**Subálgebras de Mishchenko-Fomenko
em $\mathcal{S}(gl_n)$ e sequências regulares**

Wilson Fernando Mutis Cantero

DISSERTAÇÃO/TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Nascimento Marcos

Coorientador: Prof. Dr. Vyacheslav Futorny.

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, 01 de Abril de 2016

Subálgebras de Mishchenko-Fomenko em $\mathcal{S}(gl_n)$ e sequências regulares

Esta é a versão original da dissertação/tese elaborada pelo
candidato, Wilson Fernando Mutis Cantero, tal como
submetida à Comissão Julgadora.

Subálgebras de Mishchenko-Fomenko em $\mathcal{S}(gl_n)$ e sequências regulares

Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Vyacheslav Futorny (Presidente)- IME-USP
- Prof. Dr. Henrique Guzzo Junior - IME-USP
- Prof. Dr. Plamen Koshlukov - UNICAMP
- Prof. Dr. Marcos Jardim - UNICAMP
- Prof. Dr. Viktor Bekkert - UFMG

Agradecimentos

A Deus, a minha esposa Vibiana, aos meus filhos Brayan Andres, Mateo e Valentina, e aos professores Eduardo e Futorny. Muito obrigado.

Resumo

Subálgebras de Mishchenko-Fomenko em $\mathcal{S}(gl_n)$ e sequências regulares. 2016. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

Seja $\mathcal{S}(gl_n)$ a álgebra simétrica da álgebra de Lie das matrizes de tamanho $n \times n$ sobre o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos. Para $\xi \in gl_n^* \cong gl_n$ seja $\mathcal{F}_\xi(gl_n)$ a *subálgebra de Mishchenko-Fomenko* de $\mathcal{S}(gl_n)$ construída pelo *método de deslocamento de argumento* associada ao parâmetro ξ . É conhecido que se ξ é um elemento semisimples regular ou nilpotente regular então a subálgebra $\mathcal{F}_\xi(gl_n)$ é gerada por uma sequência regular em $\mathcal{S}(gl_n)$. Nesta tese é provado que em gl_3 o resultado estende para todo $\xi \in gl_3$, isto é, as subálgebras de Mishchenko-Fomenko $\mathcal{F}_\xi(gl_3) \subset \mathcal{S}(gl_3)$ são geradas por uma sequência regular em $\mathcal{S}(gl_3)$, uma consequência deste fato é que os módulos irredutíveis sobre certas subálgebras comutativas da álgebra envolvente universal $U(gl_3)$ podem ser levantados a módulos irredutíveis sobre $U(gl_3)$. Além disso, é provado que em gl_4 esse resultado é válido para todo elemento nilpotente $\xi \in gl_4$. O caso geral, que é determinar quando as subálgebras de Mishchenko-Fomenko $\mathcal{F}_\xi(gl_n) \subset \mathcal{S}(gl_n)$, com $\xi \in gl_n$, são geradas por uma sequência regular em $\mathcal{S}(gl_n)$, é ainda um problema aberto.

Palavras-chave: Álgebra envolvente universal, álgebra simétrica, módulo irredutível, subálgebra de Mishchenko-Fomenko, o método de deslocamento de argumento, sequência regular.

Abstract

Mishchenko-Fomenko subalgebras in $\mathcal{S}(gl_n)$ and regular sequences. 2016. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

Let $\mathcal{S}(gl_n)$ be the symmetric algebra of the Lie algebra of the matrices of size $n \times n$ over the field $\mathbb{C}$ of complex numbers. For $\xi \in gl_n^* \cong gl_n$ let $\mathcal{F}_\xi(gl_n)$ be the *Mishchenko-Fomenko subalgebra* of $\mathcal{S}(gl_n)$ constructed by the *argument shift method* associated with the parameter ξ . It is known that if ξ is a semisimple regular element or nilpotent regular element then the subalgebra $\mathcal{F}_\xi(gl_n)$ is generated by a regular sequence in $\mathcal{S}(gl_n)$. In this thesis we prove that in gl_3 the result is extended to all $\xi \in gl_3$, this is, the Mishchenko-Fomenko subalgebras $\mathcal{F}_\xi(gl_3) \subset \mathcal{S}(gl_3)$ are generated by a regular sequence in $\mathcal{S}(gl_3)$. A consequence of this fact is that the irreducible modules over certain commutative subalgebras of the universal enveloping algebra $U(gl_3)$ can be lifted to irreducible modules over $U(gl_3)$. Furthermore, is proved that this result is true for all elements nilpotente $\xi \in gl_4$. The general case, which is determined when the Mishchenko-Fomenko subalgebras $\mathcal{F}_\xi(gl_n) \subset \mathcal{S}(gl_n)$, with $\xi \in gl_n$, are generated by a regular sequence in $\mathcal{S}(gl_n)$, it is still an open problem.

Keywords: Universal enveloping algebra, symmetric algebra, module irreducible, Mishchenko-Fomenko subalgebra, the argument shift method, regular sequence.

Introdução

Vamos fixar um corpo $\mathbb{F}$ algebricamente fechado de característica zero e uma $\mathbb{F}$ -álgebra de Lie L de dimensão finita. Seja $U = U(L)$ a álgebra envolvente universal de L , é conhecido que a categoria dos L -módulos é equivalente à categoria dos $U(L)$ -módulos, portanto, podemos obter informação sobre os L -módulos irredutíveis estudando os $U(L)$ -módulos irredutíveis. Denotamos por $\text{Irr}(U)$ ao conjunto dos U -módulos irredutíveis. Seja agora B uma subálgebra comutativa de U , um problema importante na teoria de representações de álgebras de Lie é a relação entre os conjuntos $\text{Irr}(B)$ e $\text{Irr}(U)$, de fato, é importante responder à seguinte pergunta:

Pergunta 1. Quando um módulo em $\text{Irr}(B)$ pode ser levantado a um módulo em $\text{Irr}(U)$?

Uma condição suficiente para dar resposta positiva à pergunta anterior é que U seja um B -módulo livre (à esquerda ou à direita). Isso nos leva para uma nova pergunta:

Pergunta 2. Quando U é um B -módulo livre (à esquerda ou à direita)?

Um exemplo onde temos resposta positiva é o famoso teorema de Kostant (ver [Kostant \(1963\)](#)) que afirma que numa $\mathbb{C}$ -álgebra de Lie semisimples L a sua álgebra envolvente universal $U(L)$ é um módulo livre sobre seu centro. Um outro exemplo importante onde temos resposta positiva é o seguinte: Seja $\{E_{ij} : i, j = 1, \dots, n\}$ a base canônica da álgebra de Lie gl_n das matrizes de tamanho $n \times n$ sobre o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos. A subálgebra gl_{n-1} é gerada pelos vetores $\{E_{ij} : i, j = 1, \dots, n-1\}$. Então temos a cadeia de subálgebras de Lie $\mathbb{C} = gl_1 \subset gl_2 \subset \dots \subset gl_n$, que induz a cadeia de álgebras associativas $U(gl_1) \subset U(gl_2) \subset \dots \subset U(gl_n)$. Seja Z_k o centro de $U(gl_k)$, $1 \leq k \leq n$, se define a subálgebra de Gelfand-Tsetlin Γ como sendo a subálgebra de $U(gl_n)$ gerada pelos centros Z_k , com $1 \leq k \leq n$, essa subálgebra é maximal comutativa em $U(gl_n)$. O teorema principal de [Ovsienko \(2003\)](#) estabelece que $U(gl_n)$ é um Γ -módulo livre.

A álgebra envolvente universal $U = U(L)$ tem uma filtração canônica e a álgebra graduada associada desta filtração é isomorfa à álgebra simétrica $\mathcal{S}(L)$. Sabe-se que $\mathcal{S}(L)$ tem estrutura de álgebra de Poisson-Lie e o comutador em $U(L)$ define o colchete de Poisson-Lie em $\mathcal{S}(L)$. É bem conhecido que para cada $\xi \in L^*$ a álgebra $\mathcal{S}(L)$ contém uma subálgebra comutativa $\mathcal{F}_\xi(gl_n)$ (com respeito ao colchete de Poisson-Lie) construída pelo método de deslocamento de argumento. As subálgebras de $\mathcal{S}(L)$ obtidas por este método foram chamadas de subálgebras

de Mishchenko-Fomenko em [Vinberg \(1991\)](#), além disso, neste artigo o Vinberg propõe o seguinte problema:

Pergunta 3. Seja $\mathcal{F}_\xi(L)$ uma subálgebra de Mishchenko-Fomenko em $\mathcal{S}(L)$, existe uma subálgebra comutativa $\mathcal{A}_\xi$ de $U(L)$ que *quantize* (ou levanta para $U(L)$) a subálgebra $\mathcal{F}_\xi(L)$ no sentido do que $\text{gr}(\mathcal{A}_\xi) = \mathcal{F}_\xi(L)$?

Para álgebras de Lie semisimples, foram dadas soluções positivas ao problema de Vinberg no artigo [Rybnikov \(2006\)](#) para o caso em que ξ é um elemento semisimples regular em L^* , e em [Feigin et al. \(2010\)](#) para qualquer elemento regular $\xi \in L^*$. Para álgebras de Lie tipo A , e em particular para $L = \mathfrak{gl}_n$, em [Futorny e Molev \(2015\)](#) dão resposta positiva para qualquer $\xi \in \mathfrak{gl}_n^*$. Assim, uma pergunta natural é:

Pergunta 4. Seja $\xi \in L^*$ e suponha que existe uma subálgebra $\mathcal{A}_\xi \subset U(L)$ que quantiza a subálgebra de Mishchenko-Fomenko $\mathcal{F}_\xi(L) \subset \mathcal{S}(L)$. A álgebra $U(L)$ é um módulo livre sobre a subálgebra $\mathcal{A}_\xi$?

Uma consequência do teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt é que a álgebra envolvente universal $U(L)$ é filtrada especial (ver definição 32), e para esta classe de álgebras, Futorny e Ovsienko (ver [Futorny e Ovsienko \(2005\)](#)) conseguiram o seguinte teorema:

Teorema 1. *Seja U uma $\mathbb{F}$ -álgebra filtrada especial. Se $g_1, \dots, g_t \in U$ é uma sequência de elementos dois a dois comutativos cujas imagens na álgebra graduada associada $\text{gr}(U)$ formam uma intersecção completa, então U é um $\mathbb{F}[g_1, \dots, g_t]$ -módulo livre à esquerda (ou direita).*

Dado que a álgebra envolvente universal de uma álgebra de Lie de dimensão finita é filtrada especial (ver exemplo 9), temos resposta positiva à pergunta (4) se a subálgebra de Mishchenko-Fomenko $\mathcal{F}_\xi(L) \subset \mathcal{S}(L)$ é gerada por uma sequência regular em $\mathcal{S}(L)$. Segundo um trabalho (ainda não publicado) de A. Moreau (ver [Moreau \(2016\)](#)) se L é uma álgebra de Lie semisimples¹ e $\xi \in L$ é um elemento regular semisimples ou regular nilpotente, então a subálgebra de Mishchenko-Fomenko $\mathcal{F}_\xi(L) \subset \mathcal{S}(L)$ é gerada por uma sequência regular em $\mathcal{S}(L)$. O caso ξ um elemento regular semisimples em $L = \mathfrak{gl}_n$ tinha-se observado em [Panyushev e Yakimova \(2008\)](#) juntando os trabalhos de Vinberg (ver [Vinberg \(1991\)](#)) e Ovsienko (ver [Ovsienko \(2003\)](#)). Nesta tese é provado que para todo $\xi \in \mathfrak{gl}_3^*$, a subálgebra de Mishchenko-Fomenko $\mathcal{F}_\xi(\mathfrak{gl}_3) \subset \mathcal{S}(\mathfrak{gl}_3)$ é gerada por uma sequência regular em $\mathcal{S}(\mathfrak{gl}_3)$, uma consequência deste fato é que os módulos irredutíveis sobre a subálgebra comutativa $\mathcal{A}_\xi \subset U(\mathfrak{gl}_3)$ que quantiza a subálgebra $\mathcal{F}_\xi(\mathfrak{gl}_3)$ podem ser levantados ate módulos irredutíveis sobre $U(\mathfrak{gl}_3)$. Além disso, é provado que em $\mathfrak{gl}_4$ esse resultado é válido para todo elemento nilpotente ξ .

¹Se L é álgebra de Lie semisimples, então podemos identificar L^* e L via uma forma bilinear, simétrica, invariante e não degenerada

Esta tese está dividida em três capítulos. No primeiro capítulo são expostos as definições e os teoremas básicos das álgebras de Lie e suas representações, e alguns aspectos gerais das álgebras de Poisson-Lie, as álgebras de Kac-Moody, geometria algébrica e sequências regulares que serão usados no desenvolvimento deste trabalho. No segundo capítulo é apresentado o método de deslocamento de argumento pelo qual são construídas as subálgebras de Mishchenko-Fomenko e descrever-se brevemente a solução ao problema de Vinberg dada em Feigin *et al.* (2010), esta é a solução generalizada para gl_n em Futorny e Molev (2015). Além disso, neste capítulo é apresentado um dos conjuntos de geradores das subálgebras de Mishchenko-Fomenko em $\mathcal{S}(gl_n)$ dados em Futorny e Molev (2015), esses geradores são usados pelo autor para provar os principais resultados desta tese (teoremas 14 e 15), essas provas são feitas no capítulo final.

Sumário

Resumo	iii
Introdução	vii
1 Preliminares	1
1.1 Álgebras	1
1.1.1 Álgebras graduadas e álgebras filtradas	1
1.1.2 Álgebra tensorial e álgebra simétrica	2
1.2 Álgebras de Lie	3
1.3 Representações e módulos de álgebras de Lie	4
1.3.1 Forma de Killing: Critério de semisimplicidade	6
1.3.2 Subálgebra de Cartan: Posto e elemento regular	7
1.3.3 Sistema de raízes	8
1.4 Álgebras de Poisson-Lie	10
1.4.1 A álgebra de funções regulares	12
1.5 Álgebras de Kac-Moody afim	12
1.6 Temas gerais de geometria algébrica	14
1.7 Sequência regular e complexo de Koszul	18
2 Subálgebras de Mishchenko-Fomenko	21
2.1 O método de deslocamento de argumento	21
2.2 O problema de Vinberg	22
2.2.1 A solução de Feigin, Frenkel e Toledano Laredo	23
2.3 Quantização das subálgebras de Mishchenko-Fomenko em $\mathcal{S}(gl_n)$	24
3 Subálgebras de Mishchenko-Fomenko em $\mathcal{S}(gl_n)$	27
3.1 Primeiro teorema principal	28
3.1.1 Caso 1	29
3.1.2 Caso 2	30
3.1.3 Caso 3	31
3.1.4 Caso 4	33
3.1.5 Caso 5	34
3.2 Segundo teorema principal	35

3.2.1	Caso 1	36
3.2.2	Caso 2	40
3.2.3	Caso 3	47
Referências Bibliográficas		51

Capítulo 1

Preliminares

Na primeira parte deste capítulo são estabelecidos as definições e teoremas básicos, sobre álgebras de Lie e suas representações, que serão usados ao longo deste trabalho. Essas definições e teoremas podem ser consultadas com mais detalhes em [Humphreys \(1972\)](#), [Dixmier \(1977\)](#) e também no livro de [San Martin \(2010\)](#). Depois são apresentados alguns aspectos gerais das álgebras de Poisson-Lie, álgebras de Kac-Moody, geometria algébrica e sequências regulares que serão usados posteriormente.

1.1 Álgebras

Definição 1 ($\mathbb{F}$ -álgebra). *Seja $\mathbb{F}$ um corpo. Uma $\mathbb{F}$ -álgebra é um espaço vetorial A sobre $\mathbb{F}$ munido com uma multiplicação $\mathbb{F}$ -bilinear*

$$\begin{aligned} * : A \times A &\longrightarrow A \\ (x, y) &\longrightarrow x * y \end{aligned}$$

Dizemos que

1. *A é uma $\mathbb{F}$ -álgebra associativa se $x * (y * z) = (x * y) * z$, para todo $x, y, z \in A$.*
2. *A é uma $\mathbb{F}$ -álgebra comutativa se $x * y = y * x$, para todo $x, y \in A$.*
3. *A tem unidade (ou 1) se existe um elemento $1 \in A$ tal que $1 * x = x * 1 = x$ para todo $x \in A$.*

1.1.1 Álgebras graduadas e álgebras filtradas

Definição 2 (Álgebra graduada). *Seja G um grupo abeliano. Dizemos que uma $\mathbb{F}$ -álgebra A é G -graduada se existir uma coleção $\{A_g\}_{g \in G}$ de $\mathbb{F}$ -subespaços de A tais que*

1. *Para todo $g, h \in G$ tem-se $A_g \cdot A_h \subseteq A_{gh}$.*
2. $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$.

Seja $g \in G$. Todo elemento não nulo em A_g chama-se de elemento homogêneo de grau g .

Dizemos que uma $\mathbb{F}$ -álgebra A é graduada positivamente se A é $\mathbb{Z}$ -graduada e $A_n = \{0\}$ para todo $n < 0$.

Definição 3 (Álgebra filtrada). Uma filtração sobre uma $\mathbb{F}$ -álgebra A é uma sequência

$$\{0\} \subsetneq A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \cdots \subsetneq A_n \subsetneq \cdots,$$

de $\mathbb{F}$ -subespaços de A , tais que

1. $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.
2. Para todo $m, n \in \mathbb{N}$ tem-se $A_m \cdot A_n \subset A_{m+n}$.

Se A tem uma filtração, então dizemos que A é uma álgebra filtrada.

Seja A uma álgebra filtrada, com filtração $\{0\} \subset A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots$. Para cada $i \geq 0$ defina-se $R_i = A_i/A_{i-1}$, onde $A_{-1} = \{0\}$. Seja agora $\text{gr}(A) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} R_i$ e definamos em $\text{gr}(A)$ a seguinte multiplicação

$$(x + R_{i-1}) \cdot (y + R_{j-1}) = xy + R_{i+j-1}$$

para todo $x \in R_i$ e todo $y \in R_j$. A multiplicação é bem definida e dota $\text{gr}(A)$ com uma estrutura de $\mathbb{F}$ -álgebra graduada positivamente com gradação $\{R_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. A álgebra $\text{gr}(A)$ chama-se de *álgebra graduada associada* da álgebra filtrada A .

1.1.2 Álgebra tensorial e álgebra simétrica

Definição 4 (Álgebra tensorial e álgebra simétrica). Seja V um $\mathbb{F}$ -espaço vetorial. Sejam ainda

$$T^0V = \mathbb{F}, \quad T^1V = V, \quad T^2V = V \otimes V, \quad \dots, \quad T^mV = V \otimes \dots \otimes V (m \text{ copias})$$

A álgebra tensorial sobre V é o $\mathbb{F}$ -espaço vetorial

$$\mathcal{T}(V) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} T^iV$$

com multiplicação associativa definida sobre os tensores elementares de $\mathcal{T}(V)$ da seguinte forma: Se $v = v_1 \otimes \dots \otimes v_l \in T^lV$ e $w = w_1 \otimes \dots \otimes w_m \in T^mV$, então

$$v \cdot w = v_1 \otimes \dots \otimes v_l \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_m \in T^{l+m}V$$

Seja agora $\mathcal{I}(V)$ o ideal bilateral de $\mathcal{T}(V)$ gerado por todos os elementos da forma $x \otimes y - y \otimes x$, com $x, y \in V$. A álgebra simétrica sobre V é a $\mathbb{F}$ -álgebra $\mathcal{S}(V) = \mathcal{T}(V)/\mathcal{I}(V)$, de fato, essa é a álgebra de polinômios no número de variáveis igual a $\dim V$.

Note-se que $\mathcal{T}(V)$ é uma álgebra associativa graduada com unidade, ainda mais, $\mathcal{T}(V)$ é *universal* no seguinte sentido: Se $\mathcal{A}$ é uma outra $\mathbb{F}$ -álgebra associativa com 1 e $\varphi : V \rightarrow \mathcal{A}$ é qualquer função $\mathbb{F}$ -linear, então existe um único homomorfismo de $\mathbb{F}$ -álgebras associativas com unidade, $\tilde{\varphi} : \mathcal{T}(V) \rightarrow \mathcal{A}$, que faz comutar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i} & \mathcal{T}(V) \\ \varphi \downarrow & \searrow \tilde{\varphi} & \\ \mathcal{A} & & \end{array}$$

onde $i : V \longrightarrow \mathcal{T}(V)$ é a inclusão. De fato $\mathcal{T}(V)$ é a álgebra associativa livre com variáveis numa base de V .

1.2 Álgebras de Lie

Definição 5 (Álgebra de Lie). *Uma álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial L sobre um corpo $\mathbb{F}$ e uma função $\mathbb{F}$ -bilinear $[\cdot, \cdot] : L \times L \longrightarrow L$ (se lê "colchete ou comutador", a imagem de um par (x, y) é denotado por $[x, y]$) satisfazendo as seguintes propriedades*

1. $[x, x] = 0$ para todo $x \in L$. (anticomutatividade)
2. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ para todo $x, y, z \in L$ (identidade de Jacobi)

Se L é uma álgebra de Lie e $x, y \in L$, temos

$$0 = [x + y, x + y] = [x, y] + [y, x], \text{ portanto, } [x, y] = -[y, x]. \quad (1.1)$$

Seja L uma álgebra de Lie, dizemos que os elementos $x, y \in L$ comutam se $[x, y] = 0$. O centro de L , $Z(L)$, é o conjunto dos elementos em L que comutam com todo elemento de L , isto é, $Z(L) = \{x \in L : [x, y] = 0 \text{ para todo } y \in L\}$. Dizemos que L é uma álgebra de Lie abeliana se $Z(L) = L$. Uma subálgebra da álgebra de Lie L é um subespaço $B \subseteq L$ tal que $[x, y] \in B$ para todo $x, y \in B$. Um ideal é um subespaço $I \subseteq L$ tal que $[x, y] \in I$ para todo $x \in I$ e todo $y \in L$. Se I é um ideal de L , define-se a álgebra de Lie quociente L/I de forma óbvia.

Se A é uma $\mathbb{F}$ -álgebra associativa, podemos fornecer uma estrutura de álgebra de Lie em A definindo o colchete por

$$[x, y] = xy - yx, \text{ para todos } x, y \in A.$$

Esta álgebra é chamada de álgebra de Lie subjacente sobre A , e se denotará por $\mathcal{L}(A)$. Por exemplo, se V é um $\mathbb{F}$ -espaço vetorial, então $A = \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ é uma álgebra associativa, neste caso denotamos a álgebra de Lie subjacente $\mathcal{L}(A)$ por $gl(V)$. Se $\dim V = n < \infty$ também se denota $gl(V)$ por gl_n .

Definição 6 (Álgebra envolvente universal). *Seja L uma álgebra de Lie sobre um corpo $\mathbb{F}$. Uma álgebra envolvente universal de L é um par (U, i) onde U é uma $\mathbb{F}$ -álgebra associativa com unidade e $i : L \longrightarrow U$ é uma função injetora $\mathbb{F}$ -linear tal que*

$$i([x, y]) = i(x)i(y) - i(y)i(x), \text{ para todo } x, y \in L, \quad (1.2)$$

e que possui a seguinte propriedade universal: Para qualquer $\mathbb{F}$ -álgebra associativa $\mathcal{U}$ com 1, e qualquer função $\mathbb{F}$ -linear $j : L \longrightarrow \mathcal{U}$ satisfazendo a equação (1.2), existe um único homomorfismo de $\mathbb{F}$ -álgebras associativas com 1, $\tilde{j} : U \longrightarrow \mathcal{U}$, que faz comutar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{i} & U \\ j \downarrow & \nearrow \tilde{j} & \\ \mathcal{U} & & \end{array}$$

Pode ser mostrado que uma álgebra envolvente universal de uma álgebra de Lie L sempre existe e pela definição ela é única a menos de isomorfismo. Denotamos a álgebra envolvente universal de L com $U(L)$. A construção da álgebra $U(L)$ é feita a partir da álgebra tensorial $\mathcal{T}(L)$ da forma seguinte: Seja $\mathcal{J}(L)$ o ideal bilateral de $\mathcal{T}(L)$ gerado pelos elementos da forma $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$, com $x, y \in L$. Definimos $U = \mathcal{T}(L)/\mathcal{J}(L)$ e a restrição $i = \pi|_L : L \rightarrow U$ do homomorfismo canônico $\pi : \mathcal{T}(L) \rightarrow U$. Pode-se mostrar que $U(L)$ é o par (U, i) . O que se segue é um teorema muito importante na teoria das álgebras de Lie, os detalhes da prova estão em [Humphreys \(1972\)](#):

Teorema 2 (Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW)). *Seja L uma álgebra de Lie sobre um corpo $\mathbb{F}$. Se $B = \{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é uma base de L , então os elementos de $U(L)$ da forma*

$$x_{i(1)}x_{i(2)} \dots x_{i(m)} = \pi(x_{i(1)} \otimes x_{i(2)} \otimes \dots \otimes x_{i(m)})$$

onde $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ e $i(1) \leq i(2) \leq \dots \leq i(m)$, junto com a unidade $1 \in \mathbb{F}$, é uma base para $U(L)$ ¹.

Seja L uma $\mathbb{F}$ -álgebra de Lie de dimensão finita. Vamos denotar $T = \mathcal{T}(L)$ a álgebra tensorial e $U = U(L)$ a álgebra envolvente universal de L . Definimos uma filtração sobre T por

$$T_m = (T^0 L) \oplus (T^1 L) \oplus \dots \oplus (T^m L)$$

Seja agora $U_m = \pi(T_m)$ e $U_{-1} = \{0\}$ (Relembrar que $\pi : \mathcal{T}(L) \rightarrow U$ é a projeção canônica), por isso $U_m \cdot U_n \subseteq U_{mn}$ e $U_m \subset U_{m+1}$. Logo $\{0\} \subset U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \dots$ é uma filtração (natural) sobre U e temos a seguinte proposição:

Proposição 1. *Com a filtração definida acima, a álgebra $gr(U)$ e a álgebra simétrica $\mathcal{S}(L)$ de L , são isomorfas. Além disso, se $\dim_{\mathbb{F}} L = n$ então $\mathcal{S}(L)$ é canonicamente isomorfa à álgebra de polinômios sobre $\mathbb{F}$ em n variáveis.*

1.3 Representações e módulos de álgebras de Lie

Definição 7 (Homomorfismo de álgebras de Lie). *Sejam L e L' duas álgebras de Lie sobre o corpo $\mathbb{F}$. Uma função $\mathbb{F}$ -linear $\varphi : L \rightarrow L'$ é um homomorfismo de álgebras de Lie (ou simplesmente homomorfismo) se*

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)], \text{ para todo } x, y \in L.$$

Monomorfismo é um homomorfismo injetor, epimorfismo é um homomorfismo sobrejetor e isomorfismo é um homomorfismo bijetor. Note-se que se $\varphi : L \rightarrow L'$ é um homomorfismo, então $\text{Ker } \varphi$ é um ideal de L e $\text{Im } \varphi$ é uma subálgebra de L' , além disso, temos uma versão natural dos teoremas do homomorfismo para álgebras de Lie.

