmo acontece com as outras formas de compacidade? E, caso a resposta seja negativa, que tipo de controle podemos ter sobre esse produto? A resposta para a primeira pergunta é não e o exemplo que faremos para ilustrar tal resposta é o mais simples possível. Construiremos dois espaços enumeravelmente compactos, e a compacidade enumerável não é mantida no produto.

Aqui trabalharemos com $\beta\omega$, isto é, a compactificação de Stone-Cech dos naturais. O teorema a seguir nos dá uma ideia de como alguns subespaços se comportam dependendo da exigência que fazemos sobre eles.

Teorema 3.2.2. *Se $F \subset \beta\omega$ é fechado tal que $|F| \geq \aleph_0$, então existe $S \subset F$ subsespaço homeomorfo à $\beta\omega$. Em particular, temos que $|F| = |\beta\omega| = 2^{\mathfrak{c}}$ e $\mathfrak{w}(F) = \mathfrak{c}$.*

Demonstração. Fixe F como no enunciado. Como $\beta\omega$ é compacto e F é fechado, temos que existe $x \in F \subset \beta\omega$ ponto de acumulação de F . Tomamos então, por recursão, pontos $x_i \in F$ e abertos disjuntos U_i, V_i de $\beta\omega$ para todo $i \in \omega$ de maneira que:

- (1) Para todo $i \in \omega$, $x_i \in V_i$;
- (2) Para todo $i \in \omega$, $x \in U_i$;
- (3) Para todo $i, j \in \omega$, se $i \neq j$, então $V_i \cap V_j = \emptyset$;
- (4) Para todo $i, j \in \omega$, se $i < j$, então $U_i \supset U_j$.

Para o caso inicial basta tomar $x_0 \in F$ tal que $x_0 \neq x$ e, como $\beta\omega$ é T_2 , existem abertos disjuntos U_0 e V_0 tais que $x_0 \in V_0$ e $x \in U_0$; note que não precisamos verificar as propriedades (3) e (4) ainda. Supomos então que, fixado $n \in \omega$, a construção esteja feita para todo $i < n$. Nessa situação usamos que x é ponto de acumulação de F para tomar $x_n \in F \cap (U_{n-1} \setminus \{x\})$. Agora, assim como acima, tomamos abertos disjuntos U e V tais que $x_n \in V$ e $x \in U$ e definimos $U_n = U \cap U_{n-1}$ e $V_n = V \cap U_{n-1}$. Segue, portanto, que (1), (2) e (4) são imediatos da construção e, para verificar (3), basta notar que, dado $i < j$, por (4), $V_j \subset U_{j-1} \subset U_i$, donde V_j é disjunto de V_i .

Denotamos $A = \{x_i : i \in \omega\} \subset \beta\omega$ subespaço, e consideramos $g : A \rightarrow [0, 1]$ qualquer. Agora, como A é discreto em $\beta\omega$ por construção, temos que g é uma função contínua. Definimos então $g_0 : \omega \rightarrow [0, 1]$ por

$$g_0(n) = \begin{cases} g(x_i) & \text{se } n \in V_i; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Novamente, vendo ω como subespaço de $\beta\omega$, temos que g_0 é contínua pois ω é discreto. Usamos então a caracterização da compactificação de Stone-Cech para tomar $G_0 : \beta\omega \rightarrow [0, 1]$ extensão contínua de g_0 . Dessa forma, temos que, para cada $i \in \omega$, $G_0|_{\overline{V_i}} : \overline{V_i} \rightarrow [0, 1]$ é contínua e, como $\omega \cap V_i$ é denso em V_i (pois ω é denso em $\beta\omega$, V_i é aberto, e $[0, 1]$ é T_2), segue que $G_0|_{\overline{V_i}}$ está unicamente determinada pelos valores em $\omega \cap V_i$. Agora a função constante igual à $g(x_i)$ em $\overline{V_i}$ é contínua, e coincide com os valores de $G_0|_{\overline{V_i}}$ no denso. Segue então que $G_0|_{\overline{V_i}} = g(x_i)$, donde, $G_0|_A = g$ e, $G_0|_{\overline{A}}$ é extensão contínua de g . Sabemos que $\overline{A}$ é compacto e mostramos que toda função de A em $[0, 1]$ possui extensão contínua para $\overline{A}$. Por uma caracterização da compactificação de Stone-Cech, devemos ter que $\overline{A}$ é isomorfo à compactificação de Stone-Cech de A . Ademais, como A é isomorfo a ω , temos que $\overline{A}$ é isomorfo a $\beta\omega$ e $\overline{A} \subset F$.

Por fim, temos que $2^{\mathfrak{c}} = |\overline{A}| \leq |F| \leq |\beta\omega| = 2^{\mathfrak{c}}$, isto é, $|F| = 2^{\mathfrak{c}}$. Ademais, como a função cardinal peso é hereditária, isto é, dados espaços topológicos $Y \subset X$ então $w(Y) \leq w(X)$, temos que $\mathfrak{c} = w(\overline{A}) \leq w(F) \leq w(\beta\omega) = \mathfrak{c}$. □

Agora começaremos, de fato, a construir nosso contra-exemplo, que envolve construir dois subespaços de $\beta\omega$. Para tanto trabalharmos com a diagonal dos elementos de ω em $\beta\omega$, tentando transformá-la em um aberto-fechado do produto de subespaços.

Exemplo 3.2.3. *Existem dois subespaços de $\beta\omega$, X e Y de maneira que eles sejam enumeravelmente compactos, $X \cap Y = \omega$, $X \cup Y = \beta\omega$, e $X \times Y \subset \beta\omega \times \beta\omega$ não é enumeravelmente compacto.*

Com efeito, como $\beta\omega$ é compacto, podemos tomar, para cada $A \in [\beta\omega]^\omega$, um ponto de acumulação de A dado por x_A . Considero agora a seguinte função $f : [\beta\omega]^\omega \rightarrow \beta\omega$ dada por, para cada $A \in [\beta\omega]^\omega$, $f(A) = x_A$. Definimos então, recursivamente, conjuntos X_α , para todo $\alpha < \omega_1$, da seguinte forma:

$$X_0 = \omega$$

e, supondo definidos X_ξ para todo $\xi < \alpha$ tomamos

$$X_\alpha = \left(\bigcup_{\xi < \alpha} X_\xi \right) \cup f \left[\left[\bigcup_{\xi < \alpha} X_\xi \right]^\omega \right].$$

Observe que os conjuntos X_α , pela maneira como foram construídos, são crescentes, isto é, se $\beta < \alpha < \omega_1$, então $X_\beta \subset X_\alpha$.

Agora tomamos $X = \bigcup_{\alpha < \omega_1} X_\alpha$. Note que, dado $B \in [X]^\omega$, temos que, como B é enumerável, o conjunto dos índices onde cada elemento de B aparece primeiro é limitado em ω_1 ; isso e o fato dos conjuntos X_α serem crescentes nos dão que existe $\gamma < \omega_1$ tal que $B \subset X_\gamma$. Agora, pela construção, deve existir ponto de acumulação de B em $X_{\gamma+1}$ e, portanto, em X , comprovando que X é enumeravelmente compacto. Veremos agora, por indução transfinita, que, para todo $\alpha < \omega_1$, $|X_\alpha| \leq \mathfrak{c}$, e, portanto $|X| \leq \aleph_1 \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$. O caso inicial é imediato, fixamos então $\alpha < \omega_1$, e supomos que, para todo $\gamma < \alpha$, $|X_\gamma| \leq \mathfrak{c}$. Segue que, como,

$$\left| \bigcup_{\xi < \alpha} X_\xi \right| \leq |\alpha| \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c},$$

então

$$\left| \left[\bigcup_{\xi < \alpha} X_\xi \right]^\omega \right| \leq \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

e, portanto,

$$|X_\alpha| = \left| \left(\bigcup_{\xi < \alpha} X_\xi \right) \cup f \left[\left[\bigcup_{\xi < \alpha} X_\xi \right]^\omega \right] \right| \leq \mathfrak{c}.$$

Definimos $Y = \omega \cup (\beta\omega \setminus X)$. Note que, pela proposição anterior, para todo $A \in [Y]^\omega$, temos que $|\overline{A}| = 2^{\mathfrak{c}}$ e, usando a desigualdade acima, temos que $|\overline{A} \setminus (X \cup A)| = 2^{\mathfrak{c}}$. Logo existe um ponto de acumulação de A que não está em X , e, portanto, está em Y , isto é, Y é enumeravelmente compacto.

Os conjuntos X e Y tomados dessa maneira satisfazem as duas primeiras condições, resta ver que $X \times Y$ não é enumeravelmente compacto. Para tanto consideramos $\Delta \subset \beta\omega \times \beta\omega$ a diagonal do produto e $\Delta_0 = \Delta \cap X \times Y$, então, como $X \cap Y = \omega$, temos que $\Delta_0 = \{\langle n, n \rangle : n \in \omega\}$. Agora, como $\{n\} \subset \beta\omega$ é aberto em $\beta\omega$, temos que Δ_0 é um aberto discreto de $X \times Y$, ademais, como $\beta\omega$ é T_2 , temos que Δ é fechado no produto e, portanto, Δ_0 é aberto-fechado discreto em $X \times Y$, isto é, não tem ponto de acumulação, o que prova que $X \times Y$ não é enumeravelmente compacto.

Note que esse exemplo levanta algumas questões sobre como os tipos de compacidade se comportam com relação aos produtos. Pelo que foi visto o produto de espaços enumeravelmente compactos não precisa ser enumeravelmente compacto, isso não acontece nem com o produto de dois espaços. Ao contrário, temos que qualquer produto de compactos é um espaço compacto, o que deveria acontecer então com os espaços sequencialmente compactos?

Temos uma estimativa para essa pergunta no artigo [23], onde vemos que o produto de até ω_1 espaços sequencialmente compactos é enumeravelmente compacto. O teorema a seguir é um resultado, já conhecido, e pode ser visto em [27]. Com ele melhoramos a estimativa anterior sobre a produtividade dos sequencialmente compactos usando o pequeno cardinal $\mathfrak{t}$.

Teorema 3.2.4. (a) *Se $\alpha < \mathfrak{t}$, então o produto de α espaços topológicos sequencialmente compactos é um espaço topológico sequencialmente compacto.*

(b) Se $\alpha \leq \mathfrak{t}$, então o produto de α espaços topológicos sequencialmente compactos é um espaço topológico enumeravelmente compacto.

Demonstração. Para demonstrar os itens acima fixamos X_η espaço topológico sequencialmente compactos qualquer para todo $\eta < \mathfrak{t}$ e, P_η denota as projeções do produto referido em X_η .

Começamos a verificação para (a) tomando $\alpha < \mathfrak{t}$ e $X = \prod_{\eta < \alpha} X_\eta$. Consideramos $N \subset X$ infinito enumerável, verificaremos que existe um subconjunto $S \subset N$ e um elemento $x \in X$ tais que S converge para x . Temos agora que $|P_0[N]| \leq \aleph_0$, caso $P_0[N]$ seja finito então existem $x_0 \in X_0$ e $N_0 \subset N$ infinito tais que $P_0[N_0] = \{x_0\}$. Caso $P_0[N]$ seja infinito, pela compacidade sequencial, tomamos x_0 ponto de acumulação em $P_0[N]$ e $S_0 \subset P_0[N]$ tais que S_0 converge para x_0 . Defino, por fim, N_0 tomando, para cada elemento de S_0 , apenas um elemento de sua pré-imagem. Supondo construídos N_η para todo $\eta < \xi$ de maneira que, dados $\beta < \gamma < \xi$, temos $N_\beta \supset^* N_\gamma$. Definimos N_ξ da seguinte maneira:

Caso ξ seja sucessor, repetimos a construção de N_0 acima para obter x_ξ e N_ξ substituindo N por $N_{\xi-1}$.

Caso ξ seja limite, novamente repetimos a construção de N_0 , mas, dessa vez substituímos N por uma pseudo interseção de $\{N_\eta : \eta < \xi\}$ que existe pois $\xi < \alpha < \mathfrak{t}$.

Note que a construção dessa maneira preserva a estrutura de boa ordem com $\supset^*$. Sendo assim podemos tomar $S \subset N$ pseudo interseção de $\{N_\eta : \eta < \alpha\}$ pois $\alpha < \mathfrak{t}$. Veremos, por fim, que S converge para $x = (x_\xi)_{\xi < \alpha} \in X$. De fato, tomamos aberto básico V vizinhança de x tal que $V = \prod_{\eta < \alpha} V_\eta$ onde, apenas para $\eta_1 < \dots < \eta_n$, $V_{\eta_i} \subset X_{\eta_i}$ é aberto diferente do espaço todo. Agora, para cada η_i , temos que, por construção, $P_{\eta_i}[N_{\eta_i}] \subset^* V_{\eta_i}$, donde $P_{\eta_i}[S] \subset^* P_{\eta_i}[N_{\eta_i}] \subset^* V_{\eta_i}$, isto é, para cada $1 \leq i \leq n$ apenas um número finito de elementos $J_i \subset S$ não tem $\eta - i$ -ésima coordenada em V_{η_i} . Segue daí então que apenas um número finito de elementos de S , a união dos conjuntos J_i para $1 \leq i \leq n$, não está em V .

Para fazer a verificação de (b) tomamos $\alpha = \mathfrak{t}$ e, usando a notação de (a), repetimos a construção dos pontos $x_\eta \in X_\eta$ e conjuntos N_η para $\eta < \alpha$. Note que agora não podemos tomar a pseudo interseção S que usamos na demonstração anterior. Fixamos aberto básico $V = \prod_{\eta < \alpha} V_\eta$, vizinhança de $x = (x_\eta)_{\eta < \alpha} \in X$ e consideramos $M_{\eta_i} = \{y \in N_{\eta_i} : P_{\eta_i}(y) \in V_{\eta_i}\}$. Agora temos que o conjunto M_{η_i} é cofinito em N_{η_i} pelo fato de que V_{η_i} é aberto contendo x_{η_i} , e pela maneira como N_{η_i} foi tomado. Sendo assim, temos que $\bigcap_{i=1}^n M_{\eta_i} = M_{\eta_n} \setminus F \subset V$ é infinito, para algum $F \subset N$ finito. $\square$

Capítulo 4

O Problema de Scarborough-Stone

No capítulo anterior estudamos alguns aspectos dos espaços compactos, enumeravelmente compactos, sequencialmente compactos e subsequenciais. Estudamos tanto como estas propriedades se relacionam usando funções cardinais e pequenos cardinais, até como elas se comportam quando fazemos seus produtos. O Teorema 3.2.4, da seção anterior, é interessante, e apresenta um contraste com as propriedades produtivas da compacidade e compacidade enumerável. Tal propriedade nos instiga a levantar a próxima pergunta, que possui algumas variantes ainda em aberto, e é conhecida como o Problema de Scarborough-Stone. Tal problema fez sua primeira aparição em um artigo [23], de 1966, escrito por C. T. Scarborough e A. H. Stone e é descrito da seguinte forma:

(SSt 1) : Deve todo produto de espaços topológicos sequencialmente compactos ser enumeravelmente compacto?

Sabemos que a resposta dessa pergunta é não, pois, no artigo [20], de Peter J. Nyikos e Jerry E. Vaughan, temos uma resposta negativa para espaços topológicos T_2 . Estudamos então, na primeira seção desse capítulo, uma equivalência para a existência de um exemplo negativo para **(SSt 1)**. Depois desse resultado estudamos resultados relacionados à bases fracas e construímos um dos contra-exemplos feitos no artigo anterior, elaborando alguns tópicos de Ψ -espaços.

Na segunda seção do capítulo enunciaremos novamente o problema de Scarborough-Stone porém exigindo um pouco mais dos axiomas de separação dos espaços que compõe o produto. Nesse capítulo também será estudado um resultado parcial, mais especificamente, o fato de que, sob MA e a negação de CH, qualquer produto de espaços sequencialmente compactos T_6 é enumeravelmente compacto. Tal resultado é uma combinação de resultados anteriores e foi estudada em [29].

4.1 Ψ -espaços e a resposta negativa

Nessa seção estudaremos um dos exemplos feitos no artigo [20]. Para tanto, demonstraremos uma equivalência entre o produto de espaços topológicos ser enumeravelmente compacto e o conceito de p -limites para $p \in \omega^*$. Tal resultado foi estudado pelo artigo [28] e é central para o resto da dissertação. Depois estudamos algumas propriedades topológicas relacionadas com o conceito de base fraca. Por fim desenvolvemos o conceito de Ψ -espaços e Ψ -sistemas para construir um contra-exemplo para **(SSt 1)**.

Teorema 4.1.1. *Dados cardinal κ e espaços topológicos X_α , $\alpha < \kappa$, temos que $X = \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ não é enumeravelmente compacto se, e somente se, existe um conjunto $\{\langle X_\alpha, s_\alpha \rangle : \alpha < \kappa\}$, onde s_α é uma sequência em X_α de modo que, para todo $p \in \omega^*$, exista $\beta < \kappa$ tal que s_β não tem p -limite em X_β .*

Demonstração. Verificaremos a ida por contrapositiva. Fixe $A = \{x_n : n \in \omega\}$ subconjunto enumerável de X e sua enumeração (sem repetições), deve então existir $p \in \omega^*$ tal que, para todo $\beta < \kappa$ e toda s_β sequência em X_β , s_β tem p -limite em X_β .

Denote agora, para cada $\alpha < \kappa$, por $x^\alpha \in X_\alpha$ o p -limite da sequência $\langle x_n^\alpha : n \in \omega \rangle$ dada pela projeção da sequência $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ em X_α . Agora definindo $x = (x^\alpha)_{\alpha < \kappa}$ temos que x é ponto de acumulação de A . Com efeito, sejam $V = \prod_{\alpha < \kappa} V_\alpha$ aberto básico de X com $x \in V$, e $\alpha_1, \dots, \alpha_n < \kappa$ tais que, V_α é aberto diferente de X_α se, e somente se, $\alpha = \alpha_i$ para algum $1 \leq i \leq n$. Nessas condições, como $x^{\alpha_i} \in V_{\alpha_i}$ temos que $I_i = \{n \in \omega : x_n^\alpha \in V_{\alpha_i}\} \in p$ e, portanto, $I = \bigcap_{1 \leq i \leq n} I_i \in p$. Assim $I \subset \{n \in \omega : x_n \in V\} \in p$, isto é, $|V \cap A| = \omega$.

Verificaremos agora a volta. Como existe um conjunto $\{\langle X_\alpha, s_\alpha \rangle : \alpha < \kappa\}$, como no enunciado, definimos $A = \{x_n : n \in \omega\}$, onde $x_n = (s_\alpha(n))_{\alpha < \kappa}$. Observe que $|A| = \omega$ pois, caso contrário, temos que existe $I \subset \omega$ infinito tal que, para todo $\alpha < \kappa$, $\{s_\alpha(n) : n \in I\} = \{a^\alpha\}$ donde, dado $p \in \omega^*$ tal que $I \in p$ temos que a^α é p -limite de s_α , contrariando a maneira como tomamos o conjunto inicial de pares. Verificamos agora, por absurdo, que tal A não tem ponto de acumulação.

Suponha que $x = (x^\alpha)_{\alpha < \kappa}$ seja ponto de acumulação de A e, dado V vizinhança aberta básica de x em X , considere $I_V = \{n \in \omega : x_n \in V\}$.

Note que, como x é ponto de acumulação e interseção finita de vizinhanças abertas é vizinhança aberta, então $\mathcal{I} = \{I_V : V \text{ é vizinhança aberta básica de } x\}$ tem a propriedade da interseção finita. Tomamos, então, p ultrafiltro que estende $\mathcal{I}$. Note ainda que, como X é T_2 , temos que $\bigcap p = \emptyset$, isto é, $p \in \omega^*$. Veja agora que, fixado α , para toda V_α vizinhança aberta básica de x^α , temos $\{n \in \omega : s_\alpha(n) \in V_\alpha\} = I_{q_\alpha^{-1}[V_\alpha]} \in p$, onde q_α é a α -ésima projeção, logo s_α tem p -limite, novamente contrariando a maneira como tomamos o conjunto inicial de pares. □

Definição 4.1.2. Nas condições do teorema 4.1.1 dizemos que o conjunto $\{\langle X_\alpha, s_\alpha \rangle : \alpha < \kappa\}$ é uma *SS-família*.

Agora definimos o conceito de base fraca e trabalhamos com algumas propriedades resultantes. Tal generalização é importante pois nos permite trabalhar com mais facilidade sobre as condições exigidas para a construção do contra-exemplo.

Definição 4.1.3. Fixados X um espaço topológico e, para cada $x \in X$, um conjunto $\mathcal{B}(x)$ tal que, para todo $B \in \mathcal{B}(x)$, temos $B \subset X$ e $x \in B$. Dizemos que $\mathcal{B} = \bigcup \{\mathcal{B}(x) : x \in X\}$ é uma base fraca se ela satisfaz as seguintes condições:

- (1) para todos $x \in X$ e $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(x)$, existe $B_3 \in \mathcal{B}(x)$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$;
- (2) para todo $U \subset X$, U é aberto se, e somente se, para todo $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}(x)$ tal que $B \subset U$.

Note que a base fraca enfraquece as exigências de uma base de abertos, não exigindo que seus elementos sejam abertos. Uma outra maneira de imaginar a base fraca é tomar cada elemento $\mathcal{B}(x)$ como sendo um refinamento para a base local de x . Sendo assim, definiremos algumas reinterpretções de propriedades topológicas usando bases fracas.

Definição 4.1.4. Dizemos que um espaço topológico X é:

- (i) fracamente localmente enumerável se, e somente se, existe uma base fraca dada por $\mathcal{B} = \bigcup \{\mathcal{B}(x) : x \in X\}$ tal que, para todo $x \in X$, existe $B \in \mathcal{B}(x)$ enumerável;

- (ii) fracamente T_2 se, e somente se, existe uma base fraca dada por $\mathcal{B} = \bigcup\{\mathcal{B}(x) : x \in X\}$ tal que, para todos $x, y \in X$ diferentes, existem $B_x \in \mathcal{B}(x)$ e $B_y \in \mathcal{B}(y)$ tais que $B_x \cap B_y = \emptyset$;
- (iii) fracamente T_3 se, e somente se, existe uma base fraca dada por $\mathcal{B} = \bigcup\{\mathcal{B}(x) : x \in X\}$ tal que, ela é fracamente T_2 e todo $B \in \mathcal{B}$ é fechado em X ;
- (iv) fracamente primeiro enumerável se, e somente se, existe uma base fraca dada por $\mathcal{B} = \bigcup\{\mathcal{B}(x) : x \in X\}$ tal que, para todo $x \in X$, o conjunto $\mathcal{B}(x)$ é enumerável.

O próximo lema relaciona as propriedades fracamente localmente enumerável e localmente enumerável. Por espaço topológico localmente enumerável queremos dizer que, para qualquer ponto do espaço, existe uma vizinhança desse ponto que é enumerável.

Lema 4.1.5. *Todo espaço topológico fracamente localmente enumerável é localmente enumerável.*

Demonstração. Consideramos, para todo $x \in X$, usando a hipótese, $B_0(x) \in \mathcal{B}(x)$ que é enumerável. Supomos definidos, para todo $x \in X$, o conjunto $B_n(x) \subset X$, para algum $n \in \omega$. Definimos $B_{n+1}(x) = \bigcup\{B_n(y) : y \in B_n(x)\}$. Note que, por indução, para todo $n \in \omega$, os conjuntos $B_n(x)$ são uniões enumeráveis de conjuntos enumeráveis e, portanto, é enumerável. Defino por fim, para todo $x \in X$, $W(x) = \bigcup\{B_n(x) : n \in \omega\}$. Temos que $W(x)$ é enumerável, resta ver que ele é aberto. Com efeito, para todo $y \in W(x)$, temos que existe $n \in \omega$ tal que $y \in B_n(x)$. Segue então que, por construção, $B_0(y) \subset B_n(y) \subset B_{n+1}(x) \subset W(x)$. Concluimos que, para todo $y \in W(x)$ existe $B \in \mathcal{B}(y)$ tal que $B \subset W(x)$, isto é, $W(x)$ é aberto. □

O seguinte teorema nos garante uma relação entre fracamente T_3 e a propriedade T_3 .

Teorema 4.1.6. *Se X é um espaço topológico enumerável e fracamente T_3 , então X é T_3 .*

Demonstração. Fixamos $\mathcal{B} = \bigcup\{\mathcal{B}(x) : x \in X\}$ uma base fraca para X que comprova que ele é fracamente T_3 . Consideramos $f : \omega \rightarrow X$ função sobrejetora na qual cada elemento de X aparece infinitas vezes. Provaremos que X é T_4 e, portanto, T_3 . Com efeito, dados H e F fechados disjuntos consideramos $H_0 = H$ e $F_0 = F$. Supondo definidos H_n e F_n fechados disjuntos. Caso $f(n) \in H_n$, tomamos $B_n \in \mathcal{B}(f(n))$ aberto em X tal que $B_n \subset X \setminus K_n$. Definimos então $K_{n+1} = K_n$ e $H_{n+1} = H_n \cup B_n$. Caso $f(n) \in K_n$, tomamos $B_n \in \mathcal{B}(f(n))$ aberto em X tal que $B_n \subset X \setminus H_n$. Definimos então $H_{n+1} = H_n$ e $K_{n+1} = K_n \cup B_n$. Por fim, caso $f(n)$ não esteja em nenhum dos fechados tomamos $H_{n+1} = H_n$ e $K_{n+1} = K_n$. Note que, pela maneira como definimos a base fraca, em todos os casos, tanto H_{n+1} quanto K_{n+1} são fechados, além de serem disjuntos por construção. Consideramos agora

$$U = \bigcap\{H_n : n \in \omega\} \text{ e } W = \bigcap\{K_n : n \in \omega\}.$$

Note que U e W são disjuntos. Caso contrário, sem perda de generalidade, existiriam $n \leq m$ tais que $H_n \cap K_m \neq \emptyset$, donde, como $H_n \subset H_m$, $H_m \cap K_m \neq \emptyset$, um absurdo. Agora veremos que U e W são abertos. Faremos essa verificação apenas para U pois o caso W é análogo. Com efeito, dado $x \in U$ existe $n \in \omega$ tal que $x \in H_n$. Pela maneira como tomamos f temos $k > n$ de modo $f(k) = x$. Existe então $B_k \subset H_{k+1} \subset U$ tal que $B_k \in \mathcal{B}(x)$, comprovando que U é aberto.

Por fim observamos que X é T_1 e, portanto, X é T_4 e, em particular, T_3 . De fato, fixado $x \in X$, como X é fracamente T_3 temos que, para todo $y \in X$, se $y \neq x$, então existem dois fechados disjuntos da base fraca separando x e y . Considerando a interseção dos fechados contendo x para todo y . Tal interseção é o unitário de x e é fechada. □

A definição a seguir se desenvolveu no contexto do estudo da metrizabilidade de espaços de Moore. Nessa seção, porém, usaremos ela com o propósito de manter uma dada propriedade para os passos recursivos da construção.

Definição 4.1.7. *Um espaço topológico é dito ω -collectionwise Hausdorff (ω -cw Hausdorff) se, e somente se, para todo $H \subset X$ fechado discreto enumerável, existe uma família de abertos dois a dois disjuntos $\{U_x : x \in H\}$ de modo que, para todo $x \in H$, $x \in U_x$.*

O lema e o corolário a seguir nos servem para conectar as definições usando a base fraca e a propriedade ω -cw Hausdorff.

Lema 4.1.8. *Todo espaço topológico T_3 é ω -cw Hausdorff.*

Demonstração. Fixamos X espaço topológico T_3 e $H = \{x_n : n \in \omega\} \subset X$ fechado discreto enumerável. Agora, como H é discreto e o espaço é T_3 , existe U_0 aberto de X tal que $\overline{U_0} \cap H = \{x_0\}$. Supomos construídos, para todo $i < n$, abertos U_i de maneira que seus fechos sejam dois a dois disjuntos e, $\overline{U_i} \cap H = \{x_i\}$. Considero, como anteriormente, V_n aberto tal que $\overline{V_n} \cap H = \{x_n\}$. Como $\bigcup\{\overline{U_i} : i < n\}$ é fechado, e o espaço é T_3 , existe aberto W tal que $x_n \in W$ e $\overline{W} \cap \bigcup\{\overline{U_i} : i < n\} = \emptyset$. Tomamos $U_n = V_n \cap W$, donde $\overline{U_n}$ é disjunto dos fechos anteriores e intersecta H apenas em x_n . Construímos assim indutivamente a família desejada. □

Corolário 4.1.9. *Todo espaço topológico fracamente localmente enumerável e fracamente T_3 é ω -cw Hausdorff e, em particular, T_2 .*

Demonstração. Fixamos, com a mesma notação anterior, X espaço topológico fracamente localmente enumerável e fracamente T_3 e $H = \{x_n : n \in \omega\} \subset X$ fechado discreto enumerável. Pelo lema 4.1.5 temos que, para cada ponto de H , existe um aberto enumerável contendo tal ponto. Sendo assim, tomando W como a união dessas vizinhanças, temos que W é enumerável e $H \subset W$. Para cada $x \in W$ definimos

$$\mathcal{B}_W(x) = \{B \in \mathcal{B}(x) : B \subset W\}.$$

Note que $\mathcal{B}_W = \bigcup\{\mathcal{B}_W(x) : x \in W\}$ é uma base fraca para a topologia de subespaço de W . Com efeito, fixados $x \in W$ e $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_W(x)$ existe $B_3 \in \mathcal{B}(x)$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset W$, donde, $B_3 \in \mathcal{B}_W(x)$. Agora, dado $U \subset W$ aberto em W , como W é aberto em X temos que U é aberto em X . Sendo assim, para todo $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}(x)$ tal que $B \subset U \subset W$, donde, $B \in \mathcal{B}_W(x)$.

Agora, usando essa observação, temos que W é fracamente T_3 . De fato, os elementos dessa base fraca são todos fechados pois eles estão contidos em W e são fechados em X . Fixamos agora $x \neq y$ elementos de W . Como X é fracamente T_2 , existem $B_x \in \mathcal{B}(x)$ e $B_y \in \mathcal{B}(y)$ disjuntos. Consideramos $U_x, U_y \in \mathcal{B}_W$ contendo x e y respectivamente. Usando as propriedades da base fraca, existem elementos de $\mathcal{B}$, V_x e V_y tais que $V_x \subset B_x \cap U_x \subset W$ e $V_y \subset B_y \cap U_y \subset W$. Sendo assim, $V_x, V_y \in \mathcal{B}_W$ e separam os pontos x e y . Pelo teorema 4.1.6 temos que W é um espaço T_3 , e, pelo lema 4.1.8, W é ω -cw Hausdorff. Temos que H é fechado discreto enumerável em W . Usando ω -cw Hausdorff em W e o fato de W ser aberto, achamos a família de abertos dois a dois disjuntos de X que procuramos.

Para verificar que X é T_2 basta repetir essa demonstração mas tomando H sendo apenas os dois pontos que queremos separar. Por fim, como W é T_3 , temos que ele é T_2 , donde obtemos os abertos desejados. □

O seguinte lema faz uma conexão entre algumas propriedades de uma base fraca e o fato de um espaço topológico ser fracamente primeiro enumerável. Outro aspecto importante desse teorema é

o fato de que a generalização da primeiro enumerabilidade para a primeiro enumerabilidade fraca não deixa de tornar o espaço sequencial. Tal fato é um aspecto importante para construções de contra-exemplos usando bases fracas.

Lema 4.1.10. *Todo espaço topológico com uma base fraca de elementos compactos enumeráveis e, enquanto subespaços, T_2 é fracamente primeiro enumerável e, portanto, sequencial.*

Demonstração. Sejam X espaço topológico e $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}(x) : x \in X\}$ base fraca de X , ambos como no enunciado. Fixado $x \in X$ existe $B_x \in \mathcal{B}(x)$ compacto enumerável T_2 . Veremos que, B_x é segundo enumerável. Note que, como B_x é enumerável, só precisamos ver que cada ponto tem uma base enumerável. Tomamos, para todo $y \neq x$, usando T_2 , abertos disjuntos U_y, V_y com $x \in U_y$ e $y \in V_y$. Veremos que $\{\bigcap_{y \in F} U_y : F \in [B \setminus \{x\}]^{<\omega}\}$, que é enumerável, é base para x . Com efeito, dado W vizinhança aberta de x temos que $B \setminus W$ é fechado e, portanto, compacto. Como $x \notin B \setminus W$, temos que $\{V_y : y \in B \setminus \{x\}\}$ é cobertura para esse compacto. Existem $y_1, \dots, y_n$ representando uma subcobertura $\{V_{y_1}, \dots, V_{y_n}\}$. Segue que o aberto $\bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$ está no conjunto e está contido em W .

Tomamos então, para cada $x \in X$, uma base enumerável para x em B_x dada por $\mathcal{V}(x) = \{V_{n,x} : n \in \omega\}$. Tomamos, indutivamente, para cada $n \in \omega$, um elemento de $A_{n,x} \in \mathcal{B}(x)$ tal que $A_{n,x} \subset V_{n,x}$ e, para todo $i < n$, $A_{n,x} \subset A_{i,x}$. Agora, definindo $\mathcal{B}'(x) = \{A_{n,x} : n \in \omega\}$, temos que $\mathcal{B}' = \bigcup \{\mathcal{B}'(x) : x \in X\}$ é base fraca para X . A propriedade da interseção segue da construção. Agora, dado $U \subset X$, temos que se, para todo $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}'(x)$ tal que $B \subset U$, então, como $\mathcal{B}'(x) \subset \mathcal{B}(x)$, U é aberto. De maneira análoga, caso U é aberto em X , para cada $x \in U$, temos que $U \cap B_x$ é aberto de B_x contendo x . Pela maneira como foi construído existe $B \in \mathcal{B}'(x)$ tal que $B \subset U \cap B_x$, como desejado.

Note agora que X é fracamente primeiro enumerável. Veremos então que X é sequencial. Para tanto fixamos $F \subset X$ conjunto sequencialmente fechado e $x \notin F$. Note que deve existir vizinhança fraca $A_{k,x}$ tal que $A_{k,x} \cap F = \emptyset$. Caso contrário, tomamos $x_n \in F \cap A_{n,x}$ para todo $n \in \omega$. Temos assim que x_n converge para x pela maneira como construímos os elementos $A_{n,x}$ da base fraca. Segue daí que $X \setminus F$ é aberto pela propriedade da base fraca, donde, F é fechado. $\square$

Finalmente definimos Ψ -espaços sobre espaços topológicos. Para tanto usaremos uma família quasi-disjunta de subconjuntos do espaço topológico para motivar a construção.

Definição 4.1.11. *Sejam $\langle X, \tau \rangle$ um espaço topológico e $\mathcal{A} \subset [X]^\omega$ uma família quasi-disjunta de fechados discretos de X . Definimos o espaço topológico $\Psi(X, \mathcal{A})$ como sendo o conjunto $X \cup \mathcal{A}$ considerado com a topologia gerada por*

$$\tau \cup \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \{\{A\} \cup W : W \in \tau \text{ e } A \setminus W \text{ é finito}\}.$$

Nosso próximo lema nos dá uma base fraca para os Ψ -espaços construídos além de garantir a preservação de algumas propriedades topológicas em uma situação específica.

Lema 4.1.12. *Sejam $\langle X, \tau \rangle$ um espaço topológico e $\mathcal{A} \subset [X]^\omega$ uma família quasi-disjunta de fechados discretos de X . Para cada $A \in \mathcal{A}$ defino $\mathcal{B}(A) = \{\{A\} \cup H : H \text{ é subconjunto cofinito de } A\}$. Se $\mathcal{B}$ é uma base fraca de X então $\mathcal{B} \cup \bigcup \{\mathcal{B}(A) : A \in \mathcal{A}\}$ é base fraca de $\Psi(X, \mathcal{A})$. Supomos que, para todo $x \in X$, ou $\{\{x\}\} = \mathcal{B}(x)$ ou, para todo $B \in \mathcal{B}(x)$, B converge para x . Nesse caso, se $\mathcal{B}$ comprova que X é fracamente localmente enumerável e fracamente T_3 , então $\Psi(X, \mathcal{A})$ também é fracamente localmente enumerável e fracamente T_3 .*

Demonstração. Veremos, primeiramente, que o conjunto acima é base fraca. Para tanto, fixado $A \in \mathcal{A}$, note que a interseção de dois elementos de $\mathcal{B}(A)$ é um elemento de $\mathcal{B}(A)$. Garantimos assim a primeira condição para a base fraca. Agora fixamos $U \subset X$ e veremos que ele é aberto se, e somente se, para todo $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}(x)$ tal que $B \subset U$. Supondo que U é aberto então para todo $x \in U$ existe um elemento da base contido em U . Caso $x \in X$ basta tomar um elemento da base fraca para x contido no elemento da base. Caso $x = A \in \mathcal{A}$ basta notar que, como o elemento da base que contém A , e está contido em U , não contém apenas um número finito de elementos de A , então existe um elemento da base fraca de A contido em U . Supomos agora que, para todo $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}(x)$ tal que $B \subset U$. Nesse caso sabemos que $U \cap X$ é aberto resta ver que, para todo $A \in U \cap \mathcal{A}$, existe aberto V tal que $A \in V \subset U$. Fixamos $A \in U \cap \mathcal{A}$, como existe elemento da base fraca de A contido em U , então $U \cap X$ é aberto de X que não contém apenas uma quantidade finita de elementos de A . Segue que $\{A\} \cup (U \cap X)$ é aberto contido em U como desejado.

