Algumas propriedades do espaço topológico dos irracionais

Henry Naranjo Teheran

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Mestre em Ciências

Área de Concentração: Matemática
Orientadora: Profa. Dra. Ofelia Teresa Alas

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq.

São Paulo, 29 de setembro de 2011.

Algumas propriedades do espaço topológico dos irracionais

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Henry Naranjo Teheran e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Profa. Dra. Ofelia Teresa Alas (orientadora) - IME-USP.
- Profa. Dra. Lucia Renato Junqueira - IME-USP.
- Prof. Dr. Marcelo Dias Passos - UNIFESP.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por dar-me força espiritual e segurança ao longo de minha estadia no Brasil.

À minha família, principalmente aos meus pais Hernando e Luz María, pelo apoio e educação que sempre recebi deles.

À minha professora orientadora Ofelia T. Alas pela paciência, ensinamentos e bons conselhos. Serei sempre grato a ela.

Ao IME-USP pela imensa oportunidade em estar aqui.

Ao Hector, à Nubia e ao Rafael pela ajuda ao chegar nesta grande cidade para estudar no IME e na adaptação nos meus primeiros dias.

Aos meus amigos Cleber, por ter me ajudado a corrigir meus erros de português, Gustavo, por me auxiliar nas questões burocráticas do instituto. Ao Ronald, Luis, Fabiana, Janaina e a todos os meus colegas com quem partilhei a sala de estudo.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

À minha namorada Charytyn, pelo apoio, atenção e carinho...

Gracias....

Resumo

Neste trabalho estudamos algumas propriedades de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, visto como subespaço topológico de $\mathbb{R}$. Uma caracterização topológica é enunciada e como consequência obtemos que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ é homeomorfo ao ω^ω com a topologia produto de Tychonoff (ω com a topologia discreta). Também são vistos resultados sobre o espaço de Cantor que é um subespaço importante de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Em ZFC (sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel com o Axioma da Escolha) ou em ZFC com algum outro axioma (por exemplo, Hipótese do Contínuo, Axioma de Martin, igualdades entre pequenos cardinais) são exibidos exemplos de espaços topológicos normais e espaços normais de Lindelöf, cujo produto com $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ não é normal. Usando a noção de $P(2)$-espaço de K. Morita, mostra-se que para todo $P(2)$-espaço normal X, vale que $X \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ é normal. Além disso, temos que se X é um espaço normal tal que $X \times S$ é normal, para todo subespaço S de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, então X é um $P(2)$-espaço.

Abstract

In this work we study some properties of $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ seen as topological subspace of $\mathbb{R}$. A topological characterization is given and as a consequence, we obtain that $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ is homeomorphic to ω^ω with the Tychonoff product topology (ω with the discrete topology). We also study the Cantor space which is an important subspace of $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

In ZFC (Zermelo-Fraenkel axiomatic system with the Axiom of Choice) or ZFC with some other axiom (for example, Continuum Hypothesis, Martin's Axiom, equalities between small cardinals) it is shown examples of normal or Lindelöf normal topological spaces such that the product with $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ is nonnormal. Using K. Morita's $P(2)$-space, it is shown that for all normal $P(2)$-space X, the product $X \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ is normal. Besides, we have that if X is a normal space such that $X \times S$ is normal, for all subspace S of $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, then X is a $P(2)$-space.

Sumário

Lista de Símbolos **1**

Introdução **2**

0 Preliminares **5**
0.1 Teoria dos Conjuntos 5
0.2 Topologia Geral 11
0.3 Outros Resultados 19

1 Caracterização de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ e de ω^ω **24**

2 Não normalidade de produtos de espaços normais por $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ **45**
2.1 Reta de Michael 46
2.2 CH, MA e produto de espaços de Lindelöf com os irracionais 49
2.3 Concentração e produto de espaços de Lindelöf com os irracionais . . . 64

3 Produtos com um fator Lindelöf e um fator métrico separável **78**
3.1 Teorema de Rudin e Starbird 79
3.2 Normalidade no produto de espaços normais com um espaço métrico separável 86

Apêndices **88**

A Produto com um fator compacto **89**

B Mais resultados usados no trabalho **100**

Referências Bibliográficas **102**

Lista de Símbolos

$\mathbb{R}$	Espaço dos números reais.
$\mathbb{R}_0^+$	Espaço dos números reais não negativos.
$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$	Espaço dos números irracionais.
$\mathbb{Q}$	Espaço dos números racionais.
$\mathbb{Z}$	Espaço dos números inteiros.
ω	espaço dos números naturais.
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.
$\mathbb{N}^+$	Conjunto dos números naturais sem o zero.
B^A	Conjunto de todas as funções com domínio A e codomínio B.
$dom(f)$	Domínio da função f.
$im(f)$	Imagem da função f.
$Graph(f)$	Gráfico da função f.
$int(X)$	Interior do conjunto X.
$int_Y(X)$	Interior de X no espaço topológico Y.
$cl(X), \overline{X}$	Fecho do conjunto X.
$cl_Y(X)$	Fecho de X no espaço topológico de Y.
$Fr(X)$	fronteira do conjunto X.
$Fr_Y(X)$	fronteira de X no espaço topológico de Y.
$kc(X)$	função cardinal "Compact covering number"(página 43).
$w(X)$	função cardinal "peso"(página 19).
$IndX$	Dimensão de Brouwer-Čech do espaço topológico X (página 13).
$S_\varepsilon(x)$	Bola de raio ε e centro em x.
$diam(A)$	Diâmetro do conjunto A.
$cf(\alpha)$	Cofinalidade do ordinal α.

Introdução

Denotaremos por ZFC o sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel com o Axioma da Escolha.

Nesta dissertação vamos estudar algumas propriedades do espaço topológico dos números irracionais, como subespaço da reta real $\mathbb{R}$. Esse subespaço será denotado por $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Poderíamos pensar que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ é um subespaço simples de $\mathbb{R}$, mas este espaço tem propriedades muito interessantes e ainda hoje há problemas em aberto que envolvem $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

O subespaço $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ é não vazio, completamente metrizável, 0-dimensional, com base de abertos enumerável e sem compactos abertos não vazios. A menos de homeomorfismos, é único com essas condições (Corolário 1.7).

Em Topologia Geral, sabe-se que o produto de espaços normais nem sempre é normal, mesmo que um dos fatores seja um espaço métrico separável. Em 1955, M. E. Rudin ([17]) exibiu, não em ZFC, um espaço normal X cujo produto com o subespaço $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$ não é normal, utilizando uma reta de Souslin. Posteriormente, em 1971 ela construiu um exemplo em ZFC.

Em 1976, K. Morita, propôs a seguinte conjectura:

"Se Y é um espaço de Hausdorff tal que $X \times Y$ é normal para todo espaço normal de Hausdorff X, então Y é discreto".

Novamente M. E. Rudin, em 1978 ([18]) demonstrou a veracidade da conjectura.

Vejamos agora, o que ocorre com a normalidade do produto quando um dos fatores é $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. L. B. Lawrence [10, prop. 1] afirma que:

"Se X e Y são espaços topológicos e Y é completamente metrizável, separável e não σ-compacto, então $X \times Y$ é normal se e só se $X \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ é normal".

Esse resultado justifica o interesse em encontrar exemplos de espaços topológicos X tais que $X \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ não seja normal. Outro resultado importante, mostrado nesta dissertação (Teorema 3.4), é que, para um espaço topológico X regular e de Lindelöf, $X \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ é de Lindelöf, se e somente se, $X \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ é normal.

Em 1963, E. A. Michael ([11]) deu o primeiro exemplo em ZFC de um espaço normal cujo produto topológico com $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ não é normal. O espaço em questão não é de Lindelöf. A questão:

"Existe em ZFC um espaço topológico normal e de Lindelöf cujo produto com $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ não é normal?"

ainda permanece em aberto.

Entretanto, adicionando outro axioma a ZFC é possível obter exemplos de tais espaços (por exemplo a Hipótese do Contínuo, ou o Axioma de Martin ou a asserção $b = \omega_1$, etc.)

A dissertação começa com um Capítulo 0 de preliminares, onde recordamos algumas noções de Teoria dos Conjuntos e Topologia, necessárias para o desenvolvimento do trabalho.

O Capítulo 1 é dedicado ao subespaço topológico $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Vamos caracterizá-lo e concluir que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ é homeomorfo ao ω^ω. Também caracterizaremos o espaço de Cantor $\{0,1\}^\omega$ e o dos racionais $\mathbb{Q}$. Serão mencionados alguns outros resultados relacionados com $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ e o subespaço $\{0,1\}^\omega$; por exemplo, veremos que todo espaço metrizável e compacto é imagem contínua do espaço de Cantor e que todo espaço metrizável, separável, 0-dimensional e que não contem compactos abertos não vazios pode ser densamente imerso em $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

No Capítulo 2 apresentamos alguns exemplos, em ZFC ou ZFC com algum outro axioma adicional (ou a Hipótese do Contínuo, ou o Axioma de Martin ou $\mathfrak{b} = \omega_1$) de espaços topológicos normais para os quais o seu produto com $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ não é normal.

No caso ZFC, exibimos $X = [0,1]$ como subespaço da reta de Michael (Teorema 2.1); isto é, $[0,1]$ com a topologia

$$\Theta = \{U \cup V : U \quad \text{é aberto usual em } [0,1],\ V \subseteq [0,1]\backslash\mathbb{Q}\}\ .$$

No caso ZFC com mais algum axioma, o espaço topológico X, além de ser normal, será de Lindelöf. Nestas construções, ao invés de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, usaremos o seu homeomorfo ω^ω.

No Capítulo 3 estudamos a noção de $P(2)$-espaço para concluir que nesses espaços topológicos o produto com $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ é sempre normal; Morita em [14] mostrou que se X é um espaço topológico, o produto $X \times Y$ é normal para todo espaço metrizável e separável Y se e somente se X é um $P(2)$-espaço normal.

Também apresentaremos um teorema de Rudin e Starbird (Teorema 3.4) a fim de concluir que para todo espaço topológico regular e de Lindelöf X temos que $X \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ é normal se e somente se $X \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ é de Lindelöf. Este resultado é usado no Capítulo 2 para demonstrar a normalidade ou a não normalidade do produto de alguns espaços.

Finalmente, nos Apêndices A e B exibimos alguns resultados dados por T. Przymusiński em [15], sobre o produto topológico onde um dos fatores é compacto, que nos permitem demonstrar o Corolário 3.3 e o Teorema de Rudin e Starbird mencionado acima. Também mostramos algumas proposições que são usadas no texto. Isto é feito para torná-lo mais abrangente e simplificar a leitura do mesmo.

Como um comentário final, destacamos que muitas das demonstrações nesta dissertação foram feitas tentando simplificar as apresentadas nos artigos. Algumas delas foram obtidas usando ideias de vários artigos.

Capítulo 0

Preliminares

Neste capítulo vamos recordar algumas noções básicas e necessárias para o desenvolvimento deste trabalho. Se for necessário aprofundar em algumas destas noções veja-se [9] (no caso de Teoria dos Conjuntos) e [6] (no caso de Topologia).

0.1 Teoria dos Conjuntos

Usaremos o sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel com o Axioma da Escolha (ZFC).

Operações de conjuntos e noções básicas serão supostas conhecidas (tais como: relações, ordem total e parcial, boa-ordem, isomorfismo entre conjuntos bem ordenados, elemento maximal e minimal, máximos e mínimos, extremos superiores e inferiores). O conjunto das partes de um conjunto A será denotado por $P(A)$.

0.1 (Conjunto transitivo, ordinal). *Um conjunto A é dito* **transitivo** *se todo elemento de A é também subconjunto de A. Um conjunto é um* **ordinal** *se for transitivo e bem ordenado pela relação $\in$.*

Notemos que todo elemento de um ordinal é ordinal. Em geral os ordinais serão denotados por letras minúsculas gregas: α, β, γ, δ ,... Também é comum escrever $\alpha < \beta$ para dizer $\alpha \in \beta$.

Vamos supor conhecidos também os conceitos de ordinal sucessor e ordinal limite. Todo conjunto não vazio A de ordinais admite um supremo, $sup(A) = \bigcup A$, e no caso de ser $A \neq \phi$ também admite um mínimo, $\bigcap A$.

Processos de indução transfinita e recursão serão feitos sobre subconjuntos bem ordenados.

0.2 (**Equipotência, Ordinal Cardinal).** *Dois conjuntos A e B são chamados* **equipotentes** (*e denotamos por $A \approx B$*) *se $A = B = \phi$ ou se $A \neq \phi \neq B$ e existir uma função $f : A \longrightarrow B$ bijetora.*

Sob o Axioma de Escolha (AC) todo conjunto pode ser bem ordenado. Definimos a cardinalidade de um conjunto A como sendo $|A| = min\{\alpha : \alpha$ é ordinal e $\alpha \approx A\}$. Um ordinal α é dito **cardinal** *se $|\alpha| = \alpha$.*

Se A é um conjunto e λ é um cardinal, definimos

$$[A]^{<\lambda} = \{X \in P(A) : |A| < \lambda\}$$

Em particular $[\omega]^{<\omega}$ denota o conjunto de todos os subconjuntos finitos de ω.

É bem conhecido que para todo conjunto A, $|A| < |P(A)|$. Logo $\omega < 2^\omega$ (Se ω_1 denota o menor ordinal não enumerável, então $\omega_1 \leq 2^\omega$). A **Hipótese do Contínuo** (**CH**) é a asserção $2^\omega = \omega_1$.

0.3 (**Cofinalidade de Ordinais).** *Sejam α, β ordinais. Se β é ordinal sucessor ($\beta = \eta + 1$), uma função $f : \alpha \longrightarrow \beta$ é dita cofinal em β se $\eta \in im(f)$. Se β é ordinal limite, então $f : \alpha \longrightarrow \beta$ é dita cofinal em β se $im(f)$ é ilimitada em β. A* **cofinalidade de um ordinal** *β (que denotaremos por $cf(\beta)$) é o menor ordinal α para o qual existe $f : \alpha \longrightarrow \beta$ cofinal em β. Se β é ordinal sucessor, então $cf(\beta) = 1$. Logo só há interesse nas cofinalidades de ordinais limites. Se β é limite e $cf(\beta) = \alpha$, podemos provar que existe $f : \alpha \longrightarrow \beta$ cofinal em β estritamente crescente.*

0.4 (Pré-ordem). *Uma relação $\preceq$ em um conjunto P é uma* **pré-ordem** *se $\preceq$ é reflexiva e transitiva. Nestas condições dizemos que $(P, \preceq)$ é um conjunto pré-ordenado. Como é costume, abusaremos da notação ao escrever P ao invés de $(P, \preceq)$, quando a definição da pré-ordem $\preceq$ seja clara dentro do contexto.*

Vamos definir agora a pré-ordem $\leq_*$ em ω^ω.

0.5 ($\leq_*$ e $<_*$). *Sejam x, $y \in \omega^\omega$, dizemos que $x <_* y$ (ou respectivamente $x \leq_* y$) se existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $x(j) < y(j)$ (ou respectivamente $x(j) \leq_* y(j)$) para todo j, tal que $m < j$.* [a]

Dizemos que uma família $B \subseteq \omega^\omega$ é uma **família ilimitada** se for ilimitada em $(\omega^\omega, \leq_*)$, isto é, se para cada $f \in \omega^\omega$ existe $g \in B$ tal que $g \nleq_* f$. $D \subseteq \omega^\omega$ é dita uma **família dominante** se for cofinal em $(\omega^\omega, \leq_*)$, isto é, se para cada $f \in \omega^\omega$ existe $g \in D$ tal que $f \leq_* g$.

0.6 (Cardinais $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{d}$). *Definimos:*

- $\mathfrak{b} =$ *$min\{|B| : B \subseteq \omega^\omega$ é uma família ilimitada em $(\omega^\omega, \leq_*)\ \}$*
- $\mathfrak{d} =$ *$min\{|D| : D \subseteq \omega^\omega$ é uma família dominante em $(\omega^\omega, \leq_*)\ \}$*

Temos claramente que $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{d}$ (pois toda família dominante é ilimitada).

Lema 0.1. *Vale que $\omega_1 \leq \mathfrak{b} \leq \mathfrak{c}$ e que $\omega_1 \leq \mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}$. ($\omega_1 \leq \mathfrak{b} \leq \mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}$)*

Dem: Mostremos que uma família enumerável qualquer de ω^ω não pode ser ilimitada. Seja $B = \{f_n : n < \omega\}$ uma família de funções de ω em ω. Consideremos $g : \omega \longrightarrow \omega$ dada por $g(n) = max\{f_i(j) : i, j \leq n\} + 1$. Seja $f_m \in B$:

- Se $m = 0$ então $f_m \leq g$ e assim $f_m \leq_* g$.

[a] A notação $\leq_*$ é usada por Alster em [2], mas outros autores como van Douwen ([4]) usam a notação $\leq^*$.

- Se $m \neq 0$ então $\{n < \omega : g(n) < f_m(n)\} \subseteq \{0, 1, ..., m-1\}$, logo existe $m < \omega$ tal que se $m \leq k$ temos que $f_m(k) \leq g(k)$. Portanto $f_m \leq_* g$.

Concluímos que $\omega_1 \leq \mathfrak{b}$. Além disso segue-se também que $\omega_1 \leq \mathfrak{d}$ já que uma família enumerável não pode ser dominante pois nesse caso seria também ilimitada. $\square$

Vamos ver agora algumas definições alternativas para os pequenos cardinais $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{d}$ que serão úteis no desenvolvimento do trabalho.

Na definição 0.5, foram definidas as relações $\leq_*$ e $<_*$ em ω^ω. Vamos introduzir uma nova relação $<^*$, em ω^ω, dada por

$$\text{“}x <^* y \text{ se e só se } x \leq_* y \text{ e } y \not\leq_* x\text{”}.$$

Notemos que nestas condições “$x <^* y$”é mais que pedir as condições “$x \leq_* y$ e $x \neq y$”, pois como não vale a antisimetria, podemos encontrar $x, y \in \omega^\omega$ tais que $x \neq y$, $x \leq_* y$ e $y \leq_* x$. As relações $<_*$ e $<^*$ são bem diferentes logo devemos ter cuidado de não confundi-las, pois se $x <_* y$, então $x <^* y$ mas nem sempre vale a recíproca.

0.7. *Definimos os seguintes cardinais:*

- $\mathfrak{b}_1 = min\{|B| : B$ *é um subconjunto ilimitado de* ω^ω *de funções estritamente crescentes e que é bem ordenado por* $<^*\}$

- $\mathfrak{d}_1 = min\{|D| : D$ *é cofinal em* $(\omega^\omega, \leq)\}$

Teorema 0.2. *Valem* $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1$ *e* $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_1$.

Dem: Vamos mostrar aqui que $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1$. Para a prova de $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_1$ veja-se [4, teorema 3.6.].

$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1$. A desigualdade $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{b}_1$ é clara. Para mostrar a outra desigualdade consideremos $F = \{f_\beta \in \omega^\omega : \beta < \mathfrak{b}\}$ como sendo um subconjunto ilimitado de ω^ω e consideremos também $G = \{f \in \omega^\omega : f$ é estritamente crescente$\}$. Claramente G é dominante.

Vamos construir por recursão transfinita uma família $\{g_\beta : \beta < \mathfrak{b}\} \subseteq G$ tal que para cada $\beta < \mathfrak{b}$ vale a seguinte asserção

$$(\forall f \in \{g_\varepsilon : \varepsilon < \beta\} \cup \{f_\beta\})\,(f <^* g_\beta) \tag{0.1.1}$$

Escolhemos $g_0 \in G$ tal que $f_0 <^* g_0$. Para $0 < \beta < \mathfrak{b}$ supomos determinadas as funções g_ε satisfazendo (0.1.1) para cada $\varepsilon < \beta$. Da definição de $\mathfrak{b}$ e sabendo que $\beta < \mathfrak{b}$, temos que o conjunto $V_\beta = \{g_\varepsilon : \varepsilon < \beta\} \cup \{f_\beta\}$ é limitado; isto é, existe $g \in \omega^\omega$ tal que para cada $f \in V_\beta$ temos que $f \leq_* g$. Agora tomamos $g_\beta \in G$ satisfazendo

$$(\forall n < \omega)\,(g(n) < g_\beta(n))\,;$$

então $g <^* g_\beta$. Logo vale (0.1.1) para β e assim $\{g_\beta : \beta < \mathfrak{b}\}$ está construída. Notemos agora que um limitante superior de $\{g_\beta : \beta < \mathfrak{b}\}$, também seria limitante superior de F, logo $\{g_\beta : \beta < \mathfrak{b}\}$ é uma família ilimitada de ω^ω, cujos elementos são estritamente crescente e claramente bem ordenada por $<^*$. Daí $\mathfrak{b}_1 \leq \mathfrak{b}$ e a igualdade está demonstrada.

□

Axioma de Martin (MA)

Para introduzir o Axioma de Martin vamos precisar de alguns conceitos prévios.

0.8. *Seja $(P, \preceq)$ um conjunto pré-ordenado:*

1. *Dois elementos $p, q \in P$ são* **compatíveis** *se existir $r \in P$ tal que $r \preceq p$ e $r \preceq q$.*

2. *Dois elementos $p, q \in P$ são* **incompatíveis** *se não são compatíveis.*

3. *Um subconjunto $A \subseteq P$ é uma* **anticadeia** *se quaisquer dois elementos distintos de A são incompatíveis.*

4. *Um subconjunto $D \subseteq P$ é* **denso** *se para qualquer $p \in P$, existe $d \in D$ tal que $d \preceq p$.*

0.9. *Um conjunto pré-ordenado satisfaz a* **condição da cadeia enumerável (c.c.c.)**, *se toda anticadeia é enumerável.*

Exemplo 0.1. *Seja* (X, τ) *um espaço topológico e*

$$P = \{p \subseteq X : p \neq \phi, \ p \text{ é aberto em } X\} \tag{0.1.2}$$

com a pré-ordem $\preceq$ *dada pela inclusão de conjuntos* ($p \preceq q$ *se e só se* $p \subseteq q$). *Então* $p, q \in P$ *são incompatíveis se e só se* $p \cap q = \phi$.

Dizemos que um espaço topológico (X, τ) tem **celularidade enumerável** ou satisfaz c.c.c. se todo subconjunto de τ, cujos elementos são dois a dois disjuntos, é enumerável.

0.10. *Se* D *é um subconjunto denso de um conjunto pré-ordenado* P, *então um subconjunto* G *de* P *é dito* **filtro D-genérico** *em* P *se satisfaz as seguintes condições:*

1. *Se* $a \in G$, $b \in P$ *e* $a \preceq b$, *então* $b \in G$.
2. *Se* $a, b \in G$, *então existe* $c \in G$ *tal que* $c \preceq a$ *e* $c \preceq b$.
3. $D \cap G \neq \phi$.

Se $\mathcal{D}$ *é uma família de conjuntos densos em* P, *então* G *é um* **filtro $\mathcal{D}$-genérico** *em* P *se é um filtro* D*-genérico para cada* $D \in \mathcal{D}$.

Lema 0.3. *Se* $(P, \preceq)$ *é um conjunto pré-ordenado e* $\mathcal{D}$ *é uma família não vazia enumerável de subconjuntos densos de* P, *então existe um filtro* $\mathcal{D}$*-genérico em* P. *De fato, para cada* $p \in P$, *existe um filtro* $\mathcal{D}$*-genérico* G *em* P *tal que* $p \in G$.

Dem: Suponhamos que $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, ...\}$ é uma família enumerável de subconjuntos densos em P. Tomemos $p \in P$ um elemento qualquer e definamos por indução o conjunto $\{p_n \in P : n \in \mathbb{N}\}$ da seguinte forma:

$p_0 = p$ e, para cada $n > 0$, tomamos $p_n \in D_n$ tal que $p_n \preceq p_{n-1}$.

Vejamos que o conjunto

$$G = \{x \in P : \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } p_n \preceq x\}$$

é um filtro $\mathcal{D}$-genérico em P e que $p \in G$. De fato, é claro que $p \in G$. Agora se $r \in P$, $q \in G$ e $q \preceq r$, então $r \in G$, pois existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $p_n \preceq q$ (pois $q \in G$).

Se $q_1, q_2 \in G$ existem $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $p_m \preceq q_1$ e $p_n \preceq q_2$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $m \leq n$. Logo $p_n \preceq q_1$ e $p_n \preceq q_2$.

Finalmente é facil ver que $G \cap D_n \neq \phi$ para cada $n \in \mathbb{N}$. $\square$

0.11. MA$_\kappa$ *é a afirmação:*
Se κ é um cardinal infinito, $(P, \preceq)$ é um conjunto pré-ordenado que satisfaz c.c.c. e $\mathcal{D}$ é uma família de subconjuntos densos em P, com $|\mathcal{D}| \leq \kappa$, então existe um filtro $\mathcal{D}$-genérico em P.

Notemos que **MA$_{\aleph_0}$** é justamente o Lema 0.3. O Axioma de Martin afirma que **MA$_\kappa$** vale para cada $\kappa < 2^{\aleph_0}$; isto é,

0.12. *O* **Axioma de Martin [MA]** *é a afirmação:*
Se $(P, \preceq)$ é um conjunto pré-ordenado que satisfaz c.c.c. e se $\mathcal{D}$ é uma coleção de menos que $2^{\aleph_0}$ subconjuntos densos de P, então existe um filtro $\mathcal{D}$-genérico em P.

0.2 Topologia Geral

Nesta seção vamos assumir conhecidas algumas noções topológicas básicas, por exemplo os conceitos de espaço topológico, funções (contínuas, abertas, fechadas, homeomorfismos), ponto (interior, de aderência, de acumulação, de fronteira), vizinhança, base de um ponto e base de abertos de um espaço topológico.

0.13 (Ponto de Condensação e Isolado). *Seja X um espaço topológico, um ponto $t \in X$ é chamado* **ponto isolado** *se $\{t\}$ é aberto.*

Um ponto $s \in X$ é chamado de **ponto de condensação** *de $A \subseteq X$ se toda vizinhança V de s satisfaz que $|V \cap A| \geq \omega_1$.*

O teorema seguinte é facil de verificar.

Teorema 0.4. *Todo subconjunto T de um espaço metrizável e separável tal que $|T| > \omega$, contem um ponto de condensação.*

Vamos assumir também que são conhecidos os axiomas de enumerabilidade e de separação $(T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3\frac{1}{2}}, T_4)$. (Os espaços topológicos T_2 são chamados espaços de Hausdorff).

0.14. *Seja X um espaço topológico. X é dito:*

- **Espaço Regular:** *se verifica os axiomas T_1 e T_3.*
- **Espaço Normal:** *se verifica os axiomas T_1 e T_4.*
- **Espaço Completamente regular ou de Tychonoff:** *se verifica os axiomas T_1 e $T_{3\frac{1}{2}}$.*

Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subseteq X$; a topologia de subespaço que τ induz em A é $\tau \restriction A = \{A \cap W : W \in \tau\}$. Uma propriedade é dita **hereditária** se é preservada para subespaços, isto é, se um espaço X satisfaz a propriedade P e $A \subseteq X$, então o subespaço A satisfaz P.

Teorema 0.5. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação continua, fechada e sobrejetora. Se X é um espaço normal, então Y também é um espaço normal.*

0.15 (Espaço 0-dimensional). *Um espaço topológico X é dito* **espaço 0-dimensional** *se possuir uma base formada por abertos-fechados.*

A seguir, introduziremos a noção de dimensão de Brouwer-Čech de um espaço topológico:

0.16 (Dimensão de Brouwer-Čech). *Seja X um espaço topológico normal e $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq -1$. Dizemos que:*

(BČ1) $IndX = -1$, *se e só se* $X = \phi$.

(BČ2) $IndX \leq n$, *se para cada* $A \subseteq X$ *fechado e para cada* $V \subseteq X$ *aberto contendo* A, *existe um conjunto aberto* $U \subseteq X$ *tal que* $A \subseteq U \subseteq V$ *e* $IndFr(U) \leq n - 1$.

(BČ3) $IndX = n$, *se* $IndX \leq n$ *e a desigualdade* $IndX \leq n - 1$ *não se verifica.*

(BČ4) $IndX = \infty$, *se a desigualdade* $IndX \leq n$ *não se verifica qualquer* n.

O teorema seguinte relaciona os conceitos de dimensão de Brouwer-Čech e 0-dimensionalidade. Sua demonstração é consequencia da definição.

Teorema 0.6. *Se X é um espaço topológico normal tal que $IndX = 0$, então X é 0-dimensional.*

0.17 (Espaços Metrizáveis). *Um* **espaço métrico** *é um par (M, d), onde M é um conjunto e d é uma função (métrica) do conjunto $M \times M$ em $\mathbb{R}_0^+$ (o conjunto dos números reais não negativos) satisfazendo as seguintes propriedades:*

(M1) Para todo $x, y \in M$, $d(x, y) = 0$ *se é só se* $x = y$.

(M2) Para todo $x, y \in M$ *temos que* $d(x, y) = d(y, x)$.

(M3) Para todo $x, y, z \in M$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Lembremos que a Propriedade $(M3)$ é chamada desigualdade triangular.
Por abuso de notação, quando estiver claro qual é a métrica, denotaremos o espaço métrico simplesmente por M.

Um par (M, d) onde d satisfaz só $(M2)$ e $(M3)$ é chamado **espaço pseudo-métrico** *e d é chamada pseudo-métrica sobre M.*

Se (M, d) é um espaço métrico e τ_d é o conjunto

$$\{U \subseteq M : \text{ para cada } x \in U \text{ existe } \varepsilon < 0 \text{ tal que } S_\varepsilon(x) \subseteq U\},$$

onde $S_\varepsilon(x)$ é a bola de centro em x e raio ε em M, τ_d é a topologia sobre M associada à métrica d.

Um espaço topológico (X, τ) é dito **espaço metrizável** *se existir sobre ele uma métrica d, tal que $\tau = \tau_d$.*

0.18 (Família localmente finita e discreta). *Seja X um espaço topológico e $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de X. Dizemos que $\mathcal{F}$ é* **localmente finita** *(ou, respectivamente,* **discreta***) se para cada ponto $x \in X$ existe uma vizinhança U de x tal que a cardinalidade do conjunto $\{F \in \mathcal{F} : F \cap U \neq \phi\}$ é finita (ou, respectivamente, menor ou igual a 1).*

Uma família A de subconjuntos de X é chamada **σ-localmente finita** *se $A = \bigcup_{i<\omega} F_i$ onde para cada $i < \omega$, F_i é uma família localmente finita. Analogamente definimos* **família σ-discreta**.