Observação 1. Sejam $\mathcal{A}$ a categoria das álgebras associativas e $\mathcal{B}$ a categoria das álgebras de Lie (sobre o mesmo corpo $\mathbb{F}$) temos o funtor $\mathcal{L} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ que associa a cada álgebra associativa A a álgebra de Lie subjacente $\mathcal{L}(A)$, claramente cada homomorfismo de álgebras associativas é um homomorfismo das correspondentes álgebras de Lie subjacentes. Também temos o funtor $U : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ que a cada álgebra de Lie L associa a sua álgebra envolvente universal $U(L)$ e para cada homomorfismo $\varphi : L \rightarrow L'$ de álgebras de Lie, associa o único

¹O teorema continua válido se substituímos $\mathbb{N}$ por um conjunto totalmente ordenado J .

homomorfismo $\tilde{\varphi} : U(L) \longrightarrow U(L')$ de álgebras associativas que faz comutar o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{i} & U(L) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \tilde{\varphi} \\ L' & \xrightarrow{i'} & U(L') \end{array}$$

Definição 8 (Representação). Uma representação de uma $\mathbb{F}$ -álgebra de Lie L é um par (V, ρ) , onde V é um $\mathbb{F}$ -espaço vetorial e $\rho : L \longrightarrow gl(V)$ é um homomorfismo de álgebras de Lie.

Exemplo 1. Seja L uma $\mathbb{F}$ -álgebra de Lie, uma representação muito importante para L , chamada de *representação adjunta*, é a representação (L, ad) , onde $\text{ad} : L \longrightarrow gl(L)$, associa para cada $x \in L$ a transformação $\text{ad}_x \in gl(L)$ definida por $\text{ad}_x(y) = [x, y]$ para todo $y \in L$.

Vamos definir módulo de uma álgebra de Lie, embora seja uma definição equivalente à de representação, frequentemente é conveniente usar as duas definições.

Definição 9 (Módulo). Um módulo sobre uma $\mathbb{F}$ -álgebra de Lie L (ou L -módulo) é um $\mathbb{F}$ -espaço vetorial V dotado de uma operação $L \times V \longrightarrow V$, denotada $(x, v) \longrightarrow x \cdot v$, tal que para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $x, y \in L$, $v, w \in V$ satisfaz as condições seguintes

1. $(\alpha x + \beta y) \cdot v = \alpha(x \cdot v) + \beta(y \cdot v)$,
2. $x \cdot (\alpha v + \beta w) = \alpha(x \cdot v) + \beta(x \cdot w)$,
3. $[x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v)$.

Um submódulo de um L -módulo V é um subespaço $W \subseteq V$ invariante sob a ação de L , isto é $xw \in W$ para todo $x \in L$ e $w \in W$.

Por exemplo, se $\rho : L \longrightarrow gl(V)$ é uma representação da álgebra de Lie L , então V pode ser visto como L -módulo através da ação $x \cdot v = \rho(x)(v)$, com $x \in L$ e $v \in V$. Por outro lado, dado um L -módulo V , esta equação, define uma representação de L . Assim, L tem uma estrutura natural de L -módulo com ação dada pela representação adjunta, com esta estrutura os L -submódulos de L são precisamente os ideais de L .

Um homomorfismo de L -módulos é uma função linear $\phi : V \longrightarrow W$ (V e W são L -módulos) tal que $\phi(xv) = x\phi(v)$, para todo $x \in L$ e $v \in V$. Se $\phi : V \longrightarrow W$ é um homomorfismo de L -módulos, então o núcleo, $\text{Ker } \phi$, é um submódulo de V e os teoremas padrão do homomorfismo são satisfeitos. Dizemos que ϕ é um isomorfismo se é uma bijeção, neste caso diz-se que os L -módulos V e W proporcionam representações equivalentes. Um L -módulo não nulo V chama-se de *irredutível* se os únicos submódulos que ele tem são os triviais ($\{0\}$ e V) e chama-se de *completamente redutível* se V é soma direta de L -submódulos irredutíveis.

Exemplo 2. Seja L uma $\mathbb{F}$ -álgebra de Lie, claramente a álgebra envolvente universal $U(L)$ tem estrutura natural de L -módulo, ainda mais, a álgebra simétrica $\mathcal{S}(L)$ também é um L -módulo. Além disso, temos um mergulho canônico $L \hookrightarrow U(L)$ que se estende a um isomorfismo de $\mathbb{F}$ -espaços vetoriais $\mathcal{S}(L) \longrightarrow U(L)$, de fato, temos isomorfismo, $\mathcal{S}(L) \cong U(L)$, como L -módulos.

Dizemos que uma álgebra de Lie L é *simples* se L é não abeliana e L não tem ideais próprios não nulos. Num corpo algebricamente fechado de característica zero existem, a menos de isomorfismo, nove famílias de álgebras de Lie simples de dimensão finita, a saber, as álgebras de Lie clássicas A_n , B_n , C_n e D_n , além das cinco álgebras excepcionais E_6 , E_7 , E_8 , F_4 e G_2 . As álgebras de Lie simples de dimensão finita são classificados pelos *diagramas de Coxeter-Dynkin* (Ver [Humphreys \(1972\)](#) para os detalhes sobre esta classificação).

Definição 10 (Série derivada: álgebra solúvel). *Seja L uma álgebra de Lie. A série derivada de L é a sequência (decrecente) $L^{(0)} \supseteq L^{(1)} \supseteq L^{(2)} \supseteq \dots$, de ideais de L , onde $L^{(0)} = L$, e $L^{(i)} = [L^{(i-1)}, L^{(i-1)}]$ para todo $i \geq 1$. Uma álgebra de Lie L é dita solúvel se existir $n \geq 1$ tal que $L^{(n)} = \{0\}$.*

Temos a seguinte proposição (ver [Humphreys \(1972\)](#)):

Proposição 2. *Seja L uma $\mathbb{F}$ -álgebra de Lie.*

1. *Se L é solúvel, então toda subálgebra e todas as imagens homomórficas de L também são solúveis.*
2. *Se I é um ideal solúvel de L tal que L/I é solúvel, então L é solúvel.*
3. *Se I e J são ideais solúveis de L , então $I + J$ é um ideal solúvel de L .*

Observação 2. Seja L uma $\mathbb{F}$ -álgebra de Lie arbitrária, pelo item 3 da proposição acima tem-se que L possui um único ideal solúvel máximo, chamado de *radical de L* e denotado por $\text{rad } L$, ou seja, se J é um ideal solúvel de L então $J \subseteq \text{rad } L$. Dizemos que L é semisimples se $\text{rad } L = \{0\}$.

1.3.1 Forma de Killing: Critério de semisimplicidade

Seja L uma $\mathbb{F}$ -álgebra de Lie de dimensão finita. A forma bilinear $\kappa : L \times L \rightarrow \mathbb{F}$ definida pela fórmula

$$\kappa(x, y) = \text{Tr}(\text{ad}_x \circ \text{ad}_y), \text{ para todo } x, y \in L$$

é chamada de *forma de Killing* para L . Não é difícil provar que a forma de Killing é simétrica e invariante no sentido de que tem a propriedade associativa, isto é,

$$\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z]), \text{ para todo } x, y \in L.$$

Os teoremas sobre semisimplicidade dados abaixo são conhecidos na literatura de álgebras de Lie.

Teorema 3. *Uma $\mathbb{F}$ -álgebra de Lie L de dimensão finita é semisimples se, e só se, sua forma de Killing é não degenerada*

Teorema 4. *Seja L uma $\mathbb{F}$ -álgebra de Lie semisimples e de dimensão finita. Então existem ideais $L_1, \dots, L_s$ de L , que são simples como álgebras de Lie, tais que $L = L_1 \oplus \dots \oplus L_s$. Além disso, todo ideal simples de L é um dos L_i .*

Proposição 3. *Seja L uma $\mathbb{F}$ -álgebra de Lie simples e de dimensão finita. Então*

1. *Qualquer forma bilinear simétrica invariante é não degenerada ou identicamente nula.*

2. Quaisquer duas formas bilineares $\Delta_1, \Delta_2 : L \times L \longrightarrow \mathbb{C}$ simétricas, invariantes e não degeneradas são proporcionais, isto é, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\Delta_1 = \lambda \Delta_2$

Demonstração. Para o item (1), seja $\Delta : L \times L \longrightarrow \mathbb{C}$ uma forma bilinear simétrica invariante, logo o núcleo de Δ ,

$$\text{Ker}(\Delta) = \{x \in L : \Delta(x, y) = 0, \text{ para todo } y \in L\},$$

é um ideal da álgebra de Lie. Se Δ for degenerada, então $\text{Ker}(\Delta) \neq \{0\}$ e dado que L é simples tem-se $\text{Ker}(\Delta) = L$, ou seja, Δ é identicamente zero. Para o item (2), fixemos uma base de L e seja B_i a matriz correspondente à forma Δ_i ($i = 1, 2$) nessa base. Dado que Δ_2 é não degenerada tem-se B_2 é invertível, logo podemos tomar um autovalor λ da matriz $B_1 B_2^{-1}$, então

$$\det(B_1 - \lambda B_2) = \det(B_1 B_2^{-1} - \lambda I) \det B_2 = 0$$

Portanto $\Delta_1 - \lambda \Delta_2$ é uma forma bilinear simétrica invariante degenerada, pelo item (1) tem-se $\Delta_1 - \lambda \Delta_2 = 0$. $\square$

1.3.2 Subálgebra de Cartan: Posto e elemento regular

Definição 11 (Série central: álgebra nilpotente). *Seja L uma álgebra de Lie. A série central de L é a sequência (decrecente) $L^0 \supseteq L^1 \supseteq L^2 \supseteq \dots$, de ideais de L , onde $L^0 = L$, e $L^i = [L, L^{i-1}]$ para todo $i \geq 1$. Uma álgebra de Lie L é dita de nilpotente se existir $n \geq 1$ tal que $L^n = \{0\}$.*

Teorema 5 (Teorema de Engel: segunda versão). *Uma álgebra de Lie L , de dimensão finita, é nilpotente se, e só se, para todo $x \in L$ a aplicação linear $\text{ad}_x : L \longrightarrow L$ é nilpotente.*

Ver [Humphreys \(1972\)](#) para detalhes da prova.

Definição 12 (Subálgebra de Cartan). *Uma subálgebra de Cartan de uma álgebra de Lie L é uma subálgebra $\mathfrak{h}$ de L que satisfaz as duas condições seguintes*

1. $\mathfrak{h}$ é nilpotente.
2. $\mathfrak{h}$ é igual ao seu normalizador $\mathfrak{n}_L(\mathfrak{h}) = \{x \in L : [x, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}\}$.

É conhecido que se $\mathbb{F}$ é um corpo infinito, então existem subálgebras de Cartan para todo $\mathbb{F}$ -álgebra de Lie de dimensão finita, ainda mais, se $\mathbb{F}$ é algebricamente fechado de característica zero, então duas subálgebras de Cartan são conjugadas por automorfismos da álgebra de Lie, e, em particular, são todas isomorfas.

Seja L uma $\mathbb{F}$ -álgebra de Lie de dimensão n . Para cada $x \in L$ vamos denotar por $P_x(t)$ o polinômio característico do endomorfismo ad_x , isto é

$$P_x(t) = \det(\text{ad}_x - tI_n) = \sum_{i=0}^n a_i(x)t^i.$$

Assim, temos definido funções $a_i : L \longrightarrow \mathbb{F}$, e com estas funções, a seguir, se define o posto da álgebra de Lie.

Definição 13 (Posto e elemento regular). O posto, $rk(L)$, de uma $\mathbb{F}$ -álgebra de Lie L (de dimensão finita) é definido pela fórmula

$$rk(L) = \min\{i : a_i \text{ não é identicamente nula}\}$$

Se $l = rk(L)$, então um elemento $x \in L$ é dito regular se $a_l(x) \neq 0$, o conjunto de todos os elementos regulares de L é denotado por L_{reg} .

Dado que $a_n = 1$ ($n = \dim L$), então $rk(L) \leq n$, além disso, pelo teorema 5, $rk(L) = n$ se, e só se, L é nilpotente.

Em seguida, são apresentados dois resultados conhecidos que relacionam as subálgebras de Cartan com os elementos regulares: Seja L uma $\mathbb{C}$ -álgebra de Lie de dimensão finita e para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ e cada $x \in L$ defina-se o subespaço

$$L_x^\lambda = \{y \in L : (\text{ad}_x - \lambda I_L)^m(y) = 0, \text{ para algum } m \in \mathbb{N}\}$$

Proposição 4. Com a notação acima temos

1. $\dim L_x^0 \geq rk(L)$ para todo $x \in L$.
2. Se $x \in L_{reg}$ então L_x^0 é uma subálgebra de Cartan de L e $\dim L_x^0 = rk(L)$.
3. Se $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Cartan de L , existe um elemento $x \in L_{reg}$ tal que $\mathfrak{h} = L_x^0$.

No caso particular $L = gl_n$ a $\mathbb{C}$ -álgebra de Lie das matrizes complexas de orden $n \times n$ temos

Proposição 5. Uma matriz $A \in gl_n$ é regular se, e só se, a sua forma canônica de Jordan contém um único bloco de Jordan para cada autovalor de A .

Definição 14 (Estabilizador: índice). Seja $\mathbb{F}$ um corpo algebricamente fechado de característica zero e seja L uma $\mathbb{F}$ -álgebra de Lie de dimensão finita. Para cada $\xi \in L^*$ o subespaço

$$L_\xi = \{x \in L : \xi([x, y]) = 0 \text{ para todo } y \in L\}$$

é dito o estabilizador de ξ . O valor mínimo do conjunto $\{\dim L_\xi : \xi \in L^*\}$ é chamado de índice de L e denotado por $i(L)$. Um elemento $\xi \in L^*$ é dito regular se $\dim L_\xi = i(L)$.

Vamos denotar por L_{reg}^* o conjunto de todos os elementos regulares de L^* .

Proposição 6. Se L é uma álgebra de Lie reductiva², então $i(L) = rk(L)$.

1.3.3 Sistema de raízes

Agora são apresentadas as definições e teoremas sobre os sistemas de raízes. Embora a principal aplicação destes sistemas seja a construção dos diagramas de *Coxeter-Dynkin* através dos quais são classificadas as álgebras de Lie simples sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, aqui apenas é apresentada a teoria que lhe permite ao leitor entender as definições dos números *Coxeter* e *Coxeter dual* mencionados na seção (2.2.1). As provas dos teoremas apresentados aqui, e mais detalhes sobre este assunto, podem ser encontrados em [Humphreys \(1972\)](#). Vamos fixar um espaço euclidiano E , isto é, um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial de

²Uma álgebra de Lie L é dita *reductiva* se L é soma direta (como álgebras de Lie) de um ideal semisimples S e seu centro $Z(L)$, isto é, $L = S \oplus Z(L)$.

dimensão finita junto com uma forma bilinear simétrica definida positiva $(,) : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$. Lembremos que uma *reflexão* em E é uma transformação linear invertível que deixa fixos os pontos de algum hiperplano Ω (i.e, subespaço de codimensão 1) e leva qualquer vetor v ortogonal ao Ω a seu negativo $-v$. Qualquer vetor não zero $v \in E$ determina uma reflexão Ψ_v dada pela fórmula

$$\Psi_v(x) = x - \frac{2(x, v)}{(v, v)}v, \text{ para todo } x \in E,$$

com hiperplano de reflexão $\Omega_v = \{x \in E : (x, v) = 0\}$.

Definição 15 (Sistema de raízes). *Um subconjunto Φ de um espaço euclidiano E é chamado de sistema de raízes em E se os seguintes axiomas são satisfeitos*

1. *O subconjunto Φ é finito, $\text{span}(\Phi) = E$, e não contém o vetor zero.*
2. *Se $v \in \Delta$, então os únicos múltiplos de v em Φ são $\pm v$.*
3. *Se $v \in \Delta$, então a reflexão Φ_v deixa Φ invariante.*
4. *Se $v, w \in \Delta$, então $\langle w, v \rangle \in \mathbb{Z}$.*

Os elementos de Φ são chamados de raízes, também se define o $\text{rank}(\Phi)$ do sistema de raízes Φ como sendo $\dim_{\mathbb{R}} E$.

Dada um sistema de raízes Φ , o *sistema dual* é o conjunto

$$\Phi^\vee = \{w^\vee : w \in \Delta\}, \text{ onde } w^\vee = \frac{2w}{(w, w)},$$

e cada vetor no conjunto $\Phi^\vee$ chama-se de *coraíz*.

Definição 16 (O grupo de Weyl). *Seja Φ um sistema de raízes em E . O grupo de Weyl $\mathcal{W}_\Phi$, associado ao sistema Φ , é o subgrupo de $GL(E)$ gerado pelas reflexões Ψ_v , com $v \in \Phi$.*

Pode-se provar que o grupo $\mathcal{W}_\Phi$ é finito. Este grupo tem um papel importante no que se segue. De aqui em diante Φ é um sistema de raízes de $\text{rank}(\Phi) = l$ com grupo de Weyl $\mathcal{W} = \mathcal{W}_\Phi$.

Definição 17 (Base). *Um subconjunto $\Delta \subset \Phi$ é chamado de Base de Φ se*

1. *Δ é uma base de E .*
2. *Cada raíz $v \in \Phi$ pode-se escrever da forma $v = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$ com coeficientes inteiros k_α todos não negativos ou todos não positivos.*

As raízes na base Δ são chamadas de simples.

Teorema 6. *Todo sistema de raízes tem uma base.*

Claramente o cardinal de uma base qualquer é $l = \text{rank}(\Phi)$. Seja Δ uma base e seja $v \in \Phi$ tal que $v = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$, se define a *altura* da raíz v (relativa à base Δ) por $\text{ht}(v) = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha$.

Se todo $k_\alpha \geq 0$ (resp. $k_\alpha \leq 0$), dizemos que a raíz v é positiva (resp. negativa) e se escreve $v \succ 0$ (resp. $v \prec 0$). Além disso, é conhecido que toda coraíz $w^\vee \in \Phi^\vee$ se pode escrever de forma única como $w^\vee = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha^\vee \alpha^\vee$, onde os coeficientes $k_\alpha^\vee$ são inteiros todos não negativos ou todos não positivos.

Teorema 7. *Seja Δ uma base de Φ .*

1. *Se Δ' é outra base de Φ , então existe $\sigma \in \mathcal{W}$ tal que $\sigma(\Delta') = \Delta$.*
2. *Se v é uma raiz qualquer, então existe $\sigma \in \mathcal{W}$ tal que $\sigma(v) \in \Delta$.*
3. *O grupo de Weyl $\mathcal{W}$ é gerado pelas reflexões Ψ_α , com $\alpha \in \Delta$.*

O sistema de raízes Φ é dito *irredutível* se não pode ser dividido em união de dois subconjuntos próprios mutuamente ortogonais, isto é, se Φ_1 e Φ_2 são subconjuntos de Φ tais que para todo $v_1 \in \Phi_1$ e todo $v_2 \in \Phi_2$ tem-se $(v_1, v_2) = 0$, então $\Phi_1 \cup \Phi_2 \subsetneq \Phi$.

Lema 1. *Seja Δ uma base do sistema de raízes Φ . Se Φ é irredutível, então existe uma única raiz $v_\Delta \in \Phi$ de altura máxima, isto é, $ht(w) < ht(v_\Delta)$, para todo $w \in \Phi$, com $w \neq v_\Delta$. Ainda mais, se $v_\Delta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$, então $k_\alpha > 0$ para todo $\alpha \in \Delta$.*

Seja $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ uma base de Φ e seja $v = v_\Delta$ o vetor de altura máxima. Se

$$v = \sum_{i=1}^l k_i \alpha_i, \quad v^\vee = \sum_{i=1}^l k_i^\vee \alpha_i^\vee,$$

se definem os números de *Coxeter*, h , e *Coxeter dual*, $h^\vee$, pelas fórmulas

$$h = 1 + \sum_{i=1}^l k_i, \quad h^\vee = 1 + \sum_{i=1}^l k_i^\vee,$$

Os números de Coxeter e Coxeter dual são invariantes dos sistemas de raízes irredutíveis. Outras formas equivalentes de defini-los são dadas na seguinte proposição:

Proposição 7. *Seja Δ uma base de Φ .*

1. *O número Coxeter é o número de raízes em Φ dividido pelo $\text{rank}(\Phi)$.*
2. *O número Coxeter é a ordem dos elementos do grupo $\mathcal{W}$ que são o produto de todas as reflexões simples (reflexões da forma Ψ_α , com $\alpha \in \Delta$).*

Por exemplo, para álgebras de Lie simples de tipo A_n , temos $h = h^\vee = n + 1$, de tipo B_n temos $h = 2n$ e $h^\vee = 2n - 1$ e para álgebras de Lie simples tipo C_n temos $h = 2n$ e $h^\vee = n + 1$.

1.4 Álgebras de Poisson-Lie

Definição 18 (Derivação). *Seja $(A, *)$ uma $\mathbb{F}$ -álgebra, uma derivação de A é uma transformação $\mathbb{F}$ -linear $d : A \rightarrow A$ que satisfaz a identidade de Leibniz*

$$d(a * b) = a * d(b) + d(a) * b, \text{ para todos } a, b \in A.$$

Definição 19 (Álgebra de Poisson-Lie). *Uma Álgebra de Poisson-Lie (ou simplesmente Poisson) é uma tripla $(A, *, \{, \})$ onde A é um $\mathbb{F}$ -espaço vetorial, $*$ e $\{, \}$ são funções $\mathbb{F}$ -bilineares $(*, \{, \} : A \times A \rightarrow A)$ tais que*

1. $(A, *)$ é uma $\mathbb{F}$ -álgebra associativa, comutativa com unidade.
2. $(A, \{, \})$ é uma $\mathbb{F}$ -álgebra de Lie, $(\{, \})$ chama-se de colchete de Poisson).
3. O colchete de Poisson age como uma derivação na álgebra $(A, *)$, ou seja, para cada $a \in A$, a transformação $\mathbb{F}$ -linear $\{a, -\} : A \longrightarrow A$, $(\{a, -\}(b) := \{a, b\})$, é uma derivação de $(A, *)$, isto é

$$\{a, b * c\} = b * \{a, c\} + \{a, b\} * c, \text{ para todo } b, c \in A.$$

Seja $(A, *, \{, \})$ uma álgebra de Poisson. Uma subálgebra B da álgebra $(A, *)$ é uma *subálgebra de Poisson* de $(A, *, \{, \})$ se $\{B, B\} \subseteq B$. Um ideal I da álgebra $(A, *)$ é um ideal de Poisson de $(A, *, \{, \})$ se $\{A, I\} \subseteq I$. O centro (de Poisson),

$$Z(A) = \{a \in A : \{a, b\} = 0 \text{ para todo } b \in A\},$$

é um ideal de A e dizemos que $(A, *, \{, \})$ é *comutativa* se $A = Z(A)$.

Exemplo 3. Seja A uma $\mathbb{F}$ -álgebra filtrada com filtração $\{0\} \subset A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots$ (ver definição na seção (1.1.1)), tal que $\text{gr}(A) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i / A_{i-1}$ é comutativa. Denotamos por $[x] \in \text{gr}(A)$ a classe do elemento $x \in A_i \subset A$. Definimos

$$\{[x], [y]\} = [xy - yx] \in \text{gr}(A).$$

Vamos provar que $\text{gr}(A)$ é uma álgebra de Poisson. Claramente o produto $\{, \}$ está bem definido em $\text{gr}(A)$ e o item (1) da definição 19 é satisfeito. Para o item (2), só precisamos mostrar a identidade de Jacobi. Sejam $[x], [y], [z] \in \text{gr}(A)$, temos

$$\begin{aligned} \{[x], \{[y], [z]\}\} + \{[y], \{[z], [x]\}\} &= \{[x], [yz - zy]\} + \{[y], [zx - xz]\} \\ &= [x(yz - zy) - (yz - zy)x] + [y(zx - xz) - (zx - xz)y] \\ &= [xyz - xzy - yzx + zyx + yzx - yxz - zxy + xzy] \\ &= [z(yx - xy) + (xy - yx)z] \\ &= -\{[z], \{[x], [y]\}\} \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} [y] \{[x], [z]\} + \{[x], [y]\} [z] &= [y][xz - zx] + [xy - yx][z] \\ &= [y(xz - zx)] + [(xy - yx)z] \\ &= [yxz - yzx + xyz - yxz] \\ &= [x(yz) - (yz)x] \\ &= \{[x], \{[y], [z]\}\} \end{aligned}$$

Portanto $\text{gr}(A)$ é uma álgebra de Poisson.

Definição 20 (Homomorfismo de álgebras de Poisson). Sejam $(A, *, \{, \}_1)$ e $(B, \cdot, \{, \}_2)$ duas $\mathbb{F}$ -álgebras de Poisson. Uma aplicação $\mathbb{F}$ -linear $\varphi : A \longrightarrow B$ é um homomorfismo de álgebras de Poisson se para todo $x, y \in A$ tem-se

1. $\varphi(x * y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$,
2. $\varphi(\{x, y\}_1) = \{\varphi(x), \varphi(y)\}_2$.