Para verificar a segunda parte notamos que os novos elementos da base fraca são todos enumeráveis. Sendo assim, pela parte anterior, o Ψ -espaço continua sendo fracamente localmente enumerável. Resta garantir que o Ψ -espaço continua fracamente T_3 . Primeiramente devemos verificar que o espaço continua fracamente T_2 . Fixamos $x, y \in \Psi(X, \mathcal{A})$, caso ambos estejam em X podemos usar os elementos da base fraca original. Supomos, sem perda de generalidade, que $x = A \in \mathcal{A}$. Caso $y \in X$, usando o fato de A ser fechado e discreto, temos que existe um aberto V contendo y tal que $V \cap A \subset \{y\}$. Basta tomar um elemento de $\mathcal{B}(y)$ contido em V e o elemento de $\mathcal{B}(A)$ dado por $\{A\} \cup (A \setminus \{y\})$. Caso $y = A' \in \mathcal{A}$, sabemos que $A \cap A'$ é finito, basta então tomar os elementos da base fraca dados por $\{A\} \cup (A \setminus (A \cap A'))$ e $\{A'\} \cup (A' \setminus (A \cap A'))$. Resta ver apenas que os elementos da base fraca continuam fechados. Com efeito, fixe $B \in \mathcal{B}(x)$. Caso $x = A \in \mathcal{A}$, então B é fechado, pois, A é fechado e discreto em X e o único ponto de acumulação que adicionamos em $\Psi(X, \mathcal{A})$, é o próprio $\{A\}$. De fato, os outros elementos de $\mathcal{A}$ interceptam A em apenas um número finito de elementos. Agora, caso $x \in X$, temos duas possibilidades para $B \in \mathcal{B}(x)$. Caso $B = \{x\}$, então B é fechado pois, usando fracamente T_2 , conseguimos para todo $y \in \Psi(X, \mathcal{A}) \setminus \{x\}$, $B_y \in \mathcal{B}(y)$ contido em $\Psi(X, \mathcal{A}) \setminus \{x\}$. No outro caso, B converge para x em X . Segue então que, para todo $A \in \mathcal{A}$, $A \cap B$ é finito. Caso contrário $A \cap B$ converge para x e é um fechado discreto, um absurdo. Daí, obtemos que, para todo $A \in \mathcal{A}$, $\{A\} \cup (A \setminus B) \in \mathcal{B}(A)$. Por fim, como B é fechado em X , para todo $y \in X \setminus B$, temos que existe $B_y \in \mathcal{B}(y)$ tal que $B_y \subset X \setminus B$. Concluimos assim que B tem complementar aberto e, portanto, é fechado. □

A definição abaixo nos dá a estrutura básica da construção, por recursão, do contra-exemplo. Nosso objetivo é construir um tipo de cadeia de Ψ -espaços e definir um espaço final como sendo a união dos elementos dessa cadeia.

Definição 4.1.13. *Seja $\{(X_\alpha, \mathcal{A}_\alpha) : \alpha < \gamma\}$ sequência de pares de espaços topológicos e famílias de subconjuntos dos respectivos espaços. Dizemos que a sequência acima é um Ψ -sistema se satisfaz as seguintes condições:*

- (1) *Para todo $\alpha < \gamma$, $\mathcal{A}_\alpha \subset [X_\alpha]^\omega$ é família quasi-disjunta de fechados discretos de X_α ;*
- (2) *para todo $\alpha + 1 \leq \gamma$, sucessor, temos $X_{\alpha+1} = \Psi(X_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)$;*
- (3) *para todo $\alpha \leq \gamma$ limite $X_\alpha = \bigcup \{X_\beta : \beta < \alpha\}$.*

Aqui dizemos que X_γ é o limite do Ψ -sistema.

Agora vamos demonstrar um lema que garante algumas propriedades para o limite de um dado Ψ -sistema.

Lema 4.1.14. *Fixamos $\{\langle X_\alpha, \mathcal{A}_\alpha \rangle : \alpha < \gamma\}$ um Ψ -sistema. Se, para todo $\alpha < \gamma$, o espaço X_α é T_2 e tem base fraca de compactos enumeráveis, então o limite do Ψ -sistema é T_2 , possui uma base fraca de compactos enumeráveis e é ω -cw Hausdorff.*

Demonstração. Com efeito, o fato de que o espaço é T_2 segue do fato que, dados dois pontos $x, y \in X_\gamma$, existe $\alpha < \gamma$ tal que $x, y \in X_\alpha$ que é T_2 . Agora, pela construção do Ψ -sistema, temos que X_α é aberto em X_γ , sendo assim, os abertos de X_α que separam x e y , são abertos de X_γ . Agora, usando o fato de que os X_α 's são subespaços abertos em X_γ , temos que a união das bases fracas para cada subespaço formam uma base fraca de compactos enumeráveis para X_γ . Resta apenas ver que X_γ é ω -cw Hausdorff. Para tanto notamos que X_γ é fracamente localmente enumerável. Ademais, como o espaço é T_2 , os compactos são fechados e, portanto os elementos da base fraca são fechados e comprovam que o espaço é fracamente T_2 , donde, X_γ é fracamente T_3 . Estamos nas condições do corolário 4.1.9 donde X_γ é ω -cw Hausdorff. $\square$

Definimos agora um enfraquecimento da propriedade ω -cw Hausdorff que será usado em alguns dos lemas que precedem a construção.

Definição 4.1.15. *Dizemos que um espaço topológico X é fracamente ω -cw Hausdorff se, e somente se, para todo $H \subset X$ fechado discreto enumerável, existe um subconjunto infinito $K \subset H$ e uma família de abertos dois a dois disjuntos $\{U_x : x \in K\}$ de modo que, para todo $x \in K$, $x \in U_x$.*

É imediato que um espaço ω -cw Hausdorff também é fracamente ω -cw Hausdorff. Para tanto basta tomar o subconjunto da definição de fracamente ω -cw Hausdorff como sendo o próprio fechado discreto.

Esse próximo lema é central para a construção e é usado para garantir que uma sequência do espaço tomado não terá u -limite para um $u \in \omega^*$ escolhido previamente.

Lema 4.1.16. *Sejam X espaço topológico fracamente ω -cw Hausdorff, $u \in \omega^*$ e $f : \omega \rightarrow X$ sequência sem u -limite em X . Se existe fechado discreto infinito e enumerável, então existe uma família quasi-disjunta maximal, $\mathcal{A}$, de elementos fechados discretos enumeráveis de X tais que f não tem u -limite em $\Psi(X, \mathcal{A})$.*

Demonstração. Fixamos X , f e u como no enunciado. Primeiro veremos que, fixado $H \subset X$ fechado discreto infinito e enumerável, existe $K \subset H$ e W vizinhança aberta de K tal que $f^{-1}[W] \notin u$. Com efeito, basta usar ω -cw Hausdorff para tomar $L \subset H$ e $\{U_x : x \in L\}$ família de abertos disjuntos tais que $U_x \cap L = \{x\}$. Consideramos agora uma partição de L em dois conjuntos infinitos disjuntos, L_1 e L_2 . Note que $\bigcup\{U_x : x \in L_1\}$ é disjunto de $\bigcup\{U_x : x \in L_2\}$, donde, usando o fato de u ser um ultrafiltro, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $f^{-1}[\bigcup\{U_x : x \in L_1\}] \notin u$. Tomamos $K = L_1$ e $W = \bigcup\{U_x : x \in L_1\}$.

Agora, seja $\mathcal{H} = \{H \in [X]^\omega : H \text{ é fechado e discreto}\}$. Consideramos agora o seguinte conjunto:

$$\mathcal{H}' = \{H \in \mathcal{H} : \text{existe aberto } U \supset H \text{ tal que } f^{-1}[U] \notin u\}.$$

Note que, pela afirmação acima, tal conjunto não é vazio e, portanto, podemos aplicar o Lema de Zorn para obter $\mathcal{A}$ uma família quasi-disjunta maximal contida nessa família. Note que, pela mesma afirmação acima, $\mathcal{A}$ é maximal em $\mathcal{H}$. Para tanto tomamos $H \in \mathcal{H}$ e consideramos o subconjunto que tem a propriedade desejada. Usamos a maximalidade para verificar que H está na família ou não pode estender a família.

Note agora que f não pode ter u -limite em $\Psi(X, \mathcal{A})$. Com efeito, nenhum ponto de X pode ser u -limite pois mantemos a topologia original como topologia de subespaço. Ademais, nenhum $A \in \mathcal{A}$

pode ser u -limite pela maneira como tomamos os abertos de A . Basta tomar o aberto que comprova que $A \in \mathcal{H}'$.

□

Finalmente faremos a construção do contra-exemplo. Note que, pelo teorema 4.1.1, basta encontrar uma SS-família de espaços sequencialmente compactos.

Exemplo 4.1.17. Fixado $u \in \omega^*$, existe X_u um espaço topológico T_2 sequencialmente compacto e sequência em X_u que não possui u -limite.

Nossa construção se baseia em construir um Ψ -sistema de ordem ω_1 , juntamente com uma base fraca para cada etapa, e obter nosso espaço X_u como limite desse sistema. Fixamos $X_0 = \omega$ com a topologia discreta e $\mathcal{B}_0$ a base fraca dada pelos unitários. Tomamos $\mathcal{A}_0$ família quasi-disjunta maximal de maneira que $\mathcal{A}_0 \cap u = \emptyset$. Com efeito, consideramos $\mathcal{H} = \{H \in [\omega]^\omega : H \notin u\}$, e aplicamos o Lema de Zorn no conjunto das famílias quasi-disjuntas de $\mathcal{H}$ para achar uma família maximal. Seja $\mathcal{M}$ tal família, veremos que ela também é maximal em $[\omega]^\omega$. Com efeito, dado $P \in u$, podemos dividi-lo em dois conjuntos infinitos disjuntos P_1 e P_2 e, sem perda de generalidade, podemos supor que $P_1 \notin u$. Sendo assim, caso $P_1 \notin \mathcal{M}$ existe um elemento de $\mathcal{M}$ que intersecta P_1 e, portanto, P em um número infinito de pontos. Caso $P_1 \in \mathcal{M}$ temos $P_1 \cap P = P_1$ e, portanto P não pode estender a família $\mathcal{M}$. Fixamos $\alpha < \omega_1$ e assumimos construídos, para todo $\xi < \alpha$, $\langle X_\xi, \mathcal{A}_\xi \rangle$ par do Ψ -sistema e $\mathcal{B}_\xi$ base fraca de X_ξ . Aqui, para todo $\xi < \alpha$, temos $\mathcal{B}_\xi = \bigcup \{\mathcal{B}_\xi(x) : x \in X_\xi\}$ e, se $\eta < \gamma < \alpha$, então, para todo $x \in X_\eta$, temos $\mathcal{B}_\eta(x) = \mathcal{B}_\gamma(x)$. Sendo assim, paramos de usar o índice para indicar as bases fracas para os pontos. Além dessa condição queremos que nossa construção satisfaça, para todo $\xi < \alpha$,

- (1) para todo $x \in X_\xi$ temos que, ou $\{\{x\}\} = \mathcal{B}(x)$ ou, para todo $B \in \mathcal{B}(x)$, B converge para x e é enumerável;
- (2) X_ξ é T_2 , ω -cw Hausdorff;
- (3) o filtro u não tem ponto limite em X_ξ ;
- (4) $\mathcal{A}_\xi$ é família quasi-disjunta maximal de fechados discretos enumeráveis de X_ξ tal que u não tem ponto limite em $\Psi(X_\xi, \mathcal{A}_\xi)$.

Estudamos agora o caso sucessor e o limite.

Caso 1: α é ordinal limite. Note que $\mathcal{B}_\alpha = \bigcup \{\mathcal{B}_\xi : \xi < \alpha\}$ é uma base fraca para X_α como na definição de Ψ -sistema. Com efeito, para todo $x \in X_\alpha$, sabemos que $\mathcal{B}(x)$ tem a propriedade da interseção. Agora, se U é aberto, então, para todo $x \in U$, existe $\xi < \alpha$ tal que $x \in X_\xi$ e $U \cap X_\xi$ é aberto. Sendo assim, existe $B \in \mathcal{B}(x)$ tal que $B \subset U \cap X_\xi \subset U$. Para ver o outro sentido fixamos U conjunto tal que, para todo $x \in U$, existe $B_x \in \mathcal{B}(x)$ com $B_x \subset U$. Note que $U = \bigcup_{\xi < \alpha} (U \cap X_\xi)$. Como, para todo $x \in X_\xi$ e todo $B \in \mathcal{B}(x)$, temos $B \subset X_\xi$, segue que $B_x \subset U \cap X_\xi$ para todo $x \in X_\xi$. Temos então que cada elemento da união é aberto no espaço correspondente e, por construção, é aberto em X_α . concluímos assim que U é aberto em X_α . Note que, pela construção de $\mathcal{B}_\alpha$, mantemos a propriedade (1) para α .

Agora, por (1), os elementos de $\mathcal{B}_\alpha$ são unitários ou são conjuntos convergentes com os pontos de convergência. Segue que eles são enumeráveis e compactos em X_α e, pelo lema 4.1.14, temos que X_α é T_2 e ω -cw Hausdorff, isto é, vale (2) para α . Para ver que u não tem ponto limite em X_α notamos que, caso p seja ponto limite de u , então existe $\xi < \alpha$ tal que $p \in X_\xi$. Segue então, pela construção da topologia, que p é ponto limite de u em X_ξ , o que é um absurdo. O comentário anterior garante a condição (3), resta então construir a família $\mathcal{A}_\alpha$ satisfazendo (4). Considere f do lema 4.1.16 como sendo a identidade de ω em X_α . Sabemos f não tem u -limite pois, por (3), u

não tem ponto limite em X_α . Note que, como $\alpha < \omega_1$, temos que sua cofinalidade é ω . Tomamos $(\gamma_n)_{n \in \omega}$ sequência cofinal crescente em α . Para cada $n \in \omega$ selecionamos $A_n \in \mathcal{A}_{\gamma_n}$ afirmamos que $\{A_n : n \in \omega\}$ é discreto e fechado. Por (2) X_α é T_2 , então, para verificar a afirmação, basta ver que o conjunto não tem ponto de acumulação. Com efeito, dado $x \in X_\alpha$, existe $k \in \omega$ tal que $x \in X_{\gamma_k}$. Sendo assim X_{γ_k} é aberto que contém x e contém apenas um número finito de A_n 's. Usando T_2 podemos isolar x do conjunto escolhido por um aberto. Temos, por fim, que as condições do lema 4.1.16 são aplicáveis e obtemos a família quasi-disjunta maximal desejada.

Caso 2: α é ordinal sucessor. Fixe β tal que $\beta + 1 = \alpha$. Temos então que $X_\alpha = \Psi(X_\beta, \mathcal{A}_\beta)$. Pelo lema 4.1.12 temos que

$$\mathcal{B}_\beta \cup \bigcup_{A \in \mathcal{A}_\beta} \mathcal{B}(A)$$

é base fraca de X_α . Note que, pela condição (1) para β , a condição (1) para α é verificada. Ademais, estamos na condições da segunda parte desse lema. Agora, os elementos de $\mathcal{B}_\beta$ são enumeráveis por construção. Por (2), temos que X_β é T_2 e, portanto, fracamente T_2 . Pelo fato de X_β ser T_2 temos que todos os elementos da base são fechados pois, por (1), ou eles são unitários ou eles são conjuntos convergentes com o ponto de convergência. Segue que $\mathcal{B}_\beta$ comprova que X_β é fracamente localmente enumerável e fracamente T_3 . concluímos, usando o lema 4.1.12, que X_α é fracamente localmente enumerável e fracamente T_3 . Segue, pelo corolário 4.1.9, que X_α é T_2 e ω -cw Hausdorff. O fato de que u continua sem ponto limite é imediato da hipótese de indução (4) para β . Resta construir $\mathcal{A}_\alpha$ tal que (4) é válido. Note que $\mathcal{A}_\beta$ é discreto por construção das bases e é fechado pois X_β é aberto. Logo estamos nas condições do lema 4.1.16, sendo assim tomamos $\mathcal{A}_\alpha$ a família quasi-disjunta maximal desejada. Concluímos assim a verificação das propriedades (1)-(4).

Dessa maneira podemos definir um Ψ -sistema de tamanho ω_1 . Devemos ver que X_{ω_1} construído dessa maneira é sequencialmente compacto. Com efeito dado $F \subset X_{\omega_1}$ infinito enumerável existe $\xi < \omega_1$ tal que $F \subset X_\xi$. Note que F não pode ser fechado e discreto. Com efeito, sabemos, pelo lema 4.1.16, que $\mathcal{A}_\xi$ também é maximal considerando os fechados e discretos de $[X_\xi]^\omega$. Caso F o fosse, existiria $A \in \mathcal{A}_\xi$ tal que $A \cap F$ é infinito. Considero o subconjunto $A \cap F \subset F$ ele converge para A pois, qualquer vizinhança aberta de A cobre uma quantidade cofinita de elementos de A e, portanto, deixa apenas uma quantidade finita de elementos de $A \cap F$ para fora. Isso é um absurdo pois então F teria ponto de acumulação em X_{ω_1} . Sabemos então que F não é fechado e discreto. Segue que existe y ponto de acumulação de F . Pelo lema 4.1.10, sabemos que X_ξ é sequencial, donde deve existir um subconjunto de F convergindo para y , semelhante ao que foi feito no lema 3.1.3. Note, por fim, que a sequência $id : \omega \rightarrow X_{\omega_1}$ não possui u -limite em X_{ω_1} . Com efeito, por (3) sabemos que o filtro u em $\omega \subset X_{\omega_1}$ não possui ponto limite. Segue então que, para todo $x \in X_{\omega_1}$, existe uma vizinhança V de x tal que $V \cap \omega \notin u$, isto é, x não é u -limite de id . Tomamos agora $X_{\omega_1} = X_u$ e temos o resultado desejado.

Nossa construção nos garante que

$$\{\langle X_u, id \rangle : u \in \omega^*\}$$

é uma SS-família de espaços T_2 sequencialmente compactos, garantindo a existência de um contra-exemplo para (SSt 1).

4.2 Revisitando Scarborough-Stone e uma resposta positiva parcial

Dado o resultado da seção anterior somos motivados a perguntar, o que aconteceria se exigirmos que os espaços que compõe o produto sejam ao menos T_3 ? Seguindo tal ideia reenunciamos o

problema de Scarborough-Stone da seguinte forma:

(SSt 2) : Deve todo produto de espaços topológicos T_3 sequencialmente compactos ser enumeravelmente compacto?

A partir desse momento até o resto da dissertação, quando nos referirmos ao problema de Scarborough-Stone, estaremos sempre considerando essa versão. Desde quando foi enunciado até hoje o Problema de Scarborough-Stone foi respondido apenas parcialmente, isto é, foi verificado que sua negação é consistente em alguns modelos de ZFC com axiomas adicionais. Em outras palavras, podemos construir um produto de espaços T_3 sequencialmente compactos que não é enumeravelmente compacto de maneira consistente com alguns modelos de ZFC com axiomas adicionais. Com relação a resposta afirmativa temos apenas alguns resultados parciais para classes mais específicas de espaços topológicos. Vamos introduzir um desses resultados parciais, mais especificamente, o fato de que, sob MA e a negação de CH, qualquer produto de espaços sequencialmente compactos T_6 é enumeravelmente compacto. Tal solução parcial aparece no artigo [29]. Desenvolveremos essa demonstração usando alguns resultados de [22], [9] e [24]. Nosso objetivo durante o resto dessa seção é reunir esses resultados e apresentar tal solução parcial de **(SSt 2)**.

Aqui, por espaços T_6 queremos dizer espaços topológicos perfeitamente normais, isto é, espaços topológicos T_4 e perfeitos. Por espaço perfeito queremos dizer um espaço no qual todos os fechados podem ser descritos como a interseção enumerável de abertos, isto é, eles são G_δ 's.

Esse resultado é centrado em provar que espaços perfeitos, enumeravelmente compactos, e regulares, serão compactos. Sendo assim, não podemos ter contra-exemplos na classe dos espaços T_6 , pois os produtos serão compactos. Definiremos agora algumas propriedades que serão usadas no resto desse capítulo.

Definição 4.2.1 (Propriedade S). *Dizemos que vale a propriedade S se, dada $\mathcal{F}$ família de menos que $\mathfrak{c}$ subconjuntos infinitos de ω com a propriedade da interseção finita forte (SFIP), então existe $D \subset \omega$ infinito tal que, para todo $F \in \mathcal{F}$, $|D \setminus F| < \aleph_0$.*

Note agora que, caso MA seja válido, isto é, $MA(\kappa)$ é válido para todo $\kappa < \mathfrak{c}$, temos que $\mathfrak{m} = \mathfrak{c}$. Agora, como visto no capítulo de preliminares, $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{p}$ e, portanto, $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$. Tal igualdade nos dá que vale a propriedade S, pois qualquer família de tamanho menor que $\mathfrak{c}$ não pode ter pseudo interseção.

Definição 4.2.2 (Right-Separated). *Um espaço topológico X é dito ser Right-separated (RS), se existe boa ordem $\triangleleft$ em X de maneira que todo segmento inicial de X seja um aberto. Dizemos que X é RS em tipo κ se a boa ordem em questão tem tipo κ .*

As próximas duas proposições nos informam como a propriedade RS se relaciona com a propriedade de Lindelöf, um outro tipo de propriedade de recobrimento, e, como um espaço enumeravelmente compacto e separável, sob a propriedade S, possui uma propriedade semelhante a compacidade para coberturas específicas.

Proposição 4.2.3. *Seja X um espaço topológico. Temos que X é hereditariamente Lindelöf se, e somente se, não existe $A \subset X$ subespaço tal que A seja RS e $|A| > \aleph_0$.*

Demonstração. Para demonstrar a ida supomos por contrapositiva que exista um tal subespaço A . Sendo assim, existem uma boa ordem $\triangleleft$ em A , comprovando que A é RS, e um ordinal α tais que $\langle A, \triangleleft \rangle$ é isomorfo à α . Podemos agora, como $|A| \geq \aleph_1$, considerar apenas o segmento inicial isomorfo à ω_1 . Claramente esse segmento é RS e, como subespaço, não pode ser Lindelöf, pois a cobertura dada pelos segmentos iniciais não pode admitir subcobertura enumerável. Comprovamos

assim que X não é hereditariamente Lindelöf.

Para verificar a volta da proposição supomos, novamente por contrapositiva, que X não é hereditariamente Lindelöf. Nesse caso deve existir $A \subset X$ tal que, como subespaço, A não é Lindelöf. Consideramos a cobertura de A dada por $\mathcal{C} = \{U_\xi \cap A : \xi < \kappa\}$, para algum κ cardinal, que comprova que A não é Lindelöf. Agora, se necessário, construímos uma subcobertura de $\mathcal{C}$ dada por $\mathcal{C}' = \{U_{\xi_\beta} \cap A : \beta < \alpha\}$ de maneira que, para todo $\beta < \alpha$, $(U_{\xi_\beta} \cap A) \setminus \bigcup_{\gamma < \beta} (U_{\xi_\gamma} \cap A) \neq \emptyset$. Note que, $\alpha \geq \omega_1$ pois a cobertura comprova que A não é Lindelöf. Tomamos então, para cada $\beta < \omega_1$, $x_\beta \in \left[(U_{\xi_\beta} \cap A) \setminus \bigcup_{\gamma < \beta} (U_{\xi_\gamma} \cap A) \right]$. Da maneira como foram escolhidos os x_β temos que $A = \{x_\beta : \beta < \omega_1\}$ é um subespaço RS não enumerável pois, cada segmento inicial de A é dado por $[x_0, x_\beta) = A \cap \bigcup_{\gamma < \beta} (U_{\xi_\gamma} \cap A)$. □

Proposição 4.2.4. *Assumindo S , se X é um espaço topológico enumeravelmente compacto, separável e $\mathcal{U}$ é recobrimento aberto de X com $|\mathcal{U}| < \mathfrak{c}$, então existe $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ finito tal que $\{\overline{U} : U \in \mathcal{U}'\}$ cobre X .*

Demonstração. Para demonstrar essa proposição suponha, por absurdo, que, para todo subconjunto de $\mathcal{U}$ finito, o fecho de seus elementos não cobre X .

Considere $D \subset X$ o denso enumerável e o seguinte conjunto

$$\mathcal{H} = \left\{ \left(\overline{\bigcup \mathcal{A}} \right)^c \cap D : \mathcal{A} \in [\mathcal{U}]^{<\omega} \right\}.$$

Veremos que $\mathcal{H}$ tem a SFIP. Dados $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \in [\mathcal{U}]^{<\omega}$, temos, usando De Morgan,

$$\bigcap_{i=1}^n \left(\overline{\bigcup \mathcal{A}_i}^c \cap D \right) = \left(X \setminus \bigcup_{i=1}^n \left(\overline{\bigcup \mathcal{A}_i} \right) \right) \cap D,$$

donde, usando o fato de que a união finita entra para o fecho,

$$\left(X \setminus \left(\overline{\bigcup_{i=1}^n \bigcup \mathcal{A}_i} \right) \right) \cap D = \left(\overline{\bigcup_{i=1}^n \left(\bigcup \mathcal{A}_i \right)} \right)^c \cap D.$$

Agora, caso $\left| \overline{\bigcup_{i=1}^n \left(\bigcup \mathcal{A}_i \right)}^c \cap D \right| < \aleph_0$, tomo para para cada ponto do conjunto anterior um aberto de $\mathcal{U}$ que contém ele, obtendo assim um conjunto $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ finito. Sendo assim temos que o conjunto dado por,

$$\left(\bigcup_{i=1}^n \mathcal{A}_i \right) \cup \mathcal{U}' \in [\mathcal{U}]^{<\omega},$$

é tal que,

$$D \subset \overline{\left(\bigcup_{i=1}^n \mathcal{A}_i \right) \cup \left(\bigcup \mathcal{U}' \right)},$$

donde,

$$D \subset \overline{\bigcup_{i=1}^n \left(\bigcup \mathcal{A}_i \cup \mathcal{U}' \right)} = X.$$

concluimos assim, que

$$\{\bar{U} : U \in \bigcup_{i=1}^n \mathcal{A}_i \cup \mathcal{U}'\}$$

cobre X , o que é um absurdo.

Tome então P pseudo interseção de $\mathcal{H}$ dada pela propriedade S. Como X é enumeravelmente compacto existe x ponto de acumulação de P . Seja então $V \in \mathcal{U}$ tal que $x \in V$, segue que $|V \cap P| = \aleph_0$, por T_1 . Mas agora, temos que $\bar{V}^c \cap D \in \mathcal{H}$ e, portanto $|P \setminus (\bar{V}^c \cap D)| < \aleph_0$. Por fim, como $V \subset \bar{V}$ e $P \subset D$, temos $V \cap P = V \cap D \cap P \subset P \cap D \cap \bar{V} = P \setminus (\bar{V}^c \cap D)$, e, portanto, $|V \cap P| < \aleph_0$, o absurdo desejado. $\square$

Agora, o spread de um espaço topológico, s , é definido da seguinte forma:

$$s(X) = \{|Y| : Y \text{ é discreto}\} + \omega.$$

Nas próximas proposições, veremos como o spread de um espaço topológico se comporta sob certas condições e como ele influencia a separabilidade de um espaço RS.

Proposição 4.2.5. *Dado X espaço topológico enumeravelmente compacto e perfeito, então $s(X) = \aleph_0$.*

Demonstração. Para provar a proposição fixe $Y \subset X$ discreto, veremos que $|Y| = \aleph_0$. Considere $F = Y'$, o conjunto de pontos de acumulação, temos que F é fechado. Ademais, como Y é discreto, devemos ter $Y \cap F = \emptyset$. Agora, $X \setminus F$ é aberto e, como X é perfeito, temos que $X \setminus F$ é um F_σ , temos ainda que $Y \subset X \setminus F$ é fechado na topologia de subespaço. Escrevemos então

$$X \setminus F = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i,$$

onde cada K_n é fechado.

Tomamos ainda H fechado em X de maneira que $H \cap (X \setminus F) = Y$, donde $Y \cap K_n = H \cap K_n$ é fechado e discreto para todo n . Sendo assim, para todo n , $|H \cap K_i| < \aleph_0$. Com efeito, como $H \cap K_i$ é fechado e discreto, ele não pode ter ponto de acumulação e, dado que X é enumeravelmente compacto, ele não pode ser infinito. Note que

$$Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} (H \cap K_i),$$

donde, $|Y| \leq \aleph_0$. $\square$

Proposição 4.2.6. *Se X é espaço topológico RS e $s(X) = \aleph_0$, então X é hereditariamente separável.*

Demonstração. Suponha, por contrapositiva, que X não é hereditariamente separável e seja $Y \subset X$ que comprove esse fato. Como X é RS temos que, usando a mesma boa ordem restrita à Y , Y também é RS pois, qualquer segmento inicial de Y pode ser escrito como um segmento inicial de X intersectado com Y . Considero agora $\{y_\alpha : \alpha < \beta\}$ ordenação de Y de acordo com a tal boa ordem. Temos então que $\{y_0\}$ é aberto em Y e, por hipótese, $\overline{\{y_0\}} \neq Y$, tomo $y_0 = y_{\alpha_0}$. Escolhemos, por recursão, para todo $\xi < \omega_1$, y_{α_ξ} do seguinte modo:

Fixado $\xi < \omega_1$ e supondo definidos y_{α_γ} para todo $\gamma < \xi$, por hipótese $\{y_{\alpha_\gamma} : \gamma < \xi\}$ não é denso em Y , logo existe $A_\xi \neq \emptyset$ aberto de Y disjunto desse conjunto. Agora, usando a boa ordem, defino $\alpha_\xi = \min\{\alpha : y_\alpha \in A_\xi\}$, escolhendo assim o próximo elemento y_{α_ξ} . Note que, da maneira como os

elementos foram escolhidos, seus unitários são abertos. Com efeito, $\{y_{\alpha_\xi}\} = [y_0, y_{\alpha_\xi} + 1) \cap A_\xi$, a interseção de dois abertos de Y . Portanto, para cada $\beta < \omega_1$, existe aberto de X que só interceptam $\{y_{\alpha_\xi} : \xi < \omega_1\}$ em y_{α_β} . Obtemos assim um subconjunto de X discreto não enumerável dado por $\{y_{\alpha_\xi} : \xi < \omega_1\}$, donde $s(X) > \aleph_0$. □

O teorema a seguir junta todas as proposições acima e nos dá o resultado central que garante a resposta afirmativa do Problema de Scarborough-Stone para espaços T_6 .

Teorema 4.2.7 (MA + $\neg$ CH). *Todo espaço topológico X enumeravelmente compacto, perfeito e regular é compacto.*

Demonstração. Para provar o teorema veremos que, dado X como acima, X é Lindelöf e, portanto, como ele também é enumeravelmente compacto, X deve ser compacto. Suponha, por absurdo, que X é como acima e não é Lindelöf, pela primeira proposição, X deve conter $Y = \{y_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ subespaço RS (Aqui a boa ordem é dada pela enumeração). Agora, para cada $\alpha < \omega_1$, existe U_α aberto de X tal que $\{y_\xi : \xi < \alpha\} \subset U_\alpha$ e $\{y_\xi : \xi \geq \alpha\} \cap U_\alpha = \emptyset$. Pela regularidade de X posso tomar, para cada $\alpha < \omega_1$, V_α aberto de maneira que $y_\alpha \in V_\alpha \subset \overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$. Note que nenhuma subcoleção enumerável de $\{\overline{V_\alpha} : \alpha < \omega_1\}$ pode cobrir um subconjunto não enumerável de Y pela escolha dos U_α . Como X é perfeito e $V = \bigcup \{V_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ é aberto, então existem fechados F_n para $n \in \omega$ tais que $V = \bigcup \{F_n : n \in \omega\}$. Como $Y \subset V$ e $|Y| = \aleph_1$, existe $m \in \omega$ tal que $|Y \cap F_m| = \aleph_1$, tome $E = \overline{Y \cap F_m}$. Note que, como E é fechado, ele é enumeravelmente compacto e regular como subespaço e, pela terceira proposição, temos que $s(X) = \aleph_0$ e, portanto, como o spread é função cardinal monótona, $s(Y) = \aleph_0$. Segue, pela última proposição, que Y é hereditariamente separável, logo $Y \cap F_m$ é separável e, portanto, E é separável. Agora, como $\omega_1 < \mathfrak{c}$, tomando

$$\mathcal{U} = \{V_\alpha \cap E : \alpha < \omega_1\},$$

temos que nenhum subconjunto finito de $\{\overline{V_\alpha \cap E} : \alpha < \omega_1\} = \{\overline{V_\alpha} \cap E : \alpha < \omega_1\}$ pode cobrir E , o que é uma contradição da segunda proposição uma vez que MA implica S. □

Tal teorema nos dá o seguinte corolário que responde afirmativamente o problema de Scarborough-Stone para a classe dos espaços T_6 sob MA + $\neg$ CH.

Corolário 4.2.8 ((MA + $\neg$ CH)). *O produto de qualquer número de espaços que são sequencialmente compactos e perfeitamente normais é sequencialmente compacto.*

Demonstração. Com efeito, um espaço sequencialmente compacto e perfeitamente normal é compacto pelo teorema 4.2.7. Logo, o produto de espaços como no corolário é compacto e, portanto, sequencialmente compacto. □

Notamos, por fim, que durante todo o processo de demonstração, usamos MA apenas para garantir a propriedade S , isto é, $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$. Já a afirmação $\neg$ CH, foi utilizada apenas para garantir que $\omega_1 < \mathfrak{c}$. Mas agora, se substituirmos a propriedade S por $\mathfrak{p} \geq \aleph_2$ na proposição 4.2.4, podemos garantir que o mesmo resultado é válido para coberturas com tamanho menor que $\aleph_2$. Agora, podemos substituir (MA + $\neg$ CH) no teorema 4.2.7, por $\mathfrak{p} \geq \aleph_2$, e mantermos a mesma demonstração, substituindo $\mathfrak{c}$ por $\aleph_2$. Conseguimos, assim, enfraquecer as hipóteses exigidas para essa resposta.

Capítulo 5

Construções do Tipo de Ostaszewski

No capítulo anterior analisamos uma resposta afirmativa parcial para nosso problema. Nesse capítulo, porém, veremos algumas respostas negativas, isto é, a construção de espaços sequencialmente compactos cujo produto não é enumeravelmente compacto.

Na primeira seção nos baseamos na construção da reta de Ostaszewski. Nossa variação sobre a construção usa a hipótese $(\clubsuit + \text{CH})$, e é baseada nos trabalhos de [22], [21] e [26]. É referida a construção feita no primeiro artigo e usamos alguns lemas anteriores, dos dois últimos artigos, para preparar a construção. A grande mudança da construção original provém do último artigo e é o que vai garantir que, fixado $u \in \omega^*$, podemos construir a Reta de Ostaszewski de maneira que ω não tenha u -limite.

Na segunda seção estudamos uma construção semelhante a reta de Ostaszewski, porém usamos a hipótese $(\mathfrak{b} = \mathfrak{c})$. Praticamente a única referência utilizada para essa construção é o artigo [27].

5.1 A Reta de Ostaszewski

Nessa seção faremos a construção de um contra-exemplo para o problema de Scarborough-Stone. Baseamo-nos na seguinte estratégia, tomar ω com a topologia discreta e construir, recursivamente uma topologia para algum ordinal maior. O objetivo dessa construção é conseguir, para cada $p \in \omega^*$, espaços sequencialmente compactos X_p tais que, X_p tem sequência s_p que não tem p -limite. Dessa maneira a SS-família desejada é $\{\langle X_p, s_p \rangle : p \in \omega^*\}$.

O lema a seguir nos auxiliará na construção da Reta de Ostaszewski, pois será o passo básico para estender o espaço nos passos sucessores e em alguns passos limites. Tal lema já está incorporando a mudança feita por Jerry E. Vaughan na forma da exigência (5).

Lema 5.1.1. *Sejam X espaço topológico localmente compacto, zero dimensional, metrizável, segundo enumerável, e $p \in \omega^*$. Dados $s : \omega \rightarrow X$ sequência injetora que não tem p -limite em X e $A, B \subset X$ tais que $|A| = |B| = \omega$, $(A \cup B)' = \emptyset$ e $A \cap B = \emptyset$, existe um espaço topológico $K(X, A, B)$ tal que:*

- (1) X é subespaço aberto de $K(X, A, B)$;
- (2) $|K(X, A, B) \setminus X| = \omega$ e não tem ponto de acumulação;
- (3) $K(X, A, B)$ é localmente compacto, zero dimensional e metrizável;
- (4) Para todo $p \in K(X, A, B) \setminus X$, temos que p é ponto de acumulação de A e B ;

(5) A sequência s em $K(X, A, B)$ não tem p -limite.

Demonstração. Dados $A, B \subset X$ como no enunciado, podemos tomá-los de maneira que $|A| = |B| = |X \setminus (A \cup B)| = \omega$ tomando subconjuntos se necessário. Enumeramos $A = \{a_{2n+1} : n \in \omega\}$ e $B = \{a_{2n} : n \in \omega\}$. Agora, usando a compacidade local, a zero dimensionalidade e a metrizabilidade de X , junto com o fato de que $(A \cup B)' = \emptyset$, podemos tomar G_0 aberto-fechado compacto tal que $a_0 \in G_0$, $G_0 \cap \{a_i : i > 0\} = \emptyset$ e $\text{diam}(G_0) < \frac{1}{2^0}$ (aqui estamos fixando métrica compatível d).

Suponha agora construídos G_i para todo $i < n$, dois a dois disjuntos, tais que G_i é aberto-fechado compacto, $a_i \in G_i$, $G_i \cap \{a_j : j > i\} = \emptyset$ e $\text{diam}(G_i) < \frac{1}{2^i}$. Como $\bigcup_{i < n} G_i$ é fechado, $a_n \notin (A \cup B)'$ e X é metrizável localmente compacto e zero dimensional, podemos tomar G_n um aberto-fechado compacto com todas as características desejadas.

