A influência dos subespaços discretos sobre os espaços topológicos

Leandro Fiorini Aurichi

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: **Matemática**
Orientadora: **Profa. Dra. Lúcia Renato Junqueira**

Durante a elaboração deste trabalho, o autor recebeu apoio financeiro
do CNPq e da CAPES.

São Paulo, julho de 2009

A influência dos subespaços discretos sobre os espaços topológicos

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida
e defendida por Leandro Fiorini Aurichi
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Profa. Dra. Lucia Renato Junqueira (orientadora) - IME-USP.
- Profa. Dra. Ofelia Teresa Alas - IME-USP.
- Prof. Dr. Walter Alexandre Carnielli - UNICAMP.
- Prof. Marcelo Dias Passos - UNIFESP.
- Prof. Samuel Gomes da Silva - UFBA.

Resumo

Apresentamos alguns resultados envolvendo subespaços discretos. Podemos dividir nossos resultados em dois tipos, a construção de contraexemplos e os resultados positivos. Entre os contraexemplos, destacamos: um espaço que testemunha que a σ -compacidade não é uma propriedade discretamente reflexiva; um espaço compacto pseudo-radial que não é discretamente gerado (assumindo a existência de uma árvore de Suslin); um espaço de caráter enumerável que é ω -bounded mas não fortemente ω -bounded. Entre os resultados positivos, destacamos que a propriedade de Menger implica ser um D -espaço e que a propriedade de Alster implica a de Menger. São apresentados também alguns jogos topológicos com aplicações ao problema de D -espaços.

Abstract

We present here some results related to discrete subspaces. We can split our results in two types, the construction of counterexamples and the positive results. Among the counterexamples, there are: a space that witnesses that the σ -compactness is not a discretely reflexive property; a compact and pseudo-radial space that is not discretely generated (assuming the existence of a Suslin tree); a first countable space that is ω -bounded but it is not strongly ω -bounded. Among the positive results, there are that the Menger property implies being a D -space and that the Alster property implies the Menger one. We also present some topological games with applications to the D -spaces problem.

Sumário

Introdução	10
1 Preliminares	13
1.1 Introdução	13
1.2 Topologia Geral	13
1.3 Teoria dos Conjuntos	15
1.4 <i>Forcing</i>	16
1.5 Jogos topológicos	18
2 Propriedades discretamente reflexivas	21
2.1 Introdução	21
2.2 Árvores	22
2.3 Propriedades básicas	23
2.4 Propriedades discretamente reflexivas	25
2.5 L -espaços e propriedades discretamente reflexivas	29
3 O espaço $X(T)$	31
3.1 Introdução	31
3.2 A construção	31
3.3 Espaços discretamente gerados e pseudo-ra-dialidade	33
3.4 ω -boundedness e ω -boundedness forte	36
4 Princípios de seleção e jogos topológicos	39
4.1 Introdução	39
4.2 Espaços de Rothberger	40
4.3 Espaços de Menger	44
4.4 Algumas aplicações	47
5 D-espaços	49
5.1 Introdução	49
5.2 O jogo dos o.n.a's parciais	51
5.3 O jogo estrela	54
5.4 Algumas aplicações	58

6 Perguntas	61
Bibliografia	62
Índices	65
Notação	66
Índice Remissivo	67

Introdução

Espaços discretos são estruturalmente simples. Como qualquer subconjunto de um espaço discreto é aberto, a única possível diferença topológica entre dois espaços discretos é a cardinalidade de cada um. Apesar de tal simplicidade, ao olharmos os subespaços discretos de um dado espaço, muitas vezes podemos descobrir propriedades do espaço como um todo.

Por exemplo, Tkachuk mostrou em [37] que dado um espaço topológico, se o fecho de cada subespaço discreto é compacto, então o espaço todo é compacto. Esse resultado é a motivação do conceito das propriedades discretamente reflexivas, isto é, propriedades que podem ser caracterizadas ao se olhar para o fecho dos subespaços discretos. Um estudo sistemático sobre tais propriedades começou a ser feito em [1]. Apresentamos um estudo sobre tais propriedades no capítulo **2**. Mais especificamente, apresentamos algumas construções para contraexemplos de propriedades discretamente reflexivas, isto é, mostramos que algumas propriedades não são discretamente reflexivas. Alguns dos exemplos são em ZFC, outros necessitam de uma hipótese adicional: a existência de uma árvore de Suslin. Tais exemplos eram só conhecidos assumindo-se a hipótese do contínuo. Assim, respondemos a algumas perguntas de [1].

Outra maneira de se estudar a influência dos subespaços discretos é ver o quanto eles determinam o fecho de um conjunto: dizemos que um espaço é discretamente gerado se toda vez que um ponto estiver no fecho de um conjunto, há um subespaço discreto do conjunto em cujo fecho o ponto está. No capítulo **3** apresentamos a construção de um contraexemplo à pergunta se todo compacto pseudo-radial é discretamente gerado ([13]). As propriedades de ser radial e de ser discretamente gerado são generalizações para espaços sequenciais. Assim, é um problema interessante saber como elas se relacionam. O exemplo construído usa a hipótese de que existe uma árvore de Suslin. Já se conheciam outros dois exemplos, com construções bastante diferentes entre si, mas ambas assumindo a hipótese do contínuo ([1, 9]). Após a construção de tal exemplo, foi verificado que a mesma construção, com pequenas mudanças, apresentava um contraexemplo também para uma pergunta feita por Peter Nyikos em [26, 28]. Para esse novo exemplo, não há a necessidade de uma árvore de Suslin, apenas uma de Aronszajn. Como tais árvores existem em ZFC, não precisamos de qualquer

hipótese adicional para essa parte. Para essas perguntas de Nyikos, não havia nem exemplos consistentes.

No capítulo 4, apresentamos um estudo sobre propriedades dadas por princípios de seleção e jogos topológicos. Mais especificamente, sobre as propriedades de Menger e Rothberger. Além de uma aplicação de tais propriedades no capítulo seguinte (sobre D -espaços), apresentamos uma conexão entre a propriedade de Menger e a propriedade de Alster. Esta última é uma propriedade ligada ao problema de Michael: se existe um espaço de Lindelöf cujo produto com o espaço dos números irracionais não seja de Lindelöf. Apresentamos também uma lista de caracterizações para os espaços compactos de Rothberger, que acaba conectando tal propriedade a diversas outras. Por exemplo, ser um espaço disperso, ter a compacidade preservada por *forcing* e construções por submodelos elementares.

No capítulo 5, apresentamos um estudo sobre D -espaços. Essa é também uma propriedade envolvendo subespaços discretos que foi introduzida por van Douwen em [39]. Neste mesmo trabalho, foi feita a pergunta mais importante sobre este assunto e que norteia boa parte deste capítulo:

Todo espaço de Lindelöf regular é um D -espaço?

Apesar de parecer uma pergunta simples (ou mesmo por causa disso) muito trabalho tem sido feito nos últimos anos, incluindo um capítulo dedicado a D -espaços no livro *Open problems in Topology II* ([14]). Boa parte dos resultados parciais obtidos até o momento envolve propriedades sobre bases (por exemplo o espaço ter uma base ponto-enumerável ([3])) ou generalizações de metrizabilidade (por exemplo, espaços fortemente Σ ([10])). Apresentamos aqui o que é, aparentemente, o primeiro resultado parcial para tal problema envolvendo apenas propriedades sobre coberturas. Tal resultado usa jogos topológicos e a propriedade de Menger apresentada no capítulo anterior.

Terminamos este trabalho apresentando uma lista de perguntas relacionadas aos problemas com que trabalhamos aqui. Essa lista não é completa, mas exemplifica bem algumas das direções que podem ser tomadas a partir dos resultados obtidos nesse trabalho. Na lista estão apenas as perguntas baseadas neste trabalho. As perguntas feitas anteriormente se encontram ao longo do texto.

As demonstrações aqui apresentadas, a menos de menção contrária, são do autor. Os resultados que já eram conhecidos, mas cuja demonstração usava técnica diferente ou era apenas “folclore”, estão indicados desta maneira.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos algumas definições e alguns resultados que serão utilizados no decorrer deste trabalho. O intuito não é fazer uma exposição completa, mas apenas servir como um guia para o leitor não familiarizado com os conceitos aqui apresentados e fixar algumas notações. Além das referências citadas no decorrer do capítulo, sugerimos [15] para os tópicos de Topologia Geral e [23] [20] para os de Teoria dos Conjuntos e *forcing*.

1.2 Topologia Geral

Todos os espaços topológicos considerados neste trabalho são assumidos T_1 , isto é, o unitário de cada ponto é um conjunto fechado. Vamos agora fazer algumas definições, começando com o conceito de base local:

Definição 1.2.1. Seja X um espaço topológico. Dado $x \in X$, dizemos que $\mathcal{B}$ é uma **base local** para x se seus elementos são abertos que contêm o ponto x e, para todo U aberto tal que $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset U$.

Uma noção relacionada a bases locais muito usada é a menor cardinalidade possível para se obter uma, a quem chamamos de **caráter**:

Definição 1.2.2. Seja X um espaço topológico. Dado $x \in X$, denotamos por $\chi(x, X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ é base local para } x\} + \omega$. Denotamos por $\chi(X)$ o $\sup\{\chi(x, X) : x \in X\}$.

Muitas vezes se exige que os abertos de uma base tenham propriedades especiais:

Definição 1.2.3. Dizemos que um espaço topológico X é **zero - dimensional** se possui uma base formada por abertos fechados.

Um resultado envolvendo subespaços discretos que será utilizado diversas vezes nesse trabalho é o lema de Šapirovski:

Lema 1.2.4. *Seja X um espaço topológico T_1 . Seja $(V_x)_{x \in X}$ uma família tal que cada V_x é uma vizinhança aberta de x . Então existe $D \subset X$ discreto tal que $X = \bigcup_{d \in D} V_d \cup \overline{D}$.*

A demonstração de tal resultado pode ser encontrada em [18, Proposição 4.8].

Finalmente, apresentamos o conceito de espaço disperso, que será usado diversas vezes neste trabalho:

Definição 1.2.5. Dizemos que um espaço topológico X é um **espaço disperso** se todo subespaço $Y \subset X$ não vazio possui um ponto isolado.

Espaços dispersos têm a propriedade útil de terem uma decomposição natural:

Definição 1.2.6. Dados X um espaço topológico e α um ordinal, definimos recursivamente o espaço X^α :

- $X^0 = \{x \in X : x \text{ é ponto isolado em } X\};$
- $X^\alpha = \{x \in X : x \text{ é ponto isolado em } X \setminus (\bigcup_{\beta < \alpha} X^\beta)\}.$

Note que, se X é disperso, então existe α tal que $X^\alpha = \emptyset$. Chamamos de **altura** de X o primeiro α em que isso ocorre.

1.3 Teoria dos Conjuntos

Em diversos momentos durante este trabalho, usaremos diversas hipóteses adicionais a ZFC, isto é, propriedades que não se podem provar nem refutar trabalhando apenas com os axiomas de ZFC. Uma das mais importantes é:

Definição 1.3.1. Chamamos de **hipótese do contínuo** (*CH*) a afirmação de que $2^\omega = \omega_1$.

Outra hipótese adicional que utilizaremos é o axioma de Martin. Vamos enunciá-lo abaixo apenas para referência. Os conceitos não definidos e uma discussão sobre a sua independência podem ser encontrados em [23]

Definição 1.3.2. Chamamos de **axioma de Martin** a afirmação de que para toda família de cardinalidade menor que o contínuo de densos numa ordem parcial satisfazendo c.c.c. (*countable chain condition*), existe um filtro que intercepta todos os densos da família.

Um conceito que aparecerá muitas vezes neste trabalho é o de árvore, que pode ser entendido como uma generalização do conceito de ordinal:

Definição 1.3.3. Dizemos que $(T, <)$ é uma **árvore** se T é um conjunto e $<$ é uma ordem parcial sobre T tal que, dado qualquer elemento $t \in T$, temos que $\{s \in T : s < t\}$ é um conjunto bem ordenado por $<$.

Definição 1.3.4. Seja T uma árvore. Dizemos que $R \subset T$ é um **ramo** se R é uma cadeia maximal. Um elemento $t \in T$ é dito uma **folha** se t é maximal em T . Dizemos que T é **cheia** se todo ramo de T possui uma folha. Denotamos por $\mathcal{F}(T)$ o conjunto de todas as folhas de T . Dado $t \in T$, denotamos por $l(t)$ o ordinal ao qual $\{s < t : s \in T\}$ é isomorfo. Dado um ordinal ξ , usamos $L_\xi(T)$ (ou simplesmente L_ξ se T estiver clara no contexto) para denotar o conjunto $\{t \in T : l(t) \leq \xi\}$. Dado $t \in T$, denotamos por $suc(t)$ o conjunto dos sucessores imediatos de t , isto é, o conjunto $\{s > t : l(s) = l(t) + 1\}$. Vamos assumir durante todo esse trabalho que toda árvore T é tal que $|L_0(T)| = 1$. Dado $A \subset T$, denotamos por $\downarrow A$ o conjunto $\{t \in T : \text{existe } a \in A \text{ tal que } t \leq a\}$.

Um exemplo comum de árvore é o conjunto das sequências finitas de naturais (que denotamos por $\omega^{<\omega}$) com a ordem da inclusão. Em tais árvores, usamos a seguinte notação:

Definição 1.3.5. Dados $s \in \omega^{<\omega}$ e $n \in \omega$, denotamos por $s \frown n$ a função $t : \text{doms} + 1 \longrightarrow \omega$ dada por $t(m) = s(m)$ se $m \in \text{doms}$ e $t(\max \text{doms} + 1) = n$.

Uma técnica bastante comum em Teoria dos Conjuntos é o uso de submodelos elementares. Para uma definição formal do que é um submodelo elementar, precisaríamos apresentar diversos resultados e definições que pouco ajudariam no entendimento do que será apresentado aqui. Assim, optamos por apresentar uma ideia intuitiva de tal técnica. Para a formalização, sugerimos ao leitor ver [20].

Dada uma coleção finita de axiomas de ZFC e suas consequências, podemos tomar um modelo V (que é um conjunto) que satisfaz toda a coleção. Também temos a garantia de que, para qualquer conjunto X e qualquer cardinalidade infinita $\kappa \geq |X|$, existe um conjunto M tal que $|M| = \kappa$, $X \subset M$ e M é um **submodelo elementar** de V (Teorema de Löwenheim-Skolem, ver, por exemplo, [20]). A propriedade mais importante que é utilizada a respeito de submodelos elementares é o seguinte critério de Tarski:

Proposição 1.3.6. *Seja V um modelo e $M \subset V$, temos que M é um submodelo elementar de V se, e somente se, para toda fórmula da forma $\varphi(x)$ (possivelmente com parâmetros em M) temos que existe algum $x \in M$ satisfazendo $\varphi(x)$ se, e somente se, existe algum y em V satisfazendo $\varphi(y)$.*

Uma demonstração para o resultado anterior pode ser encontrada em [11].

Usualmente, a técnica do uso de submodelos elementares se resume a considerarmos um espaço X e um submodelo elementar “pequeno” (muitas vezes enumerável) que o contenha como elemento. Daí, usamos o fato de que o espaço X não pode estar contido (como conjunto) inteiramente em M para procurar uma fórmula que possa ser escrita em M e aplicamos o resultado anterior em busca de uma contradição.

1.4 *Forcing*

Ao se trabalhar com *forcing*, a técnica muitas vezes se resume a estudar propriedades no modelo inicial V e depois ver como elas influenciam a extensão $V[G]$. Por exemplo, para se tentar provar a consistência de que exista um espaço que satisfaça as propriedades A e B simultaneamente, um procedimento possível é começar com um espaço no modelo original que satisfaça a propriedade A e que, depois de um determinado *forcing*, satisfaça a propriedade B . É claro que o esforço terá sido em vão se o espaço, após o *forcing*, não mais satisfizer a propriedade A . Essa situação é uma das motivações da seguinte definição:

Definição 1.4.1. Sejam φ uma propriedade e P um *forcing*. Dizemos que P **preserva** φ se, para todo espaço X satisfazendo φ , $P \Vdash \text{“}\check{X} \text{ satisfaz } \varphi\text{”}$.

Sobre a definição anterior, é bom notar o seguinte. O $\check{X}$ que aparece no enunciado é o espaço topológico na extensão que tem o mesmo conjunto X como suporte no modelo original e cuja topologia é gerada pela topologia no modelo original. Note que a topologia original pode não ser uma topologia na extensão pois novas uniões podem ser adicionadas.

Uma classe importante de *forcings* é a classe dos *forcings* enumeravelmente fechados:

Definição 1.4.2. Dizemos que um *forcing* P é **enumeravelmente fechado** se para toda sequência $(p_n)_{n \in \omega}$ de elementos de P tal que $p_{n+1} \leq p_n$ para todo $n \in \omega$, existe $p \in P$ tal que $p \leq p_n$ para todo $n \in \omega$.