1.4.1 A álgebra de funções regulares

Seja L uma $\mathbb{C}$ -álgebra de Lie com base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$. A *álgebra de funções regulares*, $\mathbb{C}[L^*]$, é a álgebra de funções $F : L \rightarrow \mathbb{C}$ (com o produto ponto a ponto usual de funções), gerada pelos elementos de L^* . Dizemos que o elemento $f \in \mathbb{C}[L^*]$ é *homogêneo de grau d* se $f(\tau x) = \tau^d x$ para todo $\tau \in \mathbb{C}$ e $x \in L$. Em particular, os elementos de L^* são homogêneos de grau 1, e temos

$$\mathbb{C}[L^*] = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} \mathbb{C}[L^*]_d, \text{ onde } \mathbb{C}[L^*]_d = \{f \in \mathbb{C}[L^*] : f \text{ é homogêneo de grau } d\}.$$

Portanto a álgebra de funções regulares, $\mathbb{C}[L^*]$, é graduada positivamente (ver seção 1.1.1). Seja $B' = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ a base de L^* que é dual da base B de L . Pode-se provar que as ξ_i são algebricamente independentes sobre $\mathbb{C}$, portanto $\mathbb{C}[L^*] = \mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_n]$ é o anel de polinômios nas variáveis ξ_i . Pelo teorema PBW (2) a álgebra simétrica $\mathcal{S}(L) \cong \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ é a álgebra de polinômios nas variáveis $X_1, \dots, X_n$. Podemos definir a seguinte estrutura de álgebra de Poisson em $\mathcal{S}(L)$: Sejam $\{c_{ij}^k : 1 \leq i, j, k \leq n\}$ as constantes de estrutura de L , isto é

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e_k.$$

Tomemos $\alpha \in L^*$, então para todo $f \in \mathbb{C}[L^*]$ o diferencial de f em α , $(df)_\alpha$, está em $(L^*)^* \cong L$, definimos

$$\{f, g\}(\alpha) = \langle \alpha, [(df)_\alpha, (dg)_\alpha] \rangle, \text{ para todo } f, g \in \mathbb{C}[L^*].$$

Este colchete define uma estrutura de álgebra de Poisson em $\mathcal{S}(L) \cong \mathbb{C}[L^*]$. Observe que, se $f \simeq e_i$ e $g \simeq e_j$, então $e_i(\xi_j) = \delta_{ij}$ e temos

$$\{e_i, e_j\}(\xi_k) = \langle \xi_k, [e_i, e_j] \rangle = \left\langle \xi_k, \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e_k \right\rangle = c_{ij}^k$$

Portanto, $\{e_i, e_j\} = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e_k = [e_i, e_j]$, e temos o mergulho de álgebras de Lie $i : L \hookrightarrow \mathcal{S}(L)$.

Relembramos que a subálgebra de polinômios L -invariantes de $\mathcal{S}(L)$ é por definição

$$\mathcal{S}(L)^L = \{f \in \mathcal{S}(L) : \{x, f\} = 0, \text{ para todo } x \in L\} \quad (1.3)$$

Já que $\{x, f\} = \text{ad}_x(f)$ para todo $x \in L$ e $f \in \mathcal{S}(L)$, obviamente $Z(\mathcal{S}(L)) = \mathcal{S}(L)^L$.

1.5 Álgebras de Kac-Moody afim

Seja L uma $\mathbb{C}$ -álgebra de Lie semisimples de dimensão finita. As subálgebras de Mishchenko-Fomenko são subálgebras de $\mathcal{S}(L)$ comutativas com respeito ao colchete de Poisson e parametrizadas por elementos $\xi \in L^*$ (ver capítulo 2). Seja $\mathcal{F}_\xi(L)$ uma subálgebra de Mishchenko-Fomenko, o problema de Vinberg consiste em encontrar uma subálgebra comutativa $\mathcal{A}_\xi$ de $U(L)$ tal que $\text{gr}(\mathcal{A}_\xi) = \mathcal{F}_\xi(L)$. Para o desenvolvimento deste trabalho é muito importante a solução do problema de Vinberg apresentada em Feigin *et al.* (2010). Apresentamos a seguir as definições e teoremas usados neste artigo. Os detalhes das provas estão em Frenkel (2007).

Definição 21 (Extensão central). *Uma extensão central de uma álgebra de Lie L por uma álgebra de Lie abeliana A é uma álgebra de Lie $\widehat{L}$ que se encaixa em uma sequência exata de álgebras de Lie*

$$\{0\} \longrightarrow A \longrightarrow \widehat{L} \longrightarrow L \longrightarrow \{0\}$$

Se $A = \mathbb{C}v$ é a álgebra de Lie abeliana de dimensão 1 gerada pelo vetor v , dizemos que $\widehat{L}$ é uma extensão central 1-dimensional da álgebra L .

Seja $\widehat{L}$ uma extensão central 1-dimensional da álgebra L , então $\widehat{L} \cong L \oplus \mathbb{C}v$, como espaços vetoriais. Além disso, o elemento v é central em $\widehat{L}$, e o colchete em $\widehat{L}$ é da forma

$$[x, y]_{\widehat{L}} = [x, y]_L + \varepsilon(x, y)v, \text{ para todo } x, y \in L$$

onde $\varepsilon : L \times L \longrightarrow \mathbb{C}$ é um 2-cociclo sobre L , isto é, uma forma bilinear sobre L satisfazendo

1. $\varepsilon(x, y) = -\varepsilon(y, x)$, para todo $x, y \in L$.
2. $\varepsilon(x, [y, z]) + \varepsilon(y, [z, x]) + \varepsilon(z, [x, y]) = 0$, para todo $x, y, z \in L$.

Ainda mais, se $\widehat{L}_1$ e $\widehat{L}_2$ são duas extensões centrais da álgebra de Lie L , então existe um funcional linear $f : L \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\varepsilon_1(x, y) = \varepsilon_2(x, y) + f([x, y]), \text{ para todo } x, y \in L,$$

onde ε_i é o 2-cociclo associado à extensão $\widehat{L}_i$. Assim, temos uma estrutura de espaço vetorial no conjunto de classes de isomorfismo de extensões centrais 1-dimensional de uma álgebra de Lie L . Observe-se que este espaço vetorial é isomorfo ao grupo $H^2(L, \mathbb{C})$,³ o segundo grupo de cohomologia da álgebra de Lie L .

Seja L uma álgebra de Lie e A uma álgebra associativa comutativa. O espaço $L \otimes A$ tem estrutura de álgebra de Lie com colchete definido nos tensores elementares de $L \otimes A$ pela fórmula

$$[x \otimes a, y \otimes b] = [x, y] \otimes ab.$$

Uma álgebra de Lie, particularmente importante, é $L \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, onde $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ é a álgebra dos polinômios de Laurent na variável t , denotamos esta álgebra por $L[t, t^{-1}]$. O seguinte resultado é bem conhecido (Para mais detalhes consultar [Frenkel \(2007\)](#), p.27-28)

Lema 2. *Para uma álgebra de Lie simples L , o espaço $H^2(L[t, t^{-1}], \mathbb{C})$ tem dimensão 1 e é identificado com o espaço das formas bilineares invariantes em L . Dada uma tal forma ε , a correspondente extensão central 1-dimensional pode ser construída a partir do 2-cociclo*

$$\kappa(x \otimes f, y \otimes h) = -\varepsilon(x, y) \text{Res}_{t=0} f dg,$$

onde, para um polinômio de Laurent $f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n t^n$, definimos $\text{Res}_{t=0} f(t) dt = a_{-1}$.

Portanto fixando uma forma bilinear simétrica invariante não nula $\varepsilon : L \times L \longrightarrow \mathbb{C}$ temos associada uma, e só uma, extensão central 1-dimensional da álgebra de Lie $L[t, t^{-1}]$ (a menos de isomorfismo).

³ O grupo $H^2(L, \mathbb{C})$ pode ser calculado usando o complexo de Chevalley-Eilenberg.

Definição 22 (Álgebras de Kac-Moody afim). *Seja L uma $\mathbb{C}$ -álgebra de Lie simples de dimensão finita e seja $\varepsilon : L \times L \rightarrow \mathbb{C}$ uma forma bilinear simétrica invariante não nula. A extensão central 1-dimensional da álgebra de Lie $L[t, t^{-1}]$ associada à forma ε chama-se de álgebra de Kac-Moody afim de nível ε , e se denota por $\widehat{L}_\varepsilon$.*

Pode-se mostrar que a álgebra de Kac-Moody afim de nível ε é o espaço $\widehat{L}_\varepsilon = L[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}v$ com colchete definido pela fórmula

$$[x \otimes f, y \otimes g] = [x, y] \otimes fg - (\varepsilon(x, y) \text{Res}_{t=0} f dg)v, \text{ para todo } x, y \in L, \quad (1.4)$$

onde v é um elemento central em $\widehat{L}_\varepsilon$. Usando os geradores básicos da álgebra $L[t, t^{-1}]$ a equação (1.4) é equivalente à expressão

$$[x \otimes t^s, y \otimes t^r] = [x, y] \otimes t^{r+s} - s(\varepsilon(x, y) \delta_{r,-s})v, \text{ para todo } x, y \in L, \text{ e } r, s \in \mathbb{Z}.$$

1.6 Temas gerais de geometria algébrica

Seja $\mathbb{F}$ um corpo. O espaço afim n -dimensional sobre $\mathbb{F}$ é o conjunto $\mathbb{A}^n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in \mathbb{F}\}$. Se E é um subconjunto do anel de polinômios $\mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$, o conjunto de zeros comuns, em $\mathbb{A}^n$, dos polinômios em E é chamado de *variedade algébrica afim* (ou simplesmente *variedade algébrica*) e denotado com $\mathcal{V}(E)$, ou seja

$$\mathcal{V}(E) = \{a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n : f(a) = 0 \text{ para todo } f \in E\}.$$

Se $I = \langle E \rangle$ é o ideal de $\mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$ gerado por E , então $\mathcal{V}(E) = \mathcal{V}(I)$, isto nos diz que, no estudo de variedades algébricas, basta considerar ideais de $\mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$. Ainda mais, já que o anel $\mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$ é noetheriano, todos os seus ideais são finitamente gerados, logo toda variedade algébrica afim consiste dos zeros comuns de um conjunto finito de polinômios. Por outro lado, podemos associar a cada subconjunto V de $\mathbb{A}^n$ o conjunto $\mathcal{I}(V)$ dos polinômios em $\mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$ que anulam em V , isto é

$$\mathcal{I}(V) = \{f \in \mathbb{F}[X_1, \dots, X_n] : f(a) = 0 \text{ para todo } a \in V\}.$$

Note-se que $\mathcal{I}(V)$ é de fato um ideal de $\mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$. Os seguintes lemas são básicos em geometria algébrica.

Lema 3. *Se $\mathbb{F}$ é um corpo com espaço afim $\mathbb{A}^n$, então*

1. $\mathbb{A}^n$ e $\emptyset$ são variedades algébricas.
2. Se $V_1, \dots, V_k$ são variedades algébricas, então $V_1 \cup \dots \cup V_k$ é variedade algébrica.
3. Se $\{V_j\}_{j \in J}$ é uma coleção arbitrária de variedades algébricas, então $\bigcap_{j \in J} V_j$ é variedade algébrica.
4. Se $I_1 \subseteq I_2$ são ideais de $\mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$, então $\mathcal{V}(I_1) \supseteq \mathcal{V}(I_2)$.
5. Se I é um ideal de $\mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$, então $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(\sqrt{I})$, onde

$$\sqrt{I} = \{f \in \mathbb{F}[X_1, \dots, X_n] : f^k \in I \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}_{>0}\} \text{ é o ideal radical de } I$$

Lema 4. Se $\mathbb{F}$ é um corpo com espaço afim $\mathbb{A}^n$, então

1. $\mathcal{I}(\mathbb{A}^n) = (0)$ e $\mathcal{I}(\emptyset) = \mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$.
2. Se $V_1 \subseteq V_2$ são subconjuntos de $\mathbb{A}^n$, então $\mathcal{I}(V_1) \supseteq \mathcal{I}(V_2)$.
3. Se V e W são subconjuntos de $\mathbb{A}^n$, então $\mathcal{I}(V \cup W) = \mathcal{I}(V) \cap \mathcal{I}(W)$.
4. Se $V \subseteq \mathbb{A}^n$, então $\sqrt{\mathcal{I}(V)} = \mathcal{I}(V)$, isto é, o ideal $\mathcal{I}(V)$ é um ideal radical em $\mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$.

Os pormenores das provas estão em [Kunz \(1985\)](#). Os itens 1, 2, 3 do lema 3 diz que as variedades algébricas afim satisfazem os axiomas para conjuntos fechados em uma topologia, que é chamada de *topologia de Zariski* de $\mathbb{A}^n$. Usando o *teorema dos zeros de Hilbert* pode-se provar o seguinte teorema

Teorema 8. Se $\mathbb{F}$ é um corpo algébricamente fechado, então

1. Para todo subconjunto $V \subseteq \mathbb{A}^n$ tem-se $V \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{I}(V))$. Além disso, temos igualdade se, e só se, V é uma variedade algébrica.
2. Para todo ideal $I \subseteq \mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$ tem-se $I \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$. Além disso, temos igualdade se, e só se, I é um ideal radical.

A prova do teorema pode-se encontrar em qualquer livro de geometria algébrica, para o item 2 é usado o *teorema dos zeros de Hilbert*, este teorema também garante que si I é um ideal próprio de $\mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$, então $\mathcal{V}(I) \neq \emptyset$. Observar que os lemas 3, 4 e o teorema 8 diz que as correspondências

$$\mathcal{I} : \{ \text{Variedades algébricas de } \mathbb{A}^n \} \longrightarrow \{ \text{Ideais radicais de } \mathbb{F}[X_1, \dots, X_n] \}$$

$$\mathcal{V} : \{ \text{Ideais radicais de } \mathbb{F}[X_1, \dots, X_n] \} \longrightarrow \{ \text{Variedades algébricas de } \mathbb{A}^n \}$$

invertem inclusões e são inversas uma da outra, isso permite traduzir a geometria das variedades algébricas para uma situação algébrica.

Exemplo 4. Se $f_1, \dots, f_r$ são polinômios lineares em $\mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$, a variedade $\mathcal{V}(f_1, \dots, f_r)$, chama-se de *variedade linear*, é o conjunto de soluções do sistema das f_i estudado pela álgebra linear.

Exemplo 5. Seja $A = \mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$ e sejam $f \in A$ e $X \subseteq \{X_1, \dots, X_n\}$. Vamos denotar por $f(X)$ o polinômio em A que resulta de cancelar em f todos os monômios que são fatores de alguma variável no subconjunto X .

1. Se $f_1, \dots, f_r \in A$, então

$$\mathcal{V}(X, f_1, \dots, f_r) = \mathcal{V}(X, f_1(X), \dots, f_r(X)).$$

2. Se $f, g, h_1, h_2 \in A$, então

$$\mathcal{V}(f + gh_1, h_1 + h_2) = \mathcal{V}(f - gh_2, h_1 + h_2).$$

Definição 23 (O anel de coordenadas). Seja $V \subseteq \mathbb{A}^n$ uma variedade algébrica, o anel de coordenadas associado à variedade V é o anel $\mathbb{F}[V] = \mathbb{F}[X_1, \dots, X_n] / \mathcal{I}(V)$.

Cada elemento $\psi = f + \mathcal{I}(V)$ do anel $\mathbb{F}[V]$ se pode ver como a função

$$\begin{aligned} \psi : \quad V &\longrightarrow \mathbb{F} \\ (a_1, \dots, a_n) &\longrightarrow f(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

A função ψ esta bem definida porque se $\psi = g + \mathcal{I}(V)$, então $f - g \in \mathcal{I}(V)$, isto é, $f(a_1, \dots, a_n) = g(a_1, \dots, a_n)$ para todo $(a_1, \dots, a_n) \in V$. Em particular, a i -ésima coordenada $x_i = X_i + \mathcal{I}(V)$, com $i = 1, \dots, n$, é a função dada por

$$x_i(a_1, \dots, a_n) = a_i, \text{ para todo } (a_1, \dots, a_n) \in V$$

Definição 24 (Espaço topológico irredutível). Dizemos que um espaço topológico X é irredutível se para qualquer decomposição $X = X_1 \cup X_2$, com fechados $X_1, X_2 \subseteq X$ temos $X = X_1$ ou $X = X_2$. Um subconjunto X' de um espaço topológico X é chamado de irredutível se X' é um espaço irredutível com a topologia induzida.

Em $\mathbb{A}^n$ com a topologia de Zariski temos (Ver [Kunz \(1985\)](#) para pormenores da prova):

Proposição 8. As seguintes afirmações são equivalentes

1. A variedade algébrica $V \subseteq \mathbb{A}^n$ é irredutível.
2. O ideal $\mathcal{I}(V)$ é primo em $\mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$.
3. O anel $\mathbb{F}[V]$ é um domínio de integridade.

Uma componente irredutível de um espaço topológico X é um subconjunto irredutível maximal, é conhecido que toda componente irredutível é um subconjunto fechado, portanto, no caso do espaço afim n -dimensional $\mathbb{A}^n$, toda componente irredutível é uma variedade algébrica. Ainda mais, se V é qualquer variedade algébrica em $\mathbb{A}^n$, então V contém só uma quantidade finita de componentes irredutíveis $V_1, \dots, V_s$ tais que

$$V = V_1 \cup \dots \cup V_s, \text{ onde } V_i \neq V_j \text{ se } i \neq j. \quad (1.5)$$

Temos as informações necessárias para interpretar a principal definição desta seção

Definição 25 (Dimensão). Seja V uma variedade algébrica irredutível em $\mathbb{A}^n$. A dimensão de V , denotada por $\dim V$, é o supremo dos inteiros r tais que existe uma cadeia

$$V = V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq \dots \supsetneq V_r$$

onde cada V_i é uma variedade algébrica irredutível. Além disso, se V é uma variedade algébrica qualquer, com decomposição como na equação 1.5, a dimensão de V se define pela equação

$$\dim V = \sup \{ \dim V_i : i = 1, \dots, s \}.$$

Além disso, se $\dim V_i = k$ para todo $i = 1, \dots, s$, dizemos que a variedade V é equidimensional de dimensão pura k , neste caso escreve-se $\text{EqD}(k)$.

Seja V uma variedade algébrica irredutível. As cadeias $V = V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq \dots \supsetneq V_r$, onde cada V_i é uma variedade algébrica irredutível, estão em correspondência 1 – 1 com as cadeias $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_r$ de ideais primos no anel de coordenadas $\mathbb{F}[V]$ (pelas correspondências $\mathcal{I}$ e $\mathcal{V}$ e a proposição 8), portanto $\dim V = \dim \text{Krull } \mathbb{F}[V]$. Por exemplo, para o espaço afim temos

$$\dim \mathbb{A}^n = \dim \text{Krull } \mathbb{F}[X_1, \dots, X_n] = n.$$

Exemplo 6. Seja $V \subseteq \mathbb{A}^n$ um subespaço determinado por polinômios lineares $f_1, \dots, f_s$ em $\mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$, da álgebra linear sabe-se que reduzindo o sistema de equações das f_i se obtém um sistema de equações dado por polinômios $h_1, \dots, h_r$ lineares, homogêneos e linearmente independentes (onde r é o posto da matriz de coeficientes correspondente ao sistema das f_i) cujo espaço de soluções é o mesmo do que o sistema original. Além disso, existem variáveis $X_{i_1}, \dots, X_{i_{n-r}}$ tais que o conjunto $\{h_1, \dots, h_r, X_{i_1}, \dots, X_{i_{n-r}}\}$ é uma base para $\mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$. Seja agora I o ideal de $\mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$ gerado pelos polinômios h_i , então

$$\dim V = \dim \text{Krull} (\mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]/I) = \dim \text{Krull} (\mathbb{F}[X_{i_1}, \dots, X_{i_{n-r}}]) = n - r.$$

Os seguintes resultados são clássicos na teoria: de geometria algébrica

Proposição 9. *Se $\mathbb{F}$ é um corpo com espaço afim $\mathbb{A}^n$, temos*

1. *Se $U, V \subseteq \mathbb{A}^n$ são variedades algébricas e $U \subsetneq V$, então $\dim U < \dim V$.*
2. *Uma variedade $V \subsetneq \mathbb{A}^n$ é $EqD(n-1)$ se, e só se, $\mathcal{I}(V) = \langle f \rangle$, para algum polinômio $f \in \mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$.*
3. *Sejam $f_1, \dots, f_r$ polinômios no anel $\mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$ e W é uma componente irredutível contida em $\mathcal{V}(f_1, \dots, f_r)$ então $\dim W \geq n - r$.*

Definição 26 (Codimensão). *Seja $V \subseteq \mathbb{A}^n$ uma variedade algébrica. Para toda variedade algébrica $W \subseteq V$ se define a codimensão de W em V pela fórmula*

$$\text{codim}_V W = \dim V - \dim W$$

Se $V = \mathbb{A}^n$, a codimensão da variedade algébrica W em V é

$$\text{codim } W = n - \dim W.$$

Definição 27 (Interseção completa). *Seja $V \subseteq \mathbb{A}^n$ uma variedade algébrica. Dizemos que V é uma interseção completa se existem $r = \text{codim } V$ polinômios $f_i \in \mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$ tais que $V = \mathcal{V}(f_1, \dots, f_r)$.*

Se $V = \mathcal{V}(f_1, \dots, f_r)$ é uma interseção completa ($r = \text{codim } V$) e W é uma componente irredutível contida em V , então $n - r \leq \dim W \leq \dim V = n - r$ (ver proposição 9), portanto V é $EqD(n - r)$.

Definição 28 (Aplicação polinomial e variedades algébricas isomorfas).

Sejam $V \subseteq \mathbb{A}^n$ e $W \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades algébricas. Uma função $f : V \rightarrow W$ é chamada de aplicação polinomial se existem polinômios $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$ tais que para cada ponto $a \in V$ tem-se

$$f(a) = (f_1(a), \dots, f_m(a)).$$

Ainda mais, dizemos que as variedades algébricas V e W são isomorfas, $V \cong W$, se existir uma aplicação polinomial $g : W \rightarrow V$ tal que $f \circ g = \text{Id}_V$ e $g \circ f = \text{Id}_W$.

Dadas as variedades algébricas $V \subseteq \mathbb{A}^n$ e $W \subseteq \mathbb{A}^m$, pode-se provar que $V \cong W$ se, e só se, os correspondentes anéis de coordenadas $\mathbb{F}[V]$ e $\mathbb{F}[W]$ são isomorfos. Portanto duas variedades algébricas isomorfas têm a mesma dimensão.

Exemplo 7. Sejam $V = \mathcal{V}(y - x^2) \subset \mathbb{R}^2$ e $W = \mathbb{R}$, defina-se as aplicações polinômiais

$$\begin{array}{ccc} f : & V & \longrightarrow W \\ & (x, y) & \longrightarrow x \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} g : & W & \longrightarrow V \\ & x & \longrightarrow (x, x^2) \end{array}$$

Observe que $f \circ g = Id_W$ e $g \circ f = Id_V$, portanto, $\mathcal{V}(y - x^2) \cong \mathbb{R}$, em particular, $\dim \mathcal{V}(y - x^2) = \dim \mathbb{R} = 1$.

Exemplo 8. Sejam $V = \mathcal{V}(f_1, \dots, f_m)$ e $W = \mathcal{V}(g_1, \dots, g_m)$ duas variedades algébricas em $\mathbb{C}^n$, e suponha que existe uma permutação $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tal que

$$f_i(X_1, \dots, X_n) = g_i(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}), \text{ para todo } i = 1, \dots, m.$$

Então temos as aplicações

$$\begin{array}{ccc} F : & V & \longrightarrow W \\ & (t_1, \dots, t_n) & \longrightarrow (t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)}) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} G : & W & \longrightarrow V \\ & (t_1, \dots, t_n) & \longrightarrow (t_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, t_{\sigma^{-1}(n)}) \end{array}$$

Claramente $F \circ G = Id_W$, e $G \circ F = Id_V$, portanto $V \cong W$. Nesta tese vamos denotar este isomorfismo de variedades por $X_1 \longleftrightarrow X_{\sigma(1)}, \dots, X_n \longleftrightarrow X_{\sigma(n)}$.

1.7 Sequência regular e complexo de Koszul

Definição 29 (Elemento regular e sequência regular). *Seja A um anel comutativo com unidade. Dizemos que um elemento $a \in A$ é regular sobre A se a não é nem divisor de zero nem unidade em A . Uma sequência $a_1, \dots, a_t$ de elementos em A é uma sequência regular sobre A se satisfaz as duas condições seguintes*

1. *O elemento a_1 é regular sobre A e para todo $i \in \{2, \dots, t\}$ a classe do elemento a_i é regular sobre o anel A/J_{i-1} , onde $J_i = \langle a_1, \dots, a_i \rangle$ o ideal de A gerado pela sequência $a_1, \dots, a_i$.*
2. $A/J_t \neq \{0\}$.

Note-se que a definição de sequência regular depende da ordem dos elementos na sequência, pode acontecer que após uma permutação dos elementos de uma sequência regular, a nova sequência não seja regular, por exemplo, seja $A = \mathbb{F}[X, Y, Z]$ o anel de polinômios no corpo $\mathbb{F}$, então $X, Y(1 - X), Z(1 - X)$ é uma sequência regular, mas $Y(1 - X), Z(1 - X), X$ não é sequência regular, já que a classe de $Z(1 - X)Y$ é zero no anel $A/(Y(1 - X))A$. Porém, se A é um anel comutativo com unidade, noetheriano, graduado positivamente e a sequência $a_1, \dots, a_t$ é regular e todo elemento a_i é homogêneo de grau positivo, então qualquer permutação da sequência $a_1, \dots, a_t$ é também uma sequência regular (Ver [Matsumura \(1986\)](#), p.127).

Definição 30 (Complexo de Koszul). *Seja A uma $\mathbb{F}$ -álgebra associativa (não necessariamente comutativa), e seja M um A - $\mathbb{F}[X_1, \dots, X_t]$ bimodulo. O complexo de Koszul $K_\bullet(M)$ é o complexo de A -módulos à esquerda definido da forma seguinte: Seja $\{e_1, \dots, e_t\}$ a base canônica de $\mathbb{F}^t$, defina-se*

$$K_i = \begin{cases} 0 & \text{para } i < 0, \\ M \otimes_{\mathbb{F}} \bigwedge_{\mathbb{F}}^i \mathbb{F}^t & \text{para cada } i \geq 0. \end{cases}$$

e o diferencial $d_i : K_i \longrightarrow K_{i-1}$ definido nos elementos $m \otimes (e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_i}) \in K_i$, pela fórmula

$$d_i(m \otimes (e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_i})) = \sum_{k=1}^i (-1)^{k-1} m \cdot X_{j_k} \otimes (e_{j_1} \wedge \dots \wedge \widehat{e}_{j_k} \wedge \dots \wedge e_{j_i}),$$

onde $1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq t$ e $\widehat{e}_{j_k}$ indicam que e_{j_k} é omitido.

Se $\Phi = \{\delta_1, \dots, \delta_t\} \subset A$ é uma sequência de elementos mutuamente comutativos, então podemos ver a álgebra A como um $A\text{-}\mathbb{F}[X_1, \dots, X_t]$ bimodulo, com a estrutura natural de A -módulo à esquerda e a estrutura de $\mathbb{F}[X_1, \dots, X_t]$ -módulo à direita dada por la fórmula

$$a \cdot X_i = a\delta_i \text{ para todo } a \in U, i = 1, \dots, t.$$

Denotamos o complexo de Koszul deste $A\text{-}\mathbb{F}[X_1, \dots, X_t]$ bimodulo por $K_\bullet(\Phi)$.