Definimos

$$V_1 = \bigcup \{G_{2n} \cup G_{2n+1} : n \text{ par}\},$$

$$V_2 = \bigcup \{G_{2n} \cup G_{2n+1} : n \text{ impar}\}.$$

Temos que V_1 e V_2 são abertos disjuntos e, portanto, $\{k \in \omega : s(k) \in V_1\}$ e $\{k \in \omega : s(k) \in V_2\}$ são disjuntos em ω , donde, sem perda de generalidade, podemos supor $\{k \in \omega : s(k) \in V_1\} \notin p$. Ademais V_1 é fechado em X . Com efeito, dado $x \in \overline{V_1} \setminus V_1$, para todo $\epsilon > 0$ e $B(x, \epsilon)$ a bola aberta de raio ϵ centrada em x , tomamos $B(x, \frac{\epsilon}{3})$, como $x \in \overline{V_1} \setminus V_1$. Temos que $B(x, \frac{\epsilon}{3})$ intercepta algum $G_{2n} \cup G_{2n+1}$ para n par tal que $\frac{1}{2^{2n}} < \frac{\epsilon}{3}$, logo, sem perda de generalidade, supomos $G_{2n} \subset B(x, \epsilon)$ e, portanto $A \cap B(x, \epsilon) \neq \emptyset$. Segue daí que $x \in A' = \emptyset$, o que é um absurdo, logo, não pode existir tal x .

Considero agora M um conjunto tal que $M \cap X = \emptyset$ e $|M| = \omega$, enumeramos $M = \{m_{2k}, m_{2k+1} : k \text{ par}\}$. Particionamos os números pares em infinitos conjuntos infinitos disjuntos e enumeramos eles em

$$\{N_{2k}, N_{2k+1} : k \text{ par}\}.$$

Agora tomamos $K(X, A, B) = X \cup M$ com a topologia gerada pela topologia de X e pelas bases para os pontos de M dadas pelos seguintes conjuntos:

$$U_i(m_{2k}) = \{m_{2k}\} \cup \left[\bigcup_{r>i}^{r \in N_{2k}} (G_{2r} \cup G_{2r+1}) \right] \text{ para } i \in \omega \text{ e}$$

$$U_i(m_{2k+1}) = \{m_{2k+1}\} \cup \left[\bigcup_{r>i}^{r \in N_{2k+1}} (G_{2r} \cup G_{2r+1}) \right] \text{ para } i \in \omega.$$

Note que esse novo conjunto gera uma topologia. De fato, fixados dois de seus elementos, W e V , caso sejam novos e os pontos diferentes a interseção é vazia, agora, caso os pontos sejam iguais a interseção é um elemento do conjunto. Por fim, se considerarmos um elemento novo e um aberto de X , ou dois abertos de X , então a interseção é um aberto de X e está no conjunto.

Verificaremos agora que esse espaço satisfaz as propriedades desejadas. A propriedade (1) é imediata pois nenhum dos abertos novos adicionam novos abertos em X .

Para verificar a propriedade (2) notamos, primeiramente, que $|K(X, A, B) \setminus X| = |M| = \omega$. Agora, dado $x \in K(X, A, B)$, caso $x \in K(X, A, B) \setminus X$ qualquer aberto de sua base contém somente ele como elemento de $K(X, A, B) \setminus X$, donde ele não pode ser ponto de acumulação. Por fim,

se $x \in X$, então qualquer aberto de X verifica que ele não é ponto de acumulação de $K(X, A, B) \setminus X$.

Mostraremos agora que $K(X, A, B)$ é, de fato, localmente compacto, zero dimensional e metrizável. Com efeito, como X é subespaço de $K(X, A, B)$ só precisamos verificar a compacidade dos abertos básicos novos. Dado $U_i(m_{2k})$ note que qualquer recobrimento desse conjunto deve conter um aberto que contém um aberto da forma $U_j(m_{2k})$, para poder cobrir m_{2k} . Sendo assim uma quantidade finita de abertos-fechados compactos da forma $G_{2r} \cup G_{2r+1}$ fica para fora desse aberto, e, portanto precisamos de uma quantidade finita de abertos da cobertura para cobrir cada um deles.

Comprovaremos agora que $K(X, A, B)$ é zero dimensional. Caso $x \in X$ e $x \in V_1$ então existe algum G_r tal que $x \in G_r$. Note que G_r é fechado em X e, para ver que nenhum ponto de M está no fecho de G_r basta pegar i suficientemente grande para qualquer aberto básico. Caso $x \in X$ mas $x \notin V_1$, tomamos um aberto-fechado de X disjunto de V_1 que é fechado em X , logo tal aberto-fechado é disjunto de todas as vizinhanças de pontos de M e, portanto, é aberto-fechado em $K(X, A, B)$. Por fim tratamos do caso em que $x \in M$, sem perda de generalidade assumimos $x = m_{2k}$. Agora, por um argumento análogo ao usado para verificar que V_1 é fechado em X , temos, dado qualquer aberto $U_i(m_{2k})$, que $U_i(m_{2k}) \cap X$ é fechado em X e o único ponto de acumulação desse conjunto em $K(X, A, B)$ é m_{2k} . Segue que $U_i(m_{2k})$ é fechado em $K(X, A, B)$.

Para concluir a propriedade (3) resta ver que $K(X, A, B)$ é metrizável, com efeito, temos que $K(X, A, B)$ é segundo enumerável, pois X tem base enumerável e acrescentamos apenas uma quantidade enumerável de abertos novos, pois cada ponto de M tem base enumerável. Agora, como $K(X, A, B)$ é zero dimensional e T_2 , ele também é regular e T_2 , donde, pelo teorema de metrização de Urysohn, $K(X, A, B)$ é metrizável.

Para verificar a propriedade (4) podemos, sem perda de generalidade, assumir que $x \in K(X, A, B) \setminus X$ é tal que $x = m_{2k}$, logo, para qualquer aberto básico $U_i(m_{2k})$, temos infinitos abertos da forma G_{2r} e G_{2r+1} , portanto temos infinitos pontos de A e de B .

Por fim verificaremos a propriedade (5). Para tanto note que, como s não tem p -limite em X então para ver que s não tem p -limite em $K(X, A, B)$ basta ver que nenhum $x \in M$ é p -limite de s . Assumimos, sem perda de generalidade, que $x = m_{2k}$, sendo assim, dada uma vizinhança básica $U_i(m_{2k})$, temos que $\{n \in \omega : s(n) \in U_i(m_{2k})\} \subset \{n \in \omega : s(n) \in V_1\} \notin p$ por construção e, portanto, $\{n \in \omega : s(n) \in U_i(m_{2k})\} \notin p$. □

Definimos agora um dos axiomas adicionais para a nossa primeira construção.

Definição 5.1.2 ($\clubsuit$). *Existem uma sequência crescente de ordinais limites enumeráveis indexada em ω_1 dada por $\{\lambda_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ e uma sequência de conjuntos enumeráveis, também indexadas em ω_1 , $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, tais que:*

- (1) *Para todo $\alpha < \omega_1$ temos que $A_\alpha \subset \lambda_\alpha$ é subconjunto ilimitado em λ_α ;*
- (2) *Se $I \in [\omega_1]^{\omega_1}$, então existe $\alpha < \omega_1$ tal que $A_\alpha \subset I$.*

Construiremos então o exemplo modificado da reta de Ostaszewski, nossa ideia se baseia em uma construção por recursão, na qual definimos uma topologia para ω_1 , acrescentando algumas condições adicionais para que ω , como subespaço de ω_1 não tenha p -limite.

Exemplo 5.1.3 ($\clubsuit + \text{CH}$). *Fixado $p \in \omega^*$, existe uma topologia para ω_1 , de maneira que ω_1 seja um espaço topológico perfeitamente normal, primeiro enumerável, hereditariamente separável, zero dimensional e localmente compacto. Além dessas condições tomaremos a topologia de modo que*

o espaço seja sequencialmente compacto e que ω , enquanto subespaço, seja discreto e não tenha p -limite.

Fixamos $p \in \omega^*$ e usamos $\clubsuit$ para tomar $\{\lambda_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ sequência crescente de ordinais limites em ω_1 , com $\lambda_0 = \omega$, e $\{S_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ conjunto tal que $S_\alpha : \omega \rightarrow \lambda_\alpha$ é sequência cofinal em λ_α . Podemos tomar tais conjuntos tais que, dado $I \subset \omega_1$ conjunto não enumerável, existe $\alpha < \omega_1$ tal que $I \supset S_\alpha[\omega]$. Note que podemos fazer essa construção pois, fixados $\{\lambda_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ e $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ como em $\clubsuit$, dado que todo $\lambda_\alpha \geq \omega$, apenas acrescentamos e reordenamos, se necessário, $\lambda_0 = \omega$ e $A_0 = \omega$. Agora, para todo $\alpha < \omega_1$, temos que $cf(\lambda_\alpha) = \aleph_0$ e, portanto, podemos tomar sequência crescente $S_\alpha : \omega \rightarrow A_\alpha$ cofinal em λ_α . Note, por fim, que, dado $I \in [\omega_1]^{\omega_1}$, existe $\alpha < \omega_1$ tal que $S_\alpha[\omega] \subset A_\alpha \subset I$, como desejado.

Enumeramos agora $\{B_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ todos os conjuntos enumeráveis de ω_1 , o que é possível por CH uma vez que $|[\omega_1]^\omega| = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = \aleph_1$. Construiremos, por recursão, espaços topológicos $\langle \lambda_\alpha, \tau_\alpha \rangle$ de modo que:

- (1) Para todos $\gamma < \beta < \omega_1$, temos que $\langle \lambda_\gamma, \tau_\gamma \rangle$ é subespaço aberto de $\langle \lambda_\beta, \tau_\beta \rangle$;
- (2) Para todo $\beta < \omega_1$, $\langle \lambda_\beta, \tau_\beta \rangle$ é localmente compacto, zero dimensional e metrizável;
- (3) Para todo $\beta < \omega_1$, a sequência $id : \omega \rightarrow \lambda_\beta$ dada pela identidade, não possui p -limite em $\langle \lambda_\beta, \tau_\beta \rangle$;
- (4) Para todo $\beta < \omega_1$, o conjunto $\lambda_{\beta+1} \setminus \lambda_\beta$ é discreto e fechado em $\langle \lambda_{\beta+1}, \tau_{\beta+1} \rangle$;
- (5) Para todo $\beta < \omega_1$, existe $\gamma < \omega_1$, tal que B_β tem ponto de acumulação em $\langle \lambda_\gamma, \tau_\gamma \rangle$.

Aqui (5) só será verificada no final da construção.

Começo a construção tomando τ_0 a topologia discreta em $\lambda_0 = \omega$. Temos que (1) é vaziamente satisfeito e (2) e (3) são imediatos pois o espaço em questão é discreto. Ademais não temos que verificar (4) pois ainda não construímos a topologia de λ_1 .

Supomos construídos τ_γ para todo $\gamma < \beta$ satisfazendo (1) – (4), construiremos τ_β .

Caso β seja sucessor ($\beta = \gamma + 1$), por (2), $\langle \lambda_\gamma, \tau_\gamma \rangle$ é localmente compacto, zero dimensional e metrizável. Ademais, como λ_γ é enumerável, temos que o espaço acima é segundo enumerável. Considero agora

$$\xi = \min\{\alpha < \omega_1 : B_\alpha \text{ é fechado discreto e } B_\alpha \subset \lambda_\gamma\}.$$

Note que o conjunto acima é não vazio, pois, qualquer sequência crescente cofinal em λ_γ é fechada e discreta, dado que ela não tem ponto de acumulação e λ_γ é T_2 . Com efeito, caso γ seja limite, dadas sequência crescente cofinal $f : \omega \rightarrow \lambda_\gamma$ e $x \in \lambda_\gamma$ ponto qualquer, temos que existe $\alpha < \gamma$ tal que $x \in \lambda_\alpha$, logo, por (1), λ_α é aberto e tem apenas um número finito de pontos da sequência, donde, por (2), não pode ser ponto de acumulação da sequência. Agora, caso γ seja sucessor, temos, por (4), que $\lambda_\gamma \setminus \lambda_{\gamma-1}$ é discreto e fechado em λ_γ . Segue daí que apenas uma quantidade finita de elementos da sequência f está em $\lambda_{\gamma-1}$ e, por (2), essa parte deve ser fechada e discreta. Agora, o resto da imagem de f está em $\lambda_\gamma \setminus \lambda_{\gamma-1}$ e, portanto deve ser fechada e discreta também. Por fim a imagem da sequência, união desses dois conjuntos, deve ser fechada e, para ver que ela é discreta basta tomar os abertos anteriores que já comprovavam para uma das partes e retirar o outro fechado.

Tomamos então $A = S_\gamma[\omega]$ e $B \subset B_\xi$ de modo que $A \cap B = \emptyset$. Podemos tomar tais subconjuntos pois, caso $|A \cap B_\xi| < \aleph_0$, basta tirar a interseção dos dois conjuntos e, caso a interseção seja infinita, basta dividi-la em duas e tomar um conjunto como A e outro como B . Note que B é subconjunto

de um fechado e discreto e, portanto, é fechado e discreto. Como A é imagem de uma sequência crescente cofinal de ω em λ_γ , temos que A é fechado e discreto. Logo, $A \cup B$ é fechado e discreto, e, como o espaço é T_2 , $(A \cup B)' = \emptyset$.

Construímos assim $\langle \lambda_\beta, \tau_\beta \rangle = K(\lambda_\gamma, A, B)$ como no lema 5.1.1 tomando $M = \lambda_\beta \setminus \lambda_\gamma$ e a sequência s como sendo a identidade de ω em ω . Observe que o lema nos garante que o espaço construído tem as propriedades (1)-(4).

Trataremos agora o caso em que β é limite, para tanto definimos $\lambda_\beta^* = \sup\{\lambda_\gamma : \gamma < \beta\}$ e consideramos mais dois subcasos.

Caso $\lambda_\beta^* = \lambda_\beta$ definimos a topologia τ_β como sendo a topologia gerada pela base $\bigcup_{\gamma < \beta} \tau_\gamma$. Note que (1) é válido pois, para todo $\gamma < \beta$, temos $\tau_\gamma \subset \tau_\beta$. Agora, (2) é válido pois, dado um ponto $x \in \lambda_\beta$ e vizinhança V de x existe $\gamma < \beta$ tal que $x \in \lambda_\gamma$. Logo, por (2) para γ , existe W vizinhança aberta e compacta de x em λ_γ , e portanto em λ_β , tal que $W \subset V \cap \lambda_\gamma \subset V$; ademais, como tal W é compacto e τ_β é T_2 , temos que W é fechado. Segue, portanto, que nosso espaço é localmente compacto e zero dimensional. Para verificar a metrizabilidade basta notar que como λ_β é enumerável e primeiro enumerável temos que ele é segundo enumerável. Da zero dimensionalidade temos que λ_β é regular e o espaço é Hausdorff, portanto, do teorema de metrização de Urysohn, temos que λ_β é metrizável. Por fim, (3) é válido pois caso id tivesse p -limite x , por (1), ele já seria um p -limite em um espaço anterior, ademais não precisamos verificar (4) pois não se trata de um índice sucessor.

Agora, caso $\lambda_\beta^* < \lambda_\beta$ temos que, com a topologia acima, λ_β^* tem as propriedades (1)-(3). Considero agora A^* sequência crescente cofinal em λ_β^* , note que, usando um argumento anterior, A^* não pode ter ponto de acumulação em λ_β^* . Tomo ainda

$$\xi = \min\{\alpha < \omega_1 : B_\alpha \text{ é fechado e discreto e } B_\alpha \subset \lambda_\beta^*\}.$$

Note que, pela justificação acima, esse conjunto não é vazio. Tomamos, como na construção para β sucessor, $A \subset A^*$ e $B \subset B_\xi$. Consideramos $\langle \lambda_\beta, \tau_\beta \rangle = K(\lambda_\beta^*, A, B)$ como no lema 5.1.1, onde s é a identidade de ω e $M = \lambda_\beta \setminus \lambda_\beta^*$. De maneira análoga a construção do sucessor λ_β satisfaz (1)-(3) e (4) não precisa ser verificado.

Verificaremos agora que (5) é verdade. Com efeito, suponha que exista $\alpha < \omega_1$ tal que B_α não tem ponto de acumulação em nenhum λ_γ para $\gamma < \omega_1$. Deve existir $\beta < \omega_1$ tal que $B_\alpha \subset \lambda_\beta$ e, portanto, B_α é fechado e discreto nesse espaço. Mas, pela maneira como escolhemos ξ nas passagens da recursão devemos ter um ponto de acumulação em $\lambda_{\beta+\alpha+1}$, o que é um absurdo, pois ele é fechado e discreto.

Considero então $X_p = \langle \omega_1, \tau_p \rangle$ onde τ_p é a topologia gerada por $\bigcup_{\gamma < \omega_1} \tau_\gamma$. Note que tal topologia é T_2 e, portanto, pelo mesmo argumento usado anteriormente, ela é localmente compacta, zero dimensional e primeiro enumerável. Além disso ela também é enumeravelmente compacta por construção, pois garantimos com (5) que todo subconjunto enumerável de ω_1 tem ponto de acumulação, sendo assim X_p é sequencialmente compacto. Por um argumento anterior notamos que id não tem p -limite.

Só essas condições já são suficientes para o exemplo ser resposta negativa de **(SSt 1)**. Mas, fazendo uso de $\clubsuit$, veremos ainda que X_p é hereditariamente separável e perfeitamente normal, o que fortalece o contra-exemplo construído.

Note que para verificar a separabilidade hereditária basta verificar os subespaços não enumeráveis. Para tanto fixe H tal subespaço, afirmo que, para todo $\alpha < \omega_1$, temos $\overline{S_\alpha[\omega]} \supset \{\beta < \omega_1 : \beta \geq \lambda_\alpha\}$. Fixamos agora $\xi < \omega_1$ tal que, por $\clubsuit$, $S_\xi[\omega] \subset H$, o que nos dá que $\overline{S_\xi[\omega]}^H \supset \{\beta <$

$\omega_1 : \beta \geq \lambda_\alpha\} \cap H$ e, portanto sobra apenas uma quantidade enumerável de fora desse fecho para acrescentar à $S_\alpha[\omega]$ para torna-lo um conjunto denso em H . A verificação da afirmação anterior será feita por indução. Com efeito, fixado $\alpha < \omega_1$ tome $S_\alpha[\omega] \subset \lambda_\alpha$. Temos, pela construção de $\lambda_{\alpha+1}$, que $\lambda_{\alpha+1} \setminus \lambda_\alpha \subset \overline{S_\alpha[\omega]}$ e, supondo que $\{\beta < \omega_1 : \lambda_\alpha \leq \beta < \lambda_\xi\} \subset \overline{S_\alpha[\omega]}$ para todo $\xi < \gamma$, temos que a sequência crescente tomada na construção anterior, para auxiliar a construção da base dos pontos novos, está contida, a menos de uma quantidade finita, em $\overline{S_\alpha[\omega]}$. Sendo assim, temos que $\{\beta < \omega_1 : \lambda_\alpha \leq \beta < \lambda_\gamma\} \subset \overline{S_\alpha[\omega]}$, segue, portanto, que $\{\beta < \omega_1 : \lambda_\alpha \leq \beta < \omega_1\} \subset \overline{S_\alpha[\omega]}$.

Note que a observação acima nos dá que, dados dois fechados disjuntos F, G , um deles deve ser enumerável pois, caso contrário, usando $\clubsuit$, devem existir $\alpha < \beta < \omega_1$ tais que, sem perda de generalidade, $S_\alpha[\omega] \subset \overline{S_\alpha[\omega]} \subset F$ e $S_\beta[\omega] \subset \overline{S_\beta[\omega]} \subset G$, donde, $\{\xi < \omega_1 : \lambda_\beta \leq \xi < \omega_1\} \subset F \cap G$ o que é um absurdo. Podemos supor que o fechado F é enumerável. Usando a zero dimensionalidade cobrimos cada ponto de F com um único aberto-fechado que é disjunto de G e, como o espaço é enumeravelmente compacto, extraímos uma subcobertura finita de F . A união finita desses abertos-fechados e seus complementares são os abertos disjuntos que separam F de G . Mostramos assim que tal espaço é normal.

Resta ver que todo fechado F de ω_1 é um G_δ . Para tanto consideraremos dois casos, o enumerável e o não enumerável. Caso F seja um fechado não enumerável, então, pelas considerações acima, F é co-enumerável. Sendo assim, como os pontos do espaço são fechados, por Hausdorff, e $F = \bigcap_{x \in \omega_1 \setminus F} \omega_1 \setminus \{x\}$ é um G_δ . Caso F seja enumerável ele é limitado em ω_1 logo existe $\alpha < \omega_1$ tal que $F \subset \lambda_\alpha$, usando o fato de que nosso espaço é T_2 e que λ_α é aberto podemos escrever $F = \bigcap_{x \in \lambda_\alpha \setminus F} \lambda_\alpha \setminus \{x\}$, logo F é G_δ .

Note que essa construção de fato é um contra-exemplo para o problema de Scarborough-Stone pois, além de obtermos a SS-família, temos também que os espaços obtidos são perfeitamente normais e T_2 e, portanto, T_3 .

5.2 Uma construção com $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$

Nessa seção construiremos o segundo exemplo desse capítulo. Esta construção provém do artigo [27], e se baseia numa ideia muito semelhante a ideia do exemplo anterior. Mudamos os axiomas exigidos e tiramos algumas das propriedades tradicionais da reta de Ostaszewski, como, por exemplo, a separabilidade hereditária. Mas ainda assim queremos construir um espaço topológico recursivamente tendo como base ω .

Começamos definindo uma propriedade que enfraquece o conceito de normalidade em espaços topológicos.

Definição 5.2.1. Dizemos que um espaço topológico X tem a propriedade D se, dado um fechado enumerável discreto $F \subset X$, F tem vizinhanças fechadas arbitrariamente pequenas, isto é, dada V vizinhança aberta de F existe W aberto de X tal que $F \subset W \subset \overline{W} \subset V$.

Agora faremos uma proposição que associa a propriedade D com uma família discreta de abertos, o que vai nos ajudar a construir uma base para pontos na demonstração central.

Proposição 5.2.2. Dados um espaço topológico X e $F \subset X$ um fechado enumerável discreto são equivalentes:

- (a) F tem vizinhanças fechadas arbitrariamente pequenas em X ;

(b) Existe uma família discreta de abertos de X , $\langle U_x : x \in F \rangle$, tal que para todo $x \in F$ temos $x \in U_x$.

Demonstração. Começamos com a verificação de (b) implica (a). Considere um aberto V com $F \subset V$ e a família $\langle U_x : x \in F \rangle$ dada em (b). Defina $V_x = V \cap U_x$ e tome, por regularidade, W_x aberto com $x \in W_x \subset \overline{W_x} \subset V_x$. Note que, tomando $W = \bigcup_{x \in F} W_x$, $\overline{W}$ é vizinhança fechada de F , resta ver que $\overline{W} \subset V$. Com efeito, veremos que $\bigcup_{x \in F} \overline{W_x} \subset V$ é fechado e, portanto, $\overline{W} = \bigcup_{x \in F} \overline{W_x}$. Dado $y \notin \bigcup_{x \in F} \overline{W_x}$, achamos o aberto A_y que intersecta apenas um dos abertos da família discreta, sem perda de generalidade, U_x . Logo, $A_y \setminus \overline{W_x}$ é vizinhança aberta de y e resolve o problema pois tiramos o único elemento da união que tinha interseção.

Verificamos agora (a) implica (b). Para tanto enumeramos $F = \{x_n : n \in \omega\}$. Construiremos, por indução, abertos V_n de forma que, para todo $n \in \omega$,

- $x_n \in V_n$;
- $V_n \cap (\bigcup_{i < n} V_i) = \emptyset$;
- $\overline{V_n} \cap \{x_i : i > n\} = \emptyset$.

Note que, como F é discreto, existe V_0 aberto tal que $F \cap V_0 = \{x_0\}$ logo $F \setminus \{x_0\}$ é fechado e, por regularidade, podemos tomar V_0 tal que $\overline{V_0} \cap (F \setminus \{x_0\}) = \emptyset$. Supondo construídos V_i para todo $i < n$ temos que $F \setminus \{x_i : i < n\}$ é fechado, considero aberto V_n que como acima, por regularidade, pode ser tal que $x_n \in V_n$ e $\overline{V_n} \cap [(\bigcup_{i < n} \overline{V_i}) \cup (F \setminus \{x_i : i < n\})] = \emptyset$, tal V_n é o procurado.

Considero $V = \bigcup_{n \in \omega} V_n$ e seja U aberto dado por (a) tal que $\overline{U} \subset V$, veremos que $U_n = V_n \cap U$ é como desejado. Com efeito, a família satisfaz a última condição por construção, bastando ver que é discreta. Para tanto fixe $x \in X$ e considere dois casos. O primeiro caso é $x \in \overline{U} \subset V$ e basta notar que existe $n \in \omega$ tal que $x \in V_n$, logo como a família dos V_i 's é disjunta, o aberto tomado serve. No segundo caso tomo $x \notin \overline{U}$ basta tomar uma vizinhança aberta de x que confirma que $\overline{U}$ é fechado. $\square$

A propriedade D e a proposição acima são essenciais para a construção do exemplo. Elas se relacionam com a maneira como vamos obter as novas bases para cada passo recursivo da construção.

Faremos agora uma definição de um cardinal que está intimamente relacionado à propriedade D.

Definição 5.2.3. $\mathfrak{b}_D = \min\{|X'| : X \text{ é primeiro enumerável e não tem a propriedade D}\}.$

Nesse próximo teorema voltamos a trabalhar o pequeno cardinal $\mathfrak{b}$, que está relacionado com o axioma adicional que exigiremos para nossa construção. Um dos objetivos será verificar que o novo cardinal, $\mathfrak{b}_D$, é de fato, um pequeno cardinal. Além disso, analisamos como $\mathfrak{b}_D$ se relaciona com $\mathfrak{b}$, dando uma interpretação topológica para o último.

Teorema 5.2.4. $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_D$.

Demonstração. Começaremos verificando que $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{b}_D$. Para tanto fixamos X primeiro enumerável tal que $|X'| < \mathfrak{b}$, onde X' é o conjunto de pontos de acumulação de X , e veremos que X tem a propriedade D. Com efeito, fixe $F \subset X$ fechado enumerável discreto e V vizinhança aberta de F . A construção é trivial para $|F| < \omega$ usando a regularidade, assumimos então $|F| = \omega$ e enumeramos $F = \{x_n : n \in \omega\}$ sem repetições. Usando que X é primeiro enumerável e regular, tomamos, para todo $n \in \omega$, $\langle B_i^n : i \in \omega \rangle$ base local para x_n , usando a regularidade, de modo que:

1. para todo $i \in \omega$, $\overline{B_{i+1}^n} \subset B_i^n$;

2. $\overline{B_0^n} \subset V$.

Agora, para toda $f \in \omega^\omega$, defino $B(f) = \bigcup_{n \in \omega} B_{f(n)}^n$. Note que $\langle B(f) : f \in \omega^\omega \rangle$ é base de vizinhanças abertas de F , pois, dado W vizinhança aberta de F basta pegar $B(h)$ onde $h \in \omega^\omega$ é dada por $h(n) = \min\{m \in \omega : B_m^n \subset W\}$.

Definimos então, para todo $y \in X' \setminus V$, a função $f_y \in \omega^\omega$ de modo que $y \notin \overline{B(f_y)}$. Tal função existe pois, pela regularidade de X , existe aberto W tal que $F \subset \overline{W} \subset V$, e, portanto, $y \notin \overline{W}$. Basta tomar agora f_y dada por $f_y(n) = \min\{i \in \omega : B_i^n \subset W\}$, donde $\overline{B(f_y)} \subset \overline{W} \subset V$ e, portanto, $y \notin \overline{B(f_y)}$. Sendo assim, como $|X' \setminus V| \leq |X'| < \mathfrak{b}$, existe $g \in \omega^\omega$ tal que, para todo $y \in X' \setminus V$, $f_y \leq^* g$. Veremos que $\overline{B(g)} \subset V$ o que confirma a propriedade D. Com efeito, fixado $y \in X' \setminus V$, seja $N \in \omega$ tal que para todo $n \geq N$, $f_y(n) \leq g(n)$. Temos que

$$\overline{B(g)} = \left(\bigcup_{i < N} \overline{B_{g(i)}^i} \right) \cup \left(\overline{\bigcup_{i \geq N} B_{g(i)}^i} \right) \subset \left(\bigcup_{i < N} \overline{B_{g(i)}^i} \right) \cup \left(\overline{\bigcup_{i \geq N} B_{f_y(i)}^i} \right).$$

Fixamos U_i , para $0 \leq i \leq N$, vizinhança aberta de y tal que $U_i \cap \overline{B_{g(i)}^i} = \emptyset$, que existe por (2). Agora, tomamos U vizinhança aberta de y que separa $\overline{B(f_y)}$ de y . Como

$$\overline{\bigcup_{i \geq N} B_{f_y(i)}^i} \subset \overline{B(f_y)},$$

temos que $U \cap \bigcap_{i=0}^N U_i$ é aberto que separa $\overline{B(g)}$ de y . Por fim, observamos que $B(g)$ somente possui pontos de acumulação em V , isto é, $\overline{B(g)} \subset V$, o que termina a primeira desigualdade.

Por fim verificamos que $\mathfrak{b} \geq \mathfrak{b}_D$. Para tanto basta construir um espaço topológico X de modo que:

1. X é primeiro enumerável;
2. $|X'| \leq \mathfrak{b}$;
3. X não tem a propriedade D.

Fixe $B \subset \omega^\omega$ família de funções ilimitadas na ordem $\leq^*$ e tal que $|B| = \mathfrak{b}$. Considero $X = \omega \cup (\omega \times \omega) \cup B$ e coloco em X a topologia gerada por:

$$\mathcal{H} = \mathcal{P}(\omega \times \omega) \cup \{\{k\} \times [n, \infty) \cup \{k\} : k, n \in \omega\} \cup \{\{f\} \cup (f \setminus F) : f \in B, F \subset \omega \times \omega \text{ finito}\}.$$

Tal $\mathcal{H}$ gera uma topologia, pois $\bigcup \mathcal{H} = X$ e, dados dois elementos de $\mathcal{H}$, a interseção continua em um dos conjuntos e, no pior dos casos, ela fica contida em $\omega \times \omega$. Note ainda que $|X'| \leq |X| = \mathfrak{b}$ e X é primeiro enumerável por construção da base $\mathcal{H}$ que gera a topologia. Ademais temos que $\omega \subset X$ é enumerável, fechado e discreto pela construção da base de cada elemento.

Veremos que ω não tem a propriedade D, isto é, para toda vizinhança aberta básica de ω em X ,

$$V = \bigcup \{\{k\} \times [n_k, \infty) \cup \{k\} : k \in \omega\},$$

temos que existe $f \in B$ tal que $f \in \overline{V}$. Caso contrário defina $h \in \omega^\omega$ por $h(k) = n_k$. Fixamos $f \in B$ e então, existe vizinhança aberta básica de f , dada por $W = \{f\} \cup f \setminus F$, para algum $F \in [\omega \times \omega]^\omega$, de modo que $W \cap V = \emptyset$. Segue que,

$$f \setminus F \subset \bigcup \{\{k\} \times [0, n_k)\},$$

donde, $f \leq^* h$, o que é um absurdo pois h estaria limitando as funções em B . □

O próximo lema é importante na construção do exemplo, que será feita por recursão transfinita em $\mathfrak{c}$. Ele nos ajuda a garantir que, em cada passo da construção, adicionamos um ponto de acumulação para todos os subconjuntos enumeráveis de $\mathfrak{c}$.

Lema 5.2.5. *Existe função sobrejetora $K : \mathfrak{c} \setminus \omega \rightarrow [\mathfrak{c}]^\omega$ tal que, para todo $\eta \in \mathfrak{c} \setminus \omega$ vale $K(\eta) \subset \eta$.*

Demonstração. Note que

$$|\mathfrak{c} \setminus \omega| = |\mathfrak{c} \times \mathfrak{c}| = |[\mathfrak{c}]^\omega| = \mathfrak{c}.$$

Sendo assim podemos criar uma função sobrejetora $L : \mathfrak{c} \setminus \omega \rightarrow [\mathfrak{c}]^\omega$ de modo que, para todo $A \in [\mathfrak{c}]^\omega$, temos $|L^{-1}[\{A\}]| = \mathfrak{c}$. Defino agora $K : \mathfrak{c} \setminus \omega \rightarrow [\mathfrak{c}]^\omega$ por $K(\eta) = L(\eta)$ caso $L(\eta) \subset \eta$ e $K(\eta) = \omega$ caso contrário. Por construção K satisfaz a segunda propriedade, basta ver então que K é sobrejetora. Com efeito, dado $A \in [\mathfrak{c}]^\omega$, como $cf(\mathfrak{c}) > \omega$ devemos ter $\eta \in L^{-1}[\{A\}]$ tal que $A \subset \eta$. Agora, para tal η temos $K(\eta) = L(\eta) = A$. □

Finalmente vamos fazer a construção dos espaços X_p para o segundo contra-exemplo.

Exemplo 5.2.6 ($\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$). *Construiremos agora, para cada $p \in \omega^*$, uma topologia τ_p sobre $\mathfrak{c}$ de forma que $\langle \mathfrak{c}, \tau_p \rangle$ é sequencialmente compacto e $\{\langle \mathfrak{c}, \tau_p \rangle : p \in \omega^*\}$ é SS-família. Tal construção nos permite dar um exemplo de um produto de espaços sequencialmente compactos que não é sequencialmente compacto. Além das propriedades acima mencionadas, construímos τ_p de modo que o espaço topológico seja zero dimensional, localmente compacto e T_2 .*

Fixamos $p \in \omega^*$ e $K : \mathfrak{c} \setminus \omega \rightarrow [\mathfrak{c}]^\omega$ como no lema 5.2.5. Por recursão, construiremos, para todo $\eta \in \mathfrak{c} + 1$, uma base de abertos compactos, $\mathcal{B}_\eta$, para uma topologia τ_η em η de modo que:

- (1) $\langle \eta, \tau_\eta \rangle$ é um espaço topológico T_2 , primeiro enumerável e zero dimensional;
- (2) para todo $\zeta_1 < \zeta_2 \leq \eta$, $\mathcal{B}_{\zeta_1} \subset \mathcal{B}_{\zeta_2}$ e, portanto, $\tau_{\zeta_1} \subset \tau_{\zeta_2}$;
- (3) para todo $\zeta \in \eta \setminus \omega$, $K(\zeta)$ tem ponto de acumulação em $\langle \eta, \tau_\eta \rangle$;
- (4) para todo $\zeta \in \eta \setminus \omega$ existe $P \in p$ tal que $\zeta \notin \overline{P}^{\langle \eta, \tau_\eta \rangle}$.

Agora, sob essas quatro condições, tomamos $\tau_{\mathfrak{c}} = \tau_p$. Observe que (1) nos dá que $\langle \mathfrak{c}, \tau_p \rangle$ é T_2 e zero dimensional e, portanto, T_3 . Temos ainda que (1) garante que o espaço é primeiro enumerável e (3) nos dá, pela sobrejetividade de K , que $\langle \mathfrak{c}, \tau_p \rangle$ é enumeravelmente compacto, donde, $\langle \mathfrak{c}, \tau_p \rangle$ é sequencialmente compacto. Veremos agora que $\omega \subset \mathfrak{c}$ não tem p -limite em $\langle \mathfrak{c}, \tau_p \rangle$, como ω é discreto em τ_p basta supor, por absurdo, que $\zeta \in \mathfrak{c} \setminus \omega$ é p -limite de ω . Tomamos então $P \in p$ tal que $\zeta \notin \overline{P}^{\langle \mathfrak{c}, \tau_p \rangle}$ e consideramos $A = \mathfrak{c} \setminus \overline{P}^{\langle \mathfrak{c}, \tau_p \rangle}$. Mas, como $\zeta \in A$, temos que $A \cap \omega \in p$, e, por outro lado, $A \cap P = \emptyset$, o que é um absurdo.

Basta então verificar essa construção para obter que $\{\langle \langle \mathfrak{c}, \tau_p \rangle, id_\omega \rangle : p \in \omega^*\}$ é uma SS-família.

Para todo $n \in \omega$ podemos tomar $\mathcal{B}_n = \tau_n = \mathcal{P}(n)$. Note que os elementos são, de fato, abertos-fechados compactos, pois são finitos. As condições (3) e (4) são vaziamente satisfeitas. Agora a condição (1) é válida pois n é discreto e a condição (2) é válida, pois, dado $m < n \in \omega$ temos que

$\mathcal{P}(m) \subset \mathcal{P}(n)$. Ademais, como em todas as etapas o espaço é T_2 , temos que $\{n\}$ é aberto para todo $n \in \omega$, logo, por (2), ω é discreto. Supomos agora que τ_η está construída para todo $\eta < \alpha$ e consideramos dois casos:

- Caso α seja ordinal limite. Tomamos $\mathcal{B}_\alpha = \bigcup_{\eta < \alpha} \mathcal{B}_\eta$. Sabemos que $\bigcup \mathcal{B}_\alpha = \alpha$ pois, para todo $\eta < \alpha$, $\eta = \bigcup \mathcal{B}_\eta$. Ademais, dados $U, V \in \mathcal{B}_\alpha$, temos que existem $\eta_1 \leq \eta_2 < \alpha$ tais que $U \in \mathcal{B}_{\eta_1}$ e $V \in \mathcal{B}_{\eta_2}$. Agora, pela hipótese de indução (2), $U \in \mathcal{B}_{\eta_2}$, logo $U \cap V \in \mathcal{B}_{\eta_2} \subset \mathcal{B}_\alpha$.

Agora (2) é prontamente verificado pois, dados $\eta_1 < \eta_2 \leq \alpha$, temos $\mathcal{B}_{\eta_1} \subset \mathcal{B}_{\eta_2}$. Para verificar (3), podemos assumir que $\alpha > \omega$. Observamos que, fixado $\zeta \in \alpha \setminus \omega$, existe $\eta \in \alpha$, tal que $\zeta \in \eta$. Agora usamos (3), para η , e temos que $K(\zeta) \subset \zeta \subset \eta$ tem ponto de acumulação β em $\langle \eta, \tau_\eta \rangle$. Como (2) é válido, qualquer aberto A de α contendo β é tal que $(K(\zeta) \cap A \cap \eta) \setminus \{\beta\} \neq \emptyset$, donde $(K(\zeta) \cap A) \setminus \{\beta\} \neq \emptyset$.