Uma das propriedades mais importantes sobre *forcings* enumeravelmente fechados é a de que eles não acrescentam conjuntos enumeráveis, isto é:

Proposição 1.4.3. *Seja P um forcing enumeravelmente fechado. Seja $p \in P$ e $\dot{A}$ tal que $p \Vdash \dot{A}$ é enumerável. Então existe $q \leq p$ e B no modelo original tal que $q \Vdash \dot{A} = \check{B}$.*

Para ver isso, basta notar que, dado um conjunto enumerável na extensão, podemos tomar uma condição do *forcing* decidindo cada elemento do conjunto. Pelo fato de ser enumeravelmente fechado, existe uma única condição que decide todos os elementos e, portanto, o conjunto é definível no modelo original.

Assim, suponha que começamos com um espaço X que não seja de Lindelöf. Após um *forcing* enumeravelmente fechado, tal espaço continua não sendo de Lindelöf, pois se fosse, a cobertura que testemunha que X não é de Lindelöf no modelo original passaria a ter uma subcobertura enumerável na extensão, ou seja, seria um conjunto enumerável adicionado. Assim, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.4.4. *Se P é um forcing enumeravelmente fechado, então P preserva a propriedade de não ser de Lindelöf.*

Esses resultados sobre *forcings* enumeravelmente fechados serão usados no capítulos 4 e 5. Outro *forcing* importante que utilizaremos é o de Cohen:

Definição 1.4.5. Chamamos de **forcing de Cohen** o conjunto $\omega^{<\omega}$ com a ordem dada por $s \leq t$ se $s \supset t$. Dado G um genérico para o forcing de Cohen, chamamos de **real de Cohen** a função $f : \omega \longrightarrow \omega$ dada por $f(n) = s(n)$ onde $s \in G$ (isto é de fato uma função de ω em ω pelo fato de G ser filtro genérico).

Uma das características importantes que utilizaremos do forcing de Cohen é que ele é enumerável.

1.5 Jogos topológicos

Jogos topológicos em geral nos dão uma maneira simplificada de descrever uma árvore complicada. Essa simplificação acaba por ser uma das maiores vantagens ao se descrever uma propriedade utilizando-se um jogo.

Há diversos tipos de jogos que podem ser definidos mas, no decorrer deste trabalho, utilizamos apenas os que têm a seguinte forma: dois jogadores, que chamaremos aqui de I e II , jogam uma vez em cada rodada. Às tais rodadas, atribuímos um ordinal. Assim, o movimento que o jogador I fizer na rodada ξ será denotado por $\sigma_I(\xi)$ e o movimento de II por $\sigma_{II}(\xi)$. Nos jogos que apresentamos neste trabalho, em cada rodada ξ , o jogador I não só “lembra” as suas jogadas passadas, mas como também as jogadas anteriores de II . Isto é, $\sigma_I(\xi)$ depende dos valores tomados por $\sigma_I(\eta)$ e $\sigma_{II}(\eta)$ para todo $\eta < \xi$. Já o jogador II não só lembra tudo o que o jogador I lembra, como também a jogada $\sigma_I(\xi)$ que o jogador I acabou de fazer.

Definição 1.5.1. Chamamos as funções σ_I e σ_{II} descritas acima de **estratégias** para os jogadores I e II respectivamente.

A forma como cada jogo termina pode variar: em alguns jogos, a cada rodada é feito um teste sobre todos os valores escolhidos nas rodadas anteriores e, se alguma condição for satisfeita, um dos jogadores é dito vencedor. Em outros jogos, só são feitos testes em algumas rodadas especiais. Por exemplo, em diversos jogos que utilizamos não é feito nenhum teste até serem completas todas as rodadas n para $n < \omega$, quando se é decidido o vencedor.

O que cada jogador escolhe a cada rodada também varia em cada jogo: por exemplo, o jogador I pode ter sempre que escolher um ponto de um espaço X fixado enquanto o jogador II precisa escolher uma vizinhança aberta para o ponto que acabou de ser escolhido. Vamos manter essa escolha para explicar as próximas definições. Para terminarmos de definir este jogo exemplo, diremos que na rodada

final ω , o jogador I vence se a união das vizinhanças escolhidas por II recobrirem o espaço todo.

As estratégias codificam árvores. Para ilustrar, no nosso exemplo, uma estratégia para o jogador II é uma árvore de altura ω onde um elemento de altura n é um aberto $V_{x_1, \dots, x_n}$ onde x_k é uma possível escolha para o jogador I na rodada k .

Note que fixada uma estratégia para o jogador II no nosso jogo exemplo, temos que só existe alguma possibilidade do jogador I vencer o jogo se existir um ramo na árvore descrita acima que forme uma cobertura para X . Pois daí basta o jogador I escolher os elementos que induzem tal ramo e, portanto, vencer o jogo. Ou seja, saber se uma estratégia vence sempre ou não um jogo nos dá informações sobre as árvores construídas:

Definição 1.5.2. Dado um jogo, chamamos de **estratégia vencedora** para o jogador I uma estratégia para o jogador I que, não importa qual a estratégia do jogador II , I vence a partida. A definição de uma estratégia vencedora para o jogador II é a análoga.

Voltando ao jogo exemplo, uma estratégia vencedora para o jogador II nada mais é que uma árvore (como descrito acima) sem ramos que cubram o espaço X todo. Pois um ramo que cobrisse o espaço seria uma possível jogada do jogador I para vencer esta estratégia do jogador II . Ou seja, a estratégia não seria vencedora.

Note que não é verdade que para todo jogo pelo menos um dos jogadores tem uma estratégia vencedora. Muitas vezes o que se tem é que, para qualquer estratégia de um deles, o outro possui uma estratégia que a vence. E isso simplesmente mostra que ambos não tem uma estratégia vencedora. Voltando ao nosso exemplo, saber que o jogador II não tem uma estratégia vencedora (independentemente se I tem ou não) implica que toda árvore associada a uma estratégia do jogador II tem um ramo que cobre o espaço.

Assim, a existência de uma estratégia vencedora para algum dos jogadores é uma propriedade importante para um jogo:

Definição 1.5.3. Dizemos que um jogo é **determinado** se um dos jogadores tem uma estratégia vencedora.

Capítulo 2

Propriedades discretamente reflexivas

2.1 Introdução

Problemas de reflexão são muito comuns em topologia. Muitas vezes se tenta estudar determinadas propriedades de um espaço olhando-se para uma categoria de seus subespaços (de cardinalidade menor ou com uma estrutura mais simples por exemplo). Dizemos que uma propriedade é reflexiva nesse contexto se valer a seguinte implicação: toda vez que a propriedade vale nos subespaços da tal categoria, ela vale para o espaço todo. É sob essa ótica que se apresenta a definição das propriedades discretamente reflexivas:

Definição 2.1.1. Seja φ uma propriedade topológica. Dizemos que φ é uma propriedade **discretamente reflexiva** se para qualquer espaço X , X satisfaz φ se, e somente se, para todo $D \subset X$ discreto, $\overline{D}$ satisfaz φ .

A primeira propriedade a ser mostrada discretamente reflexiva foi a compacidade, ou seja, um espaço é compacto se, e somente se, todo subespaço discreto seu tem fecho compacto. Esse resultado foi mostrado em [37]. Alguns anos depois, os autores de [1] começaram um estudo sistemático de quais propriedades são ou não discretamente reflexivas. Nesse mesmo artigo, também introduziram o conceito de uma propriedade ser discretamente reflexiva para uma categoria específica de espaços topológicos. A saber, para a categoria dos espaços compactos.

Era de se esperar que nem toda propriedade fosse discretamente reflexiva. Alguns exemplos foram dados em [1]. Alguns destes exemplos foram mostrados assumindo-se a hipótese do contínuo. Aqui apresentamos algumas construções diferentes assumindo-se a existência de uma árvore de Suslin. Como tais hipóteses são independentes entre si (ver, por exemplo, [20, p. 233, p. 265, p. 545]), temos

a independência de tais resultados a partir delas. Um dos resultados cuja consistência apresentamos é o de que a metrizabilidade não é discretamente reflexiva para espaços compactos. Esta pergunta ainda está em aberto em ZFC.

Além dos exemplos assumindo-se a existência de uma árvore de Suslin, mostraremos alguns exemplos a partir de um L -espaço. Como é possível se obter tal espaço em ZFC ([25]), garantimos tais resultados sem qualquer hipótese adicional. Um dos resultados que obtivemos é que “ser σ -compacto não é discretamente reflexiva”, respondendo uma pergunta de [1].

Apesar da compacidade ter sido a primeira propriedade a ser mostrada discretamente reflexiva, ainda não se tem uma resposta definitiva sobre a propriedade de ser um espaço de Lindelöf ser discretamente reflexiva. Ver o capítulo final, com algumas questões sobre este tema.

Alguns dos resultados deste capítulo também podem ser encontrados em [5].

2.2 Árvores

Boa parte dos exemplos apresentados aqui são construídos a partir de árvores. Neles usamos algumas topologias que não são as mais usuais ao se trabalhar com árvores. Tais topologias foram apresentadas em [27]. As construções feitas aqui também serão úteis no capítulo 3.

Definimos agora as duas topologias que utilizamos com árvores:

Definição 2.2.1. Dada uma árvore T e $t \in T$, definimos $V_t = \{s \in T : t \leq s\}$ e $W_F = \bigcup_{s \in F} V_s$, onde $F \subset T$. Chamamos de **cunha fina** (ou **CF**) a topologia sobre T tal que, para cada $t \in T$, uma base local para t é

$$\{V_t \setminus W_F : F \subset \text{suc}(t) \text{ finito}\}.$$

A **cunha larga** (ou **CL**) é a topologia sobre T tal que, para cada $t \in T$, uma base local para t é

$$\{V_t \setminus W_F : F \subset \text{suc}(t) \text{ finito}\},$$

se $l(t)$ é um ordinal sucessor ou

$$\{V_s \setminus W_F : s < t, l(s) \text{ é um ordinal sucessor e } F \subset \text{suc}(t) \text{ é finito}\}$$

caso contrário.

Note que CF tem mais abertos que CL e que a principal diferença entre estas duas topologias é que a primeira deixa os pontos em níveis limite isolados dos anteriores. Já na segunda, estes são limite dos pontos abaixo.

Pelo resto do trabalho, assumimos sobre todas as árvores que lidarmos as seguintes condições:

- se $t, s \in T$ são tais que $l(t) = l(s)$ é um ordinal limite e $\{q \in T : q < t\} = \{q \in T : q < s\}$, então $t = s$ (isto é, a árvore não bifurca em níveis limite);
- se $t \in T$, então $\text{suc}(t)$ é vazio ou é infinito e enumerável;
- se $t \in \mathcal{F}(T)$, então $l(t)$ é um ordinal limite.

Agora apresentamos um jeito simples de “completar” uma árvore. Depois iremos mostrar que tal processo gera espaços compactos.

Definição 2.2.2. Seja T uma árvore sem folhas. Denotamos por sT o conjunto $T \cup \{a_r : r \text{ é um ramo de } T\}$, onde cada $a_r \notin T$. Estendemos a ordem de T para sT definindo $a_r > t$ se, e somente se, $t \in r$.

2.3 Propriedades básicas

Nesta seção apresentamos algumas propriedades de árvores munidas com as topologias apresentadas anteriormente. Em particular, apresentamos algumas caracterizações para os subespaços discretos de tais árvores.

Proposição 2.3.1. *Seja T uma árvore com a topologia CF ou CL. Então T tem as seguintes propriedades:*

- (i) se $h(T) = \omega_1$, então $\chi(T) = \omega$;
- (ii) se T é cheia e $C \subset T$ é uma cadeia não vazia, então $\sup C \in T$;
- (iii) T é de Hausdorff;
- (iv) T é zero-dimensional.

Demonstração. Note que (i) e (ii) são imediatas.

(iii) Vamos provar o caso da topologia CL. O caso da topologia CF é análogo. Sejam $p, q \in T$ distintos. Temos três casos. Primeiro, suponha que $l(p)$ e $l(q)$ sejam ordinais sucessores. Então podemos escolher F e G finitos tais que $(V_p \setminus$

$W_F) \cap (V_q \setminus W_G) = \emptyset$ (note que isso é suficiente para o que desejamos). Para isso, basta escolher $F = \{s\}$ se existe um $s \in \text{suc}(p)$ tal que $p < s \leq q$ ou $F = \emptyset$ caso contrário. Escolhemos G de maneira análoga.

Se $l(p)$ é um ordinal sucessor e $l(q)$ não, então temos dois casos. Se $s < p$, basta proceder como no caso anterior. Caso contrário, escolhemos $s < q$ tal que $s \not\leq p$. Então $V_s \cap V_p = \emptyset$ e $q \in V_s$.

Finalmente, suponha que $l(p)$ e $l(q)$ sejam ambos ordinais limites. Se eles forem comparáveis, procedemos como no primeiro caso. Se não, sejam s e t tais que $s < p$, $t < q$ e s, t sejam incomparáveis. Então $p \in V_s$, $t \in V_q$ e $V_s \cap V_t = \emptyset$.

(iv) Vamos provar o caso da topologia CL. Novamente, o caso da topologia CF é análogo. Note que é suficiente mostrar que $V_p \setminus W_F$ é um aberto fechado sempre que $l(p)$ seja um ordinal sucessor e F um subconjunto finito de T tal que todo elemento $q \in F$, é tal que $l(q)$ é um ordinal sucessor. Para isso, é suficiente mostrar que V_p é um aberto fechado sempre que $l(p)$ seja um ordinal sucessor. Seja $q \in T$ tal que $q \notin V_p$. Então $p \not\leq q$. Se $q < p$, note que $V_p \cap (V_t \setminus W_F) = \emptyset$ onde $F = \{s\}$, $s \in \text{suc}(q)$, $s \leq p$ e $t \leq q$ é tal que $l(t)$ é um ordinal sucessor. No último caso, se p e q forem incomparáveis, então $V_s \cap V_p = \emptyset$ onde $s \leq q$ é tal que $l(s)$ é um ordinal sucessor e $s \not\leq p$. $\square$

Os próximos resultados relacionam os subespaços discretos de uma árvore com suas anticadeias.

Proposição 2.3.2. *Sejam T uma árvore com a topologia CF e $D \subset T \setminus \mathcal{F}(T)$ um subespaço discreto. Então existe uma anticadeia $A \subset T \setminus \mathcal{F}(T)$ tal que $|A| = |D|$. Além disso, temos o mesmo resultado se considerarmos a topologia CL.*

Demonstração. Começamos com o caso da topologia CF. Como D é discreto, para qualquer $d \in D$, existe apenas uma quantidade finita de t 's em $\text{suc}(d)$ tais que existe $d' \in D$ com $t \leq d'$. Assim, existe $a_d \in \text{suc}(d)$ tal que $a_d \not\leq d'$ para qualquer $d' \in D$. Vamos mostrar que $A = \{a_d : d \in D\}$ é uma anticadeia. Suponha que não. Então existem $a_d, a_e \in A$ tais que $a_d < a_e$. Assim $d < a_d < a_e$, e, portanto, e é comparável com d . Não é possível que $e \leq d$ (pois $a_e \in \text{suc}(e)$). Logo, $a_d \leq e < a_e$, o que contradiz a escolha de a_d .

O mesmo resultado vale para a topologia CL já que ela tem menos abertos que a topologia CF. $\square$

Proposição 2.3.3. *Seja T uma árvore com a topologia CL. Se $D \subset \mathcal{F}(T)$ é um subespaço discreto, então existe uma anticadeia A em $T \setminus \mathcal{F}(T)$ tal que $|D| = |A|$.*

Demonstração. Para todo $d \in D$, existe $e \in T$ tal que $l(e)$ é um ordinal sucessor e $V_e \cap D = \{d\}$. Vamos mostrar que o conjunto de tais e 's é uma anticadeia (note que tal conjunto está contido em $T \setminus \mathcal{F}(T)$). É suficiente mostrar que, se $d \neq d'$, $e \neq e'$, $V_e \cap D = \{d\}$ e $V_{e'} \cap D = \{d'\}$, então $V_e \cap V_{e'} = \emptyset$. Suponha que isso não seja verdade. Então existe $a \in T$ tal que $e, e' \leq a$ e, portanto, e e e' são comparáveis. Sem perda de generalidade, suponha que $e < e'$. Assim $V_e \supset V_{e'}$ e, portanto, $d' \in V_e$ o que é uma contradição. $\square$

Terminamos essa seção mostrando que, ao se completar uma árvore, obtém-se um espaço compacto:

Proposição 2.3.4. *Seja T uma árvore cheia com a topologia CL. Então T é compacta.*

Demonstração. Seja $X \subset T$ um conjunto infinito. Seja $(t_\xi)_{\xi < \kappa}$ maximal satisfazendo $|V_{t_\xi} \cap X| = |X|$ e $t_\xi < t_\eta$ se $\xi < \eta$. Seja $t = \sup\{t_\xi : \xi < \kappa\}$. Vamos mostrar que t é um ponto de acumulação completo para X . Considere primeiramente o caso em que $l(t)$ é um ordinal sucessor. Note que, nesse caso, $t = t_\alpha$, $\alpha + 1 = \kappa$ e t não pode ser uma folha. Assim segue que, para cada $s \in \text{suc}(t)$, $V_s \cap X$ tem cardinalidade menor que a cardinalidade de X . Assim, $|(V_t \setminus W_F) \cap X| = |X|$ para cada conjunto finito $F \subset \text{suc}(t)$.

