Álgebras train

Bruno Leonardo Macedo Ferreira

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Henrique Guzzo Júnior

São Paulo, outubro de 2010

Álgebras train

Esta versão definitiva da dissertação
contém as correções e alterações sugeridas pela
Comissão Julgadora durante a defesa realizada
por Bruno Leonardo Macedo Ferreira em 10/12/2010.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Henrique Guzzo Júnior (orientador) - IME-USP.
- Prof. Dr. Luiz Antonio Peresi - IME-USP.
- Prof. Dr. João Carlos da Motta Ferreira - UFABC.

Resumo

Estudamos a estrutura de álgebras de potências associativas que são álgebras train. Primeiramente, mostramos a existência de idempotentes, que são todos principais e absolutamente primitivos. Em seguida, vemos as equações train envolvendo a decomposição de Peirce. Quando a álgebra é de dimensão finita, resulta que a dimensão das componentes de Peirce são invariantes e o limite superior para seus nilíndices são estudados para alguns idempotentes. Além disso, mostramos que as álgebras localmente train são álgebras train. Damos então uma descrição completa para o conjunto dos idempotentes para obter suas fórmulas explícitas. É voltada uma atenção para o caso de álgebras de Jordan, onde discutimos condições para que álgebras train de potências associativas sejam álgebras de Jordan. Também mostramos que álgebras train de Jordan são de dimensão finita. Para álgebras de Bernstein de ordem n e período p , provamos que para termos associatividade nas potências necessitamos $p = 1$. Neste caso, existem 2^{n-1} possibilidades de equações train, que são explicitamente descritas.

Abstract

We study the structure of power associative algebras which are train algebras. First we show the existence of idempotents, which are all principal and absolutely primitive. Then consider the train equations involving the Peirce decomposition. When the algebra is finite dimensional, it follows that the size of the Pierce components are invariant and the upper limit for its nil-indexes are studied for some idempotent. Furthermore, we show that locally train algebras are train algebras. Then we get a complete description for the set of idempotents to obtain their explicit formulas. We give attention to the case of Jordan algebras, where we discuss conditions for train power associative algebras be Jordan algebras. We also show that Jordan train algebras are finite dimensional. For Bernstein algebras of order n and period p , we prove that to have associativity in the powers we need $p = 1$. In this case, there are 2^{n-1} possibilities of train equations, which are explicitly described.

Sumário

Introdução	xi
1 Preliminares	1
1.1 Resultados básicos	1
1.2 Álgebras básicas	2
1.3 Álgebras train	3
1.4 Álgebras de potências associativas	7
1.5 A álgebra $A^{(+)}$	14
1.6 Identidades envolvendo L_x e R_x	15
1.7 Álgebra alternativa	17
1.8 Idempotente em álgebra de Jordan	19
1.9 Idempotente em álgebras comutativas	21
2 Álgebras train	30
2.1 Álgebras associativas nilpotentes	30
2.2 Álgebras básicas associativas	33
2.3 Álgebras train de potências associativas	34
2.4 Representação (s, t) de uma álgebra train de potências associativas . .	39
2.5 Álgebra básica localmente train	41
3 Conjunto de idempotentes em uma álgebra train	43
3.1 Parte A: Cálculo de idempotentes	43
3.2 Processo de unitização	46
3.3 Parte B: Caracterização do conjunto dos idempotentes	50

4	Álgebras train de Jordan	56
5	Álgebras train e de Bernstein de ordem arbitrária	62
5.1	Álgebras de Bernstein de ordem n e período p	62
5.2	Decomposição de Peirce	62
	Referências Bibliográficas	72

Introdução

O estudo de álgebras de potências associativas assume um importante lugar na teoria das álgebras quase associativas, incluindo as álgebras de Jordan cuja origem vem da formulação algébrica da mecânica quântica. Outro grupo de álgebras não associativas consiste das álgebras train, que foram introduzidas por Etherington [7]. As álgebras train tem sido estudadas de diversos pontos de vista, particularmente para aquelas de posto pequeno.

Contudo, devido sua complexidade, pouco sabe-se sobre as álgebras train de posto arbitrário. Em [28], Schafer descobriu a presença de algumas álgebras de Jordan entre as álgebras train. Motivados por estes resultados, Ouattara subsequentemente apresentou um estudo sobre as álgebras train de Jordan em um contexto mais geral [23]. Depois Guzzo e Vicente [12] criaram os coeficientes das equações train de uma álgebra de potências associativas. Mallol e Varro [19] usaram a decomposição de Peirce para analisar a equação train de uma álgebra train que é de potências associativas ou alternativa.

A existência de idempotentes em álgebras de potências associativas, tão bem quanto em álgebras train, é muito importante, já que os idempotentes produzem as decomposições de Peirce delas [1, 10, 13, 29].

A principal meta da presente dissertação é desenvolver uma estrutura teórica para as álgebras de potências associativas que são álgebras train. Esta dissertação está organizada como segue.

O primeiro capítulo são as preliminares, onde resumimos notações, terminologia e propriedades clássicas, das álgebras train e álgebras de potências associativas.

No capítulo 2, provamos a existência de idempotentes, que são principais e absolutamente primitivos. Em particular, para as álgebras de dimensão finita, estabelecemos o limite superior para os nilíndices das componentes de Peirce, que são independentes dos idempotentes. Mostramos também que toda álgebra localmente train é uma álgebra train.

No capítulo 3, estudamos dois métodos diferentes na ação do conjunto dos idempotentes, fornecendo suas expressões específicas.

No capítulo 4, damos uma atenção para o caso de álgebras de Jordan dando condições para as álgebras train de potências associativas serem álgebras de Jordan e também que as álgebras train de Jordan finitamente geradas são de dimensão finita.

No capítulo 5, dedicamos ao estudo de álgebras de Bernstein de ordem n , onde estabelecemos que alguma álgebra de Bernstein de potências associativas de ordem n e período p é necessariamente uma álgebra de Bernstein de ordem n . Além disso, 2^{n-1} possibilidades de equações train são criadas para álgebras de Bernstein de ordem n que são de potências associativas.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Resultados básicos

Neste capítulo resumiremos notações, terminologia e propriedades clássicas das álgebras train e das álgebras de potências associativas. *Ao longo desse trabalho, a menos que mencionado o contrário, A será uma álgebra comutativa de dimensão arbitrária sobre um corpo F infinito de característica diferente de 2, 3 e 5 mesmo que alguns resultados funcionem apenas com a característica diferente de 2.*

Definição 1.1. *Uma **álgebra** A é um espaço vetorial sobre um corpo F , onde está definida uma operação de **multiplicação** que associa todo par de elementos $x, y \in A$ ao produto $xy \in A$, que verifica as seguintes propriedades:*

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y);$$

$$x(y + z) = xy + xz;$$

$$(y + z)x = yx + zx;$$

quaisquer que sejam os elementos $x, y, z \in A$ e $\alpha \in F$.

Definição 1.2. *Uma **subálgebra** S da álgebra A é um subespaço vetorial de A tal que $ax \in S$, para quaisquer $a, x \in S$. Seja S um subespaço vetorial de A . Se $ax \in S$, para quaisquer $a \in A$ e $x \in S$, então S é chamado **ideal à esquerda** de A . Se $xa \in S$, para quaisquer $a \in A$ e $x \in S$, então S é chamado **ideal à direita** de A . Quando S é ideal à esquerda e à direita de A , dizemos que S é ideal de A .*

Definição 1.3. Uma álgebra A é denominada uma **álgebra comutativa** se $xy = yx$, para quaisquer $x, y \in A$ e **associativa** se $(xy)z = x(yz)$, para quaisquer $x, y, z \in A$.

1.2 Álgebras básicas

Definição 1.4. Seja F um corpo. Se A é uma álgebra sobre F e $\omega: A \longrightarrow F$ um homomorfismo não nulo de álgebras, o par ordenado (A, ω) será chamado de uma **álgebra básica** ou uma **b-álgebra** sobre F e ω de sua **função peso**. Denotamos por H o hiperplano $H = \{x \in A \mid \omega(x) = 1\}$, notemos que $H \neq \emptyset$, pois existe $x_0 \in A$, tal que $\omega(x_0) \neq 0$, logo $y_0 = \omega(x_0)^{-1}x_0 \in H$.

Observação 1.1. Sejam (A, ω) uma b-álgebra e $a \in A$ um elemento de peso não nulo. Então $A = Fa \oplus \ker(\omega)$. De fato, para todo $x \in A$, temos que $x = \frac{\omega(x)}{\omega(a)}a + \left(x - \frac{\omega(x)}{\omega(a)}a\right)$. Como $\omega\left(x - \frac{\omega(x)}{\omega(a)}a\right) = \omega(x) - \frac{\omega(x)}{\omega(a)}\omega(a) = 0$, temos que $x - \frac{\omega(x)}{\omega(a)}a \in \ker(\omega)$. Além disso, se $x \in Fa \cap \ker(\omega)$, então $x = \alpha a$, para algum $\alpha \in F$ e $\omega(x) = 0$. Logo, $0 = \omega(\alpha a) = \alpha\omega(a)$. Assim, $\alpha = 0$, pois $\omega(a) \neq 0$. Logo, $Fa \cap \ker(\omega) = \{0\}$.

Definição 1.5. Sejam A uma álgebra, B um subconjunto não vazio de A e $x \in A$. Definimos:

(i) **Potência principal à esquerda e à direita de x , respectivamente:**

$${}^1x = x \quad {}^{n+1}x = x({}^nx), \text{ para todo } n \geq 1;$$

$$x^1 = x \quad x^{n+1} = (x^n)x, \text{ para todo } n \geq 1.$$

(ii) **Potência plena de x :**

$$x^{[1]} = x \quad x^{[n]} = x^{[n-1]}x^{[n-1]}, \text{ para todo } n > 1.$$

(iii) **Potência principal à esquerda e à direita de B , respectivamente:**

$${}^1B = B \quad {}^{n+1}B = B({}^nB), \text{ para todo } n \geq 1;$$

$$B^1 = B \quad B^{n+1} = (B^n)B, \text{ para todo } n \geq 1.$$

(iv) **Potência plena de B :**

$$B^{[1]} = B \quad B^{[n]} = B^{[n-1]}B^{[n-1]}, \text{ para todo } n > 1.$$

(v) **Potência produto de B :**

$$B^{(1)} = B \quad B^{(n)} = B^{(n-1)}B + B^{(n-2)}B^{(2)} + \dots + BB^{(n-1)}, \text{ para todo } n > 1.$$

Definição 1.6. *Seja (A, ω) uma b -álgebra. Se $e \in A$, é tal que $e^2 = e$ e $w(e) = 1$ então e é chamado de **idempotente** de A de peso 1.*

Observemos que se $e^2 = e$, ${}^2e = e$ ou $e^{[2]} = e^2 = e$, então $e^n = e$, ${}^ne = e$ ou $e^{[n]} = e$, respectivamente, para qualquer $n \geq 1$. Além disso, $w(e) = 0$ ou $w(e) = 1$.

