**Álgebra de semigrupo na
compactificação de Stone-Čech
de semigrupos discretos**

Matheus Koveroff Bellini

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Programa: Mestrado em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Artur Hideyuki Tomita

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da FAPESP
(Processo 2015/19857-4)

São Paulo, outubro de 2017

Álgebra de semigrupo na compactificação de Stone-Čech de semigrupos discretos

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 11/12/2017. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Artur Hideyuki Tomita (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi - ICMC-USP
- Prof. Dr. Vladimir Pestov - University of Ottawa

Sumário

1	Preliminares	1
1.1	Semigrupos, Ideais e Idempotentes	1
1.2	Semigrupos Topológicos à Direita Compactos	6
1.3	Compactificação de Stone-Čech de Espaços Discretos	7
1.4	A Compactificação de Stone-Čech de um Semigrupo Discreto	10
2	A Álgebra de $\beta\mathbb{N}$	13
2.1	O Semigrupo $\mathbb{H}$	13
2.2	O Ideal $\mathbb{N}^* + \mathbb{N}^*$, o Fecho de $K(\beta\mathbb{N})$, $\mathcal{U}_\kappa(S)$, Somas e Produtos	19
2.3	$\mathbb{N}^*$ não contém uma cópia algébrica e topológica de $\beta\mathbb{N}$	29
2.4	Subgrupos discretos em $\beta\mathbb{N}$	39
2.5	Cadeias de idempotentes	45
3	A Álgebra de βS	55
3.1	Sobre a Raridade de Produtos em S^*	55
3.2	Cancelabilidade à direita em βS	78
3.3	Cópias de $\mathbb{H}$ em S^*	83
3.4	O Teorema de Zelenyuk	85
A	Grupos Abelianos Divisíveis	101

Capítulo 1

Preliminares

Denotaremos por $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ o primeiro ordinal e cardinal infinito e por $\mathbb{N}$ o conjunto $\{1, 2, 3, \dots\}$, ou seja, $\omega \setminus \{0\}$. Como ordinal e cardinal, um número natural $n \in \mathbb{N}$ é o conjunto $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Denota-se também $\mathfrak{c} = 2^\omega = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Dada função f e dado A contido no domínio de f , $f[A] \doteq \{f(x) : x \in A\}$. Dado qualquer conjunto B , $f^{-1}[B] \doteq \{x \in \text{dom } f : f(x) \in B\}$. Dizemos que a função é *finita-por-unitários* se para todo x , $f^{-1}[\{x\}]$ for finito.

Dado um conjunto A , $\mathcal{P}_f(A) \doteq \{F : \emptyset \neq F \subset A \text{ e } F \text{ é finito}\}$.

Como esta dissertação é sobre a álgebra de semigrupo de βS para S semigrupo discreto – em particular $(\beta\mathbb{N}, +)$ e $(\beta\mathbb{N}, \cdot)$ –, nesta seção apresentaremos as definições necessárias e os teoremas mais relevantes para fundamentar o assunto. Mais detalhes podem ser encontrados nos capítulos 1, 2, 3 e 4 de [1].

1.1 Semigrupos, Ideais e Idempotentes

Definição 1.1. Um *semigrupo* é um par $(S, *)$ em que S é um conjunto não-vazio e $*$ é uma operação binária associativa sobre S .

Definição 1.2. Dado $A \neq \emptyset$, o *semigrupo livre sobre A* é o conjunto de todas as sequências finitas de elementos de A , com a operação definida pela *concatenação* de sequências.

Definição 1.3. Sejam $(S, \cdot)$ um semigrupo, O um conjunto linearmente ordenado por $<$, e $(x_o)_{o \in O}$ uma O -sequência em S (ou seja, uma função de O em S). Definimos, para cada $F \in \mathcal{P}_f(O)$, $\prod_{o \in F} x_o$ como o produto na ordem crescente de índices.

Dizemos que $(x_o)_{o \in O}$ satisfaz a *unicidade dos produtos finitos*, ou que possui *produtos finitos distintos*, se sempre que $F, G \in \mathcal{P}_f(O)$ e $\prod_{o \in F} x_o = \prod_{o \in G} x_o$, vale que $F = G$.

Além disso, define-se $FP((x_o)_{o \in O}) = \{\prod_{o \in F} x_o : F \in \mathcal{P}_f(O)\}$.

Definição 1.4. Sejam $(S, *)$ e $(T, \cdot)$ semigrupos.

- (a) Um *homomorfismo* de S em T é uma função $\varphi : S \rightarrow T$ tal que $\varphi(x * y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$, para todos $x, y \in S$.
- (b) Um *isomorfismo* de S em T é um homomorfismo de S em T que é bijetor.
- (c) S e T são *isomorfos* se existir um isomorfismo de S em T . Neste caso denotamos $S \cong T$.

Por conveniência, passaremos a denotar $x * y$ por xy e diremos “seja S um semigrupo” sem especificar a operação, caso não surjam ambiguidades.

Definição 1.5. Sejam S um semigrupo e $a \in S$.

- (a) a é uma *identidade à esquerda* de S se, para todo $x \in S$, $ax = x$.
- (b) a é uma *identidade à direita* de S se, para todo $x \in S$, $xa = x$.
- (c) a é uma *identidade* de S se a for uma identidade à direita e uma identidade à esquerda de S .

Definição 1.6. Seja S um semigrupo.

- (a) S é *comutativo* se, para todos $x, y \in S$, $xy = yx$.
- (b) O *centro* de S é $Z(S) = \{x \in S : \text{para todo } y \in S, xy = yx\}$.
- (c) Dado $x \in S$, $\lambda_x : S \rightarrow S$ é definido por $\lambda_x(y) = xy$.
- (d) Dado $x \in S$, $\rho_x : S \rightarrow S$ é definido por $\rho_x(y) = yx$.

Definição 1.7. Seja S um semigrupo.

- (a) $x \in S$ é *cancelável à direita* se dados $y, z \in S$ tais que $yx = zx$, tem-se que $y = z$.
- (b) $x \in S$ é *cancelável à esquerda* se dados $y, z \in S$ tais que $xy = xz$, tem-se que $y = z$.
- (c) S é *cancelativo à direita* se todo $x \in S$ é cancelável à direita.
- (d) S é *cancelativo à esquerda* se todo $x \in S$ é cancelável à esquerda.
- (e) S é *cancelativo* se for cancelativo à esquerda e à direita.

Definição 1.8. Seja S um semigrupo.

- (a) $x \in S$ é um *idempotente* se $xx = x$.
- (b) $E(S) = \{x \in S : xx = x\}$.
- (c) T é um *subsemigrupo* de S se $T \subset S$ e T é um semigrupo com a restrição da operação de S .

(d) T é um *subgrupo* de S se $T \subset S$ e T é um grupo com a restrição da operação de S .

Definição 1.9. Seja S um semigrupo.

(a) L é um *ideal à esquerda* de S se $\emptyset \neq L \subset S$ e $SL \subset L$.

(b) R é um *ideal à direita* de S se $\emptyset \neq R \subset S$ e $RS \subset R$.

(c) I é um *ideal* de S se I for um ideal à esquerda e um ideal à direita de S .

Definição 1.10. Seja S um semigrupo.

(a) L é um ideal à esquerda *minimal* se L for um ideal à esquerda de S tal que dado J ideal à esquerda tal que $J \subset L$, tem-se que $J = L$.

(b) R é um ideal à direita *minimal* se R for um ideal à direita de S tal que dado J ideal à direita tal que $J \subset R$, tem-se que $J = R$.

(c) S é *simples à esquerda* se S for o único ideal à esquerda de S .

(d) S é *simples à direita* se S for o único ideal à direita de S .

(e) S é *simples* se S for o único ideal de S .

Definição 1.11. Sejam S um semigrupo e $e, f \in E(S)$.

(a) $e \leq_L f$ se e só se $e = ef$.

(b) $e \leq_R f$ se e só se $e = fe$.

(c) $e \leq f$ se e só se $e = fe = ef$.

Vale que $\leq_L$, $\leq_R$ e $\leq$ são reflexivas e transitivas, e $\leq$ é antissimétrica. Além disso, tem-se que são equivalentes:

1. e é minimal com relação a $\leq_L$;
2. e é minimal com relação a $\leq_R$;
3. e é minimal com relação a $\leq$.

De forma que é válido definir:

Definição 1.12. Seja S um semigrupo. $e \in E(S)$ é um idempotente *minimal* se e for minimal com relação a qualquer uma das pré-ordens $\leq_L$, $\leq_R$ ou $\leq$.

Lembramos que um elemento x de uma pré-ordem P é minimal se sempre que yPx , então vale que xPy (e não necessariamente $x = y$).

Definição 1.13. Seja S um semigrupo. Se S possui um menor ideal, denotamo-lo por $K(S)$.

Teorema 1.14. *Seja S um semigrupo. Se S possui um ideal à esquerda minimal, então $K(S)$ existe e $K(S) = \bigcup \{L : L \text{ é um ideal à esquerda minimal de } S\}$.*

Teorema 1.15. *Suponha que S contém um ideal à esquerda minimal que possui um idempotente. Então:*

- (a) *Todo ideal à esquerda de S contém um ideal à esquerda minimal.*
- (b) *Todo ideal à esquerda minimal possui um idempotente.*
- (c) *Existe um ideal à direita minimal que possui um idempotente. (Logo todo ideal à direita contém um ideal à direita minimal que possui um idempotente.)*
- (d) *Dado $T \subset S$, T é um ideal à esquerda minimal se e somente se existe $e \in E(K(S))$ tal que $T = Se$.*

Teorema 1.16. *Seja S um semigrupo, suponha que existe um ideal à esquerda minimal que possui um idempotente e seja $e \in E(S)$. São equivalentes:*

- (a) *Se é um ideal à esquerda minimal.*
- (b) *Se é simples à esquerda.*
- (c) *eSe é um grupo.*
- (d) *eSe é o maior grupo que tem e como identidade.*
- (e) *eS é um ideal à direita minimal.*
- (f) *eS é simples à direita.*
- (g) *e é um idempotente minimal.*
- (h) *$e \in K(S)$.*
- (i) *$K(S) = SeS$.*

Teorema 1.17. *Suponha que S contém um ideal à esquerda minimal que possui um idempotente. Então:*

- (a) *Dado e idempotente, existe f idempotente tal que $f \leq e$.*
- (b) *Dados L ideal à esquerda minimal e R ideal à direita minimal, existe um idempotente e tal que $e \in R \cap L = RL = eSe$ e eSe é grupo.*

(c) Os ideais à esquerda minimais de S particionam $K(S)$; os ideais à direita minimais de S particionam $K(S)$; os grupos maximais de $K(S)$ particionam $K(S)$.

(d) Suponha T subsemigrupo de S que também contém um ideal à esquerda que possui um idempotente. Se $K(S) \cap T \neq \emptyset$, então $K(T) = K(S) \cap T$.

(e) São equivalentes:

(i) $s \in K(S)$.

(ii) Para todo $t \in S$, $s \in Sts$.

(iii) Para todo $t \in S$, $s \in stS$.

(iv) Para todo $t \in S$, $s \in Sts \cap stS$.

1.2 Semigrupos Topológicos à Direita Compactos

Definição 1.18. Um *semigrupo topológico à direita* é uma tripla $(S, *, \tau)$ em que $(S, *)$ é um semigrupo, (S, τ) é um espaço topológico e, para todo $x \in S$, $\rho_x : S \rightarrow S$ é contínua.

Costumeiramente, dir-se-á “seja S um semigrupo topológico à direita” quando disso não resultarem ambiguidades.

Definição 1.19. Seja S um semigrupo topológico à direita. O *centro topológico* de S é $\Lambda(S) = \{x \in S : \lambda_x \text{ é contínua}\}$.

Teorema 1.20. *Seja S um semigrupo topológico à direita compacto. Então $E(S) \neq \emptyset$.*

Corolário 1.21. *Seja S um semigrupo topológico à direita compacto. Então todo ideal à esquerda contém um ideal à esquerda minimal, ideais à esquerda minimais são fechados, e todo ideal à esquerda minimal possui um idempotente.*

Dessa forma, se S é um semigrupo topológico à direita compacto, valem todos os resultados listados em 1.14, 1.15, 1.16 e 1.17.

Teorema 1.22. *Sejam S um semigrupo topológico à direita e R um ideal à direita de S . Então $cl R$ é um ideal à direita de S .*

A seguir, um teorema cuja demonstração do item (a) será dada para exemplificar a interação entre as estruturas algébrica e topológica de S .

Teorema 1.23. *Seja S um semigrupo topológico à direita compacto, e suponha que $Z(S)$ é denso em S .*

(a) *Seja L um ideal à esquerda de S . Então $cl L$ é um ideal à esquerda de S .*

(b) *Seja R um ideal à direita de S . Então $cl R$ é um ideal de S .*

(c) *Seja $e \in E(K(S))$. Então $cl(eSe) = Se$.*

Demonstração. (a): Sejam $x \in cl L$ e $y \in S$. Seja U vizinhança de yx . $yx = \rho_x(y)$, logo seja V vizinhança de y tal que $\rho[V] \subset U$. Seja $z \in Z(S) \cap V$. Então $\rho_x(z) = zx = xz = \rho_z(x) \in U$, logo seja W vizinhança de x tal que $\rho_z[W] \subset U$. Seja $w \in W \cap L$. Então $\rho_z(w) = wz = zw \in U \cap L$. Logo $yx \in cl L$. ■

1.3 Compactificação de Stone-Čech de Espaços Discretos

Esta seção tem o propósito de fixar notações, já que o assunto é amplamente conhecido, e assim não é necessária uma longa exposição de definições e teoremas.

Definição 1.24. Dado D espaço topológico discreto, $\beta D = \{p : p \text{ é um ultrafiltro sobre } D\}$, como conjunto. Definindo, para cada $A \subset D$, $\hat{A} = \{p \in \beta D : A \in p\}$, temos que $\{\hat{A} : A \subset D\}$ é uma base para uma topologia em βD . βD com esta topologia é uma compactificação de Stone-Čech de D ; ao identificar cada $x \in D$ com seu ultrafiltro principal, podemos considerar $D \subset \beta D$.

Assim, temos que:

- (i) Os clopens são exatamente os conjuntos da forma $\hat{A}$, para $A \subset D$. (Portanto βD é zero-dimensional.)
- (ii) Para todo $A \subset D$, $\hat{A} = \text{cl}_{\beta D} A$.
- (iii) Os pontos isolados de βD são exatamente os pontos de D .
- (iv) Dado $U \subset \beta D$ aberto, $\text{cl}_{\beta D} U$ também é aberto. (Ou seja, βD é extremamente desconexo.)

Definição 1.25. (a) Seja $A \subset D$. Então $A^* = \hat{A} \setminus A$.

(b) Dado $T \subset D$, podemos identificar $p \in \hat{T}$ com $\{A \cap T : A \in p\} \in \beta T$, e assim diremos que $\beta T \subset \beta D$.

(c) Sejam Y compacto e $f : D \rightarrow Y$, denotaremos por $\tilde{f}$ a extensão contínua de f a βD .

(d) Seja κ cardinal. Então $\mathcal{U}_\kappa(D) = \{p \in \beta D : \forall A \in p, |A| \geq \kappa\}$.

(e) Seja κ cardinal infinito, e seja $\mathcal{A}$ uma coleção de conjuntos. Então $\mathcal{A}$ possui a *propriedade da interseção finita κ -uniforme* (também chamada de κ -p.i.f.) se dado qualquer $\mathcal{F} \in \mathcal{P}_f(\mathcal{A})$, $|\bigcap \mathcal{F}| \geq \kappa$.

(f) Dado $\mathcal{A}$ filtro em D , $\hat{\mathcal{A}} = \{p \in \beta D : \mathcal{A} \subset p\}$.

Com estas definições, valem os seguintes resultados:

Teorema 1.26. (a) Suponha que $f : D \rightarrow D$ não possui pontos fixos. Então D pode ser particionado em três células A_1, A_2, A_3 tais que para cada i , $A_i \cap f[A_i] = \emptyset$. Como corolário, $\tilde{f} : \beta D \rightarrow \beta D$ também não possui pontos fixos.

(b) Se D é infinito, então todo G_δ de D^* possui interior não-vazio em D^* . Como consequência, toda união enumerável de nunca-densos de D^* é nunca-densa em D^* .

- (c) Sejam A e B subconjuntos σ -compactos de βD ou de D^* . Então $(cl A) \cap (cl B) \subset (A \cap (cl B)) \cup ((cl A) \cap B)$.
- (d) Seja D infinito de cardinalidade κ , e seja $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(D)$ tal que $|\mathcal{A}| \leq \kappa$ e $\mathcal{A}$ possui a κ -p.i.f. Então $|\{p \in \mathcal{U}_\kappa(D) : \mathcal{A} \subset p\}| = 2^{2^\kappa}$. Em particular, $|\mathcal{U}_\kappa(D)| = |\beta D| = 2^{2^\kappa}$.
- (e) Sejam D e E espaços discretos e $f : D \rightarrow E \subset \beta E$. Então para cada $p \in \beta D$, $\tilde{f}(p) = \{A \in E : f^{-1}[A] \in p\}$. Logo, se f é injetora, $\tilde{f}$ é injetora; e se f é sobrejetora, $\tilde{f}$ é sobrejetora. E se $B \in p$, então $f[B] \in \tilde{f}(p)$.
- (f) Dado $\mathcal{A}$ filtro em D , $\widehat{\mathcal{A}}$ é um fechado de βD .
- (g) Dado $A \subset \beta D$, $\bigcap A$ é um filtro em D e $cl_{\beta D} A = \widehat{\bigcap A}$.
- (h) Sejam X espaço topológico, $f : \beta D \rightarrow X$ contínua, e $p \in \beta D$. Então dada U vizinhança de $f(p)$, $D \cap f^{-1}[U] \in p$.
- (i) Seja X espaço topológico zero-dimensional e seja $Y \subset X$ compacto. Então os clopens de Y são da forma $C \cap Y$ em que C é clopen em X . Em particular: se D é infinito, então todo clopen não-vazio de D^* é da forma A^* para $A \subset D$ infinito.
- (j) Seja D infinito e seja $A \subset \beta D$ infinito e fechado. Então A contém uma cópia topológica de $\beta \mathbb{N}$. Em particular, $|A| \geq 2^{\mathfrak{c}}$.

Agora, definiremos limites e p-limites e listaremos suas propriedades básicas, que são similares com as propriedades de redes.

Definição 1.27. (a) Sejam X e Y espaços topológicos, $A \subset X$, $f : A \rightarrow Y$, $x \in cl_X A$ e $y \in Y$.

Dizemos que $\lim_{a \rightarrow x} f(a) = y$ se para toda vizinhança U de y existir V vizinhança de x tal que $f[V \cap A] \subset U$.

- (b) Sejam D espaço discreto, $p \in \beta D$, X espaço topológico, $\{x_s : s \in D\} \subset X$ uma família indexada, e $y \in X$. Dizemos então que $p - \lim_{s \in D} x_s = y$ se e somente se para cada vizinhança V de y , $\{s \in D : x_s \in V\} \in p$.

Teorema 1.28. (a) Se Y é Hausdorff e $\lim_{a \rightarrow x} f(a)$ existe, então é único.

- (b) Se X é Hausdorff e $p - \lim_{s \in D} x_s$ existe, então é único.

- (c) Dado $A \in p$, como identificamos $\widehat{A} \subset \beta D$ com βA , pode-se considerar $p - \lim_{s \in A} x_s$. Vale então que $p - \lim_{s \in A} x_s = y$ se e somente se $p - \lim_{s \in D} x_s = y$.

- (d) Considerando a família indexada $\{s : s \in D\} \subset \beta D$, vale que $p - \lim_{s \in D} s = p$.

- (e) Sejam D discreto, $p \in \beta D$, $A \in p$, Y espaço topológico, $y \in Y$ e $f : A \rightarrow Y$. Então $p - \lim_{a \in A} f(a) = y$ se e somente se $\lim_{a \rightarrow p} f(a) = y$.
- (f) Seja X espaço topológico. Então X é compacto se e somente se dados qualquer D , qualquer família indexada $\{x_s : s \in D\}$, e qualquer $p \in \beta D$, $p - \lim_{s \in D} x_s$ existe.
- (g) Sejam X espaço topológico, $A \subset X$, e $y \in X$. Então $y \in \text{cl}A$ se e somente se existem D , $p \in \beta D$ e $\{x_s : s \in D\} \subset A$ tais que $p - \lim_{s \in D} x_s = y$.
- (h) Sejam X, Y espaços topológicos, e $f : X \rightarrow Y$. Então f é contínua se e somente se dados quaisquer D , $p \in \beta D$, e $\{x_s : s \in D\} \subset X$ tais que $p - \lim_{s \in D} x_s$ existe, tem-se que $f\left(p - \lim_{s \in D} x_s\right) = p - \lim_{s \in D} f(x_s)$.

1.4 A Compactificação de Stone-Čech de um Semigrupo Discreto

Nesta seção apresentaremos a caracterização da operação em βS e alguns resultados primários.

Teorema 1.29. *Seja $(S, \cdot)$ semigrupo discreto. Então existe uma única operação $*$: $\beta S \rightarrow \beta S$ tal que $*|_{S \times S} = \cdot$, $(\beta S, *)$ seja um semigrupo topológico à direita, e $S \subset \Lambda(\beta S)$.*

Como de costume, usaremos o mesmo símbolo para denotar a operação em βS e em S . Como βS é um semigrupo topológico à direita compacto, segue que valem todas as conclusões da seção 1.2, além de, é claro, as da seção 1.3.

Definição 1.30. Sejam S semigrupo, $A \subset S$ e $s \in S$.

(a) Se a operação em S for denotada por $\cdot$ (notação multiplicativa), então $s^{-1}A = \{t \in S : st \in A\}$.

(b) Se a operação em S for denotada por $+$ (notação aditiva), então $-s + A = \{t \in S : s + t \in A\}$.

Note que em ambos os casos esta é apenas uma notação para $\lambda_s^{-1}[A]$.

Teorema 1.31. *Sejam $(S, \cdot)$ semigrupo, $A \subset S$, $t \in S$ e $p, q \in \beta S$.*

(a) $A \in t \cdot q$ se e somente se $t^{-1}A \in q$.

(b) $A \in p \cdot q$ se e somente se $\{s \in S : s^{-1}A \in q\} \in p$.

Seguem de (a) e (b):

(c) Se $A \in q$, então $sA \in s \cdot q$.

(d) $A \in p \cdot q$ se e somente se existem $B \in p$ e uma família $\{C_s : s \in B\} \subset q$ tais que $\bigcup_{s \in B} sC_s \subset A$.

Além disso, se T é um subsemigrupo de S , então podemos considerar que βT está algebricamente imerso em βS , usando 1.25(b).

Definição 1.32. Sejam $(S, \cdot)$ semigrupo, $p \in \beta S$, e $A \subset S$. Denotamos $A^*(p) = \{s \in A : s^{-1}A \in p\}$.

Segue imediatamente de 1.31(b) que $p \in \beta S$ é idempotente se e somente se para cada $A \in p$, $A^*(p) \in p$. Além disso:

Teorema 1.33. *Sejam $(S, \cdot)$ um semigrupo, $p \in \beta S$ idempotente, e $A \subset S$. Então para todo $s \in A^*(p)$, $s^{-1}(A^*(p)) \in p$.*

Teorema 1.34. *Suponha que $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(S)$ possua a p.i.f. Se para cada $A \in \mathcal{A}$ e cada $x \in A$ existir $B \in \mathcal{A}$ tal que $xB \subset A$, então $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \hat{A}$ é um subsemigrupo de βS .*

Uma rápida aplicação desta condição nos dá o seguinte teorema:

Teorema 1.35. *Seja S um semigrupo e seja $(x_n)_{n \geq 1}$ uma sequência em S . Então $\bigcap_{m \geq 1} \overline{FP((x_n)_{n \geq m})}$ é um subsemigrupo de βS . Em particular, existe um idempotente p tal que $p \in \bigcap_{m \geq 1} \overline{FP((x_n)_{n \geq m})}$.*

Teorema 1.36. *Sejam $(S, \cdot)$ um semigrupo e $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(S)$ com a p.i.f. Sejam $(T, \cdot)$ um semigrupo topológico à direita compacto e $\phi : S \rightarrow T$ tal que $\phi[S] \subset \Lambda(T)$. Suponha que existe $A \in \mathcal{A}$ tal que para todo $x \in A$ existe $B \in \mathcal{A}$ tal que $\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$ para todo $y \in B$. Então, para todos $p, q \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \hat{A}$, $\tilde{\phi}(p \cdot q) = \tilde{\phi}(p) \cdot \tilde{\phi}(q)$.*

Teorema 1.37. *Sejam S semigrupo, T semigrupo topológico à direita compacto, e $\varphi : S \rightarrow T$ um homomorfismo tal que $\varphi[S] \subset \Lambda(T)$. Então $\tilde{\varphi}$ é um homomorfismo de βS a T .*

Teorema 1.38. *Se S é um semigrupo comutativo, então $S \subset Z(\beta S) = \Lambda(\beta S)$.*

Definição 1.39. *Seja S um semigrupo.*

- (i) *S é fracamente cancelativo à esquerda se para todos $a, b \in S$, $\lambda_a^{-1}[\{b\}] = \{x \in S : ax = b\}$ for finito.*
- (ii) *S é fracamente cancelativo à direita se para todos $a, b \in S$, $\rho_a^{-1}[\{b\}] = \{x \in S : xa = b\}$ for finito.*

Teorema 1.40. (a) *Se S for cancelativo à direita ou à esquerda, então S^* é um subsemigrupo de βS .*

(b) *Se S for fracamente cancelativo à esquerda, então S^* é ideal à esquerda de βS , e se S for cancelativo à direita, então S^* é ideal à direita de βS .*

(c) *S^* é um ideal de βS se e somente se S for fracamente cancelativo à direita e à esquerda.*

Capítulo 2

A Álgebra de $\beta\mathbb{N}$

Este capítulo se devotará a alguns resultados que nos permitirão obter um panorama das estruturas algébricas de $\beta\mathbb{N}$ e suas peculiaridades, utilizando para isso, em alguns casos, o estudo do subsemigrupo $\mathbb{H}$. A maioria resultados da primeira seção podem ser encontrados no capítulo 6, seção 1 de [1], e serão demonstrados aqui pois já se tratam de resultados mais avançados e centrais ao tema desta dissertação.

Como convenção, sempre que for mencionado $\beta\mathbb{N}$, estará sendo considerada a estrutura algébrica da soma $(\beta\mathbb{N}, +)$. Quando for utilizada a estrutura do produto $(\beta\mathbb{N}, \cdot)$, esta será explicitada.

Iniciaremos com alguns resultados encontrados no survey de Neil Hindman [3], buscando exaurir as referências usadas nas demonstrações até que estejam baseadas apenas nos resultados básicos das Preliminares.

2.1 O Semigrupo $\mathbb{H}$

Definição 2.1. $\mathbb{H} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{2^n \mathbb{N}}$.

Vale que $\mathbb{H}$ é um subsemigrupo, utilizando o teorema 1.34: basta notar que se $n \in 2^k \mathbb{N}$, então $n + 2^k \mathbb{N} \subset 2^k \mathbb{N}$. Além disso, $\mathbb{H}$ contém todos os idempotentes de $\beta\mathbb{N}$, pois:

Lema 2.2. *Seja p um idempotente de $\beta\mathbb{N}$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n\mathbb{N} \in p$.*

Demonstração. Considere $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ o homomorfismo canônico. Então, pelo teorema 1.37, tem-se que $\tilde{\varphi} : \beta\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ é um homomorfismo. Assim, $\tilde{\varphi}(p) = \tilde{\varphi}(p + p) = \tilde{\varphi}(p) + \tilde{\varphi}(p)$, logo $\tilde{\varphi}(p) = \bar{0}$. Portanto, $\{\bar{0}\}$ é uma vizinhança de $\tilde{\varphi}(p)$, e assim $\tilde{\varphi}^{-1}[\{\bar{0}\}] \cap \mathbb{N} = n\mathbb{N} \in p$. ■

Definição 2.3. (a) Dado $n \in \mathbb{N}$, define-se $\text{supp}(n) \in \mathcal{P}_f(\omega)$ por $n = \sum_{i \in \text{supp}(n)} 2^i$. Note que está bem definido, pois se trata da expansão binária de n .

(b) $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \omega$ é definida por $\phi(n) = \max(\text{supp}(n))$.

(c) $\theta : \mathbb{N} \rightarrow \omega$ é definida por $\theta(n) = \min(\text{supp}(n))$.

Lema 2.4. $\mathbb{H}$ é um subsemigrupo compacto de $\beta\mathbb{N}$ que possui todos os idempotentes. Além disso, dados $p \in \beta\mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{H}$, $\tilde{\phi}(p+q) = \tilde{\phi}(q)$ e $\tilde{\theta}(p+q) = \tilde{\theta}(p)$.

Demonstração. Já vimos que $\mathbb{H}$ é um subsemigrupo que possui todos os idempotentes. Ele é claramente compacto.

Sejam $p \in \beta\mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{H}$. Dado $m \in \mathbb{N}$, tome $r > \phi(m)$. Então, para todo $n \in 2^r\mathbb{N}$, $\phi(m+n) = \phi(n)$ e $\theta(m+n) = \theta(m)$. Logo, como $2^r\mathbb{N} \in q$,

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(m+q) &= q - \lim_{n \in 2^r\mathbb{N}} \phi(m+n) \\ &= q - \lim_{n \in 2^r\mathbb{N}} \phi(n) \\ &= \tilde{\phi}(q).\end{aligned}$$

Dessa forma, $\tilde{\phi}(p+q) = \lim_{m \rightarrow p} \tilde{\phi}(m+q) = \tilde{\phi}(q)$.

Analogamente, $\tilde{\theta}(p+q) = \tilde{\theta}(p)$. ■

Com esse lema, provaremos dois fatos fundamentais sobre $\beta\mathbb{N}$. O primeiro é este:

Teorema 2.5. $\beta\mathbb{N}$ contém 2^c ideais à esquerda minimais e 2^c ideais à direita minimais. Cada um possui 2^c idempotentes.

Demonstração. Considere $A = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$. Note que $A^* \subset \mathbb{H}$. Como $\phi(2^n) = \theta(2^n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\phi|_A = \theta|_A : A \rightarrow \mathbb{N}$ é bijetora, logo $\tilde{\phi}|_{\bar{A}} = \tilde{\theta}|_{\bar{A}} : \bar{A} \rightarrow \beta\mathbb{N}$ é bijetora. Agora, suponha que $q_1, q_2 \in A^*$ e que $(\beta\mathbb{N} + q_1) \cap (\beta\mathbb{N} + q_2) \neq \emptyset$. Então existem $r, s \in \beta\mathbb{N}$ tais que $r + q_1 = s + q_2$, logo $\tilde{\phi}(q_1) = \tilde{\phi}(r + q_1) = \tilde{\phi}(s + q_2) = \tilde{\phi}(q_2)$, do que $q_1 = q_2$. Como, por 1.26(d), $|A^*| = 2^c$, segue que $\beta\mathbb{N}$ possui 2^c ideais à esquerda minimais disjuntos.

Agora note que como $\mathbb{H}$ é um subsemigrupo que possui todos os idempotentes de $\beta\mathbb{N}$, qualquer idempotente que for minimal em $\mathbb{H}$ o será em $\beta\mathbb{N}$. Assim, dado $q \in A^*$, pelos teoremas 1.15 e 1.16, $q + \mathbb{H}$ possui um idempotente $e(q)$ que é minimal em $\mathbb{H}$, e logo minimal em $\beta\mathbb{N}$, e portanto $e(q) + \beta\mathbb{N}$ é um ideal à direita minimal de $\beta\mathbb{N}$.

Afirmção: Se $q_1, q_2 \in A^*$ são distintos, então $e(q_1) + \beta\mathbb{N} \neq e(q_2) + \beta\mathbb{N}$. Provaremos por contrapositiva. Suponha $e(q_1) + \beta\mathbb{N} = e(q_2) + \beta\mathbb{N}$. Então $e(q_2) \in e(q_1) + \beta\mathbb{N}$, logo $e(q_2) = e(q_1) + e(q_2)$, e portanto $\tilde{\theta}(e(q_2)) = \tilde{\theta}(e(q_1) + e(q_2)) = \tilde{\theta}(e(q_1))$. Porém, $\tilde{\theta}(e(q_2)) \in \tilde{\theta}[q_2 + \mathbb{H}] = \{q_2\}$ e $\tilde{\theta}(e(q_1)) \in \tilde{\theta}[q_1 + \mathbb{H}] = \{q_1\}$, pelo lema 2.4. Assim, $q_1 = q_2$. Dessa forma, $\beta\mathbb{N}$ possui 2^c ideais à direita minimais. Como todo ideal à esquerda (ou à direita) contém um ideal à esquerda (à direita) minimal (1.15(a)); como dois ideais à esquerda (ou à direita) minimais distintos são disjuntos; e como dados L ideal à esquerda minimal e R ideal à direita minimal quaisquer, $L \cap R$ possui um idempotente (1.17(b)); segue que tanto L como R possuem 2^c idempotentes (cada um deles minimal pelo teorema 1.16). ■

Note que, se um semigrupo S possui dois ideais à esquerda disjuntos L_1 e L_2 , então ele não é comutativo - dados $l_1 \in L_1$ e $l_2 \in L_2$, $l_2 l_1 \in L_1$ e $l_1 l_2 \in L_2$. Assim, o que o teorema acima diz, de certa forma, é que $\beta\mathbb{N}$ está “bem longe” de ser comutativo. De fato, seguindo nesta mesma ideia, o próximo fato fundamental sobre $\beta\mathbb{N}$ é este:

Teorema 2.6. $\mathbb{N}$ é o centro de $(\beta\mathbb{N}, +)$ e de $(\beta\mathbb{N}, \cdot)$.

Demonstração. Pelo teorema 1.38, $\mathbb{N}$ está contido nos centros de $(\beta\mathbb{N}, +)$ e de $(\beta\mathbb{N}, \cdot)$.

Considere $A = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$. Sejam $p \in \mathbb{N}^*$ e $q \in A^*$. Pelo lema 2.4, $\tilde{\phi}(p + q) = \tilde{\phi}(q)$. Por outro lado, dados $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $n > m$, temos que $\phi(m + n) = \phi(n)$ ou $\phi(m + n) = \phi(n) + 1$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, $\{n \in \mathbb{N} : \phi(m + n) = \phi(n)\} \in p$ ou $\{n \in \mathbb{N} : \phi(m + n) = \phi(n) + 1\} \in p$ (pois $p \in \mathbb{N}^*$). No primeiro caso, temos que $p \in \text{cl}\{n \in \mathbb{N} : \phi(m + n) = \phi(n)\}$, logo $\tilde{\phi}(m + p) = \tilde{\phi}(p)$. No segundo caso, $\tilde{\phi}(m + p) = \tilde{\phi}(p) + 1$. Temos também que $\{m \in \mathbb{N} : \tilde{\phi}(m + p) = \tilde{\phi}(p)\} \in q$ ou que $\{m \in \mathbb{N} : \tilde{\phi}(m + p) = \tilde{\phi}(p) + 1\} \in q$. Portanto, $\tilde{\phi}(q + p) = \tilde{\phi}(p)$ ou $\tilde{\phi}(q + p) = \tilde{\phi}(p) + 1$. Como $\tilde{\phi}|_{\bar{A}}$ é bijetora e $|A^*| = 2^{\mathfrak{c}}$, então podemos tomar $q \in A^*$ tal que $\tilde{\phi}(q) \notin \{\tilde{\phi}(p), \tilde{\phi}(p) + 1\}$. Assim, $\tilde{\phi}(p + q) = \tilde{\phi}(q) \neq \tilde{\phi}(q + p)$. Destarte, $p + q \neq q + p$ e logo $p \notin Z((\beta\mathbb{N}, +))$.

Agora, dados $m, n \in \mathbb{N}$, $\phi(m \cdot 2^n) = \phi(m) + n = \phi(m) + \phi(2^n)$. Portanto, dados $p \in \mathbb{N}^*$ e $q \in A^*$, temos:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(p \cdot q) &= \lim_{m \rightarrow p} \lim_{2^n \rightarrow q} \phi(m \cdot 2^n) \\ &= \lim_{m \rightarrow p} \lim_{2^n \rightarrow q} (\phi(m) + \phi(2^n)) \\ &= \lim_{m \rightarrow p} (\phi(m) + \tilde{\phi}(q)) \\ &= \tilde{\phi}(p) + \tilde{\phi}(q). \end{aligned}$$

De forma completamente análoga, $\tilde{\phi}(q \cdot p) = \tilde{\phi}(q) + \tilde{\phi}(p)$.

Agora, pelo 1.26(e), como ϕ é finita-por-unitários, $\tilde{\phi}(p) \in \mathbb{N}^*$, logo, como acabamos de provar, $\tilde{\phi}(p) \notin Z((\beta\mathbb{N}, +))$, logo tome $r \in \mathbb{N}^*$ tal que $\tilde{\phi}(p) + r \neq r + \tilde{\phi}(p)$. Novamente, como $\tilde{\phi}|_{\bar{A}}$ é bijetora, seja $q \in A^*$ tal que $\tilde{\phi}(q) = r$. Então temos que $\tilde{\phi}(p \cdot q) = \tilde{\phi}(p) + \tilde{\phi}(q) = \tilde{\phi}(p) + r \neq r + \tilde{\phi}(p) = \tilde{\phi}(q) + \tilde{\phi}(p) = \tilde{\phi}(q \cdot p)$, e assim $p \cdot q \neq q \cdot p$. Ou seja $p \notin Z((\beta\mathbb{N}, \cdot))$. ■

Note que disso segue que, pelo teorema 1.38, $\mathbb{N} = Z((\beta\mathbb{N}, +)) = \Lambda((\beta\mathbb{N}, +))$ e $\mathbb{N} = Z((\beta\mathbb{N}, \cdot)) = \Lambda((\beta\mathbb{N}, \cdot))$.

Agora investigaremos propriedades que tornam o semigrupo $\mathbb{H}$ interessante. O primeiro deles foi extraído da página 110 de [1]. Mas antes precisaremos do seguinte lema (cujo enunciado é um exercício encontrado na página 79):

Lema 2.7. Sejam $(S, \cdot)$ um semigrupo, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, e $p_1, \dots, p_k \in \beta S$. Considere $D \subset \{\emptyset\} \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} S^i$, com $\emptyset \in D$. Suponha que, para cada $\sigma \in D$, há um $A_\sigma \subset S$ de forma que:

- (1) $A_\emptyset \in p_1$;
- (2) $A_\emptyset \subset D$;
- (3) $A_\sigma \in p_{i+1}$ se $\sigma \in D \cap S^i$;
- (4) se $k > 2$, então para cada $i \in \{1, \dots, k-2\}$ e cada $\sigma = (a_1, \dots, a_{i-1}) \in D$, se $a \in A_\sigma$, então $(a_1, \dots, a_{i-1}, a) \in D$.

Considere $P = \{a_1 \cdot \dots \cdot a_k : a_1 \in A_\emptyset \text{ e, para cada } i \in \{2, \dots, k\}, (a_1, \dots, a_{i-1}) \in D \text{ e } a_i \in A_{(a_1, \dots, a_{i-1})}\}$.

Então $P \in p_1 \cdot \dots \cdot p_k$.

Demonstração. Provaremos por indução.

Caso base: $k = 2$. Temos que $P = \{a_1 \cdot a_2 : a_1 \in A_\emptyset, a_1 \in D \text{ e } a_2 \in A_{a_1}\}$. Queremos ver que $P \in p_1 \cdot p_2$, ou seja, que $\{s \in S : s^{-1}P \in p_2\} \in p_1$. Como $A_\emptyset \in p_1$, basta ver que $A_\emptyset \subset \{s \in S : s^{-1}P \in p_2\}$. Logo seja $a_1 \in A_\emptyset$. Queremos ver que $a_1^{-1}P \in p_2$. Como $A_{a_1} \in p_2$, basta ver que $A_{a_1} \subset a_1^{-1}P$. Logo seja $a_2 \in A_{a_1}$. Note que $a_1 \cdot a_2 \in P$, como desejado.

Passo indutivo: $k > 2$. Tome P como no enunciado. Queremos ver que $\{s \in S : s^{-1}P \in p_k\} \in p_1 \cdot \dots \cdot p_{k-1}$. Pela hipótese indutiva, $\{a_1 \cdot \dots \cdot a_{k-1} : a_1 \in A_\emptyset \text{ e, para cada } i \in \{2, \dots, k-1\}, (a_1, \dots, a_{i-1}) \in D \text{ e } a_i \in A_{(a_1, \dots, a_{i-1})}\} \in p_1 \cdot \dots \cdot p_{k-1}$. Logo basta ver que $\{a_1 \cdot \dots \cdot a_{k-1} : a_1 \in A_\emptyset \text{ e, para cada } i \in \{2, \dots, k-1\}, (a_1, \dots, a_{i-1}) \in D \text{ e } a_i \in A_{(a_1, \dots, a_{i-1})}\} \subset \{s \in S : s^{-1}P \in p_k\}$. Logo seja $a_1 \cdot \dots \cdot a_{k-1}$ tal que $a_1 \in A_\emptyset$ e, para cada $i \in \{2, \dots, k-1\}, (a_1, \dots, a_{i-1}) \in D$ e $a_i \in A_{(a_1, \dots, a_{i-1})}$. Note que, em particular, $(a_1, \dots, a_{k-2}) \in D$ e $a_{k-1} \in A_{(a_1, \dots, a_{k-2})}$, e portanto $(a_1, \dots, a_{k-1}) \in D$. Queremos ver que $a_1 \cdot \dots \cdot a_{k-1}^{-1}P \in p_k$. Sabemos que $A_{(a_1, \dots, a_{k-1})} \in p_k$. Logo basta ver que $A_{(a_1, \dots, a_{k-1})} \subset a_1 \cdot \dots \cdot a_{k-1}^{-1}P$. Seja $a \in A_{(a_1, \dots, a_{k-1})}$. Note que a satisfaz os requisitos necessários de forma que $a_1 \cdot \dots \cdot a_{k-1} \cdot a \in P$, como desejávamos. ■

Teorema 2.8. $\mathbb{H}$ contém uma sequência infinita decrescente de idempotentes.

Demonstração. Tome $(A_n)_{n \geq 1}$ uma sequência crescente de subconjuntos de $\mathbb{N}$ tal que $A_{n+1} \setminus A_n$ é infinito para cada $n \geq 1$. Considere, para cada n , $S_n = \{m \in \mathbb{N} : \text{supp}(m) \subset A_n\}$. Note que, para cada $n, r \in \mathbb{N}$, se $k, m \in 2^r \mathbb{N} \cap S_n$ e $\text{supp}(k) \cap \text{supp}(m) = \emptyset$, então $k + m \in 2^r \mathbb{N} \cap S_n$. Logo, pelo teorema 1.34, $T_n = \overline{S_n} \cap \mathbb{H}$ é um subsemigrupo de $\beta\mathbb{N}$ (usando $\mathcal{A} = \{S_n \cap 2^r \mathbb{N} : r \in \mathbb{N}\}$). Note que $T_n \subset T_{n+1}$, pois $S_n \subset S_{n+1}$, para todo $n \geq 1$. A partir disso, construiremos uma sequência injetora $(e_n)_{n \geq 1}$ de idempotentes tal que $e_{n+1} \leq e_n$ e $e_n \in K(T_n)$ para todo $n \geq 1$.

Tome e_1 qualquer idempotente minimal em T_1 . Suponha recursivamente agora que $\{e_1, \dots, e_m\}$ já foi escolhido. Pelo 1.17(a), existe $e_{m+1} \in K(T_{m+1})$ tal que $e_{m+1} \leq e_m$. Mostraremos que $e_m \notin K(T_{m+1})$, do que $e_m \neq e_{m+1}$.

Para ver isso, tome $x \in \mathbb{N}^* \cap \overline{\{2^n : n \in A_{m+1} \setminus A_m\}}$ qualquer. Considere $M = \{r + 2^n + s : r, s \in \mathbb{N}, n \in A_{m+1} \setminus A_m \text{ e } \max(\text{supp}(r)) < n < \min(\text{supp}(s))\}$. Observe que para cada $r + 2^n + s \in M$, $n \in \text{supp}(r + 2^n + s) \setminus A_m$, logo $r + 2^n + s \notin S_m$. Ou seja, $M \cap S_m = \emptyset$, e logo $e_m \notin \overline{M}$. Agora, para ver que $e_m \notin K(T_{m+1})$, veremos que $\overline{M} \supset K(T_{m+1})$. Para isso, mostraremos que $\overline{M}$ contém o ideal $T_{m+1} + x + T_{m+1}$ de T_{m+1} . Com este fim, mostraremos que, para todos $y, z \in \mathbb{H}$, $y + x + z \in \overline{M}$. Assim, queremos ver que $M \in y + x + z$. Usaremos o lema 2.7. Considere $D = \{\emptyset\} \cup \mathbb{N} \cup \{(r, 2^n) : r \in \mathbb{N}, n \in A_{m+1} \setminus A_m \text{ e } \max(\text{supp}(r)) < n\}$. Defina $A_\emptyset = \mathbb{N}$, $A_r = \{2^n : n \in A_{m+1} \setminus A_m \text{ e } \max(\text{supp}(r)) < n\}$ para cada $r \in \mathbb{N}$, e $A_{(r, 2^n)} = \{s \in \mathbb{N} : n < \min(\text{supp}(s))\}$, para cada $(r, 2^n) \in \mathbb{N}^2$ tal que $n \in A_{m+1} \setminus A_m$ e $\max(\text{supp}(r)) < n$. Deste modo, temos que: $A_\emptyset \in y$; $A_\emptyset \subset D$; para cada $r \in D \cap \mathbb{N}$, como $x \in \mathbb{N}^* \cap \overline{\{2^n : n \in A_{m+1} \setminus A_m\}}$, $A_r \in x$; para cada $(r, 2^n) \in D \cap \mathbb{N}^2$, como $z \in \mathbb{H} \subset \mathbb{N}^*$, $A_{(r, 2^n)} \in z$; e por fim, dado $r \in D$, se $2^n \in A_r$, então $(r, 2^n) \in D$. Portanto podemos de fato aplicar o lema 2.7 e obter que $M \in y + x + z$. ■

A segunda propriedade é o Teorema 3.5 de [3].

Teorema 2.9. *O semigrupo $\mathbb{H}$ é a união disjunta de $\mathfrak{c}$ ideais à direita compactos.*

Demonstração. Seja $\{E_\sigma : 0 < \sigma < \mathfrak{c}\}$ uma família quase disjunta de subconjuntos de ω . Para cada σ , defina $B_\sigma = \{\sum_{n \in F} 2^n : F \in \mathcal{P}_f(\omega) \text{ e } \min F \in E_\sigma\}$. Defina então $R_\sigma = \mathbb{H} \cap \overline{B_\sigma}$, e $R_0 = \mathbb{H} \setminus \bigcup \{R_\sigma : 0 < \sigma < \mathfrak{c}\}$. Vale que para cada $0 < \sigma < \mathfrak{c}$, R_σ é aberto e fechado em $\mathbb{H}$, logo R_σ é compacto para cada $\sigma < \mathfrak{c}$.

Agora, vale que $\{\mathbb{N} \setminus B_\sigma : 0 < \sigma < \mathfrak{c}\} \cup \{2^n \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\}$ tem a p.i.f. Para ver isso, como $\{2^n \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\}$ tem a p.i.f., basta ver que dados $0 < \sigma_1, \dots, \sigma_k < \mathfrak{c}$ e $m \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{N} \setminus B_{\sigma_1}) \cap \dots \cap (\mathbb{N} \setminus B_{\sigma_k}) \cap 2^m \mathbb{N} \neq \emptyset$. Para isso, tome $\delta \in \mathfrak{c} \setminus \{0, \sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ e seja $l \in \omega$ tal que $E_\delta \cap E_{\sigma_i} \subset \{0, \dots, l\}$, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Assim, tome $F \in \mathcal{P}_f(\omega)$ tal que $\min F \in E_\delta$ e $\min F > l, m$. Então temos que $\sum_{n \in F} 2^n \in (\mathbb{N} \setminus B_{\sigma_1}) \cap \dots \cap (\mathbb{N} \setminus B_{\sigma_k}) \cap 2^m \mathbb{N}$, como queríamos.

Logo, se $x \in \bigcap (\{\overline{\mathbb{N} \setminus B_\sigma} : 0 < \sigma < \mathfrak{c}\} \cup \{\overline{2^n \mathbb{N}} : n \in \mathbb{N}\})$, então $x \in R_0$. Portanto $R_0 \neq \emptyset$. Além disso, dados $0 < \sigma, \tau < \mathfrak{c}$ distintos, tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $E_\sigma \cap E_\tau \subset \{0, \dots, n-1\}$. Então, se $\sum_{n \in F} 2^n \in B_\sigma \cap B_\tau$, $\min F \in \{0, \dots, n-1\}$; ou seja, $B_\sigma \cap B_\tau \cap 2^n \mathbb{N} = \emptyset$. Destarte, $R_\sigma \cap R_\tau = \emptyset$ (pois se $x \in R_\sigma \cap R_\tau$, então $B_\sigma \cap B_\tau \cap 2^n \mathbb{N} \in x$). Temos então que $\{R_\sigma : \sigma < \mathfrak{c}\}$ é realmente uma coleção de compactos dois-a-dois disjuntos.

Agora veremos que R_σ é um ideal à direita de $\mathbb{H}$. Sejam $q \in R_\sigma$ e $p \in \mathbb{H}$. $\mathbb{H}$ é subsemigrupo, logo $q + p \in \mathbb{H}$.

Primeiramente, suponha que $\sigma > 0$. Queremos ver que $B_\sigma \in q + p$, ou seja, $\{x \in \mathbb{N} : -x + B_\sigma \in p\} \in q$. Então basta ver que $B_\sigma \subset \{x \in \mathbb{N} : -x + B_\sigma \in p\}$. Logo seja $x = \sum_{n \in F} 2^n$ tal que $F \in \mathcal{P}_f(\omega)$ e $\min F \in E_\sigma$. Tome $m = \min F + 1$. Então, dado qualquer $y \in 2^m \mathbb{N}$, $\min(\text{supp}(x + y)) = \min F$, logo $x + y \in B_\sigma$. Isto é, $2^m \mathbb{N} \subset -x + B_\sigma$. Como $2^m \mathbb{N} \in p$, segue a tese.

Por fim, temos o caso em que $\sigma = 0$. Suponha por absurdo que $q + p \notin R_0$, ou seja, $q + p \in R_\tau$ para algum $\tau > 0$. Então $B_\tau \in q + p$, ou seja, $\{x \in \mathbb{N} : -x + B_\tau \in p\} \in q$. Como $B_\tau \notin q$, então tome $x \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin B_\tau$ e $-x + B_\tau \in p$. Tome $F \in \mathcal{P}_f(\omega)$ tal que $\min F \notin E_\tau$ e $x = \sum_{n \in F} 2^n$. Seja $m = \min F + 1$. $2^m \mathbb{N} \cap (-x + B_\tau) \in p$, logo tome y nessa interseção. Então $x + y \in B_\tau$. Porém, como acima, note que $\min(\text{supp}(x + y)) = \min F \notin E_\tau$, e portanto $x + y \notin B_\tau$. Contradição. Deste modo, $q + p \in R_0$. ■

Agora veremos que cópias algébricas e topológicas de $\mathbb{H}$ são abundantes em $\mathbb{N}^*$.

Teorema 2.10. *Seja $(x_n)_{n \geq 1}$ uma sequência em $\mathbb{N}$ com a unicidade das somas finitas. Então $\bigcap_{m \geq 1} \overline{FS((x_n)_{n \geq m})}$ é algébrica e topologicamente isomorfo a $\mathbb{H}$, pela mesma função.*

Demonstração. Defina $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ por $f(\sum_{n \in F} 2^{n-1}) = \sum_{n \in F} x_n$. Note que de fato f está bem-definida sobre $\mathbb{N}$ e, como $(x_n)_{n \geq 1}$ satisfaz a unicidade das somas finitas, f é injetora. Considere $\tilde{f} : \beta\mathbb{N} \rightarrow \beta\mathbb{N}$ a extensão contínua de f e defina $\varphi = \tilde{f}|_{\mathbb{H}}$. Observe que, para cada $m \in \mathbb{N}$, $f[2^{m-1}\mathbb{N}] = FS((x_n)_{n \geq m})$, logo $\tilde{f}[2^{m-1}\mathbb{N}] = \overline{FS((x_n)_{n \geq m})}$. Assim - usando que $\tilde{f}$ é injetora - $\varphi[\mathbb{H}] = \tilde{f}[\mathbb{H}] = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \tilde{f}[2^{m-1}\mathbb{N}] = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \overline{FS((x_n)_{n \geq m})}$. Assim, φ é uma bijeção contínua entre $\mathbb{H}$ e $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \overline{FS((x_n)_{n \geq m})}$; como ambos são compactos Hausdorff, é um homeomorfismo.

Resta ver que φ é um homomorfismo. Para isso, lembraremos que $\beta\mathbb{N}$ é um semigrupo topológico à direita e que $\mathbb{N} = \Lambda(\beta\mathbb{N})$. Sejam $p, q \in \mathbb{H}$. Mostraremos que $\varphi(p + q) = \varphi(p) + \varphi(q)$, ou seja, que $\varphi \circ \rho_q(p) = \rho_{\varphi(q)} \circ \varphi(p)$. Basta ver que estas duas funções contínuas são idênticas sobre $\mathbb{N}$. Seja então $x \in \mathbb{N}$. Quero ver que $\varphi(x + q) = \varphi(x) + \varphi(q)$, ou seja, que $\varphi \circ \lambda_x(q) = \lambda_{\varphi(x)} \circ \varphi(q)$. Tome $F \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ tal que $x = \sum_{n \in F} 2^{n-1}$, e seja $m = \max F$. Como $q \in \overline{2^m \mathbb{N}}$, basta ver que $\varphi \circ \lambda_x$ e $\lambda_{\varphi(x)} \circ \varphi$ são idênticas sobre $2^m \mathbb{N}$. Seja $y \in 2^m \mathbb{N}$, e tome $G \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ tal que $y = \sum_{n \in G} 2^{n-1}$. Note que $\min G > m$, e portanto $x + y = \sum_{n \in F \cup G} 2^{n-1}$. Assim, $\varphi \circ \lambda_x(y) = \varphi(x + y) = f(x + y) = f(\sum_{n \in F \cup G} 2^{n-1}) = \sum_{n \in F \cup G} x_n = \sum_{n \in F} x_n + \sum_{n \in G} x_n = f(\sum_{n \in F} 2^{n-1}) + f(\sum_{n \in G} 2^{n-1}) = f(x) + f(y) = \varphi(x) + \varphi(y) = \lambda_{\varphi(x)} \circ \varphi(y)$. ■

2.2 O Ideal $\mathbb{N}^* + \mathbb{N}^*$, o Fecho de $K(\beta\mathbb{N})$, $\mathcal{U}_\kappa(S)$, Somas e Produtos

O ponto final desta seção é uma consequência do Teorema 3.7 de [3]: embora $\mathbb{N}^* + \mathbb{N}^*$ seja um ideal de $\beta\mathbb{N}$, e portanto $K(\beta\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}^* + \mathbb{N}^*$, tem-se que $\text{cl } K(\beta\mathbb{N}) \not\subset \mathbb{N}^* + \mathbb{N}^*$. Para isso, precisaremos de resultados sobre a álgebra de $\mathcal{U}_\kappa(S)$, e também sobre as relações entre somas e produtos em $\beta\mathbb{N}$ – ambos assuntos interessantes por si e com consequências em outros resultados.

Lema 2.11. $\mathbb{N}^*$ é um ideal à esquerda de $\beta\mathbb{Z}$.

Demonstração. Sejam $p \in \mathbb{N}^*$ e $q \in \beta\mathbb{Z}$. Queremos ver que $q + p \in \overline{\mathbb{N}}$ e que $q + p \notin \mathbb{N}$. Suponha primeiramente que $q + p = a \in \mathbb{N}$. Ou seja, $q + p = \{A \subset \mathbb{Z} : a \in A\}$. Em particular, $\{a\} \in q + p$, ou seja, $\{x \in \mathbb{Z} : -x + \{a\} \in p\} \in q$, e portanto existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $-x + \{a\} = \{-x + a\} \in p$. Contradição, pois $p \in \mathbb{N}^*$.

Resta ver que $\{x \in \mathbb{Z} : -x + \mathbb{N} \in p\} \in q$. Veremos que $\{x \in \mathbb{Z} : -x + \mathbb{N} \in p\} = \mathbb{Z}$ (note que esta é a única estratégia, pois q é arbitrário em $\beta\mathbb{Z}$). Logo tome $x \in \mathbb{Z}$ e suponha que $-x + \mathbb{N} \notin p$. Então $-x + \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \in p$, logo $\mathbb{N} \cap (-x + \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) \in p$, porém $\mathbb{N} \cap (-x + \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) = \{n \in \mathbb{N} : n \leq -x\}$ que é finito. Contradição pois $p \in \mathbb{N}^*$. ■

Corolário 2.12. $\mathbb{N}^* + \mathbb{N}^*$ é ideal de $\beta\mathbb{N}$.

Demonstração. Pelo lema 2.11, temos que:

$\beta\mathbb{N} + (\mathbb{N}^* + \mathbb{N}^*) = (\beta\mathbb{N} + \mathbb{N}^*) + \mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}^*$. Por outro lado, $(\mathbb{N}^* + \mathbb{N}^*) + \mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}^*$, e, como $\mathbb{N} \subset Z(\beta\mathbb{N})$, $(\mathbb{N}^* + \mathbb{N}^*) + \mathbb{N} = \mathbb{N} + (\mathbb{N}^* + \mathbb{N}^*) = (\mathbb{N} + \mathbb{N}^*) + \mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}^*$; portanto $(\mathbb{N}^* + \mathbb{N}^*) + \beta\mathbb{N} \subset \mathbb{N}^*$. ■

(Observe que, com um raciocínio ainda mais simples, $\mathbb{N}^*$ é um ideal de $\beta\mathbb{N}$ também.)

Note, pelo teorema 1.16, que $\{p \in \beta\mathbb{N} : p \text{ é idempotente minimal}\} \subset K(\beta\mathbb{N})$. Então, mais forte que $\text{cl } K(\beta\mathbb{N}) \not\subset \mathbb{N}^* + \mathbb{N}^*$, teremos que $\text{cl}\{p \in \beta\mathbb{N} : p \text{ é idempotente minimal}\} \not\subset \mathbb{N}^* + \mathbb{N}^*$. Enunciemos e provemos então o Teorema 3.7 de [3]:

Teorema 2.13. *Seja $M = \text{cl}\{p \in \beta\mathbb{N} : p \text{ é idempotente minimal de } (\beta\mathbb{N}, +)\}$. Então $M \setminus (\mathbb{N}^* + \mathbb{N}^*) \neq \emptyset$.*

Demonstração. Pelo Teorema 5.4 de [5], M é um ideal à esquerda de $(\beta\mathbb{N}, \cdot)$. Em particular, é um subsemigrupo compacto, logo tome $q \in M$ tal que $q = q \cdot q$. Pelo lema 2.2, temos que $\{p \in \beta\mathbb{N} : p \text{ é idempotente minimal}\} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{n\mathbb{N}}$, logo $M \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{n\mathbb{N}}$. Assim, $n\mathbb{N} \in q$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, pelo Teorema 5.3 de [6], $q = q \cdot q \notin \mathbb{N}^* + \mathbb{N}^*$. ■

Nosso objetivo é agora chegar aos resultados citados, mas não provados, no teorema acima. Primeiramente, tomaremos o artigo [6] para ver sob que casos um produto em $\beta\mathbb{N}$ pode ser escrito como uma soma.

