**Fórmulas explícitas
em
teoria analítica de números**

Danilo Elias Castro

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Paulo Agozzini Martin

São Paulo, novembro de 2012

Fórmulas explícitas em teoria analítica de números

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 10/10/2012. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Paulo Agozzini Martin - IME-USP
- Prof. Dr. Severino Toscano do Rêgo Melo - IME-USP
- Prof. Dr. Eduardo Tengan - ICMC-USP

Resumo

Castro, D. E. **Fórmulas Explícitas em Teoria Analítica de Números**. 2012. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

Em Teoria Analítica de Números, a expressão "Fórmula Explícita" se refere a uma igualdade entre, por um lado, uma soma de alguma função aritmética feita sobre todos os primos e, por outro lado, uma soma envolvendo os zeros não triviais da função zeta de Riemann. Essa igualdade não é habitual em Teoria Analítica de Números, que trata principalmente de aproximações assintóticas de funções aritméticas e não de fórmulas exatas. A expressão se originou do trabalho seminal de Riemann, de 1859, onde aparece uma expressão exata para a função $\pi(x)$, que conta o número de primos que não excedem x . A prova do Teorema dos Números Primos, de Hadamard, também se baseia numa fórmula explícita de $\psi(x)$ (função de Tschebycheff). Mais recentemente, o trabalho de André Weil reforçou o interesse em compreender-se melhor a natureza de tais fórmulas. Neste trabalho, apresentaremos a fórmula explícita de Riemann-von Mangoldt, a de Delsarte e um caso particular da fórmula explícita de Weil.

Palavras-chave: Teoria analítica dos números, Teorema dos números primos, Hipótese de Riemann, Fórmulas Explícitas, Função Zeta de Riemann.

Abstract

Castro, D. E. **Explicit Formula in Analytic Theory of Numbers**. 2012. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

In the field of Analytic Theory of Numbers, the expression "Explicit Formula" refers to an equality between, on one hand, the sum of some arithmetic function over all primes and, on the other, a sum over the non-trivial zeros of Riemann's zeta function. This equality is not common in the analytic theory of numbers, that deals mainly with asymptotic approximations of arithmetic functions, and not of exact formulas. The expression originated of Riemann's seminal work, of 1859, in which we see an exact expression for the function $\pi(x)$, that counts the number of primes that do not exceed x . The proof of the Prime Number Theorem, by Hadamard, is also based on an explicit formula of $\psi(x)$ (Tschebycheff's function). More recently, the work of André Weil increased the interest in better comprehending the nature of such formulas. In this work, we shall present the Riemann-von Mangoldt formula, Delsarte's explicit formula, and one particular case of Weil's explicit formula.

Keywords: Analytic Theory of Numbers, Prime Number Theorem, Riemann's hypothesis, Explicit Formula, Riemann's Zeta Function.

Sumário

Resumo	3
Abstract	5
Lista de Símbolos	9
1 Introdução	11
2 Funções Inteiras	17
2.1 Produtos Infinitos de Números	17
2.2 Produtos de Funções	25
2.3 Fatoração de Weierstrass	31
2.4 Fórmula de Jensen	34
2.5 Ordem de uma Função Inteira	37
2.6 O Expoente de Convergência das Raízes de uma Função Inteira	42
2.7 Teorema de Fatoração de Hadamard	48
3 A Função Zeta de Riemann	61
3.1 A Função Gamma	61
3.2 A Fórmula Limite de Euler	69
3.3 A Função Zeta de Riemann	81
3.4 A Função Theta de Jacobi	84
3.5 A Função Zeta Adélica	85
3.6 A Função $\xi(s)$	96
3.7 O Teorema de Von Mangoldt	115
4 Fórmulas Explícitas	135
4.1 O Trabalho de Riemann	135
4.1.1 A Função Zeta	136

4.1.2	A Equação Funcional - 1ª Prova	143
4.1.3	Segunda Prova da Equação Funcional	149
4.1.4	A Hipótese de Riemann	150
4.1.5	A Fórmula Explícita de Riemann	152
4.2	O Trabalho de Von Mangoldt	158
4.2.1	Introdução	158
4.2.2	Estimativa da Integral sobre γ	163
4.2.3	A Fórmula Explícita de Von Mangoldt	172
4.2.4	A Função $\psi_1(x)$	174
4.3	A Fórmula Explícita de Delsarte	182
4.3.1	Introdução	182
4.3.2	Cálculo da Integral	185
4.3.3	Fórmula Explícita de Delsarte	190
4.4	A Fórmula de Weil	191
4.4.1	A Fórmula Explícita de Weil	191
4.4.2	Alguns Resultados Importantes	195
4.4.3	Prova do Teorema	210
4.4.4	Observações	222
5	Apêndice	225
5.1	Fórmulas de Euler	225
5.2	Fórmula de Stirling	231
5.3	Séries de Dirichlet	235
5.4	Fórmula de Inversão de Fourier	248

Lista de Símbolos

$\mathbb{R}^+$	Conjunto dos números reais não negativos	20
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos	21
$\log$	É definido de modo a coincidir com o logaritmo usual em $\mathbb{R}^+$	21
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais	22
Ω	Subconjunto aberto dos números complexos	25
$\mathcal{C}^o$	Classe das funções contínuas	25
$f _K$	Função f restrita ao conjunto K	25
$\mathcal{H}(\Omega)$	Classe das funções holomorfas em Ω	25
$ f(x) _K$	Denota o supremo do conjunto $\{ f(x) : x \in K\}$	27
$E_k(z)$	$\begin{cases} 1 - z, & \text{se } k = 0 \\ (1 - z) \cdot e^{z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots + \frac{z^k}{k}}, & \text{se } k \geq 1. \end{cases}$	32
$\Re(s)$	Denota a parte real do número complexo s	50
$O(g(z))$	Classe de funções $f(z)$ tais que $ f(z) \leq K \cdot g(z) $, para $ z > R$..	101
$\mathcal{C}^1$	Classe das funções com primeira derivada contínua	115
$\Im(s)$	Denota a parte imaginária do número complexo s	122
$o(g(x))$	Classe de funções $f(x)$ tais que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$	181

Capítulo 1

Introdução

Ce sujet se prête à un grand nombre d'exercices, et les "formules explicites" de la théorie classique des nombres premiers en fournissent un qui est assez simple (si on en laisse de côté les subtilités)...

André Weil¹

Denomina-se número primo ***p*** um número inteiro divisível apenas por ± 1 e $\pm p$. A tabela abaixo mostra os cem primeiros números primos.

Primos									
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541

¹A. Weil, "Sur les formules explicites de la théorie des nombres premiers", OEUVRES SCIENTIFIQUES, Collected Papers, vol. II, Springer-Verlag, 2009, pp. 526-571

Desde os "Elementos" de Euclides (300 a.c.), sabemos que todo número inteiro n pode ser decomposto de maneira única em fatores primos, $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$, de modo que:

$$n = \pm p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}.$$

Euclides também prova que os primos são infinitos, fato não óbvio se levarmos em consideração que a densidade dos números primos diminui com o crescimento dos inteiros, como podemos perceber pela tabela acima; em outras palavras, os números primos vão ficando cada vez mais raros.

Em 1737, Euler propôs outro método para mostrar a proposição de Euclides. Essa análise parte da identidade

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x} = \prod_{p: \text{ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^x}\right)^{-1}, \quad (1.1)$$

onde $x > 1$, para mostrar que:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots = \log \log \infty,$$

possivelmente se referindo ao comportamento assintótico da soma dos inversos dos primos. Com isso, além de inferir que os primos são infinitos, Euler também mostrou que os primos são mais densos que os quadrados, pois sabemos que:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots < \infty.$$

Desde então, a distribuição dos números primos foi alvo de intensa investigação, pois, apesar de revelar grande irregularidade local, apresenta um bom comportamento global.

Em 1808, Legendre propôs que $\pi(x)$ vale aproximadamente o mesmo que:

$$\frac{x}{\log x - B}, \quad (1.2)$$

onde $B = 1,08366$ é uma constante sugerida e $\pi(x)$ a função que conta o número de primos que não excedem x .

Antes, por volta de 1790, Gauss relatou que a integral logarítmica

$$li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

é uma boa aproximação para a função $\pi(x)$. Para tanto, Gauss observou, tabelando primos, que a densidade dos números primos era da ordem de $1/\log x$. Em outras palavras,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \cdot \log(x)}{x} = 1 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{li(x)} = 1.$$

Essas afirmações equivalentes são conhecidas hoje como **Teorema dos Números Primos** e ficaram cerca de cem anos sob investigação. Vale comentar que se a afirmação de Euler for verdadeira, então será verdade que:

$$\sum_{p < x} \frac{1}{p} \sim \log \log(x) \sim \int_e^x \frac{dt}{t \cdot \log(t)}$$

Note que:

$$\sum_{p < x} \frac{1}{p} \sim \int_e^x f(t) dt,$$

onde:

$$f(t) = \begin{cases} 1/p, & \text{caso } t \in [p-1, p]; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Além disso, pode-se mostrar que:

$$\int_1^x f(t) dt \sim \int_1^x g(t) dt \Rightarrow \int_1^x t \cdot f(t) dt \sim \int_1^x t \cdot g(t) dt. \quad (1.3)$$

Reunindo as informações acima, mostramos que os “chutes” que apareceram sobre a distribuição da função $\pi(x)$ podem ter sido originados da afirmação de Euler, pois

$$\pi(x) \sim \int_e^x t \cdot f(t) dt \sim \int_e^x \frac{dt}{\log(t)}. \quad (1.4)$$

Na tabela abaixo, apresentamos valores de $\pi(x)$, $\frac{\log x}{x}$ e $li(x)$ para diversos valores de x .

Distribuição dos Primos			
x	$\pi(x)$	$li(x)$	$\frac{x}{\log x}$
10	4	6,16	4,34
100	25	30,12	21,71
1.000	168	177,60	144,76
10.000	1.229	1.246,13	1.085,73
100.000	9.592	9.629,80	8.685,88
1.000.000	78.498	78.627,54	72.382,41
10.000.000	664.579	664.918,4	620.420,68
100.000.000	5.761.455	5.762.209,37	5.428.681,02
1.000.000.000	50.847.534	50.849.234,95	48.254.942,43
10.000.000.000	455.052.511	455.055.614,58	434.294.481,90
100.000.000.000	4.118.054.813	4.118.066.400,62	3.948.131.653,66
1.000.000.000.000	37.607.912.018	37.607.950.280,80	36.191.206.825,27

Além disso, podemos visualizar o comportamento das funções no gráfico abaixo.

Figura 1.1: Comparação entre as aproximações para $\pi(x)$.

Em 1848, Chebyshev apresentou o primeiro resultado teórico sobre o crescimento da função $\pi(x)$ em que introduziu a função $\psi(x)$ dada por:

$$\psi(x) = \sum_{\substack{p^m \leq x \\ p: \text{primo}}} \log p,$$

e mostrou que o teorema dos números primos é equivalente a:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

Por fim, Chebyshev provou que:

$$(0,921) \cdot x \leq \psi(x) \leq (1,105) \cdot x,$$

$$(0,89) \cdot \frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq (1,105) \cdot \frac{x}{\log x},$$

onde $x > R$, para um certo R suficientemente grande.

Em 1859, apesar de não ter fornecido uma solução definitiva ao problema, os métodos apresentados por Riemann em seu influente artigo lançaram frutos para a teoria analítica dos números, análise complexa, teoria das funções etc.

Riemann foi o primeiro a usar a fórmula produto de Euler 1.1 para um número complexo s . Utilizando a teoria das funções analíticas, Riemann encontrou uma continuação analítica para a série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} \tag{1.5}$$

e chamou essa função de $\zeta(s)$.

A fim de provar o teorema dos números primos, Riemann define a função $J(x)$ por:

$$J(x) = \sum_{\substack{p^m \leq x \\ p: \text{primo}}} \frac{1}{m}$$

e exibe sua fórmula explícita para essa função:

$$J(x) = Li(x) - \log 2 - \sum_{n \geq 1} Li(x^{-2n}) - \sum_{\Im \rho > 0} Li(x^\rho) + Li(x^{1-\rho}),$$

onde o lado esquerdo contempla uma soma sobre números primos, e o lado direito uma soma sobre as raízes da função $\zeta(s)$.

Em seu artigo, Riemann não fornece mais do que sugestões para as provas de suas afirmações, e, só após 50 anos, von Mangoldt e Hadamard provaram boa parte de suas conjecturas. O teorema dos números primos foi provado pouco depois por Hadamard e de la Vallée Poussin.

As técnicas utilizadas por Riemann abrem caminho para que outra fórmula explícita seja apresentada por Von Mangoldt, na qual utiliza a função $\psi(x)$ como representante dos números primos. Mostraremos que:

$$\psi(x) = -\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} + x - \sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{1}{2} \cdot \log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right),$$

onde, novamente, o lado direito contém as raízes da função Zeta e o lado esquerdo, uma soma sobre números primos.

Repare que as fórmulas de Riemann e Von Mangoldt não apenas fornecem a ordem de crescimento das funções $J(x)$ e $\psi(x)$, mas incluem uma expressão exata envolvendo tais funções.

As fórmulas explícitas abrem uma nova perspectiva para a compreensão dos números primos e estabelece outro enigma: A relação entre primos e raízes da função Zeta aparece na forma de Fórmula de Poisson.

Este trabalho apresentará as fórmulas explícitas de Riemann, von Mangoldt, Delsarte e Weil, e tem como objetivo prover um material de estudo para aqueles que se interessarem pela teoria analítica dos números. Pressupõe-se que o leitor deste trabalho conheça teoria básica de funções analíticas, ministrada, por exemplo, no curso MAT225 do IME-USP.

Capítulo 2

Funções Inteiras

Este capítulo pretende expor as ferramentas básicas necessárias para o estudo das fórmulas explícitas. Nesse contexto, apresentaremos alguns tópicos da teoria das funções inteiras.

2.1 Produtos Infinitos de Números

Sejam $\{a_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de números complexos e $\{p_n = \prod_{i=1}^n a_i\}$ a sequência dos produtos parciais de fatores a_i . Denotaremos o **produto infinito dos fatores** a_i por $\prod_{i=1}^{\infty} a_i$, ou simplesmente $\prod a_i$.

Definição 2.1.1. O produto infinito $\prod a_i = \prod_{i=1}^{\infty} a_i$ é dito convergente se existir $m \geq 1$ tal que $p_{m,n} = \prod_{i=m}^n a_i \rightarrow \hat{a}_m \neq 0$ se $n \rightarrow \infty$. Nesse caso, $\prod a_i \doteq a_1 \cdot a_2 \cdots a_{m-1} \cdot \hat{a}_m = p$.

Lema 2.1.2. *Seja $\prod a_i$ um produto convergente. Então, se $\nu \geq 1$, definimos*

$$\Pi_{\nu} \doteq \prod_{j \geq 1} a_{\nu+j}$$

e valem:

$$a) \lim_{\nu \rightarrow \infty} \Pi_{\nu} = 1.$$

$$b) \prod a_i = a_1 \cdot a_2 \cdots a_{\nu} \cdot \Pi_{\nu}, \quad \forall \nu \geq 1.$$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

Demonstração. b) Podemos supor $a_i \neq 0, \forall i \geq 1$, pois, se algum a_i for igual a zero, o produto se anulará. Definimos:

$$p_n^\nu \doteq a_{\nu+1} \cdot a_{\nu+2} \cdots a_n \quad e$$

$$p = \prod a_i.$$

Assim:

$$p_n^\nu = \frac{p_n}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_\nu} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lim p_n}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_\nu} = \frac{p}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_\nu}$$

$$\therefore \Pi_\nu = \frac{p}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_\nu}.$$

a)

$$\Pi_\nu = \frac{p}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_\nu} = \frac{p}{p_\nu} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 1.$$

c)

$$a_n = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1}} = \frac{\prod a_i}{\prod a_i} \cdot \frac{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1}} = \frac{\Pi_{n-1}}{\Pi_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

■

Consequências:

1. O valor do produto em 2.1.1 não depende da escolha de m .
2. Se o produto $\prod a_i$ converge, então $a_i \rightarrow 1$.

Proposição 2.1.3 (*Critério de Cauchy*). O produto $\prod a_i$ é convergente se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existir n_0 tal que:

$$n > n_0 \quad e \quad k \geq 1 \Rightarrow |a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdots a_{n+k} - 1| < \epsilon.$$

2.1. PRODUTOS INFINITOS DE NÚMEROS

Demonstração. Suponhamos $a_i \neq 0$, para todo $i \geq 1$.

$$(\Rightarrow) p_n = a_1 \cdot a_1 \cdots a_n \rightarrow p \neq 0.$$

Seja $\epsilon > 0$. Então existe n_0 tal que $n > n_0$ e $k \geq 1$ implica $|p_{n+k} - p_n| < \epsilon$, pois p_n é de Cauchy:

$$\begin{aligned} |p_{n+k} - p_n| &< \epsilon \\ \Rightarrow |p_n \{(a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdots a_{n+k}) - 1\}| &< \epsilon \\ \Rightarrow |(a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdots a_{n+k}) - 1| &< \frac{\epsilon}{|p_n|}. \end{aligned}$$

Como $p \neq 0$, existe n_0 tal que $|p_n| \geq \frac{|p|}{2}$ e, portanto,

$$|(a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdots a_{n+k}) - 1| < \frac{2 \cdot \epsilon}{|p|}.$$

($\Leftarrow$) Por hipótese, existem $n_{1/2}$ e n_ϵ tais que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(I) } n > n_{1/2} \quad e \quad k \geq 1 \Rightarrow |a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdots a_{n+k} - 1| < \frac{1}{2}. \\ \text{(II) } n > n_\epsilon \quad e \quad k \geq 1 \Rightarrow |a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdots a_{n+k} - 1| < \epsilon. \end{array} \right.$$

Então, de (I), concluímos que

$$n > n_{1/2} \quad e \quad k \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < |a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdots a_{n+k}| < \frac{3}{2}.$$

O que mostra que se $\prod a_i \rightarrow p$, então $p \neq 0$. Falta mostrar que o produto é convergente.

Considere $m = \max(n_{1/2} + 1, n_\epsilon + 1)$. Portanto,

$$n > m \quad e \quad k \geq 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdots a_{n+k} - 1| < \epsilon \\ |p_{m,n}| < \frac{3}{2} \end{array} \right.$$

Assim, multiplicando a primeira inequação por $|p_{m,n}|$, temos:

$$\begin{aligned} |p_{m,n}| \cdot |a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdots a_{n+k} - 1| &< |p_{m,n}| \cdot \epsilon \\ \Rightarrow |p_{m,n+k} - p_{m,n}| &< \epsilon \cdot \frac{3}{2}, \quad \forall k. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Portanto, $p_{m,n}$ é sequência de Cauchy em n .

$$\therefore p_{m,n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p' \Rightarrow p_n \rightarrow p.$$

Para o caso de a_i ser 0 para algum i , basta considerar o produto $p_{k,n} = a_{k+1} \cdot a_{k+2} \cdots a_n$, onde k é um inteiro tal que $a_i \neq 0$ para todo $i \geq k$. ■

Conclui-se que, com a definição dada, se o produto $\prod a_i$ é convergente, então a sequência $a_i \rightarrow 1$. Nesse caso, $u_i = (a_i - 1) \rightarrow 0$ e, portanto,

$$\prod (u_i + 1) < \infty \Rightarrow u_i \rightarrow 0.$$

Lema 2.1.4. *Se $u_n \in \mathbb{R}^+$ para todo $n \geq 1$, então:*

$$\prod (u_i + 1) < \infty \Leftrightarrow \sum u_i < \infty.$$

Demonstração.

$$p_n = (u_1 + 1) \cdot (u_2 + 1) \cdots (u_n + 1)$$

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

Note que p_n e s_n são não decrescentes e, portanto, p_n e s_n são convergentes se, e somente se, p_n e s_n forem limitadas. Assim, basta mostrar que p_n é limitada se, e somente se, s_n é limitada.

($\Rightarrow$) $p_n \geq 1 + s_n$ para todo $n \geq 1$, o que implica que s_n é limitada.

($\Leftarrow$) É fácil ver que $1 + x \leq e^x$, para todo x real.

$$\Rightarrow 1 + u_i \leq e^{u_i} \Rightarrow p_n \leq e^{s_n}.$$

$\therefore p_n$ é limitada. ■

2.1. PRODUTOS INFINITOS DE NÚMEROS

Definição 2.1.5 (*Pringsheim*). Seja $\{u_n\}$ uma sequência de números complexos. Dizemos que o produto $\prod (1 + u_i)$ converge absolutamente se o produto $\prod (1 + |u_i|)$ for convergente.

Note que, pelo lema anterior, $\prod (1 + u_i)$ converge absolutamente quando $\sum |u_i|$ converge.

Lema 2.1.6. Para todo $u_i \in \mathbb{C}$, vale:

$$|(1 + u_1) \cdot (1 + u_2) \cdots (1 + u_k) - 1| \leq (1 + |u_1|) \cdot (1 + |u_2|) \cdots (1 + |u_k|) - 1.$$

Demonstração. É muito fácil verificar que vale para $k = 1$ e $k = 2$. Suponha que vale para $k - 1$. Seja $\Pi_{k-1} = (1 + u_1) \cdots (1 + u_{k-1})$, Então:

$$\begin{aligned} |(1 + u_1) \cdots (1 + u_{k-1}) \cdot (1 + u_k) - 1| &= |\Pi_{k-1} \cdot (1 + u_k) - 1| \\ &= |\Pi_{k-1} + \Pi_{k-1} \cdot u_k - 1| \leq |\Pi_{k-1} - 1| + |\Pi_{k-1}| \cdot |u_k| \\ &= |(1 + u_1) \cdots (1 + u_{k-1}) - 1| + |(1 + u_1) \cdots (1 + u_{k-1})| \cdot |u_k| \end{aligned}$$

Que, por hipótese de indução, é menor ou igual a

$$\begin{aligned} (1 + |u_1|) \cdots (1 + |u_{k-1}|) - 1 + (1 + |u_1|) \cdots (1 + |u_{k-1}|) \cdot |u_k| \\ = (1 + |u_1|) \cdots (1 + |u_{k-1}|) \cdot (1 + |u_k|) - 1. \end{aligned}$$

■

Lema 2.1.7. Seja $\{u_n\}$ uma sequência de números complexos. Então:

$$\prod (1 + u_i) < \infty \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : \sum_{n>m} \log(1 + u_n) < \infty,$$

onde o logaritmo é o principal.

Além disso,

$$\prod_{n>m} (1 + u_n) = e^L,$$

onde $L = \sum_{n>m} \log(1 + u_n)$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Observe que se $|z| < \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{1}{2}$, então $|\log(1+z)| < \epsilon$. De fato, se tomarmos a expansão de Taylor do $\log$ em torno de $z = 1$, temos:

$$\begin{aligned} |\log(1+z)| &\leq |z| + \frac{|z|^2}{2} + \frac{|z|^3}{3} + \cdots \leq |z| + |z|^2 + |z|^3 + \cdots \\ &= \frac{|z|}{1-|z|} \leq 2 \cdot |z| \leq \epsilon. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Pelo critério de Cauchy, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \geq 1$,

$$\left| \prod_{n>m}^{m+k} (1+u_n) - 1 \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto, se $z = \prod_{n>m}^{m+k} (1+u_n) - 1$, então

$$\left| \log(1 + \prod_{n>m}^{m+k} (1+u_n) - 1) \right| = \left| \log(\prod_{n>m}^{m+k} (1+u_n)) \right| < \epsilon.$$

Falta mostrar que

$$\log(\prod_{n>m}^{m+k} (1+u_n)) = \sum_{n>m}^{m+k} \log(1+u_n).$$

Assim, seja $\alpha = \arg\{\prod_{n>m}^{m+k} (1+u_n)\}$. Temos, para ϵ suficientemente pequeno,

$$\left| \prod_{n>m}^{m+k} (1+u_n) - 1 \right| < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow |\sin \alpha| < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow |\alpha| \leq \epsilon.$$

Portanto, para todo $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} \left| \log(\prod_{n>m}^{m+k} (1+u_n)) \right| &= \left| \sum_{n>m}^{m+k} \log(1+u_n) \right| < \epsilon \\ &\Rightarrow \sum_{n>m} \log(1+u_n) < \infty. \end{aligned}$$

□

2.1. PRODUTOS INFINITOS DE NÚMEROS

($\Leftarrow$) Suponha que $\exists m_1 \in \mathbb{N} : |\sum_{n>m_1}^{m_1+k} \log(1+u_n)| < \frac{\epsilon}{2}$, onde $k \geq 1$.

Note que, como $u_n \rightarrow 0$, $\exists m_2 \in \mathbb{N} : |u_n| < \frac{1}{2}$, para todo $n > m_2$. Se $m = \max\{m_1, m_2\}$, então

$$\left| \prod_{n>m}^{m+k} (1+u_n) - 1 \right| = \left| \prod_{n>m}^{m+k} e^{\log(1+u_n)} - 1 \right| = \left| e^{\sum_{n>m}^{m+k} \log(1+u_n)} - 1 \right|.$$

Analogamente ao que foi feito acima, tomamos a expansão de Taylor da função exponencial em torno de $z = 0$. Se $|w| < 1/2$, então:

$$\begin{aligned} |e^w - 1| &= |1 + w + w^2 + \dots - 1| = |w + w^2 + \dots| \\ &\leq \frac{|w|}{1 - |w|} \leq 2 \cdot |w|. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Portanto,

$$\left| e^{\sum_{n>m}^{m+k} \log(1+u_n)} - 1 \right| \leq 2 \cdot \left| \sum_{n>m}^{m+k} \log(1+u_n) \right| < \epsilon.$$

Para finalizar a prova do teorema, observe que como $\log(\prod_{n>m} (1+u_n)) = \sum_{n>m} \log(1+u_n)$, então

$$\prod_{n>m} (1+u_n) = e^L,$$

onde $L = \sum_{n>m} \log(1+u_n)$. ■

Teorema 2.1.8. *Se $\prod (1+u_i)$ converge absolutamente, então:*

a) $\prod (1+u_i)$ é convergente.

b) $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijeção $\Rightarrow \prod (1+u_{\sigma(n)})$ converge.

c) $\prod (1+u_{\sigma(n)})$ converge para o mesmo valor para toda σ .

Demonstração. a) $\prod (1 + |u_i|)$ converge e, pelo critério de Cauchy (2.1.3), $\exists n_0$ tal que:

$$n > n_0 \quad e \quad k \geq 1 \Rightarrow |(1 + |u_n|) \cdot (1 + |u_{n+1}|) \cdots (1 + |u_{n+k}|) - 1| < \epsilon.$$

Pelo lema 2.1.6,

$$|(1+u_n) \cdot (1+u_{n+1}) \cdots (1+u_{n+k}) - 1| \leq (1+|u_n|) \cdot (1+|u_{n+1}|) \cdots (1+|u_{n+k}|) - 1 < \epsilon.$$

Portanto, o produto $\prod (1 + u_i)$ também converge.

b) $\prod (1 + u_i)$ converge absolutamente $\Rightarrow \prod (1 + |u_i|)$ converge.

Pelo lema 2.1.4 e pelo teorema do rearranjo de Riemann, temos

$$\sum_{n \geq 1} |u_n| < \infty \Rightarrow \sum_{n \geq 1} |u_{\sigma(n)}| < \infty$$

$$\Rightarrow \prod (1 + |u_{\sigma(n)}|) < \infty \stackrel{(a)}{\Rightarrow} \prod (1 + u_{\sigma(n)}) < \infty.$$

c) Pelo teorema do rearranjo de Riemann, sabemos que $\sum u_n = \sum u_{\sigma(n)}$ para toda bijeção σ .

Podemos supor $u_n \neq -1$ para todo n , pois, caso contrário, $\prod (1 + u_n) = \prod (1 + u_{\sigma(n)}) = 0$.

Pelo lema 2.1.7, $\prod_{n > m} (1 + u_n) = e^L$ com $L = \sum_{n > m} \log(1 + u_n)$.

Para $n \leq m$, podemos escrever $1 + u_n = e^{z_n}$, para algum $z_n \in \mathbb{C}$.

Portanto, temos

$$\prod (1 + u_n) = \prod e^{z_n} = e^{\sum z_n} = e^{\sum z_{\sigma(n)}} = \prod e^{z_{\sigma(n)}} = \prod (1 + u_{\sigma(n)}).$$

■

2.2 Produtos de Funções

Daqui por diante, f_ν é uma família de funções de Ω em $\mathbb{C}$, onde Ω é um aberto de $\mathbb{C}$.

Definição 2.2.1. Seja $f_\nu \in \mathcal{C}^o(\Omega)$. O produto $\prod_{\nu \geq 1} f_\nu(x)$ converge compactamente em Ω se, para todo compacto K , existir $m = m(K)$ tal que

$$p_{m,n} \doteq f_{m+1} \cdot f_{m+2} \cdots f_n$$

for uniformemente convergente em K .

Neste caso, para cada $x \in \Omega$, sabemos que

$$f(x) = \prod_{\nu \geq 1} f_\nu(x) \in \mathbb{C}$$

existe (no sentido da seção anterior) e chamaremos a função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ de limite do produto e denotaremos:

$$f(x) = \prod_{\nu \geq 1} f_\nu(x).$$

Em todo K compacto de Ω , vale:

$$f|_K = (f_1|_K) \cdot (f_2|_K) \cdots (f_m|_K) \cdot \hat{f}_m,$$

onde $\hat{f}_m : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função holomorfa que nunca se anula em K .

Notação:

Se a sequência $p_\nu(x)$ converge compactamente para a função $p(x)$ em Ω , escrevemos:

$$p_\nu(x) \xrightarrow{\text{comp.}} p(x) \text{ em } \Omega.$$

Se a sequência $p_\nu(x)$ converge uniformemente para a função $p(x)$ em K , escrevemos:

$$p_\nu(x) \xrightarrow{\text{unif.}} p(x) \text{ em } K.$$

Se f é uma função holomorfa em Ω , escrevemos:

$$f \in \mathcal{H}(\Omega).$$

Lema 2.2.2 (*Propriedades de Produtos de funções*). Se $f_\nu \in \mathcal{C}^o(\Omega)$, então:

a) Se $\prod f_\nu(x) \xrightarrow{comp.} f$ em Ω , então $f \in \mathcal{C}^o(\Omega)$. Além disso, $f_\nu(x) \xrightarrow[\nu \rightarrow \infty]{comp.} 1$.

b) Se $\prod f_\nu(x)$ e $\prod g_\nu(x)$ convergem compactamente em Ω para f e g respectivamente, então $\prod f_\nu(x) \cdot g_\nu(x)$ converge compactamente em Ω e

$$\prod f_\nu(x) \cdot g_\nu(x) = \prod f_\nu(x) \cdot \prod g_\nu(x).$$

c) Se $f_\nu \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $\prod f_\nu(x) \xrightarrow{comp.} f$ em Ω , então $f \in \mathcal{H}(\Omega)$

Demonstração. a) Seja K um compacto de Ω . Por hipótese, $\exists m$ tal que $p_{m,n} \xrightarrow{\text{unif.}} \hat{f}_m$ em K . Nesse caso, sabemos que em $\overset{\circ}{K}$, $\hat{f}_m$ é contínua. Então,

$$f|_K = (f_1|_K) \cdot (f_2|_K) \cdots (f_m|_K) \cdot \hat{f}_m,$$

onde todas as funções são contínuas em $\overset{\circ}{K}$ e, portanto, f é contínua em $\overset{\circ}{K}$. Sendo K um compacto arbitrário, temos que f é contínua em Ω .

Para mostrar que $f_\nu(x) \xrightarrow{comp.} 1$, primeiro note que $|\hat{f}_m| \geq M$ em K e, pelo critério de Cauchy (lema 2.1.3), $\frac{1}{2} \leq p_{m,n} \leq \frac{3}{2}$ para certo m . Então,

$$\frac{1}{p_{m,n}} \xrightarrow{\text{unif.}} \frac{1}{\hat{f}_m}.$$

Sendo $\hat{f}_m$ limitada em K , sabemos que em K

$$f_n = \frac{p_{m,n}}{p_{m,n-1}} \xrightarrow{\text{unif.}} \frac{\hat{f}_m}{\hat{f}_m} = 1.$$

b) Por hipótese, $\exists m$ tal que $p_{m,n}^f \xrightarrow{\text{unif.}} \hat{f}_m$ e $p_{m,n}^g \xrightarrow{\text{unif.}} \hat{g}_m$ em K e novamente por Cauchy, $p_{m,n}^f$ e $p_{m,n}^g$ são limitadas. Então em K , temos que

$$p_{m,n}^f \cdot p_{m,n}^g \xrightarrow{\text{unif.}} \hat{f}_m \cdot \hat{g}_m.$$

2.2. PRODUTOS DE FUNÇÕES

- c) $\exists m$ tal que $p_{m,n} \xrightarrow{\text{unif.}} \hat{f}_m$ em K . Por Weierstrass, $\hat{f}_m$ é holomorfa em $\overset{\circ}{K}$ e vale:

$$f|_K = (f_1|_K) \cdot (f_2|_K) \cdots (f_m|_K) \cdot \hat{f}_m.$$

Assim, f é holomorfa em K compacto arbitrário de Ω , o que implica que f é holomorfa em Ω . ■

Proposição 2.2.3 (*Critério de Convergência*). *Seja $f_n \in \mathcal{C}^o(\Omega)$. Suponhamos que $\exists m$ tal que, para todo $n > m$, f_n possui um logaritmo, isto é, $\exists \phi_n \in \mathcal{C}^o(\Omega)$ com $f_n = e^{\phi_n}$. Então, em Ω :*

$$\sum_{n>m} \log f_n \xrightarrow{\text{comp.}} S \in \mathcal{C}^o(\Omega) \Rightarrow \prod_{n>m} f_n \xrightarrow{\text{comp.}} e^S.$$

Demonstração.

$$S_n = \sum_{m+1}^n \log f_n \xrightarrow{\text{comp.}} S,$$

$$p_{m,n} = f_{m+1} \cdot f_{m+2} \cdots f_n = \prod_{m+1}^n e^{\phi_n} = e^{S_n}.$$

Como e^S nunca se anula, basta mostrar que $e^{S_n} \xrightarrow{\text{comp.}} e^S$. Seja $K \in \Omega$ um compacto.

$$|e^{S_n(x)} - e^{S(x)}| = |e^{S(x)}| |e^{S_n(x)-S(x)} - 1| \leq M \cdot |e^{S_n(x)-S(x)} - 1|,$$

pois, como $S(x)$ é uma função contínua, sua parte real admite máximo em K . Para estimar $|e^{S_n(x)-S(x)} - 1|$, precisaremos da expansão de Taylor da exponencial em torno de $z = 0$.

Denotando o $\sup(|f(x)| : x \in K)$ por $|\mathbf{f}(\mathbf{x})|_K$ e aplicando o que já foi feito em 2.3, temos:

$$|e^{S_n(x)-S(x)} - 1|_K \leq 2 \cdot |S_n(x) - S(x)|_K < \epsilon,$$

pois $S_n \xrightarrow{\text{comp.}} S$.

■

Definição 2.2.4. Seja $f_n \in \mathcal{C}^o(\Omega)$, $f_n = 1 + g_n$. O produto $\prod f_n$ é normalmente convergente em Ω se $\sum g_n$ for normalmente convergente em Ω , isto é, se $\sum |g_n|_K$ convergir, para todo K compacto.

Teorema 2.2.5. *Seja $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$. Se $\prod f_n$ é normalmente convergente em Ω , então, para toda bijeção $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, o produto $\prod f_{\sigma(n)}$ converge compactamente em Ω .*

Demonstração. Se $\prod f_n = \prod (1 + g_n)$ converge normalmente, então $\sum |g_n|_K$ converge, para todo K compacto de Ω .

Em particular, $\sum |g_n(z)| < \infty$, para todo $z \in \Omega$. Pelo lema 2.1.4,

$$\prod (1 + |g_n(z)|) < \infty \Rightarrow \prod (1 + g_n(z)) < \infty, \quad \forall z \in \Omega$$

Portanto, $\prod f_n(z)$ converge, para todo $z \in \Omega$. Definimos, então:

$$f(z) = \prod f_n(z).$$

Seja K um compacto de Ω . Por hipótese,

$$\begin{aligned} \sum |g_n|_K &< \infty \\ \Rightarrow |g_n|_K &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Isso implica que existe $m = m(K)$ tal que, para todo $n > m$, temos que $|g_n|_K \leq 1/2$. Portanto, f_n não se anula em K , para $n > m$. Pelo mesmo argumento dado em 2.2, vemos que:

$$|\log(f_n)|_K \leq 2 \cdot |g_n|_K.$$

Então,

$$\sum_{n>m} |\log(f_n)|_K < \infty.$$

Contudo, a série

2.2. PRODUTOS DE FUNÇÕES

$$\sum_{n>m} \log(f_n)$$

converge normalmente em Ω . Em suma, pela proposição anterior, concluímos que o produto

$$\prod f_n(z) \xrightarrow{\text{comp.}} f.$$

Além disso, para todo K compacto de Ω , existe $m = m(K)$ tal que:

$$\sum_{n>m} |\log(f_n)|_K < \infty,$$

onde o logaritmo pode ser tomado como principal. Assim, pelo lema 2.2.2, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e, pelo princípio dos zeros isolados, existe $B_\delta \in \Omega$, bola de raio δ , tal que f não se anula em B_δ . Portanto, f_n não se anula em B_δ , para todo n .

Agora tome $z \in B_\delta$. Pelo exposto acima, existe $u_n(z)$ tal que:

$$\prod f_n(z) = \prod e^{u_n(z)},$$

onde a partir de um certo m , podemos escolher $u_n = \log(f_n)$. Pelo teorema do Rearranjo de Riemann, temos

$$\begin{aligned} \prod f_n(z) &= \prod e^{u_n(z)} = e^{\sum u_n(z)} \\ &= e^{\sum u_{\sigma(n)}(z)} = \prod e^{u_{\sigma(n)}(z)} \quad (\Leftarrow \text{Rearranjo para soma}) \\ &= \prod f_{\sigma(n)}(z). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\prod f_n(z) = \prod f_{\sigma(n)}(z) \text{ em } K.$$

Como $f = \prod f_n(z)$ é holomorfa,

$$\prod f_n(z) = \prod f_{\sigma(n)}(z) \text{ em } \Omega.$$

■

Teorema 2.2.6. *Seja $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$. Se $\prod f_n$ é normalmente convergente para f em Ω , então*

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{f'_n}{f_n} \right)$$

é uma série de funções meromorfas em Ω compactamente convergente em Ω e

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{f'_n}{f_n} \right) \xrightarrow{\text{comp.}} \frac{f'}{f}.$$

Demonstração. Antes de iniciarmos a prova, vamos definir convergência compacta para séries de funções meromorfas. Uma série $\sum h_n$ de funções meromorfas se diz compactamente convergente em Ω se, para todo compacto K de Ω existir um $m = m(K)$ tal que:

- i. Para todo $n > m$, o conjunto de pólos de h_n é disjunto de K .
- ii. A série $\sum_{n > m} h_n$ converge uniformemente em K .

Seja K um compacto e seja $f_n = 1 + g_n$. Por hipótese, $\sum |g_n|_K < \infty$, e pelo lema 2.2.2 (a), $g_n(z) \xrightarrow{\text{unif.}} 0$ em K .

Portanto, existe n_0 tal que

$$n > n_0 \Rightarrow (1 + g_n(z)) \neq 0, \quad \forall z \in K.$$

Por conseguinte, $\left(\frac{f'_n}{f_n} \right) = \left(\frac{g'_n}{1 + g_n} \right)$ não tem pólos em K se $n > n_0$.

Se $p_{m,n} = f_{m+1} \cdot f_{m+2} \cdots f_n$, então

$$m > n_0 \Rightarrow p_{m,n} \xrightarrow{\text{unif.}} \hat{f}_m$$

e $\hat{f}_m$ nunca se anula em K . Assim, $\hat{f}_m \in \mathcal{H}(\Omega)$ e, por Weierstrass,

$$m > n_0 \Rightarrow p'_{m,n} \xrightarrow{\text{unif.}} \hat{f}'_m \quad \text{em } K.$$

Contudo, se $m > n_0$,

$$\frac{\hat{f}'_m}{\hat{f}_m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p'_{m,n}}{p_{m,n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=m}^n \frac{g'_i}{1 + g_i} \right) = \sum_{n \geq m} \left(\frac{f'_n}{f_n} \right),$$

2.3. FATORAÇÃO DE WEIERSTRASS

pois a tese é válida para somas finitas.

Agora vamos mostrar que a convergência acima é uniforme em K . Primeiro note que, como $\hat{f}_m$ não se anula em K , existe $M > 0$ com $|\hat{f}_m| \geq M$.

Além disso, pelo critério de Cauchy (2.1.3), $|p_{m,n}| \geq \frac{1}{2}$ para m escolhido adequadamente. Assim, em K

$$\frac{1}{p_{m,n}} \xrightarrow{\text{unif.}} \frac{1}{\hat{f}_m}.$$

Sendo $p'_{m,n}$ limitada em K , temos

$$\frac{p'_{m,n}}{p_{m,n}} \xrightarrow{\text{unif.}} \frac{\hat{f}'_m}{\hat{f}_m}.$$

■

2.3 Fatoração de Weierstrass

Sabemos que, se $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, os seus zeros são isolados e não se acumulam em nenhuma parte finita do plano complexo. Assim, os zeros de uma função inteira são o que chamamos de uma sequência localmente finita, isto é, um conjunto enumerável $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $|z_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

Além disso, se $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ possui a mesma sequência $\{z_n\}$ de zeros, então $g(z) = f(z) \cdot e^{h(z)}$. De fato, se g e f possuem os mesmos zeros, então $\frac{g(z)}{f(z)}$ é inteira e nunca se anula em $\mathbb{C}$. Por conseguinte, existe $h(z)$ inteira tal que $\frac{g(z)}{f(z)} = e^{h(z)}$.

Gostaríamos de saber, dada uma sequência localmente finita arbitrária $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, se existe uma função inteira cujos zeros sejam exatamente os elementos dessa sequência. A teoria de produtos infinitos nos induz a tomar tal função f por:

$$f(z) = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right).$$

O problema fundamental é que o produto acima não converge para qualquer sequência de complexos, por exemplo, $z_n = n$. Para corrigir, precisamos inserir fatores que não acrescentem novos zeros à função e acelerem a convergência.

Para o que segue, definimos, para todo $k \geq 0$, os **fatores canônicos de Weierstrass** por:

$$E_0(z) = 1 - z \quad \text{e} \quad E_k(z) = (1 - z) \cdot e^{z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots + \frac{z^k}{k}}, \quad \text{para } k \geq 1.$$

Lema 2.3.1. *Se $|z| < 1/2$, então existe $c > 0$ tal que $|1 - E_k(z)| \leq c \cdot |z|^{k+1}$. Além disso, a constante c independe de k .*

Demonstração. Se $|z| < 1/2$, então o logaritmo principal de $1 - z$ está bem definido e vale que $1 - z = e^{\log(1-z)}$. Tomando a expansão de Taylor do log, temos

$$E_k(z) = e^{\left(\log(1-z) + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots + \frac{z^k}{k}\right)} = e^{\left(-\frac{z^{k+1}}{k+1} - \frac{z^{k+2}}{k+2} - \dots\right)} = e^{g_k(z)},$$

onde

$$\begin{aligned} |g_k(z)| &= \left| \sum_{n \geq k+1} z^n/n \right| \leq \frac{1}{2} \cdot \sum_{n \geq k+1} |z^n| \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{|z|^{k+1}}{1 - |z|} \leq |z|^{k+1}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Além disso, expandindo a exponencial,

$$|1 - E_k(z)| = |e^{g_k(z)} - 1| \leq e^{|g_k(z)|} - 1. \tag{2.5}$$

É um exercício simples verificar que $1 + x \leq e^x$, para todo x real, portanto

$$\begin{aligned} 1 - x &\leq e^{-x} \\ \Rightarrow e^x - x \cdot e^x &\leq 1 \\ \Rightarrow e^x - 1 &\leq x \cdot e^x \end{aligned} \tag{2.6}$$

2.3. FATORAÇÃO DE WEIERSTRASS

Portanto,

$$\begin{aligned}
 |1 - E_k(z)| &\stackrel{(2.5)}{\leq} e^{|g_k(z)|} - 1 \\
 &\stackrel{(2.6)}{\leq} |g_k(z)| \cdot e^{|g_k(z)|} \\
 &\stackrel{(2.4)}{\leq} |z^{k+1}| \cdot e^{|z^{k+1}|} \\
 &\leq 3 \cdot |z^{k+1}|.
 \end{aligned}$$

■

Teorema 2.3.2 (Teorema de Fatoração de Weierstrass). *Seja $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ com zeros não nulos z_n e $z_0 = 0$ zero de multiplicidade m . Então, existe uma sequência de naturais $1 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots$ tais que:*

$$f(z) = e^{h(z)} \cdot z^m \cdot \prod_{n \geq 1} E_{m_n}(z/z_n),$$

para alguma $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Demonstração. Pelo lema anterior, $|E_{m_n}(z) - 1| \leq c \cdot |z|^{m_n+1}$ sempre que $|z| \leq 1/2$. Portanto, se $|z/z_n| \leq 1/2$,

$$|E_{m_n}(z/z_n) - 1| \leq c \cdot |z/z_n|^{m_n+1}.$$

Seja K um compacto. Dado que $|z_n| \rightarrow \infty$, existe n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, vale $|z/z_n| \leq 1/2$, para todo $z \in K$. Logo,

$$\sum_{n \geq n_0} |E_{m_n}(z/z_n) - 1|_K \leq c \cdot \sum_{n \geq n_0} \left(\frac{1}{2}\right)^{m_n+1}.$$

Então, tomando $m_n = \{1, 2, 3, \dots\}$, temos que

$$\sum_{n \geq n_0} |E_{m_n}(z/z_n) - 1|_K < \infty.$$

Portanto, o produto

$$\prod_{n \geq 1} E_{m_n}(z/z_n)$$

converge normalmente em Ω . Considere a função dada por:

$$g(z) = z^m \cdot \prod_{n \geq 1} E_{m_n}(z/z_n).$$

Note que a função $\frac{f}{g}(z)$ é inteira e nunca se anula em $\mathbb{C}$ e, portanto:

$$\frac{f(z)}{g(z)} = e^{h(z)},$$

onde $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

■

Observe que o teorema acima mostra que dada uma sequência $\{z_n\}$ localmente finita de complexos não nulos, existe uma função $f(z)$ inteira, cujos zeros são precisamente os elementos de $\{z_n\}$, contadas as multiplicidades. Por exemplo, podemos tomar a função:

$$f(z) = \prod_{n \geq 1} E_n(z/z_n).$$

2.4 Fórmula de Jensen

Nesta seção, $\Omega \in \mathbb{C}$ é um aberto que contém o fecho de D_R , disco de raio R centrado na origem.

Teorema 2.4.1 (*Fórmula de Jensen*). *Seja $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Suponha $f(0) \neq 0$ e que f não se anula no bordo de D_R . Se $z_1, z_2, \dots, z_N$ são os zeros de f dentro do disco D_R , contados com repetição, então*

$$\log |f(0)| = \sum_{i=1}^N \log \left(\frac{|z_i|}{R} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta.$$

2.4. FÓRMULA DE JENSEN

Demonstração. Primeiramente, note que se f_1 e f_2 satisfazem hipótese e tese do teorema, então $f_1 \cdot f_2$ também satisfaz, pois os zeros de $f_1 \cdot f_2$ coincidem com a união dos zeros de f_1 e f_2 (contados com suas multiplicidades) e $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$, para todos a, b reais positivos.

Como $z_1, z_2, \dots, z_N$ são os zeros de f dentro de D_R , então podemos escrever:

$$f(z) = (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdots (z - z_N) \cdot g(z),$$

onde $g(z)$ é uma função holomorfa em Ω que não se anula em $\overline{D_R}$.

Assim, pela primeira observação, basta mostrar que o teorema vale para funções que não se anulam em D_R e para funções da forma $(z - z_i)$.

