Invariantes de anéis de operadores diferenciais: racionalidade de Gelfand-Kirillov, categorias de módulos, aplicações

João Fernando Schwarz

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Doutor em Matemática

Programa: Doutorado em Matemática
Orientador: Prof. Dr. Vyacheslav Futorny

Durante o desenvolvimento deste trabalho, o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES e FAPESP - número 2014/25612-1 e número 2016/14648-0

São Paulo, 13 de Novembro de 2018

Invariantes de anéis de operadores diferenciais: racionalidade de Gelfand-Kirillov, categorias de módulos, aplicações

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 13/11/2018. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Hugo Luiz Mariano - IME-USP
- Prof. Dr. Kostiantyn Iusenko - IME-USP
- Prof. Dr. Daniel Levcovitz - ICMC-USP
- Prof. Dr. Nikolai Alexandrovitch Goussevskii - UFMG
- Prof. Dr. Plamen Koshlukov - IMECC-Unicamp

Agradecimentos

Agradeço à minha família, ao meu orientador Vyacheslav Futorny, à Luiza Fonseca de Souza e à minha amada amiga Maria Clara Cardoso. Em memória de Sergey Ovsienko e de Martha Schwarz, aleha hashalom.

Agradeço o apoio financeiro da CAPES e FAPESP, durante a execuação deste projeto de doutorado. Recebi auxílio dos processos FAPESP - número 2014/25612-1 e número 2016/14648-0.

Resumo

SCHWARZ, J. F. **Invariantes de anéis de operadores diferenciais: racionalidade de Gelfand-Kirillov, categorias de módulos, aplicações**. 2018. 87 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.
Esta tese aborda, como a despeito da rigidez da álgebra de Weyl $A_n(k)$, suas subálgebras de invariantes possuem uma rica teoria de invariantes: do ponto de vista de estrutura, se fizermos um estudo de equivalência birracional dentro da filosofia de Gelfand-Kirillov, temos o Problema de Noether Não-Comutativo, sobre o qual obtemos vários novos resultados (Capítulo 4). Do ponto de vista de representações, obtemos que suas subálgebras de invariantes, em vários casos, herdam de maneira natural a estrutura de módulos de Gelfand-Tsetlin da álgebra de Weyl (Capítulo 5), assim como uma noção natural de módulos holonômicos (Capítulo 6). Analisaremos resultados similares para outras álgebras semelhantes a Álgebra de Weyl, como anéis de operadores diferenciais no toro e álgebras de Weyl generalizadas (Capítulos 2, 4 e 5). Como aplicações, temos uma Conjectura de Gelfand-Kirillov para subálgebras esféricas de Cherednik (Capítulo 4); para a Conjectura de Gelfand-Kirillov para várias álgebras de Galois (Capítulos 5 e 7); e o problema de realizar $U(L)$, em que L é uma algebra de Lie simples de tipo B, C, D, como uma ordem de Galois — generalizando o caso de gl_n (Capítulo 5). Um Capítulo sobre o Problema de Noether Quântico e um resumo do artigo de Futorny e Schwarz, "Quantum Linear Galois Algebras", encerram a tese.

Palavras-chave: Anéis de Operadores Diferenciais, Teoria de Invariantes Não-Comutativa, Birracionalidade Não-Comutativa, Cateogrias de Gelfand-Tsetlin.

Abstract

Schwarz, J. F. **Invariants of rings of differential operators: Gelfand-Kirillov rationality, categories of modules, aplications**. 2018. 87 p. Dissertação (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

This thesis discussess how, given the rigidity results on the Weyl Algebra $A_n(k)$, its invariant subrings can nonetheless have an interesting invariant theory: from the structural point of view, a birrational equivalence study under the Gelfand-Kirillov philosophy gives us the Noncommutative Noether Problem, of which we obtain many new results (Chapter 4). From the point of view of representations, we obtain that their invariant rings, in many cases, have a natural theory of Gelfand-Tsetlin modules just like the Weyl Algebra (Chapter 5), and a natural notion of holonomic modules (Chapter 6). We discuss analogues results for algebras which are similar to the Weyl Algebra, such as the ring of differential operators on the torus and the generalized Weyl algebras (Chapters 2,4,5). As applications, we have a Gelfand-Kirillov Conjecture for spherical subalgebras of Cherednik (Chapter 4); for the Gelfand-Kirillov Conjecture of many Galois algebras (Chapter 5 and 7); and the problem to give a Galois structure to the algebra $U(L)$, where L is a simple Lie algebra of type B, C, D - generalizing the case A (Chapter 5). A chapter about the Quantum Noether Problem and a resume of the article “Quantum Linear Galois Algebras"ends the thesis.
Keywords: Differential Operators Rings, Noncommutative Invariant Theory, Noncommutative birationality, Gelfand-Tsetlin Categories.

Sumário

0 Introdução **1**

0.1 Pré-Requisitos, Notação 4

1 Preliminares: algumas classes de álgebras **7**

1.1 Anéis de Operadores Diferenciais 7

1.2 Álgebras e Corpos de Weyl 8

1.3 Álgebras Universais Envolventes 10

1.4 Álgebras de Weyl Generalizadas 11

1.5 Notas e Referências 12

2 Mergulhos de Galois: desenvolvimento histórico **13**

2.1 Teorema de Chevalley-Shephard-Todd 13

2.2 Problema de Noether 14

2.3 O Problema de Mergulho de Galois 16

2.4 Conjectura de Gelfand-Kirillov 18

2.5 Apêndice: Automorfismos das Álgebras Polinomiais e de Weyl 20

2.6 Notas e Referências 21

3 Invariantes da Álgebra de Weyl e Problema de Noether Não-Comutativo **23**

3.1 Preliminares Técnicos 23

3.2 Invariantes da Álgebra de Weyl 25

3.3 Problema de Noether Não-Comutativo 26

3.4 Problema de Noether Não-Comutativo para a Segunda Álgebra de Weyl 29

3.5 Notas e Referências 33

4 Invariantes de Operadores Diferenciais: Racionalidade Não-Comutativa **35**

4.1 Problema de Noether Não-Comutativo para grupos de Reflexão Unitários 35

4.2 Problema de Noether Não-Comutativo para Grupos de Pseudorreflexão Arbitrários . 37

4.3 Cálculo Efetivo dos Geradores de Weyl; o caso de Característica Prima 40

4.4 Uma conjectura relacionando O Problema de Noether e sua versão Não-Comutativa . 41

4.5 Corpos de Frações de Anéis de Operadores Diferenciais 42

4.6 Aplicação para Álgebras Racionais de Cherednik 44

4.7 Notas e Referências 45

5 Invariantes de operadores diferenciais: categorias de Gelfand-Tsetlin **47**
5.1 Álgebras de Galois: Definição e estrutura 48
5.2 Fibras e Módulos de Gelfand-Tsetlin para Ordens de Galois 51
5.3 Invariantes de Anéis de Operadores Diferenciais 53
5.4 Álgebras de Weyl Generalizadas 55
5.5 Ideais Maximais em Invariantes da Álgebra de Weyl 57
5.6 Notas e Referências 58

6 Uma Teoria de Módulos Holonômicos para invariantes da Álgebra de Weyl **59**
6.1 Definições e Resultados Básicos 59
6.2 Somewhat Commutative Algebras 61
6.3 Categoria de Módulos Holonômicos para invariantes de Álgebras de Weyl 62
6.4 Notas e referências 64

7 Álgebras de Galois Quânticas **65**
7.1 Quantizações do Teorema de Chevalley-Shephard-Todd e do Problema de Noehter . 65
7.2 Teoria de Representação de invariantes de Álgebras Quânticas 66
7.3 Álgebras de Galois Lineares e Conjectura de Gelfand-Kirillov quantizadas 67
7.4 Equivalência Birracional de invariantes de U(sl2) 68
7.5 Notas e Referências 68

Referências Bibliográficas **71**

Capítulo 0

Introdução

"Like the Arabian phoenix rising out of its ashes, the theory of invariants, pronounced dead at the turn of the century, is once again at the forefront of mathematics. During its long eclipse, the language of modern algebra was developed, a sharp tool now at long last being applied to the very purpose for which it was intended.-– Joseph. K. S. Kung e Gian-Carlo Rota.

É esse o espírito desta tese. Como o nome deixa claro, ela é um trabalho, antes de tudo, de teoria de invariantes. Com a diferença que adentramos o mundo não-comutativo, em que estudamos um dos seus protagonistas: a álgebra de Weyl (Capítulo 1). Várias questões clássicas, como racionalidade e o Problema de Noether (Capítulo 2, Seção 2, [Noe13]), são retomadas — com a filosofia de Gelfand-Kirillov sobre corpos de frações não-comutativos como meio de introdução neste novo contexto (Capítulo 2, Seção 4, [GK66]). Desta forma, naturalmente surge o Problema de Noether Não-Comutativo (Capítulo 3, [AD06]), e nós exploramos uma série de resultados. A semelhança dessa analogia não-comutativa com o Problema de Noether clássico de 1913 é surpreendente (Capítulos 3, 4, [AD06], [FS18b]). E a teoria desenvolvida mostra-se generosa: com várias aplicações para diversas versões da Conjectura de Gelfand-Kirillov (que foi o ponto de partida da discussão - Capítulos 5, 7, [EFOS17], [FS18c]), e complexas questões sobre representações de álgebras de Lie simples (Capítulo 5, [EFOS17]).

A riqueza da teoria de invariantes a nível birracional da Álgebra de Weyl pode parecer surpreendente, dados os resultados de rigidez conhecidos sobre a sua estrutura (Capítulo 3, Seção 3, [AP95]). Nos Capítulos 5 e 6, analisamos outro aspecto no qual a rigidez da Álgebra de Weyl não impede uma rica estrutura de módulos para seus invariantes — uma categoria de Gelfand-Tsetlin, um conceito que é o resultado da evolução, durante décadas ([Zhe70], [DFO94], [FO14], em ordem cronológica), do trabalho espetacular de Gelfand e Tsetlin nos anos 50 ([GT50]); e uma categoria de módulos holonômicos. Finalmente, notamos que outros anéis de operadores de diferenciais, e as álgebras de Weyl Generalizadas — introduzidas por Bavula como conceito generalizador de vários conhecidos previamente (vide citação no Capítulo 1) — também gozam de propriedades análogas àquelas da Álgebra de Weyl (Capítulos 4 e 5). Esperamos que esta tese, seguindo as palavras de Kung e Rota, justifique a teoria de invariantes, no mundo não-comutativo, como fonte de resultados de grande interesse para matemática.

Os resultados inéditos desta tese são os dos artigos [EFOS17], [FS17], [FS18a], [FS18c], [FS18b], além de outros espalhados pelos Capítulos 2, 4, 5 e 6 — todos devidamente indicados. Não é possível cobrir no espaço de uma tese todo o necessário para deixar a teoria de álgebras e ordens de Galois ([FO10], [FO14]) auto-contida; contudo, almejou-se fazer isso com o Problema de Noether Não-Comutativo — o Capítulo 3 constitui, dentre outras coisas, de um resumo do trabalho original de Alev e Dumas [AD06] para o Problema. Destaca-se a importância, neste resumo, de tornar acessível em língua portuguesa um trabalho que antes se encontrava apenas em francês, em sua maioria. Não são repetidos aqui todos os enunciados dos artigos do aluno — alguns deles são meros resultados técnicos, que podem ser adequadamente referenciados, para um melhor andamento lógico da tese. Por outro lado, alguns resultados destes artigos são provados aqui de maneira ligeiramente diferente — no que acreditamos que seja uma simplificação lógica; por benefício de exposição; ou

por evidenciar mais do que o resultado enunciado de maneira original.

No Capítulo 1, nós fazemos uma breve lembrança do material básico que será usado de forma recorrente ao longo da tese. Na seção 1, discutimos anéis de operadores diferencias. Enfatisamos que as duas definições naturais do objeto *não-coincidem* necessariamente quando não estamos no caso regular. O resultado de localização mencionado parece ser bastante conhecido para o caso regular, mas nós apontamos que essa hipótese não é necessária. Na seção 2, discutem-se as Álgebras de Weyl e seus anéis de fração: os corpos de Weyl. A parte mais importante da discussão é quanto aos últimos: o cálculo do seu centro, que se mostra uma tarefa árdua, é essencial para o problema de não-isomorfismo de tais corpos. Na seção 3, discutem-se resultados básicos da estrutura de $U(gl_n)$ com relação à sua subálgebra de Gelfand-Tsetlin. Ao longo desta tese, destacamos o trabalho original de Drozd, Futorny e Ovsienko [DFO94] sobre módulos de Gelfand-Tsetlin, sendo o ponto de partida para uma riquíssima área investigativa de álgebra, e um importantíssimo trabalho de Ovsienko [Ovs02] que infelizmente não é tão facilmente encontrado quanto se poderia. A seção 4 é uma introdução a álgebras generalizadas de Weyl.

O Capítulo 2 começa com uma discussão bastante extensa do Teorema de Chevalley-Shephard-Todd. Alguns pontos peculiares desta primeira seção são, inicialmente, a observação de que a restrição da análise para grupos de ação lineares, por mais natural que seja, não esgota todas as possibilidades de invariantes por grupos de automorfismos; tema recorrente ao longo desta tese. O Teorema em si é enunciado na maior generalidade possível — com destaque ao seu conteúdo geométrico. Essa análise geométrica serve como ponto de partida para o Problema de Noether na seção 2. Dada a centralidade deste problema na temática da tese, referências a todos os trabalhos originais são feitas. Uma contribuição original é desenvolvida, uma generalização do resultado em duas variáveis. A seção 3 discute o fenômeno de rigidez em álgebras: a inexistência, dada uma álgebra A, de um grupo finito G agindo não trivialmente, com $A^G \cong A$. Nossa exposição é essencialmente original. Esta seção é uma das mais importantes no que diz respeito à temática da tese: como é possível a Álgebra de Weyl, sendo rígida, ter anéis de invariantes com uma teoria de representações e estrutura birracional tão natural? Quanto ao último ponto, a passagem a “birracionalidade não-comutativa"é feita seguindo a filosofia de Gelfand-Kirillov [AD06], exposta na seção 4, conjuntamente com a Conjectura de Gelfand-Kirillov, seu ponto de partida e frequentemente revisitada durante esta tese. Este capítulo termina com um apêndice sobre automorfismos da Álgebra polinomial e da primeira álgebra de Weyl que, além de discutir o célebre Teorema de Jung-van der Kulk e algumas de suas consequências, contribui para manter a tese auto-contida.

O Capítulo 3 contém uma introdução à teoria de invariantes da Álgebra de Weyl, focando principalmente nas suas semelhanças com o caso da álgebra polinomial, e servindo como fundamento lógico para a introdução do Problema de Noether Não-Comutativo de Alev e Dumas ([AD06]) na seção 3. Os trabalhos originais de Alev e Dumas são discutidos nesta seção e na quarta.

O Capítulo 4 discute os resultados obtidos pelo aluno, em colaboração — também — com Farkhod Eshmatov, Vyacheslav Futorny e Sergey Ovsienko, para o Problema de Noether Não-Comutativo e uma versão sua para o n-toro. Os resultados são, em sua maioria, provenientes de [EFOS17], [FS17] e [FS18b]. Nós começamos com o Problema de Noether Não-Comutativo para grupos de reflexão unitários. Na primeira seção, nós dicutimos o caso complexo, o principal resultado em [EFOS17], obtido pelo estudante em sua dissertação de mestrado [Sch15a]. Na segunda seção, obtemos a generalização máxima possível deste resultado: agora para todos os grupos de pseudo-reflexão sob qualquer corpo de característica 0, [FS18b]. Além disso, o isomorfismo pode ser exibido de maneira explícita — de fato, algorítmica — como explicado na seção 3, na qual também se faz um breve comentário sobre resultados em característica prima. Na seção 4, é provada uma Conjectura feita pelo aluno a qual diz, essencialmente, que o Problema de Noether original, com uma ação de um grupo, caso tenha solução positiva, implicará solução positiva para o Problema de Noether Não-Comutativo correspondente. A seção encerra-se com dois Problemas em aberto considerados relevantes. A seção 5 discute questões de birracionalidade não-comutativa para invariantes de anéis de operadores diferenciais em variedades arbitrárias, e o Problema de Noether Não-Comutativo para certos invariantes dos grupos de Weyl no anel de operadores diferenciais no toro — outro

resultado de [EFOS17] — é obtido como corolário. Tal resultado é usado no capítulo 5. A seção 6 encerra o capítulo, mostrando uma solução positiva para a Conjectura de Gelfand-Kirillov para subálgebras esféricas de álgebras racionais de Cherednik. Este resultado também se encontra em [EFOS17], porém, seguimos um caminho de demonstração ligeiramente diferente.

O Capítulo 5 discute a Teoria de álgebras e ordens de Galois. Dado o caráter técnico das definições, é tomado um esforço muito grande em motivar a teoria. Ela é introduzida como uma continuação natural de investigações inciadas por Block [Blo81] de relacionar a teoria de representação de álgebras associativas com o seu mergulho em anéis de grupos torcidos sobre anéis de divisão. A teoria desenvolvida, uma evolução daquela inciada por Drozd, Futorny e Ovsienko em [DFO94], resulta em um aparato conceitual que, do ponto de vista estrutural, generaliza o conceito clássico de ordem ([MR01]); do ponto de vista de teoria de representações, tem boas propriedades de extensões de módulos com relação a uma subálgebra comutativa, generalizando um resultado simples e bem conhecido de álgebra comutativa, e generalizando a Teoria de Módulos de Gelfand-Tsetlin para gl_n ([Ovs02]). Para benefício didático de exposição, a teoria de módulos de Gelfand-Tsetlin para gl_n é usada como exemplo a medida que a teoria de álgebras e ordens de Galois é introduzida. A seção 1 contém nosso primeiro resultado original, de [EFOS17], uma versão bastante genérica da Conjectura de Gelfand-Kirillov para álgebras de Galois, que generaliza imensamente o trabalho prévio desenvolvido em [FMO10]. Este resultado também ilumina as dificuldades esperadas para a (conjecturada) realização de $U(L)$, em que L é uma álgebra de Lie simples de tipo ortogonal, como ordem de Galois, e aponta um possível caminho para a solução da Conjectura de Gelfand-Kirillov para álgebras de tipo C. A maior parte do trabalho de ordens de Galois, até o momento, tinha encontrado suas aplicações na teoria de padrões de Gelfand-Tsetlin para várias álgebras ([FMO10], [Har17b]). Contudo, conforme a construção da teoria deixa claro, e é deixado manifesto por Futorny e Ovsienko em seu trabalho ([FO10], [FO14]), a possibilidade de utilizar essa teoria para álgebras de Weyl generalizdas é muito importante; assim como para certos anéis de invariantes de operadores diferenciais ([FO10], Sec. 7). Nós desenvolvemos a teoria nesse caminho, seguindo o artigo [FS18a]. Na seção 3, provamos que inúmeros invariantes de anéis de operadores diferenciais são ordens de Galois. E mais: livres sobre suas subálgebras de Harish-Chandra. Para tanto, nós usamos um resultado pouco conhecido de Hyman Bass ([Bas63], corol. 4.5) que, em conjunto com o célebre Teorema de Suslin-Quillen, implica que todo módulo projetivo sobre a álgebra de polinômios é livre. Isso dá a possibilidade de se obter limitantes superiores para vários objetos relacionados às categorias de módulos de Gelfand-Tsetlin ([FO14]). Finalmente, na seção 4, desenvolvemos a teoria para álgebras de Weyl generalizadas. Provamos um resultado de equivalência birracional de interesse independente, o qual nos permite provar a Conjectura de Gelfand-Kirillov quantizada para a primeira e segunda deformações de Witten, e um critério para uma álgebra generalizada de Weyl ser uma ordem de Galois. Este último resultado é usado para provar nosso penúltimo teorema do Capítulo: os invariantes da Álgebra de Weyl, sob a ação natural de todo grupo de reflexão unitário do tipo $G(m, 1, n)$, são uma ordem de Galois. É conjecturado que esse resultado valha para todos os grupos de reflexão unitários — em particular $D_n = G(2, 2, n)$. Na última seção, discutimos o que é conhecido nesse caso geral.

O Capítulo 6 desenvolve uma teoria elementar de módulos holonômicos para invariantes da Álgebra de Weyl e anéis de operadores diferenciais em quocientes do espaço afim, no caso de grupos finitos agindo linearmente. O principal ingrediente é a noção de “somewhat commutative algebra"conjuntamente com a teoria de dimensão filtrada de Bavula ([Bav06]). A menos de certos resultados técnicos referentes a esses tópicos, a teoria é muito similar àquela da Álgebra de Weyl.

No último Capítulo 7, seção 1, estudamos uma versão quantizada do Problema de Noether, introduzido da forma que está nesta tese pela primeira vez em [Har17b], apesar de resultados preliminares em [FH14] e [AD97]. Nós apontamos como ele se relaciona de maneira natural ao Teorema de Chevalley-Shephard-Todd para espaços quânticos afins (trabalho de Kirkman, Kuzmanovich e Zhang, [KKZ10]). Essa é a primeira discussão exclusiva dedicada ao Problema de Noether Quântico na literatura. O resto do Capítulo é um resumo dos resultados do [FS18c].

0.1 Pré-Requisitos, Notação

Vamos fixar a notação e a terminologia da tese; deixar claro o que está sendo assumido; e eventualmente lembrar de algumas definições e resultados. Assume-se conhecimento básico sobre álgebras de Lie ([Hum72]) e suas álgebras envolventes ([Dix74], [MR01]). Assume-se conhecimento sobre extensões de Ore e localização de Ore, como em [GJ04] e [MR01] — apesar de um pouco ser relembrado no Capítulo 1, seção 2. Em particular, dado um domínio de Ore A, denotaremos por $Frac\, A$ seu anel total de frações.

Lembremos uma notação comum: seja $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ uma n-upla de inteiros não-negativos. Definimos $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, e similarmente $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$ (em que estamos dentro da álgebra polinomial, ou de Weyl — ficará claro em cada caso). Definimos $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

Também supomos familiaridade com as definições elementares de grupos quânticos ([BG02]). As partes de álgebra mais usadas implicitamente, contudo, são álgebra comutativa e geometria algébrica.

Comecemos por álgebra comutativa. Um conhecimento do material básico, como o de [AM69], é suficiente. A partir de agora, todos os anéis são comutativos.

Definição 0.1. *Um anel Noetheriano A é* regular *se todas as suas localizações da forma A_p, p um primo, forem anéis Noetherianos regulares locais.*

Proposição 0.1. *Todo anel Noetheriano A, se regular, é integralmente fechado.*

Lembramos que ser integralmente fechado é uma propriedade local.

Definição 0.2. *Um anel comutativo é reduzido se ele não possui nenhum elemento nilpotente.*

Teorema 0.1. *Sejam $A \subset B$ anéis, com B integral sobre A. Então A é um corpo se, e somente se, B é um corpo.*

Corolário 0.1. *Seja p um ideal primo de $A \subset B$; A, B dois anéis comutativos, com B integral sobre A. Seja q um ideal primo de B com $q \cap A = p$. Então q é maximal se, e somente se, p é maximal.*

Teorema 0.2. (Going-Up) *Sejam $A \subseteq B$ anéis, B integral sobre A. Dados ideais primos $p_1 \subset p_2$ de A e um ideal primo q_1 de B, tal que $p_1 = q_1 \cap A$, existe um ideal primo de B, $q_2 \supseteq q_1$, tal que $p_2 = q_2 \cap A$. Se q_2' é outro ideal primo com $q_2' \cap A = p_2$ e $q_2 \subseteq q_2'$, então $q_2 = q_2'$.*

Teorema 0.3. *Seja A um anel Noetheriano. Então ele é Artiniano se, e somente se, ele tiver dimensão de Krull 0. Neste caso, o número de ideais maximais (= primos) é finito.*

Agora, discutamos geometria algébrica. Nossas referências são [Har77] e [Liu02]. Nesta tese, nos restringiremos à categoria de variedades quase-projetivas ([Har77], Capítulo 1). Nossos corpos k serão sempre algebricamente fechados, e usualmente de característica 0. Seja A uma álgebra reduzida e finitamente gerada sobre k. Nós denotamos por $Spec\, A$ o esquema afim, o espectro de A — o conjunto dos ideais primos de A, com a topologia usual de Zariski. Frequentemente nós o identificaremos com $Specm\, A$, o conjunto dos ideais maximais com a topologia de Zariski — não há risco algum em fazer isso. Este conjunto pode ser naturalmente realizado como os zeros de polinômios de um espaço afim ([Har77], Capítulo 1). Dada uma variedade X, denotaremos por $O(X)$ o seu anel de funções regulares.

No nosso ambiente restrito de variedades quase-projetivas, é simples definir o que é isomorfismo e equivalência birracional ([Har77], Capítulo 1).

Vamos relembrar apenas alguns pontos:

Definição 0.3. *Seja X uma variedade algébrica irredutível. Ela é chamada de suave (normal), se o germe de funções regulares em cada ponto for um anel Noetheriano regular local (integralmente fechado).*

Pelo que vimos de álgebra comutativa, toda variedade suave é normal. Uma observação a respeito do conceito de ser suave: existe também o conceito de uma k variedade X ser suave se o mapa canônico $X \to k$ for suave. Entretanto, para corpos algebricamente fechados, os dois conceitos coincidem ([Har77], Capítulo III, 10).

Finalmente, precisamos discutir quocientes sob ações de grupos finitos na categoria de variedades algébricas afins. O espaço de órbitas possui uma estrutura de variedade algébrica afim? A resposta é sim (para variedades mais gerais e grupos não-finitos, a situação é extremamente delicada, e entramos no ramo de Teoria Geométrica de Invariantes, [MFK94]).

O resultado algébrico essencial para esta análise é um dos mais célebres teoremas de teoria de invariantes:

Teorema 0.4. (Hilbert-Noether) *Seja R uma k álgebra finitamente gerada, sobre qualquer corpo k, e seja G um grupo finito de automorfismos de álgebra de R. Então R^G é finitamente gerado sobre k, R é integral sobre R^G, e R é um módulo finitamente gerado sobre R^G.*

Também temos:

Proposição 0.2. *Se R é integralmente fechado, R^G também o é.*

.

A prova desses dois fatos pode ser encontrada em [Dol03].

Eis o principal resultado sobre quocientes de variedades afins:

Teorema 0.5. *Seja X uma variedade quasi-projetiva e G um grupo finito de k-automorfismos de X. Então, existe uma variedade quasi-projetiva Y e um mapa $\pi : X \to Y$ tal que:*

- *π é sobrejetivo; dado um subconjunto de U, ele é aberto em Y se, e somente se, $\pi^{-1}(U)$ é aberto em X (ou seja, Y tem a topologia quociente pela ação de G);*
- *Dado qualquer aberto de U de Y, o homomorfismo natural $O(U) \to O(\pi^{-1}(U))$ resulta em um isomorfismo entre $O(U)$ e $O(\pi^{-1}(U))^G$;*
- *As fibras de π são órbitas;*
- *Dada qualquer variedade Z, qualquer morfismo $\phi : X \to Z$, tal que $\phi(g.x) = \phi(x)$, para todos $x \in X, g \in G$, fatora-se através de π por um morfismo $\phi' : Y \to Z$.*

Denotaremos a variedade Y por X/G, e a chamaremos de quociente de de X pela ação de G. No caso específico de $X = Specm\, A$ ser uma variedade afim, temos $X/G = Specm\, A^G$ (que é afim pelo Teorema de Hilbert Noether), e π é induzido pela inclusão $A^G \to A$.

Demonstração. [Dol03], Capítulo 6. □

Por fim: recorrentemente usaremos a expressão *grupo finito de automorfismos* de uma álgebra A. Isto quer dizer que o grupo em questão é um subgrupo finito de $Aut_k\, A$. Quando dissermos que dois domínios de Ore não-comutativos A e B são birracionalmente equivalentes, queremos dizer que seus anéis de frações são isomórficos. Quando usarmos a expressão “módulo livre"sem especificar o lado, queremos dizer que ele o é à esquerda e à direita.

Capítulo 1

Preliminares: algumas classes de álgebras

Este é um capítulo preliminar, que contém material básico; porém, não essencialmente canônico, de várias áreas da álgebra. O objetivo é, principalmente, estabelecer notação e fazer a tese auto-contida. Apesar do cuidado da exposição, é inevitável o caráter necessariamente *ad-hoc* de parte do conteúdo.

1.1 Anéis de Operadores Diferenciais

Anéis de operadores diferenciais podem ser definidos para qualquer variedade algébrica, irredutível ou não, suave ou não, sobre um corpo de característica 0 ou prima ([Smi]).

Nossa estratégia será definir anéis de operadores diferenciais sobre k-álgebras (k um corpo) finitamente geradas, reduzidas, A. Denotaremos o anel de operadores diferenciais $D(A)$; sendo X uma variedade algébrica afim, $D(X)$ - o anel de operadores diferenciais em X - será definido como nada mais que $D(O(X))$. Por simplicidade lógica e de exposição, assumiremos sempre que k tem característica 0, e que A é um domínio (ou seja, estaremos interessados em variedades irredutíveis). Quando discutirmos variedades, em particular, o corpo sempre será algebricamente fechado.

Dado esse ponto de partida, existem duas definições naturais do que gostaríamos de chamar de *anel de operadores diferenciais* em A. A primeira é mais geral, e funciona também para variedades singulares de característica 0 e não-singulares de característica prima ([Smi]).

Definição 1.1. (Primeira definição de operadores diferenciais) *Defina indutivamente* $D(A)_0 = \{d \in End_k(A) | [d, a] = 0, \forall a \in A\}$, *e para todo* $i > 0$, $D(A)_i = \{d \in End_k(A) | [d, a] \in D(A)_{i-1}, \forall a \in A\}$. *Claramente temos* $D(A)_i \subseteq D(A)_j$ *se* $i < j$ *e* $D(A)_i D(A)_j \subseteq D(A)_{i+j}$. *Chamando* $D(A) = \bigcup_{i=0}^{\infty} D(A)_i$, *obtemos uma álgebra associativa, chamada de* anel de operadores diferenciais *em* A.

Note que, dessa forma, $D(A)$ possui naturalmente uma filtração, a chamada *ordem de operador diferencial.*

Definição 1.2. *Uma* k*-derivação de* A *é uma função* $\delta \in End_k(A)$ *que satisfaz* $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$, *para todos* $a, b \in A$. *O conjunto das* k*-derivações formam um* A*-módulo, denotado por* $Der_k A$, *com a seguinte ação de* A: $(a\delta)(b) = a\delta(b), a, b, \in A, \delta \in Der_k A$; *ele também carrega a estrutura de álgebra de Lie sobre* k, *por meio do comutador de duas derivações.*

Proposição 1.1. $D(A)_0 = A$ *e* $D(A)_1 = A \oplus Der_k A$.

Demonstração. Se $T \in D(A)_0$, então $[T, a](1) = T(a) - aT(1) = 0, \forall a \in A$. Portanto, T é multiplicação por $T(1)$. Se $T \in D(A)_1$, seja $U = T - T(1)$. Então, para todos $a, b \in A$, $[b, [U, a]](1) = b(U(a) - aU(1)) - U(ab) + aU(b) = 0$. $U(1) = 0$, e, portanto, $U(ab) = aU(b) + bU(a)$, ou seja, U é uma derivação. Finalmente, fica claro que $A \cap Der_k A = \{0\}$. □

Seja agora A como acima, isto é, reduzida e finitamente gerada, com a hipótese adicional de que ela é regular.

Definição 1.3. (Segunda definição de operadores diferenciais) *$D(A)$, o* anel de operadores diferenciais *em A, é a subálgebra de $End_k(A)$ gerada por A e $Der_k(A)$.*

A proposição acima mostra que o anel de operadores diferenciais em A, no primeiro sentido, contém o anel de operadores diferenciais em A, no segundo sentido. As duas definições coincidem quando A é regular ([MR01], sec. 15.4; a recíproca é a célebre Conjectura de Nakai). Contudo, em geral, elas diferem. Por exemplo: $D(A)$ é Noetheriano à esquerda e à direita, e finitamente gerado como k-álgebra, como veremos logo mais. Contudo, em [BGG72], é mostrado que $D(A)$, quando $k = \mathbb{C}$ e $A = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]/(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)$, que tem uma singularidade na origem, não é Noetheriano nem finitamente gerado.

Definição 1.4. *Seja X uma variedade afim irredutível. Definimos $D(X)$ como $D(O(X))$, usando a primeira noção de anel de operadores diferenciais. Caso X seja não singular, oscilaremos livremente entre as duas noções.*

Definição 1.5. (Álgebra de Weyl) $A_n(k) = D(k[x_1, \ldots, x_n])$.

Observação. *Nós usaremos duas notações-padrão para os geradores de Weyl: $x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n$; ou então $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, como é costumeiro. As relações canônicas entre tais geradores são as* relações de Weyl.

Coletemos agora, num único teorema, todas as principais propriedades de estrutura de anéis de operadores quando A é regular.

Teorema 1.1. *Seja A um k-domínio finitamente gerado, regular. Então sobre $D(A)$ podemos dizer que:*

- *É um domínio noetheriano, à esquerda e à direita, simples, finitamente gerado como k-álgebra;*
- *A álgebra graduada associada a $D(A)$ com a filtração por ordem de operador diferencial é $S_A(Der_k(A))$, a álgebra simétrica sobre o A módulo $Der_k(A)$;*
- *$gl.dim\, D(X) = dim\, X$, $GK.dim\, D(X) = 2\, dim X$, quando $A = O(X)$ para uma variedade afim irredutível regular X.*

A demonstração de todos esses fatos pode ser encontrada em [MR01], capítulo 15.

Observação. *A Álgebra de Weyl tem uma segunda filtração muito usada, que relembraremos agora - a filtração de Bernstein. $A_n(k)$ tem como base monômios $x^\alpha \partial^\beta$, em que α, β são n-uplas de inteiros não-negativos. Definamos a ordem de tal monômio como $|\alpha| + |\beta|$. Seja $A_n(k)_i$ o subespaço gerado pelos monômios de ordem menor ou igual a i. Usando combinatória simples, é fácil ver que todos possuem dimensão finita. Além disso, $A_n(k)_i = A_n(k)_1^i$. A álgebra graduada associada é a álgebra de polinômios em $2n$ variáveis [Cou95].*

Resultados sobre localizações de $D(A)$ quando A é regular são bem conhecidos ([MR01], 15.1.25), mas eles existem também quando A não o é necessariamente:

Proposição 1.2. *Seja S um conjunto multiplicativamente fechado em A. Então a localização à esquerda e à direita de $D(A)$ por S existe, e é isomórfica $D(A_S)$.*

Demonstração. [Muh88], Prop 1.8. □

1.2 Álgebras e Corpos de Weyl

Vamos assumir familiridade com a teoria de extensões e localizações de Ore (como em [GJ04], e [MR01]). Dado um anel R, α um automorfismo de R e δ uma α-derivação, usaremos a notação $S = R[x; \alpha, \delta]$ para denotar a extensão de Ore. Quando $\alpha = id$ ou $\delta = 0$, a notação será $R[x; \delta]$ e $R[x; \alpha]$, respectivamente.

Seja F qualquer domínio Noetheriano. Nós podemos definir a Álgebra de Weyl sobre F da seguinte maneira:

Definição 1.6. *Seja $S^* = F[x_1, \ldots, x_n]$ e $A_n(F) = S^*[y_1; \partial_1] \ldots [y_n; \partial_n]$, em que ∂_j é simplesmente derivação com relação a x_j, e manda y_i para 0 quando $i<j$. Essa extensão de Ore iterada é isomórfica a $A_n(k)$ quando k for um corpo.*

Uma propriedade é evidente dessa definição:

Lema 1.1. $A_{n+m}(F) = A_n(F) \otimes_F A_m(F) = A_n(A_m(F))$.

Seja $S = R[x; \alpha, \delta]$; todo $s \in S$ é da forma $r_n x^n + \ldots + r_1 x + r_0$, $r_i \in R, r_n \neq 0$. Lembrando que tal representação é única, definimos o *grau* de s por n, e o denotamos por $deg\, s$. O *coeficiente líder* (*à esquerda*) de s é definido como sendo r_n.

A rigor, pode-se dizer que se definiu acima apenas o conceito de grau à esquerda, uma vez que s também pode ser escrito da forma $x^m q^m + \ldots x q_1 + q_0$, $q_i \in R$. Contudo, temos o seguinte Lema simples:

Lema 1.2. $x^n r = \alpha^n(r) x^n + \ldots + \delta^n(r), r \in R$.