O seguinte teorema caracteriza os espaços metrizáveis:

Teorema 0.7 (Nagata, Smirnov, Bing). *Um espaço topológico Z, que é T_2 e T_3, é metrizável se e somente se admite uma base de abertos σ-discreta (ou σ-localmente finita).*

Se (M, d) é um espaço métrico e $\phi \neq A \subseteq M$ é um subconjunto limitado de M, então definimos o **diâmetro** de A (que denotaremos por $diam(A)$) como sendo

$$diam(A) = \sup_{x,y \in \overline{A}} d(x, y).$$

Por outro lado, dizemos que um sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em M é uma **sequência de Cauchy** se para cada $\varepsilon > 0$ existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para quaisquer $n, m \geq n_0$ temos $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

0.19 (Espaço Métrico completo). *Um espaço métrico (M, d) é um* **espaço métrico completo** *se toda sequência de Cauchy converge. Um espaço topológico (X, τ) é* **completamente metrizável** *se existir uma métrica d definida nele tal que (X, d) é completo e $\tau_d = \tau$.*

Vamos definir agora algumas propriedades topológicas e para isto vamos supor conhecidas as noções de cobertura (recobrimento) e subcobertura (sub-recobrimento). Vamos dizer que $\{W_j : j \in J\}$ é um **refinamento** da cobertura $\{U_i : i \in I\}$, se $\bigcup\{W_j : j \in J\} = \bigcup\{U_i : i \in I\}$ e para cada $j \in J$ existir $i_j \in I$ tal que $W_j \subseteq U_{i_j}$.

0.20 (Algumas Propriedades topológicas). *Seja (X, τ) um espaço topológico:*

- **Compacidade:** *(X, τ) é dito compacto se toda cobertura por abertos tem uma subcobertura finita.*

- **Lindelöf:** *(X, τ) é dito um espaço de Lindelöf se toda cobertura por abertos de X tem uma subcobertura enumerável.*

- **Enumeravelmente compacto:** *(X, τ) é dito enumeravelmente compacto se toda cobertura enumerável por abertos de X tem uma subcobertura finita.*

- **Paracompacidade:** *(X, τ) é dito um espaço paracompacto se toda cobertura por abertos de X admite um refinamento aberto localmente finito.*

- **Enumeravelmente paracompacto:** (X, τ) *é enumeravelmente paracompacto se toda cobertura enumerável por abertos de* X *tem um refinamento aberto localmente finito.*

- **κ-paracompacto:** *Seja* κ *um cardinal.* (X, τ) *é* κ*-paracompacto se toda cobertura de cardinalidade menor ou igual a* κ *por abertos de* X*, admite um refinamento aberto localmente finito.*

Alguns textos pedem, para que um espaço topológico seja paracompacto, enumeravelmente paracompacto ou κ-paracompacto, além do que pedimos na nossa definição, que o espaço seja T_2 (como em [6] por exemplo). Assim devemos ter um pouco de cuidado para não confundir as definições.

Teorema 0.8. *Se* X *é um espaço metrizável, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. X *é de Lindelöf.*

2. X *é separável.*

3. X *tem base enumerável.*

0.21 (σ-compacidade)**.** *Um subconjunto* A *de um espaço topológico* X *é* σ*-compacto se ele é reunião enumerável de conjuntos compactos.*

Temos agora os seguintes teoremas:

Teorema 0.9. *1. Todo espaço topológico paracompacto e* T_2 *é normal.*

2. Todo espaço de Lindelöf e regular é paracompacto.

3. Todo espaço de Lindelöf e regular é normal.

Teorema 0.10. *Se um espaço paracompacto e de Hausdorff X contem um subespaço denso A que é de Lindelöf, então X é de Lindelöf.*

A seguir apresentamos uma caracterização para os espaços enumeravelmente paracompactos.

Teorema 0.11. *Para um espaço X de Hausdorff as seguintes condições são equivalentes:*

1. *X é enumeravelmente paracompacto.*
2. *Para cada sequência crescente $W_0 \subseteq W_1 \cdots$ de subconjuntos abertos de X satisfazendo $X = \bigcup\{W_i : i < \omega\}$, existe uma sequência $T_0, T_1, ...$ de subconjuntos fechados de X tais que $T_i \subseteq W_i$ para cada $i < \omega$ e $X = \bigcup\{int(T_i) : i < \omega\}$.*
3. *Cada família $\{F_i : i < \omega\}$ de subconjuntos fechados em X, com $\bigcap\{F_i : i < \omega\} = \phi$ e $F_{i+1} \subseteq F_i$ para cada $i < \omega$, existe uma família $\{U_i : i < \omega\}$ de subconjuntos abertos de X, tais que $X = \bigcup\{U_i : i < \omega\}$ e $F_i \cap \overline{U_i} = \phi$ para cada $i < \omega$.*

Dem: As condições 1. e 2. são equivalentes, ver em [6, teorema 5.2.1] ((i) é equivalente a (iii)). Agora mostraremos que 2. é equivalente a 3.

Para ver 3. $\Rightarrow$ 2., basta tomar $F_i = X \backslash W_i$ para cada $i < \omega$, logo existem a família $\{U_i : i < \omega\}$ como em 3. e tomando $T_i = cl(U_i)$ para cada $i < \omega$ vale 2.

Para mostrar 2. $\Rightarrow$ 3. tomemos $W_i = X \backslash F_i$ para cada $i < \omega$. Deste modo existe a família $\{T_i : i < \omega\}$ como em 2. e considerando $U_i = int(T_i)$ mostra-se que vale 3. □

0.22 (Conjunto G_δ e conjunto F_σ). *Seja X um espaço topológico. $A \subseteq X$ é dito um conjunto G_δ se $A = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} V_i$, onde V_i é aberto em X para cada $i \in \mathbb{N}$.*

A é dito um conjunto F_σ se $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$, onde F_i é fechado em X para cada $i \in \mathbb{N}$.

Todo subespaço G_δ de um espaço métrico completo é completamente metrizável.

Agora apresentaremos um resultado devido a Tumarkin [6, pag. 422, 7.4.17].

Teorema 0.12 (Tumarkin). *Para todo subespaço X de um espaço metrizável M, existe um conjunto G_δ $X^* \subseteq M$ tal que $X \subseteq X^*$ e $IndX = IndX^*$.*

Vamos introduzir agora o conceito de espaço de Cantor e de Baire.

0.23 (**Espaço de Baire:**). *Se X é um espaço topológico e $A \subseteq X$ é tal que o interior de seu fecho é vazio (isto é, $int(\overline{A}) = \phi$) dizemos que A é um* **conjunto raro**. *Um subconjunto de X é dito* **magro** *se for reunião enumerável de conjuntos raros. Um espaço X é dito um* **espaço de Baire** *se todo subconjunto magro de X tem interior vazio.*

Por exemplo, os espaços completamente metrizáveis são espaços de Baire.

0.24 (**Espaço de Cantor**). *Consideremos o espaço topológico $\{0,1\}^\omega$ com a topologia produto de Tychonoff, onde $\{0,1\}$ tem a topologia discreta. Um espaço X é dito de Cantor se existir um homeomorfismo $\Phi : X \longrightarrow \{0,1\}^\omega$.*

0.25 (**Compactificação**). *Um par (Y, c) é uma compactificação do espaço topológico T_2 X, se Y é compacto, T_2 e $c : X \longrightarrow Y$ for um homeomorfismo sobre a sua imagem tal que $\overline{c[X]} = Y$. Denotaremos (Y, c) por cX. Uma compactificação que vamos usar neste trabalho é a compactificação de Čech Stone de X, denotada por βX (veja-se [6, seção 3.6]).*

Vamos dizer que um espaço topológico Y é uma compactificação métrica de um espaço X, se Y for compactificação de X, como na definição anterior, e Y for métrizável.

A seguir introduziremos a função cardinal chamada peso:

0.26 (Função Cardinal Peso). *Seja X um espaço topológico. Definimos o peso de X como sendo:*

$$w(X) = min\{|\mathfrak{B}| : \mathfrak{B} \text{ é uma base de abertos para } X\} + \omega$$

0.3 Outros Resultados

Nesta seção apresentaremos alguns resultados que envolvem Teoria dos Conjuntos e Topologia.

Uma aplicação do Axioma de Martin à Topologia (ver [9, pag. 65; teorema 3.4]) é que as seguintes asserções são equivalentes para um cardinal κ infinito:

i. $\mathbf{MA}_\kappa$

ii. Num espaço topológico compacto, de Hausdorff e não vazio com celularidade enumerável, a intersecção de κ subconjuntos densos e abertos em X é não vazia.

No Teorema 0.13, que apresentaremos a seguir, mostraremos que i. $\Rightarrow$ ii, que é a implicação que vamos precisar mais tarde em nosso trabalho. Notemos que para o caso $\kappa = \aleph_0$ temos o conhecido Teorema de Baire (que não precisa da celularidade enumerável). Mas em geral a condição de celularidade enumerável é necessária, como pode-se ver no exemplo exibido depois do teorema:

Teorema 0.13. *Suponhamos $\mathbf{MA}_\kappa$, para κ cardinal infinito. Se $X \neq \phi$ é um espaço topológico compacto, de Hausdorff, com celularidade enumerável e $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ é uma família não vazia de conjuntos densos abertos em X, então*

$$\bigcap\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \neq \phi$$

Dem: Seja $P = \{p \subseteq X : p$ é aberto e $p \neq \phi\}$, com a pré-ordem $p \preceq q$ se e só se $p \subseteq q$. Então P satisfaz a c.c.c. pois X tem celularidade enumerável. Para cada $\alpha < \kappa$, seja

$$D_\alpha = \{p \in P : \overline{p} \subseteq U_\alpha\}$$

e seja $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Vejamos que cada D_α é denso em P. De fato, seja $q \in P$ qualquer. Como U_α é denso no espaço X, temos que $U_\alpha \cap q \neq \phi$. Seja $x \in U_\alpha \cap q$. Como X é regular (por ser compacto e T_2) e $U_\alpha \cap q$ é vizinhança aberta de x em X, temos que existe $p \in P$ tal que $x \in p \subseteq \overline{p} \subseteq U_\alpha \cap q$. Logo $p \preceq q$ e $p \in D_\alpha$. Portanto, D_α é denso em P. $\mathbf{MA}_\kappa$ implica que existe G, filtro $\mathcal{D}$-genérico em P. Afirmamos que G tem a propriedade da intersecção finita. Se $g_0, g_1, ..., g_i \in G$, então, da definição 0.10, existe $r \in G$ tal que $r \preceq g_k$ para cada $0 \leq k \leq i$ assim $\bigcap\{g_k : 0 \leq k \leq i\} \supseteq r \neq \phi$, o que mostra que G tem a propriedade da intersecção finita. Logo da compacidade de X segue que

$$\bigcap\{\overline{p} : p \in G\} \neq \phi$$

Por esse fato, se nós mostrarmos que $\bigcap\{\overline{p} : p \in G\} \subseteq \bigcap\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$, mostramos o teorema. Se $x \in \bigcap\{\overline{p} : p \in G\}$, então $x \in \overline{p}$ para cada $p \in G$. Logo, da Definição 0.10, como $D_\alpha \cap G \neq \phi$ para todo $\alpha < \kappa$, existe $q_\alpha \in D_\alpha \cap G$. Portanto $x \in \overline{q_\alpha} \subseteq U_\alpha$ para cada $\alpha < \kappa$, o que implica que $\bigcap\{\overline{p} : p \in G\} \subseteq \bigcap\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$.

□

Corolário 0.14. *Suponhamos* $\mathbf{MA}_\kappa$ *para* κ *cardinal infinito. Se* $X \neq \phi$ *é um espaço compacto, de Hausdorff que tem celularidade enumerável, então* X *não é reunião de uma família* $\{\overline{V_\alpha} : \alpha < \kappa\}$*, onde* V_α *é um conjunto raro para cada* $\alpha < \kappa$*.*

Exemplo 0.2. *Consideremos o espaço topológico produto,* $X = (\omega_1 + 1)^\omega$*, onde* $\omega_1 + 1$ *tem a topologia da ordem. Sabemos que* X *não tem celularidade enumerável. Queremos mostrar que é reunião de* ω_1 *conjuntos raros. De fato, para cada* $\alpha < \omega_1$ *definamos*

$$A_\alpha = \{f \in X : (\forall n < \omega)\,(f(n) \neq \omega_1 \to f(n) \leq \alpha)\}$$

- $X = \bigcup\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$:
  Se $f \in X$, definamos $A^* = \{n < \omega : f(n) \neq \omega_1\}$. Logo $\bigcup\{f(n) : n \in A^*\}$ é um ordinal enumerável. Então existe um ordinal $\alpha < \omega_1$ tal que $\bigcup\{f(n) : n \in A^*\} < \alpha < \omega_1$. Assim, se $n < \omega$ tal que $f(n) \neq \omega_1$, então $f(n) \leq \alpha$. Portanto $f \in A_\alpha$.

- *Para cada $\alpha < \omega_1$, A_α é fechado em X:*
  Seja $f \notin A_\alpha$, então existe $n < \omega$ tal que $f(n) \neq \omega_1$ e $f(n) > \alpha$. Consideremos

$$V = (\omega_1 + 1) \times \cdots \times (\omega_1 + 1) \qquad \times \underbrace{]\alpha, \omega_1[}_{\textit{fator de índice } n} \times \qquad (\omega_1 + 1) \times (\omega_1 + 1) \times \cdots$$

  Logo $f \in V \subseteq X \backslash A_\alpha$, o que mostra que A_α é fechado em X.

- *$int_X(A_\alpha) = \phi$, para cada $\alpha < \omega_1$:*
  Suponhamos que $int_X(A_\alpha) \neq \phi$, então podemos tomar $f \in int_X(A_\alpha)$ e consideremos uma vizinhança aberta de f, $W = \bigcap_{i \in I_0} \Pi_i^{-1}[V_i]$ tal que I_0 seja um subconjunto finito de ω, V_i seja um aberto de $\omega_1 + 1$ para cada $i \in I_0$ e $W \subseteq int_X(A_\alpha)$. Agora, consideremos ordinais β e n_0 tais que $\alpha < \beta < \omega_1$ e $i < n_0$ para cada $i \in I_0$. Definamos uma função $g : \omega \longrightarrow \omega_1 + 1$ do seguinte modo:
  $$g(m) = \begin{cases} f(m), & \textit{se } m \neq n_0 \\ \beta & \textit{se } m = n_0 \end{cases}$$
  Temos claramente que $g \in W \subseteq A_\alpha$, mas $g(n_0) \neq \omega_1$ e $g(n_0) = \beta > \alpha$, o que é absurdo. Portanto, $int_X(A_\alpha) = \phi$.

Concluímos que $X = \bigcup\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, onde para cada $\alpha < \omega_1$, A_α é um conjunto raro.

0.27 (**α-escala em ω^ω**). *Seja α um ordinal. $S \subseteq \omega^\omega$ é dita uma α-escala em ω^ω se $S = \{x_\beta : \beta < \alpha\}$ e S safistaz as seguintes duas condições:*

i. $x_\theta <_* x_\beta$, *para* $\theta < \beta < \alpha$ *e*

ii. *para cada* $p \in \omega^\omega$, *existe* $\beta < \alpha$ *tal que* $p <_* x_\beta$.

Onde a pré-ordem $<_*$ é a definida em 0.5.

Teorema 0.15 (MA). *Seja $H \subseteq \omega^\omega$ tal que $|H| < 2^{\aleph_0}$. Então existe $f \in \omega^\omega$ tal que para cada $h \in H$, $h <_* f$. (Portanto, $\mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \mathfrak{c}$).*

Dem: Consideremos o conjunto

$$P = \left\{ (s, E) : s \in \bigcup_{n<\omega} \omega^n, E \subseteq H \text{ finito} \right\}$$

com a seguinte pré-ordem:

$$(s, E) \preceq (s', E') \iff s' \subseteq s, E' \subseteq E \text{ e } (\forall k \in Dom(s) \setminus Dom(s')) \, (\forall h \in E') \, (h(k) < s(k)).$$

Dois pares (s, E) e (s, E') são sempre compatíveis, pois existe $(s, E \cup E') \in P$ tal que $(s, E \cup E') \preceq (s, E)$ e $(s, E \cup E') \preceq (s, E')$. Assim, se $M \subseteq P$ é uma família não enumerável, dado que $\bigcup_{n<\omega} \omega^n$ é enumerável, existe $s \in \bigcup_{n<\omega} \omega^n$ tal que (s, E) e (s, E') pertencem a M, para convenientes subconjuntos finitos E, E' contidos em H. Logo eles são compatíveis e portanto M não pode ser anticadeia, o que mostra que P satisfaz c.c.c.

Agora, para cada $h \in H$, definimos

$$D_h = \{(s, E) \in P : h \in E\}$$

e para cada $n < \omega$,

$$F_n = \{(s, E) \in P : n \in Dom(s)\}$$

Afirmamos que D_h e F_n são densos em P, respectivamente, para cada $h \in H$ e para cada $n < \omega$. De fato, seja $(s, E) \in P$ então existe $(s, E \cup \{h\}) \in P$ tal que $(s, E \cup \{h\}) \preceq (s, E)$. Então D_h é denso em P para cada $h \in H$.

Por outro lado, seja $n < \omega$. Se $n \in Dom(s)$, então $(s, E) \preceq (s, E)$ e $(s, E) \in F_n$; se $n \notin Dom(s)$, então tomamos $s' \in \omega^{n+1}$ definido da seguinte forma:

$$s'(k) = \begin{cases} s(k), & \text{se } k \in Dom(s) \\ max\{h(k) + 1 : h \in E\}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e claramente $(s', E) \in F_n$ e $(s', E) \preceq (s, E)$, o que mostra que F_n é denso em P para $n < \omega$.

Se tomamos $\mathcal{D} = \{D_h : h \in H\} \cup \{F_n : n < \omega\}$, então pelo Axioma de Martin, existe $G \subseteq P$ filtro $\mathcal{D}$-genérico em P. Seja:

$$f = \bigcup \{s : (s, E) \in G \text{ para algum } E \subseteq H \text{ finito}\}$$

Assim, $f : \omega \longrightarrow \omega$ é uma função bem definida. De fato, se $x \in \omega$ e $f_1, f_2 \in f$ são tais que $x \in Dom(f_1) \cap Dom(f_2)$, então por ser G um filtro $\mathcal{D}$-genérico em P, existe (f_3, H_3) em G, tal que $f_1 \subseteq f_3$ e $f_2 \subseteq f_3$, o que implica que $f_1(x) = f_3(x) = f_2(x)$. Portanto f está bem definida. Além disso, como $G \cap F_n \neq \phi$ para cada n, temos que $dom(f) = \omega$.

Vamos mostrar que para cada $h \in H$, temos que $h <_* f$.

Seja $h \in H$. Então, como $G \cap D_h \neq \phi$, podemos considerar $(s, E) \in G \cap D_h$, isto é, $h \in E$. Agora, se $k \in \omega \backslash Dom(s)$, então como $F_k \cap G \neq \phi$, existe $(s_1, E_1) \in F_k \cap G$ ($k \in Dom(s_1)$). Consideremos $(s_2, E_2) \in G$ tal que $(s_2, E_2) \preceq (s, E)$ e $(s_2, E_2) \preceq (s_1, E_1)$. Então temos que $(s_2, E_2) \in G$ é tal que $(s_2, E_2) \preceq (s, E)$ e $k \in Dom(s_2) \backslash Dom(s)$. Portanto, $f(k) = s_2(k) > h(k)$. Logo, $h <_* f$. □

Corolário 0.16 (MA)**.** *Existe uma $\mathfrak{c}$-escala em ω^ω.*

Dem: Seja $\omega^\omega = \{h_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Vamos construir uma $\mathfrak{c}$-escala $S = \{f_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ utilizando recursão transfinita. Suponhamos definidos $\{f_\alpha \in \omega^\omega : \alpha < \beta\}$, para um ordinal β, tal que $\beta < \mathfrak{c}$. Logo tomando $H = \{f_\alpha \in \omega^\omega : \alpha < \beta\} \cup \{h_\beta\}$, pelo Teorema 0.15, existe $f_\beta \in \omega^\omega$ tal que $h <_* f_\beta$, para cada $h \in H$, o que termina a demonstração. □

Capítulo 1

Caracterização de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ e de ω^ω

Neste capítulo queremos estudar o subespaço topológico dos números irracionais da reta real $\mathbb{R}$. (Denotaremos esse subespaço por $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$). Destacaremos algumas das suas propriedades e veremos que condições são necessárias e suficientes para que um espaço topológico seja homeomorfo a $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. (Tal resultado será apresentado no Corolário 1.7). Em particular, vamos mostrar que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ é homeomorfo ao espaço ω^ω com a topologia produto, onde a topologia em ω é a discreta.

Também vamos trabalhar com o espaço de Cantor $\{0,1\}^\omega$, que é um subespaço importante de ω^ω.

O primeiro resultado que vamos mostrar é que quaisquer dois densos enumeráveis em $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ são homeomorfos e este homeomorfismo é a restrição de um homeomorfismo de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Mas antes vejamos alguns resultados que nos servirão para mostrá-lo.

Teorema 1.1 (Brower 1913, implicitamente Fréchet 1910)**.** *Sejam X e Z dois conjuntos densos e enumeráveis em $\mathbb{R}$, então existe um homeomorfismo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f[X] = Z$.*

Dem: Suponhamos que

$$X = \{x_0, x_1, ...\} \text{ e } Z = \{z_0, z_1, ...\}$$

e definamos indutivamente uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ do seguinte modo:

$f(x_0) = z_0$ e

$f(x_i)$, para $i \in \{1, 2, ...\}$, como sendo um elemento de Z com o menor índice possível tal que as condições $x_j < x_k$ e $f(x_j) < f(x_k)$ sejam equivalentes para todo $j, k \leq i$.

Agora, se $w \in \mathbb{R} \backslash X$ então tomemos $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ uma sequência estritamente crescente tal que $w_n \to w$. (Notemos que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência estritamente crescente e limitada em X, assim $(f(w_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente e limitada em $\mathbb{R}$ portanto convergente). Definimos $f(w) = \lim_{n \to \infty} f(w_n)$, se $w \in \mathbb{R} \backslash Z$. Logo podemos considerar a extensão $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como acima.

f está bem definida, pois se $w \in \mathbb{R} \backslash X$ e $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\overline{w_n})_{n \in \mathbb{N}}$ são duas sequências estritamente crescentes em X, convergentes para w, vamos ter $(f(w_n))_{n \in \mathbb{N}}$ e $(f(\overline{w_n}))_{n \in \mathbb{N}}$ são sequências convergentes para o mesmo limite. De fato, suponha, sem perda de generalidade, que $\lim_{n \to \infty} f(w_i) < \lim_{n \to \infty} f(\overline{w_i})$, então existe $x \in X$ tal que $\lim_{n \to \infty} f(w_i) < f(x) < \lim_{n \to \infty} f(\overline{w_i})$. Logo para cada $i \in \mathbb{N}$ temos que $w_i < x$ e que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $x < \overline{w_r} < w$ (pois $f(x) < \lim_{n \to \infty} f(\overline{w_i})$). Portanto $w \leq x < w$ que é absurdo e assim $f(w)$ admite um só valor em $\mathbb{R}$.

Notemos que f é estritamente crescente. Sejam $w, y \in \mathbb{R}$ com $w < y$, logo existem $x, x^* \in X$ tais que $w < x < x^* < y$. Então $f(w) \leq f(x) < f(x^*) \leq f(y)$. Portanto f é estritamente crescente, logo injetora.

Além disso f é sobrejetora, basta mostrar para $\mathbb{R} \backslash Z \subseteq im(f)$. Tomemos $z \in \mathbb{R} \backslash Z$ e consideremos $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma sequência estritamente crescente em Z tal que $\lim_{i \to \infty} z_i = z$. Então $(f^{-1}(z_i))_{i \in \mathbb{N}}$ é uma sequência estritamente crescente limitada em $\mathbb{R}$ e portanto convergente. Logo se nós tomamos $x = lim_{i \to \infty} f^{-1}(z_i)$ temos que $f(x) = z$.

Para mostrar que f é homeomorfismo, notemos que para $]a, b[$ aberto em $\mathbb{R}$, com $a \leq b$ e ambos em Z, ocorre que $f^{-1}\,[\,]a, b[\,] =]f^{-1}(a), f^{-1}(b)[$, logo $f^{-1}\,[\,]a, b[\,]$ é aberto em $\mathbb{R}$. De modo similar para $]c, d[$ aberto em $\mathbb{R}$, com $c \leq d$ e ambos em X, ocorre que $f\,[\,]c, d[\,] =]f(c), f(d)[$, logo $f\,[\,]c, d[\,]$ é aberto em $\mathbb{R}$. Assim temos que f é uma aplicação contínua e aberta. Logo concluímos que f é homeomorfismo. $\square$

Teorema 1.2. *Se X_1, X_2, Y_1 e Y_2 são conjuntos densos e enumeráveis em $\mathbb{R}$ com $X_1 \cap X_2 = \phi = Y_1 \cap Y_2$, então existe $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ homeomorfismo tal que $f[X_i] = Y_i$ para $i = 1, 2$.*

Dem: Consideremos as seguintes enumerações para os conjuntos X_1, X_2, Y_1 e Y_2:

$$X_1 = \{a_0, a_1, ..., a_s, ...\} \qquad X_2 = \{b_0, b_1, ..., b_s, ...\}$$

$$Y_1 = \{c_o, c_1, ..., c_s, ...\} \qquad Y_2 = \{d_0, d_1, ..., d_s, ...\}$$

Supondo ainda que $a_0 < b_0$ e $c_0 < d_0$ definamos uma função f do seguinte modo: $f(a_0) = c_0$ e $f(b_0) = d_0$. Depois tomemos $f(a_1)$ em Y_1 como o c_j de menor índice tal que a função

$$f : \{a_0, b_0, a_1\} \longrightarrow \{c_0, d_0, f(a_1)\}$$

seja estritamente crescente.

Tomemos $f(b_1)$ em Y_2 como sendo o d_j de menor índice tal que a função

$$f : \{a_0, b_0, a_1, b_1\} \longrightarrow \{c_0, d_0, f(a_1), f(b_1)\}$$

seja estritamente crescente.

Tomemos $f(a_2)$ em Y_1 como sendo o c_j de menor índice tal que a função

$$f : \{a_0, b_0, a_1, b_1, a_2\} \longrightarrow \{c_0, d_0, f(a_1), f(b_1), f(a_2)\}$$

seja estritamente crescente.

Depois tomemos $f(b_2)$ em Y_2 como sendo o d_j de menor índice tal que a função

$$f : \{a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2\} \longrightarrow \{c_0, d_0, f(a_1), f(b_1), f(a_2), f(b_2)\}$$

seja estritamente crescente.

Continuando assim recursivamente, para cada $m \in \mathbb{N}$ com $m > 0$, suponhamos escolhidos $f(a_1), f(a_2), ..., f(a_{m-1})$ em Y_1 e $f(b_1), f(b_2), ..., f(b_{m-1})$ em Y_2 tais que:

1. O elemento $f(a_{m-1})$ seja o c_j de menor índice tal que $f : \{a_0, b_0, ..., a_{m-2}, b_{m-2}, a_{m-1}\} \longrightarrow \{c_0, d_0, f(a_1), f(b_1), ..., f(a_{m-2}), f(b_{m-2}), f(a_{m-1})\}$ seja uma função estritamente crescente.

2. O elemento $f(b_{m-1})$ seja o d_j de menor índice tal que $f : \{a_0, b_0, ..., a_{m-1}, b_{m-1}\} \longrightarrow \{c_0, d_0, f(a_1), f(b_1), ..., f(a_{m-1}), f(b_{m-1})\}$ seja uma funcão estritamente crescente.

Então escolhemos:

1. $f(a_m)$ em Y_1 como sendo o c_j de menor índice tal que a função $f : \{a_0, b_0, ..., a_{m-1}, b_{m-1}, a_m\} \longrightarrow \{c_0, d_0, f(a_1), f(b_1), ..., f(a_{m-1}), f(b_{m-1}), f(a_m)\}$ seja estritamente crescente.

2. Logo escolhemos $f(b_m)$ em Y_2 como sendo o d_j de menor índice tal que a função $f : \{a_0, b_0, ..., a_m, b_m\} \longrightarrow \{c_0, d_0, f(a_1), f(b_1), ..., f(a_m), f(b_m)\}$ seja estritamente crescente.

Nestas condições notemos que a função $f : (X_1 \cup X_2) \longrightarrow (Y_1 \cup Y_2)$ é uma bijeção estritamente crescente e que $f[X_i] = Y_i$ para $i = 1, 2$. Estendamos a função f a $\mathbb{R}$ como segue: se $w \in \mathbb{R} \backslash (X_1 \cup X_2)$, então tomamos uma sequência $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X_1 \cup X_2$ estritamente crescente tal que $w_n \to w$. $(f(w_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência estritamente crescente e limitada em $\mathbb{R}$, portanto ela converge. Definimos $f(w) = \lim_{n \to \infty} f(w_n)$. De modo análogo ao teorema anterior, mostra-se que f fica bem definida e que ela é um homeomorfismo.

Assim temos um homeomorfismo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ onde $f[X_1] = Y_1$ e $f[X_2] = Y_2$, o que termina a prova. $\square$

O teorema que acabamos de provar, permite mostrar que quaisquer dois conjuntos densos enumeráveis em $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ são homeomorfos e este homeomorfismo pode ser escolhido como segue:

Teorema 1.3. *Sejam A e B dois conjuntos densos e enumeráveis em $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Então existe um homeomorfismo $f : \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, tal que $f[A] = B$.*

Dem: Sejam A e B como no teorema. Logo os conjuntos A, B e $\mathbb{Q}$ são densos e enumeráveis em $\mathbb{R}$. Então pelo teorema anterior temos que existe um homeomorfismo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g[A] = B$ e $g[\mathbb{Q}] = \mathbb{Q}$. Agora se definimos $f = g \restriction_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}: \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ temos um homeomorfismo tal que $f[A] = B$.