Definição 31 (Interseção completa). Uma sequência $\Phi = \{\delta_1, \dots, \delta_t\} \subset A$ chama-se de interseção completa para A se o i -ésimo grupo de homologia, $H_i(\Phi)$, do complexo de Koszul $K_\bullet(\Phi)$ satisfaz $H_i(\Phi) = 0$ se $i \neq 0$, e $H_0(\Phi) \neq 0$.

Note-se que, de fato, $H_0(\Phi) \cong A/(A\delta_1 + \dots + A\delta_t)$.

O seguinte teorema relaciona os conceitos de sequência regular e interseção completa, os detalhes da prova estão em [Matsumura \(1986\)](#).

Teorema 9. Seja A uma $\mathbb{F}$ -álgebra comutativa com 1.

1. Se a sequência $\Phi = \{\delta_1, \dots, \delta_t\}$ é regular sobre A , então Φ é uma interseção completa para A .
2. Se A é graduada positivamente, e a sequência $\Phi = \{\delta_1, \dots, \delta_t\}$ é uma interseção completa para A , e os elementos da sequência são homogêneos de grau positivo, então Φ é uma sequência regular sobre A .

A seguinte proposição é uma consequência da proposição 2.1 de [Futorny e Ovsienko \(2005\)](#):

Proposição 10. Seja $A = \mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$, e seja $E = \{f_1, \dots, f_t\}$ uma sequência de elementos em A , $1 \leq t \leq n$.

1. A sequência E é uma interseção completa para A se, e só se, a variedade $\mathcal{V}(E)$ é $\text{EqD}(n - t)$ (ver definição 25).
2. A sequência E é regular sobre A se, e só se, a variedade $\mathcal{V}(f_1, \dots, f_i)$ é $\text{EqD}(n - i)$, para $i = 1, \dots, t$.
3. Se E é uma interseção completa para A e os polinômios f_i são homogêneos, então qualquer subsequência de E é uma interseção completa para A .

Observação 3. Do teorema 9 e a proposição 10 temos que uma sequência de elementos homogêneos de grau positivo $E = \{f_1, \dots, f_t\}$, com $1 \leq t \leq n$, no anel $\mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$ é regular se, e só se, a variedade $\mathcal{V}(E)$ é $\text{EqD}(n - t)$.

Uma consequência imediata da proposição anterior é o seguinte

Corolário 1. *Seja $A = \mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$ o anel de polinômios nas variáveis X_i , $i = 1, \dots, n$. Sejam $G_1, \dots, G_t$ elementos de A , e definamos os polinômios*

$$g_i(X_{r+1}, \dots, X_n) = G_i(0, \dots, 0, X_{r+1}, \dots, X_n)$$

no anel $B = \mathbb{F}[X_{r+1}, \dots, X_n]$. Então a sequência $X_1, \dots, X_r, G_1, \dots, G_t$ é uma interseção completa para A se, e só se, a sequência $g_1, \dots, g_t$ é uma interseção completa para B .

Muito importante neste trabalho é a definição de *álgebra filtrada especial* que apresentamos a seguir

Definição 32 (Álgebra filtrada especial). *Seja $A = \mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$ o anel de polinômios e seja U uma $\mathbb{F}$ -álgebra filtrada. Dizemos que U é filtrada especial se a sua álgebra graduada associada, $\text{gr}(U)$, é isomorfa a um quociente A/I , onde I é um ideal radical de A gerado por uma sequência regular.*

Exemplo 9. Seja $\mathbb{F}$ um corpo algebricamente fechado (de característica zero) e seja L uma $\mathbb{F}$ -álgebra de Lie, com $\dim L = n$. Sabe-se que a álgebra envolvente universal $U(L)$ é filtrada e além disso $\text{gr}(U(L)) \cong \mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$, o anel de polinômios em n variáveis, portanto $U(L)$ é filtrada especial.

Capítulo 2

Subagebras de Mishchenko-Fomenko

Na parte inicial deste capítulo descrevemos o método de deslocamento de argumento pelo qual são construídas as subálgebras de Mishchenko-Fomenko, depois se descreve brevemente a solução ao problema de Vinberg dada em [Feigin *et al.* \(2010\)](#). Para o que se segue vamos fixar um corpo $\mathbb{F}$ algébricamente fechado de característica zero e uma $\mathbb{F}$ -álgebra de Lie L semisimples de dimensão finita.

2.1 O método de deslocamento de argumento

A álgebra envolvente universal $U(L)$ de L tem uma filtração canônica e a álgebra graduada associada desta filtração é isomorfa à álgebra simétrica $\mathcal{S}(L)$ (ver proposição 1). Tal como foi estabelecido na subseção (1.4.1) $\mathcal{S}(L) = \mathbb{F}[L^*]$.

O método de deslocamento de argumento fornece uma maneira de construir subálgebras em $\mathcal{S}(L)$ comutativas com respeito ao colchete de Poisson. A seguir se descreve este método: Seja $\Delta : L \times L \rightarrow \mathbb{F}$ uma forma bilinear simétrica, invariante e não degenerada (sempre existe porque L é semisimples). Podemos identificar os espaços L e seu dual L^* pelo isomorfismo $\delta : L \rightarrow L^*$, definido para cada $x \in L$ pela expressão

$$\begin{aligned} \delta(x) : L &\longrightarrow \mathbb{F} \\ y &\longrightarrow \Delta(x, y) \end{aligned}$$

Vamos fixar uma base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ de L e identificar $L = L^*$, então $\mathcal{S}(L) = \mathbb{F}[L]$, o anel de polinômios nas variáveis e_i . Seja $f \in \mathcal{S}(L)$ um polinômio de grau d , seja z uma variável (complexa) e para cada $\xi \in L^* = L$ defina $a_i = \xi(e_i) \in \mathbb{F}$ e considere a expansão

$$f(e_1 + a_1 z, \dots, e_n + a_n z) = \sum_{j=0}^d f_{\xi}^j(e_1, \dots, e_n) z^j,$$

que dá origem a d polinômios $f_{\xi}^j \in \mathcal{S}(L)$, $j = 0, 1, \dots, d-1$, chamados os ξ -deslocamentos de f . Note-se que $\text{grau}(f_{\xi}^j) = d - j$, por isso não tem interesse o polinômio f_{ξ}^d , além disso, $f_{\xi}^0 = f$ e $f_{\xi}^{d-1} = (df)_{\xi}$. Denote por $\mathcal{F}_{\xi}(L)$ a subálgebra de $\mathcal{S}(L)$ gerada pelos ξ -deslocamentos de todos os polinômios $f \in \mathcal{S}(L)^L$ (ver equação (1.3)). As subálgebras $\mathcal{F}_{\xi}(L)$, geradas pelo método de deslocamento de argumento, são ditas de *álgebras de Mishchenko-Fomenko ou the shift of argument subalgebras*. Estas são subálgebras comutativas com respeito ao colchete de Poisson-Lie, isso é uma consequência do seguinte lema:

Lema 5. Se $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{S}(L)^L$, então para todo $\xi \in L^*$, os polinômios

$$\{f_{i,\xi}^j : i = 1, \dots, m \text{ e } j = 0, 1, \dots, \deg(f_i) - 1\},$$

são mutuamente comutativos com respeito ao colchete de Poisson-Lie.

Os detalhes da prova estão em [Mishchenko e Fomenko \(1978\)](#). Agora é apresentado o teorema principal de [Panyushev e Yakimova \(2008\)](#)

Teorema 10. Seja L uma $\mathbb{F}$ -álgebra de Lie e suponha que

1. A subálgebra de polinômios L -invariantes, $\mathcal{S}(L)^L$, contém elementos homogêneos e algebricamente independentes $P_1, \dots, P_r$, onde $r = i(L)$ (ver definição (14)), tais que

$$\sum_{i=1}^r \deg(P_i) = \frac{1}{2}(r + \dim L) := b(L).$$

2. $\text{codim}(L^* \setminus L_{\text{reg}}^*) \geq 3$.

Então, para todo $\xi \in L_{\text{reg}}^*$ a subálgebra $\mathcal{F}_\xi(L)$ é uma álgebra de polinômios de dimensão de Krull $b(L)$ e ela é uma subálgebra maximal Poisson comutativa de $\mathcal{S}(L)$.

O teorema de [Chevalley \(1955\)](#) garante que a subálgebra $\mathcal{S}(L)^L$ é gerada por $r = i(L)$ polinômios homogêneos e algebricamente independentes $P_1, \dots, P_r$ que satisfazem a condição (1) do teorema anterior. Por outro lado, um resultado clássico de Kostant (ver [Kostant \(1963\)](#)) garante que $\text{codim}(L^* \setminus L_{\text{reg}}^*) = 3$, então a subálgebra $\mathcal{F}_\xi(L)$, com $\xi \in L_{\text{reg}}^*$, é uma subálgebra máxima Poisson comutativa de $\mathcal{S}(L)$. Também, devido a Bolsinov (ver [Bolsinov \(1991\)](#)), pode-se afirmar que se $\xi \in L_{\text{reg}}^*$ e $P_1, \dots, P_r$ ($r = i(L)$), são geradores algebricamente independentes de $\mathcal{S}(L)^L$, então os ξ -deslocamentos

$$\{P_{i,\xi}^j : i = 1, \dots, r \text{ e } j = 0, 1, \dots, \deg(P_i) - 1\},$$

são geradores algebricamente independentes de $\mathcal{F}_\xi(L)$.

2.2 O problema de Vinberg

Se $\mathcal{A}$ é uma subálgebra comutativa da álgebra $U(L)$ então $\text{gr}(\mathcal{A})$ é uma subálgebra de Poisson comutativa de $\mathcal{S}(L)$. Porém, se A é uma subálgebra Poisson comutativa de $\mathcal{S}(L)$ nem sempre podemos garantir a existência de uma subálgebra $\mathcal{A}$ de $U(L)$ que "quantiza" (ou levanta para $U(L)$) à subálgebra A , no sentido de que $\text{gr}(\mathcal{A}) = A$.

O problema de Vinberg, proposto em [Vinberg \(1991\)](#), consiste em "quantizar" as álgebras de Mishchenko-Fomenko $\mathcal{F}_\xi(L) \subset \mathcal{S}(L)$, isto é, determinar se existe uma subálgebra $\mathcal{A}_\xi \subset U(L)$ tal que $\text{gr}(\mathcal{A}_\xi) = \mathcal{F}_\xi(L)$. Soluções satisfatórias para o problema de Vinberg foram dadas por Rybnikov (ver [Rybnikov \(2006\)](#)), quando $\xi \in L^*$ é regular semisimples, e Feigin, Frenkel e Toledano Laredo (ver [Feigin et al. \(2010\)](#)) no caso $\xi \in L^*$ regular. Para álgebras de Lie tipo A , e em particular para $L = \mathfrak{gl}_n$, Futorny e Molev ([Futorny e Molev, 2015](#)) dão resposta positiva para qualquer $\xi \in \mathfrak{gl}_n^*$.

2.2.1 A solução de Feigin, Frenkel e Toledano Laredo

A solução ao problema de Vinberg apresentada em [Feigin *et al.* \(2010\)](#) usa uma álgebra associativa comutativa chamada de *Centro de Feigin-Frenkel* (ver equação (2.1)). Através deste centro, em [Futorny e Molev \(2015\)](#) dão conjuntos explícitos de geradores das subálgebras de Mishchenko-Fomenko em $\mathcal{S}(gl_n)$, esses conjuntos de geradores foram usados no desenvolvimento desta tese. A seguir é apresentado um esboço desta solução. Seja $\varepsilon : L \times L \mapsto \mathbb{F}$ a forma bilinear simétrica invariante definida por

$$\varepsilon(X, Y) = \frac{1}{h^\vee} \kappa(x, y), \text{ para todo } X, Y \in L,$$

onde κ é a forma de Killing e $h^\vee$ é o número coxeter dual de L (Ver seção (1.3.3)).¹ Da seção (1.5) sabemos que a *álgebra de Kac-Moody afim de nível ε* , é a extensão central 1-dimensional, $\widehat{L}_\varepsilon = L[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{F}v$, da álgebra $L[t, t^{-1}]$ com colchete dado pela equação (1.4), e o elemento v é central em $\widehat{L}_\varepsilon$. Para $X \in L$ e $r \in \mathbb{Z}$, vamos escrever $X_{[r]} := X \otimes t^r \in L[t, t^{-1}]$, portanto o colchete em $\widehat{L}_\varepsilon$ é

$$[X_{[r]} + \alpha v, Y_{[s]} + \beta v] = [X, Y]_{[r+s]} + r\varepsilon(X, Y)\delta_{r,-s}v,$$

onde $X, Y \in L$, $r \in \mathbb{Z}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Considerar os espaços $L_+ = L[t]$ e $L_- = t^{-1}L[t^{-1}]$, temos a decomposição $\widehat{L}_\varepsilon = L_+ \oplus L_- \oplus \mathbb{F}v$ (como espaços vetoriais). Vamos denotar por $\mathcal{O}_\varepsilon$ a categoria cujos objetos são os $\widehat{L}_\varepsilon$ -módulos M satisfazendo as duas condições seguintes

1. Para todo $m \in M$, $v \cdot m = h^\vee m$.
2. Para cada $m \in M$ existe um inteiro N , o suficientemente grande, tal que $t^N L_+ \cdot m = 0$.

Seja J_ε o ideal à esquerda de $U(\widehat{L}_\varepsilon)$ gerado por L_+ e $v - h^\vee$. O *módulo vácuo de nível ε* é o espaço $V(L) = U(\widehat{L}_\varepsilon)/J_\varepsilon$, é conhecido que $V(L)$ é um objeto em $\mathcal{O}_\varepsilon$ (ver [Frenkel \(2007\)](#)), além disso, pelo teorema PBW (2), temos $V(L) \cong U(L_-)$ (como espaços vetoriais).

O *centro de Feigin-Frenkel* é a álgebra $\mathfrak{z}_\varepsilon(L) = \text{End}_{\widehat{L}_\varepsilon} V(L)$, ou equivalentemente

$$\mathfrak{z}_\varepsilon(L) = \{\bar{x} \in V(L) : f \cdot \bar{x} = 0 \text{ para todo } f \in L_+\} \quad (2.1)$$

Pode-se provar que $\mathfrak{z}_\varepsilon(L)$ é uma álgebra comutativa (ver [Frenkel \(2007\)](#) para detalhes da prova). Qualquer elemento de $\mathfrak{z}_\varepsilon(L)$ é dito de *vetor de Segal-Sugawara*. Temos que a aplicação $\mathfrak{z}_\varepsilon(L) \hookrightarrow U(L_-)$ é de fato um mergulho de álgebras, logo o centro de Feigin-Frenkel pode ser considerado como uma subálgebra comutativa de $U(L_-)$. Seja $\tau \in \text{Der}(U(L_-))$ definida por $\tau(1) = 0$ e $\tau(X_{[r]}) = -rX_{[r-1]}$, sabe-se que $\mathfrak{z}_\varepsilon(L)$ é um subespaço τ -invariante de $U(L_-)$.

Teorema 11 (Feigin-Frenkel, 1992). *Existem vetores de Segal-Sugawara $S_1, \dots, S_r$ em $U(L_-)$, com $r = rk(L)$ (ver definição (14)), tais que*

$$\mathfrak{z}_\varepsilon(L) = \mathbb{F} [\tau^k(S_i) : i = 1, \dots, r; k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}]$$

e os símbolos $\overline{S}_1, \dots, \overline{S}_r$ coincidem com as imagens de certos geradores algebricamente independentes da álgebra de invariantes $\mathcal{S}(L)^L$ sob o mergulho $\mathcal{S}(L) \hookrightarrow U(L_-)$ definido por $X \mapsto X_{[-1]}$ para $X \in L$.

¹Por exemplo, para uma $\mathbb{F}$ -álgebra de Lie L de tipo A_n tem-se $h^\vee = n$, e se L é de tipo B_n tem-se $h^\vee = n - 1$.

Ver [Frenkel \(2007\)](#) para os detalhes da prova. O conjunto $\{S_1, \dots, S_r\} \subset U(L_-)$, do teorema anterior, é dito de *Conjunto completo de vetores de Segal-Sugawara*. Seja $\{Y_i\}_{i=1}^n$ uma base da álgebra L e seja $P = P(Y_1, \dots, Y_n)$ um polinômio em $\mathcal{S}(L)^L$. Vamos denotar $Y_i(z) := \sum_{k \leq 0} Y_{i,[k]} z^{-k-1}$, e escrever

$$P(Y_1(z), \dots, Y_n(z)) = \sum_{k \leq 0} P_{(k)} z^{-k-1}$$

Sabe-se que cada $P_{(k)}$ é um L_+ -invariante em $\mathcal{S}(L_-)$, ainda mais,

$$k! P_{(-k-1)} = \tau^k P(Y_{1,[-1]}, \dots, Y_{n,[-1]}) \text{ para todo } k \geq 0.$$

Teorema 12 (Beilinson-Drinfeld, 1997). *Se $P_1, \dots, P_r$, com $r = \text{rk}(L)$, são geradores algebricamente independentes da álgebra de invariantes $\mathcal{S}(L)^L$, então os elementos $P_{1,(r)}, \dots, P_{r,(r)}$, com $r < 0$, são geradores algebricamente independentes da álgebra $\mathcal{S}(L_-)^{L+}$*

Demonstração. Os detalhes da prova ficam em [Beilinson e Drinfeld \(1997\)](#). □

Dado qualquer $\mu \in L^*$ e $z \in \mathbb{F}^*$, temos o homomorfismo de álgebras associativas

$$\begin{aligned} \psi_{\mu,z} : \quad U(L_-) &\longrightarrow U(L) \\ X_{[r]} &\longrightarrow Xz^r + \delta_{r,-1}\mu(X) \end{aligned} \quad (2.2)$$

A imagem de $\mathfrak{z}_\varepsilon(L)$ sob $\psi_{\mu,z}$ é uma subálgebra comutativa de $U(L)$ que não depende da z e denotamos por $\mathcal{A}_\mu$. Se $S \in U(L_-)$ é um elemento de grau d , então escrevendo $\psi_{\mu,z}(S)$ como um polinômio em z^{-1} , são definidos os elementos $S^{(i)} \in U(L)$ pela expansão

$$\psi_{\mu,z}(S) = S^{(0)} z^{-d} + \dots + S^{(d-1)} z^{-1} + S^d$$

Teorema 13 (Feigin et al. (2010)). *Se $\xi \in L^*$ é regular então*

1. *A subálgebra $\mathcal{A}_\xi$ de $U(L)$ é maximal comutativa.*
2. *Se $S_1, \dots, S_r \in U(L_-)$ são vetores de Segal-Sugawara satisfazendo o teorema 11 então os elementos $S_k^{(i)}$ com $k = 1, \dots, r$ e $i = 0, 1, \dots, \deg(S_k) - 1$ são geradores algebricamente independentes da álgebra $\mathcal{A}_\xi$.*
3. *$\text{gr}(\mathcal{A}_\xi) = \mathcal{F}_\xi(L)$.*

2.3 Quantização das subálgebras de Mishchenko-Fomenko em $\mathcal{S}(gl_n)$

Seja L uma $\mathbb{C}$ -álgebra de Lie de dimensão finita. Segundo o teorema 13, se $\xi \in L^*$ é um elemento regular, então existem geradores algebricamente independentes da álgebra $\mathcal{A}_\xi \subset U(L)$ que quantiza a subálgebra de Mishchenko-Fomenko $\mathcal{F}_\xi(L) \subset \mathcal{S}(L)$. No caso $L = gl_n$ a álgebra de Lie das matrizes complexas de tamanho $n \times n$, [Futorny e Molev \(2015\)](#), conseguiram estender esta propriedade para uma arbitrária $\xi \in gl_n^*$, além disso, eles apresentam geradores algebricamente independentes da subálgebra $\mathcal{F}_\xi(gl_n) \subset \mathcal{S}(gl_n)$. A prova de eles depende da construção explícita de geradores do centro de Feigin-Frenkel (ver subseção (2.2.1)). A seguir é apresentado um dos conjuntos de geradores da subálgebra $\mathcal{F}_\xi(gl_n) \subset \mathcal{S}(gl_n)$, com $\xi \in gl_n^*$,

usado para o desenvolvimento desta tese. Seja $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^n$ a base canônica de gl_n , vamos identificar as álgebras gl_n^* e gl_n através da seguinte forma bilinear simétrica invariante

$$\langle X, Y \rangle = \text{tr}(XY) - \frac{1}{n} \text{tr}(X) \text{tr}(Y), \text{ onde, } X, Y \in gl_n.$$

Seja $E = (e_{ij})$ a matriz de tamanho $n \times n$ com entradas em U , para cada par de subconjuntos $I = \{i_1 < \dots < i_t\}$ e $J = \{j_1 < \dots < j_t\}$ de $\{1, \dots, n\}$, denote-se

$$E_J^I := \text{cdet} \begin{pmatrix} e_{i_1 j_1} & e_{i_1 j_2} & \dots & e_{i_1 j_t} \\ e_{i_2 j_1} & e_{i_2 j_2} & \dots & e_{i_2 j_t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_{i_t j_1} & e_{i_t j_2} & \dots & e_{i_t j_t} \end{pmatrix}$$

Seja agora $\xi \in gl_n^*$ visto como matriz de tamanho $n \times n$. Suponha que os diferentes autovalores de ξ são $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ e que a forma canônica de Jordan de ξ é a soma direta de blocos de Jordan $J_{\alpha_j^{(i)}}$ de tamanhos $\alpha_1^{(i)} \geq \dots \geq \alpha_{s_i}^{(i)} \geq 1$. Para $i = 1, \dots, r$ seja $\alpha^{(i)}$ o diagrama de Young² cuja j -ésima linha tem $\alpha_j^{(i)}$ caixas. Com estes dados se constrói outro diagrama de Young γ com linhas de tamanhos $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots$, onde

$$\gamma_l = \sum_{i=1}^r \sum_{j \geq l+1} \alpha_j^{(i)}$$

de modo que γ_l é o número total de caixas que estão estritamente abaixo da l -ésima linha em todos os diagramas $\alpha^{(i)}$. Considere agora os elementos $\bar{\phi}_m^{(k)} \in S(gl_n)$, para $m = 1, \dots, n$ e $k = 0, 1, \dots, m-1$ definidos por

$$\bar{\phi}_m^{(k)} = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=m}} \sum_{\substack{B, C \subseteq I \\ |B|=|C|=k}} (\text{sgn } \sigma) \xi_C^B E_{I \setminus C}^{I \setminus B} \quad (2.3)$$

onde $\text{sgn } \sigma$ denota o sinal da permutação $\sigma = \begin{pmatrix} B & I \setminus B \\ C & I \setminus C \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n$ e por definição $\xi_C^A = 1$ se $|A| = |B| = 0$. Além disso, vamos associar os elementos do conjunto

$$\left\{ \bar{\phi}_m^{(k)} : m = 1, \dots, n; \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \right\},$$

com as caixas do diagrama $\Gamma = (n, n-1, \dots, 1)$ de modo que a (i, j) -ésima caixa de Γ corresponde com $\bar{\phi}_{n-j+1}^{(n-i-j+1)}$, com $i, j = 1, \dots, n$. Veja abaixo como fica esta associação

$$\Gamma = \begin{array}{ccccccc} & \bar{\phi}_n^{(n-1)} & \bar{\phi}_{n-1}^{(n-2)} & \dots & \bar{\phi}_2^{(1)} & \bar{\phi}_1^{(0)} & \\ & \bar{\phi}_n^{(n-2)} & \bar{\phi}_{n-1}^{(n-3)} & \dots & \bar{\phi}_2^{(0)} & & \\ & \vdots & \vdots & & & & \\ & \bar{\phi}_n^{(1)} & \bar{\phi}_{n-1}^{(0)} & & & & \\ & \bar{\phi}_n^{(0)} & & & & & \end{array}$$

²Um diagrama de Young é um arranjo de caixas dispostas em linhas de modo que cada linha tem uma quantidade menor ou igual de caixas do que a linha acima.

O diagrama γ está contido em Γ de modo que pode-se considerar o diagrama skew que resulta quando são suprimidas do diagrama Γ as caixas que estão no diagrama γ , denotaremos este diagrama skew por Γ/γ . Em [Futorny e Molev \(2015\)](#) se estabelece o seguinte lema chave para o desenvolvimento deste trabalho

Lema 6. *Os elementos $\overline{\phi}_m^{(k)}$ correspondentes as caixas do diagrama Γ/γ geram a subálgebra de Mishchenko-Fomenko $\mathcal{F}_\xi(L) \subset \mathcal{S}(gl_n)$ e são algebricamente independentes.*

É conhecido que a algebra $\mathcal{A}_\xi \subset U(gl_n)$ depende só da órbita adjunta (ver [Feigin et al. \(2010\)](#)). Mais concretamente, para cada matriz não singular $g \in gl_n$, os elementos $\overline{\phi}_m^{(k)}$ permanecem inalterados quando as substituições $\xi \longrightarrow g\xi g^{-1}$ e $E \longrightarrow gEg^{-1}$ são feitas simultaneamente. Isso implica que a subálgebra $\mathcal{A}_{g\xi g^{-1}}$ pode-se identificar com a subálgebra $\mathcal{A}_\xi$ associada com a imagem de $U(gl_n)$ sob o automorfismo que envia E para gEg^{-1} . Então temos essencialmente uma família finita de subálgebras $\mathcal{F}_\xi(gl_n) \subset \mathcal{S}(gl_n)$, uma para cada forma canônica de Jordan em gl_n .

Capítulo 3

Subálgebras de Mishchenko-Fomenko em $\mathcal{S}(gl_n)$

Neste capítulo são apresentadas os principais resultados deste trabalho (teoremas 14 e 15). Vamos fixar a seguinte notação: A álgebra envolvente universal de gl_n é denotada por U_n e $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^n$ é a base canônica de gl_n . Vamos denotar por x_{ij} a classe de $\bar{e}_{ij}$ em $\text{gr}(U_n) = \mathcal{S}(gl_n)$ e identificamos $\mathcal{S}(gl_n)$ com a álgebra de polinômios $\mathbb{C}[x_{ij}]_{i,j=1}^n$ em n^2 variáveis. Dados um polinômio f em $\mathcal{S}(gl_n)$ e um subconjunto $X \subseteq \{x_{ij} : i, j = 1, \dots, n\}$, vamos denotar por $f(X)$ o polinômio em $\mathcal{S}(gl_n)$ que resulta de cancelar em f todos os monômios que são fatores de alguma variável no subconjunto X . A variedade determinada pelos polinômios $f_1, \dots, f_t$ é denotada por $\mathcal{V}(f_1, \dots, f_t)$. Os leitores são aconselhados a ler os teoremas da seção (1.7) para justificar as afirmações feitas neste capítulo. Antes de apresentar as demonstrações dos teoremas principais vamos dar um exemplo em que é ilustrado o método de prova desses teoremas.