Primeiramente, enunciaremos aqui um lema sobre cancelamento. Note que como $\mathbb{N}$ é o centro de $(\beta\mathbb{N}, +)$ e de $(\beta\mathbb{N}, \cdot)$, então os cancelamentos à direita a seguir também valem à esquerda.

Lema 2.14. *Sejam $p, q \in \beta\mathbb{N}$ e $n, m \in \mathbb{N}$.*

(a) *Se $p + m = q + m$, então $p = q$.*

(b) *Se $p \cdot m = q \cdot m$, então $p = q$.*

(c) *Se $m + p = n + p$, então $m = n$.*

(d) *Se $m \cdot p = n \cdot p$, então $m = n$.*

Demonstração. (a): Note que a função $r_m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (definida por $r_m(n) = n + m$) é injetora, e portanto sua extensão contínua a $\beta\mathbb{N}$, ρ_m , é injetora também. Assim segue a tese.

(b): Demonstração completamente análoga a (a).

(c): Suponha s.p.g. que $m \leq n$. Temos que $\mathbb{N} = \bigcup_{i=0}^n -i + (n+1)\mathbb{N}$ é uma união disjunta; tome $i \in \{0, \dots, n\}$ tal que $-i + (n+1)\mathbb{N} \in m + p = n + p$. Então $-m - i + (n+1)\mathbb{N} \in p$ e $-n - i + (n+1)\mathbb{N} \in p$, logo $m + i \equiv n + i \pmod{n+1}$, ou seja, $m \equiv n \pmod{n+1}$. Como $m \leq n$, então $m = n$.

(d): Suponha que $m \neq n$. Para cada $x \in \mathbb{N}$ e b primo, seja $c(b, x)$ o número de fatores b em x (isto é, $c(b, x)$ é o maior $a \in \mathbb{N}$ tal que $b^a | n$). Como $n \neq m$, tome b primo tal que $c(b, n) \neq c(b, m)$, e suponha s.p.g. que $c(b, n) < c(b, m)$. Defina $d = c(b, m) + 1$ e tome $i \in \{0, \dots, d-1\}$ tal que $A = \{x \in \mathbb{N} : c(b, x) \equiv i \pmod{d}\} \in p$. Temos então que $nA \in n \cdot p$ e $mA \in m \cdot p$. Como $n \cdot p = m \cdot p$, então podemos tomar $y \in nA \cap mA$. Portanto vale que $c(b, y) \equiv i + c(b, n) \pmod{d}$, e $c(b, y) \equiv i + c(b, m) \pmod{d}$; logo $c(b, n) \equiv c(b, m) \pmod{d}$ e $c(b, n) < c(b, m) < d$. Contradição. ■

Teorema 2.15. *Sejam $p, r \in \mathbb{N}^*$, $t, s \in \beta\mathbb{N}$, e $m, n \in \mathbb{N}$. Se $t + p = m \cdot r$ e $s + p = n \cdot r$, então $m = n$.*

Demonstração. Suponha, s.p.g., que $m < n$. Seja $\gamma = \log_n m$, e note que $0 \leq \gamma < 1$, de modo que podemos tomar $d \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma < 1 - \frac{2}{d}$. Note que $d \geq 3$. Para cada $i \in \mathbb{Z}$, definimos $A_i = \{x \in \mathbb{N} : \lfloor d \cdot \log_n x \rfloor \equiv i \pmod{2d}\}$. Observe que $A_i = A_j$ se e somente se $i \equiv j \pmod{2d}$, e $A_i \cap A_j = \emptyset$ caso contrário. Além disso, caso $i \in \{0, \dots, 2d-1\}$, temos a seguinte equivalência: $x \in A_i \Leftrightarrow \lfloor d \cdot \log_n x \rfloor \equiv i \pmod{2d} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ tal que $n^{2k+\frac{i}{d}} \leq x < n^{2k+\frac{i+1}{d}}$, de forma que $A_i = \bigcup_{k \geq 0} \{x \in \mathbb{N} : n^{2k+\frac{i}{d}} \leq x < n^{2k+\frac{i+1}{d}}\}$.

Será necessário usar o seguinte fato: dados $i \in \mathbb{Z}$ e $z \in \mathbb{N}$, $(-z + A_i) \setminus (A_i \cup A_{i-1})$ é finito. Demonstraremos isso agora: primeiramente tome $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{z}{n^{\frac{1}{d}-1}} \leq n^{2k+\frac{i-1}{d}}$, e defina $u = n^{2k+\frac{i}{d}}$. Mostraremos então que, se $y \in (-z + A_i)$ e $y \geq u$, então $y \in (A_i \cup A_{i-1})$. Tome $x \in A_i$

tal que $z + y = x$, e observe que, como $x \geq y \geq u$, então $n^{2v+\frac{i}{d}} \leq x < n^{2v+\frac{i+1}{d}}$ para algum $v \geq k$. Como $z \leq n^{2k+\frac{i-1}{d}} \cdot (n^{\frac{1}{d}} - 1) \leq n^{2v+\frac{i-1}{d}} \cdot (n^{\frac{1}{d}} - 1) = n^{2v+\frac{i}{d}} - n^{2v+\frac{i-1}{d}}$, então $n^{2v+\frac{i-1}{d}} \leq x - z = y < x < n^{2v+\frac{i+1}{d}}$. Portanto, $2dv + i - 1 \leq d \cdot \log_n y < 2dv + i + 1$, e assim $y \in A_i \cup A_{i-1}$.

Agora, vale que $\mathbb{N} = \bigcup_{i=0}^{2d-1} A_i$, logo tome $i \in \{0, \dots, 2d-1\}$ tal que $A_i \in r$. Então $nA_i \in n \cdot r = s + p$, logo $\{x \in \mathbb{N} : -x + nA_i \in p\} \in s$, logo tome $z \in \mathbb{N}$ tal que $-z + nA_i \in p$. Similarmente, $mA_i \in m \cdot p = t + p$, logo tome $v \in \mathbb{N}$ tal que $-v + mA_i \in p$. Vale que $nA_i \subset A_{i+d}$ (pois se $n^{2k+\frac{i}{d}} \leq x < n^{2k+\frac{i+1}{d}}$, então $n^{2k+\frac{i+d}{d}} \leq n \cdot x < n^{2k+\frac{i+d+1}{d}}$), logo $-z + A_{i+d} \in p$. Como visto acima, $(-z + A_{i+d}) \setminus (A_{i+d} \cup A_{i+d-1})$ é finito. Como $(-z + A_{i+d}) \setminus (A_{i+d} \cup A_{i+d-1}) = (-z + A_{i+d}) \cap (\mathbb{N} \setminus A_{i+d}) \cap (\mathbb{N} \setminus A_{i+d-1})$ e $-z + A_{i+d} \in p$, então podemos tomar $j \in \{i+d-1, i+d\}$ tal que $A_j \in p$. Veremos agora que $mA_i \subset \bigcup_{u=i}^{i+d-2} A_u$. Seja $x \in A_i$ e tome $k \geq 0$ tal que $n^{2k+\frac{i}{d}} \leq x < n^{2k+\frac{i+1}{d}}$. Temos então: $n^{2k+\frac{i}{d}} \leq x \leq m \cdot x = n^\gamma \cdot x \leq n^{2k+\frac{i+1}{d}+\gamma} < n^{2k+\frac{i+1}{d}+1-\frac{2}{d}} = n^{2k+\frac{i+d-2+1}{d}}$, do que segue a afirmação.

Desse modo, $-v + mA_i \subset \bigcup_{u=i}^{i+d-2} -v + A_u$ e $-v + mA_i \in p$, logo tome $u \in \{i, \dots, i+d-2\}$ tal que $-v + A_u \in p$. Similarmente a acima, como $(-v + A_u) \setminus (A_u \cup A_{u-1})$ é finito, então $A_u \in p$ ou $A_{u-1} \in p$. Portanto existe $w \in \{i-1, \dots, i+d-2\}$ tal que $A_w \in p$. Destarte, $A_w \cap A_j \neq \emptyset$, e assim $j \equiv w \pmod{2d}$. Porém, como $j \in \{i+d-1, i+d\}$ e $w \in \{i-1, \dots, i+d-2\}$, isso implicaria que existem $a, b \in \{0, \dots, d+1\}$ distintos tais que $a \equiv b \pmod{2d}$. Como $d > 2$, isso é uma contradição. ■

Teorema 2.16. *Sejam $p, r \in \beta\mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}$. Então existe $s \in \beta\mathbb{N}$ tal que $m + p = s \cdot r$ se e somente se para cada $A \in p$ e cada função $f : \mathbb{N} \rightarrow r$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(m + A) \cap (n \cdot f(n)) \neq \emptyset$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$): Sejam $A \in p$ e $f : \mathbb{N} \rightarrow r$. Então $m + A \in m + p = s \cdot r$, logo

$\{n \in \mathbb{N} : n^{-1}(m + A) \in r\} \in s$; tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $n^{-1}(m + A) \in r$. Então $n^{-1}(m + A) \cap f(n) \in r$, e assim $\emptyset \neq (m + A) \cap (n \cdot f(n))$.

($\Leftarrow$): Para cada $A \in p$ e cada $f : \mathbb{N} \rightarrow r$, defina $C(A, f) = \{n \in \mathbb{N} : (m + A) \cap (n \cdot f(n)) \neq \emptyset\}$. Por hipótese, $C(A, f) \neq \emptyset$. Afirmação: $\{C(A, f) : A \in p \text{ e } f : \mathbb{N} \rightarrow r\}$ possui a p.i.f. Para ver isso, sejam $A_1, \dots, A_k \in p$ e $f_1, \dots, f_k : \mathbb{N} \rightarrow r$. Defina $A = \bigcap_{i=1}^k A_i$ e $f : \mathbb{N} \rightarrow r$ por $f(n) = \bigcap_{i=1}^k f_i(n)$. Note que, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, se $x \in C(A, f)$, então $\emptyset \neq (m + A) \cap (x \cdot f(x)) = (m + \bigcap_{i=1}^k A_i) \cap (x \cdot \bigcap_{i=1}^k f_i(x)) \subset (\bigcap_{i=1}^k m + A_i) \cap (\bigcap_{i=1}^k x \cdot f_i(x)) \subset (m + A_j) \cap (x \cdot f_j(x))$, de forma que $x \in C(A_j, f_j)$. Ou seja $\emptyset \neq C(A, f) \subset \bigcap_{i=1}^k C(A_i, f_i)$, e assim vale a afirmação.

Desse modo, tome $s \in \beta\mathbb{N}$ tal que $\{C(A, f) : A \in p \text{ e } f : \mathbb{N} \rightarrow r\} \subset s$. Afirmação: $m + p = s \cdot r$. Suponha que não. Tome então $A \in (m + p) \setminus (s \cdot r)$. Temos que $-m + A \in p$ e $\mathbb{N} \setminus A \in s \cdot r$, logo $B = \{n \in \mathbb{N} : n^{-1}(\mathbb{N} \setminus A) \in r\} \in s$. Defina então $f : \mathbb{N} \rightarrow r$ por $f(n) = n^{-1}(\mathbb{N} \setminus A)$ se $n \in B$ e $f(n) = \mathbb{N}$ caso contrário. Vale que $C(-m + A, f) \in s$, logo $B \cap C(-m + A, f) \neq \emptyset$; tome n nessa

interseção. Temos então que $\emptyset \neq (m + (-m + A)) \cap (n \cdot f(n)) \subset A \cap (n \cdot (n^{-1}(\mathbb{N} \setminus A))) \subset A \cap (\mathbb{N} \setminus A)$, uma contradição. ■

Teorema 2.17. *Sejam $p, r \in \beta\mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então existe $q \in \beta\mathbb{N}$ tal que $q + p = n \cdot r$ se e somente se para cada $A \in r$ e cada $f : \mathbb{N} \rightarrow p$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(m + f(m)) \cap (nA) \neq \emptyset$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$): Sejam $A \in r$ e $f : \mathbb{N} \rightarrow p$. Então $nA \in n \cdot r = q + p$, ou seja, $\{m \in \mathbb{N} : -m + nA \in p\} \in q$, logo tome m tal que $-m + nA \in p$. Logo $f(m) \cap (-m + nA) \in p$, e assim $\emptyset \neq (m + f(m)) \cap nA$.

($\Leftarrow$): Para cada $A \in r$ e $f : \mathbb{N} \rightarrow p$, defina $C(A, f) = \{m \in \mathbb{N} : nA \cap (m + f(m)) \neq \emptyset\}$. Por hipótese, $C(A, f) \neq \emptyset$. Afirmação: $\{C(A, f) : A \in r \text{ e } f : \mathbb{N} \rightarrow p\}$ possui a p.i.f. Para ver isso, sejam $A_1, \dots, A_k \in r$ e $f_1, \dots, f_k : \mathbb{N} \rightarrow p$. Defina $A = \bigcap_{i=1}^k A_i$ e $f : \mathbb{N} \rightarrow p$ por $f(m) = \bigcap_{i=1}^k f_i(m)$. Note que, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, se $x \in C(A, f)$, então $\emptyset \neq (m + f(m)) \cap (xA) = (m + \bigcap_{i=1}^k f_i(m)) \cap (x \cdot \bigcap_{i=1}^k A_i) \subset (\bigcap_{i=1}^k (m + f_i(m))) \cap (\bigcap_{i=1}^k xA_i) \subset (m + f_j(m)) \cap (xA_j)$, de forma que $x \in C(A_j, f_j)$. Ou seja $\emptyset \neq C(A, f) \subset \bigcap_{i=1}^k C(A_i, f_i)$, e assim vale a afirmação.

Desse modo, tome $q \in \beta\mathbb{N}$ tal que $\{C(A, f) : A \in r \text{ e } f : \mathbb{N} \rightarrow p\} \subset q$. Afirmação: $q + p = n \cdot r$. Suponha que não. Tome então $A \in (n \cdot r) \setminus (q + p)$. Temos que $n^{-1}A \in r$ e $\mathbb{N} \setminus A \in q + p$, logo $B = \{m \in \mathbb{N} : -m + \mathbb{N} \setminus A \in p\} \in q$. Defina então $f : \mathbb{N} \rightarrow p$ por $f(m) = -m + \mathbb{N} \setminus A$ se $m \in B$ e $f(m) = \mathbb{N}$ caso contrário. Vale que $C(n^{-1}A, f) \in q$, logo $B \cap C(n^{-1}A, f) \neq \emptyset$; tome m nessa interseção. Temos então que $\emptyset \neq (n \cdot (n^{-1}A)) \cap (m + f(m)) \subset A \cap (m + (-m + \mathbb{N} \setminus A)) \subset A \cap (\mathbb{N} \setminus A)$, uma contradição. ■

Lema 2.18. *Sejam $p, q, r, s \in \beta\mathbb{N}$. Então $q + p \neq s \cdot r$ se e somente se existem $B \in q$, $C \in s$, $f : B \rightarrow p$ e $g : C \rightarrow r$ tais que $(m + f(m)) \cap (n \cdot g(n)) = \emptyset$ para todos $m \in B$ e $n \in C$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$): Tome $A \in (q + p) \setminus (s \cdot r)$. Considere $B = \{x \in \mathbb{N} : -x + A \in p\} \in q$ e $C = \{x \in \mathbb{N} : x^{-1}(\mathbb{N} \setminus A) \in r\} \in s$. Defina $f : B \rightarrow p$ por $f(m) = -m + A$ e $g : C \rightarrow r$ por $g(n) = n^{-1}\mathbb{N} \setminus A$. Temos então que, dados $m \in B$ e $n \in C$, que $(m + f(m)) \cap (n \cdot g(n)) = (m + (-m + A)) \cap (n \cdot (n^{-1}(\mathbb{N} \setminus A))) \subset A \cap (\mathbb{N} \setminus A) = \emptyset$.

($\Leftarrow$): Mostraremos que $(q + p) \setminus (s \cdot r) \neq \emptyset$. Seja $D = \bigcup_{m \in B} (m + f(m))$. Pelo teorema 1.31(d), vale que $D \in q + p$. Afirmação: $D \notin s \cdot r$. Suponha o contrário. Considere $E = \{x \in \mathbb{N} : x^{-1}D \in r\}$. $E \in s$, logo tome $n \in E \cap C$. Como $n^{-1}D \in r$, tome $x \in n^{-1}D \cap g(n)$. Temos que $nx \in D$, logo tome $m \in B$ tal que $nx \in (m + f(m))$. Assim, $nx \in (m + f(m)) \cap (n \cdot g(n))$, uma contradição. ■

Teorema 2.19. *Sejam $p, r \in \mathbb{N}^*$, $G = \{q \in \mathbb{N}^* : q + p = s \cdot r \text{ para algum } s \in \mathbb{N}^*\}$, e $H = \{m \in \mathbb{N} : m + p = t \cdot r \text{ para algum } t \in \beta\mathbb{N}\}$. São equivalentes:*

(a) $G \neq \emptyset$.

(b) $|H| = \omega$.

(c) $|G| = 2^\epsilon$.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b): Tome $q \in G$. Tome $s \in \mathbb{N}^*$ tal que $q + p = s \cdot r$. Suponha por absurdo que H é finito. Considere $B = \mathbb{N} \setminus H$ e $C = \{n \in \mathbb{N} : \text{para todo } t \in \beta\mathbb{N}, t + p \neq n \cdot r\}$. Note que $|\mathbb{N} \setminus C| \leq 1$, pois se $m, n \in \mathbb{N} \setminus C$, então existem $t, s \in \beta\mathbb{N}$ tais que $t + p = m \cdot r$ e $s + p = n \cdot r$; pelo teorema 2.15, $m = n$. Assim, $B \in q$ e $C \in s$.

Observe que $B = \mathbb{N} \setminus H = \{m \in \mathbb{N} : \text{não existe } t \in \beta\mathbb{N} \text{ tal que } m + p = t \cdot r\}$. Portanto, para cada $m \in B$, existem pelo teorema 2.16 $A_m \in p$ e $g_m : \mathbb{N} \rightarrow r$ tais que $(m + A_m) \cap (n \cdot g_m(n)) = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Similarmente, como $C = \{n \in \mathbb{N} : \text{não existe } t \in \beta\mathbb{N} \text{ tal que } t + p = n \cdot r\}$, pelo teorema 2.17, para cada $n \in C$ existem $D_n \in r$ e $f_n : \mathbb{N} \rightarrow p$ tais que, para todo $m \in \mathbb{N}$, $(m + f_n(m)) \cap (nD_n) = \emptyset$.

Defina então $f : B \rightarrow p$ por $f(m) = A_m \cap (\bigcap \{f_n(m) : n \in C \text{ e } n \leq m\})$, e $g : C \rightarrow r$ por $g(n) = D_n \cap (\bigcap \{g_m(n) : m \in B \text{ e } m \leq n\})$. Assim, pelo lema 2.18, existem $m \in B$ e $n \in C$ tais que $(m + f(m)) \cap (n \cdot g(n)) \neq \emptyset$. Porém, se $n \leq m$, $f(m) \subset f_n(m)$ e $g(n) \subset D_n$, de forma que $(m + f_n(m)) \cap (nD_n) \neq \emptyset$, uma contradição; e se $m \leq n$, $f(m) \subset A_m$ e $g(n) \subset g_m(n)$, de forma que $(m + A_m) \cap (n \cdot g_m(n)) \neq \emptyset$, outra contradição.

(b) $\Rightarrow$ (c): É uma consequência mais direta da topologia de $\beta\mathbb{N}$. Primeiramente, notamos que dado $X \subset \beta\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \cap (\text{cl } X) = \mathbb{N} \cap X$, pois $\mathbb{N}$ é o conjunto dos pontos isolados de $\beta\mathbb{N}$. Lembramos que, pelo teorema 1.26(d), $|H^*| = 2^\epsilon$. Logo, basta ver que dado $q \in H^*$, existe $s \in \mathbb{N}^*$ tal que $q + p = s \cdot r$.

Seja $q \in H^*$. Para cada $B \in q$, defina $C(B) = \{t \in \beta\mathbb{N} : m + p = t \cdot r \text{ para algum } m \in B\}$. Note que, como $H \cap B \neq \emptyset$, $C(B) \neq \emptyset$; além disso, dados $B_1, B_2 \in q$, $C(B_1 \cap B_2) \subset C(B_1) \cap C(B_2)$. Destarte, $\mathcal{A} = \{\text{cl } C(B) : B \in q\}$ é uma coleção de fechados de $\beta\mathbb{N}$ com a p.i.f., logo $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Tome $s \in \bigcap \mathcal{A}$.

Primeiro é preciso ver que $s \in \mathbb{N}^*$. Suponha $s \in \mathbb{N}$. Então $s \in \mathbb{N} \cap (\bigcap_{B \in q} \text{cl } C(B)) = \bigcap_{B \in q} \mathbb{N} \cap (\text{cl } C(B)) = \bigcap_{B \in q} \mathbb{N} \cap C(B) \subset \bigcap_{B \in q} C(B)$. Em particular, $s \in C(H)$, logo tome $m \in H$ tal que $m + p = s \cdot r$. Vale também que $H \setminus \{m\} \in q$, logo $s \in C(H \setminus \{m\})$; tome $n \in H \setminus \{m\}$ tal que $n + p = s \cdot r$. Então $m + p = n + p$, uma contradição, pelo lema 2.14.

Por fim, veremos que $q + p = s \cdot r$. Suponha que $q + p \neq s \cdot r$. Pelo lema 2.18, tome $B \in q$, $C \in s$, $f : B \rightarrow p$ e $g : C \rightarrow r$ tais que $(m + f(m)) \cap (n \cdot g(n)) = \emptyset$ para todos $m \in B$ e $n \in C$. Como $\overline{C}$ é uma vizinhança de s e $s \in \text{cl } C(B)$, tome $t \in \overline{C} \cap C(B)$; podemos então tomar $m \in B$ tal que $m + p = t \cdot r$. Porém, $m \in B$ implica que $B \in m$ (lembrando a identificação de m com seu ultrafiltro principal), e $C \in t$. Logo, pelo lema 2.18, $m + p \neq t \cdot r$. ■

Agora podemos provar o teorema citado na demonstração de 2.13.

Teorema 2.20. *Seja $r \in \mathbb{N}^*$. Se $|\{n \in \mathbb{N} : n\mathbb{N} \in r\}| = \omega$, então para todos $p, q, s \in \mathbb{N}^*$, $s \cdot r \neq q + p$.*

Demonstração. Suponha que $s \cdot r = q + p$. Pelo teorema 2.19, temos que $|\{m \in \mathbb{N} : m + p = t \cdot r \text{ para algum } t \in \beta\mathbb{N}\}| = \omega$. Logo tome $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, e $t_0, t_1 \in \beta\mathbb{N}$ tais que $m + p = t_0 \cdot r$ e $n + p = t_1 \cdot r$. Tome $a > n$ tal que $a\mathbb{N} \in r$. Como $\mathbb{N} = \bigcup_{i=0}^{a-1} i + a\mathbb{N}$, tome i tal que $i + a\mathbb{N} \in p$. Então $m + i + a\mathbb{N} \in m + p = t_0 \cdot r$, logo $\{x \in \mathbb{N} : x^{-1}(m + i + a\mathbb{N}) \in r\} \in t_0$, logo tome $x \in \mathbb{N}$ tal que $x^{-1}(m + i + a\mathbb{N}) \in r$. Analogamente, tome $y \in \mathbb{N}$ tal que $y^{-1}(n + i + a\mathbb{N}) \in r$. Tome então $z \in a\mathbb{N} \cap x^{-1}(m + i + a\mathbb{N}) \cap y^{-1}(n + i + a\mathbb{N})$. Temos então que $xz \in a\mathbb{N} \cap (m + i + a\mathbb{N})$, portanto $m + i \equiv 0 \pmod{a}$; e $yz \in a\mathbb{N} \cap (n + i + a\mathbb{N})$, portanto $n + i \equiv 0 \pmod{a}$. Deste modo, $m \equiv n \pmod{a}$ com $m < n < a$, uma contradição. ■

Para concluir este trecho, e ver que o teorema acima se aplica ao teorema 2.13, basta o seguinte lema:

Lema 2.21. *Seja $q \in \text{cl}\{p \in \beta\mathbb{N} : p + p = p\}$. Então para todo $n \in \mathbb{N}$, $n\mathbb{N} \in q$.*

Demonstração. Queremos ver que $n\mathbb{N} \in q$, isto é, $q \in \overline{n\mathbb{N}}$. Seja $\bar{A}$ uma vizinhança básica de q , isto é, seja $A \in q$. Vale que $\bar{A} \cap \{p \in \beta\mathbb{N} : p + p = p\} \neq \emptyset$, logo tome $p = p + p$ tal que $A \in p$. Pelo lema 2.2, $n\mathbb{N} \in p$, e portanto $A \cap n\mathbb{N} \neq \emptyset$. ■

Agora, partimos para ver que o conjunto M do teorema 2.13 é um ideal à esquerda de $(\beta\mathbb{N}, \cdot)$. Para tanto, precisaremos de uma caracterização de ideais à esquerda minimais, que pode ser obtida estudando a estrutura dos ultrafiltros κ -uniformes. A próxima definição e os próximos lemas e teoremas são, respectivamente, a Definição 2.3, o Lema 2.4, o Teorema 2.5, o Lema 3.1 e o Teorema 3.2 de [4].

Definição 2.22. Seja $(S, \cdot)$ um semigrupo discreto. Sejam $p \in \beta S$, $\kappa = 1$ ou $\kappa \geq \omega$. Então $C_\kappa(p) = \{A \subset S : |\{x \in S : x^{-1}A \notin p\}| < \kappa\}$.

Note que $C_\kappa(p) = \{A \subset S : |\{x \in S : x^{-1}(S \setminus A) \in p\}| < \kappa\}$. Portanto, $S \setminus A \in C_\kappa(p) \Leftrightarrow |\{x \in S : x^{-1}A \in p\}| < \kappa$. Em particular, quando $\kappa = 1$, $C_1(p) = \{A \subset S : \text{para todo } x \in S, x^{-1}A \in p\}$.

Lema 2.23. *Sejam $p \in \beta S$ e $\kappa \leq |S|$ com $\kappa = 1$ ou $\kappa \geq \omega$.*

(a) $C_\kappa(p)$ é um filtro em S .

(b) $\mathcal{U}_\kappa(S) \cdot p = \widehat{C_\kappa(p)} = \{q \in \beta S : C_\kappa(p) \subset q\}$.

Demonstração. (a): $S \in C_\kappa(p)$ pois $|\{x \in S : x^{-1}(S \setminus S) \in p\}| = |\emptyset| < \kappa$. $\emptyset \notin C_\kappa(p)$ pois $|\{x \in S : x^{-1}(S \setminus \emptyset) \in p\}| = |S| \geq \kappa$. Dado $A \in C_\kappa(p)$ e $B \supset A$, vale que $x^{-1}(S \setminus B) \subset x^{-1}(S \setminus A)$, logo $\{x \in S : x^{-1}(S \setminus B) \in p\} \subset \{x \in S : x^{-1}(S \setminus A) \in p\}$, e assim $B \in C_\kappa(p)$. Por fim, dados $A, B \in C_\kappa(p)$, tem-se que $\{x \in S : x^{-1}(S \setminus (A \cap B)) \in p\} = \{x \in S : x^{-1}(S \setminus A) \cup x^{-1}(S \setminus B) \in p\} = \{x \in S : x^{-1}(S \setminus A) \in p\} \cup \{x \in S : x^{-1}(S \setminus B) \in p\}$, logo $A \cap B \in C_\kappa(p)$.

(b): Primeiramente veremos que $\mathcal{U}_\kappa(S) \cdot p \subset \widehat{C_\kappa(p)}$. Seja $r \in \mathcal{U}_\kappa(S)$, e seja $A \in C_\kappa(p)$. $|\{x \in S : x^{-1}A \notin p\}| < \kappa$, logo $S \setminus \{x \in S : x^{-1}A \notin p\} = \{x \in S : x^{-1}A \in p\} \in r$. Ou seja, $A \in r \cdot p$. Portanto $C_\kappa(p) \subset r \cdot p$.

Agora veremos que $\widehat{C_\kappa(p)} \subset \mathcal{U}_\kappa(S) \cdot p$. Logo seja $q \in \beta S$ tal que $C_\kappa(p) \subset q$. Defina, para cada $A \in q$, $T(A) = \{x \in S : x^{-1}A \in p\}$. Note que dados $A, B \in q$, $T(A \cap B) = T(A) \cap T(B)$; e que se $A \in q$, $S \setminus A \notin C_\kappa(p)$ (pois $C_\kappa(p) \subset q$), e portanto $|T(A)| \geq \kappa$. Deste modo, $\{T(A) : A \in q\}$ possui a κ -p.i.f., logo tome $r \in \mathcal{U}_\kappa(S)$ tal que $\{T(A) : A \in q\} \subset r$. Então, dado $A \in q$, $T(A) = \{x \in S : x^{-1}A \in p\} \in r$, ou seja, $A \in r \cdot p$. Portanto, $q \subset r \cdot p$, e assim $q = r \cdot p$. ■

Não é surpreendente que $\mathcal{U}_\kappa(S) \cdot p = \widehat{\mathcal{F}}$ para um filtro $\mathcal{F}$, pois sabemos que é um fechado, já que $\mathcal{U}_\kappa(S) \cdot p = \rho_p[\mathcal{U}_\kappa(S)]$. O que o lema acima faz é dar a este filtro uma forma que seja boa de trabalhar.

Além disso, sabemos que $\mathcal{U}_\kappa(S)$ também é fechado, pois se $p \notin \mathcal{U}_\kappa(S)$, dado $A \in p$ com $|A| < \kappa$, $\overline{A}$ é uma vizinhança de p disjunta de $\mathcal{U}_\kappa(S)$. Veremos agora uma condição necessária e suficiente sobre a álgebra de S para que $\mathcal{U}_\kappa(S)$ seja um subsemigrupo.

Note que no enunciado abaixo um hipotético caso $\kappa = 1$ seria trivialmente satisfeito.

Teorema 2.24. *Seja $\omega \leq \kappa \leq |S|$. São equivalentes:*

(a) $\mathcal{U}_\kappa(S)$ é um subsemigrupo de βS .

(b) Para todo $p \in \mathcal{U}_\kappa(S)$ e todo $A \in [S]^{<\kappa}$, $S \setminus A \in C_\kappa(p)$.

(c) Para todo $A \in [S]^{<\kappa}$ e todo $B \in [S]^\kappa$, existe $F \in \mathcal{P}_f(B)$ tal que $|\bigcap_{x \in F} x^{-1}A| < \kappa$.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b): Por contraposição. Tome $p \in \mathcal{U}_\kappa(S)$ e $A \in [S]^{<\kappa}$ tais que $S \setminus A \notin C_\kappa(p)$. Então $C_\kappa(p) \cup \{A\}$ possui a p.i.f. (pois se $B \in C_\kappa(p)$ e $B \cap A = \emptyset$, então $B \subset S \setminus A$, logo $S \setminus A \in C_\kappa(p)$). Logo tome $q \in \beta S$ tal que $C_\kappa(p) \cup \{A\} \subset q$. Pelo lema 2.23(b), existe $r \in \mathcal{U}_\kappa(S)$ tal que $q = r \cdot p$. Como $A \in q$, $A \notin \mathcal{U}_\kappa(S)$, ou seja, $r \cdot p \notin \mathcal{U}_\kappa(S)$, e portanto $\mathcal{U}_\kappa(S)$ não é subsemigrupo. (b) $\Rightarrow$ (c): Por contraposição. Tome $A \in [S]^{<\kappa}$ e $B \in [S]^\kappa$ tais que, para todo $F \in \mathcal{P}_f(B)$, $|\bigcap_{x \in F} x^{-1}A| \geq \kappa$. Então $\{x^{-1}A : x \in B\}$ possui a κ -p.i.f., logo tome $p \in \mathcal{U}_\kappa(S)$ tal que $\{x^{-1}A : x \in B\} \subset p$. Então $B \subset \{x \in S : x^{-1}A \in p\}$. Como $|B| = \kappa$, temos que $S \setminus A \notin C_\kappa(p)$, como pretendíamos.

(c) $\Rightarrow$ (a): Por contraposição. Tome $r, p \in \mathcal{U}_\kappa(S)$ tais que $r \cdot p \notin \mathcal{U}_\kappa(S)$. Seja $q = r \cdot p$. $q \notin \mathcal{U}_\kappa(S)$, logo tome $A \in q$ tal que $|A| < \kappa$. Considere $D = \{x \in S : x^{-1}A \in p\}$. Vale que $D \in r$, logo $|D| \geq \kappa$, e portanto podemos tomar $B \in [D]^\kappa$. Deste modo, para todo $F \in \mathcal{P}_f(B)$, $\bigcap_{x \in F} x^{-1}A \in p$, logo $|\bigcap_{x \in F} x^{-1}A| \geq \kappa$. ■

Observe que, se S for cancelativo à esquerda, então $\mathcal{U}_\kappa(S)$ é um subsemigrupo.

Agora, iremos provar uma condição necessária e suficiente para que $\mathcal{U}_\kappa(S) \cdot p$ seja um ideal à esquerda minimal de βS .

Lema 2.25. *Seja $\kappa \leq |S|$ tal que $\kappa = 1$ ou $\kappa \geq \omega$. Se $\mathcal{U}_\kappa(S)$ é um subsemigrupo de βS , dados $A \subset S$, $p \in \mathcal{U}_\kappa(S)$, se $S \setminus A \notin C_\kappa(p)$, então $C_\kappa(p) \cup \{A\}$ tem a κ -p.i.f.*

Demonstração. Pelo lema 2.23(a), $C_\kappa(p)$ é filtro, logo basta ver que dado $D \in C_\kappa(p)$, $|D \cap A| \geq \kappa$. Suponha que $|D \cap A| < \kappa$. Como $S \setminus A \notin C_\kappa(p)$, $|\{x \in S : x^{-1}A \in p\}| \geq \kappa$. Como $D \in C_\kappa(p)$, $|\{x \in S : x^{-1}D \notin p\}| < \kappa$. Portanto, $|\{x \in S : x^{-1}A \in p \text{ e } x^{-1}D \in p\}| = |\{x \in S : x^{-1}(A \cap D) \in p\}| \geq \kappa$. Tome então $B \in [\{x \in S : x^{-1}(A \cap D) \in p\}]^\kappa$. Como $A \cap D \in [S]^{<\kappa}$, $B \in [S]^\kappa$, e $\mathcal{U}_\kappa(S)$ é subsemigrupo, então seja $F \in \mathcal{P}_f(B)$ tal que $|\bigcap_{x \in F} x^{-1}(A \cap D)| < \kappa$. Porém, $\bigcap_{x \in F} x^{-1}(A \cap D) \in p$ e $p \in \mathcal{U}_\kappa(S)$. Contradição. ■

Teorema 2.26. *Seja $\kappa \leq |S|$ tal que $\kappa = 1$ ou $\kappa \geq \omega$, suponha que $\mathcal{U}_\kappa(S)$ é um subsemigrupo de βS e seja $p \in \mathcal{U}_\kappa(S)$. Então $\mathcal{U}_\kappa(S) \cdot p$ é um ideal à esquerda minimal de $\mathcal{U}_\kappa(S)$ se e somente se dados $B \in [S]^{<\kappa}$ e $A \subset S$ tal que $S \setminus A \notin C_\kappa(p)$, existe $F \in \mathcal{P}_f(S \setminus B)$ tal que $\bigcup_{x \in F} x^{-1}A \in C_\kappa(p)$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$): Sejam $B \in [S]^{<\kappa}$ e $A \subset S$ tal que $S \setminus A \notin C_\kappa(p)$. Pelo lema anterior, $C_\kappa(p) \cup \{A\}$ possui a κ -p.i.f., logo tome $r \in \mathcal{U}_\kappa(p)$ tal que $C_\kappa(p) \cup \{A\} \subset r$.

Suponha que para cada $F \in \mathcal{P}_f(S \setminus B)$, $\bigcup_{x \in F} x^{-1}A \notin C_\kappa(p)$. Afirmamos que $C_\kappa(p) \cup \{S \setminus (\bigcup_{x \in F} x^{-1}A) : F \in \mathcal{P}_f(S \setminus B)\}$ possui a κ -p.i.f. Observe que $\{S \setminus (\bigcup_{x \in F} x^{-1}A) : F \in \mathcal{P}_f(S \setminus B)\}$ é fechado para interseção, pois dados $F, G \in \mathcal{P}_f(S \setminus B)$, $(S \setminus (\bigcup_{x \in F} x^{-1}A)) \cap (S \setminus (\bigcup_{x \in G} x^{-1}A)) = S \setminus (\bigcup_{x \in F \cup G} x^{-1}A)$. Portanto, basta ver que dado $F \in \mathcal{P}_f(S \setminus B)$, $C_\kappa(p) \cup \{S \setminus (\bigcup_{x \in F \cup G} x^{-1}A)\}$ possui a κ -p.i.f. Isso segue diretamente do lema anterior, já que supusemos que $\bigcup_{x \in F \cup G} x^{-1}A \notin C_\kappa(p)$. Portanto, podemos tomar $q \in \mathcal{U}_\kappa(S)$ tal que $C_\kappa(p) \cup \{S \setminus (\bigcup_{x \in F} x^{-1}A) : F \in \mathcal{P}_f(S \setminus B)\} \subset q$.

Pelo lema 2.23(b), temos que $q, r \in \mathcal{U}_\kappa(S) \cdot p$. Como, por hipótese, $\mathcal{U}_\kappa(S) \cdot p$ é um ideal à esquerda minimal de $\mathcal{U}_\kappa(S)$, então $\mathcal{U}_\kappa(S) \cdot q = \mathcal{U}_\kappa(S) \cdot p$, e assim $r \in \mathcal{U}_\kappa(S) \cdot q$. Logo existe $s \in \mathcal{U}_\kappa(S)$ tal que $r = s \cdot q$. Como $A \in r = s \cdot q$, $\{x \in S : x^{-1}A \in q\} \in s$, logo $|\{x \in S : x^{-1}A \in q\}| \geq \kappa$. Como $B \in [S]^{<\kappa}$, podemos tomar $x \in S \setminus B$ tal que $x^{-1}A \in q$. Por outro lado, $\{x\} \in \mathcal{P}_f(S \setminus B)$, logo $S \setminus (x^{-1}A) \in q$. Contradição.

($\Leftarrow$): Para ver que $\mathcal{U}_\kappa(S) \cdot p$ é um ideal à esquerda minimal, basta ver que dados $q, r \in \mathcal{U}_\kappa(S) \cdot p$, existe $s \in \mathcal{U}_\kappa(S)$ tal que $r = s \cdot q$. Pois então dados $L \subset \mathcal{U}_\kappa(S) \cdot p$ ideal à esquerda, e $r \in \mathcal{U}_\kappa(S) \cdot p$, tome $q \in L$, e tome $s \in \mathcal{U}_\kappa(S)$ tal que $r = s \cdot q$. Então $r \in L$, ou seja $\mathcal{U}_\kappa(S) \cdot p \subset L$.

Portanto, sejam $q, r \in \mathcal{U}_\kappa(S) \cdot p$. Temos que $C_\kappa(p) \subset q, r$.

Para cada $A \in r$, defina $T(A) = \{x \in S : x^{-1}A \in q\}$. Então, similarmente à prova do lema 2.23(b), basta ver que para cada $A \in r$, $|T(A)| \geq \kappa$. Fixe então $A \in r$. Como $C_\kappa(p) \subset r$, temos que $S \setminus A \notin C_\kappa(p)$. Tome então (pela hipótese) $F_0 \in \mathcal{P}_f(S)$ tal que $\bigcup_{x \in F_0} x^{-1}A \in C_\kappa(p)$. Agora, suponha que $\tau < \kappa$ e para todo $\sigma < \tau$ foi escolhido $F_\sigma \in \mathcal{P}_f(S \setminus \bigcup_{\eta < \sigma} F_\eta)$ de forma que $\bigcup_{x \in F_\sigma} x^{-1}A \in$

$C_\kappa(p)$. Vale que $|\bigcup_{\sigma < \tau} F_\sigma| < \kappa$, logo, pela hipótese podemos tomar $F_\tau \in \mathcal{P}_f(S \setminus \bigcup_{\sigma < \tau} F_\sigma)$ tal que $\bigcup_{x \in F_\tau} x^{-1}A \in C_\kappa(p)$. Como $C_\kappa(p) \subset q$, temos que para cada $\tau < \kappa$, $\bigcup_{x \in F_\tau} x^{-1}A \in q$, logo tome $x_\tau \in F_\tau$ tal que $x_\tau^{-1}A \in q$. Desse modo, $\{x_\tau : \tau < \kappa\} \subset T(A)$. Como $\{F_\tau : \tau < \kappa\}$ é uma coleção dois-a-dois disjunta, segue que $|T(A)| \geq \kappa$, como desejado. ■

Agora, podemos provar como corolário o Lema 1.1 de [5].

Corolário 2.27. *Sejam $(S, \cdot)$ um semigrupo discreto e $p \in \beta S$. Então $\beta S \cdot p$ é um ideal à esquerda minimal se e somente se dado $A \subset S$, se existe $z \in S$ tal que $z^{-1}A \in p$, então existe $F \in \mathcal{P}_f(S)$ tal que para todo $y \in S$, $y^{-1}(\bigcup_{x \in F} x^{-1}A) \in p$.*

Demonstração. Considere o teorema anterior no caso $\kappa = 1$. Então $\mathcal{U}_1(S) = \beta S$. $[S]^{<1} = \{\emptyset\}$, logo temos a seguinte asserção:

Dado $p \in \beta S$, $\beta S \cdot p$ é um ideal à esquerda minimal se e somente se dado $A \subset S$, se $S \setminus A \notin C_1(p)$, então existe $F \in \mathcal{P}_f(S)$ tal que $\bigcup_{x \in F} x^{-1}A \in C_1(p)$.

Porém, como foi observado, $C_1(p) = \{A \subset S : \text{para todo } x \in S, x^{-1}A \in p\}$. Logo $S \setminus A \notin C_1(p)$ é equivalente a existir $z \in S$ tal que $z^{-1}(S \setminus A) \notin p$, ou seja, $z^{-1}A \in p$; e $\bigcup_{x \in F} x^{-1}A \in C_1(p)$ é equivalente a valer que $y^{-1}(\bigcup_{x \in F} x^{-1}A) \in p$ para todo $y \in S$. Assim, traduzindo isso à asserção acima, temos o resultado desejado. ■

O próximo lema foi também retirado de [5] (é o Lema 1.2), e trata de um caso especial em que vale a distributividade em $\beta\mathbb{N}$.

Lema 2.28. *Sejam $p, q \in \beta\mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{N}$. Então $x \cdot (p + q) = x \cdot p + x \cdot q$.*

Demonstração. Como ambos são ultrafiltros, basta ver que $x \cdot (p + q) \subset x \cdot p + x \cdot q$. Seja $A \in x \cdot (p + q)$. Vale que $x^{-1}A \in (p + q)$, logo $B = \{y \in \mathbb{N} : -y + x^{-1}A \in q\} \in p$. Portanto $x \cdot B \in x \cdot p$. Portanto, basta ver que $x \cdot B \subset \{y \in \mathbb{N} : -y + A \in x \cdot q\}$ (pois daí $A \in x \cdot p + x \cdot q$). Logo seja $z \in B$. Vale que $-z + x^{-1}A \in q$, logo $-x \cdot z + A \in x \cdot q$, como afirmado. ■

Agora estamos prontos para provar que aquele conjunto M do 2.13 é um ideal à esquerda de $(\beta\mathbb{N}, \cdot)$. Este é o Teorema 5.4 de [5], devido a Vitaly Bergelson e Neil Hindman.

Teorema 2.29. *Seja $M = \text{cl}\{p \in \beta\mathbb{N} : p \text{ é idempotente minimal de } (\beta\mathbb{N}, +)\}$. Então M é um ideal à esquerda de $(\beta\mathbb{N}, \cdot)$.*

Demonstração. Sejam $q \in M$, $r \in \beta\mathbb{N}$, e $A \in r \cdot q$. Precisamos ver que existe um idempotente minimal de $(\beta\mathbb{N}, +)$ a que A pertença. Sabemos que $\{x \in \mathbb{N} : x^{-1}A \in q\} \in r$, logo fixe $x \in \mathbb{N}$ tal que $x^{-1}A \in q$. Como $q \in M$, então existe p idempotente minimal de $(\beta\mathbb{N}, +)$ tal que $x^{-1}A \in p$. Portanto, $A \in x \cdot p$. Pelo lema 2.28, temos que $x \cdot p + x \cdot p = x \cdot (p + p) = x \cdot p$, logo $x \cdot p$ é idempotente.

Assim, resta ver que $x \cdot p$ é minimal em $(\beta\mathbb{N}, +)$.

Para ver que $x \cdot p$ é minimal em $(\beta\mathbb{N}, +)$, basta ver, pelo teorema 1.16, que $\beta\mathbb{N} + x \cdot p$ é um ideal à esquerda minimal de $(\beta\mathbb{N}, +)$; pelo mesmo teorema, sabemos que $\beta\mathbb{N} + p$ é um ideal à esquerda minimal; logo em ambos os casos aplicaremos o corolário 2.27.

Seja $B \subset \mathbb{N}$ tal que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $-n + B \in x \cdot p$. Pelo corolário 2.27, precisamos obter $F \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ tal que para todo $y \in \mathbb{N}$, $-y + (\bigcup_{z \in F} -z + B) \in x \cdot p$. Tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $-n + B \in x \cdot p$. Tome $i \in \{0, \dots, x-1\}$ tal que $n+i \in x\mathbb{N}$. Então $-(n+i) + (i+B) = -n + B \in x \cdot p$, logo $x^{-1}(-(n+i) + (i+B)) = -(\frac{n+i}{x}) + x^{-1}(i+B) \in p$. Defina $C = x^{-1}(i+B)$. Como $-(\frac{n+i}{x}) + C \in p$, tome pelo corolário 2.27 $F \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ tal que, para todo $y \in \mathbb{N}$, $-y + (\bigcup_{z \in F} -z + C) \in p$. Tome $k \in \mathbb{N}$ tal que $F \subset \{1, \dots, k\}$ e defina $G = \{1, \dots, x(k+1)\}$.

Afirmção: para todo $y \in \mathbb{N}$, $-y + (\bigcup_{z \in G} -z + B) \in x \cdot p$. Para ver isso, seja $y \in \mathbb{N}$. Tome $a \in \mathbb{N}$ tal que $x(a-1) \leq y < xa$. Vale que $-a + (\bigcup_{z \in F} -z + C) \in p$, e $-a + (\bigcup_{z \in F} -z + C) = \bigcup_{z \in F} -(z+a) + C$; logo tome $t \in F$ tal que $-(t+a) + C \in p$. Vale então que $-x(t+a) + xC \in x \cdot p$. Lembrando que $C = x^{-1}(i+B)$, temos que $-x(t+a) + xC \subset -x(t+a) + (i+B) = -xt - xa + i + B$, logo $-xt - xa + i + B \in x \cdot p$. Seja $s \in \{1, \dots, x\}$ tal que $xa = s + y$. Então $-xt - xa + i + B = -y + (-(xt+s-i) + B)$. Agora, note que, como $i \in \{0, \dots, x-1\}$ e $s \in \{1, \dots, x\}$, $s-i \in \{-x+2, \dots, x\}$; e como $t \in F \subset \{1, \dots, k\}$, $xt \in \{x, \dots, xk\}$; portanto $xt + s - i \in \{2, \dots, x(k+1)\} \subset G$. Dessa forma, $-y + (-(xt + s - i) + B) \subset -y + (\bigcup_{z \in G} -z + B)$, e assim $-y + (\bigcup_{z \in G} -z + B) \in x \cdot p$, como afirmado. ■

2.3 $\mathbb{N}^*$ não contém uma cópia algébrica e topológica de $\beta\mathbb{N}$

Esta seção é o estudo do surpreendente resultado (postulado acima) publicado por Dona Strauss em 1992, em [7], e suas consequências.

Lema 2.30. *Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{N}^*$ idempotente. Então para todo $q \in \mathbb{N}^*$ existe $r \in \overline{k\mathbb{N}}$ tal que $r + q + p \neq q + r + p$.*

Demonstração. Seja $q \in \mathbb{N}^*$. Podemos supor que $k > 1$. No caso $k = 1$, podemos usar o caso $k = 2$ e tomar $r \in \overline{2\mathbb{N}}$ tal que $r + q + p \neq q + r + p$. Valerá que $r \in \overline{\mathbb{N}} = \beta\mathbb{N}$.

Assim, suponha $k > 1$, e suponha por absurdo que para todo $r \in \overline{k\mathbb{N}}$, $r + q + p = q + r + p$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ considere sua expansão (única) em base k , $\sum_{n \in \omega} a_n k^n$; como $a_n \in \{0, \dots, k-1\}$ para todo n , temos uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, \dots, k-1\}^\omega$ definida por $f(m) = (a_n)_{n \in \omega}$. Além disso, defina também $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ e $c : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ por: se $m = \sum_{n \in \omega} a_n k^n$, $g(m) = a_n k^n$ em que n é o menor índice tal que $a_n \neq 0$, e $c(m) = |\{n \in \omega : a_n \neq 0\}|$. Lembre que f , g e c possuem extensões contínuas $\tilde{f} : \beta\mathbb{N} \rightarrow \{0, \dots, k-1\}^\omega$ e $g, c : \beta\mathbb{N} \rightarrow \beta\mathbb{N}$.

Vejamos agora que, dados $s \in \beta\mathbb{N}$ e $t \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{k^n \mathbb{N}}$, vale que $\tilde{g}(s+t) = \tilde{g}(s)$, e $\tilde{c}(s+t) = \tilde{c}(s) + \tilde{c}(t)$. Para a primeira igualdade, basta ver que as funções $\tilde{g} \circ \rho_t$ e $\tilde{g}$ coincidem sobre $\mathbb{N}$; para a segunda, basta ver que as funções $\tilde{c} \circ \rho_t$ e $\rho_{\tilde{c}(t)} \circ \tilde{c}$ coincidem sobre $\mathbb{N}$. Seja $m \in \mathbb{N}$ então. Quero ver que $\tilde{g}(m+t) = g(m)$ e $\tilde{c}(m+t) = c(m) + \tilde{c}(t)$. Tome $l \in \mathbb{N}$ tal que $m < k^l$. Então, para todo $x \in k^l \mathbb{N}$, $g(m+x) = g(m)$ e $c(m+x) = c(m) + c(x)$. Como $t \in \overline{k^l \mathbb{N}}$, então $\tilde{g}(m+t) = g(m)$ e $\tilde{c}(m+t) = c(m) + \tilde{c}(t)$.

Agora, para cada $j \in \mathbb{N}$, considere a projeção nas j primeiras coordenadas γ_j definida para cada $(a_n)_{n \in \omega} \in \{0, \dots, k-1\}^\omega$ por $\gamma_j((a_n)_{n \in \omega}) = (a_0, \dots, a_j)$. Note que, dado $s \in \beta\mathbb{N}$, $\gamma_j^{-1}[\{\gamma_j(\tilde{f}(s))\}]$ é uma vizinhança básica de $\tilde{f}(s)$ (pela topologia produto), logo por 1.26(h), $\mathbb{N} \cap \tilde{f}^{-1}[\gamma_j^{-1}[\{\gamma_j(\tilde{f}(s))\}]] = (\gamma_j \circ f)^{-1}[\{\gamma_j(\tilde{f}(s))\}] \in s$. Para facilitar, denotaremos esse resultado por: para cada $s \in \beta\mathbb{N}$, $(\gamma_j f)^{-1} \gamma_j(\tilde{f}(s)) \in s$.

Considere, a partir de agora, $(a_n)_{n \in \omega} = \tilde{f}(q)$. Primeiramente, veremos que $(a_n)_{n \in \omega}$ não é eventualmente 0. Suponha, por absurdo, que seja, e tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $a_n = 0$. Considere $m = \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n k^n$. Seja $s \in \beta\mathbb{N}$ tal que $\{-m + A : A \in q\} \subset s$. Vale que $q = m + s$, pois $q \subset m + s$. Veremos que $s \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{k^n \mathbb{N}}$. Seja $l \geq n_0$. Tome $n \in \{0, \dots, k^l - 1\}$ tal que $n + k^l \mathbb{N} \in q$. Note que $\gamma_{l-1} f[n + k^l \mathbb{N}] = \{\gamma_{l-1}(n)\}$, logo $\gamma_{l-1} \tilde{f}(q) = \gamma_{l-1}(n)$. Porém, temos que $\gamma_{l-1} \tilde{f}(q) = \gamma_{l-1} f(m)$. Como $m, n < k^l$, tem-se que $m = n$. Dessa forma, $m + k^l \mathbb{N} \in q$, logo $-m + (m + k^l \mathbb{N}) = k^l \mathbb{N} \in s$. Assim, $s \in \bigcap_{l \geq n_0} \overline{k^l \mathbb{N}} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{k^n \mathbb{N}}$. Dado $r \in \overline{k\mathbb{N}}$, $r + m + s + p = r + q + p = q + r + p = m + s + r + p$. $r + m + s + p = m + r + s + p$, logo $m + r + s + p = m + s + r + p$, e, pelo lema 2.14, $r + s + p = s + r + p$. Note que pelo teorema 1.34, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{k^n \mathbb{N}}$ é um subsemigrupo. Logo $s + p \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{k^n \mathbb{N}}$. Agora seja $r \in (\{k^n : n \in \mathbb{N}\})^*$

qualquer. Observe que $r \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{k^n \mathbb{N}}$, logo $r + p \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{k^n \mathbb{N}}$; e que, como g é a identidade sobre $\{k^n : n \in \mathbb{N}\}$, então $\tilde{g}(r) = r$. Deste modo, temos então (usando o que foi observado acima sobre $\tilde{g}$): $r = \tilde{g}(r) = \tilde{g}(r + s + p) = \tilde{g}(s + r + p) = \tilde{g}(s)$. Uma contradição, pois temos 2^c possibilidades para $r \in (\{k^n : n \in \mathbb{N}\})^*$.

Agora veremos que $(a_n)_{n \in \omega}$ não é eventualmente $k - 1$. Suponha por absurdo que $n_0 \in \mathbb{N}$ é tal que $a_n = k - 1$ se $n \geq n_0$. Considere $m = -\sum_{n=0}^{n_0-1} a_n k^n + k^{n_0}$ e defina $t = m + q$. Seja $l > n_0$. Lembre que $(\gamma_l f)^{-1} \gamma_l(\tilde{f}(q)) = (\gamma_l f)^{-1} \gamma_l((a_n)_{n \in \omega}) \in q$. Dado $x \in (\gamma_l f)^{-1} \gamma_l((a_n)_{n \in \omega})$, note que $x = \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n k^n + \sum_{n=n_0}^l (k-1)k^n + \sum_{n>l} f(x)_n k^n$, de modo que $m + x = k^{n_0} + k^{l+1} - k^{n_0} + \sum_{n>l} f(x)_n k^n = k^{l+1} + \sum_{n>l} f(x)_n k^n \in k^{l+1} \mathbb{N}$. Destarte, $m + q \in \overline{k^{l+1} \mathbb{N}}$; ou seja, $t \in \bigcap_{l>n_0} \overline{k^{l+1} \mathbb{N}} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{k^n \mathbb{N}}$. Temos então que dado $r \in \overline{k \mathbb{N}}$, $r + t + p = r + m + q + p = m + r + q + p = m + q + r + p = t + r + p$, e, como no parágrafo acima, uma contradição.

Considere $L = \{n \in \omega : 0 < a_n < k - 1\}$. Mostraremos que L é finito. Suponha que L seja infinito, e tome $r \in (\{k^n : n \in L\})^*$. Note que $c[\{k^n : n \in L\}] = \{1\}$, logo $\tilde{c}(r) = 1$. Além disso, dados $l \in L$ e $x \in (\gamma_l f)^{-1} \gamma_l((a_n)_{n \in \omega})$, note que $f(x)_l = a_l$, logo $0 < f(x)_l < k - 1$. Assim, vale que $c(k^l + x) = c(x)$, pois somar k^l a x não acrescenta nem retira coordenadas nulas da expansão em base k de x . Portanto, temos que $\tilde{c}(r + q) = \tilde{c}(q)$. Usando as observações sobre $\tilde{c}$, temos: $\tilde{c}(q) + \tilde{c}(p) = \tilde{c}(r + q) + \tilde{c}(p) = \tilde{c}(r + q + p) = \tilde{c}(q + r + p) = \tilde{c}(q) + \tilde{c}(r + p) = \tilde{c}(q) + \tilde{c}(r) + \tilde{c}(p) = \tilde{c}(q) + 1 + \tilde{c}(p) = \tilde{c}(q) + \tilde{c}(p) + 1$. Contradição, pelo teorema 1.26(a), pois a função $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $h(n) = n + 1$ não possui pontos fixos.

Assim, temos que L é finito, e $(a_n)_{n \in \omega}$ não é eventualmente $k - 1$ ou eventualmente 0. Portanto, vale que o conjunto $M = \{n \in \omega : a_n = k - 1 \text{ e } a_{n+1} = 0\}$ é infinito. Tome então $r \in (\{k^n : n \in M\})^*$. Note desta vez que, dados $m \in M$ e $x \in (\gamma_{m+1} f)^{-1} \gamma_{m+1}((a_n)_{n \in \omega})$, vale que $f(x)_m = a_m = k - 1$ e $f(x)_{m+1} = 0$. Logo $f(k^m + x)_m = 0$, $f(k^m + x)_{m+1} = 1$ e $f(k^m + x)_i = f(x)_i$ para $i \in \omega \setminus \{m, m+1\}$. Portanto, vale que $c(k^m + x) = c(x)$. Como antes, obtemos que $\tilde{c}(q) + \tilde{c}(p) = \tilde{c}(q) + \tilde{c}(p) + 1$, uma contradição. ■

Antes do próximo lema, precisaremos de um resultado sobre semigrupos (um lema para o lema).

Lema 2.31. *Seja S um semigrupo topológico à direita compacto. Seja L ideal à esquerda minimal. Então cada $s \in L$ possui uma única identidade à esquerda em L .*

Demonstração. Unicidade: Seja $s \in L$ e suponha que $a, b \in L$ são tais que $s = as = bs$. Como, pelos teoremas 1.15(c) e 1.14, $K(S) = \bigcup \{R : R \text{ é ideal à direita minimal de } S\}$, união disjunta, tome R_a e R_b ideais à direita minimais tais que $a \in R_a$ e $b \in R_b$. Então $as = bs \in R_a \cap R_b$, de forma que $R_a = R_b =: R$. Assim, $s = as = bs \in R \cap L$ que é um grupo (teorema 1.17(b)), logo cancelando s à direita, obtemos $a = b$.