Agora o segundo caso: $l(t)$ sendo um ordinal limite. Seja $s < t$ tal que $l(s)$ seja um ordinal sucessor. Então existe $t_\xi > s$, assim $V_s \supset V_{t_\xi}$. Logo, $|X| = |V_s \cap X| = |(V_s \setminus W_F) \cap X|$ para todo subconjunto finito $F \subset \text{suc}(t)$, já que $|V_a \cap X| < |X|$ para todo $a \in \text{suc}(t)$. $\square$

2.4 Propriedades discretamente reflexivas

A partir de agora, assumiremos todas as árvores com a topologia CL a menos de menção contrária. Vimos que o tamanho de anticadeias está relacionado com o tamanho de subespaços discretos. Nos exemplos que construiremos, estamos principalmente interessados em criar espaços “grandes” com subespaços discretos “pequenos”. Assim, é natural considerarmos árvores de Suslin:

Definição 2.4.1. Uma **árvore de Suslin** é uma árvore com altura ω_1 , sem ramos de comprimento ω_1 e sem anticadeias não enumeráveis. Vamos também supor que, se T é uma árvore de Suslin, $t \in T$ é um elemento qualquer e ξ é um ordinal enumerável tal que $l(t) < \xi$, então existe $s > t$ tal que $l(s) = \xi$ (podemos fazer isso sem perda de generalidade, veja, por exemplo, [20, página 107]).

A próxima proposição é o resultado chave para quase todos os exemplos aqui apresentados. Na sua demonstração também aparece um argumento que será repetido diversas vezes:

Proposição 2.4.2. *Se T é uma árvore de Suslin com a topologia CL ou CF e $D \subset T$ é um subespaço discreto de T , então $\overline{D}$ é enumerável.*

Demonstração. Por **2.3.2** e **2.3.3**, temos que D é enumerável. Assim, existe $\xi < \omega_1$ tal que, para qualquer $d \in D$, $l(d) < \xi$. Dado $a \in T$, com $l(a) \geq \xi + 1$, vamos mostrar que $a \notin \overline{D}$. De fato, se $l(a)$ é um ordinal sucessor, a vizinhança V_a testemunha a separação. Se $l(a)$ é um ordinal limite, é suficiente escolher V_t com $t < a$ e $l(t) = \xi + 1$.

Assim, existe $\xi < \omega_1$ tal que $\overline{D} \subset \{a \in T : l(a) < \xi\}$. Já que ξ é enumerável e cada $L(\xi)$ é enumerável (pois é uma anticadeia), o conjunto $\overline{D}$ é enumerável. $\square$

Vimos que uma árvore cheia é compacta. No caso de uma árvore de Suslin, mesmo ela não sendo cheia, ainda conseguimos o seguinte:

Corolário 2.4.3. *Se T é uma árvore de Suslin com a topologia CF ou CL, então T é de Lindelöf.*

Demonstração. Como o fecho de todo discreto é enumerável, podemos aplicar o lema de Šapirovski (**1.2.4**). $\square$

Além disso, podemos provar que nesse caso todos os subespaços compactos são limitados. Antes, precisamos de um lema:

Lema 2.4.4. *Seja T uma árvore de Suslin e seja $X \subset T$ com $|X| = \omega_1$. Então, para todo $t \in T$ com $|V_t \cap X| = \omega_1$, existem $p, q \geq t$ tais que $p \perp q$ (isto é, p e q são incomparáveis) e $|V_p \cap X| = |V_q \cap X| = \omega_1$.*

Demonstração. Seja $t \in T$ tal que $|V_t \cap X| = \omega_1$. Suponha que não valha o resultado. Seja r uma cadeia maximal em V_t tal que para todo $p \in r$ temos $|V_p \cap X| = \omega_1$. Note que r é enumerável e não possui um máximo. Seja $\xi = \sup\{l(p) : p \in r\}$. Então, para qualquer $p \in V_t \setminus r$ temos $|V_p \cap X| < \omega_1$ (pela maximalidade de r e por nossas hipóteses). Seja $A = \{q \in V_t : l(q) \leq \xi \text{ e } q \notin r\}$. Note que A é enumerável. Vamos mostrar que:

$$V_t \cap X \subset r \cup \bigcup_{q \in A} V_q \cap X. \quad (2.1)$$

Note que, já que o lado direito da expressão é enumerável, isso nos dá uma contradição. Seja $x \in V_t \cap X$ e suponha $x \notin r$. Se $x \geq p$ para todo $p \in r$, então existe $\sup r$ (e $\sup r \notin r$). Também é verdade que $l(\sup r) = \xi$ e que $\sup r \leq x$. Assim, $x \in r \cup \bigcup_{q \in A} V_q \cap X$. Se $x \perp p$ ou $x \leq p$ para algum $p \in r$, temos, por causa de $x \notin r$, que existe $q \notin r$ tal que $l(q) \leq \xi$ e $q \leq x$. Assim, temos o resultado. $\square$

Proposição 2.4.5. *Seja T uma árvore de Suslin. Se $C \subset T$ é compacto, então C é enumerável.*

Demonstração. Suponha que não e, portanto, $|C| = \omega_1$. Vamos construir por indução sobre $n \geq 1$, $f_n : 2^n \rightarrow T$ tal que:

- (i) se $s \in 2^n$ então $f_{n+1}(s \smallfrown 0), f_{n+1}(s \smallfrown 1) > f_n(s)$ são incomparáveis;
- (ii) $|V_{f_n(s)} \cap C| = \omega_1$ para qualquer $s \in 2^n$;
- (iii) $l(f_n(s))$ é um ordinal limite para qualquer $s \in 2^n$.

Seja $f_0(\emptyset) = \emptyset$. Suponha f_n já definido e vamos definir f_{n+1} . Fixe $s \in 2^{n+1}$. Já que $|V_{f_n(s)} \cap C| = \omega_1$ e T não possui ramos de comprimento ω_1 , existem $c, d \in V_{f_n(s)} \cap C$ com $c \perp d$ e $|V_c \cap C| = |V_d \cap C| = \omega_1$ (pelo lema anterior). Podemos supor que $l(c) = l(d)$ seja um ordinal sucessor. Definimos $f_{n+1}(s \smallfrown 0) = c$ e $f_{n+1}(s \smallfrown 1) = d$.

Agora defina $f : 2^\omega \rightarrow C$ tal que, se $s \in 2^\omega$, então $f(s) = c$ para algum $c \in \bigcap_{n \geq 1} (V_{f_n(s \restriction n)} \cap C)$. Note que existe tal c porque a família tem a propriedade da intersecção finita e todos os seus elementos são fechados no compacto C . Note também que f é injetora e que $\{f(s) : s \in 2^\omega\}$ é uma anticadeia, o que contraria o fato de T não ter anticadeias não enumeráveis. $\square$

Assim, por um simples argumento de cardinalidade, obtemos:

Corolário 2.4.6. *Se T é um árvore de Suslin, então todo $D \subset T$ discreto é tal que $\overline{D}$ é σ -compacto (na verdade, é enumerável) mas T não é σ -compacto.*

Um resultado análogo, mas assumindo-se CH no lugar da existência de uma árvore de Suslin, foi mostrado em [1]. Assim, temos que o fato da propriedade “ser σ -compacto” não ser discretamente reflexiva é independente de CH. Na verdade, na próxima seção vamos mostrar que ela não é discretamente reflexiva em ZFC. Apresentamos tal resultado aqui porque algumas ideias em sua demonstração serão usadas em diversas construções mais complicadas no decorrer deste trabalho.

Vamos usar agora algumas ideias do exemplo anterior para criar um novo, assumindo a existência de um cardinal fortemente inacessível¹. Em ([12]), Alan Dow já havia construído um exemplo sob as mesmas hipóteses, mas a construção apresentada aqui é mais direta e simples.

¹dizemos que um cardinal κ é **fortemente inacessível** se κ é regular e, para todo $\alpha < \kappa$, $2^\alpha < \kappa$.

Proposição 2.4.7. *Seja T uma árvore κ -Suslin² com κ um cardinal fortemente inacessível. Então $|sT| = \kappa$ e, para cada discreto $D \subset sT$, $|\overline{D}| < \kappa$.*

Demonstração. Note que $\mathcal{F}(sT) = \bigcup_{\xi < \kappa} A_\xi$, onde $A_\xi = \{t \in \mathcal{F}(sT) : \text{existe } (t_\eta)_{\eta < \xi} \subset \downarrow L_\xi(T) \text{ tal que } t = \sup t_\eta\}$. Já que $|L_\xi(T)| < \kappa$ e $2^{|L_\xi(T)|} < \kappa$, temos que $|A_\xi| < \kappa$. Assim, $|\mathcal{F}(sT)| \leq \kappa$ e $|sT| \leq \kappa$.

Seja $D \subset sT$ um subespaço discreto. Temos que $|D| < \kappa$ e, portanto, $\overline{D} \subset \downarrow L_\xi(sT)$ para algum $\xi < \kappa$. Logo $|\overline{D}| < \kappa$ (pois, já que $|\downarrow L_\xi(T)| < \kappa$, temos $|\downarrow L_\xi(sT)| \leq 2^{|\downarrow L_\xi(T)|} < \kappa$). $\square$

Corolário 2.4.8. *Se existem um cardinal fortemente inacessível κ e uma árvore κ -Suslin, então existe um espaço compacto X tal que todo subespaço discreto $D \subset X$ é tal que $|\overline{D}| < |X|$.*

Não se tem ainda um exemplo como o acima em ZFC ou mesmo sem se assumir a existência de um cardinal fortemente inacessível.

Em [1] foi mostrado que se assumimos CH, então existe um espaço compacto X tal que todo discreto $D \subset X$ é tal que $\overline{D}$ é metrizável mas X não é metrizável. No mesmo artigo, foi mostrado que se assumimos $\text{MA} + \neg \text{CH}$ então tal exemplo não existe: é verdade que num compacto X , se todo discreto $D \subset X$ é tal que $\overline{D}$ é metrizável, então o próprio X é metrizável.

Aqui vamos mostrar que se assumimos a existência de uma árvore de Suslin, então temos o mesmo resultado que se assumimos CH. Para isso, precisamos do seguinte resultado, que poder ser encontrado em [15, Teorema 4.2.8]:

Teorema 2.4.9. *Um espaço compacto T_2 é metrizável se, e somente se, tem uma base enumerável.*

Proposição 2.4.10. *Seja T uma árvore de Suslin. Então sT é um compacto não metrizável tal que, para qualquer $D \subset sT$, $\overline{D}$ é metrizável.*

Demonstração. É fácil ver que sT não é separável e, portanto, não é metrizável (pelo resultado anterior). Dado $D \subset sT$ um subespaço discreto, como D é enumerável, temos que $\overline{D} \subset L_\xi(sT)$ para algum $\xi < \omega_1$. Note que $L_\xi(sT) \cap \{t \in sT : l(t) \text{ é um ordinal sucessor}\}$ é um conjunto enumerável. Assim, como na nossa definição para os abertos básicos de sT são usados apenas subconjuntos finitos de $\{t \in sT : l(t) \text{ é um ordinal sucessor}\}$, existe apenas uma quantidade enumerável de abertos básicos para $L_\xi(sT)$. Assim, $\overline{D}$ tem base enumerável e, portanto, é metrizável. $\square$

²Uma árvore κ -Suslin é uma árvore de altura κ e sem ramos nem anticadeias de cardinalidade κ .

2.5 *L*-espaços e propriedades discretamente reflexivas

Nesta seção, vamos mostrar em ZFC que duas propriedades não são discretamente reflexivas. Mais especificamente, mostraremos que as propriedades da cardinalidade do espaço e de ser σ -compacto não são discretamente reflexivas. O exemplo apresentado é Tychonoff e isso responde a duas perguntas em [1]. O exemplo usado é um *L*-espaço separado à esquerda.

Definição 2.5.1. Um espaço regular é dito um *L*-espaço se é hereditariamente de Lindelöf e não separável.

Definição 2.5.2. Um espaço X é dito **separado à esquerda** se existe uma boa ordem $\{x_\xi : \xi < \kappa\} = X$ tal que, para todo $\eta < \kappa$, o conjunto $\{x_\xi : \xi < \eta\}$ fechado.

O problema da existência de um *L*-espaço em ZFC ficou em aberto por muitos anos. Mesmo hoje, após a resolução em [25], basicamente temos um único exemplo. Assim, seja M o espaço de Tychonoff construído por Justin Moore em [25]. É sabido que, se X é um *L*-espaço, então ele possui um subespaço separado à esquerda de ordem tipo ω_1 (veja, por exemplo, [31]). Claramente, tal subespaço precisa ser também um *L*-espaço. Assim, existe um *L*-espaço separado à esquerda de ordem tipo ω_1 em ZFC. Tal espaço é de Tychonoff, já que é um subespaço de M .

Agora vamos provar que existe um espaço não enumerável de Tychonoff tal que o fecho de todo subespaço discreto é enumerável. Vamos também provar que σ -compacidade não é discretamente reflexiva para espaços de Tychonoff.

Proposição 2.5.3. *Seja X um *L*-espaço de Tychonoff, separado à esquerda com ordem tipo ω_1 . Então todo subespaço discreto $D \subset X$ tem fecho enumerável.*

Demonstração. Como X é hereditariamente de Lindelöf, todo discreto $D \subset X$ é enumerável. Como X é separado à esquerda e tem ordem tipo ω_1 , todo subconjunto enumerável tem fecho enumerável. $\square$

Corolário 2.5.4. *A propriedade de ser enumerável não é discretamente reflexiva para espaços de Tychonoff.*

Proposição 2.5.5. *Seja X um L -espaço de Tychonoff, separado à esquerda com ordem tipo ω_1 . Então, dado $D \subset X$ discreto, $\overline{D}$ é σ -compacto mas X não é σ -compacto.*

Demonstração. Primeiramente, note que pela proposição **2.5.3**, todo discreto $D \subset X$ satisfaz $|\overline{D}| = \omega$. Assim $\overline{D}$ é σ -compacto trivialmente.

Vamos mostrar que, se $C \subset X$ é compacto, então C é enumerável. Note que isso é suficiente para o resultado já que $|X| = \omega_1$. Seja $C \subset X$ um compacto não enumerável. Como X é separado à esquerda, C não pode ser separável. Assim, C é um L -espaço compacto. Mas, por [17], todo compacto separado à esquerda é disperso e, portanto, o conjunto dos pontos isolados de C é denso em C . Como C não é separável, C teria ω_1 pontos isolados, contrariando o fato de ser hereditariamente de Lindelöf. $\square$

Corolário 2.5.6. *A propriedade de ser σ -compacto não é discretamente reflexiva para espaços de Tychonoff.*

Capítulo 3

O espaço $X(T)$

3.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos uma construção de um espaço a partir de uma árvore T dada. Chamaremos tal espaço de $X(T)$. Na primeira seção, apresentamos algumas propriedades de $X(T)$ que podem ser demonstradas sem muito se assumir sobre T . Depois, tomamos T sendo uma árvore de Suslin (portanto, uma hipótese a mais que ZFC) e, a partir de $X(T)$, obtemos um exemplo relacionado às propriedades de radialidade, pseudo-radialidade e de ser discretamente gerado. Tais resultados já eram conhecidos, mas assumindo-se CH em vez da existência de uma árvore de Suslin. Logo, obtemos novamente a independência deles a partir de CH.

Na seção seguinte, começamos com T sendo uma árvore de Aronszajn e depois mostramos que $X(T)$ é exemplo para algumas propriedades relativas a ω -*boundedness*. Como tal árvore existe sob ZFC, isso responde em definitivo algumas perguntas de Peter Nyikos ([26] e [28]) para as quais ainda não se tinha nem exemplos consistentes.

A construção de $X(T)$ se baseia parcialmente numa construção feita em [9] e os resultados apresentados neste capítulo também podem ser encontrados em [5].

3.2 A construção

Seja T uma árvore com a topologia CL. Para definir o espaço $X(T)$, primeiro considere o espaço $\omega \times sT$ com a topologia produto. Dados $X \subset \omega \times sT$ e $n \in \omega$ denotamos por $X|n$ o conjunto $\{a \in sT : (n, a) \in X\}$ e por $X \restriction n$ o conjunto $X \cap (\{n\} \times sT)$.