Proposição 11. *Sejam I_n a matriz identidade em gl_n e $\xi = \lambda I_n$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Então a subálgebra de Mishchenko-Fomenko $\mathcal{F}_\xi(gl_n) \subset \mathcal{S}(gl_n)$ é gerada por uma sequência regular sobre $\mathcal{S}(gl_n)$.*

Demonstração. Neste caso a matriz ξ tem n blocos de Jordan de tamanho 1. De acordo com o descrito na seção (2.3), temos o diagrama $\gamma = (n-1, n-2, \dots, 1)$, em consequência, a subálgebra $\mathcal{F}_\xi(gl_n) \subset \mathcal{S}(gl_n)$ é gerada pelo conjunto $\{\bar{\phi}_m^{(0)} : m = 1, \dots, n\}$. Com a identificação $\mathcal{S}(gl_n) = \mathbb{C}[x_{ij}]_{i,j=1}^{n^2}$ temos

$$\bar{\phi}_1^{(0)} = x_{11} + \dots + x_{nn},$$

e para $m = 2, \dots, n$, o gerador $\bar{\phi}_m^{(0)}$ é da forma

$$\bar{\phi}_m^{(0)} = f_m + \sum_{i_1 < \dots < i_m} x_{i_1 i_1} \dots x_{i_m i_m}$$

onde f_m é um polinômio em $\mathcal{S}(gl_n)$ tal que cada monômio de f_m é fator de pelo menos uma das variáveis no conjunto $X = \{x_{ij} : i, j = 1, \dots, n \text{ com } i \neq j\}$. Vamos considerar a variedade

$$V = \mathcal{V}(\bar{\phi}_1^{(0)}, \dots, \bar{\phi}_n^{(0)}, X)$$

determinada pelos polinômios $\bar{\phi}_m^{(0)}$ e as variáveis do conjunto X , então

$$V = \mathcal{V}(\bar{\phi}_1^{(0)}(X), \dots, \bar{\phi}_n^{(0)}(X), X)$$

Dado que $f_m(X) = 0$ para todo $m = 2, \dots, n$, temos

$$V = \mathcal{V} \left(\sum_{i=1}^n x_{ii}, \sum_{i_1 < i_2} \left(\prod_{k=1}^2 x_{i_k i_k} \right), \dots, \sum_{i_1 < \dots < i_m} \left(\prod_{k=1}^m x_{i_k i_k} \right), \dots, \prod_{k=1}^n x_{kk}, X \right)$$

Claramente $V = \mathcal{V}(x_{11}, \dots, x_{nn}, X)$, portanto V é $EqD(n^2 - (n + |X|)) = EqD(0)$ ¹, de fato, o anel de coordenadas $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}$. Da proposição 10 a sequência $\overline{\phi}_1^{(0)}, \dots, \overline{\phi}_n^{(0)}, X$ é regular sobre $\mathcal{S}(gl_n)$, além disso, os polinômios nessa sequência são homogêneos, portanto a sequência $\overline{\phi}_1^{(0)}, \dots, \overline{\phi}_n^{(0)}$ é regular, e a prova está concluída. $\square$

Segundo uma observação feita em Panyushev e Yakimova (2008), juntando os trabalhos de Vinberg (Vinberg, 1991) e Ovsienko (Ovsienko, 2003), se ξ é um elemento regular semisimples em gl_n (isto é, ξ tem n valores próprios diferentes), então a subálgebra de Mishchenko-Fomenko $\mathcal{F}_\xi(gl_n) \subset \mathcal{S}(gl_n)$ é gerada por uma sequência regular em $\mathcal{S}(gl_n)$. Este resultado foi generalizado em (Moreau, 2016), onde se estabelece que se L é uma álgebra de Lie semisimples (de dimensão finita) e $\xi \in L$ é um elemento regular semisimples ou regular nilpotente, então a subálgebra de Mishchenko-Fomenko $\mathcal{F}_\xi(L) \subset \mathcal{S}(L)$ é gerada por uma sequência regular em $\mathcal{S}(L)$.

3.1 Primeiro teorema principal

Teorema 14. *Seja $n \leq 3$. Se $\xi \in gl_n$ então a subálgebra de Mishchenko-Fomenko $\mathcal{F}_\xi(gl_n) \subset \mathcal{S}(gl_n)$ é gerada por uma sequência regular sobre $\mathcal{S}(gl_n)$.*

Demonstração. O caso $n = 2$ é uma consequência imediata do descrito no parágrafo anterior, porém vamos apresentar os cálculos. Aqui temos só duas possibilidades para a forma canônica de Jordan ξ

$$1. \xi = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad 2. \xi = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix},$$

onde $\lambda, \beta \in \mathbb{C}$ e $\lambda \neq \beta$. No primeiro caso, a subálgebra $\mathcal{F}_\xi(gl_2) \subset \mathcal{S}(gl_2)$ é gerada pela sequência

$$I = \{x_{11} + x_{22}, x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12}, \lambda(x_{11} + x_{22}) - x_{21}\}$$

Então

$$\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(x_{11} + x_{22}, x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12}, x_{21}) = \mathcal{V}(x_{21}, x_{11}, x_{22}),$$

claramente é uma variedade $EqD(1)$ em $\mathbb{C}^4$, portanto a sequência I é regular em $\mathcal{S}(gl_2)$. No segundo caso, a subálgebra $\mathcal{F}_\xi(gl_2) \subset \mathcal{S}(gl_2)$ é gerada pela sequência

$$J = \{x_{11} + x_{22}, x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12}, \lambda x_{22} + \beta x_{11}\}.$$

Suponha $\lambda \neq 0$, então

$$\mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(x_{11} + x_{22}, x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12}, (\lambda - \beta)x_{11}) = \mathcal{V}(x_{11}, x_{22}, x_{21}x_{12})$$

De novo, é uma variedade $EqD(1)$ em $\mathbb{C}^4$, portanto a sequência J é regular em $\mathcal{S}(gl_2)$.

Para gl_3 temos as seguintes possibilidades para a forma canônica de Jordan ξ

¹Ver definição 25 para notação $EqD(k)$

$$\begin{aligned}
1. \quad \xi &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} & 3. \quad \xi &= \begin{pmatrix} \beta & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, & 5. \quad \xi &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}, \\
2. \quad \xi &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, & 4. \quad \xi &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

onde $\lambda, \beta, \delta \in \mathbb{C}$, e são diferentes por pares.

3.1.1 Caso 1

Neste caso temos os diagramas de Young $\alpha^{(1)} = (2, 1)$ e $\gamma = (1)$, logo um conjunto de geradores da subálgebra $\mathcal{F}_\xi(gl_3)$ é $\{\bar{\phi}_1^{(0)}, \bar{\phi}_2^{(0)}, \bar{\phi}_3^{(0)}, \bar{\phi}_2^{(1)}, \bar{\phi}_3^{(1)}\}$, onde

- $\bar{\phi}_1^{(0)} = x_{11} + x_{22} + x_{33}$
- $\bar{\phi}_2^{(0)} = x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12} + x_{11}x_{33} - x_{31}x_{13} + x_{22}x_{33} - x_{32}x_{23}$
- $\bar{\phi}_3^{(0)} = x_{11}(x_{22}x_{33} - x_{32}x_{23}) - x_{21}(x_{12}x_{33} - x_{32}x_{13}) + x_{31}(x_{12}x_{23} - x_{22}x_{13})$
- $\bar{\phi}_2^{(1)} = 2\lambda(x_{11} + x_{22} + x_{33}) - x_{21} = 2\lambda\bar{\phi}_1^{(0)} - x_{21}$
- $\bar{\phi}_3^{(1)} = \lambda(x_{22}x_{33} - x_{32}x_{23}) - (x_{21}x_{33} - x_{31}x_{23}) + \lambda(x_{11}x_{33} - x_{31}x_{13}) + \lambda(x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12})$
 $= \lambda\bar{\phi}_2^{(0)} - (x_{21}x_{33} - x_{31}x_{23})$

Note que podemos trocar os geradores $\bar{\phi}_2^{(1)}$ e $\bar{\phi}_3^{(1)}$ de tal forma que a subálgebra $\mathcal{F}_\xi(gl_3)$ é gerada pela sequência $\mathcal{G} = \{\bar{\phi}_1^{(0)}, \bar{\phi}_2^{(0)}, \bar{\phi}_3^{(0)}, x_{21}, x_{21}x_{33} - x_{31}x_{23}\}$. Seja

$$\mathcal{H} = \{x_{33}, \bar{\phi}_1^{(0)}, \bar{\phi}_2^{(0)}, \bar{\phi}_3^{(0)}, x_{21}, x_{21}x_{33} - x_{31}x_{23}\}$$

e consideremos a variedade $V = \mathcal{V}(\mathcal{H})$. Vamos provar que V é $EqD(3)$ em $\mathbb{C}^9$ (Ver notação na definição (25)). Temos

$$\begin{aligned}
V &= \underbrace{\mathcal{V}(x_{31}, x_{21}, x_{33}, x_{11} + x_{22}, x_{11}x_{22} - x_{32}x_{23}, x_{11}x_{32}x_{23})}_{= V_1} \cup \\
&\quad \underbrace{\mathcal{V}(x_{23}, x_{21}, x_{33}, x_{11} + x_{22}, x_{11}x_{22} - x_{31}x_{13}, x_{31}x_{22}x_{13})}_{= V_2}
\end{aligned}$$

Observe que,

$$\mathcal{V}(x_{11}, x_{31}, x_{21}, x_{33}, x_{22}, x_{32}x_{23}) = \mathcal{V}(x_{32}x_{23}, x_{31}, x_{21}, x_{33}, x_{11} + x_{22}, x_{11}x_{22})$$

então

$$\begin{aligned}
V_1 &= \mathcal{V}(x_{11}, x_{31}, x_{21}, x_{33}, x_{22}, x_{32}x_{23}) \\
&= \mathcal{V}(x_{32}, x_{11}, x_{31}, x_{21}, x_{33}, x_{22}) \cup \mathcal{V}(x_{23}, x_{11}, x_{31}, x_{21}, x_{33}, x_{22})
\end{aligned}$$

Portanto a variedade V_1 é $EqD(3)$. De forma similar, para a variedade V_2 tem-se

$$\begin{aligned} V_2 &= \mathcal{V}(x_{22}, x_{23}, x_{21}, x_{33}, x_{11}, x_{31}x_{13}) \\ &= \mathcal{V}(x_{31}, x_{22}, x_{23}, x_{21}, x_{33}, x_{11}) \cup \mathcal{V}(x_{13}, x_{22}, x_{23}, x_{21}, x_{33}, x_{11}) \end{aligned}$$

Assim, a variedade V_2 também é $EqD(3)$, Portanto a variedade V é equidimensional de dimensão pura 3. Pela proposição 10 a sequência $\mathcal{H}$ é uma sequência regular. Dado que os elementos em $\mathcal{H}$ são homogêneos e $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$, tem-se que a sequência $\mathcal{G}$ é regular em $\mathcal{S}(gl_3)$.

3.1.2 Caso 2

Neste caso temos os diagramas de Young $\alpha^{(1)} = (3)$ e $\gamma = \emptyset$, logo a subálgebra $\mathcal{F}_\xi(gl_3)$ é gerada pela sequência $\{\bar{\phi}_1^{(0)}, \bar{\phi}_2^{(0)}, \bar{\phi}_3^{(0)}, \bar{\phi}_2^{(1)}, \bar{\phi}_3^{(1)}, \bar{\phi}_3^{(2)}\}$, onde

- $\bar{\phi}_1^{(0)} = x_{11} + x_{22} + x_{33}$
- $\bar{\phi}_2^{(0)} = x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12} + x_{11}x_{33} - x_{31}x_{13} + x_{22}x_{33} - x_{32}x_{23}$
- $\bar{\phi}_3^{(0)} = x_{11}(x_{22}x_{33} - x_{32}x_{23}) - x_{21}(x_{12}x_{33} - x_{32}x_{13}) + x_{31}(x_{12}x_{23} - x_{22}x_{13})$
- $\bar{\phi}_2^{(1)} = 2\lambda(x_{11} + x_{22} + x_{33}) - x_{21} - x_{32} = 2\lambda\bar{\phi}_1^{(0)} - (x_{21} + x_{32})$
- $\bar{\phi}_3^{(1)} = \lambda(x_{22}x_{33} - x_{32}x_{23}) - (x_{21}x_{33} - x_{31}x_{23}) + \lambda(x_{11}x_{33} - x_{31}x_{13}) - (x_{11}x_{32} - x_{31}x_{12}) + \lambda(x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12}) = \lambda\bar{\phi}_2^{(0)} - (x_{21}x_{33} - x_{31}x_{23} + x_{11}x_{32} - x_{31}x_{12})$
- $\bar{\phi}_3^{(2)} = \lambda^2(x_{11} + x_{22} + x_{33}) - \lambda(x_{32} + x_{21}) + x_{31} = \lambda^2\bar{\phi}_1^{(0)} - \lambda(x_{32} + x_{21}) + x_{31}$

Note que podemos trocar os geradores $\bar{\phi}_2^{(1)}, \bar{\phi}_3^{(1)}$ e $\bar{\phi}_3^{(2)}$ de tal forma que a subálgebra $\mathcal{F}_\xi(gl_3)$ seja gerada pela sequência $\mathcal{G} = \{\bar{\phi}_1^{(0)}, \bar{\phi}_2^{(0)}, \bar{\phi}_3^{(0)}, x_{21} + x_{32}, x_{21}x_{33} - x_{31}x_{23} + x_{11}x_{32} - x_{31}x_{12}, x_{31}\}$.

Precisamos mostrar que a variedade $V = \mathcal{V}(\mathcal{G})$ é $EqD(3)$ em $\mathbb{C}^9$. Observe que,

$$V = \mathcal{V}\left(\begin{array}{c} x_{31}, x_{21} + x_{32}, x_{11} + x_{22} + x_{33}, x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12} + x_{11}x_{33} + x_{22}x_{33} + x_{21}x_{23}, \\ x_{11}(x_{22}x_{33} + x_{21}x_{23}) - x_{21}(x_{12}x_{33} + x_{21}x_{13}), x_{21}(x_{33} - x_{11}) \end{array}\right)$$

Então $V = V_1 \cup V_2$, onde

$$V_1 = \mathcal{V}(x_{21}, x_{31}, x_{32}, x_{11} + x_{22} + x_{33}, x_{11}x_{22} + x_{11}x_{33} + x_{22}x_{33}, x_{11}x_{22}x_{33})$$

$$V_2 = \mathcal{V}\left(\begin{array}{c} x_{33} - x_{11}, x_{31}, 2x_{11} + x_{22}, 2x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12} + x_{11}^2 + x_{21}x_{23}, \\ x_{11}(x_{22}x_{11} + x_{21}x_{23}) - x_{21}(x_{12}x_{11} + x_{21}x_{13}), x_{21} + x_{32} \end{array}\right)$$

É fácil ver que a variedade $V_1 = \mathcal{V}(x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{32}, x_{22}, x_{33})$, e portanto é $EqD(3)$. Para a variedade V_2 temos,

$$V_2 = \mathcal{V}\left(\begin{array}{c} x_{33} - x_{11}, x_{31}, x_{21} + x_{32}, 2x_{11} + x_{22}, 3x_{11}^2 + x_{21}x_{12} - x_{21}x_{23}, \\ x_{11}(-2x_{11}^2 + x_{21}x_{23}) - x_{21}(x_{12}x_{11} + x_{21}x_{13}) \end{array}\right)$$

Seja

$$\bar{V}_2 = \mathcal{V}\left(\begin{array}{c} x_{12}, x_{13}, x_{31}, x_{33} - x_{11}, x_{21} + x_{32}, 2x_{11} + x_{22}, 3x_{11}^2 + x_{21}x_{12} - x_{21}x_{23}, \\ x_{11}(-2x_{11}^2 + x_{21}x_{23}) - x_{21}(x_{12}x_{11} + x_{21}x_{13}) \end{array}\right)$$

$$= \mathcal{V} \left(x_{12}, x_{13}, x_{31}, x_{33} - x_{11}, x_{21} + x_{32}, 2x_{11} + x_{22}, 3x_{11}^2 - x_{21}x_{23}, x_{11}(2x_{11}^2 - x_{21}x_{23}) \right)$$

Vamos provar que $\bar{V}_2$ é $EqD(1)$ em $\mathbb{C}^9$. Temos

$$\begin{aligned} \bar{V}_2 &= \underbrace{\mathcal{V} \left(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{31}, x_{33} - x_{11}, x_{21} + x_{32}, 2x_{11} + x_{22}, 3x_{11}^2 - x_{21}x_{23} \right)}_{= U_1} \cup \\ &\quad \underbrace{\mathcal{V} \left(2x_{11}^2 - x_{21}x_{23}, x_{12}, x_{13}, x_{31}, x_{33} - x_{11}, x_{21} + x_{32}, 2x_{11} + x_{22}, 3x_{11}^2 - x_{21}x_{23} \right)}_{= U_2} \end{aligned}$$

Por um lado tem-se

$$U_1 = \mathcal{V} \left(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{31}, x_{33}, x_{21} + x_{32}, x_{22}, x_{21}x_{23} \right)$$

então

$$U_1 = \mathcal{V} \left(x_{21}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{31}, x_{33}, x_{32}, x_{22} \right) \cup \mathcal{V} \left(x_{23}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{31}, x_{33}, x_{21} + x_{32}, x_{22} \right).$$

Por outro lado temos

$$U_2 = \mathcal{V} \left(x_{11}^2, x_{12}, x_{13}, x_{31}, x_{33} - x_{11}, x_{21} + x_{32}, 2x_{11} + x_{22}, 3x_{11}^2 - x_{21}x_{23} \right)$$

ou seja

$$U_2 = \mathcal{V} \left(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{31}, x_{33}, x_{21} + x_{32}, x_{22}, x_{21}x_{23} \right) = U_1$$

Portanto $\bar{V}_2 = U_1$, e claramente é $EqD(1)$, e isso implica que a variedade V_2 é $EqD(3)$. Então a variedade $V = \mathcal{V}(\mathcal{G})$ é $EqD(3)$. Portanto, a sequência $\mathcal{G}$ é regular em $\mathcal{S}(gl_3)$.

3.1.3 Caso 3

Neste caso a subálgebra $\mathcal{F}_\xi(gl_3)$ é gerada pelo conjunto $\left\{ \bar{\phi}_1^{(0)}, \bar{\phi}_2^{(0)}, \bar{\phi}_3^{(0)}, \bar{\phi}_2^{(1)}, \bar{\phi}_3^{(1)}, \bar{\phi}_3^{(2)} \right\}$, onde

- $\bar{\phi}_1^{(0)} = x_{11} + x_{22} + x_{33}$
- $\bar{\phi}_2^{(0)} = x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12} + x_{11}x_{33} - x_{31}x_{13} + x_{22}x_{33} - x_{32}x_{23}$
- $\bar{\phi}_3^{(0)} = x_{11}(x_{22}x_{33} - x_{32}x_{23}) - x_{21}(x_{12}x_{33} - x_{32}x_{13}) + x_{31}(x_{12}x_{23} - x_{22}x_{13})$
- $\bar{\phi}_2^{(1)} = (\beta + \lambda)(x_{11} + x_{22}) + 2\beta x_{33} - x_{21}$
- $\bar{\phi}_3^{(1)} = \beta(x_{22}x_{33} - x_{32}x_{23}) - (x_{21}x_{33} - x_{31}x_{23}) + \beta(x_{11}x_{33} - x_{31}x_{13}) + \lambda(x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12})$
- $\bar{\phi}_3^{(2)} = \beta^2 x_{33} + \beta\lambda x_{22} - \lambda x_{21} + \beta\lambda x_{11}$

Note que a sequência

$$\mathcal{G} = \left\{ \bar{\phi}_1^{(0)}, \bar{\phi}_2^{(0)}, \bar{\phi}_3^{(0)}, (\beta - \lambda)x_{33} - x_{21}, (\lambda - \beta)(x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12}) - (x_{21}x_{33} - x_{31}x_{23}), x_{21} \right\}$$

também gera a álgebra $\mathcal{F}_\xi(gl_3)$. Precisamos mostrar que a variedade

$$V = \mathcal{V}(\mathcal{G}) = \mathcal{V} \left(\begin{array}{c} x_{21}, x_{33}, x_{11} + x_{22}, x_{11}x_{22} - x_{31}x_{13} - x_{32}x_{23}, \\ x_{11}x_{32}x_{23} - x_{31}(x_{12}x_{23} - x_{22}x_{13}), (\lambda - \beta)x_{11}x_{22} + x_{31}x_{23} \end{array} \right) \quad (3.1)$$

é $EqD(3)$ em $\mathbb{C}^9$. Seja $\alpha = \lambda - \beta \neq 0$, observe que,

$$V = \mathcal{V} \left(\begin{array}{c} x_{21}, x_{33}, x_{11} + x_{22}, x_{11}^2 + x_{31}x_{13} + x_{32}x_{23}, \\ x_{11}x_{32}x_{23} - x_{31}(x_{12}x_{23} + x_{11}x_{13}), \alpha x_{11}^2 - x_{31}x_{23} \end{array} \right),$$

então

$$V = \mathcal{V} \left(\begin{array}{c} \alpha x_{11}^2 - x_{31}x_{23}, x_{21}, x_{33}, x_{11} + x_{22}, x_{11}^2 + x_{31}x_{13} + x_{32}x_{23}, \\ x_{11}(x_{32}x_{23} - \alpha x_{11}x_{12} - x_{31}x_{13}) \end{array} \right)$$

Então $V = V_1 \cup V_2$, onde

$$V_1 = \mathcal{V}(x_{11}, x_{31}x_{23}, x_{21}, x_{33}, x_{22}, x_{31}x_{13} + x_{32}x_{23})$$

$$V_2 = \mathcal{V}(x_{32}x_{23} - \alpha x_{11}x_{12} - x_{31}x_{13}, \alpha x_{11}^2 - x_{31}x_{23}, x_{21}, x_{33}, x_{11} + x_{22}, x_{11}^2 + x_{31}x_{13} + x_{32}x_{23})$$

Observe que

$$V_1 = \mathcal{V}(x_{31}, x_{11}, x_{21}, x_{33}, x_{22}, x_{32}x_{23}) \cup \mathcal{V}(x_{23}, x_{11}, x_{21}, x_{33}, x_{22}, x_{31}x_{13})$$

Claramente V_1 é $EqD(3)$. Por outro lado, para mostrar que a variedade V_2 é $EqD(3)$ consideremos a variedade

$$W = \mathcal{V}(x_{31} - x_{12}, x_{32}x_{23} - \alpha x_{11}x_{12} - x_{31}x_{13}, \alpha x_{11}^2 - x_{31}x_{23}, x_{11} + x_{22}, x_{11}^2 + x_{31}x_{13} + x_{32}x_{23}),$$

e mostremos que W é $EqD(2)$ em $\mathbb{C}^7$ (ver proposição 10). Observe que

$$\begin{aligned} W &= \mathcal{V} \left(\begin{array}{c} x_{31} - x_{12}, x_{32}x_{23} - \alpha x_{11}x_{31} - x_{31}x_{13}, \alpha x_{11}^2 - x_{31}x_{23}, x_{11} + x_{22}, \\ x_{31}x_{23} + \alpha(x_{31}x_{13} + x_{32}x_{23}) \end{array} \right) \\ &= \mathcal{V} \left(\begin{array}{c} x_{31} - x_{12}, x_{32}x_{23} - \alpha x_{11}x_{31} - x_{31}x_{13}, \alpha x_{11}^2 - x_{31}x_{23}, x_{11} + x_{22}, \\ x_{31}x_{23} + \alpha(x_{31}x_{13} + \alpha x_{11}x_{31} + x_{31}x_{13}) \end{array} \right) \\ &= \mathcal{V} \left(\begin{array}{c} x_{31} - x_{12}, x_{32}x_{23} - \alpha x_{11}x_{31} - x_{31}x_{13}, \alpha x_{11}^2 - x_{31}x_{23}, x_{11} + x_{22}, \\ x_{31}(x_{23} + 2\alpha x_{13} + \alpha^2 x_{11}) \end{array} \right) \end{aligned}$$

Então $W = W_1 \cup W_2$, onde $W_1 = \mathcal{V}(x_{31}, x_{12}, x_{32}x_{23}, \alpha x_{11}^2, x_{11} + x_{22})$ e

$$W_2 = \mathcal{V}(x_{23} + 2\alpha x_{13} + \alpha^2 x_{11}, x_{31} - x_{12}, x_{32}x_{23} - \alpha x_{11}x_{31} - x_{31}x_{13}, \alpha x_{11}^2 - x_{31}x_{23}, x_{11} + x_{22})$$

Dado que $\alpha \neq 0$, para W_1 temos

$$W_1 = \mathcal{V}(x_{31}, x_{12}, x_{32}x_{23}, x_{11}, x_{22}) = \mathcal{V}(x_{31}, x_{12}, x_{32}, x_{11}, x_{22}) \cup \mathcal{V}(x_{31}, x_{12}, x_{23}, x_{11}, x_{22})$$

Então a variedade W_1 é $EqD(2)$ em $\mathbb{C}^7$. Agora, vamos provar que W_2 também o é. Consideremos a variedade M gerada pela sequência

$$\mathcal{H} = \{x_{31}, x_{23} + 2\alpha x_{13} + \alpha^2 x_{11}, x_{31} - x_{12}, x_{32}x_{23} - \alpha x_{11}x_{31} - x_{31}x_{13}, \alpha x_{11}^2 - x_{31}x_{23}, x_{11} + x_{22}\}$$

e mostremos que é $EqD(1)$ em $\mathbb{C}^7$. Mas

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\mathcal{H}) &= \mathcal{V}(x_{31}, x_{23} + 2\alpha x_{13} + \alpha^2 x_{11}, x_{12}, x_{32}x_{23}, \alpha x_{11}^2, x_{11} + x_{22}) \\ &= \mathcal{V}(x_{11}, x_{31}, x_{23} + 2\alpha x_{13}, x_{12}, x_{32}x_{23}, x_{22}) \end{aligned}$$

Assim, a variedade $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ é $EqD(1)$ em $\mathbb{C}^7$. Portanto, V é $EqD(3)$ em $\mathbb{C}^9$, portanto a

sequência $\mathcal{G}$ é regular em $\mathcal{S}(gl_3)$.