Com relação a verificação de (1), basta notar que a topologia nova claramente é T_2 , pois, dados $\eta_1 < \eta_2 < \alpha$, temos que $\tau_2 \subset \tau_\alpha$ é T_2 e conseguimos abertos que separam η_1 e η_2 . Ademais, o espaço é primeiro enumerável, pois, fixado $x \in \alpha$, temos que existe $\eta \in \alpha$ tal que $x \in \eta$. Agora, por (1) para η , existe uma base de abertos enumerável x em τ_η . Por (2) para α , temos que η é aberto em α e, portanto, a base enumerável de x em τ_η é base em τ_α . Por fim, para ver que o espaço é zero dimensional, fixamos $B \in \mathcal{B}_\alpha$. Sabemos que existe $\eta \in \alpha$, tal que $B \in \mathcal{B}_\eta$, logo B é compacto em η e, por (2) para α , é compacto em α . Segue que, como α é T_2 , B é fechado e compacto em α .

Por fim, para verificar (4), novamente supomos $\alpha > \omega$, fixe $\zeta \in \alpha$ e suponha por absurdo que, para todo $P \in p$ temos $\zeta \in \overline{P}^{(\alpha, \tau_\alpha)}$. Nessa situação, dado $\eta \in \alpha$ tal que $\zeta \in \eta$, para todo aberto $A \in \tau_\eta \subset \tau_\alpha$ contendo ζ , temos $A \cap P \neq \emptyset$, logo $\zeta \in \overline{P}^{(\eta, \tau_\eta)}$ para todo $P \in p$, contrariando a condição (4) para $\langle \eta, \tau_\eta \rangle$.

- Caso $\alpha = \beta + 1$ seja ordinal sucessor. Dividimos a construção em dois subcasos: se $K(\beta)$ tem ponto de acumulação em $\langle \beta, \tau_\beta \rangle$, ou não.

Para o primeiro subcaso defino $\mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}_\beta \cup \{\{\beta\}\}$. Note que, para que (2) seja válido, por hipótese de indução, basta ver que $\mathcal{B}_\beta \subset \mathcal{B}_\alpha$, e tal afirmação é imediata pela definição de $\mathcal{B}_\alpha$.

Temos que (3) é verdade. Com efeito, usando a hipótese de indução para $K(\xi)$ com $\xi < \beta$, temos que $K(\xi)$ tem ponto de acumulação em β , e sabemos que $K(\beta)$ tem ponto de acumulação em β . Sendo assim, como no passo α apenas acrescentamos um ponto isolado, temos que os pontos de acumulação tomados continuam sendo pontos de acumulação em α .

Agora, (4) é verdade, pois, como $\{\beta\}$ é aberto, para todo $P \in p$, temos $\overline{P}^{(\alpha, \tau_\alpha)} \subset \beta$. Garantimos, assim, a veracidade de (4) para $\zeta = \beta$. Para os outros ζ basta aplicar a hipótese de indução em conjunto com o fato que não adicionamos nenhum ponto de acumulação novo para subconjuntos de α , pois β é ponto isolado.

Para a verificação de (1), note que τ_α é primeiro enumerável, pois $\mathcal{B}_\beta$ fornece uma base enumerável para todo $\xi < \beta$, e β é ponto isolado. Como τ_β é T_2 , por indução, e β é isolado, segue que τ_α é T_2 . Note, por fim, que, como α é T_2 , então $\{\beta\}$ é fechado e compacto, logo, pela construção, $\mathcal{B}_\alpha$ é base de abertos-fechados compactos.

Para o segundo subcaso, como $K(\beta)$ não tem ponto de acumulação em $\langle \beta, \tau_\beta \rangle$ e tal topologia é T_2 , temos que $K(\beta)$ é fechado e discreto. Considere então $H, I \in [K(\beta)]^\omega$ disjuntos, de modo

que $H \cup I = K(\beta)$. Note que, como α é sucessor, $\alpha < \mathfrak{c}$, donde $|\beta'| \leq |\beta| < \mathfrak{c} = \mathfrak{b} = \mathfrak{b}_D$, isto é, $\langle \beta, \tau_\beta \rangle$ tem a propriedade D.

Usando a proposição acima, e a construção da base de β , tomamos uma família discreta de abertos-fechados compactos básicos, dada por:

$$\mathcal{U} = \{U_x : x \in K(\beta)\} \text{ com } x \in U_x \text{ para todo } x \in K(\beta).$$

Defino $U_H = \bigcup_{x \in H} U_x$ e $U_I = \bigcup_{y \in I} U_y$. Note que, como $\mathcal{U}$ é discreto,

$$\overline{U_H} \cap \overline{U_I} = \left(\bigcup_{x \in H} \overline{U_x} \right) \cap \left(\bigcup_{y \in I} \overline{U_y} \right) = \emptyset$$

Sendo assim, $\omega \cap \overline{U_H}$ é disjunto de $\omega \cap \overline{U_I}$ e portanto, sem perda de generalidade, podemos supor $\omega \cap \overline{U_H} \notin p$.

Defino

$$\mathcal{B} = \left\{ \{\beta\} \cup \left(\bigcup_{x \in H \setminus F} U_x \right) : F \in [H]^{<\omega} \right\}$$

e considero τ_α a topologia gerada pela base $\mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}_\beta \cup \mathcal{B}$. Note que tal conjunto é base para uma topologia em α . Com efeito, fixe dois elementos A e B de $\mathcal{B}_\alpha$ e $y \in A \cap B$. Caso ambos os elementos estejam em $\mathcal{B}_\beta$ basta usar o fato de que este conjunto é base. Caso ambos os elementos estejam na base para o novo ponto, temos que a interseção também é um elemento dessa base, uma vez que a união de dois conjuntos finitos é finita. Agora, caso $A \in \mathcal{B}_\beta$ e $B = \{\beta\} \cup \left(\bigcup_{x \in H \setminus F} U_x \right)$, para algum $F \in [H]^{<\omega}$, temos

$$A \cap B = A \cap \left(\bigcup_{x \in H \setminus F} U_x \right) = \bigcup_{x \in H \setminus F} (A \cap U_x),$$

donde, como cada $A \cap U_x$ é aberto em β , existe $U \in \mathcal{B}_\beta$ tal que $y \in U \subset A \cap B$. Por fim, pela construção de $\mathcal{B}_\alpha$, (2) é válido.

Verificaremos a afirmação (3) para α . Como (2) é válido e, portanto, β é aberto em α , temos que, para todo $\xi < \beta$, os pontos de acumulação de $K(\xi)$ em β são pontos de acumulação em α . Resta ver que $K(\beta)$ tem ponto de acumulação em α . Mas isso é imediato da construção, uma vez que a base de β foi tomada para que β seja ponto de acumulação de $K(\beta)$.

Agora veremos que (1) é válido. Para verificar que α é primeiro enumerável é só usar (2) para as bases de pontos diferentes de β e notar que a base de abertos de β dada por $\mathcal{B}$ é enumerável. Para verificar que $\alpha \in T_2$ temos que, por (2) para α , e (1) para β , podemos separar dois pontos por abertos se nenhum deles é β , resta ver, dado $\eta < \beta$, que existem abertos separando eles. Com efeito, temos que, pelo fato da família $\mathcal{U}$ ser discreta em β , dado η , existe $V \in \mathcal{B}_\beta$ que só intercepta a família $\mathcal{U}$ num único elemento U_y . Sendo assim, tomamos a vizinhança aberta de β dada por $U = \{\beta\} \cup \bigcup_{x \in H \setminus \{y\}} U_x$, e temos que $\eta \in V$, $\beta \in U$ e $V \cap U = \emptyset$, como desejado. Por fim, para verificar que α é zero dimensional, devemos ver que $\mathcal{B}_\alpha$ é base de compactos, e, por T_2 , é uma base de abertos fechados. Dado qualquer elemento de $\mathcal{B}_\beta$ temos que, ele

é compacto em β , uma vez que, pela construção, o espaço $\langle \beta, \tau_\beta \rangle$ é subespaço de α com a nova topologia. Agora devemos ver que qualquer elemento da base de β é compacto. Fixamos $U = \{\beta\} \cup \bigcup_{x \in H \setminus F} U_x$, para algum $F \in [H]^{<\omega}$, aberto básico. Agora, qualquer cobertura de U por abertos básicos deve conter algum elemento da base de β , seja $W = \{\beta\} \cup \bigcup_{x \in H \setminus F'} U_x$, para algum $F' \in [H]^{<\omega}$, tal aberto. Como, para todo $x \in H$, U_x é compacto em β , então ele é compacto em α . Segue então que $U \setminus W = \bigcup_{x \in F' \setminus F} U_x$ é compacto, pois é união finita de compactos. Tomamos então uma subcobertura finita para $U \setminus W$ da cobertura original e, acrescentando W , temos a subcobertura finita desejada.

Por fim, para ver que (4) é válido, fixamos $\zeta \in \alpha \setminus \omega$. Caso $\zeta = \beta$, tomando $P = \omega \setminus U_H \in p$ temos que $\zeta = \beta \notin \overline{P}^{(\alpha, \tau_\alpha)}$ pela construção da base de β . Caso $\zeta \neq \beta$ temos, por indução, $Q \in p$ tal que $\zeta \notin \overline{Q}^{(\beta, \tau_\beta)}$; seja $A \in \tau_\beta \subset \tau_\alpha$ que comprova tal afirmação, o mesmo A verifica $\zeta \notin \overline{Q}^{(\alpha, \tau_\alpha)}$.

Quando comparamos as duas construções notamos que elas tem o mesmo padrão. Algumas das diferenças provêm do fato de até onde nós estendemos o espaço e algumas propriedades que mudam de uma construção para outra, como, por exemplo, a separabilidade hereditária. Outra diferença, não muito importante, é o número de elementos que adicionamos a cada passo da construção. Ao passo que, na primeira construção, $\clubsuit$ e a hipótese do contínuo conseguem garantir a compacidade enumerável, na segunda construção precisamos estender ω até $\mathfrak{c}$ se quisermos garantir que conseguimos pontos de acumulação para todo subconjunto enumerável de $\mathfrak{c}$. Sendo assim, embora as duas construções sejam semelhantes, temos que usamos de algumas técnicas e propriedades diferentes.

Capítulo 6

Espaços de Franklin-Rajagopalan, o γN e o Open Coloring Axiom

Durante o capítulo anterior construímos contra-exemplos utilizando os ordinais como base para a construção de uma nova topologia. Nesse capítulo, trabalharemos com algumas classes de espaços topológicos, a saber, a classe dos espaços de Franklin-Rajagopalan e a classe dos espaços ΓN . O conceito de ΓN é clássico e discorre sobre espaços com densos discretos enumeráveis, nos quais o resto do espaço é isomorfo ao ω_1 . O conceito de espaços de Franklin-Rajagopalan surgiu no artigo [6] como uma generalização para os espaços ΓN , pois, permitimos que o resto seja isomorfo a qualquer ordinal.

A primeira seção trabalha com a construção dos espaços de Franklin-Rajagopalan e nos dá uma caracterização para uma parte especial desses espaços. Durante essa seção comentaremos como podemos construir contra-exemplos a partir dos espaços de Franklin-Rajagopalan, usando a pré-ordem de Rudin-Kiesler para os ultrafiltros de ω . Tal seção contém os conteúdos do artigo [19].

Durante a segunda seção tratamos da construção feita no artigo [17]. Para tanto, trabalharemos com o caso específico da classe ΓN . Usamos o Proper Forcing Axiom e o Open Colouring Axiom para garantir que os espaços ΓN nunca podem ser T_5 e assim conseguir um resultado positivo para (SSt 2) para a classe dos espaços T_5 .

6.1 FR espaços

Nessa seção observaremos algumas propriedades de espaços de Franklin-Rajagopalan e dos espaços γN , tendo em vista um contra-exemplo e uma resposta afirmativa para o problema de Scarborough-Stone.

Definição 6.1.1. *Um espaço topológico X é dito ser um espaço topológico de Franklin-Rajagopalan (FR-espaço) se ele é localmente compacto, T_2 , além de possuir subespaço Y discreto, denso e enumerável tal que $X \setminus Y$, com a topologia de subespaço, seja homeomorfo a algum ordinal α com a topologia da ordem.*

A definição acima é uma generalização de um espaço γN que aparece como exercício no livro [5], e que serão vistos mais pra frente como um corolário das construções feitas nesse capítulo. Agora, no teorema a seguir, veremos uma caracterização, usando torres, para uma classe específica dos FR-espaços, a saber, os FR-espaços sequencialmente compactos e não compactos.

Teorema 6.1.2. *Para cada torre T de ω existe um FR-espaço associado $X(T)$ sequencialmente compacto e não compacto. De maneira análoga, se X é um FR-espaço, sequencialmente compacto e não compacto, então existe uma torre T tal que $X = X(T)$, onde $X(T)$ é como na primeira parte*

do teorema.

Demonstração. Começaremos demonstrando a ida, para tanto fixe $T = \{t_\alpha : \alpha < \delta\}$ torre em $\mathbb{N}$. Aqui $\mathbb{N}$ é um conjunto infinito enumerável disjunto de δ , no qual identificamos seus elementos com os elementos de ω .

Tomamos $X(T) = \mathbb{N} \cup \delta$ e definiremos uma topologia para tal espaço satisfazendo as propriedades desejadas definindo vizinhanças básicas de cada ponto. Fixados $\beta < \alpha < \delta$ e $F \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$ defino

$$V(\alpha, \beta, F) = \{\gamma \in \delta : \beta < \gamma \leq \alpha\} \cup (t_\beta \setminus t_\alpha) \setminus F.$$

Caso $\alpha = 0 \in \delta$ defino $V(0, F) = \{0\} \cup (\mathbb{N} \setminus t_0) \setminus F$. Considero ainda $\mathcal{V}$ o conjunto de todas as vizinhanças definidas acima.

Veremos agora que o seguinte conjunto forma uma base para uma topologia em $X(T)$:

$$\mathcal{B} = \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \mathcal{V}.$$

Com efeito, claramente $\bigcup \mathcal{B} = X(T)$. Resta ver que, dados $A, B \in \mathcal{B}$ e $p \in A \cap B$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $p \in V \subset A \cap B$. Note que, se um dos abertos for um unitário $\{n\}$ basta tomar $V = \{n\}$, podemos assumir então que $A, B \in \mathcal{V}$. Novamente, se $p \in \mathbb{N}$, basta tomar $V = \{p\}$, considero então $p = \gamma \in \delta$ e $A = V(\alpha_0, \beta_0, F_0)$ e $B = V(\alpha_1, \beta_1, F_1)$. O caso em que uma das vizinhanças seja do tipo $V(0, F)$ é análogo ao que será feito a seguir.

Tome $\alpha = \min\{\alpha_0, \alpha_1\}$ e $\beta = \max\{\beta_0, \beta_1\}$, e note que $p \in (\beta, \alpha]$, donde $p \in V(\alpha, \beta, F)$ para todo $F \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$. Agora, como T é torre, temos para $i = 0, 1$:

$$t_\beta \setminus t_\alpha \subset^* t_\beta \setminus t_{\alpha_i} \subset^* t_{\beta_i} \setminus t_{\alpha_i},$$

portanto, existem $G_i \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$, para $i = 0, 1$, tais que $(t_\beta \setminus t_\alpha) \setminus G_i \subset t_{\beta_i} \setminus t_{\alpha_i}$. Tome $F = G_0 \cup G_1 \cup F_0 \cup F_1$ e observe que, com essa escolha,

$$V = V(\alpha, \beta, F) = (\beta, \alpha] \cup (t_\beta \setminus t_\alpha) \setminus F \subset V(\alpha_i, \beta_i, F_i).$$

Veremos agora que a topologia obtida dessa base tem as propriedades desejadas.

$\mathbb{N}$: Note que, todos os elementos de $\mathcal{B}$ contém elementos de $\mathbb{N}$ pois ou são unitários de $\mathbb{N}$ ou, como T é torre em $\mathbb{N}$, $|t_\beta \setminus t_\alpha| = \omega$ para $\beta < \alpha < \delta$, logo $\mathbb{N}$ é denso. Ademais, como os unitários de $\mathbb{N}$ fazem parte de $\mathcal{B}$ temos que $\mathbb{N}$ é discreto.

$X(T) \setminus \mathbb{N}$: Devemos ver que tal subespaço é homeomorfo à δ com a topologia da ordem. Com efeito, identifico os elementos de δ usando a identidade, os abertos de $\mathcal{V}$ restritos à δ nos dão uma base para a topologia de subespaço e tal base é a mesma base da topologia da ordem, comprovando o homeomorfismo.

T_2 : Fixemos $p, q \in X(T)$ tais que $p \neq q$. Caso $p \in \mathbb{N}$ basta tomar $\{p\}$ e $V(\alpha, \beta, F)$ tais que $q \in V(\alpha, \beta, F)$ e $p \in F$. Podemos supor então que $p, q \in \delta$ e, sem perda de generalidade, $p < q$. Devemos achar $F_0, F_1 \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$ de maneira que

$$V(p, 0, F_0) \cap V(q, p, F_1) = \emptyset, \text{ caso } p = 0 \text{ usamos } V(0, F_0).$$

Note que $(t_0 \setminus t_p) \cap (t_p \setminus t_q) = \emptyset$, e os intervalos de δ são disjuntos, logo podemos tomar $F_0 = F_1 = \emptyset$.

Localmente compacto: Veremos que os elementos de $\mathcal{B}$ são todos compactos. Com efeito, no caso dos unitários não há nada para ser checado. Podemos considerar então apenas os elementos de $\mathcal{V}$. Fixe $W = V(\alpha, \beta, F)$ e considere uma cobertura $\mathcal{C}$ de W por abertos básicos. Temos que $(\beta, \alpha] = [\beta + 1, \alpha]$ tem a topologia da ordem, e portanto é compacto. Consideramos então os elementos de $\mathcal{C}$, $C_i = V(\alpha_i, \beta_i, F_i)$, para $i = 1, \dots, n$, que cobrem o intervalo acima. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\beta_i < \beta_{i+1} \leq \alpha_i \leq \alpha_{i+1}$, $\beta = \beta_1$ e $\alpha = \alpha_n$. Sendo assim, por indução em n usando a desigualdade acima, temos que

$$\bigcup_{i=1}^n (t_{\beta_i} \setminus t_{\alpha_i}) = {}^* t_{\beta_1} \setminus t_{\alpha_n} = t_{\beta} \setminus t_{\alpha}.$$

Agora basta completar com abertos de $\mathcal{C}$ que cobrem uma quantidade finita de pontos que faltam para cobrir $(t_{\beta} \setminus t_{\alpha}) \setminus F$, comprovando a compacidade.

Não compacto: O espaço $X(T)$ não é compacto pois, caso o fosse, como $\mathbb{N}$ é aberto, temos que δ é fechado e, portanto, compacto com a topologia da ordem. Agora, como T é torre, devemos ter que δ é limite para não existir pseudo interseção, o que é um absurdo, pois, um ordinal é compacto se, e somente se, ele é sucessor.

Sequencialmente compacto: Seja $A = \{a_n : n \in \omega\} \subset X(T)$ com $a_i \neq a_j$ se $i \neq j$, veremos que tal conjunto possui um subconjunto convergente. Caso $|A \cap \delta| = \omega$ basta tomar sequência crescente de elementos de $A \cap \delta$ e considerar seu supremo α . Note que $\alpha < \delta$ pois $cf(\delta) > \omega$, já que, caso $cf(\delta) \leq \omega$, podemos tomar uma torre contida em T de tamanho ω , o que é um absurdo.

Caso $|A \cap \delta| < \omega$ temos $|A \cap \mathbb{N}| = \omega$, sem perda de generalidade suponha que $A \subset \mathbb{N}$. Como T é torre, A não pode ser pseudo interseção de T logo, usando boa ordem, existe $\alpha < \delta$ o menor ordinal tal que $A \not\subseteq {}^* t_{\alpha}$. Agora existe $B \subset A$ tal que $|B| = \omega$ e $B \subset \mathbb{N} \setminus t_{\alpha}$. Pela escolha de α temos que, para todo $\beta < \alpha$, $B \subset A \subset {}^* t_{\beta}$. Note que B converge para α pois, dada $V(\alpha, \beta, F)$ vizinhança de α temos

$$B \subset {}^* t_{\beta} \cap (\mathbb{N} \setminus t_{\alpha}) = t_{\beta} \setminus t_{\alpha} \subset {}^* V(\alpha, \beta, F).$$

Terminamos assim a primeira parte do teorema, construindo um espaço a partir de uma torre. Agora vamos nos focar na volta para ter uma maneira de classificar os FR-espacos sequencialmente compactos não compactos.

Seja X um FR-espaco sequencialmente compacto e não compacto. Usando a definição de FR-espaco denotamos o denso discreto por $\mathbb{N}$ e tomamos o ordinal δ homeomorfo à $x \setminus \mathbb{N}$. Sendo assim, temos $X = \mathbb{N} \cup \delta$.

Veremos que, para cada $\alpha < \delta$, existe uma vizinhança compacta de $[0, \alpha]$ dada por $V_{\alpha} = [0, \alpha] \cup a_{\alpha}$, onde $a_{\alpha} \subset \mathbb{N}$. Ademais, podemos tomar os a_{α} de modo que, se $\beta < \eta$, então $a_{\beta} \subset {}^* a_{\eta}$. Com efeito, fixado $\alpha < \delta$, temos que $[0, \alpha]$ é compacto em δ e, portanto, em X . Agora, $[0, \alpha]$ é aberto em δ , logo, para todo $\beta < \alpha$, existem W_{β} vizinhanças compactas de β tais que $W_{\beta} \cap \delta \subset [0, \alpha]$. Note que $\bigcup_{\beta \leq \alpha} \text{int}(W_{\beta})$ cobre $[0, \alpha]$ donde, por compacidade, existem β_i com $i = 1, \dots, n$ tais que $(\bigcup_{i=1}^n \text{int}(W_{\beta_i})) \cap \delta = [0, \alpha]$. Como $(\bigcup_{i=1}^n W_{\beta_i}) \cap \delta = [0, \alpha]$, segue que $(\bigcup_{i=1}^n \text{int}(W_{\beta_i})) = [0, \alpha] \cup b_{\alpha}$, para algum $b_{\alpha} \subset \mathbb{N}$. Da mesma maneira, temos $(\bigcup_{i=1}^n W_{\beta_i}) = [0, \alpha] \cup a$, para algum $a \subset \mathbb{N}$. Defino $a_{\alpha} = a$. Agora, como

$$\left(\bigcup_{i=1}^n W_{\beta_i} \right) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n \text{int}(W_{\beta_i}) \right) \subset \mathbb{N},$$

e os unitários de $\mathbb{N}$ são abertos, então $(\bigcup_{i=1}^n W_{\beta_i}) = V_{\alpha}$ é aberto e compacto.

Veremos agora que os $a_\beta \subset^* a_\eta$ se $\beta < \eta$. Com efeito, caso $|a_\beta \setminus a_\eta| = \omega$ então, pela compacidade sequencial, existe x ponto de acumulação de a_β . Como V_β é fechado, e $\mathbb{N}$ é discreto, então $x \in [0, \beta]$. Tal afirmação é um absurdo, pois, V_η é vizinhança aberta de $[0, \beta]$ disjunta de $a_\beta \setminus a_\eta$. Caso $|a_\eta \setminus a_\beta| < \omega$ temos que $[0, \beta] \cup a_\eta$ é fechado, pois é a união do fechado V_β com finitos pontos de $\mathbb{N}$. Portanto $(\beta, \eta]$ tem uma vizinhança U aberta disjunta de a_η , um absurdo, pois, $V_\eta \cap U \cap \mathbb{N} = \emptyset$ comprovaria que $\mathbb{N}$ não é denso.

Consideramos por fim a torre dada por $\{t_\alpha : \alpha < \delta\}$ onde $t_\alpha = \mathbb{N} \setminus a_\alpha$, claramente $t_\beta \subset^* t_\eta$ se $\beta < \eta$. Verificaremos agora que $\mathcal{B}$ como definido na ida do teorema é base para a topologia de X . Com efeito $\mathbb{N}$ é discreto então os unitários são uma base. Além disso, dado $\alpha < \delta$, considere W vizinhança aberta de α . Caso $\alpha = 0$, temos que $\mathbb{N} \setminus t_0 = a_0$ e, caso não exista $F \subset \mathbb{N}$ finito tal que $a_0 \setminus F \subset W$ então existe um conjunto infinito $A \subset a_0$ que não está em W e, portanto, não pode ter 0 como ponto de acumulação, o que é um absurdo. Agora, supondo $\alpha > 0$ temos que existe $\beta < \alpha$ tal que $(\beta, \alpha] \subset W$. Logo, caso não exista $F \subset \mathbb{N}$ finito tal que $(t_\beta \setminus t_\alpha) \setminus F = (a_\alpha \setminus a_\beta) \setminus F \subset W$, então existe um subconjunto infinito $A \subset a_\alpha \setminus a_\beta$ que não está contido em W . Sendo assim, existe um ponto de acumulação de A em δ que não está em W o que é um absurdo pois $\overline{a_\alpha \setminus a_\beta} \subset (\beta, \alpha]$.

Concluimos assim que $X = X(T)$. □

Agora definiremos uma pré-ordem muito utilizada na teoria dos ultrafiltros, a pré-ordem de Rudin-Keisler. A seguir veremos uma proposição que nos dá uma relação entre u -limites, onde u é um ultrafiltro em ω , e a compacidade.

Definição 6.1.3. *Dados $u, v \in \omega^*$ dizemos que $v \leq_{RK} u$ se existe uma função $f \in \omega^\omega$ tal que $\{A \subset \omega : f^{-1}[A] \in u\} = v$.*

Proposição 6.1.4. *Dados X um espaço topológico compacto, e $s : \omega \rightarrow X$ uma sequência em X , então s tem u -limite para qualquer u ultrafiltro em ω .*

Demonstração. Suponha que exista ultrafiltro u tal que s não tem u -limite, isto é, para todo $x \in X$ existe V_x tal que $\{n \in \omega : s(n) \in V_x\} \notin u$. Agora, como $\{V_x : x \in X\}$ é cobertura aberta de X , então, pela compacidade, existem $x_1, \dots, x_n$, para algum $n \in \omega$, tais que $V_{x_1}, \dots, V_{x_n}$ cobrem X . Sendo assim, temos que $\omega = \bigcup_{i=1}^n \{n \in \omega : s(n) \in V_{x_i}\} \notin u$, o que é um absurdo. □

Teorema 6.1.5. *Sejam X um FR-espaço, sequencialmente compacto e não compacto, $T = \{t_\alpha : \alpha < \delta\}$ a torre associada a X pelo teorema anterior e $u \in \omega^*$. X não é u -compacto se, e somente se, existe $v \in \omega^*$ tal que $T \subset v$ e $v \leq_{RK} u^1$.*

Demonstração. Para verificar a volta fixe $v \in \omega^*$ e $f \in \omega^\omega$ comprovando $v \leq_{RK} u$ e $T \subset v$. Consideramos a função $g : \omega \rightarrow X$ dada pela f . Para cada W vizinhança básica de X , se W é unitário de $\mathbb{N}$, então temos

$$g^{-1}[W] = g^{-1}[\{n\}] = f^{-1}[\{n\}] \notin u, \text{ pois } \{n\} \notin T.$$

Se $W = V(\alpha, \beta, F)$, então temos

$$g^{-1}[W] = g^{-1}[(\beta, \alpha] \cup (t_\beta \setminus t_\alpha) \setminus F] = g^{-1}[(t_\beta \setminus t_\alpha) \setminus F] = f^{-1}[t_\beta] \cap f^{-1}[\mathbb{N} \setminus t_\alpha] \cap f^{-1}[\mathbb{N} \setminus F] \notin u,$$

pois $t_\alpha \in T$ nos dá que $f^{-1}[t_\alpha] \in u$ e, portanto, $f^{-1}[\mathbb{N} \setminus t_\alpha] = \omega \setminus f^{-1}[t_\alpha] \notin u$. Concluimos assim que g não tem u -limite em X .

Para verificar a ida, fixe $g : \omega \rightarrow X$ que comprova que X não tem u -limite. Defina agora $f : \omega \rightarrow \mathbb{N}$ por

¹Aqui identificamos novamente $\mathbb{N}$ com ω

$f(n) = g(n)$ se $g(n) \in \mathbb{N}$ e $f(n) = 0 \in \mathbb{N}$ caso contrário.

Considere $v \in \omega^*$ dada por $v = \{A \subset \omega : f^{-1}[A] \in u\}$, claramente $v \leq_{RK} u$, resta ver que $T \subset v$, isto é, para todo $\alpha < \delta$, $f^{-1}[t_\alpha] \in u$.

Seja

$$K_\alpha = [0, \alpha] \cup (\mathbb{N} \setminus t_\alpha) \cup \overline{g[\omega] \cap \delta}.$$

Temos que K_α é compacto, pois é a união de uma vizinhança básica compacta com $\overline{g[\omega] \cap \delta}$ que é compacto. Com efeito, como $cf(\delta) > \omega$ existe um fechado compacto $[0, \rho]$ tal que $\overline{g[\omega] \cap \delta} \subset [0, \rho]$.

Segue que $g^{-1}[K_\alpha] \notin u$, pois caso contrário, como K_α é compacto, existiria u -limite para g . Sendo assim $f^{-1}[\mathbb{N} \setminus t_\alpha] \subset g^{-1}[K_\alpha] \notin u$, donde $f^{-1}[\mathbb{N} \setminus t_\alpha] \notin u$ e, portanto, $f^{-1}[t_\alpha] \in u$. Definimos $v = \{A \subset \omega(\mathbb{N}) : f^{-1}[A] \in u\}$ e temos o resultado desejado. $\square$

Observe então que o teorema acima nos dá uma condição para construir os espaços da SS-família. Para tanto definimos o conceito de T-ponto.

Definição 6.1.6. Fixado $u \in \omega^*$ ultrafiltro livre, dizemos que u é um T-ponto se existe $R \subset [\omega]^\omega$ uma torre tal que $R \subset u$.

Agora, para conseguir o contra-exemplo de (SSt 2), basta achar um modelo de ZFC no qual, para todo ultrafiltro livre u de ω , existe um ultrafiltro v de omega tais que v é T-ponto e $v \leq_{RK} u$. Discutiremos um modelo de ZFC no qual todo ultrafiltro livre é um T-ponto, o que é o suficiente para a construção do contra-exemplo.

O lema a seguir é semelhante a um lema do artigo [1], usando uma terminologia trabalhada em [19].

Lema 6.1.7. Sejam κ e λ cardinais tais que $\kappa > cf(\lambda)$. Consideramos ω^ω o espaço das funções com a ordem parcial $\leq^*$. Se existem cadeias ilimitadas de ω^ω , dadas por $\{f_\alpha : \alpha < \lambda\}$ e $\{g_\alpha : \alpha < \kappa\}$, então existe uma família de torres $\mathcal{T}$ de ω tal que, para todo $u \in \omega^*$, existe $R \in \mathcal{T}$ com $R \subset u$.

O lema 6.1.7 nos dá uma condição na qual todo ultrafiltro livre é um T-ponto. Temos que a construção de um modelo de ZFC no qual existem cadeias como no lema anterior nos dá um modelo no qual (SSt 2) tem um contra-exemplo. Para verificar a existência de tal modelo usamos o seguinte resultado do artigo [10].

Teorema 6.1.8. Sejam M um modelo transitivo enumerável de ZFC e $\langle P, \leq \rangle$ um conjunto parcialmente ordenado de M . Se as seguintes condições são válidas em M

- (i) P tem cardinalidade menor ou igual à $2^{\aleph_0}$;
- (ii) todo subconjunto enumerável de P tem limitante superior em P ,

então existe uma extensão N de M que preserva cofinalidades. Além disso tal extensão é tal que $(2^\kappa)_N = (2^\kappa)_M$ para todo cardinal $\kappa \in M$, e, em N , o conjunto $\langle P, \leq \rangle$ é ordem isomorfo a um subconjunto dominante de ω^ω com a ordem $\leq^*$.

No mesmo artigo, no teorema 8.5, Hechler prova que, tomando κ e λ cardinais como no lema 6.1.7, tais que $P = \kappa \times \lambda$, com a ordem parcial dada por $\langle \alpha, \beta \rangle \leq \langle \gamma, \delta \rangle$ se, e somente se, $\alpha \leq \gamma$ e $\beta \leq \delta$, está nas condições do teorema 6.1.8, existe modelo N tal que P e, portanto ω^ω , possui cadeias ilimitadas de ordem κ e λ . Nesse modelo temos uma resposta negativa para o problema de Scarborough-Stone.

6.2 O γN , preliminares e o Open Colouring Axiom

Para começar essa seção, construiremos um espaço topológico clássico γN , que será usado na demonstração de uma resposta afirmativa para o problema de Scarborough-Stone para a classe dos espaços T_5 .

Exemplo 6.2.1. *Existe um espaço topológico γN que é T_2 , localmente compacto e que possui $\mathbb{N}$, um subconjunto denso discreto e enumerável, tal que $\gamma N \setminus \mathbb{N}$ é homeomorfo ao ω_1 .*

Seja $T = \{t_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset [\omega]^\omega$ ordenado por $\supset^*$. Note que tal conjunto existe, pois $\mathfrak{t} \geq \omega_1$, isto é, podemos sempre estender um conjunto ordenado por $\supset^*$, caso ele ainda não tenha ω_1 elementos, pegando uma pseudo interseção. Construímos um espaço topológico $X(T)$ repetindo a construção da topologia feita para os FR-espaços no teorema 6.1.2. Note que, mesmo que T possa ter uma pseudo interseção, $X(T)$ continua sendo T_2 e localmente compacto. Além disso, $\mathbb{N}$ continua sendo discreto e denso em $X(T)$ e $X(T) \setminus \mathbb{N}$ continua homeomorfo à ω_1 . Tomamos $\gamma N = X(T)$.

Algumas construções de γN nos pedem que, ao invés de $\gamma N \setminus \mathbb{N}$ ser homeomorfo a ω_1 ele o seja a $\omega_1 + 1$. Para obter tal espaço basta considerar a compactificação de Alexandroff do espaço $X(T)$ obtido acima como sendo nosso γN . Com efeito, sabemos que a compactificação continua sendo T_2 e localmente compacta. Além disso, $\mathbb{N}$ continua sendo discreto, denso e enumerável. Resta ver que o ponto ∞ , usado para compactificar o espaço, pode ser identificado com ω_1 . Primeiramente, mostraremos que, para todo $\alpha < \omega_1$, o conjunto $(\alpha, \omega_1) \cup \{\infty\}$ é aberto em $\gamma N \setminus \mathbb{N}$. Só precisamos verificar o ponto ∞ , pois, o conjunto (α, ω_1) é aberto em $X(T) \setminus \mathbb{N}$. Para tanto pegamos o compacto dado por $V(\alpha + 1, 0, \emptyset)$ e notar que

$$(X(T) \setminus V(\alpha + 1, 0, \emptyset)) \cap (X(T) \setminus \mathbb{N}) = (\alpha, \omega_1).$$

Por fim, veremos que, para todo aberto de $X(T) \setminus \mathbb{N}$ que contém ∞ , existe $\alpha < \omega_1$ tal que (α, ω_1) está contido nele. Fixamos U vizinhança aberta de ∞ . Devemos ter que $\gamma N \setminus U$ é compacto em $X(T)$. Segue que esse conjunto deve ser limitado em $X(T) \setminus \mathbb{N}$, pois, caso contrário não conseguiríamos cobrir os pontos de ω_1 com finitos abertos da base. Sendo assim existe α tal que $(\alpha, \omega_1) \cap \gamma N \setminus U = \emptyset$, como desejado.

Note que, assumindo $\mathfrak{t} = \omega_1$, podemos pegar o conjunto T usado na construção como sendo uma torre. Sendo assim, no segundo caso que construímos, não temos nenhuma sequência de $X(T)$ convergindo para ω_1 . Com efeito, fixado tal sequência, seja S imagem da sequência. Note que, caso $S \cap \omega_1$ é infinito, tal conjunto corresponde a uma subsequência que converge para $\sup(S \cap \omega_1) < \omega_1$. Sendo assim, a sequência original não pode convergir para ω_1 . Podemos assumir, sem perda de generalidade, que S está contido em $\mathbb{N}$. Agora, como visto no teorema 6.1.2, S deve convergir para algum $\alpha < \omega_1$ e, portanto, não pode convergir para ω_1 .

A construção acima nos motiva a definir a seguinte classe de espaços topológicos:

Definição 6.2.2. *Dizemos que um espaço topológico X pertence à classe ΓN se X é localmente compacto e T_2 e existe um denso discreto enumerável $N \subset X$ de forma que $X \setminus N$ é homeomorfo à ω_1 . Note que isso é equivalente a dizer que X é FR e o ordinal que tomamos é ω_1 .*

Para começarmos a tratar do OCA precisamos definir o que é uma partição aberta. Assumimos algumas definições básicas sobre a teoria de Ramsey, para mais detalhes podemos nos referir a [16].

Definição 6.2.3. *Dados um espaço topológico X e uma partição $[X]^2 = K_0 \cup K_1$, dizemos que K_0 é aberto se o conjunto $\{\langle x, y \rangle : \{x, y\} \in K_0\}$ é aberto na topologia produto de X^2 .*

Usando a mesma terminologia da definição anterior e a linguagem da teoria de coloração, para $i = 0, 1$, abreviaremos a notação de um conjunto K_i -homogêneo para um conjunto i -homogêneo.

Sendo assim, um conjunto $Y \subset X$ é dito i -homogêneo se, $[Y]^2 \subset K_i$.