Lema 3.2.1. *Se T é uma árvore de altura ω_1 com a topologia CL, então existe uma família $(F_\xi)_{\xi < \omega_1}$ de abertos fechados de $\omega \times sT$ tal que, para qualquer ordinal ξ com $0 < \xi < \omega_1$, temos:*

- (i) $F_0 = \omega \times sT$;
- (ii) $F_\xi|n \in \{V_t, \emptyset\}$ com $l(t) = \xi + 1$;
- (iii) $F_\xi|n = \emptyset$ para, no máximo, finitos n 's;
- (iv) para todo $\xi < \eta < \omega_1$, o conjunto $\{n \in \omega : F_\eta|n \not\subset F_\xi|n\}$ é finito.

Demonstração. Primeiramente, note que a propriedade (ii) implica que F_ξ é um aberto fechado de $\omega \times sT$. Seja $t \in sT$ tal que $l(t) = 2$. Defina F_1 tal que $F_1|n = V_t$ para todo $n \in \omega$. Agora assuma que temos definidos F_η para todo $\eta < \xi$. Seja $(H_n)_{n \in \omega}$ uma enumeração para $\{F_\eta : \eta < \xi\}$. Seja $n(0)$ tal que, para cada $m \geq n(0)$, $H_0|m \neq \emptyset$. Defina por indução $(n(k))_{k \in \omega}$ tal que $n(k) < n(j) \in \omega$ se $k < j$ e

- (a) para todo $m \geq n(k)$, $H_k|m \neq \emptyset$;
- (b) existe $j \leq k$ tal que, para todo $m \geq n(k)$, $H_j|m \subset H_n|m$ para todo $n \leq k$.

Para ver que podemos construir tais $n(k)$'s, é suficiente notar que temos (iii) para os H_n 's e, portanto, obtemos (a), e que temos (iv) para os primeiros k H_i 's. Assim, é suficiente escolher como H_j o F_ξ com o maior índice possível entre os primeiros k H_i 's.

Agora vamos definir F_ξ . Se $n < n(0)$, definimos $F_\xi|n = \emptyset$. Se $n(k) \leq n < n(k+1)$, tomamos $F_\xi|n = V_t$ onde $l(t) = \xi + 1$ e $t \in H_j|n$ (aqui, H_j é o mesmo que em (b)). Note que podemos tomar tal t pela nossa hipótese de indução sobre H_j . $\square$

Agora podemos de fato construir $X(T)$. Considere o seguinte espaço:

$$X(T) = (\omega \times sT) \dot{\cup} (\omega_1 \setminus \{0\})$$

com a topologia gerada por:

- (i) $\omega \times sT$ é aberto;
- (ii) se $0 < \xi < \omega_1$, então uma base local para ξ é

$$\{[\eta, \xi] \cup \bigcup_{k \geq n} ((F_\eta \setminus F_\xi) \upharpoonright k) : \eta < \xi, n \in \omega\}.$$

Note que isso realmente é uma base já que temos a propriedade (iv) do Lema **3.2.1**.

A ideia nessa construção é dividir $\omega \times sT$ em pedaços cada vez mais altos nas árvores e fazer com que cada pedaço acumule nos pontos de ω_1 . Isso torna o espaço localmente compacto (vamos mostrar depois que é possível acrescentar apenas um ponto e tornar o espaço compacto).

Proposição 3.2.2. *Se T é uma ω_1 -árvore sem ramos de comprimento ω_1 , então $X(T)$:*

- (i) *satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade;*
- (ii) *é de Hausdorff;*
- (iii) *é zero-dimensional;*
- (iv) *é tal que $\overline{\omega \times sT} = X(T)$.*

Demonstração. (i) Imediato.

(ii) Sejam $x, y \in X(T)$ distintos. Temos três casos. Se $x, y \in \omega \times sT$, segue do fato de sT ser de Hausdorff. Se $x = \xi < \omega_1$ e $y = (n, t) \in \omega \times sT$, considere $\{n\} \times U$, onde U é uma vizinhança de t em sT e $]\eta, \xi[\cup \bigcup_{k \geq n+1} ((F_\eta \setminus F_\xi) \upharpoonright k)$ para algum $\eta < \xi$. Se $x < y < \omega_1$, simplesmente considere $]\eta, x[\cup \bigcup_{k \geq n} ((F_\eta \setminus F_x) \upharpoonright k)$, para algum $\eta < x$, e $]\eta, y[\cup \bigcup_{k \geq n} ((F_\eta \setminus F_y) \upharpoonright k)$ como vizinhanças para x e y respectivamente.

(iii) Note que todo $F_\eta \setminus F_\xi$, para $\eta < \xi$, é um aberto fechado e, portanto, $(F_\eta \setminus F_\xi) \upharpoonright n$ também é para todo $n < \omega$.

(iv) Imediato. □

3.3 Espaços discretamente gerados e pseudo-radialidade

Nesta seção vamos construir um exemplo de espaço compacto e pseudo-radial mas que não é discretamente gerado. Outros exemplos de tais espaços podem ser encontrados em [1] e [9], ambos assumindo-se CH. A justificativa para se procurar tais espaços é que, para espaços regulares, ser radial implica ser discretamente gerado e ser pseudo-radial implica ser fracamente discretamente gerado (ver [1]).

Aqui vamos apresentar um exemplo assumindo a existência de uma árvore de Suslin. Ainda é uma pergunta em aberto se um exemplo assim pode ser construído

assumindo-se apenas ZFC. No nosso exemplo, usaremos a construção de $X(T)$ com T sendo uma árvore de Suslin.

Começamos com algumas definições básicas. Os conceitos de radial e de discretamente gerado são tentativas de generalizar o conceito de um espaço de Fréchet, isto é, um espaço satisfazendo que se um ponto está no fecho de um conjunto, então existe uma sequência em tal conjunto que converge para ele. No caso de um espaço radial e de um discretamente gerado, trocamos a sequência convergente por uma sequência transfinita convergente e por estar no fecho de um discreto respectivamente:

Definição 3.3.1. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é **discretamente gerado** se, dados $A \subset X$ e $x \in \overline{A}$ existe um discreto $D \subset A$ tal que $x \in \overline{D}$. Dizemos que X é **radial** se, para quaisquer $A \subset X$ e $x \in \overline{A} \setminus A$, existe uma sequência transfinita em A que convirja para x . Dizemos que X é **pseudo-radial** se, para todo $A \subset X$ não fechado, existe $x \in \overline{A} \setminus A$ para o qual existe uma sequência transfinita em A que converge para x .

Note que o conceito de um espaço pseudo-radial é o análogo ao de um espaço sequencial.

Proposição 3.3.2. Se T é uma árvore de Suslin, então sT é uma árvore cheia com altura ω_1 , sem ramos de comprimento ω_1 e sem discretos não enumeráveis.

Demonstração. Note que sT é cheia e que todo ramo de sT é um ramo de T com apenas um elemento a mais. Assim, sT não tem ramos não enumeráveis. Como $T \subset sT \setminus \mathcal{F}(sT)$, temos pelas proposições 2.3.2 e 2.3.3 que sT não tem discretos não enumeráveis. $\square$

O próximo resultado pode ser encontrado em [1]:

Lema 3.3.3. Seja X um compacto Hausdorff. Se para todo discreto $D \subset X$, $\overline{D}$ é pseudo-radial, então X é pseudo-radial.

Para conseguirmos um espaço não discretamente gerado, precisamos de um ponto no fecho de um conjunto mas que não esteja no fecho de nenhum subconjunto discreto do conjunto. Ou seja, precisamos de um ponto remoto:

Definição 3.3.4. Seja X um espaço topológico e $A \subset X$. Dizemos que $x \in \overline{A} \setminus A$ é um **ponto remoto** para A se, para qualquer discreto $D \subset A$, temos $x \notin \overline{D}$.

Vamos agora à construção do exemplo que, basicamente, é $X(T)$ com a adição de um ponto para que fique compacto:

Teorema 3.3.5. *Se existe uma árvore de Suslin, então existe um espaço X tal que X é compacto, Hausdorff, zero-dimensional, pseudo-radial, mas que não é discretamente gerado.*

Demonstração. Seja T uma árvore de Suslin. Considere $X = X(T) \dot{\cup} \{\omega_1\}$. Definimos sobre X a topologia em que $X(T)$ seja um subespaço aberto e que uma base local para ω_1 seja a família

$$\{[\xi, \omega_1] \cup \bigcup_{k \geq n} F_\xi \upharpoonright k : \xi < \omega_1, n \in \omega\}$$

Vamos agora mostrar que X tem as propriedades desejadas:

X é Hausdorff e zero-dimensional: Seja $p \in \omega \times sT$. Então existe $n \in \omega$ tal que $p = (n, t)$ para algum $t \in sT$. Note que $n \times sT$ e $[\xi, \omega_1] \cup \bigcup_{k \geq n+1} F_\xi \upharpoonright k$ são vizinhanças disjuntas para p e ω_1 respectivamente. Seja $0 < \xi < \omega_1$. Note que $\{[\eta, \xi] \cup \bigcup_{k \geq n} ((F_\eta \setminus F_\xi) \upharpoonright k)\}$ e $[\xi, \omega_1] \cup \bigcup_{k \geq n} F_\xi \upharpoonright k$ são vizinhanças disjuntas para ξ e ω_1 respectivamente. Por isso e pela proposição 3.2.2 temos o resultado.

ω_1 é um ponto remoto para $\omega \times sT$: Seja $D \subset \omega \times sT$ um subespaço discreto. Assim, pela proposição 3.3.2, $D|n$ é enumerável para todo $n \in \omega$ e, portanto, D é enumerável. Seja $\xi < \omega_1$ tal que, para todo $a \in D \upharpoonright n$ para algum n , $l(a) < \xi$. Note que $F_\xi \cap D = \emptyset$.

X não é discretamente gerado: Isso segue imediatamente do fato que $\omega_1 \in \overline{\omega \times sT}$ e de que ω_1 é um ponto remoto para $\omega \times sT$.

X é compacto: Seja $Y \subset X$. Vamos mostrar que Y tem um ponto de acumulação completo em X . Se $|Y \cap (\omega_1 + 1)| = |Y|$, terminamos pois $\omega_1 + 1$ é compacto. Assim, podemos assumir que $Y \subset X$. Por contradição, suponha que Y não tenha ponto de acumulação completo em $\omega \times sT$. Assim, temos que $|Y \upharpoonright n| < |Y|$ para todo $n \in \omega$ (já que $(\omega \times sT) \upharpoonright n$ é compacto). Suponha também que ω_1 não é um ponto de acumulação completo de Y . Assim, existe F_ξ tal que $|F_\xi \cap Y| < |Y|$. Seja $\xi < \omega_1$ o menor com tal propriedade. Note que $\xi > 0$ por (i) do lema 3.2.1 e que $|(F_\eta \setminus F_\xi) \cap Y| = |Y|$ para todo $\eta < \xi$. Assim, ξ é um ponto de acumulação de Y .

X é pseudo-radial: Pela proposição 3.3.3, é suficiente mostrarmos que, se $D \subset X$ é discreto, então $\overline{D}$ é pseudo-radial. Sejam $D \subset X$ um subespaço discreto e $E \subset \overline{D}$ um subconjunto não fechado. Seja $x \in \overline{E} \setminus E$. Note que, se $x \neq \omega_1$ então $\chi(x, X) = \omega$. Assim, existe uma sequência em E que converge para

x . Se $x = \omega_1$, então temos que $\overline{E \cap X} \subset \overline{\overline{D} \cap X}$ e, como ω_1 é um ponto remoto para X , temos $x \notin \overline{E \cap X}$. Assim, $x \in \overline{E \cap \omega_1}$ e, por $\{\xi : \xi < \omega_1\}$ ser radial, temos o resultado.

□

3.4 ω -boundedness e ω -boundedness forte

Nesta seção vamos usar a construção de $X(T)$ mas desta vez começando com uma árvore de Aronszajn. Isto vai gerar um espaço de caráter enumerável que é ω -bounded mas não é ω -bounded forte, respondendo uma questão de Nyikos em [26] e [28]. Como uma árvore de Aronszajn existe em ZFC, temos tal resultado sem qualquer hipótese adicional (ver, por exemplo, [20, p. 109]).

Definição 3.4.1. Dada uma árvore T , dizemos que ela é uma **árvore de Aronszajn** se ela tem altura ω_1 , não tem ramos de comprimento ω_1 e, para todo ξ , L_ξ é enumerável.

Definição 3.4.2. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é **ω -bounded** se, para todo $Y \subset X$ enumerável, $\overline{Y}$ é compacto. Dizemos que X é **ω -bounded forte** se, para todo $Y \subset X$ σ -compacto, $\overline{Y}$ é compacto.

Teorema 3.4.3. *Existe um espaço de caráter enumerável que é ω -bounded mas não é ω -bounded forte.*

Demonstração. Seja T uma árvore de Aronszajn e considere $X = X(T)$. Vamos provar que X satisfaz o enunciado. Seja $C \subset X$ enumerável. Vamos mostrar que $\overline{C}$ é compacto.

Seja $Y \subset \overline{C}$ infinito. Vamos mostrar que Y tem ponto de acumulação completo. Note que podemos supor $Y \subset \omega \times sT$ e que todo $p \in (\omega \times sT) \cap \overline{C}$ não é um ponto de acumulação completo de Y . Como $\{n\} \times sT$ é compacto, também podemos supor que $(\{n\} \times sT) \cap Y \neq \emptyset$ para infinitos n 's. Assim, para cada $n \in \omega$ tal que $(\{n\} \times sT) \cap \overline{Y} \neq \emptyset$, tome $p_n \in (\{n\} \times sT)$ um ponto de acumulação completo de $(\{n\} \times sT) \cap Y$ caso exista algum, ou tome p_n como qualquer ponto de $(\{n\} \times sT) \cap Y$ caso contrário. Seja Z o conjunto de tais p_n 's. Como Y é enumerável, existe $\eta < \omega_1$ tal que $(\omega \times sT) \cap Y \subset \omega \times \downarrow L_\eta$. Assim, podemos tomar $\xi = \min\{\alpha < \omega_1 : |F_\alpha \cap Z| < \omega\}$ (pela proposição 3.2.1). Vamos mostrar

que tal ξ é um ponto de acumulação completo de Y . Note que, se para cada n , V_n é uma vizinhança de p_n , então

$$|\bigcup_{p_n \in Z} V_n \cap Y| = |Y \cap (\omega \times sT)|. \quad (3.1)$$

Lembre que toda vizinhança básica de ξ é da forma

$$\{[\eta, \xi] \cup \bigcup_{k \geq n} ((F_\eta \setminus F_\xi) \restriction k) : \eta < \xi, n \in \omega\}.$$

Pela minimalidade de ξ , apenas uma quantidade finita de p_n 's pode estar fora de cada vizinhança. Assim, cada vizinhança de ξ é uma vizinhança de todos p_n 's, a menos de uma quantidade finita. Assim, por (3.1) e pelo fato de que nenhum dos p_n 's é um ponto de acumulação completo de Y , ξ é um ponto de acumulação completo de Y . $\square$

Capítulo 4

Princípios de seleção e jogos topológicos

4.1 Introdução

Um princípio de seleção é algo, em geral, que nos permite construir uma cobertura a partir de uma família de coberturas. Estes princípios têm sido estudados extensivamente nos últimos anos (ver, por exemplo, [38, 33, 32, 8]), mas a origem de tais propriedades remonta ao começo do século XX, nos trabalhos de Menger, Rothberger e Hurewicz. Mesmo sendo propriedades “antigas”, elas têm aplicações em problemas recentes, como, por exemplo, preservação da propriedade de Lindelöf por forcings enumeravelmente fechados ([34]).

O principal resultado sobre o assunto que apresentamos neste trabalho é que todo espaço de Menger é um D -espaço. A definição da propriedade de Menger teve como motivação a procura de uma caracterização por coberturas da propriedade de ser σ -compacto. Mas, posteriormente, mostrou-se que muitos mais espaços satisfazem tal propriedade além dos σ -compactos. A demonstração de que todo espaço de Menger é um D -espaço será apresentada no capítulo seguinte, onde mostraremos outros resultados relativos a D -espaços. Neste capítulo, apresentamos alguns resultados básicos sobre as propriedades de Menger e Rothberger. Ambas propriedades possuem caracterizações por jogos topológicos que muitas vezes são mais fáceis de se aplicar do que as definições usuais.

Apresentamos também o resultado de que a propriedade de Alster implica a de Menger. A propriedade de Alster é uma propriedade que originalmente foi criada para lidar com o problema de Michael. Esta é uma pergunta clássica que trata do problema da existência de um espaço cujo produto com os irracionais não seja de Lindelöf. Com isso, conseguimos uma conexão entre um problema clássico e os problemas aqui apresentados.