1. f não se anula em D_R .

Neste caso, existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(z) = e^{g(z)}$ (ou $\log f(z) \doteq g(z)$). Pela fórmula integral de Cauchy,

$$\log f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_R} \frac{\log f(\xi)}{\xi - 0} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\log f(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta.$$

Portanto,

$$\log f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log f(Re^{i\theta}) d\theta.$$

Tomando a parte real,

$$\log |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta.$$

2. $f = (z - w)$.

Neste caso, $f(0) = -w$ e w é a única raiz de f . Portanto, precisamos verificar que:

$$\log |w| = \log(|w|/R) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta.$$

Ou, equivalentemente,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |Re^{i\theta} - w| d\theta = \log R.$$

Mas

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |Re^{i\theta} - w| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log R + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |e^{i\theta} - w/R| d\theta.$$

Assim, precisamos mostrar que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |e^{i\theta} - w/R| d\theta = 0.$$

Para mostrar essa última igualdade, começamos pela mudança de variável $\theta \rightarrow -\theta$ e trocamos w/R por a tal que $|a| < 1$.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |e^{i\theta} - a| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |1 - ae^{i\theta}| d\theta.$$

Definimos $h(z) = 1 - az$, função que não se anula e é holomorfa no disco unitário. Pelo primeiro caso, sabemos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |h(e^{i\theta})| d\theta = \log |h(0)| = 0.$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |1 - ae^{i\theta}| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |h(e^{i\theta})| d\theta = 0$$

■

A partir da fórmula de Jensen, podemos deduzir outra identidade que relaciona o crescimento de uma função holomorfa com o número de zeros em um disco.

Se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, denotaremos por $n(r)$ o número de zeros de f , contados com suas multiplicidades, dentro do disco de raio $r < R$.

2.5. ORDEM DE UMA FUNÇÃO INTEIRA

Lema 2.4.2. *Se $z_1, z_2, \dots, z_N$ forem os zeros de f dentro do disco D_R , então:*

$$\int_0^R n(r) \frac{dr}{r} = \sum_1^N \log \left| \frac{R}{z_i} \right|.$$

Demonstração. Observe que

$$\sum_1^N \log \left| \frac{R}{z_i} \right| = \sum_1^N \int_{|z_i|}^R \frac{dr}{r}.$$

Definimos a função característica:

$$n_i(r) = \begin{cases} 1 & \text{se } r > |z_i|, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então,

$$\sum_1^N \int_{|z_i|}^R \frac{dr}{r} = \sum_1^N \int_0^R n_i(r) \frac{dr}{r} = \int_0^R \left(\sum_1^N n_i(r) \right) \frac{dr}{r} = \int_0^R n(r) \frac{dr}{r}.$$

■

Com a fórmula de Jensen e o lema anterior, verifica-se imediatamente a proposição que se segue.

Proposição 2.4.3. *Sejam $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f(0) = 1$ e $n(r)$ o número de zeros de f , contados com suas multiplicidades, dentro do disco de raio $r < R$. Então:*

$$\int_0^R n(r) \frac{dr}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta.$$

2.5 Ordem de uma Função Inteira

A parte restante deste capítulo será dedicada a uma investigação mais profunda de propriedades das funções inteiras. Começaremos com o estudo do crescimento de funções inteiras e culminaremos com o teorema de Hadamard.

Seja $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ (inteira). Definimos $m(f, r) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$ por:

$$m(f, r) \doteq \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Pelo princípio do módulo máximo, $m(f, r) = \max_{|z| \leq r} |f(z)|$ e $m(f, r)$ é uma função não decrescente. Além disso, se $f \neq \text{cte}$, f não possui máximo local em um aberto de $\mathbb{C}$, logo, $m(f, r)$ deve ser estritamente crescente.

Note que, por Liouville, se $f \neq \text{cte}$, então $m(f, r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \infty$. Nesse contexto, faz sentido comparar $f(z)$ com outras funções em relação à taxa de crescimento.

Podemos classificar as funções inteiras quanto à taxa de crescimento.

1) Se

$$m(f, r) \leq C \cdot r^k, \quad \forall r \geq R,$$

então f é um polinômio de grau no máximo k . De fato, considere a expansão de f em torno de $z = 0$.

Assim, $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$. Da desigualdade de Cauchy, sabemos que:

$$|a_n| \leq \max_{|z|=r} |f(z)| \cdot \frac{1}{r^n} = \frac{m(f, r)}{r^n}$$

e, para todo $n > k$, temos:

$$|a_n| \leq \frac{m(f, r)}{r^n} \leq \frac{C \cdot r^k}{r^n} = \frac{C}{r^{n-k}} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Portanto, f é um polinômio de grau no máximo k .

2) Se $\exists A$ e R números reais positivos tais que

$$m(f, r) \leq e^{r^A}, \quad \forall r \geq R,$$

então dizemos que f possui ordem finita e denotamos por

2.5. ORDEM DE UMA FUNÇÃO INTEIRA

$$\rho = \inf\{A : m(f, r) \leq e^{r^A}\}$$

a ordem de crescimento da função f . Portanto,

$$m(f, r) \leq e^{r^{\rho+\epsilon}}, \quad \forall r \geq R_\epsilon, \quad \forall \epsilon > 0.$$

3) Se $\nexists A$ e R reais positivos tais que

$$m(f, r) \leq e^{r^A}, \quad \forall r \geq R,$$

então dizemos que f possui ordem infinita.

Observação:

Suponha que $m(f, r) \leq C \cdot e^{r^A}$ ou que $m(f, r) \leq e^{C \cdot r^A}$ para algum C real. Então $\rho \leq A$.

Demonstração. Faremos o primeiro caso, pois o segundo é análogo. Suponha

$$m(f, r) \leq C \cdot e^{r^A} \leq e^B \cdot e^{r^A} = e^{r^A+B}.$$

Mas $\frac{r^A+B}{r^{A+\epsilon}} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$, $\forall \epsilon > 0$, o que implica que existe R tal que $r^A + B \leq r^{A+\epsilon}$ para todo $r \geq R$.

$$\therefore m(f, r) \leq e^{r^{A+\epsilon}}, \quad \forall r > R \Rightarrow \rho \leq A.$$

■

Proposição 2.5.1. *Sejam f e g inteiras com ordens ρ_1 e ρ_2 , respectivamente. Se $\rho_1 < \rho_2$, ρ_{f+g} é a ordem da função $(f + g)$ e $\rho_{f \cdot g}$ é a ordem da função $(f \cdot g)$, então valem:*

(i) $\rho_{f+g} = \rho_2$;

(ii) $\rho_{f \cdot g} \leq \rho_2$.

Demonstração. (i) $(\rho_{f+g} \leq \rho_2)$ Seja $\epsilon > 0$. Então,

$$\begin{aligned} m(f+g, r) &\leq m(f, r) + m(g, r) \\ &\leq e^{r^{\rho_1+\epsilon}} + e^{r^{\rho_2+\epsilon}} \\ &\leq e^{r^{\rho_2+\epsilon}} \left(e^{r^{\rho_1+\epsilon}-r^{\rho_2+\epsilon}} + 1 \right). \end{aligned}$$

Mas note que:

$$\begin{aligned} r^{\rho_1+\epsilon} - r^{\rho_2+\epsilon} &= r^{\rho_2+\epsilon} \left(\underbrace{\frac{r^{\rho_1+\epsilon}}{r^{\rho_2+\epsilon}}}_{\rightarrow 0} - 1 \right) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -\infty \\ \Rightarrow e^{(r^{\rho_1+\epsilon}-r^{\rho_2+\epsilon})} &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \\ \Rightarrow \exists R : e^{(r^{\rho_1+\epsilon}-r^{\rho_2+\epsilon})} &\leq 2, \forall r > R \end{aligned}$$

$$\therefore m(f+g, r) \leq 2 \cdot e^{r^{\rho_2+\epsilon}}, \forall r > R.$$

Pela observação anterior,

$$\rho_{f+g} \leq \rho_2.$$

□

($\geq$) Por hipótese, existe uma sequência de r 's tal que:

$$m(g, r) \geq e^{\rho_2-\epsilon} \geq e^{\rho_1+\epsilon} \geq m(f, r),$$

para todo r nessa sequência e ϵ suficientemente pequeno. Então,

$$\begin{aligned} m(f+g, r) &\geq m(g, r) - m(f, r) \\ &\geq e^{\rho_2-\epsilon} - e^{r^{\rho_1+\epsilon}} \\ &= e^{\rho_2-\epsilon} \underbrace{\left(1 - e^{r^{\rho_1+\epsilon}-r^{\rho_2-\epsilon}} \right)}_{\rightarrow 1, \text{ quando } r \rightarrow \infty} \end{aligned}$$

Procedendo da mesma forma que no caso anterior, obtemos:

$$m(f+g, r) \geq 1/2 \cdot e^{r^{\rho_2-\epsilon}} \Rightarrow \rho_{f+g} \geq \rho_2.$$

$$\therefore \rho_{f+g} = \rho_2.$$

□

(ii) Seja $\epsilon > 0$.

$$\begin{aligned} m(f \cdot g, r) &\leq m(f, r) \cdot m(g, r) \\ &\leq e^{r^{\rho_1 + \epsilon}} \cdot e^{r^{\rho_2 + \epsilon}} \\ &\leq e^{r^{\rho_2 + \epsilon} \left(\frac{r^{\rho_1 + \epsilon}}{r^{\rho_2 + \epsilon}} + 1 \right)}. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{r^{\rho_1 + \epsilon}}{r^{\rho_2 + \epsilon}} &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{r^{\rho_1 + \epsilon}}{r^{\rho_2 + \epsilon}} + 1 \right) &\leq 2, \forall r > R. \\ \Rightarrow m(f \cdot g, r) &\leq e^{2 \cdot r^{\rho_2 + \epsilon}}, \forall r > R. \end{aligned}$$

$$\therefore \rho_{f \cdot g} \leq \rho_2.$$

■

Proposição 2.5.2. *Sejam f uma função inteira de ordem ρ_f e $p(z)$ um polinômio de grau $\partial p \geq 1$. Se $\rho_{f \cdot p}$ é a ordem de $(f \cdot p)$, então:*

$$\rho_{f \cdot p} = \rho_f.$$

Demonstração. Observe que $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|r|^k}{e^{r^\epsilon}} = 0, \forall \epsilon > 0$. Em outras palavras, todo polinômio possui ordem zero. Desse fato e da proposição 2.5.1, temos que:

$$\rho_{f \cdot p} \leq \rho_f.$$

Por outro lado, sabemos por hipótese que $m(f, r) \geq e^{r^{\rho_f - \epsilon}}$, para r pertencente a uma sequência $\{r_i > 0 : r_i \rightarrow \infty\}$. Assim,

$$\begin{aligned} m(f \cdot z^k, r) &\geq e^{r^{\rho_f - \epsilon}} \cdot r^k = e^{r^{\rho_f - \epsilon}} \cdot e^{k \cdot \log r} \\ \Rightarrow m(f \cdot z^k, r) &\geq e^{r^{\rho_f - \epsilon} + k \cdot \log r} \geq e^{\frac{1}{2} \cdot r^{\rho_f - \epsilon}}, \end{aligned}$$

para r a partir de um certo R .

Portanto, $\rho_{f \cdot z^k} \geq \rho_f$, o que prova a proposição. ■

2.6 O Expoente de Convergência das Raízes de uma Função Inteira

Seja $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ com zero na origem de multiplicidade m e com raízes não nulas em $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Pelo teorema de Weierstrass (2.3.2), sabemos que função f pode ser dada por:

$$f(z) = e^{h(z)} \cdot z^m \cdot \prod_{n \geq 1} E_{m_n}(z/z_n),$$

onde $h(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ e m_n uma sequência de números inteiros positivos.

Quando f possui ordem finita, veremos que o produto de Weierstrass acima é compactamente convergente, para uma escolha adequada $m_n = k$, para todo n .

Sejam $|z_1| \leq |z_2| \leq |z_3| \leq \dots$ os zeros não nulos de f . Sabemos que $|z_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, mas não necessariamente temos

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{|z_n|^\alpha} < \infty,$$

para algum α positivo. Por exemplo, suponha que $z_n = \log n$. Mostraremos que

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\log n)^\alpha} = \infty, \quad \forall \alpha > 0.$$

De fato,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log n)^\alpha}{n} = 0, \quad \forall \alpha > 0.$$

2.6. O EXPOENTE DE CONVERGÊNCIA DAS RAÍZES DE UMA FUNÇÃO INTEIRA

$$\Rightarrow \frac{1}{(\log n)^\alpha} > \frac{1}{n}, \quad \forall n > n_0.$$

$$\therefore \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{(\log n)^\alpha} > \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{n} = \infty.$$

Portanto,

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\log n)^\alpha} > \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{(\log n)^\alpha} = \infty, \quad \forall \alpha > 0.$$

□

Suponhamos que, para uma dada sequência $|z_1| \leq |z_2| \leq |z_3| \leq \dots$ de zeros de f , exista $\alpha > 0$, tal que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{|z_n|^\alpha} < \infty$. Nesse caso, definimos

$$\mu = \inf \left\{ \alpha > 0 : \sum_{n \geq 1} \frac{1}{|z_n|^\alpha} < \infty \right\}$$

como o **expoente de convergência das raízes de f** .

Observação Importante:

Se f possuir um número finito de raízes, então $\mu = 0$ e, portanto, se $\mu > 0$, f deve possuir infinitas raízes.

Lema 2.6.1. *Seja f uma função inteira de ordem finita ρ , $f(0) = 1$. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe R tal que:*

$$n(r) \leq r^{\rho+\epsilon}, \quad \forall r > R.$$

Demonstração. Usando a fórmula de Jensen (2.4.3) e o fato de que $f(0) = 1$, temos:

$$\int_0^{2r} n(\mu) \frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(2re^{i\theta})| d\theta.$$

Por um lado, temos:

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \{\log |f(2re^{i\theta})|\} &\leq \log m(f, 2r). \\ \Rightarrow \int_0^{2r} n(\mu) \frac{d\mu}{\mu} &\leq \log m(f, 2r). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Por outro lado, vale

$$\begin{aligned} \int_0^{2r} n(\mu) \frac{d\mu}{\mu} &\geq \int_r^{2r} n(\mu) \frac{d\mu}{\mu} \\ &\geq n(r) \cdot \int_r^{2r} \frac{d\mu}{\mu} \\ &\geq n(r) \cdot \log 2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Por 2.7 e por 2.8, temos que:

$$n(r) \cdot \log 2 \leq \log m(f, 2r).$$

Portanto, pela hipótese sobre a ordem de f , se $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} n(r) &\leq \frac{\log m(f, 2r)}{\log 2} \\ &\leq \frac{(2r)^{\rho+\epsilon/2}}{\log 2} \\ &\leq \frac{2^{\rho+\epsilon/2} \cdot r^{\rho+\epsilon/2}}{\log 2}. \end{aligned}$$

Como o limite:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2^{\rho+\epsilon/2} \cdot r^{\rho+\epsilon/2}}{r^{\rho+\epsilon}} = 0,$$

vale que

$$n(r) \leq \frac{2^{\rho+\epsilon/2} \cdot r^{\rho+\epsilon/2}}{\log 2} \leq r^{\rho+\epsilon},$$

para todo r maior que um certo R .

■

2.6. O EXPOENTE DE CONVERGÊNCIA DAS RAÍZES DE UMA FUNÇÃO INTEIRA

Proposição 2.6.2 (*Hadamard*). *Se f possui ordem finita ρ e μ é o expoente de convergência das raízes de f , então:*

$$\mu \leq \rho.$$

Demonstração. Sejam $|z_1| \leq |z_2| \leq |z_3| \leq \dots$ os zeros não nulos de f . Se 0 for raiz de multiplicidade k de f , então considere $f^*(z) = \frac{f(z)}{z^k}$.

Já vimos em 2.5.2 que a multiplicação por um polinômio não altera a ordem de uma função inteira e, portanto, a ordem de f é igual à ordem de $z^k \cdot f^*$ que por sua vez é igual a ordem de f^* .

Definimos: $g(z) \doteq \frac{f^*(z)}{f^*(0)}$, para que $g(0) = 1$. Note que a ordem de g é igual a ordem de f e que $z_1, z_2, \dots$ são precisamente as raízes de g .

Seja $r_n = |z_n|$. Se $\epsilon > 0$, então, pelo lema anterior (2.6.1), existe n_0 tal que:

$$n(r_n) \leq |z_n|^{\rho+\epsilon/2}, \quad \forall n > n_0.$$

Observe que na bola fechada de raio $|z_n|$ existem pelo menos n zeros e, portanto,

$$n \leq n(r_n) \leq |z_n|^{\rho+\epsilon/2}.$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} |z_n|^{\rho+\epsilon/2} &\geq n, \quad \forall n > n_0, \\ \Rightarrow (|z_n|^{\rho+\epsilon/2})^{\frac{\rho+\epsilon}{\rho+\epsilon/2}} &\geq n^{\frac{\rho+\epsilon}{\rho+\epsilon/2}} \\ \Rightarrow |z_n|^{\rho+\epsilon} &\geq n^{1+\frac{\epsilon/2}{\rho+\epsilon/2}} = n^{1+\gamma} \\ \Rightarrow \frac{1}{|z_n|^{\rho+\epsilon}} &\leq \frac{1}{n^{1+\gamma}} \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{n>n_0} \frac{1}{|z_n|^{\rho+\epsilon}} < \infty.$$

■

Concluimos com a proposição acima que se f é uma função inteira de ordem finita, então faz sentido definir:

$$\lambda \doteq \min \{k \in \mathbb{N}, k \geq 0 : \sum_{n \geq 1} \frac{1}{|z_n|^{k+1}} < \infty\} \quad (2.9)$$

como o **grau dos fatores canônicos** de Weierstrass, pois a somatória

$$\sum_{n \geq 1} \left| \frac{z}{z_n} \right|^{\lambda+1}$$

converge uniformemente sobre compactos, o que, por um raciocínio análogo ao do teorema 2.3.2, acarreta a convergência normal do produto em $\mathbb{C}$:

$$P(z) = \prod_{n \geq 1} E_\lambda(z/z_n),$$

onde $E_\lambda(z) = (1 - z) \cdot e^{z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots + \frac{z^\lambda}{\lambda}}$, para $\lambda \geq 1$.

Observações:

Se μ não for natural, então é claro que $\lambda = [\mu]$ (parte inteira de μ); caso contrário, teremos duas possibilidades:

1. $\sum \frac{1}{|z_n|^\mu} < \infty \Rightarrow \lambda = \mu - 1$;
2. $\sum \frac{1}{|z_n|^\mu} > \infty \Rightarrow \lambda = \mu$.

E concluimos que sempre vale:

$$\lambda \leq \mu \leq \lambda + 1.$$

Lema 2.6.3. *Para todo λ natural, existe A tal que:*

$$|E_\lambda(z)| \leq e^{A \cdot |z|^\alpha}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

para todo α com

2.6. O EXPOENTE DE CONVERGÊNCIA DAS RAÍZES DE UMA FUNÇÃO INTEIRA

$$\begin{cases} \lambda \leq \alpha \leq \lambda + 1, & \text{se } \lambda \neq 0 ; \\ 0 < \alpha \leq 1, & \text{se } \lambda = 0 . \end{cases}$$

Demonstração. (1) $\lambda \geq 1$.

Pelo mesmo argumento utilizado no lema 2.3.1, se $|z| \leq 1/2$, então

$$E_\lambda(z) = e^{g_\lambda(z)},$$

onde $|g_\lambda(z)| \leq |z|^{\lambda+1}$.

Portanto,

$$|E_\lambda(z)| \leq |e^{g_\lambda(z)}| \leq e^{|g_\lambda(z)|} \leq e^{|z|^{\lambda+1}}.$$

Mas note que, se $|z| \leq 1/2$, então $|z|^x$ é uma função decrescente e, portanto,

$$\begin{aligned} |z|^{\lambda+1} &\leq |z|^\alpha \\ \Rightarrow |E_k(z)| &\leq e^{|z|^\alpha}. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $|z| \geq 1$,

$$\begin{aligned} |E_\lambda(z)| &\leq (1 + |z|) \cdot e^{\left(|z| + \frac{|z|^2}{2} + \dots + \frac{|z|^\lambda}{\lambda}\right)} \leq e^{(\lambda+1)|z|^\lambda} \\ &\leq e^{(\lambda+1)|z|^\alpha}. \end{aligned}$$

Para o caso $1/2 \leq |z| \leq 1$, sabemos que $|E_\lambda(z)|$ é contínua e, portanto, existe C tal que:

$$|E_\lambda(z)| \leq e^{C \cdot |z|^\alpha}.$$

Enfim, basta tomar $A = \max \{C, \lambda + 1, 1\}$.

□

(2) $\lambda = 0$ e $0 < \alpha \leq 1$.

Se $|z| \leq 1/2$, temos:

$$|E_0(z)| \leq 1 + |z| \stackrel{(2.6)}{\leq} e^{|z|} \leq e^{|z|^\alpha}.$$

Se $|z| > 1/2$, então:

$$\frac{\log(1 + |z|)}{|z|^\alpha} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0.$$

Portanto, existe A tal que

$$\begin{aligned} \log(1 + |z|) &\leq A \cdot |z|^\alpha \\ \Rightarrow |E_0(z)| &\leq e^{A \cdot |z|^\alpha}. \end{aligned}$$

■

2.7 Teorema de Fatoração de Hadamard

O teorema desta seção combina o teorema de fatoração de Weierstrass (2.3.2) com o resultado visto há pouco sobre a relação entre o número de zeros e o crescimento de uma função inteira.

Vimos que duas funções inteiras que possuem precisamente os mesmos zeros (contando com as multiplicidades) diferem multiplicativamente pela exponencial de uma função inteira. Segundo o teorema de fatoração de Weierstrass (2.3.2), concluímos que todas as funções inteiras de raízes $\{z_n\}$ possuem a forma:

$$e^{g(z)} \cdot z^m \cdot \prod_{n \geq 1} E_n(z/z_n),$$

onde g é uma função inteira.

No caso de funções inteiras de ordem finita, vimos no final da última seção que o grau dos fatores canônicos λ de $E_\lambda(z/z_n)$ pode ser tomado constante. Além disso, Hadamard mostra que $g(z)$ é um polinômio. Começaremos com um teorema sobre a ordem dos produtos canônicos.

Teorema 2.7.1 (Borel). *Seja f uma função inteira de ordem finita ρ . Se $P(z)$ é o produto canônico associado a f , então P tem ordem finita $\rho_c = \mu$, onde μ é o expoente de convergência das raízes de f .*

2.7. TEOREMA DE FATORAÇÃO DE HADAMARD

Demonstração. Seja

$$P(z) \doteq z^m \cdot \prod_{n \geq 1} E_\lambda(z/z_n).$$

Suponha $\lambda \leq \mu < \lambda + 1$. Dado $\epsilon > 0$ tal que $\mu + \epsilon < \lambda + 1$, então:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{|z_n|^{\mu+\epsilon}} < \infty.$$

Assim, usando o lema 2.6.3, temos:

$$\begin{aligned} \left| \prod_{n \geq 1} E_\lambda(z/z_n) \right| &= \prod_{n \geq 1} |E_\lambda(z/z_n)| \\ &\leq \prod_{n \geq 1} e^{A \cdot |z/z_n|^{\mu+\epsilon}} \\ &\leq e^{A \cdot |z|^{\mu+\epsilon} \cdot \sum_{n \geq 1} \frac{1}{|z_n|^{\mu+\epsilon}}} \\ &\leq e^{B \cdot |z|^{\mu+\epsilon}}. \end{aligned}$$

Portanto, nesse caso a ordem do produto é menor ou igual a μ . Para o caso $\mu = \lambda + 1$, o fato é resultado de:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{|z_n|^\mu} < \infty.$$

Pela proposição 2.6.2, sabemos que $\mu \leq \rho_c$ e, portanto,

$$\rho_c = \mu.$$

■

Lema 2.7.2. *O produto canônico satisfaz:*

$$(i) \quad |E_k(z)| \geq e^{-c|z|^{k+1}} \quad \text{se } |z| \leq 1/2,$$

$$(ii) \quad |E_k(z)| \geq |1 - z| \cdot e^{-c'|z|^k} \quad \text{se } |z| \geq 1/2.$$

Demonstração. (i) Se $|z| \leq 1/2$, podemos expandir $\log(1 - z)$ como série de potência:

$$\log(1 - z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \dots$$

Assim,

$$\begin{aligned} E_k(z) &= (1 - z) \cdot e^{z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots + \frac{z^k}{k}} \\ &= e^{\log(1-z) + \sum_{1 \leq n \leq k} \frac{z^n}{n}}. \\ &= e^{-\frac{z^{k+1}}{k+1} - \frac{z^{k+2}}{k+2} - \dots} \\ &= e^{g_k(z)}. \end{aligned}$$

Já vimos em 2.3.1 que $|g_k(z)| \leq |z|^{k+1}$. Ademais,

$$|e^w| = e^{\Re(w)} \geq e^{-|w|}, \quad (2.10)$$

o que completa a demonstração de (i). □

(ii) Se $|z| \geq 1/2$, então:

$$|E_k(z)| = |(1 - z)| \cdot |e^{z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots + \frac{z^k}{k}}|.$$

Sabe-se que:

$$\frac{|z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots + \frac{z^k}{k}|}{|\frac{z^k}{k}|} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 1.$$

Portanto, existe c' tal que:

$$|e^{z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots + \frac{z^k}{k}}| \underset{(2.10)}{\geq} e^{-|z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots + \frac{z^k}{k}|} \geq e^{-c'|\frac{z^k}{k}|}. \quad \blacksquare$$

A chave para provar o teorema de Hadamard consiste em encontrar um limitante inferior para o produto dos fatores canônicos quando z estiver fora de certos discos centrados nos zeros z_n .

2.7. TEOREMA DE FATORAÇÃO DE HADAMARD

Lema 2.7.3. *Sejam f uma função inteira de ordem finita ρ e $P(z)$ seu produto canônico associado. Se μ é o expoente de convergência das raízes de f , então, para todo $\epsilon > 0$, temos que:*

$$|P(z)| = \left| \prod_{n \geq 1} E_\lambda(z/z_n) \right| \geq e^{-c|z|^{\mu+\epsilon}},$$

exceto, possivelmente, para z na união dos discos de raios $1/|z_n|^{\lambda+1}$ centrados em z_n , para $n \geq 1$.

Demonstração. Primeiro, escrevemos:

$$\prod_{n \geq 1} E_\lambda(z/z_n) = \underbrace{\prod_{|z_n| \leq 2|z|} E_\lambda(z/z_n)}_{(A)} \cdot \underbrace{\prod_{|z_n| > 2|z|} E_\lambda(z/z_n)}_{(B)}.$$

Vamos, agora, estimar as parcelas:

(B) Pelo lema anterior, $|E_\lambda(z)| \geq e^{-c|z|^{\lambda+1}}$ se $|z| \leq 1/2$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \left| \prod_{|z_n| > 2|z|} E_\lambda(z/z_n) \right| &= \prod_{|z_n| > 2|z|} |E_\lambda(z/z_n)| \\ &\geq \prod_{|z_n| > 2|z|} e^{-c|z/z_n|^{\lambda+1}} \\ &\geq e^{\left[\sum_{|z_n| > 2|z|} -c|z/z_n|^{\lambda+1} \right]} \\ &\geq e^{-c'|z|^{\lambda+1} \cdot \left[\sum_{|z_n| > 2|z|} 1/|z_n|^{\lambda+1} \right]}, \end{aligned}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Dado que $|z_n| > 2|z|$ e para o caso $\mu < s < \lambda + 1$, obtemos:

$$\frac{1}{|z_n|^{\lambda+1}} = \frac{1}{|z_n|^s} \cdot \frac{1}{|z_n|^{\lambda+1-s}} \leq \frac{1}{|z_n|^s} \cdot \frac{c''}{|z|^{\lambda+1-s}}.$$

Consequentemente,

$$-c'|z|^{\lambda+1} \cdot \sum_{|z_n|>2|z|} \frac{1}{|z_n|^{\lambda+1}} \geq -c'|z|^{\lambda+1} \frac{c''}{|z|^{\lambda+1-s}} \cdot \sum_{|z_n|>2|z|} \frac{1}{|z_n|^s}$$

e

$$e^{-c'|z|^{\lambda+1} \cdot [\sum_{|z_n|>2|z|} 1/|z_n|^{\lambda+1}]} \geq e^{-c'c''|z|^s \cdot [\sum_{|z_n|>2|z|} 1/|z_n|^s]}.$$

Pela proposição 2.6.2, então

$$\sum_{|z_n|>2|z|} 1/|z_n|^s = c''' < \infty.$$

Portanto,

$$\left| \prod_{|z_n|>2|z|} E_\lambda(z/z_n) \right| \geq e^{-c|z|^s}.$$

Para o caso $\mu = \lambda + 1$, temos:

$$\begin{aligned} \left| \prod_{|z_n|>2|z|} E_\lambda(z/z_n) \right| &\geq e^{-c''|z|^\mu}, \\ &\geq e^{-c''|z|^{\mu+\epsilon}}, \end{aligned}$$

para $|z| > 1$. Por outro lado, se $0 \leq |z| \leq 1$, então basta observar que num compacto, a função

$$\frac{e^{|z|^{\mu+\epsilon}}}{e^{-c''|z|^\mu}}$$

possui máximo e mínimo global.

□

(A) Usando a segunda parte do lema anterior, temos que:

$$\left| \prod_{|z_n| \leq 2|z|} E_\lambda(z/z_n) \right| \geq \prod_{|z_n| \leq 2|z|} \left| 1 - \frac{z}{z_n} \right| \cdot \prod_{|z_n| \leq 2|z|} e^{-c'|z/z_n|^\lambda}.$$

2.7. TEOREMA DE FATORAÇÃO DE HADAMARD

Para a segunda parcela, dado que a produtória é finita, temos:

$$\prod_{|z_n| \leq 2|z|} e^{-c'|z/z_n|^\lambda} = e^{-c'|z|^\lambda [\sum_{|z_n| \leq 2|z|} 1/|z_n|^\lambda]}.$$

Por um raciocínio análogo de (B), para todo $s > \mu \geq \lambda$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|z_n|^\lambda} &\leq C \frac{1}{|z_n|^s} \cdot \frac{1}{|z|^{\lambda-s}} \\ \therefore \prod_{|z_n| \leq 2|z|} e^{-c'|z/z_n|^\lambda} &\geq e^{-c|z|^s}. \end{aligned}$$

Para a primeira parcela, será necessário usar a hipótese adicional do lema. Se z não estiver na união dos discos de raios $1/|z_n|^{\lambda+1}$ centrados em z_n , então,

$$|z_n - z| \geq \frac{1}{|z_n|^{\lambda+1}}.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \prod_{|z_n| \leq 2|z|} \left| 1 - \frac{z}{z_n} \right| &= \prod_{|z_n| \leq 2|z|} \left| \frac{z_n - z}{z_n} \right| \\ &\geq \prod_{|z_n| \leq 2|z|} \frac{1}{|z_n|^{\lambda+1} \cdot |z_n|} \\ &\geq \prod_{|z_n| \leq 2|z|} \frac{1}{|z_n|^{\lambda+2}} \\ &\geq e^{\sum_{|z_n| \leq 2|z|} \log(|z_n|^{-\lambda-2})}. \end{aligned}$$

Para concluir a estimativa desta parcela, trabalharemos a soma acima da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{|z_n| \leq 2|z|} \log(|z_n|^{\lambda+2}) \right| &= (\lambda+2) \cdot \left| \sum_{|z_n| \leq 2|z|} \log |z_n| \right| \\ &\leq (\lambda+2) \cdot |\log |2z|| \cdot \sum_{|z_n| \leq 2|z|} 1 \\ &\leq (\lambda+2) \cdot |\log |2z|| \cdot n(2|z|), \end{aligned}$$

onde $n(2|z|)$ denota o número de zeros de P na bola de raio $2|z|$ centrada na origem.

Pelo lema 2.6.1 e por 2.7.1,

$$\left| \sum_{|z_n| \leq 2|z|} \log(|z_n|^{\lambda+2}) \right| \leq (\lambda+2) \cdot |\log|2z|| \cdot C \cdot |z|^{\mu+\epsilon}.$$

de modo que $0 < \epsilon < s - \mu$ e, portanto,

$$\left| \sum_{|z_n| \leq 2|z|} \log(|z_n|^{\lambda+2}) \right| \leq c \cdot |z|^s,$$

para z tal que $|z|$ maior que um certo R .

$$\therefore \prod_{|z_n| \leq 2|z|} \left| 1 - \frac{z}{z_n} \right| \stackrel{(2.10)}{\geq} e^{-c \cdot |z|^s}.$$

Juntando os resultados de (A) e (B), obtemos

$$\begin{aligned} \left| \prod_{n \geq 1} E_\lambda(z/z_n) \right| &\geq \underbrace{\prod_{|z_n| \leq 2|z|} \left| 1 - \frac{z}{z_n} \right|}_{(A)} \cdot \underbrace{\prod_{|z_n| \leq 2|z|} e^{-c'|z/z_n|^\lambda}}_{(B)} \cdot \prod_{|z_n| > 2|z|} |E_\lambda(z/z_n)| \\ &\geq e^{-c_1 \cdot |z|^s} \cdot e^{-c_2 \cdot |z|^s} \cdot e^{-c_3 \cdot |z|^s} \\ &\geq e^{-c \cdot |z|^s}. \end{aligned}$$

para todo $s > \mu$. ■

Corolário 2.7.4. *Existe uma sequência de raios, $r_1, r_2, r_3, \dots$, com $r_m \rightarrow \infty$, tal que:*

$$\left| \prod_{n \geq 1} E_\lambda(z/z_n) \right| \geq e^{-c|z|^s} \quad \text{para } \lambda \leq \mu < s \text{ e para } |z| = r_m.$$

2.7. TEOREMA DE FATORAÇÃO DE HADAMARD

Demonstração. Pelo lema anterior, basta mostrar que existe tal sequência de raios com a propriedade:

Se $|z| = r_m$ para algum m , então z não pertence à união dos discos de raios $1/|z_n|^{\lambda+1}$ centrados em z_n .

Seja $D = \bigcup_{n \geq 1} B_{1/|z_n|^{\lambda+1}}(z_n)$ a união acima.

Suponha, por contradição, que para toda sequência de raios, para algum m e para algum z no círculo de raio r_m , z esteja em D . Isso significa que existe m tal que:

$$r_m \in \left[|z_n| - \frac{1}{|z_n|^{\lambda+1}}, |z_n| + \frac{1}{|z_n|^{\lambda+1}} \right] \doteq I_n.$$

para algum $n \geq 1$.

A figura abaixo mostra como as bolas são projetadas na reta real.

Figura 2.1: Intervalos I_n na reta.

Como $r_m \rightarrow \infty$, a partir de um certo n_0 , os intervalos I_n cobrem toda a reta real com $x > |z_{n_0}|$, ou seja,

$$\sum_{n \geq n_0} \frac{2}{|z_n|^{\lambda+1}} = \infty,$$

um absurdo, pois λ é o menor inteiro tal que a soma acima converge. ■

Teorema 2.7.5 (*Teorema de Hadamard*). *Seja f inteira de ordem finita ρ e λ o grau dos fatores canônicos ($\lambda \leq \mu \leq \lambda + 1$). Se $z_1, z_2, \dots$ são as raízes não nulas de f , então:*

$$f(z) = e^{p(z)} \cdot z^m \cdot \prod_{n \geq 1} E_\lambda(z/z_n),$$

onde $p(z)$ é um polinômio de grau $\leq \rho$ e m é a ordem da raiz de f em $z = 0$.

Demonstração. Seja

$$E(z) = z^m \cdot \prod_{n \geq 1} E_\lambda(z/z_n).$$

Pelo lema 2.3.1, sabemos que, para $n > n_0$ ($z/z_n < 1/2$),

$$|1 - E_\lambda(z)| \leq c \cdot |z|^{\lambda+1}.$$

Se K é um compacto, então a série

$$\sum_{n \geq n_0} \left| \frac{z}{z_n} \right|_K^{\lambda+1} = |z|_K^{\lambda+1} \cdot \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{|z_n|^{\lambda+1}}$$

converge normalmente em $\mathbb{C}$, o que acarreta a convergência normal do produto.

Em suma, $E(z)$ é uma função inteira com precisamente os mesmos zeros de f . Assim, $\frac{f}{E}(z)$ é uma função inteira que nunca se anula em $\mathbb{C}$ e vale:

$$\frac{f(z)}{E(z)} = e^{p(z)},$$

2.7. TEOREMA DE FATORAÇÃO DE HADAMARD

com $p(z)$ inteira.

Lembremos de dois fatos:

1. f possui ordem finita ρ , ou seja,

$$|f(z)| \leq e^{|z|^{\rho+\epsilon}};$$

2. Pelo lema 2.7.4, existe uma sequência de raios tal que:

$$\left| \prod_{n \geq 1} E_\lambda(z/z_n) \right| \geq e^{-c|z|^{\mu+\epsilon}},$$

para $\epsilon > 0$ e para $|z| = r_m$.

Por essas razões,

$$e^{\Re(p(z))} = \left| \frac{f(z)}{E(z)} \right| \leq e^{|z|^{\rho+\epsilon} + c \cdot |z|^{\mu+\epsilon}}$$

$$\Rightarrow \Re(p(z)) \leq C \cdot |z|^{\rho+\epsilon}, \text{ para } |z| = r_m,$$

pois $\rho \geq \mu$.

Portanto, para mostrar que $p(z)$ é um polinômio de grau $\leq \lambda$, enunciaremos e provaremos o seguinte lema.

■

Lema 2.7.6. *Suponha f uma função inteira que satisfaz:*

$$\Re(f(z)) \leq c \cdot r^s, \text{ sempre que } |z| = r,$$

para uma sequência de números reais positivos r 's que tende a infinito. Nesse caso, f é um polinômio de grau $\leq s$.

Demonstração. Considere a expansão de $f(z)$ em série de potência em torno da origem

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n.$$

Afirmção: Se $n \geq 0$,

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = a_n \cdot r^n.$$

De fato, a integral acima é igual a:

$$\frac{r^n}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma} \frac{f(s)}{s^{n+1}} ds = a_n \cdot r^n,$$

onde $\gamma(\theta) = r \cdot e^{i\theta}$, com $\theta \in [0, 2\pi]$.

Por outro lado, se $n > 0$, então

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{r2\pi i} \cdot \int_{\gamma} f(s) s^{n-1} ds = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta, \\ \therefore \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \overline{f(re^{i\theta})} e^{-in\theta} d\theta &= 0. \end{aligned}$$

Utilizando as duas fórmulas e lembrando que $2\Re(f) = f + \bar{f}$, se $n > 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} [f(re^{i\theta}) + \overline{f(re^{i\theta})}] e^{-in\theta} d\theta &= a_n \cdot r^n \\ \Rightarrow a_n &= \frac{1}{\pi r^n} \cdot \int_0^{2\pi} \Re(f(re^{i\theta})) e^{-in\theta} d\theta \end{aligned}$$

Para o caso $n = 0$, tomamos a parte real da fórmula acima

$$\therefore 2\Re(a_0) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \Re(f(re^{i\theta})) d\theta.$$

2.7. TEOREMA DE FATORAÇÃO DE HADAMARD

Ademais, se $n \neq 0$, a integral

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\theta &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma} \frac{1}{s^{n+1}} ds = 0 \\ \Rightarrow \int_0^{2\pi} cr^s \cdot e^{-in\theta} d\theta &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, podemos escrever, para $n > 0$ e $|z| = r$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi r^n} \cdot \int_0^{2\pi} [\Re(f(re^{i\theta})) - cr^s] \cdot e^{-in\theta} d\theta. \\ \therefore |a_n| &\leq \frac{1}{\pi r^n} \cdot \int_0^{2\pi} \underbrace{[cr^s - \Re(f(re^{i\theta}))]}_{>0} d\theta \\ &\leq 2cr^{s-n} - 2\Re(a_0)r^{-n}. \end{aligned}$$

Então, se $n > s$, $|a_n| \rightarrow 0$ sempre que $r \rightarrow \infty$.

■

Corolário 2.7.7. *Sejam $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ de ordem finita ρ e μ seu coeficiente de convergência das raízes. Então:*

$$\rho \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \mu = \rho.$$

Demonstração. Pelo teorema anterior,

$$f(z) = e^{p(z)} \cdot z^m \cdot \prod_{n \geq 1} E_{\lambda}(z/z_n).$$

Pelo teorema 2.7.1, sabemos que a ordem de $P(z)$ é μ .

Além disso, é fácil ver que a ordem de $e^{p(z)}$ é o grau do polinômio p . Por hipótese, $\partial p < \rho$, e pela proposição 2.5.1,

$$\rho = \max(\mu, \partial p) = \mu.$$

■

Corolário 2.7.8. *Seja $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ de ordem finita ρ , com ordem $\rho \notin \mathbb{Z}$. Então f possui infinitas raízes.*

Demonstração. Pelo corolário anterior,

$$\rho \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \mu = \rho > 0.$$

Portanto, existe α tal que:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{|z_n|^\alpha} = \infty.$$

■

Capítulo 3

A Função Zeta de Riemann

As funções Gamma, $\Gamma(s)$, e a função Zeta de Riemann, $\zeta(s)$, estão possivelmente entre as mais importantes da matemática. Elas têm um papel crucial no desenvolvimento das fórmulas explícitas e em toda teoria analítica dos números.

Neste capítulo, vamos fazer um estudo preliminar dessas funções, mostrando que ambas são meromorfas em $\mathbb{C}$ e determinando seus pólos.

3.1 A Função Gamma

Para todo $s > 0$ real, a **função Gamma** é definida por:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{s-1} dt. \quad (3.1)$$

A integral acima converge, pois, perto de 0, e^{-t} é uma função limitada e t^{s-1} é integrável, e no infinito, a convergência é garantida pelo decaimento de e^{-t} . De fato:

(1) Perto de $t = 0$.

$$\left| \int_\epsilon^A e^{-t} \cdot t^{s-1} dt \right| \leq \underbrace{1}_{|e^{-t}| \leq 1} \cdot \int_\epsilon^A t^{s-1} dt = \left[\frac{t^s}{s} \right]_\epsilon^A \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{A^s}{s}.$$

(2) No infinito.

Existe T tal que:

$$\frac{t^{s-1}}{e^{-t}} \leq \frac{1}{t^2}, \quad \forall t \geq T.$$

Portanto, fica claro que a integral

$$\int_A^\infty e^{-t} \cdot t^{s-1} dt \quad \text{converge.}$$

□

O próximo passo é estender a função Gamma à faixa

$$S_{\delta, M} = \{s \in \mathbb{C} : \delta < \Re(s) < M\},$$

onde $0 < \delta < M$. Para tanto, precisaremos do seguinte lema técnico.

Lema 3.1.1. *Considere a função $F(z, t) : \Omega \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, onde Ω é um aberto de $\mathbb{C}$. Suponha que F satisfaça as seguintes propriedades:*

- i. Para todo t , $F(z, t)$ é holomorfa em Ω .*
- ii. F é limitada em todo $\Omega \times [a, b]$ e contínua em $\Omega \times [a, b]$, exceto possivelmente em um número finito de pontos $x_1, x_2, \dots, x_c$ do intervalo $[a, b]$.*

Então, a função f dada por

$$f(z) = \int_a^b F(z, t) dt$$

é holomorfa em Ω .

Demonstração. A ideia da demonstração consiste em interpretar a integral acima como limite uniforme de somas de Riemann e aplicar o teorema de Weierstrass.

Para todo $n > 0$, considere a partição do intervalo $[a, b]$ que o divide em n partes iguais e considere as seguintes somas de Riemann:

$$f_n(z) = \sum_{k=1}^n F(z, \hat{t}_k) \cdot \underbrace{(t_k - t_{k-1})}_{(1/n)},$$

3.1. A FUNÇÃO GAMMA

onde $\hat{t}_k \in [t_k, t_{k-1}] \subset [a, b]$.

Pela propriedade (i), $f_n(z)$ é holomorfa em Ω . Queremos mostrar que se K é um compacto contido em Ω , então a sequência $\{f_n\}$ converge uniformemente para f em K , independentemente da escolha de $\hat{t}_k$.

Recordemos que toda função contínua em algum compacto é uniformemente contínua; em outras palavras, se $\epsilon > 0$, então existe δ tal que:

$$\sup_{z \in K} |F(z, x) - F(z, y)| < \epsilon,$$

sempre que $|x - y| < \delta$ e $x_j \notin [x, y]$, onde x_j são os pontos de descontinuidade de F e $j = 1, 2, \dots, c$. Além disso, se $x_j \in [x, y]$, então:

$$\sup_{z \in K} |F(z, x) - F(z, y)| \leq M.$$

Note que podemos escrever

$$f_n(z) = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} F(z, \hat{t}_k) dt.$$

Seja J o conjunto dos índices tais que $k \in J$ se, e somente se, existe $x_j \in [t_{k-1}, t_k]$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f(z)| &\leq \left| \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} [F(z, \hat{t}_k) - F(z, t)] dt \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |F(z, \hat{t}_k) - F(z, t)| dt \\ &\leq \sum_{k=1, k \notin J}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |F(z, \hat{t}_k) - F(z, t)| dt \\ &\quad + \sum_{k \in J} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |F(z, \hat{t}_k) - F(z, t)| dt. \end{aligned}$$

Tome n tal que $\frac{1}{n} < \min \left\{ \delta, \frac{\epsilon \cdot (b-a)}{M \cdot c} \right\}$. Então,

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f(z)| &\leq \epsilon \cdot \sum_{k=1, k \notin J}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt + M \cdot \sum_{k \in J} \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt \\ &\leq \epsilon \cdot (b-a) + M \cdot c \cdot \frac{1}{n}. \\ &\leq 2 \cdot \epsilon \cdot (b-a). \end{aligned}$$

Logo, a convergência é uniforme em K e, por Weierstrass, f é holomorfa em Ω . ■

Proposição 3.1.2. *A função $\Gamma(s)$ se estende a uma função holomorfa em $\Re(s) > 0$ e é dada por:*

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{s-1} dt.$$

Demonstração. Considere a faixa

$$S_{\delta, M} = \{s \in \mathbb{C} : \delta < \Re(s) < M\},$$

onde $0 < \delta < M$.

Definimos

$$F_\epsilon(s) \doteq \int_\epsilon^{1/\epsilon} e^{-t} \cdot t^{s-1} dt.$$

1ª Afirmação: $F_\epsilon(s)$ é holomorfa em $S_{\delta, M}$.

De fato, primeiramente note que:

- Para todo t , $\underbrace{(e^{-t} \cdot t^{s-1})}_{F(s, t)}$ é holomorfa em $S_{\delta, M}$;
- $(e^{-t} \cdot t^{s-1})$ é contínua em $S_{\delta, M} \times [\epsilon, 1/\epsilon]$.

3.1. A FUNÇÃO GAMMA

Portanto, pelo lema anterior (3.1.1), $F_\epsilon(s)$ é holomorfa em $S_{\delta,M}$.

2ª Afirmação: $F_\epsilon(s) \xrightarrow{\text{unif.}} \Gamma(s)$ em $S_{\delta,M}$.