$\square$

Agora vamos estudar espaços homeomorfos ao subespaço $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. O teorema seguinte vai servir para encontrar condições necessárias e suficientes para saber quando um espaço topológico é homeomorfo a este subespaço. Vejamos:

Teorema 1.4. *Sejam (X, d) e (Y, d') dois espaços métricos completos com $X \neq \phi \neq Y$ tais que:*

1. *(X, τ_d) e $(Y, \tau_{d'})$ são 0-dimensionais e*
2. *(X, τ_d) e $(Y, \tau_{d'})$ são de Lindelöf (ou equivalentemente que têm bases enumeráveis de abertos) e não contém compactos com interior não vazio.*

Então (X, τ_d) e $(Y, \tau_{d'})$ são homeomorfos.

Dem: Para fazer a demonstração precisamos do seguinte lema:

Lema 1.5. *Nas condições do Teorema 1.4, se $\phi \neq Z \subseteq X$ é aberto-fechado em X, então para cada $\varepsilon > 0$ existe $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$, recobrimento aberto-fechado infinito de Z, tal que $U_i \cap U_j = \phi$ se $i \neq j$ e $diam(U_i) \leq \varepsilon$ $\forall i \in \mathbb{N}$.*

Demostração do lema: Para cada $x \in Z$ consideremos $S_{\delta_x}(x)$, (com $\delta_x < \varepsilon/2$) tal que $\{S_{\delta_x}(x) \cap Z : x \in Z\}$ seja um recobrimento aberto de Z que não tem subrecobrimento finito (podemos pois Z não é compacto já que não tem interior vazio). Como X é 0-dimensional, para cada $x \in Z$ existe U_x aberto-fechado tal que $x \in U_x \subseteq S_{\delta_x}(x) \cap Z$. Logo $\{U_x : x \in Z\}$ é um recobrimento aberto-fechado de Z. Como X

é de Lindelöf e Z é fechado (portanto de Lindelöf) existem $x_0, x_1, ..., x_n, ... \in Z$ tais que $Z = \bigcup\{U_{x_i} : i \in \mathbb{N}\}$. Assim $\{U_{x_i} : i \in \mathbb{N}\}$ é um recobrimento aberto-fechado enumerável de Z, infinito.

Agora definimos, o conjunto $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ do seguinte modo:

$$
\begin{aligned}
U_0 &= U_{x_0} \\
U_1 &= U_{x_1} \backslash U_{x_0} \\
U_2 &= U_{x_2} \backslash \bigsqcup_{i=0}^{1} U_{x_i} \\
&\vdots \\
U_k &= U_{x_k} \backslash \bigsqcup_{i=0}^{k-1} U_{x_i} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Desta construção temos os seguintes fatos:

1. $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ é um recobrimento aberto-fechado de Z pois $\{U_{x_i} : i \in \mathbb{N}\}$ é um recobrimento aberto-fechado de Z.

2. $U_i \cap U_j = \phi$ se $i \neq j$

3. $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ é um recobrimento infinito e $U_i \neq \phi$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Podemos fazer isso tirando se for necessário os $U_i = \phi$ e ainda assim o recobrimento vai ser infinito, já que pela nossa construção a cobertura não tem sub-recobrimento finito.

4. $U_i \subseteq U_{x_i} \subseteq S_{\delta_{x_i}}(x_i)$ $\forall i \in \mathbb{N}$, então $diam(U_i) \leq \varepsilon$, pois $\delta_{x_i} < \varepsilon$.

$\square$

Vejamos que (X, τ_d) e $(Y, \tau_{d'})$ são homeomorfos.
Aplicando o Lema anterior para $Z = X$ (pois X é aberto-fechado em X) e $\varepsilon = 1$ temos que existe $\varphi_1 := \{U_0, U_1, ..., U_n, ...\}$ recobrimento aberto-fechado infinito de X, cujos elementos são não vazios e dois a dois disjuntos com $diam(U_i) \leq 1$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

Indutivamente, para cada $k > 1$ e cada $s \in \mathbb{N}^{\{1,2,...,k\}}$ tomamos conjuntos $U_{s(1),s(2),...,s(k)}$ abertos-fechados infinitos de X, dois a dois disjuntos com $diam(U_{s(1),s(2),...,s(k)}) \leq 1/k$

tais que:

$$U_{s(1),s(2),\ldots,s(k)} = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} U_{s(1),s(2),\ldots,s(k),i}$$

Notemos que para cada $x \in X$, existe um único $s_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_{s_1}$. Fixado s_1 também existe um único $s_2 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_{s_1,s_2}$, continuando assim, encontramos uma única sequência:

$$\begin{aligned} s : \mathbb{N}^+ &\longrightarrow \mathbb{N} \\ i &\longmapsto s_i \end{aligned}$$

tal que $x \in U_{s(1),\ldots,s(q)}$ $\forall q \in \mathbb{N}^+$. Além disso, $\{x\} = \bigcap_{q=1}^{\infty} U_{s(1),\ldots,s(q)}$. De fato, claramente $\{x\} \subseteq \bigcap_{q=1}^{n} U_{s(1),\ldots,s(q)}$ $\forall n \in \mathbb{N}^+$, então $\{x\} \subseteq \bigcap_{q=1}^{\infty} U_{s(1),\ldots,s(q)}$. Se existirem w, z em $\bigcap_{q=1}^{\infty} U_{s(1),\ldots,s(q)}$ com $w \neq z$, então existirá $l \in \mathbb{N}^+$ tal que $0 < 1/l < d(w,z)$. Mas, $w, z \in U_{s(1),\ldots,s(l)}$ e $diam(U_{s(1),\ldots,s(l)}) \leq 1/l$ logo $d(w,z) \leq 1/l < d(w,z)$ o que é absurdo, portanto $w = z$. Concluímos que $\bigcap_{q=1}^{\infty} U_{s(1),\ldots,s(q)}$ não pode ter mais de um elemento. Então $\{x\} = \bigcap_{q=1}^{\infty} U_{s(1),\ldots,s(q)}$.

Podemos afirmar que para cada $s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}^+}$, existe um único $x \in X$ tal que $\{x\} = \bigcap_{q=1}^{\infty} U_{s(1),\ldots,s(q)}$. De fato,

1. Claramente se existir x ele é único.

2. Para cada $n \in \mathbb{N}^+$ tomemos $x_n \in U_{s(1),\ldots,s(n)}$. Temos assim uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ que é de Cauchy. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}^+$ tal que $0 < 1/n_0 < \varepsilon$; se $n \geq m \geq n_0$, então $x_n, x_m \in U_{s(1),\ldots,s(m)} \subseteq U_{s(1),\ldots,s(n_0)}$ o que implica $d(x_n, x_m) \leq 1/n_0 < \varepsilon$ e assim $(x_n)_n$ será de Cauchy.
   Como X é completo, sabemos que existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$ o que garante que $\{x\} = \bigcap_{q=1}^{\infty} U_{s(1),\ldots,s(q)}$, pois tomando $r \in \mathbb{N}$ temos que $\forall n \in \mathbb{N}^+$ com $n \geq r$ $x_n \in U_{s(1),\ldots,s(r)}$ (que é fechado) logo $x \in U_{s(1),\ldots,s(r)}$.

Procedemos agora de forma análoga no espaço Y para determinar os conjuntos $V_{s(1),s(2),\ldots,s(k)}$, (como os conjuntos $U_{s(1),s(2),\ldots,s(k)}$ em X). É claro que valem resultados semelhantes aos acima, ligeiramente modificados para o espaço Y.

Definamos agora uma função f do seguinte modo:

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

$$\text{onde} \quad \{x\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_{s(1),\ldots,s(i)} \Longleftrightarrow \{f(x)\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} V_{s(1),\ldots,s(i)}$$

A função f está bem definida como consequência das afirmações anteriores. Essa função f vai ser o homeomorfismo entre os espaços X e Y. Vejamos que ela é de fato um homeomorfismo:

f **é injetora:** É imediato.

f **é sobrejetora:** Tomemos $y \in Y$, então existe uma única $s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}^+}$ tal que $\{y\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} V_{s(1),\ldots,s(i)}$, assim se $\{x\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_{y_1,\ldots,y_i}$ temos que $f(x) = y$.

Continuidade da f**:** Tomemos $W \subseteq Y$ aberto e mostremos que $f^{-1}[W]$ é aberto em X. Seja $z \in f^{-1}[W]$ qualquer, então existe $w \in W$ tal que $f(z) = w$, onde $\{w\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} V_{w_1,\ldots,w_i}$. Agora, como W é aberto em Y existe $\varepsilon > 0$ tal que $S_\varepsilon(w) \subseteq W$. Tomemos $l \in \mathbb{N}^+$ suficientemente grande tal que $V_{w_1,\ldots,w_l} \subseteq S_\varepsilon(w)$. Afirmamos que $U_{w_1,\ldots,w_l} \subseteq f^{-1}[W]$. De fato, se $t \in U_{w_1,\ldots,w_l}$ então $f(t) \in V_{w_1,\ldots,w_l} \subseteq W$ logo $t \in f^{-1}[W]$. Assim mostramos que $z \in U_{w_1,\ldots,w_l} \subseteq f^{-1}[W]$. Portanto, $f^{-1}[W]$ é aberto.

Concluímos que a função f é contínua.

f **é aberta:** Tomemos $Z \subseteq X$ aberto e mostremos que $f[Z]$ é aberto em Y. Seja $w \in f[Z]$ logo existe $w \in Z$ tal que $w = f(z)$; suponhamos que $\{z\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_{z_1,\ldots,z_i}$. Como Z é aberto em X existe $\varepsilon > 0$ tal que $S_\varepsilon(z) \subseteq Z$. Tomemos $l \in N^+$ suficientemente grande tal que $V_{z_1,\ldots,z_l} \subseteq S_{\varepsilon(z)}$. Afirmamos que $V_{z_1,\ldots,z_l} \subseteq f[Z]$, de fato, se $t \in V_{z_1,\ldots,z_l}$ então $f^{-1}(t) \in U_{z_1,\ldots,z_l} \subseteq S_\varepsilon(z) \subseteq Z$ logo $t \in f[z]$. Assim $w \in V_{z_1,\ldots,z_l} \subseteq f[Z]$. Portanto

$f[Z]$ é aberto.

Concluímos que f é uma aplicação aberta.

Isto mostra que $f : X \longrightarrow Y$ é um homeomorfismo de espaços topológicos.

$\square$

Como dissemos anteriormente, deste teorema destacaremos os seguintes corolários importantes:

Corolário 1.6 (Baire). *O subespaço $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ da reta real e o espaço topológico ω^ω com a topologia produto (ω com a topologia discreta) são homeomorfos.*

Corolário 1.7 (Alexandroff e Urysohn). *Todo espaço não vazio completamente metrizável, separável e 0-dimensional que não contém subconjuntos compactos abertos não vazios é homeomorfo a $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.*

Dem: Seja X um espaço com as condições do corolário, então é claro que X é completamente metrizável, 0-dimensional e de Lindelöf. Só falta ver que ele não tem compactos com interior não vazio para que, pelo Teorema 1.4, X seja homeomorfo ao espaço $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Mas essa condição (nas condições do teorema) é equivalente a não ter compactos abertos não vazios. Com efeito, se vale a primeira condição, tomemos F compacto aberto em X, então $F = int(F) \neq \phi$. Reciprocamente, se vale a segunda condição, tomemos F compacto em X, se $int(F) \neq \phi$, então existe B aberto-fechado em X não vazio tal que $B \subseteq F$, logo B é um compacto aberto em X não vazio, o que é absurdo. Assim o corolário está demonstrado. $\square$

Corolário 1.8. *Se X é um espaço topológico de Lindelöf, completamente metrizável e 0-dimensional, então X é homeomorfo a um subespaço de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.*

Dem: Só aplicar o Teorema 1.4 para os espaços $(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \times X$ (que tomado assim não contém compactos com interior não vazio) e $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. $\square$

No último corolário temos um resultado que nos permite dizer quando um espaço metrizável é homeomorfo a um subespaço de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, mas esse corolário tem condições que não são necessárias para que exista tal homeomorfismo, como por exemplo a condição dele ser completo. Daí o interesse no seguinte teorema:

Teorema 1.9. *Se X é um espaço metrizável, separável tal que $|X| < \mathfrak{c}$, então X é homeomorfo a um subespaço de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.*

Dem: Vejamos que X admite uma base de abertos-fechados em X. Tomemos $x \in X$ e U aberto qualquer em X contendo o ponto x. Como X é $T_{3\frac{1}{2}}$ temos que existe uma função $f : X \longrightarrow [0,1]$ contínua tal que $f(x) = 0$ e $f(y) = 1$ para cada $y \notin U$. Como $|[0, \frac{1}{2}[| = \mathfrak{c}$ e $\left|f^{-1}\left[[0,\frac{1}{2}[\right]\right| < \mathfrak{c}$ temos que existe $y \in [0, \frac{1}{2}[$ tal que y não pertence à imagem de f. Logo existe $W_{U,x} = f^{-1}\,[\,[0,y]\,] = f^{-1}\,[\,[0,y[\,]$ (ou seja $W_{U,x}$ é aberto-fechado em X) tal que $x \in W_{U,x} \subseteq U$. Portanto o conjunto $\{W_{U,x} : U$ é aberto em X e $x \in X\}$ é uma base de abertos-fechados em X.

Consideremos $B = \{B_i : i \in \mathbb{N}\}$ uma base de abertos-fechados de X. Para cada $i \in \mathbb{N}$ definamos:

$$\begin{aligned} f_i : X &\longrightarrow \{0,1\} \\ x &\longmapsto f_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in B_i \\ 1 & \text{se } x \notin B_i \end{cases} \end{aligned}$$

Assim definamos a seguinte função:

$$\begin{aligned} \Phi : X &\longrightarrow \{0,1\}^\omega \\ x &\longmapsto \Phi(x) = (f_i(x))_{i\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

Como $\{0,1\}^\omega$ é subespaço de ω^ω, se nós mostrarmos que Φ é um homeomorfismo sobre a sua imagem, acabaremos a demonstração do teorema.

Injetividade da Φ: Sejam x e y elementos diferentes de X. Logo como X é T_1, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_l$ e $y \notin B_l$. Assim $\Phi(x) = (f_i(x))_{i\in\mathbb{N}} \neq (f_i(y))_{i\in\mathbb{N}} = \Phi(y)$ (pois $f_l(x) = 0$ e $f_l(y) = 1$). Portanto Φ é injetora.

Φ é contínua: Seja $\bigcap\{\prod_i^{-1}[V_i] : i = 1, 2, ..., n\}$ um aberto básico de $\{0,1\}^\omega$ com $\phi \neq V_i \subsetneqq \{0,1\}$. Queremos mostrar que $\Phi^{-1}[\bigcap\{\prod_i^{-1}[V_i] : i = 1, 2, ..., n\}]$ é aberto em X. De fato, seja $x \in \Phi^{-1}[\bigcap\{\prod_i^{-1}[V_i] : i = 1, 2, ..., n\}]$, então $f_i(x) = (\prod_i \circ\Phi)(x) \in V_i$ $\forall i = 1, 2, ..., n$. Seja $W = \bigcap_{i=1}^n\{W_i : W_i = B_i$ se $f_i(x) = 0$ ou $W_i = X\backslash B_i$ se $f_i(x) = 1\}$. Assim W é um aberto em X tal que $x \in W \subseteq \Phi^{-1}[\bigcap\{\prod_i^{-1}[V_i] : i = 1, 2, ..., n\}]$. Portanto Φ é contínua.

Φ é aberta sobre a sua imagem: Seja $B_k \in B$, queremos mostrar que $\Phi[B_k]$ é aberto em $\{0,1\}^\omega \cap \Phi[X]$. Com efeito, seja $y \in \Phi[B_k]$, então existe $x \in B_k$ tal que $\Phi(x) = y$. Tomemos $W = \prod_k^{-1}[\{0\}]$, aberto em $\{0,1\}^\omega$, assim $y \in W \cap \Phi[X] \subseteq \Phi[B_k]$, provando-se que Φ é aberta sobre a sua imagem.

Dos fatos antes mencionados temos que Φ é um homeomorfismo sobre a sua imagem e assim o teorema é demonstrado. $\square$

Vimos que um espaço topológico satisfazendo certas condições pode ser visto como um subespaço de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Uma pergunta natural que surge depois deste resultado é: quais são as condições necessárias para um espaço topológico ser um subespaço denso em $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$? Vejamos alguns lemas que ajudarão a dar uma resposta para esse problema:

Lema 1.10. *Seja Y um subespaço denso de um espaço Hausdorff X. Se um subconjunto compacto de Y é aberto em Y, então ele também é aberto em X.*

Dem: Seja A um compacto aberto em Y, e seja B um aberto em X tal que $A = B \cap Y$. queremos mostrar que $B = A$.

Claramente, $A \subseteq B$. Por outro lado, se $b \in B$ temos que para cada $U \subseteq X$, vizinhança aberta de b, temos que $B \cap U$ é também uma vizinhança aberta de b em X. Então $U \cap A = B \cap U \cap Y \neq \phi$; ou seja $b \in cl_X(A) = A$ (pois A é compacto em X), logo $B \subseteq A$.

$\square$

Lema 1.11. *Sejam Y um espaço metrizável, 0-dimensional e separável, que não contém subconjuntos compactos abertos não vazios e X um espaço completamente metrizável contendo Y. Então existe um conjunto W, homeomorfo a $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, tal que:*

$$Y \subseteq W \subseteq cl(Y) \subseteq X$$

Dem: Sem perda de generalidade, como $cl(Y)$ é completamente métrizável, podemos supor Y denso em X. Assim X é também separável.

Seja M um conjunto enumerável tal que $M \subseteq X \backslash Y \subseteq cl(M)$ e tomemos

$$X_1 = X \backslash M$$

De X_1 podemos dizer que:

1. É G_δ, pois $X_1 = \bigcap \{X \backslash \{m\} : m \in M\}$

2. É denso em X, pois $Y \subseteq X_1$

3. Não contém subconjuntos compactos abertos não vazios. De fato, se existir $B \subseteq X_1$ compacto, aberto e não vazio, então como $cl(X_1) = X$, pelo Lema 1.10 temos que B é aberto em X. Mas pelas hipóteses sobre Y no lema, temos que $B \nsubseteq Y$ logo $B \cap (X \backslash Y) \neq \phi$ portanto $B \cap M \neq \phi$, que é absurdo.

Assim, (substituindo X por X_1, se for necessário) vemos que X não contém compactos abertos não vazios, então, pelo Teorema de Tumarkin (Teorema 0.12), existe W, G_δ contido em X, tal que $Y \subseteq W \subseteq X$ e $IndY = IndW$ (então, como $IndY = 0$,

pelo Teorema 0.6 W é 0-dimensional).
Como W é completamente metrizável (pois é G_δ), separável, 0-dimensional e (por um raciocínio análogo a à demonstração para X_1 em 3.) W não contém compactos abertos não vazios, temos que W é homeomorfo a $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. $\square$

Dos lemas apresentados anteriormente, podemos deduzir o seguinte teorema que da uma resposta ao problema proposto anteriormente.

Teorema 1.12. *Todo espaço metrizável, separável, 0-dimensional, que não contém compactos abertos não vazios pode ser densamente imerso em* $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Dem: Basta tomar X como completamento de Y no Lema 1.11. $\square$

Em resultados anteriores vimos algumas condições que um espaço topológico deve ter para ser homeomorfo a um subespaço de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Agora, nós daremos mais alguns resultados onde damos condições para que um espaço topológico contenha subespaços homeomorfos a $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ou homeomorfos a subespaços (como por exemplo $\{0,1\}^\omega$) de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Teorema 1.13. *Todo espaço completamente metrizável e denso em si mesmo, contém o espaço de Cantor.*

Dem: Seja (X,τ) um espaço topológico com as condições do teorema e seja ρ uma métrica tal que (X,ρ) seja completo e a topologia de (X,ρ) seja a topologia τ. Para cada sequência $(i_0,i_1,...,i_k)$ de 0's e 1's, definamos indutivamente conjuntos não vazios e abertos $V_{i_0,i_1,...,i_k}\subseteq X$ com diâmetro menor que $1/(k+1)$ tais que:

1. $\overline{V}_{i_0,i_1,...,i_k,0}\cap\overline{V}_{i_0,i_1,...,i_k,1}=\phi$.
2. $\overline{V}_{i_0,i_1,...,i_k,i}\subseteq V_{i_0,i_1,...,i_k}$ para cada $i=0,1$.

Definamos

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & \{0,1\}^\omega & \longrightarrow & X\\ & s & \longmapsto & \varphi(s)\end{array}$$

onde $\{\varphi(s)\} = \bigcap\{V_{s(0),s(1),\ldots,s(k)} : k \in \mathbb{N}\}$.

A funcão φ está bem definida; isso se verifica de modo análogo a como mostramos que a função f no teorema 1.4 estava bem definida.

Vamos mostrar que φ é um homeomorfismo sobre a sua imagem para mostrar o teorema.

1. Claramente φ é **injetora.**

2. Vejamos que φ é **contínua**, seja $W \subseteq X$ aberto, queremos mostrar que $\varphi^{-1}[W]$ é aberto em $\{0,1\}^\omega$. Se $s \in \varphi^{-1}[W]$ então $\varphi(s) \in W$ logo tomemos $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\varphi(s) \in V_{s(0),s(1),\ldots,s(k)} \subseteq W$ e consideremos $Z = \{s(0)\} \times \{s(1)\} \times \cdots \times \{s(k)\} \times \{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\}$ aberto em $\{0,1\}^\omega$. Mostremos que $s \in Z \subseteq \varphi^{-1}[W]$. Com efeito, se $z \in Z$ então $s(i) = z(i)$ para todo $o \leq i \leq k$ logo $\varphi(z) \in V_{s(0),s(1),\ldots,s(k)} \subseteq W$, ou seja $z \in \varphi^{-1}[W]$. Segue-se que $\varphi^{-1}[W]$ é aberto em $\{0,1\}^\omega$.

3. φ é **aberta**, seja $Z = \bigcap \left\{\prod_i^{-1}[W_i] : 0 \leq i \leq n\right\}$ um aberto básico de $\{0,1\}^\omega$, onde $W_i \subsetneqq \{0,1\}$. Queremos mostrar que $\varphi[Z]$ é aberto em $X \cap \varphi[\{0,1\}^\omega]$. De fato, seja $y \in \varphi[Z]$ então existe $z \in Z$ tal que $y = \varphi(z)$ onde $\{\varphi(z)\} = \bigcap\{V_{z(0),z(1),\ldots,z(k)} : k \in \mathbb{N}\}$; se nós mostrarmos que $V_{z(0),z(1),\ldots,z(n)} \cap \varphi[\{0,1\}^\omega] \subseteq \varphi[Z]$ mostraremos que $\varphi[Z]$ é aberto em $X \cap \varphi[\{0,1\}^\omega]$. Com efeito, se $w \in V_{z(0),z(1),\ldots,z(n)} \cap \varphi[\{0,1\}^\omega]$ então $w \in V_{z(0),z(1),\ldots,z(n)}$ e $w = \varphi(v)$ para algum $v \in \{0,1\}^\omega$, logo $v(k) = z(k)$ para cada $0 \leq k \leq n$, portanto $v \in Z$.

Concluímos que o espaço topológico X contém um subespaço homeomorfo ao espaço de Cantor. $\square$

Teorema 1.14. *Se X é um espaço topológico completamente metrizável de Lindelöf, sem pontos isolados, então existe um subespaço Y denso em X tal que Y é homeomorfo a $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.*

Dem: Do teorema da metrização (Teorema 0.7) podemos considerar $\mathcal{B}$ uma base de abertos σ-discreta de X. Suponhamos

$$\mathcal{B} = \bigcup\{\mathcal{B}_n : n \in \mathbb{N}\}$$

onde $\mathcal{B}_n$ é uma família discreta de abertos para cada $n \in \mathbb{N}$. Como X é de Lindelöf, podemos supor cada $\mathcal{B}_n$ enumerável. Assim definimos para cada $n \in \mathbb{N}$, conjuntos

$$A_n = \bigcup\{Fr(\Omega) : \Omega \in \mathcal{B}_n\}$$

Temos que cada A_n:

1. É fechado, pois $\{Fr(\Omega) : \Omega \in \mathcal{B}_n\}$ é uma família localmente finita e sabemos que união de uma família de fechados localmente finita é fechada.
2. Tem interior vazio, pois para cada $\Omega \in \mathcal{B}_n$, $Fr(\Omega)$ é fechado com interior vazio em X logo $\bigcup\{Fr(\Omega) : \Omega \in \mathcal{B}_n\}$ tem interior vazio.

Seja D um denso enumerável em X e consideremos

$$Y = X \backslash \left(\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \cup D\right)$$

Notemos que Y é denso em X, pois dado que X é um espaço de Baire, o conjunto $Y = X \backslash (\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\})$ é denso em X. Agora, como todos os abertos não vazios de X tem cardinalidade não enumerável e D é enumerável, para cada $U \subseteq X$ aberto $B \cap Y \neq \phi$. Portanto Y é denso em X.

Vamos mostrar que Y é homeomorfo a $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$:

1. Y é **completamente metrizável**;
   como $Y = X \backslash (\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \cup D) = \bigcap\{X \backslash A_n : n \in \mathbb{N}\} \cap \bigcap\{X \backslash \{d\} : d \in D\}$ temos que Y é um G_δ, portanto completamente metrizável.
2. Y é de Lindelöf, pois X é hereditariamente separável.

3. Y é 0-dimensional, pois $B\restriction_Y = \{V \cap Y : V \in B\}$ é uma base de abertos-fechados de Y.

4. Y **não tem compactos abertos não vazios**. De fato, suponha F compacto e aberto em Y vamos mostrar que $F = \phi$. Se $F \neq \phi$, então tomemos $W \subseteq X$ aberto não vazio, tal que $F = W \cap Y$. Vejamos que $F = W$, claramente $F \subseteq W$; por outro lado, se $w \in W$, e tomando $U \subseteq X$ vizinhança qualquer aberta de w, ocorre que $W \cap U$ é também vizinhança aberta de w em X, mas como Y é denso em X, $F \cap U = W \cap U \cap Y \neq \phi$ então $w \in cl_Y(F) = F$.
   Assim existe $d \in D$ tal que $d \in F$, que é absurdo. Portanto $F = \phi$.

Destes fatos, pelo corolário 1.7, concluímos que Y é homeomorfo a $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

□

Até agora neste capítulo vimos algumas propriedades que caracterizam o espaço topológico $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Mas nós também trabalhamos com o espaço de Cantor $\{0,1\}^\omega$ em alguns dos resultados dados; a seguir vamos estudar um pouco esse espaço.

Teorema 1.15. *Todo espaço topológico X metrizável e compacto é imagem contínua do espaço de Cantor.*

Dem: Seja ρ uma métrica em X compatível com a topologia do espaço. Existem $n_0 \geq 1$ ($s_0 = 2^{n_0}$) e uma família de fechados (compactos) não vazios $\{F_i : i \in \{0,1\}^{n_0}\}$ tais que $diam(F_i) < 1$ para todo $i \in \{0,1\}^{n_0}$ e

$$X = \bigcup\{F_i : i \in \{0,1\}^{n_0}\}.$$

(Os F_i's podem ser repetidos.)

Agora, existe $n_1 \geq 1$ tal que cada compacto F_i anterior, com $i \in \{0,1\}^{n_0}$, se escreve como união de 2^{n_1} fechados não vazios com diâmetro menor que $1/2$; ou seja

$$F_i = \bigcup\{F_{i,j} : j \in \{0,1\}^{\{n_0, n_0+1, \ldots, n_0+n_1-1\}}\}$$

onde cada $F_{i,j}$ é um fechados não vazio em X, com diâmetro menor que $\frac{1}{2}$ para cada $j \in \{0,1\}^{\{n_0,n_0+1,\dots,n_0+n_1-1\}}$.

Concluímos que

$$X = \bigcup \{F_k : k \in \{0,1\}^{n_0+n_1}\}$$

onde F_k é um compacto não vazio com $diam(F_j) < \frac{1}{2}$ para cada $k \in \{0,1\}^{n_0+n_1}$. Continuando assim por indução, para cada $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, representamos X como união de $s_m = 2^{n_0+\cdots+n_m}$ conjuntos não vazios $F_{i_0,\dots,i_m}$ compactos em X, com diâmetro menor que $\frac{1}{2^m}$, tais que $F_{i_0,\dots,i_{m-1}} = \bigcup \left\{F_{i_0,\dots,i_{m-1},j} : j \in \{0,1\}^{\{N(m),N(m)+1,\dots,N(m)+n_m-1\}}\right\}$, onde $N(m) = n_0+n_1+\cdots+n_{m-1}$ para todo $m > 0$; ou seja $X = \bigcup \{F_j : j \in \{0,1\}^{n_0+n_1+\cdots+n_m}\}$ onde F_j é compacto não vazio em X com $diam(F_j) < \frac{1}{2^m}$ para cada $j \in \{0,1\}^{n_0+n_1+\cdots+n_m}$.

Denotemos por $N_k = \{0,1,...,N(k+1)-1\}$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e definamos:

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \{0,1\}^\omega & \longrightarrow & X \\ & j & \longmapsto & \psi(j) \end{array}$$

onde $\{\psi(j)\} = \bigcap \left\{F_{j\restriction_{N_k}} : k \in \mathbb{N}\right\}$.

Observe que ψ está bem definida pois a sequência de compactos não vazios $F_{j\restriction_{N_0}} \supseteq F_{j\restriction_{N_1}} \supseteq \cdots \supseteq F_{j\restriction_{N_k}} \supseteq \cdots$ dentro do compacto X tem intersecção não vazia e pela escolha dos diâmetros temos que a intersecção é unitária.

Claramente ψ é uma aplicação sobrejetora.