Por fim, apresentamos uma coletânea de equivalências para a propriedade de Rothberger restrita à classe dos espaços compactos. Boa parte dessas equivalências já era conhecida, mas o fato de serem apresentadas num só resultado mostra como princípios de seleção, apesar de terem uma definição não tão “usual”, têm forte conexão com propriedades mais corriqueiras.

Parte dos resultados deste capítulo também podem ser encontrados em [4, 7].

4.2 Espaços de Rothberger

O primeiro princípio de seleção que apresentamos é o de Rothberger (este princípio foi chamado originalmente por Rothberger de C'').

Definição 4.2.1. Dizemos que um espaço topológico X é um **espaço de Rothberger** se, dada uma sequência $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ de coberturas abertas de X , existe $(U_n)_{n \in \omega}$ cobertura de X com $U_n \in \mathcal{U}_n$ para todo $n \in \omega$.

Apesar da definição simples, tal definição guarda algumas surpresas. Por exemplo, é fácil ver que qualquer espaço enumerável é de Rothberger. Mas há espaços bem mais complicados que também são de Rothberger: veremos depois que uma árvore de Suslin com a topologia CL ou CF é de Rothberger. Por outro lado, mesmo um compacto simples pode não ser de Rothberger:

Exemplo 4.2.2 (2^ω não é de Rothberger). Para cada n , considere os abertos $U_n = \{f \in 2^\omega : f(n) = 0\}$ e $V_n = \{f \in 2^\omega : f(n) = 1\}$. Note que $\mathcal{U}_n = \{U_n, V_n\}$ é uma cobertura para 2^ω mas se tomarmos apenas um elemento de cada $\mathcal{U}_n$, não conseguimos formar uma cobertura para 2^ω .

Vamos agora definir um jogo topológico que nos dará uma caracterização da propriedade de Rothberger. Durante este trabalho, lidaremos com diversos jogos entre dois jogadores, sendo que um deles procura construir uma cobertura para o espaço e o outro tenta impedir (ou seja, que não quer uma tal cobertura). Por razões mnemônicas, chamaremos tais jogadores de C e N respectivamente.

Definição 4.2.3. Seja X um espaço topológico. Chamamos de **jogo de Rothberger** o seguinte jogo: em cada rodada $n \in \omega$, o jogador N escolhe uma cobertura por abertos $\mathcal{U}_n$ para X . Em seguida, o jogador C escolhe $U_n \in \mathcal{U}_n$. Dizemos que o jogador C venceu o jogo se $\bigcup_{n \in \omega} U_n = X$.

Este jogo foi definido por Galvin ([16]). Normalmente ele é chamado de jogo ponto-aberto (*point-open game*).

O principal resultado que usaremos a respeito deste jogo é o seguinte, que foi mostrado em [29].

Teorema 4.2.4. *Dado X um espaço topológico, X é um espaço de Rothberger se, e somente se, o jogador N não tem uma estratégia vencedora para o jogo de Rothberger.*

É importante nos próximos resultados um bom entendimento do que é uma estratégia vencedora para o jogador N no jogo de Rothberger. Primeiramente, note que todo espaço de Rothberger é de Lindelöf. Note também que, se o espaço não for de Lindelöf, N tem uma estratégia vencedora trivialmente (joga sempre a cobertura que atesta que o espaço não é de Lindelöf). Assim, podemos nos restringir aos espaços de Lindelöf e supor que todas as coberturas envolvidas (tanto no jogo como na definição da propriedade) são enumeráveis. Assim, uma estratégia para o jogador N nada mais é do que o seguinte: na primeira rodada, ele escolhe uma cobertura enumerável $\mathcal{U}_0$; depois, tem que fixar uma nova cobertura enumerável dependendo de qual elemento de $\mathcal{U}_0$ o jogador C escolheu e assim sucessivamente. Ou seja, uma estratégia para N é:

Definição 4.2.5. Seja X um espaço topológico. Chamamos de uma ω -**árvore de cobertura** uma família $(V_s)_{s \in \omega^{<\omega}}$ onde cada V_s é um aberto de X e, para todo $s \in \omega^{<\omega}$, $\{V_{s \frown n} : n \in \omega\}$ é uma cobertura para X com a ordem induzida pela a usual de $\omega^{<\omega}$.

Aqui é interessante notar que a definição análoga de uma ω -árvore de cobertura, mas com altura ω_1 , foi usada em [35] para caracterizar espaços cuja propriedade de Lindelöf é preservada após um forcing enumeravelmente fechado. É daí que vem boa parte da técnica que usaremos nos próximos resultados. A próxima definição é uma adaptação de conceitos apresentados naquele trabalho:

Definição 4.2.6. Sejam X um espaço topológico e $(V_s)_{s \in \omega^{<\omega}}$ uma ω -árvore de cobertura. Dizemos que V_t com $t \in \omega^{<\omega}$ é um **elemento de cobertura** para $(V_s)_{s \in \omega^{<\omega}}$ se $\bigcup_{a \leq t} V_a \supset X$.

Vamos apresentar algumas caracterizações para espaços compactos de Rothberger. Algumas delas envolvem preservações por forcing, outras envolvem o uso de submodelos elementares e um espaço definido a partir deles ([22]):

Definição 4.2.7. Seja (X, τ) um espaço topológico e M um submodelo elementar tal que $(X, \tau) \in M$. Chamamos de X_M o espaço $X \cap M$ com a topologia gerada por $\{U \cap M : U \in \tau \cap M\}$.

Agora estamos prontos para mostrar algumas caracterizações:

Proposição 4.2.8. *Seja X um espaço compacto Hausdorff. As seguintes propriedades são equivalentes:*

- (a) X é disperso;
- (b) X é de Rothberger;
- (c) a compacidade de X é preservada por qualquer forcing;
- (d) a compacidade de X é preservada ao se adicionar um real de Cohen;
- (e) para toda ω -árvore de cobertura para X , o conjunto dos elementos de cobertura é denso;
- (f) para toda ω -árvore de cobertura para X , existe um elemento de cobertura;
- (g) existe um submodelo elementar enumerável M tal que $X \in M$ e X_M é compacto Hausdorff;
- (h) X_M é compacto Hausdorff para qualquer submodelo elementar M tal que $X \in M$.

Demonstração. (c) $\Rightarrow$ (d) é trivial. Para (d) $\Rightarrow$ (c), seja $\mathbb{P}$ um forcing qualquer e seja $\dot{C}$ um nome para uma cobertura aberta para X tal que $\mathbb{P} \Vdash \dot{C}$ não tem subcobertura finita". Podemos supor que $\mathbb{P}$ força que todo elemento de $\dot{C}$ é um aberto do modelo inicial. Construímos uma árvore $((p_s, V_s))_{s \in \omega^{<\omega}}$ tal que, para todo $s, t \in \omega^{<\omega}$:

- (i) $p_s \in \mathbb{P}$ e $p_s \leq p_t$ se $s \supset t$;
- (ii) $p_s \Vdash V_s \in \dot{C}$;
- (iii) $\{V_{s \smallfrown n} : n \in \omega\}$ é uma cobertura para X .

Note que $((p_s, V_s))_{s \in \omega^{<\omega}}$ é isomorfo ao forcing de Cohen. Seja g um real de Cohen após forçarmos com tal ordem. Note que, pelo fato de ser genérico, $\bigcup_{s \in g} V_s$ é uma cobertura aberta para X . Como temos (d), existe uma subcobertura finita, apesar de $\mathbb{P}$ forçar que não, absurdo.

Para (d) $\Rightarrow$ (e), seja $(V_s)_{s \in \omega^{<\omega}}$ uma ω -árvore de cobertura para X . Suponha que exista um $s \in \omega^{<\omega}$ tal que nenhum $t \supset s$ é tal que V_t seja um elemento de cobertura. Seja g um real de Cohen que estenda s . Por (d), $(V_r)_{r \in g}$ tem

subcobertura finita. Isto é, existe um elemento r de g (e portanto podemos tomá-lo estendendo s) tal que V_r é um elemento de cobertura.

Para $(e) \Rightarrow (d)$, suponha que o forcing de Cohen destrua a compacidade de X . Proceda como na prova de $(d) \Rightarrow (c)$ e construa uma ω -árvore de cobertura. Como temos (e) , qualquer genérico possui uma subcobertura finita.

Note que $(e) \Rightarrow (f)$ é imediato. Para $(f) \Rightarrow (e)$, sejam $(V_s)_{s \in \omega^{<\omega}}$ uma ω -árvore de cobertura e $t \in \omega^{<\omega}$. Note que $\{V_s : s \in \omega^{<\omega}, s \supsetneq t\}$ é isomorfo a uma ω -árvore de cobertura e, por (f) , ela possui um elemento de cobertura. Note que tal elemento é uma extensão de V_t .

Para verificar $(b) \Leftrightarrow (f)$, lembre que uma estratégia para o jogador N no jogo de Rothberger é uma ω -árvore de cobertura. A volta também é verdadeira: qualquer ω -árvore de cobertura induz uma estratégia para o jogador N . Observe também que tal árvore tem um elemento de cobertura se, e somente se, a estratégia associada é uma estratégia vencedora. Assim, temos $(b) \Leftrightarrow (f)$.

A equivalência entre (a) , (g) e (h) foi feita em [22].

É bem conhecido que, na classe dos espaços compactos, as noções de ser disperso e de ser Rothberger são equivalentes. Para a conveniência do leitor, apresentamos uma demonstração do fato aqui.

$(a) \Rightarrow (b)$: Suponha X disperso. Vamos mostrar por indução sobre a altura do espaço. Suponha α a altura de X . Note que, como X é compacto, $\alpha = \beta + 1$ com X^β finito. Seja $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ uma sequência de coberturas abertas para X . Seja $\{x_0, \dots, x_n\} = X^\beta$. Escolha $U_k \in \mathcal{U}_k$ para $k = 0, \dots, n$ tais que $x_k \in U_k$. Note que $X \setminus \bigcup_{k \leq n} U_k$ é um compacto disperso com altura menor ou igual a β . Assim, pela hipótese de indução, existem $U_k \in \mathcal{U}_k$ com $k > n$ tais que $\bigcup_{k > n} U_k \supset X \setminus \bigcup_{k \leq n} U_k$. Assim, X é de Rothberger.

$(b) \Rightarrow (a)$: Só precisamos mostrar que todo subespaço fechado de X tem um ponto isolado. Suponha que não. Como todo compacto sem pontos isolados possui uma cópia de 2^ω como subespaço fechado, e 2^ω não é de Rothberger (Exemplo 4.2.2), temos uma contradição. $\square$

Há uma prova direta de $(a) \Leftrightarrow (c)$ em [21].

Em [1] foi mostrado que a propriedade de ser disperso é discretamente reflexiva para espaços compactos. Como temos que, para tais espaços, ser disperso é equivalente a ser de Rothberger, temos:

Proposição 4.2.9. *Ser de Rothberger é discretamente reflexiva para espaços compactos.*

4.3 Espaços de Menger

A propriedade de Menger é parecida com a de Rothberger, com a diferença de que construímos a nova cobertura usando uma quantidade finita de abertos de cada cobertura da sequência. Na verdade, a propriedade de Menger foi definida por Hurewicz, inspirada numa definida por Menger (vale notar que há uma outra propriedade, parecida com a apresentada aqui, mas mais forte, que recebe o nome de Hurewicz).

Definição 4.3.1. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é um **espaço de Menger** se, dada $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ sequência de coberturas de X , existe $(U_n)_{n \in \omega}$ com $U_n \subset \mathcal{U}_n$ finito para todo $n \in \omega$ e tal que $(\bigcup U_n)_{n \in \omega}$ é uma cobertura para X .

O jogo de Menger também é parecido com o jogo de Rothberger, com a diferença que o jogador C escolhe uma quantidade finita de abertos por rodada, em vez de apenas um. Este jogo foi definido por Galvin ([16]) e é comumente chamado de jogo aberto-aberto (*open-open game*).

Definição 4.3.2. Seja X um espaço topológico. Chamamos de **jogo de Menger** o seguinte jogo entre os jogadores N e C . A cada rodada $n \in \omega$, o jogador N escolhe $\mathcal{U}_n$ cobertura para X . Daí o jogador C escolhe $U_n \subset \mathcal{U}_n$ finito. Dizemos que o jogador C venceu o jogo se $\bigcup_{n \in \omega} U_n = X$.

O resultado importante sobre o jogo de Menger para nós é o análogo ao da propriedade de Rothberger (a demonstração encontra-se em [19]):

Teorema 4.3.3. *Seja X um espaço topológico. Temos que X é um espaço de Menger se, e somente se, o jogador N não tem uma estratégia vencedora para o jogo de Menger.*

Assim como a propriedade de Rothberger, a de Menger também implica a de Lindelöf. Logo, ao nos restringirmos a espaços de Lindelöf, podemos supor todas as coberturas como sendo enumeráveis. Note também que podemos supor que cada $\mathcal{U}_n$ é fechada por uniões finitas e que U_n é um elemento de $\mathcal{U}_n$ (isso tanto na definição de Menger como no jogo).

A classe dos espaços de Menger é bem mais ampla que a dos espaços de Rothberger. Por exemplo, é fácil ver que ela inclui a classe dos espaços σ -compactos (na verdade, é fácil ver que para um espaço σ -compacto, o jogador C tem uma estratégia vencedora no jogo de Menger). É folclore que, sob o axioma de Martin, todo espaço de Lindelöf com menos que contínuo pontos é um espaço de Menger. Podemos fazer um pouco melhor:

Definição 4.3.4. Considere em ω^ω a seguinte ordem $\leq^*$: dados $f, g \in \omega^\omega$, $f \leq^* g$ se $\{n \in \omega : g(n) < f(n)\}$ é finito. Dizemos que $A \subset \omega^\omega$ é **dominante** se, para todo $f \in \omega^\omega$ existe $g \in A$ tal que $f \leq^* g$. Chamamos de $\mathfrak{d}$ o menor tamanho possível para uma família dominante.

Proposição 4.3.5. *Seja X um espaço de Lindelöf que possa ser escrito como uma união de menos de $\mathfrak{d}$ subespaços compactos. Então X é de Menger.*

Demonstração. Seja $X = \bigcup_{\xi < \kappa} K_\xi$ onde $\kappa < \mathfrak{d}$ e cada K_ξ é um compacto. Seja $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ uma sequência de coberturas abertas enumeráveis para X . Enumere cada $\mathcal{U}_n$ como $\{U_k^n : k \in \omega\}$. Para cada $\xi < \kappa$, defina $f_\xi : \omega \rightarrow \omega$ tal que, para cada $n \in \omega$, $f_\xi(n)$ é tal que

$$K_\xi \subset U_0^n \cup \dots \cup U_{f_\xi(n)}^n = \bigcup \{U_k^n : 0 \leq k \leq f_\xi(n)\}$$

Como $\kappa < \mathfrak{d}$, existe $g : \omega \rightarrow \omega$ tal que $g \not\leq^* f_\xi$ para todo $\xi < \kappa$. Para cada n , defina

$$U_n = \{U_0^n, \dots, U_{g(n)}^n\} \subset \mathcal{U}_n.$$

Note que $(U_n)_{n \in \omega}$ satisfaz o que desejamos, já que, dado $x \in X$, existe ξ tal que $x \in K_\xi$. Como $g \not\leq^* f_\xi$, existe $n \in \omega$ tal que $g(n) > f_\xi(n)$ e, portanto, $x \in K_\xi \subset \bigcup U_n$. $\square$

A demonstração acima é da Profa. Ofelia Alas (por comunicação pessoal).

Mesmo sendo uma classe ampla entre os espaços de Lindelöf, há espaços simples que não são de Menger:

Exemplo 4.3.6 (ω^ω , isto é, o espaço dos irracionais, não é de Menger). Considere, para cada $n, k \in \omega$, $U_k^n = \{f \in \omega^\omega : f(n) \leq k\}$. Note que, para todo $n \in \omega$, $\mathcal{U}_n = (U_k^n)_{k \in \omega}$ é uma cobertura para ω^ω fechada por uniões finitas. É fácil ver que não é possível formar uma cobertura tomando um elemento de cada $\mathcal{U}_n$.

Veremos agora uma conexão entre um problema clássico e a propriedade de Menger. Começamos com algumas definições:

Definição 4.3.7. Dizemos que um espaço de Lindelöf X é **produtivamente Lindelöf** se, para qualquer Lindelöf Y , temos que $X \times Y$ é Lindelöf.

Definição 4.3.8. Dado um espaço topológico X , dizemos que X é um **espaço de Alster** se, para toda cobertura $\mathcal{G}$ de X feita por conjuntos G_δ 's satisfazendo para todo compacto $K \subset X$ existem $G_1, \dots, G_n \in \mathcal{G}$ tais que $K \subset G_1 \cup \dots \cup G_n$, existe $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ enumerável tal que $\bigcup \mathcal{G}' = X$.