Proposição 1.1. *Seja (A, ω) uma álgebra bárica, tal que para cada $x \in \ker(\omega)$, existe $n \in \mathbb{N}$, onde $x^n = 0$ ou ${}^nx = 0$ ou $x^{[n]} = 0$. Então a função peso é única.*

Demonstração: Seja (A, ω) uma álgebra bárica e suponhamos que ω' seja outra função peso de A . Considere $x \in \ker(\omega)$, tal que $x^n = 0$. Logo $\omega'(x) = 0$ e portanto $x \in \ker(\omega')$, segue que $\ker(\omega) \subset \ker(\omega')$. Agora tome $x_0 \in A$, tal que $\omega'(x_0) = 1$. Como $\ker(\omega) \subset \ker(\omega')$, segue que, $x_0 \notin \ker(\omega)$. Logo $\omega(x_0) \neq 0$. Então $A = Fx_0 + \ker(\omega)$. Como $x_0^2 \in A$, então $x_0^2 = \alpha x_0 + y$, onde $\alpha \in F$ e $y \in \ker(\omega)$. Aplicando ω' em x_0^2 , obtemos $\omega'(x_0^2) = \alpha \omega'(x_0)$, portanto $\alpha = 1$. Daí $x_0^2 = x_0 + y$, aplicando ω , temos $\omega(x_0)^2 = \omega(x_0)$, o que implica $\omega(x_0)(\omega(x_0) - 1) = 0$, como $\omega(x_0) \neq 0$, então $\omega(x_0) = 1$. Portanto, para todo $x \in A$, temos que $x = \alpha x_0 + y$, onde $\alpha \in F$ e $y \in \ker(\omega)$, o que implica $\omega'(x) = \alpha = \omega(x)$. $\square$

1.3 Álgebras train

Neste parágrafo A será uma F -álgebra de dimensão finita.

Definição 1.7. *Sejam A uma álgebra, F um corpo e $x \in A$. Definimos*

(i) *O operador multiplicativo à direita de A , determinado por x*

$$\begin{aligned} R_x: \quad A &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto ax \end{aligned}$$

(ii) *O operador multiplicativo à esquerda de A , determinado por x*

$$\begin{aligned} L_x: \quad A &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto xa \end{aligned}$$

Definição 1.8. A álgebra bárica comutativa (A, ω) é chamada álgebra **train** se para cada $x \in A$, o polinômio característico do operador linear L_x sobre A depende somente da função peso, isto é, existe $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ em F (não depende de x) tal que

$$P_{L_x}(X) = X^k + \gamma_1 \omega(x) X^{k-1} + \dots + \gamma_k \omega(x)^k \quad (1.1)$$

onde L_x é o operador multiplicativo a esquerda e P_{L_x} é o polinômio característico de L_x .

Proposição 1.2. Uma álgebra bárica (A, ω) é uma álgebra train se, e somente se, existe um polinômio $p(X)$ tal que para todo $x \in A$ com $\omega(x) = 1$, temos que $p(L_x) \equiv 0$.

Demonstração: Suponhamos que A seja uma álgebra train. Então o polinômio característico de L_x é o mesmo para todo $x \in H$ e consequentemente pelo Teorema de Cayley-Hamilton segue o resultado. Agora, suponha que existe um polinômio não nulo $p(X)$ em $F[X]$ tal que $p(L_x) \equiv 0$, para todo $x \in H$. Sejam $e \in H$ e $\{u_1, \dots, u_{n-1}\}$ base do $\ker(\omega)$. Então, cada $x \in H$ é dado por $x = e + \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{n-1} u_{n-1}$ com $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in F$. O polinômio característico de L_x tem a seguinte forma

$$p_{L_x}(X) = X^n - f_1(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) X^{n-1} + \dots + (-1)^n f_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}),$$

onde $f_i(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ são polinômios de grau igual a i ou a zero. A condição $p(L_x) \equiv 0$ implica que o conjunto dos autovalores de L_x está contido entre as raízes de $p(X)$. Como existe somente um número finito de polinômios de grau n cujas raízes são os autovalores de L_x , temos que $\text{Im}(f_i)$ é finito. Logo, como um polinômio sobre um corpo infinito é constante ou sua imagem é infinita, segue que os polinômios f_i são constantes.

□

Proposição 1.3. Seja (A, ω) uma álgebra bárica, $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1} \in F$ e $P(X) = X^n + \gamma_1 \omega(x) X^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(x)^{n-1} X$. Se $P(x) = 0$, para todo $x \in H$, então $P(x) = 0$ para todo $x \in A$.

Demonstração: Ver em [18]

□

Observação 1.2. Seja (A, ω) uma álgebra train e considere $m(X) = X^{n-1} + \gamma_1 X^{n-2} + \dots + \gamma_{n-2} X + \gamma_{n-1}$ o polinômio de menor grau tal que $m(L_x) \equiv 0$, para todo $x \in H$.

Temos que para todo $x \in H$, $m(L_x)(x) = 0$ o que implica em

$$x^n + \gamma_1 x^{n-1} + \cdots + \gamma_{n-1} x = 0. \quad (1.2)$$

Assim, se $x \in A$, com $w(x) \neq 0$, então para $w(x)^{-1}x$ temos

$$x^n + \gamma_1 \omega(x) x^{n-1} + \cdots + \gamma_{n-1} \omega(x)^{n-1} x = 0. \quad (1.3)$$

Como (1.3) vale para todo $x \in H$, então pela Proposição 1.3 temos que (1.3) vale para todo $x \in A$.

Definição 1.9. A equação (1.3) será chamada a **equação train** de A , onde $n \geq 2$ é o **posto** de A , que é o menor inteiro para que tal equação seja verdadeira.

Observação 1.3. Seja (A, ω) uma álgebra train com equação train (1.3). Então, $1 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_{n-1} = 0$ e $y^n = 0$, para todo $y \in \ker(\omega)$.

De fato, notemos que aplicando ω em (1.3) e usando que ω é um homomorfismo, obtemos que

$$\begin{aligned} \omega(x^n + \gamma_1 \omega(x) x^{n-1} + \cdots + \gamma_{n-1} \omega(x)^{n-1} x) &= 0; \\ \omega(x^n) + \gamma_1 \omega(x) \omega(x^{n-1}) + \cdots + \gamma_{n-1} (\omega(x))^{n-1} \omega(x) &= 0; \\ \omega(x^n) + \gamma_1 \omega(x^n) + \gamma_{n-1} \omega(x^n) &= 0; \\ (\omega(x))^n (1 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_{n-1}) &= 0, \end{aligned}$$

para todo $x \in A$. Para $x \in H$, concluímos que

$$1 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_{n-1} = 0.$$

Por outro lado, se $y \in \ker(\omega)$, então de (1.3), claramente $y^n = 0$.

Observação 1.4. Se (A, ω) é uma álgebra train, então para todo $x \in \ker(\omega)$, $x^n = 0$ e segue da Proposição 1.1 que a função peso ω é única.

Definição 1.10. Seja (A, ω) uma álgebra train com equação train (1.3), então o polinômio

$$p(X) = X^n + \gamma_1 X^{n-1} + \cdots + \gamma_{n-1} X \quad (1.4)$$

é chamado o **polinômio train** de A . Para todo $x \in H$ temos que $p(x) = 0$, notemos que 0 e 1 são raízes de $p(X)$. Em uma extensão apropriada de F , (1.4) é decomposto em fatores lineares

$$p(X) = X(X - 1)(X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_{n-2}), \quad (1.5)$$

onde $\lambda_0 = 1, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}$ são chamadas as **raízes principais train** de A .

De (1.5), concluimos que,

$$(L_x - \omega(x)I_A)(L_x - \lambda_1\omega(x)I_A) \cdots (L_x - \lambda_{n-2}\omega(x)I_A)(x) = x^n + \gamma_1\omega(x)x^{n-1} + \cdots + \gamma_{n-1}\omega(x)x^{n-1}x = 0$$

para todo $x \in A$, onde L_x é o operador multiplicativo à esquerda de A determinado por x e I_A é a transformação identidade.

Proposição 1.4. *Sejam (A, ω) uma álgebra train de posto n com equação train (1.3). Então*

$$I = \{q(X) \in F[X] \mid q(0) = 0 \text{ e } q(a) = 0 \forall a \in H\}$$

é um ideal de $F[X]$ gerado pelo polinômio train de A .

Demonstração: É fácil ver que I é um ideal de $F[X]$. Como $F[X]$ é um domínio de ideais principais, temos que $I = \langle q(X) \rangle$. Como A é uma álgebra train, temos

$$x^n + \gamma_1\omega(x)x^{n-1} + \cdots + \gamma_{n-1}\omega(x)x^{n-1}x = 0, \forall x \in A.$$

Em particular,

$$a^n + \gamma_1a^{n-1} + \cdots + \gamma_{n-1}a = 0, \forall a \in H.$$

Então $p(a) = 0$ para todo $a \in H$, onde $p(X) = X^n + \gamma_1X^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1}X$. Daí $p(X) \in I$. Agora $p(X)$ é o polinômio mônico de menor grau que está em I , logo $I = \langle p(X) \rangle$. $\square$

Observação 1.5. *É importante notar que todo $e \in A$ tal que $e^2 = e$ e $e \neq 0$, em uma álgebra train A , tem peso 1. De fato, seja $e \in A$ um idempotente. Então, como $e = e^2$,*

temos que $\omega(e) = \omega(e^2) = \omega(e)\omega(e)$, ou seja, $\omega(e)(\omega(e) - 1) = 0$ e portanto $\omega(e) = 0$ ou $\omega(e) = 1$. Por outro lado,

$$e^n + \gamma_1\omega(e)e^{n-1} + \cdots + \gamma_{n-1}\omega(e)^{n-1}e = 0;$$

$$e + \gamma_1\omega(e)e + \cdots + \gamma_{n-1}\omega(e)^{n-1}e = 0;$$

Se $\omega(e) = 0$, então $e = 0$, que é uma contradição.

Denotaremos por $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ ao subespaço vetorial de A gerado por $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Definição 1.11. Dados $x, y \in A$, define-se o **comutador** de x com y pela fórmula

$$[x, y] = xy - yx.$$

Observemos que o comutador é bilinear e anti-simétrico, isto é, dados $x, y, z \in A$, tem-se, respectivamente, que $[x, y + z] = [x, y] + [x, z]$ e $[x, y] = -[y, x]$.

Definição 1.12. Dados $x, y, z \in A$, define-se o **associador** de x, y e z por

$$(x, y, z) = (xy)z - x(yz).$$

1.4 Álgebras de potências associativas

Definição 1.13. Uma álgebra A é uma **álgebra de potências associativas** se para todo $x \in A$ a subálgebra $A(x)$ gerada por x é associativa.

De modo equivalente, podemos afirmar que uma álgebra A é de potências associativas se, e somente se, $x^i x^j = x^{i+j}$, para quaisquer $x \in A$ e $i, j \geq 1$.

Definição 1.14. Dizemos que um elemento $x \in A$ é **nilpotente** se existe um inteiro r tal que $x^r = 0$. O menor inteiro positivo r para o qual $x^r = 0$ é denominado **nilíndice** ou **índice de nilpotência** de x .

Definição 1.15. Diz-se que A é uma **nilálgebra** se todos os elementos de A são nilpotentes. O **nilíndice** da álgebra A é definido como sendo o menor inteiro positivo n tal que $a^n = 0$, para todo $a \in A$, caso exista.

Definição 1.16. *Se todos os elementos de um ideal B da álgebra A forem nilpotentes, então B é denominado um **nilideal**.*

Nosso objetivo agora é provar que A é uma F -álgebra de potências associativas se, e somente se, $x^2x^2 = x^4$ para todo $x \in A$, onde a característica de F é diferente de 2, 3 e 5 e A é uma F -álgebra comutativa. Primeiramente provaremos alguns resultados.