Existência: note que $s \in R$ para algum ideal à direita minimal, logo $s \in R \cap L$ que é grupo, e

portanto s possui uma identidade. ■

Lema 2.32. *Seja $\phi : \beta\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ um homomorfismo contínuo. Então $\phi(q) = \phi(q')$ para q, q' idempotentes quaisquer. Além disso, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \geq m$ em $\mathbb{N}$, $\phi(x) = \phi(x) + \phi(q)$ (onde q é um idempotente).*

Demonstração. Seja p um idempotente. Temos que: $\phi(1) + \phi(p) = \phi(1+p) = \phi(p+1) = \phi(p) + \phi(1)$; $\phi(1) + \phi(p) \in \beta\mathbb{N} + \phi(p) = \overline{\mathbb{N}} + \phi(p) = \overline{\mathbb{N} + \phi(p)}$; e $\phi(p) + \phi(1) \in \phi[\beta\mathbb{N}] + \phi(1) = \phi[\overline{\mathbb{N}}] + \phi(1) = \overline{\phi[\mathbb{N}] + \phi(1)}$. Logo, pelo 1.26(c), $(\mathbb{N} + \phi(p)) \cap \overline{\phi[\mathbb{N}] + \phi(1)} \neq \emptyset$ ou $\overline{\mathbb{N} + \phi(p)} \cap (\phi[\mathbb{N}] + \phi(1)) \neq \emptyset$. Na primeira possibilidade, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k + \phi(p) \in \overline{\phi[\mathbb{N}] + \phi(1)} \subset \overline{\phi[\beta\mathbb{N}]} = \phi[\beta\mathbb{N}]$ (pois ϕ é contínua). Logo, para cada $m \in \mathbb{N}$, $km + \phi(p) \in \beta\mathbb{N}$, pois: $km + \phi(p) = k(m-1) + k + \phi(p) + \phi(p) = k(m-1) + \phi(p) + k + \phi(p) \in \phi[\beta\mathbb{N}] + \phi[\beta\mathbb{N}] \subset \phi[\beta\mathbb{N}]$. Dessa forma, $k\mathbb{N} + \phi(p) \subset \phi[\beta\mathbb{N}]$, logo $\overline{k\mathbb{N}} + \phi(p) \subset \overline{k\mathbb{N} + \phi(p)} \subset \phi[\beta\mathbb{N}]$. Ou seja, dado $r \in \overline{k\mathbb{N}}$, $r + \phi(p) \in \phi[\beta\mathbb{N}]$ e portanto comuta com $\phi(1)$, logo $r + \phi(1) + \phi(p) = r + \phi(p) + \phi(1) = \phi(1) + r + \phi(p)$, contradizendo o lema 2.30.

Portanto somos forçados a ter $\overline{\mathbb{N} + \phi(p)} \cap (\phi[\mathbb{N}] + \phi(1)) \neq \emptyset$. Ou seja, temos $k \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(k) + \phi(1) = \phi(k+1) \in \overline{\mathbb{N} + \phi(p)} = \beta\mathbb{N} + \phi(p)$. Defina $m = k + 1$. Note que $\phi(m) = \phi(m) + \phi(p) = \phi(m+p) \in \mathbb{N}^*$. Além disso, dado $x > m$, $\phi(x) = \phi(x-m) + \phi(m) \in \beta\mathbb{N} + \phi(p)$ e logo $\phi(x) = \phi(x) + \phi(p)$. Como $\phi[\{x \in \mathbb{N} : x \geq m\}] \subset \beta\mathbb{N} + \phi(p)$, segue que $\phi[\mathbb{N}^*] \subset \beta\mathbb{N} + \phi(p)$, e assim $\phi(t) = \phi(t) + \phi(p)$ para todo $t \in \mathbb{N}^*$.

Dessa forma, demonstramos que $\phi[\mathbb{N}^*] = \phi[\mathbb{N}^*] + \phi(p)$, para um idempotente p qualquer. Suponha que u seja algum idempotente de $\phi[\mathbb{N}^*]$. Vale que $\phi^{-1}[\{u\}]$ é um subsemigrupo compacto de $\beta\mathbb{N}$, logo possui um idempotente p . Temos então que $u = \phi(p)$. Ou seja, todo idempotente de $\phi[\mathbb{N}^*]$ é da forma $\phi(p)$ para p idempotente. Assim, como qualquer ideal à esquerda minimal de $\phi[\mathbb{N}^*]$ é da forma $\phi[\mathbb{N}^*] + u$ com u idempotente, segue que $\phi[\mathbb{N}^*]$ é seu próprio ideal à esquerda minimal. Usaremos agora o lema 2.31: sejam q, q' idempotentes. Observe que $\phi(q) + \phi(m) = \phi(m) + \phi(q)$ e, pelo que provamos acima, $\phi(m) + \phi(q) = \phi(m)$; analogamente, $\phi(q') + \phi(m) = \phi(m)$. Assim, $\phi(q) = \phi(q')$. ■

Nesse ponto, já podemos afirmar que $\phi[\mathbb{N}^*]$ é um grupo, pois é topológico à direita compacto, simples à esquerda, e possui um único idempotente.

Para o próximo lema, note que, dado $p \in \mathbb{N}^*$, p é o limite de uma rede em $\mathbb{N}$, e vale que tal rede está eventualmente na vizinhança $\beta\mathbb{N} \setminus \{1, \dots, l\}$, para todo $l \in \mathbb{N}$.

Lema 2.33. *Seja $\phi : \beta\mathbb{N} \rightarrow \beta\mathbb{N}$ contínua. Suponha que existem $m \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{N}^*$ tais que $\phi(p) \notin \phi[\mathbb{N}]$ e $\phi(x) = \phi(x + p)$ para todos $x \geq m$ em $\mathbb{N}$. Então existe uma sequência crescente $(n_k)_{k \geq 0}$ em $\mathbb{N}$ e uma sequência decrescente $(W_k)_{k \geq 0}$ de vizinhanças clopens de $\phi(p)$ tais que $\phi(n_{k_1} + \dots + n_{k_r}) \in W_{k_1} \setminus W_{k_1+1}$ sempre que $k_1 < \dots < k_r$.*

Demonstração. Construiremos por recursão. No primeiro passo, defina $n_0 = m$, $W_0 = \beta\mathbb{N}$ e tome W_1 qualquer vizinhança clopen de $\phi(p)$ tal que $\phi(n_0) \notin W_1$.

Suponha então construídos $n_0, \dots, n_k$ e $W_0, \dots, W_{k+1}$ com as propriedades desejadas. Note que, dados $k_1 < \dots < k_r \leq k$, $\phi(n_{k_1} + \dots + n_{k_r} + p) = \phi(n_{k_1} + \dots + n_{k_r}) \in W_{k_1} \setminus W_{k_1+1}$, sendo este um aberto. Como p é o limite de uma rede em $\mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}^*$, ϕ é contínua, $\phi(n_{k_1} + \dots + n_{k_r} + p) \in W_{k_1} \setminus W_{k_1+1}$ e $\phi(p) \in W_{k+1}$, então existe $n_{k+1} > n_k$ tal que $\phi(n_{k+1}) \in W_{k+1}$ e $\phi(n_{k_1} + \dots + n_{k_r} + n_{k+1}) \in W_{k_1} \setminus W_{k_1+1}$ sempre que $k_1 < \dots < k_r \leq k$ (pois há finitas possibilidades para $k_1, \dots, k_r \leq k$). Tome então $W_{k+2} \subset W_{k+1}$ vizinhança clopen de $\phi(p)$ tal que $\phi(n_{k+1}) \notin W_{k+2}$.

Assim, temos: se $k_1 < \dots < k_r \leq k$, $\phi(n_{k_1} + \dots + n_{k_r}) \in W_{k_1} \setminus W_{k_1+1}$ e $\phi(n_{k_1} + \dots + n_{k_r} + n_{k+1}) \in W_{k_1} \setminus W_{k_1+1}$; e $\phi(n_{k+1}) \in W_{k+1} \setminus W_{k+2}$. Ou seja, $\phi(n_{k_1} + \dots + n_{k_r}) \in W_{k_1} \setminus W_{k_1+1}$ sempre que $k_1 < \dots < k_r \leq k + 1$. Está feito o passo da recursão. ■

Para os próximos lema e teorema, usaremos a seguinte notação: dado $X \subset \mathbb{N}$, $FS(X) = \{\sum_{a \in F} a : F \in \mathcal{P}_f(X)\}$ e $FS_n(X) = \{\sum_{a \in F} a : F \in \mathcal{P}_f(X) \text{ e } \min F \geq n\}$. Além disso, para tornar a notação mais limpa, escreveremos ΣF no lugar de $\sum_{a \in F} a$.

Lema 2.34. *Assuma as hipóteses do lema anterior. Então existem $B, C \subset \mathbb{N}$ infinitos e disjuntos tais que $\phi[\overline{FS(B)}] \cap \phi[\overline{FS(C)}] = \emptyset$.*

Demonstração. Tome pelo lema anterior as sequências $(n_k)_{k \geq 0}$ e $(W_k)_{k \geq 0}$. Tome B e C subconjuntos infinitos disjuntos de $\{n_k : k \geq 0\}$. Veremos que se $x \in FS(B)$, então $\phi(x) \notin \overline{\phi[FS(C)]}$. Escreva $x = \Sigma F$, com $F \in \mathcal{P}_f(B)$ e $\min F = n_k$. Temos então que $\phi(x) \in W_k \setminus W_{k+1}$. Por outro lado, dado $y \in FS(C)$ com $y = \Sigma G$, $G \in \mathcal{P}_f(C)$, se $\min G < n_k$, então $\phi(y) \notin W_k$ (lembre que a sequência $(W_k)_{k \geq 0}$ é decrescente); e se $\min G > n_k$, então $\phi(y) \in W_{k+1}$. Como W_k e W_{k+1} são clopens, segue que $\overline{\phi[FS(C)]} \subset \beta\mathbb{N} \setminus W_k \cup W_{k+1}$, e portanto $\phi(x) \notin \overline{\phi[FS(C)]}$.

Analogamente, dado $y \in FS(C)$, $\phi(y) \notin \overline{\phi[FS(B)]}$. Desse modo, temos que $\phi[FS(B)] \cap \overline{\phi[FS(C)]} = \phi[FS(C)] \cap \overline{\phi[FS(B)]} = \emptyset$, logo, pelo teorema 1.26(c), como $FS(B)$ e $FS(C)$ são enumeráveis, $\overline{\phi[FS(B)]} \cap \overline{\phi[FS(C)]} = \emptyset$. Ou seja, $\phi[\overline{FS(B)}] \cap \phi[\overline{FS(C)}] = \emptyset$, como queríamos. ■

Assim, podemos provar o teorema principal desta sub-seção, provando a seguinte (surpreendente) afirmação:

Teorema 2.35. *Seja $\phi : \beta\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ um homomorfismo contínuo. Então $\phi[\beta\mathbb{N}]$ é finito.*

Demonstração. Suponha que $\phi[\beta\mathbb{N}]$ é infinito. Vale que $\phi[\mathbb{N}]$ não possui idempotentes: se $\phi(k)$ fosse um idempotente para algum $k \in \mathbb{N}$, por indução teríamos que $\phi(a \cdot k) = \phi(k)$ para todo $a \in \mathbb{N}$. Assim, dado $x \in \mathbb{N}$, se $x \geq k$, então $x = a \cdot k + b$, com $a \in \mathbb{N}$ e $b < k$. Logo $\phi(x) = \phi(a \cdot k) + \phi(b) = \phi(k) + \phi(b)$. Portanto $\phi[\mathbb{N}] = \{\phi(x) : x < k\} \cup \{\phi(k) + \phi(b) : b < k\}$, que é finito, logo $\overline{\phi[\mathbb{N}]} = \phi[\beta\mathbb{N}] = \{\phi(x) : x < k\} \cup \{\phi(k) + \phi(b) : b < k\}$.

Dessa forma, dado p idempotente, as hipóteses do lema 2.34 estão satisfeitas, de acordo com o lema 2.32, então temos $B, C \subset \mathbb{N}$ infinitos e disjuntos tais que $\phi[\overline{FS(B)}] \cap \phi[\overline{FS(C)}] = \emptyset$. Como, pelo teorema 1.34, $\bigcap_{n \geq 1} \overline{FS_n(B)}$ e $\bigcap_{n \geq 1} \overline{FS_n(C)}$ são subsemigrupos, cada um possui um idempotente; sejam $s \in \bigcap_{n \geq 1} \overline{FS_n(B)}$ e $t \in \bigcap_{n \geq 1} \overline{FS_n(C)}$ tais idempotentes. Temos então que $\phi(s) \neq \phi(t)$, contradizendo o lema 2.32. ■

Corolário 2.36. *Seja $\phi : \beta\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ um homomorfismo contínuo. Então $\phi[\mathbb{N}^*] \cong \mathbb{Z}_m$ para algum $m \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Afirmamos que $\phi[\mathbb{N}^*]$ é um grupo cíclico de gerador $\phi(1) + \phi(p)$, para p um idempotente qualquer.

Note que dados $k, l \in \mathbb{N}$, $(\phi(k) + \phi(p)) + (\phi(l) + \phi(p)) = \phi(k + l) + \phi(p)$. Já sabemos que $\phi[\mathbb{N}^*]$ é um grupo, e pelo teorema anterior ele é finito. Seja h a identidade desse grupo. Note que $\{\phi(n) + \phi(p) : n \in \mathbb{N}\} \subset \phi[\mathbb{N}^*]$, e portanto existe o menor $n > 1$ tal que $\phi(n) + \phi(p) = \phi(k) + \phi(p)$, com $k < n$. Vale então que $\phi(n) + \phi(p) = \phi(n - k) + \phi(p) + \phi(k) + \phi(p) = \phi(k) + \phi(p)$. Aplicando a inversa de $\phi(k) + \phi(p)$, temos que $\phi(n - k) + \phi(p) = h$. Defina $m = n - k$. Temos então, por indução, que $\phi(k \cdot m) + \phi(p) = \phi(m) + \phi(p) = h$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Segue disso que se $x \geq m$ e escrevemos $x = a \cdot m + b$ com $a \geq 1$ e $0 \leq b < m$, então $\phi(x) + \phi(p) = \phi(a \cdot m) + \phi(p) + \phi(b) + \phi(p) = \phi(b) + \phi(p)$. Ou seja, dado $i \in \{0, \dots, m - 1\}$, e $x \in i + m\mathbb{N}$, $\phi(x) + \phi(p) = \phi(i) + \phi(p)$.

Agora seja $\phi(q) \in \phi[\mathbb{N}^*]$. Vimos no lema 2.32 que $\phi[\mathbb{N}^*] = \phi[\mathbb{N}^*] + \phi(p)$, logo $\phi(q) = \phi(q) + \phi(p)$. Tome $i \in \{0, \dots, m - 1\}$ tal que $i + m\mathbb{N} \in \phi(q)$. Pelo que foi observado acima, e como ϕ e a soma à direita são contínuas, $\phi(q) = \phi(q) + \phi(p) = \phi(i) + \phi(p)$. Portanto, temos que $\phi[\mathbb{N}^*] = \{\phi(i) + \phi(p) : 1 \leq i \leq m\}$, com $\phi(m) + \phi(p)$ a identidade do grupo. Portanto, $\phi[\mathbb{N}^*]$ é isomorfo ao grupo cíclico de ordem m , $\mathbb{Z}_m$. (Para ver que de fato $|\{\phi(i) + \phi(p) : 1 \leq i \leq m\}| = m$, suponha $1 \leq i < j \leq m$ com $\phi(i) + \phi(p) = \phi(j) + \phi(p)$; observe que $j \geq n > n - k \geq m$, contradição.) ■

Assim, a imagem de qualquer homomorfismo contínuo entre $\beta\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}^*$ é finita. Tem-se a questão: é possível que seja sempre trivial (unitária)? Unindo os resultados do teorema 2.35 e do lema 2.32, temos que a existência de um homomorfismo contínuo não trivial é equivalente à existência de um elemento de ordem finita em $\beta\mathbb{N}$ que não seja um idempotente (ou seja, ordem maior ou igual a 2).

De fato, o Teorema 3.1 do artigo de Neil Hindman [3] dá a seguinte forma mais precisa a essa equivalência:

Teorema 2.37. *São equivalentes:*

(a) *Existe um homomorfismo contínuo não-trivial de $\beta\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}^*$;*

(b) Existe um grupo finito não-trivial em $\mathbb{N}^*$, ou existem $p, q \in \mathbb{N}^*$ distintos tais que $q + q = q = p + p = q + p = p + q$.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b):

Seja $\phi : \beta\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ um homomorfismo contínuo não-trivial. Pelo teorema 2.35, $\phi[\mathbb{N}^*]$ é um grupo finito, logo se $|\phi[\mathbb{N}^*]| > 1$ ele é não-trivial. Suponha então $|\phi[\mathbb{N}^*]| = \{q\}$ (q idempotente). Pelo lema 2.32, tome $m \in \mathbb{N}$ o menor tal que se $x \geq m$, $\phi(x) = \phi(x) + \phi(p) \in \phi[\mathbb{N}^*]$. Como ϕ não é trivial, temos que $m \geq 2$, logo defina $p = \phi(m - 1)$. Temos então que $p + p = \phi(m - 1 + m - 1) = q$, $q + p = \phi(m + m - 1) = q$ e $p + q = \phi(m - 1 + m) = q$.

(b) $\Rightarrow$ (a):

Suponha que existe um grupo finito não trivial em $\mathbb{N}^*$; então algum subgrupo dele é homeomorfo a um grupo cíclico $\mathbb{Z}_n$, $n > 1$. Ou seja, existe um homomorfismo injetor $\psi : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{N}^*$. Defina $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ por $\phi(k) = \psi(\bar{k})$. Temos então que $\tilde{\phi} : \beta\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ é um homomorfismo contínuo não-trivial.

Suponha agora que existem $p, q \in \mathbb{N}^*$ distintos tais que $q + q = q = p + p = q + p = p + q$. Então $\phi : \beta\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ definida por $\phi(1) = p$ e $\phi(r) = q$ para todo $r \neq 1$, é um homomorfismo, pois, dados $r, s \neq 1$: $\phi(1 + 1) = q$ e $\phi(1) + \phi(1) = p + p = q$; $r + 1 \neq 1 \neq 1 + r$, logo $\phi(r + 1) = q = \phi(1 + r)$ e $\phi(r) + \phi(1) = q + p = q = p + q = \phi(1) + \phi(r)$; $r + s \neq 1$, logo $\phi(r + s) = q$ e $\phi(r) + \phi(s) = q + q = q$. Além disso, ϕ é contínua pois é constante sobre dois clopens, $\{1\}$ e $\beta\mathbb{N} \setminus \{1\}$. ■

Para os próximos corolários, definimos, para cada $q \in \beta\mathbb{N}$, $q_1 = q$ e $q_{n+1} = q_n + q$.

Corolário 2.38. Se $\phi : \beta\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ é um homomorfismo contínuo, então $|\phi^2[\beta\mathbb{N}]| = 1$.

Demonstração. Primeiramente defina $q = \phi(1)$ e vejamos que para algum $n \in \mathbb{N}$, q_n é idempotente. Lembre que pelo lema 2.32, existe $m' \in \mathbb{N}$ tal que se $x \geq m'$ então $\phi(x) = \phi(x) + \phi(p) \in \phi[\mathbb{N}^*]$, em que p é idempotente. Logo, como $\phi[\mathbb{N}^*] \cong \mathbb{Z}_m$ e $\phi(m') \in \phi[\mathbb{N}^*]$, tome $n \geq m'$ tal que $\phi(n) + \phi(p)$ é a identidade de $\phi[\mathbb{N}^*]$. Temos, pois, que $\phi(n) = \phi(n) + \phi(p)$ é um idempotente. Usando que ϕ é homomorfismo, $\phi(n) = q_n$. Logo q_n é idempotente.

Afirmção: $n\mathbb{N} \in q$. Para comprovar isso, seja γ o homomorfismo canônico de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}_{n^2}$. Vale que $\tilde{\gamma}$ é um homomorfismo também, e portanto $\tilde{\gamma}(q_n) = 0$. Por outro lado, note que $\tilde{\gamma}(q_n) = n \cdot \tilde{\gamma}(q)$, logo $n \cdot \tilde{\gamma}(q) = 0$. Além disso, dado $x \in \mathbb{N}$, $n \cdot \gamma(x) = 0$ se e somente se $x \in n\mathbb{N}$. Portanto $n\mathbb{N} \in q$.

Temos então: $\phi(n) = q_n$. Como q_n é idempotente, por indução vale que $\phi(k \cdot n) = q_n$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Ou seja, $\phi[n\mathbb{N}] = \{q_n\}$, e portanto $\phi(q) = q_n$. Ou seja $\phi(\phi(1)) = q_n$. Agora, aplicando indução, dado $l > 1$, temos que $\phi(\phi(l)) = \phi(\phi(l - 1) + \phi(1)) = \phi(\phi(l - 1)) + \phi(\phi(1)) = q_n + q_n = q_n$. Ou seja, $\phi^2[\mathbb{N}] = \{q_n\}$, do que segue que $\phi^2[\beta\mathbb{N}] = \{q_n\}$. ■

Corolário 2.39. *Se $q \in \mathbb{N}^*$ possui ordem infinita, então q não comuta com todo elemento de $\text{cl}\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$. Disso segue que qualquer elemento de $\mathbb{N}^*$ de ordem infinita não está no centro de qualquer subsemigrupo compacto de $\beta\mathbb{N}$.*

Demonstração. Considere a função $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ dada por $\phi(n) = q_n$. Vale que sua extensão $\tilde{\phi} : \beta\mathbb{N} \rightarrow \text{cl}\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ é sobrejetora (pois $\tilde{\phi}[\beta\mathbb{N}] = \tilde{\phi}[\text{cl } \mathbb{N}] = \text{cl } \phi[\mathbb{N}]$). Agora, se q comutar com todo elemento de $\text{cl}\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\tilde{\phi}$ será um homomorfismo, pois: sejam $r, s \in \beta\mathbb{N}$, e tome $(m_\alpha)_{\alpha \in A}$ e $(n_\beta)_{\beta \in B}$ redes em $\mathbb{N}$ convergindo para r e s , respectivamente. Então temos:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(r + s) &= \lim_{\alpha} \lim_{\beta} \phi(m_\alpha + n_\beta) \\ &= \lim_{\alpha} \lim_{\beta} (\phi(n_\beta) + \phi(m_\alpha)) \\ &= \lim_{\alpha} (\tilde{\phi}(s) + \phi(m_\alpha)) \\ &= \lim_{\alpha} (\phi(m_\alpha) + \tilde{\phi}(s)) \\ &= \tilde{\phi}(r) + \tilde{\phi}(s). \end{aligned}$$

Ou seja, ϕ seria um homomorfismo contínuo de $\beta\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}^*$ de imagem infinita, contradizendo o teorema 2.35. ■

Notamos rapidamente que o lema 2.30 nos fornece uma prova de que o centro topológico de $\mathbb{N}^*$ é vazio.

Corolário 2.40. *O centro topológico de $\mathbb{N}^*$ é vazio.*

Demonstração. Suponha $q \in \Lambda(\mathbb{N}^*)$. Seja p idempotente qualquer. Vale que $n + q + p = q + n + p$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, passando ao limite e usando que $q \in \Lambda(\mathbb{N}^*)$, temos que $r + q + p = q + r + p$ para todo $r \in \mathbb{N}^*$, contradizendo o lema 2.30. ■

O Teorema 2 do artigo [7] dá uma caracterização dos elementos canceláveis à direita de $\beta\mathbb{N}$. Porém antes precisaremos de um lema, que é o Teorema 1 do artigo [8].

Lema 2.41. *Suponha que $q \in \mathbb{N}^*$ não é cancelável à direita. Então existe $s \in \mathbb{N}^*$ tal que $q = s + q$.*

Demonstração. Sejam p_1, p_2 distintos e tais que $p_1 + q = p_2 + q$. Tome $A_1 \in p_1$ e $A_2 \in p_2$ tais que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Temos que $p_1 + q \in \overline{A_1 + q} = \overline{A_1} + q$, e $p_2 + q \in \overline{A_2 + q} = \overline{A_2} + q$. Ou seja, $\overline{A_1 + q} \cap \overline{A_2 + q} \neq \emptyset$; como $A_1, A_2 \subset \mathbb{N}$, temos que $(A_1 + q) \cap \overline{A_2 + q} \neq \emptyset$ ou $\overline{A_1 + q} \cap (A_2 + q) \neq \emptyset$. Sem perda de generalidade, tome $a \in A_1$ e $r \in \overline{A_2}$ tais que $a + q = r + q$. Tome $s \in \mathbb{N}^*$ tal que $s \supset \{-a + R : R \in r\}$. Vale então que $q = s + q$, pois: seja $Q \in q$. $a + Q \in a + q = r + q$, logo $\{x \in \mathbb{N} : -x + a + Q \in q\} \in r$, logo $-a + \{x \in \mathbb{N} : -x + a + Q \in q\} \in s$, ou seja, $\{y \in \mathbb{N} : -(a + y) + a + Q \in q\} \in s$, portanto $\{y \in \mathbb{N} : -y + Q \in q\} \in s$, e assim $Q \in s + q$. ■

(Note que o lema acima vale *ipsis litteris* se considerarmos G grupo enumerável no lugar de $\mathbb{N}$.)

Teorema 2.42. *Seja $q \in \mathbb{N}^*$. q é cancelável à direita se e somente se existe $X \in q$ com a seguinte propriedade: enumerando $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ de forma crescente, para cada $k \in \mathbb{N}$ vale que $\{x_n : x_{n+1} - x_n > k\} \in q$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$): Por contraposição. Ou seja, suponha que para todo $X \in q$ existe um $k_X \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_n : x_{n+1} - x_n \leq k_X\} \in q$ (sendo $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma enumeração crescente). Como $\{x_n : x_{n+1} - x_n \leq k_X\} = \bigcup_{m=1}^{k_X} \{x_n : x_{n+1} - x_n = m\}$, então existe m_X tal que $\{x_n : x_{n+1} - x_n = m_X\} \in q$.

Assim, para cada $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \in q$, temos que $\{x_n : x_{n+1} - x_n = m_X\} \in q$. Assim, para cada $X \in q$, tome $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ rede em $\{x_n : x_{n+1} - x_n = m_X\} \subset X$ que converge pra q . Defina, para cada x_λ , $y_\lambda = m_X + x_\lambda$ (note que $y_\lambda \in \{x_n : x_{n+1} - x_n = m_X\} \subset X$). Temos então que $\lim_{\lambda \in \Lambda} (m_X + x_\lambda) = m_X + q$, ou seja, $\lim_{\lambda \in \Lambda} y_\lambda = m_X + q$, e logo $m_X + q \in \overline{X}$ para cada $X \in q$. Assim, temos que a rede $(m_X + q)_{X \in q}$ converge para q ; tome uma sub-rede $(m_{X_\mu})_{\mu \in M}$ de $(m_X)_{X \in q}$ que converge, digamos, para s . Então temos que $q = \lim_{\mu \in M} (m_{X_\mu} + q) = \lim_{\mu \in M} (m_{X_\mu}) + q = s + q$. Assim, q não é cancelável à direita (pois se fosse, $q = s + q \Rightarrow 1 + q = 1 + s + q \Rightarrow 1 = 1 + s$, absurdo).

($\Leftarrow$): Por contraposição, isto é, suponha que q não é cancelável à direita. Então pelo lema acima, $q = s + q$ para algum $s \in \mathbb{N}^*$. Dado $X \in q$, $X \in s + q$, logo existem $Y \in s$ e $\{X_y : y \in Y\} \subset q$ tais que $\bigcup_{y \in Y} y + X_y \subset X$. Enumere $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ de forma crescente. Dado $x_n \in X_y$, $y + x_n \in X$; como a enumeração é crescente, temos que $y + x_n \geq x_{n+1}$, logo $x_{n+1} - x_n \leq y$. Ou seja, $\{x_n : x_{n+1} - x_n \leq y\} \supset X \cap X_y \in q$. ■

Lembre que definimos $q_1 = q$ e $q_{n+1} = q_n + q$. Com a caracterização dada acima, podemos provar o seguinte:

Teorema 2.43. *Se $q \in \mathbb{N}^*$ é cancelável à direita, então $\overline{\{q_n : n \in \mathbb{N}\}}$ não é um subsemigrupo.*

Demonstração. Por absurdo. Suponha que $\overline{\{q_n : n \in \mathbb{N}\}}$ seja um subsemigrupo. Como q é cancelável à direita, pelo teorema acima tome $X \in q$ tal que, enumerando $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ de forma crescente, $\{x_n : x_{n+1} - x_n > m\} \in q$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Considere somas da forma $x_{n_1} + \dots + x_{n_k}$, tais que $n_1 < \dots < n_k$ e $x_{n_{r+1}} - x_{n_r} > \sum_{i=1}^{r-1} x_{n_i}$ para todo $r \in \{1, \dots, k\}$. Vejamos que somas desse tipo são únicas. Suponha $x_{n_1} + \dots + x_{n_k} = x_{m_1} + \dots + x_{m_s}$ duas somas desse tipo. Vale que $n_k = m_s$, pois se s.p.g. $n_k > m_s$, então $x_{n_k} - x_{m_s} \geq x_{m_s+1} - x_{m_s} > \sum_{i=1}^{s-1} x_{m_i}$ e logo $x_{n_k} > x_{m_1} + \dots + x_{m_s}$, absurdo. Ou seja, $x_{n_k} = x_{m_s}$, logo ambos podem ser cancelados na igualdade; assim podemos aplicar uma indução em k , e ter que $k = s$ e $n_i = m_i$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$.

Desse modo, seja S o conjunto de todas as somas desse tipo, e defina, para cada $m \in \mathbb{N}$, S_m o

subconjunto de S das somas $x_{n_1} + \dots + x_{n_k}$ que também verificam $x_{n_{i+1}} - x_{n_i} > m$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Definimos também $c : S \rightarrow \mathbb{N}$ por $c(x_{n_1} + \dots + x_{n_k}) = k$.

Mostraremos por indução em r que, para cada $m \in \mathbb{N}$, $\{s \in S_m : c(s) = r\} \in q_r$. No caso $r = 1$, temos que $\{s \in S_m : c(s) = 1\} = \{x_{n_1} : x_{n_1+1} - x_{n_1} > m\} \in q$. Suponha que valha para $r - 1$. Mostraremos que para cada $U \in q_r$, $U \cap \{s \in S_m : c(s) = r\} \neq \emptyset$. Como $U \in q_r = q_{r-1} + q$, então existem $V \in q_{r-1}$ e $\{W_v : v \in V\} \subset q$ tais que $\bigcup_{v \in V} v + W_v \subset U$. Usando a hipótese indutiva, tome $v \in V \cap S_m$ tal que $c(v) = r - 1$. Como $W_v \cap X \in q \in \mathbb{N}^*$ e usando a propriedade de X , tome $x_n \in W_v \cap X$ tal que $x_{n+1} - x_n > v$, $x_{n+1} - x_n > m$ e $x_n > v$. Vale então que $v + x_n \in S_m \cap U$ e $c(v + x_n) = r$, como queríamos.

Portanto, considerando $\tilde{c} : \bar{S} \rightarrow \beta\mathbb{N}$, temos que $\tilde{c}(q_r) = r$.

Agora, para cada $m \in \mathbb{N}$, considere $T_m = \{x_{n_1} + \dots + x_{n_k} \in S_m : x_{n_1} > m \text{ e } x_{n_{r+1}} - x_{n_r} > m + \sum_{i=1}^{r-1} x_{n_i}\}$. Vejamos primeiro que $T_m \in q$. Vimos acima que $\{s \in S_m : c(s) = 1\} \in q$, e $\{s \in S_m : c(s) = 1\} = \{x_{n_1} : x_{n_1+1} - x_{n_1} > m\}$. Como $q \in \mathbb{N}^*$ segue que $\{x_{n_1} : x_{n_1+1} - x_{n_1} > m \text{ e } x_{n_1} > m\} \in q$. Note que $\{x_{n_1} : x_{n_1+1} - x_{n_1} > m \text{ e } x_{n_1} > m\} \subset T_m$ (são exatamente os elementos de T_m de comprimento 1).

Portanto, $q \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \overline{T_m}$, que é compacto. Queremos ver que $\overline{\{q_n : n \in \mathbb{N}\}} \subset \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \overline{T_m}$; basta ver que $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \overline{T_m}$ é um subsemigrupo. Para isso usaremos a condição dada em 1.34. Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $x_{n_1} + \dots + x_{n_k} \in T_m$. Defina $m' = m + \sum_{i=1}^k x_{n_i}$. Quero ver que $x_{n_1} + \dots + x_{n_k} + T_{m'} \subset T_m$. Seja $x_{n_{j_1}} + \dots + x_{n_{j_l}} \in T_{m'}$. Como $x_{n_{j_1}} > m' > x_{n_k}$, então $n_{j_1} > n_k$. Logo temos que $n_1 < \dots < n_k < n_{j_1} < \dots < n_{j_l}$; $x_{n_1} > m$; para $r \in \{1, \dots, k\}$, $x_{n_{r+1}} - x_{n_r} > m + \sum_{i=1}^{r-1} x_{n_i}$; para $r \in \{1, \dots, l\}$, $x_{n_{j_r+1}} - x_{n_{j_r}} > m' + \sum_{i=1}^{r-1} x_{n_{j_i}} = m + \sum_{i=1}^k x_{n_i} + \sum_{i=1}^{r-1} x_{n_{j_i}}$. Destarte, $x_{n_1} + \dots + x_{n_k} + x_{n_{j_1}} + \dots + x_{n_{j_l}} \in T_m$, como queríamos.

Além disso, note no argumento acima que $c(x_{n_1} + \dots + x_{n_k} + x_{n_{j_1}} + \dots + x_{n_{j_l}}) = k + l = c(x_{n_1} + \dots + x_{n_k}) + c(x_{n_{j_1}} + \dots + x_{n_{j_l}})$, e portanto, pelo teorema 1.36, $\tilde{c}$ é um homomorfismo sobre $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \overline{T_m}$. Como sabemos que $\overline{\{q_n : n \in \mathbb{N}\}} \subset \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \overline{T_m}$, e por hipótese $\overline{\{q_n : n \in \mathbb{N}\}}$ é um subsemigrupo, podemos dizer que $\tilde{c}$ é um homomorfismo sobre $\overline{\{q_n : n \in \mathbb{N}\}}$.

Considere, agora, $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ definida por $\phi(n) = q_n$. Note que $\phi[\mathbb{N}] = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$, logo $\tilde{\phi}[\beta\mathbb{N}] = \overline{\{q_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Além disso, $\tilde{c}(\phi(n)) = n$ e $\phi(\tilde{c}(q_n)) = q_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, do que segue que $\tilde{c}(\tilde{\phi}(s)) = s$ para todo $s \in \beta\mathbb{N}$ e $\tilde{\phi}(\tilde{c}(t)) = t$ para todo $t \in \overline{\{q_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Portanto, usando que $\tilde{c}$ é um homomorfismo sobre $\overline{\{q_n : n \in \mathbb{N}\}}$ temos que, dados $s, r \in \beta\mathbb{N}$, $\tilde{\phi}(s + r) = \tilde{\phi}(\tilde{c}(\tilde{\phi}(s)) + \tilde{c}(\tilde{\phi}(r))) = \tilde{\phi}(\tilde{c}(\tilde{\phi}(s) + \tilde{\phi}(r))) = \tilde{\phi}(s) + \tilde{\phi}(r)$. Ou seja, $\tilde{\phi} : \beta\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ é um homomorfismo contínuo; para contradizer o Teorema 2.35, basta ver que a imagem é infinita. De fato, $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ é infinito; caso $q_k = q_n$ com $n > k$, então $1 + q_k = 1 + q_n$. Cancelando q k vezes à direita, obtemos $1 = 1 + q_{n-k}$, impossível. ■

Em contraste, o Teorema 4.4 de [3] nos dá uma classe de exemplos em que $\overline{\{q_n : n \in \mathbb{N}\}}$ é um

subsemigrupo.

Teorema 2.44. *Sejam p um idempotente, $k \in \mathbb{N}$, e $q = k + p$. Então $\overline{\{q_n : n \in \mathbb{N}\}}$ é um subsemigrupo.*

Demonstração. Usando que $\mathbb{N}$ é o centro de $\beta\mathbb{N}$, temos que $\{q_n : n \in \mathbb{N}\} = k\mathbb{N} + p$, logo $\overline{\{q_n : n \in \mathbb{N}\}} = \overline{k\mathbb{N} + p} = \overline{k\mathbb{N}} + p$. Note pelo teorema 1.34 que $\overline{k\mathbb{N}}$ é um subsemigrupo, e pelo lema 2.2 que $p \in \overline{k\mathbb{N}}$, logo dados $r_1, r_2 \in \overline{k\mathbb{N}}$, $(r_1 + p) + (r_2 + p) = (r_1 + p + r_2) + p \in \overline{k\mathbb{N}} + p$. Portanto $\overline{k\mathbb{N}} + p$ é um subsemigrupo. ■

2.4 Subgrupos discretos em $\beta\mathbb{N}$

Esta seção se devotará ao estudo do artigo “Discrete Groups in $\beta\mathbb{N}$ ”, de Dona Strauss e Neil Hindman ([11]). Os primeiros dois resultados mostrarão que existem 2^c cópias discretas de $\mathbb{Z}$ em cada grupo maximal de $K(\beta\mathbb{N})$, cada par se intersectando somente na identidade. Lembramos que pelo Teorema 1.16, um conjunto é um grupo maximal em $K(\beta\mathbb{N})$ se e somente se é da forma $q + \beta\mathbb{N} + q$, com $q \in K(\beta\mathbb{N})$ idempotente (minimal).

Novamente, usaremos a notação $\text{supp}(x) \in \mathcal{P}_f(\omega)$ definida para $x \in \mathbb{N}$ como a representação binária de x , ou seja, $x = \sum_{t \in \text{supp}(x)} 2^t$. Recordamos também o Lema 2.2, que será usado a seguir, e o subsemigrupo $\mathbb{H} = \bigcap_{m \geq 1} \overline{2^m \mathbb{N}}$.

Teorema 2.45. *Sejam $A, B \subset \mathbb{N}$ infinitos e disjuntos, $q \in K(\beta\mathbb{N})$ idempotente, $u \in \{2^n : n \in A\}^*$, $v \in \{2^n : n \in B\}^*$. Considere $\varphi, \psi : \mathbb{Z} \rightarrow q + \beta\mathbb{N} + q$ os homomorfismos determinados por $\varphi(1) = q + u + q$ e $\psi(1) = q + v + q$. Então $\overline{\{\varphi(n) : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}} \cap \overline{\{\psi(n) : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}} = \emptyset$. Além disso, se $q \notin \overline{\{\varphi(n) : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}}$, então $\{\varphi(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ é uma cópia discreta de $\mathbb{Z}$; e se $q \notin \overline{\{\psi(n) : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}}$, então $\{\psi(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ é uma cópia discreta de $\mathbb{Z}$.*

Demonstração. Primeiramente, note que $q \in \mathbb{H}$; e como A e B são infinitos e $u, v \in \mathbb{N}^*$, $u, v \in \mathbb{H}$. Segue que $\varphi[\mathbb{Z}] \cup \psi[\mathbb{Z}] \subset \mathbb{H}$. Note também que $\varphi(0) = \psi(0) = q$.

Agora, mostraremos que para quaisquer $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$\{x \in \mathbb{N} : |\text{supp}(x) \cap A| \equiv 0 \pmod{n}\} \in \psi(m), \text{ e}$$

$$\{x \in \mathbb{N} : |\text{supp}(x) \cap B| \equiv 0 \pmod{n}\} \in \varphi(m).$$

Por analogia, basta mostrar a primeira asserção. Fixe $n \in \mathbb{N}$. Defina $C = \{x \in \mathbb{N} : |\text{supp}(x) \cap A| \equiv 0 \pmod{n}\}$. Mostraremos que $C \in q$. Tome $i \in \{0, \dots, n-1\}$ tal que $D := \{x \in \mathbb{N} : |\text{supp}(x) \cap A| \equiv i \pmod{n}\} \in q$. Temos $\{x \in \mathbb{N} : -x + D \in q\} \in q$, logo tome $x \in D$ tal que $-x + D \in q$. Seja $t = \max \text{supp}(x)$ e tome $y \in (-x + D) \cap D \cap 2^{t+1}\mathbb{N} \in q$. Note que $x + y \in D$ e que $\text{supp}(x + y) = \text{supp}(x) \cup \text{supp}(y)$ e $\text{supp}(x) \cap \text{supp}(y) = \emptyset$. Portanto, $i \equiv |\text{supp}(x + y) \cap A| = |\text{supp}(x) \cap A| + |\text{supp}(y) \cap A| \equiv i + i \pmod{n}$, de forma que $i = 0$. Ou seja, $D = C$.

Agora, por indução em $m \in \omega$ mostraremos que $C \in \psi(m)$. Acima mostramos que $C \in \psi(0)$. Suponha que $C \in \psi(m)$. Observe que $\psi(m+1) = \psi(m) + \psi(1) = \psi(m) + q + v + q = \psi(m) + v + q$. Para ver que $C \in \psi(m) + v + q$, basta ver que $C \subset \{x \in \mathbb{N} : -x + C \in v + q\}$, logo seja $x \in C$. Seja $t = \max \text{supp}(x)$. Como $\{2^s : s \in B \text{ e } s > t\} \in v$, para ver que $-x + C \in v + q$ basta ver que $\{2^s : s \in B \text{ e } s > t\} \subset \{z \in \mathbb{N} : -z + (-x + C) \in q\}$. Seja $s \in B$ tal que $s > t$. Como $C \cap 2^{s+1}\mathbb{N} \in q$, para ver que $-2^s + (-x + C) \in q$ basta ver que $C \cap 2^{s+1}\mathbb{N} \subset -2^s + (-x + C)$. Seja então $y \in C \cap 2^{s+1}\mathbb{N}$. Como $s \notin A$, vale que $|\text{supp}(x + 2^s + y) \cap A| = |\text{supp}(x) \cap A| + |\text{supp}(y) \cap A| \equiv 0 \pmod{n}$, como queríamos.

Para completar esta parte, mostraremos que dado $m \in \mathbb{N}$, $C \in \psi(-m)$. Tome $i \in \{0, \dots, n-1\}$

tal que $D = \{x \in \mathbb{N} : |\text{supp}(x) \cap A| \equiv i \pmod{n}\} \in \psi(-m)$. Vale que $C \in q = \psi(-m) + \psi(m)$, ou seja $\{x \in \mathbb{N} : -x + C \in \psi(m)\} \in \psi(-m)$, logo tome $x \in D$ tal que $-x + C \in \psi(m)$. Seja $t = \max \text{supp}(x)$ e tome $y \in (-x + C) \cap C \cap 2^{t+1}\mathbb{N} \in \psi(m)$. Segue que $0 \equiv |\text{supp}(x + y) \cap A| = |\text{supp}(x) \cap A| + |\text{supp}(y) \cap A| \equiv i + 0$, de forma que $i = 0$. Ou seja, $D = C$.

Será também necessário mostrar que para quaisquer $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$\{x \in \mathbb{N} : |\text{supp}(x) \cap A| \equiv m \pmod{n}\} \in \varphi(m), \text{ e}$$

$$\{x \in \mathbb{N} : |\text{supp}(x) \cap B| \equiv m \pmod{n}\} \in \psi(m).$$

Novamente as provas das duas asserções são análogas, logo faremos a primeira. Fixe $n \in \mathbb{N}$ e defina, para cada $m \in \mathbb{Z}$, $C_m = \{x \in \mathbb{N} : |\text{supp}(x) \cap A| \equiv m \pmod{n}\}$. Nosso objetivo é mostrar que $C_m \in \varphi(m)$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Note que já foi mostrado acima que $C_0 = C \in q = \varphi(0)$. Faremos novamente uma indução em $m \in \omega$. Suponha que $C_m \in \varphi(m)$. Para ver que $C_{m+1} \in \varphi(m+1) = \varphi(m) + u + q$, basta ver que $C_m \subset \{x \in \mathbb{N} : -x + C_{m+1} \in u + q\}$, logo seja $x \in C_m$. Seja $t = \max \text{supp}(x)$. Para ver que $-x + C_{m+1} \in u + q$, como $\{2^s : s \in A \text{ e } s > t\} \in u$, basta ver que $\{2^s : s \in A \text{ e } s > t\} \subset \{z \in \mathbb{N} : -z + (-x + C_{m+1}) \in q\}$. Seja $s \in A$ com $s > t$. Como $C_0 \cap 2^{s+1}\mathbb{N} \in q$, para ver que $-2^s + (-x + C_{m+1}) \in q$ basta ver que $C_0 \cap 2^{s+1}\mathbb{N} \subset -2^s + (-x + C_{m+1})$. Seja então $y \in C_0 \cap 2^{s+1}\mathbb{N}$. Vale que $|\text{supp}(x + 2^s + y) \cap A| = |\text{supp}(x) \cap A| + 1 + |\text{supp}(y) \cap A| \equiv m + 1 + 0 \pmod{n}$, como queríamos.

Para completar, seja $m \in \mathbb{N}$ e vejamos que $C_{-m} \in \varphi(-m)$. Seja $i \in \{0, \dots, n-1\}$ tal que $D = \{x \in \mathbb{N} : |\text{supp}(x) \cap A| \equiv i \pmod{n}\} \in \varphi(-m)$. Temos que $C_0 \in q = \varphi(-m) + \varphi(m)$, ou seja $\{x \in \mathbb{N} : -x + C_0 \in \varphi(m)\} \in \varphi(-m)$, logo tome $x \in D$ tal que $-x + C_0 \in \varphi(m)$. Seja $t = \max \text{supp}(x)$ e tome $y \in (-x + C_0) \cap C_m \cap 2^{t+1}\mathbb{N} \in \varphi(m)$. Vale que $0 \equiv |\text{supp}(x + y) \cap A| = |\text{supp}(x) \cap A| + |\text{supp}(y) \cap A| \equiv i + m \pmod{n}$, de forma que $i \equiv -m \pmod{n}$ e assim $D = C$ como queríamos.

Note que as asserções provadas acima garantem que se $k, m \in \mathbb{Z}$ são distintos, então $\varphi(k) \neq \varphi(m)$ e $\psi(k) \neq \psi(m)$, e portanto $\varphi[\mathbb{Z}]$ e $\psi[\mathbb{Z}]$ são cópias algébricas de $\mathbb{Z}$.

Então, suponha que $\overline{\{\varphi(n) : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}} \cap \overline{\{\psi(n) : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}} \neq \emptyset$. Pelo Teorema 1.26(c), temos, sem perda de generalidade, que $\{\varphi(n) : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \cap \overline{\{\psi(n) : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}} \neq \emptyset$; logo tome $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que $\varphi(m) \in \overline{\{\psi(n) : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}}$. Porém, $\{x \in \mathbb{N} : |\text{supp}(x) \cap A| \equiv m \pmod{|m|+1}\}$ é uma vizinhança de $\varphi(m)$ disjunta de $\overline{\{x \in \mathbb{N} : |\text{supp}(x) \cap A| \equiv 0 \pmod{|m|+1}\}}$, e $\{\psi(n) : n \in \mathbb{Z}\} \subset \overline{\{x \in \mathbb{N} : |\text{supp}(x) \cap A| \equiv 0 \pmod{|m|+1}\}}$; uma contradição.

Por fim, suponha que $q \notin \overline{\{\varphi(n) : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}}$. Tome U vizinhança de q disjunta de $\{\varphi(n) : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$. Dado $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, U é uma vizinhança de $\varphi(n) + \varphi(-n) = \rho_{\varphi(-n)}(\varphi(n))$, logo seja V vizinhança de $\varphi(n)$ tal que $\rho_{\varphi(-n)}[V] = V + \varphi(-n) \subset U$. Como $U \cap \{\varphi(n) : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} = \emptyset$, segue que $V \cap \{\varphi(m) : m \in \mathbb{Z} \setminus \{n\}\} = \emptyset$. Assim, $\{\varphi(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ é discreto. ■

Em resumo, temos o seguinte corolário:

Corolário 2.46. *Seja $q \in K(\beta\mathbb{N})$ idempotente. Para cada $p \in \{2^n : n \in \mathbb{N}\}^*$, seja $\varphi_p : \mathbb{Z} \rightarrow q + \beta\mathbb{N} + q$ o homomorfismo determinado por $\varphi_p(1) = q + p + q$. Então, dados $p, r \in \{2^n : n \in \mathbb{N}\}^*$ distintos, $\overline{\{\varphi_p(n) : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}} \cap \overline{\{\varphi_r(n) : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}} = \emptyset$. Além disso, existe no máximo um $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $\{\varphi_p(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ não é discreto.*

Demonstração. Para a primeira afirmação, como p e r são distintos, existem $A, B \subset \mathbb{N}$ disjuntos tais que $\{2^n : n \in A\} \in p$ e $\{2^n : n \in B\} \in r$, de forma que podemos aplicar o Teorema 2.45. Ademais, suponha que $p, p' \in \mathbb{N}^*$ são tais que $\{\varphi_p(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ e $\{\varphi_{p'}(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ não são discretos. Então $q \in \overline{\{\varphi_p(n) : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}} \cap \overline{\{\varphi_{p'}(n) : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}}$. Pelo que acabamos de ver acima, isso implica que $p = p'$. ■

O restante do artigo trata da existência de cópias de grupos e semigrupos livres dentro dos grupos maximais de $K(\beta\mathbb{N})$. Primeiramente, estabeleceremos a existência de 2^c cópias do grupo livre sobre 2 geradores, disjuntas exceto pela identidade.

Lema 2.47. *Existe um grupo topológico compacto C que contém um grupo livre F sobre os geradores distintos $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.*

Demonstração. Isso é um caso particular de 3.16. ■

Lema 2.48. *Sejam C e F como no Lema 2.47. Sejam $A_1, A_2, A_3, A_4 \subset \mathbb{N}$ dois-a-dois disjuntos e seja $q \in K(\beta\mathbb{N})$ idempotente. Para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ seja $u_i \in \{2^n : n \in A_i\}^*$ qualquer e defina $r_i = q + u_i + q$. Seja G o subgrupo de $q + \beta\mathbb{N} + q$ gerado por $\{r_1, r_2, r_3, r_4\}$. Então existe um homomorfismo contínuo $\sigma : \{0\} \cup \mathbb{H} \rightarrow C$ tal que $\sigma|_G$ é um isomorfismo entre G e F e $\sigma(r_i) = a_i$ para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.*

Demonstração. Denote a identidade de C por e . Defina $f : \omega \rightarrow C$ assim: $f(0) = e$. Dado $n \in \omega$, $f(2^n) = a_i$ se $n \in A_i$; $f(2^n) = e$ caso $n \notin A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$. E dado $I \in \mathcal{P}_f(\omega)$, $f(\sum_{n \in I} 2^n) = \prod_{n \in I} f(2^n)$. Tome $\tilde{f} : \beta\omega \rightarrow C$ a extensão contínua de f , e seja σ a restrição de $\tilde{f}$ a $\{0\} \cup \mathbb{H}$. Como $\{0\} \cup \mathbb{H} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} 2^n\omega$, podemos aplicar o Teorema 1.36 sobre a coleção $\mathcal{A} = \{2^n\omega : n \in \mathbb{N}\}$ e obter que σ é um homomorfismo.

Para ver que $\sigma[G] = F$, basta ver que $\sigma(r_i) = a_i$ para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Note que σ é constante e igual a a_i sobre $\{2^n : n \in A_i\}$, de forma que $\sigma(u_i) = a_i$. E como q é idempotente, $\sigma(q) = e$. Assim $\sigma(r_i) = ea_ie = a_i$.

E para ver que σ é injetora, considere $h : F \rightarrow G$ o homomorfismo determinado por $h(a_i) = r_i$ para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Temos que $\sigma \circ h(a_i) = r_i$ para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, de forma que $\sigma \circ h : F \rightarrow F$ é a identidade, e portanto σ é injetora. ■

Teorema 2.49. *Sejam $A_1, A_2, A_3, A_4, F, C, u_1, u_2, u_3, u_4, r_1, r_2, r_3, r_4, G$ e σ como no Lema acima. Sejam G_1 o subgrupo de G gerado por $\{r_1, r_2\}$ e G_2 o subgrupo gerado por $\{r_3, r_4\}$. Então $\overline{G_1 \setminus \{q\}} \cap \overline{G_2 \setminus \{q\}} = \emptyset$. Além disso, dado $i \in \{1, 2\}$, se $q \notin \overline{G_i \setminus \{q\}}$, então G_i é discreto.*

Demonstração. Suponha que $\overline{G_1 \setminus \{q\}} \cap \overline{G_2 \setminus \{q\}} \neq \emptyset$. Pelo Teorema 1.26(c), sem perda de generalidade, tome $w \in \overline{G_1 \setminus \{q\}} \cap \overline{G_2 \setminus \{q\}}$. Mostraremos, contraditoriamente, que $w = q$. Denote por s_1 e s_2 as inversas de r_1 e r_2 em G_1 , respectivamente. Tome $p_1, \dots, p_m \in \{r_1, r_2, s_1, s_2\}$ tais que $w = p_1 + \dots + p_m$.

Defina $\theta : \mathbb{N} \rightarrow \omega$ por $\theta(n) = \sum \{2^t : t \in \text{supp}(n) \cap (A_1 \cup A_2)\}$ e seja $\tilde{\theta} : \beta\mathbb{N} \rightarrow \beta\omega$ sua extensão contínua. Usando o Teorema 1.36, vê-se que $\tilde{\theta}|_{\mathbb{H}}$ é um homomorfismo. Além disso, note que dados $n, m \in \mathbb{N}$, $\theta(2^m n) \in 2^m \mathbb{N}$, de forma que usando $\mathbb{H} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \overline{2^m \mathbb{N}}$ e o Teorema 1.26(e), temos que $\tilde{\theta}[\mathbb{H}] \subset \mathbb{H} \cup \{0\} = \text{dom } \sigma$.

Para $i \in \{1, 2\}$, θ é a identidade sobre $\{2^n : n \in A_i\}$, de modo que $\tilde{\theta}(u_i) = u_i$; e $\sigma(\tilde{\theta}(q)) = e$ pois q é idempotente. Temos então: $\sigma(\tilde{\theta}(r_i)) = \sigma(\tilde{\theta}(q + u_i + q)) = e\sigma(\tilde{\theta}(u_i))e = e\sigma(u_i)e = \sigma(q + u_i + q) = \sigma(r_i)$. E $\sigma(\tilde{\theta}(s_i)) = \sigma(\tilde{\theta}(r_i))^{-1} = \sigma(r_i)^{-1} = \sigma(s_i)$.

Por outro lado, para $i \in \{3, 4\}$, θ é nula sobre $\{2^n : n \in A_i\}$, de forma que $\tilde{\theta}(u_i) = 0$, e assim $\sigma(\tilde{\theta}(r_i)) = \sigma(\tilde{\theta}((q + u_i + q))) = eee = e$. Disso segue que $\sigma \circ \tilde{\theta}[G_2] = \{e\}$. Portanto, por continuidade, como $w \in \overline{G_2}$, $\sigma(\tilde{\theta}(w)) = e$. Temos então que $\sigma(q) = e = \sigma(\tilde{\theta}(w)) = \sigma(\tilde{\theta}((p_1 + \dots + p_m))) = \sigma(p_1 + \dots + p_m) = \sigma(w)$. Porém, como vimos no Lema 2.48, σ é um isomorfismo sobre G , de forma que $w = q$.

Por fim, seja $i \in \{1, 2\}$ e suponha que $q \notin \overline{G_i \setminus \{q\}}$. Tome U vizinhança de q disjunta de $G_i \setminus \{q\}$. Seja $w \in G_i \setminus \{q\}$ qualquer, e seja w' sua inversa neste grupo; temos que U é uma vizinhança de $w + w'$, logo seja V vizinhança de w tal que $V + w' \subset U$. Então $V \cap G_i \setminus \{w\} = \emptyset$, e assim, G_i é discreto. ■

Corolário 2.50. *Seja $q \in K(\beta\mathbb{N})$ um idempotente. Então existem 2^c cópias discretas do grupo livre sobre 2 geradores em $(q + \beta\mathbb{N} + q) \cap \mathbb{H}$. A interseção dos fechos de quaisquer dois grupos desse tipo é $\{q\}$.*

Demonstração. Particione $\{2^n : n \in \mathbb{N}\}^*$ em 2^c conjuntos de dois elementos: $\{x_\alpha, y_\alpha\}$ para $\alpha < 2^c$. Para cada α , seja G_α o subgrupo de $q + \beta\mathbb{N} + q$ gerado por $\{q + x_\alpha + q, q + y_\alpha + q\}$. Então se $\alpha < \beta < 2^c$, podemos tomar $A_1, A_2, A_3, A_4 \subset \mathbb{N}$ disjuntos tais que $\{2^n : n \in A_1\} \in x_\alpha$, $\{2^n : n \in A_2\} \in y_\alpha$, $\{2^n : n \in A_3\} \in x_\beta$ e $\{2^n : n \in A_4\} \in y_\beta$, de forma que o Teorema 2.49 se aplica, e temos que cada G_α é um grupo livre sobre dois geradores, e existe no máximo um deles que não é discreto. ■

Definição 2.51. Seja X um espaço topológico. Dizemos que $Y \subset X$ é *fortemente discreto* se para cada $x \in Y$ existir U_x vizinhança de x em X de forma que para todos $x, y \in Y$ distintos,

$$U_x \cap U_y = \emptyset.$$

Teorema 2.52. *Existe uma cópia fortemente discreta do semigrupo livre com identidade sobre $\mathfrak{c}$ geradores em $\mathbb{H}$. (Em particular é discreto em $\mathbb{N}^*$.)*

Demonstração. Primeiramente, tome $\{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ uma família quase disjunta de subconjuntos de $2\mathbb{N} + 1$, e tome $p_\alpha \in \{2^n : n \in A_\alpha\}^*$ para cada $\alpha < \mathfrak{c}$. Agora, precisamos tomar $q \in \overline{\{x \in \mathbb{N} : \text{supp}(x) \subset 2\mathbb{N}\}}$ idempotente. Para tanto, defina $C = \{x \in \mathbb{N} : \text{supp}(x) \subset 2\mathbb{N}\}$, e mostraremos que $\mathbb{H} \cap \overline{C}$ é um subsemigrupo (evidentemente compacto) de $\beta\mathbb{N}$: defina, para cada $m \in \mathbb{N}$, $T_m = 2^m\mathbb{N} \cap C$; vale que $\mathbb{H} \cap \overline{C} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \overline{T_m}$, e dados $m \in \mathbb{N}$ e $x \in T_m$, tome $n = \max \text{supp}(x) + 1$; dado $y \in T_n$, vale que $\text{supp}(x + y) = \text{supp}(x) \cup \text{supp}(y) \subset 2\mathbb{N}$ e $x + y \in T_m$; assim, aplica-se o Teorema 1.34 e temos que $\mathbb{H} \cap \overline{C}$ é um subsemigrupo compacto, logo possui um idempotente q .