Em [2], foi mostrado o seguinte resultado:

Teorema 4.3.9. *Todo espaço de Alster é produtivamente Lindelöf. Assumindo-se CH, dado X Lindelöf, se $\omega(X) \leq \omega_1$ e X é produtivamente Lindelöf, então X é de Alster.*

Note que a propriedade de Alster também implica a de Lindelöf e, para espaços em que todo compacto é G_δ , Alster implica σ -compacto.

A conexão entre as propriedades de Menger e de Alster é direta:

Proposição 4.3.10. *Todo espaço de Alster é um espaço de Menger.*

Demonstração. Sejam X um espaço de Alster e $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ uma sequência de coberturas para X . Note que podemos supor cada $\mathcal{U}_n$ enumerável e fechado por uniões finitas. Considere $\mathcal{G}$ a família de todos os conjuntos da forma $\bigcap_{n \in \omega} U_n$ com $U_n \in \mathcal{U}_n$ para todo $n \in \omega$. Note que, dado $K \subset X$ compacto, para cada $n \in \omega$, existe $U_n \in \mathcal{U}_n$ tal que $K \subset U_n$ (pois $\mathcal{U}_n$ é fechada por uniões finitas). Assim, dado $K \subset X$ compacto, existe $W \in \mathcal{G}$ tal que $K \subset W$. Como X é de Alster, existe $\{W_n : n \in \omega\} \subset \mathcal{G}$ cobertura enumerável para X . Para cada $n \in \omega$, escreva $W_n = \bigcap_{k \in \omega} U_k^n$ com $U_k^n \in \mathcal{U}_k$. Note que $\{U_n^n : n \in \omega\}$ é uma cobertura para X (pois $U_n^n \supset W_n$) e que $U_n^n \in \mathcal{U}_n$ para todo $n \in \omega$. $\square$

A propriedade de Alster foi criada para tentar responder o problema de Michael, isto é, se o espaço dos números irracionais é produtivamente Lindelöf ([24]). Já se sabia que sob CH a resposta era não, mas o teorema 4.3.9 também responde negativamente esta pergunta sob CH já que os irracionais não são de Alster (pois não são de Menger). A pergunta se podemos omitir CH no teorema continua em aberto. Dado o resultado anterior, poderíamos então fazer a seguinte pergunta:

Pergunta 4.3.11. *Todo espaço produtivamente Lindelöf e com peso menor igual a ω_1 é de Menger?*

Apesar desta pergunta parecer mais fácil que o problema de Michael, note que, como o conjunto dos irracionais também não é de Menger (Exemplo 4.3.6), uma resposta afirmativa para essa pergunta também responderia o problema de Michael.

4.4 Algumas aplicações

Nesta última seção, apresentamos algumas aplicações simples. Na verdade, mostramos que alguns tipos de espaços são de Menger (ou de Rothberger). Por causa dos resultados do próximo capítulo, teremos que tais espaços são D -espaços.

Começamos com uma definição muito usada ao se construir espaços de Lindelöf. Em particular, esta técnica foi usada na construção de alguns exemplos (consistentes) para o problema de Michael.

Definição 4.4.1. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é **concentrado** em $Y \subset X$ se, para todo aberto U tal que $Y \subset U$, temos que $X \setminus U$ é enumerável.

Proposição 4.4.2. Se X é concentrado num espaço de Rothberger (Menger) então X é de Rothberger (Menger).

Demonstração. Vamos mostrar o caso de Rothberger, o caso de Menger é análogo. Seja $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ uma sequência de coberturas abertas de X . Seja $Y \subset X$ de Rothberger tal que X é concentrado em Y . Como Y é de Rothberger, existe $(U_{2n})_{n \in \omega}$ cobertura para Y tal que $U_{2n} \in \mathcal{U}_{2n}$ para todo $n \in \omega$. Note que $X \setminus \bigcup_{n \in \omega} U_{2n}$ é enumerável e, portanto, é fácil escolhermos $(U_{2n+1})_{n \in \omega}$ recobrimento para $X \setminus \bigcup_{n \in \omega} U_{2n}$ com $U_{2n+1} \in \mathcal{U}_{2n+1}$ para todo $n \in \omega$. $\square$

É interessante notar que, apesar de não se saber se um espaço produtivamente Lindelöf com peso menor ou igual a ω_1 precisa ser Menger, boa parte dos exemplos consistentes de um espaço de Michael ([24]) são de Rothberger (pois são concentrados nos racionais).

Apesar de a proposição 4.4.2 ser um resultado simples, ela tem algumas aplicações interessantes. Um exemplo envolve espaços de Lusin:

Definição 4.4.3. Dizemos que um espaço topológico X é um **espaço de Lusin** se, para qualquer aberto denso $A \subset X$, $X \setminus A$ é enumerável.

Corolário 4.4.4. Seja X um espaço de Lusin separável. Então X é de Rothberger.

Demonstração. Considere $Y \subset X$ denso enumerável. Note que X é concentrado em Y e Y é de Rothberger por ser enumerável. $\square$

Também podemos mostrar que alguns exemplos com árvores apresentados anteriormente são de Rothberger:

Proposição 4.4.5. *Seja T uma árvore de Suslin. Então T com a topologia CL ou CF é de Rothberger.*

Demonstração. Vamos fazer o caso da topologia CF , o caso da CL é análogo. Seja $(\mathcal{U}_n)_{n \in \omega}$ uma sequência de coberturas para T . Como T é de Lindelöf (Corolário 2.4.3), podemos supor cada $\mathcal{U}_n$ enumerável. Também podemos supor que cada elemento de $\mathcal{U}_n$ é da forma $V_t \setminus W_F$ para algum $t \in T$ e $F \subset T$ finito. Como cada $\mathcal{U}_n$ é enumerável, existe $\xi < \omega_1$ tal que todos t 's e elementos de F 's são elementos de $\downarrow L_\xi$. Enumere $L_{\xi+1}$ e use um elemento de cada $\mathcal{U}_{2n}$ para cobri-lo (note que os abertos são fechados para cima depois deste nível, isto é, se a pertence ao aberto, todo elemento acima de a também pertence). Como o que sobra também é enumerável, podemos cobrir usando um elemento de cada $\mathcal{U}_{2n+1}$. $\square$

Capítulo 5

D -espaços

5.1 Introdução

O conceito de um D -espaço envolve uma estrutura mais forte que uma cobertura aberta: não só exigimos que cada ponto pertença a um aberto, como ainda fixamos qual o aberto a que o ponto pertence.

Definição 5.1.1. Seja X um espaço topológico. Chamamos de um **o.n.a.** (*open neighborhood assignment*) uma família $(V_x)_{x \in X}$ tal que, para todo $x \in X$, V_x é uma vizinhança aberta de x .

Assim como com coberturas, podemos pedir uma subfamília de um o.n.a. que seja suficiente para cobrir o espaço todo:

Definição 5.1.2. Dados X um espaço topológico e $(V_x)_{x \in X}$ um o.n.a., denotamos por V_Y , para $Y \subset X$, o conjunto $\bigcup_{y \in Y} V_y$. Dizemos que $Y \subset X$ é um **núcleo** para $(V_x)_{x \in X}$ se $V_Y = X$.

Uma diferença para as propriedades que envolvem coberturas abertas é que como o Y que satisfaz $V_Y = X$ é também um subespaço, podemos exigir sobre Y propriedades topológicas:

Definição 5.1.3. Dizemos que um espaço topológico X é um **D -espaço** se para qualquer o.n.a. $(V_x)_{x \in X}$ existe $D \subset X$ discreto fechado tal que $V_D = X$.

É simples ver que todo compacto T_1 é um D -espaço (pois sempre existe um núcleo finito). Quando passamos para os espaços de Lindelöf, a pergunta fica

mais complicada: no mesmo trabalho em que foram introduzidos os D -espaços ([39]), foi perguntado se todo Lindelöf regular é um D -espaço. Apesar da aparente simplicidade da pergunta, ela permanece sem resposta até o momento, nem mesmo alguma resposta consistente. Inclusive, não havia resultados de alguma propriedade sobre coberturas que implicasse D -espaço sem ser a trivial de que todo compacto é um D -espaço ([14]).

Neste capítulo vamos apresentar a demonstração de que todo espaço de Menger é um D -espaço. Tal demonstração é feita usando um jogo topológico. Mas tal jogo não caracteriza os D -espaços, assim usamos a ideia da demonstração de que todo espaço com base ponto enumerável é um D -espaço apresentada em [3] para definir um outro jogo. Tal jogo pode ser usado para mostrar que outros espaços são D mas não sabemos qual a sua relação com os espaços de Menger.

Muitos dos resultados apresentados neste capítulo também podem ser encontrados em [4].

Antes de apresentarmos os resultados principais deste capítulo, vamos mostrar que todo espaço desenvolvível é um D -espaço. Em [10], foi mostrado que todo espaço Σ forte é um D -espaço. Tal classe inclui os espaços de Moore, que são os espaços desenvolvíveis regulares. Assim, mostramos que nesse caso em particular não é necessário tal axioma de separação.

Definição 5.1.4. Sejam X um espaço topológico, $\mathcal{C}$ uma família de abertos e $x \in X$. Denotamos por $st(x, \mathcal{C})$ o conjunto $\bigcup \{C \in \mathcal{C} : x \in C\}$. Dizemos que X é um **espaço desenvolvível** se existe uma sequência de coberturas abertas $(\mathcal{C}_n)_{n \in \omega}$ tal que, para cada $x \in X$, $\{st(x, \mathcal{C}_n) : n \in \omega\}$ é uma base local para x .

Proposição 5.1.5. *Todo espaço desenvolvível é um D -espaço.*

Demonstração. Sejam X um espaço desenvolvível e $(\mathcal{C}_n)_{n \in \omega}$ uma sequência de coberturas abertas tais que, para cada $x \in X$, $\{st(x, \mathcal{C}_n) : n \in \omega\}$ é uma base local para x . Seja $(V_x)_{x \in X}$ um o.n.a. para X . Para cada $n \in \omega$, seja $X_n = \{x \in X : st(x, \mathcal{C}_n) \subset V_x\}$. Tal conjunto pode ser vazio, mas note que $X \subset \bigcup_{n \in \omega} X_n$. Para cada $n \in \omega$, definimos $D_n \subset X_n$ satisfazendo:

- (a) D_n é fechado discreto;
- (b) $V_{D_n} \cup \bigcup_{k < n} V_{D_k} \supset X_n$.

Suponha que já temos definidos D_k para $k < n$. Bem ordene $X_n \setminus \bigcup_{k < n} D_k$ e defina d_ξ como sendo o menor elemento de $(X_n \setminus \bigcup_{k < n} V_{D_k}) \setminus V_{E_\xi}$ onde $E_\xi = \{d_\eta : \eta < \xi\}$. Defina D_n como sendo o conjunto de tais d_ξ 's. Vamos mostrar que D_n é fechado discreto. Sejam $y \in X$ e $C \in \mathcal{C}_n$ tais que $y \in C$. Suponha que existe um

$d_\xi \in C$. Considere o menor deles. Note que $y \in st(d_\xi, C_n)$. Assim, $y \in V_{d_\xi} \cap C$. Note que $V_{d_\xi} \cap C \cap D_n = \{d_\xi\}$.

Logo, temos que $D = \bigcup_{n \in \omega} D_n$ é tal que $V_D = X$ e é fechado discreto. $\square$

Em [6], foi mostrado que, sob MA, se um espaço de Lindelöf é união de menos que contínuo compactos, então o espaço é um D -espaço. Esse resultado agora é um corolário do resultado principal deste capítulo: um espaço com tais propriedades é um espaço de Menger. Mas como a demonstração de que todo espaço de Menger é um D -espaço é um tanto indireta, apresentamos aqui uma demonstração direta de um caso mais simples que o de [6] (tal demonstração pode ser facilmente adaptada para o caso presente lá). Além disso, ela nos dá uma boa intuição para a construção do jogo da próxima seção.

Proposição 5.1.6. (MA) *Se X é um espaço de Lindelöf tal que $|X| < 2^\omega$, então X é um D -espaço.*

Demonstração. Seja $(V_x)_{x \in X}$ um o.n.a. Definimos $f : \omega^{<\omega} \rightarrow X$ tal que, para todo $s \in \omega^{<\omega}$:

- (i) $f(s) \notin \bigcup_{t < s} V_{f(t)}$;
- (ii) $\{V_{f(s \smallfrown n)} : n \in \omega\} \cup \{V_{f(t)} : t \leq s\}$ é uma cobertura para X .

Note que podemos construir tal função já que X é de Lindelöf. Para cada $x \in X$, considere $D_x = \{s \in \omega^{<\omega} : x \in \bigcup_{t \leq s} V_{f(t)}\}$. Note que cada D_x é denso em $\omega^{<\omega}$ (pela propriedade (ii)). Por MA, existe um ramo r tal que $\bigcup_{s \in r} V_{f(s)} = X$. Vamos mostrar que $\{f(s) : s \in r\}$ é um discreto fechado. Seja $x \in X$. Seja s o primeiro elemento de r tal que $x \in V_{f(s)}$. Note que, se $t \supsetneq s$, $f(t) \notin V_{f(s)}$. Assim, x não é ponto de acumulação de $\{f(t) : t \supsetneq s, t \in r\}$. Como só existem finitos t 's com $t \subset s$, x não é ponto de acumulação de $\{f(s) : s \in r\}$. $\square$

5.2 O jogo dos o.n.a's parciais

Nesta seção apresentamos o resultado principal deste capítulo: todo espaço de Menger é um D -espaço. Para mostrar tal resultado usamos um jogo topológico que parte de uma ideia muito simples. Dado um espaço topológico X e um o.n.a. $(V_x)_{x \in X}$, para tentarmos encontrar um núcleo fechado e discreto podemos fazer o seguinte: tomar um discreto fechado D_0 , ver o que ele cobriu (V_{D_0}), tomar um discreto fechado D_1 em $X \setminus V_{D_0}$, ver o que ele cobriu ($V_{D_0} \cup V_{D_1}$), continuar o procedimento e torcer para que no momento em que todo espaço estiver coberto, a união dos discretos fechados também seja um discreto fechado.

Traduzindo a ideia acima num jogo entre dois jogadores (os já utilizados N e C) temos a seguinte regra geral: o jogador N escolhe um o.n.a. parcial que seja suficiente para cobrir X inteiro. Depois o jogador C escolhe um subconjunto do domínio de tal o.n.a. parcial que ele gostaria que fosse parte de um núcleo fechado e discreto. Então o jogador N escolhe outro o.n.a. parcial que “continua” o que já foi escolhido e o jogador C escolhe outra parte para o seu núcleo fechado e discreto. Formalmente, temos:

Definição 5.2.1. Seja X um espaço topológico. Chamamos de **jogo dos o.n.a.’s parciais (JONAP)** o seguinte jogo entre os jogadores N e C . O jogador N define um o.n.a. parcial $(V_x)_{x \in Y_0}$ para X para algum $Y_0 \subset X$ tal que $V_{Y_0} = X$. Depois, o jogador C escolhe $D_0 \subset Y_0$ discreto fechado. Então, na rodada n :

- N escolhe um o.n.a. parcial $(V_x)_{x \in Y_n}$ compatível com todo $(V_x)_{x \in Y_k}$ para $k < n$ tal que:
 - cubra $X \setminus \bigcup_{k < n} V_{D_k}$ e
 - $Y_n \cap \bigcup_{k < n} V_{D_k} = \emptyset$;
- C escolhe $D_n \subset Y_n$ discreto fechado.

Dizemos que C vence o jogo se $\bigcup_{n \in \omega} V_{D_n} = X$.

Uma das vantagens de tal jogo é o fato de não precisarmos nos preocupar em fazer com que o núcleo seja discreto fechado:

Proposição 5.2.2. *Seja $(D_n)_{n \in \omega}$ como num JONAP vencido pelo jogador C . Então $\bigcup_{n \in \omega} D_n$ é fechado discreto.*

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $n \in \omega$ o primeiro n tal que $x \in \bigcup_{d \in D_n} V_d$. Note que $\bigcup_{d \in D_n} V_d$ é um aberto que separa x de todo ponto de $\bigcup_{k > n} D_k$. Como $\bigcup_{k \leq n} D_k$ é fechado e discreto (pois é união finita de discretos fechados), x não é um ponto de acumulação de $\bigcup_{k \in \omega} D_k$. $\square$

É fácil ver que ser um D -espaço está relacionado com o jogador N não ter uma estratégia vencedora:

Proposição 5.2.3. *Seja X um espaço topológico. Se N não tem uma estratégia vencedora no JONAP, então X é um D -espaço*

Demonstração. Suponha que X não seja um D -espaço. Seja $(V_x)_{x \in X}$ um o.n.a. para X que testemunhe isso. Então, se N jogar em toda rodada n , $(V_x)_{x \in A}$ onde $A = X \setminus V_{D_n}$, o jogador C não tem como vencer o jogo. $\square$

O JONAP pode ser usado facilmente para se mostrar que espaços σ -compactos são D -espaços:

Proposição 5.2.4. *Seja X um espaço σ -compacto. Então o jogador C tem uma estratégia vencedora para o JONAP.*

Demonstração. Escreva $X = \bigcup_{n \in \omega} K_n$ onde cada K_n é compacto. A cada rodada n do jogo, o jogador C escolhe D_n finito de forma que $K_n \subset \bigcup_{k \leq n} V_{D_k}$. Note que assim, ao final da partida, C terá vencido o jogo. $\square$

Vamos agora mostrar que se o espaço é de Menger, pelo menos garantimos que o jogador N não tem uma estratégia vencedora para o JONAP. Mas isso é suficiente para obtermos o resultado que queremos, pela Proposição 5.2.3.