Enunciamos agora o Open Colouring Axiom.

(OCA): Se X é um espaço regular, sem subespaços discretos não enumeráveis e $[X]^2 = K_0 \cup K_1$ é uma partição com K_0 aberto, então ou existe um conjunto 0-homogêneo não enumerável ou X é a união enumerável de conjuntos 1-homogêneos.

Um espaço topológico X é dito ser T_5 se, e somente se, para todos $A, B \subset X$, $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$ implica que existem abertos disjuntos U e V tais que $A \subset U$ e $B \subset V$. Sabemos ainda que a propriedade T_5 é hereditária. Com efeito, fixamos $Y \subset X$, e $A, B \subset Y$ tais que $\overline{A}^Y \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}^Y$. Agora $\emptyset = A \cap \overline{B}^Y = A \cap \overline{B} \cap Y = A \cap \overline{B}$ e, análogamente, $\overline{A}^Y \cap B = \overline{A} \cap B = \emptyset$. Segue então que existem abertos de X que separam A e B , basta considerar suas intersecções com Y .

Agora mencionaremos algumas propriedades relativas ao quociente de espaços topológicos.

Definição 6.2.4. Fixamos dois espaços topológicos X e Y . Dizemos que $f : X \rightarrow Y$ função é quociente se ela é sobrejetora e a topologia de Y é gerada por $\{U \subset Y : f^{-1}[U] \text{ é aberto em } X\}$.

Note que podemos interpretar o quociente como um certo colapso de pontos da topologia original. Definimos agora o conceito de saturação envolvendo espaços quocientes.

Definição 6.2.5. Fixamos X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ função quociente. Um subconjunto $U \subset X$ é dito ser saturado se $f^{-1}[f[U]] = U$.

Podemos interpretar que um conjunto é saturado se, e somente se, para todo ponto dele, o conjunto de pontos que colapsam para o mesmo ponto está contido nesse conjunto. Note ainda que, se U é aberto saturado, então quando quocientamos o espaço a imagem de U é um aberto, pela definição da topologia. Abertos dessa forma são chamados abertos saturados.

Agora usamos esses conceitos acima para enunciar e demonstrar alguns lemas que serão usados na próxima seção.

Lema 6.2.6. Seja $\langle X, \tau \rangle$ um espaço topológico tal que $D \subset X$ é denso enumerável e $X \setminus D$ é homeomorfo a ω_1 . Se $\langle X, \tau \rangle$ é T_5 , então toda topologia τ' que refina τ , na qual os pontos de D são isolados e a topologia de subespaço em $X \setminus D$ é a mesma, é tal que $\langle X, \tau' \rangle$ é T_5 .

Demonstração. Com efeito, sejam $A, B \subset X$ tal que $\overline{A}^{\tau'} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}^{\tau'}$. Note que, restrito a ω_1 , a topologia se mantém, então os pontos de aderência em ω_1 de $A \cap \omega_1$ ou $B \cap \omega_1$ são os mesmos independentemente da topologia. Logo

$$\overline{A \cap \omega_1}^{\tau} \cap (B \cap \omega_1) = \emptyset = (A \cap \omega_1) \cap \overline{B \cap \omega_1}^{\tau}$$

e, usando que τ é T_5 , conseguimos abertos $U, V \in \tau \subset \tau'$ que separam $A \cap \omega_1$ de $B \cap \omega_1$. Agora, para cobrir a parte que fica no denso, basta pegar os unitários restantes e unir a cada aberto correspondente.

□

Lema 6.2.7. Dados X enumeravelmente compacto T_5 e $D \subset X$ denso, se p é limite de uma sequência de $X \setminus \{p\}$, então p é limite de uma sequência de elementos em D .

Demonstração. Com efeito, seja $\sigma : \omega \rightarrow X \setminus \{p\}$ uma sequência convergindo para p . Usando o fato de que X é T_2 podemos tomar σ injetora. Usando T_5 e o fato de que σ converge, definimos V_0 como sendo a vizinhança de $\sigma(0)$ tal que $\overline{V_0}$ é disjunto de $\{\sigma(n) : n > 0\}$. Supomos construídos V_n para todo $n < m$ de maneira que $p \notin V_n$, $\sigma(n) \in V_n$, $\overline{V_i} \cap \overline{V_j} = \emptyset$ se $i \neq j$ e $\overline{V_n}$ é disjunto de $\{\sigma(i) : i > n\}$. Usando T_5 tomamos aberto V_m , tal que $\sigma(m) \in V_m$ e seu fecho é disjunto dos fechos dos V_n anteriores e de $\{\sigma(i) : i > m\}$.

Consideramos agora $A = \overline{\bigcup_{n \in \omega} V_n} \setminus \bigcup_{n \in \omega} V_n$. Note que $p \in A$ e A é fechado. Agora, temos que $\{\sigma(n) : n \in \omega\}$ e $A \setminus \{p\}$ são fechados em $X \setminus \{p\}$. Como X é T_5 segue que existem abertos disjuntos U e W em $X \setminus \{p\}$ e, portanto, abertos em X , tais que $\{\sigma(n) : n \in \omega\} \subset U$ e $A \setminus \{p\} \subset W$. Usando a densidade de D tomo $d_n \in D \cap U \cap V_n$ para cada $n \in \omega$. Veremos que $d_n \rightarrow p$. Com efeito, todos os pontos de acumulação de $\{d_n : n \in \omega\}$ pertencem a A pela construção dos V_n , e deve existir pelo menos um ponto de acumulação pela compacidade enumerável. Mas agora, como $W \cap \{d_n : n \in \omega\} = \emptyset$ e $A \setminus \{p\} \subset W$ devemos ter que o único ponto de acumulação de $\{d_n : n \in \omega\}$ é p . Ademais, dada uma vizinhança de p devemos ter uma quantidade finita de d_n fora do aberto caso contrário usando a compacidade enumerável novamente existe um outro ponto de acumulação diferente de p . □

O lema a seguir nos dá uma condição para a preservação da propriedade T_5 quando realizamos o quociente de espaços topológicos.

Lema 6.2.8. *Seja $\psi : X \rightarrow Y$ uma função quociente entre espaços topológicos de maneira que $\psi^{-1}[\{y\}]$ é fechado para todo $y \in Y$ e $\{y \in Y : |\psi^{-1}[\{y\}]| > 1\}$ está contido em um subespaço F fechado T_5 de Y . Se X é T_5 , então Y também o é.*

Demonstração. Note que os pontos de Y são fechados. Com efeito, dado $y \in Y$, o conjunto $Y \setminus \{y\}$ é aberto, pois, $\psi^{-1}[Y \setminus \{y\}] = X \setminus \psi^{-1}[\{y\}]$ é aberto. Sendo assim Y é T_1 . Fixe $A, B \subset Y$ tais que

$$\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}.$$

Usando T_5 tomamos G, H abertos disjuntos de F de modo que $A \cap F \subset G$ e $B \cap F \subset H$. Segue que

$$\overline{A \cup G} \cap (B \cup H) = \emptyset = (A \cup G) \cap \overline{B \cup H}$$

e, pela continuidade de ψ , temos

$$\overline{\psi^{-1}[A \cup G]} \cap \psi^{-1}[B \cup H] = \emptyset = \psi^{-1}[A \cup G] \cap \overline{\psi^{-1}[B \cup H]}.$$

Note que $F \setminus G$ e $F \setminus H$ são fechados em Y e, portanto, $\psi^{-1}[F \setminus G]$ e $\psi^{-1}[F \setminus H]$ são fechados em X . Usamos T_5 de X para encontrar abertos disjuntos U e V tais que $\psi^{-1}[A \cup G] \subset U$, $\psi^{-1}[B \cup H] \subset V$ e $U \cap \psi^{-1}[F \setminus H] = \emptyset = V \cap \psi^{-1}[F \setminus G]$. Tais abertos são saturados, isto é, $\psi^{-1}[\psi[U]] = U$ e $\psi^{-1}[\psi[V]] = V$, portanto $\psi[U]$ e $\psi[V]$ são abertos disjuntos de Y contendo A e B respectivamente. □

Por fim definiremos o que significa um espaço topológico ser α -realcompacto, enunciando um lema que relaciona esse conceito com compacidade e compacidade enumerável. Aqui uma família ter a propriedade da interseção finita enumerável significa dizer que qualquer interseção enumerável elementos da família é não vazia.

Definição 6.2.9. *Um espaço topológico X é dito ser α -realcompacto se, e somente se, toda família maximal de fechados com a propriedade da interseção enumerável tem interseção não vazia.*

Lema 6.2.10. *Se X é espaço topológico α -realcompacto e enumeravelmente compacto, então X é compacto.*

Demonstração. Com efeito, por uma equivalência de compacidade enumerável, temos que toda família de fechados com a propriedade da interseção finita tem a propriedade da interseção enumerável. Agora, pela α -realcompactidade, temos que tal família tem interseção não vazia, donde, o espaço X é compacto. $\square$

6.3 OCA, uma equivalência e o contra-exemplo

Aqui construiremos o resultado positivo para o problema de Scarborough-Stone, para a classe de espaços topológicos T_5 , usando o Proper Forcing Axiom. Na verdade manteremos o foco no Open Colouring Axiom, que é uma consequência do PFA, usando apenas alguns resultados diretos de PFA. Como referência para a construção desse exemplo usamos os artigos [17], [18] e [2].

O seguinte resultado utiliza OCA para garantir uma propriedade importante para os espaços da classe ΓN .

Teorema 6.3.1. *Assumindo OCA, é verdade que nenhum espaço da classe ΓN é T_5 .*

Demonstração. Seja $X = \mathbb{N} \cup \omega_1$, com $\mathbb{N} \cap \omega_1 = \emptyset$ um espaço ΓN . Como no teorema 6.1.2, tomamos para cada $\alpha < \omega_1$, $a_\alpha \subset \mathbb{N}$ de maneira que $a_\alpha \cup [0, \alpha]$ seja um aberto-fechado compacto. Agora, o fato de que todo subconjunto infinito de α tem ponto de acumulação, nos garante que $a_\alpha \subset^* a_\beta$ sempre que $\alpha \leq \beta$ e $a_\beta \setminus a_\alpha \subset^* U$ para toda vizinhança U de $(\alpha, \beta]$.

Identificaremos então $\mathcal{A} = \{a_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ com um subconjunto E do conjunto de Cantor C . Para tanto, dado $a_\alpha \in [\mathbb{N}]^\omega$ considero $f_\alpha : \mathbb{N} \rightarrow 2$ dada por $f_\alpha(n) = 1$ se, e somente se, $n \in a_\alpha$. Agora, para cada $\alpha < \omega_1$, associamos a cada f_α um elemento x_α do conjunto de Cantor de maneira recursiva. Associamos a função vazia ao intervalo $[0, 1]$. Suponha definidos os intervalos associados à $f_\alpha|_i$ para todo $i < n$. Tomamos o intervalo associado à $f_\alpha|_{n-1}$ e o particionamos em três partes como na construção do conjunto de Cantor. Agora, se $f_\alpha(n-1) = 0$, então consideramos $f_\alpha|_n$ como sendo o primeiro intervalo da divisão, já, se $f_\alpha(n-1) = 1$, então consideramos $f_\alpha|_n$ como sendo o último intervalo da divisão. Por fim associamos a função f_α o elemento dado pela interseção dos intervalos associados a suas restrições. Note que tal identificação é única pois, se $\alpha \neq \beta$, então $f_\alpha \neq f_\beta$ e, portanto, eles divergem em algum passo da construção, representando, assim, elementos diferentes do conjunto de Cantor.

Seja agora $S \subset C^3$ o subconjunto dado por todas as ternas $\langle a_\xi, a_\eta, a_\mu \rangle$ tais que $\xi < \eta < \mu$. Como $\mathbb{R}^3$ é hereditariamente separável e métrico e $S \subset C^3 \subset \mathbb{R}^3$, então S é separável e métrico. Definimos a seguinte partição de S :

$$[S]^2 = K_0 \cup K_1$$

onde $\{\langle a, b, c \rangle, \langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle\} \in K_0$ se, e somente se,

$$a \neq \bar{a} \text{ e } [(b \setminus a) \cap (\bar{c} \setminus \bar{b}) \neq \emptyset \text{ ou } (c \setminus b) \cap (\bar{b} \setminus \bar{a}) \neq \emptyset],$$

aqui consideramos os elementos como subconjuntos de $\mathbb{N}$.

Veremos então que $\{\langle x, y \rangle : \{x, y\} \in K_0\}$ é aberto na topologia produto de S^2 . Com efeito, fixamos $\{\langle a, b, c \rangle, \langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle\} \in K_0$. Como $a \neq \bar{a}$, existem abertos disjuntos U_1, U_2 de S que separam a de $\bar{a}$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $(b \setminus a) \cap (\bar{c} \setminus \bar{b}) \neq \emptyset$, uma vez que a demonstração para o outro caso é análoga. Sendo assim, existe $n \in (b \setminus a) \cap (\bar{c} \setminus \bar{b})$. Tomamos abertos

$V_a, V_b, V_{\bar{c}}$ e $V_{\bar{b}}$ de S de maneira que V_x seja a interseção dos intervalos dados por $f(1), \dots, f(n)$, onde f é a função correspondente à x . Note que esses abertos garantem que as funções que tomamos para representar os conjuntos tem seus inícios fixados e, portanto, vale que n está na interseção acima se os pontos forem tomados nesses abertos. Consideramos então o aberto dado por

$$W = ([(U_1 \cap V_a) \times V_b \times E] \cap S) \times ([U_2 \times V_{\bar{b}} \times V_{\bar{c}}] \cap S).$$

Observe que os elementos dele estão na condição acima, isto é, para todo $\langle x, y \rangle \in W$, $\{x, y\} \in K_0$.

Veremos agora que S não pode ser a união enumerável de conjuntos 1-homogêneos. Para tanto fixamos $\{S_n : n \in \omega\}$ tal que, para todo $n \in \omega$, $[S_n]^2 \subset K_1$ e $S_n \subset S$. Supomos, por absurdo, que $S = \bigcup \{S_n : n \in \omega\}$ e definimos

$$T_n = \{\xi \in \omega_1 : |\{\eta \in \omega_1 : \exists \mu \in \omega_1 (\langle a_\xi, a_\eta, a_\mu \rangle \in S_n)\}| = \aleph_1\}.$$

Como S é a união dos S_n 's devemos ter que algum T_n é não enumerável. Caso contrário teríamos que existe $\rho < \omega_1$ maior que todos os elementos de todos os T_n . Portanto, para todo $n \in \omega$, temos $|\{\eta \in \omega_1 : \exists \mu \in \omega_1 (\langle a_\xi, a_\eta, a_\mu \rangle \in S_n)\}| \leq \aleph_0$, donde existiria apenas uma quantidade enumerável de elementos da forma $\langle a_\rho, b, c \rangle$ em S , o que é um absurdo. Fixamos então tal n e $\langle a_{\bar{\xi}}, a_{\bar{\eta}}, a_{\bar{\mu}} \rangle \in S_n$ de maneira que $\xi < \bar{\xi}$, o que podemos pois $|T_n| = \aleph_1$. Achamos agora $\mu > \eta > \bar{\mu}$ tal que $\langle a_\xi, a_\eta, a_\mu \rangle \in S_n$ o que é possível pois $\xi \in T_n$ e $|\{\eta \in \omega_1 : \exists \mu \in \omega_1 (\langle a_\xi, a_\eta, a_\mu \rangle \in S_n)\}| = \aleph_1$. Note então que, como $\xi < \bar{\eta} < \bar{\mu} < \eta$ e $\{a_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ é bem ordenado com $\subset^*$, temos $a_{\bar{\mu}} \setminus a_{\bar{\eta}} \subset^* a_\eta \setminus a_\xi$. Segue disso que $\{\langle a_\xi, a_\eta, a_\mu \rangle, \langle a_{\bar{\xi}}, a_{\bar{\eta}}, a_{\bar{\mu}} \rangle\} \in K_0$ pois, $a_\xi \neq a_{\bar{\xi}}$ e $(a_\eta \setminus a_\xi) \cap (a_{\bar{\mu}} \setminus a_{\bar{\eta}}) \neq \emptyset$, o que é um absurdo pois S_n deveria ser 1-homogêneo.

Segue, por OCA, que existe um subconjunto $H \subset S$ não enumerável e 0-homogêneo. Definimos então, por recursão transfinita, $H' \subset H$ de maneira que, dados $\langle a_\xi, a_\eta, a_\mu \rangle, \langle a_{\bar{\xi}}, a_{\bar{\eta}}, a_{\bar{\mu}} \rangle \in H'$ distintos, temos que $\mu < \bar{\xi}$ ou $\bar{\mu} < \xi$. Temos então que os conjuntos

$$A = \bigcup \{(\xi, \eta) : \langle a_\xi, a_\eta, a_\mu \rangle \in H'\}$$

e

$$B = \bigcup \{(\eta, \mu) : \langle a_\xi, a_\eta, a_\mu \rangle \in H'\}$$

são tais que $\bar{A} \cap B = \emptyset = A \cap \bar{B}$. Com efeito, caso $x \in \bar{A} \cap B$, como $A \cap B = \emptyset$, devemos ter que $x \notin A$ e x é ponto de acumulação, sendo assim x deve ser um ordinal limite. Agora, como $x \in B$, devem existir η e μ tais que $x \in (\eta, \mu] \subset B$. Daí segue que $A \cap (\eta, \mu] \neq \emptyset$ e, portanto, existe ξ' tal que $\eta \leq \xi' < \mu$ ou existe η' tal que $\eta < \eta' \leq \mu$, o que é um absurdo pela construção de H' . Prosseguimos de maneira análoga para $x \in A \cap \bar{B}$.

Note então que tais conjuntos não podem ser separados por abertos, pois seus fechados tem elementos em comum. De fato, dados $\{\langle a_{\xi_i}, a_{\eta_i}, a_{\mu_i} \rangle \in H' : i \in \omega\}$ de maneira que $\mu_j < \xi_i$ se $j < i$, temos que

$$\sup(\bigcup \{(\xi_i, \eta_i) : i \in \omega\}) = \sup(\bigcup \{(\eta_i, \mu_i) : i \in \omega\}) \in \bar{A} \cap \bar{B},$$

então, X não pode ser T_5 .

□

Agora prosseguimos para o resultado central desse capítulo, aqui veremos uma equivalência entre afirmações. Veremos que os espaços T_5 da classe Γ_N codificam algumas propriedades para alguns espaços T_5 específicos.

Teorema 6.3.2. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) *Existe um espaço topológico X separável, T_5 e compacto tal que $t(X) > \aleph_0$;*
- (b) *existe um espaço topológico X separável, T_5 e enumeravelmente compacto que contém uma sequência livre não enumerável;*
- (c) *existe um espaço topológico X separável, T_5 e enumeravelmente compacto que contém uma cópia do ordinal ω_1 com a topologia da ordem;*
- (d) *existe um espaço da classe ΓN que é T_5 .*

Demonstração. Começamos a demonstração vendo que (d) implica (a). Fixe $Y \in \Gamma N$ que é T_5 dado por (d) e considere $X = Y \cup \{\infty\}$ a compactificação de Alexandroff de Y . Temos agora que X é compacto e, dado $D \subset Y$ denso enumerável de Y , segue que D é denso em X . Com efeito, como Y é T_2 , temos que todo compacto $K \subset Y$ é fechado, donde $Y \setminus K$ é aberto e portanto existe $d \in D \cap (Y \setminus K)$. Agora, como toda vizinhança básica de ∞ é dessa forma, D continua denso. Veremos agora que X é T_5 . Para tanto fixamos $A, B \subset X$ tais que $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$, e estudamos dois casos. Caso $A, B \subset Y$, temos que

$$\overline{A}^Y \cap B \subset \overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B} \supset A \cap \overline{B}^Y.$$

Logo, como Y é T_5 , temos abertos disjuntos U, V de Y , e portanto de X , tais que $A \subset U$ e $B \subset V$. Podemos supor agora, sem perda de generalidade, que $\infty \in A$, donde, $\infty \notin \overline{B}$. Como X é compacto e T_2 , temos que X é T_4 e, portanto, existem abertos disjuntos W_1, W_2 tais que $\infty \in W_1$ e $\overline{B} \subset W_2$. Notamos agora que $\overline{A} = \overline{A}^Y \cup \{\infty\}$. Usando o mesmo argumento do caso anterior, encontramos abertos disjuntos U, V tais que $A \setminus \{\infty\} \subset U$ e $B \subset V$. Consideramos então $U \cup W_1$ e $V \cap W_2$. Tais conjuntos são abertos em X , disjuntos por construção, e temos $A \subset U \cup W_1$ e $B \subset V \cap W_2$. Concluimos assim que X é T_5 .

Temos então que X é um espaço compacto, separável e T_5 , resta ver que $t(X) > \aleph_0$. Para tanto consideramos $\omega_1 = Y \setminus D \subset X$ e veremos que $\infty \in \overline{\omega_1}$ e, para qualquer $A \in [\omega_1]^\omega$, vale $\infty \notin \overline{A}$. Com efeito, dado U aberto básico de X com $\infty \in U$, existe um compacto K de Y tal que $U = \{\infty\} \cup (Y \setminus K)$. Supondo por absurdo que $\omega_1 \cap U = \emptyset$, temos que $\omega_1 \subset K$. Agora, para todo $\alpha < \omega_1$, devem existir A_α , abertos de Y , tais que $A_\alpha \cap \omega_1 = [0, \alpha]$. Tomo $\mathcal{U} = \{A_\alpha : \alpha < \omega_1\} \cup \{\{d\} : d \in D\}$, que é uma cobertura de K , pois, $\mathcal{U}$ cobre Y e $K \subset Y$. Entretanto, não pode existir subcobertura de $\mathcal{U}$ finita que cobre ω_1 pela maneira como foram escolhidos os abertos A_α e, portanto, como $\omega_1 \subset K$, não pode existir subcobertura finita para K , o que é um absurdo. Por fim temos que, dado $A \in [\omega_1]^\omega$, existe $\alpha < \omega_1$ tal que $A \subset [0, \alpha]$. Ademais, podemos assumir que, assim como no teorema 6.1.2, A_α é aberto-fechado compacto. Temos então que $\{\infty\} \cup (Y \setminus A_\alpha)$ é vizinhança de ∞ disjunta de A , isto é, $\infty \notin \overline{A}$.

Verificaremos agora que (a) implica (b). Com efeito, por um resultado clássico de Arhangel'skii que foi revisto no artigo [11], sabemos que, se X é um espaço topológico compacto, então $t(X) > \kappa$ implica que X tem uma sequência livre de comprimento κ^+ . Sendo assim, dado X como em (a), existe sequência livre de comprimento pelo menos ω_1 . Logo tal X é enumeravelmente compacto, pois é compacto, separável e T_5 , como desejado em (b).

Prosseguimos então para checar que (b) implica (c) e, para tanto, fixamos X como em (b) com $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ uma sequência livre não enumerável e $D \subset X$ denso enumerável. Podemos tomar $D \cap \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\} = \emptyset$, pois caso $D \cap \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\} \neq \emptyset$, como D é enumerável, existe $\gamma < \omega_1$ tal que, para todo $\alpha \geq \gamma$, $x_\alpha \notin D$. Agora basta considerar $\{y_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ a nova sequência livre dada por $y_\alpha = x_{\gamma+\alpha}$. Veremos, ademais, que podemos tomar $D \cap \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\} = \emptyset$. Com efeito, considere

$$W_\infty = \overline{\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}} \setminus \bigcup_{\beta < \omega_1} \overline{\{x_\alpha : \alpha < \beta\}}$$

e note que, como $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ é uma sequência livre, então

$$W_\infty = \bigcap_{\beta < \omega_1} \left(\overline{\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}} \setminus \overline{\{x_\alpha : \alpha < \beta\}} \right) = \bigcap_{\beta < \omega_1} \overline{\{x_\alpha : \alpha \geq \beta\}}$$

é fechado.

Agora tomamos $D^* = D \setminus W_\infty$ e veremos que D^* continua sendo denso. De fato, $D^* = D \setminus W_\infty = D \cap (X \setminus W_\infty)$ e, como $X \setminus W_\infty$ é um aberto contendo $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, temos que, para todo $\alpha < \omega_1$ e A vizinhança aberta de x_α , existe $d \in D \cap A \cap (X \setminus W_\infty) = D^* \cap A$. Sendo assim temos $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset \overline{D^*}$, donde $W_\infty \subset \overline{\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}} \subset \overline{D^*}$ e, portanto, $D \subset D^* \cup W_\infty \subset \overline{D^*}$. Por fim, segue que $\overline{D^*} = X$.

Note que

$$\overline{\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}} = W_\infty \cup \left(\bigcup_{\beta < \omega_1} \overline{\{x_\alpha : \alpha < \beta\}} \right),$$

donde

$$D^* \cap \overline{\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}} = D^* \cap \left(\bigcup_{\beta < \omega_1} \overline{\{x_\alpha : \alpha < \beta\}} \right).$$

Como D^* é enumerável temos que existe $\gamma < \omega_1$ tal que

$$D^* \cap \left(\bigcup_{\beta < \omega_1} \overline{\{x_\alpha : \alpha < \beta\}} \right) \subset D^* \cap \left(\bigcup_{\beta < \gamma} \overline{\{x_\alpha : \alpha < \beta\}} \right),$$

sendo assim podemos tomar $\{y_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ uma nova sequência livre dada por $y_\alpha = x_{\gamma+\alpha}$. Note que $D^* \cap \overline{\{y_\alpha : \alpha < \omega_1\}} = \emptyset$ como desejado, pois $D^* \cap \overline{\{x_\alpha : \alpha \geq \gamma\}} = \emptyset$.

Podemos então tomar o denso e a sequência livre como desejados. Considero agora, para cada $1 \leq \beta \leq \omega_1$, o conjunto

$$W_\beta = \overline{\{x_\alpha : \alpha < \beta\}} \setminus \bigcup_{\xi < \beta} \overline{\{x_\alpha : \alpha < \xi\}},$$

note que $W_\infty = W_{\omega_1}$ e, $W_\beta \neq \emptyset$ para todo $\beta < \omega_1$. Com efeito, caso β seja sucessor, temos que

$$\overline{\{x_\alpha : \alpha < \beta\}} = \overline{\{x_\alpha : \alpha < \beta - 1\}} \cup \{x_{\beta-1}\},$$

pois, X é T_1 , e então $W_\beta = \{x_{\beta-1}\}$. Para provar o caso limite note que

$$W_\beta = \bigcap_{\xi < \beta} \left(\overline{\{x_\alpha : \alpha < \beta\}} \setminus \overline{\{x_\alpha : \alpha < \xi\}} \right).$$

Agora, como estamos trabalhando com uma sequência livre, temos

$$\overline{\{x_\alpha : \alpha < \beta\}} \setminus \overline{\{x_\alpha : \alpha < \xi\}} = \overline{\{x_\alpha : \xi \leq \alpha < \beta\}},$$

donde W_β é a interseção de fechados e portanto fechado. Ademais, os fechados que estamos intersectando tem a propriedade da interseção finita, pois, dado uma quantidade finita de fechados, temos que sua interseção será $\overline{\{x_\alpha : \eta \leq \alpha < \beta\}} \neq \emptyset$, onde η é o maior índice entre os fechados.

Sendo assim, W_β é não vazio, pois ele é a interseção de uma quantidade enumerável de fechados com a PIF e X é enumeravelmente compacto. Note também que, pela construção, os W_β tomados são dois a dois disjuntos, pois sempre tiramos o conjunto de menor índice na construção do maior.

Considero agora $q : X \rightarrow Y$ a aplicação quociente obtida quando colapsamos, para cada $1 \leq \beta < \omega_1$, os fechados W_β em pontos distintos, e mantemos o resto do espaço X intacto. Caso $W_{\omega_1} \neq \emptyset$, colapsamos ele também. Note que tal aplicação está bem definida pois é sobrejetora por construção e os conjuntos que estamos colapsando são dois a dois disjuntos, não podendo existir pontos de X que são levados a dois pontos distintos de Y . Veremos agora que Y , com a topologia quociente, é um espaço separável e enumeravelmente compacto. Com efeito, considere $q[D] \subset Y$. Como tomamos D disjunto do fecho da sequência livre temos que nenhum dos pontos de D é equivalente a outro ponto, portanto, $|D| = |q[D]| = \aleph_0$. Resta ver que $q[D]$ é denso em Y . Para tanto, basta notar que, fixado $A \subset Y$ aberto, devemos ter que $q^{-1}[A]$ é aberto em X . Então, existe $d \in D \cap q^{-1}[A]$ e, portanto, $q(d) \in q[D] \cap A$. Para ver que Y é enumeravelmente compacto, basta notar que, fixada $\{A_n : n \in \omega\}$ uma cobertura aberta de Y , temos que $\{q^{-1}[A_n] : n \in \omega\}$ é cobertura aberta de X , pois, pela definição de topologia quociente, dado $y \in A_n \subset Y$ temos que $q^{-1}[\{y\}] \subset q^{-1}[A_n]$. Sendo assim temos que existem $n_1, \dots, n_k \in \omega$ de maneira que $\{q^{-1}[A_{n_i}] : 1 \leq i \leq k\}$ cobre X e, portanto, $\{A_{n_i} : 1 \leq i \leq k\}$ deve cobrir Y pela sobrejetividade de q .

Resta, para completar a construção do espaço desejado, mostrarmos que Y é T_5 , e que existe uma cópia de ω_1 dentro de Y . Para tanto, trabalharemos em dois casos, $W_{\omega_1} = \emptyset$ e $W_{\omega_1} \neq \emptyset$. Consideramos $\mathcal{W} = \{q[W_\beta] : 1 \leq \beta < \omega_1\}$ no primeiro caso e $\mathcal{W} = \{q[W_\beta] : 1 \leq \beta \leq \omega_1\}$ no segundo caso. Veremos que, $\mathcal{W}$ é isomorfo a ω_1 no primeiro caso e que é isomorfo a $\omega_1 + 1$ no segundo. Com efeito, identificamos cada $q[W_\beta]$ com $\beta \in \omega_1$. Note que tal identificação é bijetora, logo, resta ver que ela e sua inversa são contínuas.

Dado $\beta = \gamma + 1$ sucessor, usando T_5 e a sequência livre, temos que existem U_1, V_1 abertos disjuntos de X tais que $\overline{\{x_\alpha : \alpha < \gamma\}} \subset U_1$ e $\overline{\{x_\alpha : \alpha \geq \gamma\}} \subset V_1$. De maneira análoga, tomamos U_2, V_2 abertos disjuntos de X tais que $\overline{\{x_\alpha : \alpha < \beta\}} \subset U_2$ e $\overline{\{x_\alpha : \alpha \geq \beta\}} \subset V_2$. Note que, por uma observação anterior, temos $W_\beta = \{x_\gamma\} \subset V_1 \cap U_2$. Além disso, temos que $V_1 \cap U_2$ é disjunto de W_ξ para todo $\xi \neq \beta$. De fato, caso $\xi < \beta$, temos que $\xi \leq \gamma$ e, portanto, $\overline{\{x_\alpha : \alpha < \xi\}} \subset \overline{\{x_\alpha : \alpha < \gamma\}}$. Sendo assim V_1 é disjunto desse fecho e, por construção, $V_1 \cap U_2$ é disjunto de W_ξ . Caso $\beta < \xi$ temos que $W_\xi \subset \overline{\{x_\alpha : \alpha \geq \beta\}}$ por uma observação acima e, portanto, deve ser disjunto de U_2 . Agora temos que $B = q[V_1 \cap U_2]$ é aberto em Y pois $q^{-1}[B] = U_2 \cap V_1$, dado que o único fechado que colapsamos com q que tem elementos em $V_1 \cap U_2$ é W_β que está completamente contido nesse aberto. Segue então que $q[W_\beta]$ é ponto isolado em $\mathcal{W} \subset Y$.

Agora, dado $\beta < \omega_1$ limite, devemos ver que, dado $U \subset \mathcal{W}$ aberto, existe $\xi < \beta$ tal que $(W_\xi, W_\beta] = \{q[W_\alpha] : \xi < \alpha \leq \beta\} \subset U$. Com efeito, seja V aberto de Y tal que $V \cap \mathcal{W} = U$. Note que $q^{-1}[V]$ é aberto de X tal que $W_\beta \subset q^{-1}[V]$. Caso não exista tal ξ , devemos ter uma sequência crescente e cofinal em β , dada por $(\xi_i)_{i \in \omega}$, de modo que $q[W_{\xi_i}] \notin V$. Veremos então que existem $x \in W_\beta$ e um conjunto de pontos $y_i \in W_{\xi_i}$, $i \in \omega$, de maneira que x seja ponto de acumulação de $\{y_i : i \in \omega\}$, o que é um absurdo, dado que $q^{-1}[V]$ é um aberto que contém x e, como $q[W_{\xi_i}] \notin V$ para todo $i \in \omega$, temos que $y_i \notin q^{-1}[V]$. Para tal verificação pegamos $y_i \in W_{\xi_i}$ quaisquer e, usando a compacidade enumerável de X , tomamos y ponto de acumulação de $\{y_i : i \in \omega\}$. Veremos que $y \in W_\beta$. De fato, note que, para todo aberto A de X contendo y , existe $i \in \omega$ tal que $y_i \in A$ e, portanto, como $y_i \in W_{\xi_i} \subset \overline{\{x_\alpha : \alpha < \xi_i\}}$, temos que $A \cap \{x_\alpha : \alpha < \beta\} \neq \emptyset$, donde $y \in \overline{\{x_\alpha : \alpha < \beta\}}$. Note que $y \notin \overline{\{x_\alpha : \alpha < \rho\}}$ para todo $\rho < \beta$, pois, caso contrário, dado ρ contradizendo este fato, temos $y \in \overline{\{x_\alpha : \alpha < \rho\}} \subset X \setminus \overline{\{x_\alpha : \alpha \geq \rho\}} = A_1$, isto é, existe um aberto A_1 que contém y e apenas uma quantidade finita de y_i 's, o que é um absurdo pois nosso espaço é T_5 e, em particular, T_1 .

Consideramos agora o caso em que $\beta = \omega_1$ ($W_{\omega_1} \neq \emptyset$) e veremos que, dado U vizinhança aberta

de $q[W_\beta]$ em $\mathcal{W}$, existe $\xi < \beta$ tal que $(W_\xi, W_\beta] \subset U$. Seja V um aberto de Y tal que $V \cap \mathcal{W} = U$, então $q^{-1}[V]$ é aberto de X tal que $W_\beta \subset q^{-1}[V]$. Assumimos que existe um fechado ilimitado de β , dado por $\mathcal{C}$, de maneira que, para todo $\xi \in \mathcal{C}$, $q[W_\xi] \in U$. Usamos a negação do que queremos provar e temos que, para todo $\alpha < \beta$, existe $\rho > \alpha$ tal que $q[W_\rho] \notin U$. Agora criamos uma sequência crescente de elementos de β intercalando elementos de $\mathcal{C}$ e elementos ρ tais que $q[W_\rho] \notin U$. Consideramos $\eta < \beta$ o supremo dessa sequência, que existe, pois $\beta = \omega_1$, e a sequência é enumerável. Note que $\eta \in \mathcal{C}$, pois, o conjunto é um fechado ilimitado. Logo $q[W_\eta] \in U$ e, portanto, existe $\zeta < \eta$ tal que $(W_\zeta, W_\eta] \subset U$, como visto na demonstração para $\beta < \omega_1$. Mas daí existe ρ tal que $q[W_\rho] \notin U$ e $\zeta < \rho < \eta$, o que é um absurdo.

Provaremos a existência do fechado ilimitado usado acima. Como $q^{-1}[V]$ é um aberto que contém W_β e X é T_5 deve existir $A \subset X$ um aberto tal que $W_\beta \subset A \subset \overline{A} \subset q^{-1}[V]$. Agora, como A é um aberto de X e W_β é não vazio, deve existir uma quantidade não enumerável de elementos da sequência livre em A , pois na construção de W_β tiramos todas as possibilidades de algum de seus elementos ser ponto de acumulação de um conjunto enumerável. Definimos então $\mathcal{A} = \{\alpha < \beta : x_\alpha \in A\}$ e veremos que $\mathcal{C} = \{\alpha + 1 : \alpha \in \mathcal{A}\}^{\omega_1}$ é o fechado ilimitado desejado. Com efeito, tal conjunto é fechado, e é ilimitado pela maneira como escolhemos $\mathcal{A}$. Além disso, se $\xi \in \mathcal{C}$, temos duas possibilidades. A primeira é que $\xi = \alpha + 1$ e $x_\alpha \in A$, donde, $q[W_\xi] = q[\{x_\alpha\}] \in V \cap \mathcal{W} = U$. A segunda possibilidade é que ξ é limite de elementos de $\{\alpha + 1 : x_\alpha \in A\}$ e, portanto, limite de elementos de $\{\alpha : x_\alpha \in A\}$. Neste caso, existe $z \in W_\xi$ ponto de acumulação de $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$. Com efeito, como ξ é limite de elementos de $\{\alpha : x_\alpha \in A\}$, tomamos sequência crescente de elementos $\{x_{\alpha_n} \in A : n \in \omega\}$ tal que α_n converge para ξ . Agora, pela compacidade enumerável, existe z ponto de acumulação de $\{x_{\alpha_n} \in A : n \in \omega\}$ em X . Sendo assim, pela maneira como foi tomada a sequência, todo pedaço da sequência livre, limitado em ξ possui apenas uma quantidade finita dos x_{α_n} 's, donde, $z \in W_\xi$. Por fim, $z \in \overline{A} \subset q^{-1}[V]$, logo $q[W_\xi] \in V \cap \mathcal{W}$ como desejado.