Proposição 1.5. *Seja A uma álgebra sobre um corpo F , cuja característica é diferente de 2. Se $xx^2 = x^2x$, para todo $x \in A$, então para quaisquer $x, y, z \in A$, tem-se que*

$$[xy + yx, z] + [yz + zy, x] + [zx + xz, y] = 0. \quad (1.6)$$

Demonstração: Por hipótese, temos que $[x^2, x] = 0$. Em particular, substituindo x por $x + \lambda y$, onde $\lambda \in F$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= [x^2, x] \\ &= [(x + \lambda y)^2, x + \lambda y] \\ &= [x^2 + \lambda xy + \lambda yx + \lambda^2 y^2, x + \lambda y] \\ &= [x^2, x] + \lambda([x^2, y] + [xy + yx, x]) + \lambda^2([y^2, x] + [yx + xy, y]) + \lambda^3[y^2, y] \\ &= \lambda T(x, y) + \lambda^2 U(x, y), \end{aligned}$$

em que, $T(x, y) = [x^2, y] + [xy + yx, x]$ e $U(x, y) = [y^2, x] + [yx + xy, y]$. Tomando $\lambda = 1$, obtemos $T(x, y) + U(x, y) = 0$ e $\lambda = -1$, fornece $-T(x, y) + U(x, y) = 0$. Então $2T(x, y) = 0$, ou seja, $T(x, y) = 0$. O próximo passo é substituir x por $x + \mu z$, onde $\mu \in F$ e $z \in A$, em $T(x, y) = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= T(x + \mu z, y) \\ &= [(x + \mu z)^2, y] + [(x + \mu z)y + y(x + \mu z), x + \mu z] \\ &= [x^2 + \mu xz + \mu zx + \mu^2 z^2, y] + [xy + \mu zy + yx + \mu yz, x + \mu z] \\ &= [x^2, y] + [xy + yx, x] + \mu([xz + zx, y] + [zy + yz, x] + [xy + yx, z]) \\ &\quad + \mu^2([z^2, y] + [zy + yz, z]) \\ &= T(x, y) + \mu W(x, y, z) + \mu^2 T(z, y), \end{aligned}$$

em que $W(x, y, z) = [xz + zx, y] + [zy + yz, x] + [xy + yx, z]$. Como $T = 0$, obtemos a igualdade fazendo $\mu = 1$. □

Notemos que se a característica de F for diferente de 2 e de 3, então fazendo $x = y = z$ em (1.6), temos $3[2x^2, x] = 0$. Logo, $6[x^2, x] = 0$. Assim $x^2x = xx^2$.

Proposição 1.6. *Seja A uma álgebra sobre um corpo F , cuja característica é diferente de 2. Se $x^ix^j = x^{i+j}$ para todo $x \in A$ para todos os inteiros positivos i e j tais que $i + j < n$ e $n \geq 4$, então*

$$n[x^{n-1}, x] = 0, \quad [x^{n-\alpha}, x^\alpha] = \alpha[x^{n-1}, x], \quad \alpha = 1, 2, \dots, n-1. \quad (1.7)$$

Demonstração:

Sejam α e β inteiros positivos com $\alpha + \beta < n$. Substituindo x , y e z por x^α , x^β e $x^{n-(\alpha+\beta)}$, respectivamente, na identidade (1.6), temos que $[x^\alpha x^\beta + x^\beta x^\alpha, x^{n-(\alpha+\beta)}] + [x^\beta x^{n-(\alpha+\beta)} + x^{n-(\alpha+\beta)} x^\beta, x^\alpha] + [x^{n-(\alpha+\beta)} x^\alpha + x^\alpha x^{n-(\alpha+\beta)}, x^\beta] = 0$. Logo $[x^{\alpha+\beta}, x^{n-(\alpha+\beta)}] + [x^{n-\alpha}, x^\alpha] + [x^{n-\beta}, x^\beta] = 0$, então

$$[x^{n-(\alpha+\beta)}, x^{\alpha+\beta}] = [x^{n-\alpha}, x^\alpha] + [x^{n-\beta}, x^\beta].$$

Usaremos esta última igualdade para provar a proposição. Fazendo $\alpha = 1, 2, \dots, n-1$ e $\beta = 1$, temos, respectivamente

$$[x^{n-2}, x^2] = [x^{n-1}, x] + [x^{n-1}, x],$$

$$[x^{n-3}, x^3] = [x^{n-2}, x^2] + [x^{n-1}, x],$$

.....

$$[x^{n-(k-1)}, x^{k-1}] = [x^{n-(k-2)}, x^{k-2}] + [x^{n-1}, x],$$

$$[x^{n-k}, x^k] = [x^{n-(k-1)}, x^{k-1}] + [x^{n-1}, x].$$

Somando membro a membro as igualdades acima, obtemos $[x^{n-k}, x^k] = k[x^{n-1}, x]$. Para $k = n-1$, segue da identidade anterior que $n[x^{n-1}, x] = 0$.

□

Corolário 1.7. *Com as mesmas hipóteses da Proposição 1.6. Se $\text{car} F = p > 0$ e p não divide n , então $[x^{n-\alpha}, x^\alpha] = 0$.*

Proposição 1.8. *Seja A uma álgebra sobre um corpo F , cuja a característica é diferente de 2. Se $x^2x^2 = (x^2x)x$, para todo $x \in A$, então*

$$\begin{aligned}
& (xy + yx)(zw + wz) + (xz + zx)(yw + wy) + (xw + wx)(zy + yz) \\
& + (zy + yz)(xw + wx) + (yw + wy)(xz + zx) + (zw + wz)(xy + yx) \\
& = [(zw + wz)y + (wy + yw)z + (yz + zy)w]x + [(zw + wz)x + (wx + xw)z \\
& + (xz + zx)w]y + [(xw + wx)y + (wy + yw)x + (yx + xy)w]z \\
& + [(zx + xz)y + (xy + yx)z + (yz + zy)x]\omega.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Demonstração: Substituindo x por $x + \lambda y$ na hipótese, para $x, y \in A$ e $\lambda \in F$, tem-se que

$$(x + \lambda y)^2(x + \lambda y)^2 - [(x + \lambda y)^2(x + \lambda y)](x + \lambda y) = 0.$$

Efetuando os cálculos, chegamos à $K + \lambda L + \lambda^2 M + \lambda^3 N + \lambda^4 P = 0$, onde

$$K = K(x) = x^2x^2 - x^3x = 0,$$

$$P = K(y) = y^2y^2 - y^3y = 0,$$

$$\begin{aligned}
L = L(x, y) &= x^2(xy) + x^2(yx) + (xy)x^2 + (yx)x^2 \\
&\quad - x^3y - ((xy)x)x - ((yx)x)x - (x^2y)x,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M = M(x, y) &= x^2y^2 + (xy)^2 + (xy)(yx) + (yx)(xy) + (yx)^2 + y^2x^2 - ((xy)y)x \\
&\quad - ((yx)x)y - (y^2x)x - (x^2y)y - ((xy)x)y - ((yx)y)x,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N = L(y, x) &= y^2(yx) + y^2(xy) + (yx)y^2 + (xy)y^2 - y^3x - ((yx)y)y - ((xy)y)y \\
&\quad - (y^2x)y.
\end{aligned}$$

Segue que $\lambda L + \lambda^2 M + \lambda^3 N = 0$. Quando $\lambda = 1$, temos que $L + M + N = 0$ e quando $\lambda = -1$, temos que $-L + M - N = 0$. Logo, $M(x, y) = 0$ e substituindo x por $x + \mu z$, onde $\mu \in F$ e $z \in A$ obtemos

$$\begin{aligned}
M(x + \mu z, y) &= (x + \mu z)^2y^2 + [(x + \mu z)y]^2 + [(x + \mu z)y][y(x + \mu z)] \\
&\quad + [y(x + \mu z)][(x + \mu z)y] + [y(x + \mu z)]^2 + y^2(x + \mu z)^2 \\
&\quad - [y^2(x + \mu z)](x + \mu z) - [((x + \mu z)y)y](x + \mu z) \\
&\quad - [(y(x + \mu z))y](x + \mu z) - [((x + \mu z)y)(x + \mu z)]y \\
&\quad - [(y(x + \mu z))(x + \mu z)]y - [(x + \mu z)^2y]y.
\end{aligned}$$

Isto fornece a equação $M(x + \mu z, y) = M(x, y) + \mu Q(x, y, z) + \mu^2 M(z, y)$, onde

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) = & y^2 (xz + zx) + (xz + zx)y^2 + (xy + yx)(zy + yz) + (zy + yz)(xy + yx) \\ & - (y^2x)z - z(y^2x) - [(xy + yx)y]z - [(zy + yz)y]x - [(xy + yx)z]y \\ & - [(zy + yz)x]y - [(xz + zx)y]y. \end{aligned}$$

Mas, como vimos acima, $M = 0$ e, assim, $Q(x, y, z) = 0$. Agora, substituindo y por $y + \alpha w$, encontramos a igualdade $Q(x, y, z) + \alpha R(x, y, z, w) + \alpha^2 Q(x, w, z) = 0$. Lembrando que Q é nula e fazendo $\alpha = 1$, obtemos o resultado, ou seja

$$\begin{aligned} & (xy + yx)(zw + wz) + (xz + zx)(yw + wy) + (xw + wx)(zy + yz) \\ & + (zy + yz)(xw + wx) + (yw + wy)(xz + zx) + (zw + wz)(xy + yx) \\ = & [(zw + wz)y + (wy + yw)z + (yz + zy)w]x + [(zw + wz)x + (wx + xw)z \\ & + (xz + xz)w]y + [(xw + wx)y + (wy + yw)x + (yx + xy)w]z \\ & + [(zx + xz)y + (xy + yx)z + (yz + zy)x]w. \end{aligned}$$

Assim fica provada a equação (1.8) □

Observemos que se a característica de F for diferente de 2 e de 3, então fazendo $x = y = z = w$ em (1.8), obtemos $x^2x^2 = x^3x$.