Como α é um automorfismo, isso mostra que o conceito simétrico de grau à direita coincide com o de grau à esquerda. Mostra, também, que $R[x; \alpha, \delta]$ é um módulo livre à direita sobre R. Além disso, fica claro que $deg\, ss' = deg\, s + deg\, s', \forall s, s' \in S$ não-nulos. Portanto, as mesmas considerações sobre grau, como no caso de polinômios usuais, nos dão:

Proposição 1.3. *Se S é uma extensão de Ore de R, e R é um domínio, então S também o é. As unidades de S são as unidades de R.*

Corolário 1.1. *As unidades da Álgebra de Weyl $A_n(k)$ são k.*

Demonstração. Basta usar a proposição acima, com o Lema 1.1 e aplicar indução. □

Corolário 1.2. *A Álgebra de Weyl $A_n(k)$ não possui automorfismos internos.*

Lembremos também um resultado fundamental:

Teorema 1.2. (Teorema da Base de Hilbert para Extensões de Ore) *Se R é Noetheriano à esquerda ou à direita, e S é uma extensão de Ore de R, então S também é Noetheriano à esquerda ou à direita.*

Demonstração. [GJ04], Thm. 2.6. □

Assim, fica fácil ver que $A_n(F)$ é um domínio de Ore.

Definição 1.7. (Corpos de Weyl) *Denotaremos o corpo de fração de $A_n(F)$ por $D_n(F)$, e os chamaremos de Corpos de Weyl. Uma observação elementar porém útil é que $D_n(D_m(F)) = D_{m+n}(F)$.*

Vamos discutir algumas propriedades dos corpos de Weyl.

Primeiro, seja R um domínio Noetheriano à esquerda e à direita. Seja $A = R[x; \alpha, \delta]$ uma extensão de Ore. Como vimos, A também é um domínio Noetheriano à esquerda e à direita e, portanto, $Frac\, A$ existe. Seja $K = Frac\, R$. α estende-se de maneira única para um automorfismo de K: $\alpha(xy^{-1}) = \alpha(x)(\alpha(y))^{-1}$, $x, y \in R$, e δ estende-se de maneira única a uma α-derivação de K, usando: $\delta(s^{-1}) = -\alpha(s)^{-1}\delta(s)s^{-1}$, para $s \neq 0 \in R$. Podemos formar, assim, a extensão de Ore $K[x; \alpha, \delta]$, e então:

Proposição 1.4. $Frac\, A = Frac\, K[x; \alpha, \delta]$.

Demonstração. A inclusão $Frac\, A \subseteq Frac\, K[x; \alpha, \delta]$ é clara. No sentido contrário, qualquer elemento de $K[x; \alpha, \delta]$, após tomar denominadores comuns, pode ser escrito da forma $s^{-1}a$, em que $a \in A, s \in R$. Assim, se $x, y \in K[x; \alpha, \delta]$, $xy^{-1} = s^{-1}ab^{-1}t$ para alguns $s, t \in R, a, b \in A$. Logo, $Frac K[x; \alpha, \delta] \subseteq Frac\, A$. □

O valor comum de $Frac\,A$ e $Frac\,K[x;\alpha,\delta]$ será denotado por $K(x;\alpha,\delta)$. Se $\alpha = id$ ou $\delta = 0$, usa-se a notação $K(x;\delta)$ ou $K(x;\alpha)$, respectivamente.

Da mesma forma que no caso comutativo, ao discutir funções racionais, é interessante considerar séries de potência.

Seja K um anel de divisão, α um automorfismo de K e δ uma α-derivação. O corpo $K(x;\alpha,\delta)$ pode ser visto como subcorpo do anel de séries de Laurent torcidas $K((x^{-1},\alpha^{-1},-\delta\alpha^{-1}))$. Seus elementos são séries de Laurent da forma $\sum_{i\geq m}^{\infty} a_i x^{-i}$, onde $m \in \mathbb{Z}, a_i \in K$, e $a_m \neq 0$, com a multiplicação dada por:

$$x^{-1}a = \sum_{n\geq 1} \alpha^{-1}(-\delta\alpha^{-1})^{n-1}(a)x^{-n} = \alpha^{-1}(a)x^{-1} - x^{-1}\delta\alpha^{-1}(a)x^{-1}.$$

De fato, multiplicando à esquerda e à direita por x, obtém-se as mesmas relações que em $K[x;\alpha,\delta]$. $K[x;\alpha,\delta]$, portanto, aparece como subanel de $K((x^{-1};\alpha^{-1},-\delta\alpha^{-1}))$ e, assim $K(x;\alpha,\delta)$ é um subcorpo. Quando $\alpha = id$, usamos a notação $K((x^{-1};\delta))$, e usa-se a nomenclatura de anel de operadores pseudo-diferenciais.

Lema 1.3. *Seja K um anel de divisão com centro $Z(K)$. Seja σ um automorfismo de K, tal que σ^n não seja interno para nenhum $n \geq 1$ (um automorfismo interno é da forma $x \to yxy^{-1}$, para algum $y \in K$). Então o centro $Z(D)$ de $D = K(x;\sigma)$ é o subcorpo $Z(K) \cap K^\sigma$, em que $K^\sigma = \{a \in K; \sigma(a) = a\}$.*

Demonstração. No mergulho de D em $K((x^{-1};\sigma^{-1}))$, todo elemento $f \in D$ pode ser escrito da forma $\sum_{j\geq m} a_j x^{-j}$, em que $m \in \mathbb{Z}, a_j \in K$. Nesse caso, como $\delta = 0$, a multiplicação é dada simplesmente por $x^j a = \sigma^j(a)x^j$, $a \in K, j \in \mathbb{Z}$. Se f está em $Z(K)$, então $xf = fx$ e $af = fa$ para todo $a \in K$. Como $xa_j = \sigma(a_j)x$, a primeira igualdade implica $a_j \in K^\sigma$; a segunda implica $aa_j = a_j\sigma^{-j}(a)$ para todo $j \geq m$; como σ^j não é interno, necessariamente se tem $a_j = 0$ para $j \neq 0$. □

Especifiquemos a discussão para a Álgebra de Weyl. Considere inicialmente $A_1(k)$. Chame $w = yx$.

Temos que $wx = xw + x$ e, portanto, a subálgebra de $A_1(k)$ gerada por x, w é $k[x][w;d]$, em que d é a derivação $x\partial_x$. Temos $yw = (w+1)y$ e, assim, a subálgebra de $A_1(k)$ gerada por y, w é $k[w][y;\theta]$,em que θ é o automorfismo de $k[w]$ definido por $w \to w+1$.

É claro que o corpo de frações dessas duas subáglebras corresponde à totalidade do corpo de frações de $A_1(k)$, portanto temos:

$D_1(k) \cong k(x)(w;d) \cong k(w)(y;\theta)$.

De maneira indutiva, temos no caso de $A_n(k)$, definindo $w_i = y_i x_i$:

Proposição 1.5. *$D_n(k) \cong k(x_1,\ldots,x_n)(w_1;d_1)\ldots(w_n;d_n)$, onde $d_i = x_i\partial_{x_i}$.*

$D_n(k) \cong k(w_1,\ldots,w_n)(y_1;\theta_1)\ldots(y_n;\theta_n)$, onde $\theta_i(w_j) = w_j + \delta_{ij}$ e fixa os y_j com $j < i$.

Finalmente:

Proposição 1.6. *O centro de $D_n(k)$ é k.*

Demonstração. Aplicação direta da proposição acima e do lema que a precede, pois os θ_i não são automorfismos internos. □

1.3 Álgebras Universais Envolventes

Iremos agora considerar a álgebra de Lie gl_n, gerada pelas matrizes elementares e_{ij}, $i,j = 1,\ldots,n$ e sua álgebra universal envolvente $U(gl_n)$; e iremos coletar algumas informações relevantes a seu respeito. Isso será usado mais adiante quando considerarmos a teoria de álgebras e ordens de Galois. Se assumirá o corpo base algebricamente fechado de característica 0.

Nós temos uma cadeia natural de mergulhos ao longo do canto superior esquerdo: $gl_1 \subset \ldots \subset gl_n$, que induz um mergulho $U(gl_1) \subset \ldots \subset U(gl_n)$. Chamando de Z_i o centro e $U(gl_i)$, obtemos a *subálgebra de Gelfand-Tsetlin* Γ como a álgebra gerada em $U(gl_n)$ por $\bigcup_{i=1}^n Z_i$. Cada Z_m é uma álgebra polinomial em m variáveis $c_{mk} = \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in\{1,\ldots,m\}^k} e_{i_1 i_2} e_{i_2 i_3} \ldots e_{i_k i_1}$, $k = 1, \ldots, m$. Γ é uma álgebra polinomial em $n(n+1)/2$ variáveis ([Zhe70]).

É possível relacionar também a álgebra de Gelfand-Tsetlin com funções simétricas nos tableux, da seguinte maneira: seja Λ a álgebra polinomial nas variáveis $\{\lambda_{ij} | 1 \leq j \leq i \leq n\}$ e seja $G = \prod_{i=1}^n S_i$ (em que S_i é o grupo simétrico em i símbolos). G atua em Λ com S_i atuando da maneira esperada nos elementos da linha $\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{ii}$, permutando o segundo índice, e fixando os demais elementos.

Então temos um mergulho $\iota : \Gamma \to \Lambda$

$$\iota(c_{mk}) = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_{mi} + m - 1)^k \prod_{j \neq i} (1 - \frac{1}{\lambda_{mi} - \lambda_{mj}}).$$

Teorema 1.3. *ι se restringe-se a um isomorfismo entre Γ e Λ^G.*

Para uma prova, consultar [Zhe70].

Nós também temos:

Teorema 1.4. *$U(gl_n)$ é livre à esquerda e à direita como Γ módulo.*

Demonstração. Segue dos resultados em [Ovs02] e [FO05]. □

1.4 Álgebras de Weyl Generalizadas

Seja D um anel (não necessariamente comutativo), $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ uma n-upla de automorfismos de D que comutam: $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$, $i, j = 1, \ldots, n$. Seja $a = (a_1, \ldots, a_n)$ uma n-upla de elementos não-nulos do centro de D, tais que $\sigma_i(a_j) = a_j, j \neq i$. A Álgebra de Weyl Generalizada (usaremos como abreviação "GWA", de Generalized Weyl Algebra) $D(a, \sigma)$ de posto n é gerada sobre D por X_i^+, X_i^-, $i = 1, \ldots, n$ com as relações:

$$X_i^+ d = \sigma_i(d) X_i^+;\ X_i^- d = \sigma_i^{-1}(d) X_i^-,\ d \in D, i = 1, \ldots, n,$$
$$X_i^- X_i^+ = a_i;\ X_i^+ X_i^- = \sigma_i(a_i),\ i = 1, \ldots, n\,,$$
$$[X_i^-, X_j^+] = [X_i^-, X_j^-] = [X_i^+, X_j^+] = 0\,, i \neq j.$$

Assumiremos, a partir de agora, que D é um domínio Noetheriano comutativo. Nesse caso, temos:

Proposição 1.7. *$D(a, \sigma)$ é um domínio Noetheriano, livremente gerado como D-módulo.*

Demonstração. [BB00] □

Essa classe de álgebras foi introduzida por V. Bavula no início dos anos 90 e, provavelmente, nada descreve melhor a razão do que citá-lo sobre seu trabalho:

"This is an experimental fact that many popular algebras of small Gelfand-Kirillov dimension are GWAs [...]: the first Weyl algebra A_1 and its quantum analogue, the quantum plane, the quantum sphere, $U(sl(2)), U_q(sl(2))$, the Heisenberg algebra and its quantum analogues, the 2×2 quantum matrices, the Wittens and Woronowics deformations, Noetherian down-up algebras, etc. The generalized Weyl algebras were introduced by myself in 1987 when I was an algebra postgradute student at the Kyiv University, the Department of Mathematics, and they were the subject of my PhD Generalized Weyl algebras and their representations submitted at the end of 1990 (defended at the beginning of 1991)."([Bav17], Introduction).

Evidentemente, a teoria tornou-se extremamente robusta e vários resultados importantes foram obtidos em várias direções — propriedades estruturais de anéis, homológicas, representações etc (vide referências [1]-[10] em [Bav17]). Alguns desdobramentos originais dessa teoria serão abordados nesta tese.

Segue uma lista de exemplos de Álgebras de Weyl Generalizadas, muitos dos quais iremos recorrer posteriormente para obter novos resultados. Suponha k algebricamente fechado de característica 0:

- A primeira Álgebra de Weyl $A_1(k)$ pode ser realizada como $D(a,\sigma)$, com $D = k[h]$, $a = h$, $\sigma(h) = h - 1$;
- Seja $A_1(k)^{G_m}$, em que G_m é o grupo cíclico de ordem m, com o gerador agindo em $A_1(k)$ da seguinte forma: $\partial \to w\partial$; $x \to w^{-1}x$, w uma raiz m-primitiva da unidade. Esse anel de invariantes é uma GWA da seguinte forma:

$$A_1(k)^G = k\langle \partial^m, \partial x, x^m\rangle \cong D(a,\sigma);$$
$$a = m^m H(H-1/m)\dots(H-(m-1)/m); \sigma(H) = H-1.$$

  O isomorfismo é dado da seguinte forma:

$$\partial^m \to X^-, x^m \to X^+, t \to mH,\ t = \partial x.$$

- A álgebra de Weyl quantizada $A_1^q(k)$, quociente de $k\langle x,y\rangle$ pela relação $yx - qxy = 1$. Ela é isomórfica a GWA $D(a,\sigma)$ com $D = k[h]$, $a = h$, $\sigma(h) = q^{-1}(H-1)$;
- A deformação de Woronowicz e a primeira deformação de Witten (ambas são isomórficas; para uma prova, [BvO04], Theorem 1.1) podem ser realizadas como uma GWA da seguinte forma $D = \mathbb{C}[H,Z]$, $a = Z + \alpha H + \beta$ com

$$\sigma(H) = s^4, \sigma(Z) = s^2, \alpha = -1/s(1-s^2), \beta = s/(1-s^4).$$

  s $\neq 0, \pm 1, \pm i \in \mathbb{C}$;

- A primeira deformação de Witten, com $D = \mathbb{C}[C,H]$, $a = C - H(H-1)/(p+p^{-1})$, $\sigma(C) = C, \sigma(H) = p^2(H-1)$, com $p \neq 0, \pm 1, \pm i \in \mathbb{C}$;
- O grupo quântico $U_q(sl_2)$ é isomórfico a GWA com $D = \mathbb{C}[c,h,h^{-1}]$,$a = C + (H^2/(q^2-1) - H^{-2}/(q^{-2}-1))/(q-q^{-1})$, $\sigma(c) = c, \sigma(h) = qh$.

Anotemos um último fato:

Proposição 1.8. *Se $D(a,\sigma), D(a',\sigma')$ são duas GWA com D uma álgebra sobre um corpo k, então tomando o produto tensorial, temos $D(a,\sigma) \otimes D(a',\sigma') \cong D \otimes D'(a *' a, *\sigma')$, outra GWA, em que $*$ denota concatenação; os automorfismos são estendidos de D, D' para $D \otimes D'$ de maneira óbvia.*

1.5 Notas e Referências

A primeira seção é um apanhado de fatos bem conhecidos de anéis de operadores diferenciais. Nós utilizamos a exposição de [Smi] como guia. Os resultados são canônicos e as referências principais são [MR01], Capítulo 15, e o clássico [Bjo79]. A exposição da segunda seção é bem canônica, mas usamos como guia [GK66] e, principalmente no que diz respeito a corpos de Weyl, [Dum06] e [Coh85]. A seção três é canônica: seguimos [DFO94]. O mesmo vale para a Seção 4 — poderia ter sido escolhida qualquer introdução a álgebras de Weyl generalizadas. Nós ficamos com [BB00].

Capítulo 2

Mergulhos de Galois: desenvolvimento histórico

Neste Capítulo nós discutimos, com bastantes detalhes, os problemas clássicos que, histórica e logicamente, desencadearam as linhas de estudos que veremos no próximo Capítulo: o Teorema de Chevalley-Shephard-Todd, o Problema de Noether, o fenômeno de rigidez em famílias de álgebras, e a Conjectura de Gelfand-Kirillov. O tema unificador será o *Problema de mergulho de Galois.* Incluímos um apêndice que discute o grupo de automorfismos das álgebras polinomiais e Álgebras de Weyl. Um comentário final sobre o Capítulo: várias vezes teremos a oportunidade de observar intepretações geométricas sobre resultados algébricos; nesses casos, fica implícito que o corpo em discussão é algebricamente fechado.

2.1 Teorema de Chevalley-Shephard-Todd

Seja k um corpo de característica 0. Denote por $P_n(k) = k[x_1, \ldots, x_n], n > 0$, $P_0(k) = k$ a álgebra polinomial em n variáveis. Denote por $Aut_k P_n(k)$ o grupo de automorfismos de k-álgebra de P_n. Dentro de teoria de invariantes, uma questão natural que ocorre é a seguinte: dado um grupo finito $G \subset Aut_k P_n(k)$, quando temos $P_n(k)^G \cong P_n(k)$? Ou, formulando de maneira equivalente em linguagem geométrica: quando (referimo-nos ao quociente GIT usual) $\mathbb{A}^n/G \cong \mathbb{A}^n$?

Algumas considerações são pertinentes. Suponha que H seja conjugado a G em $Aut_k P_n(k)$. Então, claramente, $P_n(k)^H \cong P_n(k)^G$. Sendo assim, façamos a seguinte definição:

Definição 2.1. *Seja G um subgrupo de $Aut_k P_n(k)$ conjugado a um subgrupo de $GL_n(k)$. Dizemos que G é* linearizável. *Quando $G \subset GL_n(k) \subset Aut_k P_n(k)$ dizemos que G* age linearmente.

Observação. *Sendo W o k-espaço gerado por $x_1, \ldots, x_n$, nós vemos $GL_n(k)$ como subgrupo de $Aut_k P_n$ contendo as ações induzidas por aquelas em $GL(W)$. Uma situação comum em que isso ocorre é: temos um grupo $G \subset GL(V)$, V um espaço vetorial de dimensão finita, e consideramos a sua ação estendida em $S(V^*)$, da seguinte maneira: $(g.f)(v) = f(g^{-1}v), g \in G, v \in V, f \in S(V^*)$. De fato, é simples ver que toda ação linear ocorre dessa forma.*

A estrutura dos grupos $Aut_k P_n$ é conhecida apenas para $n = 1, 2$ (Teorema de Jung-van der Kulk, [vdE00], e o Apêndice deste Capítulo), podendo ser bastante complexa para n maiores ([SU04]). Além disso, é conhecida a existência de grupos finitos G que não são linearizáveis ([MMJP91]). Dadas essas considerações, vamos tratar do enunciado da famosa questão resolvida por Shephard, Todd, e Chevalley.

Problema. *Seja G um grupo que age linearmente em $P_n(k)$. Quando nós temos $P_n(k)^G \cong P_n(k)$?*

Algumas definições são necessárias.

Definição 2.2. *Um isomorfismo linear s de um espaço vetorial V é chamado de* pseudorreflexão *se ele fixar um hiperplano em todos os pontos e $s^n = Id$ para algum natural n. Quando $n = 2$, s é chamado de uma* reflexão.

Grupos finitos de pseudorreflexões são subgrupos gerados pelas pseudorreflexões que contêm. Quando $k = \mathbb{Q}$, tais grupos correspondem aos grupos de Weyl; quando $k = \mathbb{R}$, tais grupos correspondem aos grupos finitos de reflexão usuais (que correspondem aos grupos de Coxeter finitos); e quando $k = \mathbb{C}$, temos os grupos finitos de reflexão unitários. Eles serão revisitados nesta tese nos Capítulo 4 (seções 1 e 2) e Capítulo 5 (seção 4).

Teorema 2.1. (Chevalley-Shephard-Todd) *Seja G um grupo finito agindo linearmente em $P_n(k)$. Então são equivalentes:*

- *G visto como subgrupo de $GL_n(k)$ é um grupo de pseudorreflexões na sua representação natural;*
- *$P_n(k)^G \cong P_n(k)$ (geometricamente: $\mathbb{A}^n/G \cong \mathbb{A}^n$);*
- *$P_n(k)$ é finitamente gerado e livre/projetivo/plano como $P_n(k)^G$ módulo (geometricamente, a projeção $\pi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n/G$ é um morfismo plano).*
- *$P_n(k)^G$ é um anel regular (geometricamente: $\mathbb{A}^n/G$ é suave);*

Demonstração. Teorema 7.2.1 em [Ben93]. □

Observação. *O mesmo resultado vale quando k tem característica diferente de 0, mas coprima com a ordem de G. Uma demonstração essencialmente completa desse fato encontra-se em [Bou68], §5 Thm. 4.*

É bem conhecido que o grupo simétrico é um grupo de reflexões; portanto, o resultado acima pode ser visto como uma generalização do resultado clássico e embriônico de teoria de invariantes a respeito de polinômios simétricos.

2.2 Problema de Noether

Nesta seção — por simplicidade — suporemos novamente que k tem característica 0.

Seja G um grupo finito de automorfismos lineares de $k[x_1, \ldots, x_n]$, e considere a extensão de sua ação para o corpo de funções racionais.

Problema. (Problema de Noether) *Quando, nas condições acima, $k(x_1, \ldots, x_n)^G \cong k(x_1, \ldots, x_n)$?*

É interessante, incialmente, comparar a questão levantada pelo Problema de Noether com a do Teorema de Chevalley-Shephard-Todd. Dado um grupo G, agindo linearmente no espaço afim $\mathbb{A}^n$, este último estuda a questão de quando as variadades $\mathbb{A}^n/G$ e $\mathbb{A}^n$ são *isomórficas*, enquanto que o Problema de Noether pergunta apenas por equivalência birracional. Como sabemos de geometria algébrica, equivalência birracional é um problema mais tratável ([Har77], Cap. 1) e, de fato, como veremos a seguir, muito mais ações de grupo dão uma solução positiva para o Problema de Noether do que apenas grupos de pseudorreflexão.

Historicamente, o problema foi introduzido por Emmy Noether devido a sua relação com o Problema Inverso da Teoria de Galois: dado um grupo finito G, determinar se $\mathbb{Q}$ possui uma extensão de Galois L, tal que $Gal(L/\mathbb{Q}) = G$. Noether mostrou, por meio do Teorema da Irredutibilidade de Hilbert ([JLY02], Capítulo 3), que se G é realizado como um grupo que permuta de maneira transitiva as variáveis $x_1, \ldots, x_n$ e o seu problema tem solução positiva para $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)^G$, então o Problema Inverso também tem solução positiva para esse grupo (de fato, mais informação pode ser obtida, [JLY02]).

Vamos a algumas observações preliminares: seja $K = k(x_1, \ldots, x_n)$ e G um grupo finito de automorfismos lineares agindo em K. Pelo Lema de Artin, K é uma extensão algébrica de K^G, com $[K : K^G] = |G|$. Dados três corpos $E \subseteq F \subseteq L$, tem-se que $trdeg_E L = trdeg_F L + trdeg_E F$. Portanto, $trdeg_k K^G = trdeg_k K = n$. Em particular, não se pode ter $K^G = k$. Isso definitivamente é falso se G for permitido ser infinito: por exemplo, quando $G = GL_n(k)$, K^G restringe-se às constantes k.

Observação. *Como veremos no Capítulo 3, Proposição 4, a situação é distinta para a Álgebra de Weyl quanto a esta última frase.*

Listemos alguns dos casos mais importantes de solução positiva para o problema de Noether.

- O Problema de Noether tem solução positiva sempre que $n = 1, 2$;
- O Problema de Noether tem solução positiva sempre que $n = 3$ e k for algebricamente fechado (Burnside [Bur14]).
- Suponha que W tenha ação em $P_n(k)$ como um grupo de pseudorreflexões. Então o Problema de Noether tem solução positiva para $k(x_1, \ldots, x_n)^W$ (pelo Teorema de Chevalley-Shephard-Todd);
- O Problema de Noether tem solução positiva quando k contiver uma e-ésima raiz primitiva da unidade, em que e é o expoente de G, e o grupo é abeliano (Fischer [Fis16]). Relembrando: expoente de um grupo finito é o mínimo múltiplo comum das ordens de seus elementos;
- Considere $k(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, com S_n permutando as variáveis x_i, y_i simultaneamente. O Problema de Noether tem solução positiva (Mattuck, [Mat68]);
- O Problema de Noether tem solução positiva para $k(x_1, x_2, x_3)$, e $G = A_3$, permutando as variáveis da forma usual; para $k(x_1, \ldots, x_4)$ e $G = A_4$, e para $k(x_1, \ldots, x_5)$, e $G = A_5$, agindo também da forma usual (k arbitrário; o último resultado deve-se a Maeda [Mae89]).

  O problema de Noether é aberto para todos os demais grupos alternantes ([JLY02], Capítulo 0).

Fizemos uma contribuição, para o Problema de Noether — a saber, quando $n = 2$, o grupo finito G pode ter ação arbitrária.

Comecemos com o seguinte lema, o qual baseia-se no seguinte fato não-trivial: é possível mostrar que todo subgrupo finito G de $Aut_k P_2(k)$ é linearizável ([Dum06], Corolário 1.6.2 — ver demonstração deste fato no Apêndice desse Capítulo).

Proposição 2.1. *Seja G um grupo finito qualquer agindo de maneira não necessariamente linear em $P_2(k)$. Então $Frac\, P_2(k)^G$ é isomórfico a $k(x, y)$.*

Demonstração. Seja H um grupo de automorfismos lineares conjugado a G em $Aut_k P_2(k)$. Então $Frac\, P_2(k)^G \cong Frac\, P_2(k)^H \cong k(x, y)$, pela solução positiva do Problema de Noether para $n = 2$. □

Observação. *O ponto importante no enunciado acima é que não exigimos que k seja algebricamente fechado. Caso contrário, o resultado segue imediatamente do teorema de Zariski-Castelnuovo ([Jac89], Sec. 8.14)*

Anotamos aqui, para uso posterior no Capítulo 3, o Teorema de Miyata; observamos que ele é essencial para a abordagem moderna do Problema de Noether ([Dum06]).

Teorema 2.2. (Miyata, [Miy71]) *Seja K um corpo comutativo, $S = K[x]$ o anel de polinômios em uma variável sobre K, e $F = K(x)$ seu corpo de frações. Seja G um subgrupo de automorfismos de S, não necessariamente finito, tal que $g(K) \subseteq K$ para todo $g \in G$. Duas coisas podem acontecer:*

- *$S^G \subseteq K$, e no caso $F^G = S^G = K^G$;*
- *S^G não está contido em K. Sendo qualquer $u \in S^G$, $u \notin K$, e de grau $m = min\{deg_x y | y \in S^G, y \notin K\}$, temos $S^G = K[u]$ e $F^G = K^G(u)$.*

São conhecidas ações de grupos lineares em corpos de funções racionais para o qual o enunciado do Problema de Noether é falso. Os primeiros contraexemplos foram descobertos, simultaneamente, por Swan ([Swa69]) e Voskresenskii ([Vos70]), no caso do grupo cíclico em 47 elementos agindo no corpo de funções racionais em 47 variáveis. Posteriormente, Lenstra ([Jr.74]) realizou um estudo completo dos grupos de permutação abelianos agindo em corpos de funções racionais, e descobriu critérios necessários e suficientes para o Problema de Noether ter solução positiva. Em particular, o menor grupo que oferece um contraexemplo para o Problema de Noether é o grupo cíclico em 8 elementos. Finalmente, Saltman ([Sal84]) produziu contraexemplos para corpos algebricamente fechados, com grupos de ordem p^9, p primo.

2.3 O Problema de Mergulho de Galois

Novamente, $char\, k = 0$.

Um problema muito natural da teoria de invariantes é o seguinte:

- Seja A uma álgebra e G e H dois grupos finitos de automorfismos de A (como álgebra). Se, $A^H \cong A^G$, é verdade que $H \cong G$?

Observação. *Lembremos o que foi dito na Introdução: recorrentemente usaremos a expressão* grupo finito de automorfismos *de uma álgebra A. Isso quer dizer que o grupo em questão é um subgrupo finito de $Aut_k\, A$.*

Quando fixamos um dos grupos como a identidade, nós temos o seguinte problema, que será denominado, seguindo a terminologia em [AP95], Introduction, de Problema de Mergulho de Galois:

Problema. (Problema de Mergulho de Galois) *Dada uma k-álgebra finitamente gerada A, existe um grupo finito não-trivial de automorfismos G de A, tal que $A^G \cong A$?*

Por um momento, nós iremos considerar apenas álgebras que não são anéis de divisão.

Um caso emblemático de estudo de Mergulho de Galois é o resultado que vimos acima: o Teorema de Chevalley-Shephard-Todd. Não é difícil construir exemplos, para álgebras não-comutativas, em que temos $A^G \cong A$, para um G não-trivial. Temos este exemplo, tomado de [KKZ08]:

Exemplo. *Seja R uma álgebra com um automorfismo σ de ordem n ($\sigma^{n+1} = \sigma$), sobre os números complexos. Então, se β for uma $n+1$-ésima raiz primitiva da unidade, e nós considerarmos a álgebra $A = R[z, \sigma]$, se introduzirmos uma ação g em A com $g|_R = id$ e $g\sigma = \beta\sigma$, então sendo $G = \langle g \rangle$, $A^G = R[z^{n+1}, \sigma^{n+1}] \cong R$.*

Contudo, como notadado pelos mesmos autores em [KKZ08], parece raro que tal fenômeno ocorra em anéis não-comutativos. Pelo contrário, frequentemente temos o seguinte:

- *Rigidez:* Para nenhum subgrupo finito não-trivial G (ou nenhum grupo finito de algum tipo natural, como linear — propriamente definido) de $Aut_k\, A$, A uma álgebra finitamente gerada, tem-se $A^G \cong A$.

É esse fenômeno que iremos estudar nesta seção.

A álgebra de polinômios pertence a diversas classes de álgebras que podem ser generalizadas — ela é, em particular, uma álgebra relativamente livre (na variedade de álgebras comutativas). Uma das primeiras investigações buscando generalizar o mergulho de Galois de Chevalley-Shephard-Todd foi feita, historicamente, para álgebras livres e relativamente livres. Lembremos as definições necessárias.

Definição 2.3. *Nós usaremos a notação $F_n(k) = k\langle x_1, \ldots x_n \rangle$ para a álgebra associativa livre em n variáveis, e $F(k) = \langle x_1, x_2, \ldots \rangle$ para um conjunto enumerável infinito. Um ideal T de $F_n(k)$ (ou $F(x)$) é chamado de T-ideal se ele for fechado por todos os endomorfismos de $F_n(k)$ (ou $F(k)$).*

Um conceito relacionado é

Definição 2.4. *Uma álgebra A satisfaz uma identidade polinomial (é uma PI-álgebra) se existir um polinômio $f(x_1, \ldots, x_m) \in F(k)$, tal que $f(a_1, \ldots, a_m) = 0$ para toda n-upla de elementos de A.*

Definição 2.5. *Seja T um T-ideal em $F_n(k)$, e seja $\mathfrak{A}$ a classe de todas as álgebras que satisfazem todas as identidades polinomiais em T. Então $\mathfrak{A}$ é chamada de variedade associada a T.*

Definição 2.6. *A álgebra relativamente livre de posto n, dado um T ideal em $F_n(k)$, é o quociente $F_n(k)/T$. Ela é o objeto livre no conjunto $\{y_1, \ldots, y_n\}$, dado pela imagem dos gerados de $F_n(k)$ no quociente por T, na variedade de álgebras definida por T.*

Os primeiros resultados foram sobre a álgebra livre:

Teorema 2.3. ([Lan76], [Kha78]) *Seja G um grupo finito de automorfismos agindo linearmente (a definição é a óbvia) em $F_m(k)$. Então a subálgebra de invariantes também é livre.*

Contudo, dado o fenômeno de que álgebras livres de posto distinto podem ser mergulhadas em outras de posto menor, fica a questão: qual o posto da álgebra de invariantes?

Teorema 2.4. ([DF82]) *Seja G um grupo finito de ações lineares, tal que $F_m(k)^G \cong F_m(k)$. Então G é trivial.*

Portanto, temos um resultado de rigidez para a álgebra livre.

Vamos considerar o anel de matrizes genéricas $GM_m(n)$. Ele é relativamente livre, da seguinte maneira: é o quociente $k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle/T$, em que T é o T-ideal gerado por todas as identidades polinomiais nas matrizes $m \times m$ sobre k. Ele tem uma realização concreta simples ($n > 1$):

Seja $O = k[a_{ij}^k], i, j = 1, \ldots, m; k = 1, \ldots, n$. Seja $M_n(O)$, e seja X_k a matriz (a_{ij}^k).

Teorema 2.5. *O mapa $GM_m(n)$ para $M_n(O)$ que manda x_i em X_i é um isomorfismo entre o anel de matrizes genéricas e a subálgebra de $M_n(O)$ gerada por $X_1, \ldots, X_n$.*

Demonstração. [MR01], Prop. 13.1.20. □

Observação. *Apesar de estarmos falando de anéis relacionados a álgebras matriciais, temos o fato notável que o anel de matrizes genéricas é um domínio ([MR01], 13.1.21).*

Teorema 2.6. ([Gur85]) *Dado qualquer grupo finito não-trivial de automorfismos agindo linearmente num anel de matrizes genéricas, seu anel de invariantes sequer é uma álgebra relativamente livre. Logo, temos outro resultado de rigidez.*

Com isso, é fácil ver, usando um pouco de teoria de estrutura de PI-álgebras, que essencialmente todas as álgebras relativamente livres são rígidas para ações lineares ([For84], §7).

Logo, esse caminho de generalização do Problema de Mergulho de Galois recai no fenômeno de rigidez. Em 1995, Alev e Polo consideraram o Problema para álgebras universais envolventes de álgebras de Lie semissimples e a Álgebra de Weyl, quando o corpo é algebricamente fechado. O que obtiveram foi:

Teorema 2.7. ([AP95], Rigidez da Álgebra de Weyl)

- *Seja g uma álgebra de Lie semissimples de dimensão finita, e G um grupo de automorfismos de $U(g)$. Se $U(g) \cong U(g')$, para outra álgebra de Lie semissimples de dimensão finita g', então $G = id$ e $g \cong g'$.*
- *Não existe nenhum grupo de automorfismos não-trivial, tal que $A_n(k)^G \cong A_n(k)$. No caso da ação ser linear, existe uma prova muito mais simples (encontrada também em [AP95]).*

Note que, diferente dos casos anteriores, a ação do grupo é suposta *completamente arbitrária*. Isso levanta uma questão intrigante, para a qual o aluno não encontrou nenhuma referência. Usaremos linguagem geométrica por conveniência: para grupos que agem de maneira não-linearizável, quando tempos $\mathbb{A}^n/G \cong \mathbb{A}^n$? Mais genericamente: seja X uma variedade afim: quando temos, para um grupo finito de automorfismos G, $X/G \cong X$? Note que temos ao mesmo tempo uma interessante questão geométrica e um interessante caso do Problema de Mergulho de Galois (a saber, para o anel de funções regulares).

A rigidez da Álgebra de Weyl é algo notável. Temos resultados ainda mais fortes. Em 2017, Tikaradze resolveu uma conjectura muito antiga e provou:

Teorema 2.8. ([Tik17]) *Se Γ é um $\mathbb{C}$-domínio não-comutativo, e G um grupo finito de $\mathbb{C}$-automorfismos, tal que $\Gamma^G \cong A_n(\mathbb{C})$, então $G = id$ e $\Gamma \cong A_n(\mathbb{C})$.*

Contudo, temos o seguinte resultado de Alev e Dumas de 1997:

Teorema 2.9. ([AD97]) *Seja G* qualquer *grupo finito de automorfismos de $A_1(\mathbb{C})$. Estendendo sua ação para $D_1(\mathbb{C})$, da maneira óbvia, teremos* sempre *$D_1(\mathbb{C})^G \cong D_1(\mathbb{C})$.*

Em [KKZ08], os autores estudaram a rigidez de ainda mais classes de álgebras, todas elas regulares no sentido de Artin-Schelter (ver a citada referência) — uma importante generalização de álgebras polinomiais com aplicações em álgebra e física. Notando esse resultado de Alev e Dumas, além de outros (ver Notas e Referências para o Capítulo 3) eles formularam a seguinte questão:

- Estudar quando é possível, para uma álgebra rígida A e um grupo finito de automorfismos G de A, se ter $Frac\, A^G \cong Frac\, A$.

Como veremos no Capítulo 3, o Problema de Noether Não-Comutativo nos dá um caminho direto para abordar essa questão.

2.4 Conjectura de Gelfand-Kirillov

Nesta seção, k terá característica 0 e será algebricamente fechado.

Ao longo desta tese, estudaremos muitos anéis de operadores diferenciais e seus invariantes. Longe de ser um assunto distante do dia a dia matemático, sendo L a álgebra de Lie de um grupo de Lie G complexo, temos que a álgebra universal envolvente $U(L)$ nada mais é que o subconjunto de $D(C^\infty(G))$ invariante por translações à esquerda ([GK66]).

No célebre artigo [GK66], em que entre outras as coisas foram introduzidos os conceitos de dimensão e grau de transcendência de Gelfand-Kirillov, os dois autores estudaram o problema de equivalência birracional (i.e., isomorfismo do corpo de frações) entre álgebras universais envolventes de álgebras de Lie de dimensão finita.