Proposição 5.2.5. *Seja X um espaço de Menger. Então N não tem uma estratégia vencedora para o JONAP.*

Demonstração. Suponha que N tenha uma estratégia vencedora para o JONAP. Vamos usá-la para definir uma estratégia vencedora para N no jogo de Menger. Assim, como X é de Menger, teremos uma contradição (pelo Teorema 4.3.3). Na primeira rodada do jogo de Menger, N escolhe $\mathcal{U}_0 = \{V_x : x \in Y_0\}$ onde $(V_x)_{x \in Y_0}$ é a jogada de N na primeira rodada do JONAP usando a estratégia vencedora. Seja $U_0 \subset Y_0$, onde U_0 é finito, a jogada de C no jogo de Menger. Então, na segunda rodada, N joga $\mathcal{U}_1 = \{V_{U_0 \cup V_x} : x \in Y_1\}$ onde Y_1 é a jogada de N na estratégia vencedora para o JONAP, após C jogar $(V_x)_{x \in U_0}$. Note que, jogando desta maneira, N vence a partida. $\square$

Assim, temos o resultado principal deste capítulo:

Corolário 5.2.6. *Todo espaço de Menger é um D -espaço.*

Mas o JONAP não nos dá uma equivalência para ser um D -espaço. O espaço dos irracionais com a topologia usual é um D -espaço (ver, por exemplo, [3]) mas podemos mostrar o seguinte resultado:

Proposição 5.2.7. *No JONAP para ω^ω , o jogador N tem uma estratégia vencedora.*

Demonstração. Para cada $n \in \omega$, sejam $A_n = \{y_j^n \in \omega^\omega : j \in \omega\}$ e $(V_{y_j^n})_{j \in \omega}$ tais que:

$$\bullet \quad y_j^n(m) = \begin{cases} n+1 & \text{se } m \leq j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- $V_{y_j^n} = \{x \in \omega^\omega : x(n) \leq n + 1 + j\}$

Note que $A_n \cap A_k = \emptyset$ se $n \neq k$ e $y_j^n \in V_{y_j^n}$ para qualquer $j, n \in \omega$. Note também que $(y_j^n)_{j \in \omega}$ é uma sequência convergente para a função constantemente igual a $n + 1$.

Na primeira rodada, N joga $V_{y \in Y_0}$ onde $Y_0 = A_0$. Note que o jogador C só pode escolher uma quantidade finita de pontos de Y_0 (pois eles formam uma sequência convergente). Defina U_0 como sendo os y_j^0 's escolhidos. Seja $k = \max\{j + 1 : y_j^0 \in U_0\}$. Em seguida, o jogador N joga $Y_1 = A_{k+1}$. Note que $V_{Y_1} = \omega^\omega$ e $Y_1 \cap V_{U_0} = \emptyset$. Novamente, o jogador C só pode escolher finitos pontos de Y_1 . Seja U_1 o conjunto dos y_j^{k+1} 's escolhidos. Defina $k' = \max\{j + k + 1 : y_j^{k+1} \in U_1\}$. Então o jogador N escolhe $Y_2 = A_{k'+1}$. Procedendo desta maneira, o jogador N vence o jogo. $\square$

5.3 O jogo estrela

O próximo jogo é baseado na demonstração de que todo espaço com uma base ponto enumerável é um D -espaço apresentada em [3]. A ideia dele é a de que tentamos construir o núcleo para o o.n.a. tomando os pontos um a um e tentando, a cada momento, ver quais os pontos que o próprio o.n.a. testemunha que não estarão no fecho do conjunto de pontos já escolhidos.

Definição 5.3.1. Seja X um espaço topológico. Chamamos de **jogo estrela** o seguinte jogo entre os jogadores C e N . A cada rodada ξ , C escolhe x_ξ diferente de cada x_α escolhido anteriormente. Em seguida, o jogador N escolhe $S_\xi \subset X$ tal que $x_\xi \in S_\xi$ e, para cada $y \in S_\xi$, N escolhe também um aberto V_y tal que $y, x_\xi \in V_y$. Além disso, se $y \in S_\eta$ para algum $\eta < \xi$, então o V_y precisa ser o mesmo escolhido anteriormente. No começo de cada rodada, os seguintes testes são feitos (nesta ordem):

- se existe algum $x \in X$ tal que x é um ponto de acumulação para $\{x_\eta : \eta < \xi\}$ e x não é um elemento de nenhum S_η com $\eta < \xi$, então N perde. Chamamos esta condição de S ;
- se $\{x_\eta : \eta < \xi\}$ não é um discreto fechado, então C perde;
- se $\bigcup_{\eta < \xi} V_{x_\eta} = X$, então C vence. Caso contrário, o jogo continua.

Assim como o JONAP, o jogo estrela tem uma ligação direta com os D -espaços.

Proposição 5.3.2. *Seja X um espaço topológico. Se N não tem uma estratégia vencedora para o jogo estrela, então X é um D -espaço.*

Demonstração. Suponha que X não seja um D -espaço. Seja $(V_x)_{x \in X}$ um o.n.a. que testemunhe isso (ou seja, que não possua um núcleo discreto fechado). Se N jogar a cada rodada ξ , $S_\xi = \{y : x_\xi \in V_y\}$, então o jogador N vence. Observe que jogando assim, N nunca perde pela condição S . Logo, como X não é um D -espaço, C perde em algum momento. $\square$

Para espaços σ -compactos, a situação é parecida com a do JONAP:

Proposição 5.3.3. *Se X é um espaço σ -compacto, então o jogador C tem uma estratégia vencedora para o jogo estrela.*

Demonstração. Primeiramente, suponha X compacto. O jogador C joga da seguinte maneira. Defina x_0 como qualquer ponto de X . Então, defina x_{n+1} como qualquer ponto (se houver algum) fora de $\bigcup_{m < n} V_{S_m}$. Note que se esse processo continuar até a rodada ω , então qualquer ponto de acumulação de $\{x_n : n \in \omega\}$ precisa estar fora de $\bigcup_{n \in \omega} S_n$. Portanto, o jogador N perde por causa da condição S . Assim, podemos supor que existe $n \in \omega$ tal que $\bigcup_{m < n} V_{S_m}$ recobre X . Como X é compacto, podemos encontrar um subconjunto finito F de $\bigcup_{m < n} S_m \setminus \{x_m : m < n\}$ tal que $V_F \cup V_{\{x_m : m < n\}}$ recobre X . Portanto, basta C jogar os pontos de F nas próximas rodadas.

Para provar o caso σ -compacto, simplesmente escreva $X = \bigcup_{n \in \omega} K_n$ com cada K_n compacto e repita o procedimento anterior para cada compacto menos o que já foi coberto anteriormente. $\square$

Note que o jogo estrela é uma versão do jogo de Rothberger com mais restrições sobre o que o jogador N pode jogar. Assim, uma estratégia vencedora para N no jogo estrela daria uma estratégia vencedora para N no jogo de Rothberger. Como um espaço de Rothberger é caracterizado por N não ter uma estratégia vencedora para o jogo de Rothberger, temos o seguinte resultado:

Proposição 5.3.4. *Se X é um espaço de Rothberger, então o jogador N não tem uma estratégia vencedora para o jogo estrela.*

Em [3], a prova de que todo espaço com uma base ponto enumerável é um D -espaço, é na verdade uma prova de que uma classe um pouco mais geral de espaços são D -espaços:

Definição 5.3.5. Uma base $\mathcal{B}$ para um espaço topológico X é dita uma **base ω -uniforme** se, para todo $x \in X$ e todo $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$, o conjunto $\{A \in \mathcal{B} : x \in A \text{ e } A \not\subset B\}$ é enumerável.

O conceito de uma base ω -uniforme é uma simples generalização de uma base uniforme: a definição de uma base é uniforme é a mesma que apresentamos para uma base ω -uniforme, apenas trocando o requerimento de ser enumerável por ser finito.

Note que toda base ponto enumerável é uma base ω -uniforme. Mas a recíproca não é verdadeira, mesmo para espaços de Lindelöf: considere D um espaço discreto de cardinalidade ω_1 e adicione um ponto ∞ de forma que uma base local para ele seja formada por conjuntos da forma $V \cup \{\infty\}$ com $D \setminus V$ enumerável. O espaço $D \cup \{\infty\}$ é de Lindelöf, tem uma base ω -uniforme mas não tem uma base ponto enumerável.

Nós vamos mostrar que ter uma base ω -uniforme é suficiente para existir uma estratégia vencedora para o jogador C no jogo estrela. Mas antes de provar isso, precisamos de mais algumas definições:

Definição 5.3.6. Seja X um espaço topológico. Dizemos que uma rodada α para o jogo estrela é uma **rodada fechada** se:

- $D_\alpha = \{x_\xi : \xi < \alpha\}$ é um discreto fechado em X ;
- $x_\xi \notin V_{x_\eta}$ para todo $\eta < \xi < \alpha$;
- $V_{D_\alpha} \supset \bigcup_{\xi < \alpha} S_\xi$.

Dizemos que o jogador C tem uma **estratégia parcial** para o jogo estrela se, para toda rodada fechada α e para todo $x \notin \bigcup_{\xi < \alpha} V_{x_\xi}$, existe uma rodada fechada β satisfazendo $\{x_\xi : \alpha \leq \xi < \beta\} \subset X \setminus \bigcup_{\xi < \alpha} V_{x_\xi}$ e $x_\alpha = x$.

A ideia das rodadas fechadas é dividir uma estratégia em pequenas partes:

Proposição 5.3.7. *Seja X um espaço topológico. Se o jogador C tem uma estratégia parcial para o jogo estrela, então ele tem uma estratégia vencedora.*

Demonstração. A estratégia para o jogador C será simplesmente uma sequência de estratégias parciais concatenadas. A cada rodada α , o jogador C faz:

- se está no meio de uma estratégia parcial, ele a continua;
- caso contrário, assumimos que α seja uma rodada fechada. Se $\bigcup_{\xi < \alpha} V_{x_\xi} = X$, o jogo acabou. Caso contrário, o jogador C começa uma nova estratégia parcial para algum $x \notin \bigcup_{\xi < \alpha} V_{x_\xi} = X$.

Vamos provar que isso nos dá uma estratégia vencedora para C . Para isso, é suficiente mostrar que limite de rodadas fechadas também é uma rodada fechada. Seja α um limite de rodadas fechadas e seja $x \in \overline{\{x_\xi : \xi < \alpha\}}$. Podemos supor que $x \in S_\xi$ para algum $\xi < \alpha$ (caso contrário, o jogador N já perderia). Assim, existe $\beta < \alpha$ tal que $x \in V_{x_\beta}$ (já que são rodadas fechadas). Podemos assumir por indução que $\{x_\xi : \xi < \beta\}$ é discreto fechado. Como $x_\eta \notin V_{x_\beta}$ para $\eta > \beta$, x não pode ser um ponto de acumulação para $\{x_\xi : \xi < \alpha\}$. $\square$

Assim, nós só precisamos mostrar que ter uma base ω -uniforme é suficiente para se ter uma estratégia parcial:

Proposição 5.3.8. *Se X possui uma base ω -uniforme, então o jogador C tem uma estratégia parcial para o jogo estrela.*

Demonstração. Seja $\mathcal{B}$ uma base ω -uniforme para X . Como ter uma base ω -uniforme é hereditário, nós só temos que provar que, para qualquer x existe uma rodada fechada que recobre x . Podemos assumir que todo V_y jogado será elemento de $\mathcal{B}$. Seja $x \in X$. Vamos definir uma estratégia para o jogador C tal que ω vai ser uma rodada fechada. Por motivos técnicos, vamos enumerar as rodadas para essa estratégia usando números da forma p^n , onde p é um número primo e $n > 0$. Defina $x_2 = x$. Depois que o jogador N jogar, enumere o conjunto $\{U \in \mathcal{B} : \exists y \in S_2 (x_2 \in V_y \text{ e } U \setminus V_{x_2} \neq \emptyset)\}$ como $(U_n^{x_2})_{n \in \omega}$. Assuma que, para cada $k < n$, com $k = p^m$ para algum primo p , o jogador C já escolheu x_k e enumerou o conjunto $\{U \in \mathcal{B} : \exists y \in S_0 (x_k \in V_y \text{ e } U \setminus V_{x_k} \neq \emptyset)\}$ como $(U_n^{x_k})_{n \in \omega}$. Na rodada n , com $n = p^m$ para algum primo p , o jogador C faz o seguinte. Seja q o m -ésimo número da forma r^s com r sendo um número primo. Se existe um $x \in \bigcup_{k < n} S_k$ tal que

$$V_x \in \{U_t^{x_q} : t \in \omega\} \text{ e } x \notin \bigcup_{k < n} V_{x_k}, \quad (5.1)$$

então o jogador C escolhe x_n como x tal que $V_x = U_t^{x_q}$ com t sendo o menor satisfazendo (5.1). Enumere $(U_t^{x_n})_{t \in \omega}$ como antes. Se não existe tal x satisfazendo (5.1), vá para a próxima rodada sem escolher um x (na verdade, a definição do jogo não permite isso, mas podemos supor que o jogador N nada faz na sua jogada se o jogador C nada fez).

Vamos mostrar que isso nos dá uma estratégia parcial. Começamos mostrando que $\bigcup_{n \in \omega} S_n \subset \bigcup_{n < \omega} V_{x_n}$. Seja $x \in S_n$ para algum $n \in \omega$. Assuma que n é o menor satisfazendo tal propriedade. Então $V_x = U_k^{x_n}$ para algum $k \in \omega$. Note que na nossa construção, a cada rodada da forma p^t , onde p é um número primo e t indica quantos elementos existem antes de n nos nossos índices, nós pegamos o primeiro $U_s^{x_n}$ que possui algum elemento não coberto. Como existe apenas uma quantidade finita de elementos antes de k , $U_k^{x_n}$ será coberto em alguma rodada

e, portanto, x também será coberto. Agora precisamos mostrar que $\{x_n : n \in \omega\}$ é discreto fechado em $\bigcup_{n \in \omega} S_n$. Seja $x \in \bigcup_{n \in \omega} S_n$. Seja n o primeiro tal que $x \in V_{x_n}$. Como existem apenas finitos x_k 's com $k < n$ e nenhum $x_m \in V_{x_n}$ para $m > n$, terminamos. $\square$

Corolário 5.3.9. *Se X tem uma base ω -uniforme, então o jogador C tem uma estratégia vencedora para o jogo estrela. Portanto, X é um D -espaço.*

5.4 Algumas aplicações

Terminamos este capítulo apresentando algumas aplicações simples sobre D -espaços.

É fácil ver que, se X é um espaço de Menger e $\mathbb{P}$ é um forcing enumeravelmente fechado, então se $\mathbb{P}$ preserva o fato de X ser de Lindelöf, então preserva também o de ser de Menger. Basta ver que, trabalhando na extensão, uma vez que o espaço é de Lindelöf, todas as famílias que aparecem na definição de um espaço de Menger podem ser tomadas enumeráveis e, portanto, no modelo original. Nós podemos mostrar um resultado análogo para D -espaços para os quais N não tem uma estratégia vencedora para o JONAP. Antes de provarmos isso, mostraremos um lema:

Lema 5.4.1. *Sejam X um espaço topológico e $\mathbb{P}$ um forcing enumeravelmente fechado. Sejam $p \in \mathbb{P}$ e $(\dot{V}_x)_{x \in X}$ tais que $p \Vdash “(\dot{V}_x)_{x \in X} \text{ é um o.n.a. para } \check{X}”$ e $p \Vdash \check{X} \text{ é de Lindelöf}$. Seja $U \subset X$ um aberto. Então existem $q \leq p$, um subconjunto enumerável $A \subset X \setminus U$ e $(\dot{V}_x)_{x \in A}$ tais que $q \Vdash “\dot{V}_A \cup \check{U} = \check{X} \text{ e } \dot{V}_x = \dot{V}_x \text{ para cada } x \in A”$.*

Demonstração. Note que $p \Vdash \check{X} \setminus U$ é de Lindelöf. Então, $p \Vdash “\text{existe } \dot{A} \text{ enumerável tal que } \dot{V}_A \supset \check{X} \setminus \check{U} \text{ e } \dot{A} \cap \check{U} = \emptyset”$. Seja $q' \leq p$ tal que q' decide $\dot{A}$ e seja $q \leq q'$ tal que q decide $(\dot{V}_x)_{x \in A}$. $\square$

Proposição 5.4.2. *Seja X um espaço topológico para o qual N não tem uma estratégia vencedora para o JONAP. Seja $\mathbb{P}$ um forcing enumeravelmente fechado tal que $\mathbb{P} \Vdash \check{X} \text{ é Lindelöf}$. Então $\mathbb{P} \Vdash \check{X} \text{ é um } D\text{-espaço}$.*

Demonstração. Vamos definir uma estratégia para N e, para cada jogada possível de N vamos associar um $p \in \mathbb{P}$ da seguinte maneira:

- Na primeira rodada, N escolhe $(V_x)_{x \in A}$, onde A é escolhido como no lema anterior aplicado a 1 e o conjunto vazio. O q dado pelo lema é o elemento associado a essa jogada.
- Seja $(V_x)_{x \in Y}$ a jogada de N na rodada n . Sejam p o elemento associado a essa jogada e $D \subset Y$ o discreto fechado escolhido por C . Na rodada $n + 1$, o jogador N escolhe $(V_x)_{x \in A}$ onde A é o dado pelo lema aplicado a p e U , onde U é a união de todos os V_D 's já jogados por C . A condição do forcing associada a essa jogada é o $q \leq p$ dado pelo lema.