De fato,

$$\begin{aligned} |F_\epsilon(s) - \Gamma(s)| &= \left| \int_\epsilon^{1/\epsilon} e^{-t} \cdot t^{s-1} dt - \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{s-1} dt \right| \\ &= \left| \int_0^\epsilon e^{-t} \cdot t^{s-1} dt + \int_{1/\epsilon}^\infty e^{-t} \cdot t^{s-1} dt \right| \\ &\leq \underbrace{\left| \int_0^\epsilon e^{-t} \cdot t^{s-1} dt \right|}_{(A)} + \underbrace{\left| \int_{1/\epsilon}^\infty e^{-t} \cdot t^{s-1} dt \right|}_{(B)}. \end{aligned}$$

(A)

$$\left| \int_0^\epsilon e^{-t} \cdot t^{s-1} dt \right| \underset{(e^{-t} \leq 1)}{\leq} \left| \int_0^\epsilon t^{s-1} dt \right| \underset{(\Re(s)=\sigma)}{\leq} \int_0^\epsilon t^{\sigma-1} dt = \frac{\epsilon^\sigma}{\sigma}. \quad (3.2)$$

Se $\epsilon < 1$ e $0 < \delta < \sigma$, então:

$$\epsilon^\sigma < \epsilon^\delta \Rightarrow \frac{\epsilon^\sigma}{\sigma} < \frac{\epsilon^\delta}{\delta} \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{\text{unif.}} 0.$$

(B) $\Re(s) = \sigma$.

$$\left| \int_{1/\epsilon}^\infty e^{-t} \cdot t^{s-1} dt \right| \leq \int_{1/\epsilon}^\infty e^{-t} \cdot t^{\sigma-1} dt = \int_{1/\epsilon}^\infty e^{-t/2} \cdot \frac{t^{\sigma-1}}{e^{t/2}} dt.$$

Se $\epsilon < \epsilon_0$, então $\frac{t^{\sigma-1}}{e^{t/2}} < \frac{t^{M-1}}{e^{t/2}} < 1$. Logo,

$$\left| \int_{1/\epsilon}^\infty e^{-t} \cdot t^{s-1} dt \right| \leq \int_{1/\epsilon}^\infty e^{-t/2} dt \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{\text{unif.}} 0.$$

Portanto, $\Gamma(s)$ é holomorfa em $S_{\delta,M}$.

■

Proposição 3.1.3. *Se $\Re(s) > 0$, então:*

$$\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s). \quad (3.3)$$

Demonstração.

$$F_\epsilon(s) = \int_\epsilon^{1/\epsilon} e^{-t} \cdot t^{s-1} dt \text{ é holomorfa em } \mathbb{C}.$$

Pela proposição anterior (3.1.2),

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_\epsilon(s) = \Gamma(s).$$

Integrando por partes, temos:

$$F_\epsilon(s+1) = \int_\epsilon^{1/\epsilon} e^{-t} \cdot t^s dt = [-e^{-t} \cdot t^s]_\epsilon^{1/\epsilon} + s \cdot \underbrace{\int_\epsilon^{1/\epsilon} e^{-t} \cdot t^{s-1} dt}_{F_\epsilon(s)}.$$

Portanto,

$$\underbrace{F_\epsilon(s+1)}_{\rightarrow \Gamma(s+1)} = s \cdot \underbrace{F_\epsilon(s)}_{\rightarrow \Gamma(s)} + \underbrace{\left[-\frac{(1/\epsilon)^s}{e^{1/\epsilon}} + e^{-\epsilon} \cdot \epsilon^s \right]}_{\rightarrow 0}.$$

■

Observação:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^\infty = 1.$$

Como $\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$, temos que:

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1 \cdot \Gamma(1) = 1 \\ \Gamma(3) &= 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \\ \Gamma(4) &= 3 \cdot \Gamma(3) = 6 \end{aligned}$$

Então, vale que $\Gamma(n+1) = n!$.

3.1. A FUNÇÃO GAMMA

Teorema 3.1.4. *A função $\Gamma(s)$ se estende a uma função meromorfa em $\mathbb{C}$, com pólos simples em $s = 0, -1, -2, \dots$.*

Além disso, o resíduo de $\Gamma(s)$ em $s = -n$ é igual a $\frac{(-1)^n}{n!}$.

Figura 3.1: Extensão ao semi plano $\Re(s) > -1$.

Demonstração.

Se $\Omega_1 = \{s : s \neq 0 \text{ e } \Re(s) > -1\}$,

utilizamos a equação funcional 3.3 para escrever

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s},$$

e definimos $F_1(s) : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C}$ por:

$$F_1(s) \doteq \frac{\Gamma(s+1)}{s}.$$

Note que, pelo fato da função Gamma ser holomorfa em $\Re(s) > 0$, $F_1(s)$ é holomorfa em Ω_1 .

Além disso, $F_1(s) \equiv \Gamma(s)$ em $\Re(s) > 0$.

A função $\Gamma(s+1)$ é holomorfa numa vizinhança de $s = 0$, pois $\Gamma(s)$ é holomorfa numa vizinhança de $s = 1$. Portanto, $F_1(s)$ possui um pólo simples em $s = 0$. Assim, o resíduo de F_1 em $s = 0$ é:

$$\text{Res}(F_1, s = 0) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{\Gamma(s+1)}{s} = \Gamma(1) = 1.$$

Vamos agora repetir o processo para $\Omega_2 = \{s : s \neq 0, -1 \text{ e } \Re(s) > -2\}$.

$$F_1(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s} = \frac{F_1(s+1)}{s}.$$

Então, definimos $F_2(s) : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$ dada por:

$$F_2(s) \doteq \frac{F_1(s+1)}{s} = \frac{\Gamma(s+2)}{s(s+1)}.$$

Pelas mesmas razões já mencionadas, $F_2(s)$ possui pólos simples em $s = 0$ e $s = -1$. Além disso, $F_2(s)$ coincide com $F_1(s)$ em Ω_1 . O resíduo de $F_2(s)$ em $s = -1$ vale:

$$\text{Res}(F_2, s = -1) = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \cdot \frac{\Gamma(s+2)}{s(s+1)} = \frac{\Gamma(1)}{-1} = -1.$$

Por indução, definimos $\Omega_m = \{s : s \neq 0, -1, \dots, -(m-1) \text{ e } \Re(s) > -m\}$.

$$\begin{aligned} F_m(s) &= \frac{F_{m-1}(s+1)}{s} = \frac{F_{m-2}(s+2)}{s(s+1)} = \dots \\ &= \frac{F_1(s+(m-1))}{s(s+1) \cdots (s+(m-2))} \\ &= \frac{\Gamma(s+m)}{s(s+1) \cdots (s+(m-1))}. \end{aligned}$$

3.2. A FÓRMULA LIMITE DE EULER

$F_m(s)$ possui pólos simples em $s = 0, -1, \dots, -(m-1)$, com resíduo:

$$\begin{aligned}
 \text{Res}(F_m, s = -n) &= \lim_{s \rightarrow -n} (s+n) \cdot \frac{\Gamma(s+m)}{s(s+1) \cdots (s+(m-1))} \\
 &= \frac{\Gamma(m-n)}{-n(-n+1) \cdots (-1)(1) \cdots (-n+(m-1))} \\
 &= \frac{\cancel{(m-n-1)!}}{\underbrace{-n(-n+1) \cdots (-1)(1)}_{(-1)^n n!} \underbrace{\cdots (m-n-1)}_{\cancel{(m-n-1)!}}} \\
 &= \frac{(-1)^n}{n!}.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Da mesma forma, $F_m(s)$ coincide com $F_{m-1}(s)$ em Ω_{m-1} e coincide com $\Gamma(s)$ em Ω . ■

3.2 A Fórmula Limite de Euler

Se $\Re(s) > 0$, podemos escrever:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{s-1} dt.$$

Sabemos que

$$(1 - t/n)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-t},$$

e, então, definimos:

$$\Gamma_n(s) \doteq \int_0^n (1 - t/n)^n \cdot t^{s-1} dt.$$

Teorema 3.2.1. *Se $\Re(s) > 0$, então:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(s) = \Gamma(s).$$

Demonstração.

$$\Gamma(s) - \Gamma_n(s) = \underbrace{\int_0^n \{e^{-t} - (1 - t/n)^n\} \cdot t^{s-1} dt}_{(A)} + \underbrace{\int_n^\infty e^{-t} \cdot t^{s-1} dt}_{(B)}.$$

$$(B) \Re(s) = \sigma.$$

$$\left| \int_n^\infty e^{-t} \cdot t^{s-1} dt \right| \leq \int_n^\infty e^{-t/2} \cdot \underbrace{\frac{t^{\sigma-1}}{e^{t/2}}}_{\substack{<1 \\ \text{se } t > t_0}} dt$$

$$\begin{aligned} (n \geq t_0 \Rightarrow) & \leq \int_n^\infty e^{-t/2} dt = [-e^{-t/2}]_n^\infty \\ & = e^{-n/2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

(A) Separamos a integral em duas partes:

$$\begin{aligned} \int_0^n \{e^{-t} - (1 - t/n)^n\} \cdot t^{s-1} dt &= \int_0^{n/2} \{e^{-t} - (1 - t/n)^n\} \cdot t^{s-1} dt \\ &+ \int_{n/2}^n \{e^{-t} - (1 - t/n)^n\} \cdot t^{s-1} dt. \end{aligned}$$

Para estimar as parcelas acima, note que:

$$\begin{aligned} \log \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n &= n \cdot \log \left(1 - \frac{t}{n} \right) \\ &\stackrel{(t/n < 1)}{=} n(-1) \cdot \left\{ \frac{t}{n} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t}{n} \right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{t}{n} \right)^3 + \dots \right\} \\ &= -t - \underbrace{\left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{t^3}{n^2} + \dots \right\}}_{>0} \\ &= -t - T. \end{aligned}$$

1ª Observação: Se $t/n < 1$, então

3.2. A FÓRMULA LIMITE DE EULER

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t-T} = \underbrace{\frac{e^{-t}}{e^T}}_{\geq 1} \leq e^{-t}.$$

Portanto,

$$t/n < 1 \Rightarrow \{e^{-t} - (1 - t/n)^n\} \geq 0.$$

2ª Observação: A segunda parcela pode ser estimada por:

$$\left| \int_{n/2}^n \{e^{-t} - (1 - t/n)^n\} \cdot t^{s-1} dt \right| \leq \int_{n/2}^n e^{-t} \cdot t^{\sigma-1} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

pois

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\leq \frac{t}{n} \leq 1 \\ \Rightarrow -1 &\leq -\frac{t}{n} \leq -\frac{1}{2} \\ \Rightarrow 0 &\leq \left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq \frac{1}{2} \\ \Rightarrow 0 &\leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3ª Observação: Se $t/n \leq 1/2$,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{t^3}{n^2} + \dots \\ \Rightarrow T &\leq k \cdot \frac{t^2}{n}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$e^{-t} - (1 - t/n)^n = e^{-t} - \frac{e^{-t}}{e^T} = e^{-t} \cdot (1 - e^{-T}).$$

Já vimos por (2.6) que $1 - e^{-x} \leq x$ e, portanto,

$$e^{-t} - (1 - t/n)^n \leq e^{-t} \cdot T \leq e^{-t} \cdot k \cdot \frac{t^2}{n}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^{n/2} \{e^{-t} - (1 - t/n)^n\} \cdot t^{s-1} dt \right| &\leq \int_0^{n/2} \{e^{-t} - (1 - t/n)^n\} \cdot t^{\sigma-1} dt \\
 &\leq \frac{k}{n} \cdot \int_0^{n/2} e^{-t} \cdot t^{\sigma+1} dt \\
 &\leq \frac{k}{n} \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{\sigma+1} dt}_{\Gamma(\sigma+2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
 \end{aligned}$$

■

Com o teorema acima, concluímos que se

$$\Gamma_n(s) = \int_0^n (1 - t/n)^n \cdot t^{s-1} dt,$$

então

$$\Gamma_n(s) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Gamma(s).$$

para $\Re(s) > 0$. Além disso, note que a convergência é uniforme sobre compactos.

Fazendo a mudança de variáveis $x = t/n, dx = dt/n$, reescrevemos a integral para obter:

$$\Gamma_n(s) = \int_0^1 (1 - x)^n \cdot (nx)^{s-1} n dx = n^s \cdot \int_0^1 (1 - x)^n \cdot x^{s-1} dx.$$

Aplicando integração por partes em $\Gamma_n(s)$, temos:

3.2. A FÓRMULA LIMITE DE EULER

$$\begin{aligned}
 I(n, s-1) &= \int_0^1 \underbrace{(1-x)^n}_f \cdot \underbrace{x^{s-1}}_{g'} dx \\
 &= \underbrace{\left[(1-x)^n \cdot \frac{x^s}{s} \right]_0^1}_{\rightarrow 0} + \int_0^1 n(1-x)^{n-1} \cdot \frac{x^s}{s} dx \\
 &\stackrel{(\Re(s) > 0)}{=} \frac{n}{s} \cdot \int_0^1 (1-x)^{n-1} \cdot x^s dx \\
 &= \frac{n}{s} \cdot I(n-1, s). \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}
 I(n-1, s) &= \int_0^1 \underbrace{(1-x)^{n-1}}_f \cdot \underbrace{x^s}_{g'} dx \\
 &= \underbrace{\left[(1-x)^{n-1} \cdot \frac{x^{s+1}}{s+1} \right]_0^1}_{\rightarrow 0} + \int_0^1 (n-1)(1-x)^{n-2} \cdot \frac{x^{s+1}}{s+1} dx \\
 &\stackrel{(\Re(s) > -1)}{=} \frac{(n-1)}{(s+1)} \cdot \int_0^1 (1-x)^{n-2} \cdot x^{s+1} dx \\
 &= \frac{(n-1)}{(s+1)} \cdot I(n-2, s+1).
 \end{aligned}$$

Repetindo sucessivamente,

$$\begin{aligned}
 I(n, s-1) &= \frac{n}{s} \cdot I(n-1, s) \\
 &= \frac{n(n-1)}{s(s+1)} \cdot I(n-2, s+1) \\
 &= \frac{n(n-1)(n-2)}{s(s+1)(s+2)} \cdot I(n-3, s+2) \\
 \dots &= \frac{n(n-1) \cdots (n-(n-1))}{s(s+1) \cdots (s+(n-1))} \cdot I(0, s+(n-1)).
 \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
 I(0, s + (n - 1)) &= \int_0^1 (1 - x)^0 \cdot x^{s+n-1} dx \\
 &= \int_0^1 x^{s+n-1} dx \\
 &= \left[\frac{x^{s+n}}{s+n} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{s+n}.
 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 I(n, s - 1) &= \frac{n(n-1) \cdots (n - (n-1))}{s(s+1) \cdots (s + (n-1))} \cdot \frac{1}{(s+n)} \\
 &= \frac{n!}{s(s+1) \cdots (s+n)}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Gamma_n(s) = \frac{n^s \cdot n!}{s(s+1) \cdots (s+n)}.$$

Note que a igualdade vale apenas para $\Re(s) > 0$, por conta da primeira aplicação da integração por partes, mas o lado direito vale para todo plano complexo, exceto para os pontos $\{0, -1, \dots, -n\}$.

Queremos, agora, encontrar uma fórmula produto para $\Gamma(s)$ com o espírito das fórmulas de Weierstrass (2.3.2).

$$\Gamma_n(s) = \frac{n^s \cdot n!}{s(s+1) \cdots (s+n)} \neq 0, \forall s \in \mathbb{C}.$$

Portanto, $\frac{1}{\Gamma_n(s)}$ é holomorfa em todo $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \frac{1}{\Gamma_n(s)} &= \frac{1}{n^s} \cdot s \cdot \frac{(s+1)}{1} \cdot \frac{(s+2)}{2} \cdots \frac{(s+n)}{n} \\
 \Rightarrow \frac{1}{\Gamma_n(s)} &= \frac{s}{n^s} \cdot \left(1 + \frac{s}{1}\right) \cdot \left(1 + \frac{s}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{s}{n}\right).
 \end{aligned}$$

3.2. A FÓRMULA LIMITE DE EULER

Então,

$$\frac{1}{\Gamma_n(s)} = \frac{s}{n^s} \cdot \prod_1^n \left(1 + \frac{s}{k}\right).$$

Para poder aplicar o limite dos dois lados da equação, precisaremos acrescentar o fator de convergência de acordo com o teorema 2.3.2. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma_n(s)} &= \frac{s}{n^s} \cdot \prod_1^n \left(1 + \frac{s}{k}\right) \cdot e^{-s/k} \cdot e^{s/k} \\ &= e^{\left(\frac{s}{1} + \frac{s}{2} + \dots + \frac{s}{n}\right)} \frac{s}{n^s} \cdot \prod_1^n \left(1 + \frac{s}{k}\right) \cdot e^{-s/k} \\ &= s \cdot e^{(-s \log(n) + \frac{s}{1} + \frac{s}{2} + \dots + \frac{s}{n})} \prod_1^n \left(1 + \frac{s}{k}\right) \cdot e^{-s/k} \\ &= s \cdot e^{s\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n)\right)} \prod_1^n \left(1 + \frac{s}{k}\right) \cdot e^{-s/k}. \end{aligned}$$

Mas sabemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_1^n \left(1 + \frac{s}{k}\right) \cdot e^{-s/k} = \prod_{n \geq 1} E_1(z/n)$$

é o produto canônico de Weierstrass com $\lambda = 1$. Além disso,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n) = \gamma,$$

sendo γ a constante de Euler. Como $\Gamma_n(s)$ e $\Gamma(s)$ são limitadas e não se anulam em K compacto de $\mathbb{C}$ e

$$\Gamma_n(s) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{comp.} \Gamma(s),$$

então:

$$\frac{1}{\Gamma_n(s)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{comp.} \frac{1}{\Gamma(s)}$$

converge uniformemente sobre K . Portanto,

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s \cdot e^{\gamma \cdot s} \prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{s}{n}\right) \cdot e^{-s/n}. \quad (3.6)$$

□

Lema 3.2.2. Para todo $s \in \mathbb{C}$,

$$\Gamma(s) \cdot \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

Demonstração. Pelo teorema anterior,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(s) \cdot \Gamma(1-s)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{s \cdot (s+1) \cdots (s+n)}{n^s \cdot n!} \cdot \frac{(1-s) \cdot (2-s) \cdots (1-s+n)}{n^{1-s} \cdot n!} \right\} \\ &= s \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(s+1)(1-s)}{1 \cdot 1} \cdots \frac{(s+n)(n-s)}{n \cdot n} \cdot \frac{(n+1-s)}{n} \right\} \\ &= s \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_1^n \left(1 - \frac{s^2}{k^2}\right)}_{\text{converge sobre compactos}} \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-s}{n}}_{\rightarrow 1}. \end{aligned}$$

Seja K um compacto de $\mathbb{C}$. Então,

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} \left| \frac{s}{k} \right|_K^2 &= \underbrace{|s|_K^2}_{\text{limitado em } K} \cdot \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} \\ &< L \cdot \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Pelo teorema 2.2.5, o produto infinito acima converge normalmente em $\mathbb{C}$. Além disso, o limite da segunda parcela tende a 1 e, portanto:

$$\frac{1}{\Gamma(s) \cdot \Gamma(1-s)} = s \cdot \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right).$$

Por outro lado, sabemos que:

$$\sin(\pi s) = \frac{e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}}{2i}$$

3.2. A FÓRMULA LIMITE DE EULER

é uma função inteira que possui números inteiros como raízes.

Além disso, é bem fácil mostrar que a função $e^{i\pi s}$ tem ordem 1, o que implica que $\frac{\sin(\pi s)}{\pi}$ também possui ordem 1.

Portanto, pelo teorema de Hadamard (2.7.5),

$$\frac{\sin(\pi s)}{\pi} = s \cdot e^{A+Bs} \cdot \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{s}{s_n}\right) \cdot e^{s/s_n}.$$

onde

$$s_n = \begin{cases} (n+1)/2, & \text{se } n \text{ for ímpar;} \\ -n/2, & \text{se } n \text{ for par.} \end{cases}$$

Pelo lema 2.2.2, podemos parear os fatores, ficando com:

$$\frac{\sin(\pi s)}{\pi} = s \cdot e^{A+Bs} \cdot \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right).$$

Agora resta mostrar que $e^{A+Bs} = 1$.

- Da fórmula anterior,

$$\frac{\sin(\pi s)}{\pi s} = e^{A+Bs} \cdot \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right).$$

Além disso,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi s)}{\pi s} = 1$$

e

$$\lim_{s \rightarrow 0} \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right) = 1$$

$$\therefore 1 = e^A.$$

- Novamente, utilizando a fórmula e passando o primeiro termo do produto para o lado esquerdo, temos:

$$\frac{\sin(\pi s)}{\pi(1-s^2)} = s \cdot e^{Bs} \cdot \prod_{n \geq 2} \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right) \quad (3.7)$$

Tomando o limite quando $s \rightarrow 1$,

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi s)}{\pi(1-s^2)} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{s \rightarrow 1} \frac{\pi \cos(\pi s)}{\pi(-2s)} = 1/2.$$

Pela fórmula encontrada na primeira parte da demonstração, temos que:

$$\prod_{n \geq 2} \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right) = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(1-s) \cdot (1-s)(1+s)}.$$

Pelo teorema 3.1.4, sabemos que

$$\lim_{s \rightarrow 1} \Gamma(1-s) \cdot (1-s) = 1;$$

como $\Gamma(1) = 1$,

$$\prod_{n \geq 2} \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right) = 1/2.$$

Portanto,

$$e^B = 1.$$

■

Teorema 3.2.3 (*Teorema da Unicidade*). *Seja F uma função holomorfa no semiplano $D = \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 0\}$. Suponha que $F(s+1) = s \cdot F(s)$ e que F seja limitada na faixa $S_1 = \{s \in \mathbb{C} : 1 \leq \Re(s) < 2\}$. Então:*

$$F(s) = F(1) \cdot \Gamma(s).$$

3.2. A FÓRMULA LIMITE DE EULER

Demonstração. Definimos a função

$$g(s) \doteq F(s) - F(1) \cdot \Gamma(s).$$

Afirmção: A função g possui uma extensão holomorfa a todo plano complexo e é limitada em $S_0 = \{s \in \mathbb{C} : 0 \leq \Re(s) < 1\}$.

De fato, note primeiramente que a equação funcional também vale para g , ou seja:

$$g(s+1) = s \cdot g(s).$$

Definimos $g_0(s)$ em $\Omega_{-1} = \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > -1\}$ por:

$$g_0(s) \doteq \frac{g(s+1)}{s}.$$

Então, $g_0(s) \equiv g(s)$ em D . Além disso, observe que $g(1) = 0$ e, portanto, $g_0(s)$ é holomorfa numa vizinhança de $s = 0$ (pois a singularidade é removível). Portanto, g possui uma extensão holomorfa a todo Ω_{-1} .

Seguindo os mesmos passos que em 3.1.4, concluímos que g possui uma extensão holomorfa a todo $\mathbb{C}$. Note que o fato de $g_0(s)$ ser holomorfa numa vizinhança de $s = 0$ se propaga para $s = -1, -2, \dots$.

Pela definição da função Γ , é fácil ver que $|\Gamma(s)| \leq \Gamma(\Re(s))$, ou seja, $\Gamma(s)$ é limitada em S_1 . Então, utilizando a hipótese, concluímos que $g(s)$ é também limitada em S_1 . Pelo fato de:

$$g(s) = \frac{g(s+1)}{s}$$

e de que perto de $s = 0$ $g(s)$ é limitada, temos que $g(s)$ é limitada em S_0 .

Usando a equação funcional, é fácil ver que $g(s)$ é limitada em todo semiplano $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) < 2\}$.

□

Definimos, então,

$$h(s) \doteq g(s) \cdot g(1-s).$$

Note que $h(s) = h(1-s)$ e que vale

$$\begin{aligned} h(1+s) &= g(1+s) \cdot g(-s) \\ &= sg(s) \cdot g(-s) \\ &= -g(s) \cdot (-s)g(-s) \\ &= -g(s) \cdot g(1-s) \\ &= -h(s). \end{aligned}$$

Então, para mostrar que h é limitada em $\mathbb{C}$, basta notar que h é limitada em S_0 , pois $g(s)$ e $g(1-s)$ também o são. Portanto, h é uma função inteira e limitada e, por Liouville,

$$h(s) \equiv h(0) = 0.$$

Portanto, $g(s) \equiv 0$, terminando a prova do teorema. ■

Corolário 3.2.4. *Para todo $s \in \mathbb{C}$,*

$$\Gamma(s) \cdot \Gamma(s + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2s-1}} \cdot \Gamma(2s).$$

Demonstração. Definimos $F(s)$ por:

$$F(s) \doteq \frac{\Gamma(s/2) \cdot \Gamma(\frac{s+1}{2})}{\sqrt{\pi} \cdot 2^{1-s}}.$$

Em primeiro lugar, note que as singularidades de F são pólos simples em $s = 0, -1, -2, \dots$ devido às singularidades de $\Gamma(s/2)$ e de $\Gamma(\frac{s+1}{2})$. Então, F é holomorfa no semiplano $D = \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 0\}$.

Também note que F é limitada na faixa $S_1 = \{s \in \mathbb{C} : 1 \leq \Re(s) < 2\}$, pois Γ também é e pelo fato de $|2^s| = 2^{\Re(s)}$. Além disso,

3.3. A FUNÇÃO ZETA DE RIEMANN

$$\begin{aligned}
F(s+1) &= \frac{\Gamma(\frac{s+1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{s+2}{2})}{\sqrt{\pi} \cdot 2^{-s}} \\
&= \frac{\Gamma(s/2) \cdot \Gamma(\frac{s+1}{2})}{\sqrt{\pi} \cdot 2^{1-s}} \cdot \frac{2 \cdot \Gamma(\frac{s+2}{2})}{\Gamma(s/2)} \\
&= F(s) \cdot \frac{2 \cdot \Gamma(s/2 + 1)}{\Gamma(s/2)} \\
&= F(s) \cdot \frac{2 \cdot s/2 \cdot \Gamma(s/2)}{\Gamma(s/2)} \\
&= s \cdot F(s).
\end{aligned}$$

Portanto, pelo teorema anterior,

$$F(s) = F(1) \cdot \Gamma(s).$$

Pelo lema 3.2.2, é fácil ver que $F(1) = 1$, pois $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Portanto,

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s/2) \cdot \Gamma(\frac{s+1}{2})}{\sqrt{\pi} \cdot 2^{1-s}}.$$

Trocando s por $2s$, terminamos a prova do corolário. ■

3.3 A Função Zeta de Riemann

Define-se a **função zeta** $\zeta(s)$ de Riemann, para $\Re(s) > 1$, por:

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}. \quad (3.8)$$

Como veremos no próximo teorema, a função zeta se relaciona com os números primos através da fórmula produto de Euler.

Teorema 3.3.1. *A função $\zeta(s)$ converge absolutamente e uniformemente no semiplano fechado $S_\delta = \{\Re(s) \geq 1 + \delta\}$, para todo $\delta > 0$. Portanto, $\zeta(s)$ define uma função holomorfa em $\Re(s) > 1$ e vale a **fórmula produto de Euler** dada por:*

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}},$$

onde p é um número primo.

Demonstração. Seja $s = \sigma + it$. Sabemos que $\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^\sigma}$. Suponha K um compacto contido em S_δ . Assim, em K , vale

$$\frac{1}{n^\sigma} \leq \frac{1}{n^{1+\delta}} \quad \text{e} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1+\delta}} < \infty.$$

Portanto, pelo M -teste de Weierstrass, $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ converge absolutamente e uniformemente em K .

Definimos

$$f(s) \doteq \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

Lembrando que $|f(s)|_K = \sup(|f(s)| : s \in K)$, temos:

$$\begin{aligned} \sum_p \left| \frac{1}{p^s} \right|_K &= \sum_p \left| \frac{1}{p^\sigma} \right|_K \\ &\leq \sum_p \frac{1}{p^{1+\delta}} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Portanto, pelo teorema (2.2.5), $f(s)$ converge absolutamente e compactamente em $\Re(s) \geq 1 + \delta$.

Observe que se $\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = 0$, então

$$\begin{aligned} p^s = 1 &\Leftrightarrow e^{s \cdot \log(p)} = 1 \\ &\Leftrightarrow s \cdot \log(p) = 2k\pi i \\ &\Leftrightarrow s = \frac{2k\pi i}{\log(p)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = 0 \Rightarrow s \text{ é imaginário puro.}$$

3.3. A FUNÇÃO ZETA DE RIEMANN

Em outras palavras, $f(s)$ não se anula em $\{s : \Re(s) > 1\}$

É claro que $\frac{1}{f(s)}$ é holomorfa em $\{s : \Re(s) > 1\}$. Precisamos mostrar que $\frac{1}{f(s)} = \zeta(s)$. Para tal, definimos

$$E_N(s) \doteq \prod_{p \leq N} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)}.$$

Note que o termo da produtória é uma soma de uma PG infinita de razão $\frac{1}{p^s}$. Então podemos escrever:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{p^{ks}}.$$

Então podemos reescrever $E_N(s)$ por:

$$E_N(s) \doteq \prod_{p \leq N} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)} = \sum_{n \in M_N} \frac{1}{n^s}.$$

onde $M_N = \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N} : \text{seus divisores primos são } \leq N\}$.

Suponha $s > 1$ real. É claro que os naturais $1, 2, \dots, N$ pertencem a M_N . Portanto

$$\underbrace{\sum_{n \leq N} \frac{1}{n^s}}_{\rightarrow \zeta(s)} \leq \sum_{n \in M_N} \frac{1}{n^s} = E_N(s) \leq \underbrace{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}}_{\zeta(s)}.$$

Assim, quando $N \rightarrow \infty$, $E_N(s)$ fica limitada pela esquerda por uma função que tende a $\zeta(s)$ e pela direita pela própria $\zeta(s)$.

Portanto, $\frac{1}{f(s)}$ coincide com a função $\zeta(s)$ na semi-reta $s > 1$ real e como são ambas holomorfas, coincidem em todo $\{s : \Re(s) > 1\}$. ■

3.4 A Função Theta de Jacobi

Definimos a **função theta** $\theta(t)$ para $t > 0$, por:

$$\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi t}.$$

Teorema 3.4.1. *Se $\theta(t)$ é a função definida acima. Valem:*

$$(1) \theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \theta(1/t).$$

$$(2) \theta(t) \leq \frac{c}{\sqrt{t}}, \forall t : 0 < t \leq 1.$$

$$(3) |\theta(t) - 1| \leq \tilde{c} \cdot e^{-\pi t}, \forall t \geq 1.$$

Demonstração. (1) Está feita no apêndice em 5.4.5.

(3) Note que:

$$\begin{aligned} \theta(t) - 1 &= 2 \cdot \sum_{n \geq 1} e^{-n^2 \pi t} \\ &\leq 2 \cdot \sum_{n \geq 1} e^{-n \pi t} \\ &= 2 \cdot \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{e^{\pi t}} \right)^n \end{aligned}$$

Mas $t > 0$ implica $\left(\frac{1}{e^{\pi t}} \right) < 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} \theta(t) - 1 &\leq 2 \cdot \frac{e^{-\pi t}}{1 - e^{-\pi t}} \\ &\leq e^{-\pi t} \cdot \frac{2}{1 - e^{-\pi t}} \end{aligned}$$

Note que como $t \geq 1$, $\frac{2}{1 - e^{-\pi t}}$ é limitada, mais precisamente, menor ou igual a $\frac{2}{1 - e^{-\pi}}$. Ademais, $\theta(t) - 1$ é sempre positivo e, portanto,

$$|\theta(t) - 1| \leq \tilde{c} \cdot e^{-\pi t}.$$

□

(2) Por (1),

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \theta(1/t).$$

Se $0 < t \leq 1$, então $\frac{1}{t} \geq 1$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \theta(t) &\stackrel{(3)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot (\tilde{c} \cdot e^{-\pi 1/t} + 1) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \underbrace{\tilde{c} \cdot e^{-\pi 1/t}}_{\text{limitada}} + \frac{1}{\sqrt{t}} \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{t}}. \end{aligned}$$

□

■

3.5 A Função Zeta Adélica

Se $\Re(s) > 0$, sabemos que

$$\Gamma(s/2) = \int_0^\infty e^{-u} \cdot u^{s/2-1} du.$$

Fazendo a mudança de variáveis $u = \pi n^2 t$ temos:

$$\begin{aligned} \Gamma(s/2) &= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} \cdot (\pi n^2 t)^{s/2-1} (\pi n^2) dt \\ &= \pi^{s/2} \cdot n^s \cdot \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} \cdot t^{s/2-1} dt. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\pi^{-s/2} \cdot \Gamma(s/2) \cdot \frac{1}{n^s} = \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} \cdot t^{s/2-1} dt.$$

Note que se $\Re(s) > 1$, posso somar em n . Assim,

$$\pi^{-s/2} \cdot \Gamma(s/2) \cdot \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \sum_{n \geq 1} \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} \cdot t^{s/2-1} dt.$$

Estamos agora no ponto de mostrar o seguinte teorema.

Teorema 3.5.1. *Se $\Re(s) > 1$, então*

$$\pi^{-s/2} \cdot \Gamma(s/2) \cdot \zeta(s) = \int_0^\infty \left(\frac{\theta(t) - 1}{2} \right) \cdot t^{s/2-1} dt.$$

Demonstração. Sabemos que

$$\sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 t} = \frac{\theta(t) - 1}{2}.$$

Portanto, para mostrar a validade do teorema, basta mostrar que a integral imprópria comuta com a soma infinita, o que será feito a seguir. ■

Lema 3.5.2. *Nas condições do teorema anterior, vale:*

$$\sum_{n \geq 1} \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^{1/\epsilon} e^{-\pi n^2 t} \cdot t^{s/2-1} dt \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^{1/\epsilon} \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 t} \cdot t^{s/2-1} dt.$$

Demonstração. Precisamos mostrar que a somatória comuta com a integral definida e que o limite comuta com a somatória.

1ª Afirmação: Para todo $\epsilon > 0$,

$$\sum_{n \geq 1} \int_\epsilon^{1/\epsilon} e^{-\pi n^2 t} \cdot t^{s/2-1} dt = \int_\epsilon^{1/\epsilon} \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 t} \cdot t^{s/2-1} dt.$$

Para tanto, basta mostrar que o integrando da direita converge em t uniformemente sobre $[\epsilon, 1/\epsilon]$ e para todo s fixado.

3.5. A FUNÇÃO ZETA ADÉLICA

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq n_0} e^{-\pi n^2 t} &\leq \sum_{n \geq n_0} e^{-\pi n t} \\
&= \sum_{n \geq n_0} \left(\frac{1}{e^{\pi t}} \right)^n \\
&= \frac{e^{-\pi n_0 t}}{1 - e^{-\pi t}} \\
&\leq \frac{e^{-\pi n_0 t}}{\pi t \cdot e^{-\pi t}},
\end{aligned}$$

pois como já visto em 2.6,

$$\begin{aligned}
e^x - 1 &\leq x \cdot e^x \\
\Rightarrow 1 - e^x &\geq -x \cdot e^x \\
\Rightarrow 1 - e^{-\pi t} &\geq \pi t \cdot e^{-\pi t}.
\end{aligned}$$

Como $[\epsilon, 1/\epsilon]$ é um compacto, $\frac{t^{\sigma/2-1}}{\pi t \cdot e^{-\pi t}}$ é limitado e, portanto,

$$t^{\sigma/2-1} \cdot \sum_{n \geq n_0} e^{-\pi n^2 t} \leq k \cdot e^{-\pi n_0 t} \xrightarrow[n_0 \rightarrow \infty]{\text{unif.}} 0.$$

□

2ª Afirmação:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\sum_{n \geq 1} \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} e^{-\pi n^2 t} \cdot t^{s/2-1} dt \right] = \sum_{n \geq 1} \underbrace{\left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} e^{-\pi n^2 t} \cdot t^{s/2-1} dt \right]}_{\int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 t} \cdot t^{s/2-1} dt}$$

Seja s tal que $\Re(s) > 1$, então

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{n \geq 1} \left[\int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 t} \cdot t^{s/2-1} dt \right] - \sum_{n \geq 1} \left[\int_{\epsilon}^{1/\epsilon} e^{-\pi n^2 t} \cdot t^{s/2-1} dt \right] \right| \\
&\leq \left| \sum_{n \geq 1} \left[\int_0^{\epsilon} e^{-\pi n^2 t} \cdot t^{s/2-1} dt \right] \right| + \left| \sum_{n \geq 1} \left[\int_{1/\epsilon}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} \cdot t^{s/2-1} dt \right] \right|.
\end{aligned}$$

Pela primeira afirmação, a somatória comuta com a integral definida (usamos que $[\epsilon, 1/\epsilon]$ é um compacto) e, portanto, a conta acima fica:

$$\leq \underbrace{\int_0^\epsilon \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 t} \cdot t^{\sigma/2-1} dt}_{(A)} + \underbrace{\sum_{n \geq 1} \int_{1/\epsilon}^\infty e^{-\pi n^2 t} \cdot t^{\sigma/2-1} dt}_{(B)}.$$

(A)

$$\begin{aligned} \int_0^\epsilon \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 t} \cdot t^{\sigma/2-1} dt &\leq \int_0^\epsilon \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t} \cdot t^{\sigma/2-1} dt \\ &\leq \int_0^\epsilon \theta(t) \cdot t^{\sigma/2-1} dt \\ (\text{teorema 3.4.1} \Rightarrow) &\leq C \cdot \int_0^\epsilon t^{\sigma/2-1-1/2} dt \\ &= \left[\frac{t^{\sigma/2-1/2}}{\sigma/2-1/2} \right]_0^\epsilon \\ &= \left[\frac{\epsilon^{\sigma/2-1/2}}{\sigma/2-1/2} \right] \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

(B) Para todo $n \geq 1$ e $t \geq t_0$, é verdade que

$$\begin{aligned} \int_{1/\epsilon}^\infty e^{-\pi n^2 t} \cdot t^{\sigma/2-1} dt &\leq \int_{1/\epsilon}^\infty e^{-\pi n^2 t/2} \cdot \underbrace{\frac{t^{\sigma/2-1}}{e^{\pi n^2 t/2}}}_{\leq 1} dt \\ &\leq \int_{1/\epsilon}^\infty e^{-\pi n^2 t/2} dt \\ &= \frac{e^{-\frac{\pi n^2}{2\epsilon}}}{\frac{\pi n^2}{2}} \\ &\leq e^{-\frac{\pi n^2}{2\epsilon}}. \end{aligned}$$

Portanto,

3.5. A FUNÇÃO ZETA ADÉLICA

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \geq 1} \int_{1/\epsilon}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} \cdot t^{\sigma/2-1} dt &\leq \sum_{n \geq 1} e^{-\frac{\pi n^2}{2\epsilon}} \\
 &\leq \sum_{n \geq 1} e^{-\frac{\pi n}{2\epsilon}} \\
 &= \frac{e^{-\frac{\pi}{2\epsilon}}}{1 - e^{-\frac{\pi}{2\epsilon}}} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0.
 \end{aligned}$$

□

Em suma, provamos que se $\epsilon \rightarrow 0$, então para todo s fixado, temos que:

$$\int_{\epsilon}^{1/\epsilon} \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 t} \cdot t^{s/2-1} dt \xrightarrow{\text{unif.}} \sum_{n \geq 1} \left[\int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 t} \cdot t^{s/2-1} dt \right].$$

■

Em vista do último teorema (3.5.1), denotaremos:

$$\psi(t) \doteq \frac{\theta(t) - 1}{2}.$$

e definimos a função **zeta adélica** por,

$$\zeta_A(s) = \pi^{-s/2} \cdot \Gamma(s/2) \cdot \zeta(s).$$

Assim, para $\Re(s) > 1$, vale:

$$\zeta_A(s) = \int_0^{\infty} \psi(x) \cdot x^{s/2-1} dx.$$

Melhorando o lado direito, escrevemos:

$$\begin{aligned}
 1 + 2 \cdot \psi(x) &= \theta(x) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \theta(1/x) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot (1 + 2 \cdot \psi(1/x)).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \psi(1/x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}.$$

Substituindo na integral, ficamos com:

$$\begin{aligned} \zeta_A(s) &= \int_0^\infty \psi(x) \cdot x^{s/2-1} dx \\ &= \int_0^1 \psi(x) \cdot x^{s/2-1} dx + \int_1^\infty \psi(x) \cdot x^{s/2-1} dx \\ &= \underbrace{\int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \psi(1/x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \right] \cdot x^{s/2-1} dx}_{(1)} + \int_1^\infty \psi(x) \cdot x^{s/2-1} dx. \end{aligned}$$

(1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 x^{s/2-1-1/2} dx &= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^{s/2-1/2}}{s/2-1/2} \right]_0^1 = \frac{1}{s-1}, \\ \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 x^{s/2-1} dx &= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^{s/2}}{s/2} \right]_0^1 = \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\zeta_A(s) = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \psi(1/x) \cdot x^{s/2-1} dx}_{(2)} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty \psi(x) \cdot x^{s/2-1} dx.$$

(2) Fazendo a mudança de variáveis $\frac{1}{x} = t$, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \psi(1/x) \cdot x^{s/2-1} dx &= \int_1^\infty t^{1/2} \cdot \psi(t) \cdot t^{-s/2+1} t^{-2} dt \\ &= \int_1^\infty \psi(t) \cdot t^{-s/2-1/2} dt \\ &= \int_1^\infty \psi(t) \cdot t^{\frac{(1-s)}{2}-1} dt. \end{aligned}$$

3.5. A FUNÇÃO ZETA ADÉLICA

Portanto, se $\Re(s) > 1$, então

$$\zeta_A(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty \psi(x) \cdot x^{-1} \cdot \left[x^{s/2} + x^{\frac{(1-s)}{2}} \right] dx.$$

Observação: se $x \geq 1$, pelo teorema 3.4.1, temos

$$|\psi(x)| = \frac{|\theta(x) - 1|}{2} \leq \frac{\tilde{c}}{2} \cdot e^{-\pi x}.$$

Portanto, a integral

$$F(s) \doteq \int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x} \cdot \left[x^{s/2} + x^{\frac{(1-s)}{2}} \right] dx$$

converge, para todo $s \in \mathbb{C}$. Seja $F_N(s)$, $N \geq 1$, a função dada por:

$$F_N(s) = \int_1^N \frac{\psi(x)}{x} \cdot \left[x^{s/2} + x^{\frac{(1-s)}{2}} \right] dx.$$

Sabemos, pelo lema 3.1.1 que $F_N(s)$ é holomorfa, para todo $N \geq 1$.

Assim, se $\sigma = \Re(s)$, temos

$$\begin{aligned} |F_N(s) - F(s)| &= \left| \int_N^\infty \frac{\psi(x)}{x} \cdot \left[x^{s/2} + x^{\frac{(1-s)}{2}} \right] dx \right| \\ &\leq \int_N^\infty \frac{\tilde{c}}{2x} \cdot e^{-\pi x} \cdot \left[x^{\sigma/2} + x^{\frac{(1-\sigma)}{2}} \right] dx \\ &= \frac{\tilde{c}}{2} \cdot \int_N^\infty e^{-\pi x/2} \cdot \underbrace{\left[x^{\sigma/2-1} + x^{\frac{(-1-\sigma)}{2}} \right]}_{\leq 1} dx \end{aligned}$$

Note que, para todo σ real,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{\sigma/2-1} + x^{\frac{(-1-\sigma)}{2}}}{e^{\pi x/2}} \right] = 0.$$

Portanto, existe N_0 tal que, para todo $x \geq N_0$,

$$\frac{\left[x^{\sigma/2-1} + x^{\frac{(-1-\sigma)}{2}} \right]}{e^{\pi x/2}} \leq 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |F_N(s) - F(s)| &\leq \frac{\tilde{c}}{2} \cdot \int_N^\infty e^{-\pi x/2} dx \\ &= \frac{\tilde{c}}{2} \cdot \left[\frac{e^{-\pi x/2}}{-\pi/2} \right]_N^\infty \\ &= \frac{\tilde{c}}{2} \cdot \frac{e^{-\pi N/2}}{\pi/2} \xrightarrow{\text{comp.}} 0. \end{aligned}$$

Em palavras, $F_N(s)$ converge compactamente para $F(s)$ e, portanto, a integral

$$\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x} \cdot \left[x^{s/2} + x^{\frac{(1-s)}{2}} \right] dx$$

é uma função holomorfa na variável s em todo plano complexo. O resumo dessa discussão está feito no próximo teorema.

Teorema 3.5.3. *A função $\zeta_A(s) = \pi^{-s/2} \cdot \Gamma(s/2) \cdot \zeta(s)$ admite um prolongamento meromorfo a todo $\mathbb{C}$ com pólo simples em $s = 0, 1$. Além disso, para todo $s \neq 0, 1$, vale*

$$\zeta_A(s) = \zeta_A(1-s)$$

Demonstração. Pelas observações feitas antes do teorema,

$$\zeta_A(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \underbrace{\int_1^\infty \psi(x) \cdot x^{-1} \cdot \left[x^{s/2} + x^{\frac{(1-s)}{2}} \right] dx}_{\in \mathcal{H}(\mathbb{C})}.$$

Com a fórmula acima é fácil notar que a função $\zeta_A(s)$ é invariante pela mudança de variável $s \leftarrow 1-s$. ■

3.5. A FUNÇÃO ZETA ADÉLICA

Corolário 3.5.4. $\zeta(s)$ possui uma continuação meromorfa a todo $\mathbb{C}$ com um único pólo simples em $s = 1$ com resíduo igual a 1.

Demonstração. Escrevemos

$$\zeta(s) \doteq \frac{\zeta_A(s) \cdot \pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}.$$

Note que:

1. $\zeta_A(s)$ possui pólos simples em $s = 0, 1$.
2. Pelo teorema 3.1.4, $\Gamma(s/2)$ possui pólos simples em $s = 0, -2, -4, \dots$.

Portanto, $\zeta(s)$ possui uma singularidade removível em $s = 0$, um pólo simples em $s = 1$ e zeros simples em $s = -2, -4, \dots$. Além disso,

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s - 1) \cdot \zeta(s) = \frac{1 \cdot \pi^{1/2}}{\Gamma(1/2)}.$$

Pelo lema 3.2.2, obtemos que

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Portanto,

$$\text{Resíduo}(\zeta, s = 1) = \lim_{s \rightarrow 1} (s - 1) \cdot \zeta(s) = 1.$$

■

Corolário 3.5.5. Vale a seguinte propriedade para a função Zeta Adélica:

$$\zeta_A(\bar{s}) = \overline{\zeta_A(s)}.$$

Demonstração. Pelas contas feitas anteriormente, sabemos que:

$$\zeta_A(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x} \cdot [x^{s/2} + x^{(1-s)/2}] dx}_{A(s)}.$$

Portanto, para provar o corolário, basta mostrar que a tese é válida para a função $A(s)$.

Primeiramente, note que se $s = \sigma + it$, então:

$$\begin{aligned}
 \overline{x^{s/2}} &= \overline{\left[e^{\frac{(\sigma+it) \cdot \log x}{2}} \right]} \\
 &= e^{\frac{(\sigma-it) \cdot \log x}{2}} \\
 &= e^{\frac{\bar{s} \cdot \log x}{2}} \\
 &= x^{\bar{s}/2}.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Consequentemente,

$$\overline{x^{(1-s)/2}} = x^{(1-\bar{s})/2}.$$

Além disso, se $f(x) = u(x) + iv(x)$, então:

$$\begin{aligned}
 \int_a^b \overline{f(s)} dx &= \int_a^b \overline{u(x) + iv(x)} dx \\
 &= \int_a^b u(x) - iv(x) dx \\
 &= \int_a^b u(x) dx - i \cdot \int_a^b v(x) dx \\
 &= \overline{\left[\int_a^b u(x) dx + i \cdot \int_a^b v(x) dx \right]} \\
 &= \overline{\int_a^b f(s) dx}.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Portanto,

3.5. A FUNÇÃO ZETA ADÉLICA

$$\begin{aligned}
A(\bar{s}) &= \int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x} \cdot [x^{\bar{s}/2} + x^{(1-\bar{s})/2}] dx \\
&\stackrel{(3.9)}{=} \int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x} \cdot [\overline{x^{s/2}} + \overline{x^{(1-s)/2}}] dx \\
&= \int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x} \cdot \overline{[x^{s/2} + x^{(1-s)/2}]} dx \\
&= \overline{\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x} \cdot [x^{s/2} + x^{(1-s)/2}] dx} \\
&\stackrel{(3.10)}{=} \overline{\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x} \cdot [x^{s/2} + x^{(1-s)/2}] dx} \\
&= \overline{A(s)}.
\end{aligned}$$

■

Conclusões:

1. A função $\zeta(s)$ possui zeros em $s = -2, -4, \dots$ devido aos pólos de $\Gamma(s/2)$. Esses zeros são chamados **zeros triviais** da função Zeta.
2. $\zeta(s)$ não possui zeros em $\Re(s) > 1$ o que implica que $\zeta_A(s)$ também não possui. Portanto, pela equação funcional em 3.5.3, concluímos que $\zeta_A(s)$ não possui zeros em $\Re(s) < 0$.
3. A função $\zeta(s)$ possui um único pólo simples em $s = 1$.