Defina agora, para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, $r_\alpha = q + p_\alpha + q$. Observe que $S = \{r_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} \subset \mathbb{H}$, pois $\mathbb{H}$ é subsemigrupo, $q \in \mathbb{H}$ e $p_\alpha \in \mathbb{H}$ para cada $\alpha < \mathfrak{c}$. E como $q + q = q$, q é uma identidade para S . Veremos que S gera um semigrupo livre com identidade q que é fortemente discreto em $\mathbb{H}$.

Para cada $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ sequência finita em $\mathfrak{c}$, considere $B_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} = \{x \in \mathbb{N} : \text{supp}(x) \cap (2\mathbb{N} + 1) = \{n_1, \dots, n_k\} \text{ em que } n_1 < \dots < n_k \text{ e } n_i \in A_{\alpha_i} \text{ para cada } i \in \{1, \dots, k\}\}$.

Afirmção 1: Para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, $B_{(\alpha)} \in r_\alpha$. Lembre que $C \in q$. Para cada $x \in C$, defina $D_x = \{2^n : n \in A_\alpha \text{ e } n > \max \text{supp}(x)\}$ e note que $D_x \in p_\alpha$. Para cada $x \in C$ e cada $n \in A_\alpha$ com $n > \max \text{supp}(x)$, defina $E_{x,n} = \{z \in C : \min \text{supp}(z) > n\}$ e note que $E_{x,n} \in q$. Logo podemos aplicar o Lema 2.7 e obter que $P = \{x + 2^n + z : x \in C, n \in A_\alpha \text{ e } \max \text{supp}(x) < n < \min \text{supp}(z)\} \in q + p_\alpha + q = r_\alpha$. Agora, dado $x + 2^n + z \in P$, $\text{supp}(x + 2^n + z) = \text{supp}(x) \cup \{n\} \cup \text{supp}(z)$; como $x, z \in C$, segue que $\text{supp}(x + 2^n + z) \cap (2\mathbb{N} + 1) = \{n\}$, e $n \in A_\alpha$. Segue que $P \subset B_{(\alpha)}$, logo $B_{(\alpha)} \in r_\alpha$.

Afirmção 2: Dados $k > 1$, e $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathfrak{c}^{<\omega}$, então $B_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1})} \subset \{x \in \mathbb{N} : -x + B_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \in r_{\alpha_k}\}$. Seja então $x \in B_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1})}$. Quero ver que $-x + B_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \in r_{\alpha_k}$. Como $r_{\alpha_k} \in \mathbb{H}$, tome $n = \max \text{supp}(x) + 1$; basta ver então que $B_{(\alpha_k)} \cap 2^n\mathbb{N} \subset -x + B_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1})}$; para isso, seja $y \in B_{(\alpha_k)} \cap 2^n\mathbb{N}$, e tome para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, $n_i \in A_{\alpha_i}$ de forma que $\text{supp}(x) \cap (2\mathbb{N} + 1) = \{n_1, \dots, n_{k-1}\}$ com $n_1 < \dots < n_{k-1}$ e $\text{supp}(y) \cap (2\mathbb{N} + 1) = \{n_k\}$. Temos então que $n_k > n_{k-1}$, e que $\text{supp}(x + y) \cap (2\mathbb{N} + 1) = (\text{supp}(x) \cap (2\mathbb{N} + 1)) \cup (\text{supp}(y) \cap (2\mathbb{N} + 1)) = \{n_1, \dots, n_k\}$, e assim $x + y \in B_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}$.

Afirmção 3: Dados $k > 1$ e $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathfrak{c}^{<\omega}$, $B_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \in r_{\alpha_1} + \dots + r_{\alpha_k}$. Por indução: vimos acima que $B_{(\alpha_1)} \in r_{\alpha_1}$ e $B_{(\alpha_1)} \subset \{x \in \mathbb{N} : -x + B_{(\alpha_1, \alpha_2)} \in r_{\alpha_2}\}$, logo $B_{(\alpha_1, \alpha_2)} \in r_{\alpha_1} + r_{\alpha_2}$. Agora suponha que $B_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1})} \in r_{\alpha_1} + \dots + r_{\alpha_{k-1}}$; como $B_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1})} \subset \{x \in \mathbb{N} : -x + B_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \in r_{\alpha_k}\}$, segue que $B_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \in r_{\alpha_1} + \dots + r_{\alpha_k}$.

Assim, para ver que S gera um semigrupo livre com identidade q , fortemente discreto em $\mathbb{H}$, note

em primeiro lugar que, para cada $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathfrak{c}^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$, $C \cap B_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} = \emptyset$. Em segundo lugar, vejamos que dados $(\alpha_1, \dots, \alpha_k), (\delta_1, \dots, \delta_l) \in \mathfrak{c}^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ distintos, $\overline{B_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}} \cap \overline{B_{(\delta_1, \dots, \delta_l)}} \cap \mathbb{H} = \emptyset$. Para tanto, observe em primeiro lugar que dado $x \in B_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}$, $|\text{supp}(x) \cap (2\mathbb{N} + 1)| = k$, e dado $x \in B_{(\delta_1, \dots, \delta_l)}$, $|\text{supp}(x) \cap (2\mathbb{N} + 1)| = l$. Logo se $k \neq l$, $B_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \cap B_{(\delta_1, \dots, \delta_l)} = \emptyset$; se $k = l$, tome $j \in \{1, \dots, k\}$ tal que $\alpha_j \neq \delta_j$; e tome $m \in \mathbb{N}$ tal que $A_{\alpha_j} \cap A_{\delta_j} \subset \{1, \dots, m\}$. Como $B_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \cap B_{(\delta_1, \dots, \delta_k)} = \{x \in \mathbb{N} : \text{supp}(x) \cap (2\mathbb{N} + 1) = \{n_1, \dots, n_k\} \text{ em que } n_1 < \dots < n_k \text{ e } n_i \in A_{\alpha_i} \cap A_{\delta_i} \text{ para cada } i \in \{1, \dots, k\}\}$, então há de se ter que $n_j \leq m$, e portanto $B_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \cap B_{(\delta_1, \dots, \delta_k)} \cap 2^{m+1}\mathbb{N} = \emptyset$; assim $\overline{B_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}} \cap \overline{B_{(\delta_1, \dots, \delta_k)}} \cap \mathbb{H} = \emptyset$. ■

O teorema acima nos dá um subsemigrupo de tamanho $\mathfrak{c}$, discreto em $\mathbb{N}^*$. Não podemos afirmar que ele é *fortemente* discreto em $\mathbb{N}^*$, embora o seja em $\mathbb{H}$. Por outro lado, temos que o conjunto $\{p_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ acima é fortemente discreto em $\mathbb{N}^*$ (embora não o seja em $\beta\mathbb{N}$, que claramente possui celularidade enumerável), mas não sabemos se gera um subsemigrupo livre. O artigo indaga então se seria possível existir um subsemigrupo livre fortemente discreto de tamanho $\mathfrak{c}$ em $\mathbb{N}^*$, e responde que não; de fato, o Teorema a seguir dá uma incisiva resposta negativa: é consequência imediata dele que não é possível haver um subsemigrupo fortemente discreto, não-enumerável, para o qual existe um elemento cancelável à direita.

Teorema 2.53. *Não existem $p \in \mathbb{N}^*$ e $\{r_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset \mathbb{N}^*$ tais que $r_\alpha + p \neq r_\delta + p$ sempre que $\alpha < \delta < \omega_1$ e $\{r_\alpha + p : \alpha < \omega_1\}$ é fortemente discreto em $\mathbb{N}^*$.*

Demonstração. Suponha que existem, e para cada $\alpha < \omega_1$ tome $B_\alpha \subset \mathbb{N}$ tais que $B_\alpha \in r_\alpha + p$ e $B_\alpha \cap B_\delta$ é finito para cada $\alpha < \delta < \omega_1$. Segue que $C_\alpha = \{x \in \mathbb{N} : -x + B_\alpha \in p\} \in r_\alpha$ para cada $\alpha < \omega_1$; como não podem ser dois-a-dois disjuntos, tome $\alpha, \beta < \omega_1$ tais que $C_\alpha \cap C_\beta \neq \emptyset$ e tome $x \in C_\alpha \cap C_\beta$. Temos então que $(-x + B_\alpha) \cap (-x + B_\beta) \in p$, logo é infinito, do que segue que $B_\alpha \cap B_\beta$ é infinito. Absurdo. ■

2.5 Cadeias de idempotentes

Nesta seção estudaremos os artigos “Chains of idempotents in $\beta\mathbb{N}$ ” [13] e “Ideals and commutativity in $\beta\mathbb{N}$ ” [14], e veremos que todo idempotente não-minimal de $\beta\mathbb{N}$ pertence a uma cadeia decrescente de idempotentes, cada um maximal com respeito a ser menor do que seu antecessor. O mesmo vale para cadeias de ideais à esquerda semiprincipais.

Começaremos com o artigo “Ideals and commutativity in $\beta\mathbb{N}$ ” e veremos que existem cadeias de ideais à esquerda de tipo ω_1 .

Antes de irmos ao artigo, precisaremos de um importante lema sobre os ideais à esquerda semiprincipais de $\beta\mathbb{N}$, e de certos fatos acerca de um semigrupo de $\mathbb{N}^*$.

Lema 2.54. *Sejam $p, q \in \beta\mathbb{N}$ distintos. Se $(\beta\mathbb{N}+p) \cap (\beta\mathbb{N}+q) \neq \emptyset$, então $p \in \beta\mathbb{N}+q$ ou $q \in \beta\mathbb{N}+p$.*

Demonstração. Como $\beta\mathbb{N}+p = \overline{\mathbb{N}+p}$ e $\beta\mathbb{N}+q = \overline{\mathbb{N}+q}$, então pelo Teorema 1.26(c), e sem perda de generalidade, $(\mathbb{N}+p) \cap \overline{\mathbb{N}+q} \neq \emptyset$; logo tome $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \beta\mathbb{N}$ tais que $n+p = r+q$. Caso $r \in \mathbb{N}^*$, pelo Lema 2.11, $p = -n + r + q \in \beta\mathbb{N}+q$. Caso $r \in \mathbb{N}$, temos a tricotomia: se $r = n$, então $p = q$, absurdo; se $r < n$, então $q = -r + n + p \in \beta\mathbb{N}+p$; e se $r > n$, então $p = -n + r + q \in \beta\mathbb{N}+q$. ■

Nos seguintes teoremas, faremos uso do subsemigrupo de $\mathbb{N}^*$, $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{k\mathbb{N}}$. Este subconjunto não-vazio, G_δ e compacto de $\beta\mathbb{N}$, que denotaremos por $\mathbb{T}$, é de fato um subsemigrupo: dado $k \in \mathbb{N}$ e dado $n \in k\mathbb{N}$, temos que $n + k\mathbb{N} \subset k\mathbb{N}$, satisfazendo a condição do Teorema 1.34. Pelo Lema 2.2, temos que $\mathbb{T}$ possui todos os idempotentes.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotaremos por $\gamma_n : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ o homomorfismo canônico, e portanto por $\widetilde{\gamma}_n$ sua extensão a $\beta\mathbb{Z}$. Dessa forma (lembrando que estamos usando a topologia discreta sobre o conjunto finito $\mathbb{Z}_n$), temos que $\mathbb{T} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \widetilde{\gamma}_n^{-1}[\{\overline{0}\}]$.

Teorema 2.55. *Seja $p \in \mathbb{N}^* \setminus K(\beta\mathbb{N})$. Então existe $G \subset \mathbb{T}$ aberto de $\mathbb{N}^*$ não-vazio tal que para todo $q \in G$, $p \notin \beta\mathbb{Z} + q + p$.*

Demonstração. Para cada $Y \in p$ e cada $n \in \mathbb{Z}$, seja $K_{n,Y} = \{q \in \mathbb{T} : n + q + p \in \overline{Y}\}$. Note que $K_{n,Y}$ é um clopen de $\mathbb{T}$, pois é a imagem inversa, em $\mathbb{T}$, de $\overline{Y}$ pela função $q \mapsto n + q + p$, que é contínua.

Afirmamos que, para algum $Y \in p$, $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} K_{n,Y} \neq \mathbb{T}$. Suponha então que para todo $Y \in p$, $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} K_{n,Y} = \mathbb{T}$. Seja q idempotente minimal; lembre que $q \in \mathbb{T}$. Logo, para cada $Y \in p$, tome $n_Y \in \mathbb{Z}$ e $p_Y \in \overline{Y}$ tais que $p_Y = n_Y + q + p$. Como $(n_Y)_{Y \in p}$ e $(p_Y)_{Y \in p}$ são redes em $\beta\mathbb{N}$ (direcionadas pela inclusão reversa), seja r um ponto de acumulação de $(n_Y)_{Y \in p}$ e note que $\lim_{Y \in p} p_Y = p$. Assim, segue que $p = r + q + p$; como $q \in K(\beta\mathbb{N})$, tem-se que $p \in K(\beta\mathbb{N})$, uma contradição.

Logo, tome $Y \in p$ tal que $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} K_{n,Y} \neq \mathbb{T}$. Ou seja, $\mathbb{T} \setminus (\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} K_{n,Y}) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} (\mathbb{T} \setminus K_{n,Y}) \neq \emptyset$. Como $K_{n,Y}$ são clopens de $\mathbb{T}$ e $\mathbb{T}$ é G_δ de $\mathbb{N}^*$, então $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} (\mathbb{T} \setminus K_{n,Y})$ é um G_δ de $\mathbb{N}^*$. Assim, pelo Teorema

1.26(b), existe $G \subset \mathbb{T}$ aberto de $\mathbb{N}^*$ tal que $G \cap (\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} K_{n,Y}) = \emptyset$.

Agora, seja $q \in G$. Suponha por absurdo que $p \in \beta\mathbb{Z} + q + p$. Como $\beta\mathbb{Z} + q + p = \overline{\mathbb{Z} + q + p}$, então $\overline{Y} \cap (\mathbb{Z} + q + p) \neq \emptyset$, logo tome $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n + q + p \in \overline{Y}$. Ou seja, $q \in K_{n,Y}$. Contradição. ■

Corolário 2.56. *Seja $p \in \mathbb{N}^* \setminus K(\beta\mathbb{N})$. Então existe uma sequência crescente $(x_n)_{n \geq 1}$ em $\mathbb{N}$ tal que: para todo $n \in \mathbb{N}$, x_{n+1} é múltiplo de x_n e de $n!$; para todo $q \in \{x_n : n \in \mathbb{N}\}^*$, $p \notin \beta\mathbb{Z} + q + p$; $x_1 = 1$.*

Demonstração. Tome G como no Teorema anterior. Tome $E \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $E^* \subset G$. Como $E^* \subset T$, segue que para todo $k \in \mathbb{N}$, $E \cap k\mathbb{N}$ é infinito. Assim, podemos recursivamente tomar $x_1 = 1$ e $x_{n+1} \in E \cap (x_n \cdot n!)\mathbb{N}$ tal que $x_{n+1} > x_n$. E como $\{x_n : n \geq 2\} \subset E$, então $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}^* \subset G$, e portanto pelo Teorema anterior para todo $q \in \{x_n : n \in \mathbb{N}\}^*$ temos que $p \notin \beta\mathbb{Z} + q + p$. ■

Teorema 2.57. *Seja p um elemento de $\mathbb{N}^* \setminus K(\beta\mathbb{N})$ e $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ a imagem da sequência obtida no corolário acima. Então para todo $q \in X^*$, $q + p$ é cancelável à direita. E dados $q_1, q_2 \in X^*$ distintos, então $\mathbb{N}^* + q_1 + p \cap \mathbb{N}^* + q_2 + p = \emptyset$.*

Demonstração. Mostraremos que dados q_1, q_2 , vale que $q_1 + p \notin \beta\mathbb{N} + q_2 + p$. Suponha por absurdo que, para algum $u \in \beta\mathbb{N}$, $q_1 + p = u + q_2 + p$. Como $q_1 \in \overline{X}$, temos que $\overline{X + p} \cap \overline{\mathbb{N} + q_2 + p} \neq \emptyset$. Pelo 1.26(c), temos que ou $x + p = v + q_2 + p$ para algum $x \in X$ e algum $v \in \beta\mathbb{N}$, ou $t + p = n + q_2 + p$ para algum $t \in \overline{X}$ e algum $n \in \mathbb{N}$. O primeiro caso implica que $p \in \beta\mathbb{Z} + q_2 + p$, assim como o segundo se $t \in X$, um absurdo; logo $t \in X^*$. Aplicando o homomorfismo $\widetilde{\gamma}_m$ a ambos os lados e cancelando $\widetilde{\gamma}_m(p)$, temos que $\widetilde{\gamma}_m(t) = \gamma_m(n) + \widetilde{\gamma}_m(q_2)$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Isso é um absurdo pois $\widetilde{\gamma}_m(t) = \widetilde{\gamma}_m(q_2) = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$, já que $t, q_2 \in X^* \subset \mathbb{T}$.

Logo, $q_1 + p \notin \beta\mathbb{N} + q_2 + p$.

No caso em que $q_1 = q_2 =: q$, obtemos pelo Teorema 2.41 que q é cancelável à direita.

No caso em que $q_1 \neq q_2$, pelo Lema 2.54, basta ver que $q_1 + p \neq q_2 + p$ para concluir que $(\beta\mathbb{N} + q_1 + p) \cap (\beta\mathbb{N} + q_2 + p) = \emptyset$ (e em particular a tese). Suponha então que $q_1 + p = q_2 + p$, e tome $X_1, X_2 \subset X$ disjuntos e tais que $X_1 \in q_1$ e $X_2 \in q_2$. Temos que $\overline{X_1 + p} \cap \overline{X_2 + p} \neq \emptyset$, logo temos que $a + p = b + p$, para $a \in X_1$ e $b \in \overline{X_2}$, ou para $a \in \overline{X_1}$ e $b \in X_2$. Sem perda de generalidade, suponha $a \in X_1$ e $b \in \overline{X_2}$; caso $b \in X_2$, teríamos que $a = b \in X_1 \cap X_2$, contradição. Logo $b \in X_2^*$, do que $p = -a + b + p \in \beta\mathbb{Z} + b + p$, uma contradição pois $b \in X^*$. ■

Para o próximo teorema, precisaremos de duas funções $\varphi, \theta : \mathbb{N} \rightarrow \omega$ da seguinte maneira:

$\varphi(n) = \max\{x_m : m \in \mathbb{N} \text{ e } x_m \mid n\}$, e $\theta(n) = n - \varphi(n)$. Como exigimos $x_1 = 1$, φ está bem-definida e consequentemente também está θ .

Agora, para todo $m \in \mathbb{N}$, para todo z que é múltiplo de x_{m+1} , temos que $\varphi(x_m + z) = x_m$, pois $x_m \mid x_{m+1} \mid z$, mas $x_{m+1} \nmid x_m$; e assim $\theta(x_m + z) = z$. Sejam agora $q \in X^*$ e $r \in \mathbb{T}$. Como r é o

limite de uma rede em $x_{m+1}\mathbb{N}$, segue que $\tilde{\varphi}(x_m + r) = x_m$ e $\tilde{\theta}(x_m + r) = r$, para todo $m \in \mathbb{N}$. E como q é o limite de uma rede em X , segue que $\tilde{\varphi}(q + r) = q$ e $\tilde{\theta}(q + r) = r$.

Em geral, vale que, dados $s \in \mathbb{N}$, $x_m = \varphi(s)$, e t múltiplo de x_{m+1} , temos que $\varphi(s+t) = x_m = \varphi(s)$ e logo $\theta(s+t) = \theta(s) + t$. Usando redes novamente, temos que para todos $u \in \beta\mathbb{N}$ e todo $r \in \mathbb{T}$, $\tilde{\varphi}(u+r) = \tilde{\varphi}(u)$, e $\tilde{\theta}(u+r) = \tilde{\theta}(u) + r$.

Teorema 2.58. *Seja p um elemento de $\mathbb{N}^* \setminus K(\beta\mathbb{N})$ e $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ a imagem da sequência obtida no corolário acima. Então para cada $q \in X^*$, o ideal à esquerda semiprincipal $\mathbb{N}^* + q + p$ é maximal com relação a ser um ideal à esquerda semiprincipal de $\mathbb{N}^*$ estritamente contido em $\mathbb{N}^* + p$. Portanto, $\mathbb{N}^* + p$ está imediatamente acima de 2^c ideais à esquerda semiprincipais de $\mathbb{N}^*$.*

Demonstração. Começaremos provando a seguinte Afirmção: Se $r \in \mathbb{T}$ é tal que $r \notin \mathbb{N}^* + q + r$, então não existe $s \in \mathbb{N}^*$ tal que $\mathbb{N}^* + q + r \subsetneq \mathbb{N}^* + s \subsetneq \mathbb{N}^* + r$.

Suponha que tal s exista. Pelo Lema 2.54, como $\mathbb{N}^* + q + r \subsetneq \mathbb{N}^* + s$, então $q + r \in \beta\mathbb{N} + s$, logo tome $t \in \beta\mathbb{N}$ tal que $q + r = t + s$. Como $q \in X^*$, temos $\overline{X + r} \cap \overline{\mathbb{N} + s} \neq \emptyset$, logo existem $a \in X$ e $t' \in \beta\mathbb{N}$ tais que $a + r = t' + s$, ou existem $q' \in X^*$ e $b \in \mathbb{N}$ tais que $q' + r = b + s$. Na primeira possibilidade, temos $r = -a + t' + s$; se $t' \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z} + s$; se $t' \in \mathbb{N}^*$, $r \in \mathbb{N}^* + s$; em ambos os casos, $\mathbb{N}^* + r \subset \mathbb{N}^* + s$, uma contradição. Na segunda possibilidade, como $q' \in X^* \subset \mathbb{T}$ e $r \in \mathbb{T}$, então $b + s = q' + r \in \mathbb{T}$. Assim, como $q + r = t + s = (-b + t) + (b + s)$, aplicando $\tilde{\theta}$, obtemos $r = \tilde{\theta}(-b + t) + (b + s)$, e novamente segue que $\mathbb{N}^* + r \subset \mathbb{N}^* + s$, uma contradição.

Agora, provaremos, como desejamos, que vale a propriedade para p .

Primeiramente observe que, pelo teorema anterior, $q + p$ é cancelável à direita, e portanto $q + p \notin \mathbb{N}^* + q + p$; dessa forma, $\mathbb{N}^* + q + p \subsetneq \mathbb{N}^* + p$. Assim, $p \notin \mathbb{N}^* + q + p$.

Construiremos uma sequência $(r_n)_{n \geq 1}$. Note que, para cada $m \in \mathbb{N}$, $\{x \in \mathbb{Z} : \gamma_m(x) = \tilde{\gamma}_m(-p)\} \in -p$, logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{m=1}^n \{x \in \mathbb{Z} : \gamma_m(x) = \tilde{\gamma}_m(-p)\}$ é infinito. Assim, podemos tomar $r_1 \in \mathbb{N}$ qualquer e então recursivamente r_{n+1} tal que $\gamma_m(r_{n+1}) = \tilde{\gamma}_m(-p)$ para todo $m \in \{1, \dots, n+1\}$, e tal que $r_{n+1} > r_n + n$.

Tome $w \in \{r_n : n \in \mathbb{N}\}^*$. Como, dado $m \in \mathbb{N}$, $\gamma_m(r_n) = \tilde{\gamma}_m(-p)$ para todo $n \geq m$, segue que $\tilde{\gamma}_m(w) = \tilde{\gamma}_m(-p)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Fixe $m \in \mathbb{N}$. Temos que $\tilde{\gamma}_m(p + w) = \tilde{\gamma}_m(p) + \tilde{\gamma}_m(-p)$. Vale que $\{x \in \mathbb{Z} : \gamma_m(x) = \tilde{\gamma}_m(p)\} \in p$, logo $\{y \in \mathbb{Z} : \gamma_m(y) = -\tilde{\gamma}_m(p)\} = \{y \in \mathbb{Z} : \gamma_m(-y) = \tilde{\gamma}_m(p)\} = -\{x \in \mathbb{Z} : \gamma_m(x) = \tilde{\gamma}_m(p)\} \in -p$, e portanto $\tilde{\gamma}_m(-p) = -\tilde{\gamma}_m(p)$. Logo $p + w \in \bigcap_{m \geq 1} \tilde{\gamma}_m^{-1}[\{0\}] = \mathbb{T}$. Além disso, como $\{r_n : n \in \mathbb{N} \text{ e } r_{n+1} > r_n + k\} \supset \{r_n : n \geq k\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, pelo Teorema 2.42, w é cancelável à direita. Isso implica: (1) que $p + w \notin \mathbb{N}^* + q + p + w$, pois $p \notin \mathbb{N}^* + q + p$; (2) dados $u, v \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}^* + u \subset \mathbb{N}^* + v \Leftrightarrow \mathbb{N}^* + u + w \subset \mathbb{N}^* + v + w$.

Como $p + w \in \mathbb{T}$ e $p + w \notin \mathbb{N}^* + q + p + w$, pela Afirmção, não existe $s \in \mathbb{N}^*$ tal que $\mathbb{N}^* + q + p + w \subsetneq \mathbb{N}^* + s \subsetneq \mathbb{N}^* + p + w$. Pela equivalência em (2), segue que não existe $s \in \mathbb{N}^*$ tal

que $\mathbb{N}^* + q + p \subsetneq \mathbb{N}^* + s \subsetneq \mathbb{N}^* + p$.

Pelo Teorema acima, os ideais à esquerda da forma $\mathbb{N}^* + q + p$ para $q \in X^*$ são todos distintos, portanto acabamos de provar que $\mathbb{N}^* + p$ está imediatamente acima de 2^c ideais à esquerda semiprincipais de $\mathbb{N}^*$. $\blacksquare$

Assim, com p e q como no teorema acima, $q + p$ será cancelável à direita, e portanto pertence a $\mathbb{N}^* \setminus K(\beta\mathbb{N})$, de forma que se pode aplicar o teorema novamente. Recursivamente, obtemos uma sequência decrescente $(\mathbb{N} + p_n)_{n \geq 1}$ de ideais à esquerda semiprincipais. O próximo teorema nos mostra que é possível prolongar esse processo.

Teorema 2.59. *Suponha que $(\mathbb{N}^* + p_n)_{n \geq 1}$ seja uma sequência estritamente decrescente de ideais à esquerda semiprincipais. Dado $q \in \overline{\{p_n : n \in \mathbb{N}\}} \setminus \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$, então $\mathbb{N}^* + q$ é maximal com respeito a ser um ideal à esquerda semiprincipal contido em $\bigcap_{n \geq 1} (\mathbb{N}^* + p_n)$. Além disso, q é cancelável à direita.*

Demonstração. Seja $q \in \overline{\{p_n : n \in \mathbb{N}\}} \setminus \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$. Primeiramente vejamos que $q \in \mathbb{N}^* + p_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $q \in \overline{\{p_n : n \in \mathbb{N}\}} \setminus \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$, então q é o limite de uma rede em $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ que eventualmente está em $\{p_r : r > n\}$. Dado $r > n$, pelo Lema 2.54, $p_r \in \beta\mathbb{N} + p_n$. Porém, caso $p_r \in \mathbb{N} + p_n$, então $p_n \in \mathbb{Z} + p_r$ e logo $\mathbb{N}^* + p_n \subset \mathbb{N}^* + p_r$, uma contradição. Logo $p_r \in \mathbb{N}^* + p_n$ e portanto $p_r \in \mathbb{N}^* + p_n$. Como $\mathbb{N}^* + p_n$ é fechado e $q \in \overline{\{p_r : r > n\}}$, então $q \in \mathbb{N}^* + p_n$. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}^* + q \subset \mathbb{N}^* + p_n$.

Provaremos agora a seguinte afirmação: dados $q, q' \in \overline{\{p_n : n \in \mathbb{N}\}} \setminus \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$, vale que $q \notin \beta\mathbb{N} + q'$. Suponha por absurdo que haja tais q, q' . Temos que $\overline{\{p_n : n \in \mathbb{N}\}} \cap \overline{\mathbb{N} + q'} \neq \emptyset$, logo pelo Teorema 1.26(c), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $p_n \in \beta\mathbb{N} + q'$, ou existem $q'' \in \overline{\{p_n : n \in \mathbb{N}\}}$ e $m \in \mathbb{N}$ tal que $q'' = m + q'$. A primeira possibilidade implica que $\mathbb{N}^* + p_n \subset \mathbb{N}^* + \beta\mathbb{N} + q' \subset \mathbb{N}^* + q' \subset \mathbb{N}^* + p_{n+1}$, uma contradição. Na segunda, temos que $\overline{\{p_n : n \in \mathbb{N}\}} \cap \overline{\{m + p_n : n \in \mathbb{N}\}}$, logo existem $n \in \mathbb{N}$ e $q''' \in \overline{\{p_n : n \in \mathbb{N}\}}$ tais que $q''' = m + p_n$ ou $p_n = m + q'''$. Caso $q''' \in \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$, tome $r \in \mathbb{N}$ tal que $q''' = p_r$. Temos: se $r = n$, então $p_n = m + p_n$, um absurdo (pois a função $x \mapsto x + m$ não possui pontos fixos pelo Teorema 1.26(a)); se $r \neq n$, temos que $p_n \in \mathbb{Z} + p_r$ e $p_r \in \mathbb{Z} + p_n$, do que segue que $\mathbb{N}^* + p_n = \mathbb{N}^* + p_r$, uma contradição. Logo $q''' \in \overline{\{p_n : n \in \mathbb{N}\}} \setminus \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $p_n \in \mathbb{Z} + q'''$, logo pelo visto acima, $\mathbb{N}^* + p_n \subset \mathbb{N}^* + q''' \subset \mathbb{N}^* + p_{n+1}$, uma contradição.

Portanto, vale a afirmação. No caso $q = q'$, obtemos pelo Teorema 2.41 que q é cancelável à direita. Agora, veremos que não existe $r \in \mathbb{N}^*$ tal que $\mathbb{N}^* + q \subsetneq \mathbb{N}^* + r \subset \bigcap_{n \geq 1} (\mathbb{N}^* + p_n)$. Suponha por absurdo que haja um tal r . Pelo Lema 2.54 e como $\mathbb{N}^* + q \subsetneq \mathbb{N}^* + r$, vale que $q \in \mathbb{N}^* + r$, logo seja $s \in \mathbb{N}^*$ tal que $q = s + r$. Temos que $\overline{\{p_n : n \in \mathbb{N}\}} \cap \overline{\mathbb{N} + r} \neq \emptyset$, logo pelo 1.26(c) existem $n \in \mathbb{N}$ e $s' \in \beta\mathbb{N}$ tais que $p_n = s' + r$, ou existem $q' \in \overline{\{p_n : n \in \mathbb{N}\}}$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que $q' = m + r$. No primeiro caso, obtemos $\mathbb{N}^* + p_n \subset \mathbb{N}^* + r \subset \mathbb{N}^* + p_{n+1}$, uma contradição. No segundo, se $q' \in \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$,

obtemos a mesma contradição do primeiro. Logo $q' \in \overline{\{p_n : n \in \mathbb{N}\}} \setminus \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$. Temos que $r = -m + q'$, e portanto $q = s + r = -m + s + q' \in \beta\mathbb{N} + q'$. Isso contradiz a afirmação provada acima. ■

Observe acima que como $(\mathbb{N}^* + p_n)_{n \geq 1}$ é *estritamente* decrescente, então de fato $\mathbb{N}^* + q \neq \mathbb{N}^* + p_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, podemos a partir dos dois últimos teoremas fazer o passo limite enumerável na construção de tais cadeias. Mais precisamente, obtemos o seguinte corolário:

Corolário 2.60. *Seja $p \in \mathbb{N}^* \setminus K(\beta\mathbb{N})$. Então $\mathbb{N}^* + p$ pertence a um segmento de uma cadeia maximal de ideais à esquerda semiprincipais de $\mathbb{N}^*$ que é reversamente bem-ordenado de tipo ω_1^* (isto é, de tipo ω_1 para a ordem $\supset$).*

Demonstração. Defina $p_0 = p$. Suponha $\alpha < \omega_1$ com p_β escolhidos para todos $\beta < \alpha < \omega_1$ de forma que $(\mathbb{N}^* + p_\beta)_{\beta < \alpha}$ seja uma cadeia estritamente decrescente, com cada $p_\beta \in \mathbb{N}^* \setminus K(\beta\mathbb{N})$. Caso α seja sucessor, aplique o Teorema 2.58 para $p_{\alpha-1}$ e obtenha $p_\alpha \in \mathbb{N}^*$ cancelável à direita e tal que $\mathbb{N}^* + p_\alpha$ é maximal com respeito a ser um ideal à esquerda semiprincipal estritamente contido em $\mathbb{N}^* + p_{\alpha-1}$.

Caso α seja limite, tome $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ sequência crescente e cofinal em α . Aplique o Teorema anterior para $(\mathbb{N}^* + p_{\gamma_n})_{n \geq 1}$ e obtenha $p_\alpha \in \mathbb{N}^*$ cancelável à direita e tal que $\mathbb{N}^* + p_\alpha$ é maximal com respeito a ser um ideal à esquerda semiprincipal contido em $\bigcap_{n \geq 1} (\mathbb{N}^* + p_{\gamma_n})$. Como $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ é cofinal e $(\mathbb{N}^* + p_\beta)_{\beta < \alpha}$ é estritamente decrescente, temos que $\bigcap_{n \geq 1} (\mathbb{N}^* + p_{\gamma_n}) = \bigcap_{\beta < \alpha} (\mathbb{N}^* + p_\beta)$, e assim $\mathbb{N}^* + p_\alpha$ é maximal com respeito a ser um ideal à esquerda semiprincipal contido em $\bigcap_{\beta < \alpha} (\mathbb{N}^* + p_\beta)$. Assim, $(\mathbb{N}^* + p_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ é uma cadeia de ideais à esquerda semiprincipais de tipo de ordem ω_1^* . Um uso do Lema de Zorn nos permite tomar uma cadeia $\mathcal{C}$ maximal com relação a ser uma cadeia de ideais à esquerda semiprincipais que contém $\{\mathbb{N}^* + p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Claramente, $\mathcal{C}$ também é maximal com relação a meramente ser uma cadeia de ideais à esquerda semiprincipais. Temos que $\{\mathbb{N}^* + p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ é um subconjunto de $\mathcal{C}$; suponha que não seja um segmento, isto é, suponha que existe $C \in \mathcal{C}$ tal que existem $\alpha < \beta < \omega_1$ tais que $\mathbb{N}^* + p_\beta \subsetneq C \subsetneq \mathbb{N}^* + p_\alpha$. Tome $\gamma < \omega_1$ o menor tal que $\mathbb{N}^* + p_\gamma \subsetneq C$ e note que $\gamma > 0$; caso γ seja sucessor, temos que $C \subsetneq \mathbb{N}^* + p_{\gamma-1}$, contrariando a maximalidade de $\mathbb{N}^* + p_\gamma$ como ideal à esquerda semiprincipal estritamente contido em $\mathbb{N}^* + p_{\gamma-1}$; caso γ seja limite, temos que $C \subsetneq \mathbb{N}^* + p_\delta$ para todo $\delta < \gamma$, e portanto $C \subset \bigcap_{\delta < \gamma} (\mathbb{N}^* + p_\delta)$, contrariando a maximalidade de $\mathbb{N}^* + p_\gamma$ como ideal à esquerda semiprincipal contido em $\bigcap_{\delta < \gamma} (\mathbb{N}^* + p_\delta)$. ■

Agora, passaremos ao artigo “Chains of idempotents in $\beta\mathbb{N}$ ” para investigar resultados análogos para idempotentes não-minimais.

Definição 2.61. Seja $(x_n)_{n \geq 1}$ uma sequência crescente em $\mathbb{N}$ e seja $Y \subset \mathbb{N}$.

- (a) Para cada $m \in \mathbb{N}$, $R_{m,Y} := \{\sum_{j=1}^s x_{n(j)} : s \in \mathbb{N}, x_{n(1)} > m, \{n(1), \dots, n(s)\} \subset Y, \text{ e para cada } i \in \{1, \dots, s\}, x_{n(i)+1} > m + \sum_{j=1}^i x_{n(j)}\}$.
- (b) $R_Y := \bigcap_{m \geq 1} \overline{R_{m,Y}}$.

Lema 2.62. *Sejam $Y \subset \mathbb{N}$ e $(x_n)_{n \geq 1}$ uma sequência crescente e tal que $\{x_{n+1} - x_n : n \in Y\}$ é ilimitado. Então R_Y é um subsemigrupo compacto de $\beta\mathbb{N}$. Além disso, dados $p, q \in \beta\mathbb{N}$, se $p + q \in R_Y$ e $q \in R_Y$, então $p \in R_Y$.*

Demonstração. Como $\{x_{n+1} - x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é ilimitado e $(x_n)_{n \geq 1}$ é crescente, então para cada $m \in \mathbb{N}$, $R_{m,Y} \neq \emptyset$ (basta tomar $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > m$ e $x_{n+1} - x_n > m + x_n$). Como $(R_{m,Y})_{m \geq 1}$ é uma sequência decrescente de subconjuntos de $\mathbb{N}$, segue que $R_Y \neq \emptyset$. Para ver que R_Y é um semigrupo, sejam $p, q \in R_Y$ e seja $m \in \mathbb{N}$. Queremos ver que $p + q \in \overline{R_{m,Y}}$, ou seja, que $R_{m,Y} \in p + q$. Para isso, como $R_{m,Y} \in p$, basta ver que $R_{m,Y} \subset \{y \in \mathbb{N} : -y + R_{m,Y} \in q\}$. Assim, seja $y \in R_{m,Y}$ e tome $s \in \mathbb{N}$ e $n(1), \dots, n(s)$ como na definição de $R_{m,Y}$ de forma que $y = \sum_{i=1}^s x_{n(i)}$. Considere $k = m + \sum_{i=1}^s x_{n(i)}$. Como $R_{k,Y} \in q$, então basta ver que $R_{k,Y} \subset -y + R_{m,Y}$. Seja $z \in R_{k,Y}$ e tome $t \in \mathbb{N}$ e $l(1), \dots, l(t)$ como na definição de $R_{k,Y}$ de forma que $z = \sum_{i=1}^t x_{l(i)}$. Então, definindo $n(s+i) = l(i)$ para cada $i \in \{1, \dots, t\}$, temos que $y + z = \sum_{i=1}^{s+t} x_{n(i)} \in R_{m,Y}$ (pois, para cada $i \in \{1, \dots, t\}$, $x_{n(s+i)+1} = x_{l(i)+1} > k + \sum_{j=1}^i x_{l(j)} = m + \sum_{j=1}^s x_{n(j)} + \sum_{j=s+1}^{s+i} x_{n(j)}$).

Agora suponha que $p + q \in R_Y$ e que $q \in R_Y$. Para ver que $p \in R_Y$, seja $m \in \mathbb{N}$ e veremos que $R_{m,Y} \in p$. Considere $A = \{y \in \mathbb{N} : -y + R_{m,Y} \in q\}$. Como $R_{m,Y} \in p + q$, então $A \in p$, logo basta ver que $A \subset R_{m,Y}$. Seja $k \in A$; temos que $R_{k,Y} \in q$, logo $R_{k,Y} \cap (-k + R_{m,Y}) \neq \emptyset$. Assim, seja z o elemento mínimo de $R_{k,Y} \cap (-k + R_{m,Y})$. Como $z + k \in R_{m,Y}$, tome $s \in \mathbb{N}$ e $n(1), \dots, n(s)$ como na definição de forma que $z + k = \sum_{i=1}^s x_{n(i)}$; e como $z \in R_{k,Y}$, tome $t \in \mathbb{N}$ e $l(1), \dots, l(t)$ como na definição de forma que $z = \sum_{i=1}^t x_{l(i)}$. Afirmamos agora que $n(s) = l(t)$: caso $n(s) > l(t)$, teríamos $z + k \geq x_{n(s)} \geq x_{l(t)+1} > k + \sum_{j=1}^t x_{l(j)} = k + z$, uma contradição; e caso $l(t) > n(s)$, teríamos $z \geq x_{l(t)} \geq x_{n(s)+1} > m + \sum_{j=1}^s x_{n(j)} = m + z + k$, outra contradição. Agora, vemos que $t = 1$: caso $t > 1$, teríamos que $z - x_{l(t)} = \sum_{i=1}^{t-1} x_{l(i)} \in R_{k,Y}$ e que $z + k - x_{l(t)} = z + k - x_{n(s)} = \sum_{i=1}^{s-1} x_{n(i)} \in R_{m,Y}$, de modo que $z - x_{l(t)} \in R_{k,Y} \cap (-k + R_{m,Y})$, contrariando a minimidade de z . Assim, como $l(t) = n(s)$ e $t = 1$, segue que $z = x_{l(1)} = x_{n(s)}$, e portanto $k = \sum_{i=1}^{s-1} x_{n(i)} \in R_{m,Y}$ como queríamos. ■

Teorema 2.63. *Seja $p \in \mathbb{N}^*$ cancelável à direita. Então existe um subsemigrupo compacto R de $\beta\mathbb{N}$ tal que $p \in R$ e $R \cap K(\beta\mathbb{N}) = \emptyset$.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.42, tome $(x_n)_{n \geq 1}$ sequência crescente em $\mathbb{N}$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $A_k := \{x_n : n \in \mathbb{N} \text{ e } x_{n+1} > x_n + k\} \in p$. Note que $(A_k)_{k \geq 1}$ é uma sequência decrescente em $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, logo $\bigcap_{k \geq 1} A_k$ é um G_δ não-vazio de $\mathbb{N}^*$, de acordo com 1.26(b). Assim, tome $q \in \bigcap_{k \geq 1} A_k$

distinto de p . Como $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \in p, q$ e a sequência é injetora, tome $Y, Z \subset \mathbb{N}$ disjuntos tais que $\{x_n : n \in Y\} \in p$ e $\{x_n : n \in Z\} \in q$.

Defina então $R = R_Y$. Primeiramente, vejamos que $p \in R_Y$. Observe que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\{x_n : n \in Y\} \cap A_k \cap (\mathbb{N} \setminus \{1, \dots, k\}) \in p$, e $\{x_n : n \in Y\} \cap A_k \cap (\mathbb{N} \setminus \{1, \dots, k\}) = \{x_n : n \in Y, x_{n+1} > x_n + k, \text{ e } x_n > k\} \subset R_{k,Y}$, de forma que $R_{k,Y} \in p$. Agora, como $A_k \neq \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então $\{x_{n+1} - x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é ilimitado, logo pelo Lema anterior R_Y é um subsemigrupo compacto de $\beta\mathbb{N}$. Agora, suponha que $R \cap K(\beta\mathbb{N}) \neq \emptyset$ e tome $r \in R \cap K(\beta\mathbb{N})$. Como $K(\beta\mathbb{N})$ é a união de todos os ideais à esquerda minimais, tome L ideal à esquerda minimal tal que $r \in L$. Segue que $q+r \in L$, logo $\beta\mathbb{N} + q + r$ é um ideal à esquerda contido em L , logo $L = \beta\mathbb{N} + q + r$. Em particular, $r \in \beta\mathbb{N} + q + r$, logo tome $s \in \beta\mathbb{N}$ tal que $r = s + q + r$. Assim, $r \in R$ e $s + q + r \in R$, logo pelo Lema acima $s + q \in R$.

Considere $B = \{k + x_n : n \in Z, k \in \mathbb{N}, \text{ e } x_{n+1} > x_n + k\}$. Afirmamos que $B \in s + q$; basta ver que $\{k \in \mathbb{N} : -k + B \in q\} = \mathbb{N}$. De fato, dado $k \in \mathbb{N}$, vale que $A_k \cap \{x_n : n \in Z\} \subset -k + B$ e logo $-k + B \in q$. Temos então que $B \in s + q$, e $R_{1,Y} \in s + q$, logo tome $w \in B \cap R_{1,Y}$. Como $w \in B$, tome $k \in \mathbb{N}$ e $m \in Z$ tais que $w = k + x_m$ e $x_{m+1} > x_m + k$; como $w \in R_{1,Y}$, tome $t \in \mathbb{N}$ e $n(1), \dots, n(t) \in Y$ tais que $w = \sum_{i=1}^t x_{n(i)}$ e, para cada $i \in \{1, \dots, t\}$, $x_{n(i)+1} > x_{n(i)} + 1$. Como $n(t) \in Y$ e $m \in Z$, então $n(t) \neq m$. Caso $n(t) > m$, temos $w \geq x_{n(t)} \geq x_{m+1} > x_m + k = w$, uma contradição; e caso $m > n(t)$, temos $w = k + x_m > x_m \geq x_{n(t)+1} > 1 + \sum_{j=1}^t x_{n(j)} = 1 + w$, outra contradição. Deste modo, $R \cap K(\beta\mathbb{N}) = \emptyset$. ■

Teorema 2.64. *Seja p um idempotente não-minimal de $\mathbb{N}^*$. Então existem 2^c idempotentes não-minimais imediatamente abaixo de p com relação à ordem dos idempotentes $\leq$.*

Demonstração. Tome pelo Corolário 2.56 a sequência $(x_n)_{n \geq 1}$, de imagem X . Pelo Teorema 2.57, dados $q_1, q_2 \in X^*$ distintos, $\mathbb{N}^* + q_1 + p \cap \mathbb{N}^* + q_2 + p = \emptyset$. Portanto, como $|X^*| = 2^c$, basta ver que para cada $q \in X^*$ existe $v \in \mathbb{N}^* + q + p$ tal que v é maximal entre todos os idempotentes s tais que $s < p$. Fixe então um $q \in X^*$.

O Teorema 2.57 também nos diz que $q + p$ é cancelável à direita. Pelo Teorema 2.63, tome R subsemigrupo compacto e disjunto de $K(\beta\mathbb{N})$ e tal que $q + p \in R$. Vale que $R \cap (\mathbb{N}^* + q + p)$ é um subsemigrupo compacto, logo tome $t \in R \cap (\mathbb{N}^* + q + p)$ idempotente. Como $t \in \mathbb{N}^* + p$, $t = t + p$. Defina $r = p + t$; $r + r = p + t + p + t = p + t + t = p + t$ logo r é idempotente. Como $r = p + t + p$, então $r + p = p + r = r$, ou seja, $r \leq p$. Vale também que r não é minimal. Se fosse, teríamos que $q + r \in K(\beta\mathbb{N})$, e $q + r = q + p + t$; como $q + p \in R$ e $t \in R$, segue que $q + r \in R \cap K(\beta\mathbb{N})$, uma contradição.

Considere agora $\mathcal{A} = \{\Gamma : \Gamma \text{ é uma } \leq_R\text{-cadeia de idempotentes, } r \in \Gamma, \Gamma \subset \mathbb{N}^* + q + p \text{ e para todo } s \in \Gamma, s \leq p\}$. Vale que $\{r\} \in \mathcal{A}$, e uma aplicação do Lema de Zorn nos permite tomar $\Gamma \in \mathcal{A}$

maximal.

Seja $L = \{u \in \mathbb{N}^* + q + p : \text{para todo } s \in \Gamma, s = u + s\}$. Como $L = (\mathbb{N}^* + q + p) \cap \bigcap_{s \in \Gamma} \rho_s^{-1}[\{s\}]$, então L é compacto, e para ver que é não-vazio basta ver que $\{\mathbb{N}^* + q + p\} \cup \{\rho_s^{-1}[\{s\}] : s \in \Gamma\}$ possui a p.i.f. Para isso, seja $F \in \mathcal{P}_f(\Gamma)$, e tome $u \in F$ o $\leq_R$ -máximo de F . Vale então que $u \in (\mathbb{N}^* + q + p) \cap \bigcap_{s \in F} \rho_s^{-1}[\{s\}]$ (lembre que $s \leq_R u \Leftrightarrow s = u + s$, por definição). Observe também que cada $\rho_s^{-1}[\{s\}]$ é um semigrupo. Portanto, L é um subsemigrupo compacto, logo tome $u \in L$ idempotente e defina $v = p + u$. Como $u \in \mathbb{N}^* + p$, $u + p = u$, logo $v + v = p + u + p + u = p + u + u = p + u$ e assim v é um idempotente. Temos também que $v = p + u \in \mathbb{N}^* + q + p$ e dado $s \in \Gamma$, $v + s = p + u + s = p + s = s$ (pois $s \leq p$), logo $v \in L$. Assim, v não é minimal; caso $v \in K(\beta\mathbb{N})$, como $v \in L$ e $r \in \Gamma$, $r = v + r \in K(\beta\mathbb{N})$, uma contradição.

Como $v = p + u + p$, então $v \leq p$. Pelo Teorema 2.58, $\mathbb{N}^* + q + p \subsetneq \mathbb{N}^* + p$, e portanto $p \notin \mathbb{N}^* + q + p \ni v$. Desse modo, $v < p$. Além disso, observe que $\Gamma \cup \{v\} \in \mathcal{A}$, logo pela maximalidade $v \in \Gamma$.

Por fim, mostraremos que v é maximal entre todos os idempotentes s tais que $s < p$. Primeiramente, mostraremos que v é maximal entre todos os idempotentes em $\mathbb{N}^* + q + p$ tais que $s < p$. Suponha então $w \in \mathbb{N}^* + q + p$ idempotente tal que $v \leq w \leq p$. Para todo $s \in \Gamma$, vale que $s \leq_R v \leq_R w$, de forma que $\Gamma \cup \{w\} \in \mathcal{A}$; pela maximalidade, $w \in \Gamma$; assim, como $v \in L$, $w \leq_R v$; e já que Γ é $\leq_R$ -cadeia, $v = w$.

Agora seja w idempotente qualquer tal que $v \leq w \leq p$. Temos que $v \in (\mathbb{N}^* + q + p) \cap (\mathbb{N}^* + w)$, logo pelo Lema 2.54, $\mathbb{N}^* + q + p \subset \mathbb{N}^* + w$ ou $\mathbb{N}^* + w \subset \mathbb{N}^* + q + p$. Caso $\mathbb{N}^* + w \subset \mathbb{N}^* + q + p$, então $w \in \mathbb{N}^* + q + p$ e pelo que foi feito acima, $v = w$. Caso $\mathbb{N}^* + q + p \subsetneq \mathbb{N}^* + w$, o Teorema 2.58 nos diz que $\mathbb{N}^* + w = \mathbb{N}^* + p$. Segue que $p = p + w$ pois $p \in \mathbb{N}^* + w$ e $w = p + w$ já que $w \leq p$, ou seja, $w = p$. ■

Note no teorema acima que $v \in \mathbb{N}^* + q + p \subsetneq \mathbb{N}^* + p$, e que portanto $p \notin \mathbb{N}^* + v$. Também será necessário para o corolário a seguir lembrar que dados u, v idempotentes, $u \leq_L v$ se e somente se $u \in \mathbb{N}^* + v$; e definimos que $u <_L v$ se e só se $u \leq_L v$ e não vale $v \leq_L u$ (lembre que $\leq_L$ não é antissimétrica).

Corolário 2.65. *Seja p um idempotente não-minimal em $\mathbb{N}^*$. Então existe uma ω_1 -sequência $(p_\sigma)_{\sigma < \omega_1}$ de idempotentes tal que*

- (1) $p_0 = p$;
- (2) para cada $\sigma < \omega_1$, $p_{\sigma+1}$ é maximal entre todos os idempotentes menores do que p_σ ;
- (3) dados $\sigma < \tau < \omega_1$, $p_\tau <_L p_\sigma$.

Demonstração. Definimos $p_0 = p$. Seja $0 < \tau < \omega_1$ e suponha $(p_\sigma)_{\sigma < \tau}$ escolhidos de modo a satisfazer (1), (2) e (3) e tais que cada p_σ é não-minimal. Caso τ seja sucessor, aplique o teorema

anterior para $p_{\tau-1}$ e obtenha p_τ não-minimal e maximal entre todos os idempotentes menores do que $p_{\tau-1}$. Caso τ seja limite, aplique a técnica utilizada no Corolário 2.60 e obtenha $q \in \mathbb{N}^*$ cancelável à direita e tal que $\mathbb{N}^* + q \subset \bigcap_{\sigma < \tau} (\mathbb{N}^* + p_\sigma)$. Pelo Teorema 2.63, tome R subsemigrupo compacto, disjunto de $K(\beta\mathbb{N})$ e tal que $q \in R$. Como $R \cap (\mathbb{N}^* + q)$ é subsemigrupo compacto, tome p_τ idempotente nele. Como $p_\tau \in R$, é não-minimal. E dado $\sigma < \tau$, temos que $p_\tau \in \mathbb{N}^* + p_{\sigma+1} \subsetneq \mathbb{N}^* + p_\sigma$, de forma que $p_\tau <_L p_\sigma$. ■

No teorema obtivemos uma ω_1 -sequência decrescente em $<_L$. Vale notar que não se pode ter sequências decrescentes em $<_L$ maiores do que $\mathfrak{c}$: seja κ cardinal e seja $(p_\sigma)_{\sigma < \kappa}$ uma tal sequência. Para cada σ , $\mathbb{N}^* + p_\sigma$ é um compacto que contém estritamente o compacto $\mathbb{N}^* + p_{\sigma+1}$; portanto, existe U_σ um clopen de $\beta\mathbb{N}$ tal que $\mathbb{N}^* + p_{\sigma+1} \subset U_\sigma$ e tal que $\mathbb{N}^* + p_\sigma \not\subset U_\sigma$. Segue que os U_σ são todos distintos; como os clopens de $\beta\mathbb{N}$ correspondem aos subconjuntos de $\mathbb{N}$, então $\kappa \leq \mathfrak{c}$.

Capítulo 3

A Álgebra de βS

Este capítulo tratará do contexto mais geral da álgebra na compactificação de Stone-Čech, quando consideramos um semigrupo S qualquer e analisamos com mais minúcia a interação entre as estruturas algébrica e topológica. Propriedades como comutatividade e diversos níveis de cancelamento de S se traduzem com frequência a propriedades topológicas de βS .

3.1 Sobre a Raridade de Produtos em S^*

Esta seção é o estudo do artigo de Neil Hindman e Dona Strauss “The Scarcity of Products in $\beta S \setminus S$ ” [9] e suas referências que os sustentam.

Definição 3.1. Sejam S um semigrupo e $A \subset S$.

- (a) A é um *conjunto solução à esquerda* se existem $a, b \in S$ tais que $A = \{x \in S : ax = b\}$.
- (b) A é um *conjunto solução à direita* se existem $a, b \in S$ tais que $A = \{x \in S : xa = b\}$.

Note que é imediato desta definição que: S é cancelativo à esquerda se e somente se todo conjunto solução à esquerda é unitário; e S é fracamente cancelativo à esquerda se e somente se todo conjunto solução à esquerda é finito. (Analogamente temos as afirmações à direita.)

Definição 3.2. Seja S um semigrupo tal que $|S| = \kappa \geq \omega$.

- (a) S é *fracuissimamente cancelativo à esquerda* se dado $\mathcal{B}$ uma coleção de conjuntos solução à esquerda com $|\mathcal{B}| < \kappa$, vale que $|\bigcup \mathcal{B}| < \kappa$.
- (b) S é *fracuissimamente cancelativo à direita* se dado $\mathcal{B}$ uma coleção de conjuntos solução à direita com $|\mathcal{B}| < \kappa$, vale que $|\bigcup \mathcal{B}| < \kappa$.

Note que se κ for regular, então S é fracuissimamente cancelativo à esquerda se e somente se cada conjunto solução à esquerda tiver cardinalidade menor do que κ . Assim, se S for enumerável a noção coincide com a de fracamente cancelativo à esquerda.

A maior parte do artigo (Seção 2) trata de encontrar condições suficientes para que S^*S^* seja nunca-denso em S^* ; serão mostradas também que algumas dessas condições não são necessárias, e contraexemplos que mostram que certas condições mais fracas para S enumerável falham para cardinalidades maiores.

Para encontrar tais condições, há de valer em primeiro lugar que $S^*S^* \subset S^*$. Lembre que pelo Teorema 1.40(a), se S for fracamente cancelativo à esquerda então S^* é um ideal à esquerda de βS e se S for cancelativo à direita então S^* é um ideal à direita. Ambas as condições implicam que S^* é um subsemigrupo e são satisfeitas, por exemplo, se S puder ser (algebricamente) imerso em um grupo.

Em primeiro lugar, temos o seguinte teorema, que é o 6.35 do livro [1].

Teorema 3.3. *Seja S um semigrupo enumerável que é cancelativo à direita e fracamente cancelativo à esquerda. Então S^*S^* é nunca-denso em S^* .*

Demonstração. Notemos que: se $\text{int}(\text{cl}(S^*S^*)) \neq \emptyset$, então existe $T \subset S$ infinito tal que $T^* \subset \text{cl}(S^*S^*)$, e portanto para todo $V \subset T$ infinito, $V^* \subset \text{cl}(S^*S^*)$, e assim $V^* \cap S^*S^* \neq \emptyset$.

Dessa forma, por contraposição, provaremos que para todo $T \subset S$ infinito existe $V \subset T$ infinito tal que $V^* \cap S^*S^* = \emptyset$.

Enumere S como $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$. Seja $T \subset S$ infinito. Produziremos uma sequência injetora $(t_n)_{n \geq 1}$ em T tal que as equações $s_mx = t_n$ e $s_{m'}x = t_{n'}$ não possuem solução simultânea se $m < n$, $m' < n'$ e $n < n'$. No primeiro passo, tomamos $t_1 \in T$ qualquer. Suponha $t_1, \dots, t_k$ escolhidos. Considere $X = \{x \in S : s_mx = t_n \text{ para algum } m, n \leq k\}$. Como S é fracamente cancelativo à esquerda, X é finito, logo tome $t_{k+1} \in T \setminus (\bigcup_{m=1}^k s_m X \cup \{t_1, \dots, t_k\})$. Desse modo, obtemos a sequência injetora desejada.

Defina $V = \{t_n : n \in \mathbb{N}\}$. Vale que dados $p, q \in S^*$, $p \cdot q \notin V^*$. Suponha, por absurdo, que $p \cdot q \in V^*$. Considere $P = \{s \in S : s^{-1}V \in q\}$. $P \in p$. Tome $m < m'$ tais que $s_m, s_{m'} \in P$. Considere $Q = \{x \in S : s_mx, s_{m'}x \in \{t_i : i > m'\}\}$. Vale que $Q \in q$, pois $s_m, s_{m'} \in P$ e $Q = (s_m^{-1}(V \setminus \{t_1, \dots, t_{m'}\})) \cap (s_{m'}^{-1}(V \setminus \{t_1, \dots, t_{m'}\}))$, usando novamente que S é fracamente cancelativo à esquerda. Assim, tome $x \in Q$. Existem $n, n' > m'$ tais que $s_mx = t_n$ e $s_{m'}x = t_{n'}$. Caso $n \neq n'$, haveria uma violação da propriedade com que a sequência $(t_n)_{n \geq 1}$ foi construída; logo $n = n'$. Ou seja, $s_mx = s_{m'}x$. Como S é cancelativo à direita, $s_m = s_{m'}$; absurdo. ■

Vale notar que as condições de teorema não podem ser grandemente enfraquecidas: por exemplo, o semigrupo $(\mathbb{N}, \vee)$, em que $n \vee m = \max\{n, m\}$, é fracamente cancelativo à esquerda e à direita, e é fácil verificar (via redes) que dados $p \in \beta\mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{N}^*$, $p \vee q = q$, de forma que $\mathbb{N}^* \vee \mathbb{N}^* = \mathbb{N}^*$.