Existe um interesse natural em estudar o problema de isomorfismo para álgebras universais envolventes — não apenas porque isso pode nos dar informações sobre a álgebra de Lie ([RU07], [AP95]). Como no caso de geometria algébrica clássica, é esperado que o problema de equivalência birracional seja mais tratável. De fato, a Conjectura de Gelfand-Kirillov é uma especulação surpreendente sobre as possíveis classes de equivalência birracional. Seja $D_{m,t}(k) = Frac\, A_m(K)$, em que $K = k(z_1, \ldots, z_t)$, se $m > 0$; se $m = 0$, $D_{0,t}(k) = K$:

Conjectura. (Gelfand-Kirillov) *Se L é uma álgebra de Lie algébrica de dimensão finita, $Frac\, U(L)$ é isomórfico a $D_{m,t}(k)$ para alguns m, t não-negativos.*

Observação. *A rigor, não deveria ser chamada de conjectura, uma vez que – como veremos – existem contraexemplos. Mas o nome permanece em uso. Mais sobre isso em breve.*

É claro que existe o problema de não-isomorfismo: $D_{m,t}(k) \cong D_{n,u}(k)$ implica $u = t$ e $m = n$? Tomando o centro e o grau de transcendência, pelos resultados do Capítulo 1 (Sec. 2, Prop 6), temos

que $u = t$. Portanto, a dúvida restante é: quando $D_n(k) \cong D_m(k)$, para k um corpo arbitrário de característica 0. Usando a noção não-comutativa de grau de transcendência mencionada acima, $GK - trdeg_k$, em [GK66] mostrou-se que $GK - trdeg_k(D_n(k)) = 2n$; portanto, esse invariante distingue $D_n(k)$ de $D_m(k)$, se $m \neq n$.

Seguem os principais casos de solução positiva da Conjectura de Gelfand-Kirillov:

- A conjectura de Gelfand-Kirillov vale para álgebras de Lie nilpotentes, sl_n e gl_n ([GK66]);
- A conjectura vale para álgebras de Lie solúveis ([BGR73], [Jos74], [McC74]);
- A conjectura vale para todas as álgebras de Lie de dimensão menor ou igual a 8 ([AOdB00]).

Entretanto, uma família de contraexemplos foi encontrada em 1996 ([AOdB96]), o menor deles proveniente de uma álgebra de Lie de dimensão 9. Recentemente, Premet [Pre10] provou que a Conjectura de Gelfand-Kirillov é falsa para as álgebras de Lie simples de tipo B, D, E, F, permanecendo abertos ainda os casos C, G.

Contudo, nós temos os seguintes resultados: após uma pequena modificação, a Conjectura de Gelfand-Kirillov torna-se verdadeira para todas as álgebras de Lie simples de dimensão finita. A modificação é substituir a álgebra envolvente por $U(L) \otimes_{Z(U(L))} \tilde{Z}$, onde $\tilde{Z}$ é uma extensão adequada do corpo de frações do centro ([GK69]). De fato, conjectura-se que essa versão modificada seja verdadeira para todas as álgebras de Lie algébricas ([AOdB00]) A Conjectura também vale, após as necessárias modificações, os quocientes primitivos maximais da álgebra envolvente ([Con74]).

Dados esses resultados originais, desenvolveu-se o que pode ser vagamente chamado de "Filosofia de Gelfand-Kirillov"([AD06]).

- Para várias classes de álgebras $\mathfrak{A}$ constituídas por domínios Noetherianos, os corpos de Weyl $D_{m,t}(k)$ são representantes canônicos das classes de isomorfismos de anéis de frações de elementos em $\mathfrak{A}$. Ou seja, eles são importantes correspondentes não-comutativos dos corpos de funções racionais, e racionalidade deve ser entendida como a questão de isomorfismo a um corpo de Weyl.

Instâncias, mais ou menos explícitas, dessa filosofia encontram-se de forma recorrente na literatura sobre álgebras cujos anéis de fração têm dimensão infinita sobre seu centro. Podemos citar o trabalho de Etingof e Ginzburg sobre Álgebras de Reflexão Simpléticas ([EG02], Sec. 17), em que uma série de Conjecturas na filosofia de Gelfand-Kirillov são feitas; ou os vários desdobramentos da teoria de Álgebras de Galois ([FO10], [FO14]). Discutiremos em mais detalhes esses casos nos Capítulos 4 e 5, respectivamente.

Finalmente, convém mencionar uma versão adaptada da Conjectura de Gelfand-Kirillov para "álgebras quânticas", introduzida por vários autores, como Alev, Dumas, Iohara e Malikov ([BG02], I.2.11). A generalização mais natural seria supor o anel de frações isomórfico a anéis de frações de quantizações da Álgebra de Weyl. Contudo, todos estes se mostraram isomórficos a anéis de frações de espaços afins quantizados ([BG02], I.2.11), cuja definição nós lembramos:

Definição 2.7. *Uma matriz multiplicativamente antissimétrica sobre k é uma matriz $n \times n$ $Q = (q_{ij})$ com entradas em k^* e tal que $q_{ii} = 1, q_{ij} = q_{ji}^{-1}$ para todos i, j. Dada tal matriz, o espaço afim de dimensão n quantizado é a álgebra $O_Q(k^n)$ dada por geradores $x_1, \ldots, x_n$ e relações $x_i x_j = q_{ij} x_j x_i$, para todos i, j.*

Proposição 2.2. *Todos os espaços afins quantizados $O_Q(k^n)$ são álgebras finitamente geradas, e anéis Noetherianos à esquerda e à direita. Também temos que a dimensão global e de Gelfand-Kirillov é n (o que nos permite recuperar o tamanho da matriz Q).*

Demonstração. [BG02]. □

Observação. *Quando a matriz for 2×2, ou seja, o único parâmetro for um escalar q, nós usaremos a notação $k_q[x, y]$, com a relação $yx = qxy$. Esse é o chamado plano quântico.*

Sendo assim, a Conjectura quantizada de Gelfand-Kirillov pode ser expressa de maneira informal (dada a falta de definição axiomática dos objetos envolvidos, por exemplo, grupos quânticos), da seguinte maneira:

Conjectura. (Conjectura de Gelfand-Kirillov Quantizada) *Seja A um "grupo quântico", como quantizações de funções regulares em variedades, quantizações de Álgebra de Weyl, quantizações de álgebras envolventes etc. Então seus anéis de fração são sempre isomórficos a um anel de fração de um espaço afim quantizado sobre uma extensão puramente transcendental (de grau de transcendência finita) do corpo base.*

Uma discussão extensa dos resultados referentes a essa Conjectura — positiva em inúmeras instâncias — pode ser encontrada em [BG02]. Teremos mais a dizer sobre essa versão quântica em Capítulos posteriores.

2.5 Apêndice: Automorfismos das Álgebras Polinomiais e de Weyl

Seja k um corpo qualquer. Dado qualquer $n \geq 1$, a álgebra polinomial possui dois subgrupos naturais de $Aut_k P_n(k)$. O primeiro deles é o constituído pelos automorfismos afins: são os $g \in Aut_k P_n(k)$ da seguinte forma, fixando $P_n(k) = k[x_1, \ldots, x_n]$:

$$g(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i,\ i = 1, \ldots, n, (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in GL_n(k) \in, b_i \in k, i = 1, \ldots, n.$$

Ele é denotado por $Aff_n(k)$. Obviamente, o grupo dos automorfismos lineares é um subgrupo de $Aff_n(k)$. O segundo grupo que consideramos, denotado por $J_n(k)$ (J de Jonquèries), é dado pelos automorfismos da seguinte forma:

$$g(x_i) = \lambda_i x_i + f(x_{i+1}, \ldots, x_n), \lambda_i \neq 0 \in k, f \in k[x_{i+1}, \ldots, x_n], i = 1, \ldots, n-1;$$

$$g(x_n) = \lambda_n x_n + f_n, \lambda_n \neq 0 \in k, f_n \in k.$$

É claro que $Aut_k P_1(k) = Aff_1(k)$. No caso $n = 2$, temos o célebre

Teorema 2.10. (Jung-van der Kulk) *$Aut_k P_2(k)$ é o produto amalgamado de $J_2(k)$ e $Aff_2(k)$ sobre a sua intersecção.*

Demonstração. [vdE00], Capítulo 5. □

Com esse resultado, podemos iniciar a prova — prometida na seção 2 — de que, sobre um corpo de característica 0, todo grupo finito de automorfismos de $Aut_k P_2(k)$ é linearizável.

Primeiramente:

Proposição 2.3. *Seja G um subgrupo finito de $Aff_n(k)$ ou de $J_n(k)$. Então ele é linearizável.*

Demonstração. Suponha inicialmente G contido em $J_n(k)$. G age em $kx_n \oplus k$ fixando k; logo, pelo Lema de Maschke, existe um elemento x'_n em $kx_n \oplus k$, tal que $kx_n \oplus k = kx'_n \oplus k$ e kx'_n é invariante por G. Agora, G age em $kx_{n-1} \oplus k[x_n] = kx_{n-1} \oplus k[x'_n]$ fixando $k[x'_n]$. Então, novamente pelo Lema de Maschke, existe $x'_{n-1} \in kx_{n-1} \oplus k[x'_n]$ tal que $kx_{n-1} \oplus k[x_n] = kx'_{n-1} \oplus k[x'_n]$ e kx'_{n-1} é invariante por G. Indutivamente, obtemos elementos $x'_n, x'_{n-1}, \ldots, x'_1$ de forma que para $i = 1, \ldots, n$, $x'_i \in kx_i \oplus k[x_{i+1}, \ldots, x_n] = kx_i \oplus k[x'_{i+1}, \ldots, x'_n]$, mas não é o caso que $x'_i \in k[x_{i+1}, \ldots, x_n]$. O automorfismo h que manda x_i em x'_i torna G conjugado a um subgrupo de $GL_n(k)$, $h^{-1}Gh$ (de fato, ele age diagonalmente nos x_i). Note que $h \in J_n(k)$. Suponha agora G contido em $Aff_n(k)$. Seja W o k-espaço gerado por $x_1, \ldots, x_n$ (em $P_n(k)$). Então G age em $W \oplus k$. k é fixo pela ação de G; logo, pelo lema de Maschke, existe um espaço W', G-invariante, de dimensão n, com $W' \oplus k = W \oplus k$. Chamando $x'_1, \ldots, x'_n$ uma base de W', e considerando o automorfismo definido por $h(x_i) = x'_i$, temos que $h^{-1}Gh$ age linearmente. Note que $h \in Aff_n(k)$. □

Teorema 2.11. *Todo subgrupo finito de $Aut_2(k)$ é conjugado a um de $J_2(k)$ ou $Aff_2(k)$.*

Demonstração. Segue de um resultado de Serre sobre subgrupos finitos de produtos amalgamados, [PS77], Thm. 8, página 53. □

Juntando esses dois últimos resultados:

Corolário 2.1. *Todo subgrupo finito de $Aut_2(k)$ é linearizável.*

Observação. *Parece ser difícil encontrar na literatura uma referência para esse resultado no caso de k não ser algebricamente fechado.*

Para a primeira Álgebra de Weyl, existe um resultado análogo, obtido por Alev em [Ale86]. Considere duas famílias de automorfismos de $A_1(\mathbb{C})$: os lineares, L, que preservam o espaço $\mathbb{C}x \oplus \mathbb{C}y$; e os triangulares, J, da forma $y \to \alpha y + \beta, x \to \alpha^{-1}x + f(y)$, em que $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha \neq \nvdash$ e $f \in \mathbb{C}[y]$.

Teorema 2.12. ([Ale86]) *O grupo de automorfismos de $A_1(\mathbb{C})$ é o produto amalgado de L e J sobre sua intersecção.*

Dessa forma, pode-se mostrar que todo grupo finito de automorfismos da primeira Álgebra de Weyl é isomórfico a um subgrupo finito de $SL_2(\mathbb{C})$ (que são classificados, [Spr77], capítulo 4 — são os grupos diedrais binários). A prova do Teorema 2.9 ([AD97]) baseia-se nesse fato. Nossa demonstração da Proposição 2.1 se inspirou nela.

2.6 Notas e Referências

O Teorema de Chevalley-Shephard-Todd inicialmente foi provado por Shephard e Todd numa análise caso a caso, no mesmo artigo em que eles realizaram a sua classificação dos grupos de reflexão unitários irredutíveis ([ST54]). A primeira prova conceitual veio depois com Chevalley ([Che55]).

Existe uma versão modular desse teorema obtida por Serre ([PS67]):

Teorema 2.13. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo de característica qualquer k. Dado um subgrupo finito G de $G(V)$, $S(V^*)^G$ é uma álgebra polinomial apenas se G for um grupo de pseudorreflexões.*

Note que a implicação não vale no sentido contrário. De fato, contraexemplos simples existem, vide, e.g., [Kan01], 19-2.

Temos algumas generalizações interessantes em outros sentidos do Teorema de Chevalley-Shephard-Todd; por exemplo, o trabalho de Kac e Watanabe [KW82] que estuda, entre outras coisas, condições sobre o grupo G para P_n^G ser uma intersecção completa.

Quanto ao Problema de Noether, para mais sobre sua relação com o Problema Inverso da Teoria de Galois podemos citar [Sal85] e [JLY02]. [For84] é uma referência que aponta ligações do problema com questões clássicas de racionalidade de geometria algébrica. [PSV94] considera generalizações do Problema de Noether para grupos lineares algébricos infinitos — e contém resultados enciclopédicos de teoria de invariantes no geral. Por fim, uma discussão mais detalhada do Problema de Noether em si, e exemplos de resultados positivos, podem ser encontradas em [JLY02], Capítulo 0, e [Dum06]. Esta última referência foi a principal para a elaboração deste capítulo.

Nossa exposição do conceito de Mergulho de Galois, e o seu papel como conceito unificador de vários resultados, contém bastante ineditismo. Mas as referências mais importantes foram [AP95], [For85] e [KKZ08]. A área de PI-álgebras citada tem como referência enciclopédica o livro [Row80]. Para PI-álgebras semelhantes às estudadas nesta tese — como álgebras envolventes de álgebras de Lie em característica prima, álgebras de Weyl em característica prima, ou “álgebras quânticas"numa raiz da unidade, a referência [MR01], Capítulo 13, é interessante.

A exposição sobre as Conjecturas de Gelfand-Kirillov clássica e quantizada seguiram [Pre10] e [BG02], em que o leitor pode encontrar mais informações.

O apêndice sobre grupos de automorfismos da álgebra polinomial baseou-se no material em [Dum06]. O problema que discute quando a ação de um grupo linear algébrico é linearizável, conhecido como o Problema de Linearização, é um importante e difícil problema em desenvolvimento em geometria algébrica afim. Para uma referência clássica sobre este tópico, e outros temas de geometria algébrica afim próximos ao desta tese, recomendamos [Kra95].

Capítulo 3

Invariantes da Álgebra de Weyl e Problema de Noether Não-Comutativo

Este capítulo estuda a Teoria de Invariantes da Álgebra de Weyl, de um ponto de vista que foca nas analogias com o caso da álgebra polinomial, e de maneira que se possa introduzir de uma forma logicamente satisfatória o Problema de Noether Não-Comutativo. Quanto a este, neste Capítulo fazemos uma recordação do trabalho original de Alev e Dumas.

Um recurso técnico que será bastante utilizado agora será a teoria de anéis de grupos de torcidos, e dedicaremos uma seção para discutir alguns resultados — ad hoc, é verdade — sobre eles.

3.1 Preliminares Técnicos

Definição 3.1. *Seja R um anel e G um grupo finito agindo em R por automorfismos. O anel de grupo torcido $R * G$ é, como R-módulo à esquerda, livremente gerado pelos elementos de G, e a multiplicação é estendida por linearidade, a partir do seguinte produto: $rgsh = rg^{-1}(s)gh$, $r, s \in R, g, h \in G$.*

Sendo finitamente gerado como R-módulo à esquerda, $R * G$ é Noetheriano à esquerda quando R o for. R é canonicamente identificado a um subanel de $R * G$: $R\,id$.

Lema 3.1. *Seja R um anel, G um grupo finito agindo por automorfismos, e $S = R * G$. Suponha que $|G|$ seja invertível em R, e seja $e = 1/|G| \sum_{g \in G} g$. Então:*

1. $e^2 = e$
2. $eS = eR$
3. $eSe = eR^G \cong R^G$

Demonstração. O item 1 é direto. A inclusão $eR \subseteq eS$ é clara. Pela definição da multiplicação em S, $rg = gg(r)$, para todo $r \in R, g \in G$. Portanto, para todo $x = \sum_{g \in G} r_g g \in S$, nós temos $ex = \sum_{g \in G} er_g g = \sum_{g \in G} egg(r_g)$. Como $eg = e$, segue que $ex = \sum_{g \in G} eg(r_g) = e \sum_{g \in G} g(r_g) \in eR$. Isso nos dá $eS \subseteq eR$. Assim, temos o item 2. Segue-se dele que $eSe = eRe$. Para $r \in R$, calculamos:

$$ere = e/|G| \sum_{g \in G} rg = e/|G| \sum_{g \in G} gg(r) = 1/|G| \sum_{g \in G} egg(r)$$

$$= 1/|G| \sum_{g \in G} eg(r) = e/|G| \sum_{g \in G} g(r) = e/|G|\tau(r) = e\tau(r/|G|),$$

em que $\tau : R \to R^G$ é definido por $\tau(r) = \sum_{g \in R} g(r)$, $r \in R$. Isso prova que $eSe = e\tau(R)$. A hipótese de que $|G|$ é invertível em R implica que todo $r \in R^G$ pode ser escrito da forma $r = \tau(1/|G|r)$, de tal forma que $R^G \subseteq \tau(R)$, e finalmente $R^G = \tau(R)$. Portanto, $eSe = eR^G$. Como $er = re$ para qualquer $r \in R^G$, o mapa $r \to er$ define um isomorfismo de anéis $R^G \to eR^G$. $\square$

Proposição 3.1. *Dado um anel R simples e um subgrupo finito de automorfismos externos G de $\operatorname{Aut} R$, então $R * G$ é simples.*

Demonstração. Seja I um ideal não-nulo de $R * G$. Defina como comprimento, para $x \in R * G$, a cardinalidade do conjunto $\{x_g \neq 0\}$, em que x_g são os coeficientes de $x : x = \sum_{g \in G} x_g g$. Seja $y \in I$ um elemento diferente de 0 de comprimento mínimo. Multiplicando à esquerda por um elemento adequado de G, podemos supor que $y_{id} \neq 0$. Além disso, como R é simples, $Ry_{id}R = R$ e, portanto, existem elementos $j, k \in R$, tal que $jy_{id}k = 1$. Multiplicando y à esquerda por j e à direita por k, podemos supor $y_{id} = 1$. Seja, portanto,

$$y = id + \sum_{g \neq id \in G} y_g g.$$

Se $y = id$, então $I = R * G$ e estamos feitos. Caso contrário, seja $h \neq id \in G$ com $y_h \neq 0$. $ry - yr \in I$ para todo $r \in R$ e é igual a $\sum_{g \neq id \in G}(ry_g - y_d g^{-1}(r))g$, que tem comprimento menor y. Portanto, isso resulta em 0, e assim para todo $r \in R$ $(*) ry_h = y_h h^{-1}(r)$. Isso implica que $Ry_h = y_h R$ é um ideal bilateral, que pela simplicidade de R deve ser o próprio R. Portanto, y_h é uma unidade, e sendo assim por (*), $h^{-1}(r) = (y_h)^{-1} r y_h$, e h é um automorfismo interno. Isso contraria as hipóteses, pois $h \neq id$. Portanto, y necessariamente é id, e $I = R * G$. □

Vamos relembrar o seguinte resultado de equivalência de Morita.

Proposição 3.2. *Dois anéis T e S são equivalentes por Morita se, e somente se, existir $n \geq 1$ e um indempotente $e \in M_n(S)$, tal que $T \cong eM_n(S)e$ e $M_n(S)eM_n(S) = M_n(S)$.*

Demonstração. [MR01], proposição 3.5.6. □

Teorema 3.1. *Se R é um anel simples e G é um subgrupo finito de automorfismos externos de $\operatorname{Aut} R$, então R^G é simples. Se R é Noetheriano, R^G também o é.*

Demonstração. Simplicidade é invariante por Morita, portanto basta provar que R^G é equivalente por Morita a $S = R * G$. Usamos o critério acima com $n = 1$ (ou seja $M_n(S)$ é apenas S). Seja $e = 1/|G| \sum_{g \in G} g$. $e^2 = e$, $eSe \cong R^G$ (lema 3.1) e $SeS = S$ pois, como acabamos de ver, S é simples. O mesmo argumento mostra que R^G é Noetheriano, pois ser Noetheriano é invariante por Morita e se R é Noetheriano, $R * G$ também o é. □

Nós terminamos essa seção preliminar com um resultado que usaremos implicitamente no decorrer desta tese — não mais relacionado com anéis de grupo torcido. Ele é um exemplo emblemático de como resultados simples em teoria comutativa de invariantes, ainda que continuem valendo em generalizações não-comutativas, podem tornar-se extremamente mais complexos.

Proposição 3.3. (Faith, [Fai72]) *Seja R um domínio com $X = R - \{0\}$ um conjunto de Ore à direita e à esquerda, com corpo de frações F. Seja G um grupo finito de automorfismos de G. Então R^G também admite corpo de frações, isto é, $R^G - \{0\}$ é um conjunto de Ore à direita e à esquerda. Além disso, $Frac\, R^G = F^G$.*

Demonstração. Inicialmente note que, se I, J são dois ideais à esquerda não nulos de R, $I \cap J \neq (0)$. De fato, se $i \in I, j \in J$ são elementos não-nulos, pela condição de Ore à esquerda $Ri \cap Rj \neq (0)$. Indutivamente, a interseção de qualquer família finita de ideais à esquerda é não-nula. Seja $x \in F^G$, diferente de 0. Ele é da forma $t^{-1}b$. Seja $N = \bigcap_{g \in G} g(Rt)$. Ele é um ideal à esquerda não-nulo, e $G(N) \subseteq N$, portanto, em função de um Teorema de Isaac e Bergson (corol. 1.5, [Mon80]) existe $v = dt \in N$ não-nulo e G-invariante. Então, $x = t^{-1}b = t^{-1}d^{-1}db = v^{-1}u$, em que $u = db$. Como x, v são G-invariantes, u também o é. Logo, temos o seguinte: (*) todo elemento de F^G diferente de 0 é da forma $v^{-1}u$, com $u, v \neq 0 \in R^G$.

Sejam agora $a, b \in R^G$ não-nulos. $ab^{-1} \in F^G$ é da forma $v^{-1}u$ para alguns $u, v \neq 0 \in R^G$, por (*). Isto implica que $va = ub$, que é exatamente a condição de Ore à esquerda para R^G. Similarmente temos a condição de Ore à direita. Finalmente, (*) deixa claro que $Frac\, R^G = F^G$. □

3.2 Invariantes da Álgebra de Weyl

Nesta seção e durante o resto do capítulo, a menos que contrariamente dito, consideraremos como corpo base um k arbitrário de característica 0.

A primeira e mais natural questão que se pode fazer sobre o anel de invariantes da Álgebra de Weyl sob a ação de um grupo finito, provavelmente, é a seguinte: seria ela também finitamente gerada?

A resposta para essa pergunta é afirmativa — e para uma grande classe de álgebras. De fato, temos o seguinte Teorema de S. Montgomery e L. W. Small [MS81], que pode ser visto como uma generalização do teorema clássico de Hilbert-Noether.

Teorema 3.2. *Seja A um anel Noetheriano comutativo, R um anel não necessariamente comutativo, tal que A é um subanel central de R e R é uma A-álgebra finitamente gerada. Seja G um grupo finito de automorfismos de A-álgebra de R, tal que $|G|$ seja invertível em R. Então, se R é Noetheriano à esquerda (ou à direita), R^G é uma A-álgebra finitamente gerada.*

Demonstração. Vamos introduzir $S = R * G$. S é Noetheriano à esquerda. Da hipótese de que A é um subanel central de S, é fácil ver que S é finitamente gerado como A-álgebra: se $\{q_1, \ldots, q_m\}$ geram R sobre A e $G = \{g_1, \ldots, g_d\}$, então a união desses dois conjuntos gera S sobre A. Considere, novamente, o elemento $e = 1/|G| \sum_{g \in G} g$ de S, que satisfaz $e^2 = e$. Em particular, eSe é um subanel de S, eS é um eSe-módulo à esquerda, e SeS é um ideal bilateral de S.

Vamos mostrar que eS é um eSe-módulo à esquerda finitamente gerado. Como S é Noetheriano à esquerda, SeS é finitamente gerado como ideal à esquerda de S. Seja então $SeS = \sum_i Sx_i$, e escreva $x_i = \sum_j v_{ij} e w_{ij}$, com $v_{ij}, w_{ij} \in S$ para todos i, j. Seja $r \in S$ arbitrário. Então $er = eeer \in e(SeS)$ e, portanto,

$$er = e(\sum_i s_i x_i) = \sum e s_i v_{ij} e w_{ij} = \sum e s_i v_{ij} e^2 w_{ij}.$$

Assim, o conjunto finito $\{ew_{ij}\}$ gera eS como eSe-módulo à esquerda.

Feito isso, seja então $eS = \sum_{i=1}^n eSex_i$ como $x_i \in S$, e sejam $t_1, \ldots, t_m$ geradores de S como A-álgebra. Agora, escrevamos $et_j = \sum_{i=1}^n ey_{ij}ex_i$ e $ex_k t_j = \sum_{i=1}^n ez_{ijk}ex_i$ com $y_{ij}, z_{ijk} \in S$ para todos $1 \leq j \leq m$, $1 \leq k \leq n$. Considere o conjunto finito $E = \{ex_i e, ey_{ij}e, ez_{ijk}e\}$, com $1 \leq i, k \leq n$, $1 \leq j \leq m$. Calculemos:

$$et_1 t_2 e = (\sum_{i=1}^n ey_{i1}ex_i)t_2 e = \sum_{i=1}^n ey_{i1}e(ex_i t_2)e$$

$$= \sum_{i=1}^n ey_{i1}e(\sum_{l=1}^n ez_{l2i}ex_l)e = \sum_{i=1}^n ey_{i1}e(\sum_{l=1}^n ez_{l2i}eex_l e),$$

e assim provamos indutivamente que todo monômio $et_{j_1} \ldots t_{j_k} e$ com $1 \leq j_1 \ldots j_k \leq m$ pode ser expresso como uma soma finita de produtos de elementos de E. Todo elemento de eSe é uma combinação linear de tais monômios com coeficientes em A e, portanto, concluímos que eSe é finitamente gerado como A-álgebra por E. Pelo lema 3.1, isso mostra que R^G é finitamente gerado como A-álgebra. □

Corolário 3.1. *Para todo grupo finito G de automorfismos de $A_n(k)$, o anel de invariantes é finitamente gerado como k-álgebra.*

Na verdade, como $A_n(k)$ é uma álgebra simples e suas unidades restrimgem-se a k, todos os grupos de automorfismos são externos. Lembrando, também, que é uma álgebra Noetheriana, temos pelo Teorema 3.1:

Teorema 3.3. *Dado qualquer grupo finito de automorfismos de álgebra G de $A_n(k)$, a subálgebra de invariantes é um anel Noetheriano simples.*

Isso é o que temos a elucidar sobre ações gerais de grupos finitos. Vamos agora nos restringir a uma classe muito importante. Para tanto, denote como antes: $P_n(k) = k[x_1, \ldots, x_n]$, e interprete a Álgebra de Weyl como anel de operadores diferenciais: $A_n(k) = D(P_n(k))$. Todo automorfismo h de $P_n(k)$ pode ser estendido a um automorfismo de $A_n(k)$ da seguinte maneira: seja $D \in D(P_n(k))$ um operador diferencial, e $f \in P_n(k)$. Nós definimos $h.D(f) := hD(h^{-1}f)$. Chamaremos os grupos finitos de $A_n(k)$ formados por ações induzidas por aquelas de $P_n(k)$ por *grupos de ações polinomiais*. Quando tais ações forem lineares em $P_n(k)$, nós as chamaremos mais uma vez de *grupos de ações lineares*. Nos restringiremos essencialmente às lineares.

Uma propriedade essencial dos grupos de ações lineares é que eles preservam as duas filtrações usuais da Álgebra de Weyl: a de Bernstein e a de ordem de operador diferencial. Portanto, induzem ações na respectiva álgebra graduada, e de fato é elementar mostrar que em ambos os casos vale o seguinte $gr\, A_n(k)^G \cong (gr\, A_n(k))^G$.

Para o cálculo efetivo de um número finito de geradores, esse fato é crucial, pois passa o problema para o domínio de teoria de invariantes clássica: uma descrição em detalhes de métodos computacionais para o cálculo de invariantes para a Álgebra de Weyl pode ser encontrada em [Tra07]. Tais métodos permitem encontrar também relações entre tais geradores.

Quando não estamos interessados em possíveis relações, temos o seguinte resultado de Levasseur e Stafford:

Teorema 3.4. [LS95] *Seja G um grupo finito de automorfismos lineares de $A_n(k)$. $A_n(k)$ contém duas subálgebras isomórficas à álgebra de polinômios em n variáveis: $k[x_1, \ldots, x_n]$ e $k[y_1, \ldots, y_n]$ — a segunda é constituída pelos operadores diferenciais a coeficientes constantes. $A_n(k)^G$ é gerada por $k[x_1, \ldots, x_n]^G$ e $k[y_1, \ldots, y_n]^G$.*

Note que, novamente, recaímos em um problema de teoria clássica de invariantes.

Observemos, finalmente, um ponto em que agora a teoria de invariantes de $A_n(k)$ difere da álgebra polinomial: mesmo que G seja um grupo de ações lineares infinito, $A_n(k)$ jamais pode reduzir-se apenas a k.

De fato, dado $g \in G$, se M_g for a matriz da restrição de g ao subespaço $kx_1 \oplus \ldots \oplus kx_n$, usando a base $x_1, \ldots, x_n$, a matriz da restrição de g ao subespaço $ky_1 \oplus \ldots \oplus ky_n$, com relação à base $y_1, \ldots, y_n$, é $(M_g^t)^{-1}$. Isso ocorre porque, das relações $y_i(x_j) = \delta_{ij}$, podemos considerar $ky_1 \oplus \ldots \oplus ky_n$ como o espaço dual de $kx_1 \oplus \ldots \oplus kx_n$, e a base $\{y_i\}$ como dual da base $\{x_i\}$. Temos o subsequente resultado.

Proposição 3.4. *O elemento $w = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$, de $A_n(k)$ é G-invariante para* qualquer *subgrupo, finito ou não, de $GL_n(k)$.*

3.3 Problema de Noether Não-Comutativo

Nesta seção nós introduziremos o Problema de Noether Não-Comutativo e discutiremos os primeiros resultados obtidos acerca dele, por Alev e Dumas [AD06]. A motivação por trás dele foi discutida no Capítulo 2, Seção 3: os corpos de Weyl são um bom candidato não-comutativo dos corpos de funções racionais.

Relembrando: seja $D_{m,t}(k) = Frac\, A_m(K)$, em que $K = k(z_1, \ldots, z_t)$, se $m > 0$; se $m = 0$, $D_{0,t}(k) = K$.

Problema. (Problema de Noether Não-Comutativo) *Seja G um grupo de automorfismos lineares de $A_n(k)$ agindo, por extensão, em $D_n(k)$. Quando $D_n(k)^G \cong D_{m,t}(k)$, para alguns m, t não-negativos?*

Observação. *Note que precisamos da Proposição 3.3 para que esse problema seja bem fundado: isto é, tal que $A_n(k)^G$ seja um domínio de Ore com $Frac\,(A_n(k)^G) = (Frac\, A_n(k))^G$.*

Note que, no enunciado original do Problema de Noether Não-Comutativo, não é feita a restrição de que o grupo seja finito. De fato, Alev e Dumas estudaram resultados interessantes para ações

de grupos infinitos, como o n-toro ([AD06]). Contudo, nos limitaremos a estudar o caso em que o grupo é finito. Assim sendo, temos o seguinte resultado:

A noção de grau de transcendência desenvolvida por Gelfand e Kirillov não é a única no contexto não-comutativo. De fato, ela apresenta alguns problemas em aplicações. Uma noção particularmente útil foi desenvolvida por J. Zhang [Zha98] o "lower transcendence degree", que denotaremos por LD_k, e que faremos bom uso num instante.

Observação. *Mais discussões a respeito podem ser encontradas em [KL00], 12.8.*

Teorema 3.5. *Se G é um grupo de automorfismos lineares finito agindo em $D_n(k)$, e o Problema de Noether Não-Comutativo tem uma solução positiva, então $n = m$, $t = 0$.*

Demonstração. É um fato conhecido ([MR01], corolário 6.6.18) que nenhum subcorpo comutativo de $D_n(k)$ pode ter um grau de transcendência sobre k maior do que n. $D_{m,t}(k)$ contém um subcorpo de grau de transcendência $m+t$ (gerado por $z_1, \ldots, z_t, x_1, \ldots, x_m$) e, portanto, devemos ter $(*) m+t \leq n$. Se G é finito, pelo análogo não-comutativo do Lema de Artin abaixo, $[D_n(k) : D_n(k)^G] \leq |G|$. No caso comutativo, isso nos daria a igualdade dos graus de transcendência. No caso não-comutativo, utilizando o grau de transcendência de GK, é uma questão em aberto se $[D : Q] < \infty$ implica que $GK - trdeg_k D = GK - trdeg_k Q$, em que D, Q são álgebras de divisão sobre k. Contudo, se $[D : Q] < \infty$, $Ld_k\, Q = Ld_k\, D$. Essa noção coincide com $GK - trdeg_k$ no caso dos corpos de Weyl. $GK - trdeg_k D_n(k) = 2n$, $GK - trdeg_k D_{m,t}(k) = 2m + t$. Portanto, se $D_n(k)^G \cong D_{m,t}(k)$, $2n = 2m + t$. Isso, juntamente com $(*)$, implica $m = n$, $t = 0$. □

Lema 3.2. (Lema de Artin Não-Comutativo) *Seja D um anel de divisão e G qualquer grupo finito de automorfismos de D. Então $[D : D^G] \leq |G|$; isto é, D é um D^G-espaço vetorial de dimensão finita.*

Demonstração. [Mon80], lema 2.18. □

O que explica o interesse no Problema de Noether Não-Comutativo, inicialmente, é a noção de equivalência birracional não-comutativa introduzida pela Filosofia de Gelfand-Kirillov. Como sabemos de geometria algébrica clássica, essa é uma relação mais fraca do que isomorfismo. Sendo assim, é de se esperar que, apesar da rigidez da Álgebra de Weyl mencionada no início do Capítulo, a situação seja diferente para o seu anel de frações. É precisamente isso que ocorre. Também veremos várias aplicações nos Capítulos 4 e 5.

Incluiremos, agora, mais alguns resultados que serão usados constantemente no que se segue. O primeiro é uma generalização para extensões de Ore do Teorema de Miyata que encontramos no Capítulo 1.

Teorema 3.6. (Versão Não-Comutativa do Teorema de Miyata) *Seja K um corpo não necessariamente comutativo, σ um automorfismo e δ uma σ-derivação de K. Seja $S = K[x; \sigma, \delta]$ e $D = Frac\, S = K(x; \sigma, \delta)$. Seja G um grupo de automorfismos (não necessariamente finito) do anel S, tal que $g(K) \subseteq K$ para todo $g \in G$. Duas coisas podem acontecer:*

1. *$S^G \subseteq K$. Neste caso, $S^G = D^G = K^G$;*
2. *S^G não está contido em K. Neste caso, para todo $u \in S^G$ de grau maior que 0 em x, e de grau mínimo dentre todos os elementos de S^G de grau maior que 0, existe um automorfismo de K^G, σ', e uma σ'-derivação δ' de K^G, tal que $S^G = K^G[u; \sigma', \delta']$ e $D^G = Frac\, S^G = K^G(u; \sigma', \delta')$.*

Demonstração. [AD97]. □

Usaremos com frequência a seguinte observação:

Lema 3.3. *Seja K um anel de divisão e $S = [x; \alpha, \delta]$ uma extensão de Ore. Seja G um grupo de automorfismos de S, não necessariamente finito, tal que $G(K) \subseteq K$. Se, para todo $i > 1$, e todo $g \in G$, $g(x^i) = \lambda_i^g x^i$ para algum $\lambda_i^g \in K^*$, então, se tivermos um elemento $y \in S$ invariante por G da forma $y = u_n x^n + \ldots u_1 x + u_0$, com $u_i \in K, u_n \neq 0$, $u_n x^n$ também é G-invariante.*

Demonstração. $y = g(y)$ implica, igualando os coeficientes em K de x^n nos dois lados, que $g(u_n)\lambda_n^g = u_n$ para todo $g \in G$. Logo, $u_n x_n$ é invariante por G. □

Finalmente, vamos à discussão dos resultados positivos do Problema de Noether Não-Comutativo obtidos por Alev e Dumas.