Veremos, por fim, que os conjuntos da forma $(W_\xi, W_\beta]$, com $\xi < \beta \leq \omega_1$, são abertos em $\mathcal{W}$. De fato, dado $\xi < \eta \leq \beta$, se η é sucessor então sabemos que $q[W_\eta] = U_\eta$ é aberto em $\mathcal{W}$. Agora, se η é limite, para cada $z \in W_\eta$, usando a definição de sequência livre e a definição de W_η , deve existir U_z aberto em X tal que $\{x_\rho : \rho < \xi\} \cap U_z = \emptyset = \{x_\rho : \rho \geq \beta\} \cap U_z$; tomamos $U_\eta = \bigcup_{z \in W_\eta} q[U_z]$. Seja, por fim, $B = \bigcup_{\xi < \eta \leq \beta} U_\eta$. Temos, por construção, que B é aberto pois é a imagem de um aberto saturado e $(W_\xi, W_\beta] \subset B$. Note que pela maneira como foram escolhidos os U_η temos que nenhum outro W_ζ para $\zeta \in [0, \xi] \cup (\beta, \omega_1]$ tem imagem por q interceptando B , logo $B \cap \mathcal{W} = (W_\xi, W_\beta]$.

Note que essas demonstrações acima nos dão que a bijeção com ω_1 (ou $\omega_1 + 1$) é o homeomorfismo desejado. Agora, $\{y \in Y : |q^{-1}[\{y\}]| > 1\}$ é fechado em Y e é cópia de ω_1 , ou $\omega_1 + 1$, e, portanto, é T_5 . Então, por um lema anterior, segue que Y é T_5 e, portanto, o espaço desejado.

Por fim veremos que (c) implica (d). Considere X com a topologia τ como em (c), D denso enumerável em X e W a cópia de ω_1 em X . Note que, como D é enumerável, podemos tomá-lo disjunto de W , basta deslocar o início da cópia para depois da interseção. Seja agora W^* o conjunto dado pelos elementos de W referentes aos ordinais limites de ω_1 . Note que, como $\{\alpha < \omega_1 : \alpha \text{ é ordinal limite}\} \subset \omega_1$ é homeomorfo à ω_1 , então W^* também é homeomorfo à ω_1 . Observamos agora que, para cada elemento $w \in W^*$, temos que existe uma sequência de elementos de W que converge para w , basta considerar uma sequência cofinal indexada em ω de elementos de ω_1 que converge para o correspondente de w em ω_1 usando a identificação de W . Pelo resto da demonstração, identificaremos, W^* com ω_1 . Usando o lema 6.2.7, para cada $\xi \in \omega_1$ existe uma sequência $\sigma_\xi : \omega \rightarrow D$ que converge para ξ . Consideramos $D_\xi = \sigma_\xi[\omega]$ para todo $\xi \in \omega_1$ sucessor e tomamos $Y = D \cup \omega_1$.

Construiremos então um refinamento da topologia de subespaço de Y de modo que a nova topologia torne Y um espaço γN que seja T_5 .

Para tanto, seja τ' topologia gerada pela topologia de subespaço de Y adicionando os unitários de D . Tal conjunto de fato gera uma topologia e, pelo lema 6.2.6, como a topologia de subespaço era T_5 , então τ' também o será. Agora, para auxiliar a construção do refinamento desejado, usaremos os conjuntos D_ξ , para definir conjuntos A_ξ , de maneira que, para todo $\xi < \omega_1$, sejam válidos:

- (1) Para todo $\xi_1 < \xi_2 < \omega_1$, temos que $A_{\xi_1} \subset^* A_{\xi_2}$;
- (2) para toda τ' vizinhança V de $0 \in \omega_1$, existe $F \in [D]^{<\aleph_0}$ tal que $\{0\} \cup A_0 \setminus F \subset V$;
- (3) para todo $0 < \xi < \omega_1$ e toda τ' vizinhança V de ξ , existem $\beta < \xi$ e $F \in [D]^{<\aleph_0}$ tais que $(\beta, \xi] \cup (A_\xi \setminus A_\beta) \setminus F \subset V$.

Tomamos $A_0 = D_0$, que satisfaz a condição (1) e (3), pois não temos nada para verificar. Além disso, D_0 satisfaz a condição (2). Com efeito, para toda vizinhança U de 0 em τ' , temos uma vizinhança V de 0 na topologia de subespaço de Y . Como σ_0 converge para 0 na topologia original e tem imagem em D , deve existir uma quantidade finita, F , de pontos de D , tais que $\sigma_0[\omega] \setminus F = D_0 \setminus F \subset V \subset U$.

Supondo já construídos A_ξ para todo $\xi < \alpha$ construiremos A_α da seguinte forma:

- Caso $\alpha = \gamma + 1$ seja sucessor, tomamos $A_\alpha = A_\gamma \cup D_\alpha$. A propriedade (1) segue da hipótese de indução e do fato que $A_\gamma \subset A_\alpha$; e a propriedade (2) não precisa ser verificada. Para verificar a propriedade (3) considere $\beta = \gamma$ e então temos

$$(\beta, \xi] \cup (A_\xi \setminus A_\beta) = \{\alpha\} \cup (D_\alpha).$$

Como D_α converge para α , utilizando a mesma argumentação feita para 0 , temos que (3) é verdade.

- Caso α seja um ordinal limite, refinamos a topologia τ' para uma topologia τ'' usando a seguinte base:

$$\tau' \cup \{(\beta, \xi] \cup (A_\xi \setminus A_\beta) \setminus F : \beta < \xi < \alpha, F \in [D]^{<\aleph_0}\}.$$

Note que esse refinamento é possível pois, dados dois elementos da nova base dados por β_1, ξ_1, F_1 e β_2, ξ_2, F_2 , temos que, caso $\beta_1 < \xi_1 \leq \beta_2 < \xi_2$, a interseção desses conjuntos está contida em D e, portanto é aberta em τ' . Agora, caso $\beta_1 < \beta_2 \leq \xi_1 < \xi_2$, temos que, de maneira análoga ao que foi feito com os espaços de Franklin-Rajagopalan,

$$(A_{\xi_1} \setminus A_{\beta_1}) \cap (A_{\xi_2} \setminus A_{\beta_2}) =^* (A_{\xi_1} \setminus A_{\beta_2}).$$

Daí, temos que existe $F \in [D]^{<\aleph_0}$ tal que

$$(\beta_2, \xi_1] \cup (A_{\xi_1} \setminus A_{\beta_2}) \setminus F \subset ((\beta_1, \xi_1] \cup A_{\xi_1} \setminus A_{\beta_1}) \cap ((\beta_2, \xi_2] \cup A_{\xi_2} \setminus A_{\beta_2}).$$

Para todos os pontos de ω_1 que estão na interseção, o conjunto acima é um elemento da futura base que contém eles e está contido na interseção. Agora, para os pontos de D que estão na interseção, basta tomar os unitários para ser os elementos do conjunto que está contido na interseção. O caso onde um dos intervalos esteja contido no outro a argumentação é análoga. Note ainda que esse refinamento não muda a topologia de subespaço de ω_1 pois todo aberto básico novo, quando intersectado com ω_1 , é um intervalo aberto. Ademais essa nova topologia é localmente compacta. Para os pontos de D tal afirmação é imediata, pois o unitário aberto é compacto. Para os pontos de ω_1 , basta usar a compacidade dos intervalos básicos e, de maneira análoga ao que foi feito para os espaços de Franklin-Rajagopalan, os abertos básicos

novos serão compactos. Além disso, por (2), eles formam uma base para tais pontos.

Considero então $(\gamma_n)_{n \in \omega}$ uma sequência cofinal crescente em α de modo que γ_n seja sucessor para todo $n > 0$ e $\gamma_0 = 0$. Para cada $n \in \omega$ seja V_n uma τ' vizinhança de γ de maneira que $V_n \cap \omega_1 = [\gamma_n, \alpha] = \overline{V_n}^{\tau'} \cap \omega_1$. Note que tal construção é possível usando a topologia de ω_1 , o fato que γ_n é sucessor ou 0 e a compacidade dos intervalos. Tomando as intersecções necessárias e usando o fato que τ' é T_5 e, portanto, regular, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\overline{V_{n+1}} \subset V_n$ para todo $n \in \omega$. Agora, para cada $n \in \omega$, tomamos C_n aberto básico compacto de τ'' tal que $C_n \cap \omega_1 = [\gamma_n, \gamma_{n+1})$ satisfazendo $C_n \subset V_n$ e $C_n \cap V_{n+1} = \emptyset$. Para tanto notamos que $[\gamma_n, \gamma_{n+1}) \subset V_n \setminus \overline{V_{n+1}}$ que é um aberto em τ' e, portanto, em τ'' . Usamos a base de abertos de τ'' para cobrir esse intervalo com abertos básicos compactos contidos em $V_n \setminus \overline{V_{n+1}}$. Pela compacidade do intervalo podemos tomar finitos desses abertos para cobri-lo, e a união de tais intervalos será o C_n desejado.

Note que, como C_n são compactos em τ'' temos que eles também são compactos em X com a topologia original. Usando a normalidade, e o fato de que os C_n são fechados, tomamos, W_n abertos de X tais que $C_n \subset W_n$ e $\overline{W_n} \cap (D \cup \omega_1) \subset V_n$. Considero então

$$A = \overline{\bigcup_{n \in \omega} W_n}^{\tau} \setminus \bigcup_{n \in \omega} W_n,$$

e, como $[0, \alpha] \subset \bigcup_{n \in \omega} W_n$ é compacto e, portanto, fechado em X , temos que $[0, \alpha)$ e $A \setminus \{\alpha\}$ são fechados disjuntos em $X \setminus \{\alpha\}$. Usando que X é T_5 , fixamos abertos disjuntos U e R de $X \setminus \{\alpha\}$ e, portanto, de X , tais que $[0, \alpha) \subset R$ e $A \setminus \{\alpha\} \subset U$. Tomamos, por fim, $A_\alpha = \bigcup_{n \in \omega} (C_n \cap R \cap D)$. Note que (1) é válido pois, dado $\beta < \alpha$, deve existir $n \in \omega$ tal que $\gamma_n > \beta$, donde $A_\beta \subset^* A_{\gamma_n} \subset^* R$ por (2) e pelo fato de que R é vizinhança de $[0, \alpha)$. Agora $A_\beta \subset D$ por construção e $A_{\gamma_n} \subset^* \bigcup_{n \in \omega} W_n$ pois eles são abertos básicos no de τ'' que cobrem $[0, \gamma_{n+1})$. Segue então que $A_\beta \subset^* A_\alpha$. Não é necessário verificar (2), e (3) sai da escolha de R . Com efeito, fixado V aberto de τ' contendo α , deve existir $\beta < \alpha$ tal que $(\beta, \alpha] \subset V$. Logo, caso não exista $F \in [D]^{<\aleph_0}$ tal que $(A_\alpha \setminus A_\beta) \setminus F \subset V$, devemos ter uma quantidade infinita de elementos de A_α , e, portanto, de elementos de R , fora de V . Segue que um dos pontos de acumulação de R deve estar em $A \setminus \{\alpha\}$, o que é um absurdo.

Construímos assim os conjuntos A_ξ . Geramos a topologia τ^* refinando a topologia τ' usando a seguinte base:

$$\tau' \cup \{(\beta, \xi] \cup (A_\xi \setminus A_\beta) \setminus F : \beta < \xi < \omega_1, F \in [D]^{<\aleph_0}\}.$$

Tal conjunto é uma base, pois, os mesmos argumentos usados no caso limite acima funcionam para este conjunto. Note que a nossa nova topologia é um refinamento de uma topologia T_5 , no qual o denso enumerável se torna um conjunto de pontos isolados. Ademais, $X \setminus D$, que era homeomorfo à ω_1 na topologia original, continua sendo homeomorfo à ω_1 na nova topologia. Com efeito, quando consideramos τ' não interferimos com a topologia de subespaço de ω_1 , e na nova base apenas acrescentamos conjuntos cuja interseção com ω_1 são intervalos abertos. Podemos então, usando o lema 6.2.6, concluir que o novo espaço é T_5 . Como visto anteriormente o espaço também é localmente compacto, com um denso discreto enumerável e cujo resto do espaço é homeomorfo à ω_1 . Construímos assim o espaço da classe Γ_N que desejamos em (d). □

Enunciamos agora alguns resultados obtidos no artigo [2] que usam o Proper Forcing Axiom.

Teorema 6.3.3 ((PFA)). *Todo espaço topológico regular ou é α -realcompacto ou tem uma sequência livre não enumerável.*

Teorema 6.3.4 ((PFA)). *Todo espaço topológico compacto de tightness enumerável é sequencial.*

Usamos os dois teoremas acima e os conectamos a alguns pontos do teorema 6.3.2 para obter o próximo teorema. Esse teorema é extremamente interessante, pois, além de contribuir para a resposta afirmativa de (SSt 2), ele nos dá, sob PFA, uma equivalência entre compacidade enumerável e compacidade sequencial para espaços T_5 .

Teorema 6.3.5 ((PFA)). *Se X é um espaço topológico enumeravelmente compacto e T_5 , então X é sequencialmente compacto.*

Demonstração. Como vale PFA, temos que OCA é verdadeiro. Usando então o teorema 6.3.1 sabemos que vale a negação de (d) do teorema 6.3.2 e, portanto, vale a negação de todas as outras afirmações. Fixamos agora X como no enunciado e $\sigma : \omega \rightarrow X$ uma sequência injetora qualquer em X . Precisamos ver que existe uma subsequência de σ que é convergente. Seja R a imagem de σ , temos que $\overline{R}$ como subespaço topológico é T_5 , pois X o é. Além disso $\overline{R}$ é separável, pois R é denso enumerável, e é enumeravelmente compacto pois é um fechado contido em um espaço enumeravelmente compacto. Temos então que $\overline{R}$ está nas condições de (b) do teorema 6.3.2, donde não pode existir sequência livre não enumerável em $\overline{R}$. Sendo assim, pelo teorema 6.3.3, $\overline{R}$ é α -realcompacto. Mas agora, pelo lema 6.2.10, temos que $\overline{R}$ é compacto. Um resultado conhecido de Arhangel'skii, que é visto, por exemplo, no artigo [11], nos dá que, se um espaço topológico não tem sequências livres não enumeráveis, então ele tem tightness enumerável. Segue que $\overline{R}$ tem tightness enumerável e, pelo teorema 6.3.4, $\overline{R}$ é sequencial. Agora, como $\overline{R}$ é enumeravelmente compacto e sequencial, temos que, por uma mesma argumentação usada na proposição 3.1.3, existe uma sequência em R que converge para um ponto em X . □

O corolário a seguir dá uma resposta positiva para o problema de Scarborough-Stone para a classe dos espaços T_5 , uma vez que, pelo teorema acima, para esta classe, os espaços sequencialmente compactos são equivalentes aos enumeravelmente compactos.

Corolário 6.3.6 ((PFA)). *O produto de qualquer número de espaços T_5 enumeravelmente compactos é enumeravelmente compacto.*

Demonstração. Fixamos X_α , espaços topológicos T_5 sequencialmente compactos, para todo $\alpha < \lambda$. Definimos $X = \prod_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ e veremos que ele é sequencialmente compacto. Com efeito, fixamos $A \subset X$ enumerável e consideramos A_α a projeção de A na coordenada α . Aplicando a demonstração do teorema 6.3.5, temos que $\overline{A_\alpha}$ é compacto. Obtemos então que $\prod_{\alpha < \lambda} \overline{A_\alpha}$ é um subespaço compacto de X . Além disso, $A \subset \prod_{\alpha < \lambda} \overline{A_\alpha}$, isto é, A está contido em um compacto. Pela compacidade, existe $x \in \prod_{\alpha < \lambda} \overline{A_\alpha}$ ponto de acumulação de A no subespaço e, portanto, ponto de acumulação em X . □

Esse capítulo nos dá maneiras de conectar FR-espaços tanto com um contra-exemplo quanto com uma resposta positiva parcial. No primeiro capítulo usamos os FR-espaços para construir um contra-exemplo, garantindo a existência de T -pontos. Já no segundo e terceiro capítulos relacionamos os espaços ΓN , uma classe específica de FR-espaços, que são T_5 com a existência de vários espaços com outras propriedades. Tal relação nos permite, sob PFA, garantir que, se nenhum espaço ΓN é T_5 , então para classe dos espaços T_5 qualquer produto de sequencialmente compactos é enumeravelmente compacto.

Capítulo 7

Álgebras Booleanas e o Problema de Scarborough-Stone

Nesse capítulo introduziremos a notação da Álgebra Booleana e de jogos, usando delas para construir mais um exemplo negativo para o problema de Scarborough-Stone. Para tanto estudaremos a construção feita no artigo [4], de A. Dow e S. Shelah. Tal artigo tem como objetivo obter uma solução para o problema de Efimov, um dos principais problemas da topologia em aberto atualmente. Porém, nesse artigo, estudamos uma construção que nos permite resolver o problema de Scarborough-Stone. Tal construção será o foco desse capítulo.

Começamos introduzindo conceitos de álgebras Booleanas, como vistos em [8]. Depois desenvolvemos o conceito de álgebras Booleanas minimamente geradas e introduzimos um conceito de coerência para tais álgebras. Para tal estudo utilizamos as referências [4], [14] e [13].

Na segunda seção desse capítulo introduzimos o conceito de espaços de Stone das álgebras Booleanas. Veremos, também, qual efeito o fato de uma álgebra Booleana ser coerentemente minimamente gerada tem sobre seu espaço de Stone. Por fim apresentamos uma certa condição para que um espaço de Stone de uma álgebra Booleana coerentemente minimamente gerada seja sequencialmente compacto.

Na terceira seção desse capítulo introduzimos o conceito de jogo e definimos um jogo que envolve a criação de uma álgebra Booleana minimamente gerada. Definiremos o conceito de estratégia vencedora e veremos como o primeiro dos jogadores ter uma estratégia vencedora auxilia na criação do contra-exemplo. Associaremos o jogo com o conceito de árvore e construiremos, usando $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, uma árvore para representar a estratégia vencedora desejada.

Note que uma construção de um contra-exemplo usando $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ já foi feita na seção 5.2, porém a construção a seguir tem seu valor. Além de introduzir conceitos sobre álgebras Booleanas, diversificando exemplos nesse trabalho, usamos o conceito de jogo para construir o espaço, expandindo as ferramentas usadas para explorar o problema de Scarborough-Stone. Outro ponto importante é a utilização dessa construção, como referência, para outras construções de contra-exemplos, como o visto no artigo [7], onde usamos $\diamond(\mathfrak{s})$ como axioma adicional.

7.1 Álgebras Booleanas coerentemente minimamente geradas

Começamos com a definição básica tirada do livro [8] do que é ser uma álgebra Booleana.

Definição 7.1.1. Um conjunto $\langle \mathbb{B}, \wedge, \vee, \neg, 0, 1 \rangle$ é dito ser uma álgebra Booleana se $\mathbb{B}$ é um conjunto, $\wedge$ e $\vee$ são funções de $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$ em $\mathbb{B}$, $\neg$ é função unária de $\mathbb{B}$ em si mesmo e 0 e 1 representam elementos de $\mathbb{B}$ de modo que valem as seguintes afirmações:

- (1) Para todo $a \in \mathbb{B}$ temos $a \wedge 1 = a$;
- (2) para todo $a \in \mathbb{B}$ temos $a \vee 1 = 1$;
- (3) para todo $a \in \mathbb{B}$ temos $a \wedge 0 = 0$;
- (4) para todo $a \in \mathbb{B}$ temos $a \vee 0 = a$;
- (5) para todo $a, b \in \mathbb{B}$ temos $a \vee b = b \vee a$;
- (6) para todo $a, b \in \mathbb{B}$ temos $a \wedge b = b \wedge a$;
- (7) para todo $a, b, c \in \mathbb{B}$ temos $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$;
- (8) para todo $a, b, c \in \mathbb{B}$ temos $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$;
- (9) para todo $a, b, c \in \mathbb{B}$ temos $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$;
- (10) para todo $a, b, c \in \mathbb{B}$ temos $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$;
- (11) para todo $a \in \mathbb{B}$ temos $a \wedge (\neg a) = 0$;
- (12) para todo $a \in \mathbb{B}$ temos $a \vee (\neg a) = 1$;
- (13) para todo $a, b \in \mathbb{B}$ temos $\neg(a \vee b) = (\neg a) \wedge (\neg b)$;
- (14) para todo $a, b \in \mathbb{B}$ temos $\neg(a \wedge b) = (\neg a) \vee (\neg b)$;
- (15) para todo $a \in \mathbb{B}$ temos $a \vee a = a$;
- (16) para todo $a \in \mathbb{B}$ temos $a \wedge a = a$;
- (17) para todo $a \in \mathbb{B}$ temos $\neg(\neg a) = a$;
- (18) $\neg 0 = 1$;
- (19) $\neg 1 = 0$.

Enunciaremos uma proposição básica feita no mesmo livro que nos dá uma representação para os elementos de uma álgebra Booleana.

Proposição 7.1.2. Dados $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ álgebras Booleanas tais que $\mathbb{A}$ é subálgebra de $\mathbb{B}$ e $b \in \mathbb{B}$ elemento qualquer. Dado $\langle \mathbb{A}, b \rangle$, representando a menor álgebra Booleana que contém $\mathbb{A}$ e b , qualquer elemento $b' \in \langle \mathbb{A}, b \rangle$ pode ser representado da forma $b' = (c \wedge b) \vee (d \wedge \neg b)$, para algum $c, d \in \mathbb{A}$.

Agora usaremos alguns conceitos e resultados mais conhecidos sobre álgebras Booleanas para desenvolver a parte necessária da teoria. Como referência podemos usar novamente o livro [8] e o seguinte artigo [14].

Definição 7.1.3. Dada uma álgebra Booleana $\mathbb{A}$, um filtro em $\mathbb{A}$ é um conjunto $\mathcal{U} \subset \mathbb{A}$ satisfazendo as seguintes condições:

- (1) Dados $a, b \in \mathcal{U}$, temos que $a \wedge b \in \mathcal{U}$;
- (2) dados $a \in \mathcal{U}$ e $b \in \mathbb{A}$, temos que $a \vee b \in \mathcal{U}$;

(3) $0 \notin \mathcal{U}$.

Definimos também o conceito de ultrafiltro em álgebras Booleanas. Dizemos que $\mathcal{U}$ é um ultrafiltro em uma álgebra Booleana $\mathbb{A}$ se, e somente se, $\mathcal{U}$ é um filtro em $\mathbb{A}$ e, para todos os elementos $a \in \mathbb{A}$, ou $a \in \mathcal{U}$ ou $\neg a \in \mathcal{U}$.

Definimos agora um dos conceitos centrais para as álgebras Booleanas que vão nos auxiliar com a construção do contra-exemplo.

Definição 7.1.4. Fixe $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ álgebras Booleanas de modo que $\mathbb{A}$ é subálgebra de $\mathbb{B}$. Dizemos que $\mathbb{B}$ é extensão minimal de $\mathbb{A}$, denotamos por $\mathbb{A} <_m \mathbb{B}$, se, e somente se, $\mathbb{A}$ é subálgebra própria de $\mathbb{B}$ e dado $\mathbb{H}$ subálgebra de $\mathbb{B}$ que estende $\mathbb{A}$ então ou $\mathbb{H} = \mathbb{A}$ ou $\mathbb{H} = \mathbb{B}$.

Definição 7.1.5. Dada uma álgebra Booleana $\mathbb{A}$, dizemos que ela é minimamente gerada se existem um ordinal λ e elementos $a_\alpha \in \mathbb{A}$, para $\alpha < \lambda$, de modo que, definindo $\mathbb{B}_\xi = \langle a_\alpha : \alpha < \xi \rangle$, temos $\mathbb{B}_\xi <_m \mathbb{B}_{\xi+1}$ e $\mathbb{A} = \mathbb{B}_\lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} \mathbb{B}_\xi$.

Agora demonstraremos uma proposição referente a extensões minimais. Tal resultado nos ajudará na construção de uma estrutura que vai ser essencial para a definição de coerência definida adiante.

Proposição 7.1.6. Dadas $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ álgebras Booleanas tais que $\mathbb{A} <_m \mathbb{B}$, então, para todo $b \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{A}$ e todo $a \in \mathbb{A}$, um, e apenas um, dos elementos $b \setminus a$ ou $a \wedge b$ é um elemento de $\mathbb{A}$.

Demonstração. Fixamos a e b como no enunciado. Caso $b \setminus a \notin \mathbb{A}$, então, como $\mathbb{A} <_m \mathbb{B}$, temos $\langle \mathbb{A}, b \setminus a \rangle = \mathbb{B}$ e, pela proposição 7.1.2, devem existir $c, d \in \mathbb{A}$ tais que,

$$b = [c \wedge (b \setminus a)] \vee [d \wedge (\neg(b \setminus a))] = [c \wedge (b \setminus a)] \vee [d \wedge (\neg b)] \vee [d \wedge a].$$

Agora, como $b \wedge b = b$ e $b \vee (b \setminus a) = b$, temos

$$b = (b \setminus a) \vee (d \wedge a),$$

e tal igualdade nos dá

$$b \wedge a = c \wedge a \in \mathbb{A}.$$

Prosseguimos de maneira análoga para o caso $b \wedge a \notin \mathbb{A}$ e obtemos que $b \setminus a \in \mathbb{A}$. Note ainda que os dois não podem estar simultaneamente em $\mathbb{A}$ pois, caso estivessem teríamos $b = (b \setminus a) \vee (b \wedge a) \in \mathbb{A}$. $\square$

Aqui, e durante o resto da dissertação, usaremos $b \setminus a$ como abreviação para $b \wedge (\neg a)$.

Agora a proposição acima nos permite definir um filtro relacionado à minimalidade entre as álgebras Booleanas. Com efeito, dadas $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ álgebras Booleanas tais que $\mathbb{A} <_m \mathbb{B}$, defino os elementos do ultrafiltro $\mathcal{U}_{\mathbb{A}, \mathbb{B}}$ em $\mathbb{A}$ da seguinte maneira:

$$a \in \mathcal{U}_{\mathbb{A}, \mathbb{B}} \text{ se, e somente se, para todo } b \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{A}, b \setminus a \in \mathbb{A}.$$

Veremos que tal conjunto é, de fato, filtro. Sabemos que $0 \notin \mathcal{U}_{\mathbb{A}, \mathbb{B}}$ pela própria definição e $1 \in \mathcal{U}_{\mathbb{A}, \mathbb{B}}$, pois, para todo elemento $b \in \mathbb{B}$, temos $b \setminus 1 = 0 \in \mathbb{A}$. Agora, dados $a, a' \in \mathcal{U}_{\mathbb{A}, \mathbb{B}}$ e $b \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{A}$, temos que $b \setminus (a \wedge a') = (b \setminus a) \vee (b \setminus a') \in \mathbb{A}$. Por fim, dados $a \in \mathcal{U}_{\mathbb{A}, \mathbb{B}}$ e $a' \in \mathbb{A}$, devemos ter que para todo $b \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{A}$, $b \setminus (a \vee a') \in \mathbb{A}$, pois, caso contrário, existe um b de modo que $b \setminus (a \vee a') \notin \mathbb{A}$ e $b \setminus a \in \mathbb{A}$. Mas agora, pela proposição acima, temos que $b \wedge (a \vee a') = (b \wedge a) \vee (b \wedge a') \in \mathbb{A}$ e,

portanto, $b = (b \wedge a) \vee (b \wedge a') \vee (b \setminus a) \in \mathbb{A}$, um absurdo.

Note que o filtro definido acima é, também, um ultrafiltro. Com efeito, dado $a \notin \mathcal{U}_{\mathbb{A}, \mathbb{B}}$, temos que existe $b \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{A}$ tal que $b \setminus a \notin \mathbb{A}$ e, portanto, $b \wedge a \in \mathbb{A}$. Agora, como $\mathbb{B} = \langle \mathbb{A}, b \rangle$, para todo $b' \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{A}$, temos $b' = (c \wedge b) \vee (d \wedge \neg b)$ para alguns $c, d \in \mathbb{A}$. Sendo assim, temos $b' \setminus \neg a = b' \wedge a = (c \wedge b \wedge a) \vee (b \wedge \neg b \wedge a)$, e, como $b \wedge a \in \mathbb{A}$, o primeiro elemento da união está em $\mathbb{A}$. Por fim, como $\neg b \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{A}$, temos que $\neg b \setminus a \in \mathbb{A}$ ou $\neg b \wedge a \in \mathbb{A}$. Caso $\neg b \setminus a \in \mathbb{A}$ temos que

$$\neg b \setminus a = \neg b \wedge \neg a = \neg(b \vee a) \in \mathbb{A},$$

então $b \vee a \in \mathbb{A}$ e, portanto, $(b \vee a) \wedge \neg a = b \setminus a \in \mathbb{A}$, um absurdo. Concluimos que $\neg b \wedge a \in \mathbb{A}$ e, portanto, a segunda parte da união está em $\mathbb{A}$, isto é, $b' \setminus \neg a \in \mathbb{A}$, donde $\neg a \in \mathcal{U}_{\mathbb{A}, \mathbb{B}}$.

Combinaremos agora alguns resultados anteriores para obter uma proposição que nos dá mais algumas propriedades sobre o ultrafiltro definido.

Proposição 7.1.7. *Fixe $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ álgebras Booleanas tais que $\mathbb{A} <_m \mathbb{B}$. Temos, se $a \in \mathcal{U}_{\mathbb{A}, \mathbb{B}}$ e $b \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{A}$, então $a \wedge b \notin \mathbb{A}$. Análogamente, se $a \notin \mathcal{U}_{\mathbb{A}, \mathbb{B}}$ e $b \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{A}$, então $a \wedge b \in \mathbb{A}$.*

Demonstração. A primeira afirmação é verdadeira pois, da definição de $\mathcal{U}_{\mathbb{A}, \mathbb{B}}$, temos que $b \setminus a \in \mathbb{A}$, donde, pela proposição 7.1.6, $b \wedge a \notin \mathbb{A}$. Verificaremos então a segunda afirmação. Como $a \notin \mathcal{U}_{\mathbb{A}, \mathbb{B}}$, temos que existe $b' \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{A}$ tal que $b' \setminus a \notin \mathbb{A}$, donde, pela proposição 7.1.6, $b' \wedge a \in \mathbb{A}$. Note que $\neg b' \wedge a = a \setminus (b' \wedge a) \in \mathbb{A}$. Como $\mathbb{A} <_m \mathbb{B}$, existem c e d em $\mathbb{A}$ tais que $b = (c \wedge b') \vee (d \wedge \neg b')$. Segue daí que $a \wedge b = (a \wedge c \wedge b') \vee (a \wedge d \wedge \neg b') = ((b' \wedge a) \wedge c) \vee ((\neg b' \wedge a) \wedge d) \in \mathbb{A}$. $\square$

Definição 7.1.8. *Dada $\mathbb{A}$ algebra Booleana, dizemos que ela é coerentemente minimamente gerada se ela é minimamente gerada e, dados λ ordinal e $\{a_\alpha : \alpha < \lambda\}$ conjunto de geradores como na definição de minimamente gerada, definindo $\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U}_{\mathbb{B}_\alpha, \mathbb{B}_{\alpha+1}}$ para todo $\alpha < \lambda$, temos que $\mathcal{U}_\alpha$ também é o ultrafiltro gerado por $\{a_\xi : \xi < \alpha\}$. Note que nesse caso a definição dos ultrafiltros nos permite definir o ultrafiltro $\mathcal{U}_\lambda$ em $\mathbb{A}$ gerado por $\{a_\alpha : \alpha < \lambda\}$.*

A partir de agora, para facilitar nossa construção, consideraremos todas as álgebras Booleanas como subálgebras da algebra Booleana dada pelas partes de ω , denotada por $\mathcal{P}(\omega)$, considerando $\wedge$ a interseção, $\vee$ a união, $\neg$ o complementar e 0 e 1 o vazio e ω respectivamente.

Proposição 7.1.9. *Dada $\mathbb{A}$ uma álgebra Booleana coerentemente minimamente gerada, com a notação usada anteriormente, para todo $\beta < \lambda$, o conjunto $\mathcal{U}_\beta \cup \{\omega \setminus a_\beta\}$ tem a propriedade da interseção finita.*

Demonstração. Note que, como $\mathcal{U}_\beta$ é filtro, basta verificar, para qualquer elemento $a \in \mathcal{U}_\beta$, que $a \cap \omega \setminus a_\beta \neq \emptyset$. Suponha por absurdo que $a \cap (\omega \setminus a_\beta) = a \setminus a_\beta = \emptyset$, sendo assim $a \subset a_\beta$. Agora, pela definição de $\mathcal{U}_\beta$ temos que $a_\beta \setminus a \in \mathbb{B}_\beta$ e, portanto $a_\beta \cap a = a \notin \mathbb{B}_\beta$, um absurdo. $\square$

Usando a proposição acima temos que, para todo $\alpha > \beta$, o conjunto $\mathcal{U}_\beta \cup \{\omega \setminus a_\beta\}$ pode gerar um filtro em $\mathbb{B}_\alpha$. Denotamos tal filtro por $x_{\beta, \alpha}$ e adotamos $x_{\beta, \lambda} = x_\beta$.

Proposição 7.1.10. *Fixe $\mathbb{A} = \mathbb{B}_\lambda$ algebra Booleana coerentemente minimamente gerada com a notação da proposição anterior. Dados $\beta < \alpha < \lambda$ temos que $a_\alpha \setminus a_\beta \in \mathbb{B}_{\beta+1}$ e, portanto, $x_{\beta, \alpha}$ e x_β são ultrafiltros em $\mathbb{B}_{\alpha+1}$ e $\mathbb{B}_\lambda$ respectivamente.*

Demonstração. Fixado $\beta < \lambda$ provaremos por indução em α , com $\beta < \alpha \leq \lambda$, que, para todo $b \in \mathbb{B}_\alpha$, $b \setminus a_\beta \in \mathbb{B}_{\beta+1}$ e, portanto, como $a_\xi \in \mathbb{B}_{\xi+1}$, temos que $a_\xi \setminus a_\beta \in \mathbb{B}_{\beta+1}$ para todo $\beta < \xi < \lambda$.

Com efeito, no passo inicial, $b \in \mathbb{B}_{\beta+1}$, é imediata a relação pois ambos os elementos estão em $\mathbb{B}_{\beta+1}$. Suponha então que vale a hipótese de indução para todo $\gamma < \alpha$. Caso $\alpha = \gamma + 1$ temos que $a_\beta \in \mathcal{U}_\beta \subset \mathcal{U}_\gamma$, donde, pela definição desse ultrafiltro, fixado $b \in B_\alpha$ devemos ter $b \setminus a_\beta \in \mathbb{B}_\gamma$ e, por indução, $(b \setminus a_\beta) \setminus a_\beta = b \setminus a_\beta \in \mathbb{B}_{\beta+1}$. Agora no caso em que α seja limite, fixado $b \in \mathbb{B}_\alpha$, temos, pela definição de álgebra gerada, que b é a união finita de intersecções finitas de elementos geradores e, portanto, deve existir um γ tal que $\beta < \gamma < \alpha$ e $b \in \mathbb{B}_\gamma$. Logo, por hipótese de indução, temos que $b \setminus a_\beta \in \mathbb{B}_{\beta+1}$.

Para verificar que $x_{\beta,\alpha}$, para $\beta < \alpha \leq \lambda$, é um ultrafiltro prosseguimos, também, por indução. Para o caso inicial fixe $b \in \mathbb{B}_{\beta+1}$ e suponha que $b \notin x_{\beta,\beta+1}$. Podemos supor que $b \in \mathbb{B}_{\beta+1} \setminus \mathbb{B}_\beta$ pois, caso $b \in \mathbb{B}_\beta$, ou ele ou seu complementar estariam em $\mathcal{U}_\beta$ e, portanto, em $x_{\beta,\beta+1}$. Sendo assim, existem $c, d \in \mathbb{B}_\beta$ tais que $b = (c \cap a_\beta) \cup (d \cap \neg a_\beta)$. Caso $d \in \mathcal{U}_\beta$, então $d \cap \neg a_\beta \in x_{\beta,\beta+1}$, donde $b \in x_{\beta,\beta+1}$. Por fim, se $\neg d \in \mathcal{U}_\beta$, então

$$\neg b = (\neg c \cap \neg d) \cup (\neg c \cap a_\beta) \cup (\neg a_\beta \cap \neg d),$$

donde $\neg a_\beta \cap \neg d \in x_{\beta,\beta+1}$ e, portanto, $b \in x_{\beta,\beta+1}$. Dado $\beta < \alpha \leq \lambda$ e fixado $b \in \mathbb{B}_\alpha$, temos que $b \setminus a_\beta \in \mathbb{B}_{\beta+1}$ e, portanto $b \setminus a_\beta \in x_{\beta,\beta+1}$ ou $\neg(b \setminus a_\beta) \in x_{\beta,\beta+1}$. No primeiro caso temos que $b \setminus a_\beta \subset b$ e, portanto, existe uma intersecção de elementos da base de $x_{\beta,\beta+1}$ contida em b , isto é, $b \in x_{\beta,\alpha}$. Agora, para o segundo caso temos que

$$\neg(b \setminus a_\beta) = \neg b \cup a_\beta \in x_{\beta,\beta+1},$$

donde,

$$(\neg b \cup a_\beta) \cap \neg a_\beta = \neg b \cap \neg a_\beta \in x_{\beta,\beta+1}$$

e, pelo mesmo argumento anterior, temos $\neg b \in x_{\beta,\alpha}$.

□

7.2 Espaços de Stone

Nessa seção definiremos espaços de Stone de álgebras Booleanas. Além disso, estudaremos algumas consequências do fato de uma álgebra Booleana ser coerentemente minimamente gerada sobre o seu espaço de Stone. Como referências para essa seção usamos [8] e [4].

Começamos definindo o que significa dizer que um espaço topológico é de Stone.

Definição 7.2.1. *Um espaço topológico X é dito ser espaço de Stone se, e somente se, X é compacto, T_2 e tem base de abertos-fechados.*

A definição a seguir e a próxima proposição nos dão um espaço de Stone obtido a partir de uma álgebra Booleana.