Proposição 1.9. *Seja A uma álgebra sobre um corpo F de característica diferente de 2, de 3 e de 5. Se $n \geq 5$ e $x^\lambda x^\mu = x^{\lambda+\mu}$, quaisquer que sejam os inteiros positivos λ e μ , com $\lambda + \mu < n$, então*

$$x^{n-\alpha}x^\alpha = x^{n-1}x + \frac{\alpha-1}{2}[x^{n-1}, x], \quad \alpha = 1, 2, \dots, n-1. \quad (1.9)$$

Demonstração:

Consideremos os inteiros positivos $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tais que $\alpha + \beta + \gamma + \delta = n$. Substituindo x por x^α , y por x^β , z por x^γ e w por x^δ em (1.8) obtemos

$$\begin{aligned} 4x^{\alpha+\beta}x^{\gamma+\delta} + 4x^{\alpha+\gamma}x^{\beta+\delta} + 4x^{\alpha+\delta}x^{\beta+\gamma} + 4x^{\beta+\gamma}x^{\alpha+\delta} + 4x^{\beta+\delta}x^{\alpha+\gamma} + 4x^{\gamma+\delta}x^{\alpha+\beta} = \\ 6x^{\beta+\gamma+\delta}x^\alpha + 6x^{\alpha+\gamma+\delta}x^\beta + 6x^{\alpha+\beta+\delta}x^\gamma + 6x^{\alpha+\beta+\gamma}x^\delta, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} 2(x^{\alpha+\beta}x^{\gamma+\delta} + x^{\gamma+\delta}x^{\alpha+\beta} + x^{\alpha+\gamma}x^{\beta+\delta} + x^{\beta+\delta}x^{\alpha+\gamma} + x^{\alpha+\delta}x^{\beta+\gamma} + x^{\beta+\gamma}x^{\alpha+\delta}) = \\ 3(x^{n-\alpha}x^\alpha + x^{n-\beta}x^\beta + x^{n-\gamma}x^\gamma + x^{n-\delta}x^\delta). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Aplicando a Proposição 1.9, substituindo $x^{n-\delta}x^\delta, x^{\alpha+\beta}x^{\gamma+\delta}, x^{\alpha+\gamma}x^{\beta+\delta}, x^{\beta+\gamma}x^{\alpha+\delta}$ pelos correspondentes termos com os dois fatores trocados, obtemos

$$3(x^{n-\alpha}x^\alpha + x^{n-\beta}x^\beta + x^{n-\gamma}x^\gamma + x^{n-(\alpha+\beta+\gamma)}x^{\alpha+\beta+\gamma}) = 4(x^{n-(\alpha+\beta)}x^{\alpha+\beta} + x^{n-(\alpha+\gamma)}x^{\alpha+\gamma} + x^{n-(\beta+\gamma)}x^{\beta+\gamma}) - (\alpha + \beta + \gamma)[x^{n-1}, x]. \quad (1.11)$$

Vamos discutir os casos em que $\alpha + \beta + \gamma = 3, 4$ e 5 . No primeiro caso, obrigatoriamente $\alpha = \beta = \gamma = 1$ e aplicando acima, temos que

$$3(x^{n-1}x + x^{n-1}x + x^{n-1}x + x^{n-3}x^3) = 4(x^{n-2}x^2 + x^{n-2}x^2 + x^{n-2}x^2) - 3[x^{n-1}, x],$$

$$x^{n-3}x^3 = 4x^{n-2}x^2 - 3x^n - [x^{n-1}, x]. \quad (1.12)$$

Se $\alpha + \beta + \gamma = 4$, pode ser que $\alpha = 2$ e $\beta = \gamma = 1$. Aplicamos na equação (1.11) e usando (1.12), fornecemos

$$3(x^{n-2}x^2 + x^{n-1}x + x^{n-1}x + x^{n-4}x^4) = 4(x^{n-3}x^3 + x^{n-3}x^3 + x^{n-2}x^2) - 4[x^{n-1}, x],$$

$$3x^{n-2}x^2 + 6x^{n-1}x + 3x^{n-4}x^4 = 8x^{n-3}x^3 + 4x^{n-2}x^2 - 4[x^{n-1}, x],$$

$$x^{n-4}x^4 = 11x^{n-2}x^2 - 10x^n - 4[x^{n-1}, x]. \quad (1.13)$$

Os casos em que $\alpha = \gamma = 1$ e $\beta = 2$ e em que $\alpha = \beta = 1$ e $\gamma = 2$ fornecem uma igualdade semelhante a (1.13) pela simetria em relação a α, β e γ . Agora, vejamos o que ocorre quando $\alpha + \beta + \gamma = 5$. Então $n > 6$ e se $\alpha = \beta = 2$ e $\gamma = 1$, segue de (1.11) que

$$3(x^{n-2}x^2 + x^{n-2}x^2 + x^{n-1}x + x^{n-5}x^5) = 4(x^{n-4}x^4 + x^{n-3}x^3 + x^{n-3}x^3) - 5[x^{n-1}, x],$$

$$6x^{n-2}x^2 + 3x^n + 3x^{n-5}x^5 = 4x^{n-4}x^4 + 8x^{n-3}x^3 - 5[x^{n-1}, x]. \quad (1.14)$$

Se $\alpha = 3$ e $\beta = \gamma = 1$, então

$$3(x^{n-3}x^3 + x^{n-1}x + x^{n-1}x + x^{n-5}x^5) = 4(x^{n-4}x^4 + x^{n-4}x^4 + x^{n-2}x^2) - 5[x^{n-1}, x],$$

$$3x^{n-3}x^3 + 6x^n + 3x^{n-5}x^5 = 8x^{n-4}x^4 + 4x^{n-2}x^2 - 5[x^{n-1}, x]. \quad (1.15)$$

Subtraindo (1.15) de (1.14), obtemos

$$3x^{n-3}x^3 + 3x^n - 6x^{n-2}x^2 = 4x^{n-4}x^4 + 4x^{n-2}x^2 - 8x^{n-3}x^3,$$

$$3x^n + 11x^{n-3}x^3 - 10x^{n-2}x^2 = 4x^{n-4}x^4. \quad (1.16)$$

Usando (1.12) e (1.13) em (1.16)

$$3x^n + 11(4x^{n-2}x^2 - 3x^n - [x^{n-1}, x]) - 10x^{n-2}x^2 = 4(11x^{n-2}x^2 - 10x^n - 4[x^{n-1}, x]),$$

$$x^{n-2}x^2 = x^n + \frac{1}{2}[x^{n-1}, x],$$

que é o resultado da Proposição para $\alpha = 2$. Agora vamos proceder por indução. Suponhamos que (1.9) seja válida para $\alpha = 1, 2, \dots, k+1$, onde $k \geq 1$. Substituindo $\beta = \gamma = 1$ e $\alpha = k$ em (1.11), obtemos

$$3(x^{n-(k+2)}x^{k+2} + 2x^{n-1}x + x^{n-k}x^k) = 4(2x^{n-(k+1)}x^{(k+1)} + x^{n-2}x^2) - (k+2)[x^{n-1}, x],$$

$$3x^{n-(k+2)}x^{k+2} + 6x^{n-1}x + 3x^{n-k}x^k = 8x^{n-(k+1)}x^{k+1} + 4x^{n-2}x^2 - (k+2)[x^{n-1}, x],$$

$$3x^{n-(k+2)}x^{k+2} = 8x^{n-(k+1)}x^{k+1} + 4x^{n-2}x^2 - 3x^{n-k}x^k - 6x^{n-1}x - (k+2)[x^{n-1}, x]. \quad (1.17)$$

Fazendo $\alpha = k$ e $\alpha = k+1$ na hipótese de indução, obtemos respectivamente

$$x^{n-k}x^k = x^{n-1}x + \frac{k-1}{2}[x^{n-1}, x],$$

$$x^{n-(k+1)}x^{k+1} = x^{n-1}x + \frac{k}{2}[x^{n-1}, x].$$

Levando esses resultados em (1.17), concluímos que

$$3x^{n-(k+2)}x^{k+2} = 3x^{n-1}x + [4k+2-3\frac{k-1}{2}-(k+2)][x^{n-1}, x] = 3x^{n-1}x + \frac{3}{2}(k+1)[x^{n-1}, x], \quad (1.18)$$

daí, obtemos

$$x^{n-(k+2)}x^{k+2} = x^{n-1}x + \frac{k+1}{2}[x^{n-1}, x].$$

Portanto, o resultado também é válido para $\alpha = k+2$ e isso encerra a demonstração. $\square$

Proposição 1.10. *Seja A uma F -álgebra comutativa. A é de potências associativas se e somente se $x^2x^2 = x^4$, para todo $x \in A$, onde a característica de F é diferente de 2, 3 e 5.*

Demonstração:

Se A é de potências associativas, então $x^i x^j = x^{i+j}$, para quaisquer $x \in A$ e $i, j \geq 1$. Segue que $x^2 x^2 = x^4$.

Suponhamos que $x^2 x^2 = x^4$ para todo $x \in A$. Como A é uma álgebra comutativa, então $[x^{n-1}, x] = 0$, isto é, $x^{n-1} x = x x^{n-1}$ e de (1.9) conclui-se que as n -ésimas potências são associativas bem como vale para as k -ésimas potências, com $k < n$ e $n \geq 5$.

□

1.5 A álgebra $A^{(+)}$

Veremos agora que, a partir de uma F -álgebra A dada com característica de F diferente de 2, podemos contruir uma nova álgebra, apenas modificando o produto. Esta nova álgebra será útil no estudo das álgebras de potências associativas não comutativas.

Definiremos uma álgebra associada $A^{(+)}$ que como F -espaço vetorial é a mesma de A , mas com produto denotado por $x \cdot y$ e definido em função do produto xy em A da seguinte maneira :

$$x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx)$$

Temos que a álgebra $A^{(+)}$ é comutativa, pois $x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx) = \frac{1}{2}(yx + xy) = y \cdot x$. Definimos as potências de $A^{(+)}$ por $x^1 = x$ e $x^n = x^{(n-1)} \cdot x$, onde $n > 1$ é inteiro. Essas potências coincidem com as de A . De fato, suponhamos por indução que isso seja verdade para o inteiro positivo k , ou seja, $x^k = x^k$, então

$$x^{(k+1)} = x^k \cdot x = x^k \cdot x = x^{k+1}.$$

Logo $A^{(+)}$ é uma álgebra de potências associativas, se A for de potências associativas. Porém, é possível construir uma álgebra $A^{(+)}$ de potências associativas, sem que A seja de potências associativas.

Exemplo 1.1. *Seja A um F -espaço vetorial de dimensão 4 com base $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Em A definimos a seguinte multiplicação: $u_1^2 = u_2$, $u_1 u_2 = u_3$, $u_2 u_1 = u_4$ e os outros produtos são zero. Assim, para $a = u_1$, temos $a^2 = u_2$, $aa^2 = u_3$ e $a^2 a = u_4$. Como $x^\alpha \cdot x^\beta = x^{(\alpha+\beta)}$, para todos os inteiros positivos $\alpha + \beta \geq 4$, então $A^{(+)}$ é de potências associativas. No entanto, A não o é, pois $aa^2 \neq a^2 a$.*

1.6 Identidades envolvendo L_x e R_x

Com as notações de L_x e R_x a multiplicação por y em $A^{(+)}$ é unicamente representada pela aplicação:

$$T_x = \frac{1}{2}(R_x + L_x).$$

Reescrevendo a identidade (1.6) em termos de multiplicação à direita e à esquerda, temos

$$L_{xy+yx} - R_{xy+yx} + (L_y + R_y)x - x(L_y + R_y) + (L_x + R_x)y - y(L_x + R_x) = 0,$$

que ainda pode ser reescrita como segue

$$(R_x + L_x)(R_y - L_y) + (R_y + L_y)(R_x - L_x) = R_{xy+yx} - L_{xy+yx}. \quad (1.19)$$

Reescrevendo a identidade (1.8) em termos de multiplicação à esquerda e à direita temos que:

$$\begin{aligned} & (xy + yx)(R_z + L_z) + (xz + zx)(R_y + L_y) + (R_x + L_x)(zy + yz) + \\ & (zy + yz)(R_x + L_x) + (R_y + L_y)(xz + zx) + (R_z + L_z)(xy + yx) = \\ & [(R_z + L_z)y + (R_y + L_y)z + L_{yz+zy}]x + [(R_x + L_x)y + (R_y + L_y)x + L_{xy+yx}]z \\ & + [(R_z + L_z)x + (R_x + L_x)z + L_{xz+zx}]y + L_{(xz+zx)y} + L_{(xy+yx)z} + L_{(yz+zy)x}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} L_{(xz+zx)y} + L_{(xy+yx)z} + L_{(yz+zy)x} &= (R_x + L_x)(R_{yz+zy} + L_{yz+zy} - R_y R_z - R_z R_y) + \\ & (R_y + L_y)(R_{xz+zx} + L_{xz+zx} - R_x R_z - R_z R_x) + \\ & (R_z + L_z)(R_{xy+yx} + L_{xy+yx} - R_x R_y - R_y R_x) - \\ & (L_{xy+yx} R_z + L_{xz+zx} R_y + L_{yz+zy} R_x) \end{aligned} \quad (1.20)$$