Teorema 3.7. *Seja G um subgrupo finito de $GL_1(k) \cong k^*$. Então, $D_1(k)^G \cong D_1(k)$.*

Demonstração. Seja $A_1(k) = k[x][y;\partial_x]$. Existe um caráter $\chi : G \to k^*$, tal que $g.x = \chi(g)x, g.y = \chi(g)^{-1}y$. Seja $w = yx$. Como vimos na Proposição 1.5, $D_1(k) = Frac\, S$, em que $S = k(w)[y;\sigma]$. G fixa w e manda y para $\chi(g)^{-1}y$. Logo, estamos na condição de usar a versão não-comutativa do Teorema de Miyata. S^G não pode estar contido em $k(w)$ — se isso ocorresse, se teria, pelo item 1 daquele teorema, $D_1(k)^G = k(w)$; mas pela versão não-comutativa do Lema de Artin, $[D_1(k) : D_1^G(k)] < \infty$. Por consequência, estamos no item 2 do Teorema. Isto é, $S^G = k(w)[u;\sigma',\delta']$ para alguns σ', δ'. Pela forma da ação de G nos monômios y^k, pelo lema 3.3, temos que u é da forma y^a para algum inteiro $a \geq 1$. Então $\sigma' = \sigma^a$, e $\delta' = 0$. Sendo assim, $D_1(k)^G = k(w)(y^a;\sigma^a)$. Esse corpo de frações também é gerado por $X = y^a$ e $Y = a^{-1}wy^{-a}$, que satisfazem $[X, Y] = 1$. Logo, $D_1(k)^G \cong D_1(k)$. □

Teorema 3.8. *Seja G um subgrupo finito de $GL_n(k)$, cuja representação natural em k^n é a soma direta de representações de dimensão 1. Então, $D_n(k)^G \cong D_n(k)$.*

Demonstração. Provaremos, por indução em n, o caso $n = 1$ sendo o teorema acima. Escolhendo uma base adequada, a ação de G em $A_n(k)$ é da forma $g.x_i = \chi_i(g)x_i$, $g.y_i = \chi_i^{-1}(g)y_i$, em que para $i = 1, \ldots, n$ χ_i é um caráter de G. Definimos $w_i = y_i x_i$ para todo i. Todos os w_i são invariantes pela ação de G. Novamente usaremos a descrição dos corpos de Weyl da Proposição 1.5. Usando a notação desta Proposição, $D_n(k) = k(w_1, \ldots, w_n)(y_1;\sigma_1)\ldots(y_n;\sigma_n)$. Introduzimos os subcorpos

$$L = k(w_n),\ K = k(w_1, \ldots, w_n)(y_1;\sigma_1)\ldots(y_{n-1};\sigma_{n-1}) = D_{n-1}(L).$$

Seja $S = K[y_n;\sigma_n]$; $Frac\, S = D_n(k)$. Usando a hipótese indutiva na restrição da ação de G em K (note que K é estabilizado por G), temos que $K^G = D_{n-1}(L)^G = D_{n-1}(L)$. Estamos em condição de aplicar a versão não-comutativa do Teorema de Miyata. Temos dois casos possíveis.

Se $S^G \subseteq K^G$, então $D_n(k)^G = D_{n-1}(L)^G \cong D_{n-1}(L) = D_{n-1,1}(k)$, o que não pode ocorrer, tendo em vista o Teorema 3.5.

Portanto, estamos no segundo caso do Teorema de Miyata não-comutativo. Seja $u \in S^G$ um elemento invariante de grau minimal em y_n. $S^G = K^G[u;\sigma',\delta']$ para algum automorfismo σ' e σ'-derivação δ' de K^G. u pode ser escrito como

$$f_m y_n^m + \ldots + f_1 y_n + f_0,$$

em que os $f_i \in K^G$, e $m \geq 1$. Tendo em vista a ação de G em y_n (lema 3.3), temos que $u = f_m y_n^m$. Podemos usar o mergulho no anel das séries de Laurent torcidas, como na Seção 2 do Capítulo 1, com a ação de G estendida diagonalmente nos y_i e fixando os w_i. Portanto, sem perda de generalidade, podemos supor que $u = y_1^{a_1}\ldots y_n^{a_n}$, em que $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, e $a_n \geq 1$.

Para $1 \leq j \leq n$ se tem $uw_j = (w_j + a_j)u$. Introduzimos os elementos

$$w_i' = w_i - a_n^{-1}a_i w_n$$

para $i = 1, \ldots, n-1$. Temos $w_j' u = u w_j'$ para $1 \leq j \leq n-1$. Como $\sigma_i(w_j') = w_j' + \delta_{ij}$ para $1 \leq i, j \leq n-1$, o corpo $F = k(w_1', \ldots, w_{n-1}')(y_1;\sigma_1)\ldots(y_n;\sigma_{n-1})$ é isomórfico a $D_{n-1}(k)$. Aplicando a hipótese indutiva, $F^G \cong D_{n-1}(k)$. Por definição, é claro que $k(w_n)(w_1', \ldots, w_{n-1}') = k(w_n)(w_1, \ldots, w_n)$. Como w_n comuta com todos os elementos de F, $K = F(w_n)$. A álgebra S^G, então, pode ser escrita como $S^G = F^G(w_n)[u;\sigma',\delta']$.

u comuta com cada um dos w_j', $j = 1, \ldots, n-1$, como vimos, e comuta com todos os y_i por definição, e satisfaz com w_n a relação $uw_n = (w_n + a_n)u$. Portanto, mudando de variáveis:

$u' = a_n^{-1}u$ implica que $S^G = F^G(w_n)[u';\sigma'']$, em que σ'' é a identidade em F^G e satisfaz $\sigma''(w_n) = w_n + 1$. Portanto, $Frac\, S^G = F^G(w_n)(u';\sigma'') = k(w'_1, \ldots, w'_{n-1}, w_n)(y_1;\sigma_1)\ldots(y_{n-1};\sigma_{n-1})(u;\sigma'')$, cuja descrição é a mesma de $D_n(k)$, de acordo com a Proposição 5, Capítulo 1. Desse modo, $Frac\, S^G \cong D_n(k)$. □

Corolário 3.2. *Seja G um subgrupo abeliano finito de $GL_n(k)$. Se k contém uma raiz e-ésima da unidade, em que e é o expoente do grupo, então $D_n(k)^G \cong D_n(k)$.*

O último resultado obtido por Alev e Dumas no artigo inaugural sobre o Problema de Noether Não-Comutativo possui uma demonstração muito extensa. Em razão disso, dedicaremos a próxima seção a ele.

3.4 Problema de Noether Não-Comutativo para a Segunda Álgebra de Weyl

Teorema 3.9. *Seja G qualquer subgrupo finito de $GL_2(k)$. Então $D_2(k)^G \cong D_2(k)$.*

Nesta seção, usaremos a notação q_1, q_2, p_1, p_2 para denotar os geradores usuais x_1, x_2, ∂_1 (ou y_1),∂_2 (ou y_2) de $A_2(k)$, respectivamente.

Seja G um subgrupo finito de $GL_2(k)$. Para todo $g \in G$,

$$g(q_1) = \alpha_g q_1 + \beta_g q_2,\ g(q_2) = \gamma_g q_1 + \delta_g q_2,$$
$$g(p_1) = \frac{1}{\Delta_g}(\sigma_g p_1 - \gamma_g p_2),\ g(p_2) = \frac{1}{\Delta_g}(-\beta_g p_1 + \alpha_g p_2),$$

em que $\alpha_g, \beta_g, \gamma_g, \delta_g \in k$, e $\Delta_g = \alpha_g\delta_g - \beta_g\gamma_g \neq 0$.

Seja $w = q_1p_1 + q_2p_2$, e $v = q_1q_2^{-1}$. Temos w invariante (proposição 3.4), e com a notação acima:

$$g(v) = \frac{\alpha_g v + \beta_g}{\gamma_g v + \delta_g},\ g(q_2) = (\gamma_g v + \delta_g)q_2.$$

Como na Proposição 1.5, podemos expressar $D_2(k)$ da seguinte maneira: $D_2(k) = k(q_1, q_2)(w_1; d_1)(w_2; d_2)$, em que $w_1 = q_1p_1$, $w_2 = q_2p_2$, $d_1 = q_1\partial_1$, $d_2 = q_2\partial_2$. Temos que $[w, w1] = 0$ e $[w, q_1] = q_1$, $[w, q_2] = q_2$. Assim, denotando por d a derivação de $k(q_1, q_2)(w_1; d_1)$, tal que $d(q_1) = q_1$, $d(q_2) = q_2$ e $d(w_1) = 0$, temos $D_2(k) = k(q_1, q_2)(w_1; d_1)(w; d)$, em que $D_2(k) = k(v, q_2)(w_1; d_1)(w; d)$, com $d_1(v) = v$ e $d(v) = d(w_1) = 0$ (de fato, $d(v) = q_1q_2^{-1} - q_1q_2^{-2}q_2 = 0$). Usando esses fatos, vemos que os geradores v, q_2, w, w_1 do corpo $D_2(k)$ satisfazem as relações:

$$[v, q_2] = [w_1, q_2] = [w, v] = [w, w_1] = 0,\ [w_1, v] = v,\ [w, q_2] = q_2.$$

A ação de G em v, q_2, w já foi descrita acima. Para w_1 temos:

$$g(w_1) = \frac{1}{\Delta_g}(\alpha_g q_1 + \beta_g q_2)(\delta_g p_1 - \gamma_g p_2)$$
$$= \frac{1}{\Delta_g}(\alpha_g\delta_g q_1p_1 - \beta_g\gamma_g q_2p_2 - \alpha_g\gamma_g q_1p_2 + \beta_g\delta_g q_2p_1)$$
$$= \frac{1}{\Delta_g}(\alpha_g\delta_g w_1 - \beta_g\gamma_g(w - w_1) - \alpha_g\gamma_g v(w - w_1) + \beta_g\delta_g v^{-1}w_1)$$
$$= \frac{1}{\Delta_g}(\alpha_g + \beta_g v^{-1})(\gamma_g v + \delta_g)w_1 - \frac{1}{\Delta_g}\gamma_g(\beta_g + \alpha_g v)w.$$

Para simplificar a forma da ação, definimos $x = (q_1q_2)^{-1}w_1 = v^{-1}q_2^{-2}w_1 = q_2^{-1}p_1$, de forma que $g(x) = \frac{1}{\Delta_g}x - \frac{1}{\Delta_g}\gamma_g q_2^{-2}(\gamma_g v + \delta_g)^{-1}w$ para todo $g \in G$. $D_2(k)$ é gerado sobre k por v, q_2, w, x, e calculamos: $[x, v] = q_2^{-2}, [x, q_2] = 0, [x, w] = 2x$.

Podemos resumir o que foi feito acima no seguinte lema:

Lema 3.4. *1. Os elementos $w = q_1p_1 + q_2p_2$, $v = q_1q_2^{-1}$ e $x = q_2^{-1}p_1$ verificam as relações:*

$$[q_2, v] = 0;\ [w, v] = 0,\ [w, q_2] = q_2;\ [x, v] = q_2^{-2},\ [x, q_2] = 0,\ [x, w] = 2x.$$

2. Denotando d a derivação de $k(v, q_2)$, tal que $d(v) = 0$ e $d(q_2) = q_2$; K o corpo $k(v, q_2)(w; d)$; σ' o automorfismo de K fixando v, q_2 e tal que $\sigma'(w) = w + 2$; d' a σ'-derivação de K, tal que $d'(v) = q_2^{-2}$, $d'(q_2) = 0$, $d'(w) = 0$; e S a k-álgebra $K[x; \sigma', d']$, tem-se:

$$D_2(k) = Frac\, S = K(x; \sigma', d') = k(v, q_2)(w; d)(x; \sigma', d');$$

3. A ação sobre $D_2(k)$ de um automorfismo $g \in G$ é dada pela seguinte ação nos geradores: $g(v) = \frac{\alpha_g v + \beta_g}{\gamma_g v + \delta_g}$, $g(q_2) = (\gamma_g v + \delta_g)q_2$, $g(w) = w$ e

$$g(x) = \frac{1}{\Delta_g}x - \frac{1}{\Delta_g}\gamma_g q_2^{-2}(\gamma_g v + \delta_g)^{-1}w;$$

4. Em particular, a cadeia de subcorpos $k(v) \subset k(v, q_2) \subset K$ é estabilizada por G.

Essa cadeia de subcorpos estabilizada por G é o cerne da demonstração. O objetivo é utilizar os Teoremas de Miyata e sua versão para Extensões de Ore, reduzindo a questão de invariantes de cada subcorpo para aquele que o precede na cadeia. Pelo Lema de Artin Não-Comutativo, não podemos ter $S^G \subseteq K^G$. Mostraremos que podemos substituir o gerador x por um elemento y adequado que é autovetor de todos os elementos de G.

Lema 3.5. *Mantendo a notação do Lema anterior:*

1. Existe uma função racional $b(v) \in k(v)$, tal que

$$g(b) = \frac{1}{\Delta_g}(\gamma_g v + \delta_g)^2 b + \frac{1}{\Delta_g}\gamma_g(\gamma_g v + \delta_g),\ \forall g \in G;$$

2. Definindo $y = x + b(v)q_2^{-2}w = q_2^{-1}p_1 + b(v)q_2^{-2}w \in S$, temos as relações:

$$[q_2, v] = 0;\ [w, v] = 0,\ [w, q_2] = q_2;\ [y, v] = q_2^{-2},\ [y, q_2] = b(v)q_2^{-1},\ [y, w] = 2y;$$

3. Denotando: d a derivação de $k(v, q_2)$, tal que $d(v) = 0$ e $d(q_2) = q_2$; σ' o k-automorfismo de K que fixa v, q_2 e manda w para $w + 2$; d'' a σ'-derivação de K, tal que $d''(v) = q_2^{-2}$, $d''(q_2) = b(v)q_2^{-1}$, $d''(w) = 0$, temos $S = K[y; \sigma', d''] = k(v, q_2)(w; d)[y; \sigma', d'']$;

4. A ação sobre $D_2(k)$ de um automorfismo $g \in G$ é dada pela seguinte ação nos geradores: $g(v) = \frac{\alpha_g v + \beta_g}{\gamma_g v + \delta_g}$, $g(q_2) = (\gamma_g v + \delta_g)q_2$, $g(w) = w$ e $g(y) = \frac{1}{\Delta_g}y$.

Demonstração. Seja n o inteiro ≥ 1 que é o grau mínimo em x dos elementos G-invariantes de S que não estão em K. Seja $u = u_nx^n + \ldots + u_1x + u_0$, $u_i \in K, u_n \neq 0$, um elemento de S^G com grau n em x. Do segundo ponto do último lema temos, definindo $r_g = -\gamma_g(\gamma_g v + \delta_g)^{-1}q_2^{-2}w$, que $g(x) = \frac{1}{\Delta_g}(x + r_g)$, para todo $g \in G$. Sendo assim,

$$g(u) = \left(\frac{1}{\Delta_g}\right)^n g(u_n)(x + r_g)^n + g(u_{n-1})\left(\frac{1}{\Delta_g}\right)^{n-1}(x + r_g)^{n-1} + \ldots$$

Uma vez que K é estabilizado pela ação de G, explicitando os coeficientes em K dos termos de grau n e $n - 1$ em x:

$$g(u) = g(u_n)\left(\frac{1}{\Delta_g}\right)^n x^n + \left[g(u_n)\left(\frac{1}{\Delta_g}\right)^n \sum_{i=0}^{n-1} \sigma'^i(r_g) + g(u_{n-1})\left(\frac{1}{\Delta_g}\right)^{n-1}\right] x^{n-1} + \dots$$

A igualdade $g(u) = u$ implica, para todo $g \in G$, as seguintes igualdades em K:

$$g(u_n) = (\Delta_g)^n u_n,$$

$$g(u_{n-1}) = (\Delta_g)^{n-1} u_{n-1} + (\Delta_g)^{n-1} u_n \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_g(\gamma_g v + \delta_g)^{-1} q_2^{-2}(w + 2i).$$

Multiplicando os dois membros da segunda igualdade pelos inversos dos dois membros da primeira, e usando que $\sum_{i=0}^{n-1}(w + 2i) = nw + n(n-1)$, tem-se:

$$g(u_n^{-1}u_{n-1}) = \left[\frac{1}{\Delta_g} u_n^{-1} u_{n-1} + \frac{1}{\Delta_g} n(n-1)\gamma_g(\gamma_g v + \delta_g)^{-1} q_2^{-2}\right] + \left[\frac{1}{\Delta_g} n\gamma_g(\gamma_g v + \delta_g)^{-1} q_2^{-2}\right] w.$$

O elemento $u_n^{-1}u_{n-1}$ de $K = k(v, q_2)(w; d)$ expressa-se no corpo de operadores pseudo-diferenciais formais $k(v, q_2)((w^{-1}; -d))$ em uma série de Laurent $u_n^{-1}u_{n-1} = \sum_{j>j_0} \phi_j w^{-j}$ com $\phi_j \in k(v, q_2)$ para todo j. Como w é G-invariante, $g(u_n^{-1}u_{n-1}) = \sum_{j>j_0} g(\phi_j) w^{-j}$, de forma que identificando os coeficientes de w nas igualdades acima temos:

$$g(\phi_{-1}) = \frac{1}{\Delta_g}\phi_{-1} + \frac{1}{\Delta_g} n\gamma_g(\gamma_g v + \delta_g)^{-1} q_2^{-2}, \ \forall g \in G.$$

O elemento ϕ_{-1} de $k(v, q_2)$ desenvolve-se em $k(v)((q_2^{-1}))$ como uma série de Laurent $\phi_{-1} = \sum_{l>l_0} a_l q_2^{-l}$ com $a_l \in k(v)$ para todo l. Dessa forma, identificando os coeficientes dos termos em q_2^{-2} na igualdade acima, tem-se:

$$(\gamma_g v + \delta_g)^{-2} g(a_2) = \frac{1}{\Delta_g} a_2 + \frac{1}{\Delta_g} n\gamma_g(\gamma_g v + \delta_g)^{-1}, \ \forall g \in G.$$

Dessa maneira, encontramos um elemento $b = n^{-1}a_2$ de $k(v)$ que satisfaz:

$$g(b) = \frac{1}{\Delta_g}(\gamma_g v + \delta_g)^2 b + \frac{1}{\Delta_g}\gamma_g(\gamma_g v + \delta_g), \ \forall g \in G.$$

Definindo $y = x + bq_2^{-2}w$, para todo $g \in G$:

$$g(y) = g(x) + \left[\frac{1}{\Delta_g}(\gamma_g v + \delta_g)^2 b + \frac{1}{\Delta_g}\gamma_g(\gamma_g v + \delta_g)\right](\gamma_g v + \delta_g)^{-2} q_2^{-2} w$$

$$= \frac{1}{\Delta_g} x - \frac{1}{\Delta_g}\gamma_g q_2^{-2}(\gamma_g v + \delta_g)^{-1} w + \frac{1}{\Delta_g} b q_2^{-2} w + \frac{1}{\Delta_g}\gamma_g(\gamma_g v + \delta_g)^{-1} q_2^{-2} w = \frac{1}{\Delta_g} y.$$

É claro que y gera S sobre K, e a partir das relações entre v, q_2, w e x, as relações seguintes são claras: $[y, v] = q_2^{-1}$, $[y, q_2] = bq_2^{-1}$, $[y, w] = 2y$. Portanto, o lema está demonstrado. □

Lema 3.6. *Na notação do Lema anterior, seja n o grau mínimo em x de elementos de S^G que não pertencem a K.*

1. *$K^G = k(v, q_2)^G(w; d)$, em que d foi restringida a $k(v, q_2)^G$;*
2. *Existe um inteiro m e uma função racional $f_m \in k(v)$, tal que $f = f_m q_2^m$ verifica $g(f) = (\Delta_g)^n f$ para todo $g \in G$;*
3. *Definindo $z = fy^n$, temos que z é invariante pela ação de G;*

4. *Denotando τ o automorfismo de $K^G = k(v,q_2)^G(w;d)$ que se restringe à identidade em $k(v,q_2)^G$ e manda w para $w+2n-m$, existe uma τ-derivação D de K^G, tal que:*

$$S^G = k(v,q_2)(w;d)[z;\tau,D],\ D_2(k)^G = k(v,q_2)(w;d)(z;\tau,D).$$

Se $n \geq 2$, a restrição de D em $k(v,q_2)^G$ é 0.

Demonstração. Na notação do Lema anterior, temos que $u_n \in K$ satisfaz $g(u_n) = (\Delta_g)^n u_n$ para todo $g \in G$. Desenvolvendo u_n em série de Laurent em $K(v,q_2)((w^{-1};-d))$, temos que $u_n = \sum_{j\geq j_0} \psi_j$, $\psi_j \in k(v,q_2)$ para todo j, e $\psi_{j_0} \neq 0$. Como w é G-invariante, isso nos dá $g(\psi_{j_0}) = (\Delta_g)^n \psi_{j_0} w^{-j}$ para todo $g \in G$. Desenvolvendo agora ψ_{j_0} em série de Laurent em $k(v)((q_2))$, temos $\psi_{j_0} = \sum_{i\geq m} f_i q_2^i$, $f_i \in k(v), f_m \neq 0$. Isso nos dá $g(f_m)(\gamma_g v + \delta_g)^m = (\Delta_g)^n f_m$ para todo $g \in G$. Definindo $f = f_m q_2^m$, temos que $g(f) = (\Delta_g)^n f$ para todo $g \in G$ e, dessa forma, definindo $z = fy^n$, temos que z é G-invariante. Como y tem grau 1 em x, temos que o grau de z em x é igual a n e, portanto, pelo Teorema de Myiata Não-Comutativo, temos que $S^G = K^G[z;\tau,D]$ para um automorfismo τ de K^G e uma τ-derivação D. Aplicando novamente o Teorema de Myiata Não-Comutativo em $S_0 = k(v,q_2)[w;d]$, cujo corpo de frações é K, uma vez que w é G-invariante, temos que $K^G = k(v,q_2)^G(w;d)$ e, portanto:

$$D_2(k)^G = Frac\, S^G = k(v,q_2)^G(w;d)(z;\tau,D).$$

Podemos calcular a relação de comutação entre z e w. $yw = (w+2)y$; portanto, $y^n w = (w+2n)y^n$; e então $fy^n w = (fw+2nf)y^n = (wf - d(f))y^n + 2nz = wz + (2n - d(f)f^{-1})z$. Como $d(v) = 0$ e $d(q_2) = q_2$, $d(f) = d(f_m q_2^m) = m f_m q_2^m = mf$. Assim:

$$zw - wz = (2n-m)z.$$

Podemos também fazer algumas precisões sobre os valores de τ e D em $k(v,q_2)^G$. Relembrando a notação do Lema anterior, item 3, temos que para todo $a \in k(v,q_2)$, $ya = ay + d''(a)$, e por indução $y^n a = ay^n + nd''(a)y^{n-1} + \ldots$ (termos de grau $\leq n-2$ em y). Multiplicando à esquerda por f:

$$za = az + nd''(a)fy^{n-1} + \ldots, \forall a \in k(v,q_2).$$

Se $a \in k(v,q_2)^G$, então por outro lado $za = \tau(a)z + D(a)$. Juntando isso com a equação acima, temos

$$(\tau(a) - a)z + D(a) = nd''(a)fy^{n-1} + \ldots$$

Da igualdade dos coeficientes, em $k(v,q_2)$, de y^i nessa equação, temos que τ restringe-se à identidade em $k(v,q_2)^G$, de forma que D restringe-se a uma derivação. Se $n \geq 2$, o coeficiente de y^{n-1} é 0, isto é, $d''(a) = 0$, e isso mostra que $D(a) = 0$ para todo $a \in k(v,q_2)^G$. A prova assim se encerra. □

Vamos ver agora que, na notação do lema acima, $n \geq 2$ não pode ocorrer. Caso contrário, teríamos $D_2(k)^G = k(v,q_2)^G(w;d)(z;t)$. Em $k(v,q_2)$, d'' age como $q_2^{-2}\partial_v + b(v)q_2^{-1}\partial_{q_2}$, e do lema acima sabemos que em $k(v)^G$, d'' age como 0. Portanto, a única possibilidade é $k(v)^G = k$. Mas pelo Lema de Artin (comutativo) isso não pode ocorrer. Dessa maneira, $n = 1$.

Finalmente, podemos encerrar a demonstração do Teorema 3.9.

Demonstração. Relembrando o último lema, temos que $z = yf$ e $f = f_m q_2^m$ para algum inteiro m e $f_m \neq 0 \in k(v)$. Usando a sua última conclusão, podemos reescrever $D_2(k)^G$ como a seguinte extensão de Ore iterada:

$$k(v,q_2)^G(z;D)(w;d),$$

em que $D = fd''$, com d'' a derivação introduzida no lema 5. Ou seja, D é a restrição a $k(v,q_2)^G$ da derivação de $k(v,q_2)$ definida por $D(v) = f_m q_2^{m-2}$ e $D(q_2) = f_m b q_2^{m-1}$. d é a derivação de $k(v,q_2)^G(z;D)$, tal que $d(z) = (m-2)z$, e em $k(v,q_2)^G$ é a restrição da derivação de $k(v,q_2)$ definida por $d(v) = 0$, $d(q_2) = q_2$.

Como de praxe, definimos $B = k(v)[q_2]$. Pelo Lema de Artin, não podemos ter $B^G \subseteq k(v)^G$. Seja então q um elemento de B^G de grau não-nulo e minimal em q_2; denotamos tal grau de e. Pelo formato da ação de G em q_2 (lema 3.3), temos $q = sq_2^e$, como $s \neq 0 \in k(v)$. Então, $Frac\, B^G = k(v, q_2)^G = k(v)^G(q)$. Como $d(q_2) = q_2$, $d(v) = 0$, temos $d(q) = eq$. Calculamos:

$$D(q) = D(s)q_2^e + seD(q_2)q_2^{e-1} = \partial_v(s)D(v)q_2^e + sef_m bq_2^{e+m-2} = (\partial_v(s) + esb)f_m q_2^{e+m-2}.$$

$D(q) \in k(v)^G(q)$ desenvolve-se em $k(v)^G((q))$ como uma série de Laurent $\sum_{j>j_0} h_j q^j$ com $h_j \in k(v)^G$. Como $q^j = s^j q_2^{ej}$, a partir da igualdade obtida acima para $D(q)$, temos que $D(q)$ é um monômio $h_r q^r$, em que o inteiro r satisfaz $e+m-2 = er$, e $h_r = s^{-r}(\partial_v(s)+esb)f_m$; vamos denotar tal elemento simplesmente por c. Resumindo:

$$D_2(k)^G = k(v)^G(q)(z; D)(w; D),$$

com $D(q) = cq^r$ e $d(q) = eq$, $c \in k(v)^G$ e $er = e + m - 2$. Novamente, pelo Lema de Artin (comutativo), temos que $k(v)^G = k(t)$ para alguma função racional $t(v)$. Como d é 0 em $k(v)^G$, $d(t) = 0$. $D(t) = \partial_v(t)D(v) = \partial_v(r)f_m q_2^{m-2}$. Como $q = sq_2^e$ e $m - 2 = e(r - 1)$, temos $q_2^{m-2} = s^{1-r}q^{r-1}$ e, portanto, $D(t) = \partial_v(t)f_m s^{1-r}q^{r-1}$. Simplificando a notação, definimos $a = \partial_v(t)f_m s^{1-r}$. Note que $a \neq 0 \in k(v)$, pois $f_m, s \neq 0$ e $t \notin k$. Além disso, $a = D(t)q^{1-r} = [z, t]q^{1-r}$ é invariante sobre G e, por conseguinte, pertence a $k(t)$. Assim, $D_2(k)^G = k(t, q)(z; D)(w; d)$, com:

$$[z, t] = D(t) = aq^{r-1},\ [z, q] = D(q) = cq^r,\ [w, t] = d(t) = 0,\ [w, q] = d(q) = eq,\ [w, z] = d(z) = (m-2)z.$$

Introduzindo $z' = q^{1-r}z$, $d(z') = (m - 2)q^{1-r}z + (1 - r)eq^{1-r}z = 0$. Denotando $D' = q^{1-r}D$: $D_2(k)^G = k(t, q)(z'; D')(w; d)$, com:

$$[q, t] = 0,\ [z', t] = D'(t) = a,\ [z', q] = D'(q) = cq,\ [w, t] = d(t) = 0,\ [w, q] = d(q) = eq,\ [w, z'] = d(z') = 0.$$

Os 4 elementos $t, q, w'' = \frac{1}{eq}w$ e $z'' = -\frac{c}{ea}w + \frac{1}{a}z'$ geram $D_2(k)^G$ e verificam:

$$[q, t] = 0,\ [z'', t] = 1,\ [z', q] = 0,\ [w'', t] = 0,\ [w'', q] = 1,\ [w'', z''] = 0.$$

Isso exibe de maneira explícita um isomorfismo $D_2(k)^G \cong D_2(k)$. E encerra a prova. □

3.5 Notas e Referências

A discussão da teoria de invariantes para Álgebra de Weyl foi baseada em [Dum06] e [Tra07].

A primeira instância de aparecimento do Problema de Noether Não-Comutativo na literatura foi em [AD98], em que Alev e Dumas provaram, de maneira independente da exposta neste capítulo, que existe solução positiva para corpos algebricamente fechados e G finito abeliano. Em [AD97], usando a estrutura de $Aut_{\mathbb{C}}A_1(\mathbb{C})$, Alev e Dumas provaram que $(Frac\, A_1(\mathbb{C}))^G$ é isomórfica a $Frac\, A_1(\mathbb{C})$ para *todo* grupo finito de automorfismos da Álgebra de Weyl.

A discussão do Problema de Noether Não-Comutativo seguiu de perto a exposição original em [AD06]. Houve uma simplificação na demonstração de alguns teoremas, em particular o Problema de Noether Não-Comutativo para a segunda Álgebra de Weyl.

A principal referência para teoria de invariantes em anéis associativos é [Mon80]. A referência [For85] também é bastante útil.

Capítulo 4

Invariantes de Operadores Diferenciais: Racionalidade Não-Comutativa

Neste capítulo, discutiremos novos resultados relacionados ao Problema de Noether Não-Comutativo obtidos por Eshmatov, Futorny, Ovsienko e Schwarz em [FO06], [FS17], [EFOS17] e [FS18b]. Encerramos com uma aplicação para álgebras racionais de Cherednik. Outras aplicações serão encontradas quando discutirmos Álgebras de Galois, no Capítulo 5.

4.1 Problema de Noether Não-Comutativo para grupos de Reflexão Unitários

Iremos discutir a seguinte questão:

Problema. *Sejam k um corpo de característica 0 e W um grupo finito agindo linearmente como um grupo de pseudorreflexões: quando $D_n(k)^W \cong D_n(k)$?*

Nesta seção, discutiremos o caso $k = \mathbb{C}$, publicado em [EFOS17]. Na próxima, abordaremos corpos de característica 0 arbitrários, tratados em [FS18b]. Para deixar claro o que é específico para caso complexo e deixar o caminho pronto para a próxima seção, por um momento seja k arbitrário de característica 0.

Qual é a ideia da demonstração? Simplesmente emular aquela do caso Problema de Noether Comutativo. Gostaríamos que fosse verdade $A_n(k)^W \cong A_n(k)$, e apenas tomaríamos o corpo de frações de ambos os lados. Sabemos que isso é falso — a Álgebra de Weyl é rígida. Contudo, realizando apenas uma pequena modificação, a ideia funciona: existe um polinômio W-invariante Δ, tal que $A_n(k)^W_\Delta \cong A^*_n(k)$, em que no segundo lado do isomorfismo temos uma localização da Álgebra de Weyl.

Vamos, agora, especificar os detalhes. Para evitar uma notação carregada, nós denotaremos a álgebra $k[x_1, \ldots, x_n]$ apenas por Λ.

Proposição 4.1. *Seja Δ um elemento W-invariante de Γ, em que Γ é uma localização de Λ e W um grupo finito de automorfismos. Então:*

1. *Seja S um conjunto multiplicativo de Γ. $D(\Gamma_S) = D(\Gamma)_S$;*
2. *$(D(\Gamma)_\Delta)^W \cong (D(\Gamma)^W)_\Delta$;*
3. *$\Gamma^W_\Delta = (\Gamma^W)_\Delta$.*

Demonstração. Para o primeiro item, Proposição 1.2. Para o segundo: todo elemento de $(D(\Gamma)_\Delta)^W$ é, em particular, um elemento de $D(\Gamma)_\Delta$ e, portanto, pode ser escrito da forma $D\Delta^k$ (em função do item 1), com $D \in D(\Gamma), k \in \mathbb{Z}$. Como o produto é invariante, e Δ é invariante, D também o é. O terceiro item demonstração análoga. □

Proposição 4.2. *Considere a inclusão $\Lambda_\Delta^W \to \Lambda_\Delta$. Ela induz, por restrição de domínio, um homomorfismo* (†) $\phi : D(\Lambda_\Delta)^W \to D(\Lambda_\Delta^W)$ *que é sempre injetivo.*

Demonstração. Seja $d \in D(\Lambda_\Delta)^W$, e $f \in \Lambda_\Delta^W$. Para todo $w \in W$, $w(d(f)) = (w.d)(wf) = d(f)$. Assim, realmente obtemos um morfismo. Como $D(\Lambda_\Delta)$ é simples e W age por automorfismos externos, temos que $D(\Lambda_\Delta)^W$ é simples e, portanto, temos um mapa injetivo (Teorema 3.1). □

Todo o trabalho encontra-se na análise no morfismo (†). É necessário encontrar um polinômio adequado Δ que seja invariante e que torne o morfismo sobrejetivo. Quando k é algebricamente fechado, existe um entendimento geométrico muito claro do que se deve procurar. Vamos analisar este caso agora.

A primeira observação pertinente é o seguinte resultado de Levasseur ([Lev80], Thm. 5) a respeito do morfismo considerado acima, porém sem localização. Neste caso, a resposta é conhecida e explica as dificuldades por vir.

Teorema 4.1. *Seja G um grupo finito de automorfismos lineares de Λ (e, portanto, por extensão, de $A_n(k)$). Por restrição de domínio, tal como acima, obtemos um homomorfismo $\theta : A_n(k)^G \to D(\Lambda^G)$. Este homomorfismo é sempre injetivo, e é um isomorfismo se, e somente se, G não contiver nenhuma pseudorreflexão além da identidade.*

No resto desta seção, $k = \mathbb{C}$. Cada pseudorreflexão diferente da identidade em W fixa um hiperplano. Seja $\mathbb{S}$ o conjunto das pseudorreflexões em W, e para cada $s \in \mathbb{S}$ seja L_s uma forma linear cujo conjunto de zeros é $Fix\, s$, o hiperplano fixo por s. Um elemento h de $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ é chamado de semi-invariante se $w.h = det(w)h$ para todo $w \in W$. Temos que $J = \prod_{s \in \mathbb{S}} L_s$ é semi-invariante ([Spr77], exercício 4.3.5).

Temos nosso candidato a Δ: $J^{|W|}$. Com ele, podemos obter um conjunto com boas propriedades geométricas para a ação de W. Vamos relembrar um resultado de Steinberg:

Teorema 4.2. (Steinberg) *Seja W um grupo de pseudorreflexões num espaço vetorial V. Dado qualquer subconjunto X de V, $isp(X)$ é gerado pelas pseudorreflexões que contém, em que $isp(X) = \{w \in W | w.x = x, \forall x \in X\}$ é o grupo de isotropia de X.*

Demonstração. [Kan01], Corol. 26-1. □

Lembramos que a ação de W em $A_n(\mathbb{C})$ origina-se de um grupo de reflexões unitário agindo num espaço vetorial V de dimensão finita n, com a ação estendida para $D(S(V^*))$ da maneira usual. Seja o polinômio J introduzido acima. Considere o conjunto V' dado da seguinte forma: $\{v \in V | J(v) \neq 0\}$. Este é um aberto na topologia de Zariski em V, e é isomórfico a $Specm\, \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_J = Specm\, \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_{J^{|W|}} = Specm\, \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_\Delta$. V' corresponde ao subconjunto de V obtido removendo os hiperplanos fixos pelas pseudorreflexões.

Lema 4.1. *A ação de W restringe-se numa ação em V' e tal ação é livre.*

Demonstração. Seja $w \in W, v \in V'$. Para mostrar que temos uma ação em V', precisamos mostrar que $w.v \in V'$. Se esse não fosse o caso, então $w.v$ pertenceria a algum hiperplano fixo de uma pseudorreflexão s diferente da identidade. Dessa forma, $(sw).v = w.v$ e, portanto, $(w^{-1}sw).v = v$. Logo, $w^{-1}sw \in isp(v)$. Sabemos que $isp(v)$ é gerado pelas pseudorreflexões que contém, pelo Teorema de Steinberg. Mas como v não pertence a nenhum dos hiperplanos fixos por uma pseudoreflexão, tal grupo é trivial. Sendo assim, $w^{-1}sw = id$, $s = id$, contrariando a hipótese. Dessa forma, temos uma ação de W em V', e tal ação é livre pois, como acabamos de ver, o grupo de isotropia de todo vetor em V' é trivial. □

Introduziremos agora um resultado fundamental.