Vejamos que ψ é contínua. Seja $\varepsilon > 0$ e consideremos $S_\varepsilon(x)$ onde $x \in X$ é um ponto qualquer. Mostremos que $\psi^{-1}[S_\varepsilon(x)]$ é aberto em $\{0,1\}^\omega$. Com efeito,
seja $z \in \psi^{-1}[S_\varepsilon(x)]$, então $\psi(z) \in S_\varepsilon(x)$ onde $\{\psi(z)\} = \bigcap \left\{F_{z\restriction_{N_k}} : k \in \mathbb{N}\right\}$. Tomemos $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $F_{z\restriction_{N_m}} \subseteq S_\varepsilon(x)$. Logo se consideramos $V = \{z(0)\} \times \{z(1)\} \times \cdots \times \{z(n_0+\cdots+n_m-1)\} \times \{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\}$, então claramente $z \in V \subseteq \psi^{-1}[S_\varepsilon(x)]$. Portanto ψ é contínua. $\square$

O próximo teorema nos vai dar uma caracterização do espaço de Cantor:

Teorema 1.16 (Alexandroff). *Um espaço metrizável não vazio, compacto, 0-dimensional, sem pontos isolados é homeomorfo ao espaço de Cantor.*

Dem: Suponhamos que na demonstração do teorema anterior tomarmos o conjunto

$$\left\{F_j : j \in \{0,1\}^{n_0+n_1+\cdots+n_k}, k \in \mathbb{N}\right\}$$

de tal modo que, para cada $k \in \mathbb{N}$, se tomamos $i, j \in \{0,1\}^{n_0+n_1+\cdots+n_k}$ diferentes, então $F_i \cap F_j = \phi$. Então logo para cada ponto $y \in X$ existiria uma única sequência $s \in \{0,1\}^\omega$ tal que $F_{s\restriction_{N_0}} \supseteq F_{s\restriction_{N_1}} \supseteq \cdots \supseteq F_{s\restriction_{N_k}} \supseteq \cdots$ seja uma sequência de compactos em X contendo y e viceversa; para cada sequência $s \in \{0,1\}^\omega$ vai existir um único ponto $\psi(s) \in X$. Deste modo a aplicação ψ é injetora e portanto um homeomorfismo (pois ψ pelo teorema anterior é contínua, sobrejetora entre espaços compactos).

Observação: Se X é um espaço topológico com as condições do Teorema 1.16, então para todo compacto aberto-fechado não vazio A de X, existem compactos A_1 e A_2 abertos-fechados em X não vazios e disjuntos tais que $A = A_1 \cup A_2$.
De fato, Seja ρ uma métrica compatível com a topologia de X e tomemos $x \in A$, logo como X não contém pontos isolados, existe $\varepsilon > 0$ tal que $S_\varepsilon(x) \subsetneqq A$, mas como X é 0-dimensional, existe $A_1 \subseteq X$ aberto-fechado tal que $x \in A_1 \subseteq S_\varepsilon(x)$. Temos portanto que $A = A_1 \cup (A \backslash A_1)$ onde A_1 e $A \backslash A_1$ são dois conjuntos com as condições que queríamos.

Da observação acima, pelo fato de X ser um espaço metrizável, compacto, 0-dimensional sem pontos isolados, para cada $\varepsilon > 0$ podemos escrever X como união de compactos (abertos-fechados) não vazios, dois a dois disjuntos e de diâmetro menor que ε, de tal modo que o número de elementos de tal união (sem repetições) seja uma potência de 2.
Isto termina a demonstração. $\square$

Deste teorema, junto com os Teoremas 1.12 e 1.1, podemos obter uma caracterização do subespaço dos números racionais.

Corolário 1.17. *Todo espaço não vazio metrizável, enumerável, denso em si mesmo é homeomorfo ao espaço dos números racionais.*

Dem: Seja X um espaço nas condições do corolário. Então:

1. X **é um espaço** 0**-dimensional**. De fato, sejam $x \in X$ e $U \subseteq X$ vizinhança aberta de x. Como X é $T_{3\frac{1}{2}}$, existe $f_{U,x} : X \longrightarrow [0,1]$ contínua, tal que $f_{U,x}(x) = 0$ e $f_{U,x}(y) = 1$ para cada $y \in X \backslash U$. Agora, dado que U é enumerável, então existe $c \in [0,1]$ tal que $c \notin im(f_{U,x})$. Tomando $W_{(U,x)} = f_{U,x}^{-1}[\,[0,c]\,] = f_{U,x}^{-1}[\,[0,c[\,]$, temos um aberto-fechado em X tal que $x \in W_{(U,x)} \subseteq U$. Portanto o conjunto $\{W_{(U,x)} : U$ é aberto em X contendo o ponto x de $X\ \}$ é uma base de abertos-fechados de X.

2. X **não tem compactos abertos não vazios**; pois se existir $U \subseteq X$ compacto aberto não vazio, então U seria um espaço metrizável, compacto, 0-dimensional não vazio sem pontos isolados, logo pelo Teorema 1.16, temos que U é homeomorfo ao espaço $\{0,1\}^{\omega}$ então $|U| = 2^{\omega}$ que é absurdo.

3. X **é metrizável e separável**

Logo temos X nas condições do Teorema 1.12 e portanto existe $W \subseteq \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ denso tal que X é homeomorfo a W. Logo W é denso e enumerável em $\mathbb{R}$ e pelo Teorema 1.1 ocorre que W é homeomorfo a $\mathbb{Q}$.

□

Na introdução da dissertação, se mencionou que L. B. Lawrence em [10, prop. 1] diz o seguinte:

"Se X e Y são espaços topológicos e Y é completamente metrizável, separável e não σ-compacto, então $X \times Y$ é normal se e só se $X \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ é normal".

Logo é interessante ver que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ não é σ-compacto. O Teorema 1.18 abaixo envolve um pequeno cardinal e justamente mostra isso.

Vamos introduzir um cardinal topológico invariante e calcular o seu valor para $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Consideremos a função cardinal "**compact covering number**" kc dada por

$$kc(X) = \text{cardinalidade mínima de uma cobertura do espaço topológico } X$$
$$\text{por subconjuntos compactos de } X.$$

Uma pergunta natural que podemos fazer é qual é o valor para $kc(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$. Observemos que $\{\{x\} : x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\}$ é uma cobertura formada por $\mathfrak{c}$ compactos de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, portanto $kc(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \leq \mathfrak{c}$. Por outro lado, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ é um espaço de Baire e como sabemos que todo compacto de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ é fechado com interior vazio (destacado por Hechler, ver [8]), temos que se $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ fosse união enumerável de compactos, então ele teria interior vazio, o que é absurdo. Assim $\omega < kc(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$. Portanto

$$\omega < kc(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \leq \mathfrak{c}.$$

O seguinte teorema dá uma resposta mais precisa para esse problema:

Teorema 1.18. $kc(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = \mathfrak{d}$

Dem: Lembremos que:

$\mathfrak{d} = min\{|D| : D \subseteq \omega^\omega \text{ é uma família dominante em } (\omega^\omega, \leq_*)\}$

$\mathfrak{d}_1 = min\{|D| : D \subseteq \omega^\omega \text{ é uma família cofinal em } (\omega^\omega, \leq)\}$

onde, para $f, g \in \omega^\omega$, $f \leq g$ quer dizer que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leq g(n)$ e $f \leq_* g$ quere dizer que o conjunto $\{n \in \mathbb{N} : g(n) < f(n)\}$ é finito.

Nós usaremos para mostrar o teorema o fato de que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ é homeomorfo a ω^ω e que $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_1$. Assim é suficiente mostrar que $kc(\omega^\omega) = \mathfrak{d}_1$.

Vejamos que $\mathfrak{d}_1 \leq kc(\omega^\omega)$: Seja $\mathcal{V}$ um recobrimento por compactos de ω^ω tal que $|\mathcal{V}| = kc(\omega^\omega)$. Para cada $K \in \mathcal{V}$ e $n < \omega$ temos que $\prod_n[K]$ (projeção sobre a n-ésima coordenada) é compacto em ω, logo é finito. Assim podemos definir para cada $K \in \mathcal{V}$ uma função $f_K \in {}^{\omega}\omega$ dada por $f_K(n) = max(\prod_n[K])$ para cada $n < \omega$. O conjunto $\{f_K : K \in \mathcal{V}\}$ é cofinal em $(\omega^\omega, \leq)$. Portanto temos que $\mathfrak{d}_1 \leq kc(\omega^\omega)$.

Vejamos que $kc(\omega^\omega) \leq \mathfrak{d}_1$: Seja $D \subset \omega^\omega$ cofinal em $(\omega^\omega, \leq)$ tal que $|D| = \mathfrak{d}_1$. Consideremos o conjunto $\{K_f : f \in D\}$, onde $K_f = \prod_{i<\omega}[0, f(i)]$ ($[0, f(i)]$ é o intervalo em $\mathbb{N}$). Claramente K_f é compacto em ω^ω, mostremos agora que esse conjunto é de fato um recobrimento de ω^ω. Seja $g \in \omega^\omega$, como D é cofinal em $(\omega^\omega, \leq)$ existe $f \in D$ tal que $g \leq f$. Assim para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que $0 \leq g(n) \leq f(n)$, então $g \in \prod_{i<\omega}[0, f(i)] = K_f$. Portanto $kc(\omega^\omega) \leq \mathfrak{d}_1$.

$\square$

Capítulo 2

Não normalidade de produtos de espaços normais por $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

Neste capítulo veremos alguns exemplos que servem para mostrar que nem sempre o produto de um espaço normal por um espaço metrizável e separável é normal. Na verdade o que vamos estudar é um problema um pouco mais específico. Vamos querer estudar espaços topológicos com algumas condições (por exemplo ser normal ou de Lindelöf) para os quais o produto com $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ não é normal.

Para um espaço topológico X que é regular e de Lindelöf, se sabe que o produto $X \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ é normal se e só se $X \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ é de Lindelöf. Tal afirmação será mostrada no Teorema 3.4 (página 85), mas ao longo deste capítulo vamos assumir tal asserção como verdadeira.

Na primeira seção vamos ver um exemplo exibido por E. Michael [11]. Ele descreveu um espaço topológico normal, conhecido como a reta de Michael, tal que o produto deste espaço com $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ não é normal.

Nas seções seguintes, veremos outros exemplos de espaços topológicos; usando por exemplo a Hipótese do Contínuo ou o Axioma de Martin (na seção 2) ou o conceito de concentração e a asserção $\mathfrak{b} = \omega_1$ (na seção 3), cujo produto com o subespaço dos números irracionais não é normal.

2.1 Reta de Michael

O teorema a seguir foi demonstrado em ZFC sem nenhum axioma adicional por Michael [11]. Ele mostra que o produto de espaços normais por espaços metrizáveis separáveis nem sempre é normal.

Definição 2.1. *A* **reta de Michael**, *denotada por* $\mathbb{M}$, *é o conjunto* $\mathbb{R}$ *com a topologia*

$$\Theta_{\mathbb{M}} = \{U \cup V : U \text{ é um aberto em } \mathbb{R} \text{ e } V \subseteq \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\}.$$

Teorema 2.1. *Existe um espaço topológico normal tal que o seu produto com* $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, *como subespaço de* $\mathbb{R}$, *não é normal.*

Dem: Seja Y o conjuntos dos irracionais como subespaço métrico de $\mathbb{R}$ e X o intervalo $[0,1]$ com a topologia

$$\Theta = \{U \cup V : U \quad \text{é aberto usual em } [0,1],\ V \subseteq [0,1]\backslash\mathbb{Q}\}\ .$$

Observação: O espaço X é o subespaço $[0,1]$ de $\mathbb{M}$. Quando nos referimos a $[0,1]$ o consideraremos como subespaço de $\mathbb{R}$.

Vejamos que X é hereditariamente paracompacto.

Antes de fazer a demostração notemos que se $H \subseteq X$ é um subespaço, então os abertos de H são da forma $W_1 \cup W_2$ onde $W_1 \subseteq H \cap Y$ e W_2 é aberto no subespaço H; pois se U é aberto em H, então $U = (W \cup V) \cap H$, onde $W \subseteq \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ e V é aberto em $[0,1]$. Logo $U = (W \cap H) \cup (V \cap H)$ onde $(W \cap H) \subseteq H \cap Y$ e $(V \cap H)$ é aberto em H (com a topologia de subespaço de $\mathbb{R}$). Assim para mostrar que X é hereditariamente paracompacto basta mostrar que X é paracompacto, pois a paracompacidade dos subespaços de X mostra-se de forma análoga.

Para mostrar que X é paracompacto, tomemos uma cobertura de X por abertos em Θ

$$\mathcal{V} = \{U_s \cup V_s : s \in S\}$$

onde $V_s \subseteq [0,1] \cap Y$ e U_s é aberto em $[0,1]$. Logo a cobertura aberta $\{U_s : s \in S\}$ do espaço $U = \bigcup\{U_s : s \in S\} \subseteq [0,1]$, tem um refinamento localmente finito $\{U_t^* : t \in T\}$ (pois $[0,1]$ é um espaço métrico, portanto hereditariamente paracompacto). Assim o conjunto

$$\{\{x\} : x \in X \backslash U\} \cup \{U_t^* : t \in T\}$$

é um refinamento aberto localmente finito da cobertura $\mathcal{V}$ de X, portanto X é paracompacto.

Como X é T_2, temos um espaço topológico normal X e um espaço métrico separável Y. Queremos mostrar que $X \times Y$ não é normal.

Sejam $A = (X \backslash Y) \times Y$ e $B = \{(y,y) : y \in [0,1] \backslash \mathbb{Q}\}$, conjuntos fechados e disjuntos de $X \times Y$. Vejamos que eles não podem ser separados por abertos disjuntos em $X \times Y$.

Afirmação: $[0,1] \backslash \mathbb{Q}$ não é F_σ em X.

De fato, suponhamos que

$$[0,1] \backslash \mathbb{Q} = \bigcup\{F_i : i \in \mathbb{N}\}$$

com F_i fechado em X. Logo $[0,1] \cap \mathbb{Q} = \bigcap\{X \backslash F_i : i \in \mathbb{N}\}$, e supondo $X \backslash F_i = (Z_i \cap X) \cup V_i$ (onde Z_i é aberto em $\mathbb{R}$ e $V_i \subseteq [0,1] \backslash \mathbb{Q}$) temos que $[0,1] \cap \mathbb{Q} = \bigcap\{Z_i \cap X : i \in \mathbb{N}\}$, ou seja $[0,1] \backslash \mathbb{Q} = \bigcup\{X \backslash Z_i : i \in \mathbb{N}\}$. Mas $X \backslash Z_i$ é um fechado com interior vazio em $[0,1] \backslash \mathbb{Q}$ para cada $i \in \mathbb{N}$, e como $[0,1] \backslash \mathbb{Q}$ é um espaço de Baire, temos que

$[0,1]\backslash\mathbb{Q} = \bigcup\{X\backslash Z_i : i \in \mathbb{N}\}$ tem interior vazio em $[0,1]\backslash\mathbb{Q}$, o que é absurdo. Portanto, $[0,1]\backslash\mathbb{Q}$ não é F_σ em X.

Seja W um aberto em $X \times Y$ contendo B. Para cada $n \in \mathbb{N}^+$ tomemos

$$U_n = \{x \in [0,1]\backslash\mathbb{Q} : (\{x\} \times S_{1/n}(x)) \subseteq W\}.$$

O conjunto $\{U_n : n \in \mathbb{N}^+\}$ é um recobrimento de $[0,1]\backslash\mathbb{Q}$ e pela afirmação acima, como $[0,1]\backslash\mathbb{Q}$ não é F_σ em X, então existe $k \in \mathbb{N}^+$ tal que $\overline{U_k} \cap (X\backslash Y) \neq \phi$. Fixemos $x \in \overline{U_k} \cap (X\backslash Y)$, e tomemos $y \in Y$ tal que $|x-y| < 1/2k$. Assim $(x,y) \in A$ e vamos mostrar que toda vizinhança aberta de (x,y) intersecta W. Assim teremos que A e B não podem ser separados por abertos disjuntos. De fato, seja $S \times T$ uma vizinhança aberta de (x,y) em $X \times Y$. Tomemos $x' \in S \cap U_k$ tal que $|x-x'| < 1/2k$. Então $|x'-y| \leq |x'-x| + |x-y| < \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k}$ logo $(x',y) \in \{x'\} \times S_{1/k}(x') \subseteq W$, pois $x' \in U_k$. Logo $(x',y) \in (S \times T) \cap W$, o que finaliza a demonstração. $\square$

Observação: No teorema acima, foi mostrado que o espaço topológico (X,Θ) é normal, mas esse espaço não é de Lindelöf.

De fato, como o conjunto $X \cap \mathbb{Q}$ é enumerável, podemos supor

$$X \cap \mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$$

Seja $H_n = X \cap \left]q_n - \frac{1}{2^{n+1}}, q_n + \frac{1}{2^{n+1}}\right[$, para cada $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$. Claramente

$$\{H_n : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\} \cup \{\{x\} : x \in X\backslash\mathbb{Q}\} \tag{2.1.1}$$

é um recobrimento aberto de X, vamos mostrar que esse recobrimento não tem sub-recobrimento enumerável usando um pouco de teoria da medida. Seja μ a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$ (ver [7, exemplo 2.4.1]). Dado que $\mathbb{Q} \cap X \subseteq \bigcup\{H_n : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$, $\mu(X) = \mu([0,1]) = 1$ e que

$$\mu\left(\bigcup\{H_n : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}\right) \leq \sum_{n=2}^{\infty} \mu(H_n) \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$$

temos que o conjunto $X\backslash \bigcup\{H_n : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\} \subseteq X\backslash\mathbb{Q}$ tem medida não nula, logo não é enumerável (pois todo conjunto enumerável em $\mathbb{R}$ tem medida de Lebesgue nula).

Portanto concluímos que a cobertura de X dada em (2.1.1), não tem sub-recobrimento enumerável, mostrando que X não é de Lindelöf.

2.2 CH, MA e produto de espaços de Lindelöf com os irracionais

O espaço X tomado na seção anterior não era de Lindelöf, logo poderíamos pensar que a propriedade ser de Lindelöf para um espaço normal ajudaria para que seu produto topológico com um espaço métrico separável seja normal. Mas essa asserção é falsa como veremos no teorema seguinte.

Até agora, não é conhecido em ZFC, um exemplo de um espaço topológico normal e de Lindelöf tal que o seu produto com o $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ não seja normal. Por isso como veremos ao longo desta seção, vamos precisar de axiomas adicionais para encontrar alguns contra-exemplos.

O seguinte teorema foi mostrado por Michael, ver [11].

Teorema 2.2. *O produto de um espaço normal de Lindelöf e um espaço metrizável separável não é necessariamente normal.*

Dem: Nós mostraremos que existem um espaço normal de Lindelöf X e um espaço metrizável Y tais que $X \times Y$ não é normal.

Construção do espaço Y: Seja C o conjunto dos subconjuntos compactos de $[0, 1]$, com a topologia usual, que não são enumeráveis. Sabemos que $|C| = \mathfrak{c}$, então podemos indexar C do modo seguinte:

$$C = \{K_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$$

Consideremos os subconjuntos $Y = \{y_\alpha : y_\alpha \in K_\alpha\}$ e $B = \{b_\alpha : b_\alpha \in K_\alpha\}$ definidos por recursão transfinita do seguinte modo: $y_0 \neq b_0$ com $y_0, b_0 \in K_0$ e para cada ordinal

α com $0 < \alpha < \mathfrak{c}$ tomemos $y_\alpha \neq b_\alpha$ ambos em K_α tais que $y_\alpha, b_\alpha \notin \bigsqcup_{0<i<\alpha}\{y_i, b_i\}$ (ou seja que eles sejam diferentes de todos os y_i's e b_i's anteriores; isto é possível pois $|K_\alpha| = \mathfrak{c}$, para todo $\alpha < \mathfrak{c}$). Assim $Y \subseteq [0,1]$ é um subconjunto não enumerável que tem a propriedade de que qualquer subconjunto compacto contido nele é enumerável. De fato, seja $M \subseteq Y$ compacto e suponhamos que M não é enumerável, então $M \in C$ e assim existe $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $M = K_\alpha$ logo $y_\alpha \in M$ e $b_\alpha \notin Y$, mas $b_\alpha \in K_\alpha = M$, o qual é absurdo e portanto M tem que ser enumerável.

Consideremos o conjunto Y construído acima como subespaço métrico de $\mathbb{R}$ e tomemos

$X = [0,1]$ com a topologia

$$\Theta = \{W \cup V : W \subseteq Y \text{ e } V \text{ aberto usual em [0,1]}\}.$$

Vejamos que (X, Θ) é um espaço topológico de Lindelöf.

Seja $\{F_i : i \in T\}$ um recobrimento aberto de (X, Θ). Para cada $i \in T$ supomos $F_i = W_i \cup V_i$, onde $W_i \subseteq Y$ e V_i é um aberto usual em $[0,1]$.

Seja $M = \bigsqcup_{i\in T} V_i$. Então $[0,1]\backslash M$ é fechado em $[0,1]$ e portanto compacto. Agora, como $[0,1]\backslash M$ está contido em Y, ele tem que ser enumerável. Logo para cada $x \in [0,1]\backslash M$ existe $i_x \in T$ tal que $x \in W_{i_x}$. Seja $T_1 \subseteq T$ dado por $T_1 = \{i_x : x \in [0,1]\backslash M\}$ (T_1 é enumerável). Agora, como $[0,1]$ é hereditariamente Lindelöf (por ter base enumerável de abertos) e $M = \bigsqcup_{i\in T} V_i$, temos que existe $T_2 \subseteq T$ enumerável tal que $M = \bigsqcup_{n\in T_2} V_n$. Tomemos $T_3 = T_1 \cup T_2$. Assim T_3 é enumerável e vale que $X = \bigsqcup_{i\in T_3} F_i$. Portanto X é de Lindelöf.

Vejamos que o espaço X é normal.

É claro que X é T_1 pois $[0,1]$ na topologia usual é T_1 e Θ é um refinamento da topologia usual. Para mostrar que ele é T_4 consideremos A, B fechados disjuntos em X, e consideremos os seguintes conjuntos:

$A_1 = A\backslash Y \quad B_1 = B\backslash Y$

$A_2 = A \cap Y \quad B_2 = B \cap Y$

Para cada $a \in A_1$ temos que $a \in X\backslash B$, então existe $\varepsilon_a > 0$ tal que $S_{\varepsilon_a}(a) \subseteq X\backslash B$, onde $S_{\varepsilon_a}(a)$ é a bola de raio ε_a e centro em a em $[0,1]$ (note que como $a \notin Y$, podemos tomar um aberto em Θ tomando $V = S_{\varepsilon_a}(a)$ e $W = \phi$). Do mesmo modo, para cada $b \in B_1$ temos que $b \in X\backslash A$, então existe $\varepsilon_b > 0$ tal que $S_{\varepsilon_b}(b) \subseteq X\backslash A$. Tomemos $Z_1 = \bigsqcup_{a\in A_1} S_{\varepsilon_a/3}(a)$ e $Z_2 = \bigsqcup_{b\in B_1} S_{\varepsilon_b/3}(b)$,. Logo temos que $A_1 \subseteq Z_1$, $B_1 \subseteq Z_2$ e $Z_1 \cap Z_2 = \phi$. Para mostrar este último fato, suponhamos que existe $x \in Z_1 \cap Z_2 = \phi$. Então existem $a \in A_1$ e $b \in B_1$ tais que $x \in S_{\varepsilon_a/3}(a) \cap S_{\varepsilon_b/3}(b)$. Logo $|a-b| \leq |a-x| + |x-b| < \varepsilon_a/3 + \varepsilon_b/3 \leq \frac{2}{3}\max\{\varepsilon_a, \varepsilon_b\}$ então $b \in S_{\varepsilon_a/3}(a)$ ou $a \in S_{\varepsilon_b/3}(b)$ o que é absurdo.

Finalmente se tomarmos $Z_3 = A_2 \cup Z_1$ e $Z_4 = B_2 \cup Z_2$, temos que Z_3, Z_4 são abertos em X tais que $A \subseteq Z_3$, $B \subseteq Z_4$, e $Z_3 \cap Z_4 = \phi$. Portanto, X é normal.

Vejamos que $X \times Y$ não é normal.

Consideremos os conjuntos: $A = (X\backslash Y) \times Y$ e $B = \{(x,x) : x \in Y\}$ contidos em $X \times Y$. Eles são disjuntos, fechados e não podem ser separados por abertos disjuntos em $X \times Y$. De fato:

Que eles são conjuntos disjuntos e fechados é claro.

Mostremos agora que A e B não podem ser separados por abertos disjuntos em $X \times Y$:

Primeiro vejamos que Y não é F_σ em X. Suponhamos por absurdo que $Y = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} F_n$ onde F_n é fechado em X. Assim para cada $n \in \mathbb{N}^+$ $X\backslash F_n$ é aberto em X. Vamos supor que $X\backslash F_n = W_n \cup V_n$, onde $W_n \subseteq Y$ e V_n é aberto em $[0,1]$. Então $F_n = (X\backslash W_n) \cap (X\backslash V_n)$ e $X\backslash V_n$ é compacto em $[0,1]$ (por ser fechado). Mas como Y é não enumerável, temos que existe $r \in \mathbb{N}^+$ tal que F_r é não enumerável e portanto $X \backslash V_r$ é não enumerável. Então temos que $X \backslash V_r$ é um compacto não enumerável em $[0,1]$ logo pertence a C. Suponhamos que $X \backslash V_r = K_\alpha$. Então $y_\alpha, b_\alpha \in X \backslash V_r$ com $y_\alpha \in Y$ e $b_\alpha \notin Y$. Agora como $W_r \subseteq Y$ temos que $X \backslash Y \subseteq X \backslash W_r$. Logo dado que $b_\alpha \notin Y$ ocorre que $b_\alpha \in X \backslash W_r$, e portanto $b_\alpha \in (X \backslash W_r) \cap (X \backslash V_r) = F_r$. Então $b_\alpha \in Y$ o que é absurdo pois $b_\alpha \notin Y$. Concluímos que Y não é um F_σ em X.

Seja agora V um aberto em $X \times Y$ tal que $B \subseteq V$, Para cada $k \in \mathbb{N}^+$ tomemos $U_k = \{x \in Y : \{x\} \times S_{1/k}(x) \subseteq V\}$. Notemos que os U_k's cobrem Y. Mas como Y não é F_σ em X existe $k \in \mathbb{N}^+$ tal que $\overline{U_k} \cap (X \backslash Y) \neq \phi$. Tomemos $x \in \overline{U_k} \cap (X \backslash Y)$ e $y \in Y$ tal que $|x - y| < \frac{1}{2k}$, então $(x, y) \in (X \backslash Y) \times Y = A$. Queremos mostrar que qualquer vizinhança aberta de (x, y) intersecta V. De fato, suponhamos $(x, y) \in R \times S$, onde $R \times S$ é subconjunto aberto de $X \times Y$. Então como R é vizinhança aberta de x em X e $x \in \overline{U_k}$, temos que $U_k \cap R \neq \phi$. Seja $x' \in U_k \cap R$ e tal que $|x - x'| < \frac{1}{2k}$. Então $|x' - y| \leq |x' - x| + |x - y| < \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k}$. Logo $(x', y) \in \{x'\} \times S_{1/k}(x') \subseteq V$, pois $x' \in U_k$, o que termina a demonstração..

Concluímos que o espaço $X \times Y$ não é normal.

$\square$

Observação: No exemplo exibido na proposição acima, só usamos do espaço $[0,1]$ o fato dele ser compacto, metrizável e não ter pontos isolados. Assim é possível generalizar esse exemplo para espaços com essas condições. O conjunto Y neste caso pode ser obtido de forma similar tomando C como o conjunto de todos os subconjuntos compactos de X que não são enumeráveis ($|C| = 2^\omega$).

Anteriormente, vimos dois exemplos nos quais mostramos que o produto de um espaço normal X por um espaço métrico separável Y nem sempre é normal. Na verdade, no primeiro exemplo, tomamos Y como sendo o subespaço dos números irracionais e X um espaço que não era de Lindelöf. No segundo exemplo, o espaço X que exibimos era de Lindelöf, mas Y não era o subespaço dos números irracionais. No entanto, se nós assumirmos a Hipótese do Contínuo (CH), podemos dar mais um exemplo onde vamos tomar o espaço Y como sendo o subespaço dos números irracionais e X como um espaço topológico que além de ser normal, também será de Lindelöf.

Até o final da demonstração do teorema abaixo nós supomos que $\omega_1 = \mathfrak{c}$ (*Hipótese do Contínuo*).

Seja
$$\Omega = \{\Omega^* : \mathbb{Q} \subseteq \Omega^* \text{ e } \Omega^* \text{ é aberto em } \mathbb{R}\}\ .$$

Vejamos que $|\Omega| = \omega_1$. De fato, dado que $\mathbb{R}$ admite base enumerável, e cada elemento de Ω é união de alguns desses elementos, então $|\Omega| \leq 2^\omega = \mathfrak{c}$. Por outro lado, $|\Omega|$ não é enumerável, pois senão $\mathbb{Q} = \bigcap \Omega$ e sabemos que $\mathbb{Q}$ não é un G_δ em $\mathbb{R}$. Temos assim que $\omega < |\Omega|$ ($\omega_1 \leq |\Omega|$). Portanto $|\Omega| = \mathfrak{c} = \omega_1$.

Indexamos Ω por
$$\Omega = \{\Omega_\alpha : \alpha < \omega_1\}.$$

Definamos por recursão transfinita um conjunto $Y = \{y_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ do seguinte modo:

1. $y_0 \in \Omega_0 \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$
2. Para cada ordinal α com $0 < \alpha < \omega_1$, supondo definidos y_β para cada $\beta < \alpha$, então tomamos $y_\alpha \in (\bigcap\{\Omega_\beta : \beta \leq \alpha\}\backslash\{y_i : i < \alpha\}) \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$. Podemos fazer isto porque $\mathbb{Q}$ não é G_δ em $\mathbb{R}$.

Teorema 2.3 (CH). *O conjunto* $X = \mathbb{Q} \cup Y$ *com a topologia* $\Theta = \{W \cup V : W \subseteq Y$ *e* V *aberto relativo de* X *em* $\mathbb{R}\}$ *é um espaço regular e de Lindelöf* (*normal*) *tal que o espaço produto* $X \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ *não é normal.*

Dem: Vejamos que (X, Θ) é de Lindelöf e regular (logo, normal):

X **é de Lindelöf:** Seja $G = \{G_i : i \in I\}$ um recobrimento por abertos de X. Suponhamos para cada $i \in I$ que $G_i = W_i \cup (Z_i \cap X)$, onde $W_i \subseteq Y$ e Z_i é um aberto em $\mathbb{R}$. Existe $J \subseteq I$ enumerável tal que $\mathbb{Q} \subseteq \bigcup\{Z_i : i \in J\}$. Tomemos α, com $\alpha < \omega_1$, tal que $\Omega_\alpha = \bigcup\{Z_i : q \in J\}$. Logo se $\lambda > \alpha$, então $y_\lambda \in \Omega_\alpha$ ou seja $\{y_\lambda : \lambda > \alpha\} \subseteq \bigcup\{Z_i : i \in J\}$. Deste modo, $Y \backslash \bigcup\{Z_i : i \in J\} \subseteq \{y_\lambda : \lambda \leq \alpha\}$ que é enumerável pois $\alpha < \omega_1$; podemos tomar para cada $\lambda \leq \alpha$, $i_\lambda \in I$ tal que $y_\lambda \in G_{i_\lambda}$. Seja $I_1 = J \cup \{i_\lambda : \lambda \leq \alpha\}$ e assim $X = \bigcup_{i \in I_1} G_i$, onde I_1 é enumerável. Portanto X é de Lindelöf.