Definição 7.2.2. *Dado uma álgebra Booleana $\mathbb{A}$, o espaço $S(\mathbb{A})$, é o espaço topológico dado pelo conjunto de todos os ultrafiltros em $\mathbb{A}$ com a topologia gerada pela base $\{b^* : b \in \mathbb{A}\}$, onde $b^* = \{\mathcal{U} \in S(\mathbb{A}) : b \in \mathcal{U}\}$.*

Note que o conjunto da definição acima gera um espaço topológico. Com efeito, a união dos elementos da base contém todos os ultrafiltros de $\mathbb{A}$ pela maneira como foi escolhida. Agora, dados dois elementos do conjunto, a^* e b^* , temos que, usando as propriedades de ultrafiltros, $a^* \cap b^* = (a \cap b)^*$ está no conjunto.

Proposição 7.2.3. *Nas condições da definição 7.2.2 temos que $S(\mathbb{A})$ é um espaço de Stone.*

Demonstração. Começamos observando que os elementos do conjunto de geradores são abertos e fechados. Com efeito, sabemos que, dado $b \in \mathbb{A}$, o conjunto $S(\mathbb{A}) \setminus b^*$ é formado por todos os ultrafiltros em $\mathbb{A}$ que não tem b como elemento. Sendo assim todos esse ultrafiltros tem $\neg b$ como elemento, donde $S(\mathbb{A}) \setminus b^* = (\neg b)^*$. Para verificar que $S(\mathbb{A})$ é T_2 fixamos $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}'$ dois ultrafiltros diferentes em $\mathbb{A}$. Usando a definição de ultrafiltro deve existir $b \in \mathbb{A}$ tal que $b \in \mathcal{U}$ e $b \notin \mathcal{U}'$. Segue então que $\mathcal{U} \in b^*$ e $\mathcal{U}' \in (\neg b)^*$. Resta ver que $S(\mathbb{A})$ é compacto. Para tanto associamos $S(\mathbb{A})$ com um subconjunto S de $2^{\mathbb{A}}$ identificando cada $\mathcal{U} \in S(\mathbb{A})$ com a função $f_{\mathcal{U}}$ dada por $f_{\mathcal{U}}(b) = 1$ se, e somente se, $b \in \mathcal{U}$. Note que tal identificação nos dá que $S(\mathbb{A})$ é homeomorfo à S enquanto subespaço de $2^{\mathbb{A}}$. Resta ver que S é fechado e, portanto, compacto, pois $2^{\mathbb{A}}$ o é. Note que, para todo $f \notin S$, temos que f corresponde a um subconjunto de $\mathbb{A}$ que não é um ultrafiltro. Caso f seja tal que existe $a \in \mathbb{A}$ tal que $f(a) = 0 = f(\neg a)$. O aberto obtido fixando as coordenadas a e $\neg a$ para ser $\{0\}$ não intercepta S , pois, nenhum elemento dele é maximal. Caso o subconjunto seja tal que existe $a \in \mathbb{A}$ tal que $f(a) = 1 = f(\neg a)$. O aberto obtido fixando as coordenadas a e $\neg a$ para ser $\{1\}$ não intercepta S , pois, nenhum elemento dele pode ser filtro uma vez que $a \cap \neg a = 0$. Caso f seja tal que, para todo $a \in \mathbb{A}$, ou $f(a) = 1$ e $f(\neg a) = 0$ ou $f(a) = 0$ e $f(\neg a) = 1$. Nesse caso, como f não pode representar um ultrafiltro, então f não pode representar um filtro. Sendo assim alguma das três condições da definição 7.1.3 não ocorre. No caso da condição (1) tomamos os elementos $a, b \in \mathbb{A}$ tais que $f(a) = 1 = f(b)$ e $f(a \cap b) = 0$. Pela condição inicial temos $f(\neg(a \cap b)) = 1$. O aberto dado por $\{1\}$ nas coordenadas a, b e $\neg(a \cap b)$ não pode representar filtros e, portanto, não intercepta S . No caso da condição (2) tomamos $a, b \in \mathbb{A}$ tais que $f(a) = 1$ e $f(a \cup b) = 0$. Pela condição inicial temos $f(\neg(a \cup b)) = f(\neg a \cap \neg b) = 1$. O aberto dado por $\{1\}$ nas coordenadas a e $\neg a \cap \neg b$ não pode representar filtros, pois, a interseção dos elementos é vazia. Segue que tal aberto não intercepta S . Por fim, no caso da condição (3), temos que $f(0) = 1$. O aberto dado por $\{1\}$ na coordenada 0 não pode representar filtros e, portanto, não intercepta S .

□

Definiremos agora algumas noções de convergência usando elementos das álgebras Booleanas.

Definição 7.2.4. Fixe $\mathbb{A}$ álgebra Booleana, $(b_n)_{n \in \omega}$ sequência em $\mathbb{A}$ e $\mathcal{U}$ ultrafiltro em $\mathbb{A}$. Dizemos que $(b_n)_{n \in \omega}$ converge para $\mathcal{U}$ se, e somente se, para todo $a \in \mathcal{U}$, o conjunto $\{n \in \omega : b_n \subset a\}$ é cofinito.

A próxima definição é uma maneira de redefinir a convergência no espaço de Stone.

Definição 7.2.5. Fixe $\mathbb{A}$ álgebra Booleana, $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ sequência em $S(\mathbb{A})$ e $\mathcal{U}$ ultrafiltro em $\mathbb{A}$. Dizemos que $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ converge para $\mathcal{U}$ se, e somente se, para todo $a \in \mathcal{U}$, o conjunto $\{n \in \omega : a \in \mathcal{U}_n\}$ é cofinito.

Começamos, através da próxima proposição, a ver agora a relação das álgebras Booleanas com a compacidade e o problema de Scarborough-Stone.

Proposição 7.2.6. Usando a mesma notação anterior seja $\mathbb{A} = \mathbb{B}_\lambda$ uma álgebra Booleana coerentemente minimamente gerada. Temos então que $S(\mathbb{A}) = \{x_\alpha : \alpha < \lambda\} \cup \{\mathcal{U}_\lambda\}$ e que ele é um espaço topológico sequencialmente compacto.

Demonstração. Para verificar a primeira afirmação fixe $\mathcal{U}$ ultrafiltro qualquer em $\mathbb{A}$. Sabemos então que ou, para todo $\xi < \lambda$, $a_\xi \in \mathcal{U}$ e, portanto, $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\lambda$, ou deve existir $\xi < \lambda$ tal que $\omega \setminus a_\xi \in \mathcal{U}$. Nesse caso, consideramos, usando a boa ordem, α o mínimo para tais ξ . Segue que $\{a_\gamma : \gamma < \alpha\} \cup \{\omega \setminus a_\alpha\} \subset \mathcal{U}$ e, portanto, $x_\alpha \subset \mathcal{U}$, donde, pela maximalidade dos ultrafiltros, $x_\alpha = \mathcal{U}$.

Agora, para ver a compacidade sequencial, tomamos $A \subset S(\mathbb{A})$ infinito. Sem perda de generalidade podemos assumir que A é enumerável e é subconjunto de $\{x_\alpha : \alpha < \lambda\}$. Sendo assim

$A = \{x_{\xi_n} : n \in \omega\}$. Note que pode-se supor que tal conjunto não converge para $\mathcal{U}_\lambda$, pois, caso contrário, não haveria nada para verificar. Então, deve existir $a \in \mathcal{U}_\lambda$ de maneira que $a^* \cap A$ é finito e, portanto, $\{n \in \omega : a \notin x_{\xi_n}\}$ é infinito. Pela definição de base para um ultrafiltro tome $\beta_1 < \dots < \beta_m < \lambda$ tais que $a_{\beta_1} \cap \dots \cap a_{\beta_m} \subset a$. Note que, pela definição de ultrafiltro, $\{n \in \omega : a \notin x_{\xi_n}\} \subset \{n \in \omega : a_{\beta_1} \cap \dots \cap a_{\beta_m} \notin x_{\xi_n}\}$ e, portanto, o último conjunto também é infinito. Mais ainda, observamos que deve existir β_i tal que $\{n \in \omega : a_{\beta_i} \notin x_{\xi_n}\}$ seja infinito pois, caso contrário, teríamos que $\{n \in \omega : a_{\beta_i} \in x_{\xi_n}\}$ é cofinito para todo $1 \leq i \leq m$, donde $\{n \in \omega : a_{\beta_1} \cap \dots \cap a_{\beta_m} \in x_{\xi_n}\}$ também é cofinito, o que é um absurdo. Fixe então $\beta < \lambda$ o menor ordinal tal que $I_\beta = \{n \in \omega : a_\beta \notin x_{\xi_n}\}$ seja infinito, veremos que $\{x_{\xi_n} : n \in I_\beta\}$ converge para x_β . Com efeito, fixe $a \in x_\beta$, existem $\gamma_1 < \dots < \gamma_l < \beta$ tais que, ou $a_{\gamma_1} \cap \dots \cap a_{\gamma_l} \subset a$, ou $a_{\gamma_1} \cap \dots \cap a_{\gamma_l} \cap (\omega \setminus a_\beta) \subset a$. Note ainda que, pela minimalidade de β , para todo $\gamma < \beta$, temos $\{n \in \omega : a_\gamma \notin x_{\xi_n}\}$ é finito e, portanto, $\{n \in I_\beta : a_\gamma \in x_{\xi_n}\}$ é cofinito em I_β . No primeiro caso temos

$$\bigcap_{i=1}^l \{n \in I_\beta : a_{\gamma_i} \in x_{\xi_n}\} = \{n \in I_\beta : \bigcap_{i=1}^l a_{\gamma_i} \in x_{\xi_n}\}$$

e, portanto, é um subconjunto cofinito de I_β . Agora, temos $\{n \in I_\beta : \bigcap_{i=1}^l a_{\gamma_i} \in x_{\xi_n}\} \subset \{n \in I_\beta : a \in x_{\xi_n}\}$, isto é, apenas um número finito de elementos de $\{x_{\xi_n} : n \in I_\beta\}$ não está em a^* . Para verificar o segundo caso basta repetir a argumentação acima acrescentando o conjunto relacionado à $\omega \setminus a_\beta$, observando que $\{n \in I_\beta : (\omega \setminus a_\beta) \in x_{\xi_n}\} = I_\beta$ pela maneira como tomamos I_β . Conclui-se então que $\{x_{\xi_n} : n \in I_\beta\}$ converge para x_β e, portanto, $S(\mathbb{A})$ é sequencialmente compacto. $\square$

Corolário 7.2.7. *Nas condições da proposição acima temos que $S(\mathbb{A}) \setminus \{\mathcal{U}_\lambda\}$ é sequencialmente compacto se, e somente se, não existe subconjunto infinito de $S(\mathbb{A})$ convergindo para $\mathcal{U}_\lambda$.*

Demonstração. Com efeito, caso $S(\mathbb{A}) \setminus \{\mathcal{U}_\lambda\}$ seja sequencialmente compacto devemos ter que, para toda subconjunto infinito $A \subset S(\mathbb{A})$, existe subconjunto de A em $S(\mathbb{A}) \setminus \{\mathcal{U}_\lambda\}$ que converge para um elemento de $S(\mathbb{A}) \setminus \{\mathcal{U}_\lambda\}$. Sendo assim, como $S(\mathbb{A})$ é T_2 , devemos ter que o subconjunto inicial não pode convergir para $\mathcal{U}_\lambda$. Agora, supondo que não existam subconjuntos infinitos de $S(\mathbb{A})$ que convergem para $\mathcal{U}_\lambda$, temos que, como $S(\mathbb{A})$ é sequencialmente compacto, qualquer subconjunto infinito de $S(\mathbb{A}) \setminus \{\mathcal{U}_\lambda\}$ deve ter um subconjunto que converge para um elemento de $S(\mathbb{A}) \setminus \{\mathcal{U}_\lambda\}$. Concluimos assim que $S(\mathbb{A}) \setminus \{\mathcal{U}_\lambda\}$ é sequencialmente compacto. $\square$

7.3 Jogos e o problema de Scarborough-Stone

Nessa seção usaremos as álgebras Booleanas para definir um jogo topológico que nos auxiliará na construção de um contra-exemplo para o problema de Scarborough-Stone. Para tal construção usaremos a hipótese adicional de que $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$. Aqui trabalhamos com a linguagem e conceitos de jogos, e nos referimos ao quarto capítulo do artigo [4].

Pelo resto da seção fixamos $\{S_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ uma enumeração de $[\mathfrak{c}]^\omega$.

Definição 7.3.1. *O jogo de Scarborough-Stone, ou simplesmente o SS-jogo, é um jogo entre dois jogadores, (P1) e (P2), que pode durar até $\mathfrak{c}$ rodadas, no qual (P1) seleciona uma partição de ω em dois conjuntos e (P2), dado essa partição, vai selecionar um elemento dela. O jogo tem suas primeiras ω rodadas fixadas, na n -ésima rodada (P1) seleciona a partição $\{n, \omega \setminus n\}$ e (P2) seleciona o elemento $a_n = \omega \setminus n$. Agora, para fixar a notação, dizemos que na rodada α o jogador (P1) toma uma partição $\{b_\alpha, \omega \setminus b_\alpha\}$ e o jogador (P2) escolhe um desses elementos para ser a_α . Determinaremos agora as condições de parada para o nosso jogo, isto é, em quais situações cada*

jogador vence, para tanto, fixe $\alpha \geq \omega$ representando uma rodada. Antes da rodada α , o jogador (P1) vence caso $S(\mathbb{B}_\alpha) \setminus \{\mathcal{U}_\alpha\}$ seja sequencialmente compacto. Caso (P1) não tenha vencido consideramos $\xi_\alpha = \min\{\xi : S_\xi \subset \alpha \text{ e } \{x_{\gamma,\alpha} : \gamma \in S_\xi\} \text{ converge para } \mathcal{U}_\alpha\}$. Agora, na a rodada α , após jogar, o jogador (P2) vence caso a álgebra gerada por $\{a_\xi : \xi < \alpha + 1\}$ não seja coerentemente minimamente gerada, considerando os mesmos geradores, ou, caso o conjunto $\{x_{\gamma,\alpha+1} : \gamma \in S_\xi\}$ convirja para $\mathcal{U}_{\alpha+1}$. Caso o jogo chegue a ter $\mathfrak{c}$ rodadas então (P1) vence se $S(\mathbb{B}_\mathfrak{c}) \setminus \{\mathcal{U}_\mathfrak{c}\}$ seja sequencialmente compacto e (P2) vence caso contrário.

A idéia desse jogo é remover, passo a passo, a convergência das sequências para o ultrafiltro central, fazendo com que o espaço de Stone, sem o ultrafiltro central, fique sequencialmente compacto. Note que o SS-jogo está bem definido e, na realidade, se o jogo tiver $\mathfrak{c}$ rodadas, então (P1) vence pelo corolário 7.2.7. Com efeito, dado qualquer conjunto infinito enumerável $F \subset S(\mathbb{B}_\mathfrak{c})$, removemos a convergência de F para o ultrafiltro $\mathcal{U}_\mathfrak{c}$ em algum dos passos anteriores do jogo. Tal afirmação é garantida pela maneira como enumeramos todas as sequências e escolhemos, em cada passo do jogo, a menor das sequências que converge para o ultrafiltro principal até o momento.

Note que toda estratégia vencedora de (P1) só precisa ter como domínio $([\omega]^\omega)^{<\mathfrak{c}}$. Com efeito, as primeiras ω escolhas são conjuntos de $[\omega]^\omega$, e todos os conjuntos finitos de ω já estão na álgebra gerada pelos cofinitos. Sendo assim, só acrescentamos novos elementos usando $[\omega]^\omega$, então, a partir desse momento, quando mencionada qualquer estratégia ela terá esse domínio.

Proposição 7.3.2. *Caso (P1) tenha uma estratégia vencedora para o SS-jogo, então, dado $p \in \omega^*$ um ultrafiltro livre, temos que existe um espaço topológico sequencialmente compacto X e uma sequência s_p em X que não possui p -limite.*

Demonstração. Para verificar a proposição, fixe $p \in \omega^*$ e $\sigma : ([\omega]^\omega)^{<\mathfrak{c}} \rightarrow \{\{a, \omega \setminus a\} : a \in \mathcal{P}(\omega)\}$ uma estratégia vencedora para (P1). Como a estratégia vencedora independe da escolha dos a_α feita por (P2) podemos assumir que todo $a_\alpha \in p$. Obtemos assim, para um $\lambda \leq \mathfrak{c}$, um resultado no qual $\mathbb{B}_\lambda$ é álgebra Booleana coerentemente minimamente gerada, $S(\mathbb{B}_\lambda) \setminus \{\mathcal{U}_\lambda\}$ é sequencialmente compacto e, mais ainda, a sequência $s_p : \omega \rightarrow S(\mathbb{B}_\lambda) \setminus \{\mathcal{U}_\lambda\}$ dada por $s_p(n) = x_{n+1}$ não tem p -limite. Com efeito, x_{n+1} é o ultrafiltro gerado por $\{\omega, \omega \setminus 1, \dots, \omega \setminus n, n+1\}$, isto é, o ultrafiltro gerado por $\{\{n\}\}$, sendo assim, temos que $\{n\}^* = \{x_{n+1}\}$ e, portanto, esse ponto não pode ser p -limite para s_p . Resta ver que, para $\omega \leq \alpha < \lambda$, x_α não é p -limite da sequência escolhida. Suponha, por absurdo, que exista um α tal que x_α seja p -limite de s_p , então, para todo $b \in x_\alpha$, temos $\{n \in \omega : s_p(n) \in b^*\} = P \in p$. Segue que, para todo $k \in P$, $b \in s_p(k) = x_{k+1}$ e, portanto, para todo $k \in P$, $k \in b$, isto é, $P \subset b$. Tomando $b = \omega \setminus a_\alpha$ temos que existe $P \in p$ tal que $P \subset \omega \setminus a_\alpha$, donde, $\omega \setminus a_\alpha \in p$ e $a_\alpha \in p$, um absurdo. □

Tal proposição tem como corolário o seguinte resultado que nos dá uma nova condição para a qual existe um resultado negativo para o problema de Scarborough-Stone.

Corolário 7.3.3. *Se o jogador (P1) tem estratégia vencedora no SS-jogo, então o problema de Scarborough-Stone tem resposta negativa.*

Demonstração. Usando a proposição acima para cada $p \in \omega^*$ produzimos uma SS-família e, pela caracterização da proposição 4.1.1, temos o resultado desejado. □

Agora nos focamos em alguns resultados que estão mais diretamente ligados a construção da estratégia vencedora para (P1), assumindo o axioma adicional $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$.

Para tal propósito usaremos a linguagem de árvores para revisar o SS-jogo, recaracterizando as estratégias vencedoras para (P1). Considere $([\omega]^\omega)^{<\mathfrak{c}}$ como árvore com a ordem da inclusão, e

defina sub-árvore $\mathcal{T} \subset ([\omega]^\omega)^{<\omega}$ dada por, $t \in \mathcal{T}$ se, e somente se, $t|_{\text{dom}(t) \cap \omega} \subset \{\langle n, \omega \setminus n \rangle : n \in \omega\}$. Sabemos que uma estratégia para o jogador (P1), é uma função sai de $\mathcal{T}$ e vai para as partições de ω em dois elementos. Ademais, podemos determinar o jogo pelo ramo escolhido pois as partições escolhidas estão unicamente determinadas pelo elemento escolhido por (P2).

Definição 7.3.4. *Dada uma estratégia σ para o jogador (P1) defino $T^\sigma \subset \mathcal{T}$ usando a seguinte caracterização: $t \in T^\sigma$ se, e somente se, para todo $\gamma \in \text{dom}(t)$, temos $\sigma(t|_\gamma) = \{t(\gamma), \omega \setminus t(\gamma)\}$ e $S(\mathbb{B}_{t|_\gamma}) \setminus \mathcal{U}_{t|_\gamma}$ não é sequencialmente compacto. Aqui $\mathbb{B}_f$ e $\mathcal{U}_f$ são, respectivamente, a álgebra Booleana e o ultrafiltro nessa álgebra gerados por $\{f(\xi) : \xi < \text{dom}(f)\}$.*

Agora, interpretamos outros elementos relacionados a álgebra Booleana e ao SS-jogo. Os ultrafiltros de $\mathbb{B}_t$ onde $x_{\gamma, \text{dom}(t)}$ viram x_γ^t , já o ordinal ξ_α obtido na etapa α do jogo é renomeado, identificando o jogo, até o momento, com um t , para ξ_t .

Lema 7.3.5. *Uma estratégia σ para o jogador (P1) é vencedora se, para cada $t \in T^\sigma$ não maximal, as seguintes afirmações são verdadeiras para todo $a \in \sigma(t)$:*

- (1) $\langle \mathbb{B}_t, a \rangle$ é extensão minimal de $\mathbb{B}_t$;
- (2) $\mathcal{U}_t \cup \{a\}$ gera um filtro próprio em ω ;
- (3) O conjunto $\{\gamma \in S_{\xi_t} : a \in x_\gamma^t\}$ é infinito.

Demonstração. Fixe σ estratégia para a qual valem (1)-(3). Prosseguiremos por indução. Claramente as ω primeiras rodadas estão de acordo com o jogo e representam uma álgebra Booleana coerentemente minimamente gerada, $S(\mathbb{B}_\omega) \setminus \{\mathcal{U}_\omega\}$ não é sequencialmente compacto e, (P2) não vence antes da ω -ésima rodada. Suponha que estamos na rodada representada por $t \in T^\sigma$, tem-se, por (1) que $\langle \mathbb{B}_t, a \rangle$ continua sendo minimamente gerada para qualquer $a \in \sigma(t)$. Agora, por (1) e (2), temos que a álgebra Booleana continua coerente. Com efeito, por um resultado do artigo [13], de Sabine Koppelberg, temos que a minimalidade da extensão da álgebra é equivalente a no máximo um ultrafiltro ter duas extensões diferentes. Sendo assim o ultrafiltro que comprova a minimalidade dada por (1) é tal ultrafiltro. Mas, por (2), o ultrafiltro dado por $\mathcal{U}_t$ também possui essa propriedade. Concluimos então que $\mathcal{U}_t$ é o ultrafiltro que comprova a minimalidade, garantindo a coerência. Por fim temos que, por (3), não importa a escolha de (P2), a vizinhança $\omega \setminus a_t$ garante que o conjunto S_{ξ_t} não converge para $\mathcal{U}_{t \cup \{\langle \text{dom}(t), a_t \rangle\}}$. Note que todos os elementos maximais de T^σ são jogos onde o jogador (P1) venceu. Com efeito, dado $t \in T^\sigma$ maximal, tem-se que, dado $\sigma(t) = \{a, b\}$, $q_1 = t \cup \{\langle \text{dom}(t), a \rangle\}$ e $q_2 = t \cup \{\langle \text{dom}(t), b \rangle\}$ são extensões de t seguindo a estratégia σ mas não estão em T^σ , logo, pela maneira como escolhemos T^σ , devemos ter que $S(\mathbb{B}_t) \setminus \{\mathcal{U}_t\}$ é sequencialmente compacto. □

Note que, para construir σ uma estratégia vencedora, é suficiente definir T^σ , pois ela define todas as escolhas vencedoras. Criaremos então T^σ por recursão, para tanto fixamos algumas notações e criamos algumas novas definições.

Proposição 7.3.6. *Dada álgebra Booleana coerentemente minimamente gerada $\mathbb{B}_\lambda$ então, para todo $\alpha < \beta \leq \lambda$ e todo $b \in \mathbb{B}_\alpha \setminus \mathcal{U}_\alpha$ temos que $\{\xi < \alpha : b \in x_{\xi, \alpha}\} = \{\xi < \beta : b \in x_{\xi, \beta}\}$.*

Demonstração. Fixado $b \in \mathbb{B}_\alpha \setminus \mathcal{U}_\alpha$, temos que, para todo $\xi \geq \alpha$, $\mathcal{U}_\alpha \subset x_{\xi, \beta}$ e, portanto, $b \notin x_{\xi, \beta}$. Sendo assim, temos que $\{\xi < \beta : b \in x_{\xi, \beta}\} = \{\xi < \alpha : b \in x_{\xi, \beta}\} = \{\xi < \alpha : b \in x_{\xi, \alpha}\}$. Com efeito, a primeira igualdade sai do fato de $b \in \mathbb{B}_\alpha \setminus \mathcal{U}_\alpha$. Já a segunda igualdade, provém do fato de usarmos os mesmos geradores para os ultrafiltros quando verificamos se b é ou não elemento. □

Agora, pela proposição acima, temos que, para todo $b \in \mathbb{B}_\alpha \setminus \mathcal{U}_\alpha$, temos uma representação única para b^* em termos de ordinais que não muda conforme acrescentamos elementos à álgebra.

Considere X_α o espaço topológico dado por α considerando a topologia gerada pelo conjunto $\{b^* : b \in \mathbb{B}_\alpha \setminus \mathcal{U}_\alpha\}$. Note que tal conjunto é base, pois, para todo $\xi < \alpha$, temos $\omega \setminus a_\xi \in \mathbb{B}_\alpha \setminus \mathcal{U}_\alpha$ logo $\xi \in (\omega \setminus a_\xi)^*$, donde $\bigcup \{b^* : b \in \mathbb{B}_\alpha \setminus \mathcal{U}_\alpha\} = \alpha$. Ademais, dados $b_1, b_2 \in \mathbb{B}_\alpha \setminus \mathcal{U}_\alpha$ temos $b_1 \cap b_2 \in \mathbb{B}_\alpha \setminus \mathcal{U}_\alpha$, logo $b_1^* \cap b_2^* = (b_1 \cap b_2)^*$ está na base.

Definição 7.3.7. Fixado α , defino $\Gamma_\alpha = \{\xi < \alpha : x_{\xi,\alpha} \text{ não tem base de filtro enumerável}\}$. Defino agora $\Lambda_\alpha = \{\lambda < \alpha + 1 : \lambda \text{ é ordinal limite de cofinalidade } \omega \text{ e, para todo } a \notin \mathcal{U}_\alpha, \Gamma_\alpha \setminus a^* \text{ é cofinal em } \lambda\}$.

Supomos que os níveis da árvore já estão construídos para todo $\xi < \alpha$, e definimos então como será a árvore no nível α . Caso α seja limite definimos o nível α por $f : \alpha \rightarrow [\omega]^\omega \in T^\sigma$ se, e somente se, $f|_\xi \in T^\sigma$ para todo $\xi < \alpha$. Agora, caso $\alpha = \rho + 1$ seja sucessor, fixamos um $t \in T^\sigma$ no nível ρ . A escolha do jogador (P1) sempre será da forma $\{b_0^\rho, \bigcup_{l>0} b_l^\rho\}$ onde, para todo $l > 0$, temos $b_l^\rho \in \mathbb{B}_\rho \setminus \mathcal{U}_\rho$, dois a dois disjuntos, e além disso $(b_l^\rho)_{l>0} \rightarrow \mathcal{U}_\rho$. Agora, caso $b_0^\rho \notin \mathbb{B}_\rho$, teremos que as condições (1) e (2) do lema 7.3.5 são satisfeitas.

Proposição 7.3.8. Caso $\beta < \alpha$ vale que $\Gamma_\alpha \cap \beta = \Gamma_\beta$ e $\Lambda_\alpha \cap \beta \subset \Lambda_\beta$.

Demonstração. Com efeito, fixamos $\beta < \alpha$. Temos que

$$\Gamma_\alpha \cap \beta = \{\xi < \beta : x_{\xi,\alpha} \text{ não tem base de filtro enumerável}\}.$$

Agora, dado $\xi \in \Gamma_\alpha \cap \beta$, veremos que $x_{\xi,\beta}$ não pode ter base de filtro enumerável. Caso contrário $x_{\xi,\alpha}$, que possui o mesmo conjunto de geradores, teria base enumerável, isto é, $\xi \in \Gamma_\beta$. De maneira semelhante, dado $\xi \in \Gamma_\beta$, temos que $x_{\xi,\alpha}$ não tem base de filtro enumerável. De fato, como $x_{\xi,\alpha}$ possui o mesmo conjunto de geradores que $x_{\xi,\beta}$, caso $x_{\xi,\alpha}$ tenha base enumerável, posso tomar outra base enumerável tomando intersecções de elementos geradores. Agora essa nova base também é base para $x_{\xi,\beta}$, pois é dada por seus elementos, o que é um absurdo.

Por fim veremos que $\Lambda_\alpha \cap \beta \subset \Lambda_\beta$. Com efeito, temos que

$$\Lambda_\alpha \cap \beta = \{\lambda < \beta : \lambda \text{ tem cofinalidade } \omega \text{ e para todo } a \in \mathbb{B}_\alpha \setminus \mathcal{U}_\alpha, \Gamma_\alpha \setminus a^* \text{ é cofinal em } \lambda\}.$$

Fixamos então $\lambda \in \Lambda_\alpha \cap \beta$. Note que a cofinalidade de λ ainda é ω . Agora, como $\mathbb{B}_\beta \setminus \mathcal{U}_\beta \subset \mathbb{B}_\alpha \setminus \mathcal{U}_\alpha$, temos que, fixado $a \in \mathbb{B}_\beta \setminus \mathcal{U}_\beta$, $\Gamma_\alpha \setminus a^*$ é cofinal em λ . Note que $(\Gamma_\alpha \setminus a^*) \cap \beta$ é cofinal em λ , pois $\lambda < \beta$, donde $(\Gamma_\alpha \cap \beta) \setminus a^* = \Gamma_\beta \setminus a^*$ é cofinal em λ . Concluimos assim que $\lambda \in \Lambda_\beta$. □

Continuamos assumindo as propriedades sobre os b_i^ρ e separaremos a análise da construção em dois casos possíveis, nos quais a condição (1) e (2) do lema continuam valendo.

Caso 0: (P2) escolhe $a_\rho = b_0^\rho$;

Caso 1: (P2) escolhe $a_\rho = \bigcup_{l>0} b_l^\rho$.

Nas proposições seguintes analisaremos algumas propriedades associadas ao caso escolhido.

Proposição 7.3.9. Caso estejamos no caso 0, x_ρ tem base enumerável dada por $\{(\bigcup_{l>n} b_l^\rho)^* : n \in \omega\}$.

Demonstração. Note que os elementos da álgebra que tomamos para construir a base estão em $\mathbb{B}_\alpha$, pois, os b_l^ρ são dois a dois disjuntos, o que permite tirar uma quantidade finita deles da união

total e continuar na álgebra gerada. Agora, dado $b \in x_\rho$, podemos tomar $a \in \mathcal{U}_\rho$ tal que $a \cap (\bigcup_{l>0} b_l^\rho) \subset b$. Basta tomar, usando a convergência, um $n \in \omega$ tal que $(\bigcup_{l>n} b_l^\rho) \subset a$, donde $(\bigcup_{l>n} b_l^\rho)^* \subset (a \cap (\bigcup_{l>0} b_l^\rho))^* \subset b^*$. Por fim notamos que, dado $n \in \omega$, temos $x_\rho \in (\bigcup_{l>n} b_l^\rho)^*$. De fato, como $b_l^\rho \notin \mathcal{U}_\rho$ e $(\bigcup_{l>0} b_l^\rho) \in x_\rho$, temos $(\bigcup_{l>n} b_l^\rho) = (\bigcup_{l>0} b_l^\rho) \setminus (\bigcup_{l \leq n} b_l^\rho) \in x_\rho$. $\square$

Proposição 7.3.10. *Caso estejamos no caso 1, X_α é a união enumerável de compactos*

Demonstração. Note que $X_\alpha = \bigcup_{l \in \omega} (b_l^\rho)^*$, isto é, para todo $\xi < \alpha$, existe $l \in \omega$ tal que $b_l^\rho \in x_\xi$. Suponha, por absurdo, que exista ξ tal que, para todo $l \in \omega$, $b_l^\rho \notin x_\xi$. Então $\bigcup_{l>0} b_l^\rho = a_\rho \in x_\xi$, logo $\xi \neq \rho$. Segue então, pela convergência, que existe $F \subset \omega$ finito tal que $a_\rho \subset a_\xi \cup \bigcup_{l \in F} b_l^\rho$, donde $a_\xi \cup \bigcup_{l \in F} b_l^\rho \in x_\xi$, o que é um absurdo pois nenhum dos elementos da união finita está em x_ξ . $\square$

Lema 7.3.11. *Dado $\gamma \in \Gamma_\alpha$, temos que $\Lambda_\alpha \cap \gamma$ é enumerável.*

Demonstração. Faremos essa demonstração por indução em Γ_α . Para tanto fixamos $\gamma \in \Gamma_\alpha$ e assumimos que, para todo $\delta \in \Gamma_\alpha \cap \gamma$, o conjunto $\Lambda_\alpha \cap \delta$ é enumerável. Supomos, por absurdo, que $\Lambda_\alpha \cap \gamma$ é não enumerável e definimos $\zeta = \min\{\xi \in \Lambda_\alpha : \Lambda_\alpha \cap \xi \text{ é não enumerável}\}$. Note então que, pela maneira como ζ foi escolhido, $\Lambda_\alpha \cap \zeta$ é ordem isomorfo à ω_1 . Sendo assim, para todo $\delta \in \zeta$, devemos ter que $\Lambda_\alpha \cap \delta$ é enumerável e, portanto, $\zeta \leq \gamma$.

Agora, pela definição de Λ_α e, como $\emptyset \in \mathbb{B}_\alpha \setminus \mathcal{U}_\alpha$, devemos ter que Γ_α é cofinal em todo $\lambda \in \Lambda_\alpha$. Em particular, Γ_α é cofinal em ζ , e, podemos definir então $\gamma' = \min \Gamma_\alpha \setminus \zeta$. Segue que $\zeta \leq \gamma' \leq \gamma$.

Demonstraremos que, para todo $b \in \mathbb{B}_{\gamma'} \setminus \mathcal{U}_{\gamma'}$, o conjunto $b^* \cap \zeta$ é limitado em ζ . Fixado $b \in \mathbb{B}_\zeta \setminus \mathcal{U}_\zeta$, temos que $b^* \cap \zeta$ é limitado em ζ . Com efeito, pela definição de $\mathcal{U}_\zeta$, temos que existem $\alpha_1 < \dots < \alpha_n < \zeta$, tais que, $a_{\alpha_1} \cap \dots \cap a_{\alpha_n} \subset \neg b$. Sendo assim, para todo $\xi > \alpha_n$, devemos ter $a_{\alpha_1} \cap \dots \cap a_{\alpha_n} \in x_{\xi, \zeta}$, donde, $\neg b \in x_{\xi, \zeta}$. Concluimos então que $b^* = b^* \cap \zeta \subset \alpha_n + 1$, isto é, é limitado em ζ .

Supomos agora que tal afirmação é válida para algum β , tal que $\zeta < \beta < \gamma'$, e veremos que ela é válida para $\beta + 1$. Seguindo a nossa estratégia, e usando a afirmação para β , devemos ter que $(b_l^\beta)^* \cap \zeta$ é limitado em ζ para todo $l > 0$. Note que, como $\Lambda_\alpha \cap \zeta$ é ordem isomorfo à ω_1 , então ζ é ordinal limite e não enumerável. Agora, como $(b_l^\beta)^* \cap \zeta$ é limitado em ζ para todo $l > 0$, temos que existe $\lambda' < \zeta$ tal que, para todo $\xi > \lambda'$, temos $b_l^\beta \notin x_{\xi, \zeta}$. Segue então, de uma argumentação análoga a feita na proposição 7.3.10, que, para todo $\xi > \lambda'$, temos $b_0^\beta \in x_{\xi, \zeta}$. Fixamos $b \in \mathbb{B}_{\beta+1} \setminus \mathcal{U}_{\beta+1}$. Note que, como $\beta \notin \Gamma_\alpha$, devemos estar no caso 0 e temos que:

$$b = (c \cap b_0^\beta) \cup \left(d \cap \left(\bigcup_{l>0} b_l^\beta \right) \right),$$

onde $c \notin \mathcal{U}_\beta$. Sendo assim, $b \cap a_\beta = c \cap b_0^\beta$, e, pela proposição 7.1.7, temos $c \cap b_0^\beta \in \mathbb{B}_\beta$. Portanto, $c \cap b_0^\beta \in \mathbb{B}_\beta \setminus \mathcal{U}_\beta$. Concluimos então, que

$$b^* \cap \zeta = ((b \cap a_\beta) \cup (b \setminus a_\beta))^* \cap \zeta = ((b \cap a_\beta)^* \cap \zeta) \cup ((b \setminus a_\beta)^* \cap \zeta),$$

donde a primeira parte da união é limitado pela hipótese de indução e a segunda é limitada pois nenhum ultrafiltro do aberto tem a_β como elemento.

A indução acima termina a demonstração da afirmação. Notamos que $\gamma' \in \Gamma_\alpha$, donde $a_{\gamma'}$ deve ser escolhido como no caso 1. Agora, fixando $a = (\omega \setminus a_{\gamma'}) = b_0^{\gamma'}$, temos que $a \notin \mathcal{U}_{\gamma'+1}$. Ademais, a^* contém um segmento final de ζ . Fixamos então $\delta < \zeta$ tal que $\zeta \setminus a^* \in \delta$. Tal construção implica

que $(\Gamma_\alpha \setminus a^*) \cap \zeta \subset \delta + 1$ e, portanto, $\Lambda_\alpha \cap \zeta \subset \delta + 1$. Contradizemos assim, a hipótese que $\Lambda_\alpha \cap \zeta$ é cofinal em ζ . $\square$

Definição 7.3.12. Fixado $b \in \mathbb{B}_\rho \setminus \mathcal{U}_\rho$, para cada $\lambda \leq \rho$ e $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X_\rho)$, dizemos que b é $\mathcal{A}$ -saturado se $\mathcal{A}$ é refinamento de $\{b^*, X_\rho \setminus b^*\}$, isto é, para todo $A \in \mathcal{A}$ temos $A \subset b^*$ ou $A \subset X_\rho \setminus b^*$. Um aberto $\mathcal{A}$ -saturado é um aberto da forma b^* , onde b é $\mathcal{A}$ -saturado.