Teorema 4.3. *Seja X uma variedade afim irredutível e G um grupo finito de automorfismos agindo nela. Existe um aberto maximal V em que G age de maneira livre.*

1. *De fato, V é aberto denso em X e, chamando V' sua imagem pela projeção $\pi : X \to X/G$, $V = \pi^{-1}(V')$. Logo, π restringe-se a uma projeção $\pi : V \to V'$, e V' é denso em X/G;*

2. *Temos que $D(X)^G \cong D(X/G)$ se alguma das duas condições seguintes se aplica: X satisfaz a condição S_2 de Serre (em particular, se é normal ou regular) e $codim_X(X - V) \geq 2$; ou se G age livremente em X.*

Demonstração. [CH94], (3.7). □

Observação. *Uma variedade afim X satisfaz a condição S_2 de Serre se $A = O(X)$ a satisfizer, isto é: $depth\, A_p \geq inf\{2, ht(p)\}$, para todo ideal primo $p \subset A$.*

Pelo lema 4.1, a ação de W em $V' = Specm\, \Lambda_\Delta$ é livre. Pelo teorema acima, temos que o mapa (†) é, de fato, um isomorfismo.

Note que fica claro agora, também, porque o mapa considerado no Teorema de Levasseur falha em ser um isomorfismo. A ação não é livre, e como o grupo contém pseudorreflexões, a codimensão do aberto em que a ação é livre é 1.

Finalmente:

Teorema 4.4. ([EFOS17], Theorem 2) *Seja W um grupo agindo linearmente por reflexões unitárias em $A_n(\mathbb{C})$. Então, $D_n(\mathbb{C})^W \cong D_n(\mathbb{C})$.*

Demonstração. Todas as etapas na cadeia de isomorfismo abaixo são justificadas pelos itens da Proposição 1 e o isomorfismo (†): $((D(\Lambda))^W)_\Delta \cong ((D(\Lambda))_\Delta)^W \cong D(\Lambda_\Delta^W) \cong D(k[e_1, \ldots, e_n]'_\Delta)$ $\cong (D(k[e_1, \ldots, e_n]))_{\Delta'}$. A saber, usamos, em ordem: Prop. 1 (2); Prop. 1 (1) e †; depois o Teorema de Chevalley-Shephard-Todd; e novamente Prop. 1 (1).

Aqui, os e_i são os geradores algebricamente independentes de Λ^W, e Δ' é apenas Δ escrito em função deles e não dos x_i. □

4.2 Problema de Noether Não-Comutativo para Grupos de Pseudorreflexão Arbitrários

Nesta seção, estenderemos o resultado da anterior para grupos de pseudorreflexão em corpos de característica 0 arbitrários.

Toda notação da seção anterior será mantida. Novamente, o problema é mostrar que o mapa (†) é sobrejetivo.

Notemos, inicialmente, o seguinte resultado.

Seja W um grupo de pseudorreflexões. Seja $e_1, \ldots, e_n$ um conjunto de geradores algebricamente independentes de $k[x_1, \ldots, x_n]^W$; seja M a matriz $n \times n$ cuja entrada ij é $\partial_{x_j} e_i$, e seja J seu determinante. Como na seção anterior, seja $\mathbb{S}$ o conjunto das pseudorreflexões em W e, para cada $s \in \mathbb{S}$, seja L_s uma forma linear cujo conjunto de zeros é $Fix\, s$.

Teorema 4.5. *J é semi-invariante, e todo elemento semi-invariante escreve-se como produto de J por um elemento invariante. $J = a \prod_{s \in \mathbb{S}} L_s$, em que a é um escalar que varia de acordo com a escolha de geradores algebricamente independentes e das formas lineares L_s. Finalmente, $J \neq 0$.*

Demonstração. [Kan01], 20-2, Proposição A e B, 21-1, Proposição A e B. □

Novamente, $J^{|W|}$ é invariante; denotaremos, novamente, este elemento por Δ. Note a semelhança, até o momento, com o que foi feito anteriormente. A diferença no argumento começa agora.

Um conceito importante para nós será o de corpo de definição: o menor corpo no qual uma representação pode ser definida.

Definição 4.1. *Seja $\rho : G \to GL_n(k)$ uma representação e $k' \subset k$ um subcorpo. Nós dizemos que ρ tem k' como* corpo de definição *se ela provém de uma representação $\rho' : G \to GL_n(k')$ por estensão de escalares.*

Dada uma representação $\rho : G \to GL_n(k)$ com função de caracteres χ, nós chamamos a extensão de $\mathbb{Q}$ gerada por $Im\,\chi$ de $\mathbb{Q}(\chi)$.

Teorema 4.6. *Seja $\rho : G \to GL_n(k)$ um grupo de pseudorreflexões irredutível — isto é, sua representação é irredutível. Então seu corpo de definição é $\mathbb{Q}(\chi)$.*

Demonstração. Esse resultado pode ser encontrado em [Kan01], Appendix B. □

Necessitaremos, também, de um segundo resultado. Ele é análago à decomposição de grupos de reflexões usuais num produto direito de groups de reflexão irredutíveis. Acreditamos que esse resultado seja bem conhecido para grupos de pseudorreflexão arbtirários, mas por falta de uma referência adequada, incluiremos aqui sua demonstração.

Definição 4.2. *Dada uma transformação linear g num espaço V de dimensão finita, denotamos $Fix\,g = \{v \in V | gv = v\} = Ker\,(Id - g)$, e $[V, g] = Im(Id - g)$.*

Se g é uma pseudorreflexão diferente da identidade, $Fix\,g$ é um hiperplano e $[V, g]$ é um espaço de dimensão 1. Neste caso, se $a \in V$ gera $[V, g]$, então para todo elemento v de V, existe $\phi(a) \in k$, tal que $v - gv = \phi(v)a$. ϕ é claramente um funcional linear, e $ker\,\phi = Fix\,g$.

Lema 4.2. *Se $g, h \in GL(V)$, então $Fix(ghg^{-1}) = gFix\,h$. Em particular, se h é uma pseudorreflexão diferente da unidade, que fixa um hiperplano H, ghg^{-1} é uma pseudorreflexão que fixa o hiperplano gH.*

Lema 4.3. *Seja g uma pseudorreflexão diferente da unidade, de ordem m, $H = Fix\,g$, e L_H qualquer funcional linear com $H = kerL_H$ (note que L_H é determinado a menos de escalar). Suponha que a gera $[V, g]$. Então existe uma raiz m-ésima primitiva da unidade μ, tal que $gv = v - (1 - \mu)\frac{L_H(v)}{L_H(a)}a$, para todo $v \in V$.*

Demonstração. Como vimos acima, existe um funcional linear ϕ, tal que $gv = v - \phi(v)a$ e $H = ker\,\phi$. Portanto, $ga = \mu a$ para alguma raiz primitiva da unidade de ordem m μ e, assim, $\phi(a) = 1 - \mu$. Temos que $\phi = \lambda L_H$ para algum $\lambda \neq 0 \in k$, e isso nos dá imediatamente que $\lambda = (1 - \mu)/L_H(a)$, o que completa a prova. □

Lema 4.4. *Sejam r, s pseudorreflexões diferentes da identidade, $H = Fix\,r$, $J = Fix\,s$, a um gerador de $[V, r]$ e b um gerador de $[V, s]$. Se $a \in J$ e $b \in H$, então $rs = sr$.*

Demonstração. Usando o lema acima temos escalares $\mu, \nu \in k$, tais que para todo $v \in V$.

$$rs(v) = v - (1 - \mu)\frac{L_H(v)}{L_H(a)}a - (1 - \nu)\frac{L_J(v)}{L_J(b)}b + (1 - \mu)(1 - \nu)\frac{L_H(b)L_J(v)}{(L_H(a)L_J(b))}a.$$

Se $b \in H$, $L_H(b) = 0$, portanto, o último termo acima desaparece. Por simetria, o último termo da expressão $sr(v)$ desaparece, e o que resta é igual. Logo $rs = sr$. □

Proposição 4.3. *Um subespaço V' de V é invariante com respeito a uma pseudorreflexão $r \neq id$ se, e somente se, $V' \subseteq Fix\,r$ ou $[V, r] \subseteq W$.*

Demonstração. Se $V' \subseteq Fix\,r$, então obviamente V' é invariante. Se $[V, r] \subseteq V'$, então a fórmula do lema 4.3 mostra que V' é invariante. Reciprocamente, se V' é invariante e não está contido em $Fix\,r$, então $[V', r] \neq 0$ e, portanto, $[V, r] = [V', r] \subseteq V'$. □

Teorema 4.7. *Seja W um grupo finito de pseudorreflexões num espaço vetorial V. Seja $V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$ uma decomposição de V em subespaços invariantes por W e irredutíveis (isso é possível pelo Lema de Maschke, lembrando que $char\,k = 0$). Seja W_i a restrição de W para V_i, $i = 1, \ldots, m$. Então W_i é um grupo de pseudoreflexões irredutível ou trivial, e $W \cong W_1 \times \ldots \times W_m$.*

Demonstração. Pelo lema acima, se r é uma pseudorreflexão $\neq id$, então $[V, r] \subseteq V_i$ para algum i. Seja W_i o subgrupo de W gerado pelas pseudorreflexões tais quais isso ocorre — se não existe tal pseudorreflexão, chamemos $W_i = Id$. W_i fixa todo elemento de V_j, para $i \neq j$, e pelo lema 4.4, os elementos de W_i comutam com os elementos de W_j. Portanto, W é o produto direito dos W_i, e cada W_i, por sua vez, evidentemente é um grupo de pseudorreflexões em V_i, ou então o grupo trivial. □

Por enquanto, assuma W um grupo de pseudorreflexões arbitrário. Seja

$$E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

um vetor de tamanho n, com 1 na posição i e 0 nas demais, e seja

$$F_i = \begin{pmatrix} f_{i1} \\ \vdots \\ f_{in} \end{pmatrix}$$

uma solução do sistema (‡) $MF_i = E_i$. Pela regra de Kramer, $f_{ij} \in \Lambda_\Delta$, $1 \leq i, j \leq n$.

Seja $d_i = \sum_{k=1}^{n} f_{ik}\partial_k$. Nós temos $d_i(e_j) = \delta_{ij}$, e que $d_i \in D(\Lambda_\Delta) = D(\Lambda)_\Delta$.

Teorema 4.8. ([FS18b], Prop. 6.7) *Se d_i é invariante por W então d_i, e_i, $i = 1, \ldots, n$ são enviados pelo morfismo (†) ϕ para geradores de $D(\Lambda_\Delta^W)$ que satisfazem as relações de Weyl.*

Demonstração. É claro que $\Lambda_\Delta^W \cong k[e_1, \ldots, e_n]_{\Delta'}$. Chamemos este anel de A. O módulo de diferenciais de Kahler $\Omega_k(A)$ é livremente gerado sobre A, com base $d_{e_1}, \ldots, d_{e_n}$. Por 15.1.12 de [MR01], o A-módulo $Der_k(A)$ é livremente gerado por extensões (únicas) de $\partial_{e_i}, i = 1, \ldots, n$ de $k[e_1, \ldots, e_n]$ para A. Sendo assim, pela forma que os d_i agem, a única opção que temos é: $d_i = \partial_{e_i}$, para todo $i = 1, \ldots, n$. □

Resta apenas provar que os d_i's são invariantes. Em alguns casos, isso pode ser provado de maneira direta. Uma demonstração do Problema de Noether Não-Comutativo para S_n, sobre qualquer corpo de característica 0, apareceu em [FO06]. Ela era elementar mas bastante uma envolvida. Uma demonstração bastante simplificada, com a contribuição de Schwarz, também sobre qualquer corpo de característica 0, aparece em [FS17]. É esta última que apresentaremos aqui, com algumas melhoras técnicas. Mostremos o último detalhe:

Lema 4.5. *d_i é invariante pela ação de S_n.*

Demonstração. É suficiente mostrar que $\pi f_{ij} = f_{i\pi(j)}$ para $1 \leq i, j \leq n$, $\pi \in S_n$. Vamos usar a regra de Kramer. Seja v_i o vetor

$$\begin{pmatrix} \partial_i e_1 \\ \vdots \\ \partial_i e_n \end{pmatrix}.$$

É claro que $\pi(v_i) = v_{\pi(i)}$.

$$f_{ij} = \frac{det(v_1, \ldots, E_i, \ldots, v_n)}{det(v_1, \ldots, v_n)},$$

com E_i na posição j.

Então,

$$\pi f_{ij} = \frac{det(v_{\pi(1)}, \ldots, E_i, \ldots, v_{\pi(n)})}{det(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(n)})}$$

$$= sign(\pi)det(v_1, \ldots, E_i, \ldots, v_n)/sign(\pi)det(v_1, \ldots, v_n),$$

agora com E_i na posição $\pi(j)$.

E isso é igual a $f_{i\pi(j)}$. □

Agora o Problema de Noether Não-Comutativo pode ser provado para S_n seguindo as mesmas etapas que no Teorema 4.4.

No caso arbitrário, existe uma maneira indireta de mostrar que os d_i's são invariantes. Por um momento, vamos supor que W seja um grupo de pseudorreflexões irredutível. Pelo Teorema 6, nós podemos supor que os e_i e, portanto os d_i, todos têm coeficientes em $\mathbb{Q}(\chi)$. Note o seguinte: se $k' \subset k$ é um subcorpo W-invariante e se d é um operador diferencial com coeficientes em k', a questão da sua W-invariância é a mesma. quer consideremos o corpo base k ou k'. Como o corpo $\mathbb{Q}(\chi)$ é invariante por W, a invariância de d_i como um operador diferencial em Λ_Δ^W, com o k atual, é equivalente a sua invariância quando k é substituído por $\mathbb{Q}(\chi)$. Agora, o corpo é um subconjunto de $\mathbb{C}$, e repetindo o argumento a respeito de corpo de definição, temos que a invariância de d_i não muda se considerarmos k os números complexos. Finalmente, temos acesso a resultados de geometria algébrica:

Teorema 4.9. *Seja X uma variedade irredutível, afim e normal. Então $D(X)^W = \{d \in D(X) | d(O(X)^W) \subseteq O(X)^W\}$.*

Demonstração. Knop ([Kno06]), Theorem 3.1. □

$\Lambda_\Delta^W \cong k[e_1, \ldots, e_n]_{\Delta'}$, como vimos. Pela ação dos d_i nos e_j e a regra da cadeia, temos que cada d_i, $i = 1, \ldots, n$ satisfaz as condições do teorema acima e, portanto, é invariante. Sendo assim, finalmente, o morfismo (†) é um isomorfismo.

Proposição 4.4. ([FS18b], Thm. 6.8) *Seja k um corpo de característica 0 arbitrário. Seja W um grupo de pseudorreflexões irredutível. Então o Problema e Noether Não-Comutativo tem solução positiva.*

Usando isso em conjunto com o Teorema 4.7, finalmente, temos:

Teorema 4.10. ([FS18b], Thm. 6.12) *Seja k um corpo de característica 0 e W qualquer grupo de pseudorreflexões em $A_n(k)$. Então $(Frac\, A_n(k))^W \cong Frac\, A_n(k)$.*

Demonstração. A ação linear de W vem de uma representação num espaço vetorial V, em que $dim\, V = n = n_1 + \ldots + n_k + m$, e que na decomposição de $W = W_1 \times \ldots \times W_K$, dada pelo Teorema 4.7, cada W_i age num espaço de dimensão n_i; m é a dimensão do subespaço invariante por W. Temoos, então, que $A_n(k)^W$ é isomorfico a $A_{n_1}(k)^{W_1} \otimes A_{n_k}(k)^{W_k} \otimes A_m(k)$. Agora, basta tomar o corpo de frações. □

4.3 Cálculo Efetivo dos Geradores de Weyl; o caso de Característica Prima

Dado o isomorfismo $D_n(k)^W \cong D_n(k)$, em que W é irredutível, é interessante encontrar no primeiro anel elementos $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ que satisfaçam as relações de Weyl. Pela forma que o isomorfismo † foi construído, tais geradores podem ser encontrados já em $A_n(k)_\Delta^W$. E o seu cálculo também se dá de maneira efetiva: consiste apenas em resolver o sistema linear ‡ ([FS18b], sec. 5.3).

Dado que os geradores algebricamente independentes dos grupos de reflexão unitários irredutíveis são bem conhecidos (vide, por exemplo, [Kan01]), o método para o cálculo é imediato.

Como um exemplo: chamando $J = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)$.

$FracD_3(k)^{S_3} \to D_3(k)$:

$$x_1 + x_2 + x_3 \to X_1,\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 \to X_2,\ x_1x_2x_3 \to X_3;$$

$$\frac{x_1^2(x_2-x_3)}{J}\partial_1+\frac{x_2^2(x_3-x_1)}{J}\partial_2+\frac{x_3^2(x_1-x_2)}{J}\partial_3\to Y_1;$$
$$\frac{x_1(x_3-x_2)}{J}\partial_1+\frac{x_2(x_1-x_3)}{J}\partial_2+\frac{x_3(x_2-x_1)}{J}\partial_3\to Y_2;$$
$$\frac{(x_2-x_3)}{J}\partial_1+\frac{(x_3-x_1)}{J}\partial_2+\frac{(x_1-x_2)}{J}\partial_3\to Y_3.$$

Uma última palavra. Pelo Teorema de Clark-Ewing ([Kan01], Theorem 15-2), e pela classificação dos grupos unitários irredutíveis de Shephard e Todd, para classificar os grupos de pseudoreflexão irredutíveis em k, basta ver para quais grupos da lista $\mathbb{Q}(\chi)$ estão contidos em k. Checando a lista, vemos que $\mathbb{Q}(\chi)$ envolve apenas os elementos $\epsilon_n = e^{2\pi i/n}(n\geq 1), \epsilon_n+\epsilon_n^{-1}, \sqrt{\pm 2}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ ([Kan01], pág. 175).

Em particular, notando que os grupos de Weyl tem corpo de definição $\mathbb{Q}$, e que todo corpo de característica p contem o subcorpo $\mathbb{Z}_p$, temos que dado um grupo de Weyl fixo W, os geradores de Weyl em $D_n(k)^W$ otidos acima possuem seus coeficientes em $\mathbb{Q}$ e, portanto, dado um p suficientemente grande, eles e a verificação das relações de suas relações de Weyl podem ser levados num corpo de característica p. Ou seja:

Proposição 4.5. (Futorny-Schwarz) *Seja $A_n(k)$ a Álgebra de Weyl sob um corpo de característica arbitrária (neste caso precisamos ser cuidadosos com a definição: é a álgebra dada pelos geradores $x_1,\dots,x_n,\partial_1,\dots,\partial_n$ com as relações de Weyl usuais ([Pre10])). Seja W um grupo de Weyl, fixo durante sua discussão, agindo linearmente em $A_n(k)$ (isto é possível - lembre que sua ação cristalográfica manda geradores algebricamente independentes em combinações lineares integrais dos demais). Então $Frac\, A_n(k)^W \cong Frac\, A_n(k)$ para $char\, k >> 0$.*

É um problema interessante estudar generalizações do Problema de Noether Não-Comutativo em característica prima.

4.4 Uma conjectura relacionando O Problema de Noether e sua versão Não-Comutativa

Essa Conjectura é uma elaboração daquela heurística proposta pelo aluno em [Sch15b], Sec. 6:

Conjectura. (Schwarz) *Seja k qualquer corpo de característica 0. Seja G um subgrupo finito de $GL(V)$, V um espaço vetorial de dimensão n. Se o Problema de Noether tem solução positiva para $Frac\, S(V^*)^G$, então sua versão não-comutativa tem solução positiva para $Frac\, D(S(V^*))^G$.*

Nesta seção iremos demonstrar essa Conjectura. Ela nos permite redemonstrar todos os casos positivos do Problema de Noether Não-Comutativo apresentados anteriormente de maneira uniforme, além de obter alguns novos casos de solução postiva.

Comecemos a demonstração. Nosso argumento segue de perto aquele usado em [LS95] para demonstrar o Teorema 3.4.

Seja W um grupo finito arbitrário agindo num espaço vetorial V de dimensão finita. Estenda essa ação para $O(V^*) = k[x_1,\dots,x_n]$. A hipótese de que o Problema de Noether tenha solução positiva é precisamente: $Frac\, O(V^*)^W \cong k(x_1,\dots,x_n)$.

Estenda agora a ação de W para $A_n(k) = D(O(V^*))$. Denote por $\mathcal{B}$ a subalgebra de $A_n(k)^W$ gerada pelas suas subalgebras $O(V^*)^W = k[x_1,\dots,x_n]^W$ e $O(V)^W = k[\partial_1,\dots,\partial_n]^W$. Nós temos que cada elemento de $S = O(V^*)^W - \{0\}$ age de maneira ad-nilpotente em $A_n(k)$, e portanto em $A_n(k)^W$ e $\mathcal{B}$. Portanto, S é um conjuto de Ore à esquerda e à direita em ambas as álgebras, por [KL00], Thm. 4.9.

Relembremos um lema técnico:

Lema 4.6. *Seja L uma estensão de corpo finitamente gerada de k, com $tdeg_k\, L = l$. Seja R uma sub(k)álgebra de $D(L)$, contendo L; e induza nela uma filtração a partir daquela de $D(L)$, por*

ordem de operador diferencial. Se $gr\,R$ contém uma subalgebra B, finitamente gerada, graduada e L-álgebra, com $Kdim\,B = l$, então $R = D(L)$ ($Kdim$ é a dimensão de Krull).

Demonstração. [LS95], lemma 8. □

Chame $F = Frac\,O(V^*)^W$.

Teorema 4.11. ([FS18b], Lemma 4.2) $Frac\,A_n(k)^W \cong Frac\,D(F)$.

Demonstração. Nós temos $\mathcal{B} \subset A_n(k)^W$ por definição, e $A_n(k)^W \subset D(O(V^*)^W)$ por restrição de domínio. Após localizar por S temos:

$$\mathcal{B}_S \subset A_n(k)^W_S \subset D(O(V^*)^W)_S = D(F),$$

onde a última igualdade segue de $D(O(V^*)^W)_S = D(O(V^*)^W_S) = D(F)$, usando [Muh88], Proposition 1.8. Considere a filtração em $\mathcal{B}_S$ induzida daquela em $D(F)$. Como $O(V^*)^W \subset \mathcal{B}$, temos que $gr\,\mathcal{B}_S$ contém $F \otimes O(V^*)^W$ como uma F-subálgebra. Como a dimensão de Krull de um anel de polinômios em n variáveis é n e $O(V^*)$ é módulo finito sobre $O(V^*)^W$, essa subálgebra também tem dimensão de Krull n ([MR01]). Portanto, podemos aplicar o lema acima, e assim $\mathcal{B}_S = D(F)$. Concluímos que $D(F) \subset A_n(k)^W_S \subset D(F)$, o que nos dá o que queríamos. □

Observação. *Note que não usamos a igualdade $\mathcal{B} = A_n(k)^W$, apenas que $\mathcal{B} \subset A_n(k)^W$.*

Finalmente:

Corolário 4.1. ([FS18b], Thm 4.4) *O Problema de Noether impllica o Problema de Noether Não-Comutativo para uma ação linear de um grupo finito W.*

Demonstração. De fato, neste caso, F é uma extensão puramente transcedental, e portanto $Frac\,A_n(k)^W \cong Frac\,D(k(x_1, \ldots, x_n)) \cong Frac\,A_n(k)$. □

Corolário 4.2. ([FS18b], Corol. 4.5)

- *O Problema de Noether Não-Comutativo tem solução positiva para a ação por permutação dos grupos alternantes $\mathcal{A}_i, i = 3, 4, 5$.*
- *O Problema de Noether Não-Comutativo tem solução positiva para $n = 3$ e k algebricamente fechado.*

Finalizamos esta seção com dois problemas.

Problema. (Schwarz) *Encontrar um contraexemplo para o Problema de Noether Não-Comutativo, ou seja, um grupo finito G que age linearmente na álgebra de Weyl tal que $D_n(k)^G$ não seja um corpo de Weyl.*

Problema. (Schwarz) *Encontrar um grupo finito G com ação linear de forma que o Problema de Noether tenha solução negativa, mas o Problema de Noether Não-Comutativo tenha solução positiva; ou provar que eles são equivalentes.*

4.5 Corpos de Frações de Anéis de Operadores Diferenciais

Nesta seção discutiremos uma significativa generalização do resultado da seção anterior no caso em que $k = \mathbb{C}$. Como aplicação, obteremos nosso resultado sobre o corpo de anéis de operadores diferenciais no toro de [EFOS17] como corolário.

Começamos esta seção com uma seguinte observação: se X é uma variedade suave, é bem conhecido que $D(X)$ admite anel de frações no sentido de Ore, como segue do Teorema 1.1. No caso dela ser singular isso também é válido. Seja $B = O(X)$ e $L = Frac\,B$. Nós podemos realizar $D(B)$ como uma subálgebra de $D(L)$: consiste dos $d \in D(L)$ tais que $d(B) \subset B$ ([MR01], 15.5.5(iii)). Como

L é regular, pelo Teorema 1.1, temos que $D(B)$ é uma subálgebra de um domínio não-comutativo de dimensão de Gelfand-Kirillov finita; portanto o mesmo vale para $D(B)$. Agora, basta aplicar um resultado de Jategaonkar ([KL00], Prop. 4.13).

Lema 4.7. ([FS18b], Lemma 3.2) *Seja X é uma variedade afim irredutível e G um grupo de automorfismos finito de X. Suponha que X/G seja birracionalmente equivalente a uma varieade afim irredutível Y. Então se X satisfaz alguma das condições do Teorema 4.3, item 2, $Frac\, D(X)^G \cong Frac\, D(Y)$.*

Demonstração. Seja S o conjunto de elementos regulares em $O(X)^G$. Como X é irredutível, $O(X)^G$ é um domínio; como X/G é birracional a Y, então $O(X)^G_S = Frac\, O(X)^G \cong Frac\, O(Y)$. Então $Frac\, D(X)^G \cong Frac\, D(X/G) \cong Frac\, D(X/G)_S \cong Frac\, D(O(X)^G_S) \cong Frac\, D(Frac\, O(Y)) \cong Frac\, D(Y)$. Usamos o resultado sobre localização do Capítulo 1, Proposição 1.2. □

Teorema 4.12. ([FS18b], Thm 1.2) *Seja X uma variedade afim irredutível e G um grupo finito de automorfismos de X. Se X/G é birracionalmente equivalente a uma variedade afim irredutível Y, então $Frac\, D(X)^G \cong Frac\, D(Y)$.*

Procederemos em etapas: pelo Teorema 4.3, existe um aberto V onde a ação de G se restringe e é livre, e $\pi : X \to X/G$ se restringe a um mapa quociente $\pi : V \to V/G$, onde V/G é um aberto denso de X/G. Pelo teorema de Hilbert-Noether, este morfismo é finito, e logo ele é afim ([Har77], Exercício 5.17). Seja W um aberto principal de X/G contido em V/G, e seja $U = \pi^{-1}(W)$. U é afim, e como é uma união de órbitas, G age de maneira livre em U. Logo, temos um mapa quociente $\pi : U \to W$; e W sendo aberto em X/G, é birracional a Y. Assim:

Lema 4.8. $Frac\, D(U)^G \cong Frac\, D(Y)$.

Demonstração. Basta aplicar o lema 4.7. □

Lema 4.9. *Seja U o aberto denso acima. Então existe um polinômio G-invariante f tal que o aberto principal $Spec\, O(X)_f$ está contido em U. Note que, como f é G-invariante, esse aberto é G-invariante, e portanto a ação é livre.*

Demonstração. Existe um polinômio h tal que $Spec\, O(X)_h \subset U$, uma vez que os abertos principais formam uma base da topologia de Zariski. Basta considerar o elemento $f = \prod_{g \in G} g(h)$. □

Considere agora a inclusão $Spec\, O(X)_f \subset U \subset X$. Como a variedade é integral, nós temos, aplicando o funtor contravariante $D(.)$ do feixe de operadores diferenciais, a inclusão $D(X) \subset D(U) \subset D(X)_f$ ([Liu02], Pro. 2.4.18 (c)). Tomando invariantes por G, se tem: $D(X)^G \subset D(U)^G \subset (D(X)_f)^G = (D(X)^G)_f$. Tomando o corpo de frações: $Frac\, D(X)^G \subset Frac\, D(U)^G \subset Frac\, D(X)^G$. Logo, $Frac\, D(X)^G = Frac\, D(U)^G \cong Frac\, D(Y)$. Assim, a demonstração de Teorema 4.12 está completa.

Observação. *Analisando a prova em detalhes, acreditamos que ela funcione para qualquer corpo k algebricamente fechado — talvez com algumas hipóteses simples sobre sua cardinalidade, se necessário.*

Observação. *Note que, em particular, no caso complexo, o resultado acima demonstra novamente a nossa Conjectura, com a vantagem de que temos um entendimento geométrico na demonstração.*

Em [EFOS17], discutimos também uma versão do Problema de Noether para certas ações dos grupos de Weyl clássicos no anel de operadores diferenciais no n-toro. Seu anel de funções regulares é $\mathbb{C}[x_1^{\pm}, \ldots, x_n^{\pm}]$, e ele tem n automorfismos naturais $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$, agindo da seguinte forma: ϵ_i manda x_i para $-x_i^{-1}$ e fixa x_j quando $j \neq i$. Tais automorfismos são estendidos naturalmente (por conjugação) para $\widetilde{A_n(\mathbb{C})}$, o anel de operadores diferenciais no toro, de forma que $\epsilon_i(\partial_i) = x_i^2 \partial_i$ e fixa ∂_j quando $j \neq i$. Como $\widetilde{A_n(\mathbb{C})}$ é a localização da álgebra de Weyl por $x_1, \ldots, x_n$, a descrição dos automorfismos

ϵ_i está completa. Nós podemos, assim, considerar uma ação de $\mathbb{Z}_2^n$ em $\widetilde{A_n(\mathbb{C})}$ — a base de $\mathbb{Z}_2^n$ será os automorfismos $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$. Temos também, pela permutação usual de variáveis, uma ação de S_n em $\widetilde{A_n(\mathbb{C})}$, e tomando o produto semiderto $\mathbb{Z}_2^n \rtimes S_n$, obtemos uma ação do grupo de Weyl $B_n(= C_n)$. Restringindo para o subgrupo óbvio, obtemos também uma ação de D_n.

Proposição 4.6. *Seja $O(\mathbb{T}^n)$ o anel de funções regulares no toro.*

- *$O(\mathbb{T}^n)^{B_n}$ é uma álgebra polinomial gerada por $e_i(x_1+x_1^{-1}, \ldots, x_n+x_n^{-1}), i = 1, \ldots, n$, onde os e_i são os polinômios simétricos elementares. Em particular, $\mathbb{T}^n/B_n$ é isomorfico a um espaço afim de dimensão n.*
- *Existe um polinômio de Laurient B_n-invariante Δ tal que, sendo Z o conjunto Zariski-fechado onde ele se anula, a ação de B_n se restringe a uma ação livre em $U = \mathbb{T}^n - Z$; U é afim: $Spec\,\Gamma_\Delta$, onde chamamos $\Gamma = O(\mathbb{T}^n)$.*

Demonstração. [EFOS17], Proposition 2. □

Para D_n as coisas são um pouco mais complicadas. Os detalhes completos estão em [EFOS17], Proposition 3. Vamos anotar apenas o necessário.

Proposição 4.7. *$O(\mathbb{T}^n)^{D_n}$ é isomórfico a uma localização da álgebra de polinômios em n variáveis; existe um polinômio de Laurient Δ que é D_n invariante e tal que, sendo Z seu conjunto de zeros, D_n tem sua ação restringida a uma ação livre no aberto $U = \mathbb{T}^n - Z$. U é afim: $Spec\,\Gamma_P$, onde chamamos $\Gamma = O(\mathbb{T}^n)$, e P é um polinômio de Laurient adequado.*

Teorema 4.13. ([EFOS17], Theorem 3) *$Frac\,\widetilde{A_n(\mathbb{C})}^{W_n} \cong D_n(\mathbb{C})$, quando $W_n = B_n, D_n, S_n$.*

Demonstração. Como $O(\mathbb{T}^n)^{W_n}$ é birracional ao espaço afim em todos os casos, basta aplicar o Teorema 4.12. □

4.6 Aplicação para Álgebras Racionais de Cherednik

Vamos usar a solução positiva do Problema de Noether Não-Comutativo para grupos de reflexão unitários para uma versão da Conjectura de Gelfand-Kirillov para as álgebras racionais de Cherednik. Para as suas aplicações em diversas áreas da matemática e matemática física, assim como as suas generalizações — as álgebras de reflexão simpléticas — nós colocamos como referência o trabalho original [EG02].

Seja W um grupo finito de reflexões unitárias agindo num espaço vetorial complexo de dimensão finita h. Seja S seu conjunto de reflexões e, para cada $s \in S$, escolha $\alpha_s \in h*$ e $\alpha_s^\vee \in h$ de forma que α_s seja um autovetor de λ_s (o autovalor não trivial de s em $h*$); e $\alpha_s^\vee$ seja um autovetor de λ_s^{-1} (o autovalor não trivial de s em h). Por simplicidade nós normalizaremos os vetores no pareamento natural $h* \times h$ de forma que $(\alpha_s, \alpha_s^\vee) = 2$. Seja $c : S \to \mathbb{C}$ uma função invariante por conjugação por elementos de W.

Considere a álgebra $H_{c,t}(W,h), t \neq 0$, dada pelo quociente de $\mathbb{C}W \ltimes T(h \oplus h*)$ pelas relações:

$$[x, x'] = [y, y'] = 0;\ [y, x] = ty(x) - \sum_{s \in S} (y, \alpha_s)(x, \alpha_s^\vee)s,$$

com $x, x' \in h*, y, y' \in h$.

$H_{c,t}(W,h)$ é a chamada de álgebra racional de Cherednik.

Teorema 4.14. (Mergulho de Dunkl) *Existe um mergulho de $H_{c,t}(W,h)$ em $D(h^{reg}) * W$, onde h^{reg} é h com os hiperplanos associados às pseudorreflexões removidos.*

Demonstração. [EM10], Remark 3.6. □

Definição 4.3. *Seja* $e = 1/|W| \sum_{w \in W} w \in H_{c,t}(W,h)$ *e* $U_{c,t}(W,h) = eH_{c,t}(W,h)e$. *Essa álgebra é chamada subálgebra esférica (da álgebra de Cherednik racional).*

Observação. *Tudo que fizemos até agora pode ser feito com* $t = 0$. *Contudo, neste caso, a subálgebra esférica seria comutativa, o que não nos interessa ([EM10], Proposition 3.8).*

Corolário 4.3. *O mergulho de Dunkl da álgebra racional de Cherednik se restringe a um mergulho de* $U_{c,t}(W,h)$ *em* $D(h^{reg})^W$, *e tal mergulho é uma equivalência birracional.*

Demonstração. [EM10], Proposition 3.12. □

Com este corólario, segue imediatamente dos nossos resultados do Problema de Noether Não-Comutativo para grupos de reflexões unitários:

Teorema 4.15. ([EFOS17], Theorem 5) *O corpo total de frações de* $U_{c,t}(W,h)$, *independentemente da escolha de* c *e* t, *é isomórfico a* $D_n(\mathbb{C})$, *onde* $n = dim\, h$.

Na verdade, como vimos, $D(h^{reg})^W$ é apenas uma localização de $D(h)^W$. Então mais pode ser dito:

Corolário 4.4. *O Problema de Noether Não-Comutativo para grupos de reflexão unitários e a Conjectura de Gelfand-Kirillov para subálgebras esféricas são equivalentes.*

4.7 Notas e Referências

Este capítulo é uma exposição do material em [Sch15b], [EFOS17], [FS17] e [FS18b], mas com uma organização lógica distinta — especialmente referente ao Problema de Noether para anéis de operadores diferenciais no toro. Temos também alguns enunciados que não constam nos artigos anteriores. A abordagem do Conjectura de Gelfand-Kirillov para sublgebras esféricas difere daquele em [EFOS17] - mais detalhes são apresentados. Agradecemos a Jacques Alev pela contribuição importante, por meio de valiosas discussões.