Agora veremos que condição suficiente foi encontrada para semigrupos de quaisquer cardinalidades.

Teorema 3.4. *Seja S um semigrupo infinito e algebricamente imersível em um grupo G . Então $S^* \cap (G^*G^*)$ é nunca-denso em S^* . Em particular S^*S^* é nunca-denso em S^* .*

Demonstração. Como no teorema anterior, provaremos que dado $T \subset S$ infinito existe $V \subset T$ infinito tal que $V^* \cap G^*G^* = \emptyset$. Seja $T \subset S$ infinito então. Tome $t_1 \in T$. Definidos $t_1, \dots, t_{s-1}$, tome $t_s \in T \setminus \{t_r t_n^{-1} t_m : m, n, r < s\}$. Note que $t_s \notin \{t_m : m \in \{1, \dots, s-1\}\}$, de forma que a sequência obtida é injetora. Afirmamos que $V = \{t_s : s \in \mathbb{N}\}$ é o conjunto desejado. Suponha que $p, q \in G^*$ e $V \in p \cdot q$. Vale que $\{x \in G : x^{-1}V \in q\} \in p$, logo tome x_1, x_2 distintos tais que $x_1^{-1}V, x_2^{-1}V \in q$. Tome $y \in x_1^{-1}V \cap x_2^{-1}V$, e tome $n, r \in \mathbb{N}$ tais que $x_1 y = t_n$ e $x_2 y = t_r$. Agora, como $\{w \in S : x_1 w \in \{t_1, \dots, t_{\max\{n, r\}}\}\}$ e $\{w \in S : x_2 w \in \{t_1, \dots, t_{\max\{n, r\}}\}\}$ são finitos e $x_1^{-1}V \cap x_2^{-1}V$ é infinito, tome $w \in x_1^{-1}V \cap x_2^{-1}V$ tal que $x_1 w = t_m$ e $x_2 w = t_s$, com $m, s > \max\{n, r\}$. Sem perda de generalidade, $s > m$. Temos então: $t_s t_m^{-1} = x_2 x_1^{-1} = t_r t_n^{-1}$, de forma que $t_s = t_r t_n^{-1} t_m$, contradizendo a construção da sequência. Logo $V^* \cap G^*G^* = \emptyset$. ■

Nesse teorema, como S estava imerso em G , S era cancelativo. O próximo teorema nos dá um exemplo de semigrupo não-cancelativo tal que S^*S^* é nunca-denso em S^* .

Teorema 3.5. *Considere $S = \{f : D \rightarrow \mathbb{N} \mid D \subset \mathbb{N}, D \text{ é cofinito e } f \text{ é uma bijeção}\}$, munido da operação de composição. Então S é um semigrupo, $|S| = \mathfrak{c}$, S não é cancelativo, é cancelativo à direita, fracamente cancelativo à esquerda e S^*S^* é nunca-denso em S^* .*

Demonstração. Começaremos vendo que S é um semigrupo. Dadas $f, g \in S$, como não temos em geral que $\text{im } f \subset \text{dom } g$, devemos tomar cuidado ao considerarmos $g \circ f$ – por exemplo, não podemos dizer diretamente que $g \circ f$ será uma bijeção entre $\text{dom } f$ e $\mathbb{N}$. Mas veremos que esta relação de fato é uma bijeção entre um cofinito e $\mathbb{N}$. Denote $\text{dom } f = D$ e $\text{dom } g = E$.

Primeiramente, note que usando a definição de composição de relações, temos que $g \circ f = \{(d, x) : f(d) \in E \text{ e } g(f(d)) = x\}$. E é cofinito, e f é bijetora, logo $f^{-1}[E]$ é cofinito. Defina $D' = f^{-1}[E]$. Vale que $D' = \text{dom } g \circ f$, pois: dado $d \in D'$, $f(d) \in E$, logo $(d, g(f(d))) \in g \circ f$; e se $d \in \text{dom } g \circ f$, $f(d) \in E$, ou seja, $d \in D'$. Vejamos que $g \circ f$ é função. Suponha $(d, x_1), (d, x_2) \in g \circ f$. Temos que $x_1 = g(f(d)) = x_2$; usando que f é função e que g é função, temos que $x_1 = x_2$. Agora podemos usar que $g \circ f : D' \rightarrow \mathbb{N}$ é função. Para ver que é sobrejetora, tome $x \in \mathbb{N}$; como g é sobrejetora, tome $e \in E$ tal que $g(e) = x$; e como f é sobrejetora, tome $d \in D$ tal que $f(d) = e$; vale então que $d \in D'$ e $g(f(d)) = x$. Para ver que é injetora, suponha $g(f(d_1)) = g(f(d_2))$; como g é injetora, vale que $f(d_1) = f(d_2)$; como f é injetora, $d_1 = d_2$. Assim, $g \circ f : D' \rightarrow \mathbb{N}$ é uma bijeção com $D' \subset \mathbb{N}$ cofinito, definida por $g \circ f(x) = g(f(x))$ para todo $x \in D'$. (Como a composição de relações é associativa, temos por fim que S é um semigrupo.)

Agora, $|S| = \mathfrak{c}$: Note que $S = \bigcup_{\substack{D \subset \mathbb{N} \\ D \text{ cofinito}}} \{f : D \rightarrow \mathbb{N} : f \text{ é bijeção}\}$. Como $\{D \subset \mathbb{N} : D \text{ é cofinito}\}$ é

enumerável e para cada D , $|\{f : D \rightarrow \mathbb{N} : f \text{ é bijeção}\}| = \mathfrak{c}$, então $|S| = \omega \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

Para ver que S é fracamente cancelativo à esquerda: dados $f, g \in S$, trata-se de ver que $\{h \in S : g \circ f = g \circ h\}$ é finito. Seja tal h . Tome E, D_f, D_h tais que $g : E \rightarrow \mathbb{N}$, $f : D_f \rightarrow \mathbb{N}$ e $h : D_h \rightarrow \mathbb{N}$. Como $g \circ f = g \circ h$, vale que $f^{-1}[E] = h^{-1}[E] = D'$, e que para todo $x \in D'$, $g(f(x)) = g(h(x))$. Ou seja, f e h coincidem sobre D' que é cofinito. Ademais, como h é bijeção, vale que $h[D_h \setminus D'] = h[D_h] \setminus h[D'] = \mathbb{N} \setminus E$ que é finito. Assim, podemos identificar cada h tal que $g \circ f = g \circ h$ com uma bijeção entre $D_h \setminus D'$ e $\mathbb{N} \setminus E$. Como $D_h \supset f^{-1}[E]$ e este é cofinito, temos um número finito de possibilidades para D_h . Mais precisamente, podemos injetar $\{h \in S : g \circ f = g \circ h\}$ em $\bigcup_{f^{-1}[E] \subset D \subset \mathbb{N}} \{b : D \setminus f^{-1}[E] \rightarrow \mathbb{N} \setminus E : b \text{ é bijeção}\}$ – o conjunto índice é finito e cada conjunto da união é finito.

Agora, que S é cancelativo à direita: suponha $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, com $f : D \rightarrow \mathbb{N}$, $g_1 : E_1 \rightarrow \mathbb{N}$ e $g_2 : E_2 \rightarrow \mathbb{N}$. Como $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, seus domínios são iguais, ou seja, $f^{-1}[E_1] = f^{-1}[E_2]$. Seja $e \in E_1$. Tome $d \in D$ tal que $e = f(d)$; $d \in f^{-1}[E_1] = f^{-1}[E_2]$, logo $e = f(d) \in E_2$. Temos então: $g_1(e) = g_1(f(d)) = g_2(f(d)) = g_2(e)$. Ou seja, dado $e \in E_1$, $e \in E_2$ e $g_1(e) = g_2(e)$. Analogamente, dado $e \in E_2$, $e \in E_1$ e $g_2(e) = g_1(e)$. Portanto, $g_1 = g_2$.

Um exemplo para ver que S não é cancelativo à esquerda: $g : \mathbb{N} \setminus \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{N}$ dado por $g(n) = n - 2$; $f : \mathbb{N} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{N}$ dado $f(n) = n - 1$; $h : \mathbb{N} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{N}$ dado por $h(n) = n - 1$ se $n \geq 4$, $h(1) = 1$ e $h(2) = 2$; temos que $g \circ f = g \circ h$.

Antes de provar que S^*S^* é nunca-denso precisaremos de duas propriedades:

(*) Sejam $t_n, t_r, t_m \in S$. Então $|\mathbb{N} \setminus \{a \in \text{dom } t_m : t_n^{-1}(t_m(a)) \in \text{dom } t_r\}| \leq |\mathbb{N} \setminus \text{dom } t_m| + |\mathbb{N} \setminus \text{dom } t_r|$. Em particular, $\{a \in \text{dom } t_m : t_n^{-1}(t_m(a)) \in \text{dom } t_r\}$ é cofinito.

(**) Sejam $A \subset \mathbb{N}$ cofinito e $v : A \rightarrow \mathbb{N}$ injetora. Então $C = \{t \in S : A \subset \text{dom } t \text{ e } t|_A = v\}$ é finito.

Prova de (*): $\mathbb{N} \setminus \{a \in \text{dom } t_m : t_n^{-1}(t_m(a)) \in \text{dom } t_r\} = \mathbb{N} \setminus \text{dom } t_m \cup \{a \in \text{dom } t_m : t_n^{-1}(t_m(a)) \in \mathbb{N} \setminus \text{dom } t_r\}$. Como $t_n^{-1} \circ t_m$ é uma função injetora e $\mathbb{N} \setminus \text{dom } t_r$ é finito, segue que $|\{a \in \text{dom } t_m : t_n^{-1}(t_m(a)) \in \mathbb{N} \setminus \text{dom } t_r\}| = |(t_n^{-1} \circ t_m)^{-1}[\mathbb{N} \setminus \text{dom } t_r]| \leq |\mathbb{N} \setminus \text{dom } t_r|$. Disso segue (*).

Prova de (**): note que cada $t \in C$ determina uma bijeção entre $(\text{dom } t) \setminus A$ e $\mathbb{N} \setminus v[A]$, ou seja, podemos injetar C em $\bigcup_{A \subset D \subset \mathbb{N}} \{b : D \setminus A \rightarrow \mathbb{N} \setminus v[A] : b \text{ é bijeção}\}$, e este conjunto é finito.

Agora, vejamos que S^*S^* é nunca-denso em S^* . Suponha por absurdo $V \subset S$ infinito tal que $V^* \subset \text{cl } S^*S^*$. Produziremos uma sequência injetora $(t_n)_{n \geq 1}$ em V tal que dados $s > 1$ e $n, r, m < s$, então não existem $x_1, x_2, y, w \in S$ tais que $x_1y = t_n$, $x_2y = t_r$, $x_1w = t_m$ e $x_2w = t_s$.

Tome $t_1 \in V$. Suponha escolhidos $t_1, \dots, t_{s-1}$. Para cada $n, r, m < s$, defina $D_{n,r,m} = \{t \in S : \text{existem } x_1, x_2, y, w \in S \text{ tais que } x_1y = t_n, x_2y = t_r, x_1w = t_m \text{ e } x_2w = t\}$. Logo, para definir t_s , basta mostrar que $V \setminus (\{t_n : n < s\} \cup \bigcup_{n,r,m < s} D_{n,r,m}) \neq \emptyset$. De fato, mostraremos que cada $D_{n,r,m}$

é finito. Para ver isso, mostraremos que dados $t \in D_{n,r,m}$, se $a \in \text{dom } t_m$ e $t_n^{-1}(t_m(a)) \in \text{dom } t_r$, então $t(a) = t_r(t_n^{-1}(t_m(a)))$ – pois assim, definindo $A = \{a \in \text{dom } t_m : t_n^{-1}(t_m(a)) \in \text{dom } t_r\}$ e $v = t_r \circ t_n^{-1} \circ t_m|_A$, podemos usar $(*)$ e $(**)$ e concluir que $D_{n,m,r} \subset C$.

Assim, seja $t \in D_{n,r,m}$ e tome $x_1, x_2, y, w \in S$ tais que $x_1 y = t_n$, $x_2 y = t_r$, $x_1 w = t_m$ e $x_2 w = t$; seja $a \in \text{dom } t_m$ tal que $t_n^{-1}(t_m(a)) \in \text{dom } t_r$. Como $a \in \text{dom } t_m$, temos $t_m(a) = x_1(w(a))$, logo $w(a) = x_1^{-1}(t_m(a))$. Como $t_n^{-1}(t_m(a)) \in \text{dom } t_n$, temos $t_n(t_n^{-1}(t_m(a))) = t_m(a)$ e $t_n(t_n^{-1}(t_m(a))) = x_1(y(t_n^{-1}(t_m(a))))$, do que segue $y(t_n^{-1}(t_m(a))) = x_1^{-1}(t_m(a)) = w(a)$. Por fim, como $t_n^{-1}(t_m(a)) \in \text{dom } t_r$, temos $t_r(t_n^{-1}(t_m(a))) = x_2(y(t_n^{-1}(t_m(a)))) = x_2(w(a)) = t(a)$, como pretendíamos.

Assim, considere $A = \{t_n : n \in \mathbb{N}\}$. $A^* \cap S^* S^* \neq \emptyset$, logo tome $p, q \in S^*$ tal que $A \in p \cdot q$. $\{x \in S : x^{-1}A \in q\} \in p$, logo tome x_1, x_2 distintos tais que $x_1^{-1}A \cap x_2^{-1}A \in q$, e portanto é infinito. Tome $y \in x_1^{-1}A \cap x_2^{-1}A$, e tome n, r tais que $x_1 y = t_n$ e $x_2 y = t_r$. S é cancelativo à direita, logo $n \neq r$; assumamos s.p.g. que $n < r$. Como S é fracamente cancelativo à esquerda, o conjunto $\{z \in S : x_1 z = t_p \text{ ou } x_2 z = t_p \text{ para algum } p \leq r\}$ é finito, logo podemos tomar $w \in x_1^{-1}A \cap x_2^{-1}A$ tal que $x_1 w = t_m$ e $x_2 w = t_s$ com $m, s > r$. Agora, caso $m < s$, temos $n < r < m < s$ e assim $t_s \in D_{n,r,m}$, contradição. E caso $s < m$, temos $n < r < s < m$ e assim $t_m \in D_{n,r,s}$, contradição. ■

Lema 3.6. *Seja S um semigrupo infinito e suponha que S^* é um subsemigrupo de βS . São equivalentes:*

(a) $S^* S^*$ não é nunca-denso em S^* .

(b) Existe $V \in [S]^\omega$ tal que para todo $A \in [V]^\omega$ existem $(x_n)_{n \geq 1}$ e $(y_n)_{n \geq 1}$ sequências injetoras em S tais que, sempre que $n > k$, $x_k y_n \in A$.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b): Tome $V \subset S$ enumerável tal que $V^* \subset \text{cl } S^* S^*$. Dado $A \subset V$ infinito, $A^* \cap S^* S^* \neq \emptyset$, logo tome $p, q \in S^*$ tal que $A \in p \cdot q$. $\{x \in S : x^{-1}A \in q\} \in p$ e portanto é infinito. Tome $(x_n)_{n \geq 1}$ sequência injetora em $\{x \in S : x^{-1}A \in q\}$. Tome então $y_1 \in S$ qualquer e definidos $y_1, \dots, y_n$ tome $y_{n+1} \in (\bigcap_{k=1}^n x_k^{-1}A) \setminus \{y_1, \dots, y_n\}$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Tome V dado pela hipótese. Afirmamos que $V^* \subset \text{cl } S^* S^*$. Seja $r \in V^*$; tome $A \in r$ tal que $A \subset V$. Quero ver que $A^* \cap S^* S^* \neq \emptyset$. Tome $(x_n)_{n \geq 1}$ e $(y_n)_{n \geq 1}$ dadas pela hipótese. Tome $p \in S^*$ tal que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \in p$ e $q \in S^*$ tal que $\{\{y_n : n > k\} : k \in \mathbb{N}\} \in q$. Afirmação: $A \in p \cdot q$. Para ver isso, basta ver que $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \{x \in S : x^{-1}A \in q\}$. Seja $k \in \mathbb{N}$ então. Note então que, pela propriedade das sequências, temos que $\{y_n : n > k\} \subset x_k^{-1}A$, e portanto $x_k^{-1}A \in q$. ■

O Teorema 3.5 nos mostrou que a hipótese de cancelamento não é necessária para que $S^* S^*$ seja nunca-denso em S^* . Agora veremos um exemplo que mostra que o cancelamento também não é suficiente caso S não seja enumerável.

Teorema 3.7. *Existe um semigrupo cancelativo S tal que $|S| = \mathfrak{c}$ e S^*S^* não é nunca-denso em S^* .*

Demonstração. Seja $L = \{z_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_{\sigma,k} : \sigma < \mathfrak{c} \text{ e } k \in \mathbb{N}\} \cup \{y_{\sigma,k} : \sigma < \mathfrak{c} \text{ e } k \in \mathbb{N}\}$, com todos os z_n , $x_{\sigma,k}$ e $y_{\sigma,k}$ distintos entre si. Defina $V = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$. Enumere $[V]^\omega = \{A_\sigma : \sigma < \mathfrak{c}\}$ e, para cada $\sigma < \mathfrak{c}$, enumere $A_\sigma = \{w_{\sigma,k,n} : k \geq 1 \text{ e } n \geq k + 1\}$.

Considere S o conjunto de todas as palavras $a_1 \dots a_t$, com cada $a_j \in L$, tais que não existem $i < t$, $\sigma < \mathfrak{c}$, e $k < n$ tais que $a_i = x_{\sigma,k}$ e $a_{i+1} = y_{\sigma,n}$. Dadas $u = a_1 \dots a_t$ e $v = b_1 \dots b_s$ em S , defina $u \cdot v$ pela concatenação de u e v , a não ser que existam $\sigma < \mathfrak{c}$ e $k < n$ tais que $a_t = x_{\sigma,k}$ e $b_1 = y_{\sigma,n}$; nesse caso, $u \cdot v = a_1 \dots a_{t-1} w_{\sigma,k,n} b_2 \dots b_s$ (sendo que $a_1 \dots a_{t-1}$ é a palavra vazia caso $t = 1$ e $b_2 \dots b_s$ é a palavra vazia se $s = 1$).

Note que desse modo V é o conjunto que satisfaz a condição do Lema 3.6, pois dado $A_\sigma \in [V]^\omega$, $(x_{\sigma,n})_{n \geq 1}$ e $(y_{\sigma,n})_{n \geq 1}$ são sequências que satisfazem a propriedade exigida. Resta agora provar que de fato S com tal operação é um semigrupo cancelativo.

Vejamos que $\cdot$ é associativa: sejam $u = a_1 \dots a_t$, $v = b_1 \dots b_s$ e $w = c_1 \dots c_r$ elementos de S .

Caso 1: $b_1 = y_{\sigma,n}$ para algum $\sigma < \mathfrak{c}$ e algum $n \in \mathbb{N}$, e $b_s = x_{\tau,m}$ para algum $\tau < \mathfrak{c}$ e algum $m \in \mathbb{N}$.

(Note que neste caso $s \geq 2$ pois $b_1 \neq b_s$.)

Caso 1a: $a_t \neq x_{\sigma,k}$ para todos $k < n$, e $c_1 \neq y_{\tau,l}$ para todos $l > m$. Neste caso, temos que ambos $(u \cdot v) \cdot w$ e $u \cdot (v \cdot w)$ são a concatenação de u , v e w , portanto iguais.

Caso 1b: $a_t = x_{\sigma,k}$ para algum $k < n$, e $c_1 \neq y_{\tau,l}$ para todos $l > m$. Temos então

$$\begin{aligned} (u \cdot v) \cdot w &= (a_1 \dots a_{t-1} w_{\sigma,k,n} b_2 \dots b_s) \cdot (c_1 \dots c_r) \\ &= a_1 \dots a_{t-1} w_{\sigma,k,n} b_2 \dots b_s c_1 \dots c_r \\ &= (a_1 \dots a_t) \cdot (b_1 \dots b_s c_1 \dots c_r) \\ &= u \cdot (v \cdot w). \end{aligned}$$

Caso 1c: $a_t \neq x_{\sigma,k}$ para todos $k < n$, e $c_1 = y_{\tau,l}$ para algum $l > m$. Temos então

$$\begin{aligned} (u \cdot v) \cdot w &= (a_1 \dots a_t b_1 \dots b_s) \cdot (c_1 \dots c_r) \\ &= a_1 \dots a_t b_1 \dots b_{s-1} w_{\tau,m,l} c_2 \dots c_r \\ &= (a_1 \dots a_t) \cdot (b_1 \dots b_{s-1} w_{\tau,m,l} c_2 \dots c_r) \\ &= u \cdot (v \cdot w). \end{aligned}$$

Caso 1d: $a_t = x_{\sigma,k}$ para algum $k < n$, e $c_1 = y_{\tau,l}$ para algum $l > m$. Temos então

$$\begin{aligned} (u \cdot v) \cdot w &= (a_1 \dots a_{t-1} w_{\sigma,k,n} b_2 \dots b_s) \cdot (c_1 \dots c_r) \\ &= a_1 \dots a_{t-1} w_{\sigma,k,n} b_2 \dots b_{s-1} w_{\tau,m,l} c_2 \dots c_r \\ &= (a_1 \dots a_t) \cdot (b_1 \dots b_{s-1} w_{\tau,m,l} c_2 \dots c_r) \\ &= u \cdot (v \cdot w). \end{aligned}$$

(Note que caso $s = 2$ a expressão $b_2 \dots b_{s-1}$ é vazia, sem prejuízo para a demonstração.)

Caso 2: $b_1 = y_{\sigma,n}$ para algum $\sigma < \mathfrak{c}$ e algum $n \in \mathbb{N}$, e $b_s \neq x_{\tau,m}$ para todos $\tau < \mathfrak{c}$ e $m \in \mathbb{N}$.

Caso 2a: $a_t \neq x_{\sigma,k}$ para todos $k < n$. Neste caso, temos que ambos $(u \cdot v) \cdot w$ e $u \cdot (v \cdot w)$ são a concatenação de u , v e w , portanto iguais.

Caso 2b: $a_t = x_{\sigma,k}$ para algum $k < n$. Mesma situação do caso 1b.

Caso 3: $b_1 \neq y_{\sigma,n}$ para todos $\sigma < \mathfrak{c}$ e $n \in \mathbb{N}$ e $b_s = x_{\tau,m}$ para algum $\tau < \mathfrak{c}$ e algum $m \in \mathbb{N}$.

Caso 3a: $c_1 \neq y_{\tau,l}$ para todos $l > m$. Neste caso, temos que ambos $(u \cdot v) \cdot w$ e $u \cdot (v \cdot w)$ são a concatenação de u , v e w , portanto iguais.

Caso 3b: $c_1 = y_{\tau,l}$ para algum $l > m$. Mesma situação do caso 1c.

Caso 4: $b_1 \neq y_{\sigma,n}$ para todos $\sigma < \mathfrak{c}$ e $n \in \mathbb{N}$ e $b_s \neq x_{\tau,m}$ para todos $\tau < \mathfrak{c}$ e $m \in \mathbb{N}$. Neste caso, temos que ambos $(u \cdot v) \cdot w$ e $u \cdot (v \cdot w)$ são a concatenação de u , v e w , portanto iguais.

Agora, faremos a prova de que S é cancelativo à direita. A prova de que S é cancelativo à esquerda é similar. Sejam então $u = a_1 \dots a_t$, $v = b_1 \dots b_s$ e $w = c_1 \dots c_r$ e suponha que $u \cdot w = v \cdot w$. Se $c_1 \neq y_{\tau,l}$ para todos $\tau < \mathfrak{c}$ e $l \in \mathbb{N}$, então $u \cdot w$ e $v \cdot w$ são concatenações, logo $u = v$. Suponha então que $c_1 = y_{\tau,l}$ para algum $\tau < \mathfrak{c}$ e algum $l \in \mathbb{N}$.

Caso a: $a_t \neq x_{\tau,n}$ para todos $n < l$ e $b_s \neq x_{\tau,m}$ para todos $m < l$. Neste caso, $u \cdot w$ e $v \cdot w$ são concatenações, logo $u = v$.

Caso b: $a_t = x_{\tau,n}$ para algum $n < l$ e $b_s \neq x_{\tau,m}$ para todos $m < l$. Temos que $u \cdot w = a_1 \dots a_{t-1} w_{\tau,n,l} c_2 \dots c_r$ e $v \cdot w = b_1 \dots b_s c_1 \dots c_r$. Como coincidem termo a termo, temos que $c_1 = w_{\tau,n,l}$. Absurdo, pois $c_1 = y_{\tau,l}$.

Caso c: $a_t \neq x_{\tau,n}$ para todos $n < l$ e $b_s = x_{\tau,m}$ para algum $m < l$. Analogamente ao caso b, temos um absurdo.

Caso d: $a_t = x_{\tau,n}$ para algum $n < l$ e $b_s = x_{\tau,m}$ para algum $m < l$. Temos que $u \cdot w = a_1 \dots a_{t-1} w_{\tau,n,l} c_2 \dots c_r$ e $v \cdot w = b_1 \dots b_{s-1} w_{\tau,m,l} c_2 \dots c_r$. Como as palavras são iguais, seu

comprimento é igual, ou seja $(t - 1) + 1 + (r - 1) = (s - 1) + 1 + (r - 1)$, do que $t = s$. Disso segue que para cada $i < t$, $a_i = b_i$; e $w_{\tau,n,l} = w_{\tau,m,l}$, do que $n = m$, e portanto $a_t = x_{\tau,n} = x_{\tau,m} = b_s$. Assim $a_1 \dots a_t = b_1 \dots b_s$, ou seja, $u = v$. ■

Antes do próximo teorema do artigo, precisaremos de um resultado do livro [1] sobre cancelamento.

Teorema 3.8. *Seja S um semigrupo e seja s um elemento cancelável de S . Então, para cada $t \in S$ e cada $p \in \beta S$:*

- (a) *Se S é cancelativo à direita e $sp = tp$, então $s = t$.*
- (b) *Se S é cancelativo à esquerda e $ps = pt$, então $s = t$.*

Demonstração. Provaremos (i); (ii) é análogo. A prova será por contraposição.

Suponha que $s \neq t$. Defina $f : \beta S \rightarrow \beta S$ por $f(su) = tu$ para todo $u \in S$, e $f(v) = s^2$ para todo $v \in S \setminus sS$. Note que a função está bem definida, já que sobre sS , se $su = su'$, como s é cancelável, então $u = u'$. Além disso, como S é cancelativo à direita, f não possui pontos fixos (já que estamos supondo $s \neq t$).

Agora, note que as funções contínuas $\tilde{f} \circ \lambda_s$ e λ_t coincidem sobre S , logo são iguais, de forma que $\tilde{f}(sp) = tp$. Usando o Teorema 1.26(a), particione S em três células A_1, A_2, A_3 tais que $A_i \cap f[A_i] = \emptyset$ para cada i . Tome i tal que $A_i \in sp$. Pelo Teorema 1.26(e), $f[A_i] \in \tilde{f}(sp) = tp$. Dessa forma, $sp \neq tp$. ■

Como corolário, se S é cancelativo, então βS é cancelável com relação a S .

O próximo teorema nos diz que, com uma certa restrição sobre a cardinalidade de S , podemos concluir mais do que o Teorema 3.4.

Teorema 3.9. *Seja S um semigrupo imersível em um grupo G e suponha que $|S| = \kappa \geq \omega$ e $\kappa^\omega < 2^\kappa$. Seja $\mathcal{V} = \{A \in [S]^\omega : A^* \cap G^*G^* = \emptyset\}$ e defina $T = \bigcup \{A^* : A \in \mathcal{V}\}$. Então:*

- (a) *T é um aberto denso de S^* , $T \cap G^*G^* = \emptyset$, e todo elemento de T é cancelável à direita com relação a $Q = \{q \in S^* : \|q\| \leq \omega\}$ (ou seja, dados $p \in T$ e $q, r \in Q$, se $qp = rp$ então $q = r$).*
- (b) *Seja H o subgrupo de G gerado por S . Defina uma relação de equivalência $\sim$ em S por $p \sim q$ se e só se existem $a, b \in H$ tais que $apb = q$. Então dados $k, m \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_k \in T$, se $p_1 \dots p_m \sim q_1 \dots q_k$, então $k = m$ e $p_t \sim q_t$ para cada t .*
- (c) *Existe $X \subset T$ tal que X é denso em S^* , $|X| = 2^\kappa$ e X gera um subsemigrupo livre de S^* .*

Demonstração. (a): Pela própria definição, T é aberto em S^* e disjunto de G^*G^* . Agora, pelo Teorema 3.4, $S^* \cap G^*G^*$ é nunca denso em S^* , e logo $S^* \setminus G^*G^*$ é denso em S^* . Dado $V^* \subset S^* \setminus G^*G^*$ aberto básico de S^* , tome $A \subset V$ enumerável. Temos que $A \in \mathcal{V}$, mostrando que $T \cap V^* \neq \emptyset$, e portanto T é denso em $S^* \setminus G^*G^*$.

Agora, seja $p \in T$ e suponha $q, r \in Q$ distintos tais que $qp = rp$. Como $\|q\|, \|r\| \leq \omega$, tome $A \in q$, $B \in r$ enumeráveis e disjuntos. Temos então que $qp \in \overline{Ap} = \overline{Ap}$ e $rp \in \overline{Bp} = \overline{Bp}$. Pelo item (c) do Teorema 1.26, temos que $Ap \cap \overline{Bp} \neq \emptyset$ ou $\overline{Ap} \cap Bp \neq \emptyset$. S.p.g., tome $a \in A$ e $b \in \overline{B}$ tais que $ap = bp$. Pelo Teorema 3.8 acima, caso $b \in B$, então $a = b$; absurdo pois $A \cap B = \emptyset$. Logo $b \in B^*$. Temos então que $p = a^{-1}bp$. Como pelo Teorema 1.40, G^* é um ideal, $a^{-1}b \in G^*$, de forma que $p = a^{-1}bp \in G^*G^*$. Contradição, pois $p \in T$.

(b): Para provar este, será necessário observar dois fatos:

Primeiramente, notar que $T \subset \{p \in S^* : \|p\| = \omega\}$, pois exigimos $|A| = \omega$ na definição de $\mathcal{V}$.

Segundo, que dados $A \in p$ e $B \in q$, $AB \in pq$, pois $A \subset \{x \in S : x^{-1}AB \in q\}$, já que dado $a \in A$, $B \subset a^{-1}AB$. Disso segue, usando que S é cancelativo, que $\{p \in S^* : \|p\| = \omega\}$ é um subsemigrupo de S^* , e um ideal de $\{p \in \beta S : \|p\| \leq \omega\}$.

É fácil ver que $\sim$ é uma relação de equivalência (basta usar que H é grupo).

Sejam então $k, m \in \mathbb{N}$ e $p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_k \in T$ tais que $p_1 \cdots p_m \sim q_1 \cdots q_k$. Suponha que a conclusão falhe, e tome $k + m$ minimal entre todos os contraexemplos. Vale que $m > 1$ e $k > 1$: se $m = 1$ e $k = 1$, não é um contraexemplo; se $m = 1$ e $k > 1$, teríamos, para algum $a, b \in H$, $p_1 = (a^{-1}q_1 \cdots q_{k-1})(q_k b^{-1}) \in G^*G^*$, uma contradição; analogamente se $m > 1$ e $k = 1$.

Tome então $a, b \in H$ tais que $ap_1 \cdots p_m b = q_1 \cdots q_k$. Pelas observações acima, podemos tomar $A, B \subset S$ enumeráveis tais que $A \in p_1 \cdots p_{m-1}$ e $B \in q_1 \cdots q_{k-1}$. Temos então que $a\overline{A}p_m b \cap \overline{B}q_k \neq \emptyset$; novamente pelo Teorema 1.26(c), temos duas opções: podemos tomar (1) $c \in A$ e $d \in \overline{B}$ tais que $acp_m b = dq_k$; ou (2) $c \in A^*$ e $d \in B$ tais que $acp_m b = dq_k$. Suponha que valha (2): teríamos então $q_k = (d^{-1}ac)(p_m b) \in G^*G^*$, uma contradição. Logo vale (1). Caso $d \in B^*$, teríamos que $p_m = ((ac)^{-1}d)(q_k b^{-1}) \in G^*G^*$, contradição. Logo $d \in B$, e assim $d^{-1}acp_m b = q_k$, ou seja, $p_m \sim q_k$. Além disso, $p_m b = (ac)^{-1}dq_k$, de forma que $ap_1 \cdots p_{m-1}(ac)^{-1}dq_k = q_1 \cdots q_k$. Pelo item (a), podemos cancelar q_k de ambos os lados e obter que $ap_1 \cdots p_{m-1}(ac)^{-1}d = q_1 \cdots q_{k-1}$, ou seja, $p_1 \cdots p_{m-1} \sim q_1 \cdots q_{k-1}$. Pela minimalidade de $k + m$, obtemos que $k - 1 = m - 1$ e $p_t \sim q_t$ para todo $t \leq m$.

(c): Denote por $[x]$ a classe de equivalência de $x \in S^*$. Note que $[x] = HxH$, de forma que $|[x]| = |H| = |S| = \kappa < 2^c$. Defina $\lambda = |\mathcal{V}|$. $\mathcal{V} \subset [S]^\omega$, logo $\lambda \leq \kappa^\omega < 2^c$. Seja $\mathcal{V} = \{A_\sigma : \sigma < \lambda\}$ uma enumeração de $\mathcal{V}$. Dado $\sigma < \lambda$, como $|A_\sigma| = \omega$, $|A_\sigma^*| = 2^c$; disso segue que $I_\sigma = \{[x] : x \in A_\sigma^*\}$

tem cardinalidade 2^c , pois $A_\sigma^* = \bigcup_{[x] \in I_\sigma} A_\sigma^* \cap [x]$. Dessa forma, podemos indutivamente escolher, para $\sigma < \lambda$, $x_\sigma \in A_\sigma^*$ tal que se $\sigma \neq \tau$, $x_\sigma \approx x_\tau$ (em cada passo tome $x_\sigma \in \bigcup \{I_\sigma \setminus \{[x_\tau] : \tau < \sigma\}\}$). Assim, defina $\mathcal{S} = I_0 \setminus \{[x_\sigma] : \sigma < \lambda\} = \{[x] : x \in A_0^* \setminus \{[x_\sigma] : \sigma < \lambda\}\}$. Tome $Y \subset A_0^*$ tal que $\mathcal{S} = \{[y] : y \in Y\}$ e dados $y, z \in Y$ distintos, $y \approx z$ – ou seja, Y é um conjunto escolha de $\{[x] \cap A_0^* : [x] \in \mathcal{S}\}$. Por fim, defina $X = Y \cup \{x_\sigma : \sigma < \lambda\}$. Em primeiro lugar, note que $|Y| = |\mathcal{S}| = 2^c$, pois $|I_0| = 2^c$. Além disso, X possui no máximo um representante de cada classe de equivalência; em particular $Y \cap \{x_\sigma : \sigma < \lambda\} = \emptyset$, e portanto $|X| = |Y| + \lambda = 2^c$.

Vejam agora que X gera um subsemigrupo livre. Suponha $p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_k \in X$ tais que $p_1 \cdots p_m = q_1 \cdots q_k$. Note que $X \subset T$, logo o item (b) nos diz que $k = m$ e $p_t \sim q_t$ para cada t . Porém, como X possui no máximo um representante de cada classe, isso implica que $p_t = q_t$. Ou seja, X de fato gera um subsemigrupo livre.

Por fim, para ver que X é denso em S^* , seja $V \subset S$ infinito e tome $D \subset V$ enumerável. Tome $q \in D^* \setminus \text{cl } G^*G^*$, e tome $B \in q$ tal que $B^* \cap G^*G^* = \emptyset$. Considere $A = B \cap D$; temos que $A \in \mathcal{V}$, logo $A = A_\sigma$ para algum $\sigma < \lambda$; deste modo, $x_\sigma \in X$ e $x_\sigma \in A_\sigma^* \subset D^* \subset V^*$, de modo que $V^* \cap X \neq \emptyset$. ■

Os próximos três teoremas lidam com a densidade dos produtos em $\mathcal{U}_\kappa$, e por isso veremos sob que condições temos $S^*\mathcal{U}_\kappa \subset \mathcal{U}_\kappa$. O que segue é o Lema 6.34.3 do livro [2].

Lema 3.10. *Seja S um semigrupo infinito e $\kappa = |S|$. Se S é fraquissimamente cancelativo à esquerda, então $\mathcal{U}_\kappa(S)$ é um ideal à esquerda de βS . Se além disso, S for fraquissimamente cancelativo à direita, então $\mathcal{U}_\kappa(S)$ é um ideal de βS .*

Demonstração. Sejam $p \in \beta S$ e $q \in \mathcal{U}_\kappa$, e suponha que $p \cdot q \notin \mathcal{U}_\kappa$. Tome $A \in p \cdot q$ tal que $|A| < \kappa$. Vale que $\{x \in S : x^{-1}A \in q\} \in p$; tome x tal que $x^{-1}A \in q$. Temos então: $x^{-1}A = \bigcup_{a \in A} \{y \in S : xy = a\}$. Como $|A| < \kappa$, e S é fraquissimamente cancelativo à esquerda, segue que $|x^{-1}A| < \kappa$. Absurdo, pois $x^{-1}A \in q \in \mathcal{U}_\kappa$.

Agora, suponha que $q \cdot p \notin \mathcal{U}_\kappa$ e tome $A \in q \cdot p$ tal que $|A| < \kappa$. Caso $p \in \mathcal{U}_\kappa$, contradiz o que acabamos de provar. Então $\|p\| < \kappa$, logo tome $B \in p$ tal que $|B| < \kappa$. Temos, pois: $C = \{x \in S : x^{-1}A \in p\} \in q$. Note que $|C| = \kappa$. Agora, afirmamos que $C \subset \bigcup_{b \in B} \bigcup_{a \in A} \{x \in S : xa = b\}$, do que segue que $|C| < \kappa$. Para comprovar a afirmação, seja $x \in C$; tome $b \in B \cap x^{-1}A$, e tome $a \in A$ tal que $xa = b$; segue a afirmação. ■

Observe que o próximo teorema é uma de extensão do caso S enumerável (3.3), pois $\mathcal{U}_\omega = S^*$, e inclusive possui técnica de demonstração similar.

Teorema 3.11. *Seja S um semigrupo cancelativo à direita e fraquissimamente cancelativo à esquerda com $|S| = \kappa$. Então $S^*\mathcal{U}_\kappa$ é nunca-denso em $\mathcal{U}_\kappa$.*

Demonstração. Enumere $S = \{s_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Suponha, por absurdo, que existe $V \in [S]^\kappa$ tal que $\overline{V} \cap \mathcal{U}_\kappa \subset \text{cl } S^* \mathcal{U}_\kappa$.

Tome $v_0 \in V$ qualquer. Recursivamente, seja $0 < \delta < \kappa$ e suponha que já escolhemos v_σ para $\sigma < \delta$ de forma que

- (1) se $\alpha < \sigma < \delta$, então $v_\alpha < v_\sigma$; e
- (2) se $\alpha < \sigma < \tau < \delta$, $\mu < \tau$, e $x \in S$, então $s_\alpha x \neq v_\sigma$ ou $s_\mu x \neq v_\tau$.

Para cada $\alpha < \sigma < \delta$, defina $C_{\alpha,\sigma} = \{x \in S : s_\alpha x = v_\sigma\}$; considere $B = \bigcup_{\alpha < \sigma < \delta} C_{\alpha,\sigma}$. Como B é uma união de menos do que κ conjuntos solução à esquerda, então $|B| < \kappa$; dessa forma, $|\{s_\mu x : \mu < \delta \text{ e } x \in B\}| < \kappa$. Isso nos permite tomar $v_\delta \in V \setminus (\{v_\sigma : \sigma < \delta\} \cup \{s_\mu x : \mu < \delta \text{ e } x \in B\})$. Claramente a condição (1) permanece satisfeita. Para (2), suponha $\alpha < \sigma < \delta$, $\mu < \delta$, e $x \in S$ tais que $s_\alpha x = v_\sigma$ e $s_\mu x = v_\delta$. Teríamos que $x \in C_{\alpha,\sigma} \subset B$, de forma que $v_\delta \in \{s_\mu x : \mu < \delta \text{ e } x \in B\}$, uma contradição.

Defina então $A = \{v_\sigma : \sigma < \kappa\}$ e, para cada $\alpha < \kappa$, $A_\alpha = \{v_\sigma : \alpha < \sigma < \kappa\}$. Necessitaremos do seguinte fato: dados $s \in S$ e $q \in \mathcal{U}_\kappa$, se $s^{-1}A \in q$, então para todo $\alpha < \kappa$, $s^{-1}A_\alpha \in q$. Suponha que a conclusão falhe e tome $\alpha < \kappa$ tal que $s^{-1}A_\alpha \notin q$. Temos que $s^{-1}A \setminus s^{-1}A_\alpha = s^{-1}(A \setminus A_\alpha) \in q$. Note que $s^{-1}(A \setminus A_\alpha) = \bigcup_{\sigma \leq \alpha} \{y \in S : sy = v_\sigma\}$; esse é uma união de menos do que κ conjuntos solução à esquerda, logo possui cardinalidade menor do que κ . Contradição pois $q \in \mathcal{U}_\kappa$.

Agora, como $A \subset V$, $\overline{A} \cap \mathcal{U}_\kappa \subset \text{cl } S^* \mathcal{U}_\kappa$, logo $\overline{A} \cap \mathcal{U}_\kappa \cap S^* \mathcal{U}_\kappa \neq \emptyset$. Portanto tome $p \in S^*$ e $q \in \mathcal{U}_\kappa$ tais que $A \in p \cdot q$. Temos que $\{s \in S : s^{-1}A \in q\} \in p$, logo tome $\alpha, \mu < \kappa$ distintos tais que $s_\alpha^{-1}A, s_\mu^{-1}A \in q$. Tome $x \in s_\alpha^{-1}A_\alpha \cap s_\mu^{-1}A_\mu$. Tome então $\sigma, \delta < \kappa$ tais que $\alpha < \sigma$, $\mu < \delta$ e $s_\alpha x = v_\sigma$ e $s_\mu x = v_\delta$. Como S é cancelativo à direita e $s_\alpha \neq s_\mu$, temos que $\sigma \neq \delta$. Sem perda de generalidade, $\sigma < \delta$; isso viola a construção de v_δ , contradição. ■

Os autores do artigo apontam que, ao se perscrutar as últimas três linhas da demonstração acima, poder-se-ia exigir menos do que o cancelamento à direita: se exigíssemos apenas que dados $a, b \in S$ distintos, $|\{y \in S : ay = by\}| < \kappa$, então tomar-se-ia $x \in (s_\alpha^{-1}A_\alpha \cap s_\mu^{-1}A_\mu) \setminus \{y \in S : s_\alpha y = s_\mu y\}$ e a demonstração seguiria. Porém, apontam em seguida os autores, isto não é um enfraquecimento das hipóteses, pois isto implica que S é cancelativo à direita, do seguinte modo: suponha $a, b \in S$ distintos e $c \in S$ tais que $ac = bc$. Então $cS \subset \{y \in S : ay = by\}$ e portanto $|cS| < \kappa$. Porém, $S = \bigcup_{d \in cS} \{x \in S : cx = d\}$, uma união de menos do que κ conjuntos solução à esquerda, de modo que $|S| < \kappa$, contradição.

Lema 3.12. *Seja S um semigrupo infinito, fracamente cancelativo à esquerda e fraquissimamente cancelativo à direita, com $|S| = \kappa$. Enumere $S = \{s_\alpha : \alpha < \kappa\}$ e seja $V = \{q \in S^* : \text{existe } \delta < \kappa \text{ tal que } \{s_\alpha : \alpha < \delta\} \in q\}$. Então $(\beta S)V \cap \mathcal{U}_\kappa$ é nunca-denso em $\mathcal{U}_\kappa$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que existe $C \in [S]^\kappa$ tal que $\overline{C} \cap \mathcal{U}_\kappa \subset \text{cl}((\beta S)V)$. Usando técnicas análogas ao do teorema anterior - apenas “espelhadas” - obtemos uma κ -sequência $(t_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ em C injetora tal que dados $x \in S$, $\gamma < \sigma < \alpha$, e $\mu < \alpha$, vale que $xs_\gamma \neq t_\sigma$ ou $xs_\mu \neq t_\alpha$. (Precisamos apenas usar que $|C| = \kappa$ e S é fraquissimamente cancelativo à direita.)

Defina $B = \{t_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Como $\overline{B} \cap \mathcal{U}_\kappa \cap (\beta S)V \neq \emptyset$, tome $r \in \beta S$ e $q \in V$ tais que $r \cdot q \in \overline{B} \cap \mathcal{U}_\kappa$. Como $q \in V$, tome $\delta < \kappa$ tal que $\{s_\alpha : \alpha < \delta\} \in q$, e considere $H = \{t_\alpha : \alpha > \delta\}$. Como $B \in r \cdot q \in \mathcal{U}_\kappa$, então $H \in r \cdot q$, de forma que $\{x \in S : x^{-1}H \in q\} \in r$, logo tome um tal x . Defina $W = x^{-1}H \cap \{s_\alpha : \alpha < \delta\}$; note que $W \in q$, e logo é infinito.

Afirmção: $|xW| = 1$. Sejam $\gamma, \mu < \delta$ tais que $s_\gamma, s_\mu \in W$. Temos $xs_\gamma, xs_\mu \in H$, logo tome $\sigma, \alpha > \delta$ tais que $xs_\gamma = t_\sigma$ e $xs_\mu = t_\alpha$. Caso $\sigma \neq \alpha$, então $\sigma < \alpha$ ou $\alpha < \sigma$, contradizendo a escolha da κ -sequência. Portanto $\alpha = \sigma$, logo $xs_\gamma = xs_\mu$.

Porém, W ser infinito e xW ser unitário contradiz a hipótese de S ser fracamente cancelativo à esquerda. ■

Teorema 3.13. *Seja S um semigrupo infinito, cancelativo à direita, e fracamente cancelativo à esquerda, com $|S| = \kappa$. Suponha que κ é regular. Então $S^*S^* \cap \mathcal{U}_\kappa$ é nunca-denso em $\mathcal{U}_\kappa$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.11, $S^*\mathcal{U}_\kappa$ é nunca-denso em $\mathcal{U}_\kappa$. Resta ver então que $S^*(S^*\setminus\mathcal{U}_\kappa) \cap \mathcal{U}_\kappa$ é nunca-denso. Enumere $S = \{s_\alpha : \alpha < \kappa\}$ e seja $V = \{q \in S^* : \text{existe } \delta < \kappa \text{ tal que } \{s_\alpha : \alpha < \delta\} \in q\}$. Pelo Lema acima, $(\beta S)V \cap \mathcal{U}_\kappa$ é nunca-denso em $\mathcal{U}_\kappa$; em particular $S^*V \cap \mathcal{U}_\kappa$ é nunca-denso. Basta ver então que $S^*\setminus\mathcal{U}_\kappa \subset V$. Seja $r \in S^*\setminus\mathcal{U}_\kappa$ então. Tome $A \in r$ tal que $|A| < \kappa$. Como κ é regular, então existe $\delta < \kappa$ tal que $A \subset \{s_\alpha : \alpha < \delta\}$; esse δ atesta que $r \in V$. ■

Para o próximo teorema – o último nesta seção do artigo – precisaremos de um resultado encontrado no Teorema 7.35 do livro [1]. Apresentaremos a prova deste resultado posteriormente.

O próximo teorema mostra a grande maioria das técnicas utilizadas nesta seção. Ele traduz a ideia de que as propriedades algébricas de S influenciam nas propriedades topológicas-e-algébricas de S^* , sendo que cada particularidade destas têm seu papel bem delineado.

Teorema 3.14. *Seja S um semigrupo infinito, cancelativo à direita, e fraquissimamente cancelativo à esquerda, com $|S| = \kappa$. Seja $\mathcal{C}$ uma coleção de no máximo κ subconjuntos de S tal que $\mathcal{C}$ possui a κ -p.i.f. Então existe uma κ -sequência injetora $(t_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ em S tal que, definindo $B = \{t_\alpha : \alpha < \kappa\}$, valem as seguintes asserções:*

- (1) $\overline{B} \cap \mathcal{U}_\kappa \cap S^*\mathcal{U}_\kappa = \emptyset$.
- (2) Se $p, q \in \overline{B} \cap \mathcal{U}_\kappa$ são distintos, então $\beta S \cdot p \cap \beta S \cdot q = \emptyset$.
- (3) Se $p \in \overline{B} \cap \mathcal{U}_\kappa$, então p é cancelável à direita em βS .

- (4) $|\overline{B} \cap \mathcal{U}_\kappa| = 2^{2^\kappa}$ e $\overline{B} \cap \mathcal{U}_\kappa$ gera um semigrupo livre em $\mathcal{U}_\kappa$.
- (5) Seja $T = \bigcap_{\alpha < \kappa} \overline{FP((t_\sigma)_{\alpha < \sigma < \kappa})}$. Então T é um subsemigrupo compacto de βS com a propriedade de que todo grupo maximal de $K(T)$ contém uma cópia do grupo livre sobre 2^{2^κ} geradores. Em particular, $\overline{FP((t_\alpha)_{\alpha < \kappa})}$ possui uma cópia do grupo livre sobre 2^{2^κ} geradores.
- (6) Se κ é regular e S é fracamente cancelativo à esquerda, então $\overline{B} \cap \mathcal{U}_\kappa \cap S^* S^* = \emptyset$.

Além disso, existe $P \subset \overline{B} \cap \mathcal{U}_\kappa$ tal que $|P| = 2^{2^\kappa}$ e, para todo $p \in P$, $\mathcal{C} \subset p$.

Demonstração. A ideia da prova é obter uma κ -sequência, como em teoremas anteriores, que possui propriedades algébricas suficientes para garantir os itens acima, e de forma que se possa construí-la por recursão transfinita.

Enumere $S = \{s_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Podemos supor que $\mathcal{C}$ é fechado para interseções finitas (ou seja acrescê-lo de suas interseções finitas, sem alterar a cardinalidade). Seja $\lambda = |\mathcal{C}|$, enumere $\mathcal{C} = \{C_\alpha : \alpha < \lambda\}$, e tome $f : \kappa \rightarrow \kappa \times \lambda$ bijeção. Fixe um $a \in S$ e defina $A = \{s \in S : as = a\}$. A é um conjunto solução à esquerda, logo $|A| < \kappa$. Tome $t_0 \in C_{\pi_2(f(0))} \setminus A$, em que π_2 é a projeção de $\kappa \times \lambda$ sobre λ .

Agora, seja $0 < \alpha < \kappa$ e suponha que já escolhemos $(t_\delta)_{\delta < \alpha}$ de forma que

- (a) se $\delta < \alpha$, então $t_\delta \notin FP((t_\gamma)_{\gamma < \delta})$;
- (b) se $\delta < \alpha$, então $t_\delta \in C_{\pi_2(f(\delta))}$;
- (c) se $\gamma < \delta < \alpha$ e $\mu < \sigma < \delta$, então $s_\gamma t_\delta \neq s_\mu t_\sigma$;
- (d) se $\gamma < \sigma < \delta < \alpha$, $\mu < \delta$, e $x \in S$, então $s_\gamma x \neq t_\sigma$ ou $s_\mu x \neq t_\delta$;
- (e) se $\delta < \alpha$ e $u, v \in FP((t_\gamma)_{\gamma < \delta})$, então $u \neq vt_\delta$;
- (f) se $\delta < \alpha$, $u, v \in FP((t_\gamma)_{\gamma < \delta})$, e $u \neq v$, então $ut_\delta \neq vt_\delta$;
- (g) se $\delta < \alpha$ e $u \in FP((t_\gamma)_{\gamma < \delta})$, então $ut_\delta \neq t_\delta$;
- (h) $FP((t_\delta)_{\delta < \alpha}) \cap A = \emptyset$; e
- (i) se κ é regular, S é fracamente cancelativo à esquerda, $x \in S$, $\gamma < \sigma < \delta < \alpha$, e $\mu < \delta$, então $xs_\gamma \neq t_\sigma$ ou $xs_\mu \neq t_\delta$.

Vale comentar que cada um desses itens tem um papel específico a cumprir: por exemplo, o item (c) tem seu papel nos itens (2) e (3), e os itens (a), (e) e (g) são necessários para se provar (5). As passagens têm embutida nelas a ideia de que as propriedades da κ -sequência passam via limites ao fecho de sua imagem – com as devidas restrições da continuidade lateral da operação.

Note que as hipóteses estão de fato todas satisfeitas para $\alpha = 1$, e todas exceto (b) e (h) por vacuidade.

Para cada $\mu < \sigma < \alpha$ e $\gamma < \alpha$, seja $A_{\gamma,\mu,\sigma} = \{x \in S : s_\gamma x = s_\mu t_\sigma\}$. Cada $A_{\gamma,\mu,\sigma}$ é um conjunto solução à esquerda, logo $|\bigcup_{\gamma < \alpha} \bigcup_{\mu < \sigma < \alpha} A_{\gamma,\mu,\sigma}| < \kappa$.

Para cada $\gamma < \sigma < \alpha$, seja $F_{\gamma,\sigma} = \{x \in S : s_\gamma x = t_\sigma\}$. Cada $F_{\gamma,\sigma}$ é um conjunto solução à esquerda, logo $|\bigcup_{\gamma < \sigma < \alpha} F_{\gamma,\sigma}| < \kappa$, e portanto $|\{s_\mu x : \mu < \alpha \text{ e } x \in \bigcup_{\gamma < \sigma < \alpha} F_{\gamma,\sigma}\}| < \kappa$.

Agora, seja $V = FP((t_\delta)_{\delta < \alpha})$. $|V| < \kappa$. Pela hipótese (h), dado $u \in V$, $au \neq a$. Usando mais vezes que S é fraquissimamente cancelativo à esquerda, temos que $|\bigcup_{u \in V} \{x \in S : aux = a\}| < \kappa$ e $|\bigcup_{u,v \in V} \{x \in S : vx = u\}| < \kappa$.

E se κ for regular e S for fracamente cancelativo à esquerda: defina $D = \bigcup_{\gamma < \sigma < \alpha} \{x \in S : xs_\gamma = t_\sigma\}$. Como S é cancelativo à direita, D é a união de conjuntos vazios ou unitários, e portanto $|D| < \kappa$, e logo $|\{xs_\mu : \mu < \alpha \text{ e } x \in D\}| < \kappa$.

Assim, podemos escolher $t_\alpha \in C_{\pi_2(f(\alpha))}$ de forma que t_α não pertença a $\bigcup_{\gamma < \alpha} \bigcup_{\mu < \sigma < \alpha} A_{\gamma,\sigma,\mu} \cup V \cup A \cup \{s_\mu x : \mu < \alpha \text{ e } x \in \bigcup_{\gamma < \sigma < \alpha} F_{\gamma,\sigma}\} \cup \bigcup_{u \in V} \{x \in S : aux = a\} \cup \bigcup_{u,v \in V} \{x \in S : vx = u\}$. Além disso, se κ for regular e S for fracamente cancelativo à direita, exija também que $t_\alpha \notin \{xs_\mu : \mu < \alpha \text{ e } x \in D\}$.

Como $t_\alpha \notin V = FP((t_\delta)_{\delta < \alpha})$, temos que a hipótese (a) é satisfeita e a sequência permanece injetora.

Como $t_\alpha \in C_{\pi_2(f(\alpha))}$, a hipótese (b) está satisfeita.

Como $t_\alpha \notin \bigcup_{\gamma < \alpha} \bigcup_{\mu < \sigma < \alpha} A_{\gamma,\sigma,\mu}$, a hipótese (c) está satisfeita.

Como $t_\alpha \notin \{s_\mu x : \mu < \alpha \text{ e } x \in \bigcup_{\gamma < \sigma < \alpha} F_{\gamma,\sigma}\}$, a hipótese (d) está satisfeita.

Como $t_\alpha \notin \bigcup_{u,v \in V} \{x \in S : vx = u\}$, a hipótese (e) está satisfeita.

A hipótese (f) segue da cancelatividade à direita de S .

Para verificar (g), lembre que dado $u \in V$, $au \neq a$, logo $aut_\alpha \neq at_\alpha$, e portanto $ut_\alpha \neq t_\alpha$.

Para verificar (h), note que $t_\alpha \notin A$ e $t_\alpha \notin \bigcup_{u \in V} \{x \in S : aux = a\}$, logo dado $u \in V$, $aut_\alpha \neq a$, ou seja, $ut_\alpha \notin A$.

E se κ for regular e S for fracamente cancelativo à direita, $t_\alpha \notin \{xs_\mu : \mu < \alpha \text{ e } x \in D\}$, logo a hipótese (i) está satisfeita.

Feita a indução, defina $B = \{t_\alpha : \alpha < \kappa\}$ e, para cada $\gamma < \kappa$, $B_\gamma = \{t_\alpha : \gamma < \alpha < \kappa\}$. Verifiquemos agora as asserções (1)-(6).

(1): Seja $p \in \overline{B} \cap \mathcal{U}_\kappa$ e suponha $q \in S^*$ e $r \in \mathcal{U}_\kappa$ tal que $p = q \cdot r$. $B \in q \cdot r$, ou seja, $\{x \in S : x^{-1}B \in r\} \in q$, logo tome $\gamma < \mu < \kappa$ tais que $s_\gamma^{-1}B, s_\mu^{-1}B \in r$. Note que $s_\gamma^{-1}B_\gamma \in r$, pois $s_\gamma^{-1}B \setminus s_\gamma^{-1}B_\gamma = \bigcup_{\sigma \leq \gamma} \{y \in S : s_\gamma y = t_\sigma\}$ é uma união de menos do que κ conjuntos solução à esquerda e $r \in \mathcal{U}_\kappa$. Analogamente $s_\mu^{-1}B_\mu \in r$, logo tome $x \in s_\gamma^{-1}B_\gamma \cap s_\mu^{-1}B_\mu$. Tome $\sigma > \gamma$ e $\delta > \mu$ tais que $s_\gamma x = t_\sigma$ e $s_\mu x = t_\delta$. Como S é cancelativo à direita, vale que $\sigma \neq \delta$, violando a hipótese (d).