X **é regular:** Sejam $x \in X$ e $F \subseteq X$ fechado quaisquer tais que $x \notin F$. Então $X \backslash F$ é aberto em X, logo podemos supor $X \backslash F = W \cup (Z \cap X)$ onde $W \subseteq Y$ e Z é um aberto de $\mathbb{R}$. Agora,

$$F = (X \backslash W) \cap (X \backslash (Z \cap X)) = (X \backslash W) \cap ((X \backslash Z) \cup (X \backslash X)) = (X \backslash W) \cap (X \backslash Z)$$

como $x \notin F$, então $x \notin X \backslash W$ ou $x \notin X \backslash Z$.

1. Se $x \notin X \backslash Z = (\mathbb{R} \backslash Z) \cap X$, então $x \in Z$ aberto em $\mathbb{R}$, logo existe V_1^* aberto de $\mathbb{R}$ tal que $x \in V_1^* \subseteq \overline{V_1^*} \subseteq Z$. Sejam $V_1 = V_1^* \cap X$ e $V_2 = (\mathbb{R} \backslash \overline{V_1^*}) \cap X = X \backslash \overline{V_1^*}$. Notemos que V_1, V_2 são abertos de X tais que $V_1 \cap V_2 = \phi$, $x \in V_1$ e $F \subseteq X \backslash Z \subseteq X \backslash \overline{V_1^*} = V_2$.

2. Se $x \notin X \backslash W$, então $x \in W$. Tomemos $V_1 = \{x\} \in \Theta$ e $V_2 = X \backslash \{x\} \in \Theta$. Logo $x \in V_1$, $F \subseteq V_2$ e $V_1 \cap V_2 = \phi$.

Portanto X é T_3 e, como é facil ver que X é também T_1, concluímos que X é regular.

Vejamos que $X \times (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ não é normal:

Afirmação: Y não é F_σ em X.

De fato, se $Y = \bigcup\{F_i : i \in \mathbb{N}\}$ onde F_i é fechado em X, então $\mathbb{Q} = X \backslash Y = \bigcap\{X \backslash F_i : i \in \mathbb{N}\}$. Suponhamos, para cada $i \in \mathbb{N}$, que $X \backslash F_i = (Z_i \cap X) \cup W_i$, onde Z_i é aberto em $\mathbb{R}$ e $W_i \subseteq Y$. Logo, $\mathbb{Q} = \bigcap\{(Z_i \cap X) \cup W_i : i \in \mathbb{N}\} = \bigcap\{(Z_i \cap X) : i \in \mathbb{N}\}$.

Mas para cada $i \in \mathbb{N}$, como $\mathbb{Q} \subseteq Z_i$, existe $\alpha_i < \omega_1$ tal que $Z_i = \Omega_{\alpha_i}$. Então $\mathbb{Q} \subseteq \bigcap\{\Omega_{\alpha_i} \cap X : i \in \mathbb{N}\} = \bigcap\{Z_i \cap X : i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}$. Portanto $\bigcap\{\Omega_{\alpha_i} \cap X : i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}$ e assim se tomarmos $\kappa = \bigcup\{\alpha_i : i \in \mathbb{N}\}$, então $y_\kappa \in \Omega_{\alpha_i}$ $\forall i \in \mathbb{N}$ (pois $\alpha_i \leq \kappa$ e $y_\alpha \in \bigcap\{\Omega_\beta : \beta \leq \kappa\}$). Mas isso implicaria que $y_\kappa \in \mathbb{Q}$, o que é absurdo. Portanto Y não é F_σ em X.

Consideremos $A = \mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ e $B = \{(y, y) : y \in Y\}$ conjuntos fechados e disjuntos em $X \times (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$. Mostremos que eles não podem ser separados por abertos disjuntos em $X \times (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$.

Sejam V e U abertos quaisquer em $X \times (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ tais que $A \subseteq V$ e $B \subseteq U$. Consideremos para cada $k \in \mathbb{N}^+$ o conjunto $U_k = \{y \in Y : \{y\} \times S_{1/k}(y) \subseteq U\}$, logo o conjunto $\{U_k : k \in \mathbb{N}^+\}$ é recobrimento de Y e pela afirmação, como Y não é F_σ em X, temos que existe $k \in \mathbb{N}^+$ tal que $cl_X(U_k) \cap \mathbb{Q} \neq \phi$. Seja $q \in cl_X(U_k) \cap \mathbb{Q}$ e tomemos $y \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ tal que $|q - y| < 1/2k$. Então $(q, y) \in A$ e vamos mostrar que toda vizinhança aberta deste ponto intersecta U, assim mostraremos que A e B não podem ser separados por abertos disjuntos em $X \times (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$.

Suponhamos que $(q, y) \in M \times N \subseteq X \times (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$, onde M é aberto em X e N é aberto em $(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$. Como $q \in cl_X(U_k)$, existe $y' \in M \cap U_k$ tal que $|q - y'| < 1/2k$ assim: $(y', y) \in M \times N$ e

$|y' - y| \leq |y' - q| + |q - y| < \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k} \implies y \in S_{1/k}(y') \implies (y', y) \in \{y'\} \times S_{1/k}(y') \subseteq U$, pois $y' \in U_k$.

Ou seja $(M \times N) \cap U \neq \phi$, o que termina a demonstração.

□

No Teorema 2.3, foi usada a Hipótese do Contínuo para a construção do espaço topológico de Lindelöf e regular X (também normal). Em 1990, K. Alster [2], melhorou esse resultado usando o Axioma de Martin para mostrar que existe um espaço de Lindelöf X tal que o espaço produto $X \times (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ não é normal. A seguir, vamos estudar tal resultado.

Primeiro vejamos algumas afirmações e alguns lemas que serão úteis:

Lembremos como foi definido "$<_*$"em ω^ω (Definição 0.5).
Se $x = (x(0), x(1), ...)$ e $y = (y(0), y(1), ...)$ são elementos em ω^ω, então dizemos que $x <_* y$ (ou respectivamente $x \leq_* y$) se existe $m < \omega$ tal que $x(i) < y(i)$ (ou respectivamente $x(i) \leq y(i)$), para todo $m < i < \omega$.

O Axioma de Martin implica que existe uma $\mathfrak{c}$-escala $S = \{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ em ω^ω (ver Corolário 0.16).

Até a prova do Teorema 2.7 (final da seção) vamos supor os seguintes fatos e fixar as seguintes notações:

- Vamos tomar os conjuntos X_β, para cada $\beta < \mathfrak{c}$, como sendo $X_\beta = \{x \in \omega^\omega : x \leq_* x_\beta\}$ e para $\mathfrak{c}$, tomamos $X_\mathfrak{c} = (\omega + 1)^\omega$.
- Consideraremos $((\omega + 1)^\omega, d)$ como um espaço que é compactificação métrica de ω^ω.
- Tomaremos o espaço topológico

  $$(X, \Theta) \tag{2.2.1}$$

  como sendo o espaço no qual $X = (\omega + 1)^\omega$ e Θ é a topologia na qual uma base para cada ponto de X é dada da seguinte forma: se $x \in X_\alpha \setminus \bigcup \{X_\beta : \beta < \alpha\}$, onde α é o menor ordinal menor ou igual a $\mathfrak{c}$ tal que $x \in X_\alpha$, $((\omega + 1)^\omega = X_\mathfrak{c}$). Então

  $$\theta_x = \{(X_\alpha \cap W) \setminus X_\beta : W \text{ é aberto em } (\omega + 1)^\omega \text{ contendo } x \text{ e } \beta < \alpha\} \tag{2.2.2}$$

Lema 2.4 (MA). *Se Z é um espaço compacto métrico tal que $Z = \bigcup\{Z_\gamma : \gamma < \beta\}$, onde $\beta < \mathfrak{c}$ e Z_γ é compacto para cada $\gamma < \beta$, então existe uma sequência $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ em β tal que $Z = \bigcup\{Z_{\gamma_i} : i \in \mathbb{N}\}$.*

Dem: Suponhamos que a tese do lema não é verdadeira. Vamos construir por recursão transfinita uma sequência estritamente crescente $\{H_\gamma : \gamma < \omega_1\}$ de conjuntos abertos em Z de tal modo que o subespaço $L = \bigcup\{H_\gamma : \gamma < \omega_1\}$ não será de Lindelöf, o que é um absurdo, pois Z é hereditariamente de Lindelöf por ter base enumerável de abertos. Tomemos

$$H_0 = \bigcup\{int_Z Z_\gamma : \gamma < \beta\}$$

Temos que $H_0 \neq \phi$, pois senão para cada $\gamma < \beta$ teríamos que $int_Z Z_\gamma = \phi$ e assim Z seria um compacto e T_2 (que satisfaz c.c.c por ser separável) que é união de um número menor que $\mathfrak{c}$ de fechados raros, o que pelo Corolário 0.14 é absurdo.

Por outro lado, H_0 é de Lindelöf, pois Z é hereditariamente de Lindelöf. Logo existe $T(H_0) \subseteq \beta$ enumerável tal que $H_0 = \bigcup\{int_Z Z_\gamma : \gamma \in T(H_0)\} \subseteq \bigcup\{Z_\gamma : \gamma \in T(H_0)\}$.

Para cada n, tal que $0 < n < \omega$, suponhamos definidos subconjuntos abertos não vazios H_0, H_1, ... , H_{n-1} de Z e subconjuntos $T(H_0)$, $T(H_1)$, ... , $T(H_{n-1})$ de β enumeráveis tais que:

(i) $H_{i-1} \subsetneq H_i$ para cada $1 \leq i \leq n-1$

(ii) $H_i \subseteq \bigcup\{Z_\gamma : \gamma \in T(H_i)\}$, para cada $0 \leq i \leq n-1$

(iii) $H_i \backslash \left(\bigcup\{H_t : 0 \leq t < i\}\right) \neq \phi$, para cada $1 \leq i \leq n-1$

Vamos determinar H_n e $T(H_n)$.

Tomemos

$$H^{(n)} = \bigcup\{H_t : 0 \leq t \leq n-1\} \text{ e } A^{(n)} = Z \backslash H^{(n)}$$

$A^{(n)} \neq \phi$, pois senão $Z \subseteq H^{(n)}$ e teríamos que a tese do teorema vale. Seja

$$H_n^* = \bigcup\{int_{A^{(n)}}(Z_\gamma \backslash H^{(n)}) : \gamma < \beta\}.$$

Afirmamos que $H_n^* \neq \phi$. De fato, se for vazio, para cada $\gamma < \beta$, teríamos que

$$int_{A^{(n)}}(Z_\gamma \backslash H^{(n)}) = \phi.$$

Assim $A^{(n)} = \bigcup\{Z_\gamma \backslash H^{(n)} : \gamma < \beta\}$ seria um compacto, T_2 e que satisfaz c.c.c. que é união de um número menor que $\mathfrak{c}$ de conjuntos fechados e raros em $A^{(n)}$, que pelo Corolário 0.14 é absurdo. Além disso, como H_n^* é de Lindelöf, existe $T(H_n^*) \subseteq \beta$ enumerável tal que $H_n^* = \bigcup\{int_{A^{(n)}}(Z_\gamma \backslash H^{(n)}) : \gamma \in T(H_n^*)\}$.
Seja

$$H_n = H_n^* \cup H^{(n)}.$$

Então,

1. H_n é aberto em Z.
   Com efeito, $Z \backslash H_n = (Z \backslash H_n^*) \cap (Z \backslash H^{(n)})$. Como H_n^* é aberto em $A^{(n)}$, existe $W \subseteq Z$ aberto tal que $H_n^* = W \cap A^{(n)}$. Logo,
   $Z \backslash H_n = (Z \backslash (W \cap A^{(n)})) \cap A^{(n)} = ((Z \backslash W) \cup (Z \backslash A^{(n)})) \cap A^{(n)} = (Z \backslash W) \cap A^{(n)}$.
   Portanto $Z \backslash H_n$ é fechado em Z.

2. Vale que $H_{n-1} \subseteq H_n$, pois $H_n = H_n^* \cup H^{(n)}$.

3. Existência de $T(H_n)$.
   Tomemos $T(H_n) = T(H_n^*) \cup \bigcup\{T(H_t) : 0 \leq t \leq n-1\}$. Assim, $H_n \subseteq \bigcup\{Z_\gamma : \gamma \in T(H_n)\}$ e vale a Condição (ii), para $i = n$.

4. $H_n^* = H_n \backslash \bigcup\{H_\gamma : 0 \leq n-1\}$, pois $H_n = H_n^* \cup H^{(n)}$ e $H_n^* \cap H^{(n)} = \phi$. Dado que $H_n^* \neq \phi$ temos que vale a Condição (iii), para $i = n$.

Suponhamos que para cada número ordinal α, com $\alpha < \delta$ (com $\delta < \omega_1$), temos definidos subconjuntos abertos não vazios H_α's de Z e subconjuntos $T(H_\alpha)$'s de β enumeráveis tais que:

(I) $H_{\alpha_1} \subseteq H_{\alpha_2}$, para cada $\alpha_1 < \alpha_2 < \delta$

(II) $H_\alpha \subseteq \bigcup\{Z_{\alpha'} : \alpha' \in T(H_\alpha)\}$, para cada $\alpha < \delta$

(III) $H_\alpha \backslash (\bigcup\{H_{\alpha'} : \alpha' < \alpha\}) \neq \phi$, para cada $\alpha < \delta$

Vamos determinar H_δ e $T(H_\delta)$.

Tomemos

$$H^{(\delta)} = \bigcup\{H_\gamma : \gamma < \delta\} \text{ e } A^{(\delta)} = Z \backslash H^{(\delta)}$$

$A^{(\delta)} \neq \phi$, pois senão $Z \subseteq H^{(\delta)}$ e teríamos que a tese do teorema vale. Seja

$$H_\delta^* = \bigcup\{int_{A^{(\delta)}}(Z_\gamma \backslash H^{(\delta)}) : \gamma < \beta\}.$$

Afirmamos que $H_\delta^* \neq \phi$. De fato, senão para cada $\gamma < \beta$, teríamos que $int_{A^{(\delta)}}(Z_\gamma \backslash H^{(\delta)}) = \phi$. Assim $A^{(\delta)} = \bigcup\{Z_\gamma \backslash H^{(\delta)} : \gamma < \beta\}$ seria um compacto, T_2 e que satisfaz c.c.c. que é união de um número menor que $\mathfrak{c}$ de conjuntos fechado raros em $A^{(\delta)}$, o que pelo Corolário 0.14 é absurdo. Além disso, como H_δ^* é de Lindelöf, existe $T(H_\delta^*) \subseteq \beta$ enumerável tal que $H_\delta^* = \bigcup\{int_{A^{(\delta)}}(Z_\gamma \backslash H^{(\delta)}) : \gamma \in T(H_\delta^*)\}$.

Seja

$$H_\delta = H_\delta^* \cup H^{(\delta)}.$$

Do mesmo modo que mostramos que H_n satisfaz as condições (i), (ii) e (iii), podemos mostrar que H_δ satistaz

- $H_{\alpha_1} \subseteq H_\delta$, para cada $\alpha_1 < \delta$
- $H_\delta \subseteq \bigcup\{Z_{\alpha'} : \alpha' \in T(H_\delta)\}$.
- $H_\delta \backslash (\bigcup\{H_{\alpha'} : \alpha' < \delta\}) \neq \phi$.

Portanto temos o conjunto $\{H_\gamma : \gamma < \omega_1\}$ com as condições que queríamos. □

Lema 2.5 (MA). *Se $X'_\alpha = X_\alpha \backslash \bigcup\{X_\beta : \beta < \alpha\}$ e U é um aberto em $(\omega+1)^\omega$ contendo X'_α, então existe uma sequência $(\gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ em α tal que $X_\alpha \backslash U \subseteq \bigcup\{X_{\gamma_i} : i \in \mathbb{N}\}$.*

Dem: Afirmação: cada subespaço X'_α de X é de Lindelöf.

De fato, suponhamos que

$$X'_\alpha \subseteq \bigcup\{(X_\alpha \cap W_i) \backslash X_{\beta_i} : i \in I\},$$

onde para cada $i \in I$, $W_i \subseteq (\omega+1)^\omega$ é aberto e β_i é um ordinal tal que $\beta_i < \alpha$. Logo, como $(\omega+1)^\omega$ é hereditariamente de Lindelöf, (pois é separável e metrizável) existe $J \subseteq I$ enumerável, tal que $\bigcup\{W_i : i \in I\} = \bigcup\{W_i : i \in J\}$.

Vejamos que

$$X'_\alpha \subseteq \bigcup\{(X_\alpha \cap W_r)\backslash X_{\beta_r} : r \in J\}.$$

Com efeito, se $x \in X'_\alpha$ (notemos que se $x \in X'_\alpha$, então $x \notin X_\beta$ para cada $\beta < \alpha$) assim existe $k \in J$ tal que $x \in X_\alpha \cap W_k$ e $x \notin X_{\beta_k}$. Portanto $x \in (X_\alpha \cap W_k)\backslash X_{\beta_k}$, ou seja $X'_\alpha \subseteq \bigcup\{(X_\alpha \cap W_r)\backslash X_{\beta_r} : r \in J\}$. Portanto X'_α é de Lindelöf para cada $\alpha \leq \mathfrak{c}$.

Para mostrar o lema, vamos a dividir a demonstração em dois casos: primeiro mostraremos que vale se $cf(\alpha) = \omega$ e depois para $cf(\alpha) > \omega$.

Se $cf(\alpha) = \omega$, temos que existe uma função $f : \omega \longrightarrow \alpha$, tal que $f[\omega]$ é cofinal em α. Vamos mostrar que $X_\alpha \backslash U \subseteq \bigcup\{X_{f(\lambda)} : \lambda < \omega\}$.

$$\begin{aligned}
x \in X_\alpha\backslash U &\Longrightarrow x \leq_* x_\alpha \text{ e } x \notin U \\
&\Longrightarrow x \leq_* x_\alpha \text{ e } x \notin X'_\alpha \\
&\Longrightarrow x \leq_* x_\alpha \text{ e } x \in \bigcup\{X_\beta : \beta < \alpha\}) \\
&\Longrightarrow \text{existe um ordinal } \beta\text{, com } \beta < \alpha\text{, tal que } \quad x \in X_\beta \\
&\Longrightarrow x \in X_\beta \text{ e existe } \lambda < \omega \text{ tal que } \beta < f(\lambda) < \alpha \\
&\Longrightarrow x \leq_* x_\beta <_* x_{f(\lambda)} \\
&\Longrightarrow x \in \bigcup\{X_{f(\lambda)} : \lambda < \omega\}.
\end{aligned}$$

Agora suponhamos que $\omega < cf(\alpha)$.

Vamos mostrar que podemos tomar U como sendo um aberto da forma $(X_\alpha \cap H)\backslash X_{\beta_1}$ onde β_1 é um ordinal tal que $\beta_1 < \alpha$ e H é um aberto em $(\omega+1)^\omega$.
De fato, para cada $x \in X'_\alpha$, existe $U_x \subseteq (\omega+1)^\omega$ aberto e um ordinal β_x, com $\beta_x < \alpha$, tal que $x \in (X_\alpha \cap U_x)\backslash X_{\beta_x} \subseteq U$. Então $X'_\alpha \subseteq \bigcup\{(X_\alpha \cap U_x)\backslash X_{\beta_x} : x \in X'_\alpha\} \subseteq U$. Agora, pela afirmação, temos que existe um conjunto $I \subseteq X'_\alpha$ enumerável tal que $X'_\alpha \subseteq \bigcup\{(X_\alpha \cap U_x)\backslash X_{\beta_x} : x \in I\} \subseteq U$.

Seja $A = \{\beta_x : x \in I\}$. Como $\omega < cf(\alpha)$, então A não é cofinal em α. Logo, existe um ordinal $\overline{\beta}$, com $\overline{\beta} < \alpha$, tal que $\beta_x < \overline{\beta}$ (portanto $X_{\beta_x} \subseteq X_{\overline{\beta}}$) para cada $x \in I$. Portanto,
$\bigcup\{(X_\alpha \cap U_x)\backslash X_{\overline{\beta}} : x \in I\} \subseteq \bigcup\{(X_\alpha \cap U_x)\backslash X_{\beta_x} : x \in I\} \subseteq U$.
Vejamos que $X'_\alpha \subseteq \bigcup\{(X_\alpha \cap U_x)\backslash B_{\overline{\beta}} : x \in I\}$. Se $x \in X'_\alpha$, então existe $y \in I$ tal que $x \in (X_\alpha \cap U_y)\backslash X_{\beta_y}$, logo $x \in X_\alpha$, $x \in U_y$ e $x \notin X_{\beta_y}$. Na verdade, como $x \in X'_\alpha$, então $x \notin X_\beta$ para todo $\beta < \alpha$). Assim $x \in X_\alpha$, $x \in U_y$ e $x \notin X_{\overline{\beta}}$. Então $x \in (X_\alpha \cap U_y)\backslash X_{\overline{\beta}}$.

Se nós tomarmos $H = \bigcup\{U_x : x \in I\}$, então temos que H é um aberto em $(\omega+1)^\omega$ tal que $X'_\alpha \subseteq (X_\alpha \cap H)\backslash X_{\overline{\beta}} \subseteq U$.

Doravante na prova do lema, para o caso $cf(\alpha) > \omega$, supomos $U = (X_\alpha \cap H)\backslash X_{\beta_1}$, onde H é um aberto em $(\omega+1)^\omega$ e $\beta_1 < \alpha$.

Caso 1: Se $\alpha = \mathfrak{c}$.
Como $X_\mathfrak{c}\backslash H \subseteq (\omega+1)^\omega$ é fechado, ele é compacto. Além disso $X_\mathfrak{c}\backslash H \subseteq \omega^\omega$, pois $X_\mathfrak{c}\backslash H \subseteq \bigcup\{X_\beta : \beta < \mathfrak{c}\} = \omega^\omega$. Assim, para cada $n < \omega$ temos que $\prod_n[X_\mathfrak{c}\backslash H]$ é compacto em ω, logo existe $y(n) < \omega$ tal que se $x \in \prod_n[X_\mathfrak{c}\backslash H]$ então $x \leq y(n)$. Portanto existe uma sequência $y = (y(i))_{i\in\mathbb{N}}$ em ω^ω tal que

$$X_\mathfrak{c}\backslash H \subseteq \{(x(n))_{n\in\mathbb{N}} \in \omega^\omega : x(n) \leq y(n),\ \forall n < \omega\} = K$$

Como $S = \{x_\beta : \beta < \mathfrak{c}\}$ é uma $\mathfrak{c}$-escala em ω^ω, existe $\beta_2 < \mathfrak{c}$, tal que $y <_* x_{\beta_2}$, o que implica que $K \subseteq X_{\beta_2}$. Portanto se nós mostrarmos que $X_\mathfrak{c}\backslash U \subseteq X_{\beta_1} \cup X_{\beta_2}$ terminará a demonstração do lema no caso 1. De fato, se

$$\begin{aligned} x \in X_\mathfrak{c}\backslash U &\implies x \in X_\mathfrak{c} \text{ e } x \notin (X_\mathfrak{c} \cap H)\backslash X_{\beta_1} \\ &\implies x \in X_\mathfrak{c} \text{ e } (x \notin H \text{ ou } x \in (H \cap X_{\beta_1})) \\ &\implies x \in (X_\mathfrak{c}\backslash H) \cup (X_\mathfrak{c} \cap (H \cap X_{\beta_1})) \subseteq K \cup X_{\beta_1} \subseteq X_{\beta_2} \cup X_{\beta_1} \end{aligned}$$

o que implica que $X_\mathfrak{c}\backslash U \subseteq X_{\beta_1} \cup X_{\beta_2}$.

Caso 2: Se $\alpha < \mathfrak{c}$.

Vejamos que para cada $\beta < \alpha$, X_β é um σ-compacto em ω^ω. De fato, se tomamos para cada $n < \omega$,

$$V_n = \underbrace{\omega \times \cdots \times \omega}_{\text{n+1-vezes}} \times \{0, 1, ..., x_\beta(n+1)\} \times \{0, 1, ..., x_\beta(n+2)\} \times \cdots$$

onde $x_\beta = (x_\beta(0), x_\beta(1), ...)$, então cada V_n seria σ-compacto em ω^ω. Logo $X_\beta = \bigcup\{V_n : n < \omega\}$ é σ-compacto em ω^ω.

Vamos supor que $X_\beta = \bigcup\{X_\beta(n) : n < \omega\}$, onde para cada $n < \omega$, temos que $X_\beta(n)$ é compacto em ω^ω. Então,

$$X_\alpha \backslash H \subseteq \bigcup \{X_\gamma : \gamma < \alpha\} = \bigcup \{X_\gamma(m) : m < \omega \text{ e } \gamma < \alpha\}$$

Seja $D_n = X_\alpha(n)\backslash H$. Então $D_n = \bigcup\{(X_\alpha(n)\backslash H) \cap X_\gamma(m) : \gamma < \alpha \text{ e } m < \omega\}$ para cada $n < \omega$. Agora, como D_n é um subconjunto compacto de ω^ω, que é união de um número menor que $\mathfrak{c}$ de subconjuntos compactos, pelo Lema 2.4, temos que existe uma sequência $(\gamma_i(n))_{i\in\mathbb{N}}$ contida em α, tal que $D_n = \bigcup\{(X_\alpha(n)\backslash H) \cap X_{\gamma_i(n)}(m) : i < \omega$ e $m < \omega\}$. Seja $\{\gamma_j : i \in \mathbb{N}\}$ uma reindexação do conjunto $\bigcup\{\gamma_i(n) : n, i < \omega\}$.

Nestas condições afirmamos que $X_\alpha \backslash U \subseteq \bigcup\{X_{\gamma_i} : i < \omega\} \cup \{X_{\beta_1}\}$. De fato,

$$\begin{aligned}
x \in X_\alpha \backslash U &\implies x \in X_\alpha \text{ e } x \notin (X_\alpha \cup H)\backslash X_{\beta_1} \\
&\implies x \in X_\alpha \text{ e } (x \notin H \text{ ou } x \in (H \cap X_{\beta_1})) \\
&\implies x \in (X_\alpha \backslash H) \cup X_{\beta_1} \\
&\implies \text{existe } k < \omega \text{ tal que } x \in D_k \cup X_{\beta_1} \\
&\implies \text{existe } j < \omega \text{ tal que } x \in X_{\gamma_j} \cup X_{\beta_1}
\end{aligned}$$

isto termina a demonstração do Lema 2.5.

□

Lema 2.6 (MA). *Para cada $\alpha \leq \mathfrak{c}$, o espaço X_α é de Lindelöf.*

Dem: Por indução, observemos que X_0 é um espaço de Lindelöf, pois a topologia dele é a mesma que herda do espaço $(\omega+1)^\omega$, que é um espaço hereditariamente de Lindelöf.

Suponhamos (hipótese de indução) que para cada $\alpha < \beta$, o espaço X_α é de Lindelöf e mostremos que X_β também é de Lindelöf. Seja

$$\mathcal{U} = \{U_s : s \in S\}$$

um recobrimento aberto de X_β em $(\omega + 1)^\omega$. Dado que X'_β é de Lindelöf (por uma afirmação feita no Lema 2.5), temos que existe $S^* \subseteq S$ enumerável, tal que $X'_\beta \subseteq \bigcup\{U_s : s \in S^*\} = U$. Pelo Lema 2.5, existe $(\gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ em β, tal que $X_\beta \backslash U \subseteq \bigcup\{X_{\gamma_i} : i \in \mathbb{N}\}$. Mas pela hipótese de indução temos que para cada $i \in \mathbb{N}$, existe um conjunto $S_i \subseteq S$ enumerável, tal que $X_{\gamma_i} = \bigcup\{X_{\gamma_i} \cap U_s : s \in S_i\}$. Portanto, se tomarmos

$$T = \bigcup\{S_i : i \in \mathbb{N}\} \cup S^*,$$

então T é enumerável e $X_\beta \subseteq \bigcup\{U_s : s \in T\}$. Assim, X_β é de Lindelöf. $\square$

Teorema 2.7 (MA)**.** *Existe um espaço topológico de Lindelöf (regular) tal que o seu produto com o subespaço $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ não é normal.*

Dem: Como sabemos que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ é homeomorfo ao ω^ω, vamos mostrar que o espaço topológico (X, Θ) como em (2.2.1) é um espaço de Lindelöf tal que $X \times \omega^\omega$ não é normal. Pelo Lema 2.2, como $X = X_\mathfrak{c}$, temos que X é um espaço de Lindelöf. Vamos mostrar agora que $X \times \omega^\omega$ não é de Lindelof e portanto não vai ser normal (ver Teorema 3.4).

Em um espaço de Lindelöf, todo subconjunto fechado é de Lindelöf. Assim, para mostrar que $X \times \omega^\omega$ não é de Lindelöf vamos apresentar um subconjunto fechado dele que não é de Lindelöf. Para isso tomemos

$$F = \{(p, p) : p \in \omega^\omega\}$$

um subconjunto fechado em $X \times \omega^\omega$, e consideremos a família

$$\mathcal{V} = \{F \cap (X_\alpha \times \omega^\omega) : \alpha < \mathfrak{c}\}.$$

1. **$\mathcal{V}$ é um recobrimento aberto de F.**

   Com efeito, por indução transfinita veremos que X_α é aberto em X para cada $\alpha < \mathfrak{c}$. Claramente temos que X_0 é aberto em X. Seja $\beta < \mathfrak{c}$ e suponhamos que para cada $\alpha < \beta$, X_α é aberto em X; vamos mostrar que X_β é aberto em X. Seja $x \in X_\beta$. Consideremos dois casos:

   (a) **Caso 1:** Se existe $\alpha_1 < \beta$, tal que $x \in X_{\alpha_1}$, então pela hipótese de indução, x é um ponto interior em X_β.

   (b) **Caso 2:** Se $x \notin \bigcup\{X_\alpha : \alpha < \beta\}$, então $x \in X'_\beta$, logo como $(X_\beta \cap X)\backslash X_\lambda$ é um aberto, que pertence à base de x definida em (2.2.2), contido em X_β, para cada $\lambda < \beta$, temos que x é um ponto interior em X_β.

   É claro que $F \subseteq \bigcup \mathcal{V}$, portanto concluímos que $\mathcal{V}$ é um recobrimento aberto de F.