Note que o conceito de $\mathcal{A}$ -saturação é mantido para o complementar e, a proposição seguinte, nos garante que ele é mantido para a união finita.

Proposição 7.3.13. Fixados $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X_\rho)$ e $\mathcal{S} \subset \mathbb{B}_\rho \setminus \mathcal{U}_\rho$ conjunto finito de elementos $\mathcal{A}$ -saturados. Se $\bigcup \mathcal{S} \in \mathbb{B}_\rho \setminus \mathcal{U}_\rho$, então $\bigcup \mathcal{S}$ é $\mathcal{A}$ -saturado.

Demonstração. Com efeito, fixado $A \in \mathcal{A}$, devemos ter que, ou existe algum $b \in \mathcal{S}$ tal que $A \subset b^* \subset (\bigcup \mathcal{S})^*$, ou então, para todo $b \in \mathcal{S}$, $A \subset X_\rho \setminus b^*$. Segue, do último caso, que $A \subset \bigcap_{b \in \mathcal{S}} (X_\rho \setminus b^*) = X_\rho \setminus (\bigcup_{b \in \mathcal{S}} b^*) = X_\rho \setminus (\bigcup \mathcal{S})^*$. Na última igualdade usamos a finitude de $\mathcal{S}$ para passar a estrela para fora. $\square$

A próxima definição nos dá condições auxiliares para a construção da árvore.

Definição 7.3.14. Definimos (IH_ρ) , hipótese de indução no estágio ρ sobre uma família $\{Z_\lambda : \lambda < \rho\}$, que garante, para todo $\beta < \rho$ e $\lambda < \rho$:

- (1) Z_λ é família enumerável de G_δ 's compactos dois a dois disjuntos de X_λ ;
- (2) Se $\lambda \in \Lambda_\lambda$, então, para todo $D \in Z_\lambda$, a tem base de abertos Z_λ -saturados de $\mathbb{B}_\lambda$;
- (3) Para todo $l > 0$, b_l^β deve ser Z_λ -saturado se $\lambda \in \Lambda_\beta$;
- (4) Se $\lambda \in \Lambda_\rho$ e $\beta \notin \bigcup Z_\lambda$, então $x_{\beta, \beta+1}$ tem base de elementos Z_λ -saturados de $\mathbb{B}_{\beta+1}$;
- (5) Se $\lambda' < \lambda$ estão em Λ_λ , então $Z_{\lambda'} \subset Z_\lambda$ e, para todo $D \in Z_\lambda \setminus Z_{\lambda'}$, temos que $D \cap \lambda' = \emptyset$;
- (6) Se Λ_ρ é não enumerável, então existe $\bar{\lambda}_\beta \in \Lambda_\rho$ tal que, para todo $l \in \omega$, $(b_l^\beta)^* \cap (\bigcup \Lambda_\rho) \subset \bar{\lambda}_\beta$.

Supondo construídos, por indução, os Z_ξ , $\{b_l^\xi : l \in \omega\}$ e $\bar{\lambda}_\xi$ para todo $\xi < \rho$, satisfazendo (IH_ξ) . Construímos agora Z_ρ , no estágio $\{b_l^\rho : l \in \omega\}$ e $\bar{\lambda}_\rho$ de maneira que (IH_α) e as condições do lema 7.3.5 sejam satisfeitas.

Caso $\rho \notin \Lambda_\rho$, tomamos $Z_\rho = \emptyset$ e temos que (IH_α) é verdadeiro. Com efeito, (1) é válido por vacuidade, (2) é válido por indução porque $\rho \notin \Lambda_\rho$. Para ver que (4) é válido basta notar que $\Lambda_\rho = \Lambda_\alpha$ e $\rho \notin \Lambda_\rho$, donde, por indução, os outros casos são verificados. Temos que (5) é imediato por indução, pois $\rho \notin \Lambda_\rho$ então não precisamos verificar o caso onde $\lambda = \rho$. Note que falta verificar os itens (3) e (6), pois ainda não foram definidos os elementos referentes. Definimos então $\mu_\rho = \sup \Lambda_\rho \setminus \{\rho\}$.

Lema 7.3.15. Se Λ_ρ é enumerável e cofinal em ρ , dado $Z_\rho = \bigcup \{Z_{\lambda'} : \lambda' \in \Lambda_\rho\}$, então (IH_α) , excluindo (3), é verificado.

Demonstração. Note que tal família é enumerável pois é a união enumerável de conjuntos enumeráveis. Tais conjuntos são compactos em X_ρ pois eles eram compactos nos subespaços abertos $X_\lambda \subset X_\rho$ correspondentes. De maneira análoga eles também são G_δ 's em X_ρ . Para ver que eles são dois a dois disjuntos basta usar a propriedade (5) de (IH_ρ) . Com efeito, se os dois elementos são do

mesmo $Z_{\lambda'}$ segue da definição que eles são disjuntos. Fixamos então $\lambda_1 < \lambda_2$ em Λ_ρ e um elemento em cada um dos Z 's correspondentes. Pela proposição 7.3.8 temos que $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_{\lambda_2}$. Segue então, por (5) de (IH_ρ) , que os elementos tem interseção vazia. Tal observação conclui a verificação de (1). Note que a propriedade (5) é imediata da maneira como tomamos Z_ρ , da propriedade de indução e do lema 7.3.8.

Agora, a propriedade (2) só precisa ser verificada para caso $\lambda = \rho$, pois o resto é imediato pela indução. Note que, pela maneira como tomamos ρ , temos $\rho \in \Lambda_\rho$. Fixado $D \in Z_\rho$, existe $\lambda' \in \Lambda_\rho$ tal que $D \in Z_{\lambda'}$. Pela indução sabemos que D tem base de $Z_{\lambda'}$ -saturados. Para quaisquer elementos em Λ_ρ maiores que λ' , temos que, por (5), os elementos dos respectivos Z 's são disjuntos de D . Para verificar a propriedade (4) basta checar para $\lambda = \rho$, pois os casos anteriores seguem da indução e do lema 7.3.8. Mas, pela maneira como tomamos Z_ρ , se $\beta \notin \bigcup Z_\rho$, então existe $\lambda' \in \Lambda_\rho$ tal que $\beta < \lambda'$ e $\lambda' \notin \bigcup Z_{\lambda'}$. Nesse caso existe uma base para $x_{\beta, \beta+1}$ de elementos $Z_{\lambda'}$ -saturados de $\mathbb{B}_{\beta+1}$. Note que, por (5), os elementos de Z_ξ para $\xi > \lambda'$ são disjuntos da base obtida. concluimos assim a Z_ρ -saturação dos abertos. Notamos ainda que (6) é vaziamente satisfeito.

□

Caso $\rho \in \Lambda_\rho$ e $\mu_\rho = \rho$, então μ_ρ tem cofinalidade ω e, portanto, pelo lema 7.3.11, μ_ρ deve ser enumerável. Com efeito, dado uma sequência crescente cofinal em ρ de elementos de Λ_ρ , temos que para cada elemento da sequência existe um elemento de Γ_ρ intercalado entre o próximo elemento da sequência pela definição de Λ_ρ . Segue, pelo lema 7.3.11, que Λ_ρ interseccionado com um elemento da sequência possui apenas uma quantidade enumerável de elementos. concluimos que Λ_ρ é enumerável. Segue então, pelo lema 7.3.15, que todas as propriedades de (IH_α) são verificadas, exceto a (3).

Construímos agora Z_ρ no caso em que $\rho \in \Lambda_\rho$ e $\mu_\rho < \rho$. Seja $\{\gamma_n : n \in \omega\} \subset \Gamma_\rho \setminus \mu_\rho$ crescente e cofinal nesse conjunto, que existe, pois, ρ tem cofinalidade ω e Γ_ρ é cofinal em ρ , basta tomar $a = \emptyset$ na definição de Λ_ρ . Segue então, que como x_{γ_n} não tem base enumerável, então $a_{\gamma_n} = \bigcup \{b_l^{\gamma_n} : l > 0\}$, pelas afirmações anteriores, isto é, $b_0^{\gamma_n} \in x_{\gamma_n}$. Definimos então $\{Z_n : n \in \omega\}$ da seguinte maneira: $Z_0 = (b_0^{\gamma_0})^* \setminus X_{\mu_\rho}$ e, para todo $n \in \omega$, $Z_{n+1} = (b_0^{\gamma_{n+1}})^* \setminus X_{\gamma_{n+1}}$. Pela proposição 7.3.10, temos que X_γ é σ -compacto e aberto em X_ρ para todo, $\gamma \in \Gamma_\rho$. Logo, $X_{\gamma_{n+1}}$ deve ser σ -compacto e aberto. Com efeito, ele é aberto pela definição dos espaços e pelo lema 7.3.6. Agora $X_{\gamma_{n+1}}$ é σ -compacto pois seu subespaço o é e acrescentamos apenas um ponto ao subespaço para obter $X_{\gamma_{n+1}}$. Por outro lado, como Γ_ρ é cofinal em μ_ρ , então X_{μ_ρ} é σ -compacto e aberto também. Note então que, como X_ρ é T_2 , os compactos são fechados, donde cada Z_n é G_δ . Agora temos $(b_0^{\gamma_n})^* \setminus X_{\gamma_{n+1}} = \{\gamma_n + 1\}$, pois, todos os ultrafiltros x_ξ para $\xi > \gamma_n + 1$ contém o complementar de $b_0^{\gamma_n}$ por construção. Por fim, temos que $(b_0^{\gamma_n})^*$ é compacto, pois é fechado dentro de um compacto, logo todo Z_n é um compacto excluindo um aberto e, portanto, um compacto. Note que, para todo $n \in \omega$, $Z_n \cap X_{\mu_\rho} = \emptyset$, donde $Z_\rho = Z_{\mu_\rho} \cup \{Z_n : n \in \omega\}$ é uma sequência que verifica o item (1) de (IH_α) .

Verificaremos que que (2) e (4) de (IH_α) são satisfeitos no caso acima, considerando $\lambda = \rho$. Como $\mu_\rho \in \Lambda_\rho$, temos $\mu_\rho \in \Lambda_\rho \cap (\mu_\rho + 1) \subset \Lambda_{\mu_\rho+1}$, então, dado que $\Lambda_{\mu_\rho+1} = \Lambda_{\mu_\rho}$, estamos na condição de (2). Segue que, aplicando (2) e (4) para $\lambda = \mu_\rho$, obtemos um recobrimento aberto de X_{μ_ρ} de elementos Z_{μ_ρ} -saturados. Com efeito, por (2), conseguimos abertos saturados que cobrem $\bigcup Z_{\mu_\rho}$ e, por (4), cobrimos qualquer $\beta \in X_{\mu_\rho} \setminus \bigcup Z_{\mu_\rho}$ com um aberto Z_{μ_ρ} -saturado da base. Note que, usando a σ -compacidade, podemos tomar essa cobertura como sendo enumerável. Agora, considerando $\beta = \gamma_0$ em (3), obtemos que $b_l^{\gamma_0}$ é Z_{μ_ρ} -saturado para todo $l > 0$. Sendo assim, temos que $b_0^{\gamma_0}$ é Z_{μ_ρ} -saturado e, portanto, podemos tomar, para Z_0 , uma base enumerável de abertos Z_{μ_ρ} -saturados dada por $\{(b_0^{\gamma_0})^* \setminus \bigcup F : F \in [\mathcal{C}]^{<\omega}\}$, onde $\mathcal{C}$ é a cobertura enumerável de X_{μ_ρ} tomada acima. Prosseguimos indutivamente, de maneira análoga ao que foi feito acima, para obter base de abertos $\{Z_0, \dots, Z_n\} \cup Z_{\mu_\rho}$ -saturados para $X_{\gamma_{n+1}}$. Sendo assim, de maneira análoga ao que foi visto antes, Z_n tem uma base de abertos $\{Z_0, \dots, Z_n\} \cup Z_{\mu_\rho}$ -saturados. Pela maneira como escolhemos os abertos e os Z_n 's temos que nenhum dos abertos $\{Z_0, \dots, Z_n\} \cup Z_{\mu_\rho}$ -saturados tem interseção com

Z_k para $k > n$. Concluimos então que as bases são Z_ρ -saturadas. Agora, para verificar a propriedade (4), fixamos $n \in \omega$ e usamos as condições (3) e (4) para achar, para todo $\mu_\rho < \beta < \gamma_n$, caso $\beta \notin \{Z_0, \dots, Z_n\}$, uma base de abertos Z_ρ -saturados para x_{β, γ_n} uma vez que, para todo $k > n$, $Z_k \cap X_{\gamma_n} = \emptyset$.

O próximo passo é construir $\{b_n^\rho : n \in \omega\}$ para todos os casos acima. Note que $S(\mathbb{B}_\rho) \setminus \{\mathcal{U}_\rho\}$ não é sequencialmente compacto, caso contrário, já teríamos terminado. Fixe então $\{\xi_n^\rho < \rho : n \in \omega\} \subset \rho$ o conjunto de menor índice de $\{S_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ tal que $\{x_{\xi_n^\rho} : n \in \omega\}$ converge para $\mathcal{U}_\rho$. Note que, da maneira como está definido, o conjunto $\{\xi_n^\rho < \rho : n \in \omega\}$ converge para $\mathcal{U}_\rho$ se, e somente se, $\{\xi_n^\rho < \rho : n \in \omega\}$ não tem ponto de acumulação em X_ρ . Com efeito, se o conjunto converge em $S(\mathbb{B}_\rho)$ para $\mathcal{U}_\rho$, então, para todo $\gamma < \rho$, deve existir $b \in x_{\gamma, \rho}$ tal que $\{\xi_n^\rho < \rho : n \in \omega\} \cap b^* = \emptyset$. Para verificar a outra afirmação, caso $\{\xi_n^\rho < \rho : n \in \omega\}$ não tenha ponto de acumulação em X_ρ , tomamos $b \in \mathcal{U}_\rho$. Note que $(-b)^*$ é aberto compacto de X_ρ , donde, como o conjunto $\{\xi_n^\rho < \rho : n \in \omega\}$ não tem ponto de acumulação, temos que $\{\xi_n^\rho < \rho : n \in \omega\} \cap (-b)^*$ deve ser finito. Segue que $\{\xi_n^\rho < \rho : n \in \omega\} \cap b^*$ é cofinito em $\{\xi_n^\rho < \rho : n \in \omega\}$, isto é, o conjunto converge para $\mathcal{U}_\rho$.

Se Λ_ρ é enumerável defino $\bar{\lambda}_\rho = \max \Lambda_\rho$, que existe pela definição de Λ_ρ . Com efeito, $\sup \Lambda_\rho$ tem cofinalidade ω , basta pegar os elementos do próprio conjunto, ademais, para todo $a \notin \mathcal{U}_\rho$, temos que $\Gamma_\rho \setminus a^*$ é cofinal em todo elemento de Λ_ρ e, portanto, deve ser cofinal em seu supremo. Note que nesse caso a condição (6) é vaziamente satisfeita. Caso Λ_ρ é não enumerável, então, pelo lema 7.3.11, ele é ordem isomorfo à ω_1 , uma vez que cada segmento inicial, que não é todo o conjunto, tem tamanho ω . Temos então que μ_ρ é o supremo de Λ_ρ . Construiremos mais adiante $\bar{\lambda}_\rho$, para o caso não enumerável, de maneira a satisfazer (6) de (IH_α) .

Para cada $n \in \omega$, se existe $\lambda_n \in \Lambda_\rho$, tal que $x_{\xi_n^\rho} \in Z_n$ para algum $Z_n \in \Lambda_\rho$, então tal Z_n é único. Com efeito, dados $\lambda_n, \lambda'_n \in \Lambda_\rho$, $Z_n \in Z_{\lambda_n}$ e $Z'_n \in Z_{\lambda'_n}$ satisfazendo as condições anteriores, temos que, sem perda de generalidade, $\lambda'_n < \lambda_n \in \Lambda_\rho \cap \lambda_n \subset \Lambda_{\lambda_n}$. Agora, por (5), $Z_{\lambda'_n} \subset Z_{\lambda_n}$, e, como $Z_n \cap Z'_n \neq \emptyset$, então $Z_n, Z'_n \in Z_{\lambda'_n}$ e, por (1), $Z_n = Z'_n$. Caso existam infinitos $n \in \omega$ para os quais existem λ_n e Z_n como acima passamos a considerar uma subsequência de $\{\xi_n^\rho < \rho : n \in \omega\}$ e supomos que tal propriedade vale para todo $n \in \omega$. Agora, como os Z_n 's são compactos e a sequência $\{x_{\xi_n^\rho} : n \in \omega\}$ não tem limite em X_ρ , podemos assumir que nossos Z_n 's são dois a dois disjuntos. Para tanto aplicamos o mesmo argumento acima para obter que os Z_n 's que tem interseção não vazia são iguais, e, então não podemos ter uma quantidade infinita de pontos $x_{\xi_n^\rho}$ dentro de um mesmo compacto pela não existência do ponto limite. Pegamos então, para cada um dos infinitos compactos Z_n , apenas um ponto da sequência que está nele e consideramos a subsequência, se necessário.

Se Λ_ρ é enumerável, então, por (5), $\{Z_n : n \in \omega\} \subset Z_{\bar{\lambda}_\rho}$. Com efeito, $\bar{\lambda}_\rho \in \Lambda_\rho$ como visto anteriormente, então, pela proposição 7.3.8, temos que $\lambda_n < \bar{\lambda}_\rho$ estão em $\Lambda_{\bar{\lambda}_\rho}$. Segue que, para todo $n \in \omega$, $Z_n \in Z_{\bar{\lambda}_\rho}$. Caso Λ_ρ é não enumerável, tomamos $\bar{\lambda}_\rho \in \Lambda_\rho$, como sendo o menor dos ordinais para quais existam infinitos $n \in \omega$ verificando $\lambda_n < \bar{\lambda}_\rho$. Podemos assumir, novamente adotando uma subsequência e usando (5), que $\{Z_n : n \in \omega\} \subset Z_{\bar{\lambda}_\rho}$. Agora, por (2), temos que, para todo $n \in \omega$, Z_n tem base $Z_{\bar{\lambda}_\rho}$ -saturada em $\mathbb{B}_{\bar{\lambda}_\rho}$.

Trabalhamos, agora, com o caso em que existem apenas um número finito de $n \in \omega$ para os quais existam λ_n e Z_n como desejados. Novamente assumindo uma subsequência, podemos supor que, para todo $n \in \omega$, temos $\xi_n^\rho \notin \bigcup \{Z_\lambda : \lambda \in \Lambda_\rho\}$. Definimos $Z_n = \{\xi_n^\rho\}$. Agora definiremos $\bar{\lambda}_\rho$ para o caso acima, considerando Λ_ρ não enumerável. Caso existam infinitos $n \in \omega$, para os quais $\xi_n^\rho < \lambda_n$ para algum $\lambda_n \in \Lambda_\rho$, consideramos uma subsequência novamente para qual vale a afirmação para todo n . Nesse caso temos $\sup \{\lambda_n : n \in \omega\} \in \Lambda_\rho$ e definimos $\bar{\lambda}_\rho = \sup \{\lambda_n : n \in \omega\}$. Por fim vamos analisar o caso no qual, novamente considerando uma subsequência, para todo $n \in \omega$, $\xi_n^\rho \geq \lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda_\rho$. Nesse caso podemos tomar $\mu_\rho < \xi_n^\rho$ para todo $n \in \omega$. Aplicamos a hipótese de indução

(6) para todo $n \in \omega$, tomando $\beta = \xi_n^\rho$, e escolhemos $\bar{\lambda}_\rho = \sup\{\lambda_{\xi_n^\rho} : n \in \omega\}$. Obtemos que, para todo $l > 0$ e, para todo $\beta \in \{\xi_n^\rho : n \in \omega\}$, temos $(b_l^\beta)^* \cap \mu_\rho \subset \bar{\lambda}_\rho$.

Em cada um dos casos acima escolhemos $\bar{\lambda}_\rho \in \Lambda_\rho$ de maneira que, para cada $n \in \omega$, Z_n tem uma base decrescente de abertos $Z_{\bar{\lambda}_\rho}$ -saturados de $\mathbb{B}_\rho$, gerada por $\{c_{n,k}^\rho : k \in \omega\} \subset \mathbb{B}_\rho \setminus \mathcal{U}_\rho$. Tomamos os pontos anteriores de modo que $(c_{n,k}^\rho)^* \cap \lambda \subset \bar{\lambda}_\rho$ para todo $\lambda \in \Lambda_\rho$. Com efeito, cada Z_n é G_δ , compacto, e possui base de abertos compactos $Z_{\bar{\lambda}_\rho}$ -saturados em X_ρ . Usando o fato de que o pseudo-caráter equivale ao caráter em espaços compactos o fato do conjunto ser G_δ nos garante que podemos tomar base enumerável. agora só preciso tomar os elementos como sendo $Z_{\bar{\lambda}_\rho}$ -saturados. Agora, como $\{\xi_n^\rho < \rho : n \in \omega\}$ não tem pontos de acumulação em X_ρ , podemos assumir, para todo $n \in \omega$, $(c_{n,0}^\rho)^* \cap \{\xi_l^\rho < \rho : l \in \omega\} = \{\xi_n^\rho\}$. Ademais, pela $Z_{\bar{\lambda}_\rho}$ -saturação, temos que $(c_{n,0}^\rho)^* \cap Z_m = \emptyset$ se $m \neq n$ e podemos assumir ainda que $\{c_{n,0}^\rho : n \in \omega\}$ é família de elementos dois a dois disjuntos, basta tomar os abertos iniciais indutivamente para que eles sejam disjuntos.

Fixe $\gamma < \rho$, veremos que existe $b_\gamma \in x_\gamma \cap (\mathbb{B}_\rho \setminus \mathcal{U}_\rho)$ e uma função $f_\gamma \in \omega^\omega$, tais que $|\{n \in \omega : b_\gamma \cap c_{n,f_\gamma(n)}^\rho \neq \emptyset\}| \leq 1$. Com efeito, supondo que existe D tal que $\gamma \in D \in Z_{\bar{\lambda}_\rho}$, por (2), temos base decrescente para D de abertos $Z_{\bar{\lambda}_\rho}$ -saturados. Note que tal base é composta de compactos e, portanto, fechados. Agora, deve existir elemento da base tal que contém apenas um número finito de Z_n 's. De fato, sabemos, pela construção, que existe no máximo um elemento de $\{\xi_n^\rho < \rho : n \in \omega\}$ que está em D . Sendo assim, para todo ponto x de D , usamos o fato de $\{\xi_n^\rho < \rho : n \in \omega\}$ não ter ponto de acumulação e do espaço ser T_2 para obter aberto que separa x de $\{\xi_n^\rho < \rho : n \in \omega\} \setminus \{x\}$. Agora a reunião de tais abertos contém D e intersecta no máximo um Z_n . Tomamos U aberto da base de D que está contido nessa união. Agora, U é compacto e os elementos da base de cada Z_n também o são. Podemos então obter abertos da base que separam os Z_n 's restantes de U 's restantes. Caso D seja um dos Z_n 's tomamos u e os abertos obtidos para construir a função f_γ . Sabemos ainda que $U = b^*$ para algum $b \in \mathbb{B}_{rho} \setminus \mathcal{U}_\rho$, tomamos $b_\gamma = b$. Supomos agora que $\gamma \notin \bigcup Z_{\bar{\lambda}_\rho}$. Nesse caso, por (4), temos que γ tem base de elementos $Z_{\bar{\lambda}_\rho}$ -saturados em $\gamma + 1 < \rho$ e usamos a mesma argumentação acima para encontrar b_γ e f_γ .

Fixamos b_γ e f_γ para todo $\gamma < \rho$. Como $\rho < \mathfrak{b}$, existe $f \in \omega^\omega$ tal que, para todo $\gamma < \rho$, $f_\gamma \leq^* f$. Definimos, para todo $n > 0$, os elementos $b_n^\rho = c_{2n,f(2n)}^\rho$ e, por consequência, b_0^ρ o complementar da união. Após nossas reduções temos que, tanto $(\bigcup\{b_n^\rho : n > 0\})^*$ quanto $(b_0^\rho)^*$ excluem uma quantidade infinita de elementos da sequência $\{\xi_n^\rho < \rho : n \in \omega\}$, verificando assim o item (3) do lema 7.3.5. Com efeito, pela construção, todos os $c_{l,f(l)}$ para l ímpar não podem estar presentes em $(\bigcup\{b_n^\rho : n > 0\})^*$. Segue daí que $\{\xi_n^\rho < \rho : n \text{ é ímpar}\}$ não está em $(\bigcup\{b_n^\rho : n > 0\})^*$. De maneira análoga, temos $\{\xi_n^\rho < \rho : n \text{ é par}\}$ não está em $(b_0^\rho)^*$. Veremos agora que $\{\xi_n^\rho < \rho : n > 0\}$ converge para $\mathcal{U}_\rho$. Com efeito, fixado $a \in \mathcal{U}_\rho$, consideramos $K = (\omega \setminus a)^*$ compacto aberto de X_ρ . Pela escolha de f temos que, para todo $\gamma \in K$, $f_\gamma \leq^* f$. Sendo assim, pela compacidade, a cobertura $\mathcal{C} = \{(b_\gamma)^* : \gamma \in K\}$ possui subcobertura finita $\mathcal{C}'$. Usamos a definição de f para tomar $r \in \omega$ tal que, para todo $\gamma \in \mathcal{C}'$ e $n > r$, $f(n) \geq f_\gamma(n)$. Note que, para todo b_l^ρ tal que $2l > r$ e, para todo $\gamma \in \mathcal{C}'$, temos que apenas um número finito de b_l^ρ 's interceptam b_γ . Logo podemos tomar l' para o qual, para todo $l > l'$ não ha interseção e $2l' > r$. Nessa situação, todo b_l^ρ está contido no complementar de b_γ para $\gamma \in \mathcal{C}'$. Segue que, para todo $l > l'$, $b_l^\rho \subset a$.

Note ainda que, por construção, $\{b_l^\rho : l > 0\}$ converge para $\mathcal{U}_\rho$. Com efeito, para todo $a \in \mathcal{U}_\rho$, temos que $(-a)^*$ é um aberto compacto de X_ρ . Sendo assim, pela maneira como selecionamos f , temos, para todo $\gamma \in (-a)^*$, $b_\gamma \cap b_l^\rho = \emptyset$ para todos exceto uma quantidade finita de $l > 0$. Como $(-a)^*$ é compacto existe uma subcobertura finita que extraímos da cobertura dada pelos b_γ 's. Então existe um $n > 0$ tal que, para todo $l > n$, $b_l^\rho \in a^*$. Conseguimos assim garantir as condições (1) e (2) do lema 7.3.5.

Por construção, todo elemento de $\{b_l^\rho : l > 0\}$ é $Z_{\bar{\lambda}_\rho}$ -saturado. Para garantir a condição (3) resta ver que, para todos os $\lambda \in \Lambda_\rho$, todo elemento de $\{b_l^\rho : l > 0\}$ é Z_λ -saturado. Para tanto fixamos $\lambda \in \Lambda_\rho$. Caso Λ_ρ é enumerável temos que $\bar{\lambda}_\rho = \mu_\rho$ e, portanto, $\lambda \leq \bar{\lambda}_\rho$. Agora, pela condição (5), temos que os elementos também são Z_λ -saturados. Caso Λ_ρ é não enumerável, temos que $(b_l^\rho)^* \cap \mu_\rho \subset \bar{\lambda}_\rho$. Donde, usando a condição (5), para garantir que $(b_l^\rho)^*$ é Z_λ -saturado. Note que nesse caso temos que $\bar{\lambda}_\rho$ satisfaz a propriedade (6).

Resta provar que a condição (4) de (IH_α) é válida, para tanto faremos os dois lemas a seguir:

Lema 7.3.16. *Se $a_\rho = b_0^\rho$, então a condição (4) de (IH_α) é válida.*

Demonstração. Note que, pela hipótese de indução, só precisamos verificar o caso $\beta = \alpha$. Como estamos no Caso 0, temos que $\{(\bigcup_{l>n} b_l^\rho)^* : n \in \omega\}$ é base para x_ρ . Ademais temos $\Lambda_\alpha = \Lambda_\rho$, pela proposição 7.3.8. Note que tal coleção é composta por abertos $Z_{\bar{\lambda}_\rho}$ -saturados. Com efeito, fixado $n \in \omega$, temos que, para todo $l > n$, b_l^ρ é $Z_{\bar{\lambda}_\rho}$ -saturado. Fixamos então $Z \in Z_{\bar{\lambda}_\rho}$. Caso exista $l > n$ tal que $Z \subset (b_l^\rho)^*$ então $Z \subset (\bigcup_{l>n} b_l^\rho)^*$. Supondo que, para todo $l > n$, $Z \subset X_\alpha \setminus (b_l^\rho)^*$, então $Z \subset \bigcap_{l>n} (X_\alpha \setminus (b_l^\rho)^*) = X_\alpha \setminus (\bigcup_{l>n} (b_l^\rho)^*)$. Por um argumento semelhante ao usado na proposição 7.3.10, temos que $X_\alpha \setminus (\bigcup_{l>n} (b_l^\rho)^*) = X_\alpha \setminus (\bigcup_{l>n} (b_l^\rho)^*)$. Agora, para $\lambda \in \Lambda_\rho$, usamos a hipótese (6) e (3) para garantir a Z_λ -saturação. □

Lema 7.3.17. *Se $a_\rho = \bigcap_{l>0} b_l^\rho$, então a condição (4) de (IH_α) é válida.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{B}_\rho$ o conjunto dos elementos de $\mathbb{B}_\rho \setminus \mathcal{U}_\rho$ que são $Z_{\bar{\lambda}_\rho}$ -saturados. Sabemos que $x_{\rho,\alpha}$ possui o elemento b_0^ρ e $(b_0^\rho)^*$ é aberto compacto de X_α . Por (3) sabemos que b_0^ρ é Z_λ -saturado para todo $\lambda \in \Lambda_\rho$. Agora, pelas hipóteses de indução (2) e (4), sabemos que $X_\alpha \setminus \{\rho\}$ pode ser expresso como a união de conjuntos $Z_{\bar{\lambda}_\rho}$ -saturados. Temos então, $\{(b_0^\rho \setminus b) : b \in \mathfrak{B}_\rho\}$ é uma base de $x_{\rho,\alpha}$ de elementos $Z_{\bar{\lambda}_\rho}$ -saturados. Devemos ver que tal base é Z_λ -saturada para todo $\lambda \in \Lambda_\alpha$. Com efeito, caso Λ_ρ seja enumerável temos que $\bar{\lambda}_\rho$ é o elemento máximo de Λ_ρ . Sendo assim podemos usar a condição (5) para garantir a Z_λ -saturação. Para o caso enumerável estamos tratando do caso 1 na escolha do elemento. Sendo assim, por construção, temos que $(\bar{\lambda}_\rho, \mu_\rho)$ está contido em $(b_0^\rho)^*$, donde, $(\Gamma_\alpha \setminus (b_0^\rho)^*) \setminus \bar{\lambda}_\rho$ é finito. Segue então que $\Lambda_\alpha \subset \Lambda_\rho \cap \bar{\lambda}_\rho + 1$ e, portanto, é válida a condição (4). □

Terminamos assim a construção da estratégia vencedora para (P1) e, portanto, a construção do contra-exemplo desejado. Note que a construção auxiliar usando a definição 7.3.14 é, de certa forma, semelhante a construção feita no exemplo 5.2.6. De uma certa maneira gostaríamos de estender ω de modo que nos passos de indução retiramos todas as convergências para um tipo de sequência, que, como foi visto, equivale a acrescentar um ponto de acumulação de um passo para o outro. Aqui a construção substitui a propriedade D do espaço usando a saturação e mais algumas condições adicionais.

Referências Bibliográficas

- [1] **Balcar et al.(1980)** Bohuslav Balcar, Ryszard Frankiewicz e Charles Mills. More on nowhere dense closed P -sets. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math.*, 28(5-6):295–299 (1981). ISSN 0137-639X. Citado na pág. [47](#)
- [2] **Balogh et al.(1988)** Z Balogh, A Dow, DH Fremlin e PJ Nyikos. Countable tightness and proper forcing. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 19(1):295–298. Citado na pág. [51](#), [58](#)
- [3] **Blass(2010)** Andreas Blass. Combinatorial cardinal characteristics of the continuum. Em *Handbook of set theory*, páginas 395–489. Springer. Citado na pág. [5](#)
- [4] **Dow et al.(2013)** Alan Dow, Saharon Shelah et al. An efimov space from martin’s axiom. *Houston J. Math.*, 39(4):1423–1435. Citado na pág. [1](#), [2](#), [61](#), [65](#), [67](#)
- [5] **Engelking(1977)** Ryszard Engelking. *General Topology*. Taylor & Francis. Citado na pág. [3](#), [4](#), [7](#), [43](#)
- [6] **Franklin e Rajagopalan(1971)** Stanley P Franklin e Minakshisundaram Rajagopalan. Some examples in topology. *Transactions of the American Mathematical Society*, 155(2):305–314. Citado na pág. [2](#), [43](#)
- [7] **Gaspar-Arreola et al.()** Miguel Ángel Gaspar-Arreola, Fernando Hernández-Hernández e Michael Hrušák. Scattered spaces from weak diamonds. Citado na pág. [1](#), [61](#)
- [8] **Givant e Halmos(2008)** Steven Givant e Paul Halmos. *Introduction to Boolean algebras*. Springer Science & Business Media. Citado na pág. [61](#), [62](#), [65](#)
- [9] **Hajnal e Juhász(1967)** A. Hajnal e I. Juhász. Discrete subspaces of topological spaces. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 70=Indag. Math.*, 29:343–356. Citado na pág. [2](#), [26](#)
- [10] **Hechler(1974)** Stephen H. Hechler. On the existence of certain cofinal subsets of ${}^{\omega}\omega$. páginas 155–173. Citado na pág. [47](#)
- [11] **Hodel(1984)** Richard Hodel. Cardinal functions i. Em *Handbook of set-theoretic topology*, páginas 1–61. Elsevier. Citado na pág. [53](#), [59](#)
- [12] **Hrušák e Moore(2007)** Michael Hrušák e Justin Tatch Moore. Introduction: Twenty problems in set-theoretic topology. Em E. Pearl, editor, *Open Problems in Topology II*. Elsevier B. V. Citado na pág. [1](#)
- [13] **Koppelberg(1989)** Sabine Koppelberg. Minimally generated boolean algebras. *Order*, 5(4): 393–406. Citado na pág. [61](#), [69](#)
- [14] **Koppelberg et al.(1989)** Sabine Koppelberg, J Donald Monk e Robert Bonnet. *Handbook of Boolean algebras*, volume 384. North-Holland Amsterdam. Citado na pág. [61](#), [62](#)
- [15] **Kunen(2011)** Kenneth Kunen. *Set Theory*. College Publications. Citado na pág. [3](#)

- [16] **Kunen(2014)** Kenneth Kunen. *Set theory an introduction to independence proofs*, volume 102. Elsevier. Citado na pág. 48
- [17] **Nyikos et al.(1995)** P Nyikos, Lajos Soukup e B Veličković. Hereditary normality of γ_n -spaces. *Topology and its Applications*, 65(1):9–19. Citado na pág. 1, 2, 43, 51
- [18] **Nyikos(1992)** Peter J Nyikos. Hereditary normality versus countable tightness in countably compact spaces. *Topology and its Applications*, 44(1-3):271–292. Citado na pág. 1, 2, 51
- [19] **Nyikos e Vaughan(1987)** Peter J Nyikos e JE Vaughan. Sequentially compact, franklin-rajagopalan spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 101(1):149–155. Citado na pág. 2, 43, 47
- [20] **Nyikos e Vaughan(1992)** Peter J Nyikos e Jerry E Vaughan. The scarborough-stone problem for hausdorff spaces. *Topology and its Applications*, 44(1-3):309–316. Citado na pág. 1, 17
- [21] **Ostaszewski(1976)** A. J. Ostaszewski. On countably compact, perfectly normal spaces. *J. London Math. Soc. (2)*, 14(3):505–516. ISSN 0024-6107. doi: 10.1112/jlms/s2-14.3.505. URL <http://dx.doi.org/10.1112/jlms/s2-14.3.505>. Citado na pág. 2, 31
- [22] **Roitman(1984)** Judy Roitman. Basic s and l. Em *Handbook of set-theoretic topology*, páginas 295–326. Elsevier. Citado na pág. 2, 26, 31
- [23] **Scarborough e Stone(1966)** CT Scarborough e AH Stone. Products of nearly compact spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 124(1):131–147. Citado na pág. 1, 14, 17
- [24] **Stephenson Jr(1972)** RM Stephenson Jr. Discrete subsets of perfectly normal spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, páginas 605–608. Citado na pág. 2, 26
- [25] **Van Downen(1984)** EK Van Downen. The integers and topology, handbook of settheoretic topology, k. kunen and je vaughan, 1984. Citado na pág. 5
- [26] **Vaughan(1976)** JE Vaughan. Products of perfectly normal, sequentially compact spaces. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(3):517–520. Citado na pág. 1, 2, 31
- [27] **Vaughan(1984)** Jerry E. Vaughan. Countably compact and sequentially compact spaces. Em *Handbook of set-theoretic topology*, chapter 12. Elsevier Science Publishers B. V. Citado na pág. 2, 7, 14, 31, 36
- [28] **Vaughan(2007)** Jerry E. Vaughan. The scarborough-stone problem. Em E. Pearl, editor, *Open Problems in Topology II*. Elsevier B. V. Citado na pág. 1, 2, 17
- [29] **Weiss(1978)** William Weiss. Countably compact spaces and Martin’s axiom. *Canad. J. Math.*, 30(2):243–249. ISSN 0008-414X. doi: 10.4153/CJM-1978-023-8. URL <http://dx.doi.org/10.4153/CJM-1978-023-8>. Citado na pág. 2, 17, 26