(2): Sejam $p, q \in \overline{B} \cap \mathcal{U}_\kappa$ distintos. Tome $F, G \in [B]^\kappa$ tais que $F \cap G = \emptyset$, $F \in p$ e $G \in q$. Suponha $u, v \in \beta S$ tais que $up = vq$, e $E = \{s_\gamma t_\alpha : \gamma < \alpha < \kappa \text{ e } \alpha \in F\}$. Vale que $E \in up$, ou seja, $\{x \in S : x^{-1}E \in p\} \in u$, pois dado $\gamma < \kappa$, $\{t_\alpha \in F : \gamma < \alpha < \kappa\} \subset s_\gamma^{-1}E$, e $\{t_\alpha \in F : \gamma < \alpha < \kappa\} \in p$. Analogamente, $\{s_\mu t_\sigma : \mu < \sigma < \kappa \text{ e } t_\sigma \in G\} \in vq$. Assim, podemos tomar $\gamma < \alpha < \kappa$ e $\mu < \sigma < \kappa$ de forma que $t_\alpha \in F$, $t_\sigma \in G$, e $s_\gamma t_\alpha = s_\mu t_\sigma$. Como $F \cap G = \emptyset$, $\alpha \neq \sigma$, contradizendo a hipótese (c).

(3): Seja $p \in \overline{B} \cap \mathcal{U}_\kappa$ e suponha $u, v \in \beta S$ tais que $up = vp$. Tome $F \in u$ e $G \in v$ disjuntos. Defina $E = \{s_\gamma t_\alpha : \gamma < \alpha < \kappa \text{ e } s_\gamma \in F\}$. Note que, dado $s_\gamma \in F$, $\{t_\alpha : \gamma < \alpha < \kappa\} \in p$ e $\{t_\alpha : \gamma < \alpha < \kappa\} \subset s_\gamma^{-1}E$, de forma que $E \in up$. Analogamente, $\{s_\mu t_\sigma : \mu < \sigma < \kappa \text{ e } s_\mu \in G\} \in vp$. Portanto, exatamente como acima, temos uma contradição da hipótese (c).

(4): Como $|B| = \kappa$, o Teorema 1.26(d) nos diz que $\overline{B} \cap \mathcal{U}_\kappa(S)$ (que pode ser identificado com $\mathcal{U}_\kappa(B)$) tem cardinalidade 2^{2^κ} . Agora, para ver que gera um subsemigrupo livre, provaremos que dados $p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_k \in \overline{B} \cap \mathcal{U}_\kappa$, se $p_1 \cdots p_m = q_1 \cdots q_k$, então $k = m$ e $p_i = q_i$ para cada $i \leq m$. Suponha que não valha, e pegue um contraexemplo tal que $m + k$ é mínimo. Não pode ser que $m + k = 2$, pois nesse caso $m = k = 1$ e não temos contraexemplo; e por (1), não se pode ter que $m + k = 3$ ($p_1 = q_1 \cdot q_2$ ou $p_1 \cdot p_2 = q_1$). Portanto $m, k > 1$. Por (2), temos que $p_m = q_k$; logo, por (3), podemos cancelar e obter $p_1 \cdots p_{m-1} = q_1 \cdots q_{k-1}$, do que segue $m - 1 = k - 1$ e $p_i = q_i$ para cada $i \leq m$.

(5): Pelo Teorema 7.35 do livro [1], basta ver que $(t_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ possui produtos finitos distintos. Suponha então $F, G \in \mathcal{P}_f(\kappa)$ distintos e tais que $\prod_{\alpha \in F} t_\alpha = \prod_{\alpha \in G} t_\alpha$, tais que $|F \cup G|$ seja mínimo. Sem perda de generalidade, $\max F \leq \max G = \sigma$. Suponha, primeiramente, que $\max F < \max G$: caso $G = \{\sigma\}$, teríamos uma violação de (a), e caso $|G| \geq 2$ teríamos uma violação de (e). Então $\max F = \max G$, e logo $\sigma \in F$. F e G não podem ser ambos unitários pois são distintos. Caso um deles fosse unitário, teríamos uma violação de (g). Logo $|F|, |G| \geq 2$ com $\max F = \max G = \sigma$; podemos cancelar à direita e obter $\prod_{\alpha \in F \setminus \{\sigma\}} t_\alpha = \prod_{\alpha \in G \setminus \{\sigma\}} t_\alpha$, do que, pela minimalidade de $|F \cup G|$, $F \setminus \{\sigma\} = G \setminus \{\sigma\}$. Isso implica que $F = G$, contradição.

(6): Suponha que κ seja regular e S seja fracamente cancelativo à esquerda. Suponha $q, r \in S^*$ tais que $r \cdot q \in \overline{B} \cap \mathcal{U}_\kappa$. Pelo item (1), $q \in S^* \setminus \mathcal{U}_\kappa$. Como κ é regular, temos então que existe $\delta < \alpha$ tal que $\{s_\alpha : \alpha < \delta\} \in q$. Deste ponto, obtemos uma contradição exatamente como no final do Teorema 3.12 – usando (a),(i) e que S é fracamente cancelativo à esquerda.

Por fim, considere $\mathcal{B} = \{B \cap C_\alpha : \alpha < \lambda\}$. Vale que $\mathcal{B}$ possui a κ -p.i.f., pois: dado $F \in \mathcal{P}_f(\lambda)$, como $\mathcal{C}$ é fechado para interseções finitas, tome $\gamma < \lambda$ tal que $C_\gamma = \bigcap_{\alpha \in F} C_\alpha$. Vale que $\{t_\sigma : \pi_2(f(\sigma)) = \gamma\} \subset B \cap C_\gamma$, e este conjunto tem cardinalidade κ pois $|(\pi_2 \circ f)^{-1}[\{\gamma\}]| = \kappa$. Deste modo, basta definir $P = \{p \in \mathcal{U}_\kappa : \mathcal{B} \subset p\}$, e notar que o Teorema 1.26(d) nos garante que $|P| = 2^{2^\kappa}$. ■

Agora veremos como se prova o Teorema 7.35 do livro [1]. Começaremos pelo Teorema 1.23 do

mesmo livro.

Teorema 3.15. *Sejam A um conjunto, G o grupo livre gerado por A , e $g \in G \setminus \{\emptyset\}$ ($\emptyset$ é a identidade de G). Então existe um grupo finito F e um homomorfismo $\widehat{\phi} : G \rightarrow F$ tal que $\widehat{\phi}(g)$ não é a identidade de F .*

Demonstração. Seja n o comprimento de g . Seja $X = \{0, \dots, n\}$ e considere $F = \{f \in {}^X X : f \text{ é bijeção}\}$. $(F, \circ)$ é um grupo de identidade id_X . Agora, dado $a \in A$, considere $D(a) = \{i \in \{0, \dots, n-1\} : g(i) = a^{-1}\}$ e $E(a) = \{i \in \{1, \dots, n\} : g(i-1) = a\}$. Como $g \in G$, $D(a) \cap E(a) = \emptyset$. Defina $\phi(a) : D(a) \cup E(a) \rightarrow X$ por: se $i \in D(a)$, $\phi(a)(i) = i+1$; se $i \in E(a)$, $\phi(a)(i) = i-1$. Vale que $\phi(a)$ é injetora, pois: dados $i_1, i_2 \in \text{dom } \phi(a)$ distintos, se $i_1, i_2 \in D(a)$, então $i_1 + 1 \neq i_2 + 1$; se $i_1, i_2 \in E(a)$, então $i_1 - 1 \neq i_2 - 1$; suponha $i_1 \in D(a)$, $i_2 \in E(a)$ e $\phi(a)(i_1) = \phi(a)(i_2)$, ou seja $i_1 + 1 = i_2 - 1$ – temos que $g(i_1) = a^{-1}$ e $g(i_2 - 1) = g(i_1 + 1) = a$, uma contradição.

Assim, $\phi(a)$ é injetora sobre $D(a) \cup E(a) \subset X$, e isso nos permite tomar uma extensão qualquer dela a todo o X – que também denotaremos por $\phi(a)$. Portanto, temos que $\phi : A \rightarrow F$ é uma função, logo tome, pela propriedade universal dos grupos livres, $\widehat{\phi} : G \rightarrow F$ o homomorfismo que estende ϕ .

Descreva $g = a_0^{i_0} \dots a_{n-1}^{i_{n-1}}$, com $a_r \in A$ e $i_r \in \{1, -1\}$. Mostraremos que para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, $\widehat{\phi}(a_{k-1}^{i_{k-1}})(k) = k-1$. Primeiro suponha que $i_{k-1} = 1$; temos que $k \in E(a_{k-1})$, logo $\phi(a_{k-1})(k) = k-1$. Suponha agora que $i_{k-1} = -1$; temos que $k-1 \in D(a_{k-1})$, logo $\phi(a_{k-1})(k-1) = k$, e portanto $\widehat{\phi}(a_{k-1}^{-1})(k) = (\phi(a_{k-1}))^{-1}(k) = k-1$.

Com isso, é fácil ver por indução que $\widehat{\phi}(g)(n) = \widehat{\phi}(a_0^{i_0}) \dots \widehat{\phi}(a_{n-1}^{i_{n-1}})(n) = 0$, de forma que $\widehat{\phi}(g) \neq \text{id}_X$. ■

Este próximo é o Teorema 2.24 de [1].

Teorema 3.16. *Sejam A um conjunto e G o grupo livre gerado por A . Então G pode ser imerso em um grupo topológico compacto. Ou seja, existe um grupo topológico compacto H e um homomorfismo injetor $\varphi : G \rightarrow H$.*

Demonstração. Usando o teorema anterior, tome para cada $g \in G \setminus \{\emptyset\} =: G'$ um grupo finito F_g e um homomorfismo $\phi_g : G \rightarrow F_g$ tal que $\phi_g(g)$ não é a identidade de F_g . Imbuja cada F_g com a topologia discreta, e defina $H = \prod_{g \in G'} F_g$, com o produto coordenada a coordenada e a topologia produto. Portanto, ao se definir $\varphi : G \rightarrow H$ por $\varphi(h)_g = \phi_g(h)$ em cada coordenada, φ é um homomorfismo. Além disso, dado $g \in G'$, como $\varphi(g)_g$ não é a identidade de H , temos que o núcleo de φ é trivial e portanto φ é injetora. Portanto, resta ver que H é um grupo topológico. Para isso, basta ver que o produto é contínuo coordenada a coordenada; e dados $x, y \in H$, e $g \in G'$, $A = \pi_g^{-1}[\{x_g\}] \times \pi_g^{-1}[\{y_g\}]$ é uma vizinhança de (x, y) em $H \times H$ tal que $(\pi_g \circ \cdot)[A] = \{x_g \cdot y_g\}$. ■

Enfim, o Teorema 7.35 de [1].

Teorema 3.17. *Sejam S semigrupo discreto, κ cardinal infinito e $(a_\lambda)_{\lambda < \kappa}$ uma κ -seqüência em S que possui produtos finitos distintos. Considere $T = \bigcap_{\lambda < \kappa} \overline{FP((a_\mu)_{\lambda < \mu < \kappa})}$. Então T é um subsemigrupo compacto de βS tal que todo grupo maximal de $K(T)$ contém uma cópia algébrica do grupo livre sobre 2^{2^κ} geradores.*

Demonstração. Primeiramente, para ver que T é um subsemigrupo, aplicaremos a condição dada em 1.34. Sejam $\lambda < \kappa$ e $x \in FP((a_\mu)_{\lambda < \mu < \kappa})$. Tome $L \subset \{\mu : \lambda < \mu < \kappa\}$ finito tal que $x = \prod_{\mu \in L} a_\mu$. Defina $\gamma = \max L$. Vale que $x \cdot FP((a_\mu)_{\gamma < \mu < \kappa}) \subset FP((a_\mu)_{\lambda < \mu < \kappa})$.

Pelo Teorema 1.16, todo grupo maximal em $K(T)$ é da forma $p \cdot T \cdot p$ para algum p idempotente minimal de T . Seja então p um idempotente minimal de T . Defina $A = \{a_\mu : \mu < \kappa\}$ e note que $\mathcal{U}_\kappa(A) \subset T$, pois dados $q \in \mathcal{U}_\kappa(A)$ e $\lambda < \kappa$, $\{a_\mu : \mu \leq \lambda\} \notin q$, portanto $A \setminus \{a_\mu : \mu \leq \lambda\} = \{a_\mu : \lambda < \mu < \kappa\} \in q$. Assim, podemos definir G como o subgrupo de $p \cdot T \cdot p$ gerado por $p \cdot \mathcal{U}_\kappa(A) \cdot p$. Agora, fixe Σ um conjunto qualquer de cardinalidade 2^{2^κ} , e o indexe sem repetições por $\mathcal{U}_\kappa(A)$: $\Sigma = \{\sigma_q : q \in \mathcal{U}_\kappa(A)\}$. Seja F o grupo livre sobre Σ . Afirmamos que G é isomorfo a F .

Pela propriedade dos grupos livres, a função definida $g : \Sigma \rightarrow p \cdot \mathcal{U}_\kappa(A) \cdot p$ dada por $g(\sigma_q) = p \cdot q \cdot p$ possui extensão a um homomorfismo $g : F \rightarrow G$. Como G é o grupo gerado por $p \cdot \mathcal{U}_\kappa(A) \cdot p$ e $g[\Sigma] = p \cdot \mathcal{U}_\kappa(A) \cdot p$, segue que $g[F] = G$. Agora basta ver que g é injetora. Como qualquer par de elementos de F pertence a um subgrupo gerado por uma subcoleção finita de $\{\sigma_q : q \in \mathcal{U}_\kappa(A)\}$, basta ver que g é injetora sobre subgrupos desse tipo.

Sejam $q_1, \dots, q_n \in \mathcal{U}_\kappa(A)$ distintos e denote por D o subgrupo de F gerado por $\{\sigma_{q_1}, \dots, \sigma_{q_n}\}$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, tome $B_i \in q_i$ tal que $B_i \subset A$ e $B_i \cap B_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Podemos ainda supor que $\bigcup_{i=1}^n B_i = A$ pois podemos substituir B_1 por $A \setminus \bigcup_{i=2}^n B_i$.

Definimos agora uma função $h : S \rightarrow F$. Definimos primeiro h sobre A , determinando que $h(a_\mu) = \sigma_{q_i}$ se e somente se $a_\mu \in B_i$. Após isso, dado $r \in FP((a_\mu)_{\mu < \kappa})$, como existe um único $L \in \mathcal{P}_f(\kappa)$ tal que $r = \prod_{\mu \in L} a_\mu$, podemos definir bem $h(r) = \prod_{\mu \in L} h(a_\mu)$. Por fim, estenda h a S de qualquer maneira.

Pelo teorema logo acima, F pode ser imerso algebricamente em um grupo topológico compacto $\tilde{F}$; assumiremos que $F \subset \tilde{F}$. Seja então $\tilde{h} : \beta S \rightarrow \tilde{F}$ a extensão contínua de h . Note que $\tilde{h}(p)$ é a identidade de $\tilde{F}$ pois p é idempotente, e que, como $h[B_i] = \{\sigma_{q_i}\}$, $\tilde{h}(q_i) = \sigma_{q_i}$. Mostraremos que $\tilde{h}|_T$ é um homomorfismo. Para isso aplicaremos o Teorema 1.36, ou seja, basta ver que para cada $x \in FP((a_\mu)_{\mu < \kappa})$ existe $\lambda < \kappa$ tal que para todo $y \in FP((a_\mu)_{\lambda < \mu < \kappa})$, $h(x \cdot y) = h(x) \cdot h(y)$. Seja então $x \in FP((a_\mu)_{\mu < \kappa})$, tome $L \in \mathcal{P}_f(\kappa)$ tal que $x = \prod_{\mu \in L} a_\mu$ e considere $\lambda = \max L$; seja $y \in FP((a_\mu)_{\lambda < \mu < \kappa})$ e tome $M \in \mathcal{P}_f(\kappa)$ tal que $y = \prod_{\mu \in M} a_\mu$ (note que $\min M > \max L$). Temos então: $h(x \cdot y) = h(\prod_{\mu \in L} a_\mu \cdot \prod_{\mu \in M} a_\mu) = h(\prod_{\mu \in L \cup M} a_\mu) = \prod_{\mu \in L \cup M} h(a_\mu) = \prod_{\mu \in L} h(a_\mu) \cdot$

$$\prod_{\mu \in M} h(a_\mu) = h(x) \cdot h(y).$$

Assim $\tilde{h}$ é um homomorfismo e portanto $\tilde{h} \circ g$ também. Seja $i \in \{1, \dots, n\}$. Vale que $\tilde{h}(g(\sigma_{q_i})) = \tilde{h}(p \cdot q_i \cdot p) = \tilde{h}(p) \cdot \tilde{h}(q_i) \cdot \tilde{h}(p) = \tilde{h}(q_i) = \sigma_{q_i}$. Dessa forma $\tilde{h} \circ g$ é a identidade sobre os geradores de D , logo é a identidade sobre D , e portanto g é injetora sobre D , como queríamos. ■

Note que o resultado acima vale para $T = \mathbb{H}$.

Assim se encerra a Seção 2 do artigo [9]. A Seção 3 possui apenas dois itens: um teorema e um contraexemplo a ele. Um dos itens desse teorema usa um resultado sobre $MA(\omega_1)$. Portanto, demonstraremos aqui uma propriedade sobre a topologia de S^* que decorre do Axioma de Martin. Os próximos são o Lema 12.10, o Corolário 12.11 e o Corolário 12.12 do livro [1].

Lema 3.18. *Seja D um conjunto, $|D| = \omega$. Seja $\mathcal{A} \subset [D]^\omega$ com a propriedade de que para todo $\mathcal{F} \in \mathcal{P}_f(\mathcal{A})$, $D \setminus \bigcup \mathcal{F}$ é infinito. Seja $\kappa = |\mathcal{A}|$. Se vale $MA(\kappa)$, então existe $B \in [D]^\omega$ tal que para todo $A \in \mathcal{A}$, $B \cap A$ é finito.*

Demonstração. Considere $Q = \{(H, \mathcal{F}) : H \in \mathcal{P}_f(D) \text{ e } \mathcal{F} \in \mathcal{P}_f(\mathcal{A})\}$. Defina uma ordem em Q por $(H', \mathcal{F}') \leq (H, \mathcal{F})$ e somente se: $H \subset H'$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ e $(H' \setminus H) \cap \bigcup \mathcal{F} = \emptyset$. É imediato ver que $\leq$ é reflexiva e antissimétrica. Para ver que é transitiva, sejam $H, H', H'' \in \mathcal{P}_f(D)$ e $\mathcal{F}, \mathcal{F}', \mathcal{F}'' \in \mathcal{P}_f(\mathcal{A})$ tais que $(H'', \mathcal{F}'') \leq (H', \mathcal{F}')$ e $(H', \mathcal{F}') \leq (H, \mathcal{F})$; a condição que não é imediata é que $(H'' \setminus H) \cap \bigcup \mathcal{F} = \emptyset$. Seja $x \in H'' \setminus H$. Caso $x \in H'' \setminus H'$, então $x \notin \bigcup \mathcal{F}' \supset \bigcup \mathcal{F}$; caso $x \in H' \setminus H$, então $x \notin \bigcup \mathcal{F}$.

Agora, se $(H, \mathcal{F})$ e $(H', \mathcal{F}')$ são incompatíveis, necessariamente $H \neq H'$, pois do contrário $(H, \mathcal{F} \cup \mathcal{F}')$ é uma extensão comum de ambos. Como $|\mathcal{P}_f(D)| = \omega$, segue que $(Q, \leq)$ possui c.c.c.

Agora, para cada $A \in \mathcal{A}$, seja $D(A) = \{(H, \mathcal{F}) \in Q : A \in \mathcal{F}\}$. Dado $(H, \mathcal{F}) \in Q$, vale que $(H, \mathcal{F} \cup \{A\}) \in D(A)$ e $(H, \mathcal{F} \cup \{A\}) \leq (H, \mathcal{F})$, de forma que $D(A)$ é denso.

E para cada $X \in \mathcal{P}_f(D)$, seja $E(X) = \{(H, \mathcal{F}) \in Q : H \not\subset X\}$. Dado $(H, \mathcal{F}) \in Q$, como $D \setminus \bigcup \mathcal{F}$ é infinito, existe $y \in D \setminus \bigcup \mathcal{F}$ tal que $y \notin X$. Vale então que $(H \cup \{y\}, \mathcal{F}) \in E(X)$ e $(H \cup \{y\}, \mathcal{F}) \leq (H, \mathcal{F})$, de forma que $E(X)$ é denso.

Como $|\mathcal{A}| = \kappa$ e $|\mathcal{P}_f(D)| = \omega$, $MA(\kappa)$ nos garante que existe G filtro em $(Q, \leq)$ tal que $G \cap D(A) \neq \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{A}$ e $G \cap E(X) \neq \emptyset$ para todo $X \in \mathcal{P}_f(D)$.

Defina $B = \bigcup \{H : \text{existe } \mathcal{F} \in \mathcal{P}_f(\mathcal{A}) \text{ tal que } (H, \mathcal{F}) \in G\}$. Como $G \cap E(X) \neq \emptyset$ para todo $X \in \mathcal{P}_f(D)$, segue que B é infinito (se não existiria $(H, \mathcal{F}) \in G$ tal que $H \not\subset B$). Afirmamos que $B \cap A$ é finito para todo $A \in \mathcal{A}$. Dado $A \in \mathcal{A}$, tome $(H, \mathcal{F}) \in G \cap D(A)$. Veremos que $B \cap A \subset H$. Seja $x \in B \cap A$. Como $x \in B$, tome $(H', \mathcal{F}') \in G$ tal que $x \in H'$. Como G é filtro, tome $(H'', \mathcal{F}'')$ extensão comum de $(H, \mathcal{F})$ e $(H', \mathcal{F}')$. Temos então que $x \in A \in \mathcal{F}$, $x \in H' \subset H''$, e $(H'' \setminus H) \cap \bigcup \mathcal{F} = \emptyset$; portanto, $x \in H$, como anunciamos. ■

Corolário 3.19. *Seja D conjunto, $|D| = \omega$. Seja $\kappa < \mathfrak{c}$ e seja $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$ uma família de fechados de D^* . Assuma $MA(\kappa)$. Se $\bigcup_{\alpha < \kappa} F_\alpha \neq D^*$, então $\text{cl}_{D^*}(\bigcup_{\alpha < \kappa} F_\alpha) \neq D^*$.*

Demonstração. Seja $x \in D^* \setminus \bigcup_{\alpha < \kappa} F_\alpha$. Para cada $\alpha < \kappa$, $x \notin F_\alpha$; como D^* possui base de clopens, podemos tomar D_α clopen tal que $x \notin D_\alpha$ e $F_\alpha \subset D_\alpha$. Pelo teorema 1.26(i), cada $D_\alpha = A_\alpha^*$ para algum $A_\alpha \subset D$ infinito. Temos então que $x \in D^* \setminus \bigcup_{\alpha < \kappa} A_\alpha^*$; portanto, para cada α , $D \setminus A_\alpha \in x$. Disso segue que a coleção $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ satisfaz as hipóteses do lema anterior, e portanto existe $B \subset D$ infinito e tal que $B \cap A_\alpha$ é finito para cada $\alpha < \kappa$. Portanto, $B^* \cap \bigcup_{\alpha < \kappa} A_\alpha^* = \emptyset$; como B^* é um aberto, segue que $B^* \cap \text{cl}_{D^*}(\bigcup_{\alpha < \kappa} A_\alpha^*) = \emptyset$. Como $B \neq \emptyset$ e $F_\alpha \subset A_\alpha^*$ para cada α , segue a tese. ■

Corolário 3.20. *Seja D conjunto, $|D| = \omega$. Seja $\kappa < \mathfrak{c}$ e seja $\{G_\alpha : \alpha < \kappa\}$ família de abertos de D^* . Assuma $MA(\kappa)$. Se $\bigcap_{\alpha < \kappa} G_\alpha \neq \emptyset$, então $\text{int}_{D^*}(\bigcap_{\alpha < \kappa} G_\alpha) \neq \emptyset$.*

Demonstração. $\bigcap_{\alpha < \kappa} G_\alpha \neq \emptyset$ implica que $D^* \setminus \bigcap_{\alpha < \kappa} G_\alpha \neq D^*$. $D^* \setminus \bigcap_{\alpha < \kappa} G_\alpha = \bigcup_{\alpha < \kappa} D^* \setminus G_\alpha$. Aplicando o corolário anterior, temos que $\text{cl}_{D^*}(\bigcup_{\alpha < \kappa} D^* \setminus G_\alpha) \neq D^*$. Mas $\text{cl}_{D^*}(\bigcup_{\alpha < \kappa} D^* \setminus G_\alpha) = \text{cl}_{D^*}(D^* \setminus \bigcap_{\alpha < \kappa} G_\alpha) = D^* \setminus \text{int}_{D^*}(\bigcap_{\alpha < \kappa} G_\alpha)$. Ou seja, temos que $D^* \setminus \text{int}_{D^*}(\bigcap_{\alpha < \kappa} G_\alpha) \neq D^*$, e assim $\text{int}_{D^*}(\bigcap_{\alpha < \kappa} G_\alpha) \neq \emptyset$. ■

Agora, o Teorema 3.1 de [9].

Teorema 3.21. *Seja S um semigrupo cancelativo à direita e fracamente cancelativo à esquerda tal que $|S| = \omega_1$. Então $S^* \setminus S^* S^*$ é denso em S^* ; e se valer $MA(\omega_1)$, então $S^* S^*$ é nunca-denso em S^* .*

Demonstração. Enumere $S = \{s_\sigma : \sigma < \omega_1\}$. Para cada $\omega < \sigma < \omega_1$, seja S_σ o semigrupo gerado por $\{s_\tau : \tau < \sigma\}$. Cada S_σ é enumerável e portanto, pelo Teorema 3.3, $S_\sigma^* S_\sigma^*$ é nunca-denso em S_σ^* (e como este é clopen, $S_\sigma^* S_\sigma^*$ é nunca-denso em S^*).

Seja $A \in [S]^\omega$. Mostraremos que $A^* \cap (S^* \setminus S^* S^*) \neq \emptyset$, e que se valer $MA(\omega_1)$, $A^* \setminus \text{cl } S^* S^* \neq \emptyset$. Como A é enumerável, tome $\delta < \omega_1$ tal que $A \subset \{s_\tau : \tau < \delta\}$; vale que $A \subset S_\delta$. Além disso, $A^* \setminus \text{cl } S_\delta^* S_\delta^* \neq \emptyset$, logo tome $V_\delta \in [A]^\omega$ tal que $V_\delta^* \cap S_\delta^* S_\delta^* = \emptyset$. Agora, indutivamente seja $\delta < \sigma < \omega_1$ e suponha que foi escolhido V_τ para todo $\delta \leq \tau < \omega_1$ de forma que

- (a) $V_\tau \in [A]^\omega$;
- (b) se $\mu < \tau$, então $V_\tau^* \subset V_\mu^*$; e
- (c) $V_\tau^* \cap S_\tau^* S_\tau^* = \emptyset$.

Se $\sigma = \gamma + 1$ para algum γ , temos que $S_\sigma^* S_\sigma^*$ é nunca-denso em S^* e V_γ^* é um (já definido) aberto, de forma que $V_\gamma^* \setminus \text{cl } S_\sigma^* S_\sigma^* \neq \emptyset$ e portanto podemos tomar $V_\sigma \in [V_\gamma]^\omega$ de forma que

$$V_\sigma^* \cap S_\sigma^* S_\sigma^* = \emptyset.$$

Por outro lado, se σ for limite: note que a hipótese (b) implica que $\{V_\tau : \delta \leq \tau < \sigma\}$ possui a ω -p.i.f.. Enumere $\{\tau : \delta \leq \tau < \sigma\} = \{\tau_n : n \in \omega\}$. Tome $a_0 \in V_{\tau_0}$ qualquer e indutivamente para $n > 0$ tome $a_n \in \bigcap_{i=1}^n V_{\tau_i} \setminus \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$. Para cada $k \in \omega$, como $\{a_n : n \in \omega\} \setminus V_{\tau_k} \subset \{a_0, \dots, a_{k-1}\}$, então $\{a_n : n \in \omega\}^* \subset V_{\tau_k}^*$. Usando que $S_\sigma^* S_\sigma^*$ é nunca-denso em S^* , tome $V_\sigma \in [\{a_n : n \in \omega\}]^\omega$ tal que $V_\sigma^* \cap S_\sigma^* S_\sigma^* = \emptyset$.

Terminada a construção, temos que $\{V_\sigma^* : \delta \leq \sigma < \omega_1\}$ é uma família de fechados de S^* com a p.i.f. (de fato é uma família decrescente). Logo tome $q \in \bigcap_{\delta \leq \sigma < \omega_1} V_\sigma^*$. Vale que $q \in A^*$.

Afirmção: $q \notin S^* S^*$. Suponha $p, r \in S^*$ tais que $q = p \cdot r$. Como $A \in q$ e $|A| = \omega$, e $\mathcal{U}_{\omega_1}$ é ideal pelo Teorema 3.10, temos que $\|p\| = \|r\| = \omega$. Logo tome $B \in p$, $C \in r$ enumeráveis, e tome $\sigma < \omega_1$ tal que $B \cup C \subset S_\sigma$. Logo $p \in B^* \subset S_\sigma^*$ e $r \in C^* \subset S_\sigma^*$, de forma que $q \in V_\sigma^* \cap S_\sigma^* S_\sigma^*$, uma contradição.

Por fim, assumamos $MA(\omega_1)$. Suponha por absurdo que $A^* \subset \text{cl } S^* S^*$. Foi observado acima que $\bigcap_{\delta \leq \sigma < \omega_1} V_\sigma^* \neq \emptyset$. Pelo Teorema 3.20 com $D = A$, temos que $\text{int}_{A^*}(\bigcap_{\delta \leq \sigma < \omega_1} V_\sigma^*) \neq \emptyset$, logo tome $B \in [A]^\omega$ tal que $B^* \subset \bigcap_{\delta \leq \sigma < \omega_1} V_\sigma^*$. $B^* \subset \text{cl } S^* S^*$ e B^* é aberto, logo $B^* \cap S^* S^* \neq \emptyset$. Porém, um $q \in B^* \cap S^* S^*$ gera a mesma contradição feita logo acima. ■

Note que, no exemplo dado pelo Teorema 3.7, S é um semigrupo cancelativo de cardinalidade $\mathfrak{c}$ tal que $S^* S^*$ não é nunca-denso em S^* . O Teorema acima nos diz que, sob a hipótese do contínuo, $S^* \setminus S^* S^*$ é denso.

Quase todos os teoremas sobre a raridade de $S^* S^*$ ou a densidade de $S^* \setminus S^* S^*$ exigem que S seja cancelativo à direita. Veremos agora que de fato não se pode enfraquecer esta hipótese de maneira significativa.

Teorema 3.22. *Existe um semigrupo enumerável, cancelativo à esquerda e fracamente cancelativo à direita S tal que $S^* S^*$ possui interior não-vazio em S^* .*

Demonstração. Seja $L = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{z_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$ com os x_n e z_n todos distintos entre si e de y . Considere $S = \{a_1 \dots a_t : a_1, \dots, a_t \in L \text{ e se } i \in \{1, \dots, t-1\}, a_i = x_n \text{ e } a_{i+1} = z_m, \text{ então } n \geq m\}$. Defina então, para $u, v \in S$, com $u = a_1 \dots a_t$ e $v = b_1 \dots b_s$, $u \cdot v$ como a concatenação de u e v , exceto se $a_t = x_n$ e $b_1 = z_m$ com $n < m$; nesse caso, $u \cdot v = a_1 \dots a_{t-1} y b_1 \dots b_s$.

Verifiquemos que $\cdot$ é associativa: sejam $u, v, w \in S$, $u = a_1 \dots a_t$, $v = b_1 \dots b_s$ e $w = c_1 \dots c_r$.

Caso 1: $b_1 = z_m$ para algum $m \in \mathbb{N}$ e $b_s = x_{n'}$ para algum $n' \in \mathbb{N}$.

Caso 1a: $a_t \neq x_n$ para todo $n < m$ e $c_1 \neq z_{m'}$ para todo $m' > n'$. Nesse caso, $u \cdot (v \cdot w)$ e $(u \cdot v) \cdot w$ são a concatenação de u , v e w , logo são iguais.

Caso 1b: $a_t = x_n$ para algum $n < m$ e $c_1 \neq z_{m'}$ para todo $m' > n'$. Temos

$$\begin{aligned} u \cdot (v \cdot w) &= (a_1 \dots a_t) \cdot (b_1 \dots b_s c_1 \dots c_r) \\ &= a_1 \dots a_{t-1} y b_1 \dots b_s c_1 \dots c_r \\ &= (a_1 \dots a_{t-1} y b_1 \dots b_s) \cdot (c_1 \dots c_r) \\ &= (u \cdot v) \cdot w. \end{aligned}$$

Caso 1c: $a_t \neq x_n$ para todo $n < m$ e $c_1 = z_{m'}$ para algum $m' > n'$. Temos

$$\begin{aligned} u \cdot (v \cdot w) &= (a_1 \dots a_t) \cdot (b_1 \dots b_{s-1} y c_1 \dots c_r) \\ &= a_1 \dots a_t b_1 \dots b_{s-1} y c_1 \dots c_r \\ &= (a_1 \dots a_t b_1 \dots b_s) \cdot (c_1 \dots c_r) \\ &= (u \cdot v) \cdot w. \end{aligned}$$

Caso 1d: $a_t = x_n$ para algum $n < m$ e $c_1 = z_{m'}$ para algum $m' > n'$. Temos

$$\begin{aligned} u \cdot (v \cdot w) &= (a_1 \dots a_t) \cdot (b_1 \dots b_{s-1} y c_1 \dots c_r) \\ &= a_1 \dots a_{t-1} y b_1 \dots b_{s-1} y c_1 \dots c_r \\ &= (a_1 \dots a_{t-1} y b_1 \dots b_s) \cdot (c_1 \dots c_r) \\ &= (u \cdot v) \cdot w. \end{aligned}$$

Caso 2: $b_1 \neq z_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$ e $b_s = x_{n'}$ para algum $n' \in \mathbb{N}$.

Caso 2a: $c_1 \neq z_{m'}$ para todo $m' > n'$. Nesse caso, $u \cdot (v \cdot w)$ e $(u \cdot v) \cdot w$ são a concatenação de u , v e w , logo são iguais.

Caso 2b: $c_1 = z_{m'}$ para algum $m' > n'$. Este caso é análogo ao caso 1c.

Caso 3: $b_1 = z_m$ para algum $m \in \mathbb{N}$ e $b_s \neq x_{n'}$ para todo $n' \in \mathbb{N}$.

Caso 3a: $a_s \neq x_n$ para todo $n < m$. Nesse caso, $u \cdot (v \cdot w)$ e $(u \cdot v) \cdot w$ são a concatenação de u , v e w , logo são iguais.

Caso 3b: $a_s = x_n$ para algum $n < m$. Este caso é análogo ao caso 1b.

Caso 4: $b_1 \neq z_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$ e $b_s = x_{n'}$ para todo $n' \in \mathbb{N}$. Nesse caso, $u \cdot (v \cdot w)$ e $(u \cdot v) \cdot w$ são a concatenação de u , v e w , logo são iguais.

Agora, vejamos que S é cancelativo à esquerda: sejam $u, v, w \in S$, $u = a_1 \dots a_t$, $v = b_1 \dots b_s$ e $w = c_1 \dots c_r$. Suponha que $u \cdot v = u \cdot w$. Se $a_t \neq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $u \cdot v$ e $u \cdot w$ são concatenações, logo $v = w$. Suponha então que $a_t = x_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Caso a: $b_1 \neq z_m$ para todo $m > n$ e $c_1 \neq z_{m'}$ para todo $m' > n$. Nesse caso, $u \cdot v$ e $u \cdot w$ são concatenações, logo $v = w$.

Caso b: $b_1 = z_m$ para algum $m > n$ e $c_1 \neq z_{m'}$ para todo $m' > n$. Temos

$$u \cdot v = a_1 \dots a_{t-1} y b_1 \dots b_s \text{ e}$$

$$u \cdot w = a_1 \dots a_{t-1} a_t c_1 \dots c_r.$$

Note que isso implica que $a_t = y$. Absurdo, pois $a_t = x_n$.

Caso c: $b_1 \neq z_m$ para todo $m > n$ e $c_1 = z_{m'}$ para algum $m' > n$. Analogamente ao caso b, temos um absurdo.

Caso d: $b_1 = z_m$ para algum $m > n$ e $c_1 = z_{m'}$ para algum $m' > n$. Temos

$$u \cdot v = a_1 \dots a_{t-1} y b_1 \dots b_s \text{ e}$$

$$u \cdot w = a_1 \dots a_{t-1} y c_1 \dots c_r.$$

Segue que $s = r$ e $b_i = c_i$ para todo $i \in \{1, \dots, s\}$.

Agora, veremos que S é fracamente cancelativo à direita. Sejam $w, t \in S$. Devemos ver que $\{s \in S : s \cdot w = t\}$ é finito. Caso seja vazio, é finito. Suponha não-vazio, e tome $u \in S$ tal que $u \cdot w = t$. O conjunto em questão pode ser descrito como $\{s \in S : s \cdot w = u \cdot w\}$. Seja $v \in S$ tal que $v \cdot w = u \cdot w$. Considerando $u = a_1 \dots a_t$, $v = b_1 \dots b_s$ e $w = c_1 \dots c_r$, temos: se $c_1 \neq z_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, $u \cdot w$ e $v \cdot w$ são concatenações, e portanto $v = u$; ou seja, $\{s \in S : s \cdot w = u \cdot w\} = \{u\}$. Suponha agora que $c_1 = z_m$ para algum $m \in \mathbb{N}$.

Caso a: $a_t \neq x_n$ para todo $n < m$. Dois subcasos: se $b_s \neq x_{n'}$ para todo $n' < m$, então $u \cdot w$ e $v \cdot w$ são concatenações, logo $v = u$. Caso $b_s = x_{n'}$ para algum $n' < m$, temos

$$u \cdot w = a_1 \dots a_t c_1 \dots c_r \text{ e}$$

$$v \cdot w = b_1 \dots b_{s-1} y c_1 \dots c_r.$$

Isso implica que $s = t$ e $b_i = a_i$ para todo $i \in \{1, \dots, t-1\}$.

Portanto, neste caso, $\{s \in S : s \cdot w = u \cdot w\} \subset \{u\} \cup \{a_1 \dots a_{t-1} x_{n'} : n' < m\}$.

Caso b: $a_t = x_n$ para algum $n < m$. Dois subcasos: se $b_s \neq x_{n'}$ para todo $n' < m$, temos

$$u \cdot w = a_1 \dots a_{t-1} y c_1 \dots c_r \text{ e}$$

$$v \cdot w = b_1 \dots b_s c_1 \dots c_r.$$

Isso implica que $s = t$, $b_i = a_i$ para todo $i \in \{1, \dots, t-1\}$, e $b_s = y$.

Por outro lado, se $b_s = x_{n'}$ para algum $n' < m$, temos

$$u \cdot w = a_1 \dots a_{t-1} y c_1 \dots c_r \text{ e}$$

$$v \cdot w = b_1 \dots b_{s-1} y c_1 \dots c_r.$$

Isso implica que $s = t$ e $b_i = a_i$ para todo $i \in \{1, \dots, t-1\}$.

Portanto, neste caso, $\{s \in S : s \cdot w = u \cdot w\} \subset \{u, a_1 \dots a_{t-1} y\} \cup \{a_1 \dots a_{t-1} x_{n'} : n' < m\}$.

O resultado do teorema já implica que S não é cancelativo à direita. Mas isso pode ser diretamente observado: $x_1z_3 = yz_3 = x_2z_3$ – e de fato, dado $m \in \mathbb{N}$, $x_nz_m = x_{n'}z_m$ para todos $n, n' < m$.

Defina agora $A = \{yz_m : m \in \mathbb{N}\}$. Note que A é infinito. Afirmção: $A^* \subset S^*S^*$. Seja $p \in A^*$.

Para cada $B \in p$, defina $C_B = \{z_m : yz_m \in B\}$; $A \cap B \in p$, logo é infinito, e portanto C_B também é infinito. Além disso, note que dados $B_1, B_2 \in p$, $C_{B_1} \cap C_{B_2} = \{z_m : yz_m \in B_1 \cap B_2\} = C_{B_1 \cap B_2}$, de forma que $\{C_B : B \in p\}$ possui a ω -p.i.f., o que nos permite tomar $q \in S^*$ tal que $\{C_B : B \in p\} \subset q$.

Tome também $r \in \{x_n : n \in \mathbb{N}\}^*$. Afirmção: $p = r \cdot q$. Basta ver que $p \subset r \cdot q$, logo seja $B \in p$.

Queremos ver que $\{s \in S : s^{-1}B \in q\} \in r$, e para isso mostraremos que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \{s \in S : s^{-1}B \in q\}$. Seja $n \in \mathbb{N}$ então, e defina $D = C_B \cap \{z_m : m > n\}$. Vale que $D \in q$, e dado $z_m \in D$, $x_nz_m = yz_m \in B$, e assim $D \subset x_n^{-1}B$, completando a demonstração. ■

3.2 Cancelabilidade à direita em βS

Esta seção tem início na continuação do estudo do artigo "The Scarcity of Products in $\beta S \setminus S$ ", Seção 4. Como o tema é diverso das Seções 2 e 3 do artigo, e requer resultados de grupos abelianos, merece uma seção em separado nesta dissertação. Todo o material necessário sobre grupos abelianos se encontra no Apêndice A.

Dado X espaço topológico, denotamos por X_d o conjunto X com a topologia discreta.

Iniciaremos por um lema que nos dá uma caracterização manuseável de cancelabilidade à direita.

Lema 3.23. *Seja S semigrupo infinito. Dado $p \in \beta S$, p é cancelável à direita se e somente se para todo $A \subset S$ existe $B \subset S$ tal que $A = \{x \in S : x^{-1}B \in p\}$.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$: p é cancelável à direita se e só se ρ_p é injetora, e isto implica que $\rho_p : \beta S \rightarrow \beta S \cdot p$ é um homeomorfismo. Logo, dado $A \subset S$, temos pelo Teorema 1.26(i) que existe $B \subset S$ tal que $\overline{A} \cdot p = \overline{B} \cap \beta S \cdot p$, já que $\overline{A} \cdot p$ é um clopen de $\beta S \cdot p$. Agora, seja $x \in S$: vale que $x \in A \Leftrightarrow x \cdot p \in \overline{A} \cdot p$, já que p é cancelável à direita; e $x \cdot p \in \overline{A} \cdot p \Leftrightarrow x \cdot p \in \overline{B} \Leftrightarrow x^{-1}B \in p$. Portanto $A = \{x \in S : x^{-1}B \in p\}$.

$(\Leftarrow)$: Suponha $s, r \in \beta S$ distintos, e tome $A \in r \setminus s$. Tome $B \subset S$ tal que $A = \{x \in S : x^{-1}B \in p\}$. Então $B \in r \cdot p \setminus s \cdot p$. ■

Teorema 3.24. *Seja S semigrupo infinito e seja T semigrupo com identidade e . Seja $p \in (S \times \{e\})^*$ cancelável à direita em $\beta(S \times \{e\})$. Então p é cancelável à direita em $\beta(S \times T)$.*

Demonstração. Usaremos o Lema acima. Seja $A \subset S \times T$. Note que a projeção $\pi_2 : S \times T \rightarrow T$ se estende a um homomorfismo contínuo $\widetilde{\pi}_2 : \beta(S \times T) \rightarrow \beta T$.

Para cada $t \in T$, seja $C_t = \{x \in S : (x, t) \in A\}$. Pelo Lema 3.23, seja $B_t \subset S$ tal que $C_t \times \{e\} = \{(s, e) \in S \times \{e\} : (s, e)^{-1}(B_t \times \{e\}) \in p\}$; temos então que para todo $s \in S$, $(s, e) \cdot p \in \overline{B_t \times \{e\}} \Leftrightarrow (s, e)^{-1}(B_t \times \{e\}) \in p \Leftrightarrow (s, e) \in C_t \times \{e\} \Leftrightarrow s \in C_t \Leftrightarrow (s, t) \in A$.

Defina $B = \bigcup_{t \in T} B_t \times \{t\}$. Vale que $\overline{B_t \times \{t\}} = \{x \in \overline{B} : \widetilde{\pi}_2(x) = t\}$, pois se $B_t \times \{t\} \in x$, por continuidade $\widetilde{\pi}_2(x) = t$; e se $B \setminus (B_t \times \{t\}) \in x$, como t é um ponto isolado de βT e $\widetilde{\pi}_2[B \setminus (B_t \times \{t\})] = T \setminus \{t\}$, segue que $\widetilde{\pi}_2(x) \neq t$.

Tome agora $(v_i)_{i \in D}$ uma rede em S tal que $((v_i, e))_{i \in D}$ converge para p em $\beta(S \times T)$. Seja $(s, t) \in S \times T$. Mostraremos que $(s, t)^{-1}B \in p \Leftrightarrow (s, t) \in A$. Observe que para cada $i \in D$, $(s, t) \cdot (v_i, e) \in B_t \times \{t\} \Leftrightarrow (sv_i, t) \in B_t \times \{t\} \Leftrightarrow (sv_i, e) \in B_t \times \{e\} \Leftrightarrow (s, e) \cdot (v_i, e) \in B_t \times \{e\}$. Como $\lambda_{(s, t)}$ e $\lambda_{(s, e)}$ são contínuas sobre $\beta(S \times T)$, vale que $(s, t) \cdot p = \lim_{i \in D} (s, t) \cdot (v_i, e)$; e $(s, e) \cdot p = \lim_{i \in D} (s, e) \cdot (v_i, e)$; de forma que, pelas observações anteriores, $(s, t) \cdot p \in \overline{B_t \times \{t\}} \Leftrightarrow (s, e) \cdot p \in \overline{B_t \times \{e\}}$. Por fim, note que $\widetilde{\pi}_2((s, t) \cdot p) = \lim_{i \in D} \pi_2((s, t) \cdot (v_i, e)) = \lim_{i \in D} \pi_2(sv_i, t) = t$.

Temos então: $(s, t)^{-1}B \in p \Leftrightarrow (s, t) \cdot p \in \overline{B} \Leftrightarrow (s, t) \cdot p \in \overline{B_t \times \{t\}} \Leftrightarrow (s, e) \cdot p \in \overline{B_t \times \{e\}} \Leftrightarrow (s, t) \in A$. ■

Devido a este teorema, temos que se $p \in \mathbb{N}^*$ é cancelável à direita em $(\beta\mathbb{N}, +)$ e T é um semigrupo com identidade e , e $q \in \beta(\mathbb{N} \times T)$ é tal que $p = \{A \subset \mathbb{N} : A \times \{e\} \in q\}$, então q é cancelável em $\beta(\mathbb{N} \times \{e\})$, e, portanto, em $\beta(\mathbb{N} \times T)$. Mas por outro lado, existe $p \in \mathbb{N}^*$ cancelável à direita em $\beta\mathbb{N}$ que não é cancelável à direita em $\beta\mathbb{Z}$. A construção deste será dada abaixo:

Tome, pelo Teorema 1.35 q idempotente em $\mathbb{Z}^*$ tal que $q \in \bigcap_{k \geq 1} \overline{FS(3^t)_{t \geq k}}$.

Defina $-q := \{-A : A \in q\} \in \mathbb{Z}^*$, e considere $p = -q + q$. Como, pelo Lema 2.11, $\mathbb{N}^*$ é ideal à esquerda de $\beta\mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}^*$. Agora veremos que $-q$ também é idempotente. Seja $A \in q$, de modo que $-A \in -q$. Queremos ver que $-A \in (-q) + (-q)$, isto é, que $\{x \in \mathbb{N} : -x + (-A) \in -q\} \in -q$. Note que, dado $y \in \mathbb{N}$, se $-y + A \in q$, então $-(-y + A) = y + (-A) \in q$; de modo que $-y \in \{x \in \mathbb{N} : -x + (-A) \in -q\}$. Portanto, usando que q é idempotente, temos que $-\{y \in \mathbb{N} : -y + A \in q\} \subset \{x \in \mathbb{N} : -x + (-A) \in -q\}$ e logo $\{x \in \mathbb{N} : -x + (-A) \in -q\} \in -q$, como queríamos.

Assim, $-q + p = -q + (-q) + q = -q + q = p$, e portanto p não é cancelável à direita em $\beta\mathbb{Z}$ – se não $1 + (-q) + p = 1 + p \Rightarrow 1 + (-q) = 1$, o que é absurdo.

Porém, suponha que p não seja cancelável à direita em $\beta\mathbb{N}$ e tome pelo Lema 2.41 um $z \in \mathbb{N}^*$ tal que $p = z + p$ – ou seja, $-q + q = z + (-q) + q$. Considere agora

$$A = \left\{ \sum_{t \in F} 3^t - \sum_{t \in H} 3^t + k : k \in \mathbb{N}, F, H \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}), \min F > \max H + 1, \text{ e } k < 3^{\min H - 1} \right\}$$

e

$$B = \left\{ \sum_{t \in F} 3^t - \sum_{t \in H} 3^t : F, H \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \text{ e } \min F > \max H + 1 \right\}.$$

Usaremos agora o Teorema 1.31(d) para ver que $B \in -q + q$ e que $A \in z + (-q) + q$. Seja $Q = -FS((3^t)_{t \geq 1}) \in -q$, e, para cada $b = -\sum_{t \in H} 3^t \in Q$, seja $B_b = \{\sum_{t \in F} 3^t : \min F > \max H + 1\} = FS((3^t)_{t > \max H + 1}) \in q$. Claramente, temos que $\bigcup_{b \in Q} b + B_b \subset B$. E para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $A_k = \{\sum_{t \in F} 3^t - \sum_{t \in H} 3^t : F, H \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}), \min F > \max H + 1, \text{ e } k < 3^{\min H - 1}\}$; pode-se verificar que cada $A_k \in -q + q$ similarmente a como vimos que $B \in -q + q$ – usando também dessa vez que $FS((3^t)_{t > \lceil \log_3 k + 1 \rceil}) \in q$. Segue então que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} k + A_k \subset A$, satisfazendo a condição.

Por fim, para chegar a uma contradição, veremos que $A \cap B = \emptyset$. Para isso analisaremos a descrição de elementos de B na expansão ternária. Descreva $\sum_{t \in F} 3^t - \sum_{t \in H} 3^t = \sum_{t=\min H}^{\max F} a_t 3^t$ a expansão ternária de um elemento de B , com $a_t \in \{0, 1, 2\}$ para todo t . Note que a condição $\max F > \min H + 1$ implica que $a_t \in \{0, 1\}$ para todo $t \geq \min F$; que $a_{\min F - 1} = 2$; que $a_t \in \{1, 2\}$ para todo $\min H \leq t \leq \min F - 1$; e que $a_{\min H} = 2$. Portanto, na expansão ternária de um elemento de B , temos que os dígitos ternários entre o 2 de menor posição e o 2 de maior posição são 1's e

2's; e que o dígito 2 de menor posição é o menor dígito não-nulo. Agora, um elemento de A é um elemento da forma acima somado a $k < 3^{\min H - 1}$; seja $\sum_{t \in K} a_t 3^t$ a expansão ternária de k . Temos que $\max K < \min H - 1$, de forma que: se $a_{\min K} \neq 2$, então pela descrição acima o elemento de A não pertence a B pois o menor dígito ternário não-nulo não é 2; e se $a_{\min K} = 2$, como $a_{\min K + 1} = 0$, e $a_{\min H} = 2$, temos um dígito 0 entre o 2 de menor posição e o 2 de maior posição, novamente implicando que o elemento de A não pertence a B . Destarte, $A \cap B = \emptyset$.

Por outro lado, o Teorema 3.24 nos provê o seguinte:

Corolário 3.25. *Seja G um grupo abeliano e $H < G$ divisível. Então todo elemento cancelável à direita de βH é cancelável à direita em βG .*

Demonstração. Pelo Teorema A.10, existe $L < G$ tal que $G = H \oplus L$, de forma que o Teorema 3.24 se aplica. ■

Corolário 3.26. *Todo elemento cancelável à direita em $\beta \mathbb{Q}_d$ é cancelável à direita em $\beta \mathbb{R}_d$, e todo elemento cancelável à direita em $\beta \mathbb{R}_d$ é cancelável à direita em $\beta \mathbb{C}_d$.*

Demonstração. Use o corolário acima e o fato de que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são divisíveis. ■

Agora, um teorema sobre a estrutura de S^* quando S é comutativo e cancelativo.

Teorema 3.27. *Seja $(S, +)$ um semigrupo comutativo cancelativo e seja G o seu grupo de diferenças (isto é, o menor grupo que contém S). Seja H um grupo abeliano que contém S (e portanto contém G). Então existe $V \subset S^*$ satisfazendo:*

- (a) V é aberto denso de S^* e todo elemento de V é cancelável à direita em βH .
- (b) Dados $v_1, v_2 \in V$, $(\beta H + v_1) \cap (\beta H + v_2) \neq \emptyset$ se e somente se $(S + v_1) \cap (S + v_2) \neq \emptyset$.
- (c) Defina $\sim$ uma relação de equivalência sobre S^* por: $p \sim q$ se e só se $(S + p) \cap (S + q) \neq \emptyset$.
Dados $k, m \in \mathbb{N}$ e $p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_k \in V$, se $p_1 + \dots + p_m \sim q_1 + \dots + q_k$, então $k = m$ e $p_t \sim q_t$ para cada $t \in \{1, \dots, m\}$.

Demonstração. (a): Pelo Teorema A.3, H pode ser imerso em um grupo divisível, logo assumiremos que o próprio H é divisível. Seja $\mathcal{V} = \{A \subset [S]^\omega : A^* \cap (H^* + H^*) = \emptyset\}$ e defina $U = \bigcup \{A^* : A \in \mathcal{V}\}$. U é aberto. Para ver que U é denso em S^* , seja $B \in [S]^\omega$. Pelo Teorema 3.4, $B^* \setminus \text{cl}(H^* + H^*) \neq \emptyset$, logo como é aberto tome $A \in [S]^\omega$ tal que $A^* \subset B^* \setminus \text{cl}(H^* + H^*)$. Vale também que $A^* \subset U$, mostrando que $U \cap B^* \neq \emptyset$.

Seja $V = \bigcup \{U \cap D^* : D \text{ é um subgrupo divisível enumerável de } H\}$. Vale que V é aberto. Para ver que é denso, seja $B \in [S]^\omega$. Pelo Teorema A.18, tome $D < H$ divisível enumerável que contém B . Temos então, usando que U é denso, que $\emptyset \neq U \cap B^* \subset U \cap D^* \subset V$. Por fim, note que cada

$p \in V$ é tal que $\|p\| = \omega$ e $p \notin (H^* + H^*)$.

Para ver que cada $p \in V$ é cancelável, tome $D < H$ divisível enumerável tal que $p \in U \cap D^*$. $p \notin (H^* + H^*)$, em particular $p \notin (D^* + D^*)$, logo pelo Lema 2.41, p é cancelável à direita em βD . Pelo Corolário 3.25, p é cancelável à direita em βH .

(b): Sejam $v_1, v_2 \in V$. Como existem $D_1, D_2 < H$ divisíveis enumeráveis tais que $D_1 \in v_1$ e $D_2 \in v_2$, tome pelo Lema A.18 $D < H$ divisível enumerável tal que $D_1 \cup D_2 \subset D$; temos que $D \in v_1 \cap v_2$. Pelo Teorema A.10, existe $E < H$ tal que $H = D \oplus E$. Seja π_D a projeção de H em D , e seja $\widetilde{\pi_D} : \beta H \rightarrow \beta D$ sua extensão contínua – que também é um homomorfismo. Note que como $\widetilde{\pi_D}$ é a identidade sobre D , segue que $\widetilde{\pi_D}(v_1) = v_1$ e $\widetilde{\pi_D}(v_2) = v_2$. Suponha então que $x + v_1 = y + v_2$ para $x, y \in \beta H$. Temos que $\widetilde{\pi_D}(x) + v_1 = \widetilde{\pi_D}(y) + v_2$, logo $\overline{D + v_1} \cap \overline{D + v_2} \neq \emptyset$. Como D é enumerável, pelo Teorema 1.26(c), temos sem perda de generalidade que para algum $s \in D$ e algum $w \in \beta D$, $s + v_1 = w + v_2$; definindo $z = -s + w$, temos que $v_1 = z + v_2$.

Afirmção: $z \in \beta G$ (isto é, $G \in z$). Suponha que $D \setminus G \in z$. Como foi observado na demonstração do 3.9(b), como $G \in v_2$, $D \setminus G + G \in z + v_2$. Porém, dados $d \in D \setminus G$ e $g \in G$, $d + g \in G$ implicaria que $d \in G$, um absurdo; logo $d + g \in D \setminus G$; e portanto $D \setminus G + G \subset D \setminus G$, de forma que $D \setminus G \in z + v_2 = v_1 \in \beta G$, uma contradição. Logo $G \in z$.

E como $v_1 \notin (H^* + H^*)$, temos que $z \in G$. Como G é o grupo das diferenças de S , tome $s_1, s_2 \in S$ tais que $z = s_2 - s_1$. Segue que $s_1 + v_1 = s_2 + v_2$, como queríamos.

(c): Lembre que pelo Teorema 1.38, H está contido no centro de βH , e pelo 1.40, H^* é um ideal de βH .

Provaremos por indução, ou melhor, pela boa ordem: sejam $p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_k \in V$ um contra-exemplo para a afirmação tal que $k + m$ é mínimo, e tome $a, b \in S$ tais que $a + p_1 + \dots + p_m = b + q_1 + \dots + q_k$. Caso $k = m = 1$, não temos contradição. Caso $m = 1$ e $k > 1$, temos $a, b \in S$ tais que $a + p_1 = b + q_1 + \dots + q_k$, logo temos que $p_1 = (b + q_1) + (-a + q_2 + \dots + q_k) \in H^* + H^*$, uma contradição.

Portanto $k, m > 2$. Como observado na demonstração do 3.9(b), $\{p \in S^* : \|p\| = \omega\}$ é um subsemigrupo, logo podemos tomar $A, B \in [S]^\omega$ tais que $A \in p_1 + \dots + p_{m-1}$ e $B \in q_1 + \dots + q_{k-1}$, de modo que $\overline{a + A + p_m} \cap \overline{b + B + q_k} \neq \emptyset$, e portanto pelo 1.26(c), temos duas opções:

(1): existem $c \in A$ e $d \in \overline{B}$ tais que $a + c + p_m = b + d + q_k$;

(2): existem $c \in A^*$ e $d \in B$ tais que $a + c + p_m = b + d + q_k$.

Caso valesse (2), teríamos que $q_k = (a + c) + (p_m - b - d) \in H^* + H^*$, uma contradição. Logo vale (1), e $p_m = (b + d) + (q_k - a - c)$. Caso $d \in B^*$, teríamos que $p_m \in H^* + H^*$, uma contradição. Logo $d \in B$, e $a + c + p_m = b + d + q_k$, mostrando que $p_m \sim q_k$. Além disso, $a + p_1 + \dots + p_{m-1} + b + d - a - c + q_k = a + p_1 + \dots + p_m = b + q_1 + \dots + q_k$; como q_k é cancelável à direita pelo item (a), segue que $d + p_1 + \dots + p_{m-1} = c + q_1 + \dots + q_{k-1}$; pela minimalidade de

$k + m$, segue que $k - 1 = m - 1$ e $p_t \sim q_t$ para todo $t \in \{1, \dots, m - 1\}$. ■

O Corolário 3.25 junto com o Lema A.18 nos permitem obter mais um resultado envolvendo enumerabilidade.