Mostraremos em breve que na faixa $0 \leq \Re(s) \leq 1$, a função $\zeta(s)$ possui infinitos zeros. Essa região é denotada **faixa crítica** da função zeta. A figura abaixo ilustra essas observações.

Figura 3.2: Zeros não triviais de $\zeta(s)$ em $0 \leq \Re(s) \leq 1$.

3.6 A Função $\xi(s)$

Vimos em 3.5.3 que a função $\zeta_A(s)$ possui pólos simples em $s = 0$ e $s = 1$ e que vale

$$\zeta_A(s) = \zeta_A(1-s).$$

Definição 3.6.1. A função $\xi(s)$ é definida por:

$$\xi(s) = \frac{1}{2} \cdot s \cdot (s-1) \cdot \zeta_A(s).$$

Note que:

1. $\xi(s)$ é uma função inteira, pois os pólos da ζ_A se anulam com os zeros de $s \cdot (s-1)$;

3.6. A FUNÇÃO $\xi(s)$

2. Por 3.5.3,

$$\xi(s) = \xi(1-s); \quad (3.11)$$

3. Por 3.5.5, temos que:

$$\xi(\bar{s}) = \overline{\xi(s)}; \quad (3.12)$$

4. Como a ζ_A , a função ξ não possui zeros em $\Re(s) > 1$ tampouco em $\Re(s) < 0$. Além disso, os zeros da ξ , se existirem, são os zeros não triviais da função zeta.

O próximo teorema será responsável por mostrar que, de fato, os zeros não triviais da função ζ existem e são infinitos.

Teorema 3.6.1. *A função $\xi(s)$ é inteira de ordem $\rho = 1$ e o expoente de convergência das suas raízes é $\mu = 1$. A fatoração de $\xi(s)$, segundo o teorema de fatoração de Weierstrass (2.3.2) é dado por:*

$$\xi(s) = e^{A+Bs} \cdot \prod_{\rho} (1-s/\rho)e^{s/\rho},$$

onde $A = \log 1/2$ e $B = -1 - \frac{\gamma}{2} + \frac{\log 4\pi}{2}$ e ρ são as raízes não triviais da função $\zeta(s)$.

Além disso, para todo $\epsilon > 0$, valem:

$$\begin{aligned} \sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|^{1+\epsilon}} &< \infty; \\ \sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|^{1-\epsilon}} &= \infty; \\ \sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|} &= \infty. \end{aligned}$$

Demonstração. Vamos separar a prova do teorema em partes.

(1) A função $\xi(s)$ é inteira de ordem $\rho = 1$.

Afirmção: Devido a 3.11, basta entender o crescimento de $|\xi(s)|$ para $\Re(s) \geq 1/2$.

De fato, se $\Re(s) \geq 1/2$, então $\Re(1-s) \leq 1/2$. Por hipótese, para $A > 0$, suponha que existe R tal que:

$$|\xi(s)| \leq e^{|s|^A},$$

para todo s tal que $|s| > R$ e $\Re(s) \geq 1/2$.

Portanto, se $\Re(s) \leq 1/2$, vale:

$$\begin{aligned} |\xi(s)| &\stackrel{(3.11)}{=} |\xi(1-s)| \\ &\leq_{\Re(1-s) \geq 1/2} e^{|1-s|^A} \\ &\leq e^{|s|^A \cdot \left|1 - \frac{1}{s}\right|^A} \\ &\leq e^{2 \cdot |s|^A}. \end{aligned}$$

para s com $|s|$ a partir de um certo R_1 , já que

$$\left|1 - \frac{1}{s}\right|^A \rightarrow 1. \tag{3.13}$$

□

Seja $\Re(s) = \sigma$. Por definição,

$$\begin{aligned} \xi(s) &= \frac{1}{2} \cdot s \cdot (s-1) \cdot \zeta_A(s) \\ \Rightarrow |\xi(s)| &= \frac{1}{2} \cdot |s| \cdot \pi^{-\sigma/2} \cdot \underbrace{|\Gamma(s/2)|}_{(A)} \cdot \underbrace{|(s-1)| |\zeta(s)|}_{(B)}. \end{aligned}$$

Vamos agora, calcular a ordem de cada um dos fatores acima. Primeiramente, note que a ordem de $|s|$ é zero e a ordem de $\pi^{-\sigma/2}$ é 1.

3.6. A FUNÇÃO $\xi(S)$

(B) Pelo corolário 5.1.2 do apêndice, sabemos que existe uma extensão holomorfa da função ζ em $\Re(s) > 0$ dada por:

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \cdot \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |s-1| \cdot |\zeta(s)| &\leq |s| + |s| \cdot |s-1| \cdot \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^{\sigma+1}} dt \\ &\stackrel{(\{t\} \leq 1)}{\leq} |s| + |s| \cdot |s-1| \cdot \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{t^{\sigma+1}} dt}_{=1/\sigma} \\ &\stackrel{(\sigma \geq 1/2)}{\leq} |s| + 2 \cdot |s| \cdot |s-1| \\ &\stackrel{(|s| > R)}{\leq} 3 \cdot |s|^2. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Portanto, a ordem de $(s-1) \cdot \zeta(s)$ é zero.

(A) Pela fórmula limite de Euler (3.6), sabemos que:

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s} \cdot e^{-\gamma \cdot s} \left(\prod_{k \geq 1} \left(1 + \frac{s}{k} \right) \cdot e^{-s/k} \right)^{-1}.$$

Observe que valem as seguintes afirmações:

- $\frac{1}{s}$ não afeta a ordem da função $\Gamma(s)$.
- $e^{-\gamma \cdot s}$ possui ordem 1.
- $\prod_{k \geq 1} \left(1 + \frac{s}{k} \right) \cdot e^{-s/k}$ possui ordem 1 devido ao teorema de Borel (2.7.1).

Pela proposição 2.5.1, a ordem de $\Gamma(s)$ deve ser menor ou igual a 1 e, portanto, a ordem da função $\xi(s)$ deve ser menor ou igual a 1.

Falta, ainda, mostrar que a ordem é maior ou igual a 1. Seja $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$.

$$\xi(s) = \frac{1}{2} \cdot s \cdot (s-1) \cdot \pi^{-s/2} \cdot \Gamma(s/2) \cdot \zeta(s).$$

Pelas definições da função Gamma (3.1) e da função Zeta (3.8), vemos que todos os termos da expressão acima são positivos e, portanto, podemos tirar o logaritmo. Temos:

$$\log \xi(s) = \log \frac{1}{2} + \log s + \log(s-1) - \frac{s}{2} \cdot \log \pi + \log \Gamma(s/2) + \log \zeta(s).$$

Dividindo por $s \cdot \log s$, ficamos com:

$$\frac{\log \xi(s)}{s \cdot \log s} = \frac{\log \frac{1}{2}}{s \cdot \log s} + \frac{1}{s} + \frac{\log(s-1)}{s \cdot \log s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\log \pi}{\log s} + \underbrace{\frac{\log \Gamma(s/2)}{s \cdot \log s}}_{(1)} + \underbrace{\frac{\log \zeta(s)}{s \cdot \log s}}_{(2)}.$$

Fazendo s tender ao infinito, o lado direito vai para 0, exceto pelos dois últimos termos, que faremos separadamente.

(2) Vimos em 3.14 que se $s > R > 1$, então:

$$(s-1) \cdot |\zeta(s)| \leq 3 \cdot s^2.$$

Além disso, sabemos que $\zeta(s) > 0$ na região em questão e, portanto, existe k tal que:

$$\zeta(s) \leq k \cdot s.$$

Portanto, o termo

$$\frac{\log \zeta(s)}{s \cdot \log s} \leq \frac{\log(k \cdot s)}{s \cdot \log s} \rightarrow 0.$$

(1) Tomo $s = 2 \cdot n$, $n \in \mathbb{N}$. Assim:

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{2 \cdot n}{2}\right) = \Gamma(n) = (n-1)!.$$

Pelo corolário 5.1.3 do apêndice, sabemos que

$$\log n! = n \cdot \ln n - n + O(\ln n).$$

3.6. A FUNÇÃO $\xi(s)$

Então temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\log \Gamma(s/2)}{s \cdot \log s} &= \frac{\log \Gamma(n)}{2 \cdot n \cdot \log(2n)} \\
 &= \frac{\log(n-1)!}{2 \cdot n \cdot \log(2n)} \\
 &= \frac{(n-1) \cdot \log(n-1) - (n-1) + O(\log n)}{2 \cdot n \cdot \log(2n)} \\
 &= \frac{(n-1) \cdot \log(n-1)}{2 \cdot n \cdot \log(2n)} - \underbrace{\frac{(n-1) + O(\log n)}{2 \cdot n \cdot \log(2n)}}_{\rightarrow 0}
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \Gamma(n)}{2 \cdot n \cdot \log(2n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1) \cdot \log(n-1)}{2 \cdot n \cdot \log(2n)} \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Portanto, se $s \rightarrow \infty$,

$$\frac{\log \xi(s)}{s \cdot \log s} \rightarrow \frac{1}{2}. \quad (3.15)$$

Suponha que a ordem de $\xi(s)$ seja menor que 1 ($\rho < 1$), ou seja, suponha que exista $\epsilon > 0$ tal que:

$$|\xi(s)| \leq m(\xi, |s|) \leq e^{|s|^{1-\epsilon}},$$

para todo s tal que $|s|$ é maior que um certo $R > 1$.

Se $s \in \mathbb{R}$, $s > R > 1$, então $\xi(s)$ assume valores reais positivos e vale:

$$\begin{aligned}
 \xi(s) &\leq e^{s^{1-\epsilon}} \\
 \Rightarrow \log \xi(s) &\leq s^{1-\epsilon}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\log \xi(s)}{s \cdot \log s} \leq \frac{s^{1-\epsilon}}{s \cdot \log s} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0,$$

um absurdo, pois já sabemos que

$$\frac{\log \xi(s)}{s \cdot \log s} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \frac{1}{2}.$$

Portanto, $\rho \geq 1$, o que implica que

$$\rho = 1.$$

□

(2) O expoente de convergência das raízes de ξ é $\mu = 1$.

Definimos

$$\Xi(s) \doteq \xi\left(\frac{1}{2} + is\right),$$

claramente uma função inteira de ordem 1. Observe que devido a equação funcional da $\xi(s)$ (3.11), temos:

$$\begin{aligned} \Xi(s) &= \xi\left(\frac{1}{2} + is\right) \\ &= \xi\left(1 - \frac{1}{2} - is\right) \\ &= \xi\left(\frac{1}{2} - is\right) \\ &= \Xi(-s) \end{aligned}$$

Portanto, $\Xi(s)$ é uma função par, inteira de ordem 1.

Afirmção: A função

$$k(s) \doteq \Xi(\sqrt{s})$$

é inteira de ordem $1/2$.

De fato, se $\Xi(s)$ possui ordem 1, então existe R tal que:

$$|\Xi(s)| \leq e^{|s|^{1+\epsilon}},$$

para todo $\epsilon > 0$, para todo s com $|s| > R$.

3.6. A FUNÇÃO $\tilde{\xi}(s)$

Assim,

$$\begin{aligned} |\Xi(\sqrt{s})| &\leq e^{|\sqrt{s}|^{1+\epsilon}} \\ &\leq e^{|s|^{\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}}}, \end{aligned}$$

para todo $\epsilon > 0$, para todo s com $|s| > R$. Então a ordem de $k(s)$ dever ser menor ou igual a $\frac{1}{2}$.

Por outro lado, sabemos que existe uma sequência de números complexos $\{s_n : |s_n| \rightarrow \infty\}$ tal que:

$$|\Xi(s_n)| \geq e^{|s_n|^{1-\epsilon}}.$$

Então,

$$\begin{aligned} |\Xi(\sqrt{s_n})| &\geq e^{|\sqrt{s_n}|^{1-\epsilon}} \\ &\geq e^{|s_n|^{\frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{2}}}. \end{aligned}$$

Portanto, a ordem de $k(s)$ é $\frac{1}{2}$.

□

Pelo corolário do teorema de Hadamard (2.7.7), o expoente de convergência das raízes de $k(s)$ também deve ser $\frac{1}{2}$.

Sejam $\{z_n\}$ os zeros não nulos de $k(s)$. Então, para todo $\epsilon > 0$, valem:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{|z_n|^{\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}}} < \infty \quad \text{e} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{|z_n|^{\frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{2}}} = \infty.$$

É claro que se z_n é um zero de $k(s) = \Xi(\sqrt{s})$, então $s_n = \sqrt{z_n}$ é zero de $\Xi(s)$. Assim, valem:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\left(|z_n|^{\frac{1}{2}}\right)^{1+\epsilon}} < \infty \quad \text{e} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\left(|z_n|^{\frac{1}{2}}\right)^{1-\epsilon}} = \infty.$$

Portanto, a função $\Xi(s)$ possui expoente de convergência igual a 1. Precisamos ainda encontrar o expoente de convergência da função $\xi(s)$.

Note que, pelo fato de $\Xi(s) = \xi(\frac{1}{2} + is)$ e de s_n ser raiz de $\Xi(s)$, então $\frac{1}{2} + is_n$ é raiz de $\xi(s)$. Se $|s_n| > 1/2$, então:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2} + is_n \right| &\leq |s_n| + \frac{1}{2} \\ &\leq 2|s_n| \\ \Rightarrow \frac{1}{\left| \frac{1}{2} + is_n \right|^{1-\epsilon}} &\geq \frac{1}{(|s_n| + \frac{1}{2})^{1-\epsilon}} \\ &\geq \frac{1}{2^{1-\epsilon} \cdot |s_n|^{1-\epsilon}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\left| \frac{1}{2} + is_n \right|^{1-\epsilon}} \geq \frac{1}{K} \cdot \sum_{n \geq 1} \frac{1}{|s_n|^{1-\epsilon}} = \infty.$$

Enfim, concluímos que $\mu \geq 1$.

Como a ordem da função $\xi(s)$ é 1, pela proposição 2.6.2, concluímos que o expoente de convergência das raízes de $\xi(s)$ é $\mu = 1$.

□

Observação: É importante notar que esse fato prova a existência de infinitas raízes na faixa crítica.

(3) O λ do produto canônico vale 1 e a função $\xi(s)$ pode ser escrita por:

$$\xi(s) = e^{A+Bs} \cdot \prod_{\rho} (1 - s/\rho) e^{s/\rho},$$

Vimos na seção 2.6 que $\lambda \leq \mu \leq \lambda + 1$. Portanto, $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$. Note que, pela definição de λ (2.9),

3.6. A FUNÇÃO $\xi(S)$

$$\sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|} < \infty \Leftrightarrow \lambda = 0,$$

$$\sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|} = \infty \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

Suponha, por contradição, que $\lambda = 0$. Por Hadamard (2.7.5), é verdade que:

$$\xi(s) = e^{A+\tilde{B}s} \cdot \prod_{\rho} (1 - s/\rho).$$

Por 2.6, sabemos que

$$|(1 - z)| \leq 1 + |z| \leq e^{|z|}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |\xi(s)| &\leq e^{A+B|s|} \cdot \prod_{\rho} e^{|s|/|\rho|} \\ &\leq e^{A+B|s|} \cdot e^{|s| \cdot \sum \frac{1}{|\rho|}} \\ &\leq C \cdot e^{K|s|}. \end{aligned}$$

Assim, se $s > 1$, s real, vale:

$$\frac{\log \xi(s)}{s \cdot \log s} \leq \frac{K \cdot s}{s \cdot \log s} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0.$$

Um absurdo, pois já vimos em 3.15, que a função acima tende a $1/2$. Portanto, $\lambda = 1$ e vale a fórmula dada para $\xi(s)$.

Além disso,

$$\sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|} = \infty.$$

□

(4) A função $\xi(s)$ não se anula quando $s \in]0, 1[$.

Afirmção: A função

$$u(s) = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots .$$

é holomorfa em $\Re(s) > 0$.

De fato, pela fórmula de Abel (5.1.1) do apêndice, sabemos que:

$$\begin{aligned} u(x, s) &= \sum_{k=1}^{[x]} \frac{(-1)^{k+1}}{k^s} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{x^s} + s \cdot \int_1^x \frac{A(t)}{t^{s+1}} dt, & \text{se } [x] \text{ for ímpar;} \\ s \cdot \int_1^x \frac{A(t)}{t^{s+1}} dt, & \text{caso contrário,} \end{cases} \end{aligned}$$

onde

$$A(t) = \sum_{k \leq t} (-1)^{k+1}.$$

A integral acima converge em $\Re(s) > 0$ e fazendo $x \rightarrow \infty$, obtemos:

$$u(s) = s \cdot \int_1^\infty \frac{A(t)}{t^{s+1}} dt.$$

Pelo lema 3.1.1, $u(s)$ é uma função holomorfa em $\Re(s) > 0$.

□

Sendo assim, para $s > 1$, vale:

$$\begin{aligned} \zeta(s) - u(s) &= 2 \cdot \left[\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \cdots \right] \\ &= \frac{2}{2^s} \cdot \left[\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots \right] \\ &= 2^{1-s} \cdot \zeta(s). \end{aligned}$$

Ou seja,

3.6. A FUNÇÃO $\xi(s)$

$$(1 - 2^{1-s}) \cdot \zeta(s) = u(s).$$

Entretanto, o termo $(1 - 2^{1-s})$ não se anula em $]0, 1]$. Além disso, observe que:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} \right) + \left(\frac{1}{5^s} - \frac{1}{6^s} \right) + \cdots > 0 \\ \Rightarrow u(s) - 1 + \frac{1}{2^s} & > 0 \\ \Rightarrow u(s) & > 1 - \frac{1}{2^s} > 0, \end{aligned}$$

para todo $s \in]0, 1[$.

Portanto, $\zeta(s)$ não se anula em $]0, 1]$. Recordamos que a função $\xi(s)$ é definida por:

$$\xi(s) = \frac{1}{2} \cdot s \cdot (s-1) \cdot \pi^{-s/2} \cdot \Gamma(s/2) \cdot \zeta(s).$$

Como queríamos demonstrar, $\xi(s)$ não se anula em $]0, 1[$.

□

(5) A função $\xi(s)$ pode ser dada por:

$$\xi(s) = \xi(0) \cdot \prod_{\Im(\rho) > 0} \left\{ \left(1 - \frac{s}{\rho} \right) \cdot \left(1 - \frac{s}{1-\rho} \right) \right\}, \quad (3.16)$$

onde $\xi(0) = 1/2$. Mostramos no item anterior que a função $\xi(s)$ não se anula se s for real, portanto:

$$\begin{aligned} \xi(s) &= e^{A+Bs} \cdot \prod_{\rho} (1 - s/\rho) e^{s/\rho} \\ &= e^{A+Bs} \cdot \prod_{\Im(\rho) > 0} (1 - s/\rho) e^{s/\rho} \cdot \prod_{\Im(\rho) < 0} (1 - s/\rho) e^{s/\rho}. \end{aligned}$$

Pela equação funcional da $\xi(s)$, temos:

$$\begin{aligned}\xi(s) &= e^{A+B s} \cdot \prod_{\Im(\rho)>0} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho} \cdot \prod_{\Im(\rho)>0} \left(1 - \frac{s}{1-\rho}\right) e^{s/(1-\rho)} \\ &= e^{A+B s} \cdot e^{s \cdot \sum_{\Im(\rho)>0} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{1-\rho}\right)} \cdot \prod_{\Im(\rho)>0} \left\{ \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) \cdot \left(1 - \frac{s}{1-\rho}\right) \right\},\end{aligned}$$

Note que podemos tirar os fatores $e^{s/\rho}$ do produto, pois o produto da direita converge.

Portanto, $\xi(0) = e^A$. Pelo teorema 3.5.3 sabemos que:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \zeta_A(s) = -1.$$

Portanto,

$$\xi(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot s \cdot (s-1) \cdot \zeta_A(s) = \frac{1}{2}.$$

Além disso, mostramos que $A = \log 1/2$. Para concluir a prova, basta mostrar que

$$B = - \sum_{\Im(\rho)>0} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{1-\rho} \right).$$

(6) Cálculo do valor de **B**

Pelo teorema 2.2.6, podemos tirar a derivada logarítmica de:

$$\xi(s) = e^{A+B s} \cdot \prod_{\rho} (1 - s/\rho) e^{s/\rho}.$$

Assim, obtemos:

3.6. A FUNÇÃO $\tilde{\xi}(S)$

$$\begin{aligned}
\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} &= \frac{(e^A)'}{e^A} + \frac{B \cdot e^{Bs}}{e^{Bs}} + \sum_{\rho} \left[\frac{((1-s/\rho)e^{s/\rho})'}{(1-s/\rho)e^{s/\rho}} \right] \\
&= B + \sum_{\rho} \left[\frac{(-1/\rho)e^{s/\rho} + (1-s/\rho) \cdot 1/\rho \cdot e^{s/\rho}}{(1-s/\rho)e^{s/\rho}} \right] \\
&= B + \sum_{\rho} \left[\frac{(-1/\rho) + (1-s/\rho) \cdot 1/\rho}{(1-s/\rho)} \right] \\
&= B + \sum_{\rho} \left[\frac{-1 + (1-s/\rho)}{\rho \cdot (1-s/\rho)} \right] \\
&= B + \sum_{\rho} \left[\frac{1}{(s-\rho)} + \frac{1}{\rho} \right]. \tag{3.17}
\end{aligned}$$

Portanto, se $s = 0$, temos:

$$B = \frac{\xi'(0)}{\xi(0)}.$$

Pela equação funcional de $\xi(s)$,

$$\begin{aligned}
\xi(s) &= \xi(1-s) \\
\Rightarrow \xi'(s) &= -\xi'(1-s).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\xi'(0)}{\xi(0)} = -\frac{\xi'(1)}{\xi(1)} \\
&= -B - \sum_{\rho} \left[\frac{1}{(1-\rho)} + \frac{1}{\rho} \right].
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
2 \cdot B &= - \sum_{\rho} \left[\frac{1}{(1-\rho)} + \frac{1}{\rho} \right] \\
\therefore B &= - \sum_{\Im \rho > 0} \left[\frac{1}{(1-\rho)} + \frac{1}{\rho} \right].
\end{aligned}$$

Concluindo, assim, a prova de (5). Para concluir a prova do teorema, precisamos encontrar o valor de B explicitamente.

$$(7) \quad B = -1 - \frac{\gamma}{2} + \frac{\log 4\pi}{2}.$$

Tirando a derivada logaritmica de

$$\xi(s) = \frac{1}{2} \cdot s \cdot (s-1) \cdot \pi^{-s/2} \cdot \Gamma(s/2) \cdot \zeta(s),$$

obtemos:

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \cdot \log \pi + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'(s/2+1)}{\Gamma(s/2+1)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}. \quad (3.18)$$

(7.1) Cálculo de:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'(1/2+1)}{\Gamma(1/2+1)}.$$

Da fórmula limite de Euler (3.6), sabemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(s)} &= s \cdot e^{\gamma \cdot s} \prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{s}{n}\right) \cdot e^{-s/n} \\ \Rightarrow \Gamma(s) &= \frac{1}{s} \cdot e^{-\gamma \cdot s} \prod_{n \geq 1} \frac{e^{s/n}}{\left(1 + \frac{s}{n}\right)} \\ \Rightarrow s \cdot \Gamma(s) &= e^{-\gamma \cdot s} \prod_{n \geq 1} \frac{e^{s/n}}{\left(1 + \frac{s}{n}\right)}. \end{aligned}$$

Utilizando a equação funcional da função Γ , temos:

$$\begin{aligned} \Gamma(s+1) &= e^{-\gamma \cdot s} \prod_{n \geq 1} \frac{e^{s/n}}{\left(1 + \frac{s}{n}\right)} \\ \therefore \Gamma(s/2+1) &= e^{-\gamma \cdot s/2} \prod_{n \geq 1} \frac{e^{s/2n}}{\left(1 + \frac{s}{2n}\right)}. \end{aligned}$$

3.6. A FUNÇÃO $\xi(S)$

Pelo teorema da diferenciação (2.2.6), vale:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'(s/2 + 1)}{\Gamma(s/2 + 1)} &= \frac{(e^{-\gamma \cdot s/2})'}{e^{-\gamma \cdot s/2}} + \sum_{n \geq 1} \left[\frac{\frac{1}{2n} \cdot e^{s/2n} \cdot \left(1 + \frac{s}{2n}\right) - \frac{1}{2n} \cdot e^{s/2n}}{\left(1 + \frac{s}{2n}\right)^2} \cdot \frac{\left(1 + \frac{s}{2n}\right)}{e^{s/2n}} \right] \\
 &= -\frac{\gamma}{2} + \sum_{n \geq 1} \left[\frac{\frac{1}{2n} \cdot \left(1 + \frac{s}{2n}\right) - \frac{1}{2n}}{\left(1 + \frac{s}{2n}\right)} \right] \\
 &= -\frac{\gamma}{2} + \sum_{n \geq 1} \left[\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n + s} \right].
 \end{aligned}$$

Tomando $s = 1$, temos que:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'(1/2 + 1)}{\Gamma(1/2 + 1)} = -\frac{\gamma}{2} + \sum_{n \geq 1} \left[\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n + 1} \right].$$

Note que

$$\sum_{n \geq 1} \left[\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n + 1} \right] = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \cdots.$$

Fazendo a expansão de Taylor do log em torno de $s = 1$, temos que

$$\begin{aligned}
 \log 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \\
 \therefore \sum_{n \geq 1} \left[\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n + 1} \right] &= 1 - \log 2.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'(1/2 + 1)}{\Gamma(1/2 + 1)} = -\frac{\gamma}{2} + 1 - \log 2.$$

(7.2) Cálculo de:

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left[\frac{1}{s - 1} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right].$$

Inicialmente, note que:

$$\frac{1}{s-1} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{\zeta(s) + (s-1) \cdot \zeta'(s)}{(s-1) \cdot \zeta(s)}.$$

Vimos em 5.1.2 que se $\Re(s) > 0$, então:

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \frac{s}{s-1} - s \cdot \underbrace{\int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt}_{I(s)} \\ \Rightarrow \zeta(s) &= \frac{s}{s-1} - s \cdot I(s) \\ \Rightarrow \zeta'(s) &= \frac{(s-1) - s}{(s-1)^2} - I(s) - s \cdot I'(s) \\ &= \frac{-1}{(s-1)^2} - I(s) - s \cdot I'(s).\end{aligned}$$

Então, temos:

$$\begin{aligned}(s-1) \cdot \zeta'(s) &= \frac{-1}{(s-1)} - (s-1) \cdot I(s) - s \cdot (s-1) \cdot I'(s) \\ \therefore \zeta(s) + (s-1) \cdot \zeta'(s) &= \frac{s}{s-1} - s \cdot I(s) - \frac{1}{(s-1)} \\ &\quad - (s-1) \cdot I(s) - s \cdot (s-1) \cdot I'(s) \\ &= 1 - [(2s-1) \cdot I(s) + s(s-1)I'(s)].\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow 1} \left[\frac{1}{s-1} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right] &= \lim_{s \rightarrow 1} \left[\frac{1 - [(2s-1) \cdot I(s) + s(s-1)I'(s)]}{(s-1) \cdot \zeta(s)} \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 1} \left[\frac{1}{(s-1) \cdot \zeta(s)} - \frac{(2s-1) \cdot I(s)}{(s-1) \cdot \zeta(s)} + \frac{s(s-1)I'(s)}{(s-1) \cdot \zeta(s)} \right].\end{aligned}$$

Calculando os limites separadamente, obtemos:

3.6. A FUNÇÃO $\xi(S)$

- Pelo corolário 3.5.4, sabemos que

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left[\frac{1}{(s-1) \cdot \zeta(s)} \right] = \frac{1}{\text{Res}(\zeta(s), s=1)} = 1.$$

- A segunda parcela resulta de:

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left[-\frac{(2s-1) \cdot I(s)}{(s-1) \cdot \zeta(s)} \right] = -I(1),$$

onde

$$\begin{aligned} I(1) &= \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt \\ &= \int_1^\infty \frac{1}{t} dt - \int_1^\infty \frac{[t]}{t^2} dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \int_1^N \frac{1}{t} dt - \int_1^N \frac{[t]}{t^2} dt \right\} \end{aligned}$$

No intervalo $[n, n+1]$, a parte inteira de t vale n e, portanto, a segunda integral vale:

$$\int_1^N \frac{[t]}{t^2} dt = \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} \frac{n}{t^2} dt$$

Voltando:

$$\begin{aligned} I(1) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \int_1^N \frac{1}{t} dt - \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} \frac{n}{t^2} dt \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \log N - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n+1} \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \log N - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} \right) + 1 \right\}. \end{aligned}$$

Pelo corolário 5.1.1,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \log N - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} \right) \right\} = -\gamma.$$

Portanto,

$$I(1) = 1 - \gamma.$$

- Vale a afirmação:

$$\lim_{s \rightarrow 1} [(s-1)I'(s)] = 0.$$

De fato, pelo lema 3.1.1, sabemos que

$$I(s) = \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt$$

é uma função holomorfa no semiplano $\Re(s) > 0$. Portanto, $I'(s)$ é limitada em uma vizinhança de $s = 1$.

Portanto, a terceira parcela vale 0.

Reunindo as contas acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1} \left[\frac{1}{s-1} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right] &= 1 + \gamma - 1 \\ &= \gamma. \end{aligned}$$

Voltando ao cálculo de $\mathbf{B}$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\xi'(1)}{\xi(1)} &= \lim_{s \rightarrow 1} \left[\frac{1}{s-1} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right] - \frac{1}{2} \cdot \log \pi + \lim_{s \rightarrow 1} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'(s/2 + 1)}{\Gamma(s/2 + 1)} \right] \\ &= \gamma - \frac{1}{2} \cdot \log \pi - \frac{\gamma}{2} + 1 - \log 2 \\ &= \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \cdot \log 4\pi + 1 \end{aligned}$$

Portanto,

$$B = -\frac{\xi'(1)}{\xi(1)} = -1 - \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \cdot \log 4\pi.$$

Concluindo, assim, a demonstração do teorema. ■

3.7 O Teorema de Von Mangoldt

Conforme veremos mais adiante, Riemann, em seu artigo, afirmou que o número de raízes não triviais ($\rho = \sigma + i\gamma$) da função zeta, com parte imaginária $0 < \gamma < T$, é da ordem de:

$$\frac{T}{2\pi} \cdot \log \left(\frac{T}{2\pi} \right) - \frac{T}{2\pi}.$$

Sua demonstração empírica para esse fato se resumia a dizer que o número de raízes na região considerada é igual a integral:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds.$$

onde ∂R é o caminho feito no sentido anti-horário do bordo do retângulo $R = \{s = \sigma + i\gamma : 0 \leq \sigma \leq 1; 0 \leq \gamma \leq T\}$.

Está claro que Riemann tinha em mente o Teorema dos Resíduos e é possível que tenha deduzido que seus leitores seriam capazes de estimar a integral acima. Se este foi o caso, a história mostrou que Riemann estava errado e apenas em 1905, Von Mangoldt mostrou a veracidade da afirmação de Riemann.

Antes de enunciarmos o teorema, precisaremos de alguns resultados.

Lema 3.7.1. *Seja $f(s)$ uma função holomorfa em Ω aberto de $\mathbb{C}$ contendo a imagem de $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, função C^1 por partes. Se $f(\bar{s}) = \overline{f(s)}$ em Ω , então vale:*

$$\int_{-\bar{\gamma}} f(s) ds = - \overline{\int_{\gamma} f(s) ds}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 \int_{-\bar{\gamma}} f(s) ds &= - \int_{\bar{\gamma}} f(s) ds \\
 &= - \int_a^b f(\overline{\gamma(t)}) \cdot \overline{\gamma'(t)} dt \\
 &\stackrel{(\text{hip.})}{=} - \int_a^b \overline{f(\gamma(t))} \cdot \overline{\gamma'(t)} dt \\
 &= - \int_{\gamma} \overline{f(s)} ds \\
 &= - \int_{\gamma} f(s) ds
 \end{aligned}$$

■

Lema 3.7.2. *Seja $\rho = \beta + i\gamma$ zero não trivial de $\zeta(s)$ com $T \neq \gamma$. Então valem:*

$$\begin{aligned}
 (i) \quad \sum_{\substack{\rho \\ |T-\gamma| < 1}} 1 &= O(\log T); \\
 (ii) \quad \sum_{\substack{\rho \\ |T-\gamma| < 1}} \left[\frac{1}{1 + (T - \gamma)^2} \right] &= O(\log T); \\
 (iii) \quad \sum_{\substack{\rho \\ |T-\gamma| \geq 1}} \left[\frac{1}{1 + (T - \gamma)^2} \right] &= O(\log T).
 \end{aligned}$$

Demonstração. Reunindo 3.17 e 3.18, obtemos:

$$B + \sum_{\rho} \left[\frac{1}{(s - \rho)} + \frac{1}{\rho} \right] = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \cdot \log \pi + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

Isolando o termo da função $\zeta(s)$ e tomando $s = 2 + iT$, temos:

3.7. O TEOREMA DE VON MANGOLDT

$$\underbrace{\frac{\zeta'(2+iT)}{\zeta(2+iT)}}_{(C)} = \underbrace{B - \frac{1}{1+iT} + \frac{1}{2} \cdot \log \pi}_{(A)} - \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'(2+iT/2)}{\Gamma(2+iT/2)}}_{(B)} + \sum_{\rho} \left[\frac{1}{(2+iT-\rho)} + \frac{1}{\rho} \right]. \quad (3.19)$$

(A) Essa parte é claramente uma função limitada e, portanto,

$$B - \frac{1}{1+iT} + \frac{1}{2} \cdot \log \pi = O(1).$$

(B) Por 5.1 do apêndice, sabemos que:

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \log s - \frac{1}{2s} + O\left(\frac{1}{|s|^2}\right),$$

onde $|Arg(s)| \leq \pi - \delta$ e $|s| \geq \delta > 0$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma'(\sigma/2 + iT/2)}{\Gamma(\sigma/2 + iT/2)} &= \log(\sigma/2 + iT/2) - \frac{1}{\sigma + iT} + O\left(\frac{1}{|T|^2}\right) \\ &= \log(\sigma/2 + iT/2) + O\left(\frac{1}{T}\right) \\ &= O(\log T). \end{aligned}$$

(C) Usando a fórmula produto de Euler (3.3.1) para a função Zeta, temos pelo teorema da diferenciação (2.2.6) que:

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_p \left[\frac{-(1-p^{-s})^{-2} \cdot p^{-s} \cdot \log p}{(1-p^{-s})^{-1}} \right] \\ &= - \sum_p \left[\frac{\log p}{(1-p^{-s}) \cdot p^s} \right] \end{aligned}$$

Mas note que se $|z| < 1$, então

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots .$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= - \sum_p \left[\frac{\log p}{(1 - p^{-s}) \cdot p^s} \right] \\ &= - \sum_p \left[\frac{\log p}{p^s} \cdot \left(\sum_{n \geq 0} \frac{1}{p^{ns}} \right) \right] \\ &= - \sum_p \sum_{m \geq 1} \frac{\log p}{p^{ms}} \\ &= - \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

onde $\Lambda(n)$ é dada por:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{se } n = p^k; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\zeta'(2 + iT)}{\zeta(2 + iT)} \right| &= \left| \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{2+iT}} \right| \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^2} \\ &= O(1). \end{aligned}$$

Substituindo em 3.19, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{\rho} \left[\frac{1}{(2 + iT - \rho)} + \frac{1}{\rho} \right] &= O(\log T) \\ \Rightarrow \sum_{\rho} \Re \left[\frac{1}{(2 + iT - \rho)} + \frac{1}{\rho} \right] &= O(\log T). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Pelo fato de $\Re(1/\rho) \geq 0$, temos:

$$\sum_{\rho} \Re \left[\frac{1}{(2 + iT - \rho)} \right] = O(\log T).$$

Além disso, como $\beta \in [0, 1]$, então:

$$\begin{aligned} \Re \left[\frac{1}{(2 + iT - \beta - i\gamma)} \right] &= \Re \left[\frac{1}{(2 - \beta + i(T - \gamma))} \right] \\ &= \left[\frac{2 - \beta}{(2 - \beta)^2 + (T - \gamma)^2} \right] \\ &\geq \left[\frac{1}{4 + (T - \gamma)^2} \right]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{\rho} \left[\frac{1}{1 + (T - \gamma)^2} \right] = O(\log T).$$

Em particular,

$$\sum_{|T - \gamma| < 1} \left[\frac{1}{1 + (T - \gamma)^2} \right] = O(\log T),$$

que prova (ii) e (iii).

Note que se $|T - \gamma| < 1$, então:

$$\frac{1}{1 + (T - \gamma)^2} \geq \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{|T - \gamma| < 1} 1 &\leq 2 \cdot \sum_{|T - \gamma| < 1} \left[\frac{1}{1 + (T - \gamma)^2} \right] \\ &= O(\log T) \end{aligned}$$

o que prova (i).

■

Lema 3.7.3. *Seja $s = \sigma + iT$ tal que $-1 \leq \sigma \leq 2$ e seja $\rho = \beta + i\gamma$ zero não trivial de $\zeta(s)$ com $T \neq \gamma$. Então:*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{|\gamma-T|<1} \frac{1}{s-\rho} + O(\log T).$$

Demonstração. Pelo que foi feito acima, já vimos que valem:

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= B + \sum_{\rho} \left[\frac{1}{(s-\rho)} + \frac{1}{\rho} \right] - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \cdot \log \pi - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'(s/2+1)}{\Gamma(s/2+1)} \\ \frac{\zeta'(2+iT)}{\zeta(2+iT)} &= B + \sum_{\rho} \left[\frac{1}{(2+iT-\rho)} + \frac{1}{\rho} \right] - \frac{1}{1+iT} + \frac{1}{2} \cdot \log \pi - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'(2+iT/2)}{\Gamma(2+iT/2)}. \end{aligned}$$

Subtraindo a segunda da primeira e usando o lema anterior, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= O(\log T) + \sum_{\rho} \left[\frac{1}{(s-\rho)} - \frac{1}{(2+iT-\rho)} \right] \\ &= O(\log T) + \sum_{|\gamma-T|<1} \left[\frac{1}{(s-\rho)} \right] - \underbrace{\sum_{|\gamma-T|<1} \left[\frac{1}{(2+iT-\rho)} \right]}_{(A)} \\ &\quad + \underbrace{\sum_{|\gamma-T|\geq 1} \left[\frac{1}{(s-\rho)} - \frac{1}{(2+iT-\rho)} \right]}_{(B)}. \end{aligned}$$

(A) Note que como $\beta \in [0, 1]$, então:

$$\begin{aligned} |2+iT-\beta-i\gamma| &= |2-\beta+i(T-\gamma)| \\ &= \sqrt{(2-\beta)^2 + (T-\gamma)^2} \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{|\gamma-T|<1} \left[\frac{1}{(2+iT-\rho)} \right] &\leq \sum_{|\gamma-T|<1} 1 \\ &= O(\log T). \end{aligned}$$

3.7. O TEOREMA DE VON MANGOLDT

(B) Note que:

$$\begin{aligned} |s - \rho| &= |\sigma + iT - \beta - i\gamma| \geq |T - \gamma|. \\ |2 + iT - \rho| &= |(2 - \beta) + i(T - \gamma)| \geq |T - \gamma|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{s - \rho} - \frac{1}{2 + iT - \rho} \right| &= \left| \frac{2 + iT - \rho - (s - \rho)}{(s - \rho)(2 + iT - \rho)} \right| \\ &\leq \frac{2 - \sigma}{(T - \gamma)^2}. \end{aligned}$$

Como $|\gamma - T| \geq 1$, então:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{|\gamma - T| \geq 1} \left[\frac{1}{(s - \rho)} - \frac{1}{(2 + iT - \rho)} \right] \right| &\leq \sum_{|\gamma - T| \geq 1} \left[\frac{3}{(T - \gamma)^2} \right] \\ &\stackrel{(3.7.2)}{=} O(\log T). \end{aligned}$$

■

Teorema 3.7.4 (Von Mangoldt). *Seja $N(T)$ o número de zeros $\rho = \sigma + i\gamma$ da função zeta na faixa crítica com $0 < \gamma < T$. Então:*

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \cdot \log \left(\frac{T}{2\pi} \right) - \frac{T}{2\pi} + O(\log T).$$

Demonstração. De acordo com a sugestão de Riemann apresentada no começo desta seção, precisaremos estimar a integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_T} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds,$$

onde γ_T é o caminho da figura abaixo.

Pelo fato de os zeros das funções analíticas serem isolados, podemos tomar $T \neq \gamma$, para todo $\rho = \beta + i\gamma$ zero não trivial de $\zeta(s)$.

Figura 3.3: Caminho de integração γ_T .

Pelo teorema dos Resíduos e pelo fato das raízes serem simétricas em relação ao ponto $s = 1/2$, vale:

$$2N(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_T} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds$$

$$\Rightarrow 4\pi N(T) = \frac{1}{i} \int_{\gamma_T} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds.$$

Mas note que ambos os lados são números reais e, portanto,

$$4\pi N(T) = \Im \left[\int_{\gamma_T} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds \right].$$

3.7. O TEOREMA DE VON MANGOLDT

Tirando a derivada logaritmica de:

$$\xi(s) = \frac{1}{2} \cdot s \cdot (s-1) \cdot \zeta_A(s),$$

obtemos:

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \frac{\zeta'_A(s)}{\zeta_A(s)}.$$

(1) Primeiramente, calculamos:

$$\begin{aligned} \Im \left[\int_{\gamma_T} \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} ds \right] &= 2\pi \cdot [\text{Res}(1/s, 0) + \text{Res}(1/(s-1), 1)] \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

(2) Observações sobre

$$\int_{\gamma_T} \frac{\zeta'_A(s)}{\zeta_A(s)} ds.$$

Pelo teorema 3.5.3, sabemos que:

$$\begin{aligned} \zeta_A(s) &= \zeta_A(1-s) \\ \Rightarrow \frac{\zeta'_A(s)}{\zeta_A(s)} &= -\frac{\zeta'_A(1-s)}{\zeta_A(1-s)}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

e por 3.5.5, temos:

$$\begin{aligned} \zeta_A(\bar{s}) &= \overline{\zeta_A(s)}. \\ \Rightarrow \frac{\zeta'_A(\bar{s})}{\zeta_A(\bar{s})} &= \overline{\left[\frac{\zeta'_A(s)}{\zeta_A(s)} \right]}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

(2.1) Seja $L_4(t) = t - iT$ com $t \in [-1, 2]$. Portanto,

$$\int_{L_4} \frac{\zeta'_A(s)}{\zeta_A(s)} ds = \int_{-1}^2 \frac{\zeta'_A(t - iT)}{\zeta_A(t - iT)} dt.$$

(2.2) Seja $L_2(t) = 1 - t + iT = 1 - L_4(t)$ com $t \in [-1, 2]$. Portanto,

$$\begin{aligned}
 \int_{L_2} \frac{\zeta'_A(s)}{\zeta_A(s)} ds &= \int_{-1}^2 \frac{\zeta'_A(1 - t + iT)}{\zeta_A(1 - t + iT)} \cdot (-1) dt \\
 &= \int_{-1}^2 -\frac{\zeta'_A(1 - L_4(t))}{\zeta_A(1 - L_4(t))} dt \\
 &= \int_{L_4} -\frac{\zeta'_A(1 - s)}{\zeta_A(1 - s)} ds \\
 &\stackrel{(3.22)}{=} \int_{L_4} \frac{\zeta'_A(s)}{\zeta_A(s)} dt.
 \end{aligned}$$

(2.3) Seja $L_1(t) = 2 + it$ com $t \in [-T, T]$. Portanto,

$$\int_{L_1} \frac{\zeta'_A(s)}{\zeta_A(s)} ds = \int_{-T}^T \frac{\zeta'_A(2 + it)}{\zeta_A(2 + it)} dt.$$

(2.4) Seja $L_3(t) = 1 - 2 - it = 1 - L_1(t)$ com $t \in [-T, T]$. Portanto, por um procedimento idêntico a (2.2), vale:

$$\int_{L_3} \frac{\zeta'_A(s)}{\zeta_A(s)} ds = \int_{L_1} \frac{\zeta'_A(s)}{\zeta_A(s)} dt.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma_T} \frac{\zeta'_A(s)}{\zeta_A(s)} ds &= 2 \cdot \int_{L_1} \frac{\zeta'_A(s)}{\zeta_A(s)} dt + 2 \cdot \int_{L_2} \frac{\zeta'_A(s)}{\zeta_A(s)} dt \\
 &= 2 \cdot \int_{L_1+L_2} \frac{\zeta'_A(s)}{\zeta_A(s)} dt.
 \end{aligned}$$

3.7. O TEOREMA DE VON MANGOLDT

Além disso, note que se definimos $L_2^\star(t) = 1 - L_4^\star(t) = 1 - t + iT$ com $t \in [1/2, 2]$ como sendo trechos das curvas L_2 e L_4 da figura abaixo, então:

$$\int_{L_2^\star} \frac{\zeta'_A(s)}{\zeta_A(s)} ds = \int_{L_4^\star} \frac{\zeta'_A(s)}{\zeta_A(s)} dt.$$

Figura 3.4: Pode-se trocar $L_2^\star$ por $L_4^\star$.

Assim sendo, ficamos com a integral de $\frac{\zeta'_A(s)}{\zeta_A(s)}$ calculada na curva da figura abaixo.

Figura 3.5: Curvas γ e $-\bar{\gamma}$.

Como ilustra a figura, a curva abaixo do eixo real é o inverso conjugado da curva acima do eixo. De fato, se

$$\gamma_h(\sigma) = 2 - \sigma + iT, \quad \sigma \in [0, 3/2]$$

for o trecho horizontal da curva γ , então:

$$\begin{aligned} -\gamma_h(\sigma) &= \sigma + iT, \quad \sigma \in [1/2, 2] \\ \Rightarrow -\bar{\gamma}_h(\sigma) &= \sigma - iT, \quad \sigma \in [1/2, 2]. \end{aligned}$$

Por outro lado, se

$$\gamma_v(t) = 2 + it, \quad t \in [0, T]$$

for o trecho vertical da curva γ , então:

3.7. O TEOREMA DE VON MANGOLDT

$$\begin{aligned} -\gamma_v(t) &= 2 + i(T - t), \quad t \in [0, T] \\ \Rightarrow -\bar{\gamma}_v(t) &= 2 + i(t - T), \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Contudo, pela propriedade vista há pouco (3.5.5) e pelo lema 3.7.1, temos que:

$$\int_{-\bar{\gamma}} \frac{\zeta'_A(s)}{\zeta_A(s)} ds = -\overline{\int_{\gamma} \frac{\zeta'_A(s)}{\zeta_A(s)} ds}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{L_1+L_2} \frac{\zeta'_A(s)}{\zeta_A(s)} ds &= \int_{\gamma-\bar{\gamma}} \frac{\zeta'_A(s)}{\zeta_A(s)} ds \\ &= \int_{\gamma} \frac{\zeta'_A(s)}{\zeta_A(s)} ds + \int_{-\bar{\gamma}} \frac{\zeta'_A(s)}{\zeta_A(s)} ds \\ &= \int_{\gamma} \frac{\zeta'_A(s)}{\zeta_A(s)} ds + -\overline{\int_{\gamma} \frac{\zeta'_A(s)}{\zeta_A(s)} ds} \\ &= 2 \cdot \Im \left[\int_{\gamma} \frac{\zeta'_A(s)}{\zeta_A(s)} ds \right]. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_T} \frac{\zeta'_A(s)}{\zeta_A(s)} ds &= 2 \cdot \int_{L_1+L_2} \frac{\zeta'_A(s)}{\zeta_A(s)} dt \\ &= 4 \cdot \Im \left[\int_{\gamma} \frac{\zeta'_A(s)}{\zeta_A(s)} ds \right]. \end{aligned}$$

Em suma, reduzimos a integral à curva γ da figura abaixo.