2. **$\mathcal{V}$ não tem sub-recobrimento enumerável.**

   Com efeito, se existir $M \subseteq \mathfrak{c}$ enumerável tal que $\{F \cap (X_\alpha \times \omega^\omega) : \alpha \in M\}$ seja sub-recobrimento de $\mathcal{V}$, então $\lambda = \bigcup M$ seria um ordinal menor que $\mathfrak{c}$ (pois a cofinalidade de $\mathfrak{c}$ é não enumerável). Assim existe um ordinal $\overline{\alpha}$, com $\lambda < \overline{\alpha} < \mathfrak{c}$. Logo existe $(x_{\overline{\alpha}}, x_{\overline{\alpha}})$ em ω^ω, $x_{\overline{\alpha}}$ na $\mathfrak{c}$-escala S, que não pertence a $\{F \cap (X_\alpha \times \omega^\omega) : \alpha \in M\}$ absurdo.

Portanto F não é de Lindelöf e com isso terminamos a demonstração do teorema. □

2.3 Concentração e produto de espaços de Lindelöf com os irracionais

Nesta seção vamos estudar o artigo de Lawrence [10]. Vamos introduzir o conceito de concentração que tem aplicações no produto de espaços de Lindelöf com o subespaço

$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Nós veremos quando um espaço topológico é concentrado num subconjunto dele. Nestas condições é possível encontrar exemplos de espaços métricos separáveis e espaços de Lindelöf cujo produto não é normal. Se assumimos que $\mathfrak{b} = \omega_1$ é possível encontrar um exemplo onde o espaço métrico separável pode ser $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

No final desta seção apresentaremos um resultado que dá uma condição para que produto de espaços de Lindelöf por espaços completamente metrizáveis e separáveis seja normal.

Definição 2.2. *Seja X um espaço topológico e $A \subseteq X$. Dizemos que X é* **concentrado** *em A se para todo aberto U contendo A, $X\backslash U$ é enumerável.*

Lembremos que $\mathbb{M}$, neste trabalho, denota a reta de Michael; isto é, $\mathbb{M}$ é o conjunto $\mathbb{R}$ com a topologia:

$$\Theta_{\mathbb{M}} = \{V \cup W : V \text{ é um aberto em } \mathbb{R} \text{ e } W \subseteq \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\}.$$

Também lembremos um pouco sobre subconjuntos compacto e σ-compactos de ω^ω.

Para cada $f \in \omega^\omega$, definimos $C_f \subseteq \omega^\omega$, como segue:

$$C_f = \{g \in \omega^\omega : g \leq f\}.$$

É fácil ver que $C_f = \prod_{i<\omega}[0, f(i)]$, onde $[0, f(i)]$ é um intervalo considerado em ω para cada $i < \omega$. Assim cada C_f vai ser um subconjunto compacto.

Notemos também que se C é um subconjunto compacto de ω^ω, então existe $f \in \omega^\omega$ tal que $C \subseteq C_f$. Definamos para cada $f \in \omega^\omega$,

$$C^*_f = \{g \in \omega^\omega : g \leq_* f\}$$

onde $\leq_*$ é definido como na definição 0.5.

Vejamos que para cada $f \in \omega^\omega$, C^*_f é σ-compacto. De fato,
se tomarmos para cada $n < \omega$,

$$W_n = \underbrace{\omega \times \cdots \times \omega}_{(n+1)\text{-vezes}} \times\{0, 1, ..., f(n+1)\} \times \{0, 1, ..., f(n+2)\} \times \cdots ,$$

então cada W_n é σ-compacto e como $C_f^* = \bigcup\{W_n : n < \omega\}$, tenemos que C_f^* é σ-compacto.

Além disso, se $K \subseteq \omega^\omega$ é σ-compacto, então existe $g \in \omega^\omega$ tal que $K \subseteq C_g^*$. De fato, como K é σ-compacto, pela observação acima, existe uma família $\{g_k \in \omega^\omega : k < \omega\}$ tal que $K \subseteq \bigcup\{C_{g_k} : k < \omega\}$. Tomando $g \in \omega^\omega$ de tal modo que para cada $n < \omega$, $g(n) = \sum_{k \leq n} g_k(n)$, segue-se que $K \subseteq C_g^*$.

Vamos agora enunciar alguns resultados para mostrar o Teorema 2.10, onde apresentamos outro exemplo, supondo que $\mathfrak{b} = \omega_1$, de um espaço normal e de Lindelöf X tal que $X \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ não é normal.

Lema 2.8. *Seja X um subconjunto não enumerável de ω^ω. Então são equivalentes as seguintes afirmações:*

i) Todo subconjunto não enumerável de X é ilimitado em $(\omega^\omega, \leq_*)$.

ii) X é um subconjunto não enumerável de ω^ω que tem intersecção enumerável com C_g^* para cada $g \in \omega^\omega$.

iii) X tem intersecção enumerável com qualquer subconjunto compacto de ω^ω.

iv) $X \cup \mathbb{Q}$, como subespaço de $\mathbb{R}$, é um espaço concentrado em $\mathbb{Q}$.

v) $X \cup \mathbb{Q}$, como subespaço de $\mathbb{M}$, é um espaço de Lindelöf.

Dem: Mostremos primeiramente que i) e iii) são equivalentes a ii).

i) $\rightarrow$ ii): Suponhamos que X possui intersecção não enumerável com C_g^* para algum $g \in \omega^\omega$. Então $X \cap C_g^*$ seria um subconjunto de X não enumerável e limitado em $(\omega^\omega, \leq_*)$, que contradiz i).

ii) $\rightarrow$ i): Seja $B \subseteq X$ não enumerável e suponhamos que B é limitado. Então existe

$f \in \omega^\omega$ tal que $B \subseteq C_f^*$; logo $C_f^* \cap X$ seria não enumerável, o que contradiz ii).

ii) $\rightarrow$ iii): Seja K um subconjunto compacto de ω^ω. Então existe $g \in \omega^\omega$ tal que $K \subseteq C_g^*$, portanto como $X \cap C_g^*$ é enumerável, temos que $X \cap K$ é também enumerável.
iii) $\rightarrow$ ii): Seja $g \in \omega^\omega$. Sabemos que C_g^* é σ-compacto. Portanto, como a união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável e usando iii), temos que $X \cap C_g^*$ é enumerável.

Para mostrar a equivalência entre iii) e iv). Vamos usar os seguintes fatos:

- ([8]) Um subconjunto K de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ é compacto em $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ se e só se K é um subconjunto fechado, limitado e de interior vazio em $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ que também é fechado como subconjunto de $\mathbb{R}$.

- No é dificil mostrar que se X é um espaço topológico, F um subconjunto fechado de X e D um subconjunto denso de X, então F tem interior vazio em X se e só se $F \cap D$ tem interior vazio em D.

iii) $\rightarrow$ iv): Seja $W \subseteq X \cup \mathbb{Q}$ aberto qualquer contendo $\mathbb{Q}$. Então existe W^* aberto de $\mathbb{R}$ tal que $W = W^* \cap (X \cup \mathbb{Q})$. Observemos que $(X \cup \mathbb{Q})\backslash W = X\backslash W^*$, ou seja $X\backslash W^*$ é o complementar de W em $X \cup \mathbb{Q}$. Assim para mostrar que $X \cup \mathbb{Q}$ é concentrado em $\mathbb{Q}$, basta mostrar que $X\backslash W^*$ é enumerável. Para isso note também que $X\backslash W^* \subseteq \mathbb{R}\backslash W^*$, onde $\mathbb{R}\backslash W^*$ é um fechado em $\mathbb{R}$ contido em $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ e portanto σ-compacto em $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Segue-se que $X\backslash W^*$ é enumerável, pois do contrário possuiria intersecção não enumerável pelo menos com algum dos compactos de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ cuja reunião é $\mathbb{R}\backslash W^*$, o que contradiz iii). Portanto $X \cup \mathbb{Q}$ é concentrado em $\mathbb{Q}$.

iv) $\rightarrow$ iii): Suponhamos por absurdo que existe $K \subseteq \omega^\omega$ compacto tal que $X \cap K$ seja não enumerável. Então $\mathbb{R}\backslash K$ é um aberto em $\mathbb{R}$ contendo o conjunto $\mathbb{Q}$. Assim, $W = (\mathbb{R}\backslash K) \cap (X \cup \mathbb{Q})$ é um aberto de $X \cup \mathbb{Q}$ que contém $\mathbb{Q}$ e tal que $(X \cup \mathbb{Q})\backslash W = X \cap K$

é não enumerável, o que contradiz iv). Portanto X tem intersecção enumerável com qualquer subconjunto de ω^ω.

Para finalizar a demonstração nós mostraremos que iv) e v) são equivalentes:

iv) $\to$ v): Seja $\mathcal{U} = \{U_i \cup V_i : i \in I\}$ um recobrimento aberto em $\mathbb{M}$ de $X \cup \mathbb{Q}$, com U_i aberto de $\mathbb{R}$ e $V_i \subseteq \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, para cada $i \in I$. Então existe $J \subseteq I$ enumerável tal que $\bigcup\{U_i : i \in J\} = \bigcup\{U_i : i \in I\}$. Mas $\bigcup\{U_i : i \in J\} \cap (X \cup \mathbb{Q})$ é um aberto em $X \cup \mathbb{Q}$ contendo $\mathbb{Q}$. Portanto, de iv) temos que $(X \cup \mathbb{Q})\backslash \bigcup\{U_i : i \in J\}$ é enumerável. Logo existe um sub-recobrimento enumerável de $\mathcal{U}$. Portanto, $X \cup \mathbb{Q}$ como subespaço de $\mathbb{M}$ é de Lindelöf.

v) $\to$ iv): Seja $W \subseteq X \cup \mathbb{Q}$ aberto qualquer contendo $\mathbb{Q}$. Logo existe $W^* \subseteq \mathbb{R}$ aberto tal que $W = (X \cup \mathbb{Q}) \cap W^*$. Observemos que $(X \cup \mathbb{Q})\backslash W = X\backslash W^*$. Assim se $(X \cup \mathbb{Q})\backslash W$ fosse não enumerável, então $X\backslash W^*$ também será não enumerável. Portanto o conjunto $\{W^*\} \cup \{\{x\} : x \in X\backslash W^*\}$ seria um recobrimento aberto em $\mathbb{M}$ de $X \cup \mathbb{Q}$ que não tem sub-recobrimento enumerável, o que contradiz v). Então $X \cup \mathbb{Q}$ como subespaço de $\mathbb{R}$ é concentrado em $\mathbb{Q}$.

$\square$

O lema seguinte dá uma condição necessária e suficiente para que exista um conjunto verificando as condições do lema anterior.

Lema 2.9. *Existe um subconjunto não enumerável X contido em $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ satisfazendo uma (e portanto todas) das condições do Lema 2.8 se é só se $\mathfrak{b} = \omega_1$.*

Dem: Se $X \subseteq \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ é não enumerável e satisfaz todas as condições do Lema 2.8, então tomamos $Y \subseteq X$ com $|Y| = \omega_1$. Assim a condição i) nos diz que Y é ilimitado em $({}^\omega\omega, \leq_*)$, de onde $\mathfrak{b} = \omega_1$.

Por outro lado, se $\mathfrak{b} = \omega_1$, usamos a igualdade $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1$ do Teorema 0.2, e tomamos $X = \{f_\beta : \beta < \omega_1\}$ ilimitado em $({}^\omega\omega, \leq_*)$, bem ordenado pela ordem $<^*$. Claramente X satisfaz a condição i) do Lema 2.8. $\square$

Teorema 2.10. *Se $\mathfrak{b} = \omega_1$, então existe um espaço de Lindelöf e regular X tal que o produto topológico $X \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ não é normal.*

Dem: Se $\mathfrak{b} = \omega_1$, então pelo Lema 2.9 existe $Z \subseteq \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ satisfazendo as condições do Teorema 2.8. Seja $X = Z \cup \mathbb{Q}$ com a topologia de subespaço de $\mathbb{M}$. É fácil ver que X é regular. Por v) do Lema 2.8 temos que X é um espaço de Lindelöf. Afirmamos que $X \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ não é normal. Com efeito, mostremos que $X \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ não é de Lindelöf, assim pelo Teorema 3.4 tal produto não será normal.

Consideremos o subconjunto de $X \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$

$$A = \{(x, x) : x \in Z\}.$$

Então A é um subespaço fechado, discreto e não enumerável de $X \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$. Portanto não é de Lindelöf, o que implica que $X \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ não pode ser de Lindelöf. $\square$

No que se segue, vamos apresentar um resultado de Lawrence [10] que permite encontrar espaços de Lindelöf cujo produto topológico com o espaço $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ é normal e também de Lindelöf. Antes vejamos alguns resultados preliminares:

Lema 2.11. *Seja S um espaço métrico separável e X um espaço de Lindelöf que é concentrado em um subconjunto fechado $A \subseteq X$ onde $A \times S$ é normal. Então as seguintes condições são equivalentes:*

i. $X \times S$ é normal

ii. Para cada subconjunto não enumerável $B \subseteq X\backslash A$ e cada função injetora $F : B \longrightarrow S$, temos que:

$$cl(Graph(F)) \cap (A \times S) \neq \phi$$

Dem: i.$\rightarrow$ ii.] Suponhamos que ii. não é verdadeira, então existem $B \subseteq X \backslash A$ não enumerável e $F : B \longrightarrow S$ injetora tais que $cl(Graph(F)) \cap (A \times S) = \phi$.

Nestas condições temos que $cl(Graph(F))$ e $(A \times S)$ são dois subconjuntos fechados e disjuntos em $X \times S$. Vejamos que eles não podem ser separados por abertos disjuntos em $X \times S$.

Seja $U \subseteq X \times S$ um aberto qualquer tal que $A \times S \subseteq U$. Seja D um subconjunto denso e enumerável em S. Definamos para cada $d \in D$ o seguinte subconjunto:

$$Y_d = \{x \in X : (x, d) \notin U\}.$$

Afirmamos que Y_d é enumerável para cada $d \in D$. De fato, dado que $A \times \{d\} \subseteq U$, temos que para cada $a \in A$, existe Z_a vizinhança aberta de a em X e existe também W_a vizinhança aberta de d em S tais que $(a, d) \in Z_a \times W_a \subseteq U$. Vamos ver que $Y_d \subseteq X \backslash \bigcup\{Z_a : a \in A\}$.

Seja $z \in Y_d$ e suponhamos que $z \in Z_a$ para algum $a \in A$. Logo $(z, d) \in Z_a \times W_a \subseteq U$ e assim $z \notin Y_d$, que é um absurdo. Portanto $Y_d \subseteq X \backslash \bigcup\{Z_a : a \in A\}$.

Logo, como X é concentrado em A e $A \subseteq \bigcup\{Z_a : a \in A\}$, ocorre que $X \backslash \bigcup\{Z_a : a \in A\}$ é enumerável. Portanto, para cada $d \in D$, Y_d é um subconjunto enumerável de X.

Agora, como B é não enumerável, podemos tomar $x_0 \in B \backslash \bigcup\{Y_d : d \in D\}$. Logo temos que $\{x_0\} \times D \subseteq U$ e portanto $(x_0, F(x_0)) \in cl(U)$. Isto mostra que $cl(Graph(F))$ e $(A \times S)$ não podem ser separados por abertos disjuntos em $X \times S$.

ii.$\rightarrow$ i.] **Observação:** Pelo Teorema 3.4 temos que $A \times S$ é de Lindelöf. Assim se para cada recobrimento aberto $\mathcal{V}$ em $X \times S$ de $A \times S$ o conjunto

$$\mathcal{L} = \{x \in X : \{x\} \times S \text{ não é coberto por } \mathcal{V}\ \} \tag{2.3.1}$$

é enumerável, então $X \times S$ é de Lindelöf (também normal).

Suponhamos que $X \times S$ não é normal. Logo pela observação anterior, temos que existe um recobrimento $\mathcal{V}$ de $A \times S$ formado por abertos de $X \times S$ tais que o conjunto $\mathcal{L}$ não é enumerável.

Seja $U = \bigcup \mathcal{V}$. Logo U é um aberto em $X \times S$ tal que $A \times S \subseteq U$ e $(X \times S) \backslash U$ intersecta um número não enumerável de seções verticais de $X \times S$.

Para cada $s \in S$ definamos

$$Y_s = \{x \in X : (x, s) \notin U\}$$

De modo análogo, à demonstração, em i.$\rightarrow$ ii., de que cada Y_d era enumerável, pode-se mostrar que, para cada $s \in S$ o conjunto Y_s é enumerável. Mas $Z = \bigcup\{Y_s : s \in S\}$ não é enumerável (pois contém o conjunto não enumerável $\{x \in X : \exists s \in S\ (x, s) \in (X \times S) \backslash U\}$).

Por recursão transfinita, vamos definir duas funções $\sigma : \omega_1 \longrightarrow Z$ e $\tau : \omega_1 \longrightarrow S$ do seguinte modo:

1. Tomamos $\sigma(0) \in Y_{\tau(0)}$.

2. Seja δ um número ordinal tal que $\delta < \omega_1$ e suponhamos definidos, para cada $\alpha < \delta$, $\sigma(\alpha)$ e $\tau(\alpha)$ tais que $\sigma(\alpha) \in Y_{\tau(\alpha)} \backslash \bigcup\{Y_{\tau(\beta)} : \beta < \alpha\}$. Pela não enumerabilidade de Z, existe $\tau(\delta) \in S$ tal que $Y_{\tau(\delta)} \backslash \bigcup\{Y_{\tau(\beta)} : \beta < \delta\} \neq \phi$. Logo existe $\sigma(\delta) \in Y_{\tau(\delta)} \backslash \bigcup\{Y_{\tau(\beta)} : \beta < \delta\}$.

Nestas condições definimos

$$\begin{array}{rccc} F: & im(\sigma) & \longrightarrow & S \\ & \sigma(\alpha) & \longmapsto & \tau(\alpha). \end{array}$$

Notemos que:

1. $im(\sigma) \subseteq X \backslash A$ é não enumerável.

2. F é injetora.

Então ii. implica que $cl(Graph(F)) \cap (A \times S) \neq \phi$.

Seja $(x, s) \in cl(Graph(F)) \cap (A \times S)$. Então $(x, s) \in A \times S \subseteq U$ e assim $U \cap Graph(F) \neq \phi$. Logo existe $\alpha < \omega_1$ tal que $(\sigma(\alpha), \tau(\alpha)) \in U$, que é absurdo pois $\sigma(\alpha) \in Y_{\tau(\alpha)}$ (ou seja $(\sigma(\alpha), \tau(\alpha)) \notin U$).

Portanto, $X \times S$ é normal. $\square$

Definição 2.3. *Suponhamos que S é um espaço métrico separável e $A \subseteq S$ onde S é concentrado em A. Definimos $\mathbb{L}(S, A)$ como sendo o conjunto S com a topologia dada por*

$$\{U \cup V : \ U \text{ é aberto em } S \text{ e } V \subseteq S \backslash A\}$$

Esta topologia é um refinamento de Lindelöf da topologia de S.

Notemos que como S é regular, então o espaço $\mathbb{L}(S, A)$ é também regular (Ver [[6], pág. 306, exemplo 5.1.22]).

Corolário 2.12. *Suponhamos que S é um espaço métrico separável e $A \subseteq S$, onde S é concentrado em A e $S \backslash A$ é não enumerável. Então $\mathbb{L}(S, A) \times (S \backslash A)$ não é normal (onde $S \backslash A$ tem a topologia de subespaço).*

Dem: Vamos supor que $\mathbb{L}(S, A) \times (S \backslash A)$ é normal. Notemos que $S \backslash A$ é um espaço métrico separável, $\mathbb{L}(S, A)$ é um espaço de Lindelöf concentrado em A (A é um subespaço fechado de $\mathbb{L}(S, A)$) e $A \times (S \backslash A)$ é normal (pelo Teorema 3.4). Assim estamos nas condições do Lema 2.11. Portanto para todo $B \subseteq \mathbb{L}(S, A) \backslash A$ não enumerável e para toda função $F : B \longrightarrow S \backslash A$ injetora, ocorre que $cl(Graph(F)) \cap (A \times (S \backslash A)) \neq \phi$.

Mas se consideramos a aplicação identidade $id : \mathbb{L}(S, A)\backslash A \longrightarrow S\backslash A$, temos que

$$\begin{aligned} cl(Graph(id)) \cap (A \times (S\backslash A)) &= cl(\{(x, x) : x \in S\backslash A\}) \cap (A \times (S\backslash A)) \\ &= \{(x, x) : x \in S\backslash A\} \cap (A \times (S\backslash A)) \\ &= \phi \end{aligned}$$

o que é absurdo.

Portanto, $\mathbb{L}(S, A) \times (S\backslash A)$ não é normal.

$\square$

Lema 2.13. *Seja Y um espaço completamente metrizável e separável e $A \subseteq X \subseteq Y$, onde X é concentrado em A e $\mathbb{L}(X, A) \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ não normal. Então existe um espaço de Cantor $K \subseteq Y$ tal que $K \cap A = \phi$ e $K \subseteq cl_Y(A)$.*

Dem: Vejamos as seguintes observações:

- Como X é concentrado em A, então $\mathbb{L}(X, A)$ é concentrado em A.
- A é fechado em $\mathbb{L}(X, A)$.
- $A \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ é normal como subespaço de $\mathbb{L}(X, A) \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$, pois é de Lindelöf (Teorema 3.4). De fato, observemos que a topologia que herda A como subespaço de $\mathbb{L}(X, A)$ é a mesma que herda como subespaço de X, o qual é hereditariamente separável (de Lindelöf), portanto $A \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ vai ser um espaço de Lindelöf.

Das observações anteriores, como temos que $\mathbb{L}(X, A) \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ não é normal, pelo Lema 2.11 existem $B \subseteq X\backslash A$ não enumerável e $F : B \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ função injetora tal que

$$cl_{(\mathbb{L}(X,A)\times(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}))}(Graph(F)) \cap (A \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})) = \phi \tag{2.3.2}$$

Seja $G = cl_{Y\times(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})}(Graph(F))$, afirmamos que $G \cap (A \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})) = \phi$.
De fato, seja $(a, p) \in A \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$, então por (2.3.2) existe U, vizinhança aberta de (a, p) em $\mathbb{L}(X, A) \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ tal que $U \cap Graph(F) = \phi$.

Observação: Podemos tomar U aberto em $X \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$, dado que $a \in A$ (ver como foi definida a topologia de $\mathbb{L}(X, A)$).

Portanto, dada a observação anterior temos que existe V, aberto em $Y \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$, tal que

$$U = V \cap (X \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}))$$

Logo segue que

$$\phi = U \cap Graph(F) = (V \cap (X \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}))) \cap Graph(F) = V \cap Graph(F).$$

Assim mostramos que, para todo ponto (a,p) de $A \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$, existe uma vizinahnça aberta $V_{(a,p)}$ em $Y \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ tal que $V_{(a,p)} \cap Graph(F) = \phi$. Portanto $G \cap (A \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})) = \phi$.

Vamos construir agora conjuntos $\{K_\varphi \subseteq Y : \varphi \in \{0,1\}^n, n < \omega\}$ e $\{W_\varphi \subseteq \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : \varphi \in \{0,1\}^n, n < \omega\}$ tais que:

1. Para cada $n < \omega$ e para cada $\varphi \in \{0,1\}^n$, K_φ seja aberto em Y e W_φ seja aberto em $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

2. $cl_Y(K_{\varphi_0,...,\varphi_{n+1}}) \subseteq K_{\varphi_0,...,\varphi_n}$ e $cl_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}(W_{\varphi_0,...,\varphi_{n+1}}) \subseteq W_{\varphi_0,...,\varphi_n}$ para cada $n < \omega$ e para cada $\varphi = (\varphi_0, ..., \varphi_{n+1}) \in \{0,1\}^{n+2}$.

3. $cl_Y(K_0) \cap cl_Y(K_1) = \phi$ e
   $cl_Y(K_{\varphi_0,...,\varphi_{n-1},0}) \cap cl_Y(K_{\varphi_0,...,\varphi_{n-1},1}) = \phi$, para cada n com $0 < n < \omega$ e para $\varphi = (\varphi_0, ..., \varphi_{n-1}) \in \{0,1\}^n$.

4. $cl_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}(W_0) \cap cl_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}(W_1) = \phi$ e
   $cl_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}(W_{\varphi_0,...,\varphi_{n-1},0}) \cap cl_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}(W_{\varphi_0,...,\varphi_{n-1},1}) = \phi$, para cada n com $0 < n < \omega$ e para $\varphi = (\varphi_0, ..., \varphi_{n-1}) \in \{0,1\}^n$.

5. Para cada $n < \omega$, temos que $diam(K_{\varphi_0,...,\varphi_n}) < \frac{1}{n+1}$ e $diam(K_{\varphi_0,...,\varphi_n} \times W_{\varphi_0,...,\varphi_n}) < \frac{1}{n+1}$.

6. Para cada $n < \omega$ e para cada $\varphi \in \{0,1\}^n$ ocorre $|(K_\varphi \times W_\varphi) \cap Graph(F)| \geq \omega_1$.

Para isso, como $|Graph(F)| \geq \omega_1$, tomemos t_0 e t_1 diferentes em B tais que $(t_0, F(t_0))$ e $(t_1, F(t_1))$ sejam pontos de condensação de $Graph(F)$ (para encontrar tais pontos escrevemos $Graph(F)$ como união de dois conjuntos disjuntos não enumeráveis e aplicamos o Teorema 0.4).

Sejam K_0 e K_1 vizinhanças abertas em Y de t_0 e t_1 respectivamente e W_0 e W_1 vizinhanças abertas em $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ de $F(t_0)$ e $F(t_1)$ respectivamente, tais que:

- $cl_Y(K_0) \cap cl_Y(K_1) = \phi$
- $diam(K_0) < 1$, $diam(K_1) < 1$, $diam(K_0 \times W_0) < 1$ e $diam(K_1 \times W_1) < 1$.

Suponhamos definidos agora $\{K_\varphi \subseteq Y : \varphi \in \{0,1\}^n\}$ e $\{W_\varphi \subseteq \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : \varphi \in \{0,1\}^n\}$ satisfazendo as condições acima, para um certo n fixo com $0 < n < \omega$.

Seja $\varphi = (\varphi_0, ..., \varphi_{n-1}) \in \{0,1\}^n$.
Como $|K_\varphi \times W_\varphi \cap Graph(F)| \geq \omega_1$, existem $t_{\varphi,0}$ e $t_{\varphi,1}$ em B diferentes tais que $(t_{\varphi,0}, F(t_{\varphi,0}))$ e $(t_{\varphi,1}, F(t_{\varphi,1}))$ são pontos de condensação de $(K_\varphi \times W_\varphi) \cap Graph(F)$. Tomemos $K_{\varphi_0,...,\varphi_{n-1},0}$ e $K_{\varphi_0,...,\varphi_{n-1},1}$ vizinhanças abertas em Y de $t_{\varphi,0}$ e $t_{\varphi,1}$ respectivamente, e $W_{\varphi_0,...,\varphi_{n-1},0}$ e $W_{\varphi_0,...,\varphi_{n-1},1}$ vizinhanças abertas em $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ de $F(t_{\varphi,0})$ e $F(t_{\varphi,1})$ respectivamente, tais que:

- $cl_Y(K_{\varphi_0,...,\varphi_{n-1},r}) \subseteq K_{\varphi_0,...,\varphi_{n-1}}$ para $r = 0, 1$.
- $cl_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}(W_{\varphi_0,...,\varphi_{n-1},r}) \subseteq W_{\varphi_0,...,\varphi_{n-1}}$ para $r = 0, 1$.
- $cl_Y(K_{\varphi_0,...,\varphi_{n-1},0}) \cap cl_Y(K_{\varphi_0,...,\varphi_{n-1},1}) = \phi$.
- $cl_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}(W_{\varphi_0,...,\varphi_{n-1},0}) \cap cl_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}(W_{\varphi_0,...,\varphi_{n-1},1}) = \phi$.
- $diam(K_{\varphi_0,...,\varphi_{n-1},r}) < \frac{1}{n+1}$ e $diam(K_{\varphi_0,...,\varphi_{n-1},r} \times W_{\varphi_0,...,\varphi_{n-1},r}) < \frac{1}{n+1}$.

Portanto temos construído por recursão finita os conjuntos $\{K_\varphi \subseteq Y : \varphi \in \{0,1\}^n, n < \omega\}$ e $\{W_\varphi \subseteq \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : \varphi \in \{0,1\}^n, n < \omega\}$ com as condições que queríamos.

Se consideramos as seguintes funções

$$\begin{array}{rccl} \psi_1 : & \{0,1\}^\omega & \longrightarrow & Y \\ & \varphi & \longmapsto & \psi_1(\varphi) \text{ onde } \{\psi_1(\varphi)\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_{\varphi_0,\ldots,\varphi_n} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \psi_2 : & \{0,1\}^\omega & \longrightarrow & Y \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \\ & \varphi & \longmapsto & \psi_2(\varphi) \qquad \text{onde } \{\psi_2(\varphi)\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_{\varphi_0,\ldots,\varphi_n} \times W_{\varphi_0,\ldots,\varphi_n} \end{array}$$

então temos os seguintes fatos:

- $H = \psi_2\left[\{0,1\}^\omega\right]$ e $K = \psi_1\left[\{0,1\}^\omega\right]$ são espaços de Cantor, (ver a demonstração do Teorema 1.13).
- $\prod_1[H] = K$, onde $\prod_1 : Y \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \longrightarrow Y$ é a projeção.
- $H \subseteq G$, pois senão, existiria $x \in H\backslash G$ e uma vizinhança aberta em $Y \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ U de x, tal que $U \subseteq (Y \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}))\backslash G$. Tomemos n suficientemente grande tal que exista $\varphi \in \{0,1\}^n$ tal que $x \in K_\varphi \times W_\varphi \subseteq U$. Então $(K_\varphi \times W_\varphi) \cap G = \phi$, o que é absurdo pois $|(K_\varphi \times W_\varphi) \cap G| \geq \omega_1$. Portanto $H \subseteq G$.

Afirmamos que $K \cap A = \phi$ e $K \subseteq cl_Y(A)$.
$K \cap A = \phi$: Suponhamos que $K \cap A \neq \phi$, então existe $x \in K \cap A$. Seja $p \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ tal que $(x,p) \in H$, logo $(x,p) \in H \cap (A \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}))$, o que é absurdo, pois $H \subseteq G$ e $G \cap (A \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})) = \phi$. Concluímos que $K \cap A = \phi$.