Capítulo 5

Invariantes de operadores diferenciais: categorias de Gelfand-Tsetlin

Não será possível dar as referências bibliográficas completas, nessa introdução, às ideias que geraram a teoria de Álgebras de Galois (para manter a já grande bibliografia desta tese menor que $\aleph_0$). Para a história completa, nos referimos a [FO10], [FO14] e ao survey [Fut18]. A ideia principal por trás da teoria de álgebras e Galois é mergulhar uma álgebra associativa em um anel de grupo torcido, para iluminar aspectos de sua teoria de representações. Essa ideia se originou no trabalho de Block [Blo81], onde ele classificou *todos* os módulos irredutíveis sobre $A_1(\mathbb{C})$ e $U(sl_2)$ (sobre os complexos). A ideia consiste, essencialmente, via este mergulho, associar todos os módulos simples a elementos irredutíveis no anel de polinômios torcido de uma variável sobre um anel de divisão. Posteriormente, resultados similares foram obtidos para outras álgebras de Weyl generalizadas de dimensão de Gelfand-Kirillov pequena (ver as referências em [FO10], [FO14], [FS17]). Apesar do interesse óbvio, existe uma grande obstrução em estender essa técnica para álgebras de Lie simples de posto maior que 1. Contudo, de maneira independente, Khomenko [Kho05] e Futorny e Ovsienko [FO06] obtiveram um nergulho de $U(gl_n)$ (e $U(sl_n)$) em invariantes de um anel de grupo torcido sob a ação de produtos do grupo simétrico. Este foi foi o ponto de partida para o desenvolvimento da teoria de estrutura e representações de álgebras de Galois, levada a cabo em [FO10] e [FO14]. A teoria de estrutura é extremamente rica, e é uma generalização da teoria clássica de ordens ([MR01], Cap. 3.1, Cap 5.3). A teoria de representações generaliza aquela de módulos de Gelfand-Tsetlin para gl_n, e busca uma aparato conceitual unificado para resultados de álgebras de Lie simples e álgebras de Weyl generalizadas. Mais precisamente, essa teoria pode ser vista como uma continuidade da teoria inciada por Drozd, Futorny e Ovsienko em [DFO94], à respeito de categorias de Harish-Chandra, no caso específico em que a subálgebra em que se fará os argumentos de indução e restrição é comutativa. Nós usaremos a teoria de módulos de Gelfand-Tsetlin gl_n como ilustração do poder conceitual da teoria de álgebras e ordens de Galois, dando vários exemplos de aplicações ao longo deste Capítulo. Contudo, nosso foco será em anéis de operadores diferenciais e álgebras de Weyl Generalizadas — onde obtemos a maior parte dos resultados inéditos.

Encerramos essa introdução com uma grande lista de álgebras conhecidas como sendo de Galois, e comentamos que as adequadas versões (clássica ou quantizada) da Conjectura de Gelfand-Kirillov valem para todas (o que é provado em [FMO10], [FH14] e nesta tese — que também devidamente aumenta significativamente o tamanho da lista de álgebras de Galois conhecidas). O corpo base é sempre algebricamente fechado de característica 0:

- GWA's sobre domínios de integridade com automorfismso de ordem infinito, como: as álgebras de Weyl, o plano quântico, a deformação quântica da álgebra de Heisenberg, a quantizações da Álgebra de Weyl, a álgebra de Witten-Woronowicz, etc ([FO10]).
- A álgebra universal envolvente $U(gl_n)$ ([FO10]).
- "Shifts"de Yangianos e W álgebras finitas associadas a gl_n ([FMO10]).

- O grupo quântico $U_q(gl_n)$ ([FH14]).
- Certos invariantes de anéis de operadores diferenciais sobre o toro ([FO10]).

Revisitaremos vários destes exemplos neste capítulo.

5.1 Álgebras de Galois: Definição e estrutura

Todos os anéis considerados a partir de agora serão álgebras sobre um corpo algebricamente fechado, de característica 0, k.

Seja K um corpo, L uma extensão de Galois finita de K, com $G = Gal(K/L)$. Seja $\mathfrak{M} \subset Aut_k L$ um monóide que age em L por automorfismos. Suporemos que tal monóide possui a seguinte propriedade:

Definição 5.1. *Nós dizemos que, nas condições acima, o monóide $\mathfrak{M}$ possui a propriedade de separação se, dados $m, m' \in \mathfrak{M}$, $m|_K = m'|_K$ implica em $m = m'$.*

Observação. *Uma condição necessária para a propriedade de separação é $\mathfrak{M} \cap G = \{id\}$. Se $\mathfrak{M}$ é um grupo, ela é suficiente ([FO10], Lema 2.2).*

Iremos supor também que existe uma ação de G em $\mathfrak{M}$, e que esta se dá por conjugação: $g.m(l) = g(m(g^{-1}(l)))$, $g \in G, m \in \mathfrak{M}, l \in L$. Desta forma, é fácil ver que temos uma ação de G no anel de grupo torcido $L * \mathfrak{M}$, dada por: $g(lm) = g(l)g.m$, $g \in G, l \in L, m \in \mathfrak{M}$. Chamemos o anel de invariantes pela ação deste grupo de $\mathfrak{K}$.

Definição 5.2. *Seja Γ um domínio finitamente gerado sobre k tal que $Frac\,\Gamma = K$. Uma álgebra finitamente gerada sobre Γ, U, e contida em $\mathfrak{K}$, é chamada de uma álgebra de Galois se $KU = UK = \mathfrak{K}$. Nós denotaremos o fecho integral de Γ em L por $\overline{\Gamma}$.*

Temos a seguinte condição necessária, que será utilizada todo o tempo, para decidir quando um Γ-anel U é uma álgebra de Galois, supondo $U \subset \mathfrak{K}$. Cada elemento x de $\mathfrak{K}$ (em particular cada elemento de U) pode ser escrito da forma $x = \sum_{m \in \mathfrak{M}} x_m m$. Denotemos por $supp\, x$ o conjunto dos m tais que x_m é não nulo.

Proposição 5.1. ([FO10], Proposition 4.1) *Seja U um Γ-anel contido em $\mathfrak{K}$ e gerado (sobre Γ) por $u_1, \ldots, u_k$. Se $\bigcup_{i=1}^k supp\, u_k$ gera $\mathfrak{M}$ como monóide, então U é uma álgebra de Galois.*

Ssaremos esta proposição frequentemente da seguinte forma. Inicialmente, iremos re-enunciar, de uma maneira mais conveniente, o Teorema de Montgomery e Small (Teorema 3.2):

Teorema 5.1. *Seja U uma k álgebra Noetheriana à esquerda e à direita, finitamente gerada. Seja G um grupo finito de automorfismos de álgebra de U. Então U^G é uma k-álgebra finitamente gerada.*

Lema 5.1. *Seja U um Γ-anel contido em $\mathfrak{K}$, finitamente gerado e com elementos $u_1, \ldots, u_k$ tais que $\bigcup_{i=1}^k supp\, u_k$ gera $\mathfrak{M}$ como monóide. Então U é uma álgebra de Galois.*

Demonstração. Ora, um conjunto finito de geradores de U como álgebra, unido com $u_1, \ldots, u_l$, resulta em outro conjunto finito de geradores de U como álgebra. O resultado segue da Proposição 5.1. □

Vamos as principais propriedades estruturais das álgebras de Galois:

Teorema 5.2. *Seja U um Γ-anel contido em $\mathfrak{K}$.*

- *$KU = \mathfrak{K}$ é equivalente a $UK = \mathfrak{K}$;*
- *Suponha U uma álgebra de Galois. $U \cap K$ é uma subálgebra comutativa maximal em U;*

- *Suponha U uma algebra de Galois. Seja $S = \Gamma - \{0\}$. Então $U_S \cong \mathfrak{K}$; o mesmo vale para sua localização à esquerda.*

Demonstração. [FO10], Lema 4.1, Theorem 4.1, Proposition 4.2 □

O último item é de extrema importância. Toda álgebra de Galois U em $\mathfrak{K}$ terá o mesmo anel de quocientes — a saber, o de $\mathfrak{K}$. Realizações de álgebras associativas como álgebras de Galois portanto permitem uma estratégia para calcular seus anéis de frações (ver [FMO10], [FH14], [Har17b]).

Iremos discutir aqui, em particular, aplicações da Conjectura de Gelfand-Kirillov para álgebras de Lie.

Na Teoria de álgebras de Galois, nós frequentemente as mergulhamos em *álgebras de operadores de shift*: $\mathbb{S} = \mathbb{C}(t_1, \ldots, t_n) * \mathbb{Z}^n$, onde a base canônica do grupo será chamada de $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, com ação $\sigma_i(t_j) = t_i - \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Existe uma ação dos grupos de Weyl S_n, B_n, D_n em $\mathbb{S}$, que será chamada de *natural*, da seguinte forma: S_n permuta as variáveis t_i da maneira usual, e age por conjugação em $\mathbb{Z}^n$, o que resulta, de maneira esperada, em: $\pi(\sigma_i) = \sigma_{\pi(i)}$, $\pi \in S_n, i = 1, \ldots, n$. Chamando novamente a base de $\mathbb{Z}_2^n$ de $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$, nós também temos uma ação por conjugação na base de $\mathbb{Z}^n$: $\epsilon_i(\sigma_j) = \sigma_j^{-1}$, $\epsilon_i(\sigma_j) = \sigma_j, j \neq i$. A ação em $\mathbb{C}(t_1, \ldots, t_n)$ é um pouco diferente da usual: $\epsilon_i(t_i) = 2 - t_i, \epsilon_i(t_j) = t_j, i \neq j$. Com esses automorfismos, é claro como definir as ações de B_n e D_n.

Usando o Teorema de Noether Não-Comutativo para o Toro (Teorema 4.13), e o último item destacado do teorema acima, é fácil deduzir ([EFOS17], Lemma 2, Lemma 3):

Teorema 5.3. ([EFOS17], Theorem 6) *Seja U uma álgebra de Galois em $L * \mathfrak{M}^G$ tal que:*

- *$L = \mathbb{C}(t_{ij}, i = 1, \ldots, N; j = 1, \ldots, n_i; z_1, \ldots, z_m)$ para inteiros $m, n_1, \ldots, n_N$.*
- *$G = G_1 \times \ldots \times G_N$; cada G_s é um grupo de Weyl clássico que age naturalmente apenas nas variáveis $t_{s1}, \ldots, t_{sn_s}$, $s = 1, \ldots, N$, fixando as demais..*
- *$\mathfrak{M} = \mathbb{Z}^n$ atua por* shifts *em $t_{11}, \ldots, t_{N,n_N}$, $n = n_1 + \ldots + n_N$; e cada G_i atua por conjugação em sua parte correspondente em $\mathbb{Z}^n$.*

Então U tem anel de frações $Frac\, A_n(\mathbb{C}(z_1, \ldots, z_m))$.

Um exemplo de álgebras que satisfazem a condição acima são as álgebras de Galois lineares:

Definição 5.3. *Seja G um produto direto de grupos de Weyl clássicos agindo num espaço vetorial V complexo de dimensão finita n e, portanto, em $L = Frac\, S(V^*)$. Seja $K = L^G$; ele é claramente um corpo racional. Nós temos uma álgebra de Galois linear exatamente no caso de uma álgebra de Galois com $Frac\, \Gamma = K$, K e L nas condições acima.*

As álgebras que satisfazem as condições do teorema acima são exatamente as álgebras de Galois lineares com $\mathfrak{M} \cong \mathbb{Z}^n$ agind por shifts, e incluem diversos exemplos conhecidos de álgebras de Galois ([EFOS17], Section 6) . Em particular, em [FO06], [FMO10], foram obtidos mergulhos de $U(gl_n)$ e $U(sl_n)$ em invariantes de álgebras de operadores shift por ações de produtos de grupos simétricos. A ideia por trás disso é a teoria de Módulos de Gelfand-Tsetlin e seus tableaux (como desenvolvida, por exemplo, em [DFO94]), e um passo crucial é a conexão entre a subalgebra de Gelfand-Tsetlin com invariantes de uma álgebra polinomial (Teorema 1.3). Em particular, a teoria de álgebras de Galois permite uma nova prova para a Conjectura de Gelfand-Kirillov para tais álgebras. Na verdade, mais informação pode ser obtida. Como pode ser visto em [FO06] ou [FMO10], é possível obter uma forma mais explícita para o mergulho birracional de $U(gl_n)$ numa álgebra associatiava adequada: a saber, em $A_1'(k)^{S_1} \otimes \ldots \otimes A_{n-1}'(k)^{S_{n-1}} \otimes k[t_1, \ldots, t_n]^{S_n}$, em que $A_i'(k)$ é uma localização da álgebra de Weyl. Dada a forma dessa equivalência birracional, não é difícil ver o notável:

Corolário 5.1. ([FO06]) *A Conjectura de Gelfand-Kirillov para gl_n é equivalente ao Problema de Noether Não-Comutativo para S_n.*

O Teorema 2 também tem implicações para as álgebras de Lie ortogonais e simpléticas. Elas também também tem uma teoria de tableau de Gelfand-Tsetlin, e compartilham de várias das propriedades de gl_n que foram utilizadas na sua realização como álgebra de Galois ([Mol06]; [Maz01] para o caso específico das álgebras ortogonais). Contudo, as fórmulas e padrões de Gelfand-Tsetlin são muito mais complexos. Além disso, o Teorema 2 indica dificuldades esperadas numa eventual realização como álgebra de Galois - isto implicaria a Conjectura de Gelfand-Kirillov caso a realização fosse "natural"como a de gl_n. Isto permance uma expectativa interessante para resolver o caso em aberto das álgebras de Lie de tipo C. Contudo, sabemos que a Conjectura é falsa para as álgebras de Lie ortogonais. Portanto, alguma engenhosidade é necessária para sua realização como álgebra de Galois. Ainda assim, é conjecturado que ela possua tal estrutura, e isso também iluminaria a questão de Gelfand-Kirillov para $U(L)$, onde L é ortogonal: o resultado de Premet ([Pre10]) mostra apenas que o seu anel de frações não é um corpo de Weyl; ele não dá uma forma explicita para o anel de frações. Uma realização de $U(L)$ como álgebra de Galois resolveria este problema.

Vamos introduzir algumas propriedades adicionais que uma álgebra de Galois pode ter. Elas revelaram ter extrema importância na sua teoria de representações.

Definição 5.4. *Seja U uma álgebra de Galois sobre Γ em $\mathfrak{K}$. Se para todo espaço vetorial de dimensão finita à esquerda (direita) W sobre K em $\mathfrak{K}$, nós temos que $W \cap U$ é um Γ-módulo finitamente gerado à esquerda (direita), então U é chamada de uma ordem de Galois à esquerda (direita). Caso seja ambos, dizemos apenas ordem de Galois. Se para todo $u \in U$, $\Gamma u \Gamma$ é finitamente gerado tanto à esquerda quanto à direita como Γ-módulo, dizemos que Γ é uma subálgebra de Harish-Chandra.*

Observação. *A noção de subálgebra de Harish-Chandra, como fica claro, independe do mergulho de U num anel de monóides torcido. De fato, essa noção predata a teoria de álgebras de Galois, tendo sido desenvolvida por Drozd, Futorny e Ovsienko em [DFO94], sem a necessidade de comutatividade, com o intuito de generalizar o conceito de módulos de Harish-Chandra, como desenvolvido, por exemplo, em [Dix74]. Em [Maz01], é provado, por exemplo, que a subálgebra de Gelfand-Tsetlin de $U(L)$, para L simples ortogonal, é de Harish-Chandra; e também que ela é maximal. Notamos que isto são indícios que apontam para a sua possível realização como ordem de Galois, mencionada acima.*

Se seguem algumas proposições úteis para identificar quando temos uma ordem de Galois, ou quando Γ é Harish-Chandra.

Proposição 5.2. *Se U é um Γ-módulo projetivo à esquerda (direita), com Γ Noetheriana, então ela é uma ordem de Galois à esquerda (direita).*

Demonstração. [FO10], Corollary 5.2 □

Proposição 5.3. *Seja U uma álgebra de Galois sobre Γ, finitamente gerada como k álgebra, em $\mathfrak{K}$. Então Γ é Harish-Chandra se, e somente se, $m\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma}$, para todo $m \in \mathfrak{M}$.*

Demonstração. [FO10] Proposition 5.1 □

Proposição 5.4. *Se U é uma ordem de Galois sobre Γ, finitamente gerada como k álgebra, então Γ é uma subálgebra de Harish-Chandra.*

Demonstração. [FO10] Corol. 5.4. □

Vamos exemplificar as propriedades estruturais das ordens de Galois com alguns resultados. É um resultado bastante folclórico que, em $U(gl_n(k))$, a subalgebra de Gelfand-Tsetlin é maximal. A primeira prova completa obtida deste fato foi por Ovsienko em [Ovs02]. Contudo, a prova é bastante complexa. Com a teoria de ordens de Galois, a demonstração fica extremamente simples.

Comecemos com uma proposição:

Lema 5.2. *Suponha que U seja uma ordem de Galois sobre um Γ integralmente fechado. Então Γ é uma subálgebra comutativa maximal de U.*

Demonstração. Sabemos que $U \cap K$ é uma subálgebra comutativa maximal. Pela definição de ordem de Galois, nós temos que $U \cap K$ é um módulo finitamente gerado sobre Γ, e como esta é integralmente fechada, que $U \cap K = \Gamma$. □

Como vimos, $U(gl_n)$ é uma álgebra de Galois sobre sua subalgebra de Gelfand-Tsetlin Γ, e esta é polinomial (Capítulo 1, seção 3). Pela Proposição 5.2 e o Teorema 1.4, $U(gl_n)$ é uma ordem de Galois, e o resultado acima implica a maximalidade de Γ como subálgebra comutativa.

5.2 Fibras e Módulos de Gelfand-Tsetlin para Ordens de Galois

Nós vamos assumir que $U \subset \mathfrak{K}$ seja uma álgebra de Galois e que Γ seja finitamente gerada e Harish-Chandra. Nessas condições, temos a fundamental definição:

Definição 5.5. (Módulos de Gelfand-Tsetlin) *Um módulo M à esquerda finitamente gerado sobre U é chamado de* Gelfand-Tsetlin *sobre Γ se a restrição $M|_\Gamma$ se decompõe como soma direta:*

$$M|_\Gamma = \bigoplus_{m \in Specm\,\Gamma} M(m),$$

onde $M(m) = \{x \in M | m^{k_x} x = 0, k_x > 0 \in \mathbb{N}\}$.

A categoria dos módulos de Gelfand-Tsetlin de U sobre Γ, denotada por $GT(U, \Gamma)$ possui boas propriedades; e inclui o caso usual da teoria de gl_n, como vimos na seção anterior. A saber, $GT(U, \Gamma)$ possui uma decomposição natural em blocos, e é uma subcategoria abeliana e extensionalmente fechada de $Mod - U$ ([FO14], Section 3).

Contudo, mais importante para nós será analisar como ideias maximais de Γ se extendem para módulos irredutíveis em $GT(U, \Gamma)$. O resultado que buscamos é, digamos, inspirado no seguinte, de álgebra comutativa:

Proposição 5.5. *Sejam A, B álgebras comutativas finitamente geradas, com $A \subset B$, B integral sobre A. Considere o mapa $\Phi : Specm\,B \to Specm\,A$: ele tem fibras não vazias; se B é um de tipo finito sobre A, as fibras são todas finitas.*

Demonstração. Este é mais um exemplo de resultado bem conhecido cuja demonstração é simples. Isso significa que não é tão fácil encontrar a demonstração na literatura, e eu a incluo aqui: para o primeiro item, basta usar o teorema "Going Up"de álgebra comutativa (Teorema 0.2), e o seguinte fato: se m é um ideal maximal de A e M um ideal primo de B tal que $M \cap A = m$, então M também é maximal (Corolário 0.1). Para o segundo item, considere m um ideal maximal de A, e substitua A por $F = A/m$ e B por B/mB. O que nós queremos provar agora é que $Spec\,B$ é finito e constituído apenas por ideais maximais. Se p é um ideal primo de B, então B/p é integral sobre F e, portanto, um corpo (Teorema 0.1) e, portanto, p é maximal. Então $Spec\,B = Specm\,B =$ conjunto dos ideais primos minimais de B, o que implica que B é artiniano e $Specm\,B$ é finito (Teorema 0.3). □

Como existe uma correspondência entre ideais maximais e caractéres em álgebras comutativas finitamente geradas sobre um corpo algebricamente fechado, este é um resultado, dito de outra forma, de extensão de caracteres $\chi \in Hom_k(A, k)$ para cacteres em B; e a finitude de tais extensões. Esse é um resultado de teoria de representações, essencialmente.

No nosso caso, a situação é como se segue. A inclusão $\Gamma \subset U$ induz, por restrição, um funtor da categoria de módulos finitamente gerados em $Mod - U$ para $GT(U, \Gamma)$. Isso é equivalente a uma função multivaluada ϕ que associa, para cada $m \in Specm\,\Gamma$, o conjunto $\phi(m)$ de $left - Specm\,U$ de ideais à esquerda maximais que contém m. Isto nada mais são do que as fibras do mapa induzido $\Phi : left - Specm\,U \to Specm\,\Gamma$.

O resultado fundamental é que, sob condições adequadas, elas tem bom comportamento.

Seja m um ideal maximal em Γ e l_m uma extensão sua para $\overline{\Gamma}$ (é um fato bem conhecido de álgebra comutativa que eles são finitos em número, e.g., [FO14] Corol 2.2). Seja M_m o estabilizador de l_m pela ação de $\mathfrak{M}$. M_m será um grupo, definido unicamente a menos de conjugação por G, e portanto sua cardinalidade é bem definida.

Nossos principais teoremas sobre fibras são os seguintes:

Teorema 5.4. (Teorema Principal da Teoria de Ordens de Galois) *Seja Γ uma álgebra finitamente gerada, domínio, e U uma ordem de Galois à direita sobre Γ. Seja $m \in Specm\,\Gamma$, com $\mathfrak{M}_m$ de cardinalidade finita. Então:*

- *A fibra $\phi(m)$ é não-vazia;*
- *Se U, além disso, é uma Ordem de Galois sobre Γ, $\phi(m)$ é finita.*

Demonstração. [FO14], Main Theorem. □

Existe também uma interessante identificação, por meio de módulos, de quando uma álgebra de Galois é uma ordem:

Proposição 5.6. *Sejam U e Γ, nas mesmas hipóteses do teorema anterior, com a adição de que: $m(\Gamma) \subset \overline{\Gamma}$, para todo $m \in \mathfrak{M}$. Então U é uma ordem de Galois à esquerda sobre Γ se, e somente se, todo a fibra de todo ideal $m \in Specm\,\Gamma$ com relação ao mapa Φ é não-nula (e de maneira análoga à direita, com as modificações necessárias).*

Demonstração. [FO14], Corol 4.9. □

Finalmente, em [FO14] existe um teorema (a saber, 4.12), que permite encontrar limitantes para, dado $m \in Specm \in \Gamma$, nas condições do Teorema acima, do número de classes de isomorfismos de módulos simples em $GT(U, \Gamma)$ com $N(m)$ não-nulos; e também limitantes para a dimensão (sobre k) de $N(m)$. No caso de U ser livre sobre Γ, tais estimativas são bastante efetivas ([FO14], Teo. 4.12 (c)).

Esse caso se aplica a teoria de módulos de Gelfand-Tsetlin para gl_n, permitindo obter uma versão mais precisa daqueles obtidos por Ovsienko em [Ovs02]: ambos os números são limitados por $1!2!\ldots n!$ ([FO14], Corol. 5.3).

Aproveito aqui a oportunidade para apresentar a prova de um resultado sempre mencionado, mas cuja prova escrita desconheço: a categoria de módulos de Gelfand-Tsetlin para gl_n contém a Categoria BGG ([Hum08]) (e portanto é uma categoria maior onde o problema de classificação de módulos irredutíveis é acessível). A prova não é difícil:

Demonstração. Em geral, não é verdade que todo módulo de peso irredutível para a subálgebra de Cartan seja de Gelfand-Tsetlin. Contudo, quando os espaços de peso são de dimensão finita, este é o caso, pois Γ tem um autovetor comum em todo espaço de peso não-nulo. Portanto, todo módulo de peso máximo, e em particular, todo módulo da categoria BGG, é um módulo de Gelfand-Tsetlin □

Um último resultado que iremos mencionar sobre a teoria de representações de Ordens de Galois, e que generaliza o importantíssimo teorema de Harish-Chandra ([Dix74]) para álgebras de Lie de dimensão finita simples (generalizado para módulos de Gelfand-Tsetlin genéricos no caso gl_n em [DFO94] e ortogonal em [Maz01]):

Teorema 5.5. *Seja U uma Ordem de Galois e $u \in U$ não nulo. Então existe um conjunto massivo $\Omega_u \subset Specm\,\Gamma$ tal que para todo $m \in \Omega_u$,a imagem de u é não-nula em U/Um.*

Demonstração. [FO14], Prop. 4.5. □

Observação. *Um conjunto numa variedade afim é chamado de massivo se ele contem a intersecção de um conjunto enumerável de abertos. Caso k seja não-enumerável, um conjunto massivo é Zariski-denso.*

5.3 Invariantes de Anéis de Operadores Diferenciais

Nessa seção iremos discutir uma série de resultados que mostram que invariantes de anéis de operadores diferenciais são Ordens de Galois. Vamos começar com preliminares técnicos.

Lema 5.3. ([FS18a], lemma 1) *Seja Γ uma k álgebra Noetheriana finitamente gerada e U uma ordem de Galois sobre ela em $\mathfrak{K}$. Seja H um grupo finito de automorfismos de U, com $H(\Gamma) \subset \Gamma$, e suponha que U^H é uma álgebra de Galois sobre Γ^H, em um invariante de anel de monóides torcido adequado $\mathfrak{K}' \subset \mathfrak{K}$ então, U^H é na verdade também uma ordem de Galois.*

Demonstração. A prova usará a própria definição de ordem de Galois. Seja $K = Frac\Gamma$ e W um espaço vetorial de dimensão finita sobre K em $\mathfrak{K}$. Então $W \cap U$ é finitamente gerado sobre Γ (ambos os lados). Pelo Teorema de Hilbert-Noether, Γ^H é uma álgebra também Noetheriana, e Γ é um módulo finitamente gerado sobre ela. Logo $W \cap U$ é finitamente gerado também (ambos os lados) sobre Γ^H. Agora seja Y um espaço vetorial de dimensão finita sobre $K' = Frac\Gamma^H$ em $\mathfrak{K}'$. Seja Z o espaço vetorial gerado por Y sobre K em $\mathfrak{K}$. Ele tem dimensão finita tanto sobre K quanto sobre K' ([K:K']=|H|). Como observamos, $Z \cap U$ é finitamente gerado sobre Γ^H. Como $Y \cap U^H$ é um Γ^H submódulo de $Z \cap U$, ele também é finitamente gerado sobre Γ^H (ambos os lados), e estamos feitos. □

Lema 5.4. *Seja U uma álgebra associativa e $\Gamma \subset U$ uma álgebra commutative Noetheriana finitamente gerada. Se $H(\Gamma) \subset \Gamma$, U é projetivo sobre Γ e esta, por sua vez, é projetiva sobre Γ^H, então U^H é projetiva sobre Γ^H.*

Demonstração. É óbvio que U é um Γ^H-módulo projetivo. O mergulho canônico de Γ^H-módulos $U^H \to U$ cinde, com inversa $1/|H| \sum_{h \in H} h$. Então U^H é um somando direto de um Γ^H-módulo projetivo e, portanto projetivo também. □

Vamos anotar agora um curioso resultado de H. Bass

Teorema 5.6. (Teorema de Bass) *Todo módulo projetivo, não-finitamente gerado, sobre um anel comutativo Noetheriano R, com $Spec\, R$ conexo na topologia de Zariski, é livre.*

Demonstração. Corolário 4.5 em [Bas63] □

Esse resultado tem uma consequência notável:

Teorema 5.7. (Bass-Suslin-Quillen) *Todo módulo projetivo sobre a álgebra polinomial é livre.*

Demonstração. Basta juntar o resultado acima de Bass com o famos Teorema de Suslin-Quillen sobre a Conjectura de Serre. □

Observação. *Gostaríamos de agradecer Jacques Alev por esclarecer a história deste resultado notável, e o pouco conhecimento que se tem dele.*

Vamos lembrar agora da ação dos Grupos de Weyl clássicos em $D(\mathbb{T}^n)$: a parte correspondente a S_n age por permutação como usual, e nós temos n automorfismos $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$, que agem em $\mathbb{C}[x_1^{\pm}, \ldots, x_n^{\pm}]$ assim: ϵ_i manda x_i para $-x_i^{-1}$ e fixa x_j quando $j \neq i$. Chamando $t_i = \partial_i x_i, i = 1, \ldots, x_n$, se tem $\epsilon_i(t_i) = 2 - t_i$, e $_i(t_j) = t_j, i \neq j$. Isso é estendido por conjugação, como antes, para $D(\mathbb{T}^n)$, e se tem a ação dos grupos. Retornaremos a notação $\widetilde{A_n(\mathbb{C})}$ para tal anel de operadores diferenciais.

Proposição 5.7. $\widetilde{A_n(\mathbb{C})}^{W_n}$ *é uma álgebra de Galois em $(\mathbb{C}(t_1, \ldots, t_n) * \mathbb{Z}^n)^{W_n}$, $W \in \{S, B, D\}$, com a ação na álgebra de operadores shift a mesma descrita na seção 1.*

Demonstração. [FO10], Prop. 7.3, 7.4. □

Agora, uma observação óbvia que será utilizada o tempo todo: † $A_n(k)$ e $\widetilde{A_n(k)}$ são Ordens de Galois em $k(t_1,\ldots,t_n) * \mathbb{Z}^n$, com $\Gamma = k[t_1,\ldots,t_n]$ Harish-Chandra; as álgebras são livres como Γ-módulos à esquerda e à direita; isto vale para todo k algebricamente fechado de característica 0.

Observação. *No que se segue, quando usarmos a expressão "módulo livre"sem especificar se é à direita ou à esquerda, é porque ele o é em ambas as direções.*

Teorema 5.8. ([FS18a], Thm. 10) $\widetilde{A_n(\mathbb{C})}^{W_n}$ *é uma ordem de Galois sobre* $\Gamma = \mathbb{C}[t_1,\ldots,t_n]^{W_n}$*, que é polinomial, e* Γ *é Harish-Chandra. Além disso,* $\widetilde{A_n(\mathbb{C})}^{W_n}$ *é livre sobre ela.*

Demonstração. Substituindo t_i por $t_i - 1$, os ϵ_i passam a agir nesses novos geradores da mesma forma que os grupos de Weyl em suas ações clássicas na álgebra polinomial: $\epsilon_i(t_i) = -t_i$; logo Γ é polinomial. Pela proposição acima, † e o lema 5.4, $\widetilde{A_n(\mathbb{C})}^{W_n}$ é projetivo sobre Γ e, portanto, uma Ordem de Galois, e Γ é Harish-Chandra (Proposição 5.2 seguida da Proposição 5.4). Além do mais, pelo teorema de Bass, teremos um módulo livre sobre Γ. □

O seguinte resultado foi obtido por Futorny e Schwarz, quase na sua totalidade, em 2017, e foi publicado em [FS17].

Teorema 5.9. ([FS17], Thm. 2.; [FS18a], Corol. 4) *Seja* $A_n(k)^{S_n}$ *e* $\Gamma = k[t_1,\ldots,t_n]^{S_n}$*. Então* $A_n(k)^{S_n}$ *é uma ordem de Galois obre* Γ*, livre sobre ela; e* Γ *é Harish-Chandra e polinomial.*

Demonstração. Pelo Teorema 5.1 nós temos que $A_n(k)^{S_n}$ é finitamente gerada como álgebra. Denote $K = Frac\,\Gamma$ e $L = Frac\,k[x_1,\ldots,x_n]$. Seja $\mathbb{Z}^n$ gerado por $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$, agindo em L assim: $\sigma_i(t_j) = t_j - \delta_{ij}$. S_n age em $\mathbb{Z}^n$ por conjugação; considere $\mathfrak{K} = (L * \mathbb{Z}^n)^{S_n}$.

Nós temos o mergulho (lembre que $A_n(k)^{S_n}$ é simples) em $\mathfrak{K}$, induzido por aquele de $A_n(k) \to L * \mathbb{Z}^n$, que envia x_i para σ_i e ∂_i para $t_i\sigma_i^{-1}$.

Considerando os elementos $x_1 + \ldots + x_n$ e $\partial_1 + \ldots + \partial_n$, pertencentes a $A_n(k)^{S_n}$, suas imagens em $\mathfrak{K}^{S_n}$ tem suporte que gera $\mathbb{Z}^n$ como monóide. Isto nos dá, pelo lema 5.1, que temos $A_n(k)^{S_n}$ uma álgebra de Galois sobre Γ. Usando agora o lema 5.4, Proposição 5.2 e 5.4: Γ é claramente polinomial, e $A_n(k)^{S_n}$ é uma ordem de Galois sobre ela. Γ é Harish-Chandra e $A_n(k)^{S_n}$ é um módulo livre sobre Γ, devido ao Teorema de Bass. □

Observação. *Que* $A_n(k)^{S_n}$ *é livre sobre* Γ *não havia aparecido em [FS17], apenas conjecturado.*

Vamos discutir agora o caso dos grupos alternantes $\mathcal{A}_n$

Teorema 5.10. ([FS18a], Corol. 5) *Seja* $A_n(k)^{\mathcal{A}_n}$ *e* $\Gamma = k[t_1,\ldots,t_n]^{\mathcal{A}_n}$*. Então* $A_n(k)^{\mathcal{A}_n}$ *é uma ordem de Galois obre* Γ *e* Γ *é Harish-Chandra;* $A_n(k)^{\mathcal{A}_n}$ *é isomorfica ao anel de operadores diferenciais na variedade singular* $\mathbb{A}^n/\mathcal{A}_n$*.*

Demonstração. A prova que $A_n(k)^{\mathcal{A}_n}$ é uma álgebra de Galois sobre Γ segue exatamente os mesmos passos que o caso para S_n. A estratégia para provar que se trata de uma Ordem de Galois será diferente: o lema 5.3. O restante do argumento é o mesmo. Sobre a estrutura de anel de operador diferencial: isso segue do Teorema 4.1, pois $\mathcal{A}_n$ não contém pseudo-reflexões. Pelo mesmo motivo, pelo Teorema de Chevalley-Shephard-Todd, na sua versão geométrica (ver Capítulo 1), temos que $\mathbb{A}^n/\mathcal{A}_n$ tem singularidades. □

Esse resultado é bastante peculiar. Existe uma vasta teoria de módulos para anéis de operadores diferenciais para variedades suaves (para uma introdução, ver [Cou95]). Contudo, é incomum encontrar uma categoria de módulos tão bem estruturada para anéis de operadores diferenciais numa variedade singular – e nesse caso, temos uma Categoria de Gelfand-Tsetlin. Mais a respeito será desenvolvido no próximo Capítulo.

Teremos mais a dizer sobre os invariantes da Álgebra de Weyl sobre grupos de reflexão unitários. Mas antes disso, vamos nos dedicar a um dos pontos centrais da teoria de Álgebras de Galois: Álgebras de Weyl Generalizadas.

5.4 Álgebras de Weyl Generalizadas

No trabalho preliminar [FO06], Futorny e Ovsienko discutiram a possibilidade de realizar GWAs como álgebras de Galois. Contudo, segundo a estratégia de demonstração deles, as condições para tal realização ser ou não uma ordem de Galois eram muito técnicas; na versão final [FO10], apenas o caso de GWAs de posto 1 foi considerado.

Nesta seção desenvolveremos uma abordagem diferente, que busca simplicar a situação — e que tem um resultado de equivalência birracional de interesse próprio, independente da teoria de álgebras de Galois.

Lembrando da notação do Capítulo 1, Seção 4, seja $D(a,\sigma)$ uma GWA de posto n. Nós consideraremos apenas o caso de D um domínio Noetheriano e finitamente gerado como k álgebra.

Considere o anel $D * \mathbb{Z}^n$,onde $\mathbb{Z}^n$ tem base $e_1, \ldots, e_n$ agindo em D da seguinte forma: ye_i age como σ_i^y, para $i = 1, \ldots, n$ e $y \in \mathbb{Z}$.