3.1.4 Caso 4

Para este caso temos os diagramas de Young $\alpha^{(1)} = (1, 1)$ e $\gamma = (1)$, logo um conjunto de geradores da subálgebra $\mathcal{F}_\xi(gl_3)$ é $\{\bar{\phi}_1^{(0)}, \bar{\phi}_2^{(0)}, \bar{\phi}_3^{(0)}, \bar{\phi}_2^{(1)}, \bar{\phi}_3^{(1)}\}$, onde

- $\bar{\phi}_1^{(0)} = x_{11} + x_{22} + x_{33}$
- $\bar{\phi}_2^{(0)} = x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12} + x_{11}x_{33} - x_{31}x_{13} + x_{22}x_{33} - x_{32}x_{23}$
- $\bar{\phi}_3^{(0)} = x_{11}(x_{22}x_{33} - x_{32}x_{23}) - x_{21}(x_{12}x_{33} - x_{32}x_{13}) + x_{31}(x_{12}x_{23} - x_{22}x_{13})$
- $\bar{\phi}_2^{(1)} = (\beta + \lambda)(x_{11} + x_{22}) + 2\beta x_{33}$
- $\bar{\phi}_3^{(1)} = \beta(x_{22}x_{33} - x_{32}x_{23}) + \beta(x_{11}x_{33} - x_{31}x_{13}) + \lambda(x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12})$

Observe que podemos trocar os geradores $\bar{\phi}_2^{(1)}$ e $\bar{\phi}_3^{(1)}$ de tal forma que a álgebra $\mathcal{F}_\xi(gl_3)$ é gerada pela sequência $\mathcal{G} = \{\bar{\phi}_1^{(0)}, \bar{\phi}_2^{(0)}, \bar{\phi}_3^{(0)}, (\beta - \lambda)x_{33}, (\beta - \lambda)(x_{21}x_{12} - x_{11}x_{22})\}$. Dado que $(\beta - \lambda) \neq 0$ temos

$$\begin{aligned} V = \mathcal{V}(\mathcal{G}) &= \mathcal{V}\left(\begin{array}{c} x_{33}, x_{11} + x_{22}, x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12} - x_{31}x_{13} - x_{32}x_{23}, \\ x_{11}x_{32}x_{23} - x_{21}x_{32}x_{13} - x_{31}x_{12}x_{23} + x_{31}x_{22}x_{13}, x_{21}x_{12} - x_{11}x_{22} \end{array}\right) \\ &= \mathcal{V}\left(\begin{array}{c} x_{21}x_{12} - x_{11}x_{22}, x_{33}, x_{11} + x_{22}, x_{31}x_{13} + x_{32}x_{23}, \\ x_{11}x_{32}x_{23} - x_{21}x_{32}x_{13} - x_{31}x_{12}x_{23} + x_{31}x_{22}x_{13} \end{array}\right) \end{aligned}$$

Para mostrar que a variedade V é $EqD(4)$ em $\mathbb{C}^9$, vamos considerar a variedade W gerada pela sequência

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{array}{c} x_{11}, x_{21}x_{12} - x_{11}x_{22}, x_{33}, x_{11} + x_{22}, x_{31}x_{13} + x_{32}x_{23}, \\ x_{11}x_{32}x_{23} - x_{21}x_{32}x_{13} - x_{31}x_{12}x_{23} + x_{31}x_{22}x_{13} \end{array} \right\}$$

vejamos que W é $EqD(3)$. Temos

$$W = \mathcal{V}(x_{11}, x_{21}x_{12}, x_{33}, x_{22}, x_{31}x_{13} + x_{32}x_{23}, x_{21}x_{32}x_{13} + x_{31}x_{12}x_{23})$$

Então,

$$\begin{aligned} W &= \underbrace{\mathcal{V}(x_{21}, x_{11}, x_{33}, x_{22}, x_{31}x_{13} + x_{32}x_{23}, x_{31}x_{12}x_{23})}_{= W_1} \cup \\ &\quad \underbrace{\mathcal{V}(x_{12}, x_{11}, x_{33}, x_{22}, x_{31}x_{13} + x_{32}x_{23}, x_{21}x_{32}x_{13})}_{= W_2} \end{aligned}$$

Observe que $W_1 \cong W_2$ pois as correspondências $x_{31} \leftrightarrow x_{13}$, $x_{12} \leftrightarrow x_{21}$ e $x_{23} \leftrightarrow x_{32}$ define um isomorfismo de variedades algébricas (ver notação no exemplo 8). Além disso,

$$\begin{aligned} W_1 &= \mathcal{V}(x_{31}, x_{21}, x_{11}, x_{33}, x_{22}, x_{32}x_{23}) \cup \mathcal{V}(x_{23}, x_{21}, x_{11}, x_{33}, x_{22}, x_{31}x_{13}) \\ &\quad \cup \mathcal{V}(x_{12}, x_{21}, x_{11}, x_{33}, x_{22}, x_{31}x_{13} + x_{32}x_{23}) \end{aligned}$$

As primeiras duas parcelas claramente são variedades $EqD(3)$ em $\mathbb{C}^9$. Para a última parcela olhe que a variedade

$$\mathcal{V}(x_{31}, x_{12}, x_{21}, x_{11}, x_{33}, x_{22}, x_{31}x_{13} + x_{32}x_{23}) = \mathcal{V}(x_{31}, x_{12}, x_{21}, x_{11}, x_{33}, x_{22}, x_{32}x_{23})$$

é $EqD(2)$ em $\mathbb{C}^9$, logo as variedades W_1 e W_2 são $EqD(3)$ em $\mathbb{C}^9$. Portanto a variedade V é $EqD(4)$ em $\mathbb{C}^9$, isto é, a sequência $\mathcal{G}$ é regular em $\mathcal{S}(gl_3)$.

3.1.5 Caso 5

Neste caso a subálgebra $\mathcal{F}_\xi(gl_3)$ é gerada pela sequência $\mathcal{G} = \{\bar{\phi}_1^{(0)}, \bar{\phi}_2^{(0)}, \bar{\phi}_3^{(0)}, \bar{\phi}_2^{(1)}, \bar{\phi}_3^{(1)}, \bar{\phi}_3^{(2)}\}$, onde

- $\bar{\phi}_1^{(0)} = x_{11} + x_{22} + x_{33}$
- $\bar{\phi}_2^{(0)} = x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12} + x_{11}x_{33} - x_{31}x_{13} + x_{22}x_{33} - x_{32}x_{23}$
- $\bar{\phi}_3^{(0)} = x_{11}(x_{22}x_{33} - x_{32}x_{23}) - x_{21}(x_{12}x_{33} - x_{32}x_{13}) + x_{31}(x_{12}x_{23} - x_{22}x_{13})$
- $\bar{\phi}_2^{(1)} = \lambda x_{22} + \lambda x_{33} + \beta x_{11} + \beta x_{33} + \delta x_{11} + \delta x_{22}$
- $\bar{\phi}_3^{(1)} = \lambda(x_{22}x_{33} - x_{32}x_{23}) + \beta(x_{11}x_{33} - x_{31}x_{13}) + \delta(x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12})$
- $\bar{\phi}_3^{(2)} = \lambda\beta x_{33} + \lambda\delta x_{22} + \beta\delta x_{11}$

Dado que λ, β e δ são dois a dois diferentes, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\mathcal{G}) &= \mathcal{V}\left(\begin{array}{c} x_{11}, x_{22}, x_{33}, x_{21}x_{12} + x_{31}x_{13} + x_{32}x_{23}, \\ x_{21}x_{32}x_{13} + x_{31}x_{12}x_{23}, \lambda x_{32}x_{23} + \beta x_{31}x_{13} + \delta x_{21}x_{12} \end{array}\right) \\ &= \mathcal{V}\left(\begin{array}{c} x_{11}, x_{22}, x_{33}, x_{21}x_{12} + x_{31}x_{13} + x_{32}x_{23}, \\ x_{21}x_{32}x_{13} + x_{31}x_{12}x_{23}, \alpha x_{32}x_{23} + \beta x_{31}x_{13} \end{array}\right) \end{aligned}$$

onde $\alpha = \frac{\lambda - \delta}{\beta - \delta} \neq 0$. Se $\alpha = 1$ temos

$$\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \mathcal{V}\left(\begin{array}{c} x_{11}, x_{22}, x_{33}, x_{21}x_{12}, x_{31}x_{13} + x_{32}x_{23}, \\ x_{21}x_{32}x_{13} + x_{31}x_{12}x_{23} \end{array}\right)$$

então $\mathcal{V}(\mathcal{G}) = V_1 \cup V_2$, onde

$$V_1 = \mathcal{V}(x_{21}, x_{11}, x_{22}, x_{33}, x_{31}x_{13} + x_{32}x_{23}, x_{31}x_{12}x_{23})$$

$$V_2 = \mathcal{V}(x_{12}, x_{11}, x_{22}, x_{33}, x_{31}x_{13} + x_{32}x_{23}, x_{21}x_{32}x_{13})$$

Mas, $V_1 \cong V_2$ pelo isomorfismo definido pelas correspondências $x_{12} \leftrightarrow x_{21}$, $x_{13} \leftrightarrow x_{31}$ e $x_{23} \leftrightarrow x_{32}$. A variedade V_1 decompõe-se em $V_1 = V_{11} \cup V_{12} \cup V_{13}$, onde

$$V_{11} = \mathcal{V}(x_{31}, x_{21}, x_{11}, x_{22}, x_{33}, x_{32}x_{23})$$

$$V_{12} = \mathcal{V}(x_{12}, x_{21}, x_{11}, x_{22}, x_{33}, x_{31}x_{13} + x_{32}x_{23})$$

$$V_{13} = \mathcal{V}(x_{23}, x_{21}, x_{11}, x_{22}, x_{33}, x_{31}x_{13})$$

Claramente a variedade V_1 (e V_2) é $EqD(3)$, portanto a variedade $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ também o é, assim, neste caso a sequência $\mathcal{G}$ é regular em $\mathcal{S}(gl_3)$. Agora, se $\alpha \neq 1$, vamos considerar a sequência $\mathcal{H} = \mathcal{G} \cup \{x_{12} - x_{21}, x_{13} - x_{31}\}$, então

$$\mathcal{V}(\mathcal{H}) = \mathcal{V} \left(\begin{array}{c} x_{11}, x_{22}, x_{33}, x_{21}x_{12} + x_{31}x_{13} + x_{32}x_{23}, x_{12}x_{13}(x_{32} + x_{23}), \\ \alpha x_{32}x_{23} + x_{31}x_{13}, x_{12} - x_{21}, x_{13} - x_{31} \end{array} \right)$$

Então $\mathcal{V}(\mathcal{H}) = W_1 \cup W_2 \cup W_3$, onde

- $W_1 = \mathcal{V}(x_{12}, x_{11}, x_{22}, x_{33}, x_{31}x_{13} + x_{32}x_{23}, (\alpha - 1)x_{32}x_{23}, x_{21}, x_{13} - x_{31})$
- $W_2 = \mathcal{V}(x_{13}, x_{11}, x_{22}, x_{33}, x_{21}x_{12}, \alpha x_{32}x_{23}, x_{12} - x_{21}, x_{31})$
- $W_3 = \mathcal{V} \left(\begin{array}{c} x_{11}, x_{22}, x_{33}, x_{21}x_{12} + x_{31}x_{13} + x_{32}x_{23}, x_{32} + x_{23}, \\ \alpha x_{32}x_{23} + x_{31}x_{13}, x_{12} - x_{21}, x_{13} - x_{31} \end{array} \right)$

Observe que das correspondências $x_{12} \leftrightarrow x_{13}$ e $x_{21} \leftrightarrow x_{31}$ temos $W_1 \cong W_2$, além disso

$$W_1 = \mathcal{V}(x_{12} x_{11}, x_{22}, x_{33}, x_{31}x_{13}, x_{32}x_{23}, x_{21}, x_{13} - x_{31})$$

Não é difícil ver que a variedade W_1 (e portanto W_2) é $EqD(1)$ em $\mathbb{C}^9$. Mas a variedade W_3 também o é, já que aumentando a variável x_{23} ao conjunto de polinômios que determinam a variedade W_3 temos a variedade

$$Z = \mathcal{V}(x_{32}, x_{23}, x_{11}, x_{22}, x_{33}, x_{21}x_{12}, x_{31}x_{13}, x_{12} - x_{21}, x_{13} - x_{31})$$

que claramente é $EqD(0)$ em $\mathbb{C}^9$. Assim, temos concluída a prova. $\square$

3.2 Segundo teorema principal

Teorema 15. *Se $\xi \in gl_4$ é uma forma canônica de Jordan nilpotente então a subálgebra de Mishchenko-Fomenko $\mathcal{F}_\xi(gl_4) \subset \mathcal{S}(gl_4)$ é gerada por uma sequência regular sobre $\mathcal{S}(gl_4)$.*

Demonstração. Temos os seguintes casos para a forma canônica de Jordan ξ

$$\begin{array}{ll} 1. \xi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & 3. \xi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ 2. \xi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & 4. \xi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

No caso 4, o parâmetro ξ é um elemento regular em gl_4 , e pelo resultado principal de [Moreau \(2016\)](#) temos que a subálgebra $\mathcal{F}_\xi(gl_4)$ é gerada por uma sequência regular em $\mathcal{S}(gl_4)$. A seguir provamos os três casos restantes.

3.2.1 Caso 1

Pelo lema 6, um conjunto de geradores da subálgebra $\mathcal{F}_\xi(gl_4) \subset \mathcal{S}(gl_4)$ é

1. $\bar{\phi}_1^{(0)} = x_{11} + x_{22} + x_{33} + x_{44}.$
2. $\bar{\phi}_2^{(0)} = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} + x_{11}x_{33} - x_{13}x_{31} + x_{11}x_{44} - x_{14}x_{41} + x_{22}x_{33} - x_{23}x_{32} + x_{22}x_{44} - x_{24}x_{42} + x_{33}x_{44} - x_{34}x_{43}.$
3. $\bar{\phi}_3^{(0)} = x_{11}x_{22}x_{33} - x_{11}x_{23}x_{32} - x_{12}x_{21}x_{33} + x_{12}x_{23}x_{31} + x_{13}x_{21}x_{32} - x_{13}x_{22}x_{31} + x_{11}x_{22}x_{44} - x_{11}x_{24}x_{42} - x_{12}x_{21}x_{44} + x_{12}x_{24}x_{41} + x_{14}x_{21}x_{42} - x_{14}x_{22}x_{41} + x_{11}x_{33}x_{44} - x_{11}x_{34}x_{43} - x_{13}x_{31}x_{44} + x_{13}x_{34}x_{41} + x_{14}x_{31}x_{43} - x_{14}x_{33}x_{41} + x_{22}x_{33}x_{44} - x_{22}x_{34}x_{43} - x_{23}x_{32}x_{44} + x_{23}x_{34}x_{42} + x_{24}x_{32}x_{43} - x_{24}x_{33}x_{42}.$
4. $\bar{\phi}_4^{(0)} = x_{11}x_{22}x_{33}x_{44} - x_{11}x_{22}x_{34}x_{43} - x_{11}x_{23}x_{32}x_{44} + x_{11}x_{23}x_{34}x_{42} + x_{11}x_{24}x_{32}x_{43} - x_{11}x_{24}x_{33}x_{42} - x_{12}x_{21}x_{33}x_{44} + x_{12}x_{21}x_{34}x_{43} + x_{12}x_{23}x_{31}x_{44} - x_{12}x_{23}x_{34}x_{41} - x_{12}x_{24}x_{31}x_{43} + x_{12}x_{24}x_{33}x_{41} + x_{13}x_{21}x_{32}x_{44} - x_{13}x_{21}x_{34}x_{42} - x_{13}x_{22}x_{31}x_{44} + x_{13}x_{22}x_{34}x_{41} + x_{13}x_{24}x_{31}x_{42} - x_{13}x_{24}x_{32}x_{41} - x_{14}x_{21}x_{32}x_{43} + x_{14}x_{21}x_{33}x_{42} + x_{14}x_{22}x_{31}x_{43} - x_{14}x_{22}x_{33}x_{41} - x_{14}x_{23}x_{31}x_{42} + x_{14}x_{23}x_{32}x_{41}.$
5. $\bar{\phi}_2^{(1)} = x_{21}.$
6. $\bar{\phi}_3^{(1)} = x_{21}x_{33} - x_{23}x_{31} + x_{21}x_{44} - x_{24}x_{41}.$
7. $\bar{\phi}_4^{(1)} = x_{21}x_{33}x_{44} - x_{21}x_{34}x_{43} - x_{23}x_{31}x_{44} + x_{23}x_{34}x_{41} + x_{24}x_{31}x_{43} - x_{24}x_{33}x_{41}.$

Vamos mostrar que os geradores de $\mathcal{F}_\xi(gl_4)$ formam uma sequência regular no anel de polinômios $\mathbb{C}[x_{ij} : i, j = 1, \dots, 4]$. Para isso acrescentamos os monômios x_{33}, x_{44}, x_{43} ao conjunto de geradores acima e vamos considerar a variedade V determinada por esse conjunto acrescentado. Provamos que a variedade $V \subseteq \mathbb{C}^{16}$ é $EqD(6)$. Então a variedade V é determinada pelos monômios no conjunto $X = \{x_{21}, x_{33}, x_{44}, x_{43}\}$ junto com os polinômios

- $f_1 = x_{11} + x_{22}.$
- $f_2 = x_{11}x_{22} - x_{13}x_{31} - x_{14}x_{41} - x_{23}x_{32} - x_{24}x_{42}.$
- $f_3 = -x_{11}x_{23}x_{32} + x_{12}x_{23}x_{31} - x_{13}x_{22}x_{31} - x_{11}x_{24}x_{42} + x_{12}x_{24}x_{41} - x_{14}x_{22}x_{41} + x_{13}x_{34}x_{41} + x_{23}x_{34}x_{42}.$
- $f_4 = x_{11}x_{23}x_{34}x_{42} - x_{12}x_{23}x_{34}x_{41} + x_{13}x_{22}x_{34}x_{41} + x_{13}x_{24}x_{31}x_{42} - x_{13}x_{24}x_{32}x_{41} - x_{14}x_{23}x_{31}x_{42} + x_{14}x_{23}x_{32}x_{41}.$
- $f_5 = x_{23}x_{31} + x_{24}x_{41}.$
- $f_6 = x_{23}x_{34}x_{41}.$

Logo $V = W \cup M \cup N \subseteq \mathbb{C}^{16}$ onde

$$W = \mathcal{V}(x_{23}, X, f_1(x_{23}), \dots, f_5(x_{23}))$$

$$M = \mathcal{V}(x_{34}, X, f_1(x_{34}), \dots, f_5(x_{34}))$$

$$N = \mathcal{V}(x_{41}, X, f_1(x_{41}), \dots, f_5(x_{41}))$$

Explicitamente, a variedade W está determinada pelos monômios no conjunto $X \cup \{x_{23}\}$ junto com os polinômios

- $f_1(x_{23}) = x_{11} + x_{22}.$

- $f_2(x_{23}) = x_{11}x_{22} - x_{13}x_{31} - x_{14}x_{41} - x_{24}x_{42}.$
- $f_3(x_{23}) = -x_{13}x_{22}x_{31} - x_{11}x_{24}x_{42} + x_{12}x_{24}x_{41} - x_{14}x_{22}x_{41} + x_{13}x_{34}x_{41}.$
- $f_4(x_{23}) = x_{13}(x_{22}x_{34}x_{41} + x_{24}x_{31}x_{42} - x_{24}x_{32}x_{41}).$
- $f_5(x_{23}) = -x_{24}x_{41}.$

a variedade M pelos monômios no conjunto $X \cup \{x_{34}\}$ junto com os polinômios

- $f_1(x_{34}) = x_{11} + x_{22}.$
- $f_2(x_{34}) = x_{11}x_{22} - x_{13}x_{31} - x_{14}x_{41} - x_{23}x_{32} - x_{24}x_{42}.$
- $f_3(x_{34}) = -x_{11}x_{23}x_{32} + x_{12}x_{23}x_{31} - x_{13}x_{22}x_{31} - x_{11}x_{24}x_{42} + x_{12}x_{24}x_{41} - x_{14}x_{22}x_{41}.$
- $f_4(x_{34}) = (x_{31}x_{42} - x_{32}x_{41})(x_{13}x_{24} - x_{14}x_{23}).$
- $f_5(x_{34}) = -x_{23}x_{31} - x_{24}x_{41}.$

e a variedade N pelos monômios no conjunto $X \cup \{x_{41}\}$ junto com os polinômios

- $f_1(x_{41}) = x_{11} + x_{22}.$
- $f_2(x_{41}) = x_{11}x_{22} - x_{13}x_{31} - x_{23}x_{32} - x_{24}x_{42}.$
- $f_3(x_{41}) = -x_{11}x_{23}x_{32} + x_{12}x_{23}x_{31} - x_{13}x_{22}x_{31} - x_{11}x_{24}x_{42} + x_{23}x_{34}x_{42}.$
- $f_4(x_{41}) = x_{42}(x_{11}x_{23}x_{34} + x_{13}x_{24}x_{31} - x_{14}x_{23}x_{31}).$
- $f_5(x_{41}) = -x_{23}x_{31}.$

Observe que as permutações de variáveis dada pelas correspondências, componente a componente, das matrizes

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_{22} & x_{12} & x_{42} & x_{32} \\ x_{21} & x_{11} & x_{41} & x_{31} \\ x_{24} & x_{14} & x_{33} & x_{34} \\ x_{23} & x_{13} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

define um isomorfismo entre as variedades W e N , porque fazendo essas mudanças de variáveis nos polinômios que determinam a variedade W obtemos os polinômios que determinam a variedade N . Então é suficiente mostrar que W e M são $EqD(6)$. Observe-se que a variedade W se divide em $W = W_1 \cup W_2 \subseteq \mathbb{C}^{16}$, onde

Lista 1 (Polinômios para W_1). A variedade W_1 é determinada pelos monômios no conjunto $X \cup \{x_{23}, x_{24}\}$ junto com os polinômios

- $f_1(x_{23}, x_{24}) = x_{11} + x_{22}.$
- $f_2(x_{23}, x_{24}) = x_{11}x_{22} - x_{13}x_{31} - x_{14}x_{41}.$
- $f_3(x_{23}, x_{24}) = x_{13}x_{22}x_{31} - x_{14}x_{22}x_{41} + x_{13}x_{34}x_{41}.$
- $f_4(x_{23}, x_{24}) = x_{13}x_{22}x_{34}x_{41}.$

Lista 2 (Polinômios para W_2). A variedade W_2 é determinada pelos monômios no conjunto $X \cup \{x_{23}, x_{41}\}$ junto com os polinômios

- $f_1(x_{23}, x_{41}) = x_{11} + x_{22}$.
- $f_3(x_{23}, x_{41}) = -x_{13}x_{22}x_{31} - x_{11}x_{24}x_{42}$.
- $f_2(x_{23}, x_{41}) = x_{11}x_{22} - x_{13}x_{31} - x_{24}x_{42}$.
- $f_4(x_{23}, x_{41}) = x_{13}x_{24}x_{31}x_{42}$.

Primeiro vamos mostrar que W_1 é $EqD(6)$. Podemos esquecer as variáveis no conjunto $X \cup \{x_{23}, x_{24}\}$, e provar que a variedade $\overline{W}_1 \subset \mathbb{C}^{10}$ determinada pelos quatro polinômios na lista (1) é $EqD(6)$. Mas $\overline{W}_1 = \overline{W}_{11} \cup \overline{W}_{12} \cup \overline{W}_{13} \cup \overline{W}_{14}$, onde

- $\overline{W}_{11} = \mathcal{V}(x_{13}, x_{11} + x_{22}, x_{11}x_{22} - x_{14}x_{41}, x_{14}x_{22}x_{41})$.
- $\overline{W}_{12} = \mathcal{V}(x_{22}, x_{11}, x_{13}x_{31} + x_{14}x_{41}, x_{13}x_{34}x_{41})$.
- $\overline{W}_{13} = \mathcal{V}(x_{34}, x_{11} + x_{22}, x_{11}x_{22} - x_{13}x_{31} - x_{14}x_{41}, x_{22}(x_{13}x_{31} + x_{14}x_{41}))$.
- $\overline{W}_{14} = \mathcal{V}(x_{41}, x_{11} + x_{22}, x_{11}x_{22} - x_{13}x_{31}, x_{13}x_{22}x_{31})$.

A permutação de variáveis dada pelas correspondências $x_{31} \leftrightarrow x_{14}$ e $x_{13} \leftrightarrow x_{41}$ define um isomorfismo $\overline{W}_{11} \cong \overline{W}_{14}$. Observe-se que

$$\overline{W}_{11} = \mathcal{V}(x_{13}, x_{14}, x_{11}, x_{22}) \cup \mathcal{V}(x_{13}, x_{41}, x_{11}, x_{22})$$

Claramente $\overline{W}_{11} \subseteq \mathbb{C}^{16}$ é $EqD(6)$ (assim, $\overline{W}_{14}$ também o é). Por outro lado

$$\overline{W}_{12} = \mathcal{V}(x_{22}, x_{11}, x_{13}x_{31} + x_{14}x_{41}, x_{34}) \cup \mathcal{V}(x_{22}, x_{11}, x_{13}x_{31} + x_{14}x_{41}, x_{13}x_{41})$$

Então $\overline{W}_{12}$ é $EqD(6)$. Para a variedade $\overline{W}_{13}$, temos

$$\overline{W}_{13} = \mathcal{V}(x_{34}, x_{11}, x_{22}, x_{13}x_{31} + x_{14}x_{41})$$

Claramente $\overline{W}_{13}$ é $EqD(6)$. Portanto $\overline{W}_1$ é $EqD(6)$. Agora vamos provar que W_2 é $EqD(6)$, podemos esquecer as variáveis no conjunto $X \cup \{x_{23}, x_{41}\}$, e provar que a variedade $\overline{W}_2 \subset \mathbb{C}^{10}$ determinada pelos quatro polinômios na lista (2) é $EqD(6)$. Mas $\overline{W}_2 = \overline{W}_{21} \cup \overline{W}_{22} \cup \overline{W}_{23} \cup \overline{W}_{24}$, onde

- $\overline{W}_{21} = \mathcal{V}(x_{13}, x_{11} + x_{22}, x_{11}x_{22} - x_{24}x_{42}, x_{11}x_{24}x_{42})$.
- $\overline{W}_{22} = \mathcal{V}(x_{24}, x_{11} + x_{22}, x_{11}x_{22} - x_{13}x_{31}, x_{13}x_{22}x_{31})$.
- $\overline{W}_{23} = \mathcal{V}(x_{31}, x_{11} + x_{22}, x_{11}x_{22} - x_{24}x_{42}, x_{11}x_{24}x_{42})$.
- $\overline{W}_{24} = \mathcal{V}(x_{42}, x_{11} + x_{22}, x_{11}x_{22} - x_{13}x_{31}, x_{13}x_{22}x_{31})$.