Teorema 3.28. *Seja G um grupo infinito enumerável, subgrupo de um grupo abeliano $(H, +)$. Então todo elemento de βG que é cancelável à direita em βG também é cancelável à direita em βH .*

Demonstração. Seja $p \in \beta G$ cancelável à direita. Em primeiro lugar, se $p \in G$, então $p \in H$, logo p é cancelável à direita em βH (pois estamos num grupo, logo p é cancelável à direita em H , ou seja $\rho_p|_H$ é injetora, portanto ρ_p é injetora sobre βH , ou seja p é cancelável à direita em βH).

Suponha então que $p \in H^*$. Pelo Teorema A.3, tome K grupo divisível em que H está imerso. $\beta H \subset \beta K$, logo basta ver que p é cancelável à direita em βK . Pelo Lema A.18, tome $D < K$ divisível enumerável tal que $G \subset D$. Pelo Corolário 3.25, basta ver que p é cancelável à direita em βD . Suponha, portanto, que p não é cancelável à direita em βD . $p \in D^*$, logo tome pelo Lema 2.41 $q \in D^*$ tal que $p = q + p$. $G \in p$, logo $\{x \in D : -x + G \in p\} \in q$. Vejamos que $\{x \in D : -x + G \in p\} \subset G$: se $-x + G \in p$, então $(-x + G) \cap G \in p$, logo tome $g \in G$ tal que $-x + g \in G$; segue que $x \in G$. Assim, vale que $G \in q$, de forma que $p \in G^* + p$, e portanto p não é cancelável à direita em G ; contradição. ■

Para encerrar o estudo do artigo [9], o teorema a seguir diz que, por exemplo, existem 2^{2^c} ultrafiltros sobre $\mathbb{R}$ que são canceláveis à direita em $\beta \mathbb{R}_d$ e que convergem para um ponto fixado de $\mathbb{R}$ com respeito à topologia usual.

Teorema 3.29. *Seja S um semigrupo cancelativo à direita e fracamente cancelativo à esquerda com $|S| = \kappa \geq \omega$. Seja τ uma topologia sobre S e $x \in S$ tal que existe uma base local para x , $\mathcal{C}$, tal que $|\mathcal{C}| \leq \kappa$ e $|C| = \kappa$ para todo $C \in \mathcal{C}$. Então existe um conjunto $P \subset \beta S_d$, $|P| = 2^{2^\kappa}$ de elementos canceláveis à direita que convergem para x com respeito a τ .*

Demonstração. Note que como $\mathcal{C}$ é base local e $|C| = \kappa$ para todo $C \in \mathcal{C}$, então $\mathcal{C}$ possui a κ -p.i.f., assim podemos aplicar o Teorema 3.14. Os itens (c) e (d), junto com o “Além disso” do enunciado, garantem o resultado desejado. ■

3.3 Cópias de $\mathbb{H}$ em S^*

Esta seção mostra que certas condições de cancelabilidade sobre S implicam na existência de cópias do semigrupo $\mathbb{H}$ em S^* . Ela foi retirada da Seção 6.3 do livro [1], e é usada na seção 2.4 desta dissertação.

Teorema 3.30. *Sejam S um semigrupo e $(x_n)_{n \geq 1}$ uma sequência em S com produtos finitos distintos. Seja $T = \bigcap_{m \geq 1} \overline{FP((x_n)_{n \geq m})}$. Então T é um subsemigrupo de βS algébrica e topologicamente isomorfo a $\mathbb{H}$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.17, T é um subsemigrupo. Definimos $f : FP(x_n)_{n \geq 1} \rightarrow 2\mathbb{N}$ por $f(\prod_{n \in F} x_n) = \sum_{n \in F} 2^n$ para cada $F \in \mathcal{P}_f$. Como $(x_n)_{n \geq 1}$ possui produtos finitos distintos, f está bem-definida; além disso é sobrejetora e injetora. Portanto $\tilde{f} : \overline{FP((x_n)_{n \geq 1})} \rightarrow \beta(2\mathbb{N})$ é uma bijeção contínua entre compactos Hausdorff, e portanto é um homeomorfismo. Mostraremos então que $\tilde{f}|_T$ é um homomorfismo de T sobre $\mathbb{H}$.

Considere $T_m = FP((x_n)_{n \geq m})$. Observe que $f[T_m] = 2^m \mathbb{N}$. Usando que $\tilde{f}$ é um homeomorfismo, temos que: $\tilde{f}[T] = \tilde{f}[\bigcap_{m \geq 1} \overline{T_m}] = \bigcap_{m \geq 1} \tilde{f}[\overline{T_m}] = \bigcap_{m \geq 1} \overline{f[T_m]} = \bigcap_{m \geq 1} \overline{2^m \mathbb{N}} = \mathbb{H}$. Para ver que $\tilde{f}|_T$ é homomorfismo, basta, pelo Teorema 1.36, ver que para cada $s \in FP((x_n)_{n \geq 1})$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $t \in FP((x_n)_{n \geq m})$, $f(st) = f(s) + f(t)$. Seja então $s \in FP((x_n)_{n \geq 1})$ e tome $F \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ tal que $s = \prod_{n \in F} x_n$. Observe então que $m = \max F + 1$ cumpre o papel desejado. ■

Lema 3.31. *Seja S um semigrupo infinito e fracamente cancelativo à esquerda. Sejam I o conjunto das identidades à direita de S , $\kappa \leq |S|$ um cardinal e $(s_\lambda)_{\lambda < \kappa}$ uma κ -sequência injetora em S . Dado $T \subset S$ de cardinalidade κ , então existe um κ -sequência injetora $(t_\lambda)_{\lambda < \kappa}$ em T tal que*

- (a) *dado $\mu < \kappa$, $t_\mu \notin FP((t_\iota)_{\iota < \mu})$;*
- (b) *dados $\lambda < \mu < \kappa$ e $u, v \in I \cup \{s_\iota : \iota < \mu\} \cup FP((t_\iota)_{\iota < \mu})$, $u \neq vt_\mu$ e $ut_\lambda \neq vt_\mu$; e*
- (c) *$I \cap FP((t_\iota)_{\iota < \kappa}) = \emptyset$.*

Demonstração. Para cada $u, v \in S$, defina $A_{u,v} = \{x \in S : u = vx\}$. Como S é fracamente cancelativo à esquerda, cada $A_{u,v}$ é finito. Isso implica que I é finito, pois $I \subset A_{u,u}$ para qualquer $u \in S$.

$(t_\lambda)_{\lambda < \kappa}$ será construída indutivamente. Primeiramente tomamos $t_0 \in T \setminus I$ qualquer. Valem (a), (b) e (c) com 0 no lugar de κ . Suponha então que definimos $(t_\iota)_{\iota < \nu}$ para algum $\nu < \kappa$ de forma que valham (a), (b) e (c) com ν no lugar de κ . Defina $G = I \cup \{s_\iota : \iota < \nu\} \cup FP((t_\iota)_{\iota < \nu})$, $H = G \cup \{ut_\lambda : u \in G \text{ e } \lambda < \nu\}$, e $K = \bigcup_{u,v \in H} A_{u,v}$. Note que $|G| < \kappa$, de forma que $|H| < \kappa$ e assim $|K| < \kappa$. Portanto, existe $t_\nu \in T \setminus (H \cup K)$. Como $t_\nu \notin G$, vale (a). Para ver (b), sejam

$u, v \in G$ e $\lambda < \nu$. Como $t_\nu \notin A_{u,v} \cup A_{ut_\lambda, v}$, então $u \neq vt_\nu$ e $ut_\lambda \neq vt_\nu$. Por fim, dado $u \in I$, $t_\nu \neq u$ pois $t_\nu \notin G$ e dado $v \in FP((t_i)_{i < \nu})$, $t_\nu \notin A_{u,v}$ logo $u \neq vt_\nu$, de forma que vale (c). ■

Lema 3.32. *Seja S um semigrupo cancelativo à direita e fracamente cancelativo à esquerda. Seja $T \subset S$ infinito, e seja $\kappa = |T|$. Então existe uma κ -sequência $(t_\lambda)_{\lambda < \kappa}$ em T que possui produtos finitos distintos.*

Demonstração. Seja $(s_\lambda)_{\lambda < \kappa}$ uma κ -sequência injetora em S , e tome $(t_\lambda)_{\lambda < \kappa}$ κ -sequência garantida pelo Lema 3.31. Afirmamos que $(t_\lambda)_{\lambda < \kappa}$ possui produtos finitos distintos. Suponha que não, e sejam $F, G \in \mathcal{P}_f(\kappa)$ distintos tais que $\prod_{\lambda \in F} t_\lambda = \prod_{\lambda \in G} t_\lambda$, com $|F \cup G|$ mínimo entre tais contraexemplos. Sem perda de generalidade, $\max F \leq \max G = \mu$. Suponha que $\max F < \max G$: isso contradiz o item (a) do Lema 3.31 caso $G = \{\mu\}$, e o item (b) caso contrário. Logo $\max F = \mu$. Caso $|F|, |G| > 1$, poderíamos cancelar t_μ à direita e obter um contraexemplo que contradiria a minimalidade de $|F \cup G|$. Logo, sem perda de generalidade, $|F| = 1$. Note que $|G| = 1$ implicaria $F = G$. Logo $|G| > 1$, e podemos considerar $x = \prod_{\lambda \in G \setminus \{\mu\}} t_\lambda$. Temos então que $t_\mu = \prod_{\lambda \in F} t_\lambda = \prod_{\lambda \in G} t_\lambda = xt_\mu$; logo, para todo $s \in S$, $st_\mu = sxt_\mu$; cancelando à direita obtemos $s = sx$, para todo $s \in S$; ou seja, $x \in I$. Isso contradiz o item (c) do Lema 3.31. ■

Teorema 3.33. *Seja S um semigrupo infinito, cancelativo à direita e fracamente cancelativo à esquerda. Seja $A \subset S^*$ um G_δ que possui um idempotente. Então A contém uma cópia algébrica e topológica de $\mathbb{H}$.*

Demonstração. Seja $p \in A$ idempotente. Seja $(A_m)_{m \geq 1}$ é uma sequência decrescente de subconjuntos de S tal que $\bigcap_{m \geq 1} \overline{A_m} \subset A$. Construiremos uma sequência $(x_n)_{n \geq 1}$ em S tal que, para cada $m \geq 1$, $FP((x_n)_{n \geq m}) \subset A_m^*(p)$. Inicie tomando $x_1 \in A_1^*(p)$ qualquer. Agora, suponha $x_1, \dots, x_k$ escolhidos de forma que, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, $FP((x_n)_{i \leq n \leq k}) \subset A_i^*(p)$. Temos que $A_{k+1}^*(p) \in p$ pois p é idempotente, e pelo Teorema 1.33, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ e para cada $y \in FP((x_n)_{i \leq n \leq k})$, $y^{-1}(A_i^*(p)) \in p$. Desta forma, podemos tomar $x_{k+1} \in A_{k+1}^*(p) \cap \bigcap \{y^{-1}(A_i^*(p)) : i \in \{1, \dots, k\} \text{ e } y \in FP((x_n)_{i \leq n \leq k}) \setminus \{x_1, \dots, x_k\}\}$. Dessa forma, para cada $i \in \{1, \dots, k+1\}$, $FP((x_n)_{i \leq n \leq k+1}) \subset A_i^*(p)$.

Agora, aplicando o Lema 3.32, com $T = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, obtemos uma sequência $(t_n)_{n \geq 1}$ em T que possui produtos finitos distintos; $(t_n)_{n \geq 1}$ é em particular injetora, logo podemos refiná-la a uma subsequência $(s_n)_{n \geq 1}$ que também é uma subsequência de $(x_n)_{n \geq 1}$. Assim, sendo subsequência de $(t_n)_{n \geq 1}$, $(s_n)_{n \geq 1}$ possui a unicidade dos produtos finitos; e sendo subsequência de $(x_n)_{n \geq 1}$, vale que para cada $m \geq 1$, $FP((s_n)_{n \geq m}) \subset FP((x_n)_{n \geq m}) \subset A_m^*(p) \subset A_m$. Dessa forma, $\bigcap_{m \geq 1} \overline{FP((s_n)_{n \geq m})} \subset \bigcap_{m \geq 1} \overline{A_m} \subset A$. E o Teorema 3.30 nos diz que $\bigcap_{m \geq 1} \overline{FP((s_n)_{n \geq m})}$ é uma cópia algébrica e topológica de $\mathbb{H}$, pois $(s_n)_{n \geq 1}$ possui a unicidade dos produtos finitos. ■

3.4 O Teorema de Zelenyuk

Esta seção apresenta todos os passos necessários para se obter o Teorema de Zelenyuk: não existem subgrupos finitos não-triviais em $\beta\mathbb{N}$. Aqui, por “subgrupo trivial” queremos dizer grupos unitários formados por um idempotente. Este é um resultado surpreendente, e vai ao encontro da tendência a ser cada vez mais fácil encontrar subgrupos quanto maior é sua cardinalidade exigida: o Teorema 3.17 junto com o 3.32 diz que existem muitas cópias do grupo livre sobre 2^{2^κ} geradores em S^* para S cancelativo à direita e fracamente cancelativo à esquerda. Note também que para qualquer $p \in \mathbb{N}^*$ idempotente, $\mathbb{Z} + p$ é uma cópia algébrica de $\mathbb{Z}$. O Teorema de Zelenyuk, um resultado de Yevhen Zelenyuk de 1996, pôs fim às indagações sobre subgrupos finitos.

O artigo original ([12]) é em russo, e por isso apresentamos aqui a prova como é apresentada na seção 7.1 do livro [1]. Esta seção está no capítulo sobre βS , e não sobre $\beta\mathbb{N}$, pois o enunciado do Teorema de Zelenyuk é abrangente: se G é um grupo enumerável sem subgrupos finitos não-triviais, então G^* não possui subgrupos finitos não-triviais.

Definição 3.34. Seja G um grupo. Uma topologia τ em G é dita ser *invariante à esquerda* se para todo $U \in \tau$ e todo $a \in G$, $a \cdot U \in \tau$.

Observações:

Uma topologia em G é invariante à esquerda se e somente se λ_a é um homeomorfismo para todo $a \in G$, pois: Se λ_a é homeomorfismo para todo $a \in G$, então dado U aberto, $a \cdot U = \lambda_a[U]$ é aberto. E se $a \cdot U = \lambda_a[U]$ é aberto para todo $a \in G$ e todo U aberto, então temos que λ_a é uma função aberta; e como $(\lambda_a)^{-1} = \lambda_{a^{-1}}$, para todo U aberto vale que $\lambda_a^{-1}[U]$ é aberto, logo λ_a é contínua; como λ_a é bijetora, ela é homeomorfismo.

E λ_a é homeomorfismo para cada $a \in G$ se e somente se $(G, \cdot, \tau)$ é um grupo topológico à esquerda, pois: Se λ_a é homeomorfismo para todo $a \in G$, em particular λ_a é contínua para cada $a \in G$, logo G é topológico à esquerda. Por outro lado se G é topológico à esquerda, então λ_a é contínua para todo $a \in G$; em particular, dado $a \in G$, λ_a e $\lambda_{a^{-1}} = (\lambda_a)^{-1}$ são contínuas, logo λ_a é um homeomorfismo.

Definição 3.35. (a) F denotará o semigrupo livre sobre as letras 0 e 1, com identidade $\emptyset$.

(b) Dados $m \in \omega$ e $i \in m + 1$, s_i^m denotará o elemento de F formado por i 0's seguido de $m - i$ 1's. Ou seja, formalmente, $\text{dom}(s_i^m) = \{1, \dots, m\}$, $s_i^m(k) = 0$ caso $1 \leq k \leq i$ e $s_i^m(k) = 1$ caso $i < k \leq m$. Também definimos $u_m = s_m^m$ (de forma que $u_0 = s_0^0 = \emptyset$).

(c) Dado $s \in F$, $l(s) = |\text{dom}(s)|$ denotará o *comprimento* de s , e $\text{supp}(s) = \{i \in \{1, \dots, l(s)\} : s(i) = 1\}$.

(d) Dados $s, t \in F$, diremos que $s \ll t$ se $\max \text{supp}(s) + 1 < \min \text{supp}(t)$.

- (e) Dados $s, t \in F$, definimos $s + t \in F$ por $l(s + t) = \max\{l(s), l(t)\}$ e $(s + t)(i) = 1$ se e só se $s(i) = 1$ ou $t(i) = 1$.

O próximo lema mostra que tais s_i^m são os blocos básicos que compõem os elementos de F .

Lema 3.36. (a) A operação $+$ definida em F acima é associativa e comutativa.

- (b) Dados $k \in \mathbb{N}$, e $0 \leq i_0 < m_0 < i_1 < m_1 < \dots < i_k \leq m_k$, considere $t = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_k}^{m_k}$. Então dado $j \in \{0, \dots, k\}$ e dado l tal que $0 \leq l \leq m_j$, vale que $t(l) = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_j}^{m_j}(l)$.
- (b') Dados $k \in \mathbb{N}$, e $0 \leq i_0 < m_0 < i_1 < m_1 < \dots < i_k \leq m_k$, considere $t = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_k}^{m_k}$. Então dado $j \in \{1, \dots, k\}$ e dado l tal que $m_{j-1} < l \leq m_k$, vale que $t(l) = s_{i_j}^{m_j} + \dots + s_{i_k}^{m_k}(l)$.
- (c) Cada $t \in F$ possui uma representação única na forma $t = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_k}^{m_k}$ com $0 \leq i_0 < m_0 < i_1 < m_1 < \dots < i_k \leq m_k$ (caso $k = 0$, a exigência é $0 \leq i_0 \leq m_0$).

Demonstração. (a): Isso segue da associatividade e comutatividade do operador $\max$ e do operador lógico “ou”.

(b): Pela definição, $t(l) = 1$ se e somente se existe $r \in \{0, \dots, k\}$ tal que $s_{i_r}^{m_r}(l) = 1$. Como $l \leq m_j < i_{j+1} < \dots < i_k$, então $s_{i_r}^{m_r}(l) = 0$ para $r \in \{j+1, \dots, k\}$. Logo, resta que $t(l) = 1$ se e somente se $s_{i_r}^{m_r}(l) = 1$ para algum $0 \leq r \leq j$, ou seja, $t(l) = 1$ se e somente se $s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_j}^{m_j}(l) = 1$. Como consequência, $t(l) = 0$ se e somente se $s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_j}^{m_j}(l) = 0$; portanto, $t(l) = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_j}^{m_j}(l)$.

(b'): Pela definição, $t(l) = 1$ se e somente se existe $r \in \{0, \dots, k\}$ tal que $s_{i_r}^{m_r}(l) = 1$. Como $i_0 < m_0 < i_1 < m_1 < \dots < i_{j-1} < m_{j-1} < l$, então $s_{i_r}^{m_r}$ não está definido em l para $r \in \{0, \dots, j-1\}$. Logo, resta que $t(l) = 1$ se e somente se $s_{i_r}^{m_r}(l) = 1$ para algum $j \leq r \leq k$, ou seja, $t(l) = 1$ se e somente se $s_{i_j}^{m_j} + \dots + s_{i_k}^{m_k}(l) = 1$. Como consequência, $t(l) = 0$ se e somente se $s_{i_j}^{m_j} + \dots + s_{i_k}^{m_k}(l) = 0$; portanto, $t(l) = s_{i_j}^{m_j} + \dots + s_{i_k}^{m_k}(l)$.

(c): Provaremos a existência por indução sobre $l(t)$. (Usaremos com frequência os itens (b) e (b').) Caso $l(t) = 0$, $t = \emptyset$, logo $t = s_0^0$, e caso $l(t) = 1$, $t = 0$ ou $t = 1$, logo $t = s_1^1$ ou $t = s_0^1$. Agora suponha $l(t) = n + 1$ e tome $s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_k}^{m_k}$ a representação de $t|_{\{1, \dots, n\}}$, com $0 \leq i_0 < m_0 < i_1 < m_1 < \dots < i_k \leq m_k$. Observe que $n = m_k$ (pois $l(s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_k}^{m_k}) = m_k$).

Caso $t(n) = 0$: temos que $s_{i_k}^{m_k}(m_k) = 0$, logo $i_k = m_k$.

Subcaso $t(n + 1) = 0$: basta verificar que $t = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}} + s_{m_k+1}^{m_k+1}$. Claramente se $0 \leq l \leq m_{k-1}$, $t(l) = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}}(l) = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}} + s_{m_k+1}^{m_k+1}(l)$. Se $m_{k-1} < l \leq m_k = n$, então $t(l) = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_k}^{m_k}(l) = s_{m_k}^{m_k}(l) = 0 = s_{m_k+1}^{m_k+1}(l) = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}} + s_{m_k+1}^{m_k+1}(l)$. Por fim, $t(m_k + 1) = 0 = s_{m_k+1}^{m_k+1}(m_k + 1) = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}} + s_{m_k+1}^{m_k+1}(m_k + 1)$.

Subcaso $t(n+1) = 1$: basta verificar que $t = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}} + s_{m_k}^{m_k+1}$. Claramente se $0 \leq l \leq m_{k-1}$, $t(l) = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}}(l) = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}} + s_{m_k}^{m_k+1}(l)$. Se $m_{k-1} < l \leq m_k = n$, então $t(l) = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_k}^{m_k}(l) = s_{m_k}^{m_k}(l) = 0 = s_{m_k}^{m_k+1}(l) = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}} + s_{m_k}^{m_k+1}(l)$. Por fim, $t(m_k + 1) = 1 = s_{m_k}^{m_k+1}(m_k + 1) = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}} + s_{m_k}^{m_k+1}(m_k + 1)$.

Caso $t(n) = 1$: Temos que $s_{i_k}^{m_k}(m_k) = 1$, logo $i_k < m_k$.

Subcaso $t(n+1) = 1$: basta verificar que $t = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}} + s_{i_k}^{m_k+1}$. Claramente se $0 \leq l \leq m_{k-1}$, $t(l) = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}}(l) = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}} + s_{i_k}^{m_k+1}(l)$. Se $m_{k-1} < l \leq m_k = n$, então $t(l) = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_k}^{m_k}(l) = s_{i_k}^{m_k}(l) = s_{i_k}^{m_k+1}(l) = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}} + s_{i_k}^{m_k+1}(l)$. Por fim, $t(m_k + 1) = 1 = s_{i_k}^{m_k+1}(m_k + 1) = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}} + s_{i_k}^{m_k+1}(m_k + 1)$.

Subcaso $t(n+1) = 0$: basta verificar que $t = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_k}^{m_k} + s_{m_k+1}^{m_k+1}$ (como $i_k < m_k < m_k + 1$, esta é uma representação na forma desejada). Claramente se $0 \leq l \leq m_k = n$, $t(l) = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_k}^{m_k}(l) = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_k}^{m_k} + s_{m_k+1}^{m_k+1}(l)$. E $t(m_k + 1) = 0 = s_{m_k+1}^{m_k+1}(m_k + 1) = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_k}^{m_k} + s_{m_k+1}^{m_k+1}(m_k + 1)$.

Assim, provamos a existência de tal representação. Vejamos a unicidade, usando o princípio da boa ordem: suponha por absurdo que temos um contraexemplo, ou seja, $k, l \in \omega$, $0 \leq i_0 < m_0 < i_1 < m_1 < \dots < i_k \leq m_k$ e $0 \leq j_0 < n_0 < j_1 < n_1 < \dots < j_l \leq n_l$ de forma que $s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_k}^{m_k} = s_{j_0}^{n_0} + \dots + s_{j_l}^{n_l}$, mas $(i_0, m_0, i_1, m_1, \dots, i_k, m_k) \neq (j_0, n_0, j_1, n_1, \dots, j_l, n_l)$, com $k + l$ mínimo nessas condições.

Em primeiro lugar, observe que $m_k = n_l$, pois esses são os respectivos complementos das palavras. Suponha que $i_k < j_l$: temos que $1 = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_k}^{m_k}(i_k + 1) = s_{j_0}^{n_0} + \dots + s_{j_l}^{n_l}(i_k + 1) = 0$, uma contradição. Similarmente, não se pode ter que $j_l < i_k$, logo $i_k = j_l$. Ou seja, temos que $s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}} + s_{i_k}^{m_k} = s_{j_0}^{n_0} + \dots + s_{j_{l-1}}^{n_{l-1}} + s_{i_k}^{m_k}$.

Caso $k = l = 0$, $i_0 = j_0$ e $m_0 = n_0$, ou seja $(i_0, m_0) = (j_0, n_0)$, e não temos um contraexemplo.

Logo suponha $k = 0$ e $l > 0$. Temos que $j_0 < n_0 < j_l = i_0$, portanto $0 = s_{i_0}^{m_0}(j_0 + 1) = s_{j_0}^{n_0} + \dots + s_{j_l}^{n_l}(j_0 + 1) = s_{j_0}^{n_0}(j_0 + 1) = 1$, uma contradição.

Portanto, suponha que $k, l > 0$. Temos que dado $0 \leq l \leq m_{k-1}$, vale que $s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}}(l) = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}} + s_{i_k}^{m_k}(l) = s_{j_0}^{n_0} + \dots + s_{j_{l-1}}^{n_{l-1}} + s_{i_k}^{m_k}(l) = s_{j_0}^{n_0} + \dots + s_{j_{l-1}}^{n_{l-1}}(l)$. Dessa forma, $s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}} = s_{j_0}^{n_0} + \dots + s_{j_{l-1}}^{n_{l-1}}$. Como $k - 1 + l - 1 < k + l$, a minimalidade de $k + l$ garante que $(i_0, m_0, i_1, m_1, \dots, i_{k-1}, m_{k-1}) = (j_0, n_0, j_1, n_1, \dots, j_{l-1}, n_{l-1})$. Porém, já provamos que $i_k = j_l$ e $m_k = n_l$, ou seja, $(i_0, m_0, i_1, m_1, \dots, i_k, m_k) = (j_0, n_0, j_1, n_1, \dots, j_l, n_l)$, e assim não temos um contraexemplo. Contradição. ■

Definição 3.37. (a) Dado $t \in F$, sua representação única na forma $t = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_k}^{m_k}$, com $k \in \omega$ e $0 \leq i_0 < m_0 < i_1 < m_1 < \dots < i_k \leq m_k$ (caso $k = 0$, a exigência é $0 \leq i_0 \leq m_0$), será chamada de *representação canônica* de t .

- (b) Dado $t \in F$, se $t = s_i^m$ para algum $i, m \in \omega$, definimos $t' = \emptyset$ e $t^* = t$. Caso contrário, com $t = s_{i_0}^{m_0} + \cdots + s_{i_{k+1}}^{m_{k+1}}$, definimos $t' = s_{i_0}^{m_0} + \cdots + s_{i_k}^{m_k}$ e $t^* = s_{i_{k+1}}^{m_{k+1}}$.
- (c) Definimos $c : F \rightarrow \omega$ por $c(t) = |\text{supp}(t)|$.
- (d) Para cada $p \in \mathbb{N}$, definimos $g_p : F \rightarrow \mathbb{Z}_p$ por $g_p(t) = [c(t)]_p$ (ou seja, $g_p(t)$ é a p -classe de $c(t)$).

Lembramos que a operação no semigrupo F é a concatenação, denotada por $\frown$.

Vale notar que dados $s, t \in F$, se $\text{supp}(s) \cap \text{supp}(t) = \emptyset$, então $c(s+t) = c(s) + c(t)$ e logo, para cada $p \in \mathbb{N}$, $g_p(s+t) = g_p(s) + g_p(t)$. Em particular, isso vale caso $s << t$.

Agora, nos será útil determinar a representação canônica de $s+t$ quando $s << t$. Sejam então $s = s_{i_0}^{m_0} + \cdots + s_{i_k}^{m_k}$ e $t = s_{j_0}^{n_0} + \cdots + s_{j_l}^{n_l}$ as representações canônicas de s e t . Primeiramente, note que $\min \text{supp}(t) = j_0 + 1$. Caso $i_k < m_k$, temos que $\max \text{supp}(s) = m_k$, logo $m_k + 1 < j_0 + 1$, assim $m_k < j_0$, e portanto $s_{i_0}^{m_0} + \cdots + s_{i_k}^{m_k} + s_{j_0}^{n_0} + \cdots + s_{j_l}^{n_l}$ é a representação canônica de $s+t$. Porém, caso $i_k = m_k$, então temos que $\max \text{supp}(s) = m_{k-1}$, logo $m_{k-1} < j_0$. Se $m_k < n_l$, note que $s_{m_k}^{m_k} + t = t$, de forma que $s+t = s_{i_0}^{m_0} + \cdots + s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}} + s_{j_0}^{n_0} + \cdots + s_{j_l}^{n_l}$ é a representação canônica de $s+t$. E se $m_k > n_l$, então $s_{i_0}^{m_0} + \cdots + s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}} + s_{j_0}^{n_0} + \cdots + s_{j_l}^{n_l} + s_{m_k}^{m_k}$ é a representação canônica de $s+t$.

Seja $t \in F$, $l(t) = n$, e defina $v = t \frown 1$ e $w = t \frown 0$. Usando $s_{i_0}^{m_0} + \cdots + s_{i_k}^{m_k}$ a representação canônica de t , e o lema acima, temos que, caso $t(n) = 0$, $w = s_{i_0}^{m_0} + \cdots + s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}} + s_{m_k+1}^{m_k+1}$, de modo que $t = (w') \frown (u_{m_k+1-m_{k-1}})$ e $w^* = u_{m_k+1}$; e caso $t(n) = 1$, $w = s_{i_0}^{m_0} + \cdots + s_{i_k}^{m_k} + s_{m_k+1}^{m_k+1}$, de modo que $t = w'$ e $w^* = u_{m_k+1}$. E em ambos os casos, $v = s_{i_0}^{m_0} + \cdots + s_{i_k}^{m_k+1}$, de modo que $v' = t'$ e $v^* = t^* \frown 1$.

Em suma: se $t \in F$ e $l(t) = n$, $v' = t'$, $v^* = t^* \frown 1$, $w^* = u_{n+1}$ e existe $r \in \omega$ tal que $t = (w') \frown (u_r)$.

Lema 3.38. *Sejam G um grupo com identidade e , e $X \subset G$ enumerável tal que $e \in X$. Suponha que G possui uma topologia invariante à esquerda, Hausdorff, e zero dimensional, tal que X não possui pontos isolados na topologia de subespaço, e que, para todo $a \in X$, $a \cdot X \cap X$ é uma vizinhança de a em X . Além disso, suponha que $p \in \mathbb{N}$ e que existe uma função $h : X \rightarrow \mathbb{Z}_p$ de forma que, para cada $a \in X$, existe $V(a)$ uma vizinhança de e em X tal que $a \cdot V(a) \subset X$ e $h(a \cdot b) = h(a) + h(b)$ para todo $b \in V(a)$; que $h[Y] = \mathbb{Z}_p$ para todo Y aberto de X ; e que $V(e) = X$.*

Então é possível definir $x(t) \in X$ e $X(t) \subset X$ para todo $t \in F$ de forma que $x(\emptyset) = e$, $X(\emptyset) = X$, e as seguintes condições estejam satisfeitas:

- (1) $X(t)$ é um clopen de X .
- (2) $x(t) \in X(t)$.
- (3) $X(t \frown 0) \cup X(t \frown 1) = X(t)$ e $X(t \frown 0) \cap X(t \frown 1) = \emptyset$.

$$(4) \ x(t \smallfrown 0) = x(t).$$

$$(5) \ x(t) = x(t') \cdot x(t^*).$$

$$(6) \ X(t) = x(t') \cdot X(t^*).$$

$$(7) \ X(t^*) \subset V(x(t')).$$

$$(8) \ h(x(t)) = g_p(t).$$

$$(9) \ \text{Dados } s, t \in F, \ x(s) = x(t) \text{ se e somente se existe } k \in \omega \text{ tal que } s = t \smallfrown u_k \text{ ou } t = s \smallfrown u_k.$$

$$(10) \ \text{Dados } s, t \in F, \text{ se } s << t, \text{ então } x(s+t) = x(s) \cdot x(t).$$

$$(11) \ \text{Dados } s, t \in F, \text{ se } s << t, \text{ então } h(x(s+t)) = h(x(s)) + h(x(t)).$$

$$(12) \ \text{Para todo } n \in \omega, \ x[u_n \smallfrown F] = X(u_n), \text{ de forma que, em particular, } x[F] = X.$$

$$(13) \ \text{Se houver } (W_n)_{n \geq 1} \text{ uma sequência previamente fixada de vizinhanças de } e \text{ em } X, \text{ é possível tomar } X(u_n) \text{ de forma que } X(u_{n+1}) \subset W_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Como X é enumerável, tome uma ordem em X isomorfa à ordem de ω (de forma que seja uma boa ordem).

Definiremos $x(t)$ e $X(t)$ por indução em $l(t)$.

Primeiramente, definimos $x(\emptyset) = e$ e $X(\emptyset) = X$. Usaremos a seguinte hipótese de indução: para algum $n \in \omega$, definimos $x(t)$ e $X(t)$ para todos $t \in F$ com $l(t) \leq n$ de forma que as condições (1) – (9) e (13) valham, e se $n \geq 1$, sequências $(a_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ em X e $(t_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ em F foram construídas de modo que valem as seguintes hipóteses adicionais, para cada $0 \leq k \leq n-1$:

$$(i) \ a_k = \min X \setminus \{x(t) : t \in F \text{ e } l(t) \leq k\},$$

$$(ii) \ a_k \in X(t_k \smallfrown 1), \text{ e}$$

$$(iii) \ \text{se } h(a_k) = g_p(t_k \smallfrown 1), \text{ então } a_k = x(t_k \smallfrown 1).$$

Todas as condições são trivialmente satisfeitas no passo inicial $n = 0$, exceto (8): para verificar essa, note que $e \in V(e) = X$, logo $h(e) = h(e \cdot e) = h(e) + h(e)$, logo $h(x(\emptyset)) = h(e) = [0]_p = g_p(\emptyset)$.

Para $n \geq 1$, começamos definindo $a_n = \min X \setminus \{x(t) : t \in F \text{ e } l(t) \leq n\}$. Pela condição (3) e pelo fato de que $X(\emptyset) = X$, segue que os conjuntos $X(t)$ com $l(t) = n$ formam uma partição de X , logo existe um único $t_n \in F$ com $l(t_n) = n$ tal que $a_n \in X(t_n)$. Como $X(t_n) = x(t_n') \cdot X(t_n^*)$, tome $c_n \in X(t_n^*)$ tal que $a_n = x(t_n') \cdot c_n$.

Agora, para cada $s \in \{s_i^n : 0 \leq i \leq n\}$, tome $b_s \in X(s)$ tal que $b_s \neq x(s)$ e $h(b_s) = g_p(s \smallfrown 1)$; tal b_s existe pois, por (1) e (2), $X(s)$, é um aberto não-vazio de X , e como X não possui pontos isolados,

$X(s) \setminus \{x(s)\}$ é um aberto também não-vazio de X , e portanto $h[X(s) \setminus \{x(s)\}] = \mathbb{Z}_p$. No caso específico de $s = t_n^*$, se $h(c_n) = g_p(t_n^* \frown 1)$, definimos $b_{t_n^*} = c_n$; isso é possível pois se $c_n = x(t_n^*)$, então por (5), $a_n = x(t_n') \cdot c_n = x(t_n') \cdot x(t_n^*) = x(t_n)$, contradizendo a definição de a_n .

Assim, para cada $s \in \{s_i^n : 0 \leq i \leq n\}$, defina $x(s \frown 0) = x(s)$ e $x(s \frown 1) = b_s$. Note que $s' = \emptyset$ e $s^* = s$ pela definição, logo $x(s \frown 1) = x(s') \cdot x(s^* \frown 1)$.

Dado $t \in F$ com $l(t) = n$, note que já definimos $x(t^* \frown 1) \in X(t^*)$ pois $t^* \in \{s_i^n : 0 \leq i \leq n\}$. Defina então $x(t \frown 0) = x(t)$ e $x(t \frown 1) = x(t') \cdot x(t^* \frown 1)$. Observe que $x(t) = x(t') \cdot x(t^*) \neq x(t') \cdot x(t^* \frown 1) = x(t \frown 1)$, e que $x(t \frown 1) \in x(t') \cdot X(t^*) = X(t)$. Além disso, por indução, $x(u_{n+1}) = x(u_n \frown 0) = x(u_n) = x(\emptyset) = e$.

Tomaremos agora uma vizinhança clopen U_n de e em G satisfazendo certas condições. Será possível tomar tal U_n notando que é um número finito de condições, cada uma garantida pela existência de uma certa vizinhança de e , e que as condições não são afetadas ao se tomar a interseção de tais vizinhanças. E a existência de cada uma dessas vizinhanças é garantida ao se usar que a topologia de G é Hausdorff, zero-dimensional, e invariante à esquerda (ou seja, as translações à esquerda são homeomorfismos). As condições são:

- $U_n \cap X \subset V(x(v))$ para todo $v \in F$ com $l(v) \leq n$ (lembre que $V(x(v))$ é vizinhança de e em X);
- $x(v) \cdot U_n \cap X \subset x(v) \cdot X$ para todo $v \in F$ com $l(v) \leq n$ (lembre que $x(v) \cdot X \cap X$ é vizinhança de $x(v)$ em X);
- $a_n \notin x(t_n) \cdot U_n$ (pois $a_n \neq x(t_n)$);
- $x(t) \cdot U_n \cap X \subset X(t)$ para todo $t \in F$ com $l(t) = n$ (pois $x(t) \cdot X \cap X$ e $X(t)$ são vizinhanças de $x(t)$ em X);
- $x(t \frown 1) \notin x(t) \cdot U_n$ (pois $x(t \frown 1) \neq x(t)$);
- se houver $(W_n)_{n \geq 1}$ uma sequência previamente fixada de vizinhanças de e em X , $U_n \cap X \subset W_n$.

Ser-nos-á útil mostrar que para todo $v \in F$ com $l(v) \leq n$, vale que $x(v) \cdot U_n \cap X = x(v) \cdot (U_n \cap X)$. Pela construção, $x(v) \cdot U_n \cap X \subset x(v) \cdot X$, logo $x(v) \cdot U_n \cap X \subset (x(v) \cdot U_n) \cap (x(v) \cdot X) = x(v) \cdot (U_n \cap X)$. Por outro lado, $U_n \cap X \subset V(x(v))$, logo $x(v) \cdot (U_n \cap X) \subset x(v) \cdot V(x(v)) \subset X$, do que $x(v) \cdot (U_n \cap X) \subset x(v) \cdot U_n \cap X$.

Definimos então $X(t \frown 0) = x(t) \cdot U_n \cap X$ e $X(t \frown 1) = X(t) \setminus X(t \frown 0)$. Agora, iremos verificar que as condições (1) – (9), (13), e também as hipóteses (i), (ii), (iii), valem para elementos de F de comprimento $n + 1$. Seja então $t \in F$ com $l(t) = n$. Defina $v = t \frown 1$ e $w = t \frown 0$. Como observado acima, $v' = t'$, $v^* = t^* \frown 1$, $w^* = u_{n+1}$ e para algum $r \in \omega$, $t = (w') \frown (u_r)$, de forma que $x(t) = x(w')$ pela construção.

Condição (1): $X(t)$ é clopen de X por hipótese, U_n é clopen e a topologia é invariante à esquerda, logo $x(t) \cdot U_n \cap X$ é clopen de X . Como $x(t) \cdot U_n \cap X \subset X(t)$, $X(t) \setminus X(t \smallfrown 0) = X(t \smallfrown 1)$ também é clopen.

Condição (2): Temos que $x(t \smallfrown 0) = x(t) \in x(t) \cdot U_n \cap X = X(t \smallfrown 0)$. Temos que $x(t \smallfrown 1) \notin x(t) \cdot U_n$ por construção e $x(t \smallfrown 1) \in X(t)$, logo $x(t \smallfrown 1) \in X(t) \setminus (x(t) \cdot U_n \cap X) = X(t) \setminus X(t \smallfrown 0) = X(t \smallfrown 1)$.

Condição (3): Pela definição, $X(t \smallfrown 0) \subset X(t)$ e $X(t \smallfrown 1) = X(t) \setminus X(t \smallfrown 0)$, logo $X(t \smallfrown 0) \cup X(t \smallfrown 1) = X(t)$ e $X(t \smallfrown 0) \cap X(t \smallfrown 1) = \emptyset$.

Condição (4): Definimos que $x(t \smallfrown 0) = x(t)$.

Condição (5): Vale que $x(v) = x(t \smallfrown 1) = x(t') \cdot x(t^* \smallfrown 1) = x(v') \cdot x(v^*)$. E $x(w) = x(t) = x(w') = x(w') \cdot e = x(w') \cdot x(w^*)$.

Condição (6): Vale que $X(w) = X(t \smallfrown 0) = x(t) \cdot U_n \cap X = x(t) \cdot (U_n \cap X) = x(w') \cdot X(u_{n+1}) = x(w') \cdot X(w^*)$. E $X(v) = X(t \smallfrown 1) = X(t) \setminus X(t \smallfrown 0) = X(t) \setminus (x(t) \cdot U_n \cap X) = X(t) \setminus (x(t) \cdot (U_n \cap X)) = x(t') \cdot X(t^*) \setminus (x(t') \cdot x(t^*) \cdot (U_n \cap X)) = x(t') \cdot (X(t^*) \setminus (x(t^*) \cdot (U_n \cap X))) = x(t') \cdot (X(t^*) \setminus (x(t^*) \cdot U_n \cap X)) = x(t') \cdot X(t^* \smallfrown 1) = x(v') \cdot X(v^*)$.

Condição (7): Temos que $X(w^*) = X(u_{n+1}) = U_n \cap X \subset V(x(t)) = V(x(w'))$. E $X(v^*) = X(t^* \smallfrown 1) \subset X(t^*) \subset V(x(t')) = V(x(v'))$.

Condição (8): Vale que $h(x(w)) = h(x(t)) = g_p(t)$, e como $w = t \smallfrown 0$, então $g_p(w) = g_p(t)$. Por outro lado, temos que $h(x(v)) = h(x(v') \cdot x(v^*)) = h(x(v')) + h(x(v^*))$, pois $x(v^*) \in X(v^*) \subset V(x(v'))$. Além disso, $x(v^*) = x(t^* \smallfrown 1) = b_{t^*}$, já que $t^* \in \{s_i^n : i \in n+1\}$; como por construção $h(b_{t^*}) = g_p(t^* \smallfrown 1)$, segue que $h(x(v)) = h(x(v')) + h(x(v^*)) = g_p(v') + h(b_{t^*}) = g_p(v') + g_p(t^* \smallfrown 1) = g_p(v') + g_p(v^*)$. Como $\text{supp}(v') \cap \text{supp}(v^*) = \emptyset$, vale que $g_p(v') + g_p(v^*) = g_p(v' + v^*) = g_p(v)$.

Condição (9): Sem perda de generalidade, $l(s) \leq l(t)$. Se para algum $k \in \omega$, $t = s \smallfrown u_k$, então por (4), $x(s) = x(t)$. Caso contrário, então s possui um 1 onde t possui um 0; ou t possui um 1 onde s possui um zero, ou onde s não está definido; de qualquer forma, pelo item (3) $x(s)$ e $x(t)$ pertencem a clopens disjuntos de X , logo $x(s) \neq x(t)$.

Condição (13): Se houver $(W_n)_{n \geq 1}$ uma sequência previamente fixada de vizinhanças de e em X , vale que $X(u_{n+1}) = U_n \cap X \subset W_n$.

Hipótese (i): Por definição, $a_n = \min X \setminus \{x(t) : t \in F \text{ e } l(t) \leq n\}$.

Hipótese (ii): Vale que $a_n \notin x(t_n) \cdot U_n$, logo $a_n \notin X(t_n \smallfrown 0)$. Como $a_n \in X(t_n)$, resta que $a_n \in X(t_n \smallfrown 1)$.

Hipótese (iii): Suponha que $h(a_n) = g_p(t_n \smallfrown 1)$. Como $t_n \smallfrown 1 = t_n' + t_n^* \smallfrown 1$, e estes dois têm suportes disjuntos, vale que $g_p(t_n \smallfrown 1) = g_p(t_n') + g_p(t_n^* \smallfrown 1)$. Lembre que $a_n = x(t_n') \cdot c_n$, com $c_n \in X(t_n^*) \subset V(x(t_n'))$, de forma que $h(a_n) = h(x(t_n')) + h(c_n) = g_p(t_n') + h(c_n)$. Segue que $h(c_n) = g_p(t_n^* \smallfrown 1)$. Por construção, nesse caso $c_n = b_{t_n^*}$, logo $c_n = x(t_n^* \smallfrown 1)$, e portanto $a_n = x(t_n') \cdot x(t_n^* \smallfrown 1) = x((t_n \smallfrown 1)') \cdot x((t_n \smallfrown 1)^*) = x(t_n \smallfrown 1)$.

Assim, a indução está completa. Resta provar que valem (10), (11) e (12) sabendo que valem (1) – (9), (13), e (i),(ii),(iii).

Condição (10): Primeiramente, mostraremos por indução em k que se a representação canônica de s é $s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_k}^{m_k}$, então $x(s) = x(s_{i_0}^{m_0}) \cdot \dots \cdot x(s_{i_k}^{m_k})$. Para $k = 0$, temos que $s = s_{i_0}^{m_0}$, logo $x(s) = x(s_{i_0}^{m_0})$. Se $s = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_k}^{m_k} + s_{i_{k+1}}^{m_{k+1}}$, como $s' = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_k}^{m_k}$ e $s^* = s_{i_{k+1}}^{m_{k+1}}$, usando (5), $x(s) = x(s') \cdot x(s^*) = x(s_{i_0}^{m_0}) \cdot \dots \cdot x(s_{i_k}^{m_k}) \cdot x(s_{i_{k+1}}^{m_{k+1}})$.

Assim, dados $s = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_k}^{m_k}$ e $t = s_{j_0}^{n_0} + \dots + s_{j_l}^{n_l}$, com $s \ll t$, verifiquemos caso a caso: se $i_k < m_k$, $s+t = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_k}^{m_k} + s_{j_0}^{n_0} + \dots + s_{j_l}^{n_l}$ é a representação canônica, então $x(s+t) = x(s_{i_0}^{m_0}) \cdot \dots \cdot x(s_{i_k}^{m_k}) \cdot x(s_{j_0}^{n_0}) \cdot \dots \cdot x(s_{j_l}^{n_l}) = x(s) \cdot x(t)$; se $i_k = m_k$ e $m_k \leq n_l$, $s+t = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}} + s_{j_0}^{n_0} + \dots + s_{j_l}^{n_l}$ é a representação canônica, então $x(s+t) = x(s_{i_0}^{m_0}) \cdot \dots \cdot x(s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}}) \cdot x(s_{j_0}^{n_0}) \cdot \dots \cdot x(s_{j_l}^{n_l}) = x(s_{i_0}^{m_0}) \cdot \dots \cdot x(s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}}) \cdot e \cdot x(s_{j_0}^{n_0}) \cdot \dots \cdot x(s_{j_l}^{n_l}) = x(s_{i_0}^{m_0}) \cdot \dots \cdot x(s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}}) \cdot x(s_{m_k}^{m_k}) \cdot x(s_{j_0}^{n_0}) \cdot \dots \cdot x(s_{j_l}^{n_l}) = x(s) \cdot x(t)$; se $i_k = m_k$ e $m_k > n_l$, $s+t = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}} + s_{j_0}^{n_0} + \dots + s_{j_l}^{n_l} + s_{m_k}^{m_k}$ é a representação canônica, logo $x(s+t) = x(s_{i_0}^{m_0}) \cdot \dots \cdot x(s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}}) \cdot x(s_{j_0}^{n_0}) \cdot \dots \cdot x(s_{j_l}^{n_l}) \cdot x(s_{m_k}^{m_k}) = x(s_{i_0}^{m_0}) \cdot \dots \cdot x(s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}}) \cdot e \cdot x(s_{j_0}^{n_0}) \cdot \dots \cdot x(s_{j_l}^{n_l}) \cdot e = x(s_{i_0}^{m_0}) \cdot \dots \cdot x(s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}}) \cdot x(s_{m_k}^{m_k}) \cdot x(s_{j_0}^{n_0}) \cdot \dots \cdot x(s_{j_l}^{n_l}) = x(s) \cdot x(t)$.

Condição (11): Primeiramente, mostraremos por indução em k que se a representação canônica de s é $s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_k}^{m_k}$, então $h(x(s)) = h(x(s_{i_0}^{m_0})) + \dots + h(x(s_{i_k}^{m_k}))$. Para $k = 0$, temos que $s = s_{i_0}^{m_0}$, logo $h(x(s)) = h(x(s_{i_0}^{m_0}))$. Se $s = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_k}^{m_k} + s_{i_{k+1}}^{m_{k+1}}$, como $s' = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_k}^{m_k}$ e $s^* = s_{i_{k+1}}^{m_{k+1}}$, usando que $x(s^*) \in X(s^*) \subset V(x(s'))$, $h(x(s)) = h(x(s')) + h(x(s^*)) = h(x(s_{i_0}^{m_0})) + \dots + h(x(s_{i_k}^{m_k})) + h(x(s_{i_{k+1}}^{m_{k+1}}))$.

Assim, dados $s = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_k}^{m_k}$ e $t = s_{j_0}^{n_0} + \dots + s_{j_l}^{n_l}$, com $s \ll t$, verifiquemos caso a caso: se $i_k < m_k$, $s+t = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_k}^{m_k} + s_{j_0}^{n_0} + \dots + s_{j_l}^{n_l}$ é a representação canônica, então $h(x(s+t)) = h(x(s_{i_0}^{m_0})) + \dots + h(x(s_{i_k}^{m_k})) + h(x(s_{j_0}^{n_0})) + \dots + h(x(s_{j_l}^{n_l})) = h(x(s)) + h(x(t))$; se $i_k = m_k$ e $m_k \leq n_l$, $s+t = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}} + s_{j_0}^{n_0} + \dots + s_{j_l}^{n_l}$ é a representação canônica, então $h(x(s+t)) = h(x(s_{i_0}^{m_0})) + \dots + h(x(s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}})) + h(x(s_{j_0}^{n_0})) + \dots + h(x(s_{j_l}^{n_l})) = h(x(s_{i_0}^{m_0})) + \dots + h(x(s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}})) + h(e) + h(x(s_{j_0}^{n_0})) + \dots + h(x(s_{j_l}^{n_l})) = h(x(s_{i_0}^{m_0})) + \dots + h(x(s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}})) + h(x(s_{m_k}^{m_k})) + h(x(s_{j_0}^{n_0})) + \dots + h(x(s_{j_l}^{n_l})) = h(x(s)) + h(x(t))$; se $i_k = m_k$ e $m_k > n_l$, $s+t = s_{i_0}^{m_0} + \dots + s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}} + s_{j_0}^{n_0} + \dots + s_{j_l}^{n_l} + s_{m_k}^{m_k}$ é a representação canônica, logo $h(x(s+t)) = h(x(s_{i_0}^{m_0})) + \dots + h(x(s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}})) + h(x(s_{j_0}^{n_0})) + \dots + h(x(s_{j_l}^{n_l})) + h(x(s_{m_k}^{m_k})) = h(x(s_{i_0}^{m_0})) + \dots + h(x(s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}})) + h(e) + h(x(s_{j_0}^{n_0})) + \dots + h(x(s_{j_l}^{n_l})) + h(e) = h(x(s_{i_0}^{m_0})) + \dots + h(x(s_{i_{k-1}}^{m_{k-1}})) + h(x(s_{m_k}^{m_k})) + h(x(s_{j_0}^{n_0})) + \dots + h(x(s_{j_l}^{n_l})) = h(x(s)) + h(x(t))$.

Condição (12): primeiro, mostraremos que dado $a \in X$, existe $v \in F$ tal que $a = x(v)$. Suponha, por absurdo, que $X \setminus x[F] \neq \emptyset$ e seja $a = \min X \setminus x[F]$.

Afirmção: para algum $n \in \omega$, $a = a_n$. Para ver isso, denote $F_n := \{t \in F : x(t) \leq n\}$. Vale que $F = \bigcup_{n \in \omega} F_n$. Como $F_n \subset F_{n+1} \subset F$, para todo $n \in \omega$, segue que $X \setminus x[F_n] \supset X \setminus x[F_{n+1}] \supset$

$X \setminus x[F]$, para todo $n \in \omega$, e assim $\min X \setminus x[F_n] \leq \min X \setminus x[F_{n+1}] \leq \min X \setminus x[F]$. Portanto, $(\min X \setminus x[F_n])_{n \geq 0}$ é uma sequência crescente e limitada em uma ordem de tipo ω , logo estaciona: tome $n \in \omega$ tal que $\min X \setminus x[F_n] = \min X \setminus x[F_{n+1}] = \min X \setminus x[F_{n+2}] = \dots$. Vale então que $\min X \setminus x[F_n] = \min X \setminus x[F]$: se valesse que $\min X \setminus x[F_n] < \min X \setminus x[F]$, então para algum $m > n$, $\min X \setminus x[F] \in x[F_m]$, e portanto $\min X \setminus x[F_n] < \min X \setminus x[F_m]$, o que não vale pela escolha de n . Portanto, $a = \min X \setminus x[F] = \min X \setminus x[F_n] = a_n$.

Tome $m \in \{0, \dots, p-1\}$ tal que $h(a_n) = g_p(t_n \frown 1) + [m]_p$. Caso $m = 0$, por (iii) teríamos que $a = a_n = x(t_n \frown 1)$; logo $m \geq 1$. Agora, seja $k \geq 0$ e suponha que $h(a_{n+k}) = g_p(t_{n+k} \frown 1) + [m]_p - [k]_p$; note que isso é satisfeito quando $k = 0$. Por (i), e pelo que foi visto acima, $a_{n+k+1} = a_{n+k}$. Por (ii), $a_{n+k} \in X(t_{n+k} \frown 1)$ e $a_{n+k+1} \in X(t_{n+k+1} \frown 1) \subset X(t_{n+k+1})$. Como ambos $t_{n+k} \frown 1$ e t_{n+k+1} são de comprimento $n+k+1$, segue que $t_{n+k} \frown 1 = t_{n+k+1}$. Dessa forma, $g_p(t_{n+k+1} \frown 1) = g_p(t_{n+k+1}) + [1]_p = g_p(t_{n+k} \frown 1) + [1]_p$, logo $g_p(t_{n+k} \frown 1) = g_p(t_{n+k+1} \frown 1) - [1]_p$; portanto, temos que $h(a_{n+k+1}) = h(a_{n+k}) = g_p(t_{n+k} \frown 1) + [m]_p - [k]_p = g_p(t_{n+k+1} \frown 1) - [1]_p + [m]_p - [k]_p = g_p(t_{n+k+1} \frown 1) + [m]_p - [k+1]_p$. Assim, vale a indução. Em particular, quando $k = m$, $h(a_{n+m}) = g_p(t_{n+m} \frown 1) + [m]_p - [m]_p = g_p(t_{n+m} \frown 1)$; logo por (iii), $a = a_{n+m} = x(t_{n+m} \frown 1)$, uma contradição, pois $a \in X \setminus x[F]$.

Dessa forma, $x[F] = X$.

Agora, para terminar o (12), note que para todo $n \in \omega$ e todo $t \in F$, vale que $x(u_n \frown t) \in X(u_n \frown t) \subset X(u_n)$, de forma que $x[u_n \frown F] \subset X(u_n)$. Resta ver que $X \setminus x[u_n \frown F] \subset X \setminus X(u_n)$. Seja $a \in X \setminus x[u_n \frown F]$. Como $X = x[F]$, tome $v \in F \setminus u_n \frown F$ tal que $a = x(v)$. Como $e = x(u_n) = x(u_n \frown \emptyset) \in x[u_n \frown F]$, então $a \neq e$, e portanto $v \notin \{u_m : m \in \omega\}$, e assim $\text{supp}(v) \neq \emptyset$. Seja $k = \min \text{supp}(v)$. Como $v \in F \setminus u_n \frown F$, então $k \leq n$. Vale que $x(v) \in X(s_{k-1}^k)$, pois s_{k-1}^k é um trecho inicial de v , e que $X(u_n) \subset X(u_k)$, pois $n \geq k$. Por fim, como $u_k = u_{k-1} \frown 0$ e $s_{k-1}^k = u_{k-1} \frown 1$, então $X(s_{k-1}^k) \cap X(u_k) = \emptyset$, logo $a = x(v) \notin X(u_n)$. Segue que $X \setminus x[u_n \frown F] \subset X \setminus X(u_n)$ como afirmamos. ■

Atenção: A partir daqui e até a enunciação do Teorema de Zelenyuk, G será um grupo discreto com identidade e e C será um subsemigrupo finito de G^* .

Definição 3.39. (a) $C^\sim = \{x \in \beta G : x \cdot C \subset C\}$.

(b) φ é o filtro dos subconjuntos U de G tais que $C \subset \bar{U}$.

(c) $\varphi^\sim$ é o filtro dos subconjuntos U de G tais que $C^\sim \subset \bar{U}$.

Observe que $C^\sim$ é um semigrupo, e que de fato φ e $\varphi^\sim$ são filtros. De fato, vale que $\varphi = \bigcap C$ e $\varphi^\sim = \bigcap C^\sim$, pois: $U \in \varphi \Leftrightarrow C \subset \bar{U} \Leftrightarrow$ para todo $c \in C$, $c \in \bar{U} \Leftrightarrow$ para todo $c \in C$, $U \in c \Leftrightarrow U \in \bigcap C$. Analogamente, $\varphi^\sim = \bigcap C^\sim$.

Lema 3.40. *É possível definir uma topologia invariante à esquerda em G tal que $\varphi^\sim$ é o filtro das vizinhanças de e . Se valer que $x \cdot C = C$ para todo $x \in C^\sim$, então esta topologia tem uma base de clopens.*

Demonstração. Para cada $U \in \varphi$, defina $U^\wedge = \{a \in G : a \cdot C \subset \overline{U}\}$. Note que $e \in U^\wedge$. Mostraremos que

- (i) para cada $U \in \varphi$, $U^\wedge \in \varphi^\sim$,
- (ii) $\{U^\wedge : U \in \varphi\}$ é uma base para o filtro $\varphi^\sim$, e
- (iii) para todo $U \in \varphi$ e todo $a \in U^\wedge$, $a^{-1}U^\wedge \in \varphi^\sim$.

Verificando (i): suponha que para um certo $U \in \varphi$, $C^\sim \not\subset \overline{U^\wedge}$. Tome $x \in C^\sim \setminus \overline{U^\wedge}$. Como $U^\wedge \notin x$, então $G \setminus U^\wedge \in x$. Mas $G \setminus U^\wedge = \{a \in G : a \cdot C \not\subset \overline{U}\} = \{a \in G : \text{existe } y \in C \text{ tal que } a \cdot y \notin \overline{U}\} = \bigcup_{y \in C} \{a \in G : U \notin a \cdot y\} = \bigcup_{y \in C} \{a \in G : a^{-1}U \notin y\}$. Como C é finito, vale que para algum $y \in C$, $\{a \in G : a^{-1}U \notin y\} \in x$, logo $\{a \in G : a^{-1}U \in y\} \notin x$, e assim $U \notin x \cdot y$, ou seja, $x \cdot y \notin \overline{U}$. Porém, $x \in C^\sim$ e $y \in C$, logo $x \cdot y \in C \subset \overline{U}$. Contradição. Logo, $U^\wedge \in \varphi^\sim$.