$K \subseteq cl_Y(A)$: Seja $k \in K$ e tomemos $p \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ tal que $(k,p) \in H$. Consideremos Z uma vizinhança aberta em Y de k e mostremos que $Z \cap A \neq \phi$.
De fato, se W é uma vizinhança aberta em $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ de p, então $(k,p) \in Z \times W$. Tomemos n suficientemente grande tal que exista $\varphi \in \{0,1\}^n$ tal que $(k,p) \in K_\varphi \times W_\varphi \subseteq Z \times W$. Como $|(K_\varphi \times W_\varphi) \cap Graph(F)| \geq \omega_1$ e $Graph(F) \subseteq (X\backslash A) \times (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ ocorre que $|Z \cap X| \geq \omega_1$.

Suponhamos que $Z \cap A = \phi$. Dado que $|Z \cap X| \geq \omega_1$, pelo Teorema 0.4, existe t', ponto de condensação de $Z \cap X$. Tomemos Z^* aberto em Y, tal que $t' \in Z^* \subseteq \overline{Z^*} \subseteq Z$. Então $A \cap (\overline{Z^*} \cap X) = \phi$ e assim $A \subseteq X \backslash (\overline{Z^*} \cap X)$ (que é aberto em X), portanto $\overline{Z^*} \cap X$ é enumerável e assim $Z^* \cap X$ também seria enumerável, que é absurdo pois $|Z^* \cap X| \geq \omega_1$.

Mostramos que para cada $k \in K$ e para toda vizinhança aberta Z_k em Y desse ponto temos $Z_k \cap A \neq \phi$. Portanto $K \subseteq cl_Y(A)$.

Com isso terminamos a demonstração do teorema. $\square$

O teorema a seguir, fornece condição para o produto $\mathbb{L}(S, A) \times (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ ser normal. Vejamos:

Teorema 2.14. *Suponhamos que Y é um espaço completamente metrizável e separável que é concentrado sobre um subconjunto A. Então $\mathbb{L}(Y, A) \times (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ é normal.*

Dem: Se K é um espaço de Cantor contido em Y, então $K \cap A \neq \phi$. De fato, se $K \cap A = \phi$, teriamos que $Y \backslash K$ seria um aberto em Y contendo o subconjunto A. Portanto K seria um conjunto de Cantor enumerável, que é uma contradição. Portanto, $K \cap A \neq \phi$. Assim pela contrapositiva do Lema 2.13, temos que $\mathbb{L}(Y, A) \times (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ é normal. $\square$

Capítulo 3

Produtos com um fator Lindelöf e um fator métrico separável

Neste capítulo, um dos nossos objetivos principais é mostrar um teorema provado por M. E. Rudin e M. Starbird ([16]), que apresentaremos no Teorema 3.4 (página 85). Ele foi suposto conhecido e usado em algumas demonstrações no capítulo anterior, por isso vamos demonstrá-lo agora.

É bom ressaltar que este mesmo teorema também é mostrado por A. Beslagic em [3], mas neste trabalho partindo das ideias dos matemáticos antes mencionados e junto com os resultados apresentados no apêndice A, damos uma demonstração que junta todas estas ideias.

Anteriormente no Capítulo 2, vimos exemplos de espaços normais tais que o produto com o subespaço topológico $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ não era normal. Uma pergunta natural que podemos fazer é: quais são as condições necessárias para que esse produto seja normal. Vamos estudar um problema mais abrangente que responde essa pergunta parcialmente. Pensemos sob quais condições, para um espaço topológico X, as asserções "X é normal" e $X \times Y$ é "normal para todo espaço métrico separável Y" são equivalentes. Kiiti Morita (1964) deu uma resposta a esse problema (ver [14]) enunciando um teorema, que vamos demonstrar usando alguns resultados presentes nesse artigo e que neste trabalho vamos apenas enunciá-los.

3.1 Teorema de Rudin e Starbird

Nesta seção os espaços métricos (ou metrizáveis) vão ser considerados não discretos, a menos que indiquemos o contrário, e todos os espaços topológicos serão supostos de Hausdorff.

O resultado seguinte se deve a Mary E. Rudin e Michael Starbird (ver [16]).

Teorema 3.1. *Sejam X um espaço normal e (M, d) um espaço métrico. O produto topológico $X \times M$ é normal se e somente se $X \times M$ é enumeravelmente paracompacto.*

Dem: Seja $\Pi_1 : X \times M \longrightarrow X$ a função projeção.

$\Rightarrow$] Suponhamos que $X \times M$ seja um espaço normal.
Seja $\mathcal{B} = \bigcup\{\mathcal{B}_n : n < \omega\}$ uma base de M tal que:

- Cada $\mathcal{B}_n$ é uma família localmente finita de abertos de M com diâmetro menor que $1/2^n$.
- Cada elemento discreto de $\mathcal{B}$ contém exatamente um ponto.

Por recursão sobre os elementos não discretos de $\mathcal{B}$, podemos tomar pontos $p_B \neq q_B$ em B, para cada elemento não discreto $B \in \mathcal{B}$, tais que nenhum ponto de M seja tomado duas vezes (ver Lema B.3, na página 101).

Para mostrar que $X \times M$ é enumeravelmente paracompacto, tomemos $\{U_m : m < \omega\}$ uma cobertura aberta qualquer de $X \times M$ e vamos construir uma cobertura aberta $\{V_{m,n} : m, n < \omega\}$ tal que $\overline{V_{m,n}} \subseteq U_m$ para cada $m, n < \omega$. Assim pelo Lema B.1 (na página 100), pode-se concluir que $X \times M$ é enumeravelmente paracompacto.

Para cada $B \in \mathcal{B}$ e $m < \omega$, seja $U_{B,m}$ o maior subconjunto aberto de X tal que $U_{B,m} \times \overline{B} \subseteq U_m$. Definamos $F_B = X \setminus \bigcup\{U_{B,m} : m < \omega\}$. Notemos que cada F_B é fechado em X e que no caso de B ser discreto, ocorre que $F_B = \phi$.

Tomemos $H_B = F_B \times \{p_B\}$ e $K_B = F_B \times \{q_B\}$ se B não é discreto, caso contrário, definimos $H_B = F_B = \phi$. Para cada $n < \omega$, seja $H_n = \bigcup\{H_B : B \in \mathcal{B}_n\}$ e $K_n = \bigcup\{K_B : B \in \mathcal{B}_n\}$.

Vamos verificar que para cada $n < \omega$, os conjuntos $\{H_B : B \in \mathcal{B}_n\}$ e $\{K_B : B \in \mathcal{B}_n\}$ são localmente finitos, e então teremos que H_n e K_n são conjuntos fechados. De fato, seja $(x, y) \in X \times M$. Dado que $\mathcal{B}_n$ é localmente finita, para y existe W_y, vizinhança aberta de y em M, tal que W_y só intersecta $B_n^{(1)}, B_n^{(2)}, ..., B_n^{(r)}$ em $\mathcal{B}_n$, para algum $n < \omega$

Logo $X \times W_y$ é uma vizinhança aberta de (x, y) tal que ela intersecta apenas um número finito de H_B's. Com efeito, se $B \notin \{B_n^{(1)}, B_n^{(2)}, ..., B_n^{(r)}\}$, então $H_B \cap (X \times W_y) = \phi$, senão existiria $(z_1, z_2) \in H_B \cap (X \times W_y)$. Segue que $z_2 = p_B$, e como $p_B \in B$, ocorreria que $W_y \cap B \neq \phi$, que é uma contradição, e portanto, $H_B \cap (X \times W_y) = \phi$. Assim $(X \times W_y)$ é uma vizinhança aberta de (x, y) que intersecta um número finito de elementos H_B's. Logo $\{H_B : B \in \mathcal{B}_n\}$ é localmente finita.

Analogamente, $\{K_B : B \in \mathcal{B}_n\}$ é localmente finita.

finamos $H = \bigcup\{H_n : n < \omega\}$ e $K = \bigcup\{K_n : n < \omega\}$. Notemos que:

1. $H \cap K = \phi$. Senão, existiria $(x, y) \in H \cap K$ o que implica que $(x, y) \in F_B \times \{p_B\}$ e $(x, y) \in F_{B^*} \times \{q_{B^*}\}$, para alguns $B \in \mathcal{B}_k$ e $B^* \in \mathcal{B}_l$. Então $p_B = q_{B^*}$ o qual não acontece. Portanto $H \cap K = \phi$.

2. H e K são conjuntos fechados em $X \times M$. De fato, fixemos um ponto $(x, y) \in X \times M$ e encontremos um $k < \omega$ tal que $(x, y) \notin \overline{\bigcup\{H_n : n \geq k\}}$, isto mostra que H é fechado. Analogamente K também será fechado.

   Sabemos que existe $m < \omega$ tal que $(x, y) \in U_m$. Logo existem também $B \subseteq M$

e $A \subseteq X$ abertos tais que $(x,y) \in A \times B \subseteq \overline{A} \times \overline{B} \subseteq U_m$. Seja $0 < r < \omega$ tal que $S_{1/2^r}(y) \subseteq B$, e tomemos $k = 2r$ e $C = S_{1/2^k}(y)$. Vejamos que para cada $B^* \in \bigcup\{\mathcal{B}_n : n \geq k\}$ se $B^* \cap C \neq \phi$, então $B^* \subseteq B$. De fato, tomemos B^* nessas condições ($B^* \in \mathcal{B}_n$) e consideremos $w \in B^* \cap C$. Se $z \in B^*$ então $d(z,w) < 1/2^n$, logo

$$d(z,y) \leq d(z,w) + d(w,y) < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^k} \leq 2\left(\frac{1}{2^{\min\{n,k\}}}\right) = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Como $k - 1 = 2r - 1 \geq r$, segue-se que $d(z,y) < 1/2^r$, ou seja, $z \in S_{1/2^r}(y) \subseteq B$. Portanto $B^* \subseteq B$.

Se mostrarmos que $(A \times C) \cap \bigcup\{H_n : n \geq k\} = \phi$, dado que $(x,y) \in A \times C$, podemos concluir que $(x,y) \notin \overline{\bigcup\{H_n : n \geq k\}}$. Neste sentido, se $(z_1,z_2) \in \bigcup\{H_n : n \geq k\}$, então existe $t < \omega$ tal que $(z_1,z_2) \in H_t$. Logo tomamos $B^* \in \mathcal{B}_t$ tal que $(z_1,z_2) \in H_{B^*} = F_{B^*} \times \{p_{B^*}\}$, assim $z_1 \in F_{B^*}$ e $z_2 = p_{B^*}$.

Se $(z_1,z_2) \in A \times C$, dado que $z_2 = p_{B^*} \in C \cap B^*$, temos que $B^* \subseteq B$. Logo, $(z_1,z_2) \in A \times \overline{B^*} \subseteq A \times \overline{B} \subseteq U_m$. Segue que $z_1 \in U_{B^*,m}$ e então $z_1 \notin F^*_B$, que é um absurdo. Portanto $(A \times C) \cap \bigcup\{H_n : n \geq k\} = \phi$.

Já que $X \times M$ é normal, consideremos I e J abertos em $X \times M$ tais que $H \subseteq I$, $K \subseteq J$ e $\overline{I} \cap \overline{J} = \phi$. Para cada $B \in \mathcal{B}$, seja $U_B = \Pi_1[I \cap (X \times B)] \cap \Pi_1[J \cap (X \times B)]$. Assim U_B é aberto em X e $F_B \subseteq U_B$. Portanto para cada $B \in \mathcal{B}$, a família $\{U_{B,m} : m < \omega\} \cup \{U_B\}$ é uma cobertura aberta de X. Dado que M é não discreto, temos que X é enumeravelmente paracompacto (ver o Lema B.4 no apêndice), e portanto podemos tomar uma cobertura aberta $\{V_{B,m} : m < \omega\} \cup \{V_B\}$ de X tal que $\overline{V_{B,m}} \subseteq U_{B,m}$ e $\overline{V_B} \subseteq U_B$.

Para cada $m,n < \omega$, definamos $V_{m,n} = \bigcup\{V_{B,m} \times B : B \in \mathcal{B}_n\}$. Como $\mathcal{B}_n$ é localmente finita, temos que $\overline{V_{m,n}} = \bigcup\{\overline{V_{B,m}} \times \overline{B} : B \in \mathcal{B}_n\} \subseteq U_m$. Falta mostrar que $\{V_{m,n} : m,n < \omega\}$ é um recobrimento de $X \times M$. Seja $(x,y) \in X \times M$ um ponto qualquer. Como $\overline{I} \cap \overline{J} = \phi$, então $(x,y) \notin \overline{I}$ ou $(x,y) \notin \overline{J}$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $(x,y) \notin \overline{I}$. Fixemos $A \times B$ uma vizinhança aberta de (x,y), com $B \in \mathcal{B}$ e $(A \times B) \cap \overline{I} = \phi$. Mas então $\Pi_1[I \cap (X \times B)] \cap A = \phi$ logo $x \notin U_B$ e portanto

existe $m < \omega$ tal que $x \in V_{B,m}$. Segue-se que $(x, y) \in V_{B,m} \times B$, o que implica que $\{V_{m,n} : m, n < \omega\}$ é uma cobertura de $X \times M$.
Concluímos que $X \times M$ é enumeravelmente paracompacto.

$\Leftarrow$] Suponhamos que $X \times M$ seja um espaço enumeravelmente paracompacto. Seja $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_i : i < \omega\}$ uma família de coberturas abertas localmente finitas de M tais que:

(a) $diam(G) < \frac{1}{2^n}$ para todo $G \in \mathcal{G}_n$.

(b) $\mathcal{G}_{n+1}$ é refinamento de $\mathcal{G}_n$ para cada $n < \omega$.

Para a existência de tal família veja o Lema B.2 (no apêndice página 101).

Sejam H e K dois fechados disjuntos em $X \times M$. Para cada $G \in \bigcup \mathcal{G}$ definamos

$$R_G = \overline{\Pi_1 \left[H \cap (X \times \overline{G})\right]} \cap \overline{\Pi_1 \left[K \cap (X \times \overline{G})\right]}$$

e para cada $n < \omega$ seja

$$R_n = \bigcup \{R_G \times \overline{G} : G \in \mathcal{G}_n\}.$$

O conjunto $\{R_n : n < \omega\}$ tem as seguintes propriedades:

- R_n é fechado em $X \times M$, para cada $n < \omega$, pois $\mathcal{G}_n$ é localmente finita.

- $R_{n+1} \subseteq R_n$. De fato, $(x, y) \in R_{n+1}$, existe $G \in \mathcal{G}_{n+1}$ tal que $(x, y) \in R_G \times \overline{G}$. Como $\mathcal{G}_{n+1}$ é refinamento de $\mathcal{G}_n$, existe $G^* \in \mathcal{G}_n$ tal que $G \subseteq G^*$, assim, $(x, y) \in R_G \times \overline{G} \subseteq R_{G^*} \times \overline{G^*}$. Logo $(x, y) \in R_n$. Portanto $R_{n+1} \subseteq R_n$.

- $\bigcap\{R_n : n < \omega\} = \phi$. Senão, existiria $(x, y) \in \bigcap\{R_n : n < \omega\}$. Logo para cada $n < \omega$ existiria $G_n \in \mathcal{G}_n$ tal que $x \in R_{G_n}$ e $y \in \overline{G_n}$. Vamos mostrar que isto implicaria que $(x, y) \in H \cap K$, o que é um absurdo.

  De fato, consideremos $W \times V$ vizinhança aberta básica qualquer de (x, y). Logo para cada $n < \omega$, temos que

  $$W \cap \Pi_1 \left[H \cap (X \times \overline{G_n})\right] \neq \phi \text{ e } W \cap \Pi_1 \left[K \cap (X \times \overline{G_n})\right] \neq \phi \ .$$

Sejam $w_n, z_n \in X$ tais que

$$w_n \in W \cap \Pi_1 \left[H \cap (X \times \overline{G_n})\right] \text{ e } z_n \in W \cap \Pi_1 \left[K \cap (X \times \overline{G_n})\right].$$

Logo existem $x_n, y_n \in M$ tais que $(w_n, x_n) \in H \cap (X \times \overline{G_n})$ e $(z_n, y_n) \in K \cap (X \times \overline{G_n})$.

Como $diam(\overline{G_n}) < 1/2^n$, $d(x_n, y) < 1/2^n$ e $d(y_n, y) < 1/2^n$. Portanto as sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergem a y.

Dado que V é uma vizinhança de y, existem $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tais que se $n \geq N_1$, então $x_n \in V$ e se $n \geq N_2$ logo $y_n \in V$. Tomemos $N_0 = \max\{N_1, N_2\}$, assim se $n \geq N_0$, então $x_n, y_n \in V$.
Segue que $(w_{N_0}, x_{N_0}) \in (W \times V) \cap H$ e $(z_{N_0}, y_{N_0}) \in (W \times V) \cap K$. Concluímos então que $(x, y) \in \overline{H} \cap \overline{K} = H \cap K$.

Portanto, $\bigcap\{R_n : n < \omega\} = \phi$.

Nestas condições, pelo Teorema 0.11, existe $\mathcal{S} = \{S_n : n < \omega\}$ cobertura aberta de $X \times M$ tal que para cada $n < \omega$, $\overline{S_n} \cap R_n = \phi$. Se tomamos para cada $n < \omega$, $U_n = \bigcup\{S_k : k \leq n\}$ então temos uma cobertura aberta de $X \times M$ tal que $\overline{U_n} \cap R_n = \phi$ e $U_n \subseteq U_{n+1}$ para cada $n < \omega$.

Fixe $n < \omega$. Definamos para cada $G \in \mathcal{G}_n$

$$X_G = \{x \in X : (\{x\} \times G) \subseteq \overline{U_n}\}.$$

Então os conjuntos X_G e R_G, para cada $G \in \mathcal{G}_n$, são dois fechados disjuntos no espaço normal X. Portanto existe $V_G \subseteq X$ aberto tal que:

- $X_G \cap \overline{\Pi_1 \left[H \cap (X \times \overline{G})\right]} \subseteq V_G$.
- $\overline{V_G} \cap \overline{\Pi_1 \left[K \cap (X \times \overline{G})\right]} = \phi$.

Tomemos

$$V_n = \bigcup\{V_G \times G : G \in \mathcal{G}_n\}.$$

Deste modo concluímos que:

1. $\overline{V_n} \cap K = \phi$ para cada $n < \omega$.

   Senão, tomemos $(z_1, z_2) \in \overline{V_n} \cap K$. Então $(z_1, z_2) \in K$ e para cada vizinhança $W_1 \times W_2$ de (z_1, z_2) em $X \times M$, $(W_1 \times W_2) \cap V_n \neq \phi$, ou seja existe $G \in \mathcal{G}_n$, tal que $(W_1 \times W_2) \cap (V_G \times G) \neq \phi$.

   Portanto, $W_1 \cap V_G \neq \phi$ e $W_2 \cap G \neq \phi$. Como W_1 e W_2 são vizinhanças quaisquer de z_1 e z_2 respectivamente, ocorre que $z_1 \in \overline{V_G}$ e $z_2 \in \overline{G}$. Assim $z_1 \in \overline{V_G} \cap \Pi_1 \left[K \cap (X \times \overline{G})\right]$, o que é absurdo pela escolha dos V_G's. Portanto, $\overline{V_n} \cap K = \phi$.

2. $H \subseteq \bigcup\{V_n : n < \omega\}$.

   Se $(x, y) \in H$, então existe $t < \omega$ tal que $(x, y) \in U_t$. Podemos tomar um $k < \omega$, suficientemente grande $(k \geq t)$ tal que $(x, y) \in \{x\} \times G_k \subseteq U_t$, para algum $G_k \in \mathcal{G}_k$. Logo $\{x\} \times G_k \subseteq U_k$ (pois $U_t \subseteq U_k$), isto é, existe $G_k \in \mathcal{G}_k$ tal que $x \in X_{G_k}$.

   Por outro lado, dado que $(x, y) \in H$ e $(x, y) \in X \times \overline{G_k}$, acontece que $x \in \overline{\Pi_1 \left[H \cap (X \times \overline{G}_k)\right]}$, segue que $x \in X_{G_k} \cap \overline{\Pi_1 \left[H \cap (X \times \overline{G}_k)\right]} \subseteq V_{G_k}$. Portanto, dado que $y \in G_k$, $(x, y) \in V_k$.

   Concluímos que $H \subseteq \bigcup\{V_n : n < \omega\}$.

De modo análogo, podemos cobrir K com um número enumerável de abertos, de tal modo que os seus fechos não intersectem H. Deste modo podemos concluir que H e K podem ser separados por abertos disjuntos em $X \times M$. Portanto, $X \times M$ é normal. □

Corolário 3.2. *Sejam M um espaço metrizável e K um espaço compacto. Se $X \times M$ e $X \times K$ são normais, então $X \times M \times K$ é também normal.*

Dem: Pelo Teorema 3.1, temos que $X \times M$ é enumeravelmente paracompacto, então como K é compacto, o produto $X \times M \times K = (X \times K) \times M$ é enumeravelmente paracompacto. Assim usando de novo o Teorema 3.1 concluímos que $(X \times M) \times K$ é normal. □

Corolário 3.3. *Sejam M um espaço metrizável e X um espaço paracompacto. Se $X \times M$ é normal então $X \times M$ é paracompacto.*

Dem: Tomemos $K = \beta(X \times M)$. Pelo Corolário 3.2, temos que o produto $X \times M \times K$ é normal. Portanto pelo Corolário A.5 (no apêndice), $X \times M$ é paracompacto. $\square$

Com os lemas, os corolários e os teoremas anteriores já temos as condições necessárias para apresentar o Teorema de Rundin e Starbird, e com ele chegamos a os nossos objetivos nesta seção. Lembremos que neste capítulo estamos supondo que os espaços métricos mencionados não são discretos, mas o teorema a seguir ainda vale se algum dos fatores for discreto, como é dito por Beslagic em [3, pág. 24]. Vejamos:

Teorema 3.4 (M. E. Rudin e M. Starbird). *Sejam X um espaço regular de Lindelöf e Y um espaço metrizável e separável, então são equivalentes as seguintes condições:*

i. $X \times Y$ *é normal.*

ii. $X \times Y$ *é de Lindelöf.*

Dem: i. $\Rightarrow$ ii.] Seja D um subconjunto denso enumerável de Y. Então $X \times D$ é um subespaço denso de Lindelöf de $X \times Y$. Assim, se $X \times Y$ for paracompacto e T_2, então pelo Teorema 0.10, $X \times Y$ será de Lindelöf. Claramente, $X \times Y$ é T_2. De fato, pelo Corolário 3.3, dado que X é paracompacto (pois é regular e de Lindelöf), temos que $X \times Y$ é paracompacto. Portanto, $X \times Y$ é de Lindelöf.

ii. $\Rightarrow$ i.] Suponhamos que $X \times Y$ é um espaço de Lindelöf, então como ele é também regular (pois X e Y são regulares) temos que $X \times Y$ é um espaço normal. $\square$

3.2 Normalidade no produto de espaços normais com um espaço métrico separável

Esta seção tem como objetivo responder a seguinte pergunta: Quais condições poderíamos exigir de um espaço normal X, para que o produto $X \times (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ seja normal?

Como já falamos aqui, vamos tratar um problema um pouco mais abrangente. K. Morita em [14], usando a noção de $P(2)$-espaços, conseguiu mostrar que se X é um espaço topológico, então o produto de X com qualquer espaço métrico separável é normal se e só se X é um $P(2)$-espaço normal. Assim, claramente para todo $P(2)$-espaço normal o produto com o $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ é normal.

Definição 3.1 ($P(2)$-espaço)**.** *Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é um $P(2)$-espaço se para cada família $\{G_{y_0,\ldots,y_i} : y_i \in \{0,1\},\ i < \omega\}$ de subconjuntos abertos de X, tais que: $G_{y_0,\ldots,y_i} \subseteq G_{y_0,\ldots,y_i,y_{i+1}}$ para cada $i < \omega$, existe uma família $\{F_{y_0,\ldots,y_i} : y_i \in \{0,1\},\ i < \omega\}$ de subconjuntos fechados de X satisfazendo as seguintes condições*

- *$F_{y_0,\ldots,y_i} \subseteq G_{y_0,\ldots,y_i}$ para cada $y_0, y_1, .., y_i \in \{0,1\}$ e para cada $i < \omega$.*
- *$X = \bigcup\{F_{y_0,\ldots,y_i} : i < \omega\}$ para cada sequência $y = (y_0, y_1, \ldots) \in \{0,1\}^\omega$ tal que $X = \bigcup\{G_{y_0,\ldots,y_i} : i < \omega\}$.*

Exemplos de $P(2)$-espaços são espaços discretos, espaços normais enumeráveis e epaços métricos.

Os seguintes resultados estão demonstrados no artigo de Morita [14].

Lema 3.5. *Sejam X um $P(2)$-espaço normal e S um subespaço topológico não vazio de $\{0,1\}^\omega$. Então o espaço topológico produto $X \times S$ é normal.*

Lema 3.6. *Seja X um espaço topológico tal que para todo subespaço S de $\{0,1\}^\omega$ o espaço topológico produto $X \times S$ é normal. Então X é um $P(2)$-espaço normal.*

Teorema 3.7. *Para que um espaço topológico X seja metrizável e separável é necessário e suficiente que exista um subespaço S do espaço $\{0,1\}^\omega$ e uma função contínua, fechada e sobrejetora $g : S \longrightarrow X$ tal que $g^{-1}[\{x\}]$ seja compacto para cada ponto $x \in X$.*

Teorema 3.8. *Seja X um espaço topológico. Para que $X \times Y$ seja normal para todo espaço métrico separável Y é necessário e suficiente que X seja um $P(2)$-espaço normal.*

Dem: A condição necessária é consequência direta do Lema 3.6. Logo basta mostrar a condição suficiente.

Suponha que X é um $P(2)$-espaço normal e Y é um espaço métrico separável. Logo pelo Teorema 3.7, existem S subespaço de $\{0,1\}^\omega$ e uma aplicação contínua, fechada e sobrejetora $g : S \longrightarrow Y$, tal que $g^{-1}[\{y\}]$ é compacto para cada ponto $y \in Y$. Assim,

$$\begin{aligned} f: \quad X \times S &\longrightarrow X \times Y \\ (x,s) &\longmapsto f(x,s) = (x, g(s)) \end{aligned}$$

é uma aplicação contínua, fechada e sobrejetora. Como pelo Lema 3.5, $X \times S$ é normal, temos que $X \times Y$ é também normal (pelo Teorema 0.5).

$\square$

Apêndices

Apêndice A

Produto com um fator compacto

Nesta seção, estudaremos uma caracterização dada por Przymusińksi em [15], baseada na noção de $\mathfrak{B}$-cobertura, para saber quando o produto de espaços normais com um fator compacto é normal. Para demonstrar o Teorema de Rudin e Starbird (Teorema 3.4), precisamos de alguns resultados que são consequência de tal caracterização.

Nesta seção vamos supor que todos os espaços mencionados são espaços de Hausdorff.

Lema A.1. *Seja X um espaço topológico T_4. Se $\mathcal{G} = \{G_\theta : \theta < \beta\}$ é uma cobertura aberta localmente finita de X (onde β é um ordinal), então existe $\mathcal{F} = \{F_\theta : \theta < \beta\}$ recobrimento fechado de X tal que $F_\theta \subseteq G_\theta$ para cada $\theta < \beta$.*

Dem: O conjunto $X \setminus \bigcup\{G_\theta : 0 < \theta < \beta\}$ é um fechado em X contido em G_0. Logo dado que X é T_4, existe $Z_0 \subseteq X$ aberto tal que

$$X \setminus \bigcup\{G_\theta : 0 < \theta < \beta\} \subseteq Z_0 \subseteq \overline{Z_0} \subseteq G_0.$$

Notemos que $\{Z_0\} \cup \{G_\theta : 0 < \theta < \beta\}$ é recobrimento aberto de X. Assim, $X \setminus (Z_0 \cup \bigcup_{1<\theta<\beta} G_\theta)$ é um fechado em X contido em G_1. Portanto, existe $Z_1 \subseteq X$

aberto, tal que

$$X \backslash \left(Z_0 \cup \bigcup_{1<\theta<\beta} G_\theta \right) \subseteq Z_1 \subseteq \overline{Z_1} \subseteq G_1.$$

Por indução (finita ou transfinita dependendo se $\beta \leq \omega$ ou $\beta > \omega$) construímos o conjunto $\{Z_\theta : \theta < \beta\}$ como segue:

Suponhamos definidos para um ordinal α, com $\alpha < \beta$, o conjunto $\{Z_\theta : \theta < \alpha\}$ tal que $X \backslash (\bigcup_{\eta<\theta} Z_\eta \cup \bigcup_{\theta<\eta<\beta} G_\eta) \subseteq Z_\theta \subseteq \overline{Z_\theta} \subseteq G_\theta$ para cada $\theta < \alpha$ e $\{Z_\theta : \theta < \alpha\} \cup \{G_\theta : \alpha \leq \theta < \beta\}$ é cobertura aberta de X.

Assim, temos que $X \backslash (\bigcup_{\theta<\alpha} Z_\theta \cup \bigcup_{\alpha<\theta<\beta} G_\theta)$ é um fechado em X contido em G_α. Logo, dado que X é T_4, existe $Z_\alpha \subseteq X$ aberto, tal que

$$X \backslash \left(\bigcup_{\theta<\alpha} Z_\theta \cup \bigcup_{\alpha<\theta<\beta} G_\theta \right) \subseteq Z_\alpha \subseteq \overline{Z_\alpha} \subseteq G_\alpha$$

e notemos que vale que $\{Z_\theta : \theta \leq \alpha\} \cup \{G_\theta : \alpha < \theta < \beta\}$ é recobrimento aberto de X.

Se definimos $F_\theta = \overline{Z_\theta}$ para cada $\theta < \beta$, temos o conjunto $\mathcal{F} = \{F_\theta : \theta < \beta\}$ como queríamos no lema. Claramente $F_\theta \subseteq G_\theta$ para cada $\theta < \beta$. Falta mostrar que $\mathcal{F}$ é cobertura de X. Para isto vamos considerar dois casos: se $\beta < \omega$ e se $\beta \geq \omega$.