Fazendo $x = y$ em (1.19), temos que $R_{2xx} - L_{2xx} = 2(R_x + L_x)(R_x - L_x)$, ou ainda

$$R_{xx} - L_{xx} = (R_x + L_x)(R_x - L_x) \quad (1.21)$$

e quanto $x = y = z$, segue de (1.20), temos que

$$3L_{2(xx)x} = 3(R_x + L_x)(R_{2xx} + L_{2xx} - 2R_x^2) - 3L_{2xx}R_x,$$

$$L_{(xx)x} = (R_x + L_x)(R_{xx} + L_{xx} - R_x^2) - L_{xx}R_x. \quad (1.22)$$

No caso particular em que $x = e = e^2$, a fórmula (1.21) se transforma em $R_{ee} - L_{ee} = (R_e + L_e)(R_e - L_e)$, de onde segue que $(R_e + L_e)(R_e - L_e) - (R_e - L_e) = 0$. Logo,

$$(R_e + L_e - I)(R_e - L_e) = 0. \quad (1.23)$$

Fazendo $x = e = e^2$ também em (1.22), obtemos $L_{(ee)e} = (R_e + L_e)(R_e + L_e - R_e^2) - L_e R_e$, ou ainda, $R_e^2 + R_e L_e - R_e R_e^2 + L_e R_e + L_e^2 - L_e R_e^2 - L_e R_e - L_e = 0$. Assim, temos

$$(R_e + L_e)^2 - (R_e + L_e)R_e^2 - L_e(R_e + I) = 0 \quad (1.24)$$

onde I é o operador identidade em A . Não é possível deduzir a partir de (1.23) e (1.24) equações que só contenham R_e e L_e . Quando A é comutativa, segue de (1.20) que

$$\begin{aligned} 2R_{x(yz)} + 2R_{y(zx)} + 2R_{z(xy)} &= (R_x + L_y)(4R_{yz} - R_y R_z - R_z R_y) \\ &\quad (R_y + R_y)(4R_{zx} - R_z R_x - R_x R_z) + \\ &\quad (R_z + R_z)(4R_{xy} - R_x R_y - R_y R_x) - \\ &\quad 2(R_{xy} R_z + R_{zx} R_y + R_{yz} R_x). \end{aligned}$$

portanto, temos

$$\begin{aligned} R_{x(yz)} + R_{y(zx)} + R_{z(xy)} &= 4(R_x R_{yz} + R_y R_{zx} + R_z R_{xy}) - (R_{yz} R_x + R_{zx} R_y + R_{xy} R_z) - \\ &\quad [R_x(R_y R_z + R_z R_y) + R_y(R_z R_x + R_x R_z) + R_z(R_x R_y + R_y R_x)]. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Além disso, (1.19) e (1.21) se anulam, pois $L_x = R_x$, para todo $x \in A$. A igualdade (1.22) se torna $R_{(xx)x} = 2R_x(R_{xx} - R_x^2) - R_{xx}R_x$, ou seja,

$$R_{(xx)x} = 4R_x R_{xx} - 2R_x^3 - R_{xx}R_x. \quad (1.26)$$

Finalmente, usando a expressão (1.25) com $y = x$ e $z = x^2$ e a expressão (1.26), chegamos à identidade

$$R_{(xx)(xx)} = R_{xx}^2 + 10R_x^2 R_{xx} - 6R_x R_{xx} R_x - 4R_x^4. \quad (1.27)$$

1.7 Álgebra alternativa

Definição 1.17. Uma álgebra A sobre F é dita **alternativa** se

$$x^2y = x(xy), \quad yx^2 = (yx)x \quad (1.28)$$

para todo $x, y \in A$, onde (1.28) são ditas leis alternativas à esquerda e à direita, respectivamente.

É fácil ver que as leis alternativas implicam nas identidades

$$(x, y, z) + (y, x, z) = 0, \quad (x, y, z) + (x, z, y) = 0.$$

Equivalentemente, em termos do associador, temos

$$(x, x, y) = (y, x, x) = 0,$$

para todo $x, y \in A$ ou, em termos de L_x e R_x

$$L_{x^2} = L_x^2, \quad R_{x^2} = R_x^2 \quad (1.29)$$

para todo $x \in A$.

Definição 1.18. Dizemos que a álgebra A é **flexível** se

$$(xy)x = x(yx), \quad (1.30)$$

qualquer que sejam $x, y \in A$.

Substituindo x por $x + z$ em (1.30), onde $z \in A$, ficamos com $(xy + zy)(x + z) = (x + z)(yx + yz)$, implicando

$$(xy)z + (zy)x = x(yz) + z(yx). \quad (1.31)$$

Reciprocamente, se uma álgebra A sobre um corpo F de característica diferente de 2 cumpre a condição (1.31), então A é flexível. Em particular a igualdade $x^2x = xx^2$ é válida para todo x em uma álgebra flexível. É fácil ver que se A é alternativa, então A é flexível.

Proposição 1.11 (Identidades de Moufang). *Seja A uma álgebra alternativa então*

- (i) $(xax)y = x[a(xy)],$
- (ii) $y(xax) = [(yx)a]x,$
- (iii) $(xy)(ax) = x(ya)x,$

para todo $x, y, a \in A$.

Demonstração:

(i)

$$\begin{aligned}
 (xax)y - x[a(xy)] &= (xa, x, y) + (x, a, xy) \\
 &= -(x, xa, y) - (x, xy, a) \\
 &= -[x(xa)]y + x[(xa)y] - [x(xy)]a + x[(xy)a] \\
 &= -(x^2a)y - (x^2y)a + x[(xa)y + (xy)a] \\
 &= -(x^2, a, y) - (x^2, y, a) - x^2(ay) - x^2(ya) \\
 &\quad + x[(xa)y + (xy)a] \\
 &= x[-x(ay) - x(ya) + (xa)y + (xy)a] \\
 &= x[(x, a, y) + (x, y, a)] = 0.
 \end{aligned}$$

(ii) É a relação recíproca de (i). Note que (ii) é equivalente à

$$(y, xa, x) = -(y, x, a)x,$$

para todo $x, y, a \in A$. De fato,

$$(y, xa, x) = [y(xa)]x - y(xax) = [y(xa)]x - [(yx)a]x = -(y, x, a)x.$$

Substituindo x por $x + \lambda z$, onde $z \in A$ e $\lambda \in F$, temos

$$(y, xa, z) + (y, za, x) = -(y, x, a)z - (y, z, a)x. \quad (1.32)$$

(iii)

$$\begin{aligned}
 (xy)(ax) - x(ya)x &= (x, y, ax) + x[y(ax) - (ya)x] \\
 &= -(x, ax, y) - x(y, a, x) \\
 &= -(xax)y + x[(ax)y - (y, a, x)] \\
 &= -x[a(xy) - (ax)y + (y, a, x)] \\
 &= -x[-(a, x, y) + (y, a, x)] = 0.
 \end{aligned}$$

□

Definição 1.19. *Uma álgebra comutativa A é uma **álgebra de Jordan** se $x^2(yx) = (x^2y)x$, para quaisquer $x, y \in A$.*

Proposição 1.12. *Se A é uma álgebra de Jordan então A é de potências associativas.*

Demonstração: Se A é uma álgebra de Jordan, então $x^2(yx) = (x^2y)x$, para quaisquer $x, y \in A$. Fazendo $x = y$, temos $x^2x^2 = x^4$. Segue da Proposição 1.10 que A é de potências associativas.

□

1.8 Idempotente em álgebra de Jordan

Seja A uma álgebra de Jordan que possui um idempotente e . Sabemos que A satisfaz a identidade de Jordan

$$x^2(yx) = (x^2y)x \quad (1.33)$$

Linearizando (1.33), substituindo x por $x + \lambda z$, onde $z \in A$ e $\lambda \in F$, obtemos

$$x^2(yz) + 2(xz)(yx) = (x^2y)z + 2((xz)y)x \quad (1.34)$$

e linearizando (1.34), substituindo x por $x + \gamma w$, onde $w \in A$ e $\gamma \in F$, obtemos

$$(xw)(yz) + (xz)(yw) + (wz)(yx) = ((xw)y)z + ((wz)y)x + ((xz)y)w. \quad (1.35)$$

Usando o operador multiplicativo à esquerda de A temos que (1.35) é equivalente

$$L_{(yz)}L_x - L_zL_yL_x + L_{(xz)}L_y - L_xL_yL_z + L_{(yx)}L_z - L_{((xz)y)} = 0. \quad (1.36)$$

Tomemos $y = x$ e $z = x^{i-1}$ para $i \geq 2$ então temos,

$$L_{x^{i+1}} = L_{x^2}L_{x^{i-1}} - L_{x^{i-1}}L_x^2 - L_x^2L_{x^{i-1}} + 2L_{x^i}L_x. \quad (1.37)$$

Agora em (1.37) tomemos $i = 2$ e $x = e$. Daí obtemos,

$$2L_e^3 - 3L_e^2 + L_e = 0, \quad (1.38)$$

ou seja, $f(L_e) = 0$, onde $f(x) = (x - 1)(x - \frac{1}{2})x$. Portanto o polinômio minimal do operador L_e divide $f(x)$. As únicas possibilidades para os autovalores de L_e são 1 , $\frac{1}{2}$ e 0 . Segue que pelo Teorema da decomposição primária temos,

$$A = A_1 \oplus A_{1/2} \oplus A_0, \quad (1.39)$$

onde $A_i = \{x_i \in A \mid ex_i = ix_i\}$, $i = 1, \frac{1}{2}, 0$.

Definição 1.20. Dizemos que (1.39) é a **decomposição de Peirce** da álgebra de Jordan A relativa ao idempotente e .

Definição 1.21. Diz-se que os subespaços B e C da álgebra A são **ortogonais** quando $xy = 0$, para quaisquer $x \in B$ e $y \in C$.

Os subespaços A_i em (1.39) estão relacionadas da seguinte maneira

1. $A_i A_i \subseteq A_i$ se $i \neq \frac{1}{2}$.

De fato, tomemos $x = e$, $z = x_i \in A_i$, $y = y_i \in A_i$ em (1.34). Segue que

$$e(y_i x_i) + 2(ex_i)(ey_i) - (ey_i)x_i - 2e((ex_i)y_i) = 0. \quad (1.40)$$

Se $i = 0$, obtemos $e(y_0 x_0) = 0$ o que implica em $y_0 x_0 \in A_0$.

Se $i = 1$, obtemos $e(y_1 x_1) = y_1 x_1$ o que implica em $y_1 x_1 \in A_1$.

2. $A_1 A_0 = A_0 A_1 \subseteq A_0 \cap A_1 = 0$.

De fato, tomemos $x = e$, $y = x_0$ e $z = y_1$ em (1.34). Daí obtemos, $e(x_0 y_1) = 0$.

Portanto $A_0 A_1 \subseteq A_0$. Agora, tomando $x = e$, $y = x_1$ e $z = y_0$ em (1.34), temos

$e(y_0 x_1) = y_0 x_1$. Segue que $A_0 A_1 \subseteq A_1$. Logo, $A_0 A_1 = A_1 A_0 \subseteq A_0 \cap A_1 = 0$.

Portanto A_1 e A_0 são ortogonais.

3. $A_{1/2} A_{1/2} \subset A_1 \oplus A_0$.