Proposição 5.8. ([FS18a], Prop. 4, 5) *Existe um mergulho natural de $A = D(a,\sigma)$ em $D * \mathbb{Z}^n$, que é uma equivalência birracional; é um isomorfismo caso cada a_i seja uma unidade em D.*

Demonstração. Considere o mapa que manda X_i^+ para e_i e X_i^- para $a_i(e_i^{-1})$. Isso claramente satisfaz as relações dos geradores de A, e portanto nós temos um homomorfismo para $D * \mathbb{Z}^n$. Ele envia uma base do D-módulo A para um conjunto linearmente independente do D-módulo $D * \mathbb{Z}^n$. Portanto, o homorfismo é injetivo, e temos o nosso mergulho. Quanto a equivalência birracional: inverter a imagem de cada elemento de A em $D * \mathbb{Z}^n$ claramente permite inverter cada elemento do último. Sobre a última afirmação: ela é clara. □

Observação. *Seja $D[x;\sigma]$ uma extensão de Ore de um anel comutativo D, com σ um automorfismo. Então, localizando por x, nós obtemos um anel isomórfico $D * \mathbb{Z}$, onde a base canônica $\overline{1}$ atua como σ, e o isomorfismo é o esperado: $D \to D, x \to \overline{1}$.*

Corolário 5.2. (Redemonstração da Conjectura de Gelfand-Kirillov quantizada para $U_q(sl_2)$, [FS18a], Corol. 1) *Seja $\mathbb{C}_q[x,y]$ o plano quântico. Então $Frac\, U_q(sl_2) \cong Frac\,(\mathbb{C}_q[x,y] \otimes C[c])$.*

Demonstração. A realização de $U_q(sl_2)$ como GWA é $\mathbb{C}[c,h,h^{-1}](a,\sigma)$, onde σ fixa c e envia h para qh; $a = c + (h^2/(q^2-1) - h^{-2}/(q^{-2}-1))/(q-q^{-1})$. Será importante, no que se segue, notar que a forma específica de a é irrelevante. O anel de frações será isomorfico, pelo acima, ao de $\mathbb{C}[c,h,h^{-1}] * \mathbb{Z}$. Pela forma da ação de $\mathbb{Z}$, tal anel tem corpo de frações isomórfico a $\mathbb{C}[c] \otimes \mathbb{C}^*[x,y]$, onde o segundo elemento é uma localização do plano quântico (sendo mais explícito, tendo em vista a observação acima: $\mathbb{C}_q[x^{\pm}, y^{\pm}]$). Portanto, tomando o anel de frações, recuperamos a Conjectura de Gelfand-Kirillov quantizada. □

Observação. *Note que não se faz necessário supor q diferente de uma raiz da unidade.*

Agora vamos aplicar a mesma ideia para obter o que são, até onde nós sabemos, dois casos inéditos de confirmação da Conjectura de Gelfand-Kirillov quantizada.

Relembrando a segunda deformação de Witten/deformação de Woronowicz: $D = \mathbb{C}[H,Z]$, $a = Z + \alpha H + \beta$ com

$$\sigma(H) = s^4 H, \sigma(Z) = s^2 H, \alpha = -1/s(1-s^2), \beta = s/(1-s^4).$$

s $\neq 0, \pm 1, \pm i \in \mathbb{C}$.

Corolário 5.3. (Conjectura de Gelfand-Kirillov quantizada para a Segunda de deformação de Witten-Deformação de Woronowicz, [FS18a], Corol. 2)

Demonstração. A prova anterior explica como tudo funciona. Ignoremos o a, e nos concentremos em σ. A deformação de Woronowicz é birracional a $D * \mathbb{Z}$. $D = \mathbb{C}[H, Z]$, e se e é a base de $\mathbb{Z}$, então $e(H) = s^4 H, e(Z) = s^2 Z$. Assim seu anel de frações é o mesmo de $\mathbb{C}_Q[Y, H, Z]$, em que Q é a matriz multiplicativamente antisimétrica de tamanho 3×3 com entradas: $q_{12} = s^4, q_{13} = s^2, q_{23} = 1$. □

Agora, relembrando a primeira deformação de Witten: $D = \mathbb{C}[C, H]$, $a = C - H(H-1)/(p+p^{-1})$, $\sigma(C) = C, \sigma(H) = p^2(H-1)$, com $p \neq 0, \pm 1, \pm i \in \mathbb{C}$.

Corolário 5.4. (Conjectura de Gelfand-Kirillov quantizada para a primeira deformação de Witten, [FS18a], Corol. 3)

Demonstração. Essa álgebra é birracional a $\mathbb{C}[C] \otimes \mathbb{C}[H] * \mathbb{Z}$. O segundo elemento deste produto tensorial é claramente birracional a primeira álgebra de Weyl quantizada com parâmetro p^2. Então o anel de frações é $Frac\,(\mathbb{C}[C] \otimes \mathbb{C}_{p^2}[x, y])$. □

O prometido critério de quando uma GWA de posto n é uma Ordem de Galois é

Teorema 5.11. ([FS18a], Thm. 5) *Considere a GWA $A = D(a, \sigma)$. Introduza um grupo abeliano G usando $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ como geradores da seguinte forma: $y_1\sigma_1 + \ldots y_n\sigma_n = \sigma_1^{y_1} \ldots \sigma_n^{y_n}$, $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{Z}$. Se os σ's são l.i. nessa estrutura, então A é uma ordem de Galois sobre D, e D é Harish-Chandra; A está mergulhado em $Frac\,D * \mathbb{Z}^n$, com a ação de $\mathbb{Z}^n$ descrita como na Proposição 5.8.*

Demonstração. A independência linear implica que o grupo abeliano gerado é isomorfo a $\mathbb{Z}^n$, e é óbvio que sua ação em D (e a induzida em $Frac\,D$) é a mesma que a aquela descrita na Proposição **??**. Ser linearmente independente, por sua vez, não é nada mais do que uma reformulação da condição de separação na ação do monóide (Definição 1). Isto deixa claro, por exemplo, porque não podemos ter automorfismos de ordem finita ([FO10]). A é livre como D-módulo; todo o resto procede como de costume. □

Agora voltamos ao estudo de invariantes da álgebra de Weyl. Seja $A_1^m(k) = A_1(k)^{G_m}$, onde $G_m \subset k$ é o grupo finito cíclico de ordem m, com um gerador fixado g agindo em $A_1(k)$ assim: $\partial \to w\partial$; $x \to w^{-1}x$, w uma raiz m-primitiva da unidade. Este anel é uma GWA:

$$A_1(k)^{G_m} = k\langle \partial^m, \partial x, x^m \rangle \cong D(a, \sigma);$$
$$a = m^m H(H - 1/m) \ldots (H - (m-1)/m); \sigma(H) = H - 1.$$

Mais precisamente: $A_1^m(k) = k\langle \partial^m, t, x^m \rangle$, onde $t = \partial x$, e o isomorfismo com a GWA é

$$\partial^m \to X^-, x^m \to X^+, t \to mH$$

.

Considere o grupo $G_m^{\otimes n}$. Ele age de maneira óbvia $A_n(k)$, e chamando o anel de invariantes de $A_n^m(k)$ nós temos uma generalização da situação de posto 1:

Proposição 5.9. *$A_n^m(k)$ é isomórfica a GWA $D(a, \sigma)$, onde $D = k[H_1, \ldots, H_n]$ e $a = (a_1, \ldots, a_n)$, com $a_i = m^m H_i(H_i - 1/m) \ldots (H_i - (m-1)/m)$ e $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ com $\sigma_i(H_i) = H_i - 1$, e $\sigma_i(H_j) = H_j, j \neq i$. O isomorfismo é dado por:*

$$\partial_i^m \to X_i^-, x_i^m \to X_i^+, t_i \to mH_i,$$

$t_i = \partial_i x_i, i = 1, \ldots, n$.

Note que $G_m^{\otimes n}$ age trivialmene nos t_i's.

Usando o Teorema :

Proposição 5.10. ([FS18a], Prop. 9) *Temos um mergulho de $A_n^m(k)$ em $k(H_1, \ldots, H_n) * \mathbb{Z}^n$, onde $\mathbb{Z}^n$ age por shifts (como no caso da álgebra de Weyl). Nesse mergulho, $A_n^m(k)$ é uma ordem de Galois sobre $\Gamma = k[H_1, \ldots, H_n]$, que é uma subalgebra de Harish-Chandra; $A_n^m(k)$ é livre sobre Γ.*

Vamos lembrar a definição dos grupos $G(m,p,n)$ de Shephard e Todd, onde $m \geq 1, n \geq 1, p|m, p > 0$. Eles são obtidos assim: seja $A(m,p,n)$ o subgrupo de $G_m^{\otimes n}$ constituído pelos elementos $(h_1, \ldots, h_n)$ tais que $(h_1 h_2 \ldots h_n)^{m/p} = id$. $G(m,p,n) = A(m,p,n) \rtimes S_n$, onde S_n apenas permuta as entradas em $A(m,p,n)$.

Alguns fatos:

- $G(m,p,n)$ tem ordem $m^n n!/p$.
- Todos os grupos na lista são irredutíveis — exceto $G(1,1,n)$, que é o grupo simétrico na sua representação natural (e portanto se decompõe na soma direta de uma representação de dimensão n-1 e 1), e $G(2,2,2)$, o grupo Klein.
- Todos os grupos de reflexão complexos irredutíveis estão na lista, exceto os 34 excepcionais.
- $S_n = G(1,1,n)$, $B_n = G(2,1,n)$ e $D_n = G(2,2,n)$.

Teorema 5.12. ([FS18a], Thm. 7) *Se G é da forma $G(m,1,n)$, então $A_n(k)^G$ é uma ordem de Galois sobre uma Γ adequada, que é polinomial e Harish-Chandra. Também temos $A_n(k)^G$ livre sobre Γ.*

Demonstração. $G(m,1,n)$ é $G_m^{\otimes n} \rtimes S_n$. Nós temos $A_n^m(k)$ uma ordem de Galois sobre $k[H_1, \ldots, H_n]$ em $k(H_1, \ldots, H_n) * \mathbb{Z}^n$. Se chamarmos $\Gamma = k[H_1, \ldots, H_n]^{S_n}$ e fizermos S_n agir por conjugação em $\mathbb{Z}^n$, obtemos um mergulho de $A_n(\mathbb{C})^G$ em $(k(H_1, \ldots, H_n) * \mathbb{Z}^n)^{S_n}$. Os elementos $\sum_i \partial_i^m$ e $\sum_i x_i^m$ pertencem $A_n(\mathbb{C})^G$, e usando os isomorfismos das Proposições 5.9 e 5.10 temos: suas imagens em $k(H_1, \ldots, H_n) * \mathbb{Z}^n)^{S_n}$ tem suporte que geram $\mathbb{Z}^n$ como monóide. O resto da prova é idêntica a do Teorema 5.9. □

Observação. *Note que $k[H_1, \ldots, H_n] = k[t_1, \ldots, t_n]$. Esse fato foi usado no enunciado dos resultados acima que aparecem em [FS18a].*

5.5 Ideais Maximais em Invariantes da Álgebra de Weyl

Um dos resultados mais importantes do Teorema 5.12, dada a realização dos invariantes de $A_n(k)$ pela ação de $G(m,1,n)$ como Ordem de Galois, é a extensão de ideais maximais de uma subálgebra comutativa Γ para a álgebra de invariantes (Teorema 5.4). Apesar de não termos conseguido encontrar uma estrutura de ordem de Galois para todos os grupos $G(m,p,n)$, nós obtivemos um resultado análogo a respeito de extensão de ideais.

Lema 5.5. $G(m,1,n)/G(m,p,n) \cong G_p$.

Demonstração. Seja (a,π) um elemento arbitrário em $G(m,1,n)$, com $a \in G_m^{\otimes n}$, $\pi \in S_n$. Se $a = (a_1, \ldots, a_n)$ com $a_i \in G_m$, $i = 1, \ldots, n$, definamos um mapa $f : G(m,1,n) \to G_m$, $(a,\pi) \mapsto \prod_i a_i \in G_m$; f é um homomorfismo. A composição de f com a projeção canônica de G_m em G_p nos dá um epimorfismo de $G(m,1,n)$ para G_p, cujo núcleo é $G(m,p,n)$. □

No que segue, seja $G = G(m,p,n)$ e $H = G(m,1,n)$.

Proposição 5.11. $A_n(k)^G = \bigoplus_{k=0}^{p-1} (x_1 \ldots x_n)^{mk/p} A_n(k)^H$.

Demonstração. Seja $h = (a,\pi)$ um elemento de H, não pertencente a G e enviado a um gerador de G_p no isomorfismo do lema acima. Então $h(x_1 x_2 \ldots x_n)^{m/p} = \epsilon(x_1 x_2 \ldots x_n)^{m/p}$, ϵ uma p-raiz primitiva da unidade, e age em cada $(x_1 \ldots x_n)^{mk/p} A_n(k)^H$ por multiplicação por ϵ^k. $\prod_{k=0}^{p-1}(h - \epsilon^k I)$ anula $A_n(k)^G$, pois esse polinômio é apenas $h^p - 1 = 0$, e h tem ordem p. Então a soma direta do enunciado nada mais é que a decomposição de $A_n(k)^G$ em autoespaços de h. □

Nós temos $(x_1 \dots x_n)^{mk/p} A_n(k)^H = A_n(k)^H (x_1 \dots x_n)^{mk/p}$, $k = 0, \dots, p-1$, pois ambos são o autoespaço para o autovalor ϵ^k.

Seja O um ideal maximal a esquerda de $A_n(k)^H$. Fixe k' e seja $U(k') = (x_1 \dots x_n)^{mk'/p} O$. Então

$$A_n(k)^G U(k') = (\bigoplus_{k=0}^{p-1} (x_1 \dots x_n)^{mk/p} A_n(k)^H) U(k')$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} (x_1 \dots x_n)^{mk/p} A_n(k)^H U(k') = \sum_{k=0}^{p-1} (x_1 \dots x_n)^{m(k+k')/p} A_n(k)^H O.$$

Portanto, $A_n(k)^G U(k') \subset \bigoplus_{k=0}^{p-1} (x_1 \dots x_n)^{mk/p} O$ para todo k'.

Para cada $i = 0, \dots, p-1$, seja U_i o resultado de substituir o i-ésimo somando $(x_1 \dots x_n)^{mi/p} A_n(k)^H$ em $\bigoplus_{k=0}^{p-1} (x_1 \dots x_n)^{mk/p} A_n(k)^H$ por $(x_1 \dots x_n)^{mi/p} O$. Pela proposição 5.11 obtemos:

Proposição 5.12. *Seja O um ideal maximal à esquerda de $A_n(k)^H$. Então U_i, $i = 0, \dots, p-1$ são todas as estensões possíveis de O para ideais maximais à esquerda de $A_n(k)^G$.*

Como $A_n(k)^{G(m,1,n)}$ é uma ordem de Galois sobre uma subálgebra de Harish-Chandra polinomial Γ, pelo Teorema 5.12, combinando com o Teorema 5.4 e a Proposição 5.12 nós temos.

Teorema 5.13. ([FS18a], Thm. 8) *Seja $G = G(m, p, n)$. Então todo ideal maximal m de Γ tem um número finito e não-nulo de extensões para ideais à esquerda maximais em $A_n(k)^G$ contendo m.*

5.6 Notas e Referências

Para as referências mais atuais do estado da teoria módulos de Gelfand-Tsetlin para gl_n, [Fut18]; para álgebras de Galois, nos referimos a [Har17a], [FS18a], [FS18c]. No artigo [Har17a] é refeita parte da teoria desenvolvida em [FO10] e [FO14], com hipóteses mais restritas, mas suficientemente gerais. Seu trabalho contribuiu com algumas escolhas expositórias neste capítulo, mas nossas referências principais foram o trabalho original de Futorny e Ovsienko. O artigo [FS18a] compõe a maior parte do material desse Capítulo.

Capítulo 6

Uma Teoria de Módulos Holonômicos para invariantes da Álgebra de Weyl

Nesse Capítulo, mostraremos como os resultados sobre álgebras de invariantes da Álgebra de Weyl do capítulo anterior podem ser naturalmente acomodados dentro de uma teoria de módulos holonômicos de $A_n(k)^W$, para W um grupo finito de automorfismos lineares, $char\, k = 0$. Como consequência dessa teoria, obteremos uma teoria de módulos holonômicos para quocientes do espaço afim sobre ações de grupos lineares, no caso k algebricamente fechado.

6.1 Definições e Resultados Básicos

Nenhuma restrição é feita sobre o corpo base a menos que explicitado. Relembremos a noção de dimensão de Gelfand-Kirillov.

Seja A uma k-álgebra, V um espaço de dimensão finita em A. Denote $V^0 = k$ e $(\dagger)\, V^i = \sum_{j=0}^{i} V^j, i \geq 1$. Seja $d_V(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função que mede a dimensão de V^i.

Definição 6.1. *Seja A uma álgebra. Então a dimensão de Gelfand-Kirillov de A, $GK\, A$ é igual a*

$$sup_V\, \overline{lim}\, log(d_V(n))/log\, n.$$

O supremo é sobre todos os subespaços de dimensão finita V em A.

Definição 6.2. *Seja A uma álgebra e M um módulo à esquerda. Então,*

$$GK(M) = sup_{V,F}\, \overline{lim}\, log(dim_k(V^n F))/log\, n,$$

, em que o supremo é sobre os espaços de dimensão finita F em M e V, contendo a unidade, em A.

Observe que $GK(A)$ como álgebra e módulo à esquerda coincidem.

Nesta seção estudaremos o conceito de dimensão filtrada, introduzido por Bavula em [Bav96]. Ele foi introduzido com a motivação de entender módulos holonômicos para álgebras simples finitamente geradas, e para generalizar a famosa desigualdade de Bernstein ([Bav06], Introduction):

Teorema 6.1. (Bernstein)
Seja $A_n(k)$ a Álgebra de Weyl sobre um corpo k de característica 0. Então para todo módulo finitamente gerado não-nulo M, $2n \geq GK(M) \geq n$.

Demonstração. Uma prova bastante clara encontra-se em [Bjo79]. Uma prova mais conceitual, fazendo recurso de toda teoria de dimensão de Gelfand-Kirillov, é encontrada em [KL00]. Uma prova elementar aparece em [Cou95].

□

Vamos às definições necessárias para obtermos o conceito de dimensão filtrada. Nossas álgebras serão todas finitamente geradas sobre k.

Seja A gerada por $a_1, \ldots, a_m$. Defina $A_0 = k$, $A_1 = span\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$, $A^i = A_1^i$. Essa será chamada de *a filtração associada a essa escolha finita de geradores*. Chame a filtração de $\mathcal{F}$.

Seja M um módulo à esquerda sobre A, finitamente gerado, AM_0, em que M_0 é o espaço de dimensão finita que gera M como módulo. M, então, herda uma filtração *natural* de A, a saber, $M_i = A_i M, i \geq 0$.

Definição 6.3. *Dadas as filtrações de A e M (com o M_0 dado) acima, definimos:*

$$v_{\mathcal{F},M_0}(i) = min\{j \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} | A_j M_{i,gen} \supset M_0, \forall\, M_{i,gen}\},$$

em que $M_{i,gen}$ percorre todos os espaços de dimensão finita que são geradores de M como A módulo e estão contidos em M_i. $v_{\mathcal{F},M_0}$ é chamada de função de retorno com relação a $\mathcal{F}$ e M_0.

Se além disso a álgebra A for simples, nós podemos definir, dada a filtração fixada acima $\mathcal{F}$, a chamada função de retorno $\nu_{\mathcal{F}}$ e a função de retorno à esquerda $\lambda_{\mathcal{F}}$:

$$\nu_{\mathcal{F}}(i) = min\{j \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} | A_j a A_j, \forall 0 \neq a \in A_i\},$$

$$\lambda_{\mathcal{F}}(i) = min\{j \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} | A a A_j, \forall 0 \neq a \in A_i\}.$$

Lema 6.1. *Seja A uma álgebra simples finitamente gerada. $\nu_{\mathcal{F}}(i)$ e $\lambda_{\mathcal{F}}(i)$ são finitas para todo $i \geq 0$ se o centro de A (que é um corpo, uma vez que A é simples) for uma extensão algébrica de k; em particular, isto sempre vale se k for não-enumerável.*

Demonstração. [Bav06], lema 2.1 e observação logo após. □

Estamos quase prontos para definir as dimensões que estamos interessados. Resta apenas um conceito: sendo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, chame $\gamma(f) = inf\{r \in \mathbb{R} | f(i) \leq i^r, i >> 0\}$; este é o *grau* de f, que coincide com o seu grau de polinômio se $f \in \mathbb{Q}[x]$.

Temos a seguinte definição, justificada pelo Lema 2.2 em [Bav06]: as dimensões a serem definidas abaixo independem das escolhas de $\mathcal{F}$ e M_0.

Definição 6.4. *$fd(M) = \gamma(v_{\mathcal{F},M_0})$ é chamada de* dimensão filtrada *do A-módulo M; e no caso de álgebras, a dimensão filtrada $fd(A)$ será a de A como $A \otimes A^o$ como módulo à esquerda. Se A for simples, nós teremos $fd(A) = \gamma(\nu_{\mathcal{F}})$; e nós definimos a* dimensão filtrada à esquerda *$lfd(A) = \gamma(\lambda_{\mathcal{F}})$.*

Pelo Lema 2.1 [Bav06], para toda álgebra simples $lfd(A) \leq fd(A)$.

A generalização da desigualdade de Bernstein pode ser enunciada agora:

Teorema 6.2. *Seja A uma álgebra simples finitamente gerada, e M um módulo não-nulo finitamente gerado. Então:*

$$GK(A) \geq \frac{GK(A)}{d(A) + max\{1, d(a)\}},$$

em que d pode ser tanto ld quanto lfd.

Demonstração. [Bav96]. □

Isso é, de fato, uma generalização do Teorema de Bernstein: é provado no Teorema 4.3 em [Bav06] que, se B for uma álgebra regular, um domínio finitamente gerado, então $lfd(D(B)) = fd(D(B)) = 1$. Contudo, a dimensão fd pode ser extremamente difícil de ser calculada — para uma discussão desse fenômeno, [KL00], Section 12.9.

6.2 Somewhat Commutative Algebras

Antes de introduzir a noção de “somewhat commutative algebra", relembremos a noção mais utilizada de “almost commutative algebra".

Observação. *Reconhece-se a escolha um tanto estranha dos nomes na literatura matemática. Portanto, optamos por usar a expressão em inglês.*

Definição 6.5. *Uma k-álgebra A é chamada de “almost commutative"se ela possuir uma filtração $\mathcal{F} = \{A_i\}$, $i \geq 0$, tal que: $A_{-1} = 0, A_0 = k$, A_1 é de dimensão finita, $A_i = A_1^i$ para todo $i > 0$, e a álgebra graduada associada a esta filtração é comutativa.*

“Almost commutative algebras"são interessantes para nós, pois elas têm uma teoria de dimensão de Gelfand-Kirillov que pode ser levada a cabo usando a ideia de polinômios de Hilbert — como no caso de álgebra comutativa (de fato, a dimensão de Krull e de Gelfand-Kirillov coincidem neste caso). “Almost commutative algebras"coincidem com uma classe bastante natural de álgebras: imagens homomórficas de álgebras envolventes de álgebras de Lie de dimensão finita. Em particular, incluem a Álgebra de Weyl: ela é imagem homomórfica da álgebra envolvente da álgebra de Heisenberg ([KL00], Capítulo 7).

Com um pouco mais de dificuldade, a mesma ideia pode ser levada a cabo para “somewhat commutative algebras", definidas abaixo:

Definição 6.6. *Uma álgebra A finitamente gerada é chamada de “somewhat commutative"se ela possuir uma filtração de dimensão finita $\mathcal{F} = \{A_i\}, i \geq -1$, com $A_{-1} = 0, A_0 = k$, tal que a álgebra graduada associada é comutativa e finitamente gerada.*

A diferença entre as duas noções é que “somewhat commutative algebras"não precisam ser geradas por A_1. Como um exemplo de uma álgebra que é “somewhat commutative"mas não é “almost commutative", temos $k[y][x, -y^2\partial_y]$ ([MR01], 14.3.9). Uma primeira observação importante sobre elas: suas dimensões de Gelfand-Kirillov são sempre um inteiro ([Bav06], Section 6.2).

O ponto crucial, para nós, é que “somewhat commutative algebras"têm uma teoria de polinômios de Hilbert, mais complexa é verdade, que permite obter resultados análogos ao que temos para “almost commutative algebras"(ver Teorema 6.3 abaixo).

Sejam $y_1, \ldots, y_s$ elementos de graus $k_1, \ldots, k_s$ que geram a álgebra graduada associada $gr\, A$ (isto é, $y_i \in A_i/A_{i-1}$).

Lembramos a definição de uma filtração boa (para mais detalhes, [KL00], Capítulo 6). Seja M um módulo finitamente gerado sobre A, e seja $\Gamma_i, i \geq 0$ uma filtração de M tal que $gr\, M$ é um módulo finitamente gerado sobre $gr\, A$. Então Γ_i é uma filtração boa. Uma condição necessária e suficiente para um módulo admitir uma filtração boa é ser finitamente gerado.

O seguinte lema é a base técnica dos resultados:

Lema 6.2. *Seja A uma “somewhat commutative algebra", e seja k o mínimo múltiplo comum de $k_1, \ldots, k_s$ (como acima). Seja M um módulo finitamente gerado com uma boa filtração Γ_i. Então existem $p_0, \ldots, p_{k-1}$ polinômios em $\mathbb{Q}[t]$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$ localizados por $k^{GK(M)}(GK(M))!$, tal que*

$$p_j(i) = dim_k\, \Gamma_i, i >> 0, j \equiv i (mod\, k).$$

Temos também: todos os polinômios tem o mesmo grau $GK(M)$ e o mesmo coeficiente principal $e(M)/(GK(M))!$; $e(M)$, chamado a multiplicidade do módulo, independe da escolha da boa filtração.

Demonstração. [Bav95]. □

O próximo resultado segue deste lema, e é análogo ao que temos para a situação de “almost commutative algebras"([KL00], Thm. 7.7).

Teorema 6.3. *Seja $0 \to L \to M \to N \to 0$ uma sequência exata curta de módulos finitamente gerados sobre uma "somewhat commutative algebra". Então $GK(M) = max\{GK(N), GK(L)\}$, e se $GK(L) = GK(M) = GK(N)$, $e(M) = e(L) + e(N)$. Temos ainda que $e(M) = 0$ se, e somente se, $dim_k M < \infty$. [Bav95].*

Definição 6.7. *Seja A uma "somewhat commutative algebra". Nós chamamos seu número holonômico de*

$$h_A = min\{GK(M) | M \neq 0, M \text{módulo finitamente gerado}\}.$$

Como $GK(M)$ é sempre um número natural, h_A existe.

Lema 6.3. *Seja A uma "somewhat commutative algebra", e M um módulo finitamente gerado. Então M tem uma série de composição, com comprimento menor ou igual a $e(M)k^{h_A}$.*

Demonstração. [Bav06], Corol 6.3. □

6.3 Categoria de Módulos Holonômicos para invariantes de Álgebras de Weyl

Definição 6.8. *Um módulo holonômico é um módulo finitamente gerado M sobre uma "somewhat commutative algebra"A com $GK(M) = h_A$.*

Teorema 6.4. *Considere a classe $\mathcal{C}$ de módulos holonômicos sobre A. Ela constitui uma categoria abeliana; para cada $M \in \mathcal{C}$, ele possui uma série de decomposição.*

Demonstração. Pelo Teorema 6.3, é claro que a soma direta, imagens homomórficas e submódulos de módulos holonômicos são holonômicos. A segunda afirmação segue do Lema 6.3. □

No que segue, fixaremos $char\, k = 0$. Vamos, enfim, introduzir invariantes da Álgebra de Weyl sob a ação de grupos lineares finitos W. A filtração de Bernstein em $A_n(k)$ se restringe a uma filtração de $A_n(k)^W$, tal que álgebra graduada associada é isomórfica a $(gr\, A_n(k))^W$ ([Dum06]). Pelo Teorema de Hilbert-Noether, essa é finitamente gerada. Logo:

Teorema 6.5. *Para todo grupo de automorfismos lineares da Álgebra de Weyl, W, $A_n(k)^W$ é uma "somewhat commutative algebra".*

Resta agora uma questão: qual é o número holonômico de tais álgebras de invariantes? Inicialmente vamos lembrar um fato sobre o comportamento da dimensão de Gelfand-Kirillov sob equivalência de Morita:

Sejam A e B duas álgebras finitamente geradas e Morita equivalentes, com contexto de Morita

$$M = \begin{pmatrix} A & X \\ Y & B \end{pmatrix}.$$

Temos ${}_AX_B$, ${}_BY_A$ bimódulos finitamente gerados em ambos os lados ([MR01], 3.5). Então, para cada módulo finitamente gerado à esquerda sobre A, M, $GK_A(M) = GK_B(Y \otimes_A M)$. A equivalência entre as categorias $A - Mod$ e $B - Mod$ é feita dada por $M \in A - Mod \mapsto Y \otimes_A M$. Sendo assim:

Teorema 6.6. *Se A e B são Morita equivalentes, então $h_A = h_B$.*

Demonstração. Segue da discussão acima. □

Teorema 6.7. *Para todo grupo de automorfismos lineares finito W de $A_n(k)$, o número holonômico de $A_n(k)^W$ é n.*

Demonstração. Como $A_n(k)$ é simples, e não tem automorfismos internos, nós temos, pela Proposição 3.1, que $A_n(k)^W$ e $A_n(k) * W$ são Morita equivalentes. Agora, como W preserva a filtração de Bernstein em $A_n(k)$ e o grupo W é finito, pela definição de dimensão de Gelfand-Kirillov, é fácil ver que $h_{A_n(k)*W} = h_{A_n(k)} = n$. Logo, pelo teorema acima, temos o que queríamos. □

Corolário 6.1. *Temos uma seguinte versão da desigualdade de Bernstein para anéis de invariantes $A_n(k)^W$, W um grupo finito agindo linearmente: para todo módulo não-nulo finitamente gerado, $2n \geq GK(M) \geq n$.*

Vamos agora mostrar alguns resultados elementares sobre a categoria $\mathcal{C}$ de módulos holonômicos sobre $A_n(k)^W$, W um grupo finito agindo linearmente.

Proposição 6.1. *Todo módulo holonômico M é de torção.*

Demonstração. Escolha um elemento $u \neq 0$ em M e defina um mapa de $A_n(k)^W$-módulos à esquerda $\phi : A_n(k)^W \to M$, $a \mapsto au$. $Im\phi$ é um submódulo não-nulo de M; logo, pelo Teorema 6.4, $GK(Im(\phi)) = n$. Pelo Teorema 6.3, $GK(Ker(\phi)) = GK(A_n(k)^W) = 2n$, em particular $Ker(\phi) \neq 0$. □

Relembremos também o seguinte resultado:

Proposição 6.2. *Seja A um anel Noetheriano à esquerda, porém, que não é Artiniano à esquerda. Seja M um módulo finitamente gerado que é Artiniano e Noetheriano à esquerda. Então M é cíclico.*

Demonstração. [Cou95], Thm. 2.5 □

Proposição 6.3. *Todo módulo holonômico sobre $A_n(k)^W$ é cíclico.*

Demonstração. Nós sabemos que este anel é Noetheriano e que todo módulo holonômico possui uma série de decomposição — e, portanto, é Artiniano e Noetheriano. Resta provar que $A_n(k)^W$ não é Artiniano. Temos, por [Mon80], Thm 2.4, que $A_n(k)$ é um módulo finitamente gerado sobre $A_n(k)^W$. Logo, se $A_n(k)^W$ fosse Artiniano, $A_n(k)$ seria Artiniano como $A_n(k)^W$ módulo e, portanto, como módulo sobre si mesmo — o que sabemos que não procede. Então $A_n(k)^W$ não é Artiniano, e o argumento se encerra. □

Proposição 6.4. *Todo módulo holonômico M de multiplicidade 1 sobre $A_n(k)^W$ é irredutível.*

Demonstração. Caso contrário, ele possui um submódulo $N \neq 0$, e pelo Teorema 6.4, $N, M/N$ são holonômicos. Logo, $e(M) = e(N) + e(M/N)$. Se $e(N) = 0$ então, pelo Teorema 6.3, $dim_k N$ é finita; isto é impossível, pois $N \neq 0$ e a álgebra é simples (fixe um element $0 \neq n \in N$; o mapa $A_n(k)^W \to N, a \mapsto au$ é injetivo e, portanto, N tem dimensão infinita). Logo, $e(N) = 1, e(M/N) = 0$; repetindo o argumento anterior, teremos $M/N = 0$ e $N = M$; logo, M é irredutível. □

Isso encerra nossa discussão sobre módulos holonômicos sobre invariantes sob a ação de grupos lineares finitos na Álgebra de Weyl. Fica uma questão: como obter tais módulos? Ela é respondida, por exemplo, pela Teoria de Ordens de Galois (quando k é algebricamente fechado): nos casos que vimos no Capítulo anterior, existe uma subálgebra comutativa maximal Γ em $A_n(k)^W$, e cada ideal maximal m de Γ estende-se, de maneira natural, a um número finito de módulos holonômicos irredutíveis sobre $A_n(k)^W$ — esse aspecto é relevante, uma vez que cada módulo holonômico tem uma série de composição.

Fixe agora k algebricamente fechado. Vamos encerrar esse Capítulo mostrando como anéis de operadores diferenciais em quocientes $\mathbb{A}^n/W$ do espaço afim por grupos finitos de ações lineares, também têm uma estrutura de módulos holônomicos. A estratégia é fazer este caso recair no de invariantes de Álgebra de Weyl.

Lema 6.4. *Seja W um grupo finito de automorfismos lineares de uma álgebra polinomial, e N o grupo gerado pelas pseudorreflexões em W. Então N é normal em W.*

Demonstração. Basta checar que, se s é uma pseudorreflexão, wsw^{-1} também é, para todo $w \in W$. Dado um $w \in W$, denote por H_w a subvariade linear fixa pontualmente por w. Dados s uma pseudorreflexão e w arbitrário, $w(H_s) \subset H_{wsw^{-1}}$. Então $1 \leq codim(H_{wsw^{-1}}) \leq codim(w(H_s)) = 1$. □

Lema 6.5. *Seja W um grupo finito de automorfismos lineares numa álgebra polinomial Λ, e seja N o subgrupo normal gerado pelas pseudorreflexões. Então, no isomorfismo $\Lambda^W \cong (\Lambda^N)^{W/N} \cong \Lambda^{W/N}$ (em que usamos o Teorema de Chevalley-Shephard-Todd), W/N ainda age linearmente em Λ.*

Demonstração. O espaço vetorial $(\Lambda^{+N})^2$, em que Λ^+ são os polinômios sem termo constante, tem um G/N-complemento U com base B. Então G/N age por transformações lineares em B. Pela versão homogênea do lema de Nakayama, B gera Λ^N de maneira minimal. □

Teorema 6.8. *Seja W qualquer grupo finito agindo linearmente na Álgebra de Weyl; portanto, no espaço afim $\mathbb{A}^n$. Então $D(\mathbb{A}^n/W)$ é isomórfico a um anel de invariantes da Álgebra de Weyl sob a ação de um grupo finito agindo linearmente.*

Demonstração. Chame $\Lambda = O(\mathbb{A}^n)$. É claro que $O(\mathbb{A}^n/W)$ é Λ^W. Pelo Teorema 4.1, chamando de N o subgrupo de W gerado pelas pseudorreflexões, nós temos um isomorfismo $D(\Lambda^N)^{W/N} \to D(\Lambda^W) = D(\mathbb{A}^n/W)$. Pelo lema acima, W/N age linearmente em $\Lambda \cong \Lambda^N$. Então $D(\mathbb{A}^n/W) \cong D(\Lambda)^{W'}$, um invariante da Álgebra de Weyl por um grupo finito agindo linearmente. □

Assim, nós temos como transferir a teoria de módulos holonômicos de invariantes da Álgebra de Weyl para quocientes do espaço afim por ações lineares finitas.

6.4 Notas e referências

A exposição da teoria de dimensão filtrada seguiu de perto [Bav06]. Nós usamos [Cou95] como base para ilustrar alguns aspectos elementares da teoria de módulos holônomicos desenvolvida. A parte referente a quocientes de variedades afins seguiu de perto [Tra07].

Capítulo 7

Álgebras de Galois Quânticas

Neste Capítulo, discutiremos brevemente, na primeira seção, versões quantizadas do Teorema de Chevalley-Shephard-Todd e do Problema de Noether. Nas demais seções, discutiremos o artigo "Quantum linear Galois algebras"[FS18c], de Futorny e Schwarz. Esse artigo foi terminado em fase avançada da escrita desta tese; por isso, para manter a coesão do que já foi escrito, omitimos a maior parte das demonstrações. Temos, essencialmente, uma quantização de resultados obtidos em [FS18a]. Na última seção, exibiremos a demonstração de um dos resultados em [FS18c], sobre equivalência birracional de invariantes de $U(sl_2)$.

7.1 Quantizações do Teorema de Chevalley-Shephard-Todd e do Problema de Noehter

Nosso ponto de partida será o seguinte resultado, de [KKZ10]:

Teorema 7.1. *Seja k um corpo de característica 0 e Q uma matriz multiplicativamente antissimétrica de tamanho $n\times n$. Considere o espaço afim quantizado $O_Q(k^n)$, e G um subgrupo finito do grupo de automorfismos de álgebra graduada de $O_Q(k^n)$ (na gradação usual). Então $O_Q(k^n)^G \cong O_{Q'}(k^n)$ se, e somente se, G é gerado por* quase-reflexões *(ver definição abaixo). Q' é uma matriz multiplicativamente antissimétrica $n \times n$ não necessariamente igual à anterior.*

Demonstração. [KKZ10], Thm. 4.5.