Figura 3.6: Curva γ .

Pela definição da função ζ_A da seção 3.5, temos que:

$$\frac{\zeta'_A(s)}{\zeta_A(s)} = -\frac{1}{2} \cdot \log \pi + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

Dividiremos, então, o cálculo da integral em partes:

(I) Cálculo de:

$$\Im \left[\int_{\gamma} -\frac{1}{2} \cdot \log \pi \cdot ds \right].$$

$$\begin{aligned}
 \Im \left[\int_{\gamma} -\frac{1}{2} \cdot \log \pi \cdot ds \right] &= -\frac{1}{2} \cdot \log \pi \cdot \Im \left[\int_a^b \gamma'(t) dt \right] \\
 &= -\frac{1}{2} \cdot \log \pi \cdot \Im [\gamma(b) - \gamma(a)] \\
 &= -\frac{1}{2} \cdot \log \pi \cdot \Im [1/2 + iT - 2] \\
 &= -\frac{T}{2} \cdot \log \pi.
 \end{aligned}$$

(II) Cálculo de:

$$\Im \left[\int_{\gamma} \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)} ds \right].$$

Pela fórmula 3.6, sabemos que $\Gamma(s/2)$ não se anula em $\mathbb{C}$ e, portanto, existe um ramo de logaritmo de $\Gamma(s/2)$ em $\Re(s) > 0$, ou seja, existe uma função $g(s)$, holomorfa, tal que:

$$e^{g(s)} = \Gamma(s/2).$$

Derivando, temos:

$$g'(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 e^{g(1)} &= \Gamma(1) = 1 \\
 \Rightarrow g(1) &= 0 + 2k\pi i.
 \end{aligned}$$

Portanto, posso tomar h tal que $h(1) = 0$ e:

$$e^{h(s)} = \Gamma(s/2).$$

Escrevemos, por definição:

$$h(s) \doteq \log \Gamma(s/2).$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \Im \left[\int_{\gamma} \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)} ds \right] &= \Im \left[\log \Gamma(s/2) \right]_2^{1/2+iT} \\
 &= \Im \left[\log \Gamma(1/4 + iT/2) - \underbrace{\log \Gamma(1)}_{=0} \right] \\
 &= \Im \left[\log \Gamma(1/4 + iT/2) \right]
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Por Stirling 5.2.2 do apêndice, sabemos que:

$$\log \Gamma(s) = (s - 1/2) \cdot \log s - s + k + O\left(\frac{1}{|s|}\right),$$

onde $|Arg(s)| \leq \pi - \delta$ e $s \neq 0$ e o $\log$ é o principal e coincide com a função h .

Portanto, se $s = 1/4 + iT/2$ com $T \neq 0$, temos que 3.24 vale:

$$\Im \left[(iT/2 + 1/4 - 1/2) \cdot \log (1/4 + iT/2) - 1/4 - iT/2 + k + O\left(\frac{1}{T}\right) \right]$$

Note que:

$$\log (1/4 + iT/2) = \log (T/2) + O(1).$$

Então,

$$\begin{aligned}
 &= \Im \left[\left(i\frac{T}{2} - \frac{1}{4} \right) \cdot \log \left(\frac{T}{2} \right) - i\frac{T}{2} \right] + O(1) + O\left(\frac{1}{T}\right) \\
 &= \Im \left[\left(i\frac{T}{2} - \frac{1}{4} \right) \cdot \left(\log \left(\frac{T}{2} \right) + i\pi/2 \right) - i\frac{T}{2} \right] + O(1) + O\left(\frac{1}{T}\right) \\
 &= \frac{T}{2} \log \frac{T}{2} - \frac{\pi}{8} - \frac{T}{2} + O(1) + O\left(\frac{1}{T}\right) \\
 &= \frac{T}{2} \log \frac{T}{2} - \frac{T}{2} + O(1) + O\left(\frac{1}{T}\right).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Im \left[\int_{\gamma} \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)} ds \right] = \frac{T}{2} \log \frac{T}{2} - \frac{T}{2} + O(1) + O\left(\frac{1}{T}\right). \tag{3.25}$$

(III) Cálculo de:

$$\Im \left[\int_{\gamma} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds \right].$$

Nesse caso, precisaremos separar o caminho de integração em dois pedaços: vertical e horizontal.

1. Vertical: de 2 até $2+iT$. Nessa região, $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ não possui zeros nem pólos, portanto:

$$\int_{\gamma_v} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds = \log \zeta(2+iT) - \log \zeta(2).$$

Se $\Re(s) > 1$, então $\left| \frac{1}{p^s} \right| \leq \frac{1}{2}$ e, portanto,

$$\Re \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) \geq 1/2.$$

Assim, para todo primo p , a função

$$f_p(s) \doteq \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)$$

possui logaritmo principal.

Então, pelo teorema 3.3.1 e pela proposição 2.2.3, temos que:

$$\begin{aligned} \log \zeta(s) &= \log \left[\prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \right] \\ &= - \sum_p \log \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) \\ &= \sum_p \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{p^{ms}}, \end{aligned}$$

como já foi visto nos lemas anteriores.

Então,

$$\begin{aligned} |\log \zeta(2 + iT)| &\leq \left| \sum_p \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{p^{2m+miT}} \right| \\ &\leq \sum_p \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{p^{2m}} \\ &= \log \zeta(2). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\gamma_{\text{vertical}}} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds = O(1).$$

2. Horizontal: Pelo lema anterior e escolhendo T de modo que a curva γ não passe por zero algum de $\zeta(s)$, sabemos que:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{|\gamma-T| < 1} \frac{1}{s - \rho} + O(\log T).$$

Portanto, precisamos calcular a parte imaginária da integral

$$\int_{\gamma} \frac{1}{s - \rho} ds.$$

Note que a função acima admite primitiva e sua parte imaginária é dada pela variação de argumento de $s - \rho$ sobre γ . Como mostra a figura abaixo, essa variação não excede π radianos.

Figura 3.7: Variação do argumento de $s - \rho$ em γ .

Portanto,

$$\Im \int_{\gamma} \left[\sum_{|\gamma-T|<1} \frac{1}{s-\rho} \right] ds \leq \pi \cdot \sum_{|\gamma-T|<1} 1$$

$$\stackrel{(3.7.2)}{=} O(\log T).$$

Portanto,

$$\Im \left[\int_{\gamma} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds \right] = O(\log T),$$

Reunindo as contas acima, sendo γ a curva da figura 3.6 e γ_T a curva da figura 3.3, temos:

$$\begin{aligned}
 N(T) &= \frac{1}{4\pi} \Im \left[\int_{\gamma_T} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi} \Im \left[\int_{\gamma_T} \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} ds \right] + \frac{1}{4\pi} \Im \left[\int_{\gamma_T} \frac{\zeta'_A(s)}{\zeta_A(s)} ds \right] \\
 &= 1 + \frac{1}{\pi} \Im \left[\int_{\gamma} \frac{\zeta'_A(s)}{\zeta_A(s)} ds \right].
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Mas sabemos que:

$$\begin{aligned}
 \Im \left[\int_{\gamma_T} \frac{\zeta'_A(s)}{\zeta_A(s)} ds \right] &= -\frac{T}{2} \cdot \log \pi + \Im \left[\int_{\gamma} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds \right] + \Im \left[\int_{\gamma} \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)} ds \right] \\
 &= -\frac{T}{2} \cdot \log \pi + O(\log T) + \frac{T}{2} \log \frac{T}{2} - \frac{T}{2} + O(1) + O\left(\frac{1}{T}\right) \\
 &= \frac{T}{2} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2} + O(\log T).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \cdot \log \left(\frac{T}{2\pi} \right) - \frac{T}{2} + O(\log T).$$

Concluindo a prova do teorema. ■

Capítulo 4

Fórmulas Explícitas

4.1 O Trabalho de Riemann

Nesta seção, apresentaremos as ideias expostas no famoso artigo de Riemann: **Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse** (Sobre o Número de Primos Menores que uma Dada Grandeza). Seus métodos e sua genialidade fundaram uma nova área da matemática e deixaram para grandes matemáticos o legado de seu mistério.

Algumas afirmações serão apenas parcialmente argumentadas e os detalhes podem ser encontrados em [1].

Bernhard Riemann inicia seu artigo com a fórmula produto de Euler (3.3.1) dada por:

$$\prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s},$$

onde o produto da esquerda é calculado sobre todos os primos e a somatória da direita, sobre todos os inteiros.

Riemann diz que a função complexa definida por essas duas expressões, quando convergir, será chamada de Função Zeta ou $\zeta(s)$ e isso ocorrerá quando a parte real de s for maior que 1, conforme teorema 3.3.1.

4.1.1 A Função Zeta

Riemann rapidamente começa a tratar das propriedades da função $\zeta(s)$, pois, segundo ele, "é fácil encontrar uma expressão para a tal função que é sempre válida". Assim, em sua primeira abordagem, Riemann utiliza a equação:

$$\frac{\Gamma(s)}{n^s} = \int_0^\infty e^{-nx} \cdot x^{s-1} dx,$$

obtida pela mudança de variável $t \leftarrow nx$ da expressão para a função Gamma (3.1) abaixo

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{s-1} dt.$$

Somando os dois lados em n , temos:

$$\begin{aligned} \Gamma(s) \cdot \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} &= \sum_{n \geq 1} \int_0^\infty e^{-nx} \cdot (x)^{s-1} dx \\ &= \int_0^\infty \sum_{n \geq 1} e^{-nx} \cdot (x)^{s-1} dx, \end{aligned}$$

sendo a comutação da somatória com a integral dada por um argumento análogo ao feito em 3.5.2. Observe que a somatória é uma PG infinita de razão $e^{-x} < 1$ e, portanto,

$$\Gamma(s) \cdot \zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx.$$

Para compreender a integral acima, Riemann trabalha com:

$$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz \doteq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_\gamma \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz \right],$$

onde a curva $\gamma(\epsilon)$ é dada pela figura abaixo. É possível mostrar que a integral independe de $\epsilon > 0$. Os detalhes podem ser encontrado em [1].

Note também que

$$(-z)^{s-1} = e^{(s-1) \cdot (\log |z| + i \arg(-z))}$$

e, portanto, a semi reta $[0, \infty[$ não faz parte do seu domínio.

Figura 4.1: Curva γ .

Então, Riemann reescreve a integral acima com a seguinte equação, válida para $\Re(s) > 1$.

$$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz = (e^{-\pi si} - e^{\pi si}) \cdot \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx.$$

Pela definição da função seno, tem-se:

$$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz = -2i \sin \pi s \cdot \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx.$$

Riemann então utiliza a fórmula de reflexão de Euler (3.2.2), dada por:

$$\Gamma(s) \cdot \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)},$$

para concluir que:

$$\begin{aligned} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz &= \frac{-2\pi i \cdot \zeta(s)}{\Gamma(1-s)} \\ \Rightarrow \zeta(s) &= -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \cdot \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz. \end{aligned}$$

Nesse ponto, Riemann escreve: "Essa equação fornece valores à $\zeta(s)$ para todos números complexos s e prova que é univalente e finita para todos valores de s diferentes de 1, e também se anula quando s é um negativo inteiro ímpar". Para mostrar a primeira afirmação, precisamos do:

Lema 4.1.1. *A integral da equação acima*

$$f(s) = \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz$$

é uma função inteira.

Demonstração. Primeiramente, sabe-se que:

$$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz = \int_{\gamma_\epsilon} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz,$$

para todo $\epsilon > 0$.

Pelo lema 3.1.1, é fácil ver que a integral acima é uma função holomorfa para os trechos finitos de γ . Sendo assim, basta mostrar que a função converge uniformemente sobre compactos no trecho horizontal infinito.

(1) Curva γ horizontal:

Figura 4.2: Trecho finito da curva γ .

Note que:

$$|e^z - 1| \geq e^{\Re(z)} - 1$$

4.1. O TRABALHO DE RIEMANN

e se $s = \sigma + it$ pertence a um compacto,

$$\begin{aligned} |(-z)^{s-1}| &= \left| e^{(\sigma-1+it) \cdot (\log |z| + i \arg(-z))} \right| \\ &= |z|^{(\sigma-1)} \cdot e^{-t \arg(-z)} \\ &\underset{(\arg(-z) > -\pi)}{<} |z|^{(\sigma-1)} \cdot e^{K\pi}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Assim,

$$\left| \int_{[L, \infty]} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz \right| \leq \int_{[L, \infty]} \frac{|z|^{(\sigma-1)}}{e^{\Re(z)} - 1} dz.$$

Além disso, se $\Re(z) = x$, então a partir de um certo $L > 0$, temos:

$$|z| \leq 2 \cdot x.$$

E também

$$\frac{x^{(\sigma-1)}}{e^x - 1} \leq \frac{1}{x^2}, \quad \forall x \geq L.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left| \int_{[L, \infty]} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz \right| &\leq 2^{\sigma-1} \cdot \int_L^\infty \frac{x^{(\sigma-1)}}{e^x - 1} dx \\ &\leq 2^{\sigma-1} \cdot \int_L^\infty \frac{1}{x^2} dx \xrightarrow[L \rightarrow \infty]{\text{unif.}} 0, \end{aligned}$$

o que prova o lema. ■

Em relação a afirmação "e também se anula quando s é um negativo inteiro ímpar", note que $\frac{z}{e^z - 1}$ é inteira e, portanto, poder ser escrita como uma série de potência. Por definição vale que:

$$\frac{z}{e^z - 1} = B_0 + B_1 \cdot z + B_2 \cdot \frac{z^2}{2!} + B_3 \cdot \frac{z^3}{3!} + \dots, \quad (4.2)$$

onde os números B_i são os números de Bernoulli e seus valores iniciais são:

Números de Bernoulli	
$B_0 = 1,$	$B_1 = -1/2,$
$B_2 = 1/6,$	$B_3 = 0,$
$B_4 = -1/30,$	$B_5 = 0,$
$B_6 = 1/42,$	$B_7 = 0,$
$B_8 = -1/30,$	$B_9 = 0.$

Assim, temos:

$$\zeta(s) = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \cdot \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz$$

$$\Rightarrow \zeta(-n) = -\frac{\Gamma(1+n)}{2\pi i} \cdot \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-z)^{-n-1}}{e^z - 1} dz.$$

Se $n \geq 0$ é um número inteiro, a função $\frac{(-z)^{-n-1}}{e^z - 1}$ é holomorfa na região $\Re(z) > 0$ e, portanto as integrais nas curvas da figura abaixo se anulam quando $\delta \rightarrow 0$, sobrando apenas a curva circular.

Figura 4.3: Curvas horizontais.

Assim, ficamos com:

$$\begin{aligned} \zeta(-n) &= -\frac{n!}{2\pi i} \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{|z|=\delta} \frac{(-z)^{-n-1}}{e^z - 1} dz \right] \\ &= -\frac{n!}{2\pi i} \cdot \int_{|z|=\delta} \frac{(-z)^{-n-1}}{e^z - 1} dz, \end{aligned}$$

4.1. O TRABALHO DE RIEMANN

pois a integral acima não depende de δ já que o integrando tem uma única singularidade na origem. Por 4.2, obtemos:

$$\begin{aligned}\zeta(-n) &= -\frac{n!}{2\pi i} \cdot \int_{|z|=\delta} \frac{z}{e^z - 1} \cdot \frac{(-z)^{-n-1}}{z} dz, \\ &= -\frac{n!}{2\pi i} \cdot \int_{|z|=\delta} \left[\sum_{m \geq 0} (-1)^{n+1} \cdot \frac{B_m \cdot z^{m-n-2}}{m!} \right] dz,\end{aligned}$$

mas basta considerar o caso em que $m - n - 2 = -1$, pois nos outros casos, a integral se anula dado que o integrando possui primitiva. Portanto,

$$\begin{aligned}\zeta(-n) &= -\frac{n!}{2\pi i} \cdot \int_{|z|=\delta} \left[(-1)^{n+1} \cdot \frac{B_{n+1} \cdot z^{-1}}{(n+1)!} \right] dz \\ &= -\frac{n!}{2\pi i} \cdot \frac{(-1)^{n+1} \cdot B_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \int_{|z|=\delta} \frac{1}{z} dz,\end{aligned}$$

Sabemos que:

$$\int_{|z|=\delta} \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

Portanto,

$$\zeta(-n) = \frac{(-1)^n \cdot B_{n+1}}{(n+1)},$$

para todo $n \geq 0$. Nesse caso, a frase de Riemann é justificada pelo fato de $B_{2n+1} = 0$, como indica a tabela acima. Para terminar, basta mostrar que:

Lema 4.1.2. *A fórmula para a função Zeta*

$$\zeta(s) = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \cdot \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz$$

é válida para todo plano complexo, exceto por $s = 1$.

Demonstração. Note que pelo teorema 3.1.4, sabemos que $\Gamma(1-s)$ possui pólos simples somente em $s = 1, 2, 3, \dots$. Portanto, pelo lema anterior, basta mostrar que a função:

$$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz = 0$$

quando $s = 2, 3, 4, \dots$.

Mas isso é claro, pois se $s = 2, 3, 4, \dots$, então

$$\frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} = (-1)^k \cdot \frac{z^k}{e^z - 1},$$

com $k = 1, 2, 3, \dots$ é uma função inteira. Portanto, as integrais horizontais se cancelam e a integral da curva circular fechada vale zero.

Se $s = 1$, as integrais horizontais também se cancelam, já que a função $\frac{1}{e^z - 1}$ possui pólos apenas em $2\pi i \cdot k$. Então,

$$\begin{aligned} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^z - 1} dz &= \int_{|z|=\delta} \frac{1}{e^z - 1} dz \\ &= 2\pi i \cdot \text{Res} \left(\frac{1}{e^z - 1}, z = 0 \right) \\ &= 2\pi i. \end{aligned}$$

Assim, como no teorema 3.5.4, a função Zeta possui um único pólo simples em $s = 1$ com resíduo 1. ■

4.1.2 A Equação Funcional - 1ª Prova

Figura 4.4: Região D_A .

Riemann analisa a integral

$$-\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \cdot \int_{\partial D_A} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz,$$

onde $\Re(s) < 0$ e a curva D_A é dada pela figura acima. Note que para a região D_A vale:

$$\partial D_A = \Gamma_A + (-\gamma_A) + \sum_{-k}^k C_\epsilon^k.$$

Portanto, pelo teorema de Cauchy, temos:

$$-\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \cdot \left[\int_{\Gamma_A} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz - \int_{\gamma_A} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz \right] = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \cdot \sum_{-k}^k \oint_{C_\epsilon^k} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz.$$

(1) Estudo de $\int_{\Gamma_A} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz$, onde Γ_A é a curva exterior da figura acima, de raio $|A| = (2n+1) \cdot \pi$.

$$\left| \int_{\Gamma_A} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz \right| \leq \int_{\Gamma_A} \frac{|(-z)^{s-1}|}{|e^z - 1|} dz.$$

Por 4.1, sabemos que:

$$\begin{aligned} |(-z)^{s-1}| &= |z|^{(\sigma-1)} \cdot e^{-t \arg(-z)}, \\ &\leq K \cdot |z|^{(\sigma-1)}. \end{aligned}$$

pois $\arg(-z) \in [-\pi, \pi]$. Por outro lado,

$$|e^z - 1| \geq k_\epsilon,$$

já que z está fora de C_ϵ^k , para todo j . Então,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_A} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz \right| &\leq \int_{\Gamma_A} \frac{K \cdot |z|^{(\sigma-1)}}{k_\epsilon} dz \\ &\leq \frac{K \cdot [(2n+1) \cdot \pi]^{(\sigma-1)}}{k_\epsilon} \cdot \ell(\Gamma_A) \\ &\leq \frac{K \cdot [(2n+1) \cdot \pi]^{(\sigma-1)}}{k_\epsilon} \cdot 2\pi \cdot [(2n+1) \cdot \pi]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left| \int_{\Gamma_A} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz \right| \leq K \cdot [(2n+1) \cdot \pi]^\sigma \frac{2\pi}{k_\epsilon}.$$

Como Riemann queria, se $\Re(s) = \sigma < 0$, então o lado direito converge compactamente para 0 quando o raio de $\Gamma_A \rightarrow \infty$ (ou $n \rightarrow \infty$), independentemente de ϵ .

4.1. O TRABALHO DE RIEMANN

Sendo assim, fazendo $|A| \rightarrow \infty$, temos:

$$\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \cdot \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ j \neq 0}} \oint_{C_{\epsilon}^j} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz,$$

onde γ é a curva inicialmente tomada por Riemann da figura 4.1. Portanto,

$$\zeta(s) = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \cdot \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ j \neq 0}} \oint_{C_{\epsilon}^j} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz,$$

desde que $\Re(s) < 0$.

(2) Cálculo de

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{C_{\epsilon}^n} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz,$$

para n inteiro não nulo.

Fazendo a substituição $z \leftarrow w + 2\pi in$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{C_{\epsilon}^n} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{|w|=\epsilon} \frac{(-2\pi in - w)^{s-1}}{e^w - 1} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{|w|=\epsilon} \frac{w}{e^w - 1} \cdot \frac{(-2\pi in - w)^{s-1}}{w - 0} dw. \end{aligned}$$

Assim, pelo fato de $\phi(w) = \frac{w \cdot (-2\pi in - w)^{s-1}}{e^w - 1}$ possuir uma singularidade removível em $w = 0$, a integral acima vale $-\phi(0)$, já que a curva está orientada no sentido horário. Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{C_{\epsilon}^n} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dw &= -\lim_{w \rightarrow 0} \phi(w) \\ &= -(-2\pi in)^{s-1}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \zeta(s) &= \Gamma(1-s) \cdot \sum_{n \geq 1} [(-2\pi in)^{s-1} + (2\pi in)^{s-1}] \\
 &= \Gamma(1-s) \cdot (2\pi)^{s-1} \cdot \sum_{n \geq 1} [(-in)^{s-1} + (in)^{s-1}] \\
 &= \Gamma(1-s) \cdot (2\pi)^{s-1} \cdot [(-i)^{s-1} + (i)^{s-1}] \cdot \sum_{n \geq 1} n^{s-1}
 \end{aligned}$$

Mas observe que:

$$\begin{aligned}
 [(-i)^{s-1} + (i)^{s-1}] &= \left[\frac{(-i)^s}{-i} + \frac{(i)^s}{i} \right] \\
 &= \frac{1}{i} \cdot [(i)^s - (-i)^s] \\
 &= \frac{1}{i} \cdot [e^{s \cdot \log i} - e^{s \cdot \log(-i)}] \\
 &= \frac{1}{i} \cdot [e^{s \cdot \frac{\pi}{2}} - e^{s \cdot (-\frac{\pi}{2})}] \\
 &= 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right).
 \end{aligned}$$

e que

$$\sum_{n \geq 1} n^{s-1} = \zeta(1-s).$$

Sobre esses fatos, Riemann escreve: "Sendo que a integral em torno de $n2\pi i$ é $(-2\pi in)^{s-1} \cdot (-2\pi i)$, a conta acima resulta em:

$$\zeta(s) = \Gamma(1-s) \cdot (2\pi)^{s-1} \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta(1-s)$$

e, portanto, em uma relação entre $\zeta(s)$ e $\zeta(1-s)$ a qual, por meio das conhecidas propriedades da função $\Gamma(s)$, pode ser reformulada pela afirmação:

$$\Gamma(s/2) \cdot \pi^{-s/2} \cdot \zeta(s)$$

permanece inalterada quando s é trocado por $1-s$."

4.1. O TRABALHO DE RIEMANN

Note que a fórmula acima vale para $\Re(s) < 0$. Portanto precisamos mostrar:

Lema 4.1.3. *A fórmula:*

$$\zeta(s) = \Gamma(1-s) \cdot (2\pi)^{s-1} \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta(1-s)$$

vale para $s \neq 1$.

Demonstração. Começaremos a prova com as seguintes observações:

1. Pelo teorema 3.1.4, sabemos que $\Gamma(1-s)$ possui pólos simples apenas em $s = 1, 2, 3, \dots$.
2. Vimos acima em (4.1.2) que $\zeta(1-s)$ possui um único pólo em $s = 0$ e possui zeros simples em $s = 3, 5, 7, \dots$.
3. $\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)$ é uma função inteira com zeros simples em $2 \cdot \mathbb{Z}$.

Portanto:

Em $s = 0$, o pólo de $\zeta(1-s)$ se cancela com o zero de $\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)$.

Se $s = 2, 4, 6, \dots$, então os pólos de $\Gamma(1-s)$ se cancelam com os zeros de $\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)$.

Se $s = 3, 5, 7, \dots$, então os pólos de $\Gamma(1-s)$ se cancelam com os zeros de $\zeta(1-s)$.

Em $s = 1$ não há o que fazer. Portanto a fórmula vale para todo plano complexo, exceto por $s = 1$. ■

Em relação a última afirmação de Riemann sobre a propriedade de simetria, lembremos que pelos lemas 3.2.2 e 3.2.4, valem:

1.

$$\Gamma(s) \cdot \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

2.

$$\Gamma(s) \cdot \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2s-1}} \cdot \Gamma(2s).$$

Então, substituindo

$$\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) = \frac{\pi}{\Gamma(s/2) \cdot \Gamma(1-s/2)}$$

na fórmula da função Zeta do lema anterior, temos:

$$\zeta(s) = \Gamma(1-s) \cdot (2\pi)^{s-1} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{\Gamma(s/2) \cdot \Gamma(1-s/2)} \cdot \zeta(1-s).$$

Ou seja,

$$\Gamma(s/2) \cdot \zeta(s) = \Gamma(1-s) \cdot (2\pi)^s \cdot \frac{1}{\Gamma(1-s/2)} \cdot \zeta(1-s). \quad (4.3)$$

Da segunda propriedade acima, substituindo s por $(1-s)/2$, temos:

$$\Gamma((1-s)/2) \cdot \Gamma(1-s/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{-s}} \cdot \Gamma(1-s)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\Gamma(1-s/2)} = \frac{2^{-s}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma((1-s)/2)}{\Gamma(1-s)}.$$

Substituindo em 4.3, temos:

$$\Gamma(s/2) \cdot \zeta(s) = \Gamma(1-s) \cdot (2\pi)^s \cdot \frac{2^{-s}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma((1-s)/2)}{\Gamma(1-s)} \cdot \zeta(1-s)$$

$$\Rightarrow \Gamma(s/2) \cdot \zeta(s) = \pi^{s-1/2} \cdot \Gamma((1-s)/2) \cdot \zeta(1-s).$$

Note que:

$$\pi^{s-1/2} = \frac{\pi^{-(1-s)/2}}{\pi^{-s/2}}.$$

Consequentemente:

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \pi^{-s/2} \cdot \zeta(s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \cdot \pi^{-(1-s)/2} \cdot \zeta(1-s). \quad (4.4)$$

4.1.3 Segunda Prova da Equação Funcional

Por consequência da equação funcional da função Zeta Adélica (equação anterior), Riemann escreve:

"Esta propriedade da função (Zeta) me motivou a introduzir, ao invés de $\Gamma(s)$, a integral $\Gamma(s/2)$ no termo geral da série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$, de onde podemos obter uma expressão muito conveniente para a função $\zeta(s)$. De fato:

$$\pi^{-s/2} \cdot \Gamma(s/2) \cdot \frac{1}{n^s} = \int_0^\infty e^{-\pi n^2 x} \cdot x^{s/2-1} dx. \quad (4.5)$$

Para compreender a afirmação acima, basta seguir os mesmos passos da seção 3.5, partindo de:

$$\Gamma(s/2) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{s/2-1} dt.$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$t = \pi n^2 x.$$

Temos,

$$\begin{aligned} \Gamma(s/2) &= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 x} \cdot (\pi n^2 x)^{s/2-1} (\pi n^2) dx \\ &= \pi^{s/2} \cdot n^s \cdot \int_0^\infty e^{-\pi n^2 x} \cdot x^{s/2-1} dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\pi^{-s/2} \cdot \Gamma(s/2) \cdot \frac{1}{n^s} = \int_0^\infty e^{-\pi n^2 x} \cdot x^{s/2-1} dx.$$

Obtendo 4.5. Pelo fato de $\Re(s) > 1$, podemos somar em n .

$$\pi^{-s/2} \cdot \Gamma(s/2) \cdot \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \sum_{n \geq 1} \int_0^\infty e^{-\pi n^2 x} \cdot x^{s/2-1} dx.$$

Pelo lema 3.5.2, podemos comutar a integral com a somatória. A partir disso, Riemann procede do mesmo modo que em 3.5, para concluir que:

$$\pi^{-s/2} \cdot \Gamma(s/2) \cdot \zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x} \cdot \left[x^{s/2} + x^{\frac{(1-s)}{2}} \right] dx$$

valida para $\Re(s) > 1$.

Lembramos que na seção 3.5, provamos que a integral

$$\int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x} \cdot \left[x^{s/2} + x^{\frac{(1-s)}{2}} \right] dx$$

é uma função inteira. Portanto, a equação acima vale para todo plano, exceto pelos pontos 0, 1. Além disso, é fácil notar que vale a equação funcional de 4.4.

4.1.4 A Hipótese de Riemann

As propriedades da função $\zeta(s)$ vistas acima levaram Riemann a considerar a função

$$\Xi(t) = s \cdot (s-1) \cdot \underbrace{\pi^{-s/2} \cdot \Gamma(s/2) \cdot \zeta(s)}_{\zeta_A} = 2 \cdot \xi(s),$$

onde $s = 1/2 + it$ e $\xi(s)$ é a função da seção 3.6. Na mesma seção, vimos que:

1. $\xi(s)$ é uma função inteira, pois os pólos da ζ_A se anulam com os zeros de $s \cdot (s-1)$;
2. $\xi(s) = \xi(1-s)$;
3. $\xi(\bar{s}) = \overline{\xi(s)}$;
4. Como a ζ_A , a função ξ não possui zeros em $\Re(s) > 1$ tampouco em $\Re(s) < 0$. Além disso, os zeros da ξ são os zeros não triviais da ζ .

4.1. O TRABALHO DE RIEMANN

Note que a mudança de variável $s = 1/2 + it$, faz a linha crítica da figura 3.2 se sobrepor ao eixo real. A respeito disso, Riemann diz: "a função $\Xi(t)$ pode se anular apenas quando a parte imaginária de t estiver entre $1/2i$ e $-1/2i$."

A partir daí, Riemann indica querer escrever a função $\xi(s)$ como o produto

$$\xi(s) = \xi(0) \cdot \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right),$$

onde ρ são as raízes de $\xi(s)$.

Para mostrar a convergência deste produto, Riemann precisou estudar a distribuição das raízes ρ . Então ele diz: "O número de raízes de $\Xi(t) = 0$ cujas partes reais estão entre 0 e T é aproximadamente:

$$\frac{T}{2\pi} \cdot \log \left(\frac{T}{2\pi} \right) - \frac{T}{2\pi},$$

pois a integral $\int \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds$ tomada no sentido positivo sobre um domínio consistindo nos valores cujas partes imaginárias estão entre $1/2i$ e $-1/2i$ e cujas partes reais estão entre 0 e T é igual a

$$\left[T \cdot \log \left(\frac{T}{2\pi} \right) - T \right] i$$

e, por outro lado, é igual ao número de raízes multiplicado por $2\pi i$."

A demonstração da afirmação acima já foi feita no teorema 3.7.4 e levou 50 anos para ser rigorosamente provada. As duas próximas afirmações foram ainda mais longe. Primeiro, Riemann diz: "Encontra-se, na verdade, aproximadamente o mesmo número de raízes reais dentro desses limites e é muito provável que todas as raízes sejam reais."

Como Riemann trabalhou com a função $\Xi(t) = \xi(1/2 + it)$, as raízes reais citadas são as raízes na linha crítica da função $\xi(s)$. Em outras palavras, Riemann diz que a densidade das raízes na linha crítica é igual a densidade das raízes na faixa e que provavelmente todas as raízes estão na linha crítica.

As duas sentenças jamais foram provadas e a última é conhecida como a **hipótese de Riemann**.

4.1.5 A Fórmula Explícita de Riemann

Como já foi dito, Riemann conhecia a fórmula produto de Euler.

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

Vimos na prova do teorema de Von Mangoldt (3.7.4) que pelo teorema 3.3.1 e pela proposição 2.2.3, vale:

$$\begin{aligned} \log \zeta(s) &= \log \left[\prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \right] \\ &= - \sum_p \log \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) \\ &= \sum_p \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{p^{ms}}, \end{aligned}$$

usando a série $\log(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \dots$ e tomando o logaritmo principal.

Riemann escreve: "Se substituirmos

$$\frac{1}{p^s} = s \cdot \int_p^\infty x^{-s-1} dx, \quad \frac{1}{p^{2s}} = s \cdot \int_{p^2}^\infty x^{-s-1} dx, \quad \dots$$

na fórmula

$$\log \zeta(s) = - \sum_p \log(1 - p^{-s}),$$

encontraremos

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} = \int_1^\infty f(x) \cdot x^{-s-1} dx \dots."$$

De fato, note que:

$$\begin{aligned}
 \log \zeta(s) &= \sum_p \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{p^{ms}} \\
 &= \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m} \cdot \sum_p \frac{1}{p^{ms}} \\
 &= \frac{1}{1} \cdot \left[\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots \right] + \\
 &\quad \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2^{2s}} + \frac{1}{3^{2s}} + \frac{1}{5^{2s}} + \cdots \right] + \cdots .
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\log \zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s},$$

onde

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{m}, & \text{se } n = p^m; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

É fácil ver que:

$$|\log \zeta(s)| \leq |\zeta(s)|.$$

Assim, a soma acima converge, pelo menos, se a parte real de s for maior que 1. Portanto, pelo teorema 5.3.4 do apêndice, sabemos que se $\Re(s) > 1$, então:

$$\log \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = s \cdot \int_1^{\infty} J_0(x) \cdot x^{-s-1} dx,$$

onde

$$J_0(x) = f(x) = \sum_{n < x} a_n + \frac{a_x}{2}.$$

A partir daí, Riemann aplica a transformada inversa de Mellin para obter:

$$”f(y) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{a-\infty t}^{a+\infty t} \frac{\log \zeta(s)}{s} \cdot y^s ds.”$$

Para mostrar a igualdade acima, denotamos:

$$\log \zeta(s) = \alpha(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}.$$

e

$$J_0(x) = A_0(x) = \sum_{n < x} a_n + \frac{a_x}{2}.$$

Então, se $x > 0$, pelo teorema 5.3.6 do apêndice, sabemos que:

$$J_0(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \frac{\log \zeta(s)}{s} \cdot x^s ds.$$

Vale comentar que Riemann conhecia uma relação entre as funções $J(x)$ e $\pi(x)$ dada por:

$$\pi(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n} \cdot J(x^{1/n}),$$

onde $\mu(n)$ é a famosa função de Möbius.

Entretanto, para conhecer a função $\pi(x)$, Riemann precisava conhecer a integral

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(\sigma)} \frac{\log \zeta(s)}{s} \cdot x^s ds.$$

Para tanto, Riemann inicialmente sugere usar a relação:

$$\begin{aligned}
 \zeta(s) &= s \cdot (s-1) \cdot \Gamma(s/2) \cdot \pi^{-s/2} \cdot \zeta(s) \\
 &= (s-1) \cdot \Gamma(s/2+1) \cdot \pi^{-s/2} \cdot \zeta(s) \\
 \Rightarrow \log \zeta(s) &= \frac{s}{2} \cdot \log \pi - \log(s-1) - \log \Gamma(s/2+1) + \log \xi(s).
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Porém, Riemann observa que a integral dos termos individuais da equação acima não converge. De fato, como exemplo, podemos calcular:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(\sigma)} \frac{s}{2} \cdot \log \pi \cdot \frac{x^s}{s} ds &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \frac{\log \pi}{2} \cdot x^s ds \\
 &= \frac{\log \pi}{4\pi} \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T x^{\sigma+it} dt \\
 &= \frac{x^\sigma \cdot \log \pi}{4\pi \log x} \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{i} [x^{iT} - x^{-iT}] \\
 &= \frac{x^\sigma \cdot \log \pi}{2\pi \log x} \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \sin(T \cdot \log x),
 \end{aligned}$$

que não converge.

Então, Riemann aplica integração por partes na integral original, obtendo:

$$\begin{aligned}
 \frac{\log \zeta(s)}{s} &\xrightarrow{d} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log \zeta(s)}{s} \right] \\
 x^s &\xrightarrow{i} \frac{x^s}{\log x}. \\
 \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(\sigma)} \frac{\log \zeta(s)}{s} \cdot x^s ds &= \left[\frac{x^s}{\log x} \cdot \frac{\log \zeta(s)}{s} \right]_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \\
 &\quad - \frac{1}{2\pi i \log x} \cdot \int_{(\sigma)} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log \zeta(s)}{s} \right] \cdot x^s ds.
 \end{aligned}$$

Já vimos em 3.7.4 que, se $\sigma > 1$, então:

$$\begin{aligned}
 |\log \zeta(\sigma + iT)| &\leq \left| \sum_p \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{p^{\sigma m + miT}} \right| \\
 &\leq \sum_p \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{p^{\sigma m}} \\
 &= \log \zeta(\sigma).
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{x^{\sigma + iT}}{\log x} \cdot \frac{\log \zeta(\sigma + iT)}{\sigma + iT} \right| &= \frac{x^\sigma}{\log x} \cdot \frac{|\log \zeta(\sigma + iT)|}{|\sigma + iT|} \\
 &= \frac{x^\sigma}{\log x} \cdot \frac{\log \zeta(\sigma)}{|\sigma + iT|} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(\sigma)} \frac{\log \zeta(s)}{s} \cdot x^s ds = - \frac{1}{2\pi i \log x} \cdot \int_{(\sigma)} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log \zeta(s)}{s} \right] \cdot x^s ds.$$

Riemann utiliza 4.6 na integral do lado direito e calcula cada uma das parcelas. Além disso, Riemann utiliza a fórmula abaixo para a parcela que contém a função $\xi(s)$. Então, pelo teorema 3.6.1 (3.16), sabemos que:

$$\begin{aligned}
 \xi(s) &= \xi(0) \cdot \prod_{\Im \rho > 0} \left\{ \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) \cdot \left(1 - \frac{s}{1 - \rho}\right) \right\} \\
 \Rightarrow \log \xi(s) &= \log \xi(0) + \sum_{\Im \rho > 0} \left[\log \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) + \log \left(1 - \frac{s}{1 - \rho}\right) \right],
 \end{aligned}$$

pois, pelo teorema 2.1.7, é fácil ver que a somatória acima converge compactamente em $\mathbb{C}$. O cálculo das parcelas abaixo não será feito neste trabalho. Os detalhes podem ser encontrados em [1].

1ª Parcela: Integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2\pi i \log x} \cdot \int_{(\sigma)} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log \xi(0)}{s} \right] \cdot x^s ds &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(\sigma)} \left[\frac{\log \xi(0)}{s} \right] \cdot x^s ds \\
 &\quad - \left[\frac{\log \xi(0)}{s} \cdot \frac{x^s}{\log x} \right]_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}
 \end{aligned}$$

Novamente, o segundo termo tende a zero e, portanto,

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2\pi i \log x} \cdot \int_{(\sigma)} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log \xi(0)}{s} \right] \cdot x^s ds &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(\sigma)} \left[\frac{\log \xi(0)}{s} \right] \cdot x^s ds \\
 &= -\frac{\log 2}{2\pi i} \cdot \int_{(\sigma)} \frac{x^s}{s} ds \\
 &\stackrel{(x>1)}{=} -\log 2.
 \end{aligned}$$

2ª Parcela:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi i \log x} \cdot \int_{(\sigma)} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log(s-1)}{s} \right] \cdot x^s ds &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{1-\epsilon} \frac{dt}{\log t} + \int_{1+\epsilon}^x \frac{dt}{\log t} \right] \\
 &\doteq Li(x).
 \end{aligned}$$

3ª Parcela:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2\pi i \log x} \cdot \int_{(\sigma)} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log \Gamma(s/2 + 1)}{s} \right] \cdot x^s ds \\
 &= -\sum_{n \geq 1} Li(x^{-2n}).
 \end{aligned}$$

4ª Parcela:

$$\frac{1}{2\pi i \log x} \cdot \int_{(\sigma)} \frac{d}{ds} \left[\frac{\log \pi}{2} \right] \cdot x^s ds = 0.$$

5ª Parcela:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2\pi i \log x} \cdot \int_{(\sigma)} \frac{d}{ds} \left[\frac{\sum_{\Im \rho > 0} \left[\log \left(1 - \frac{s}{\rho} \right) + \log \left(1 - \frac{s}{1-\rho} \right) \right]}{s} \right] \cdot x^s ds = \\
 & = - \sum_{\Im \rho > 0} Li(x^\rho) + Li(x^{1-\rho}).
 \end{aligned}$$

Reunindo as parcelas, temos a chamada **Fórmula Explícita** para a função $J(x)$.

$$J(x) = Li(x) - \log 2 - \sum_{n \geq 1} Li(x^{-2n}) - \sum_{\Im \rho > 0} Li(x^\rho) + Li(x^{1-\rho}). \quad (4.7)$$

Como o objetivo do artigo de Riemann era de provar o teorema dos números primos, Riemann usou a fórmula acima para encontrar uma fórmula para $\pi(x)$. Esta fórmula também pode ser encontrada em [1].

4.2 O Trabalho de Von Mangoldt

4.2.1 Introdução

Retomando o que foi feito na seção anterior, a relação entre os zeros da função zeta e os números primos está na fórmula produto de Euler dada por:

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

Riemann toma o logaritmo, obtendo:

$$\log \zeta(s) = \sum_p \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{p^{ms}}.$$

Usando as relações:

1.

$$\frac{1}{p^{ms}} = s \cdot \int_{p^m}^{\infty} x^{-s-1} dx$$

2.

$$J_0(x) = \sum_{n < x} a_n + \frac{a_x}{2}, \quad \text{onde } a_n = \begin{cases} \frac{1}{m}, & \text{se } n = p^m; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Riemann chega na seguinte fórmula:

$$\log \zeta(s) = s \cdot \int_1^\infty J_0(x) \cdot x^{-s-1} dx.$$

A partir daí, Riemann utiliza inversão de Fourier para obter:

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(\sigma)} \frac{\log \zeta(s)}{s} \cdot x^s ds,$$

onde a curva (σ) é dada pela reta paralela ao eixo imaginário com parte real igual a $\sigma > 1$. Finalmente, Riemann obtém a fórmula explícita para a função $J_0(x)$ calculando a integral da fórmula acima.

Von Mangoldt utiliza o mesmo procedimento que acima, mas ao invés de tomar o logaritmo da fórmula produto de Euler, toma a sua derivada logaritmica. Então, como já foi visto em 3.20, se $\Re(s) > 1$, pelo teorema da diferenciação (2.2.6), sabemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= - \sum_p \left[\frac{\log p}{(1 - p^{-s}) \cdot p^s} \right] \\ &= - \sum_p \left[\frac{\log p}{p^s} \cdot \left(\sum_{m \geq 0} \frac{1}{p^{ms}} \right) \right] \\ &= - \sum_p \sum_{m \geq 1} \frac{\log p}{p^{ms}} \\ &= - \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s}, \end{aligned}$$

onde $\Lambda(n)$ é dada por:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{se } n = p^k; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Procedendo da mesma maneira e usando a relação (ou o teorema 5.3.4 do apêndice):

$$\frac{1}{n^s} = s \cdot \int_n^\infty x^{-s-1} dx,$$

concluimos que:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = s \cdot \int_1^\infty \psi(x) \cdot x^{-s-1} dx, \quad (4.8)$$

onde $\Re(s) = \sigma > 1$ e $\psi(x)$ é dada por:

$$\psi(x) = \sum_{n < x} \Lambda(n) + \frac{\Lambda(x)}{2}.$$

Note que a série de Dirichlet acima converge apenas em $\Re(s) > 1$. Portanto, sua abscissa de convergência vale $\sigma_c = 1$.

Sejam $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ e $\sigma_0 > \sigma_c = 1$. Se $x > 0$, pela fórmula de Perron (5.3.6 do apêndice), temos que:

$$\psi(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^s}{s} ds. \quad (4.9)$$

A vantagem de usar esse integrando ao invés de $\log \zeta(s)$ está no fato de que as suas singularidades são mais simples: são apenas pólos simples, enquanto que as singularidades de $\log \zeta(s)$ são logarítmicas.

Assim, considere γ a curva da figura abaixo e as singularidades de

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^s}{s}$$

contidas no interior de γ .

Figura 4.5: Singularidades contidas em γ .

Note que, como na fórmula acima, $\sigma_0 > \sigma_c = 1$. Além disso, as singularidades de $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^s}{s}$ são:

1. $s = 0$: pólo simples de $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^s}{s}$ com resíduo

$$-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}.$$

2. $s = 1$: pólo simples de $\zeta(s)$ e, portanto, um pólo simples de $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^s}{s}$ com resíduo

x .

3. $s = \rho$: zero não trivial de $\zeta(s)$ e, portanto, um pólo simples de $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^s}{s}$ com resíduo

$$-k \cdot \frac{x^\rho}{\rho},$$

onde k é a multiplicidade da raiz ρ .

4. $s = -2m > -\mu$: zero simples trivial de $\zeta(s)$ e, portanto, um pólo simples de $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^s}{s}$ com resíduo

$$-\frac{x^{-2m}}{-2m} = \frac{x^{-2m}}{2m},$$

onde $\mu = 2k + 1$.

T pode ser escolhido de modo que a curva γ não passe por zero algum de $\zeta(s)$. Então, pelo teorema dos Resíduos, sabemos que:

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma(T, \mu)} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^s}{s} ds = -\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} + x - \sum_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho} + \sum_{m=1}^{(\mu-1)/2} \frac{x^{-2m}}{2m}. \quad (4.10)$$

Observações:

1. A integral da esquerda é calculada sobre a curva γ e para encontrar uma fórmula para a função $\psi(x)$ teremos que fazer $T \rightarrow \infty$ e $\mu \rightarrow \infty$.

Em outras palavras, precisamos mostrar que as integrais nas curvas horizontais e com parte real $-\mu$ se anulam. De acordo com a fórmula para a função $\psi(x)$ acima, obteremos:

$$\lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \mu \rightarrow \infty}} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma(T, \mu)} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^s}{s} ds = \psi(x).$$

2. Ao fazer $T \rightarrow \infty$ e $\mu \rightarrow \infty$, teremos duas somatórias infinitas no lado direito da fórmula explícita parcial (4.10) .

4.2. O TRABALHO DE VON MANGOLDT

Sabemos que a função $\log(x)$ admite expansão em série de potência em torno de $x = 1$ dada por:

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

Portanto, a última somatória converge e pode ser dada por:

$$\sum_{m \geq 1} \frac{x^{-2m}}{2m} = -\frac{1}{2} \cdot \log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

Consequentemente, exceto pelo termo com a soma sobre as raízes da função Zeta, todos os termos convergem ao passar o limite $T \rightarrow \infty$ e $\mu \rightarrow \infty$. Então, existe o limite

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho}.$$

4.2.2 Estimativa da Integral sobre γ

Antes de iniciarmos as estimativas da integral sobre os trechos citados acima, precisaremos do seguinte teorema.

Teorema 4.2.1. *Suponha que $\Re(s) \leq -1$ e $|s + 2m| \geq 1$, para todo $m \geq 1$. Então existe R tal que:*

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| < \log(2|s|),$$

sempre que $|s| > R$.