De fato, tomemos $y = w = e$, $x = x_{1/2}$, $z = z_{1/2}$ em (1.35). Segue que

$$e(x_{1/2} z_{1/2}) = e(e(x_{1/2} z_{1/2})) \quad (1.41)$$

Escrevamos $x_{1/2} z_{1/2} = a_1 + a_{1/2} + a_0$. Segue que $e(a_1 + a_{1/2} + a_0) - e(e(a_1 + a_{1/2} + a_0)) = 0$. Então $\frac{1}{4}a_{1/2} = 0$. Logo $a_{1/2} = 0$, ou seja, $x_{1/2} z_{1/2} = a_1 + a_0$.

$$4. A_1 A_{1/2} \subseteq A_{1/2} \quad \text{e} \quad A_0 A_{1/2} \subseteq A_{1/2}.$$

De fato, tomemos $x = e$, $y = x_{\frac{1}{2}}$ e $z = y_1$ em (1.34). Obtemos $e(y_1 x_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}(y_1 x_{\frac{1}{2}})$.

Logo $A_1 A_{1/2} \subseteq A_{1/2}$.

Agora tomemos $x = e$, $y = y_{\frac{1}{2}}$ e $z = x_0$ em (1.34). Temos $e(x_0 y_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}(x_0 y_{\frac{1}{2}})$.

Segue que $A_0 A_{1/2} \subseteq A_{1/2}$.

Observação 1.6. *Notemos que A_0 e A_1 são subálgebras ortogonais de A .*

1.9 Idempotente em álgebras comutativas

Seja A uma álgebra comutativa de potências associativas, então

$$x^2 x = x x^2, \tag{1.42}$$

para todo $x \in A$ e também

$$x^2 x^2 = (x^2 x)x, \tag{1.43}$$

para todo $x \in A$.

Em termos de associadores (1.43) pode ser escrito como

$$(x^2, x, x) = 0, \tag{1.44}$$

para todo $x \in A$.

Linearizando (1.43), substituindo x por $x + \lambda y$, onde $y \in A$ e $\lambda \in F$, temos

$$(x + \lambda y)^2 (x + \lambda y)^2 - [(x + \lambda y)^2 (x + \lambda y)](x + \lambda y) = 0.$$

Efetutando os cálculos, chegamos à $K + \lambda L + \lambda^2 M + \lambda^3 N + \lambda^4 P = 0$, onde

$$K = K(x) = x^2 x^2 - x^3 x = 0,$$

$$P = K(y) = y^2 y^2 - y^3 y = 0,$$

$$L = L(x, y) = x^2(xy) + x^2(yx) + (xy)x^2 + (yx)x^2 - x^3y - ((xy)x)x - ((yx)x)x - (x^2y)x,$$

$$M = M(x, y) = x^2y^2 + (xy)^2 + (xy)(yx) + (yx)(xy) + (yx)^2 + y^2x^2 - ((xy)y)x - ((yx)x)y - (y^2x)x - (x^2y)y - ((xy)x)y - ((yx)y)x,$$

$$N = L(y, x) = y^2(yx) + y^2(xy) + (yx)y^2 + (xy)y^2 - y^3x - ((yx)y)y - ((xy)y)y - (y^2x)y.$$

Portanto,

$$L = L(x, y) = x^2(xy) + x^2(yx) + (xy)x^2 + (yx)x^2 - x^3y - ((xy)x)x - ((yx)x)x - (x^2y)x = 0, \quad (1.45)$$

onde podemos escrever (1.45) em termos de associadores como

$$(xy + yx, x, x) + (x^2, y, x) + (x^2, x, y) = 0, \quad (1.46)$$

para todo $x, y \in A$.

Analogamente, substituindo x por $x + \beta z$ em (1.46), onde $z \in A$ e $\beta \in F$ obtemos

$$\begin{aligned} & (xz + zx, y, x) + (xy + yx, z, x) + (xz + zx, x, y) + (yz + zy, x, x) \\ & + (xy + yx, x, z) + (x^2, z, y) + (x^2, y, z) = 0, \end{aligned} \quad (1.47)$$

para todo $x, y, z \in A$.

Por outro lado, se e é um idempotente da álgebra A , então a identidade (1.24) se torna $2L_e^3 - 3L_e^2 + L_e = 0$, pois A é comutativa. E como no caso das álgebras de Jordan, temos uma decomposição de Peirce

$$A = A_1 \oplus A_{1/2} \oplus A_0, \quad (1.48)$$

onde $A_i = \{x_i \in A \mid ex_i = ix_i\}$, $i = 1, \frac{1}{2}, 0$.

Proposição 1.13. *Seja A uma álgebra comutativa de potências associativas com decomposição de Peirce (1.48), relativa ao idempotente e . Então A_1 e A_0 são subálgebras ortogonais de A e são válidas as seguintes inclusões:*

$$A_{1/2}A_{1/2} \subseteq A_1 + A_0,$$

$$A_1A_{1/2} \subseteq A_{1/2} + A_0,$$

$$A_0A_{1/2} \subseteq A_1 + A_{1/2}.$$

Demonstração: Como A é uma álgebra de potências associativas segue que (1.43), vale para todo $x \in A$, portanto da Proposição (1.8), temos

$$\begin{aligned} 4[(xy)(wz) + (xz)(yw) + (xw)(yz)] &= x[y(zw) + z(wy) + w(yz)] \\ &\quad + y[x(zw) + z(wx) + w(xz)] \\ &\quad + z[x(yw) + y(wx) + w(xy)] \\ &\quad + w[x(yz) + y(xz) + z(xy)]. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Em particular, quando $z = w = e$, obtemos a seguinte identidade

$$4[(xy)e + 2(xe)(ye)] = x[ye + 2(ye)e] + y[xe + 2(xe)e] + 2e[x(ye) + y(xe) + (xy)e]. \quad (1.50)$$

Sejam $x, y \in A_1$, então $x = ex = xe$ e $y = ey = ye$. Fazendo essas substituições em (1.50) temos $4(xy)e + 8xy = 6xy + 4e(xy) + 2((xy)e)e$. Logo, $((xy)e)e - xy = 0$, daí $0 = ((xy)e)e - xy = (R_e^2 - I)(xy)$. Segue que $(R_e^2 - I)(xy) = 0$, como $R_e + I$ é injetor, pois seja $x = x_1 + x_{\frac{1}{2}} + x_0 \in A$ tal que $(R_e + I)(x) = 0$. Então $0 = 2x_1 + \frac{3}{2}x_{\frac{1}{2}} + x_0$, logo $x_1 = 0, x_{\frac{1}{2}} = 0$ e $x_0 = 0$. Então, $(R_e - I)(xy) = 0$, assim $e(xy) = (xy)e = xy$, portanto $xy \in A_1$. Então A_1 é uma subálgebra. Agora consideremos $x, y \in A_0$, de modo que $ex = xe = 0 = ey = ye$. Com isto, a equação (1.50) se reduz à $4(xy)e = 2((xy)e)e$, que pode ser reescrita como $((xy)e)e - 2(xy)e = 0$. Logo $(R_e^2 - 2R_e)(xy) = (R_e - 2I)R_e(xy) = 0$. Assim, $R_e(xy) = 0$, pois $(R_e - 2I)$ é injetor, ou seja $e(xy) = (xy)e = 0$. Portanto, $xy \in A_0$ e fica provado que A_0 também é subálgebra. Vamos provar que elas são ortogonais. Dados $x \in A_1$ e $y \in A_0$. Segue de (1.50) que $4(xy)e = 3xy + 2(xy)e + 2((xy)e)e$. Portanto, $(2R_e^2 - 2R_e + 3I)(xy) = 0$, usando a decomposição de Peirce e fazendo $xy = a_1 + a_{\frac{1}{2}} + a_0$, temos $0 = (2R_e^2 - 2R_e + 3I)(xy) =$

$(2R_e^2 - 2R_e + 3I)(a_1 + a_{\frac{1}{2}} + a_0) = 3a_1 + \frac{5}{2}a_{\frac{1}{2}} + 3a_0$, como a soma é direta, $a_1 = 0$, $a_{\frac{1}{2}} = 0$ e $a_0 = 0$, segue que $xy = 0$. Logo, as subálgebras A_1 e A_2 são ortogonais.

Resta provar as inclusões. Fazendo $x = e$, $y = y_{1/2}$ e $z = z_{1/2}$, em (1.47), onde $y_{1/2}, z_{1/2} \in A_{1/2}$ obtemos

$$e(e(y_{1/2}z_{1/2})) = e(y_{1/2}z_{1/2}). \quad (1.51)$$

Agora, usando a decomposição de Peirce, substituindo $y_{1/2}z_{1/2} = a_1 + a_{1/2} + a_0$, onde $a_1 \in A_1$, $a_{1/2} \in A_{1/2}$ e $a_0 \in A_0$, em (1.51), temos $a_{1/2} = 0$. Logo $y_{1/2}z_{1/2} = a_1 + a_0$. Portanto $A_{1/2}A_{1/2} \subseteq A_1 + A_0$. Analogamente, substituindo $x = e$, $y = y_{1/2}$ e $z = z_1$, em (1.47), onde $y_{1/2} \in A_{1/2}$ e $z_1 \in A_1$, obtemos $A_1A_{1/2} \subseteq A_{1/2} + A_0$ e fazendo $x = e$, $y = y_{1/2}$ e $z = z_0$, em (1.47), onde $y_{1/2} \in A_{1/2}$ e $z_0 \in A_0$, temos $A_0A_{1/2} \subseteq A_1 + A_{1/2}$. $\square$

Para cada $x_1 \in A_1$ definimos as transformações lineares $S_{\frac{1}{2}}(x_1) : A_{\frac{1}{2}} \rightarrow A_{\frac{1}{2}}$, tal que $x_{\frac{1}{2}} \mapsto (x_1x_{\frac{1}{2}})_{\frac{1}{2}}$ e $S_0(x_1) : A_{\frac{1}{2}} \rightarrow A_0$, tal que $x_{\frac{1}{2}} \mapsto (x_1x_{\frac{1}{2}})_0$. Similarmente, para cada $x_0 \in A_0$ defina as transformações lineares $T_{\frac{1}{2}}(x_0) : A_{\frac{1}{2}} \rightarrow A_{\frac{1}{2}}$, tal que $x_{\frac{1}{2}} \mapsto (x_0x_{\frac{1}{2}})_{\frac{1}{2}}$ e $T_1(x_0) : A_{\frac{1}{2}} \rightarrow A_1$, tal que $x_{\frac{1}{2}} \mapsto (x_0x_{\frac{1}{2}})_1$. Temos as seguintes identidades de Peirce.