Esse resultado é um análogo para quantizações da álgebra polinomial do Teorema de Chevalley-Shephard-Todd. Precisamos apenas esclarecer o que é uma quase-reflexão:

Definição 7.1. *Seja g um automorfismo graduado de um espaço afim quantizado $O_Q(k^n)$. Então g é uma quase-reflexão se estamos em algum dos dois casos seguintes:*

- *Seja O_1 a componente graduada de grau 1 da nossa álgebra. Então, na sua restrição para O_1, que é um espaço vetorial de dimensão n, g atua como uma pseudorreflexão.*
- *A ordem de g é 4 e existe uma base $\{y_1, \ldots, y_n\}$ de O_1, tal que g fixa $y_j, j < n-1$ e $g(y_{n-1}) = iy_{n-1}$ e $g(y_n) = -iy_n$, em que i é tal que $i^2 = -1$.*

Observação. *Em seu trabalho [KKZ10], os autores consideram uma classe maior de álgebras regulares de Artin-Schelter, a saber, álgebras quânticas polinomiais, e consideram a seguinte questão: todo grupo finito gerado por quasi-reflexões (neste sentido generalizado) é realizado como um grupo de pseudorreflexões? A resposta é negativa, [KKZ10], Ex. 6.2.*

Em [FH14], Futorny e Hartwig introduziram uma versão quantizada do Problema de Noether para os grupos de Weyl Clássicos, a qual foi generalizada para os grupos de reflexão unitários de tipo $G(m, p, n)$ por Hartwig em [Har17b].

Seja $\overline{q} = (q_1, \ldots, q_n) \in k^n$ uma n-upla, com cada entrada não-nula e distinta de raízes da unidade, e considere o produto tensorial $k_{q_1}[x_1, y_1] \otimes \ldots \otimes k_{q_n}[x_n, y_n]$, que denotaremos por $O_{\overline{q}}(k^{2n})$; quando todas as entradas de $\overline{q}$ forem um mesmo paramêtro q, usaremos a notação $O_q(k^{2n})$.

Suponha k algebricamente fechado.

Problema. (Hartwig, Futorny [FH14], Problema de Noether Quântico) *Seja G um grupo finito de automorfismos de $O_q(k^{2n})$. Quando existem $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ com $\overline{q} = (q^{k_1}, \ldots, q^{k_n})$ e $Frac\, O_q(k^{2n})^G \cong Frac\, O_{\overline{q}}(k^{2n})$?*

Notemos que, antes do Problema ser enunciado, já havia um caso de solução positiva para ele, devido a Alev e Dumas:

Proposição 7.1. *Seja G qualquer grupo finito de automorfismos de $\mathbb{C}_q[x, y]$. Então $Frac\, \mathbb{C}_q(x, y)^G \cong \mathbb{C}_{q^{|G|}}(x, y)$.*

Demonstração. Segue, com estratégia já utilizada antes de estudar o grupo $Aut_{\mathbb{C}}\mathbb{C}_q[x, y]$, que é provado ser isomórfico ao 2-toro $(\mathbb{C}*)^2$, [AD97]. A prova também pode ser encontrada em [Dum06]. □

$G(m, n, p)$ age em $O_q(k^{2n})$ com um elemento $g = (a, \sigma)$ arbitrário, $a \in A(m, n, p), \sigma \in S_n$ tendo a seguinte ação:

$$g(x_i) = a_i x_{\sigma(i)},\ g(y_i) = y_{\sigma(i)}, a = (a_1, \ldots, a_n), i = 1, \ldots, n.$$

Teorema 7.2. $Frac\, O_q(k^{2n})^{G(m,p,n)} \cong Frac\, (k_{q^{m/p}}[x, y] \otimes k_{q^m}[x, y]^{\otimes(n-1)})$

Demonstração. [Har17b]. □

O resultado acima é uma generalização daquele em [FH14]. Nesse artigo — usando o resultado positivo para o grupo D_n — a teoria de ordens de Galois e a teoria de módulos de Gelfand-Tsetlin sobre $U_q(gl_n)$ (desenvolvida em [VM00]), obteve-se uma nova prova da Conjectura de Gelfand-Kirillov Quantizada para $U_q(gl_n)$ e $U_q(sl_n)$ — de maneira bastante análoga ao caso clássico de $U(gl_n)$ (com a curiosa diferença que o grupo de Weyl é D_n e não mais S_n). Similares resultados de Gelfand-Kirillov para outras ordens de Galois (as chamadas álgebras OGZ quantizadas de tipo A) foram obtidos em [Har17b], usando a solução do Problema de Noether Quântico no caso geral.

Em [Har17b], o autor deixa em aberto o problema de definir ações naturais para os 34 grupos de reflexão unitários finitos excepcionais no espaço quântico afim de obter um resultado análogo do Problema de Noether Quântico.

Encerramos essa seção com a seguinte observação: usando o critério do Teorema 1 e a descrição dos grupos de quase-reflexão, é fácil ver que é impossível termos $O_q(k^{2n})^{S_n}$ isomórfico sequer a um espaço quântico afim; ainda assim, pelo Problema de Noether Quântico, isto vale quando consideramos equivalência birracional. Temos, portanto, uma analogia quantizada perfeita do resultado clássico de Mattuck sobre polinômios multissimétricos ([Mat68]; Capítulo 2, seção 2 desta tese).

7.2 Teoria de Representação de invariantes de Álgebras Quânticas

No artigo ([FS18c]), obtivemos resultados análogos para quantizações de álgebras consideradas em [FS18a] e da noção de álgebras de Galois lineares em [EFOS17].

Considere a ação de $G_m^{\otimes n}$ em $O_q(k^{2n})$, em que $G_m \subset k$ é o grupo cíclico de m elementos: se $g = (g_1, \ldots, g_n) \in G$, então $g(x_i) = g_i x_i$, $g(y_i) = y_i$, $i = 1, \ldots, n$. Esta ação, assim como as demais, são como as definidas por Hartwig em [Har17b].

Nós temos:

Proposição 7.2. *$O_q(k^{2n})^{G_m^{\otimes n}}$ é isomórfico a $O_{q^m}(k^{2n})$.*

Considere o monoide livre $\mathbb{N}^n$ em n geradores $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$; e o anel de monoides torcido $k[x_1, \ldots, x_n] * \mathbb{N}^n$, no qual a ação de $\mathbb{N}^n$ é a seguinte: $\epsilon_i(x_i) = qx_i$, $\epsilon_i(x_j) = x_j$, $j \neq i$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Proposição 7.3. *O espaço quântico afim (e, portanto, seus invariantes pela ação do produto de grupos cíclicos, Proposição 7.2) $O_q(k^{2n})$ é uma ordem de Galois sobre $\Gamma = k[x_1, \ldots, x_n]$ em $k(x_1, \ldots, x_n) * \mathbb{N}^n$. Γ é Harish-Chandra e $O_q(k^{2n})$ é um módulo livre sobre ela.*

Os grupos $G = G(m, p, n)$ agem da seguinte maneira em $O_q(k^{2n})$: $h = (g, \pi) \in G$, $g = (g_1, \ldots, g_n) \in G_m^{\otimes n}$, $\pi \in S_n$: $h(x_i) = g_i x_{\pi(i)}$, $h(y_i) = y_{\pi(i)}$, $i = 1, \ldots, n$. G também age em $k[x_1, \ldots, x_n] * \mathbb{N}^n$: dado $h \in G$ como anteriormente, $h(x_i) = g_i x_{\pi(i)}$, $h(\epsilon_i) = \epsilon_{\pi(i)}, i = 1, \ldots, n$. A ação de G é equivariante com relação ao isomorfismo na Proposição 7.3, e claramente G age em $\mathbb{N}$ por conjugação.

Teorema 7.3. ([FS18c], Thm. 5) *Para todo $G = G(m, p, n)$, nós temos $O_q(k^{2n})^G$ uma ordem de Galois sobre $\Gamma = k[x_1, \ldots, x_n]^G$. Γ é Harish-Chandra, polinomial, e $O_q(k^{2n})^G$ é um Γ-módulo livre.*

No caso de posto 1 sobre os complexos, podemos obter um resultado melhor:

Teorema 7.4. ([FS18c], Thm. 7) *Seja G qualquer grupo finito de $\mathbb{C}$-automorfismos de $\mathbb{C}_q[x, y]$. Então $\mathbb{C}_q[x, y]^G$ é uma ordem de Galois sobre uma Γ polinomial em uma variável, Γ é Harish-Chandra, e $\mathbb{C}_q[x, y]^G$ é um Γ-módulo livre.*

Temos um análogo do Teorema 7.3 para o toro quântico $O_q(k*^{2n})$, a localização de $O_q(k^{2n}) \simeq k[x_1, \ldots, x_n] * \mathbb{N}^n$ por $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$. É fácil ver que $O_q(k*^{2n}) \simeq k[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}] * \mathbb{Z}^n$.

Teorema 7.5. ([FS18c], Thm. 6) *Para todo $G = G(m, p, n)$, $O_q(k*^{2n})^G$ é uma ordem de Galois sobre $\Gamma = k[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]^G$ em $(k(x_1, \ldots, x_n) * \mathbb{Z}^n)^G$. Além disso, $O_q(k^{2n})^G$ é livre como Γ-módulo, e Γ é Harish-Chandra.*

Temos também uma quantização do resultado em [FS17] sobre operadores simétricos na álgebra de Weyl.

Seja $A_q^1(k)$ a primeira Álgebra de Weyl quantizada, o quociente de $k\langle x, y\rangle$ pela relação $yx - qxy = 1$. Seja $A_q^n(k) = A_q^1(k)^{\otimes n}$, com os geradores usuais $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$. S_n atua em $A_q^n(k)$ permutando as variáveis x_i, y_i simultaneamente.

Teorema 7.6. ([FS18c], Thm. 8) *$A_q^n(k)^{S_n}$ é uma ordem de Galois sobre uma Γ polinomial e Harish-Chandra, e livremente gerada como Γ-módulo.*

Assim como no caso do toro quântico, temos resultados melhores para posto 1 sobre os complexos.

Teorema 7.7. ([FS18c], Prop. 7) *Seja G qualquer grupo finito de automorfismos de $A_q^1(\mathbb{C})$. Então, $A_q^1(\mathbb{C})^G$ é uma ordem de Galois sobre uma Γ polinomial em uma variável, e Harish-Chandra, e livre como Γ-módulo.*

7.3 Álgebras de Galois Lineares e Conjectura de Gelfand-Kirillov quantizadas

Na seção 5.3 de [FS18c], desenvolvemos uma quantização da teoria de álgebras de Galois lineares de [EFOS17] (Capítulo 5, seção 1). Seja V um espaço vetorial complexo de dimensão finita, $S = S(V^*) = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, e $L = Frac\, S$. Seja G um grupo de reflexões unitárias, produto de grupos da forma $G(m, p, n)$. Considere o produto tensorial $S \otimes \mathbb{C}[w_1, \ldots, w_m]$, com a ação de G trivial no segundo termo do produto.

Nós dizemos que uma álgebra de Galois U sobre um Γ adequado é *uma álgebra de Galois linear quantizada*, se ela mergulha em um anel de invariantes do tipo $(\mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n; w_1, \ldots, w_m) * \mathbb{Z}^n)^G$

ou $(\mathbb{C}(x_1,\ldots,x_n;w_1,\ldots,w_m)*\mathbb{N}^n)^G$, em que a base $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$ de tanto $\mathbb{Z}^n$ quanto $\mathbb{N}^n$ age assim: $\epsilon_i(x_i)=qx_i$, $\epsilon_i(x_j)=x_j$, $j\neq i$, $i,j=1,\ldots,n$; a ação é trivial nos $w_i, i=1,\ldots,m$.

Todas as álgebras quantizadas OGZ introduzidas em [Har17b] são um exemplo de álgebras de Galois lineares quantizadas. Como exemplos específicos, temos $U_q(gl_n)$ e sua forma simplesmente conexa $\check{U}(gl_n)$ e a Álgebra de Heisenberg quantizada. Todas as álgebras da seção anterior também são exemplos de álgebras de Galois lineares quantizadas.

De maneira análoga a [EFOS17], Thm. 6 (Teorema 5.3 desta tese), nós temos um resultado ligando essa nova classe de álgebras de Galois com a versão quantizada da Conjectura de Gelfand-Kirillov.

Teorema 7.8. ([FS18c], Thm. 9) *Seja U uma álgebra de Galois quantizada em $(\mathbb{C}(x_1,\ldots,x_n;w_1,\ldots,w_m)*X^n)^G$, em que X é $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$, com uma ação de G como acima. Então a Conjectura de Gelfand-Kirillov quantizada vale para U e existem $l=(l_1,\ldots,l_n)\in\mathbb{Z}^n$, tais que $Frac\,U\cong Frac\,(O_{\overline{q}}(k^{2n})\otimes\mathbb{C}[w_1,\ldots,w_n])$, em que $\overline{q}=(q^{l_1},\ldots,q^{l_n})$.*

Ainda no mesmo tópico, provamos a Conjectura quantizada de Gelfand-Kirillov para o anel de funções regulares na esfera quântica: $A(S^2_\lambda)$. Esta álgebra é o quociente de $\mathbb{C}\langle X,Y,H\rangle$ pelas relações $XH=\lambda HX$, $YH=\lambda^{-1}HY$, $\lambda^{1/2}YX=-(c-H)(d+H)$, $\lambda^{-1/2}XY=-(c-\lambda H)(d+\lambda H)$, para escalares $c,d,0\neq\lambda\in\mathbb{C}$.

Corolário 7.1. ([FS18c], Corol. 1) $Frac\,A(S^2_\lambda)\cong Frac\,\mathbb{C}_\lambda[x,y]$.

7.4 Equivalência Birracional de invariantes de U(sl2)

Nesta seção, ofereceremos um exemplo para a questão posta por Kirkman, Kuzmanovich e Zhang ([KKZ08]; Capítulo 2, seção 3 desta tese), utilizando $U(sl_2)$, que sabemos ser rígida pelo resultado de Alev e Polo [AP95]. k é algebricamente fechado de característica 0.

$U(gl_2)$ tem os geradores e,f,h com as relações $[h,e]=e$, $[h,f]=-f$ e $[e,f]=2h$; aqui e,f,h são a base canônica de sl_2. $U(sl_2)$ pode ser realizado como álgebra de Weyl generalizada da seguinte maneira: $D(a,\sigma)$, $D=k[H,C]$, $a=C-H(H+1)$, $\sigma(C)=C,\sigma(H)=H-1$. O isomorfismo é como se segue: $e\mapsto X$, $f\mapsto Y$, $h\mapsto H$, $h(h+1)+fe\mapsto C$.

Defina uma ação do grupo cíclico de ordem m, $G_m, m\geq 1$, em $U(sl_2)$, com um gerador fixado $g\in G_m$ agindo da seguinte forma: $h\mapsto h$, $e\mapsto\xi e$, $f\mapsto\xi^{-1}f$, em que ξ é uma raiz m-ésima da unidade fixada. Nós temos que $k[H,C](a,\sigma)$ é mergulhado de maneira birracionalmente equivalente em $k[H,C]*\mathbb{Z}$, em que $\mathbb{Z}$ age como σ. A ação de G_m estende-se de maneira natural a este anel maior: $g(\overline{y})\mapsto\xi^y y, y\in\mathbb{Z}$. Portanto, temos um mergulho birracional de $U(sl_2)^{G_m}$ em $(k[H,C]*\mathbb{Z})^{G_m}$.

Como C é fixo pela ação de G_m e de σ, $(k[H,C]*\mathbb{Z})^{G_m}\cong(k[C]\otimes(k[H]*\mathbb{Z})^{G_m})$.

Por sua vez, $k[H]*\mathbb{Z}$ é o anel de operadores diferenciais no toro: $A_1(k)_x=A_1(k)_{x^m}$. Assim, $Frac\,(k[H]*\mathbb{Z})^{G_m}\cong Frac\,(A_1(k)_{x^m})^{G_m}\cong Frac\,(A_1(k)^{G_m}_{x^m})\cong Frac\,(A_1(k)^{G_m})$, em que a ação do gerador g em $A_1(k)$ é como se segue: $x\mapsto\xi^{-1}x$, $\partial\mapsto\xi\partial$.

Concluímos que $U(sl_2)^{G_m}$ é birracionalmente equivalente a $k[C]\otimes A_1(k)^{G_m}$. Pelo Problema de Noether Não-Comutativo, ação de grupos abelianos ([AD06]), $Frac\,A_1(k)^{G_m}\cong Frac\,A_1(k)$ nós temos:

Proposição 7.4. ([FS18c], Corol. 3)
Para $m>1$ e a ação de G_m dada acima, temos $Frac\,(U(sl_2)^{G_m})\cong Frac\,(k[C]\otimes A_1(k))\cong Frac\,(k[C])\otimes Frac\,(U(sl_2))$.

O último isomorfismo é a Conjectura de Gelfand-Kirillov para sl_2 [GK66].

7.5 Notas e Referências

Essa é a primeira vez que uma discussão dedicada exaustivamente ao Problema de Noether Quântico é feita. Esse problema é interessante devido a sua manifesta relação com a teoria de

Ordens de Galois e álgebras regulares de Artin-Schelter. Até onde sabemos, o artigo [FS18c] é o primeiro a tratar da questão levantada por Kirkman, Kuzmanovich e Zhang ([KKZ08]) para álgebras envolventes de álgebras de Lie semissimples.

Referências Bibliográficas

[AD97] J. Alev e F. Dumas. Invariants du corps de Weyl sous l'action de grupes finis. *Comm. Algebra*, 25:1655–1672, 1997. 3, 18, 21, 27, 33, 66

[AD98] J. Alev e F. Dumas. Sur les invarians des àlgebres de Weyl de leus corps de fractions. *Lecutre Notes in Pure and Applied Math.*, 197:1–10, 1998. 33

[AD06] J. Alev e F. Dumas. Opérateurs différentiels invariants et problème de Noether. Em J. Bernstein, V. Hinich e A. Melnikov, editors, *Studies in Lie Theory*, páginas 21–50. Birkhäuser, 2006. 1, 2, 19, 26, 27, 33, 68

[Ale86] J. Alev. Un automorfisme non modéré de U(g3). *Comm. Algebra*, 14:1365–1378, 1986. 21

[AM69] M. F. Atiyah e I. G. MacDonald. *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley, 1969. 4

[AOdB96] J. Alev, A. Ooms e M. Van den Bergh. A class of counterexamples to the Gelfand-Kirillov conjecture. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348:1709–1716, 1996. 19

[AOdB00] J. Alev, A. Ooms e M. Van den Bergh. The Gelfand-Kirillov conjecture for Lie algebras of dimension at most eight. *J. Algebra 227*, páginas 549–581, 2000. Corrigendum in J. Algebra 230 (2000) p. 749. 19

[AP95] J. Alev e P. Polo. A Rigidity Theorem for Finite Group Actions on Enveloping Algebras of Semisimple Lie Algebras. *Adv. Math.*, 111(2):208 – 226, 1995. 1, 16, 17, 18, 21, 68

[Bas63] H. Bass. Big projective modules are free. *Illinois J. Math.*, 7:24–31, 1963. 3, 53

[Bav95] V. Bavula. Identification of the hilbert function and poincaré series, and the dimension of modules over filtered rings. *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, 44:225–246, 1995. 61, 62

[Bav96] V. Bavula. Filter dimension of algebras and modules, a simplicity criterion for generalized Weyl algebras. *Comm. Algebra*, 24:1971–1992, 1996. 59, 60

[Bav06] V. Bavula. Filter dimension. Em M. Hazewinke, editor, *Handbook of Algebra*, volume 4. 2006. 3, 59, 60, 61, 62, 64

[Bav17] V. Bavula. Generalized Weyl algebras and diskew polynomial rings. arXiv:1612.08941, 2017. 11, 12

[BB00] V. Bavula e V. Bekkert. Indecomposable representations of generalized Weyl algebras. *Comm. Algebra*, 28(11):5067–5100, 2000. 11, 12

[Ben93] D. J. Benson. *Polynomial Invariants of Finite Groups*. Number 190 in London Mathematical Society Lecture Notes. Cambridge University Press, 1993. 14

[BG02] K. A. Brown e K. R. Goodearl. *Lectures on algebraic quantum groups*. Advanced Course in Math. CRM Barcelona, vol. 2. Birkhäuser-Verlag, Basel, 2002. 4, 19, 20, 21

[BGG72] J. N. Bernstein, I. M. Gelfand e S. I. Gelfand. Differential operators on the cubic cone. *Russian Math. Surveys*, 27:169–174, 1972. 8

[BGR73] W. Borho, P. Gabriel e R. Rentschler. *Primideale in Einhüllenden Auflösbarer Lie-Algebren.* Lecture Notes in Mathematics, vol. 357. Springer, Berlin, 1973. 19

[Bjo79] J. E. Bjork. *Rings of Differential Operators.* North-Holland, 1979. 12, 59

[Blo81] R. Block. The irreducible representations of the lie algebra sl(2) and of the Weyl algebra. *Adv. Math.*, 39:69–110, 1981. 3, 47

[Bou68] N. Bourbaki. *Groupes et àlgebres de Lie, Ch V.* Hermann, Paris, 1968. 14

[Bur14] W. Burnside. *Theory of Groups of Finite Order.* Cambridge University Press, 1914. 15

[BvO04] V. Bavula e F. van Oystaeyen. Simple modules of the WittenâWoronowicz algebra. *J. Algebra*, 271(2):827 – 845, 2004. 12

[CH94] R. Cannings e M. P. Holland. Differential operators on varieties with a quotient subvariety. *J. Algebra*, 170:735–753, 1994. 37

[Che55] C. Chevalley. Invariants of Finite Groups Generated by Reflections. *Amer. J. Math.*, 77(4):778–782, 1955. 21

[Coh85] P. M. Cohn. *Free Rings and Their Relations.* Academic Press, second edição, 1985. 12

[Con74] N. Conze. Alglèbres d'opérateurs différrentiels et quotients des alglèbres enveloppantes. *Bull. Soc. Math. France*, 102:379–415, 1974. 19

[Cou95] S. C. Coutinho. *A primer of algebraic D-modules.* London Mathematical Society Student Texts 33. Cambridge University Press, 1995. 8, 54, 59, 63, 64

[DF82] W. Dicks e E. Formanek. Poincar'e series and a problem of S. Montgomery. *Linear Multilinear Algebra*, 12(1):21–30, 1982. 17

[DFO94] Y. Drozd, V. Futorny e S. Ovsienko. Harish-Chandra subalgebras and Gelfand-Zetlin modules. Em *Finite Dimensional Algebras and Related Topics*, volume 424, páginas 79–93. NATO ASI Ser. C., Math. Phys. Sci., 1994. 1, 2, 3, 12, 47, 49, 50, 52

[Dix74] J. Dixmier. *Alglèbres Enveloppantes.* Gauthier-Villardd, Paris, 1974. 4, 50, 52

[Dol03] I. Dolgachev. *Lectures on Invariant Theory.* London Mathematical Society Lecture Note Series 296. Cambridge University Press, 2003. 5

[Dum06] F. Dumas. An introduction to noncommutative polynomial invariants, March 2006. Homological Methods and representations of non-commutative algebras, Mar del Plata, Argentina, http://math.univ-bpclermont.fr/$\tilde{f}$dumas/fichiers/CIMPA.pdf. 12, 15, 21, 22, 33, 62, 66

[EFOS17] F. Eshmatov, V. Futorny, S. Ovsienko e J. Schwarz. Noncommutative Noether's Problem for Complex Reflection Groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 145:5043–5052, 2017. 1, 2, 3, 35, 37, 42, 43, 44, 45, 49, 66, 67, 68

[EG02] P. Etingof e V. Ginzburg. Symplectic reflection algebras, Calogero-Moser space, and deformed Harish-Chandra homomorphism. *Invent. Math.*, 147:243–348, 2002. 19, 44

[EM10] P. Etingof e X. Ma. Lecture notes on Cherednik algebras. arxiv:1001.0432v4, 2010. 44, 45

[Fai72] C. Faith. Galois subrings of Ore domains are Ore domains. *Bull AMS*, 78, 1972. 24

[FH14] V. Futorny e J. T. Hartwig. Solution of a q-difference Noether problem and the quantum Gelfand-Kirillov conjecture for gln. *Math. Z.*, 276:1–37, 2014. 3, 47, 48, 49, 65, 66

[Fis16] E. Fischer. Zur theorie der endlichen Abelschen Gruppe. *Math. Ann.*, 77:81–88, 1916. 15

[FMO10] V. Futorny, A. Molev e S. Ovsienko. The Gelfand-Kirillov conjecture and Gelfand-Tsetlin modules for finite W-algebras. *Adv. Math.*, 223:773–796, 2010. 3, 47, 49

[FO05] V. Futorny e S. Ovsienko. Kostant's theorem for special filtered algebras. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 37:1–13, 2005. 11

[FO06] V. Futorny e S. Ovsienko. Galois Algebras I: Structure Theory. *Trabalhos do Departamento de Matemática*, (13), 2006. 35, 39, 47, 49, 55

[FO10] V. Futorny e S. Ovsienko. Galois orders in skew monoid rings. *J. Algebra*, 324(4):598 – 630, 2010. 1, 3, 19, 47, 48, 49, 50, 53, 55, 56, 58

[FO14] V. Futorny e S. Ovsienko. Fibers of characters in Gelfand-Tsetlin categories. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 366:4173–4208, 2014. 1, 3, 19, 47, 51, 52, 58

[For84] E. Formanek. Rational Function Fields. Noether's Problem and Related Questions. *J. Pure App. Algebra*, 31:28–36, 1984. 17, 21

[For85] E. Formanek. Noncommutative invariant theory. *Contemp. Math.*, 43:87–119, 1985. 21, 33

[FS17] V. Futorny e J. Schwarz. Galois orders of symmetric differential operators. *Algebr. Discrete Math.*, 23(1):35–46, 2017. 1, 2, 35, 39, 45, 47, 54, 67

[FS18a] V. Futorny e J. Schwarz. Algebras of invariant differential operators, 2018. as submmited to Journal of algebra; preliminary version with some small differences in arXiv:1804.05029. 1, 3, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 65, 66

[FS18b] V. Futorny e J. Schwarz. Noncommutative Noether's Problem vs Classical Noether's Problem, 2018. arXiv:1805.01809v3. 1, 2, 35, 39, 40, 42, 43, 45

[FS18c] V. Futorny e J. Schwarz. Quantum linearl Galois algebras, 2018. arXiv:1804.08120. 1, 3, 58, 65, 66, 67, 68, 69

[Fut18] V. Futorny. Representations of galois algebras. Em Marcelo Viana Boyan Sirakov, Paulo Ney de Souza, editor, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2018*, volume 2. World Scienti
fic Publishing Co Pte Ltd, 2018. 47, 58

[GJ04] K. R. Goodearl e R. B. Warfield Jr. *An introduction to noncommutative Noetherian Rings*. London Mathematical Society Students Texts 61. Cambridge University Press, segunda edição, 2004. 4, 8, 9

[GK66] I. M. Gelfand e K. K. Kirillov. *Sur les corps liés aux algèbres envoloppantes des algèbres de Lie*, volume 31 of *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Mat.*, páginas 5–19. 1966. 1, 12, 18, 19, 68

[GK69] I. M. Gelfand e A. A. Kirillov. Structure of the lie field connected with a split semisimple lie algebra. *Funkcional. Anal. i Prilozen.*, 3:7–26, 1969. Russian. 19

[GT50] I. Gelfand e M. Tsetlin. Finite-dimensional representations of the group of unimodular matrices. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 71:825–828, 1950. Russian. 1

[Gur85] R. M. Guralnick. Invariants of Finite Linear Groups on Relatively Free Algebras. *Linear Algebra App.*, 72:85–92, 1985. 17

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, 1977. 4, 5, 14, 43

[Har17a] J. T. Hartwig. Principal Galois orders and Gelfand-Zetlin modules. arxiv:1710.04186, 2017. 58

[Har17b] J. T. Hartwig. The q-difference Noether problem for complex reflection groups and quantum OGZ algebras. *Comm. Algebra*, 45:1166–1176, 2017. 3, 49, 65, 66, 68

[Hum72] J. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.* Springer, 1972. 4

[Hum08] J. E. Humphreys. *Representations of Semisimple Lie Algebras in the BGG Category O*, volume 94 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, 2008. 52

[Jac89] N. Jacobson. *Basic Algebra II.* W. H. Freeman, segunda edição, 1989. 15

[JLY02] C. U. Jensen, A. Ledet e N. Yui. *Generic Polynomials: Constructive Aspects of the Inverse Galois Problem*, volume 45 of *Mathematical Sciences Research Institute Publications.* Cambridge University Press, 2002. 14, 15, 21

[Jos74] A. Joseph. Proof of the Gelfand-Kirillov conjecture for solvable lie algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 45:1–10, 1974. 19

[Jr.74] H. W. Lenstra Jr. Rational functions invariant under a finite abelian group. *Invent. Math*, páginas 299–325, 1974. 16

[Kan01] R. Kane. *Reflection Groups and Invariant Theory.* CMS Books in Mathematics. Springer, 2001. 21, 36, 37, 38, 40, 41

[Kha78] V. K. Kharchenko. Algebras of invariants of free algebras. *Algebra Logic*, 17:316–321, 1978. 17

[Kho05] A. Khomenko. Some applications of Gelfand-Zetlin modules. Em *Representations of Algebras and Related Topics*, volume 45 of *Fields Inst. Commun.*, páginas 205–213. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005. 47

[KKZ08] E. Kirkman, J. Kuzmanovich e J. Zhang. Rigidity of Graded Regular Algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 360:6331â6369, 12 2008. 16, 18, 21, 68, 69

[KKZ10] E. Kirkman, J. Kuzmanovich e J. Zhang. Shephard-Todd-Chevalley theorem for skew polynomial rings. *Algebr. Repr. Theory*, 13:127â158, 2010. 3, 65

[KL00] G. R. Krause e T. H. Lenegan. *Growth of Algebras and Gelfand-Kirillov Dimension.* Graduates Studies in Mathematics 22. American Mathematical Society, revisada edição, 2000. 27, 41, 43, 59, 60, 61

[Kno06] F. Knop. Graded cofinite rings of differential operators. *Michigan Math. J.*, 54, 2006. 40

[Kra95] H. Kraft. Challenging problems of affine n-space. Seminaire Bourbaki, exp 802, 1994-1995, 1995. 22

[KW82] V. Kac e K. Watanabe. Finite linear groups whose ring of invariants is a complete intersection. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 6(2):221–223, 03 1982. 21

[Lan76] D. R. Lane. *Free algebras of rank two and their automorphisms.* Tese de Doutorado, Bedford College, London, 1976. 17

[Lev80] T. Levasseur. Anneaus d'operateurs differentiels. Em *Séminaire d'Algebre Paul Dubreil et Marie-Pau le Malliavin*, Lecture Notes in Mathematics 867, páginas 157–173, Paris, 1980. Springer-Verlag. 36

[Liu02] Q. Liu. *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*, volume 6 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics.* Oxford University Press, 2002. 4, 43

[LS95] T. Levasseur e J. Stafford. Invariant differential operators and an homomophism of Harish-Chandra. *J. Amer. Math. Soc.*, 8:365–372, 1995. 26, 41, 42

[Mae89] T. Maeda. Noether's problem for A5. *J. Algebra*, 125:418–430, 1989. 15

[Mat68] A. Mattuck. The field of multisymmetric functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 19:764–765, 1968. 15, 66

[Maz01] V. Mazorchuk. On Gelfand-Zetlin modules over orthogonal lie algebras. *Algebra Colloq.*, 8:345–346, 2001. 50, 52

[McC74] J. C. McConnell. Representations of solvable Lie algebras and the Gelfand-Kirillov conjecture. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 29:453–484, 1974. 19

[MFK94] D. Mumford, J. Fogarty e F. Kirwan. *Geometric Invariant Theory.* Springer-Verlag, 3 edição, 1994. 5

[Miy71] T. Miyata. Invariants of certain groups I. *Nagoya Math. J.*, 42:68–73, 1971. 15

[MMJP91] M. Masuda, L. Moser-Jauslin e T. Petrie. Equivariant algebraic vector bundles over representations of reductive groups: Applications. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 88:9065–9066, 1991. 13

[Mol06] A. Molev. Gelfand-Tsetlin bases for classical Lie algebras. Em *Handbook of algebra Vol 4*, páginas 109–170. Elsevier-North-Holland, Amsterdam, 2006. 50

[Mon80] S. Montgomery. *Fixed Rings of Finite Automorphism Groups of Associative Rings.* Lecture Notes in Mathematics 818. Springer-Verlag, 1980. 24, 27, 33, 63

[MR01] J. C. McConnell e J. C. Robson. *Noncommutative noetherian rings.* Graduate Studies in Mathematics 30. American Mathematical Society, revisada edição, 2001. 3, 4, 8, 12, 17, 21, 24, 27, 39, 42, 47, 61, 62

[MS81] S. Montgomery e L. W. Small. Fixed rings of noetherian rings. *Bull. London. Math. Soc.*, 13:33–38, 1981. 25

[Muh88] A. J. Muhasky. The differential operator ring of an affine curve. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 307:705–723, 1988. 8, 42

[Noe13] E. Noether. Rational Funktionenkörper. *Jahrericht Deutsch. Math.-Varein.*, 22:316–319, 1913. 1

[Ovs02] S. Ovsienko. Finiteness statements for Gelfand-Tsetlin modules. Algebraic Structures and Their Applications, Math. Inst., Kiev, 2002. 2, 3, 11, 50, 52

[Pre10] A. Premet. Modular Lie Algebras and the Gelfand-Kirillov Conjecture. *Invent. Math.*, 181:395–420, 2010. 19, 21, 41, 50

[PS67] J. P.-Serre. Groupes finis d' automorphisms d' anneaux locaux reguliers. *Colloq. d' Alg. Ecole Norm. de Jeunes Filles*, páginas 1–11, 1967. 21

[PS77] J. P.-Serre. *Arbres, Amalgames, SL2.* Societe Mathematique de France, 1977. 21

[PSV94] V. L. Popov, T. A. Springer e E. B. Vinberg. Algebraic Geometry IV. Springer-Verlag, 1994. 21

[Row80] L. H. Rowen. *Polynomial Identities in Ring Theory.* Academic Press, 1980. 21

[RU07] D. Riley e H. Usefi. The isomorphism problem for universal enveloping algebras of lie algebras. *Algebr. Repr. Theory*, 10:517, 2007. 18

[Sal84] D. Saltman. Noether's problem over an algebraically closed field. *Invent. Math.*, 77:71–84, 1984. 16

[Sal85] D. Saltman. Groups acting on fields: Noether's problem. Em *Groups Actions on Rings*, Contemp. Math. 43, páginas 267–277. Amer. Math. Soc., 1985. 21

[Sch15a] J. Schwarz. Problema de Noether não-comutativo. Dissertação de Mestrado, IME-USP, 2015. 2

[Sch15b] J. Schwarz. Some aspects of noncommutative invariant theory and the Noether's Problem. *Sao Paulo J. Math. Sci.*, 9:62–75, 2015. 41, 45

[Smi] S. P. Smith. Differential Operators on Commutative Algebras. 7, 12

[Spr77] T. A. Springer. *Invariant Theory.* Lecture Notes in Mathematics 585. Springer-Verlag, 1977. 21, 36

[ST54] G. C. Shephard e J. A. Todd. Finite unitary reflection groups. *Canad. J. Math.*, 6:274–304, 1954. 21

[SU04] I. P. Shestakov e U. Umirbaev. The Tame and the Wild Automorphisms of Polynomial Rings in Three Variables. *J. Amer. Math. Soc.*, 17(1):197–227, 2004. 13

[Swa69] R.G. Swan. Invariant rational functions and a problem of steenrod. *Invent. Math.*, 7:148–158, 1969. 16

[Tik17] A. Tikaradze. The Weyl algebra as a fixed ring. arXiv:1708.07923, 2017. 18

[Tra07] W. N. Traves. Invariant Theory and Differential Operators. *Radon Series Comp. Appl. Math*, 1:1–24, 2007. 26, 33, 64

[vdE00] A. van der Essen. *Polynomial automorphisms and the jacobian conjeture*, volume 190 of *Progress in Mathematics.* Birkhauser Verlag, 2000. 13, 20

[VM00] L. Turowska V. Mazorchuk. On Gelfand-Zetlin modules over Uq(gln). *Czechoslovak J. Phys.*, 50(1):139–144, 2000. 66

[Vos70] V. E. Voskresenskii. On the question of the structure of the subfield of invariants of a cyclic group of automorphisms of the field Q(x1 , . . . , xn) (russian). *Izv. Akad. Nauk SSSR ser. Mat.*, 34:366â375, 1970. English translation in Math. USSR-Izv. 8,4 (1970), 371â380. 16

[Zha98] J. J. Zhang. On Lower Transcendene Degree. *Adv. Math.*, páginas 157–193, 1998. 27

[Zhe70] D. P. Zhelobenko. *Compact Lie Groups and Their Representations.* Nauka, Moscow, 1970. Transl. Math. Monogr., vol. 40, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1973. 1, 11