Demonstração. **1ª Afirmação:** Para todo $s \neq 0, 1$, é verdade que:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = C - \frac{\Gamma'(1-s)}{\Gamma(1-s)} - \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} + \frac{\pi}{2} \cdot \tan \frac{\pi(1-s)}{2}.$$

Primeiramente, sabemos que pela equação funcional da função zeta (3.5.3), para todo $s \neq 0, 1$, vale:

$$\begin{aligned}
 \pi^{-s/2} \cdot \Gamma(s/2) \cdot \zeta(s) &= \pi^{-(1-s)/2} \cdot \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \cdot \zeta(1-s) \\
 \Rightarrow \zeta(1-s) &= \frac{\Gamma(s/2)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} \cdot \pi^{1/2-s} \cdot \zeta(s).
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Por outro lado pelo lema 3.2.2, substituindo s por $1-s$, temos:

$$\begin{aligned}
 \Gamma(s/2) \cdot \Gamma(1-s/2) &= \frac{\pi}{\sin(\pi s/2)} \\
 \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \cdot \Gamma\left(1 - \frac{1-s}{2}\right) &= \frac{\pi}{\sin\left(\pi \frac{1-s}{2}\right)} \\
 \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \cdot \Gamma(1/2 + s/2) &= \frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)}.
 \end{aligned}$$

Além disso, pelo lema 3.2.4:

$$\Gamma(s/2) \cdot \Gamma(s/2 + \frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \cdot 2^{1-s} \cdot \Gamma(s).$$

Assim, reunindo as duas equações acima, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\Gamma(s/2)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} &= \frac{\sqrt{\pi} \cdot 2^{1-s} \cdot \Gamma(s)}{\frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)}} \cdot \frac{\Gamma(s/2 + \frac{1}{2})}{\Gamma(s/2 + \frac{1}{2})} \\
 &= 2^{1-s} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \cdot \Gamma(s) \cdot \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right).
 \end{aligned}$$

Substituindo na primeira equação, concluimos que:

$$\begin{aligned}
 \zeta(1-s) &= \frac{\Gamma(s/2)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} \cdot \pi^{1/2-s} \cdot \zeta(s) \\
 &= 2^{1-s} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \cdot \Gamma(s) \cdot \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \pi^{1/2-s} \cdot \zeta(s) \\
 &= 2^{1-s} \cdot \pi^{-s} \cdot \Gamma(s) \cdot \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \zeta(s).
 \end{aligned}$$

Trocando $1-s$ por s outra vez, temos:

$$\zeta(s) = 2^s \cdot \pi^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \cos\left(\frac{\pi(1-s)}{2}\right) \cdot \zeta(1-s).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \frac{(2^s)'}{2^s} + \frac{(\pi^{s-1})'}{\pi^{s-1}} - \frac{\Gamma'(1-s)}{\Gamma(1-s)} + \frac{(\cos(\frac{\pi(1-s)}{2}))'}{\cos(\frac{\pi(1-s)}{2})} - \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} \\ &= \log 2 + \log \pi - \frac{\Gamma'(1-s)}{\Gamma(1-s)} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin(\frac{\pi(1-s)}{2})}{\cos(\frac{\pi(1-s)}{2})} - \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} \\ &= \log 2\pi - \frac{\Gamma'(1-s)}{\Gamma(1-s)} + \frac{\pi}{2} \cdot \tan\left(\frac{\pi(1-s)}{2}\right) - \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)}. \end{aligned}$$

□

Voltando ao teorema, por hipótese, se $|z + 2m| \geq 1$, então é fácil ver que

$$|(1-z) - (2m+1)| \geq 1.$$

Portanto, para estimar o penúltimo fator acima precisaremos provar o seguinte:

2ª Afirmação: Se $|z - (2m+1)| \geq 1$, então

$$\tan\left(\frac{\pi z}{2}\right) = O(1).$$

De fato,

$$\begin{aligned} \tan z &= \frac{\sin z}{\cos z} \\ &= \frac{\frac{1}{2i} \cdot (e^{iz} - e^{-iz})}{\frac{1}{2} \cdot (e^{iz} + e^{-iz})} \\ &= \frac{i(1 - e^{2iz})}{1 + e^{2iz}} \\ &= \frac{i(1 + e^{2iz} - 2e^{2iz})}{1 + e^{2iz}} \\ &= i \cdot \left(1 - \frac{2}{1 + e^{-2iz}}\right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\tan\left(\frac{\pi z}{2}\right) = i \cdot \left(1 - \frac{2}{1 + e^{-\pi iz}}\right).$$

Note que a função acima é periódica e para analisar o que ocorre em $\mathbb{C}$, basta entender o que ocorre na faixa $0 \leq \sigma = \Re(z) \leq 2$. Então, para mostrar que a função acima é limitada basta mostrar que a função $|1 + e^{-\pi iz}|$ possui mínimo na região da figura abaixo:

Figura 4.6: $F = \{0 \leq \sigma = \Re(z) \leq 2, |z - (2m + 1)| \geq 1\}$.

Assim, se $z = \sigma + iy$, então:

$$1 + e^{-\pi iz} = 1 + e^{-\pi i\sigma} \cdot e^{\pi y}.$$

Temos três casos para considerar:

1. Se $y > R > 1$, então

$$\begin{aligned} |1 + e^{-\pi iz}| &\geq e^{\pi y} - 1 \\ &\geq e^{\pi} - 1. \end{aligned}$$

2. Se $y < -R$, então

$$\begin{aligned} |1 + e^{-\pi iz}| &\geq 1 - e^{-\pi y} \\ &\geq 1 - e^{-\pi}. \end{aligned}$$

3. Se z pertence ao compacto $K = \{-1 \leq y \leq 1, z \notin B_1(1, 0)\}$, então $|1 + e^{-\pi iz}|$ possui mínimo positivo.

Então, $|1 + e^{-\pi iz}|$ possui mínimo não nulo em F e, portanto, a função $\tan(\frac{\pi z}{2})$ é limitada em $\{\mathbb{C} - |z - (2m + 1)| \geq 1\}$.

□

Voltando à demonstração, note que valem:

1. Como $\Re(1 - s) \geq 2$, pela fórmula de Stirling (5.2.1), temos que:

$$\left| \frac{\Gamma'(1 - s)}{\Gamma(1 - s)} \right| = \log |1 - s| + O(1/|s|).$$

2. Da mesma forma, se $\sigma = \Re(1 - s) \geq 2$, pela equação 3.20 sabemos que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\zeta'(1 - s)}{\zeta(1 - s)} \right| &= \left| \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{1-s}} \right| \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^2} \\ &= O(1). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| = O(1) + \log |1 - s| + O(1/|s|).$$

Observe que como $|1 - s| \leq 1 + |s|$, então

$$\log |1 - s| \leq \log (1 + |s|).$$

Então,

$$\begin{aligned} \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{\log |1 - s|}{\log |s|} &\leq \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{\log (1 + |s|)}{\log |s|} = 1. \\ \Rightarrow \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| &= O(\log |s|). \end{aligned}$$

Portanto, existe algum $R > 0$ tal que se $|s| > R$, então:

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| < \log (2|s|).$$

■

Estimativas:

Trecho vertical: Nesse trecho, $\Re(s) = -\mu < -1$ e pelo fato de μ ser um inteiro ímpar, temos que $|s + 2m| \geq 1, \forall m$. Portanto, pelo teorema anterior, existe $R > 0$ tal que:

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| < \log (2|s|), \quad \forall |s| > R.$$

Tomemos então $\mu > R > e/2$. Então:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{-\mu+iT}^{-\mu-iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^s}{s} ds \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\mu+iT}^{-\mu-iT} \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| \cdot \frac{x^{-\mu}}{|s|} ds \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\mu+iT}^{-\mu-iT} \frac{\log (2|s|)}{|s|} \cdot x^{-\mu} ds \end{aligned}$$

Sempre que $t > e/2$, a função $\frac{\log (2t)}{t}$ será decrescente, já que nesse caso

$$\left[\frac{\log (2t)}{t} \right]' = \frac{1 - \log (2t)}{t^2} < 0.$$

4.2. O TRABALHO DE VON MANGOLDT

Portanto, se $|s| \geq \mu$, então:

$$\frac{\log(2|s|)}{|s|} \leq \frac{\log(2\mu)}{\mu}.$$

Seja $\epsilon > 0$, então:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{-\mu+iT}^{-\mu-iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^s}{s} ds \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\log(2\mu) \cdot x^{-\mu}}{\mu} \cdot \int_{\mu+iT}^{\mu-iT} ds \\ &\leq \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\log(2\mu) \cdot x^{-\mu}}{\mu} \cdot T. \end{aligned}$$

Assim, para todo T , existe μ tal que a conta acima fica menor que ϵ .

□

Trecho horizontal superior: Nesse trecho, teremos que dividir o caminho de integração em dois pedaços.

1º Pedaço: De $-1 + iT$ até $\sigma_0 + iT$; vimos que se $-1 \leq \Re(s) \leq 2$ e T não passa por zero algum de Zeta, então pelo lema 3.7.3, sabemos que:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{|\gamma-T|<1} \frac{1}{s-\rho} + O(\log T).$$

Para estimar a somatória acima, note que se $\Re(s) = \sigma$ e $\rho = \beta + i\gamma$, então:

$$\begin{aligned} |s - \rho| &= |\sigma + iT - \beta - i\gamma| \\ &= |\sigma - \beta + i(T - \gamma)| \\ &\geq |T - \gamma|. \end{aligned}$$

Além disso, na faixa da figura abaixo onde $\Im(s) \in [T-1, T+1]$, pelo lema 3.7.2, o número de zeros de $\zeta(s)$ é da ordem $O(\log T)$.

Figura 4.7: Faixa $|\gamma - T| < 1$.

Portanto, o espaço médio entre duas ordenadas de zeros é:

$$\frac{2}{\text{número de zeros}} \geq \frac{2}{A \cdot \log T}.$$

Enfim, existem dois zeros consecutivos tais que a distância entre eles é maior ou igual a $\frac{2}{A \cdot \log T}$. Então, podemos escolher uma nova posição para T , na faixa $[T - 1, T + 1]$, tal que:

$$\begin{aligned} |T - \gamma| &\geq \frac{K}{\log T} \\ \Rightarrow \frac{1}{|T - \gamma|} &\leq \frac{\log T}{K}. \end{aligned}$$

Com essas escolhas,

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| &\leq \sum_{|\gamma-T|<1} \frac{1}{|s-\rho|} + L \cdot \log T \\
 &\leq \sum_{|\gamma-T|<1} \frac{1}{|T-\gamma|} + L \cdot \log T \\
 &\leq \frac{\log T}{K} \cdot L \log T + L \cdot \log T \\
 &\leq C \cdot \log^2 T.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Então, a estimativa da integral de $-1+iT$ até σ_0+iT fica:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{-1+iT}^{\sigma_0+iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^s}{s} ds \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-1+iT}^{\sigma_0+iT} \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| \cdot \frac{|x^s|}{|s|} ds \\
 &\stackrel{(|s| \geq T)}{\leq} \frac{C \cdot \log^2 T}{2T\pi} \cdot \int_{-1}^{\sigma_0} x^\sigma d\sigma \\
 &\leq \frac{C \cdot \log^2 T}{2T\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\sigma_0} x^\sigma d\sigma \\
 &\leq \frac{C \cdot \log^2 T}{2T\pi} \cdot \frac{x^{\sigma_0}}{\log x}.
 \end{aligned}$$

É fácil notar que a conta acima vai a zero se $T \rightarrow \infty$.

□

2º Pedaco: De $-\mu+iT$ até $-1+iT$; Vimos pelo teorema 4.2.1 que se $\Re(s) \leq -1$ e $|s+2m| \geq 1$, então existe R tal que

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| < \log(2|s|),$$

para todo s com $|s| > R$.

Seja $T > R$. Como já foi feito na estimativa do trecho vertical, vale que se $t > e/2$, então a função $\frac{\log(2t)}{t}$ será decrescente. Portanto, como $|s| \geq T$, então:

$$\frac{\log(2|s|)}{|s|} \leq \frac{\log(2T)}{T}.$$

Temos que a integral está limitada por:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{-\mu+iT}^{-1+iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^s}{s} ds \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\mu+iT}^{-1+iT} \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| \cdot \frac{|x^s|}{|s|} ds \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\mu+iT}^{-1+iT} \frac{\log(2|s|)}{|s|} \cdot x^\sigma d\sigma \\ &\leq \frac{\log(2T)}{2\pi T} \cdot \frac{x^{-1}}{\log x}, \end{aligned}$$

que também vai a zero quando $T \rightarrow \infty$.

□

Trecho horizontal inferior: O cálculo da estimativa é análogo ao caso anterior.

4.2.3 A Fórmula Explícita de Von Mangoldt

Vimos na introdução que a derivada logarítmica da função Zeta é dada por:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

onde

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{se } n = p^k; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Também vimos que se $\psi(x)$ é a função dada por:

$$\psi(x) = \sum_{n < x} \Lambda(n) + \frac{\Lambda(x)}{2},$$

4.2. O TRABALHO DE VON MANGOLDT

então pelo teorema 5.3.4 do apêndice, vale:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \cdot \int_1^\infty \psi(x) \cdot x^{-s-1} dx.$$

Além disso, se $x > 0$, pela fórmula de Perron (5.3.6 do apêndice), provamos que:

$$\psi(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^s}{s} ds.$$

Se γ é a curva da figura 4.5, onde T não passa por zero algum de $\zeta(s)$ e $-\mu$ é um inteiro negativo ímpar, então pelo teorema dos resíduos, temos que:

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma(T, \mu)} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^s}{s} ds = -\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} + x - \sum_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho} + \sum_{m < \mu/2} \frac{x^{-2m}}{2m}.$$

Segundo as estimativas da última seção, as integrais nas curvas horizontais e com parte real igual a $-\mu$ são nulas quando $T \rightarrow \infty$ e $\mu \rightarrow \infty$. Portanto:

$$\psi(x) = -\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} + x - \sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} + \sum_{m \geq 1} \frac{x^{-2m}}{2m}.$$

Já observamos que a somatória sobre as raízes não triviais da função $\zeta(s)$ deve ser entendida como sendo:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{|\gamma| < T} \frac{x^\rho}{\rho}.$$

É bastante comum encontrar essa soma tomando-se as raízes aos pares ρ e $1 - \rho$, ou seja:

$$\sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} = \sum_{\Im(\rho) > 0} \left[\frac{x^{\rho}}{\rho} + \frac{x^{1-\rho}}{1-\rho} \right].$$

Provamos também que:

$$\sum_{m \geq 1} \frac{x^{-2m}}{2m} = -\frac{1}{2} \cdot \log \left(1 - \frac{1}{x^2} \right).$$

Em suma, a **fórmula explícita de Von Mangoldt** é dada abaixo.

$$\psi(x) = -\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} + x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \frac{1}{2} \cdot \log \left(1 - \frac{1}{x^2} \right). \quad (4.13)$$

4.2.4 A Função $\psi_1(x)$.

O teorema dos números primos afirma que a quantidade de números primos menores que x é assintótica à $\frac{x}{\log x}$ ou, equivalentemente:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \cdot \log x}{x} = 1.$$

Mostra-se que podemos enunciar o teorema dos números primos utilizando a função ψ da seguinte forma:

Teorema 4.2.1. *[TNP] A função $\psi(x)$ dada por:*

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

é assintótica à função x . Em outras palavras,

$$\psi(x) \sim x \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

Assim, utilizando a fórmula explícita dada acima, parece ser fácil mostrar o teorema dos números primos, porém, infelizmente, não é fácil mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} \cdot \frac{1}{x} = 0,$$

pois a série $\sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho}$ não converge uniformemente. Note que se o limite comutasse com a integral, então o limite se anularia se, e somente se, não houvesse zeros com parte real igual a 1.

Para fugir desse problema, definimos

Definição 4.2.2. A função $\psi_1(x)$ é definida por:

$$\psi_1(x) \doteq \int_1^x \psi(x) dx.$$

Não é difícil ver que a função $\psi_1(x)$ pode ser escrita como:

$$\psi_1(x) \doteq \sum_{n \leq x} (x - n) \Lambda(n).$$

De fato,

$$\begin{aligned} \int_1^x \psi(x) dx &= \int_1^x \sum_{n \leq x} \Lambda(n) dx \\ &= \int_1^2 \Lambda(1) dx + \int_2^3 [\Lambda(1) + \Lambda(2)] dx + \cdots + \int_{[x]}^x \psi([x]) dx \\ &= \Lambda(1) \cdot (x - 1) + \Lambda(2) \cdot (x - 2) + \cdots + \Lambda([x]) \cdot (x - [x]) \\ &= \sum_{n \leq x} (x - n) \Lambda(n). \end{aligned}$$

□

Mostramos em 4.8 que

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \cdot \int_1^{\infty} \psi(x) \cdot x^{-s-1} dx,$$

Usando que:

$$\begin{aligned}\psi_1'(x) &= \psi(x) \\ [x^{-s-1}]' &= (-s-1) \cdot x^{-s-2}.\end{aligned}$$

Pelo exercício 35 da página 103 de [13], podemos integrar por partes para obter:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \cdot [\psi_1(x) \cdot x^{-s-1}]_1^\infty - s \cdot \int_1^\infty \psi_1(x) \cdot (-s-1) \cdot x^{-s-2} dx.$$

Então, se $\Re(s) > 1$, o primeiro termo é nulo, pois $\psi_1(1) = 0$. Assim, ficamos com:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \cdot (s+1) \int_1^\infty \psi_1(x) \cdot x^{-s-2} dx. \quad (4.14)$$

Como em 4.9, deve ser verdade que:

Teorema 4.2.3. *Se $x > 1$, então:*

$$\psi_1(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^{s+1}}{s \cdot (s+1)} ds. \quad (4.15)$$

Demonstração. A prova da fórmula acima consiste em aplicar o método utilizado em 5.3.6 do apêndice para:

$$\psi_1(x) = \sum_{n \leq x} (x-n) \Lambda(n).$$

Sendo assim, tome $N > 2x + 2$ e escreva:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \underbrace{\sum_{n \leq N} \frac{\Lambda(n)}{n^s}}_{\alpha_1(s)} + \underbrace{\sum_{n > N} \frac{\Lambda(n)}{n^s}}_{\alpha_2(s)}.$$

Primeiramente note que

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= \sum_{n \leq x} (x - n) \Lambda(n) \\ &= x \cdot \sum_{n \leq N} \Lambda(n) \cdot I_1(x/n),\end{aligned}$$

onde, da mesma maneira que no lema 5.3.5 do apêndice, prova-se que:

$$I_1(y) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(\sigma_0)} \frac{y^s}{s \cdot (s+1)} ds = \begin{cases} 1 - \frac{1}{y}, & \text{se } y > 1; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{\psi_1(x)}{x} &= \sum_{n \leq N} \Lambda(n) \cdot I_1(x/n) \\ &= \sum_{n \leq N} \Lambda(n) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma_0)} \frac{(x/n)^s}{s \cdot (s+1)} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma_0)} \left[\sum_{n \leq N} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \right] \frac{x^s}{s \cdot (s+1)} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma_0)} \alpha_1(s) \frac{x^s}{s \cdot (s+1)} ds \\ \Rightarrow \psi_1(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma_0)} \alpha_1(s) \frac{x^{s+1}}{s \cdot (s+1)} ds.\end{aligned}$$

Em outras palavras, pelo fato de valer

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \alpha_1(s) + \alpha_2(s),$$

para mostrar o teorema, basta provar que:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma_0)} \alpha_2(s) \frac{x^{s+1}}{s \cdot (s+1)} ds \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Isso pode ser feito utilizando exatamente o mesmo procedimento de 5.3.6 do apêndice. A estimativa para a função $\alpha_2(s)$, bem como a estimativa da integral encontram-se no mesmo teorema. ■

Agora podemos fazer a análise das singularidades da função:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}$$

no interior da curva abaixo:

Figura 4.8: Singularidades contidas em γ .

1. $s = 0$: é um pólo simples de $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}$ com resíduo

$$-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} \cdot x.$$

2. $s = 1$: é um pólo simples de $\zeta(s)$ e, portanto, um pólo simples de $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}$ com resíduo

$$\frac{x^2}{2}.$$

3. $s = \rho$: é zero não trivial de $\zeta(s)$ e, portanto, um pólo simples de $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}$ com resíduo

$$-k \cdot \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)},$$

onde k é a multiplicidade da raiz ρ .

4. $s = -2m > -\mu$: é zero simples trivial de $\zeta(s)$ e, portanto, um pólo simples de $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}$ com resíduo

$$-\frac{x^{-2m+1}}{(-2m)(1-2m)} = \frac{x^{1-2m}}{2m(1-2m)}.$$

5. $s = -1$: é um pólo simples de $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}$ com resíduo

$$\frac{\zeta'(-1)}{\zeta(-1)}.$$

Portanto, pelo teorema dos resíduos, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma_{(T,\mu)}} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds &= \frac{x^2}{2} - \sum_{|\gamma| < T} \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} \cdot x + \frac{\zeta'(-1)}{\zeta(-1)} \\ &+ \sum_{m < \mu/2} \frac{x^{1-2m}}{2m(1-2m)}. \end{aligned}$$

Contudo, caímos no mesmo problema das seções anteriores e novamente precisamos mostrar que as integrais nas curvas horizontais e verticais com $\Re(s) = -\mu$ se anulam quando $T, \mu \rightarrow \infty$. O processo é exatamente o mesmo de 4.2.2.

Portanto, se $x > 1$, a fórmula explícita para a função $\psi_1(x)$ é dada por:

$$\psi_1(x) = \frac{x^2}{2} - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} \cdot x + \frac{\zeta'(-1)}{\zeta(-1)} + \sum_{m \geq 1} \frac{x^{1-2m}}{2m(1-2m)}. \quad (4.16)$$

Voltando ao problema do início da seção (4.2.1), vale a pena observar que a somatória envolvendo as raízes não triviais da função Zeta é convergente, pois de acordo com o teorema 3.6.1, vimos que:

$$\sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|^{1+\epsilon}} < \infty;$$

Dividindo a somatória em dois pedaços, ficamos com:

$$\sum_{\rho} \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} = \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} + \sum_{|\gamma| > T} \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)},$$

onde T é tal que:

$$\sum_{|\gamma| > T} \frac{1}{\rho(\rho+1)} < \epsilon/2.$$

Portanto, se não existirem raízes da função Zeta com parte real igual a 1 e tomando x adequadamente, obteremos:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} \cdot \frac{1}{x^2} \right| &\leq \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^{\sigma-1}}{|\rho(\rho+1)|} \\ &\leq x^{\sigma_{max}-1} \cdot \underbrace{\sum_{|\gamma| \leq T} \frac{1}{|\rho(\rho+1)|}}_{< \infty} \\ &< \epsilon/2, \end{aligned}$$

pois dentro de um compacto, σ_{max} é a maior parte real das raízes da função Zeta implicando $\sigma_{max} - 1 < 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{|\gamma| > T} \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} \cdot \frac{1}{x^2} \right| &\leq \left| \sum_{|\gamma| > T} \frac{1}{\rho(\rho+1)} \right|, \\ &\leq \epsilon/2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\rho} \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} \cdot \frac{1}{x^2} = 0.$$

Além disso, é fácil notar que o mesmo ocorre com o último termo, ou seja:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{m \geq 1} \frac{x^{1-2m}}{2m(1-2m)} \cdot \frac{1}{x^2} = 0.$$

Em suma, concluimos que

$$\int_1^x \psi(x) = \psi_1(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Com isso, podemos mostrar que $\psi(x)$ é assintótica à função x . De fato, por $\psi(x)$ ser uma função não decrescente, então, para todo $\epsilon > 0$, $x > 1$, vale que:

$$\int_{x(1-\epsilon)}^x \psi(x) \leq x\epsilon \cdot \psi(x) \leq \int_x^{x(1+\epsilon)} \psi(x).$$

Ou seja,

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^2 \cdot (1-\epsilon)^2}{2} + o(x^2) \leq x\epsilon \cdot \psi(x) \leq \frac{x^2 \cdot (1+\epsilon)^2}{2} - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Dividindo por ϵx , chegamos em:

$$\frac{x}{2\epsilon} - \frac{x \cdot (1-\epsilon)^2}{2\epsilon} + o(x) \leq \psi(x) \leq \frac{x \cdot (1+\epsilon)^2}{2\epsilon} - \frac{x}{2\epsilon} + o(x).$$

O que implica em

$$x \cdot (1 - \epsilon/2) + o(x) \leq \psi(x) \leq x \cdot (1 + \epsilon/2) + o(x).$$

Portanto, $\psi(x)$ é assintótica à função x e vale o teorema dos números primos.

4.3 A Fórmula Explícita de Delsarte

As fórmulas explícitas apresentadas até aqui revelam, entre números primos e as raízes da função Zeta, uma relação parecida com a que ocorre na fórmula clássica de Poisson (equação 5.5 do apêndice). Em 4.7, 4.13 e 4.16, o lado esquerdo contém uma soma sobre números primos e o lado direito, uma soma sobre as raízes da função Zeta.

Com o objetivo de encontrar uma generalização para a fórmula de Poisson, Delsarte analisa com cuidado o papel da Teoria de Fourier e da equação funcional da função Zeta nas fórmulas explícitas.

4.3.1 Introdução

Considere a faixa

$$B = \{s = \sigma + it : -1 \leq \sigma \leq 2\}.$$

Seja $H(s)$ uma função holomorfa em B com decrescimento acelerado em relação a t , uniforme em relação a σ . Em outras palavras, para todo k , vale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |t|^k \cdot |H(\sigma + it)| \rightarrow 0.$$

Seja $h(t) = H(1/2 + it)$ e considere a transformada de Fourier de $h(t)$ dada por:

$$\hat{h}(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot e^{-2\pi i t T} dt.$$

A ideia de Delsarte consiste em calcular de duas formas a integral:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot H(s) ds,$$

onde ∂B é o bordo de B .

Primeiramente, calcularemos a integral diretamente, usando que

4.3. A FÓRMULA EXPLÍCITA DE DELSARTE

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

e usando a equação funcional de Zeta 4.4. Depois disso, calcularemos as singularidades do integrando em B e utilizaremos o teorema dos resíduos para encontrar a fórmula pretendida.

Antes de começar, precisaremos do seguinte lema.

Lema 4.3.1. *Considere a série de Dirichlet $\alpha(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ de abscissa de convergência σ_0 e seja $(a)^T = a + it$, onde $t \in [-T, T]$ e $a > \sigma_0 > 0$. Então, se $H(s)$ é uma função como acima, temos:*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[\int_{(a)^T} \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s} \cdot H(s) ds \right] = \sum_{n \geq 1} a_n \cdot \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{(a)^T} \frac{H(s)}{n^s} ds \right]$$

ou em outras palavras, a somatória comuta com a integral imprópria:

$$\int_{(a)} \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s} \cdot H(s) ds = \sum_{n \geq 1} a_n \cdot \left[\int_{(a)} \frac{H(s)}{n^s} ds \right],$$

onde a curva $(a)(t) = a + it$ é dada pela reta paralela ao eixo imaginário no sentido positivo.

Demonstração. Note inicialmente que a integral do lado esquerdo existe, pois pelo corolário de 5.3.2, que está no apêndice, sabemos que a série acima é uniformemente convergente em todo semiplano com $\Re(s) > \sigma_0$ e a função H tem decrescimento acelerado em relação a t .

Primeiramente, precisamos mostrar que, para um certo T fixado, a somatória comuta com a integral, ou seja:

$$\int_{(a)^T} \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s} \cdot H(s) ds = \sum_{n \geq 1} a_n \cdot \left[\int_{(a)^T} \frac{H(s)}{n^s} ds \right].$$

De fato, a propriedade acima é válida, pois a série converge compactamente em $\Re(s) > \sigma_0$.

□

Agora precisamos mostrar que:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\sum_{n \geq 1} a_n \cdot \int_{(a)^T} \frac{H(s)}{n^s} ds \right] &= \sum_{n \geq 1} a_n \cdot \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{(a)^T} \frac{H(s)}{n^s} ds \right] \\ &= \sum_{n \geq 1} a_n \cdot \left[\int_{(a)} \frac{H(s)}{n^s} ds \right]. \end{aligned}$$

Para isso, fazemos:

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{n \geq 1} a_n \cdot \int_{(a)} \frac{H(s)}{n^s} ds - \sum_{n \geq 1} a_n \cdot \int_{(a)^T} \frac{H(s)}{n^s} ds \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{n \geq 1} a_n \cdot \left[\int_T^\infty \frac{H(s)}{n^s} ds \right] \right| + \left| \sum_{n \geq 1} a_n \cdot \left[\int_{-\infty}^{-T} \frac{H(s)}{n^s} ds \right] \right|. \end{aligned}$$

A primeira parcela é calculada sobre a curva $\gamma(t) = a + it$ com $t > T$. Temos, então:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} a_n \cdot \left[\int_T^\infty \frac{H(s)}{n^s} ds \right] &= \sum_{n \geq 1} a_n \cdot \left[\int_T^\infty \frac{H(a + it)}{n^{a+it}} i dt \right] \\ &= i \cdot \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^a} \cdot \left[\int_T^\infty \frac{H(a + it)}{n^{it}} dt \right] \end{aligned}$$

Observe que como $a > \sigma_0$, a somatória converge ($\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^a} = C$). Portanto, existe T tal que:

$$\begin{aligned} \left| \int_T^\infty \frac{H(a + it)}{n^{it}} dt \right| &\leq \int_T^\infty |H(a + it)| dt \\ &\leq \int_T^\infty \frac{1}{t^2} dt \\ &< \frac{\epsilon}{C}, \end{aligned}$$

(4.17)

pois $H(a + it)$ é de decrescimento acelerado com relação a t e ϵ depende de T . A estimativa da segunda parcela é análoga, terminando assim a prova o lema. ■

4.3.2 Cálculo da Integral

(1) Cálculo direto de:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{(\partial B)^T} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot H(s) ds,$$

onde ∂B é a curva da figura abaixo.

Figura 4.9: Bordo de B^T .

Se $-1 \leq \Re(s) = \sigma \leq 2$, já vimos em 4.12 que pelo teorema 3.7.3, vale:

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_{|\gamma-T|<1} \frac{1}{|s-\rho|} + O(\log T) \\ &= O(\log^2 T). \end{aligned}$$

Então a integral calculada no trecho horizontal superior fica:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{[-1,2]} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot H(s) ds \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{[-1,2]} K \log^2 T \cdot |H(s)| |ds| \\ &\leq C \cdot \log^2 T \cdot |H(\sigma + iT)|. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Pelo fato de $H(s)$ ser de decrescimento acelerado em relação a t , a integral acima tende a zero quando $T \rightarrow \infty$. O mesmo argumento vale para o trecho horizontal inferior. Portanto, nos resta calcular a integral nas curvas verticais.

(1.1) Cálculo direto de:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)^T} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot H(s) ds.$$

Pelo lema anterior (4.3.1), podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot H(s) ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \left[\sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \right] \cdot H(s) ds \\ &\stackrel{(4.3.1)}{=} \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \geq 1} \Lambda(n) \int_{(2)} \frac{H(s)}{n^s} ds. \end{aligned}$$

Note que pela mesma razão que em 4.18, vale que:

$$\int_{(2)} \frac{H(s)}{n^s} ds = \int_{(1/2)} \frac{H(s)}{n^s} ds,$$

pois a função $\frac{H(s)}{n^s}$ é inteira. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot H(s) ds &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \geq 1} \Lambda(n) \int_{(1/2)} \frac{H(s)}{n^s} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \geq 1} \Lambda(n) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(1/2 + it)}{n^{1/2 + it}} i dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(1/2 + it)}{n^{it}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-2\pi i t (\frac{\log n}{2\pi})} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \cdot \hat{h}\left(\frac{\log n}{2\pi}\right). \end{aligned}$$

4.3. A FÓRMULA EXPLÍCITA DE DELSARTE

□

(1.2) Cálculo direto de:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-(-1)^T} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot H(s) ds.$$

Para fazer a conta acima, precisaremos usar a equação funcional da função Zeta e passar o cálculo dessa integral para a linha $\Re(s) = 2$. Pelo teorema 3.5.3, vimos que:

$$\pi^{-s/2} \cdot \Gamma(s/2) \cdot \zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2} \cdot \Gamma((1-s)/2) \cdot \zeta(1-s).$$

Então, tirando a derivada logaritmica, obtemos:

$$-\frac{1}{2} \cdot \log \pi + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{2} \cdot \log \pi - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'((1-s)/2)}{\Gamma((1-s)/2)} - \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)}$$

Portanto,

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} = \log \pi - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'((1-s)/2)}{\Gamma((1-s)/2)}$$

Definimos, então:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} \doteq \phi(s).$$

Substituindo na integral acima, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-(-1)} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot H(s) ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-(-1)} \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} \cdot H(s) ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{-(-1)} \phi(s) \cdot H(s) ds \\ &= \underbrace{-\frac{1}{2\pi i} \int_{-(-1)} -\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} \cdot H(s) ds}_{(A)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{(-1)} \phi(s) \cdot H(s) ds}_{(B)}. \end{aligned}$$

(A) Substituindo s por $1-s$, temos:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2\pi i} \int_{-(-1)} -\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} \cdot H(s) ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot H(1-s) ds \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \left[\sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \right] \cdot H(1-s) ds \\
 &\stackrel{(4.3.1)}{=} \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \geq 1} \Lambda(n) \int_{(2)} \frac{H(1-s)}{n^s} ds \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \geq 1} \Lambda(n) \int_{(1/2)} \frac{H(1-s)}{n^s} ds \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \geq 1} \Lambda(n) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(1/2-it)}{n^{1/2+it}} ds \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{\infty} h(-t) \cdot e^{-2\pi i t (\frac{\log n}{2\pi})} ds
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Mas note que se:

$$\hat{h}(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot e^{-2\pi i t T} dt,$$

então,

$$\begin{aligned}
 \hat{h}(-T) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot e^{2\pi i t T} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(-t) \cdot e^{-2\pi i t T} dt.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2\pi i} \int_{-(-1)} -\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)} \cdot H(s) ds &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{\infty} h(-t) \cdot e^{-2\pi i t (\frac{\log n}{2\pi})} ds \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \hat{h}\left(-\frac{\log n}{2\pi}\right).
 \end{aligned}$$

4.3. A FÓRMULA EXPLÍCITA DE DELSARTE

(B) Vimos que:

$$\phi(s) = \log \pi - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'((1-s)/2)}{\Gamma((1-s)/2)}$$

E, pelo teorema 3.1.4, sabemos que valem:

- $\frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)}$ possui pólos simples em $s = 0, -2, -4, \dots$.
- $\frac{\Gamma'((1-s)/2)}{\Gamma((1-s)/2)}$ possui pólos simples em $s = 1, 3, 5, \dots$.

Portanto, na região $\{s = \sigma + it : -1 \leq \sigma \leq 1/2\}$, $\phi(s)$ possui um único pólo simples com resíduo:

$$\begin{aligned} \text{Res}(\phi, s = 0) &= -\frac{1}{2} \cdot \text{Res}\left(\frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)}, s = 0\right) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (-2) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Assim, pelo teorema dos resíduos, temos que:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-(-1)}^{} \phi(s) \cdot H(s) ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{(1/2)}^{} \phi(s) \cdot H(s) ds = H(0).$$

Então,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(-1)}^{} \phi(s) \cdot H(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{(1/2)}^{} \phi(s) \cdot H(s) ds - H(0).$$

□

Portanto, por um lado, o cálculo da integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot H(s) ds$$

resulta em:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \cdot \left[\hat{h}\left(\frac{\log n}{2\pi}\right) + \hat{h}\left(-\frac{\log n}{2\pi}\right) \right] + \frac{1}{2\pi i} \int_{(1/2)} \phi(s) \cdot H(s) ds - H(0). \quad (4.20)$$

4.3.3 Fórmula Explícita de Delsarte

Na região da figura 4.9, as singularidades de

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot H(s) \quad \text{são:}$$

1. $s = 1$: é um pólo simples de $\zeta(s)$ e, portanto, um pólo simples de $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot H(s)$ com resíduo

$$H(1).$$

2. $s = \rho$: é zero não trivial de $\zeta(s)$ e, portanto, um pólo simples de $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot H(s)$ com resíduo

$$-k \cdot H(\rho),$$

onde k é a multiplicidade da raiz ρ .

Portanto, pelo teorema dos resíduos, temos que:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot H(s) ds = H(1) - \sum_{\rho} H(\rho). \quad (4.21)$$

Reunindo as fórmulas obtidas em 4.20 e em 4.21, obtemos a **fórmula explícita de Delsarte**:

$$\begin{aligned} \sum_{\rho} H(\rho) &= H(1) + H(0) - \frac{1}{2\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \cdot \left[\hat{h}\left(\frac{\log n}{2\pi}\right) + \hat{h}\left(-\frac{\log n}{2\pi}\right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{(1/2)} \phi(s) \cdot H(s) ds. \end{aligned} \quad (4.22)$$

4.4 A Fórmula de Weil

4.4.1 A Fórmula Explícita de Weil

Teorema 4.4.1. *Seja $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$. Suponha que, para todo $\delta_0 > 0$ fixado, valem:*

(i)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(1/2+\delta_0)2\pi|x|} \cdot |F(x)| dx < \infty;$$

(ii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(1/2+\delta_0)2\pi|x|} \cdot |F'(x)| dx < \infty.$$

Definimos:

$$\phi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cdot e^{-(s-1/2)2\pi x} dx,$$

para todo $s \in S_{\delta_0} = \{s = \sigma + it : -\delta_0 < \sigma < 1 + \delta_0\}$.

Nessas condições:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{|\gamma| \leq T} \phi(\rho) &= \phi(0) + \phi(1) + \frac{1}{2\pi} \log \pi \cdot F(0) + \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma'(1/4)}{\Gamma(1/4)} \cdot F(0) \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \cdot \left[F\left(\frac{\log n}{2\pi}\right) + F\left(-\frac{\log n}{2\pi}\right) \right] \\ &\quad + \int_0^{\infty} \frac{e^{-\pi x}}{1 - e^{-4\pi x}} \cdot (2F(0) - F(x) - F(-x)) dx \end{aligned}$$

Antes de prosseguir com a demonstração do teorema, faremos algumas observações. A primeira sobre a natureza da função $\phi(s)$.

Proposição 4.4.2. *A função*

$$\phi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cdot e^{-(s-1/2)2\pi x} dx$$

é uma função holomorfa na faixa $S_{\delta_0} = \{s = \sigma + it : -\delta_0 < \sigma < 1 + \delta_0\}$ e valem:

(i) $\phi(s)$ *é limitada quando $|t| \leq 1$.*

(ii) $\phi(s) \leq \frac{K}{|t|+1}$ *quando $|t| \geq 1$.*

Demonstração. Pelo lema 3.1.1, sabemos que:

$$\phi_L(s) = \int_{-L}^L F(x) \cdot e^{-(s-1/2)2\pi x} dx$$

é uma função holomorfa em S_{δ_0} , para todo L .

Portanto, basta mostrar que $\phi_L(s) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \phi(s)$ uniformemente sobre compactos em S_{δ_0} . Primeiramente, note que:

$$1/2 - \sigma < 1/2 + \delta_0 \Leftrightarrow \sigma > -\delta_0.$$

$$\begin{aligned} \left| \int_L^\infty F(x) \cdot e^{-(s-1/2)2\pi x} dx \right| &\leq \int_L^\infty |F(x)| \cdot e^{-(\sigma-1/2)2\pi x} dx \\ &= \int_L^\infty |F(x)| \cdot e^{[1/2-\sigma]2\pi|x|} dx \\ &\stackrel{(\sigma > -\delta_0)}{<} \int_L^\infty |F(x)| \cdot e^{[1/2+\delta_0]2\pi|x|} dx \\ &\stackrel{(L > R)}{<} \epsilon. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\sigma - 1/2 < 1/2 + \delta_0 \Leftrightarrow \sigma < 1 + \delta_0.$$

4.4. A FÓRMULA DE WEIL

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{-\infty}^{-L} F(x) \cdot e^{-(s-1/2)2\pi x} dx \right| &\leq \int_{-\infty}^{-L} |F(x)| \cdot e^{-(\sigma-1/2)2\pi x} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{-L} |F(x)| \cdot e^{[\sigma-1/2]2\pi|x|} dx \\
 &\stackrel{(\sigma > -\delta_0)}{<} \int_{-\infty}^{-L} |F(x)| \cdot e^{[1/2+\delta_0]2\pi|x|} dx \\
 &\stackrel{(L > R)}{<} \epsilon.
 \end{aligned}$$

Portanto, $\phi_L(s) \xrightarrow[L \rightarrow \infty]{unif.} \phi(s)$ e, em particular, converge uniformemente sobre compactos em S_{δ_0} e, por Weierstrass, $\phi(s)$ é holomorfa em S_{δ_0} .

□

(i) A função $\phi(s)$ é holomorfa no interior da figura abaixo, como foi provado acima. Então, precisamos verificar o que ocorre no bordo.

Figura 4.10: $t \leq T$.

$$\begin{aligned}
 |\phi(-\delta_0 + it)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |F(x)| \cdot e^{-(\delta_0-1/2)2\pi x} dx \\
 &\leq \int_0^{\infty} |F(x)| \cdot e^{(\delta_0+1/2)2\pi|x|} dx + \int_{-\infty}^0 |F(x)| \cdot e^{(-\delta_0-1/2)2\pi|x|} dx \\
 &< \infty.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\phi(1 + \delta_0 + it)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |F(x)| \cdot e^{-(1+\delta_0-1/2)2\pi x} dx \\
 &\leq \int_0^{\infty} |F(x)| \cdot e^{(-\delta_0-1/2)2\pi|x|} dx + \int_{-\infty}^0 |F(x)| \cdot e^{(\delta_0+1/2)2\pi|x|} dx \\
 &< \infty.
 \end{aligned}$$

Portanto, a função é limitada nas linhas verticais. Para as linhas horizontais basta usar a continuidade da função.

□

(ii) Aplicando integração por partes, reescrevemos:

$$\begin{aligned}
 \phi(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{F(x) \cdot e^{-(s-1/2)2\pi x}}_f \cdot \underbrace{e^{-2\pi itx}}_{g'} dx \\
 &= \left[\frac{F(x) \cdot e^{-(s-1/2)2\pi x}}{-it2\pi} \right]_{-\infty}^{\infty} \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi it} \int_{-\infty}^{\infty} F'(x) \cdot e^{-(s-1/2)2\pi x} - \frac{1}{4\pi^2 it(\sigma - 1/2)} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cdot e^{-(s-1/2)2\pi x}.
 \end{aligned}$$

Note que, por hipótese:

$$e^{(1/2+\delta_0)2\pi|x|} \cdot |F(x)| \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$$

Portanto, o primeiro pedaço é zero. Quanto ao pedaço restante, como as integrais em módulo são finitas por hipótese e a parte real de s é limitada, temos que:

$$\begin{aligned} |\phi(s)| &\leq \frac{C}{|t|} \\ &\leq \frac{K}{|t| + 1}, \end{aligned}$$

desde que $|t| > R \geq 1$, para um certo R .

■

Pelas hipóteses do teorema, temos que:

$$e^{(1/2+\delta_0)2\pi|x|} \cdot |F(x)| \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \exists R > 0 : |x| > R &\Rightarrow e^{(1/2+\delta_0)2\pi|x|} \cdot |F(x)| < 1 \\ &\Rightarrow |F(x)| < e^{-(1/2+\delta_0)2\pi|x|}. \end{aligned}$$

É fácil ver que o mesmo ocorre com $F'(x)$.

4.4.2 Alguns Resultados Importantes

Vimos em 3.7.4 algumas estimativas para a derivada logarítmica da função Zeta. Na prova do teorema de Weil, usaremos a função $\xi(s)$ já estudada neste trabalho. Então, precisaremos do seguinte:

Proposição 4.4.3. *Se $-1 < \Re(s) = \sigma < 2$, então:*

$$\left| \frac{\xi'(\sigma + iT)}{\xi(\sigma + iT)} \right| = O(\log^2 T).$$

Demonstração. Vimos em 3.18 que:

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \cdot \log \pi + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'(s/2+1)}{\Gamma(s/2+1)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

Por 4.12, temos que:

$$\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \cdot \log \pi + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log^2 T).$$

Também vimos em 5.2.1 no apêndice que:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'(s/2+1)}{\Gamma(s/2+1)} = O(\log T).$$

O que prova a proposição. ■

Teorema 4.4.4. *Sejam $a > 0$ e $b > 0$ reais fixados. Suponha $T \geq 1$. Então:*

Se $x < 0$, então:

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T \frac{\Gamma'(a+ibt)}{\Gamma(a+ibt)} \cdot e^{-2\pi ixt} dt &= \left[\frac{\Gamma'(a+ibt)}{\Gamma(a+ibt)} \cdot \frac{e^{-2\pi ixt}}{2\pi ix} \right]_{-T}^T \\ &\quad - \frac{2\pi e^{(2\pi ax)/b}}{b(1 - e^{2\pi x/b})} + O\left(\frac{1}{x^2 T}\right), \end{aligned}$$

e se $x > 0$,

$$\int_{-T}^T \frac{\Gamma'(a+ibt)}{\Gamma(a+ibt)} \cdot e^{-2\pi ixt} dt = \left[\frac{\Gamma'(a+ibt)}{\Gamma(a+ibt)} \cdot \frac{e^{-2\pi ixt}}{2\pi ix} \right]_{-T}^T + O\left(\frac{1}{x^2 T}\right).$$

Demonstração. Podemos reescrever a integral da esquerda como:

$$\int_{-T}^T \frac{\Gamma'(a+ibt)}{\Gamma(a+ibt)} \cdot e^{-2\pi ixt} dt = \frac{1}{i} \int_{-iT}^{iT} \frac{\Gamma'(a+bs)}{\Gamma(a+bs)} \cdot e^{-2\pi xs} ds$$

Suponha $x < 0$ e considere a curva abaixo:

Figura 4.11: Curva $\gamma(t)$.

Já vimos que $\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$ possui pólos simples em $s = -n$ com resíduo -1 e, portanto, numa vizinhança de $-n$ existe uma função holomorfa h tal que:

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -\frac{1}{s+n} + h(s).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma'(a+bs)}{\Gamma(a+bs)} &= -\frac{1}{a+bs+n} + h(a+bs) \\ &= -\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{s+(n+a)/b} + h(a+bs). \end{aligned}$$

Portanto, o integrando possui pólos simples em $s = -(n+a)/b$ com resíduo

$$-\frac{1}{b} \cdot e^{2\pi x(n+a)/b}$$

Usando que $x < 0$, é fácil mostrar que a integral no trecho $\Re(s) = -\mu$ se anula quando $\mu \rightarrow \infty$. Então, pelo teorema dos resíduos, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \int_{-iT}^{iT} \frac{\Gamma'(a+ibs)}{\Gamma(a+ibs)} \cdot e^{-2\pi ixs} dt &= -\frac{2\pi}{b} \cdot \sum_{n \geq 0} e^{2\pi x(n+a)/b} \\ &+ \frac{1}{i} \int_{\gamma_i + \gamma_s} \frac{\Gamma'(a+bs)}{\Gamma(a+bs)} \cdot e^{-2\pi xs} ds, \end{aligned}$$

onde γ_i e γ_s são as curvas dos trechos inferior e superior.

a) Note que por $x < 0$, temos que a somatória acima é uma PG e, então,

$$-\frac{2\pi}{b} \cdot \sum_{n \geq 0} e^{2\pi x(n+a)/b} = -\frac{2\pi}{b} \cdot \frac{e^{2\pi xa/b}}{1 - e^{2\pi x/b}}$$

b) Considere a curva $\gamma_i(\sigma) = \sigma - iT$, com $\sigma \in [-\infty, 0]$. Aplicando partes, temos:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_i} \frac{\Gamma'(a+bs)}{\Gamma(a+bs)} \cdot e^{-2\pi xs} ds &= \int_{-\infty}^0 \frac{\Gamma'(a+b\sigma - ibT)}{\Gamma(a+b\sigma - ibT)} \cdot e^{-2\pi x\sigma + 2\pi ixT} d\sigma \\ &= \left[\frac{\Gamma'(a+b\sigma - ibT)}{\Gamma(a+b\sigma - ibT)} \cdot \frac{e^{-2\pi xs}}{-2\pi x} \right]_{-\infty}^0 \\ &+ \frac{1}{2\pi x} \int_{-\infty}^0 \left(\frac{\Gamma'(a+b\sigma - ibT)}{\Gamma(a+b\sigma - ibT)} \right)' \cdot e^{-2\pi x\sigma + 2\pi ixT} d\sigma \\ &= -\frac{\Gamma'(a - ibT)}{\Gamma(a - ibT)} \cdot \frac{e^{2\pi ixT}}{2\pi x} \\ &+ \frac{e^{2\pi ixT}}{2\pi x} \int_{-\infty}^0 \left(\frac{\Gamma'(a+b\sigma - ibT)}{\Gamma(a+b\sigma - ibT)} \right)' \cdot e^{-2\pi x\sigma} d\sigma \end{aligned}$$

Já vimos que de 3.6 podemos obter:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} &= -\frac{1}{s} - \gamma - \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{s+n} - \frac{1}{n} \right) \\ &= -\frac{1}{s} - \gamma + \sum_{n \geq 1} \frac{s}{(s+n)n}. \end{aligned}$$

4.4. A FÓRMULA DE WEIL

Derivando, temos:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)'(s) &= \frac{1}{s^2} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(s+n)^2} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(s+n)^2}.\end{aligned}$$

Pela fórmula de Euler (5.1.4 do apêndice), temos:

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(s+n)^2} &= \int_0^\infty \frac{1}{(s+x)^2} dx + \int_0^\infty \{x\} \cdot \frac{-2}{(s+x)^3} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{(s+x)^2} dx + \int_0^\infty \{x\} \cdot \frac{-2}{(s+x)^3} dx \\ &= \frac{1}{s} + O\left(\frac{1}{|s|^2}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{|s|}\right).\end{aligned}$$

Portanto, se $T \geq 1$, então

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)'(a+b\sigma-ibT) &= O\left(\frac{1}{|a+b\sigma-ibT|}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{bT}\right).\end{aligned}$$

Então, para mostrar que:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_i} \frac{\Gamma'(a+bs)}{\Gamma(a+bs)} \cdot e^{-2\pi xs} dt &= -\frac{\Gamma'(a-ibT)}{\Gamma(a-ibT)} \cdot \frac{e^{2\pi ixT}}{2\pi x} \\ &\quad + O\left(\frac{1}{x^2 T}\right),\end{aligned}$$

basta estimar a integral abaixo.