A permutação de variáveis dada pelas correspondências $x_{11} \leftrightarrow x_{22}$, $x_{42} \leftrightarrow x_{14}$ e $x_{24} \leftrightarrow x_{41}$ define um isomorfismo entre as variedades $\overline{W}_{11}$ e $\overline{W}_{21}$, além disso $\overline{W}_{21} \cong \overline{W}_{23}$. Ainda mais, $\overline{W}_{14} \cong \overline{W}_{22} \cong \overline{W}_{24}$. Portanto $\overline{W}_2$ é $EqD(6)$ em $\mathbb{C}^{10}$, é dizer W é $EqD(6)$ em $\mathbb{C}^{16}$.

Agora, a variedade M se divide em duas subvariedades, mas a permutação de variáveis dada pelas correspondências na equação (3.2) define um isomorfismo entre elas, então é suficiente estudar a variedade M_1 determinada pelos monômios no conjunto $X \cup \{x_{34}\}$ junto com os polinômios:

- $x_{11} + x_{22}$.
- $x_{11}x_{22} - x_{13}x_{31} - x_{14}x_{41} - x_{23}x_{32} - x_{24}x_{42}$.

- $-x_{11}x_{23}x_{32} + x_{12}x_{23}x_{31} - x_{13}x_{22}x_{31} - x_{11}x_{24}x_{42} + x_{12}x_{24}x_{41} - x_{14}x_{22}x_{41}.$
- $x_{31}x_{42} - x_{32}x_{41}.$
- $x_{23}x_{31} + x_{24}x_{41}.$

Vamos denotar por H o conjunto dos polinômios que determinam a variedade M_1 , e seja $P = \mathcal{V}(x_{42}, H)$. Vamos provar que P é $EqD(5)$ em $\mathbb{C}^{16}$. A variedade P é determinada pelos monômios no conjunto $Y = \{x_{21}, x_{33}, x_{44}, x_{43}, x_{34}, x_{42}\}$ junto com os polinômios

- $x_{11} + x_{22}.$
- $x_{11}x_{22} - x_{13}x_{31} - x_{14}x_{41} - x_{23}x_{32}.$
- $-x_{11}x_{23}x_{32} + x_{12}x_{23}x_{31} - x_{13}x_{22}x_{31} + x_{12}x_{24}x_{41} - x_{14}x_{22}x_{41}.$
- $x_{32}x_{41}.$
- $x_{23}x_{31} + x_{24}x_{41}.$

Então $P = P_1 \cup P_2$, onde

Lista 3 (Polinômios para P_1). A variedade P_1 é determinada pelos monômios no conjunto $Y \cup \{x_{41}\}$ junto com os polinômios

- $x_{11} + x_{22}.$
- $-x_{11}x_{23}x_{32} + x_{12}x_{23}x_{31} - x_{13}x_{22}x_{31}.$
- $x_{11}x_{22} - x_{13}x_{31} - x_{23}x_{32}.$
- $x_{23}x_{31}.$

Lista 4 (Polinômios para P_2). A Variedade P_2 é determinada pelos monômios no conjunto $Y \cup \{x_{32}\}$ e os polinômios

- $x_{11} + x_{22}.$
- $x_{12}x_{23}x_{31} - x_{13}x_{22}x_{31} + x_{12}x_{24}x_{41} - x_{14}x_{22}x_{41}.$
- $x_{11}x_{22} - x_{13}x_{31} - x_{14}x_{41}.$
- $x_{23}x_{31} + x_{24}x_{41}.$

Podemos esquecer as variáveis no conjunto $Y \cup \{x_{41}\}$, e provar que a variedade $\bar{P}_1 \subset \mathbb{C}^9$ determinada pelos quatro polinômios na lista (3) é $EqD(5)$. Então

$$\begin{aligned} \bar{P}_1 &= \underbrace{\mathcal{V}(x_{23}, x_{11} + x_{22}, x_{11}x_{22} - x_{13}x_{31}, x_{13}x_{22}x_{31})}_{=} \cup \\ &= \bar{P}_{11} \\ &= \underbrace{\mathcal{V}(x_{31}, x_{11} + x_{22}, x_{11}x_{22} - x_{23}x_{32}, x_{11}x_{23}x_{32})}_{=} \\ &= \bar{P}_{12} \end{aligned}$$

Mas $\bar{P}_{11} \cong \bar{P}_{12}$, o isomorfismo é definido pela permutação de variáveis dada pelas correspondências $x_{11} \leftrightarrow x_{22}$, $x_{31} \leftrightarrow x_{23}$ e $x_{13} \leftrightarrow x_{32}$. Além disso,

$$\bar{P}_{11} = \mathcal{V}(x_{23}, x_{13}, x_{11}, x_{22}) \cup \mathcal{V}(x_{23}, x_{31}, x_{11}, x_{22})$$

Temos que P_1 é $EqD(5)$ em $\mathbb{C}^{16}$. Agora, para provar que a variedade P_2 é $EqD(5)$ em $\mathbb{C}^{16}$, aumentamos o monômio x_{23} ao conjunto de polinômios que determinam esta variedade, e

consideramos a variedade $\overline{P}_2 \subset \mathbb{C}^8$ determinada pelos polinômios que resultam ao eliminar os monômios múltiplos da variável x_{23} em cada um dos polinômios da lista (4), e vamos provar que a variedade $\overline{P}_2$ é $EqD(4)$. Temos

$$\overline{P}_2 = \mathcal{V}(x_{11} + x_{22}, x_{11}x_{22} - x_{13}x_{31} - x_{14}x_{41}, x_{13}x_{22}x_{31} - x_{12}x_{24}x_{41} + x_{14}x_{22}x_{41}, x_{24}x_{41})$$

Observe que $\overline{P}_2 = \overline{P}_{21} \cup \overline{P}_{22} \cup \overline{P}_{23}$. Onde

- $\overline{P}_{21} = \mathcal{V}(x_{24}, x_{22}, x_{11}, x_{13}x_{31} + x_{14}x_{41})$.
- $\overline{P}_{22} = \mathcal{V}(x_{41}, x_{22}, x_{11}, x_{13})$.
- $\overline{P}_{23} = \mathcal{V}(x_{41}, x_{22}, x_{11}, x_{31})$.

Então $\overline{P}_2$ é $EqD(4)$, portanto P_2 é $EqD(5)$. Isto implica que M é $EqD(6)$ em $\mathbb{C}^{16}$. Neste caso a prova está concluída.

3.2.2 Caso 2

Pelo lema 6, um conjunto de geradores da subálgebra $\mathcal{F}_\xi(gl_4) \subset \mathcal{S}(gl_4)$ é

1. $\overline{\phi}_1^{(0)} = x_{11} + x_{22} + x_{33} + x_{44}$.
2. $\overline{\phi}_2^{(0)} = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} + x_{11}x_{33} - x_{13}x_{31} + x_{11}x_{44} - x_{14}x_{41} + x_{22}x_{33} - x_{23}x_{32} + x_{22}x_{44} - x_{24}x_{42} + x_{33}x_{44} - x_{34}x_{43}$.
3. $\overline{\phi}_3^{(0)} = x_{11}x_{22}x_{33} - x_{11}x_{23}x_{32} - x_{12}x_{21}x_{33} + x_{12}x_{23}x_{31} + x_{13}x_{21}x_{32} - x_{13}x_{22}x_{31} + x_{11}x_{22}x_{44} - x_{11}x_{24}x_{42} - x_{12}x_{21}x_{44} + x_{12}x_{24}x_{41} + x_{14}x_{21}x_{42} - x_{14}x_{22}x_{41} + x_{11}x_{33}x_{44} - x_{11}x_{34}x_{43} - x_{13}x_{31}x_{44} + x_{13}x_{34}x_{41} + x_{14}x_{31}x_{43} - x_{14}x_{33}x_{41} + x_{22}x_{33}x_{44} - x_{22}x_{34}x_{43} - x_{23}x_{32}x_{44} + x_{23}x_{34}x_{42} + x_{24}x_{32}x_{43} - x_{24}x_{33}x_{42}$.
4. $\overline{\phi}_4^{(0)} = x_{11}x_{22}x_{33}x_{44} - x_{11}x_{22}x_{34}x_{43} - x_{11}x_{23}x_{32}x_{44} + x_{11}x_{23}x_{34}x_{42} + x_{11}x_{24}x_{32}x_{43} - x_{11}x_{24}x_{33}x_{42} - x_{12}x_{21}x_{33}x_{44} + x_{12}x_{21}x_{34}x_{43} + x_{12}x_{23}x_{31}x_{44} - x_{12}x_{23}x_{34}x_{41} - x_{12}x_{24}x_{31}x_{43} + x_{12}x_{24}x_{33}x_{41} + x_{13}x_{21}x_{32}x_{44} - x_{13}x_{21}x_{34}x_{42} - x_{13}x_{22}x_{31}x_{44} + x_{13}x_{22}x_{34}x_{41} + x_{13}x_{24}x_{31}x_{42} - x_{13}x_{24}x_{32}x_{41} - x_{14}x_{21}x_{32}x_{43} + x_{14}x_{21}x_{33}x_{42} + x_{14}x_{22}x_{31}x_{43} - x_{14}x_{22}x_{33}x_{41} - x_{14}x_{23}x_{31}x_{42} + x_{14}x_{23}x_{32}x_{41}$.
5. $\overline{\phi}_2^{(1)} = x_{21} + x_{32}$.
6. $\overline{\phi}_3^{(1)} = x_{11}x_{32} - x_{12}x_{31} + x_{21}x_{33} - x_{23}x_{31} + x_{21}x_{44} - x_{24}x_{41} + x_{32}x_{44} - x_{34}x_{42}$.
7. $\overline{\phi}_4^{(1)} = x_{11}x_{32}x_{44} - x_{11}x_{34}x_{42} - x_{12}x_{31}x_{44} + x_{12}x_{34}x_{41} + x_{14}x_{31}x_{42} - x_{14}x_{32}x_{41} + x_{21}x_{33}x_{44} - x_{21}x_{34}x_{43} - x_{23}x_{31}x_{44} + x_{23}x_{34}x_{41} + x_{24}x_{31}x_{43} - x_{24}x_{33}x_{41}$.
8. $\overline{\phi}_3^{(2)} = x_{31}$.
9. $\overline{\phi}_4^{(2)} = x_{31}x_{44} - x_{34}x_{41}$.

Vamos mostrar que os geradores de $\mathcal{F}_\xi(gl_4)$ formam uma sequência regular no anel de polinômios $\mathbb{C}[x_{ij} : i, j = 1, \dots, 4]$. Para isso vamos aumentar o monômio x_{44} ao conjunto de geradores acima e consideramos a variedade V determinada por esse conjunto acrescentado. Será mostrado que a variedade $V \subseteq \mathbb{C}^{16}$ é $EqD(6)$. Fazendo a substituição $x_{32} = -x_{21}$ temos que a variedade V é determinada pelos seguintes polinômios

- x_{31} • $x_{34}x_{41}$ • x_{44} .
- $f_1 = x_{11} + x_{22} + x_{33}$.
- $f_2 = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} + x_{11}x_{33} - x_{14}x_{41} + x_{22}x_{33} + x_{23}x_{21} - x_{24}x_{42} - x_{34}x_{43}$.
- $f_3 = x_{11}x_{22}x_{33} + x_{11}x_{23}x_{21} - x_{12}x_{21}x_{33} - x_{13}x_{21}^2 - x_{11}x_{24}x_{42} + x_{12}x_{24}x_{41} + x_{14}x_{21}x_{42} - x_{14}x_{22}x_{41} - x_{11}x_{34}x_{43} + x_{13}x_{34}x_{41} - x_{14}x_{33}x_{41} - x_{22}x_{34}x_{43} + x_{23}x_{34}x_{42} - x_{24}x_{21}x_{43} - x_{24}x_{33}x_{42}$.
- $f_4 = -x_{11}x_{22}x_{34}x_{43} + x_{11}x_{23}x_{34}x_{42} - x_{11}x_{24}x_{21}x_{43} - x_{11}x_{24}x_{33}x_{42} + x_{12}x_{21}x_{34}x_{43} - x_{12}x_{23}x_{34}x_{41} + x_{12}x_{24}x_{33}x_{41} - x_{13}x_{21}x_{34}x_{42} + x_{13}x_{22}x_{34}x_{41} + x_{13}x_{24}x_{21}x_{41} + x_{14}x_{21}^2x_{43} + x_{14}x_{21}x_{33}x_{42} - x_{14}x_{22}x_{33}x_{41} - x_{14}x_{23}x_{21}x_{41}$.
- $f_5 = x_{21} + x_{32}$.
- $f_6 = -x_{11}x_{21} + x_{21}x_{33} - x_{24}x_{41} - x_{34}x_{42}$.
- $f_7 = -x_{11}x_{34}x_{42} + x_{12}x_{34}x_{41} + x_{14}x_{21}x_{41} - x_{21}x_{34}x_{43} + x_{23}x_{34}x_{41} - x_{24}x_{33}x_{41}$.

Então $V = W \cup N \subseteq \mathbb{C}^{16}$ onde

$$W = \mathcal{V}(X, \{f_i(X) : i = 1, \dots, 7\}), \text{ com } X = \{x_{31}, x_{34}, x_{44}\}$$

$$N = \mathcal{V}(Y, \{f_i(Y) : i = 1, \dots, 7\}), \text{ com } Y = \{x_{31}, x_{41}, x_{44}\}$$

Assim, a variedade W está determinada pelos monômios do conjunto X junto com os polinômios

- $f_1(X) = x_{11} + x_{22} + x_{33}$.
- $f_2(X) = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} + x_{11}x_{33} - x_{14}x_{41} + x_{22}x_{33} + x_{23}x_{21} - x_{24}x_{42}$.
- $f_3(X) = x_{11}x_{22}x_{33} + x_{11}x_{23}x_{21} - x_{12}x_{21}x_{33} - x_{13}x_{21}^2 - x_{11}x_{24}x_{42} + x_{12}x_{24}x_{41} + x_{14}x_{21}x_{42} - x_{14}x_{22}x_{41} - x_{14}x_{33}x_{41} - x_{24}x_{21}x_{43} - x_{24}x_{33}x_{42}$.
- $f_4(X) = -x_{11}x_{24}x_{21}x_{43} - x_{11}x_{24}x_{33}x_{42} + x_{12}x_{24}x_{33}x_{41} + x_{13}x_{24}x_{21}x_{41} + x_{14}x_{21}^2x_{43} + x_{14}x_{21}x_{33}x_{42} - x_{14}x_{22}x_{33}x_{41} - x_{14}x_{23}x_{21}x_{41}$.
- $f_5(X) = x_{21} + x_{32}$.
- $f_6(X) = -x_{11}x_{21} + x_{21}x_{33} - x_{24}x_{41}$.
- $f_7(X) = x_{41}(x_{14}x_{21} - x_{24}x_{33})$.

e a variedade N está determinada pelos monômios do conjunto Y junto com os polinômios

- $f_1(Y) = x_{11} + x_{22} + x_{33}$.
- $f_2(Y) = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} + x_{11}x_{33} + x_{22}x_{33} + x_{23}x_{21} - x_{24}x_{42} - x_{34}x_{43}$.
- $f_3(Y) = x_{11}x_{22}x_{33} + x_{11}x_{23}x_{21} - x_{12}x_{21}x_{33} - x_{13}x_{21}^2 - x_{11}x_{24}x_{42} + x_{14}x_{21}x_{42} - x_{11}x_{34}x_{43} - x_{22}x_{34}x_{43} + x_{23}x_{34}x_{42} - x_{24}x_{21}x_{43} - x_{24}x_{33}x_{42}$.
- $f_4(Y) = -x_{11}x_{22}x_{34}x_{43} + x_{11}x_{23}x_{34}x_{42} - x_{11}x_{24}x_{21}x_{43} - x_{11}x_{24}x_{33}x_{42} + x_{12}x_{21}x_{34}x_{43} - x_{13}x_{21}x_{34}x_{42} + x_{14}x_{21}^2x_{43} + x_{14}x_{21}x_{33}x_{42}$.

- $f_5(Y) = x_{21} + x_{32}$.
- $f_6(Y) = x_{11}x_{21} - x_{21}x_{33} + x_{34}x_{42}$.
- $f_7(Y) = x_{34}(x_{43}x_{21} + x_{42}x_{11})$.

Observe-se que a permutação de variáveis dada pelas correspondências, componente a componente, das matrizes

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_{33} & -x_{23} & x_{13} & x_{43} \\ x_{21} & x_{22} & -x_{12} & -x_{42} \\ x_{31} & x_{32} & x_{11} & x_{41} \\ x_{34} & -x_{24} & x_{14} & x_{44} \end{pmatrix}$$

define um isomorfismo entre as variedades W e N , já que fazendo essas mudanças de variáveis nos polinômios que determinam a variedade W obtemos os polinômios que determinam a variedade N . Então é suficiente mostrar que W é $EqD(6)$. Agora, $W = W_1 \cup W_2 \subseteq \mathbb{C}^{16}$, onde

Lista 5 (Polinômios para W_1). A variedade W_1 é determinada pelos monômios do conjunto $X \cup \{x_{41}\}$ e os polinômios

- $x_{11} + x_{22} + x_{33}$.
- $x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} + x_{11}x_{33} + x_{22}x_{33} + x_{23}x_{21} - x_{24}x_{42}$.
- $x_{11}x_{22}x_{33} + x_{11}x_{23}x_{21} - x_{12}x_{21}x_{33} - x_{13}x_{21}^2 - x_{11}x_{24}x_{42} + x_{14}x_{21}x_{42} - x_{24}x_{21}x_{43} - x_{24}x_{33}x_{42}$.
- $-x_{11}x_{24}(x_{21}x_{43} + x_{33}x_{42}) + x_{14}x_{21}(x_{21}x_{43} + x_{33}x_{42}) = (x_{21}x_{43} + x_{33}x_{42})(x_{14}x_{21} - x_{11}x_{24})$.
- $x_{21} + x_{32}$.
- $x_{21}(x_{11} - x_{33})$.

Lista 6 (Polinômios para W_2). A variedade W_2 é determinada pelos monômios do conjunto X e os polinômios

- $x_{11} + x_{22} + x_{33}$.
- $x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} + x_{11}x_{33} - x_{14}x_{41} + x_{22}x_{33} + x_{23}x_{21} - x_{24}x_{42}$.
- $x_{11}x_{22}x_{33} + x_{11}x_{23}x_{21} - x_{12}x_{21}x_{33} - x_{13}x_{21}^2 - x_{11}x_{24}x_{42} + x_{12}x_{24}x_{41} + x_{14}x_{21}x_{42} - x_{14}x_{22}x_{41} - x_{14}x_{33}x_{41} - x_{24}x_{21}x_{43} - x_{24}x_{33}x_{42}$.
- $-x_{11}x_{24}x_{21}x_{43} - x_{11}x_{24}x_{33}x_{42} + x_{12}x_{24}x_{33}x_{41} + x_{13}x_{24}x_{21}x_{41} + x_{14}x_{21}^2x_{43} + x_{14}x_{21}x_{33}x_{42} - x_{14}x_{22}x_{33}x_{41} - x_{14}x_{23}x_{21}x_{41}$.
- $x_{21} + x_{32}$.
- $-x_{11}x_{21} + x_{21}x_{33} - x_{24}x_{41}$.
- $x_{14}x_{21} - x_{24}x_{33}$.

Caso 2.1: Variedade W_1 .

Para provar que a variedade W_1 é $EqD(6)$ em $\mathbb{C}^{16}$, observe-se que esta variedade se decompõe em $W_1 = Z_1 \cup Z_2$, onde

Lista 7 (Polinômios para Z_1). A variedade Z_1 é determinada pelos monômios do conjunto $X \cup \{x_{41}, x_{21}, x_{32}\}$ e os polinômios listados abaixo

- $x_{11} + x_{22} + x_{33}$
- $x_{11}x_{22}x_{33} - x_{11}x_{24}x_{42} - x_{24}x_{33}x_{42}$
- $x_{11}x_{22} + x_{11}x_{33} + x_{22}x_{33} - x_{24}x_{42}$.
- $x_{33}x_{42}x_{11}x_{24}$

Lista 8 (Polinômios para Z_2). A variedade Z_2 é determinada pelos monômios do conjunto $Y = \{x_{31}, x_{44}, x_{34}, x_{41}\}$, junto com os polinômios

- $h_1 = x_{11} + x_{22} + x_{33}$.
- $h_2 = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} + x_{11}x_{33} + x_{22}x_{33} + x_{23}x_{21} - x_{24}x_{42}$.
- $h_3 = x_{11}x_{22}x_{33} + x_{11}x_{23}x_{21} - x_{12}x_{21}x_{33} - x_{13}x_{21}^2 - x_{11}x_{24}x_{42} + x_{14}x_{21}x_{42} - x_{24}x_{21}x_{43} - x_{24}x_{33}x_{42}$.
- $F = \underbrace{(x_{21}x_{43} + x_{33}x_{42})}_{= F_1 = h_4} \underbrace{(x_{14}x_{21} - x_{11}x_{24})}_{= F_2}$.
- $h_5 = x_{21} + x_{32}$
- $h_6 = x_{11} - x_{33}$.

Começamos com a variedade Z_1 , podemos esquecer as variáveis no conjunto $X \cup \{x_{41}, x_{21}, x_{32}\}$, e provar que a variedade $\overline{Z}_1 \subset \mathbb{C}^{10}$, determinada pelos quatro polinômios na lista (7) é $EqD(6)$ em $\mathbb{C}^{10}$. Mas, $\overline{Z}_1 = \overline{Z}_{11} \cup \overline{Z}_{12} \cup \overline{Z}_{13} \cup \overline{Z}_{14}$, onde

- $\overline{Z}_{11} = \mathcal{V}(x_{11}, x_{22} + x_{33}, x_{22}x_{33} - x_{24}x_{42}, x_{24}x_{33}x_{42})$.
- $\overline{Z}_{12} = \mathcal{V}(x_{33}, x_{11} + x_{22}, x_{11}x_{22} - x_{24}x_{42}, x_{11}x_{24}x_{42})$.
- $\overline{Z}_{13} = \mathcal{V}(x_{24}, x_{11} + x_{22} + x_{33}, x_{11}x_{22} + x_{11}x_{33} + x_{22}x_{33}, x_{11}x_{22}x_{33})$.
- $\overline{Z}_{14} = \mathcal{V}(x_{42}, x_{11} + x_{22} + x_{33}, x_{11}x_{22} + x_{11}x_{33} + x_{22}x_{33}, x_{11}x_{22}x_{33})$.

A permutação de variáveis dada pela correspondência $x_{11} \leftrightarrow x_{33}$ define um isomorfismo de variedades algébricas $\overline{Z}_{11} \cong \overline{Z}_{12}$ e a permutação de variáveis dada pela correspondência $x_{24} \leftrightarrow x_{42}$ define um isomorfismo de variedades algébricas $\overline{Z}_{13} \cong \overline{Z}_{14}$. Além disso, temos $\overline{Z}_{13} = \mathcal{V}(x_{24}, x_{11}, x_{22}, x_{33})$, então $\overline{Z}_{13}$ é $EqD(6)$ em $\mathbb{C}^{10}$ (Assim $\overline{Z}_{14}$ também o é). Por outro lado

$$\begin{aligned} \overline{Z}_{11} &= \mathcal{V}(x_{24}, x_{11}, x_{22} + x_{33}, x_{22}x_{33}) \cup \mathcal{V}(x_{33}, x_{11}, x_{22}, x_{24}x_{42}) \cup \\ &\quad \mathcal{V}(x_{42}, x_{11}, x_{22} + x_{33}, x_{22}x_{33}) \end{aligned}$$

Claramente $\bar{Z}_{11}$ é $EqD(6)$ em $\mathbb{C}^{10}$ (Assim $\bar{Z}_{12}$ também o é). Portanto Z_1 é $EqD(6)$ em $\mathbb{C}^{16}$. Observe que Z_2 se divide em duas subvariedades isomorfas (ver lista 8), o isomorfismo é definido pela permutação de variáveis dada pelas correspondências, componente a componente, das matrizes

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_{33} & -x_{23} & x_{13} & x_{43} \\ x_{21} & x_{22} & -x_{12} & -x_{42} \\ x_{31} & x_{32} & x_{11} & x_{34} \\ x_{41} & -x_{24} & x_{14} & x_{44} \end{pmatrix}$$

Seja $H = \mathcal{V}(h_1, \dots, h_6, h_7 = x_{23} - x_{12}, h_8 = x_{43} - x_{42}) \subset \mathbb{C}^{12}$, pelo teorema 9 e a proposição 10, a variedade Z_2 é $EqD(6)$ em $\mathbb{C}^{16}$ se a variedade H é $EqD(4)$ em $\mathbb{C}^{12}$. Substituindo h_8 em h_4 temos $H = H_1 \cup H_2$, onde

Lista 9 (Polinômios para H_1). A variedade H_1 é determinada pelas variáveis x_{42} e x_{43} , junto com os polinômios

- $h_1 = h_1(x_{42}) = x_{11} + x_{22} + x_{33}$
- $h_2(x_{42}) = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} + x_{11}x_{33} + x_{22}x_{33} + x_{23}x_{21}$
- $h_3(x_{42}) = x_{11}x_{22}x_{33} + x_{11}x_{23}x_{21} - x_{12}x_{21}x_{33} - x_{13}x_{21}^2$
- $h_5 = h_5(x_{42}) = x_{21} + x_{32}$
- $h_6 = h_6(x_{42}) = x_{11} - x_{33}$
- $h_7 = h_7(x_{42}) = x_{23} - x_{12}$

E a variedade H_2 está determinada por

$$H_2 = \mathcal{V}(h_1, h_2, h_3, x_{21} + x_{33}, h_5, h_6, h_7, h_8). \quad (3.3)$$

Para mostrar que a variedade H_1 é $EqD(4)$ em $\mathbb{C}^{12}$, vamos substituir h_6 e h_7 no polinômio $h_2(x_{42})$, então se obtém o polinômio $p = x_{11}(2x_{22} + x_{11})$, assim

$$H_1 = \mathcal{V}(x_{42}, x_{43}, h_1, p, h_3(x_{42}), h_5, h_6, h_7).$$

Portanto, a variedade H_1 se divide em $H_1 = H_{11} \cup H_{12}$, onde

- $H_{11} = \mathcal{V}(x_{11}, x_{22}, x_{33}, x_{42}, x_{43}, x_{13}x_{21}^2, x_{21} + x_{32}, x_{23} - x_{12})$
- $H_{12} = \mathcal{V}(x_{42}, x_{43}, h_1, 2x_{22} + x_{11}, h_3(x_{42}), h_5, h_6, h_7) = H_{11}.$

Claramente H_1 é $EqD(4)$ em $\mathbb{C}^{12}$. Agora, vamos mostrar que a variedade H_2 é $EqD(4)$ em $\mathbb{C}^{12}$. Combinando os polinômios lineares h_1, h_5, h_6 e $x_{21} + x_{33}$, (ver lista (8) e a equação (3.3)), pode-se observar que, a variedade $H_2 = \mathcal{V}(S, T, \mathcal{Y})$, onde

- $S = x_{24}x_{42} + 3x_{11}^2$
- $T = x_{11}(x_{11}x_{13} + x_{14}x_{42} + x_{24}x_{42} + 2x_{11}^2)$
- $\mathcal{Y} = \{2x_{11} + x_{22}, x_{11} - x_{33}, x_{11} - x_{32}, x_{11} + x_{21}, h_7 = x_{23} - x_{12}, h_8 = x_{43} - x_{42}\}$

Então a variedade H_2 se divide em $H_2 = H_{21} \cup H_{22}$, onde

- $H_{21} = \mathcal{V}(x_{11}, x_{24}x_{42}, \mathcal{Y}(x_{11}))^2$
- $H_{22} = \mathcal{V}(x_{11}x_{13} + x_{14}x_{42} + x_{24}x_{42} + 2x_{11}^2, S, \mathcal{Y})$

Observe que a variedade H_{21} é $EqD(4)$ em $\mathbb{C}^{12}$, porque é união de duas subvariedades, cada uma delas determinada por 8 polinômios lineares, linearmente independentes (ver exemplo 6). Por outro lado, temos

$$H_{22} \subset \mathcal{V}(x_{14}, x_{11}(x_{13} - x_{11}), S, \mathcal{Y})$$

não é difícil verificar que a variedade $\mathcal{V}(x_{14}, x_{11}(x_{13} - x_{11}), S, \mathcal{Y})$ é $EqD(3)$ em $\mathbb{C}^{12}$, portanto H_{22} é $EqD(4)$ em $\mathbb{C}^{12}$. Assim, temos provado que a variedade W_1 determinada pelos polinômios da lista (5) é $EqD(6)$ em $\mathbb{C}^{16}$. Para completar a prova, deste caso, precisamos mostrar que a variedade W_2 , determinada pelos polinômios da lista (6), é $EqD(6)$ em $\mathbb{C}^{16}$.