Caso 1: Se $\beta < \omega$.
Se $\beta = 0$ não temos nada que mostrar. Assim podemos considerar $0 < \beta < \omega$. Então $\{Z_0, Z_1, ..., Z_{\beta-1}, G_\beta\}$ é cobertura aberta de X e $X \backslash (Z_0 \cup Z_1 \cup \cdots \cup Z_{\beta-1}) \subseteq Z_\beta \subseteq \overline{Z_\beta} \subseteq G_\beta$.

Seja $x \in X$. Se $x \in Z_0 \cup Z_1 \cup \cdots \cup Z_{\beta-1}$, então existe $n < \beta$ tal que $x \in F_n$. Caso contrário, $x \in X \backslash (Z_0 \cup Z_1 \cup \cdots \cup Z_{\beta-1}) \subseteq \overline{Z_\beta} = F_\beta$.

Portanto, $\{F_0, F_1, ..., F_\beta\}$ é cobertura fechada de X.

Caso 2: Se $\beta \geq \omega$.

Tomemos $x \in X$ qualquer. Dado que $\mathcal{G}$ é localmente finita, sabemos que x pertence a um número finito de elementos de $\mathcal{G}$. Seja $\alpha < \beta$ um ordinal tal que $x \notin G_\theta$ se $\alpha < \theta < \beta$ e $x \in G_\alpha$.

Se $x \in Z_\theta$ para algum θ, com $\theta < \alpha$, então $x \in F_\theta$. Senão, $x \in X \backslash (\bigcup_{\theta<\alpha} Z_\theta \cup \bigcup_{\alpha<\theta<\beta} G_\theta) \subseteq Z_\alpha \subseteq \overline{Z_\alpha}$.

Portanto, $x \in F_\alpha$ e $\{F_\theta : \theta < \beta\}$ é uma cobertura fechada de X.

$\square$

Observação: No que segue, se K é um espaço compacto, vamos considerar sempre $\mathfrak{B}$ como sendo uma base de abertos do espaço K fechada por uniões e intersecções finitas, isto é, se $A_1, ..., A_n$ são elementos de $\mathfrak{B}$, então $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{B}$ e $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{B}$.

Definição A.1. *Sejam $\mathfrak{B}$ uma base de abertos de um espaço compacto K e (X, τ) um espaço topológico. Seja também $H \subseteq \mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$ o conjunto dado por:*

$$H = \{(B, D) : B, D \in \mathfrak{B} \text{ e } \overline{B} \cap \overline{D} = \phi\}$$

e consideremos $G : H \longrightarrow \tau$ uma função. Dizemos que

$$\mathfrak{G} = \{G(B, D) : (B, D) \in H\}$$

*é uma $\mathfrak{B}$-**cobertura** de X se $\mathfrak{G}$ é cobertura e*

$$G(B, D) \cap G(B^*, D^*) = G(B \cap B^*, D \cap D^*),$$

para quaisquer $(B, D), (B^*, D^*) \in H$.

Observação: Se $B^* \subseteq B$ e $D^* \subseteq D$, então $G(B^*, D^*) \subseteq G(B, D)$.

Lema A.2. *Sejam $\mathfrak{B}$ uma base de um espaço compacto K e (X, τ) um espaço topológico. Se $\mathcal{G} = \{G(B, D) : B, D \in \mathfrak{B}$ e $\overline{B} \cap \overline{D} = \phi\}$ é uma $\mathfrak{B}$-cobertura de X que tem um refinamento aberto localmente finito, então existe $\mathcal{V} = \{V(B, D) : B, D \in \mathfrak{B}$ e*

$\overline{B} \cap \overline{D} = \phi\}$ *refinamento aberto localmente finito de* X *tal que* $V(B,D) \subseteq G(B,D)$ *para cada* $B, D \in \mathfrak{B}$ *com* $\overline{B} \cap \overline{D} = \phi$.

Dem: Sejam $\{T_i : i \in I\}$ um refinamento aberto localmente finito de $\mathcal{G}$ e $H = \{(B,D) \in \mathfrak{B} \times \mathfrak{B} : \overline{B} \cap \overline{D} = \phi\}$. Para cada $i \in I$, fixemos $f(i) \in H$ tal que $T_i \subseteq G(f(i))$. Temos definida uma função $f : I \longrightarrow H$.

Tomemos $\mathcal{V} = \{V(B,D) : (B,D) \in H\}$ definida da seguinte maneira:

$$V(B,D) = \begin{cases} \bigcup\{T_k : f(k) = (B,D)\} & \text{se } (B,D) \in imf \\ \phi & \text{se } (B,D) \notin imf \end{cases}$$

Vemos que $\mathcal{V}$ é uma cobertura aberta de X, pois $\bigcup \mathcal{V} = \bigcup\{T_i : i \in I\} = X$. Além disso, $V(B,D) \subseteq G(B,D)$ para cada $(B,D) \in H$. Portanto para mostrar o lema basta ver que $\mathcal{V}$ é localmente finita. Para isso, seja $x \in X$. Dado que $\{T_i : i \in I\}$ é localmente finita, existe $W_x \subseteq X$, vizinhança aberta de x em X, tal que o conjunto $I_x = \{i \in I : T_i \cap W_x \neq \phi\}$ é finito.

Logo $\{(B,D) \in H : V(B,D) \cap W_x \neq \phi\} \subseteq \{f(i) : i \in I_x\}$ é finito. Concluímos que $\mathcal{V}$ é localmente finita e portanto temos $\mathcal{V}$ como no lema. □

Dada a definição e os lemas anteriores, podemos enunciar o seguinte teorema que é uma caracterização para a normalidade do produto de espaços topológicos com um fator compacto.

Teorema A.3 (Przymusiński). *Seja* $\mathfrak{B}$ *uma base de um espaço compacto* K. *O espaço topológico* $X \times K$ *é normal se e só se* X *é normal e qualquer* $\mathfrak{B}$*-cobertura de* X *tem um refinamento aberto localmente finito.*

Dem: $\Leftarrow$] Suponhamos que X é um espaço topológico normal e que qualquer $\mathfrak{B}$-cobertura de X tenha um refinamento aberto localmente finito. Sejam F e L dois subconjuntos fechados de $X \times K$ tais que $F \cap L = \phi$.

Para cada B, D em $\mathfrak{B}$ com $\overline{B} \cap \overline{D} = \phi$, definamos

$$G(B,D) = \{x \in X : F_x \subseteq B \text{ e } L_x \subseteq D\}$$

onde

$$F_x = \{y \in K : (x, y) \in F\}$$

e

$$L_x = \{y \in K : (x, y) \in L\}.$$

Afirmação: $\mathfrak{G} = \{G(B, D) : B, D \in \mathfrak{B}$ e $\overline{B} \cap \overline{D} = \phi\ \}$ é uma $\mathfrak{B}$-cobertura de X.

Para isto, observemos que dados B, B^*, D, $D^* \in \mathfrak{B}$ tais que $\overline{B} \cap \overline{D}$ e $\overline{B^*} \cap \overline{D^*}$ temos:

$$\begin{aligned} G(B \cap B^*, D \cap D^*) &= \{x \in X : F_x \subseteq B \cap B^* \text{ e } L_x \subseteq D \cap D^*\} \\ &= \{x \in X : F_x \subseteq B \text{ e } L_x \subseteq D\} \cap \{x \in X : F_x \subseteq B^* \text{ e } L_x \subseteq D^*\} \\ &= G(B, D) \cap G(B^*, D^*). \end{aligned}$$

Agora mostremos que $\mathfrak{G}$ cobre X. Seja $x \in X$ e lembremos que

$$F_x = \{y \in K : (x, y) \in F\}$$

e

$$L_x = \{y \in K : (x, y) \in L\}.$$

Dado que F e L são dois fechados disjuntos, então F_x e L_x são dois fechados disjuntos em K e como este é compacto temos que F_x e L_x são também compactos.

Para cada $y \in F_x$ consideremos B_y aberto básico que contém y tal que $\overline{B_y} \cap L_x = \phi$. Então $\{B_y : y \in F_x\}$ é um recobrimento aberto de F_x, logo existem $y_0, y_1, ..., y_n \in F_x$ tais que $\{B_{y_0}, B_{y_1}, ..., B_{y_n}\}$ é um recobrimento finito de F_x. Portanto, podemos tomar $B \in \mathfrak{B}$ dado por

$$B = B_{y_0} \cup B_{y_1} \cup \cdots \cup B_{y_n},$$

aberto básico que contém F_x e tal que $\overline{B} \cap L_x = \phi$. Agora, para cada $y \in L_x$ consideremos um aberto básico D_y que contenha y tal que $\overline{D_y} \cap \overline{B} = \phi$. Logo como L_x é compacto, existe $\{D_{z_0}, D_{z_1}, ..., D_{z_n}\}$ sub-recobrimento finito da cobertura $\{D_z : z \in L_x\}$ de L_x. Tomando

$$D = D_{z_0} \cup D_{z_1} \cup \cdots \cup D_{z_n}$$

obtemos $D \in \mathfrak{B}$ que contém L_x tal que $\overline{B} \cap \overline{D} = \phi$. Portanto $x \in G(B, D)$ como queríamos mostrar e assim $\mathfrak{G}$ é uma $\mathfrak{B}$-cobertura de X. Pela suposição no começo da demonstração, temos que $\mathfrak{G}$ tem um refinamento aberto localmente finito. Logo pelo Lema A.2, existe $\mathfrak{V} = \{V(B, D) : B, D \in \mathfrak{B} \text{ e } \overline{B} \cap \overline{D} = \phi\}$ refinamento aberto localmente finito de $\mathfrak{G}$ tal que $V(B, D) \subseteq G(B, D)$. Além disso, dado que X é um espaço normal, o Lema A.1 permite encontrar um refinamento fechado

$$\mathfrak{Z} = \{Z(B, D) : B, D \in \mathfrak{B} \text{ e } \overline{B} \cap \overline{D} = \phi\}$$

de $\mathfrak{V}$ tal que $Z(B, D) \subseteq V(B, D)$. Pela normalidade de X, existem funções contínuas $f_{B,D} : X \longrightarrow [0, 1]$ tais que:

$$f_{B,D}[Z(B, D)] \subseteq \{1\}$$

e

$$f_{B,D}[X \backslash V(B, D)] \subseteq \{0\}.$$

Agora, pela normalidade de K, temos que existem também funções contínuas $g_{B,D} : K \longrightarrow [0, 1]$ tais que:

$$g_{B,D}[\overline{B}] \subseteq \{0\} \text{ e } g_{B,D}[\overline{D}] \subseteq \{1\}.$$

Definamos $h : X \times K \longrightarrow \mathbb{R}$ como segue:

$$h(x, y) = \sum \{f_{B,D}(x) \cdot g_{B,D}(y) : B, D \in \mathfrak{B} \text{ e } \overline{B} \cap \overline{D} = \phi.\ \}$$

Como a família $\mathfrak{V}$ é localmente finita, h está bem definida e é contínua.

Seja $(x, y) \in X \times K$, então x pertence a um número finito de elementos de $\mathfrak{V}$. Digamos elementos $\{V(B_i, D_i) : 0 \leq i \leq n\}$. Notemos que se $(B, D) \notin \{(B_i, D_i) : 0 \leq i \leq n\}$, então $x \notin V(B, D)$ e assim $f_{B,D}(x) = 0$. Portanto,

$$h(x) = \sum_{i=0}^{n} f_{B_i,D_i}(x) g_{B_i,D_i}(y).$$

Se $(x, y) \in F$, temos que $y \in F_x$ e como $x \in G(B_i, D_i)$ para cada i tal que $0 \leq i \leq n$, então $F_x \subseteq B_i$. Assim $g_{B_i,D_i}(y) = 0$ se $0 \leq i \leq n$. Portanto, $h(x, y) = 0$, o que mostra que $h[F] \subseteq \{0\}$.

Se $(x, y) \in L$, temos que $y \in L_x$ e como $x \in G(B_i, D_i)$ para cada i tal que $0 \leq i \leq n$, então $L_x \subseteq D_i$. Assim $g_{B_i,D_i}(y) = 1$ se $0 \leq i \leq n$. Portanto, $h(x, y) = \sum_{i=0}^{n} f_{B_i,D_i}(x)$. Agora se $x \notin Z(B_i, D_i)$ para cada $0 \leq i \leq n$, então como $\mathfrak{Z}$ é cobertura de X, existiria $(B, D) \notin \{(B_i, D_i) : 0 \leq i \leq n\}$ tal que $x \in Z(B, D) \subseteq V(B, D)$, que é absurdo pelo modo como o conjunto $\{(B_i, D_i) : 0 \leq i \leq n\}$ foi escolhido. Portanto, $f_{B_i,D_i}(x) = 1$ (pois $x \in Z(B_i, D_i)$) para algum i com $0 \leq i \leq n$, ou seja $h(x, y) \geq 1$, que mostra $h[L] \subseteq [1, \infty[$.

Deste modo, $h^{-1}[]-\infty, 1/2[]$ e $h^{-1}[]1/2, \infty[]$ são dois abertos disjuntos em $X \times K$ tais que $F \subseteq h^{-1}[]-\infty, 1/2[]$ e $L \subseteq h^{-1}[]1/2, \infty[]$.

Portanto, $X \times K$ é normal.

$\Rightarrow]$ X é normal. Pois se A é B são dois fechados disjuntos em X, então $A \times K$ e $B \times K$ são dois fechados disjuntos em $X \times K$. Logo como $X \times K$ é normal, existem abertos V_A e V_B em X tais que $A \times K \subseteq V_A \times K$, $B \times K \subseteq V_B \times K$ e $V_A \cap V_B = \phi$, o que mostra que A e B podem ser separados por abertos disjuntos em X.

Suponhamos agora que

$$\mathfrak{G} = \{G(B, D) : B, D \in \mathfrak{B} \text{ e } \overline{B} \cap \overline{D} = \phi\}$$

é uma $\mathfrak{B}$-cobertura de X. Definamos:

$$F = (X \times K) \setminus \bigcup \{G(B, D) \times (K \setminus \overline{B}) : B, D \in \mathfrak{B} \text{ e } \overline{B} \cap \overline{D} = \phi\}$$

$$L = (X \times K) \setminus \bigcup \{G(B, D) \times (K \setminus \overline{D}) : B, D \in \mathfrak{B} \text{ e } \overline{B} \cap \overline{D} = \phi\} \ .$$

É claro que F e L são fechados em $X \times K$. Vejamos que são disjuntos:

Afirmação: $K \cap L = \phi$.

Seja $(x, y) \in X \times K$, então existem B e $D \in \mathfrak{B}$, com $\overline{B} \cap \overline{D} = \phi$, tais que $x \in G(B, D)$ e ademais $y \notin \overline{B}$ ou $y \notin \overline{D}$. Logo $(x, y) \notin F$ ou $(x, y) \notin L$ e portanto $K \cap L = \phi$.

Como X é normal, pelo Lema de Urysohn, existe uma função contínua $f : X \times K \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f[F] \subseteq \{0\}$ e $f[L] \subseteq \{1\}$.
Definamos uma pseudo-métrica ρ em X como segue:

$$\rho(x, x') = sup_{y \in K} |f(x, y) - f(x', y)|.$$

Observemos que ρ está bem definida pois K é compacto e contínua, pois é composição de funções contínuas.

Afirmação: $\mathfrak{G}$ tem um refinamento localmente finito.
Para cada $x_0 \in X$ e cada $\varepsilon > 0$ consideramos

$$S(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : \rho(x_0, x) < \varepsilon\} = \Pi_2 \left[\rho^{-1}[] - \varepsilon, \varepsilon[] \cap (\{x_0\} \times X)\right]$$

onde $\Pi_2 : X \times X \longrightarrow X$ é a projeção na segunda coordenada. Dado que ρ é contínua $\rho^{-1}[] - \varepsilon, \varepsilon[]$ é aberto em $X \times X$, portanto $\rho^{-1}[] - \varepsilon, \varepsilon[] \cap (\{x_0\} \times X)$ é um aberto em $\{x_0\} \times X$, e como $\Pi_2 : \{x_0\} \times X \longrightarrow X$ é um homeomorfismo, obtemos que a topologia induzida por ρ em X está contida na topologia de X. Portanto para mostrar a afirmação é suficiente mostrar que a família $\{S(x, 1/3) : x \in X\}$ é um refinamento aberto de $\mathfrak{G}$, pois pelo Teorema de Stone (ver [6, teorema 4.4.1] e o comentário posterior) essa cobertura tem um refinamento aberto localmente finito.

Fixemos $x_0 \in X$; podemos encontrar B, $D \in \mathfrak{B}$ tais que

$$\{y \in K : f(x_0, y) \leq 1/3\} \subseteq B \quad \text{e} \quad \{y \in K : f(x_0, y) \geq 2/3\} \subseteq D \quad \text{e} \quad \overline{B} \cap \overline{D} = \phi.$$

Vejamos que $S(x_0, 1/3) \subseteq G(B, D)$.

Se $x \in S(x_0, 1/3)$, então $F_x \subseteq B$ e $L_x \subseteq D$, senão poderia existir; por exemplo, um ponto $y \in F_x \backslash B$ e $f(x, y) = 0$, $f(x_0, y) > 1/3$ e $\rho(x_0.x) < 1/3$, o que é absurdo. (analogamente para $L_x \backslash D$).

Para mostrar que $x \in G(B,D)$, observemos que, pela definição de F e L e o fato acima, temos que:

$$\begin{aligned}
\{x\} \times (K \backslash B) &\subseteq \bigcup \{G(B^*,D^*) \times (K \backslash \overline{B^*}) : B^*, D^* \in \mathfrak{B} \text{ e } \overline{B^*} \cap \overline{D^*} = \phi\} \\
\{x\} \times (K \backslash D) &\subseteq \bigcup \{G(B^{**},D^{**}) \times (K \backslash \overline{D^{**}}) : B^{**}, D^{**} \in \mathfrak{B} \text{ e } \overline{B^{**}} \cap \overline{D^{**}} = \phi\}.
\end{aligned}$$

Então, pela compacidade desses conjuntos, existem famílias finitas $\{(B_0^*,D_0^*),(B_1^*,D_1^*),...,(B_n^*,D_n^*)\}$ e $\{(B_0^{**},D_0^{**}),(B_1^{**},D_1^{**}),...,(B_m^{**},D_m^{**})\}$ tais que:

$$K \backslash B \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} K \backslash \overline{B_i^*}, \;\; K \backslash D \subseteq \bigcup_{j=0}^{m} K \backslash \overline{D_j^{**}}$$

$$x \in \bigcap_{i=0}^{n} G(B_i^*,D_i^*) \;\; x \in \bigcap_{j=0}^{m} G(B_i^{**},D_j^{**}).$$

Então

$$\bigcap_{i=0}^{n} B_i^* \subseteq B \qquad \bigcap_{j=0}^{m} D_i^{**} \subseteq D$$

e

$$\begin{aligned}
x \in \bigcap_{i=0}^{n} G(B_i^*,D_i^*) \cap \bigcap_{j=0}^{m} G(B_i^{**},D_i^{**}) &= G\left(\bigcap_{i=0}^{n} B_i^* \cap \bigcap_{j=0}^{m} B_j^{**}, \bigcap_{i=0}^{n} D_i^* \cap \bigcap_{j=0}^{m} D_j^{**}\right) \\
&\subseteq G(B,D).
\end{aligned}$$

O que mostra que $S(x_0, 1/3) \subseteq G(B,D)$. Portanto $\{S(x,1/3) : x \in X\}$ é um refinamento aberto de $\mathfrak{G}$, o que termina a demonstração. □

Corolário A.4 (Morita). *Sejam K um espaço compacto e X um espaço normal e $\omega(K)$-paracompacto, então $X \times K$ é normal.*

Dem: Para poder aplicar o teorema anterior temos que mostrar que qualquer $\mathfrak{B}$-cobertura de X admite um refinamento aberto localmente finito. Para isto, basta tomar uma base de K de cardinalidade $\omega(K)$ e como por hipótese X é $\omega(K)$-paracompacto, qualquer $\mathfrak{B}$-cobertura de X tem um refinamento aberto localmente finito. Assim concluímos a tese do corolário. □

Corolário A.5 (Teorema de Tamano). *As seguintes condições são equivalentes:*

a) X é paracompacto e T_2.

b) $X \times \beta X$ é normal.

Dem: a) $\Rightarrow$ b)] É claro pelo corolário anterior.

b) $\Rightarrow$ a)] Suponhamos que $X \times \beta X$ é normal. Como X é normal, ele é T_2. Para a paracompacidade, seja $\mathcal{W} = \{W_j : j \in J\}$ uma cobertura aberta de X e seja $\mathcal{U} = \{U_j : j \in J\}$ uma família de abertos de βX tais que $W_j = X \cap U_j$ para cada $j \in J$. Consideremos $\mathfrak{B}$ como sendo a família de todos os subconjuntos abertos de βX e definamos para $B, D \in \mathfrak{B}$

$$G(B,D) = \begin{cases} B \cap X & \text{se } \beta X \backslash D \subseteq \bigcup \mathcal{U} \\ \phi & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Afirmação: $\mathfrak{G} = \{G(B,D) : B, D \in \mathfrak{B} \text{ e } \overline{B} \cap \overline{D} = \phi\}$ é uma $\mathfrak{B}$-cobertura de X.

De fato, como

$$G(B \cap B^*, D \cap D^*) = \begin{cases} (B \cap B^*) \cap X & \text{se } \beta X \backslash (D \cap D^*) \subseteq \bigcup \mathcal{U} \\ \phi & \text{caso contrário} \end{cases},$$

temos que $G(B \cap B^*, D \cap D^*) = G(B,D) \cap G(B^*, D^*)$. Falta mostrar que $\mathfrak{G}$ é uma cobertura de X. Para isto, seja $x \in X$. Dado que $\mathcal{U}$ é uma cobertura aberta de X, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. Portanto consideramos B, aberto de βX, tal que $x \in B \subseteq \overline{B} \subseteq U$ e D um aberto em βX tal que $\beta X \backslash U \subseteq D$ e $\overline{B} \cap \overline{D} = \phi$. Assim claramente $x \in G(B,D)$ o que mostra a afirmação.

Então, pelo Teorema A.3, temos que $\mathfrak{G}$ tem um refinamento $\mathcal{T} = \{T_i : i \in I\}$ aberto em X localmente finito.

Observemos que o fecho em βX de cada elemento de $\mathcal{T}$ está contido em $\bigcup \mathcal{U}$ (pela forma como foi definido cada $G(B,D)$), então é coberto por uma quantidade finita de elementos de $\mathcal{U}$. Suponhamos que para cada $i \in I$, $T_i \subseteq \bigcup\{U_k^{(i)} : 0 \leq k \leq n_i\}$. Seja $\mathcal{V} = \{T_i \cap U_k^{(i)} : i \in I \text{ e } 0 \leq k \leq n_i\}$, então cada $T_i \cap U_k^{(i)}$ é aberto em X contido em algum elemento de $\mathcal{W}$, pois $T_i \cap U_k^{(i)} = T_i \cap (U_k^{(i)} \cap X) = T_i \cap W_k^{(i)}$. Portanto $\mathcal{V}$ é um refinamento aberto de $\mathcal{W}$ localmente finito, o que mostra o corolário.

$\square$

Apêndice B

Mais resultados usados no trabalho

Lema B.1. *Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{U} = \{U_m : m < \omega\}$ uma cobertura aberta de X tal que existe $\mathcal{V} = \{V_{n,m} : n, m < \omega\}$, outra cobertura aberta de X tal que $\overline{V_{m,n}} \subseteq U_m$ para cada $n, m < \omega$. Então existe um refinamento aberto localmente finito de $\mathcal{U}$.*

Dem: Definamos para cada $n < \omega$, $W_n = U_n \backslash \bigcup\{\overline{V_{i,k}} : i, k < n\}$. Deste modo, o conjunto $\mathcal{W} = \{W_n : n < \omega\}$ é um refinamento aberto localmente finito de $\mathcal{U}$. De fato, para mostrar que $\mathcal{W}$ é cobertura de X, consideremos $x \in X$ qualquer, seja $m = \min\{n < \omega : x \in U_n\}$; temos $x \in W_m$. Portanto, $\mathcal{W}$ é uma cobertura aberta de X, mas como $W_n \subseteq U_n$ para cada $n < \omega$, então também é refinamento aberto de $\mathcal{U}$.

Para mostrar que $\mathcal{W}$ é localmente finito, consideremos de novo $x \in X$, qualquer, e $m = \min\{n < \omega : x \in U_n\}$. Como $\mathcal{V}$ é cobertura aberta de X, existem $k, l < \omega$ ($k \geq m$) tais que $x \in V_{k,l}$. Seja $t = \max\{k, l\}$, logo se $n > t$ temos que $W_n \cap V_{k,l} = \phi$. Portanto existe $V_{k,l}$, vizinhança aberta de x, que intersecta um número finito de elementos de $\mathcal{W}$, o que termina a demonstração do lema. □

Rudin e Starbird apresentaram o seguinte lema em [16, fato 6], (eles se referem para a sua demonstração a [22]):

Lema B.2. *Se M é um espaço métrico, então existe uma família $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_i : i < \omega\}$ de coberturas abertas localmente finitas de M tais que:*

(a) $G \in \mathcal{G}_n$ então $diam(G) < \frac{1}{2^n}$.

(b) $\mathcal{G}_{n+1}$ é refinamento de $\mathcal{G}_n$ para cada $n < \omega$.

Lema B.3. *Sejam X um espaço métrico e $\mathcal{G}$ uma família de coberturas abertas localmente finitas como no Lema B.2. Se $\mathcal{G}'_n = \{G \in \mathcal{G}_n : G$ é não discreto$\}$, então para cada $G \in \mathcal{G}' = \bigcup\{\mathcal{G}'_n : n < \omega\}$ podemos selecionar dois pontos p_G e q_G em G tais que nenhum ponto de X seja selecionado duas vezes.*

Dem: Vamos indexar, para cada $n < \omega$, os elementos de $\mathcal{G}'_n$ da seguinte forma: $\mathcal{G}'_n = \{G_{(n,\alpha)} : \alpha < \lambda_n\}$ (onde λ_n é um ordinal para cada $n < \omega$).

Nós selecionamos nossos dois pontos de cada $G_{(n,\alpha)}$, de acordo com a ordem lexicográfica $(n, \alpha) < (m, \beta)$ se e só se $n < m$, ou $n = m$ e $\alpha < \beta$. Suponhamos escolhidos os pontos distintos em cada $G_{(n,\alpha)}$ para cada $(n, \alpha) < (m, \beta)$. Desejamos encontrar dois novos pontos em $G_{(m,\beta)}$. Como $G_{(m,\beta)} \in \mathcal{G}'_m$, ele tem um ponto de acumulação w, mas como $\mathcal{G}_n$ é localmente finito para cada $n \leq m$, existe uma vizinhaça W de w aberta em X tal que W só intersecta um número finito de elementos de $\bigcup\{\mathcal{G}_n : n \leq m\}$. Segue-se que temos escolhidos só um número finito de elementos de W. Mas dado que $|W \cap G_{m\beta}|$ não é finita, podemos tomar dois pontos $p_{G_{(m,\beta)}}$ e $q_{G_{(m,\beta)}}$ em $G_{(m,\beta)}$ tais que eles são diferentes de $p_{G_{(n,\alpha)}}$ e $q_{G_{(n,\alpha)}}$ para cada $(n, \alpha) < (m, \beta)$. $\square$

Lema B.4. *Se X é um espaço métrico não discreto ou um espaço compacto infinito, então $X \times Y$ normal implica que Y é enumeravelmente paracompacto*

Dem: (Ver [16], fact 1 d)) $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Alas O, Aurichi L. F, Junqueira L e Tall F. D.: Non-productively Lindelöf spaces and small cardinals, To appear in Houston Journal of Mathematics.

[2] Alster K.: The product of a Lindelöf space with the space of irrationals under Martin's Axiom, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol 110, 543-547, 1990.

[3] Beslagic A.: Normality in products[a], The work of Mary Ellen Rudin, Ed. Franklin D. Tall. Annals of the New York Academy of Sciences, Vol 705, 17-46, 1993.

[4] van Douwen E.: The integers and topology, Handbook of Set-theoretic topology. North Holland, Amsterdam, 111-167, 1984.

[5] Dowker C. H.: On countably paracompact space, Canadian Journal of Mathematics, Vol 3, 219-224, 1951.

[6] Engelking R.: General Topology, Sigma Series In Pure Mathematics, Vol 6, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[7] Fernandez P.: Medida e integração, IMPA, 1976.

[8] Hechler S. H.: On a Ubiquitous Cardinal, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol 52, 348-352, 1975.

[9] Kunen K.: Set Theory - An Introduction to Independence Proofs, Vol 102 of Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North Holland Publishing Company, Amsterdan, 1980.

[10] *Lawrence L. B.: The influence of a small cardinal on the product of a Lindelöf space and the irrationals, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol 110, Num 2, 535-542, 1990.*

[11] *Michael E.: The product of a normal space and a metric space need not be normal, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol 69, 375-376, 1963.*

[12] *Morita K.: Note on paracompactness, Proceedings of the Japan Academy, Vol 37, 1-3, 1961.*

[13] *Morita K.: Paracompactness and product spaces, Fundamenta Mathematicae, Vol 50, 223-236, 1962.*

[14] *Morita K.: Products of normal spaces with metric spaces, Mathematische Annalen, Vol 154, 365-382, 1964.*

[15] *Przymusiński T. C.: Products of normal spaces. Handbook of Set-theoretic Topology. North Holland, editado por K. Kunen e J. E. Vaughan, Amsterdam, 781-826, 1984.*

[16] *Rudin M. E. e Starbird M.: Products with a metric factor, General Topology and its Applications, Vol 5, 235-248, 1975.*

[17] *Rudin M. E.: Countable paracompactness and Souslin's problem, Canadian Journal of Mathematics, Vol 7, 543-547, 1955.*

[18] *Rudin M. E.: κ-Dowker space; Czechoslovak Mathematical Journal, Vol 28, 324-326, 1978.*

[19] *Sierpiński W.: Sur une propriété topologique des ensembles dénombrables denses en soi, Fundamenta Mathematicae, Vol. 1, 11-16, 1920.*

[20] *da Silva, Samuel Gomes: Uma introdução aos pequenos cardinais e às suas aplicações em topologia, Dissertação de mestrado apresentada ao IME da Universidade de São Paulo, 1998.*

[21] Solovay R. M. e S. Tennenbaum: Iterated Cohen extensions and Souslin's problem, Annals of Mathematics, Vol 94 (2), 201-245, 1971.

[22] Stone A. H.: Paracompactness and product spaces. Bulletin of the American Mathematical Society, Vol 54 977-982, 1948.