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{e^{2\pi i x T}}{2\pi x} \int_{-\infty}^0 \left(\frac{\Gamma'(a + b\sigma - ibT)}{\Gamma(a + b\sigma - ibT)} \right)' \cdot e^{-2\pi x \sigma} d\sigma \right| \\
 & \leq \frac{K}{xT} \left| \int_{-\infty}^0 e^{-2\pi x \sigma} d\sigma \right| \\
 & \leq \frac{K}{xT} \left| \frac{e^{-2\pi x \sigma}}{-2\pi x} \right|_{-\infty}^0 \\
 & \leq \frac{K}{x^2 T}.
 \end{aligned}$$

c) Similarmente, temos que:

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma_s} \frac{\Gamma'(a + bs)}{\Gamma(a + bs)} \cdot e^{-2\pi x s} dt &= \frac{\Gamma'(a + ibT)}{\Gamma(a + ibT)} \cdot \frac{e^{-2\pi i x T}}{2\pi x} \\
 &+ O\left(\frac{1}{x^2 T}\right),
 \end{aligned}$$

o que termina a prova para $x < 0$.

Para o caso $x > 0$, basta considerar a curva:

Figura 4.12: Curva $\gamma(t)$.

4.4. A FÓRMULA DE WEIL

O resultado é obtido do mesmo modo que o anterior notando-se que nesse caso, não há resíduos no interior da curva. ■

Lema 4.4.5. *Sejam $a > 0$ e $b > 0$ reais fixados. Suponha que $J(x)$ seja uma função real de classe $\mathcal{C}^1$ com decrescimento acelerado de modo que, para todo k , valem:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |t|^k \cdot |J(x)| \rightarrow 0.$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |t|^k \cdot |J'(x)| \rightarrow 0.$$

Então:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a + ibt) \cdot \hat{J}(t) dt &= \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a) \cdot J(0) \\ &+ \frac{2\pi}{b} \int_0^\infty \frac{e^{-2\pi ax/b}}{1 - e^{-2\pi x/b}} \cdot (J(0) - J(-x)) dx. \end{aligned}$$

Demonstração. Suponha inicialmente que $J(0) = 0$. Por definição

$$\hat{J}(t) = \int_{-\infty}^\infty J(x) \cdot e^{-2\pi ixt} dx.$$

Então, a integral do lado esquerdo vale:

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a + ibt) \cdot \hat{J}(t) dt &= \int_{-T}^T \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a + ibt) \cdot \left[\int_{-\infty}^\infty J(x) \cdot e^{-2\pi ixt} dx \right] dt \\ &= \int_{-T}^T \int_{-\infty}^\infty \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a + ibt) \cdot J(x) \cdot e^{-2\pi ixt} dx dt \\ &\stackrel{(Fubini)}{=} \int_{-\infty}^\infty \int_{-T}^T \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a + ibt) \cdot J(x) \cdot e^{-2\pi ixt} dt dx \\ &= \int_{-\infty}^\infty J(x) \left[\int_{-T}^T \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a + ibt) \cdot e^{-2\pi ixt} dt \right] dx. \end{aligned}$$

1ª Afirmação:

$$\int_{-T}^T \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a + ibt) \cdot e^{-2\pi i x t} dt = O(T \cdot \log T).$$

De fato, por 5.2.1 do apêndice, sabemos que:

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \log s + O(1/|s|).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a + ibt) \right| &\leq |\log |a + ibt|| + O(1/b|t|). \\ &\leq k_2 \log(b|t| + 2) + \frac{k_1}{b|t|} \\ &\leq k_3 \log(|t| + 2). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-T}^T \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a + ibt) \cdot e^{-2\pi i x t} dt \right| &\leq \int_{-T}^T \left| \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a + ibt) \right| dt \\ &\leq K \log(T) \cdot 2T. \end{aligned}$$

□

2ª Afirmação:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} J(x) \left[\int_{-T}^T \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a + ibt) \cdot e^{-2\pi i x t} dt \right] dx &= - \frac{2\pi}{b} \int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{-2\pi a x/b}}{1 - e^{-2\pi x/b}} \cdot J(-x) dx \\ &+ O(T^{-1/3} \log T). \end{aligned}$$

Seja $\delta = T^{-2/3}$. Usando que, por hipótese, a função $J(x)$ é de classe $\mathcal{C}^1$, é verdade que:

$$J(x) = J'(0)x + \epsilon(x), \quad (4.23)$$

4.4. A FÓRMULA DE WEIL

onde $\frac{\epsilon(x)}{|x|} \rightarrow 0$, quando $x \rightarrow \infty$. Assim, existe uma vizinhança de x tal que $|\epsilon(x)| < |x|$, ou seja:

$$|J(x)| \leq |J'(0)||x| + |x| = O(x). \quad (4.24)$$

Portanto, temos que a contribuição dos x 's tais que $|x| \leq \delta$ é dada por:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\delta}^{\delta} J(x) \left[\int_{-T}^T \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a + ibt) \cdot e^{-2\pi ixt} dt \right] dx \right| &\leq K \cdot \int_{-\delta}^{\delta} |x| \log(T) \cdot T dx \\ &\leq K \cdot \log(T) T \int_{-\delta}^{\delta} |x| dx \\ &= K \cdot T \log(T) \delta^2 \\ &= K \cdot T^{-1/3} \log(T). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} J(x) \left[\int_{-T}^T \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a + ibt) \cdot e^{-2\pi ixt} dt \right] dx &= \int_{\delta}^{\infty} J(x) \left[\int_{-T}^T \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a + ibt) \cdot e^{-2\pi ixt} dt \right] dx \\ &\quad + \int_{-\infty}^{-\delta} J(x) \left[\int_{-T}^T \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a + ibt) \cdot e^{-2\pi ixt} dt \right] dx \\ &\quad + O(T^{-1/3} \log T). \end{aligned}$$

1ª Parcela: $x \in [\delta, \infty[$

Nesse intervalo, vamos usar o teorema anterior (4.4.4). Se $T > 1$, então:

$$\int_{-T}^T \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a + ibt) \cdot e^{-2\pi ixt} dt = \left[\frac{\Gamma'}{\Gamma}(a + ibt) \cdot \frac{e^{-2\pi ixt}}{2\pi ix} \right]_{-T}^T + O\left(\frac{1}{x^2 T}\right).$$

Primeiramente, note que $J(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$. Então, o termo do resto contribui com:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\delta}^{\infty} J(x) \cdot \frac{1}{x^2 T} dx \right| &\leq \frac{1}{T} \int_{\delta}^{\infty} \min(x, k) \cdot \frac{1}{x^2} dx \\
 &\leq \frac{1}{T} \cdot \left[\int_{\delta}^1 \frac{1}{x} dx + \int_1^{\infty} \frac{k}{x^2} dx \right] \\
 &\leq \frac{1}{T} \cdot [-\log(T^{-2/3}) + k] \\
 &\leq K \cdot \frac{\log T}{T}.
 \end{aligned}$$

Restando assim estimar:

$$\left| \int_{\delta}^{\infty} J(x) \cdot \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a + ibT) \cdot \frac{e^{-2\pi i x T}}{2\pi i x} dx \right| \leq k_1 \log T \left| \int_{\delta}^{\infty} \frac{J(x)}{x} \cdot e^{-2\pi i x T} dx \right|.$$

Aplicando partes na última integral, vemos que:

$$\begin{aligned}
 \int_{\delta}^{\infty} \frac{J(x)}{x} \cdot e^{-2\pi i x T} dx &= \left[\frac{J(x)}{x} \cdot \frac{e^{-2\pi i x T}}{-2\pi i T} \right]_{\delta}^{\infty} + \frac{1}{2\pi i T} \int_{\delta}^{\infty} \left(\frac{J(x)}{x} \right)' \cdot e^{-2\pi i x T} dx \\
 &= \frac{J(\delta)}{\delta} \cdot \frac{e^{-2\pi i \delta T}}{2\pi i T} + \frac{1}{2\pi i T} \int_{\delta}^{\infty} \frac{J'(x)}{x} \cdot e^{-2\pi i x T} dx \\
 &\quad - \frac{1}{2\pi i T} \int_{\delta}^{\infty} \frac{J(x)}{x^2} \cdot e^{-2\pi i x T} dx.
 \end{aligned}$$

Estimando cada parcela separadamente, temos:

4.4. A FÓRMULA DE WEIL

$$\left| \frac{J(\delta)}{\delta} \cdot \frac{e^{-2\pi i \delta T}}{2\pi i T} \right| \leq \frac{1}{2\pi T}.$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i T} \int_{\delta}^{\infty} \frac{J(x)}{x^2} \cdot e^{-2\pi i x T} dx \right| &\leq \frac{1}{2\pi T} \int_{\delta}^{\infty} \min(x, k) \cdot \frac{1}{x^2} dx \\ &\leq K \cdot \frac{\log T}{T}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i T} \int_{\delta}^{\infty} \frac{J'(x)}{x} \cdot e^{-2\pi i x T} dx \right| &\underset{(x \geq \delta)}{\leq} \frac{1}{2\pi \delta T} \underbrace{\int_{\delta}^{\infty} |J'(x)| dx}_{< \infty} \\ &\leq \frac{1}{2\pi T^{1/3}}. \end{aligned}$$

Reunindo as estimativas, concluimos que:

$$\int_{\delta}^{\infty} \frac{J(x)}{x} \cdot e^{-2\pi i x T} dx = O\left(\frac{1}{T^{1/3}}\right).$$

2ª Parcela: $x \in]-\infty, -\delta]$. Novamente, pelo teorema anterior temos:

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a + ibt) \cdot e^{-2\pi i x t} dt &= \left[\frac{\Gamma'}{\Gamma}(a + ibt) \cdot \frac{e^{-2\pi i x t}}{2\pi i x} \right]_{-T}^T \\ &\quad - \frac{2\pi e^{(2\pi a x)/b}}{b(1 - e^{2\pi x/b})} + O\left(\frac{1}{x^2 T}\right), \end{aligned}$$

Analogamente, o erro pode ser estimado por:

$$\left| \int_{-\infty}^{-\delta} J(x) \cdot \frac{1}{x^2 T} dx \right| \leq K \cdot \frac{\log T}{T}.$$

Procedendo da mesma forma como no anterior, temos que:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{-\infty}^{-\delta} J(x) \cdot \frac{e^{-2\pi i x T}}{2\pi i x} dx \right| &\leq \left| \int_{-\infty}^{-\delta} \frac{J(x)}{x} \cdot e^{-2\pi i x T} dx \right| \\
 &= \left| \int_{\delta}^{\infty} \frac{J(-x)}{x} \cdot e^{2\pi i x T} dx \right| \\
 &= O\left(\frac{1}{T^{1/3}}\right).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} J(x) \left[\int_{-T}^T \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a + ibt) \cdot e^{-2\pi i x t} dt \right] dx &= - \frac{2\pi}{b} \int_{-\infty}^{-\delta} \frac{e^{2\pi a x/b}}{1 - e^{2\pi x/b}} \cdot J(x) dx \\
 &\quad + O\left(T^{-1/3} \log T\right). \\
 &= - \frac{2\pi}{b} \int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{-2\pi a x/b}}{1 - e^{-2\pi x/b}} \cdot J(-x) dx \\
 &\quad + O\left(T^{-1/3} \log T\right).
 \end{aligned}$$

Além disso, sabemos que:

$$1 - e^{-2\pi x/b} = x \cdot \left[\frac{2\pi}{b} + h(x) \right],$$

onde h é uma função contínua numa vizinhança de $x = 0$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^{\delta} \frac{e^{-2\pi a x/b}}{1 - e^{-2\pi x/b}} \cdot J(-x) dx \right| &\leq \int_0^{\delta} \frac{e^{-2\pi a x/b}}{x \cdot \left[\frac{2\pi}{b} + h(x) \right]} \cdot |x| dx \\
 &\leq K \cdot \delta.
 \end{aligned}$$

Portanto, como queríamos demonstrar, vale que:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a + ibt) \cdot \hat{J}(t) dt = - \frac{2\pi}{b} \int_0^{\infty} \frac{e^{-2\pi a x/b}}{1 - e^{-2\pi x/b}} \cdot J(-x) dx. \tag{4.25}$$

□

4.4. A FÓRMULA DE WEIL

Em suma, mostramos que o teorema vale quando $J(0) = 0$. Para o caso geral, seja $A > 0$ e considere a função:

$$K(x) = J(x) - J(0) \cdot e^{-\pi x^2/A}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \hat{K}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} K(x) \cdot e^{-2\pi ixt} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} J(x) \cdot e^{-2\pi ixt} dx - J(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2/A} \cdot e^{-2\pi ixt} dx. \end{aligned}$$

Note que a primeira integral é, por definição, $\hat{J}(t)$ e que pela propriedade 5.4.4 vista no apêndice, temos que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2/A} \cdot e^{-2\pi ixt} dx &= \sqrt{A} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} \cdot e^{-2\pi iy(\sqrt{A}t)} dy \\ &= \sqrt{A} \cdot e^{-\pi A t^2}. \end{aligned}$$

Então,

$$\hat{K}(t) = \hat{J}(t) - J(0) \cdot \sqrt{A} \cdot e^{-\pi A t^2}.$$

Aplicando 4.25 para $K(x)$, por um lado temos:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a + ibt) \cdot \hat{K}(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a + ibt) \cdot \hat{J}(t) dt \\ &\quad - J(0) \cdot \sqrt{A} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a + ibt) \cdot e^{-\pi A t^2} dt. \end{aligned}$$

Pela fórmula de Stirling (5.2.2 do apêndice), sabemos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a + ibt) &= \log(a + ibt) + O\left(\frac{1}{|t|}\right) \\
 &= \log a(1 + ibt/a) + O\left(\frac{1}{|t|}\right) \\
 &= \log a + \log(1 + ibt/a) + O\left(\frac{1}{|t|}\right) \\
 &= \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a) + \log(1 + ibt/a) + O\left(\frac{1}{a}\right) + O\left(\frac{1}{|t|}\right)
 \end{aligned}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned}
 \log(1 + ibt/a) &= \log|1 + ibt/a| + i \arg(1 + ibt/a) \\
 &= O(|t|).
 \end{aligned}$$

Então,

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(a + ibt) = \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a) + O(|t|).$$

Portanto, a última integral vale:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a + ibt) \cdot e^{-\pi At^2} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(a) + O(|t|) \right) \cdot e^{-\pi At^2} dt \\
 &= \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a) \cdot A^{-1/2} + O(1/A).
 \end{aligned}$$

Por outro lado, como $K(0) = 0$, temos:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a + ibt) \cdot \hat{K}(t) dt &= -\frac{2\pi}{b} \int_0^{\infty} \frac{e^{-2\pi ax/b}}{1 - e^{-2\pi x/b}} \cdot K(-x) dx \\
&= -\frac{2\pi}{b} \int_0^{\infty} \frac{e^{-2\pi ax/b}}{1 - e^{-2\pi x/b}} \cdot J(-x) dx \\
&\quad + \frac{2\pi J(0)}{b} \int_0^{\infty} \frac{e^{-2\pi ax/b}}{1 - e^{-2\pi x/b}} \cdot e^{-\pi t^2/A} dx \\
&= \frac{2\pi}{b} \int_0^{\infty} \frac{e^{-2\pi ax/b}}{1 - e^{-2\pi x/b}} \cdot (J(0) - J(-x)) dx \\
&\quad + \frac{2\pi J(0)}{b} \int_0^{\infty} \frac{e^{-2\pi ax/b}}{1 - e^{-2\pi x/b}} \cdot (e^{-\pi x^2/A} - 1) dx.
\end{aligned}$$

Vimos há pouco que valem:

$$1 - e^{-2\pi x/b} = x \cdot \left[\frac{2\pi}{b} + h(x) \right],$$

e

$$e^{-\pi x^2/A} - 1 = -\frac{x^2}{A} \cdot [\pi + g(x)],$$

onde h e g são funções contínuas numa vizinhança de $x = 0$. Então, estimamos a última integral por:

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^{\infty} \frac{e^{-2\pi ax/b}}{1 - e^{-2\pi x/b}} \cdot (e^{-\pi x^2/A} - 1) dx \right| &\leq \int_0^1 \frac{e^{-2\pi ax/b}}{x \cdot \left[\frac{2\pi}{b} + h(x) \right]} \cdot \frac{x^2}{A} \cdot [\pi + g(x)] dx \\
&\quad + C \int_1^{\infty} \frac{e^{-2\pi ax/b}}{x} \cdot \frac{x^2}{A} dx \\
&\leq \frac{1}{A} \cdot \int_0^1 x \cdot \frac{e^{-2\pi ax/b}}{\left[\frac{2\pi}{b} + h(x) \right]} \cdot [\pi + g(x)] dx \\
&\quad + \frac{C}{A} \int_1^{\infty} x \cdot e^{-2\pi ax/b} dx \\
&\leq \frac{K}{A}.
\end{aligned}$$

Reunindo as estimativas acima, concluímos que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a + ibt) \cdot \hat{J}(t) dt &= J(0) \cdot \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a) + O(1/\sqrt{A}) \\ &+ \frac{2\pi}{b} \int_0^{\infty} \frac{e^{-2\pi ax/b}}{1 - e^{-2\pi x/b}} \cdot (J(0) - J(-x)) dx + O(1/A). \end{aligned}$$

Contudo, fazendo $A \rightarrow \infty$, terminamos a prova do teorema. Pelo fato de que $K(x) = J(-x)$ implica $\hat{K}(t) = \hat{J}(-t)$, é fácil ver que também vale:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a - ibt) \cdot \hat{J}(t) dt &= J(0) \cdot \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a) \\ &+ \frac{2\pi}{b} \int_0^{\infty} \frac{e^{-2\pi ax/b}}{1 - e^{-2\pi x/b}} \cdot (J(0) - J(x)) dx. \end{aligned}$$

■

4.4.3 Prova do Teorema

A ideia da demonstração consiste em calcular a integral:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \phi(s) \cdot \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds,$$

onde ∂B é o limite da curva da figura abaixo quando $T \rightarrow \infty$ e $0 < \delta < \delta_0$.

Figura 4.13: Bordo de B .

Como $\phi(s)$ é holomorfa em B , então as únicas singularidades de $\phi(s) \cdot \frac{\xi'(s)}{\xi(s)}$ são dadas pelos zeros não triviais da função Zeta ($\rho = \beta + i\gamma$) com resíduo:

$$k \cdot \phi(\rho),$$

onde k é a multiplicidade da raiz ρ .

Demonstração. Se $\Im(\rho) = \gamma \neq T$, para toda raiz ρ , então pelo teorema dos resíduos, temos que:

$$\sum_{|\gamma| < T} \phi(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\partial B)^T} \phi(s) \cdot \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds.$$

Pelas proposições 4.4.2 e 4.4.3, temos que:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma \pm iT} \phi(s) \cdot \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds \right| \leq k \cdot \frac{\log^2 T}{|T| + 1}. \quad (4.26)$$

Portanto,

$$\sum_{|\gamma| < T} \phi(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \left[\int_{(1+\delta)^T} + \int_{-(-\delta)^T} \right] \left(\phi(s) \cdot \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds \right) + O\left(\frac{\log^2 T}{T}\right).$$

Pela equação funcional da função $\xi(s)$ (3.5.3), é fácil ver que:

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = -\frac{\xi'(1-s)}{\xi(1-s)}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_{-(-\delta)^T} \phi(s) \cdot \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds &= - \int_{-(-\delta)^T} \phi(s) \cdot \frac{\xi'(1-s)}{\xi(1-s)} ds \\ &= \int_{(1+\delta)^T} \phi(1-s) \cdot \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{|\gamma| < T} \phi(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(1+\delta)^T} [\phi(s) + \phi(1-s)] \cdot \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} + O\left(\frac{\log^2 T}{T}\right).$$

Lembrando que:

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \cdot \log \pi + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}, \quad (4.27)$$

precisaremos calcular o limite da integral acima quando $T \rightarrow \infty$ para cada um dos termos de $\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}$.

(1) Cálculo de:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(1+\delta)^T} \phi(s) \cdot \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}. \quad (4.28)$$

Por definição,

$$\phi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cdot e^{-(s-1/2)2\pi x} dx.$$

Então, escrevemos

4.4. A FÓRMULA DE WEIL

$$\begin{aligned}
\frac{\phi(s)}{n^s} &= \frac{1}{n^{1/2}} \cdot \frac{\phi(s)}{n^{s-1/2}} \\
&= \frac{1}{n^{1/2}} \cdot \phi(s) \cdot e^{-(s-1/2)2\pi\left(\frac{\log n}{2\pi}\right)} \\
&= \frac{1}{n^{1/2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cdot e^{-(s-1/2)2\pi\left[x+\frac{\log n}{2\pi}\right]} dx \\
&= \frac{1}{n^{1/2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F\left(x - \frac{\log n}{2\pi}\right) \cdot e^{-(s-1/2)2\pi x} dx.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\phi(s) \cdot \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= - \sum_{n \geq 1} \Lambda(n) \cdot \frac{\phi(s)}{n^s} \\
&= - \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{1/2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F\left(x - \frac{\log n}{2\pi}\right) \cdot e^{-(s-1/2)2\pi x} dx.
\end{aligned}$$

Afirmação: A somatória da fórmula acima comuta com a integral.

De fato, das observações feitas anteriormente, temos que:

$$\left| F\left(x - \frac{\log n}{2\pi}\right) \right| < e^{-(1/2+\delta_0)2\pi\left|x-\frac{\log n}{2\pi}\right|}.$$

Primeiramente devemos mostrar que a somatória comuta com a integral definida, ou seja, para todo $L > 0$ e $x \in [-L, L]$, a somatória

$$- \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{1/2}} \cdot F\left(x - \frac{\log n}{2\pi}\right).$$

converge uniformemente no intervalo $[-L, L]$. Assim, tomemos n_0 tal que $L < \frac{\log n}{2\pi}$:

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{n \geq n_0} \frac{\Lambda(n)}{n^{1/2}} \cdot F\left(x - \frac{\log n}{2\pi}\right) \right| &< \sum_{n \geq n_0} \frac{\Lambda(n)}{n^{1/2}} \cdot e^{-(1/2+\delta_0)2\pi \left|x - \frac{\log n}{2\pi}\right|} \\
 &\stackrel{(x < \frac{\log n}{2\pi})}{\leq} \sum_{n \geq n_0} \frac{\Lambda(n)}{n^{1/2}} \cdot e^{(1/2+\delta_0)2\pi \left(x - \frac{\log n}{2\pi}\right)} \\
 &\leq \sum_{n \geq n_0} \frac{\Lambda(n)}{n^{1/2}} \cdot e^{(1/2+\delta_0)2\pi x} \cdot n^{-(1/2+\delta_0)} \\
 &\leq \sum_{n \geq n_0} \frac{\Lambda(n)}{n^{1+\delta_0}} \cdot e^{(1/2+\delta_0)2\pi x} \\
 &\leq \sum_{n \geq n_0} \frac{\Lambda(n)}{n^{1+\delta_0}} \cdot e^{(1/2+\delta_0)2\pi L} \xrightarrow{n_0 \rightarrow \infty} 0.
 \end{aligned}$$

Ainda falta mostrar que o limite comuta com a somatória, ou seja:

$$\begin{aligned}
 &\lim_{L \rightarrow \infty} \left[- \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{1/2}} \cdot \int_{-L}^L F\left(x - \frac{\log n}{2\pi}\right) \cdot e^{-(s-1/2)2\pi x} dx \right] \\
 &= - \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{1/2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F\left(x - \frac{\log n}{2\pi}\right) \cdot e^{-(s-1/2)2\pi x} dx.
 \end{aligned}$$

Para isso, basta mostrar que o limite existe. Assim, se $s = 1 + \delta + it$, então:

$$\begin{aligned}
 &\left| - \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{1/2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F\left(x - \frac{\log n}{2\pi}\right) \cdot e^{-(s-1/2)2\pi x} dx \right| \\
 &\leq \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{1/2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left| F\left(x - \frac{\log n}{2\pi}\right) \right| \cdot e^{-(1/2+\delta)2\pi x} dx \\
 &< \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{1/2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1/2+\delta_0)2\pi \left|x - \frac{\log n}{2\pi}\right|} \cdot e^{-(1/2+\delta)2\pi x} dx.
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Lembrando que

4.4. A FÓRMULA DE WEIL

$$\left| x - \frac{\log n}{2\pi} \right| = \begin{cases} x - \frac{\log n}{2\pi}, & \text{quando } x > \frac{\log n}{2\pi}; \\ \frac{\log n}{2\pi} - x, & \text{c.c.} \end{cases}$$

temos:

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{1/2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1/2+\delta_0)2\pi \left| x - \frac{\log n}{2\pi} \right|} \cdot e^{-(1/2+\delta)2\pi x} dx \\ & \leq \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{1/2}} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{\log n}{2\pi}} e^{(1/2+\delta_0)2\pi \left(x - \frac{\log n}{2\pi} \right)} \cdot e^{-(1/2+\delta)2\pi x} dx \\ & \quad + \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{1/2}} \cdot \int_{\frac{\log n}{2\pi}}^{\infty} e^{-(1/2+\delta_0)2\pi \left(x - \frac{\log n}{2\pi} \right)} \cdot e^{-(1/2+\delta)2\pi x} dx \\ & = \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{1/2}} \cdot n^{-(1/2+\delta_0)} \int_{-\infty}^{\frac{\log n}{2\pi}} e^{(\delta_0-\delta)2\pi x} dx \\ & \quad + \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{1/2}} \cdot n^{(1/2+\delta_0)} \int_{\frac{\log n}{2\pi}}^{\infty} e^{-(1+\delta_0+\delta)2\pi x} dx. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Mas note que:

$$\int_{-\infty}^{\frac{\log n}{2\pi}} e^{(\delta_0-\delta)2\pi x} dx = \frac{n^{\delta_0-\delta}}{\delta_0-\delta}$$

e que:

$$\int_{\frac{\log n}{2\pi}}^{\infty} e^{-(1+\delta_0+\delta)2\pi x} dx = \frac{n^{-(1+\delta_0+\delta)}}{1+\delta_0+\delta}.$$

Substituindo, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \left| - \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{1/2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F \left(x - \frac{\log n}{2\pi} \right) \cdot e^{-(s-1/2)2\pi x} dx \right| \\
& \leq \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{1/2}} \cdot n^{-(1/2+\delta_0)} \cdot \frac{n^{\delta_0-\delta}}{\delta_0-\delta} \\
& + \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{1/2}} \cdot n^{(1/2+\delta_0)} \cdot \frac{n^{-(1+\delta_0+\delta)}}{1+\delta_0+\delta} \\
& \leq K \cdot \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{1+\delta}} < \infty.
\end{aligned}$$

□

Assim, a integral comuta com a somatória e sendo $s = 1 + \delta + it$, então:

$$\begin{aligned}
\phi(s) \cdot \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[- \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{1/2}} \cdot F \left(x - \frac{\log n}{2\pi} \right) \cdot e^{-(s-1/2)2\pi x} \right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[- \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{1/2}} \cdot F \left(x - \frac{\log n}{2\pi} \right) \cdot e^{-(1/2+\delta)2\pi x} \right] \cdot e^{-2\pi i x t} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} H(x) \cdot e^{-2\pi i x t} dx = \hat{H}(t).
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Note que $H(x)$ é de classe $\mathcal{C}^1$ e possui decrescimento acelerado. Então pelo teorema 5.4.2 do apêndice, sabemos que:

$$\begin{aligned}
H(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}(t) \cdot e^{2\pi i x t} dt \\
\Rightarrow H(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}(t) dt.
\end{aligned}$$

Portanto,

4.4. A FÓRMULA DE WEIL

$$\begin{aligned}
 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{(1+\delta)^T} \phi(s) \cdot \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \hat{H}(t) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot H(0) \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{1/2}} \cdot F\left(-\frac{\log n}{2\pi}\right)
 \end{aligned}$$

□

(2) Cálculo de:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(1+\delta)^T} \phi(1-s) \cdot \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds.$$

Analogamente a (1), temos por definição:

$$\phi(1-s) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cdot e^{(s-1/2)2\pi x} dx.$$

Então, escrevemos

$$\begin{aligned}
 \frac{\phi(1-s)}{n^s} &= \frac{1}{n^{1/2}} \cdot \frac{\phi(1-s)}{n^{s-1/2}} \\
 &= \frac{1}{n^{1/2}} \cdot \phi(1-s) \cdot e^{-(s-1/2)2\pi\left(\frac{\log n}{2\pi}\right)} \\
 &= \frac{1}{n^{1/2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cdot e^{-(s-1/2)2\pi\left[\frac{\log n}{2\pi} - x\right]} dx \\
 &= \frac{1}{n^{1/2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\frac{\log n}{2\pi} - x\right) \cdot e^{-(s-1/2)2\pi x} dx.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\phi(1-s) \cdot \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= - \sum_{n \geq 1} \Lambda(n) \cdot \frac{\phi(1-s)}{n^s} \\ &= - \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{1/2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\frac{\log n}{2\pi} - x\right) \cdot e^{-(s-1/2)2\pi x} dx.\end{aligned}$$

Analogamente, temos que a integral comuta com a somatória e, sendo $s = 1 + \delta + it$, tem-se:

$$\begin{aligned}\phi(1-s) \cdot \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[- \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{1/2}} \cdot F\left(\frac{\log n}{2\pi} - x\right) \cdot e^{-(s-1/2)2\pi x} \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[- \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{1/2}} \cdot F\left(\frac{\log n}{2\pi} - x\right) \cdot e^{-(1/2+\delta)2\pi x} \right] \cdot e^{-2\pi ixt} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x) \cdot e^{-2\pi ixt} dx = \hat{G}(t).\end{aligned}\tag{4.32}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{(1+\delta)^T} \phi(1-s) \cdot \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \hat{G}(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot G(0) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^{1/2}} \cdot F\left(\frac{\log n}{2\pi}\right).\end{aligned}$$

□

(3) Os termos restantes de 4.27 contribuem com:

4.4. A FÓRMULA DE WEIL

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(1+\delta)^T} G(s) ds,$$

onde $G(s)$ é dada por:

$$G(s) = \left[\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \cdot \log \pi + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)} \right] \cdot (\phi(s) + \phi(1-s)).$$

Aplicando o teorema dos resíduos para curva:

Figura 4.14: Bordo de B.

temos:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(1+\delta)^T} G(s) ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{(1/2)^-} G(s) ds = \text{Res}(G(s), s=1),$$

pois, pela mesma razão que em 4.26, temos que:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Im(s)=\pm T} G(s) ds \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(G(s), s=1) &= \operatorname{Res}\left(\frac{1}{s-1} \cdot [\phi(s) + \phi(1-s)], s=1\right) \\ &= \phi(0) + \phi(1). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(1+\delta)} G(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{(1/2)} G(s) ds + \phi(0) + \phi(1).$$

□

(4) Cálculo de:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(1/2)^T} [\phi(s) + \phi(1-s)] \cdot \left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s} \right) ds.$$

Calculando diretamente para um T fixado, vemos que :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(1/2)^T} [\phi(s) + \phi(1-s)] \cdot \left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s} \right) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-T}^T [\phi(1/2+it) + \phi(1/2-it)] \cdot \left(\frac{1}{-1/2+it} + \frac{1}{1/2+it} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-T}^T [\phi(1/2+it) + \phi(1/2-it)] \cdot \left(\frac{-8it}{1+4t^2} \right) dt \\ &= -\frac{4i}{\pi} \cdot \int_{-T}^T \left(\frac{t}{1+4t^2} \right) \cdot [\phi(1/2+it) + \phi(1/2-it)] dt. \end{aligned}$$

Mas note que a função acima é ímpar e, portanto,

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(1/2)^T} [\phi(s) + \phi(1-s)] \cdot \left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s} \right) ds = 0.$$

□

(5) Cálculo de:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(1/2)^T} [\phi(s) + \phi(1-s)] \cdot \frac{\log \pi}{2} ds.$$

Note que por definição:

$$\phi(1/2 + it) + \phi(1/2 - it) = \int_{-\infty}^{\infty} (F(x) + F(-x)) \cdot e^{-2\pi i x t} dx.$$

Então, pelo teorema de inversão de Fourier (5.4.2 do apêndice) temos que:

$$F(x) + F(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} (\phi(1/2 + it) + \phi(1/2 - it)) \cdot e^{2\pi i x t} dt.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(1/2)^T} [\phi(s) + \phi(1-s)] \cdot \frac{\log \pi}{2} ds \\ &= \frac{\log \pi}{4\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} [\phi(1/2 + it) + \phi(1/2 - it)] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \log \pi \cdot F(0). \end{aligned}$$

□

(6) Cálculo de:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(1/2)^T} [\phi(s) + \phi(1-s)] \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)} ds.$$

Se

$$\hat{J}(t) = \phi(1/2 + it) + \phi(1/2 - it),$$

então como já vimos acima,

$$J(x) = F(x) + F(-x).$$

Assim, se F é de classe $\mathcal{C}^1$, a J também será e vale que:

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(1/2)^T} [\phi(s) + \phi(1-s)] \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'(s/2)}{\Gamma(s/2)} ds \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{-T}^T \hat{J}(t) \cdot \frac{\Gamma'(1/4 + it/2)}{\Gamma(1/4 + it/2)} ds. \end{aligned}$$

Portanto, pelo lema 4.4.5 com $a = 1/4$ e $b = 1/2$ temos que:

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{-T}^T \hat{J}(t) \cdot \frac{\Gamma'(1/4 + it/2)}{\Gamma(1/4 + it/2)} ds = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma'(1/4)}{\Gamma(1/4)} \cdot F(0) \\ & + 4\pi \int_0^\infty \frac{e^{-\pi x}}{1 - e^{-4\pi x}} \cdot (2F(0) - F(x) - F(-x)) dx. \end{aligned}$$

□

■

4.4.4 Observações

O leitor pode ter notado uma grande semelhança entre as fórmulas explícitas de Delsarte 4.22 e de Weil 4.4.1 sendo que a única diferença está no termo da fórmula explícita de Delsarte:

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{(1/2)} \phi(s) \cdot H(s) ds,$$

que se apresenta na fórmula de Weil como:

$$\frac{1}{2\pi} \log \pi \cdot F(0) + \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma'(1/4)}{\Gamma(1/4)} \cdot F(0) + \int_0^\infty \frac{e^{-\pi x}}{1 - e^{-4\pi x}} \cdot (2F(0) - F(x) - F(-x)) dx.$$

4.4. A FÓRMULA DE WEIL

De fato, não é difícil mostrar que esses termos também são iguais e que as fórmulas são equivalentes.

Na fórmula de Delsarte partimos de $H(s) \in \mathcal{H}(B)$ com decrescimento acelerado em relação a t , e se considerarmos a parametrização $h(t) = H(1/2 + it)$, então definimos:

$$\hat{h}(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot e^{-2\pi i t T} dt.$$

como a transformada de Fourier da função $h(t)$.

Na fórmula de Weil, começamos com $F(x)$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ com F e F' satisfazendo (i) e (ii) dado em 4.4.1. Definimos:

$$\hat{h}(t) = \phi(1/2 + it) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \cdot e^{-2\pi i t x} dx.$$

.

como a transformada de Fourier da função $F(x)$ e

$$\phi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cdot e^{-(s-1/2)2\pi x} dx$$

é uma função holomorfa em S_{δ_0} .

Note que as funções $\phi(s)$ e $H(s)$ tem o mesmo papel nas fórmulas explícitas, mas papeis distintos na análise de Fourier, pois enquanto $H(s) \sim h(t)$, temos que $\phi(s) \sim \hat{h}(t)$. Fazendo,

$$\begin{aligned} f(x) &= \hat{h}(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot e^{2\pi i x t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) \cdot e^{-2\pi i x t} dt \\ \hat{f}(t) &= h(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(x) \cdot e^{-2\pi i x t} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{2\pi i x t} dx. \end{aligned}$$

Notamos que ao trocar o papel de $h(t)$ com de $\hat{h}(t)$, estamos, na verdade, trocando t por $-t$ e x por $-x$ nas fórmulas de Fourier. Olhando mais atentamente para a fórmula explícita de Weil

$$\begin{aligned} \sum_{\rho} \phi(\rho) &= \phi(0) + \phi(1) + \frac{1}{2\pi} \log \pi F(0) + \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma'(1/4)}{\Gamma(1/4)} \cdot F(0) \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \cdot \left[F\left(\frac{\log n}{2\pi}\right) + F\left(-\frac{\log n}{2\pi}\right) \right] \\ &\quad + \int_0^{\infty} \frac{e^{-\pi x}}{1 - e^{-4\pi x}} \cdot (2F(0) - F(x) - F(-x)) dx \end{aligned}$$

percebemos que é invariante pelas trocas apresentadas, pois o lado esquerdo é invariante pela troca de $\phi(1/2+it)$ por $\phi(1/2-it)$ e o lado direito é invariante pela substituição de $F(x)$ por $F(-x)$.

Portanto, ao utilizar a fórmula de inversão de Fourier e a simetria dessas fórmulas explícitas, Weil conseguiu relaxar as hipóteses e tornar a fórmula explícita mais geral.

Capítulo 5

Apêndice

Denotaremos $[x]$ a parte inteira de x e $\{x\}$ é a parte fracionária de x . Além disso:

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções definidas em algum intervalo real do tipo $[a, \infty[$. Então:

$$f(x) = O(g(x)) \Leftrightarrow |f(x)| \leq K \cdot |g(x)|,$$

para todo $x > x_0$.

5.1 Fórmulas de Euler

Lema 5.1.1 (*Fórmula de Abel*). *Sejam $f(x)$ uma função de classe C^1 em $[1, \infty[$ e $\{C_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de números reais. Se $A(x) \doteq \sum_1^{[x]} C_n$, então:*

$$\sum_{n \leq x} C_n \cdot f(n) = A(x) \cdot f(x) - \int_1^x A(t) \cdot f'(t) dt.$$

Demonstração. Definindo $A(0) = 0$, temos que $C_n = A(n) - A(n-1)$, para todo $n \geq 1$. Assim,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \leq N=[x]} C_n \cdot f(n) &= \sum_{n \leq N=[x]} (A(n) - A(n-1)) \cdot f(n) \\
 &= (A(1) - \underbrace{A(0)}_{=0}) \cdot f(1) + (A(2) - A(1)) \cdot f(2) + \\
 &\quad \dots + (A(N) - A(N-1)) \cdot f(N) \\
 &= A(1) \cdot (f(1) - f(2)) + A(2) \cdot (f(2) - f(3)) + \\
 &\quad \dots + A(N-1) \cdot (f(N-1) - f(N)) + A(N) \cdot f(N)
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \leq N=[x]} C_n \cdot f(n) &= \sum_{n \leq N-1} A(n) \cdot (f(n) - f(n+1)) + A(N) \cdot f(N) \\
 &\stackrel{f \in \mathcal{C}^1}{=} \sum_{n \leq N-1} A(n) \cdot \left[- \int_n^{n+1} f'(t) dt \right] + A(N) \cdot f(N)
 \end{aligned}$$

Mas note que se $n \leq t < n+1$, então $A(t) = A(n)$. Portanto,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \leq N=[x]} C_n \cdot f(n) &= - \sum_{n \leq N-1} \int_n^{n+1} A(t) \cdot f'(t) dt + A(N) \cdot f(N) \\
 &= - \int_1^N A(t) \cdot f'(t) dt + A(N) \cdot f(N) \\
 &= - \int_1^N A(t) \cdot f'(t) dt - \int_N^x A(t) \cdot f'(t) dt + \\
 &\quad \int_N^x A(t) \cdot f'(t) dt + A(N) \cdot f(N) \\
 &= - \int_1^x A(t) \cdot f'(t) dt + \underbrace{\int_N^x A(t) \cdot f'(t) dt + A(N) \cdot f(N)}_{A(x) \cdot f(x)}
 \end{aligned}$$

Assim, terminamos a prova com:

$$\begin{aligned}
 \int_N^x A(t) \cdot f'(t) dt &= A(N) \cdot \int_N^x f'(t) dt \\
 &= A(N) \cdot (f(x) - f(N)) \\
 &\quad \stackrel{=A(x)}{=} \\
 &= A(x) \cdot f(x) - A(N) \cdot f(N).
 \end{aligned}$$

■

5.1. FÓRMULAS DE EULER

Corolário 5.1.2. *Sejam $C_n = 1$ e $f(x) = \frac{1}{x^s}$, para todo $n \geq 1$ e $s \in \mathbb{C}$. Se $\Re(s) > 0$, então:*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \frac{s}{s-1} - s \cdot \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt.$$

Demonstração. Pelo teorema anterior, temos:

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n \leq [x]} C_n \\ &= \sum_{n \leq [x]} 1 \\ &= [x] \end{aligned}$$

e vale:

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} &= [x] \cdot \frac{1}{x^s} - \int_1^x [t] \cdot \left(-\frac{s}{t^{s+1}} dt \right) \\ &= (x - \{x\}) \cdot \frac{1}{x^s} + \int_1^x (t - \{t\}) \cdot \frac{s}{t^{s+1}} dt \\ &= \frac{x}{x^s} - \frac{\{x\}}{x^s} + s \cdot \int_1^x \frac{1}{t^s} dt - s \cdot \int_1^x \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt. \end{aligned}$$

Fazendo algumas contas separadamente, temos:

$$\begin{aligned} s \cdot \int_1^x \frac{t}{t^{s+1}} dt &= s \cdot \left[\frac{t^{-s+1}}{-s+1} \right]_1^x \\ &= s \cdot \left[\frac{x^{-s+1}}{-s+1} - \frac{1}{1-s} \right] \\ &= \frac{s}{1-s} \cdot \frac{x}{x^s} - \frac{s}{1-s}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} = \frac{x}{x^s} - \frac{\{x\}}{x^s} + \frac{s}{1-s} \cdot \frac{x}{x^s} - \frac{s}{1-s} - s \cdot \int_1^x \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt.$$

Se $\Re(s) > 1$, fazemos $x \rightarrow \infty$.

$$\underbrace{\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s}}_{x \rightarrow \infty} = \underbrace{\frac{x}{x^s}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\frac{\{x\}}{x^s}}_{\rightarrow 0} + \frac{s}{1-s} \cdot \underbrace{\frac{x}{x^s}}_{\rightarrow 0} - \frac{s}{1-s} - s \cdot \underbrace{\int_1^x \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt}_{x \rightarrow \infty}.$$

Note que a função do lado esquerdo converge para a função $\zeta(s)$ (seção 3.3) e a integral do lado direito converge para $\Re(s) > 0$. Portanto, temos uma extensão analítica da função $\zeta(s)$ para $\Re(s) > 0$ dada por:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = -\frac{s}{1-s} - s \cdot \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt$$

■

Corolário 5.1.3. *Sejam $C_n = 1$ e $f(x) = \ln(x)$, para todo $n \geq 1$ e $x \in \mathbb{R}$. Então:*

$$\ln[x]! = x \cdot \ln x - x + O(\ln x).$$

Demonstração. Como no corolário anterior, temos:

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n \leq [x]} C_n \\ &= \sum_{n \leq [x]} 1 \\ &= [x]. \end{aligned}$$

Assim, por Abel (5.1.1),

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \ln(n) &= [x] \cdot \ln(x) - \int_1^x [t] \cdot \frac{1}{t} dt \\ &= (x - \{x\}) \cdot \ln(x) - \int_1^x \frac{(t - \{t\})}{t} dt \\ &= x \cdot \ln(x) - \{x\} \cdot \ln(x) - \int_1^x dt + \int_1^x \frac{\{t\}}{t} dt \\ &= x \cdot \ln(x) - \{x\} \cdot \ln(x) - (x - 1) + \int_1^x \frac{\{t\}}{t} dt. \end{aligned}$$

Mas note que $\{x\} \cdot \ln(x) = O(\ln(x))$ e

$$\left| \int_1^x \frac{\{t\}}{t} dt \right| \leq \int_1^x \frac{1}{t} dt \leq \ln x.$$

$$\therefore \int_1^x \frac{\{t\}}{t} dt = O(\ln(x)).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \ln[x]! &= \sum_{n \leq x} \ln(n) \\ &= x \cdot \ln(x) - x + O(\ln(x)). \end{aligned}$$

■

Corolário 5.1.1. *Seja $f(x) = 1/x$ e $C_n = 1$, para todo n . Então:*

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O(1/x),$$

onde γ é a constante de Euler.