Caso 2.2: Variedade W_2 .

Para provar que a variedade W_2 é $EqD(6)$ em $\mathbb{C}^{16}$, vamos considerar a variedade $\mathcal{H}$ determinada pelas variáveis no conjunto $\Lambda = \{x_{31}, x_{44}, x_{34}, x_{12}, x_{13}, x_{43}\}$ e os seguintes polinômios:

Lista 10.

- $g_1 = x_{11} + x_{22} + x_{33}$.
- $g_2 = x_{11}x_{22} + x_{11}x_{33} - x_{14}x_{41} + x_{22}x_{33} + x_{23}x_{21} - x_{24}x_{42}$.
- $g_3 = x_{11}x_{22}x_{33} + x_{11}x_{23}x_{21} - x_{11}x_{24}x_{42} + x_{14}x_{21}x_{42} - x_{14}x_{22}x_{41} - x_{14}x_{33}x_{41} - x_{24}x_{33}x_{42}$.
- $g_4 = -x_{11}x_{24}x_{33}x_{42} + x_{14}x_{21}x_{33}x_{42} - x_{14}x_{22}x_{33}x_{41} - x_{14}x_{23}x_{21}x_{41}$.
- $g_5 = x_{21} + x_{32}$.
- $g_6 = -x_{11}x_{21} + x_{21}x_{33} - x_{24}x_{41}$.
- $g_7 = x_{14}x_{21} - x_{24}x_{33}$.

Note-se que $W_2 \subset \mathcal{H}$, daqui, W_2 é $EqD(6)$ se $\mathcal{H}$ é $EqD(3)$ em $\mathbb{C}^{16}$. Substituindo os polinômios g_1 e g_7 nos polinômios g_3 e g_4 se obtém

$$g_3 = x_{11}(x_{22}x_{33} + x_{23}x_{21} - x_{24}x_{42} + x_{14}x_{41})$$

$$g_4 = x_{33}(-x_{11}x_{24}x_{42} + x_{24}x_{33}x_{42} - x_{14}x_{22}x_{41} - x_{24}x_{23}x_{41})$$

Então a variedade $\mathcal{H}$ se divide em $\mathcal{H} = \mathcal{D} \cup \mathcal{F}$, onde

Lista 11. A variedade $\mathcal{D}$ é determinada pelas variáveis no conjunto $\Lambda \cup \{x_{11}\}$ e os polinômios listados abaixo

- $x_{22} + x_{33}$
- $x_{33}^2(x_{24}x_{42} + x_{14}x_{41} - x_{21}x_{23})$
- $-x_{14}x_{41} - x_{33}^2 + x_{23}x_{21} - x_{24}x_{42}$
- $x_{21} + x_{32}$

²A notação $\mathcal{Y}(x_{11})$ quer dizer que cada polinômio no conjunto $\mathcal{Y}$ é avaliado em $x_{11} = 0$.

$$\bullet \ x_{21}x_{33} - x_{24}x_{41} \qquad \bullet \ x_{14}x_{21} - x_{24}x_{33}.$$

Observe que

$$\mathcal{D} = \mathcal{V}(\Lambda, \ x_{11}, \ x_{22}, \ x_{33}, \ x_{14}x_{41} - x_{23}x_{21} + x_{24}x_{42}, \ x_{21} + x_{32}, \ x_{24}x_{41}, \ x_{14}x_{21})$$

Não é difícil ver que a variedade $\mathcal{D}$ decompõe na união de quatro variedades, cada uma delas $EqD(3)$, portanto $\mathcal{D}$ é $EqD(3)$.

Lista 12. A variedade $\mathcal{F}$ é determinada pelas variáveis no conjunto Λ e os seguintes polinômios

$$\begin{aligned} \bullet \ g_1 &= x_{11} + x_{22} + x_{33}. \\ \bullet \ g_2 &= x_{11}x_{22} + x_{11}x_{33} - x_{14}x_{41} + x_{22}x_{33} + x_{23}x_{21} - x_{24}x_{42}. \\ \bullet \ g_3 &= x_{22}x_{33} + x_{23}x_{21} - x_{24}x_{42} + x_{14}x_{41}. \\ \bullet \ g_4 &= x_{33}(-x_{11}x_{24}x_{42} + x_{24}x_{33}x_{42} - x_{14}x_{22}x_{41} - x_{24}x_{23}x_{41}). \\ \bullet \ g_5 &= x_{21} + x_{32}. \\ \bullet \ g_6 &= -x_{11}x_{21} + x_{21}x_{33} - x_{24}x_{41}. \\ \bullet \ g_7 &= x_{14}x_{21} - x_{24}x_{33}. \end{aligned}$$

Então, $\mathcal{F}$ se decompõe em $\mathcal{F} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{C}$, onde

$$\begin{aligned} 1. \ \mathcal{B}_1 &= \mathcal{V}(\Lambda, \ x_{33}, \ x_{14}, \ x_{11}, \ x_{22}, \ x_{23}x_{21} - x_{24}x_{42}, \ x_{21} + x_{32}, \ x_{24}x_{41}) \\ 2. \ \mathcal{B}_2 &= \mathcal{V}(\Lambda, \ x_{33}, \ x_{21}, \ x_{11} + x_{22}, \ x_{11}x_{22} - 2x_{14}x_{41}, \ -x_{24}x_{42} + x_{14}x_{41}, \ x_{32}, \ x_{24}x_{41}) \\ 3. \ \mathcal{C} &= \mathcal{V}(\Lambda, \ g_1, \ g_2, \ g_3, \ -x_{11}x_{24}x_{42} + x_{24}x_{33}x_{42} - x_{14}x_{22}x_{41} - x_{24}x_{23}x_{41}, \ g_5, \ g_6, \ g_7) \end{aligned}$$

Observe que as variedades $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ se dividem em união de variedades que são $EqD(3)$ em $\mathbb{C}^{16}$. Para a variedade $\mathcal{C}$, seja

$$p = x_{24}x_{42}(-x_{11} + x_{33}) + x_{14}x_{11}x_{41} + x_{14}x_{33}x_{41} - x_{23}(-x_{11}x_{21} + x_{21}x_{33})$$

Substituindo g_3 em p , se obtém

$$p = x_{11}^2x_{33} + 2x_{14}x_{41}x_{33} - x_{33}^3 = x_{33}(x_{11}^2 + 2x_{14}x_{41} - x_{33}^2)$$

Isto permite dividir a variedade $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, onde

Lista 13. A variedade $\mathcal{C}_1$ é determinada pelas variáveis no conjunto $\Lambda \cup \{x_{33}\}$ e os seguintes polinômios

$$\begin{aligned} \bullet \ x_{11} + x_{22} & \qquad \bullet \ x_{21} + x_{32} \\ \bullet \ x_{11}x_{22} - x_{14}x_{41} + x_{23}x_{21} - x_{24}x_{42} & \qquad \bullet \ x_{11}x_{21} + x_{24}x_{41} \\ \bullet \ x_{23}x_{21} - x_{24}x_{42} + x_{14}x_{41} & \qquad \bullet \ x_{14}x_{21} \end{aligned}$$

Note-se que $\mathcal{C}_1 = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, portanto $\mathcal{C}_1$ é $EqD(3)$ em $\mathbb{C}^{16}$. Por último, para a variedade $\mathcal{C}_2$ temos

$$\mathcal{C}_2 = \mathcal{V}(\Lambda, g_1, g_2, g_3, x_{11}^2 + 2x_{14}x_{41} - x_{33}^2, g_5, g_6, g_7)$$

Mas, $g_3 - g_2 - (x_{11}^2 + 2x_{14}x_{41} - x_{33}^2) = x_{33}^2$, portanto

$$\mathcal{C}_2 = \mathcal{V}(\Lambda, g_1, g_2, g_3, x_{33}, g_5, g_6, g_7) = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$$

Assim, a variedade $\mathcal{F}$ é $EqD(3)$ em $\mathbb{C}^{16}$, isto conclui a prova do segundo caso.

3.2.3 Caso 3

Pelo lema 6, um conjunto de geradores da subálgebra $\mathcal{F}_\xi(gl_4) \subset S(gl_4)$ é

1. $\bar{\phi}_1^{(0)} = x_{11} + x_{22} + x_{33} + x_{44}$.
2. $\bar{\phi}_2^{(0)} = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} + x_{11}x_{33} - x_{13}x_{31} + x_{11}x_{44} - x_{14}x_{41} + x_{22}x_{33} - x_{23}x_{32} + x_{22}x_{44} - x_{24}x_{42} + x_{33}x_{44} - x_{34}x_{43}$.
3. $\bar{\phi}_3^{(0)} = x_{11}x_{22}x_{33} - x_{11}x_{23}x_{32} - x_{12}x_{21}x_{33} + x_{12}x_{23}x_{31} + x_{13}x_{21}x_{32} - x_{13}x_{22}x_{31} + x_{11}x_{22}x_{44} - x_{11}x_{24}x_{42} - x_{12}x_{21}x_{44} + x_{12}x_{24}x_{41} + x_{14}x_{21}x_{42} - x_{14}x_{22}x_{41} + x_{11}x_{33}x_{44} - x_{11}x_{34}x_{43} - x_{13}x_{31}x_{44} + x_{13}x_{34}x_{41} + x_{14}x_{31}x_{43} - x_{14}x_{33}x_{41} + x_{22}x_{33}x_{44} - x_{22}x_{34}x_{43} - x_{23}x_{32}x_{44} + x_{23}x_{34}x_{42} + x_{24}x_{32}x_{43} - x_{24}x_{33}x_{42}$.
4. $\bar{\phi}_4^{(0)} = x_{11}x_{22}x_{33}x_{44} - x_{11}x_{22}x_{34}x_{43} - x_{11}x_{23}x_{32}x_{44} + x_{11}x_{23}x_{34}x_{42} + x_{11}x_{24}x_{32}x_{43} - x_{11}x_{24}x_{33}x_{42} - x_{12}x_{21}x_{33}x_{44} + x_{12}x_{21}x_{34}x_{43} + x_{12}x_{23}x_{31}x_{44} - x_{12}x_{23}x_{34}x_{41} - x_{12}x_{24}x_{31}x_{43} + x_{12}x_{24}x_{33}x_{41} + x_{13}x_{21}x_{32}x_{44} - x_{13}x_{21}x_{34}x_{42} - x_{13}x_{22}x_{31}x_{44} + x_{13}x_{22}x_{34}x_{41} + x_{13}x_{24}x_{31}x_{42} - x_{13}x_{24}x_{32}x_{41} - x_{14}x_{21}x_{32}x_{43} + x_{14}x_{21}x_{33}x_{42} + x_{14}x_{22}x_{31}x_{43} - x_{14}x_{22}x_{33}x_{41} - x_{14}x_{23}x_{31}x_{42} + x_{14}x_{23}x_{32}x_{41}$.
5. $\bar{\phi}_2^{(1)} = x_{21} + x_{43}$.
6. $\bar{\phi}_3^{(1)} = x_{13}x_{41} - x_{11}x_{43} - x_{21}x_{33} + x_{23}x_{31} - x_{21}x_{44} - x_{22}x_{43} + x_{23}x_{42} + x_{24}x_{41}$.
7. $\bar{\phi}_4^{(1)} = x_{11}x_{23}x_{42} - x_{11}x_{22}x_{43} + x_{12}x_{21}x_{43} - x_{12}x_{23}x_{41} - x_{13}x_{21}x_{42} + x_{13}x_{22}x_{41} - x_{21}x_{33}x_{44} + x_{21}x_{34}x_{43} + x_{23}x_{31}x_{44} - x_{23}x_{34}x_{41} - x_{24}x_{31}x_{43} + x_{24}x_{33}x_{41}$.
8. $\bar{\phi}_4^{(2)} = x_{21}x_{43} - x_{23}x_{41}$

Vamos mostrar que os geradores de $\mathcal{F}_\xi(gl_4)$ formam uma sequência regular no anel de polinômios $\mathbb{C}[x_{ij} : i, j = 1, \dots, 4]$. Para isso vamos aumentar os monômios do conjunto $X = \{x_{12}, x_{14}, x_{32}, x_{34}\}$ ao conjunto de geradores acima e consideramos a variedade V determinada por esse conjunto aumentado. Provamos que a variedade $V \subseteq \mathbb{C}^{16}$ é $EqD(4)$. Observe que a variedade V é determinada pelas variáveis no conjunto X junto com os seguintes polinômios

- $f_1 = x_{11} + x_{22} + x_{33} + x_{44}$.
- $f_2 = x_{11}x_{22} + x_{11}x_{33} - x_{13}x_{31} + x_{11}x_{44} + x_{22}x_{33} + x_{22}x_{44} - x_{24}x_{42} + x_{33}x_{44}$.
- $f_3 = x_{11}x_{22}x_{33} - x_{13}x_{22}x_{31} + x_{11}x_{22}x_{44} - x_{11}x_{24}x_{42} + x_{11}x_{33}x_{44} - x_{13}x_{31}x_{44} + x_{22}x_{33}x_{44} - x_{24}x_{33}x_{42}$.

- $f_4 = (x_{22}x_{44} - x_{24}x_{42})(x_{11}x_{33} - x_{13}x_{31})$.
- $f_5 = x_{21} + x_{43}$.
- $f_6 = x_{11}x_{43} - x_{13}x_{41} + x_{21}x_{33} - x_{23}x_{31} + x_{21}x_{44} + x_{22}x_{43} - x_{23}x_{42} - x_{24}x_{41}$.
- $f_7 = x_{11}x_{22}x_{43} - x_{11}x_{23}x_{42} + x_{13}x_{21}x_{42} - x_{13}x_{22}x_{41} + x_{21}x_{33}x_{44} - x_{23}x_{31}x_{44} + x_{24}x_{31}x_{43} - x_{24}x_{33}x_{41}$.
- $f_8 = x_{21}x_{43} - x_{23}x_{41}$

Então $V = W \cup Z \subseteq \mathbb{C}^{16}$ onde

$$W = \mathcal{V}(x_{12}, x_{14}, x_{32}, x_{34}, f_1, f_2, f_3, x_{22}x_{44} - x_{24}x_{42}, f_5, f_6, f_7, f_8) \quad (3.4)$$

$$Z = \mathcal{V}(x_{12}, x_{14}, x_{32}, x_{34}, f_1, f_2, f_3, x_{11}x_{33} - x_{13}x_{31}, f_5, f_6, f_7, f_8) \quad (3.5)$$

Mas as permutações de variáveis dadas pelas correspondências, componente a componente, das matrizes

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_{22} & x_{12} & x_{42} & x_{14} \\ x_{21} & x_{11} & x_{41} & x_{31} \\ x_{24} & x_{32} & x_{44} & x_{34} \\ x_{23} & x_{13} & x_{43} & x_{33} \end{pmatrix}$$

define um isomorfismo entre as variedades W e Z , já que fazendo essas mudanças de variáveis nos polinômios que determinam a variedade W obtemos os polinômios que determinam a variedade Z . Portanto, é suficiente mostrar que W é $EqD(4)$. Agora, considere a variedade M determinada pelos polinômios da variedade W junto com o monômio x_{24} .

Lista 14 (Polinômios para M). A variedade M é determinada pelas variáveis no conjunto $X \cup \{x_{24}\}$ junto com os polinômios listados abaixo

- $x_{11} + x_{22} + x_{33} + x_{44}$.
- $x_{11}x_{22} + x_{11}x_{33} - x_{13}x_{31} + x_{11}x_{44} + x_{22}x_{33} + x_{22}x_{44} + x_{33}x_{44}$.
- $x_{11}x_{22}x_{33} - x_{13}x_{22}x_{31} + x_{11}x_{22}x_{44} + x_{11}x_{33}x_{44} - x_{13}x_{31}x_{44} + x_{22}x_{33}x_{44}$.
- $x_{22}x_{44}$.
- $x_{21} + x_{43}$.
- $x_{11}x_{43} - x_{13}x_{41} + x_{21}x_{33} - x_{23}x_{31} + x_{21}x_{44} + x_{22}x_{43} - x_{23}x_{42}$.
- $x_{11}x_{22}x_{43} - x_{11}x_{23}x_{42} + x_{13}x_{21}x_{42} - x_{13}x_{22}x_{41} + x_{21}x_{33}x_{44} - x_{23}x_{31}x_{44}$.
- $x_{21}x_{43} - x_{23}x_{41}$

Esta variedade se decompõe em $M = P \cup Q$, onde

Lista 15 (Polinômios para P). A variedade P é determinada pelas variáveis no conjunto $X \cup \{x_{24}, x_{22}\}$ e os seguintes polinômios

- $x_{11} + x_{33} + x_{44}$.
- $x_{11}x_{33} - x_{13}x_{31} + x_{11}x_{44} + x_{33}x_{44}$.

- $x_{44}(x_{11}x_{33} - x_{13}x_{31})$.
- $x_{21} + x_{43}$.
- $x_{11}x_{43} - x_{13}x_{41} + x_{21}x_{33} - x_{23}x_{31} + x_{21}x_{44} - x_{23}x_{42}$.
- $-x_{11}x_{23}x_{42} + x_{13}x_{21}x_{42} + x_{21}x_{33}x_{44} - x_{23}x_{31}x_{44}$.
- $x_{21}x_{43} - x_{23}x_{41}$

Lista 16 (Polinômios para Q). A variedade Q é determinada pelas variáveis no conjunto $X \cup \{x_{24}, x_{44}\}$ e os seguintes polinômios

- $x_{11} + x_{22} + x_{33}$.
- $x_{11}x_{22} + x_{11}x_{33} - x_{13}x_{31} + x_{22}x_{33}$.
- $x_{22}(x_{11}x_{33} - x_{13}x_{31})$.
- $x_{21} + x_{43}$.
- $x_{11}x_{43} - x_{13}x_{41} + x_{21}x_{33} - x_{23}x_{31} + x_{22}x_{43} - x_{23}x_{42}$.
- $x_{11}x_{22}x_{43} - x_{11}x_{23}x_{42} + x_{13}x_{21}x_{42} - x_{13}x_{22}x_{41}$.
- $x_{21}x_{43} - x_{23}x_{41}$.

Mas não é difícil ver que $P = Q$, de fato, as duas variedades são determinadas pelas variáveis no conjunto $Y = X \cup \{x_{24}, x_{22}, x_{44}\}$ junto com os seguintes polinômios

- $g_1 = x_{11} + x_{33}$.
- $g_2 = x_{11}x_{33} - x_{13}x_{31}$.
- $g_3 = x_{21} + x_{43}$.
- $g_4 = x_{11}x_{43} - x_{13}x_{41} + x_{21}x_{33} - x_{23}x_{31} - x_{23}x_{42}$.
- $g_5 = x_{42}(x_{13}x_{21} - x_{11}x_{23})$.
- $g_6 = x_{21}x_{43} - x_{23}x_{41}$

Então a variedade P (ou Q) se decompõe em $P = P_1 \cup P_2$, onde

1. $P_1 = \mathcal{V}(Y, x_{42}, g_1(x_{42}), g_2(x_{42}), g_3(x_{42}), g_4(x_{42}), g_6(x_{42}))$
2. $P_2 = \mathcal{V}(Y, g_1, g_2, g_3, g_4, x_{13}x_{21} - x_{11}x_{23}, g_6)$

Note-se que

$$P_1 \subseteq \mathcal{V}(Y, x_{13}, x_{42}, x_{11}, x_{33}, g_3, x_{23}x_{31}, g_6)$$

Então,

$$P_1 \subseteq \underbrace{\mathcal{V}(Y, x_{23}, x_{13}, x_{42}, x_{11}, x_{33}, x_{21}, x_{43})}_{= R_1} \cup \underbrace{\mathcal{V}(Y, x_{31}, x_{13}, x_{42}, x_{11}, x_{33}, g_3, g_6)}_{= R_2}$$

E tanto R_1 quanto R_2 são variedades $EqD(2)$ em $\mathbb{C}^{16}$, portanto, P_1 é $EqD(3)$. Seja agora S a variedade dada pelos polinômios que determinam a variedade P_2 junto com a variável x_{31} , então

$$P_2 \subseteq \underbrace{\mathcal{V}(Y, x_{31}, x_{11}, x_{33}, g_3, x_{13}x_{41} + x_{23}x_{42}, x_{13}x_{21}, g_6)}_{= S}$$

Mas, a variedade S decompõe em $S = S_1 \cup S_2$, onde

1. $S_1 = \mathcal{V}(Y, x_{13}, x_{31}, x_{11}, x_{33}, g_3, x_{23}x_{42}, g_6)$
2. $S_2 = \mathcal{V}(Y, x_{21}, x_{31}, x_{11}, x_{33}, x_{43}, x_{13}x_{41} + x_{23}x_{42}, x_{23}x_{41})$

Claramente as duas variedades S_1 e S_2 são $EqD(2)$ em $\mathbb{C}^{16}$, portanto, P_2 é $EqD(3)$. Assim, a variedade W definida na equação (3.4) é $EqD(4)$, isto completa a prova. □

Referências Bibliográficas

- Beilinson e Drinfeld (1997)** Beilinson e Drinfeld. Quantization of hitchin's integrable system and hecke eigensheaves. *Disponível em* <http://www.math.uchicago.edu/~mitya/langlands/hitchin/BD-hitchin.pdf>. 24
- Bolsinov (1991)** A.V.Bolsinov. Commutative families of functions related to consistent poisson brackets. *Acta Applicandae Mathematicae*, 24:253–274. 22
- Chevalley (1955)** Claude Chevalley. Invariants of finite groups generated by reflections. *American Journal of Mathematics*, 77(4):778–782. 22
- Dixmier (1977)** J. Dixmier. Enveloping algebras. *North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford*. ISBN 0-7204-0430-4. *North-Holland Mathematical Library, Vol. 14, Translated from the French*. 1
- Feigin et al. (2010)** Feigin, Frenkel e Toledano Laredo. Gaudin models with irregular singularities. *Advances in Mathematics*, 223:873–948. viii, ix, 12, 21, 22, 23, 24, 26
- Frenkel (2007)** E. Frenkel. Langlands Correspondence for Loop Groups. *Cambridge University Press*. ISBN 978-0-521-85443-6. 12, 13, 23, 24
- Futorny e Molev (2015)** Futorny e Molev. Quantization of the shift argument subalgebras in type A. *Advances in Mathematics*, 285:1358–1375. viii, ix, 22, 23, 24, 26
- Futorny e Ovsienko (2005)** Futorny e Ovsienko. Kostant's theorem for special filtered algebras. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 37:187–199. ISSN S0024609304003844. viii, 19
- Humphreys (1972)** J. E. Humphreys. Introduction to Lie algebras and representation theory. *Springer-Verlag, New York-Berlin. Graduate Texts in Mathematics*, Vol. 9. 1, 4, 6, 7, 8
- Kostant (1963)** B. Kostant. Lie groups representations in polynomial rings. *Amer. J. Math*, 85(2):327–404. vii, 22
- Kunz (1985)** E. Kunz. *Introduction to commutative algebra and algebraic geometry*. Library of congress, Birkhauser Boston. ISBN 3-7643-3065-1. Original title: Einführung in die kommutative algebra und algebraische geometrie. 15, 16
- Matsumura (1986)** H. Matsumura. commutative ring theory. *Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge University Press*, New York. ISBN 978-0-521-36764-6. 18, 19

- Mishchenko e Fomenko (1978)** Mishchenko e Fomenko. Euler equations on finite-dimensional lie groups. *Math. USSR-Izv*, 12:371–389. [22](#)
- Moreau (2016)** A. Moreau. Remarks about Mishchenko-Fomenko algebras and regular sequences. *preprint*. [viii](#), [28](#), [35](#)
- Ovsienko (2003)** S. Ovsienko. Lie group representations on polynomial rings. *Linear Algebra and its Applications*, 365:349–367. [vii](#), [viii](#), [28](#)
- Panyushev e Yakimova (2008)** Panyushev e Yakimova. The argument shift method and maximal commutative subalgebras of poisson algebras. *Mathematical Research Letters*, 15 (2):239–249. ISSN 1073-2780. [viii](#), [22](#), [28](#)
- Rybnikov (2006)** L. Rybnikov. The argument shift method and gaudin model. *Functional Analysis and Its Applications*, 40(3):30–43. [viii](#), [22](#)
- San Martin (2010)** L. San Martin. *Álgebras de Lie*. Editora da Unicamp. ISBN 978-85-268-0876-8. segunda edição. [1](#)
- Vinberg (1991)** E. Vinberg. On certain commutative subalgebras of a universal enveloping algebra. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 36(1):1–22. [viii](#), [22](#), [28](#)