Como N não tem estratégia vencedora, existe $(D_n)_{n \in \omega}$ onde D_n é o escolhido por C na rodada n tal que $\bigcup_{n \in \omega} V_{D_n} = X$. Note que $D = \bigcup_{n \in \omega} D_n$ é um discreto fechado. Sejam $(p_n)_{n \in \omega}$ as condições do forcing associadas às jogadas de N nesta partida. Note que $p_{n+1} \leq p_n$. Seja $p \leq p_n$ para cada n . Note que $p \Vdash \check{V}_D = X$ e $\check{V}_x = \check{V}_x$ para todo $x \in \check{D}$. Assim, p força que X é um D -espaço. $\square$

Uma das dificuldades em se provar que um determinado espaço é um D -espaço é de determinar onde procurar pelo núcleo discreto fechado. Para um o.n.a. $(V_x)_{x \in X}$ fixado, pode-se facilmente escolher um subconjunto enumerável, no caso de espaços de Lindelöf. Tome um submodelo enumerável M tal que $(V_x)_{x \in X} \in M$. É fácil ver que, se $(V_x)_{x \in X}$ tem um núcleo discreto fechado, então ele tem algum que seja um subconjunto de $M \cap X$ (pois existe um núcleo enumerável que é elemento de M). Se assumirmos que X é um espaço de Menger, podemos melhorar ainda um pouco:

Proposição 5.4.3. *Sejam X um espaço de Menger e $(V_x)_{x \in X}$ um o.n.a.. Se $Y \subset X$ é tal que para todo $F \subset Y$ finito, $V_F \cup V_{Y \setminus V_F} = X$, então existe um discreto fechado (em X) $D \subset Y$ tal que $V_D = X$.*

Demonstração. Suponha que não. Considere a seguinte estratégia para o jogador N no jogo de Menger. A cada rodada, N define $\mathcal{U}_n = \{\bigcup_{m < n} U_m \cup V_F : F \subset Y \setminus \bigcup_{m < n} U_m \text{ é finito}\}$. Como cada U_m é uma união finita de V_x 's com $x \in Y$, pelas nossas hipóteses sobre Y , $\mathcal{U}_n$ é uma cobertura para X . Assim como no JONAP, note que, se $\bigcup_{n \in \omega} U_n = X$, então $\bigcup_{n \in \omega} F_n$, onde cada $U_n = V_{F_n}$ é um discreto fechado. Como não existe tal discreto fechado dentro de Y , o jogador N vence o jogo, contrariando o fato que N não tem uma estratégia vencedora. $\square$

Voltando aos exemplos dos nossos primeiros capítulos, temos:

Proposição 5.4.4. *Seja T uma árvore de Suslin com a topologia CL ou CF. Então T é um D -espaço.*

Demonstração. Basta notar que, pela proposição 4.4.5, T é de Rothberger. $\square$

Há uma demonstração direta do resultado anterior em [30].

Capítulo 6

Perguntas

Como uma forma de conclusão deste trabalho, apresentamos agora algumas perguntas que formulamos durante este trabalho e para as quais não temos respostas até o momento.

Provavelmente a pergunta em aberto mais interessante sobre propriedades discretamente reflexivas é a de se a propriedade de ser de Lindelöf é discretamente reflexiva. A melhor resposta parcial é a de que se todo fecho de discreto é de Lindelöf, então o espaço todo é linearmente Lindelöf ¹ ([1]). Indo em outra direção temos, pelo lema de Šapírovski (Lema 1.2.4) que se todo discreto tem o fecho enumerável, então o espaço é de Lindelöf. Logo, temos a motivação para a seguinte pergunta:

Pergunta 6.0.5. Se X é tal que, para todo discreto $D \subset X$, $\overline{D}$ é de Rothberger (Menger), então X é de Lindelöf?

Podemos também pedir mais e simplesmente perguntar se tais propriedade são discretamente reflexivas (note que uma resposta afirmativa a essa pergunta implica uma afirmativa para a anterior):

Pergunta 6.0.6. A propriedade de ser de Rothberger (Menger) é discretamente reflexiva?

Note que temos uma resposta parcial para essa pergunta na Proposição 4.2.9.

Um tipo de problema de reflexão muito estudado mas que não foi apresentado neste trabalho é o de, dado um espaço satisfazendo uma determinada propriedade, existe um subespaço de cardinalidade menor que também satisfaça a propriedade (ver, por exemplo, [36]). Um problema interessante é:

¹Dizemos que um espaço X é linearmente de Lindelöf se toda cobertura totalmente ordenada pela inclusão tem subcobertura enumerável.

Pergunta 6.0.7. Suponha que exista um espaço de Lindelöf X que não seja um D -espaço. É verdade que existe um subespaço $Y \subset X$ que também seja de Lindelöf, não seja um D -espaço e tal que $|Y| = \omega_1$?

Note que uma resposta afirmativa para a pergunta anterior nos daria uma resposta consistente para o problema principal, isto é, se é verdade que todo espaço de Lindelöf é um D -espaço. Isso porque é consistente que todo espaço de Lindelöf de cardinalidade ω_1 é um espaço de Menger (Proposição 4.3.5) que, por sua vez, provamos ser um D -espaço (Corolário 5.2.6).

Lembre que a propriedade de Alster é equivalente, sob certas hipóteses, a produtivamente Lindelöf (Teorema 4.3.9) e também que ela implica a propriedade de Menger (Proposição 4.3.10). Como sabemos que ser de Menger implica ser D -espaço (Corolário 5.2.6), a seguinte pergunta se justifica:

Pergunta 6.0.8. Ser produtivamente Lindelöf implica ser D -espaço?

Sabemos também que se X é de Alster, então X^ω é de Lindelöf ([2]). Assim, a próxima pergunta também se justifica pelo comentário anterior:

Pergunta 6.0.9. Se X é tal que X^ω é de Lindelöf, então X é um D -espaço?

Em [35], há uma caracterização para espaços cuja propriedade de ser de Lindelöf é preservada por forcing enumeravelmente fechado. Tal propriedade é implicada trivialmente pela propriedade de Rothberger que, por sua vez, implica D -espaço. Assim, fazemos a seguinte pergunta:

Pergunta 6.0.10. Se um espaço tem a propriedade “ser de Lindelöf” preservada por forcings enumeravelmente fechados, então ele é um D -espaço?

Referências Bibliográficas

- [1] O. T. Alas, V. V. Tkachuk, and R. G. Wilson. Closures of discrete sets often reflect global properties. In *Proceedings of the 2000 Topology and Dynamics Conference (San Antonio, TX)*, volume 25, pages 27–44, 2000.
- [2] K. Alster. On the class of all spaces of weight not greater than ω_1 whose cartesian product with every lindelöf space is lindelöf. *Fund. Math.*, 129:133–140, 1988.
- [3] A. V. Arhangel'skii and R. Z. Buzyakova. Addition theorems and D -spaces. *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 43(4):653–663, 2002.
- [4] L. F. Aurichi. D -spaces, topological games and selection principles. *submitted*, 2009.
- [5] L. F. Aurichi. Examples from trees, related to discrete subsets, pseudo-radiality and ω -boundedness. *Topology and its Applications*, 156(4), 2009.
- [6] L. F. Aurichi, L. R. Junqueira, and P. Larson. D -spaces, irreducibility and trees. *Topology Proceedings*, *accepted*, 2009.
- [7] L. F. Aurichi and F. D. Tall. Lindelöf spaces which are indestructible, productive, or D . *submitted*, 2009.
- [8] L. Babinkostova and M. Scheepers. Combinatorics of open covers. IV. Basis properties. *Note Mat.*, 22(2):167–178, 2003/04.
- [9] A. Bella and P. Simon. Spaces which are generated by discrete sets. *Topology Appl.*, 135(1-3):87–99, 2004.
- [10] R. Z. Buzyakova. On D -property of strong Σ spaces. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 43(3):493–495, 2002.
- [11] R. R. Dias. *Reflexão de funções cardinais e da metrizabilidade*. Dissertação de Mestrado. IME-USP, 2008.
- [12] A. Dow. Closures of discrete sets in compact spaces. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 42(2):227–234, 2005.

- [13] A. Dow, M. G. Tkachenko, V. V. Tkachuk, and R. G. Wilson. Topologies generated by discrete subspaces. *Glas. Mat. Ser. III*, 37(57)(1):187–210, 2002.
- [14] T. Eisworth. On D -spaces. In *Open problems in topology II*, pages 129–134. Elsevier, Amsterdam, 2007.
- [15] R. Engelking. *General topology*, volume 6 of *Sigma Series in Pure Mathematics*. Heldermann Verlag, Berlin, second edition, 1989. Translated from the Polish by the author.
- [16] F. Galvin. Indeterminacy of point-open games. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 26(5):445–449, 1978.
- [17] J. Gerlits and I. Juhász. On left-separated compact spaces. *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 19(1):53–62, 1978.
- [18] R. Hodel. Cardinal functions I. In K. Kunen and J. E. Vaughan, editors, *Handbook of set-theoretic topology*, pages 1–62. North-Holland, 1984.
- [19] W. Hurewicz. Über eine Verallgemeinerung des Borelschen Theorems. *Math. Z.*, 24(1):401–421, 1926.
- [20] T. Jech. *Set theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, 2003. The third millennium edition, revised and expanded.
- [21] I. Juhász and W. Weiss. Omitting the cardinality of the continuum in scattered spaces. *Topology Appl.*, 31(1):19–27, 1989.
- [22] L. R. Junqueira and F. D. Tall. More reflections on compactness. *Fund. Math.*, 176(2):127–141, 2003.
- [23] K. Kunen. *Set Theory. An introduction to independence proofs*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 102. North-Holland Publishing Co., 1980.
- [24] E. Michael. Paracompactness and the lindelöf property in finite and countable cartesian products. *Compositio Math.*, 23:199–214, 1971.
- [25] J. T. Moore. A solution to the L space problem. *J. Amer. Math. Soc.*, 19(3):717–736 (electronic), 2006.
- [26] P. J. Nyikos. On first countable, countably compact spaces. III. The problem of obtaining separable noncompact examples. In *Open problems in topology*, pages 127–161. North-Holland, Amsterdam, 1990.
- [27] P. J. Nyikos. Various topologies on trees. In *Proceedings of the Tennessee Topology Conference (Nashville, TN, 1996)*, pages 167–198. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1997.

- [28] P. J. Nyikos. First countable, countably compact, noncompact spaces. In *Open problems in topology II*. Elsevier, 2007.
- [29] J. Pawlikowski. Undetermined sets of point-open games. *Fund. Math.*, 144(3):279–285, 1994.
- [30] L. Peng. On linear neighborhood assignments and dually discrete spaces. *Top. and its App.*, 155:1867–1874, 2008.
- [31] J. M. Roitman. Basic S and L . In K. Kunen and J. E. Vaughan, editors, *Handbook of set-theoretic topology*, pages 295–326. North-Holland, 1984.
- [32] M. Scheepers. Selection principles and covering properties in topology. *Note Mat.*, 22(2):3–41, 2003/04.
- [33] M. Scheepers. Topological games and ramsey theory. In *Open problems in topology II*. Elsevier, 2007.
- [34] M. Scheepers and F. D. Tall. Lindelöf indestructibility, topological games and selection principles. *preprint*, 2009.
- [35] F. D. Tall. On the cardinality of Lindelöf spaces with points G_δ . *Topology Appl.*, 63(1):21–38, 1995.
- [36] F. D. Tall. Reflection of topological properties to $\aleph_1$. In *Open problems in topology II*. Elsevier, Amsterdam, 2007.
- [37] V. V. Tkachuk. Spaces that are projective with respect to classes of mappings. *Trudy Moskov. Mat. Obshch.*, 50:138–155, 261–262, 1987.
- [38] B. Tsaban. Selection principles and special sets of reals. In *Open problems in topology II*. Elsevier, 2007.
- [39] E. K. van Douwen and W. F. Pfeffer. Some properties of the Sorgenfrey line and related spaces. *Pacific J. Math.*, 81(2):371–377, 1979.

Notação

CH , 15

$L_\xi(T)$, 15

V_Y , 49

V_t , 22

W_F , 22

X^α , 14

X_M , 42

$\chi(X)$, 13

$\chi(x, X)$, 13

$\leq^*$, 45

$\mathfrak{d}$, 45

$\omega^{<\omega}$, 15

$l(t)$, 15

sT , 23

$suc(t)$, 15

$\mathcal{F}(T)$, 15

Índice Remissivo

- D -espaço, 49
- L -espaço, 29
- ω -árvore
 - cobertura, de, 41
- ω -bounded, 36
- ω -bounded
 - forte, 36
- ω -uniforme
 - base, 56
- árvore, 15
- árvore
 - Aronszajn, de, 36
 - Suslin, de, 25
- forcing*
 - Cohen, de, 18
- Alster
 - espaço de, 46
- altura, 14
- Aronszajn
 - árvore de, 36
- axioma
 - Martin, de, 15
- base
 - ω -uniforme, 56
 - local, 13
- caráter, 13
- CF, 22
- cheia, 15
- CL, 22
- cobertura
 - ω -árvore de, 41
 - elemento de, 41
- Cohen
 - forcing* de, 18
 - real de, 18
- concentrado, 47
- contínuo
 - hipótese do, 15
- cunha
 - finá, 22
 - larga, 22
- desenvolvível
 - espaço, 50
- determinado, 19
- dimensional
 - zero -, 14
- discretamente
 - gerado, 34
 - reflexiva, 21
- disperso
 - espaço, 14
- dominante, 45
- elementar
 - submodelo, 16
- elemento
 - cobertura, de, 41
- enumeravelmente
 - fechado, 17
- espaço
 - Alster, de, 46
 - desenvolvível, 50
 - disperso, 14
 - Lusin, de, 47
 - Menger, de, 44
 - Rothberger, de, 40
- esquerda
 - separado à, 29
- estratégia
 - parcial, 56
 - vencedora, 19
- estratégias, 18
- estrela
 - jogo, 54
- fechada
 - rodada, 56
- fechado

- enumeravelmente, 17
- fin
 - cunha, 22
- folha, 15
- forte
 - ω -bounded, 36
- fortemente
 - inacessível, 27
- gerado
 - discretamente, 34
- hipótese
 - contínuo, do, 15
- inacessível
 - fortemente, 27
- jogo
 - estrela, 54
 - Menger, de, 44
 - o.n.a's parciais, dos, 52
 - Rothberger, de, 40
- JONAP, 52
- larga
 - cunha, 22
- Lindelöf
 - produtivamente, 45
- local
 - base, 13
- Lusin
 - espaço de, 47
- Martin
 - axioma de, 15
- Menger
 - espaço de, 44
 - jogo de, 44
- núcleo, 49
- o.n.a's parciais
 - jogo dos, 52
- o.n.a., 49
- parcial
 - estratégia, 56
- ponto
 - remoto, 34
- preserva, 17
- produtivamente
 - Lindelöf, 45
- pseudo-radial, 34
- radial, 34
- ramo, 15
- real
 - Cohen, de, 18
- reflexiva
 - discretamente, 21
- remoto
 - ponto, 34
- rodada
 - fechada, 56
- Rothberger
 - espaço de, 40
 - jogo de, 40
- separado
 - esquerda, à, 29
- submodelo
 - elementar, 16
- Suslin
 - árvore de, 25
- vencedora
 - estratégia, 19
- zero -
 - dimensional, 14