Demonstração. Pela fórmula de Abel, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} &= [x] \cdot \frac{1}{x} + \int_1^x \frac{[t]}{t^2} dt \\ &= (x - \{x\}) \cdot \frac{1}{x} + \int_1^x \frac{(t - \{t\})}{t^2} dt \\ &= 1 - \frac{\{x\}}{x} + \log x - \int_1^x \frac{\{t\}}{t^2} dt. \end{aligned}$$

Mas note que a integral acima converge quando $x \rightarrow \infty$ e, portanto, podemos definir

$$\gamma = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 - \int_1^x \frac{\{t\}}{t^2} dt \right].$$

Além disso, sabemos que $\frac{\{x\}}{x} = O(1/x)$. Portanto,

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O(1/x).$$

■

Lema 5.1.4 (*Fórmula de Euler*). *Sejam $f(x)$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ em $[1, \infty[$ e N um número inteiro, então:*

$$\sum_{n \leq N} f(n) = \int_0^N f(x) dx + \int_0^N \{x\} \cdot f'(x) dx.$$

Demonstração. Seja $A(n) = \sum_{n \leq N} 1$ e $C_n = 1$. Então, pelo teorema de Abel, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq N} f(n) &= A(N) \cdot f(N) - \int_1^N A(t) \cdot f'(t) dt \\ &= N \cdot f(N) - \int_1^N [t] \cdot f'(t) dt \\ &= N \cdot f(N) - \int_1^N (t - \{t\}) \cdot f'(t) dt \\ &= N \cdot f(N) - \int_1^N t \cdot f'(t) dt + \int_1^N \{t\} \cdot f'(t) dt. \end{aligned}$$

Mas note que:

$$\int_0^N t \cdot f'(t) dt = \int_0^1 \{t\} \cdot f'(t) dt + \int_1^N t \cdot f'(t) dt.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq N} f(n) &= N \cdot f(N) - \int_1^N t \cdot f'(t) dt - \int_0^1 \{t\} \cdot f'(t) dt + \int_0^N \{t\} \cdot f'(t) dt \\ &= N \cdot f(N) - \underbrace{\int_0^N t \cdot f'(t) dt}_{(I)} + \int_0^N \{t\} \cdot f'(t) dt. \end{aligned}$$

Assim, integrando (I) por partes, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^N t \cdot f'(t) dt &= [t \cdot f(t)]_0^N - \int_0^N f(t) dt \\ &= N \cdot f(N) - \int_0^N f(t) dt. \end{aligned}$$

5.2. FÓRMULA DE STIRLING

Portanto,

$$\sum_{n \leq N} f(n) = \int_0^N f(t)dt + \int_0^N \{t\} \cdot f'(t)dt.$$

■

Teorema 5.1.5 (*Fórmula de Euler-Maclaurin*). *Nas mesmas condições do lema anterior, vale:*

$$\sum_{n \leq N} f(n) = \int_0^N f(x)dx + \frac{1}{2} \cdot [f(x)]_0^N - \frac{1}{2} \int_0^N (\{x\}^2 - \{x\}) \cdot f''(x)dx.$$

Demonstração. Pelo lema anterior, sabemos que

$$\sum_{n \leq N} f(n) = \int_0^N f(t)dt + \int_0^N \{t\} \cdot f'(t)dt.$$

A segunda integral vale:

$$\begin{aligned} \int_0^N \{t\} \cdot f'(t)dt &= \int_0^N \left(\{t\} - \frac{1}{2} \right) \cdot f'(t)dt + \int_0^N \frac{1}{2} \cdot f'(t)dt \\ &= \int_0^N \left(\{t\} - \frac{1}{2} \right) \cdot f'(t)dt + \frac{1}{2} \cdot [f(t)]_0^N. \end{aligned}$$

Usando integração por partes na integral do lado direito, terminamos a prova.

$$\int_0^N \left(\{t\} - \frac{1}{2} \right) \cdot f'(t)dt = \underbrace{\left[\frac{1}{2} \cdot (\{t\}^2 - \{t\}) \cdot f'(t) \right]_0^N}_{=0} - \frac{1}{2} \cdot \int_0^N (\{t\}^2 - \{t\}) \cdot f''(t)dt.$$

■

5.2 Fórmula de Stirling

Teorema 5.2.1. *Seja $\delta > 0$ fixado e seja R_δ a região do plano complexo tal que:*

$$s \in R_\delta \Leftrightarrow |s| \geq \delta \text{ e } |\text{Arg}(s)| < \pi - \delta.$$

Então,

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \log s + O(1/|s|).$$

Demonstração. Pela fórmula limite de Euler, sabemos que:

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s} \cdot e^{-\gamma \cdot s} \prod_{n \geq 1} \frac{e^{s/n}}{(1 + \frac{s}{n})}.$$

Aplicando o teorema da diferenciação (2.2.6), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} &= -\frac{1}{s} + \frac{(e^{-\gamma \cdot s})'}{e^{-\gamma \cdot s}} + \sum_{n \geq 1} \left[\frac{\frac{1}{n} \cdot e^{s/n} \cdot (1 + \frac{s}{n}) - \frac{1}{n} \cdot e^{s/n}}{(1 + \frac{s}{n})^2} \cdot \frac{(1 + \frac{s}{n})}{e^{s/n}} \right] \\ &= -\frac{1}{s} - \gamma + \sum_{n \geq 1} \left[\frac{\frac{1}{n} \cdot (1 + \frac{s}{n}) - \frac{1}{n}}{(1 + \frac{s}{n})} \right] \\ &= -\frac{1}{s} - \gamma + \sum_{n \geq 1} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+s} \right] \\ &= -\frac{1}{s} - \gamma + \sum_{n > N} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+s} \right] + \sum_{n \leq N} \frac{1}{n} - \sum_{n \leq N} \frac{1}{n+s}. \end{aligned}$$

Pelo corolário 5.1.1, sabemos que

$$\sum_{n \leq N} \frac{1}{n} = \log N + \gamma + O(1/N).$$

Substituindo acima, temos:

5.2. FÓRMULA DE STIRLING

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} &= -\frac{1}{s} - \gamma + \sum_{n>N} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+s} \right] + \log N + \gamma + O(1/N) - \sum_{n \leq N} \frac{1}{n+s} \\ &= -\frac{1}{s} + \log N - \sum_{n \leq N} \frac{1}{n+s} + \sum_{n>N} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+s} \right] + O(1/N).\end{aligned}$$

Observe que:

$$\begin{aligned}\left| \sum_{n>N} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+s} \right] \right| &= \left| \sum_{n>N} \frac{s}{n(n+s)} \right| \\ &= |s| \cdot \left| \sum_{n>N} \frac{1}{n(n+s)} \right|.\end{aligned}$$

Por hipótese, $|s| > \delta$ que implica $n \cdot |s| > N \cdot \delta = k$, para todo $n > N$. Portanto,

$$\begin{aligned}\left| \sum_{n>N} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+s} \right] \right| &\leq |s| \cdot \sum_{n>N} \frac{1}{n^2 + k} \\ &= O(|s|/N).\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -\frac{1}{s} + \log N - \sum_{n \leq N} \frac{1}{n+s} + O(|s|/N) + O(1/N).$$

Aplicando a fórmula de Euler-Maclaurin na somatória acima, obtemos:

$$\sum_{n \leq N} \frac{1}{n+s} = \log(N+s) - \log s + \frac{1}{2(N+s)} - \frac{1}{2s} - \frac{1}{2} \cdot \int_0^N [\{x\}^2 - \{x\}] \cdot \frac{2}{(x+s)^3} dx.$$

Observações:

1. $\log N - \log(N+s) = \log \frac{N}{N+s}$, pois $s \in R_\delta$.
2. $|\{x\}^2 - \{x\}| < 1$, para todo x . Portanto,

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{2} \cdot \int_0^N [\{x\}^2 - \{x\}] \cdot \frac{2}{(x+s)^3} dx \right| &\leq \left| \int_0^N \frac{1}{(x+s)^3} dx \right| \\
 &= \left| \left[\frac{1}{2(x+s)^2} \right]_0^N \right| \\
 &\leq \frac{1}{2(N+|s|)^2} + \frac{1}{2(|s|)^2} \\
 &= O\left(\frac{1}{(N+|s|)^2}\right) + O\left(\frac{1}{|s|^2}\right).
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{n \leq N} \frac{1}{n+s} = \log(N+s) - \log s + \frac{1}{2(N+s)} - \frac{1}{2s} + O\left(\frac{1}{(N+|s|)^2}\right) + O\left(\frac{1}{|s|^2}\right).$$

Fazendo N tender a infinito, temos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} &= \log s + \frac{1}{2s} - \frac{1}{s} + O\left(\frac{1}{|s|^2}\right) \\
 &= \log s - \frac{1}{2s} + O\left(\frac{1}{|s|^2}\right). \tag{5.1}
 \end{aligned}$$

O que prova o teorema. Note que os logaritmos usados no teorema podem ser tomados como principais. ■

Teorema 5.2.2. *Seja $\delta > 0$ fixado e seja R_δ a região do plano complexo tal que:*

$$s \in R_\delta \Leftrightarrow |s| \geq \delta \text{ e } |\operatorname{Arg}(s)| < \pi - \delta.$$

Então,

$$\log \Gamma(s) = s \cdot \log s - s - \frac{1}{2} \cdot \log s + k + O(1/|s|).$$

Demonstração. Pela equação 5.1 do teorema anterior, sabemos que

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \log s - \frac{1}{2s} + O\left(\frac{1}{|s|^2}\right).$$

Agora, considere γ o caminho retilíneo entre $s \in R_\delta$ e 1. Note que sempre podemos tomar tal caminho, pois o conjunto R_δ é estrelado. Assim, calculamos a integral das funções da equação acima no caminho γ .

(i)

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} ds &= \log \Gamma(1) - \log \Gamma(s) \\ &= -\log \Gamma(s). \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \log(s) ds &= [s \log s - s]_s^1 \\ &= -1 - s \log s + s. \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \cdot \int_{\gamma} \frac{1}{s} ds &= [-\frac{1}{2} \cdot \log s]_s^1 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \log s. \end{aligned}$$

(iv)

$$\int_{\gamma} O\left(\frac{1}{|s|^2}\right) = O\left(\frac{1}{|s|}\right) + k.$$

Reunindo as informações acima temos que:

$$\log \Gamma(s) = s \log s - s - \frac{1}{2} \cdot \log s + C + O\left(\frac{1}{|s|}\right).$$

■

5.3 Séries de Dirichlet

Seja s um número complexo. Uma série de Dirichlet é uma função do tipo:

$$\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Esta seção será dedicada ao estudo das propriedades analíticas das séries de Dirichlet. Iniciaremos tal estudo com o lema seguinte.

Lema 5.3.1. *Seja $R(\mu) = \sum_{n > \mu} \frac{a_n}{n^{s_0}}$ o resto de $\alpha(s_0)$. Então:*

$$\sum_{M+1}^N \frac{a_n}{n^s} = R(M) \cdot M^{s_0-s} - R(N) \cdot N^{s_0-s} + (s_0 - s) \cdot \int_M^N R(x) \cdot x^{s_0-s-1} dx.$$

Demonstração. Primeiramente, observe que $a_n = [R(n-1) - R(n)] \cdot n^{s_0}$. Então,

$$\begin{aligned} \sum_{M+1}^N \frac{a_n}{n^s} &= \sum_{M+1}^N [R(n-1) - R(n)] \cdot n^{s_0-s} \\ &= [R(M) - R(M+1)] \cdot (M+1)^{s_0-s} + [R(M+1) - R(M+2)] \cdot (M+2)^{s_0-s} + \\ &\quad \cdots + [R(N-2) - R(N-1)] \cdot (N-1)^{s_0-s} + [R(N-1) - R(N)] \cdot (N)^{s_0-s} \\ &= R(M) \cdot [(M+1)^{s_0-s} - \textcolor{red}{M}^{s_0-s}] + R(M+1) \cdot [(M+2)^{s_0-s} - (M+1)^{s_0-s}] + \\ &\quad \cdots + R(N-1) \cdot [N^{s_0-s} - (N-1)^{s_0-s}] - R(N) \cdot N^{s_0-s} + \textcolor{red}{R(M)} \cdot \textcolor{red}{M}^{s_0-s} \\ &= R(M) \cdot M^{s_0-s} - R(N) \cdot N^{s_0-s} + \sum_{M}^{N-1} R(n) \cdot [(n+1)^{s_0-s} - n^{s_0-s}]. \end{aligned}$$

Note que

$$(n+1)^{s_0-s} - n^{s_0-s} = (s_0 - s) \cdot \int_n^{n+1} x^{s_0-s-1} dx.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{M+1}^N \frac{a_n}{n^s} &= R(M) \cdot M^{s_0-s} - R(N) \cdot N^{s_0-s} + \sum_{M}^{N-1} R(n) \cdot (s_0 - s) \cdot \int_n^{n+1} x^{s_0-s-1} dx \\ &= R(M) \cdot M^{s_0-s} - R(N) \cdot N^{s_0-s} + (s_0 - s) \cdot \sum_{M}^{N-1} \int_n^{n+1} R(x) \cdot x^{s_0-s-1} dx, \end{aligned}$$

5.3. SÉRIES DE DIRICHLET

pois $R(x) = R(n)$ em $[n, n+1[$. Para finalizar a prova, basta notar que:

$$\sum_M^{N-1} \int_n^{n+1} R(x) \cdot x^{s_0-s-1} dx = \int_M^N R(x) \cdot x^{s_0-s-1} dx.$$

■

Teorema 5.3.2. *Suponha que $\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ converge em $s = s_0 = \sigma_0 + it_0$. Então, $\alpha(s)$ é uniformemente convergente em:*

$$S_H = \{s = \sigma + it : \sigma \geq \sigma_0, |t - t_0| \leq H(\sigma - \sigma_0)\},$$

onde H é uma constante real fixada.

Demonstração. Seja $R(\mu) = \sum_{n>\mu} \frac{a_n}{n^{s_0}}$ o resto de $\alpha(s_0)$. Por hipótese, existe $M > 0$ tal que $|R(\mu)| < \epsilon$ sempre que $\mu > M$. Portanto, se $\sigma > \sigma_0$, temos que:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{M+1}^N \frac{a_n}{n^s} \right| &\leq \underbrace{|R(M)|}_{< \epsilon} \cdot \underbrace{M^{\sigma_0-\sigma}}_{< 1} + \underbrace{|R(N)|}_{< \epsilon} \cdot \underbrace{N^{\sigma_0-\sigma}}_{< 1} + |s_0 - s| \cdot \int_M^N \underbrace{|R(x)|}_{< \epsilon} \cdot x^{\sigma_0-\sigma-1} dx. \\ &\leq 2 \cdot \epsilon + \epsilon \cdot |s_0 - s| \cdot \int_M^{\infty} x^{\sigma_0-\sigma-1} dx \\ &\leq 2 \cdot \epsilon + \epsilon \cdot |s_0 - s| \cdot \left[\frac{x^{\sigma_0-\sigma}}{\sigma_0 - \sigma} \right]_M^{\infty} \\ &\leq 2 \cdot \epsilon + \epsilon \cdot \frac{|s_0 - s|}{\sigma - \sigma_0} \\ &= \epsilon \cdot \left[2 + \frac{|s_0 - s|}{\sigma - \sigma_0} \right]. \end{aligned}$$

Mas em S_H , vale:

$$|s_0 - s| \leq (H + 1) \cdot (\sigma - \sigma_0).$$

Portanto,

$$\left| \sum_{M+1}^N \frac{a_n}{n^s} \right| \leq \epsilon \cdot \left[2 + \frac{(H + 1) \cdot (\sigma - \sigma_0)}{\sigma - \sigma_0} \right]$$

$$\leq \epsilon \cdot (H + 3).$$

Assim, por Cauchy, $\alpha(s)$ converge uniformemente em S_H . ■

Corolário 5.3.3. *Se a série $\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ converge em $s_c = \sigma_c + it$, então a série converge uniformemente em todo semiplano com $\Re(s) > \sigma_c$.*

Demonstração. Basta tomar o H do teorema anterior tão grande quanto se queira. ■

Com o corolário acima, podemos definir a abscissa de convergência de uma série de Dirichlet por:

$$\sigma_c = \inf \{ \sigma : \alpha(\sigma + it) \text{ é convergente} \}.$$

Teorema 5.3.4. *Seja $A(x) = \sum_{n \leq x} a_n$ e suponha que $\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ converge em $\Re(s) > \sigma_c \geq 0$. Então valem:*

$$(i) \alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = s \cdot \int_1^{\infty} A(x) \cdot x^{-s-1} dx, \quad \text{se } \sigma > \sigma_c;$$

$$(ii) \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\log |A(x)|}{\log x} = \sigma_c.$$

Demonstração. (ii) Seja $\phi = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\log |A(x)|}{\log x}$.

1ª Afirmação: $\phi \geq \sigma_c$.

Suponha que $\phi < \sigma_c$, em outras palavras, $|A(x)| < x^\phi$, se $x > M$. Sejam $C_n = a_n$ e $f(x) = \frac{1}{n^s}$. Pela fórmula de Abel (5.1.1), sabemos que:

$$\sum_{n \leq N} \frac{a_n}{n^s} = \frac{A(N)}{N^s} - s \cdot \int_1^N A(t) \cdot t^{-s-1} dt.$$

Se σ_c é a abscissa de convergência de $\alpha(s)$, então a série do lado esquerdo diverge para $\Re(s) = \sigma < \sigma_c$. Tome s tal que $\phi < \sigma < \sigma_c$.

Por outro lado,

$$\frac{|A(N)|}{N^\sigma} \leq N^{\phi-\sigma} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

e

$$\left| \int_1^N A(t) \cdot t^{-s-1} dt \right| \leq \int_1^N t^{\phi-\sigma-1} dt.$$

O que implica a convergência do lado direito, um absurdo. Portanto, $\phi \geq \sigma_c$.

2ª Afirmação: $\phi \leq \sigma_c$.

Seja $R(\mu) = \sum_{n>\mu} \frac{a_n}{n^{\sigma_0}}$ o resto de $\alpha(\sigma_0)$, com $\sigma_0 > \sigma_c$. Então pelo lema (5.3.1), temos:

$$\sum_{M+1}^N \frac{a_n}{n^s} = R(M) \cdot M^{\sigma_0-s} - R(N) \cdot N^{\sigma_0-s} + (\sigma_0 - s) \cdot \int_M^N R(x) \cdot x^{\sigma_0-s-1} dx.$$

Assim, substituindo $s = 0$ e $M = 0$, obtemos:

$$\sum_1^N a_n = -R(N) \cdot N^{\sigma_0} + \sigma_0 \cdot \int_0^N R(x) \cdot x^{\sigma_0-1} dx.$$

Como $|R(N)| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$, $R(u)$ é uma função limitada. Então:

$$|A(N)| \leq K \cdot N^{\sigma_0},$$

onde $\sigma_0 = \sigma_c + \epsilon$. Portanto, $\phi \leq \sigma_c$.

(i) Já sabemos que

$$\sum_{n \leq N} \frac{a_n}{n^s} = \frac{A(N)}{N^s} - s \cdot \int_1^N A(t) \cdot t^{-s-1} dt.$$

Assim, se $\sigma > \sigma_c$, então $\frac{|A(N)|}{N^\sigma} \rightarrow 0$. Além disso, a integral é absolutamente convergente, o que prova a primeira parte. ■

Lema 5.3.5. *Sejam $\sigma_0 > 1$ e (σ_0) a curva dada pela reta paralela ao eixo imaginário passando por σ_0 , percorrida no sentido positivo do eixo. Então:*

$$I(y) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(\sigma_0)} \frac{y^s}{s} ds = \begin{cases} 1, & \text{se } y > 1; \\ 1/2, & \text{se } y = 1; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Demonstração. Se $y > 1$, então tome a curva γ da figura abaixo.

Figura 5.1: Curva γ .

Pelo teorema dos resíduos,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{y^s}{s} ds = 1.$$

Precisamos mostrar que nas curvas horizontais e verticais, o cálculo da integral vale zero.

Trecho 1: Se $|s| \geq T$, então $\frac{1}{|s|} \leq \frac{1}{T}$. Estimamos a integral por:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{y^s}{s} ds \right| &\leq \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\sigma_0} y^\sigma d\sigma \\ &\leq \frac{1}{2\pi T} \cdot \frac{y^{\sigma_0}}{\log y} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Trecho 2: $|s| \geq \mu$, então:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{y^s}{s} ds \right| &\leq \frac{1}{2\pi\mu} \int_{-T}^T y^{-\mu} dt \\ &\leq \frac{T}{\pi\mu} \cdot y^{-\mu}. \end{aligned}$$

Portanto, fazendo $\mu \rightarrow \infty$, vemos que a conta acima tende a zero, independentemente de T .

Trecho 3: Análogo ao trecho 1.

Portanto, fazendo $\mu, T \rightarrow \infty$, vemos que no caso de $y > 1$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma_0)} \frac{y^s}{s} ds = 1.$$

□

Se $y = 1$, então:

$$\begin{aligned} I(1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma_0)} \frac{1}{s} ds \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{1}{\sigma_0 + it} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{\sigma_0 - it}{\sigma_0^2 + t^2} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-T}^T \frac{\sigma_0}{\sigma_0^2 + t^2} dt - i \cdot \int_{-T}^T \frac{t}{\sigma_0^2 + t^2} dt \right]. \end{aligned}$$

Mas note que $\frac{t}{\sigma_0^2 + t^2}$ é uma função ímpar, o que implica que a segunda integral vale zero. Portanto,

$$\begin{aligned}
 I(1) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{\sigma_0}{\sigma_0^2 + t^2} dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sigma_0}{\pi} \int_0^T \frac{1}{\sigma_0^2 + t^2} dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sigma_0}{\pi} \cdot \left[\frac{\arctan(t/\sigma_0)}{\sigma_0} \right]_0^T \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \cdot \arctan(T/\sigma_0) \\
 &= 1/2.
 \end{aligned}$$

□

Finalmente para o caso $y < 1$, basta proceder do mesmo modo que no primeiro caso, mas tomando a curva γ da figura a seguir:

Figura 5.2: Curva γ .

Terminando assim, a prova do lema.

■

5.3. SÉRIES DE DIRICHLET

Teorema 5.3.6 (*Fórmula de Perron*). *Sejam σ_c é a abscissa de convergência de $\alpha(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ e $\sigma_0 > \sigma_c \geq 0$. Se $x > 0$, então:*

$$A_0(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} \alpha(s) \cdot \frac{x^s}{s} ds,$$

onde $A_0(x) = \sum_{n \leq x}^* a_n = \sum_{n < x} a_n + \frac{1}{2} \cdot a_x$.

Demonstração. Tomemos N grande tal que $N > 2x + 2$. Escrevemos

$$\alpha(s) = \underbrace{\sum_{n \leq N} \frac{a_n}{n^s}}_{\alpha_1(s)} + \underbrace{\sum_{n > N} \frac{a_n}{n^s}}_{\alpha_2(s)}.$$

Primeiramente note que

$$\begin{aligned} A_0(x) &= \sum_{n < x} a_n + \frac{1}{2} \cdot a_x \\ &= \sum_{n \leq N} a_n \cdot I(x/n), \end{aligned}$$

onde

$$I(y) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(\sigma_0)} \frac{y^s}{s} ds = \begin{cases} 1, & \text{se } y > 1; \\ 1/2, & \text{se } y = 1; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

é a função do lema anterior. Portanto,

$$\begin{aligned} A_0(x) &= \sum_{n \leq N} a_n \cdot I(x/n) \\ &= \sum_{n \leq N} a_n \cdot \int_{(\sigma_0)} \frac{(x/n)^s}{s} ds \\ &= \int_{(\sigma_0)} \sum_{n \leq N} \frac{a_n}{n^s} \cdot \frac{x^s}{s} ds \\ &= \int_{(\sigma_0)} \alpha_1(s) \cdot \frac{x^s}{s} ds. \end{aligned}$$

Note que a somatória é finita e, portanto, comuta com a integral. Sendo assim, basta mostrar que

$$\int_{(\sigma_0)} \alpha_2(s) \cdot \frac{x^s}{s} ds \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

1ª Afirmação:

$$\alpha_2(s) = \sum_{n>N} \frac{a_n}{n^s} = s \cdot \int_N^\infty (A(x) - A(N)) \cdot x^{-s-1} dx.$$

De fato, é fácil ver que:

$$\frac{1}{n^s} = s \cdot \int_n^\infty x^{-s-1} dx.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \alpha_2(s) &= s \cdot \sum_{n>N} \int_n^\infty a_n \cdot x^{-s-1} dx \\ &= s \cdot \int_{N+1}^{N+2} a_{N+1} \cdot x^{-s-1} dx \\ &\quad + s \cdot \int_{N+2}^{N+3} (a_{N+1} + a_{N+2}) \cdot x^{-s-1} dx \\ &\quad + s \cdot \int_{N+3}^{N+4} (a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3}) \cdot x^{-s-1} dx + \dots \end{aligned}$$

Então,

$$\alpha_2(s) = s \cdot \sum_{n>N} \left[\int_n^{n+1} \sum_{N+1}^n a_j \cdot x^{-s-1} dx \right].$$

Observe que

$$\sum_{N+1}^n a_j = A(n) - A(N).$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \alpha_2(s) &= s \cdot \sum_{n>N} \left[\int_n^{n+1} [A(n) - A(N)] \cdot x^{-s-1} dx \right] \\
 &= s \cdot \sum_{n>N} \left[\int_n^{n+1} [A(x) - A(N)] \cdot x^{-s-1} dx \right] \\
 &= s \cdot \int_{N+1}^{\infty} [A(x) - A(N)] \cdot x^{-s-1} dx,
 \end{aligned}$$

pois $A(x) = A(n)$ se $x \in [n, n+1[$. Além disso, é óbvio que

$$s \cdot \int_N^{N+1} [\underbrace{A(x)}_{=A(N)} - A(N)] \cdot x^{-s-1} dx = 0.$$

Portanto,

$$\alpha_2(s) = s \cdot \int_N^{\infty} [A(x) - A(N)] \cdot x^{-s-1} dx.$$

□

2ª Afirmação: Se $\sigma_c < \theta < \sigma_0$, então $A(x) = O(x^\theta)$.

Vimos no teorema anterior, que

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\log |A(x)|}{\log x} = \sigma_c,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 \frac{\log |A(x)|}{\log x} &\leq \sigma_c \\
 \Rightarrow \log |A(x)| &\leq \log x^{\sigma_c} \\
 \Rightarrow |A(x)| &\leq x^{\sigma_c} \\
 \Rightarrow |A(x)| &< x^\theta, \quad \forall x > x_0.
 \end{aligned}$$

□

3ª Afirmação:

$$|\alpha_2(s)| \leq 2 \cdot \left(\frac{|s|}{\sigma - \theta} \right) \cdot N^{\theta - \sigma},$$

onde $\sigma_c < \theta < \sigma$.

Usando as afirmações anteriores, sabemos que:

$$\begin{aligned}
 |\alpha_2(s)| &= |s| \cdot \left| \int_N^\infty [A(x) - A(N)] \cdot x^{-s-1} dx \right| \\
 &\leq |s| \cdot \left| \int_N^\infty A(x) \cdot x^{-s-1} dx \right| + |s| \cdot \left| \int_N^\infty A(N) \cdot x^{-s-1} dx \right| \\
 &\leq |s| \cdot \int_N^\infty |A(x) \cdot x^{-s-1}| dx + |s| \cdot |A(N)| \cdot \left| \int_N^\infty x^{-s-1} dx \right| \\
 &\leq |s| \cdot \int_N^\infty x^{\theta-\sigma-1} dx + |s| \cdot N^\theta \cdot \left| \int_N^\infty x^{-s-1} dx \right| \\
 &\leq |s| \cdot \left[\frac{x^{\theta-\sigma}}{\theta-\sigma} \right]_N^\infty + |s| \cdot N^\theta \cdot \left| \left[\frac{x^{-s}}{s} \right]_N^\infty \right| \\
 &\leq |s| \cdot \frac{N^{\theta-\sigma}}{\sigma-\theta} + |s| \cdot N^\theta \cdot \frac{N^{-s}}{|s|} \\
 &= N^{\theta-\sigma} \cdot \left[1 + \frac{|s|}{\sigma-\theta} \right].
 \end{aligned}$$

□

Então, para calcular a integral

$$\int_{(\sigma_0)} \alpha_2(s) \cdot \frac{x^s}{s} ds,$$

considere a seguinte curva.

Figura 5.3: Curva γ .

Na região interior à curva, o integrando não possui singularidades e pelo teorema dos Resíduos, temos que:

$$\int_{(\sigma_0)^T} \alpha_2(s) \cdot \frac{x^s}{s} ds = \int_{\gamma_1} \alpha_2(s) \cdot \frac{x^s}{s} ds + \int_{\gamma_2} \alpha_2(s) \cdot \frac{x^s}{s} ds + \int_{\gamma_3} \alpha_2(s) \cdot \frac{x^s}{s} ds.$$

Estimativa: Curva γ_1 . Usando a afirmação anterior, temos:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_1} \alpha_2(s) \cdot \frac{x^s}{s} ds \right| &\leq \int_{\gamma_1} |\alpha_2(s)| \cdot \frac{x^\sigma}{s} ds \\ &\leq 2 \cdot \int_{\gamma_1} \frac{|s|}{\sigma - \theta} \cdot N^{\theta - \sigma} \cdot \frac{x^\sigma}{|s|} ds \\ &\leq 2 \cdot \frac{N^\theta}{\sigma_0 - \theta} \int_{\sigma_0}^T \left(\frac{x}{N} \right)^\sigma \cdot d\sigma, \end{aligned}$$

pois $\sigma_0 \leq \sigma \Rightarrow \frac{1}{\sigma - \theta} \leq \frac{1}{\sigma_0 - \theta}$. Então:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\gamma_1} \alpha_2(s) \cdot \frac{x^s}{s} ds \right| &\leq 2 \cdot \frac{N^\theta}{\sigma_0 - \theta} \cdot \left[\frac{(x/N)^\sigma}{\log(x/N)} \right]_{\sigma_0}^\infty \\
 &= 2 \cdot \frac{N^\theta}{\sigma_0 - \theta} \cdot \frac{(x/N)^{\sigma_0}}{-\log(x/N)} \\
 &= 2 \cdot \frac{N^{\theta-\sigma_0}}{\sigma_0 - \theta} \cdot \frac{(x)^{\sigma_0}}{\log(N/x)}.
 \end{aligned}$$

A estimativa para a curva γ_3 é análogo, restando assim a estimativa para a curva γ_2 . Nesse caso, $\Re(s) = T$ e vale

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\gamma_2} \alpha_2(s) \cdot \frac{x^s}{s} ds \right| &\leq 2 \cdot \int_{\gamma_2} \frac{|s|}{T - \theta} \cdot N^{\theta-T} \cdot \frac{|x^s|}{|s|} ds \\
 &\leq \frac{2 \cdot N^{\theta-T} \cdot x^T}{T - \theta} \cdot \ell(\gamma_2) \\
 &\leq \frac{2 \cdot N^\theta}{T - \theta} \cdot 2T \cdot \left(\frac{x}{N} \right)^T \\
 &\leq \frac{4T}{T - \theta} \cdot N^\theta \cdot \left(\frac{x}{N} \right)^{\sigma_0},
 \end{aligned}$$

pois, por hipótese, $\frac{x}{N} < 1$. Assim, fazendo $T \rightarrow \infty$, temos:

$$\left| \int_{\gamma_2} \alpha_2(s) \cdot \frac{x^s}{s} ds \right| \leq 4 \cdot N^{\theta-\sigma_0} \cdot x^{\sigma_0},$$

Portanto,

$$\int_{\gamma_2} \alpha_2(s) \cdot \frac{x^s}{s} ds \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

■

5.4 Fórmula de Inversão de Fourier

Nesta seção faremos alguns resultados básicos de análise harmônica. Para os fins deste trabalho, trabalharemos com funções de classe $\mathcal{C}^1$ com decréscimo acelerado.

5.4. FÓRMULA DE INVERSÃO DE FOURIER

Lema 5.4.1 (Riemann-Lebesgue). *Seja f uma função de classe C^1 com decrescimento acelerado. Então:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \cos(\lambda x) dx \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \sin(\lambda x) dx \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0.$$

Demonstração. Por hipótese, sabemos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

Portanto, para todo $\epsilon > 0$, existe um X tal que:

$$\left| \int_X^{+\infty} f(x) \cdot \cos(\lambda x) dx \right| < \epsilon$$

e

$$\left| \int_{-\infty}^{-X} f(x) \cdot \cos(\lambda x) dx \right| < \epsilon,$$

para todo λ . Além disso, integrando por partes temos que:

$$\int_{-X}^{+X} f(x) \cdot \cos(\lambda x) dx = \left[f(x) \cdot \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda} \right]_{-X}^X - \frac{1}{\lambda} \cdot \int_{-X}^{+X} f'(x) \cdot \sin(\lambda x) dx.$$

Note que

$$\int_{-X}^{+X} f'(x) \cdot \sin(\lambda x) dx < A. \quad (5.2)$$

Portanto, existe R , tal que, para todo $\lambda > R$ temos:

$$\int_{-X}^{+X} f(x) \cdot \cos(\lambda x) dx < \epsilon.$$

O que termina a prova para a função cosseno. É fácil notar que a prova para a função seno é análoga. ■

Para funções como a do lema acima, podemos definir a chamada transformada de Fourier por:

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-2\pi i x t} dx.$$

Note que a integral acima é claramente convergente. Com essa definição, mostraremos que:

Teorema 5.4.2 (Fórmula de inversão de Fourier). *Seja $f(x)$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ com decrescimento acelerado e $\hat{f}(t)$ sua transformada de Fourier. Então:*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) \cdot e^{2\pi i x t} dt.$$

Demonstração. Seja $M > 0$ e defina:

$$f_M(x) = \int_{-M}^{+M} \hat{f}(t) \cdot e^{2\pi i x t} dt.$$

Queremos mostrar que $f_M(x) \rightarrow f(x)$ quando $M \rightarrow \infty$. Pela definição de $\hat{f}(t)$ temos que:

$$\begin{aligned} f_M(x) &= \int_{-M}^{+M} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(v) \cdot e^{-2\pi i v t} dv \right] \cdot e^{2\pi i x t} dt. \\ &\stackrel{(fubini)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) \cdot \left[\int_{-M}^{+M} e^{2\pi i t(x-v)} dt \right] dv. \end{aligned}$$

Mas note que a integral interna vale:

$$\begin{aligned} \int_{-M}^{+M} e^{2\pi i t(x-v)} dt &= \left[\frac{e^{2\pi i t(x-v)}}{2\pi i(x-v)} \right]_{-M}^M \\ &= \frac{e^{2\pi i M(x-v)} - e^{-2\pi i M(x-v)}}{2\pi i(x-v)} \\ &= \frac{\sin(2\pi M(x-v))}{\pi(x-v)}. \end{aligned}$$

5.4. FÓRMULA DE INVERSÃO DE FOURIER

Portanto,

$$f_M(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) \cdot \left[\frac{\sin(2\pi M(x-v))}{(x-v)} \right] dv.$$

É fácil ver que $\frac{f(v)}{x-v}$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$ em $[x+\delta, \infty]$ e em $[-\infty, x-\delta]$, para todo $\delta > 0$. Portanto, pelo mesmo argumento utilizado no lema anterior, temos que:

$$\int_{x+\delta}^{+\infty} f(v) \cdot \left[\frac{\sin(2\pi M(x-v))}{(x-v)} \right] dv \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0$$

e

$$\int_{-\infty}^{x-\delta} f(v) \cdot \left[\frac{\sin(2\pi M(x-v))}{(x-v)} \right] dv \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0.$$

Portanto nos resta mostrar que:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left[\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(v) \cdot \left[\frac{\sin(2\pi M(x-v))}{(x-v)} \right] dv \right] = \pi \cdot f(x).$$

Podemos modificar a integral acima pela mudança de variável $v \leftarrow x - t$, obtendo:

$$\begin{aligned} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(v) \cdot \left[\frac{\sin(2\pi M(x-v))}{(x-v)} \right] dv &= \int_{-\delta}^{+\delta} f(x-t) \cdot \left[\frac{\sin(2\pi Mt)}{t} \right] dt = \\ &= \int_0^{+\delta} f(x-t) \cdot \left[\frac{\sin(2\pi Mt)}{t} \right] dt + \int_{-\delta}^0 f(x-t) \cdot \left[\frac{\sin(2\pi Mt)}{t} \right] dt \\ &= \int_0^{+\delta} f(x-t) \cdot \left[\frac{\sin(2\pi Mt)}{t} \right] dt - \int_{+\delta}^0 f(x+t) \cdot \left[\frac{\sin(-2\pi Mt)}{-t} \right] dt. \end{aligned}$$

Pelo fato de a função seno ser ímpar, concluímos que:

$$\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(v) \cdot \left[\frac{\sin(2\pi M(x-v))}{(x-v)} \right] dv = \int_0^{+\delta} [f(x-t) + f(x+t)] \cdot \frac{\sin(2\pi Mt)}{t} dt.$$

1ª Afirmação: O limite

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\int_0^{+\delta} [f(x-t) + f(x+t)] \cdot \frac{\sin(\lambda t)}{t} dt \right] = \pi \cdot f(x)$$

se

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\int_0^{+\delta} [f(x-t) + f(x+t) - 2f(x)] \cdot \frac{\sin(\lambda t)}{t} dt \right] = 0.$$

De fato, note que:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\delta} 2f(x) \cdot \frac{\sin(\lambda t)}{t} dt &= 2f(x) \cdot \int_0^{+\lambda\delta} \frac{\sin(y)}{y/\lambda} \cdot \frac{dy}{\lambda} \\ &= 2f(x) \cdot \int_0^{+\lambda\delta} \frac{\sin(y)}{y} \cdot dy \end{aligned} \quad (5.3)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\int_0^{+\delta} [2f(x)] \cdot \frac{\sin(\lambda t)}{t} dt \right] &= 2f(x) \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y} \cdot dy \\ &= 2f(x) \cdot \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

□

2ª Afirmação: Suponha que $\psi(t)$ seja uma função não decrescente de classe $\mathcal{C}^1$ tal que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \psi(t) = 0.$$

Então:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\int_0^{+\delta} \psi(t) \cdot \frac{\sin(\lambda t)}{t} dt \right] = 0.$$

Primeiramente observe que $\frac{\psi(t)}{t}$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e, portanto, para todo $\eta > 0$, vale:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\int_{\eta}^{+\delta} \psi(t) \cdot \frac{\sin(\lambda t)}{t} dt \right] = 0.$$

Então, tome $\eta > 0$ de modo que $\psi(t) < \epsilon$ sempre que $t \in [0, \eta]$. Portanto,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\int_0^{+\delta} \psi(t) \cdot \frac{\sin(\lambda t)}{t} dt \right] = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\int_0^{+\eta} \psi(t) \cdot \frac{\sin(\lambda t)}{t} dt \right].$$

Pelo segundo teorema do valor médio para integrais, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\int_0^{+\eta} \psi(t) \cdot \frac{\sin(\lambda t)}{t} dt \right] &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \psi(\eta) \cdot \left[\int_{\mu}^{\eta} \frac{\sin(\lambda t)}{t} dt \right] \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \psi(\eta) \cdot \left[\int_{\lambda\mu}^{\lambda\eta} \frac{\sin(t)}{t} dt \right], \end{aligned}$$

onde $0 < \mu < \eta$. Assim, pelo fato de a última integral ser limitada, para todo λ e todo μ , temos:

$$\left| \int_0^{+\eta} \psi(t) \cdot \frac{\sin(\lambda t)}{t} dt \right| \leq \epsilon \cdot A.$$

□

O que conclui a prova do teorema.

■

Para os fins deste trabalho, faremos a fórmula de Poisson para funções um pouco mais restritas. Então, se $a > 0$, denotaremos por $\mathfrak{F}_a$ a classe de todas as funções f que satisfazem as seguintes propriedades:

- (i) A função f é holomorfa na faixa horizontal

$$S_a = \{z \in \mathbb{C} : |\Im(z)| < a\}. \quad (5.4)$$

- (ii) Existe uma constante $A > 0$ tal que:

$$|f(x + iy)| \leq \frac{A}{1 + x^2},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e $|y| < a$.

Em outras palavras, a classe $\mathfrak{F}_a$ consiste nas funções holomorfas em S_a que possuem decrescimento moderado em relação a parte imaginária uniformemente em relação a parte real. Como exemplo, a função $f(z) = e^{-\pi t z^2}$, para todo t , pertence à $\mathfrak{F}_a$.

Teorema 5.4.3 (*Fórmula de Poisson*). Se $f \in \mathfrak{F}_a$, então

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \quad (5.5)$$

Demonstração. Considere $f \in \mathfrak{F}_a$ e tome b tal que $0 < b < a$. É fácil ver que a função

$$\frac{1}{e^{2\pi iz} - 1}$$

possui pólos simples com resíduo $\frac{1}{2\pi i}$ nos inteiros. Portanto, $\frac{f(z)}{e^{2\pi iz} - 1}$ também possui pólos simples nos inteiros com resíduo $\frac{f(n)}{2\pi i}$. Considere a curva γ_N da figura abaixo.

Figura 5.4: Curva γ_N .

Aplicando o teorema dos resíduos para a função $\frac{f(z)}{e^{2\pi iz} - 1}$, temos:

$$\sum_{|n| \leq N} f(n) = \int_{\gamma_N} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz} - 1} dz.$$

Suponha que $\sigma = \Re(z) = 1/2, 3/2, \dots$. Escrevemos:

5.4. FÓRMULA DE INVERSÃO DE FOURIER

$$\begin{aligned} \left| \int_{\sigma>0} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz} - 1} dz \right| &= \left| \int_{-b}^b \frac{f(\sigma + it)}{e^{2\pi i\sigma} \cdot e^{-2\pi t} - 1} dt \right| \\ &\leq \frac{A}{1 + \sigma^2} \cdot \left| \int_{-b}^b \frac{1}{-e^{-2\pi t} - 1} dt \right|. \end{aligned}$$

Portanto, fazendo $N \rightarrow \infty$, pelo fato de f ter decrescimento moderado a somatória

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) < \infty$$

e pela conta acima, a integral nos trechos verticais tende a zero. Então, no limite, obtemos:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \int_{L_1} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz} - 1} dz + \int_{L_2} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz} - 1} dz,$$

onde L_1 e L_2 são os trechos horizontais da curva γ_∞ .

Note que em L_1 , vale que $|e^{2\pi iz}| > 1$. Além disso,

$$\frac{1}{w - 1} = w^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} w^{-n}.$$

Portanto, em L_1 , temos:

$$\frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} = e^{-2\pi iz} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi inz}.$$

Pelo fato de a somatória convergir compactamente, podemos comutá-la com a integral. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{L_1} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz} - 1} dz &= \int_{L_1} f(z) \cdot \left(e^{-2\pi iz} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi inz} \right) dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{L_1} f(z) \cdot e^{-2\pi i(n+1)z} dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-2\pi i(n+1)x} dx, \end{aligned}$$

pois $f(z) \cdot e^{-2\pi i(n+1)z}$ é uma função holomorfa no retângulo abaixo.

Figura 5.5: Podemos calcular a integral na reta real.

Então,

$$\begin{aligned} \int_{L_1} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz} - 1} dz &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-2\pi i(n+1)x} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n+1). \end{aligned}$$

Por outro lado, em L_2 , vale que $|e^{2\pi iz}| < 1$ e, então,

$$\frac{1}{w - 1} = - \sum_{n=0}^{\infty} w^n.$$

Portanto, em L_2 , temos:

$$\frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} = - \sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi inz}.$$

Substituindo na integral, temos que:

5.4. FÓRMULA DE INVERSÃO DE FOURIER

$$\begin{aligned}
 \int_{L_2} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz} - 1} dz &= - \int_{L_2} f(z) \cdot \left(\sum_0^\infty e^{2\pi inz} \right) dz \\
 &= \sum_{n=0}^\infty - \int_{L_2} f(z) \cdot e^{2\pi inz} dz \\
 &= \sum_{n=0}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x) \cdot e^{-2\pi i(-n)x} dx \\
 &= \sum_{n=0}^\infty \hat{f}(-n).
 \end{aligned}$$

O que termina a demonstração. ■

Proposição 5.4.4. *Seja $f(x) = e^{-\pi x^2}$, para todo x real. Então sua transformada de Fourier vale $\hat{f}(t) = e^{-\pi t^2}$. Em outras palavras,*

$$e^{-\pi x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-2\pi ixt} dt.$$

Demonstração. Primeiramente precisamos mostrar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1.$$

Vimos em 3.5 que se $\Re(s) > 0$, então:

$$\pi^{-s/2} \cdot \Gamma(s/2) \cdot \frac{1}{n^s} = \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} \cdot t^{s/2-1} dt.$$

Tomando $n = 1$ e fazendo a mudança de variável $t \leftarrow x^2$, temos:

$$\begin{aligned}
 \pi^{-s/2} \cdot \Gamma(s/2) &= \int_0^\infty e^{-\pi t} \cdot t^{s/2-1} dt \\
 &= \int_0^\infty e^{-\pi x^2} \cdot x^{s-2} \cdot 2x dx.
 \end{aligned}$$

Se $s = 1$, então:

$$\begin{aligned}\pi^{-1/2} \cdot \Gamma(1/2) &= 2 \cdot \int_0^{\infty} e^{-\pi x^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx.\end{aligned}$$

Por 3.2.2, é fácil ver que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ e, portanto,

$$f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt = 1.$$

□

Suponha $x > 0$ e considere a função $f(z) = e^{-\pi z^2}$ inteira e particularmente holomorfa na região da figura abaixo.

Figura 5.6: Curva γ_R .

Pelo teorema dos resíduos, temos que:

$$\int_{\gamma_R} e^{-\pi z^2} dz = 0.$$

No limite, a integral sobre o eixo real vale:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{-R}^R e^{-\pi x^2} dx \right] = 1.$$

A integral na curva vertical direita pode ser estimada por:

5.4. FÓRMULA DE INVERSÃO DE FOURIER

$$\begin{aligned}
 I(R) &= \int_0^x f(R + iy)idy = \int_0^x e^{-\pi[R^2 + 2iRy - y^2]}idy \\
 &= e^{-\pi R^2} \cdot \underbrace{\int_0^x e^{-\pi[2iRy - y^2]}idy}_{< \infty} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.
 \end{aligned}$$

Por uma conta análoga, a integral da curva vertical direita também se anula no limite. Por fim, a integral na curva horizontal superior vale:

$$\begin{aligned}
 \int_R^{-R} f(t + ix)dt &= \int_R^{-R} e^{-\pi[t^2 + 2ixt - x^2]}dt \\
 &= e^{\pi x^2} \cdot \int_R^{-R} e^{-\pi[t^2 + 2ixt]}dt \\
 &= -e^{\pi x^2} \cdot \int_{-R}^R e^{-\pi t^2} \cdot e^{-2\pi ixt}dt.
 \end{aligned}$$

Reunindo as informações acima, no limite vale que:

$$1 = e^{\pi x^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} \cdot e^{-2\pi ixt}dt,$$

ou seja,

$$e^{-\pi x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} \cdot e^{-2\pi ixt}dt.$$

■

O próximo resultado diz respeito à função Theta vista em [3.4.1](#).

Corolário 5.4.5. *Seja $\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi t}$, para $t > 0$. Então,*

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \theta(1/t).$$

Demonstração. Considere a função $f(z) = e^{-\pi t z^2}$ holomorfa em todo o plano complexo e sua restrição ao eixo real, $f(x)$. Por definição, a transformada de Fourier de $f(x)$ vale:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t x^2} \cdot e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Fazendo a mudança de variáveis $x \leftarrow \frac{y}{\sqrt{t}}$, temos que:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} \cdot e^{-2\pi i y \frac{\xi}{\sqrt{t}}} dy.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \hat{f}(\sqrt{t} \cdot \xi) &= \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} \cdot e^{-2\pi i y \xi} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot e^{-\pi \xi^2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot e^{-\frac{\pi \xi^2}{t}}.$$

Note também que $f \in \mathfrak{F}_a$ e pela fórmula de Poisson, vale que:

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \\ \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi t n^2} &= \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi n^2}{t}}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

■

Referências Bibliográficas

- [1] Harold M. Edwards, Riemann's Zeta Function, Dover Publications (2001).
- [2] Hugh L. Montgomery, Robert C. Vaughan, Multiplicative Number Theory I: Classical Theory, Cambridge University Press (2006).
- [3] Rami Shakarchi, Elias M. Stein, Fourier Analysis: An Introduction (Princeton Lectures in Analysis, Volume 1), Princeton University Press (2003).
- [4] Rami Shakarchi, Elias M. Stein, Complex Analysis (Princeton Lectures in Analysis, Volume 2), Princeton University Press (2003).
- [5] Reinhold Remmert, Theory of Complex Functions (Graduate Texts in Mathematics) (v. 122), Springer (1990).
- [6] Reinhold Remmert, Classical Topics in Complex Function Theory (Graduate Texts in Mathematics), Springer; Softcover reprint of hardcover 1st ed. 1997 edition (2010).
- [7] Gerald Tenenbaum, Michel Mendes France, The Prime Numbers and Their Distribution (Student Mathematical Library, Vol. 6), American Mathematical Society (2000).
- [8] A. E. Ingham, R. C. Vaughan, The Distribution of Prime Numbers (Cambridge Mathematical Library), Cambridge University Press (1990).
- [9] Antoni Zygmund, Stanislaw Saks, Analytic Functions, Elsevier Science Ltd; 3rd edition (1971).
- [10] Harold Davenport, Multiplicative Number Theory, Springer 3rd edition (2000).

- [11] J. Delsarte, Formules de Poisson Avec Rest, *J. Analyse Math.*, 17 (1966), 419- 431.
- [12] A. Weil, Sur les formules explicites de la théorie des nombres premiers, *OEUVRES SCIENTIFIQUES, Collected Papers*, vol. II, Springer-Verlag (2009), pp. 526-571.
- [13] Gerald B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley & Sons (1984).