Lema 1.14. *Para todo $x_0, y_0, w_0 \in A_0$, $x_1, y_1, w_1 \in A_1$ e $w_{\frac{1}{2}}, a_{\frac{1}{2}} \in A_{\frac{1}{2}}$, temos:*

- (i) $S_{\frac{1}{2}}(x_1y_1) = S_{\frac{1}{2}}(x_1)S_{\frac{1}{2}}(y_1) + S_{\frac{1}{2}}(y_1)S_{\frac{1}{2}}(x_1)$,
 $\frac{1}{2}S_0(x_1y_1) = S_0(x_1)S_{\frac{1}{2}}(y_1) + S_0(y_1)S_{\frac{1}{2}}(x_1)$;
- (ii) $T_{\frac{1}{2}}(x_0y_0) = T_{\frac{1}{2}}(x_0)T_{\frac{1}{2}}(y_0) + T_{\frac{1}{2}}(y_0)T_{\frac{1}{2}}(x_0)$,
 $\frac{1}{2}T_1(x_0y_0) = T_1(x_0)T_{\frac{1}{2}}(y_0) + T_1(y_0)T_{\frac{1}{2}}(x_0)$;
- (iii) $T_{\frac{1}{2}}(x_0)S_{\frac{1}{2}}(y_1) = S_{\frac{1}{2}}(y_1)T_{\frac{1}{2}}(x_0)$;
- (iv) $[T_1(x_0)w_{\frac{1}{2}}]y_1 = 2T_1(x_0)S_{\frac{1}{2}}(y_1)w_{\frac{1}{2}}$, $[S_0(y_1)w_{\frac{1}{2}}]x_0 = 2S_0(y_1)T_{\frac{1}{2}}(x_0)w_{\frac{1}{2}}$;
- (v) $x_{\lambda}(x_{\frac{1}{2}}y_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}[x_{\frac{1}{2}}(x_{\lambda}y_{\frac{1}{2}})_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{1}{2}}(x_{\lambda}x_{\frac{1}{2}})_{\frac{1}{2}}]_{\lambda} + \frac{1}{4}[x_{\frac{1}{2}}(x_{\lambda}y_{\frac{1}{2}})_{1-\lambda} + y_{\frac{1}{2}}(x_{\lambda}x_{\frac{1}{2}})_{1-\lambda}]_{\lambda}$
 $(\lambda = 0, 1)$;
- (vi) $S_{\frac{1}{2}}(w_1)a_{\frac{1}{2}} = T_{\frac{1}{2}}(w_0)a_{\frac{1}{2}}$, onde $a_{\frac{1}{2}}^2 = w_1 + w_0$.

Demonstração:

(i) Substituindo $x = x_1 \in A_1$, $z = e$, $y = w \in A_{\frac{1}{2}}$ em (1.47) e usando o fato que $e(x_1w) = \frac{1}{2}(x_1w)$, pois $x_1w \in A_1A_{\frac{1}{2}} \subseteq A_{\frac{1}{2}} + A_0$ obtemos,

$$e[2(wx_1)x_1 + wx_1^2] + wx_1^2 - 4(wx_1)x_1 = 0. \quad (1.52)$$

Tomando a componente $A_{\frac{1}{2}}$ em (1.52), temos

$$\begin{aligned} e[2(wx_1)x_1 + wx_1^2] + wx_1^2 - 4(wx_1)x_1 &= 0, \\ ((x_1w)_{\frac{1}{2}}x_1)_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(wx_1^2)_{\frac{1}{2}} + (x_1^2w)_{\frac{1}{2}} - 4((wx_1)x_1)_{\frac{1}{2}} &= 0, \\ \frac{3}{2}(x_1^2w)_{\frac{1}{2}} &= 3((x_1w)_{\frac{1}{2}}x_1)_{\frac{1}{2}}, \\ (x_1^2w)_{\frac{1}{2}} &= 2((x_1w)_{\frac{1}{2}}x_1)_{\frac{1}{2}}, \\ S_{\frac{1}{2}}(x_1^2) &= 2S_{\frac{1}{2}}^2(x_1). \end{aligned} \quad (1.53)$$

Substituindo x_1 por $x_1 + y_1$ em (1.53), temos

$$\begin{aligned} S_{\frac{1}{2}}((x_1 + y_1)^2) &= 2S_{\frac{1}{2}}^2(x_1 + y_1), \\ S_{\frac{1}{2}}(x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2) &= 2(S_{\frac{1}{2}}(x_1) + S_{\frac{1}{2}}(y_1))^2, \\ S_{\frac{1}{2}}(x_1^2) + S_{\frac{1}{2}}(2x_1y_1) + S_{\frac{1}{2}}(y_1^2) &= 2(S_{\frac{1}{2}}^2(x_1) + S_{\frac{1}{2}}(x_1)S_{\frac{1}{2}}(y_1) + S_{\frac{1}{2}}(y_1)S_{\frac{1}{2}}(x_1) + S_{\frac{1}{2}}^2(y_1)), \\ 2S_{\frac{1}{2}}(x_1y_1) &= 2(S_{\frac{1}{2}}(x_1)S_{\frac{1}{2}}(y_1) + S_{\frac{1}{2}}(y_1)S_{\frac{1}{2}}(x_1)), \\ S_{\frac{1}{2}}(x_1y_1) &= S_{\frac{1}{2}}(x_1)S_{\frac{1}{2}}(y_1) + S_{\frac{1}{2}}(y_1)S_{\frac{1}{2}}(x_1). \end{aligned}$$

Agora, tomando a componente A_0 em (1.52), temos

$$\begin{aligned} (wx_1^2)_0 &= 4((wx_1)x_1)_0, \\ S_0(x_1^2) &= 4S_0(x_1)S_{\frac{1}{2}}(x_1). \end{aligned} \quad (1.54)$$

Substituindo x_1 por $x_1 + y_1$ em (1.53), temos

$$\frac{1}{2}S_0(x_1y_1) = S_0(x_1)S_{\frac{1}{2}}(y_1) + S_0(y_1)S_{\frac{1}{2}}(x_1).$$

(ii) Análogo ao (i)

(iii) Substituindo $x = x_0$, $y = y_1$, $z = e$, $w = w_{\frac{1}{2}}$, em (1.49), onde $x_0 \in A_0$, $y_1 \in A_1$, $w_{\frac{1}{2}} \in A_{\frac{1}{2}}$, obtemos

$$\begin{aligned} 4(x_0 w_{\frac{1}{2}})y_1 &= x_0 \left[\frac{1}{2}y_1 w_{\frac{1}{2}} + e(w_{\frac{1}{2}}y_1) + w_{\frac{1}{2}}y_1 \right] \\ &+ y_1 \left[e(w_{\frac{1}{2}}x_0) + \frac{1}{2}w_{\frac{1}{2}}x_0 \right] \\ &+ e \left[x_0(y_1 w_{\frac{1}{2}}) + y_1(w_{\frac{1}{2}}x_0) \right]. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Usando as relações de inclusão da Proposição (1.13) temos,

$$\begin{aligned} 4(x_0 w_{\frac{1}{2}})y_1 &= 4y_1[T_1(x_0)(w_{\frac{1}{2}})] + 4S_{\frac{1}{2}}(y_1)T_{\frac{1}{2}}(x_0)(w_{\frac{1}{2}}) + 4S_0(y_1)T_{\frac{1}{2}}(x_0)(w_{\frac{1}{2}}), \\ x_0 \left[\frac{1}{2}y_1 w_{\frac{1}{2}} + e(w_{\frac{1}{2}}y_1) + w_{\frac{1}{2}}y_1 \right] &= 2 \left[T_1(x_0)S_{\frac{1}{2}}(y_1)(w_{\frac{1}{2}}) + T_{\frac{1}{2}}(x_0)S_{\frac{1}{2}}(y_1)(w_{\frac{1}{2}}) \right] + \frac{3}{2}x_0 \left[S_0(y_1)(w_{\frac{1}{2}}) \right], \\ y_1 \left[e(w_{\frac{1}{2}}x_0) + \frac{1}{2}w_{\frac{1}{2}}x_0 \right] &= \frac{3}{2}y_1 \left[T_1(x_0)(w_{\frac{1}{2}}) \right] + S_{\frac{1}{2}}(y_1)T_{\frac{1}{2}}(x_0)(w_{\frac{1}{2}}) + S_0(y_1)T_{\frac{1}{2}}(x_0)(w_{\frac{1}{2}}), \\ e \left[x_0(y_1 w_{\frac{1}{2}}) + y_1(w_{\frac{1}{2}}x_0) \right] &= T_1(x_0)S_{\frac{1}{2}}(y_1)(w_{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}T_{\frac{1}{2}}(x_0)S_{\frac{1}{2}}(y_1)(w_{\frac{1}{2}}) + y_1 \left[T_1(x_0)(w_{\frac{1}{2}}) \right] \\ &+ \frac{1}{2}S_{\frac{1}{2}}(y_1)T_{\frac{1}{2}}(x_0)(w_{\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Portanto, (1.55) pode ser visto como

$$\begin{aligned} 4y_1[T_1(x_0)(w_{\frac{1}{2}})] + 4S_{\frac{1}{2}}(y_1)T_{\frac{1}{2}}(x_0)(w_{\frac{1}{2}}) + 4S_0(y_1)T_{\frac{1}{2}}(x_0)(w_{\frac{1}{2}}) &= 3T_1(x_0)S_{\frac{1}{2}}(y_1)(w_{\frac{1}{2}}) \\ + \frac{5}{2}T_{\frac{1}{2}}(x_0)S_{\frac{1}{2}}(y_1)(w_{\frac{1}{2}}) + \frac{3}{2}S_{\frac{1}{2}}(y_1)T_{\frac{1}{2}}(x_0)(w_{\frac{1}{2}}) + \frac{5}{2}y_1 \left[T_1(x_0)(w_{\frac{1}{2}}) \right] &+ \frac{3}{2}x_0 \left[S_0(y_1)(w_{\frac{1}{2}}) \right] \\ + S_0(y_1)T_{\frac{1}{2}}(x_0)(w_{\frac{1}{2}}). \end{aligned} \quad (1.56)$$

Comparando as componentes de $A_{\frac{1}{2}}$, em (1.56), obtemos

$$\begin{aligned} 4S_{\frac{1}{2}}(y_1)T_{\frac{1}{2}}(x_0)(w_{\frac{1}{2}}) &= \frac{5}{2}T_{\frac{1}{2}}(x_0)S_{\frac{1}{2}}(y_1)(w_{\frac{1}{2}}) + \frac{3}{2}S_{\frac{1}{2}}(y_1)T_{\frac{1}{2}}(x_0)(w_{\frac{1}{2}}), \\ \frac{5}{2}S_{\frac{1}{2}}(y_1)T_{\frac{1}{2}}(x_0)(w_{\frac{1}{2}}) &= \frac{5}{2}T_{\frac{1}{2}}(x_0)S_{\frac{1}{2}}(y_1)(w_{\frac{1}{2}}), \\ S_{\frac{1}{2}}(y_1)T_{\frac{1}{2}}(x_0)(w_{\frac{1}{2}}) &= T_{\frac{1}{2}}(x_0)S_{\frac{1}{2}}(y_1)(w_{\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

(iv) Comparando as componentes de A_1 , em (1.56), obtemos

$$4y_1[T_1(x_0)(w_{\frac{1}{2}})] = 3T_1(x_0)S_{\frac{1}{2}}(y_1)(w_{\frac{1}{2}}) + \frac{5}{2}y_1 \left[T_1(x_0)(w_{\frac{1}{2}}) \right],$$

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}y_1[T_1(x_0)(w_{\frac{1}{2}})] &= 3T_1(x_0)S_{\frac{1}{2}}(y_1)(w_{\frac{1}{2}}), \\ y_1[T_1(x_0)(w_{\frac{1}{2}})] &= 2T_1(x_0)S_{\frac{1}{2}}(y_1)(w_{\frac{1}{2}}).\end{aligned}$$