Verificando (ii): O item acima nos diz que $\{U^\wedge : U \in \varphi\} \subset \varphi^\sim$. Dados $U, V \in \varphi$, $(U \cap V)^\wedge \in \varphi^\sim$ (pois $U \cap V \in \varphi$), e $(U \cap V)^\wedge = \{a \in G : a \cdot C \subset \overline{U \cap V}\} = \{a \in G : a \cdot C \subset \overline{U} \cap \overline{V}\} = U^\wedge \cap V^\wedge$, de forma que $\{U^\wedge : U \in \varphi\}$ é fechado para interseções finitas. Agora, resta ver que para todo $V \in \varphi^\sim$ existe $U \in \varphi$ tal que $U^\wedge \subset V$.

Afirmção: Basta ver que $\bigcap_{U \in \varphi} \overline{U^\wedge} = C^\sim$. Pois suponha que exista $V \in \varphi^\sim$ tal que para todo $U \in \varphi$, $U^\wedge \setminus V \neq \emptyset$. Valeria que $\{U^\wedge \setminus V : U \in \varphi\}$ seria uma coleção com a p.i.f., logo existiria $x \in \bigcap_{U \in \varphi} \overline{U^\wedge \setminus V}$. Ter-se-ia então que $x \in \bigcap_{U \in \varphi} \overline{U^\wedge \setminus V} \subset \bigcap_{U \in \varphi} \overline{U^\wedge} = C^\sim \subset \overline{V}$, ou seja, $x \in \overline{V}$, uma contradição.

Provemos então que $\bigcap_{U \in \varphi} \overline{U^\wedge} = C^\sim$. Vale que $\bigcap_{U \in \varphi} \overline{U^\wedge} \supset C^\sim$, já que $\{U^\wedge : U \in \varphi\} \subset \varphi^\sim$ e pela definição de $\varphi^\sim$. Agora, suponha por absurdo que existe $x \in \bigcap_{U \in \varphi} \overline{U^\wedge} \setminus C^\sim$. $x \notin C^\sim$, ou seja, existe $y \in C$ tal que $x \cdot y \notin C$. Como C é finito e βG é Hausdorff, C é fechado, logo existe $A \subset G$ tal que $x \cdot y \in \overline{A}$ e $C \cap \overline{A} = \emptyset$. Logo $C \subset \overline{G \setminus A}$, ou seja, $G \setminus A \in \varphi$. $x \cdot y \notin \overline{G \setminus A}$, logo $\{a \in G : a^{-1}(G \setminus A) \in y\} \notin x$, ou seja, $\{a \in G : a^{-1}(G \setminus A) \notin y\} = \{a \in G : a \cdot y \notin \overline{G \setminus A}\} \in x$. Como $(G \setminus A)^\wedge = \{a \in G : a \cdot C \subset \overline{G \setminus A}\}$, então $(G \setminus A)^\wedge \cap \{a \in G : a \cdot y \notin \overline{G \setminus A}\} = \emptyset$, e portanto $(G \setminus A)^\wedge \notin x$, ou seja $x \notin \overline{(G \setminus A)^\wedge}$. Absurdo, pois $G \setminus A \in \varphi$.

Verificando (iii): sejam $U \in \varphi$ e $a \in U^\wedge$, e suponha que $a^{-1}U^\wedge \notin \varphi^\sim$. Logo existe $y \in C^\sim \setminus \overline{a^{-1}U^\wedge}$. Portanto, $G \setminus a^{-1}U^\wedge = \{b \in G : a \cdot b \notin U^\wedge\} = \{b \in G : \text{existe } z \in C \text{ tal que } a \cdot b \cdot z \notin \overline{U}\} \in y$. Como C é finito, tome $z \in C$ tal que $\{b \in G : a \cdot b \cdot z \notin \overline{U}\} \in y$. Segue que $a \cdot y \cdot z \notin \overline{U}$. Porém, $y \cdot z \in C$ e $a \in U^\wedge$, logo $a \cdot y \cdot z \in \overline{U}$. Contradição.

Munido de (i), (ii) e (iii), defina $\mathcal{B} = \{a \cdot U^\wedge : U \in \varphi, a \in G\}$. Mostremos que $\mathcal{B}$ é uma base para

uma topologia invariante à esquerda em G tal que $\varphi^\sim$ é o filtro das vizinhanças de e .

Para ver que é base, sejam $U, V \in \varphi$ e $a, b, c \in G$, e suponha $c \in a \cdot U^\wedge \cap b \cdot V^\wedge$. Temos que $a^{-1} \cdot c \in U^\wedge$, logo por (iii) $c^{-1} \cdot a \cdot U^\wedge \in \varphi^\sim$, logo por (ii) existe $W_1 \in \varphi$ tal que $W_1^\wedge \subset c^{-1} \cdot a \cdot U^\wedge$. Analogamente, existe $W_2 \in \varphi$ tal que $W_2^\wedge \subset c^{-1} \cdot b \cdot V^\wedge$. Temos então que $W_1^\wedge \cap W_2^\wedge \subset c^{-1} \cdot a \cdot U^\wedge \cap c^{-1} \cdot b \cdot V^\wedge$, logo $c \cdot (W_1 \cap W_2)^\wedge \subset a \cdot U^\wedge \cap b \cdot V^\wedge$. Como $W_1 \cap W_2 \in \varphi$, vale que $e \in (W_1 \cap W_2)^\wedge$, logo $c \in c \cdot (W_1 \cap W_2)^\wedge \in \mathcal{B}$.

Como a base $\mathcal{B}$ é invariante à esquerda, então a topologia gerada por ela é invariante à esquerda.

Para ver que $\varphi^\sim$ é o filtro das vizinhanças de e , note por (ii) que cada membro de $\varphi^\sim$ é uma vizinhança de e (pois $e \in U^\wedge = e \cdot U^\wedge$, para cada $U \in \varphi$). Por outro lado, dada W vizinhança de e , tome $a \in G$ e $U \in \varphi$ tais que $e \in a \cdot U^\wedge \subset W$. Vale que $a^{-1} = a^{-1} \cdot e \in U^\wedge$, logo por (iii) $a \cdot U^\wedge \in \varphi^\sim$, do que $W \in \varphi^\sim$.

Finalmente, mostraremos que se $x \cdot C = C$ para todo $x \in C^\sim$, então para todo $U \in \varphi$, $U^\wedge$ é fechado. Disso seguirá que $\mathcal{B}$ é uma base de clopens, pois a topologia é invariante à esquerda. Sejam então $U \in \varphi$ e $a \in G \setminus U^\wedge$. Mostraremos que $V := G \setminus a^{-1} \cdot U^\wedge \in \varphi^\sim$, logo $a \cdot V = G \setminus U^\wedge$ é uma vizinhança de a disjunta de $U^\wedge$. Ou seja, devemos ver que $C^\sim \subset \overline{V}$. Seja $y \in C^\sim$. Como $a \notin U^\sim$, então $a \cdot (y \cdot C) = a \cdot C \not\subset \overline{U}$, logo tome $z \in C$ tal que $a \cdot y \cdot z \notin \overline{U}$. Assim, temos que $\{b \in G : a \cdot b \cdot z \notin \overline{U}\} \in y$ e $\{b \in G : a \cdot b \cdot z \notin \overline{U}\} \subset \{b \in G : a \cdot b \cdot C \not\subset \overline{U}\} = G \setminus \{b \in G : a \cdot b \cdot C \subset \overline{U}\} = G \setminus a^{-1} \cdot U^\wedge = V$. Logo $V \in y$, como queríamos. ■

Lema 3.41. *Assuma que $x \cdot C = C$ para todo $x \in C^\sim$. Então são equivalentes:*

(a) *A topologia definida no Lema 3.40 é Hausdorff.*

(b) $\{a \in G : a \cdot C \subset C\} = \{e\}$.

(c) $\bigcap \varphi^\sim = \{e\}$.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b): Por um lado, temos que $e \cdot C \subset C$. Por outro, seja $a \in G \setminus \{e\}$. Como $\varphi^\sim$ é o filtro das vizinhanças de e , tome $V \in \varphi^\sim$ tal que $a \notin V$. Como $C^\sim \subset \overline{V}$, então $a \notin C^\sim$, ou seja, $a \cdot C \not\subset C$.

(b) $\Rightarrow$ (c): Como $\varphi^\sim$ é o filtro das vizinhanças de e , temos que $e \in \bigcap \varphi^\sim$. Por outro lado, tome $a \in G \setminus \{e\}$. Por hipótese, $a \cdot C \not\subset C$, ou seja, $a \notin C^\sim$. Agora, observe que $C^\sim = \{x \in \beta G : x \cdot C \subset C\} = \{x \in \beta G : x \cdot y \in C, \text{ para todo } y \in C\} = \bigcap_{y \in C} \{x \in \beta G : x \cdot y \in C\} = \bigcap_{y \in C} \{x \in \beta G : \rho_y(x) \in C\} = \bigcap_{y \in C} \rho_y^{-1}[C]$, logo $C^\sim$ é fechado em βG . Assim, tome $A \subset G$ tal que $a \in A$ e $C^\sim \cap \overline{A} = \emptyset$; $C^\sim \subset \overline{G \setminus A}$, ou seja, $G \setminus A \in \varphi^\sim$, e $a \notin G \setminus A$; portanto, $a \notin \bigcap \varphi^\sim$.

(c) $\Rightarrow$ (a): Seja $a \in G \setminus \{e\}$. Pela hipótese e pelo item (ii) do Lema 3.40, tome $U \in \varphi$ tal que $a \notin U^\wedge$; pela hipótese geral do Lema, $U^\wedge =: V$ é clopen, logo V e $G \setminus V$ são vizinhanças disjuntas de e e a , respectivamente.

Agora, dados $b, c \in G$ distintos, pelo que provamos acima existe V vizinhança clopen de e tal que $b^{-1} \cdot c \in G \setminus V$. Logo $b \cdot V$ e $b \cdot (G \setminus V) = G \setminus b \cdot V$ são vizinhanças disjuntas de b e c , respectivamente. ■

Atenção: A partir daqui e até a enunciação do Teorema de Zelenyuk, G será um grupo discreto com identidade e e C será um subgrupo finito de G^* , com identidade u . (Na p. 92 exigíramos somente que C fosse um subsemigrupo.)

Observe que isto implica que $x \cdot C = C$ para todo $x \in C^\sim$, pois: dado $c \in C$, $x \cdot u \in C$, logo possui uma inversa $(x \cdot u)^{-1} \in C$. Assim, $x \cdot u \cdot (x \cdot u)^{-1} \cdot c \in x \cdot C$, e $x \cdot u \cdot (x \cdot u)^{-1} \cdot c = u \cdot c = c$.

Lema 3.42. *Se G não possui grupos finitos não-triviais, então $\bigcap \varphi^\sim = \{e\}$.*

Demonstração. Vale que $\bigcap \varphi^\sim = C^\sim \cap G$, pois: dado $a \in C^\sim \cap G$, para cada $U \in \varphi^\sim$, $a \in U$, logo $a \in \bigcap \varphi^\sim$; e se $a \in G \setminus C^\sim$, então $a \neq p$ para todo $p \in C^\sim$, de forma que $G \setminus \{a\} \in p$ para todo $p \in C^\sim$, ou seja, $C^\sim \subset \overline{G \setminus \{a\}}$, ou seja, $G \setminus \{a\} \in \varphi^\sim$, de forma que $a \notin \bigcap \varphi^\sim$.

Assim, $\bigcap \varphi^\sim = C^\sim \cap G = \{a \in G : a \cdot C = C\}$. Agora, dados $a, b \in C^\sim \cap G$, temos que $a \cdot b \cdot C = a \cdot C = C$, logo $a \cdot b \in C^\sim \cap G$; e $a^{-1} \cdot C = a^{-1} \cdot (a \cdot C) = C$, logo $a^{-1} \in C^\sim \cap G$. Portanto, $C^\sim \cap G$ é um subgrupo de G . Pela hipótese, ele é infinito, ou é $\{e\}$. Porém, se fosse infinito, como $a \cdot u, b \cdot u \in C$ para todos $a, b \in C^\sim \cap G$, e C é finito, existiriam $a, b \in G$ distintos tais que $a \cdot u = b \cdot u$, contrariando o Lema 3.8. ■

Assim, com os Lemas 3.40, 3.41 e 3.42, temos o seguinte:

Lema 3.43. *Existe uma topologia em G invariante à esquerda e zero-dimensional tal que $\varphi^\sim$ é o filtro das vizinhanças de e . Se G não possui subgrupos finitos não-triviais, então esta topologia é Hausdorff.*

Definição 3.44. (a) Fixe uma família $\{U_y : y \in C\}$ de subconjuntos dois-a-dois disjuntos de G tais que $U_y \in y$ para todo $y \in C$.

(b) Para cada $y \in C$, defina $A_y = \{a \in G : a \cdot z \in \overline{U_{y,z}} \text{ para todo } z \in C\}$

Note que $A_y = \bigcap_{z \in C} \{a \in G : a^{-1}U_{y,z} \in z\}$ e que $e \in A_u$.

Lema 3.45. *Para todo $y \in C$, $A_y \in y$, e se $y, w \in C$ são distintos, então $A_y \cap A_w = \emptyset$.*

Demonstração. Para cada $z \in C$, $U_{y,z} \in y \cdot z$, ou seja, $\{a \in G : a^{-1}U_{y,z} \in z\} \in y$. Logo $\bigcap_{z \in C} \{a \in G : a^{-1}U_{y,z} \in z\} = A_y \in y$.

Por contraposição, suponha $y, w \in C$ e $a \in A_y \cap A_w$. Vale que $a \cdot u \in \overline{U_{y,u}}$ e $a \cdot u \in \overline{U_{w,u}}$, ou seja, $U_y, U_w \in a \cdot u$, logo $U_y \cap U_w \neq \emptyset$, e portanto $y = w$. ■

Definição 3.46. (a) $X := \bigcup_{y \in C} A_y$.

(b) Definimos $f : X \rightarrow C$ por $f(a) = y$ se $a \in A_y$. Pelo Lema acima isto está bem-definido.

(c) Para cada $z \in C$ e cada $a \in X$, $V_z(a) := \{b \in A_z : a \cdot b \in A_{f(a) \cdot z}\}$.

(d) Para cada $a \in X$, $V(a) := \bigcup_{z \in C} V_z(a)$.

Note que, para cada $a \in X$, $V(a) \subset X$ e $a \cdot V(a) \subset X$. Além disso, $f(e) = u$, logo para todo $z \in C$, $V_z(e) = A_z$, logo $V(e) = X$.

Lema 3.47. Para cada $a \in X$ e cada $b \in V(a)$, $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$.

Demonstração. Sejam $a \in X$ e $b \in V(a)$. Tome $z \in C$ tal que $b \in V_z(a)$. Como $b \in A_z$, $f(b) = z$, logo $a \cdot b \in A_{f(a) \cdot z} = A_{f(a) \cdot f(b)}$, de forma que $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$. ■

Lema 3.48. Para todo $a \in X$, $V(a) \in \varphi^\sim$.

Demonstração. Começaremos mostrando que

(i) dados $y \in C$ e $a \in G$, $a \in A_y$ se e somente se $a \cdot u \in \overline{A_y}$, e

(ii) para todos $y, z \in C$, e todo $a \in A_y$, $a \cdot z \in \overline{A_{y \cdot z}}$.

Provando (i), ($\Rightarrow$): por contraposição, suponha que $a \cdot u \notin \overline{A_y}$. Temos que $a^{-1}A_y \notin u$, logo $G \setminus a^{-1}A_y = \{b \in G : a \cdot b \notin A_y\} \in u$. Vale que $a \cdot b \notin A_y \Rightarrow a \cdot b \cdot z \notin \overline{U_{y \cdot z}}$ para algum $z \in C$. Como C é finito, tome $z \in C$ tal que $\{b \in G : a \cdot b \cdot z \notin \overline{U_{y \cdot z}}\} \in u$. Segue que $a \cdot u \cdot z \notin \overline{U_{y \cdot z}}$; como $a \cdot u \cdot z = a \cdot z$, temos que $a \notin A_y$.

(i), ($\Leftarrow$): Suponha $a \cdot u \in \overline{A_y}$. Temos que $a^{-1}A_y = \{b \in G : a \cdot b \in A_y\} \in u$, logo para todo $z \in C$, $\{b \in G : a \cdot b \cdot z \in \overline{U_{y \cdot z}}\} \in u$; logo para todo $z \in C$, $a \cdot u \cdot z = a \cdot z \in \overline{U_{y \cdot z}}$; ou seja, $a \in A_y$.

Provando (ii): $a \cdot z \in \overline{A_{y \cdot z}} \Leftrightarrow a^{-1}A_{y \cdot z} \in z$. Por contraposição, suponha que $a^{-1}A_{y \cdot z} \notin z$; temos que $G \setminus a^{-1}A_{y \cdot z} = \bigcup_{w \in C} \{b \in G : a \cdot b \cdot w \notin \overline{U_{y \cdot z \cdot w}}\} \in z$, logo tome $w \in C$ tal que $\{b \in G : a \cdot b \cdot w \notin \overline{U_{y \cdot z \cdot w}}\} \in z$. Por continuidade, segue que $a \cdot z \cdot w \notin \overline{U_{y \cdot z \cdot w}}$, e portanto $a \notin A_y$.

Tendo (i) e (ii), seja $a \in X$. Suponha $V(a) \notin \varphi^\sim$ e tome $x \in C^\sim \setminus \overline{V(a)}$. Considere $y := f(a)$ e $z := x \cdot u$. Como $x \in C^\sim$, $z \in C$, logo $x \notin \overline{V_z(a)}$ e assim $G \setminus V_z(a) = \{b \in G : b \notin A_z \text{ ou } a \cdot b \notin A_{y \cdot z}\} \in x$. Usando (i), temos que $\{b \in G : b \notin A_z \text{ ou } a \cdot b \notin A_{y \cdot z}\} = \{b \in G : b \cdot u \notin \overline{A_z} \text{ ou } a \cdot b \cdot u \notin \overline{A_{y \cdot z}}\}$, logo $\{b \in G : b \cdot u \notin \overline{A_z}\} \in x$, ou $\{a \cdot b \cdot u \notin \overline{A_{y \cdot z}}\} \in x$. Isto é, $x \cdot u \notin \overline{A_z}$ ou $a \cdot x \cdot u \notin \overline{A_{y \cdot z}}$. Como $x \cdot u = z$, temos: $z \notin \overline{A_z}$ ou $a \cdot z \notin \overline{A_{y \cdot z}}$. A primeira opção contraria o Lema 3.45, e a segunda contraria o item (ii), pois $a \in A_{f(a)} = A_y$. ■

Lema 3.49. X é aberto na topologia invariante à esquerda definida em G ao se tomar $\varphi^\sim$ como base de vizinhanças de e .

Demonstração. Dado $a \in X$, vimos que $V(a) \in \varphi^\sim$ no Lema anterior, logo $a \cdot V(a)$ é aberto; e além disso, $a \in a \cdot V(a) \subset X$. ■

Lema 3.50. *Dado qualquer $\emptyset \neq Y \subset X$ aberto na topologia definida por $\varphi^\sim$, vale que $f[Y] = C$.*

Demonstração. Primeiramente, dado $U \in \varphi^\sim$, temos que $C \subset C^\sim \subset \overline{U}$, ou seja, para todo $y \in C$, $U \in y$. Como $A_y \in y$, temos que $U \cap A_y \neq \emptyset$ para todo $y \in C$; portanto, $f[U] = C$ pela definição de f . Agora, seja $a \in Y$. Tome $U \in \varphi^\sim$ tal que $a \cdot U \subset Y$, e $U \subset V(a)$. Pelo Lema 3.47, temos que $f[a \cdot U] = f(a) \cdot f[U]$. Assim, temos que $C = f(a) \cdot C = f(a) \cdot f[U] = f[a \cdot U] \subset f[Y]$. Como $f : X \rightarrow C$, então $f[Y] = C$. ■

Teorema 3.51. *Se G é um grupo enumerável que não possui subgrupos finitos não-triviais, então G^* não possui grupo finitos não-triviais.*

Demonstração. Suporemos que $C \subset G^*$ é um subgrupo finito tal que $C \cong \mathbb{Z}_p$ para algum $p > 1$ e disso obteremos uma contradição. Como todo grupo finito não-trivial possui um subgrupo cíclico, seguirá o resultado em geral.

Tome então $\gamma : C \rightarrow \mathbb{Z}_p$ isomorfismo e para cada $i \in \mathbb{Z}_p$ defina $y_i = \gamma^{-1}(i)$. Considere $h := \gamma \circ f$. Temos que $h : X \rightarrow \mathbb{Z}_p$ e $h(a) = i$ se e somente se $f(a) = y_i$.

Assuma que G possui a topologia produzida no Lema 3.43. Então pelos Lemas 3.43, 3.47, 3.48, 3.49 e 3.50, as hipóteses do Lema 3.38 estão satisfeitas, exceto: X não possui pontos isolados na topologia relativa. Para ver isso, note que o 3.50 implica que todo aberto de X tem pelo menos p elementos. Como $p > 1$, X não possui pontos isolados. Dessa forma, podemos aplicar o Lema 3.38 e assumir que $x(t)$ e $X(t)$ foram escolhidos para cada $t \in F$ satisfazendo as condições (1) – (13).

Temos que $A_{y_{\overline{1}}} \in y_{\overline{1}}$, e se $a \in A_{y_{\overline{1}}}$, $f(a) = y_{\overline{1}}$, logo $h(a) = \overline{1}$. Se $a = x(t)$, pela condição (8), $h(a) = g_p(t)$; portanto, como $x[F] = X \supset A_{y_{\overline{1}}}$, $A_{y_{\overline{1}}} \subset \{x(t) : t \in F \text{ e } g_p(t) = \overline{1}\}$. Como $g_p(t) = \overline{1} \Leftrightarrow c(t) \equiv 1 \pmod{p}$, segue que $\{x(t) : t \in F \text{ e } c(t) \equiv 1 \pmod{p}\} \in y_{\overline{1}}$.

Agora, note que $c(t) \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow$ existe $m \in \omega$ tal que $c(t) = mp + 1$. Dividindo m por p , existem $q, r \in \omega$, $r < p$, tais que $m = qp + r$, de forma que $c(t) = qp^2 + rp + 1$, e logo $c(t) \equiv rp + 1 \pmod{p^2}$. Por outro lado, se $c(t) \equiv rp + 1 \pmod{p^2}$, então existe $q \in \omega$ tal que $c(t) = qp^2 + rp + 1$, e logo $c(t) \equiv 1 \pmod{p}$. Defina então, para cada $0 \leq r < p$, $B_r = \{x(t) : t \in F \text{ e } c(t) \equiv rp + 1 \pmod{p^2}\}$. A condição (9) do Lema 3.38 nos garante que se $x(s) = x(t)$ então $c(s) = c(t)$, logo $B_r \cap B_k = \emptyset$ para r, k distintos. Como $A_{y_{\overline{1}}} \subset \{x(t) : t \in F \text{ e } c(t) \equiv 1 \pmod{p}\} = \bigcup_{r=0}^{p-1} B_r$, então podemos tomar o único $r < p$ tal que $B_r \in y_{\overline{1}}$.

Seja $n \in \mathbb{N}$. Vale que $X(u_n)$ é aberto e $e = x(u_n) \in X(u_n)$, logo $X(u_n)$ é uma vizinhança de e , de modo que $X(u_n) \in \varphi^\sim = \bigcap C^\sim \subset \bigcap C \subset y_{\overline{1}}$. Dado $t \in F$, vale que $\min \text{supp}(t) > n$ se e só se $t \in u_n \cap F \setminus \{u_m : m \in \mathbb{N}\}$. Como, pela condição (12) do Lema 3.38, $x[u_n \cap F] = X(u_n)$, segue que $\{x(t) : t \in F \text{ e } \min \text{supp}(t) > n\} = X(u_n) \setminus \{e\} \in y_{\overline{1}}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $E_n = \{x(s_1 + \dots + s_n) : \text{para cada } 1 \leq i \leq n, s_i \in F, c(s_i) \equiv rp + 1 \pmod{p^2}, \text{ e se } i < n, s_i \ll s_{i+1}\}$. Mostraremos por indução que para cada $n \in \mathbb{N}$, $E_n \in y_{\overline{1}}^n$.

Como $E_1 = B_r \in y_{\bar{1}}$, vale para $n = 1$. Suponha então que $E_n \in y_{\bar{1}}^n$. Verificaremos que $E_n \subset \{a \in G : a^{-1}E_{n+1} \in y_{\bar{1}}\}$, e consequentemente $E_{n+1} \in y_{\bar{1}}^n \cdot y_{\bar{1}} = y_{\bar{1}}^{n+1}$. Logo seja $a \in E_n$ e tome $s_1 << \dots << s_n$ em F tais que para cada i , $c(s_i) \equiv rp+1 \pmod{p^2}$ e $a = x(s_1 + \dots + s_n)$. Considere $D = \{x(t) : t \in F \text{ e } \min \text{supp}(t) > \max \text{supp}(s_n) + 1\}$. Pelo observado acima, $B_r \cap D \in y_{\bar{1}}$, logo basta ver que $B_r \cap D \subset a^{-1}E_{n+1}$. Seja então $t \in F$ tal que $\min \text{supp}(t) > \max \text{supp}(s_n) + 1$ e $c(t) \equiv rp+1 \pmod{p^2}$. Pela condição (10) do Lema 3.38, temos que $x(s_1 + \dots + s_n) \cdot x(t) = x(s_1 + \dots + s_n + t) \in E_{n+1}$, logo $a \cdot x(t) \in E_{n+1}$ como desejado.

Agora, com a indução completa, temos que: $y_{\bar{1}}^{p+1} = y_{\bar{1}}$, logo $E_{p+1} \in y_{\bar{1}}$, logo tome $a \in E_{p+1} \cap B_r$. Sejam então $s_1 << \dots << s_{p+1}$ em F tais que $c(s_i) \equiv rp+1 \pmod{p^2}$ e $a = x(s_1 + \dots + s_{p+1})$. Temos então o seguinte, pela condição (10) do Lema 3.38: $c(s_1 + \dots + s_{p+1}) = c(s_1) + \dots + c(s_{p+1}) \equiv (p+1)(rp+1) = rp^2 + p + rp + 1 \equiv (r+1)p + 1 \pmod{p^2}$. Ou seja, $a \in B_{r+1}$, e portanto $B_r \cap B_{r+1} \neq \emptyset$ (caso $r = p-1$, $B_{p-1} \cap B_0 \neq \emptyset$). Contradição. ■

Apêndice A

Grupos Abelianos Divisíveis

O material encontrado aqui foi retirado do livro "Abelian Groups", de László Fuchs ([10]). Ele é utilizado na seção 3.2 do capítulo 3, e por isso é apresentado de forma resumida, assumindo um conhecimento mínimo sobre grupos abelianos.

Definição A.1. Seja $(G, +)$ um grupo abeliano. Denote por e seu elemento neutro, e $-g$ o oposto de $g \in G$. Como é usual, denotamos para cada $n \in \mathbb{Z}$ e cada $g \in G$ o elemento $ng \in G$ definido recursivamente por $0g = e$, $(n+1)g = ng + g$ para $n \in \mathbb{N}$ e $ng = -((-n)g)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ negativo; de forma que para todos $n, m \in \mathbb{Z}$, e $g, h \in G$, $(n+m)g = ng + mg$, $(nm)g = n(mg)$ e $n(g+h) = ng + nh$. Denotamos a ordem de um elemento g por $O(g)$, caso seja finita.

Fixada tal notação, diz-se que G é um grupo *divisível* se para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $a \in G$ existe $x \in G$ tal que $nx = a$. Equivalentemente, se para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que $nG = G$.

Lembramos que dado um primo p , G é um p -grupo se a ordem de todo elemento é uma potência de p .

Lema A.2. *Seja G um grupo abeliano.*

- (a) *Se para todo p primo, $pG = G$, então G é divisível.*
- (b) *Se G é um p -grupo, então G é divisível se e somente se $pG = G$.*
- (c) *Uma soma direta $\sum_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ é divisível se e somente se cada G_λ for divisível.*
- (d) *Se $f : G \rightarrow H$ é um homomorfismo sobrejetor, e G é divisível, então H é divisível.*

Demonstração. (a): Seja $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, $n = p_1 \dots p_k$ para certos primos $p_1, \dots, p_k$ (com repetição se necessário). Um argumento indutivo em n mostra que $nG = (p_1 \dots p_{k-1})(p_k G) = (p_1 \dots p_{k-1})G = G$.

(b): O “somente se” é óbvio. Suponha $pG = G$. Devido a (a), basta ver que $qG = G$ para todos q primos distintos de p . Sejam $q \neq p$ primo e $a \in G$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $p^n a = e$. Como

$\text{mdc}(p^n, q) = 1$, tome $s, t \in \mathbb{Z}$ tais que $sp^n + tq = 1$. Temos então: $a = 1a = (sp^n + tq)a = sp^n a + tqa = se + tqa = e + tqa = tqa = q(ta)$, de forma que $a \in qG$.

(c): Se $\sum_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ é divisível, dados $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in \Lambda$ e $a \in G_\mu \setminus \{e\}$, como $a \in \sum_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$, então existe $x \in \sum_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ tal que $nx = a$. Tome $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \Lambda$ tais que $x = x_{\lambda_1} + \dots + x_{\lambda_r}$ com $x_{\lambda_j} \in G_{\lambda_j} \setminus \{e\}$. Temos que $nx_{\lambda_1} + \dots + nx_{\lambda_r} = a$. Portanto $r = 1$, $\lambda_1 = \mu$ e assim $nx_\mu = a$ com $x_\mu \in G_\mu$.

Por outro lado se cada G_λ é divisível, dados $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \Lambda$ e $a_{\lambda_j} \in G_{\lambda_j}$, e $n \in \mathbb{N}$, existem $x_{\lambda_j} \in G_{\lambda_j}$ tais que $nx_{\lambda_j} = a_{\lambda_j}$, e assim $n(x_{\lambda_1} + \dots + x_{\lambda_r}) = a_{\lambda_1} + \dots + a_{\lambda_r}$ (note que não usamos neste caso que a soma é direta).

(d): Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $h \in H$. Tome $g \in G$ tal que $f(g) = h$, e tome $x \in G$ tal que $nx = g$. Temos então que $h = f(g) = f(nx) = nf(x)$. ■

Agora que sabemos que somas diretas e quocientes de grupos divisíveis são divisíveis, e usando o evidente fato de que $(\mathbb{Q}, +)$ é divisível, temos o seguinte resultado:

Teorema A.3. *Todo grupo abeliano G pode ser imerso em um grupo divisível.*

Demonstração. Todo grupo abeliano G é a imagem homomorfa de um grupo abeliano livre F . Logo, para algum $N < F$, $G \cong F/N$. Note agora que, sendo $\{a_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ o alfabeto de F , $F = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle a_\lambda \rangle$, em que $\langle a_\lambda \rangle$ é o grupo abeliano livre sobre um gerador - e portanto isomorfo a $\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}$ está imerso em $\mathbb{Q}$, que é divisível. Logo F está imerso na soma direta externa de Λ cópias de $\mathbb{Q}$ - chamemo-la de D .

Segue que $G \cong F/N < D/N$, e D/N é divisível. ■

Teorema A.4. *Sejam H subgrupo de G grupo abeliano e D um grupo divisível. Então todo homomorfismo $h : H \rightarrow D$ possui uma extensão $\tilde{h} : G \rightarrow D$.*

Demonstração. Aplicaremos o Lema de Zorn. Dados $H < U, U' < G$ e $f : U \rightarrow D$, $f' : U' \rightarrow D$ extensões de h , definimos $(U, f) \leq (U', f')$ se e só se $U \subset U'$ e f' for uma extensão de f . Dada $\mathcal{C}$ cadeia, defina $V = \bigcup_{(U,f) \in \mathcal{C}} U$ e $F = \bigcup_{(U,f) \in \mathcal{C}} f$; vale que é um limitante superior para $\mathcal{C}$. Logo podemos aplicar o Lema de Zorn e tomar (V, F) maximal. Provaremos então que $V = G$.

Suponha que $g \in G \setminus V$. Caso não exista $n \in \mathbb{N}$ tal que $ng \in V$, simplesmente tome $x \in V$ qualquer e defina $F' : \langle V, g \rangle \rightarrow D$ por $F'(a + tg) = F(a) + tx$ para todo $a \in V$ e $t \in \mathbb{Z}$; temos que F' é um homomorfismo.

Caso exista $n \in \mathbb{N}$ tal que $ng \in V$, tome n mínimo com tal propriedade. Tome $x \in D$ tal que $nx = F(ng)$. Defina então $F' : \langle V, g \rangle \rightarrow D$ por $F'(a + tg) = F(a) + tx$ para todo $0 \leq t < n$. Segue que F' é um homomorfismo.

Em ambos os casos, teríamos que (V, F) não seria maximal, uma contradição. Portanto, $V = G$ e definimos $\tilde{h} = F$. ■

Definição A.5. Seja G um grupo abeliano. Um *sistema de equações (lineares)* em G é um conjunto de equações do tipo $n_{\nu,1}x_{\lambda_{\nu,1}} + \cdots + n_{\nu,k_{\nu}}x_{\lambda_{\nu,k_{\nu}}} = a_{\nu}$, em que $\nu \in \mathbb{N}$ conjunto indexador qualquer, $k_{\nu} \in \mathbb{N}$, $a_{\nu} \in G$, $n_{\nu,i} \in \mathbb{N}$, e $x_{\lambda_{\nu,i}} \in \{x_{\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$, um conjunto de incógnitas.

Uma condição conhecidamente necessária para que o sistema de equações tenha solução (esta noção será formalizada abaixo) é que, sempre que uma combinação linear dos lados esquerdos de equações resultar em 0, então a combinação linear correspondente dos lados direitos também resulta em 0 - isto é, na identidade de G . Mais formalmente, considere X o grupo abeliano livre sobre o alfabeto $\{x_{\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$ e Y o subgrupo de X gerado pelos elementos $l_{\nu}(x) = n_{\nu,1}x_{\lambda_{\nu,1}} + \cdots + n_{\nu,k_{\nu}}x_{\lambda_{\nu,k_{\nu}}}$, $\nu \in \mathbb{N}$. A condição de que uma combinação linear dos lados esquerdos de equações que resulta em 0 corresponde a uma combinação linear dos lados direitos que resulta na identidade de G é apenas uma forma (equivalente) de dizer que a função $l_{\nu}(x) \mapsto a_{\nu}$ induz um homomorfismo $f : Y \rightarrow G$. Isso nos leva a definir:

Definição A.6. Seja G um grupo abeliano e $n_{\nu,1}x_{\lambda_{\nu,1}} + \cdots + n_{\nu,k_{\nu}}x_{\lambda_{\nu,k_{\nu}}} = a_{\nu}$, em que $\nu \in \mathbb{N}$, $k_{\nu} \in \mathbb{N}$, $a_{\nu} \in G$, $n_{\nu,i} \in \mathbb{N}$, e $x_{\lambda_{\nu,i}} \in \{x_{\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$, um sistema de equações. Denotando $l_{\nu}(x) = n_{\nu,1}x_{\lambda_{\nu,1}} + \cdots + n_{\nu,k_{\nu}}x_{\lambda_{\nu,k_{\nu}}}$ para cada $\nu \in \mathbb{N}$, dizemos que o sistema é *compatível* se a função $l_{\nu}(x) \mapsto a_{\nu}$ induz um homomorfismo $f : Y \rightarrow G$, em que Y é o subgrupo, do grupo livre sobre $\{x_{\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$, gerado por $\{l_{\nu}(x) : \nu \in \mathbb{N}\}$.

Definição A.7. Seja G um grupo abeliano e $n_{\nu,1}x_{\lambda_{\nu,1}} + \cdots + n_{\nu,k_{\nu}}x_{\lambda_{\nu,k_{\nu}}} = a_{\nu}$, em que $\nu \in \mathbb{N}$, $k_{\nu} \in \mathbb{N}$, $a_{\nu} \in G$, $n_{\nu,i} \in \mathbb{N}$, e $x_{\lambda_{\nu,i}} \in \{x_{\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$, um sistema de equações. Uma *solução* para o sistema de equações é uma família indexada $\{g_{\lambda} : \lambda \in \Lambda\} \subset G$ que torna as equações verdadeiras – ou seja, tal que para cada $\nu \in \mathbb{N}$, $n_{\nu,1}g_{\lambda_{\nu,1}} + \cdots + n_{\nu,k_{\nu}}g_{\lambda_{\nu,k_{\nu}}} = a_{\nu}$.

Note que uma solução $\{g_{\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$ induz a função $x_{\lambda} \mapsto g_{\lambda}$, e esta induz a um homomorfismo g do grupo livre X em G . Portanto, como anunciado acima, se o sistema de equações possui solução $\{g_{\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$, claramente ele é compatível, pois a função $l_{\nu}(x) \mapsto a_{\nu}$ é uma restrição de g , do que $g|_Y$ é um homomorfismo. Por outro lado, dado um sistema compatível de equações e $f : Y \rightarrow G$ seu homomorfismo induzido, uma extensão f a X , $g : X \rightarrow G$, induziria uma solução do sistema definindo $g_{\lambda} = g(x_{\lambda})$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Além do que, diferentes extensões de f induzem diferentes soluções (pois diferentes homomorfismos sobre X não podem assumir os mesmos valores sobre todos os x_{λ}). Temos então:

Lema A.8. *Seja G um grupo abeliano e $n_{\nu,1}x_{\lambda_{\nu,1}} + \cdots + n_{\nu,k_{\nu}}x_{\lambda_{\nu,k_{\nu}}} = a_{\nu}$, em que $\nu \in \mathbb{N}$, $k_{\nu} \in \mathbb{N}$, $a_{\nu} \in G$, $n_{\nu,i} \in \mathbb{N}$, e $x_{\lambda_{\nu,i}} \in \{x_{\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$, um sistema de equações compatível. Seja $f : Y \rightarrow G$ seu homomorfismo induzido. O sistema é solúvel (ou seja, possui solução) se e somente se existe $g : X \rightarrow G$ extensão de f , caso em que $\{g(x_{\lambda}) : \lambda \in \Lambda\}$ é solução. Além disso, diferentes extensões de f correspondem a diferentes soluções.*

Com estas observações, podemos enunciar e provar:

Teorema A.9. *Todo sistema de equações compatível sobre um grupo divisível D possui solução em D .*

Demonstração. Um sistema de equações compatível induz o homomorfismo $f : Y \rightarrow D$ (de acordo com as notações acima). Pelo Teorema A.4, f admite uma extensão $g : X \rightarrow D$. Pelo Lema acima, isso implica que o sistema possui uma solução. ■

Veremos agora que todo subgrupo divisível é um somando direto de qualquer grupo em que esteja imerso.

Teorema A.10. *Seja G grupo abeliano, e seja D um subgrupo divisível. Então existe B subgrupo de G tal que $D \oplus B = G$.*

Demonstração. Tome $\{g_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ tal que $G = \langle D, \{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \rangle$ ($\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ pode ser pensado como uma família de representantes de um conjunto gerador de G/D). Considere todas as combinações lineares de elementos de $\{g_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ que resultam em elementos de D , e as liste da seguinte forma: $n_{\nu,1}g_{\lambda_{\nu,1}} + \cdots + n_{\nu,k_\nu}g_{\lambda_{\nu,k_\nu}} = a_\nu$, em que $\nu \in \mathbb{N}$, $k_\nu \in \mathbb{N}$, $a_\nu \in D$, $n_{\nu,i} \in \mathbb{N}$, e $g_{\lambda_{\nu,i}} \in \{g_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Afirmamos então que o sistema de equações $n_{\nu,1}x_{\lambda_{\nu,1}} + \cdots + n_{\nu,k_\nu}x_{\lambda_{\nu,k_\nu}} = a_\nu$, em que $\nu \in \mathbb{N}$, $k_\nu \in \mathbb{N}$, $a_\nu \in G$, $n_{\nu,i} \in \mathbb{N}$, e $x_{\lambda_{\nu,i}} \in \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é compatível. Como antes, denote, para cada $\nu \in \mathbb{N}$, $l_\nu(x) = n_{\nu,1}x_{\lambda_{\nu,1}} + \cdots + n_{\nu,k_\nu}x_{\lambda_{\nu,k_\nu}}$, e similarmente denote $l_\nu(g) = n_{\nu,1}g_{\lambda_{\nu,1}} + \cdots + n_{\nu,k_\nu}g_{\lambda_{\nu,k_\nu}}$. A função $x_\lambda \mapsto g_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, determina um homomorfismo $f : X \rightarrow G$ (X é o grupo livre sobre $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$). Dessa forma, para cada $\nu \in \mathbb{N}$, $f(l_\nu(x)) = l_\nu(g)$. Portanto, se para algum $N' \subset \mathbb{N}$ finito, $\sum_{\nu \in N'} l_\nu(x) = e_X$, então $e_G = f(e_X) = f(\sum_{\nu \in N'} l_\nu(x)) = \sum_{\nu \in N'} f(l_\nu(x)) = \sum_{\nu \in N'} l_\nu(g) = \sum_{\nu \in N'} a_\nu$; de forma que o sistema é de fato compatível. Assim, pelo Teorema A.9 acima, o sistema admite uma solução em D – denotemo-la por $\{h_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Defina $B = \langle \{g_\lambda - h_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \rangle$. Vale que $G = \langle D, B \rangle$. Para ver que $G = D \oplus B$, resta ver que $D \cap B = \{e_G\}$. Suponha então $\Lambda' \subset \Lambda$ finito e $\{s_\lambda : \lambda \in \Lambda'\} \subset \mathbb{Z}$ tais que $\sum_{\lambda \in \Lambda'} s_\lambda(g_\lambda - h_\lambda) \in D$. Temos então que $\sum_{\lambda \in \Lambda'} s_\lambda g_\lambda =: a \in D$, de forma que $\sum_{\lambda \in \Lambda'} s_\lambda x_\lambda = a$ é uma das equações do sistema acima, e portanto vale que $\sum_{\lambda \in \Lambda'} s_\lambda h_\lambda = a$. Segue que $\sum_{\lambda \in \Lambda'} s_\lambda(g_\lambda - h_\lambda) = e_G$, como queríamos. ■

Como foi usado acima, $\mathbb{Q}$ é um grupo divisível, assim como, por exemplo, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. $\mathbb{Z}$, por exemplo, é um claro exemplo de grupo não-divisível. Uma classe de grupos divisíveis que nos será relevante são os grupos quasicíclicos. Existem algumas formas de apresentar esse grupo, a usada neste texto será a seguinte: dado p primo, o grupo p -quasicíclico é $Z(p^\infty) = \left(\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]\right) / \mathbb{Z}$ com a operação de adição no quociente, sendo que $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$ é o anel dos racionais p -ádicos, ou seja,

$\left\{ \frac{m}{p^n} : m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{N} \right\}$. Costumeiramente, iremos denotar os elementos de $Z(p^\infty)$ pelos seus representantes em $[0, 1)$, lembrando que o quociente é um “descarte” da parte inteira – por exemplo, temos que $\frac{p-1}{p} + \frac{p-1}{p} = \frac{2p-2}{p} = \frac{p}{p} + \frac{p-2}{p} = \frac{p-2}{p}$.

Claramente temos as seguintes relações: $p\left(\frac{1}{p}\right) = 1$ e $p\left(\frac{1}{p^n}\right) = \frac{1}{p^{n-1}}$ para todo $n > 1$. De fato, estas relações descrevem o grupo, isto é, o grupo p -quasicíclico possui uma descrição por geradores e relações $Z(p^\infty) = \langle g_1, g_2, g_3, \dots | pg_1 = e, pg_2 = g_1, pg_3 = g_2, \dots \rangle$. Com esta descrição, qualquer elemento de $Z(p^\infty) \setminus \{e\}$ é da forma mg_n com $m < p^n$.

O grupo p -quasicíclico é um p -grupo, logo usaremos o Lema A.2(b) para ver que é divisível. Seja $\frac{m}{p^n} \in Z(p^\infty)$. Vale que $p\left(\frac{m}{p^{n+1}}\right) = \frac{m}{p^n}$, e portanto $Z(p^\infty)$ é divisível.

Pelo Lema A.2(c), qualquer soma direta de racionais e grupos quasicíclicos é divisível. De fato, o teorema que será provado aqui diz que estes são os únicos grupos divisíveis possíveis. Porém, para prová-lo, precisaremos ainda de duas outras noções sobre grupos abelianos: torsão e independência.

Definição A.11. Seja G um grupo abeliano. Dizemos que $g \in G$ é *elemento de torsão* se sua ordem for finita. Dizemos que $T < G$ é *subgrupo de torsão* se todos os seus elementos forem de torsão. Dizemos que $F < G$ é *livre de torsão* se nenhum elemento além de e for de torsão.

Lema A.12. *Seja G um grupo abeliano. Então o conjunto T de todos os elementos de torsão de G é um subgrupo, chamado de subgrupo de torsão maximal. Além disso, se G for divisível, então T também o é.*

Demonstração. Dados, $a, b \in T$, sejam $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $na = mb = e$. Então $nm(a - b) = nma - nmb = e - e = e$. Agora, suponha que G seja divisível, e seja $r \in \mathbb{N}$. Tome $x \in G$ tal que $rx = a$. Então $nrx = na = e$, logo $x \in T$, o que mostra que T é divisível. ■

Definição A.13. Seja T um grupo de torsão. Então, para cada p primo, definimos $T_p = \{g \in T : \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } O(g) = p^n\}$ a p -componente de T .

A razão para o nome p -componente é elucidada pelo próximo lema.

Lema A.14. *Seja T um grupo de torsão. Então $T = \bigoplus_{p \text{ primo}} T_p$.*

Demonstração. Obviamente, $T_p \cap T_{p'} = \{e\}$ se $p \neq p'$. E dados $a, b \in T_p$, sejam $n, n' \in \mathbb{N}$ tais que $p^n a = p^{n'} b = e$. Sem perda de generalidade, $n' < n$, logo $p^n(a - b) = p^n a - p^n b = e - e = e$, de modo que cada T_p é de fato um subgrupo. Resta ver que eles geram T . Seja $a \in T$ qualquer, e tome $r \in \mathbb{N}$ tal que $ra = e$. Para alguns primos $p_1, \dots, p_k$, e alguns $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, $r = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$. Defina $r_i = \frac{r}{p_i^{n_i}}$. Note que $\text{mdc}(r_1, \dots, r_k) = 1$, logo tome $s_1, \dots, s_k \in \mathbb{Z}$ tais que $s_1 r_1 + \dots + s_k r_k = 1$. Temos então $a = (s_1 r_1 + \dots + s_k r_k)a = s_1 r_1 a + \dots + s_k r_k a$, em que, para cada i , $p_i^{n_i} s_i r_i a = s_i r_i p_i^{n_i} a = s_i r a = s_i e = e$, de forma que $s_i r_i a \in T_{p_i}$. ■

Definição A.15. Seja G um grupo abeliano. Dizemos que $L \subset G$ é um conjunto *independente* se sempre que $a_1, \dots, a_k \in L$, $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$ e $n_1 a_1 + \dots + n_k a_k = e$, então $n_1 a_1 = \dots = n_k a_k = e$.

Claramente, L é independente se e somente se cada subconjunto finito de L é independente. Assim é fácil ver que a união de qualquer cadeia de conjuntos independentes é também independente. Ou seja, o Lema de Zorn garante que todo grupo não-trivial possui um conjunto independente maximal.

Lema A.16. *Seja T um p -grupo. Então dado conjunto independente maximal $\{b_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, pode-se obter um conjunto independente maximal $\{a_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ tal que $O(a_\lambda) = p$ para todo $\lambda \in \Lambda$.*

Demonstração. Para cada $\lambda \in \Lambda$, se $O(b_\lambda) = p$, defina $a_\lambda = b_\lambda$. Caso $O(b_\lambda) = p^n$ com $n > 1$, defina $a_\lambda = p^{n-1} b_\lambda$. Claramente $O(a_\lambda) = p$ para cada λ . Suponha que $m_1 a_{\lambda_1} + \dots + m_k a_{\lambda_k} = e$. Tome $n_1, \dots, n_k$ tais que $a_{\lambda_i} = p^{n_i-1} b_{\lambda_i}$. Temos então que $m_1 p^{n_1-1} b_{\lambda_1} + \dots + m_k p^{n_k-1} b_{\lambda_k} = e$, do que segue $m_i p^{n_i-1} b_{\lambda_i} = e$ para cada i , ou seja, $m_i a_{\lambda_i} = e$.

Dessa forma, $\{a_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é independente. Para ver que é maximal, seja $g \in T$. Como $\{b_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \cup \{g\}$ não é independente, tome $m, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{Z}$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \Lambda$ tais que $mg + m_1 b_{\lambda_1} + \dots + m_k b_{\lambda_k} = e$ mas $mg \neq e$ ou $m_i b_{\lambda_i} \neq e$ para algum i . Caso $mg = e$ teríamos uma violação da independência de $\{b_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, logo $mg \neq e$. Como $mg \neq e$, então $I := \{i \in \{1, \dots, k\} : m_i b_{\lambda_i} \neq e\} \neq \emptyset$. Para cada $i \in I$, tome $r_i \in \mathbb{Z}$ e $s_i \in \omega$ tais que $m_i = r_i p^{s_i}$ com $p \nmid r_i$. Tome n_i tais que $p^{n_i-1} b_{\lambda_i} = a_{\lambda_i}$ para cada $i \in I$ e note que $s_i \leq n_i - 1$. Defina $t_i = n_i - 1 - s_i$ e defina $J = \{j \in I : t_j = \max\{t_i : i \in I\}\}$. Defina $t = \max\{t_i : i \in I\}$, ou seja, $t = t_j$ se e somente se $j \in J$, e $t > t_i$ para todo $i \in I \setminus J$. Assim, note que $p^t m_j b_{\lambda_j} = r_j a_{\lambda_j}$ caso $j \in J$ e $p^t m_i b_{\lambda_i} = e$ caso $i \in \{1, \dots, k\} \setminus J$. Segue que $e = p^t (mg + m_1 b_{\lambda_1} + \dots + m_k b_{\lambda_k}) = p^t mg + \sum_{j \in J} r_j a_{\lambda_j}$. Como $p \nmid r_j$, então $r_j a_{\lambda_j} \neq e$ para todo $j \in J$, o que mostra que $\{a_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \cup \{g\}$ não é independente. ■

Teorema A.17. *Todo grupo divisível é a soma direta de grupos quasicíclicos e de cópias dos racionais.*

Demonstração. Seja D um grupo divisível, e seja T seu subgrupo de torsão maximal. Pelo Lema A.12, T é divisível, logo pelo Teorema A.10 T é um somando direto de D . Seja $F < D$ tal que $D = T \oplus F$. Como $T \cap F = \{e\}$, F é livre de torsão; e como é somando direto de D , F também é divisível. Usando o Lema A.14 temos que cada T_p , para p primo, também é divisível. Mostraremos então que F é uma soma direta de cópias de $\mathbb{Q}$ e que cada T_p é uma soma direta de cópias de $Z(p^\infty)$.

Primeiramente, tome $\{a_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ conjunto independente maximal em T_p . Pelo Lema logo acima, podemos tomá-lo de forma que $O(a_\lambda) = p$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Fixe λ . Pela divisibilidade de T_p , podemos recursivamente construir $(a_{\lambda,n})_{n \in \mathbb{N}}$ de forma que $a_{\lambda,1} = a_\lambda$ e $a_{\lambda,n} = p a_{\lambda,n+1}$ para

todo $n \in \mathbb{N}$ – o que implica que a sequência é injetora pois estamos em um p -grupo. Assim, como $pa_\lambda = e$, a_λ pertence a um subgrupo p -quasicíclico de T_p , gerado por $\{a_{\lambda,n} : n \in \mathbb{N}\}$; denotemo-lo Q_λ . Vejamos que $\{Q_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ gera uma soma direta. Seja $\mu \in \Lambda$ e suponha $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \Lambda$, $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{Z}$, e $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ tais que $m_1 a_{\lambda_1, n_1} + \dots + m_k a_{\lambda_k, n_k} \in Q_\mu \setminus \{e\}$. Tome $n \in \mathbb{N}$ e $m < p^n$ tais que $m_1 a_{\lambda_1, n_1} + \dots + m_k a_{\lambda_k, n_k} = ma_{\mu, n}$. Como $ma_{\mu, n} \neq e$, então $I = \{i \in \{1, \dots, k\} : m_i a_{\lambda_i, n_i} \neq e\} \neq \emptyset$. Para cada $i \in I$, tome $r_i \in \mathbb{Z}$ e $s_i \in \omega$ tais que $m_i = r_i p^{s_i}$ com $p \nmid r_i$, e tome $r \in \mathbb{Z}$ e $s \in \omega$ tais que $m = rp^s$ com $p \nmid r$. Defina $t_i = n_i - 1 - s_i$ e $t' = n - 1 - s$; e defina $J = \{j \in I : t_j = \max(\{t_i : i \in I\} \cup \{t'\})\}$. Defina $t = \max(\{t_i : i \in I\} \cup \{t'\})$, ou seja, $t = t_j$ se e somente se $j \in J$, e $t > t_i$ para todo $i \in I \setminus J$. Assim, note que $p^t m_j a_{\lambda_j, n_j} = r_j a_{\lambda_j}$ caso $j \in J$ e $p^t m_i a_{\lambda_i, n_i} = e$ caso $i \in \{1, \dots, k\} \setminus J$. Segue que $p^t ma_{\mu, n} = p^t (m_1 a_{\lambda_1, n_1} + \dots + m_k a_{\lambda_k, n_k}) = \sum_{j \in J} r_j a_{\lambda_j}$. Temos dois casos: se $t' < t$, então $p^t ma_{\mu, n} = e$; caso $t' = t$, $p^t ma_{\mu, n} = ra_\mu$; em ambos os casos, temos que a equação acima é uma violação da independência de $\{a_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$.

Portanto, temos $Q_p := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda < T_p$. Como Q_p é divisível, $T_p = Q_p \oplus S_p$; porém Q_p contém um conjunto independente maximal, o que implica que $S_p = \{e\}$, e assim $Q_p = T_p$, como queríamos.

Agora, vejamos que F é uma soma direta de cópias de $\mathbb{Q}$. Tome $\{b_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ conjunto independente maximal em F . Como F é livre de torsão, então para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $\lambda \in \Lambda$ existe um único $x \in F$ tal que $nx = b_\lambda$; assim, podemos imergir cada b_λ em uma cópia de $\mathbb{Q}$, denotando-a por $B_\lambda = \{\frac{mb_\lambda}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$. Vejamos que os B_λ geram uma soma direta. Seja $\mu \in \Lambda$ e suponha $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \Lambda$, $m, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{Z}$, e $n, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ tais que $\frac{m_1 b_{\lambda_1}}{n_1} + \dots + \frac{m_k b_{\lambda_k}}{n_k} = \frac{mb_\mu}{n}$. Seja $r = n \cdot n_1 \cdot \dots \cdot n_k$ e defina $r' = \frac{r}{n}$ e $r_i = \frac{r}{n_i}$. Temos então que $r' mb_\mu = r \frac{mb_\mu}{n} = r(\frac{m_1 b_{\lambda_1}}{n_1} + \dots + \frac{m_k b_{\lambda_k}}{n_k}) = r_1 m_1 b_{\lambda_1} + \dots + r_k m_k b_{\lambda_k}$, o que viola a independência de $\{b_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Assim, temos que $B := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda < F$, e B é divisível, logo $F = B \oplus S$; porém como B contém um conjunto independente maximal, devemos ter que $S = \{e\}$, e assim $F = B$, como desejado. ■

Por fim, temos:

Teorema A.18. *Seja $(H, +)$ um grupo divisível e seja $A \subset H$ enumerável. Então existe $D < H$ divisível enumerável tal que $A \subset D$.*

Demonstração. Pelo Teorema A.17, assumimos que $H = \bigoplus_{\alpha \in I} K_\alpha$, em que cada K_α é isomorfo a $\mathbb{Q}$ ou a um quasicíclico. Considere $J = \{\alpha \in I : \text{existe } x \in A \text{ tal que } x_\alpha \neq e\}$. Como A é enumerável, J é uma união enumerável de conjuntos finitos, logo enumerável. Defina $D = \{x \in H : \text{para todo } \alpha \in I \setminus J, x_\alpha = e\}$. Então $D \cong \bigoplus_{\alpha \in J} K_\alpha$, logo é divisível, enumerável, e $A \subset D$. ■

Referências Bibliográficas

- [1] Neil Hindman, Dona Strauss, *Algebra in the Stone-Čech compactification: theory and applications* (De Gruyter expositions in mathematics: 27) - Walter de Gruyter; Berlin; New York (1998) (1st ed.)
- [2] Neil Hindman, Dona Strauss, *Algebra in the Stone-Čech compactification: theory and applications* - Walter de Gruyter; Berlin; New York (2012) (2nd ed.)
- [3] Neil Hindman, *Recent results on the algebraic structure of βS* , in "Papers on General Topology and Applications", S. Andima et. al. eds., Annals of the New York Academy of Sciences **767** (1995), 73-84
- [4] Neil Hindman, *The ideal structure of the space of κ -uniform ultrafilters on a discrete semigroup*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, **16** (1985) 685-701
- [5] Vitaly Bergelson, Neil Hindman, *Nonmetrizable topological dynamics and Ramsey Theory*, Transactions of the American Mathematical Society, **320** (1990), 293-320
- [6] Neil Hindman, *Sums equal to products in $\beta\mathbb{N}$* , Semigroup Forum **21** (1980), 221-255
- [7] Dona Strauss, *$\mathbb{N}^*$ does not contain an algebraic and topological copy of $\beta\mathbb{N}$* , Journal of the London Mathematical Society, **46** (1992), 463-470
- [8] Dona Strauss, *Semigroup Structures in $\beta\mathbb{N}$* , Semigroup Forum, **44** (1992), 238-244
- [9] Neil Hindman, Dona Strauss, *The scarcity of products in $\beta S \setminus S$* , Topology and Its Applications, **220** (2017), 50-64
- [10] László Fuchs, *Abelian Groups*, Pergamon Press, New York-London-Paris, 1960
- [11] Neil Hindman, Dona Strauss, *Discrete Groups in $\beta\mathbb{N}$* , Topology and Its Applications, **154** (2007), 2099-2103
- [12] Yevhen Zelenyuk, *Grupos topológicos com semigrupos finitos de ultrafiltros* (Russo), Matematychni Studii **6** (1996), 41-52

- [13] Neil Hindman, Dona Strauss, *Chains of idempotents in $\beta\mathbb{N}$* , Proceedings of the American Mathematical Society, **123** (1995), 3881-3888
- [14] Dona Strauss, *Ideals and commutativity in $\beta\mathbb{N}$* , Topology and its Applications **60** (1994), 281-293