Agora, comparando as componentes de A_0 , em (1.56), temos

$$\begin{aligned}4S_0(y_1)T_{\frac{1}{2}}(x_0)(w_{\frac{1}{2}}) &= \frac{3}{2}x_0 \left[S_0(y_1)(w_{\frac{1}{2}}) \right] + S_0(y_1)T_{\frac{1}{2}}(x_0)(w_{\frac{1}{2}}), \\ 3S_0(y_1)T_{\frac{1}{2}}(x_0)(w_{\frac{1}{2}}) &= \frac{3}{2}x_0 \left[S_0(y_1)(w_{\frac{1}{2}}) \right], \\ 2S_0(y_1)T_{\frac{1}{2}}(x_0)(w_{\frac{1}{2}}) &= x_0 \left[S_0(y_1)(w_{\frac{1}{2}}) \right].\end{aligned}$$

(v) Em (1.49) faça $x = x_{\frac{1}{2}}$, $y = y_{\frac{1}{2}}$, $z = e$, $w = x_0$, onde $x_{\frac{1}{2}}, y_{\frac{1}{2}} \in A_{\frac{1}{2}}$, $x_0 \in A_0$ e obtenha

$$\begin{aligned}4[(xy)(wz) + (xz)(yw) + (xw)(yz)] &= 2[(x_{\frac{1}{2}}(y_{\frac{1}{2}}x_0)_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{1}{2}}(x_0x_{\frac{1}{2}})_{\frac{1}{2}})_1 \\ &\quad + (x_{\frac{1}{2}}(y_{\frac{1}{2}}x_0)_1 + y_{\frac{1}{2}}(x_0x_{\frac{1}{2}})_1)_{\frac{1}{2}} \\ &\quad + (x_{\frac{1}{2}}((y_{\frac{1}{2}}x_0)_1 + (y_{\frac{1}{2}}x_0)_{\frac{1}{2}}) \\ &\quad + y_{\frac{1}{2}}((x_0x_{\frac{1}{2}})_1 + (x_0x_{\frac{1}{2}})_{\frac{1}{2}}))_0],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x[y(zw) + z(wy) + w(yz)] &= (x_{\frac{1}{2}}(x_0y_{\frac{1}{2}})_{\frac{1}{2}})_1 + \frac{3}{2}(x_{\frac{1}{2}}(x_0y_{\frac{1}{2}})_1)_{\frac{1}{2}} + [x_{\frac{1}{2}}(\frac{3}{2}(x_0y_{\frac{1}{2}})_1 + (x_0y_{\frac{1}{2}})_{\frac{1}{2}})]_0, \\ y[x(zw) + z(wx) + w(xz)] &= (y_{\frac{1}{2}}(x_0x_{\frac{1}{2}})_{\frac{1}{2}})_1 + \frac{3}{2}(y_{\frac{1}{2}}(x_0x_{\frac{1}{2}})_1)_{\frac{1}{2}} + [y_{\frac{1}{2}}(\frac{3}{2}(x_0x_{\frac{1}{2}})_1 + (x_0x_{\frac{1}{2}})_{\frac{1}{2}})]_0, \\ z[x(yw) + y(wx) + w(xy)] &= \frac{1}{2}[(x_{\frac{1}{2}}(y_{\frac{1}{2}}x_0)_1 + (y_{\frac{1}{2}}(x_0x_{\frac{1}{2}})_1)]_{\frac{1}{2}} + [x_{\frac{1}{2}}(y_{\frac{1}{2}}x_0)_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{1}{2}}(x_0x_{\frac{1}{2}})_{\frac{1}{2}}]_1, \\ w[x(yz) + y(xz) + z(xy)] &= 2(x_0(x_{\frac{1}{2}}y_{\frac{1}{2}})_0).\end{aligned}$$

Comparando as componentes de A_0 , temos

$$\begin{aligned}2(x_{\frac{1}{2}}((y_{\frac{1}{2}}x_0)_1 + (y_{\frac{1}{2}}x_0)_{\frac{1}{2}}) + y_{\frac{1}{2}}((x_0x_{\frac{1}{2}})_1 + (x_0x_{\frac{1}{2}})_{\frac{1}{2}}))_0 &= [x_{\frac{1}{2}}(\frac{3}{2}(x_0y_{\frac{1}{2}})_1 + (x_0y_{\frac{1}{2}})_{\frac{1}{2}})]_0 \\ &\quad + [y_{\frac{1}{2}}(\frac{3}{2}(x_0x_{\frac{1}{2}})_1 + (x_0x_{\frac{1}{2}})_{\frac{1}{2}})]_0 \\ &\quad + 2(x_0(x_{\frac{1}{2}}y_{\frac{1}{2}})_0).\end{aligned}\tag{1.57}$$

Segue de (1.57) que

$$x_0(x_{\frac{1}{2}}y_{\frac{1}{2}}) = x_0(x_{\frac{1}{2}}y_{\frac{1}{2}})_0 = \frac{1}{2}[x_{\frac{1}{2}}(x_0y_{\frac{1}{2}})_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{1}{2}}(x_0x_{\frac{1}{2}})_{\frac{1}{2}}]_0 + \frac{1}{4}[x_{\frac{1}{2}}(x_0y_{\frac{1}{2}})_1 + y_{\frac{1}{2}}(x_0x_{\frac{1}{2}})_1]_0.$$

Análogo para $\lambda = 1$.

(vi) Fazendo $x = y = z$, $w = e$, onde e é um idempotente, em (1.49), obtemos

$$4x^2(ex) = 2x(x(ex)) + (ex^2)x + ex^3. \quad (1.58)$$

Substituindo x por $a_{\frac{1}{2}}$, onde $a_{\frac{1}{2}} \in A_{\frac{1}{2}}$, a equação (1.58) se torna

$$a_{\frac{1}{2}}^3 = (ea_{\frac{1}{2}}^2)a_{\frac{1}{2}} + ea_{\frac{1}{2}}^3. \quad (1.59)$$

Usando as relações de inclusão da Proposição (1.13), temos que $a_{\frac{1}{2}} = w_1 + w_0$, onde $w_1 \in A_1$ e $w_0 \in A_0$. Então, segue de (1.59) que

$$\begin{aligned} a_{\frac{1}{2}}^3 &= a_{\frac{1}{2}}(w_1 + w_0) = (a_{\frac{1}{2}}w_1) + (a_{\frac{1}{2}}w_0) = (a_{\frac{1}{2}}w_1)_{\frac{1}{2}} + \\ & (a_{\frac{1}{2}}w_1)_0 + (a_{\frac{1}{2}}w_0)_{\frac{1}{2}} + (a_{\frac{1}{2}}w_0)_1 = S_{\frac{1}{2}}(w_1)(a_{\frac{1}{2}}) + \\ & S_0(w_1)(a_{\frac{1}{2}}) + T_{\frac{1}{2}}(w_0)(a_{\frac{1}{2}}) + T_1(w_0)(a_{\frac{1}{2}}). \end{aligned} \quad (1.60)$$

Mas, por outro lado temos que

$$\begin{aligned} a_{\frac{1}{2}}^3 &= ea_{\frac{1}{2}}^3 + (ea_{\frac{1}{2}}^2)a_{\frac{1}{2}} = ea_{\frac{1}{2}}^3 + w_1a_{\frac{1}{2}} = e[a_{\frac{1}{2}}^2a_{\frac{1}{2}}] + w_1a_{\frac{1}{2}} = \\ & e[(w_1 + w_0)a_{\frac{1}{2}}] + w_1a_{\frac{1}{2}} = e[w_1a_{\frac{1}{2}} + w_0a_{\frac{1}{2}}] + w_1a_{\frac{1}{2}} = \\ & e[(w_1a_{\frac{1}{2}})_{\frac{1}{2}} + (w_1a_{\frac{1}{2}})_0 + (w_0a_{\frac{1}{2}})_{\frac{1}{2}} + (w_0a_{\frac{1}{2}})_1] + w_1a_{\frac{1}{2}} = \\ & \frac{1}{2}(w_1a_{\frac{1}{2}})_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(w_0a_{\frac{1}{2}})_{\frac{1}{2}} + (w_0a_{\frac{1}{2}})_1 + (w_1a_{\frac{1}{2}})_{\frac{1}{2}} + (w_1a_{\frac{1}{2}})_0 = \\ & \frac{1}{2} \left[S_{\frac{1}{2}}(w_1)(a_{\frac{1}{2}} + T_{\frac{1}{2}}(w_0)(a_{\frac{1}{2}})) \right] + T_1(w_0)(a_{\frac{1}{2}}) + S_{\frac{1}{2}}(w_1)(a_{\frac{1}{2}}) + S_0(w_1)(a_{\frac{1}{2}}). \end{aligned} \quad (1.61)$$

Portanto, segue de (1.60) e (1.61)

$$\begin{aligned} & S_{\frac{1}{2}}(w_1)(a_{\frac{1}{2}}) + S_0(w_1)(a_{\frac{1}{2}}) + T_{\frac{1}{2}}(w_0)(a_{\frac{1}{2}}) + T_1(w_0)(a_{\frac{1}{2}}) = \\ & \frac{1}{2} \left[S_{\frac{1}{2}}(w_1)(a_{\frac{1}{2}} + T_{\frac{1}{2}}(w_0)(a_{\frac{1}{2}})) \right] + T_1(w_0)(a_{\frac{1}{2}}) + S_{\frac{1}{2}}(w_1)(a_{\frac{1}{2}}) + S_0(w_1)(a_{\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Daí obtemos,

$$\begin{aligned} T_{\frac{1}{2}}(w_0)(a_{\frac{1}{2}}) &= \frac{1}{2}S_{\frac{1}{2}}(w_1)(a_{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}T_{\frac{1}{2}}(w_1)(a_{\frac{1}{2}}), \\ \frac{1}{2}T_{\frac{1}{2}}(w_0)(a_{\frac{1}{2}}) &= \frac{1}{2}S_{\frac{1}{2}}(w_1)(a_{\frac{1}{2}}), \\ T_{\frac{1}{2}}(w_0)(a_{\frac{1}{2}}) &= S_{\frac{1}{2}}(w_1)(a_{\frac{1}{2}}), \end{aligned}$$

onde $a_{\frac{1}{2}}^2 = w_1 + w_0$. □

Considere $A = A_1 \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$ uma decomposição de Peirce da álgebra A de potências associativas, relativa ao idempotente e .

Definição 1.22. Dizemos que dois idempotentes $u, v \in A$ são ortogonais se $uv = vu = 0$.

Definição 1.23. Um idempotente e de uma álgebra A é denominado **idempotente principal** de A se não existir outro idempotente não nulo $u \in A$ que seja ortogonal a e .

Proposição 1.15. Seja A uma álgebra de potências associativas com um idempotente e , se $u \in A$ é um idempotente ortogonal a e , então $u \in A_0$.

Demonstração: Seja $u = u_1 + u_{\frac{1}{2}} + u_0$, como e é ortogonal a u , segue que

$$0 = eu = e(u_1 + u_{\frac{1}{2}} + u_0) = u_1 + \frac{1}{2}u_{\frac{1}{2}}.$$

Portanto, $u_1 = u_{\frac{1}{2}} = 0$. Logo $u = u_0 \in A_0$.

Corolário 1.16. Seja $e \in A$ um idempotente. Então e é principal, se e somente se, A_0 não tem idempotentes não nulos.

Demonstração: Seja e um idempotente principal, seja $u \in A_0$, segue que u não é idempotente. Portanto A_0 não possui idempotentes. Agora considere que A_0 não tem idempotentes. Mostremos que e é principal. Seja $u \in A$ um idempotente tal que $u = u_1 + u_{\frac{1}{2}} + u_0$. Se $eu = u_1 + \frac{1}{2}u_{\frac{1}{2}} = 0$, então $u_1 = u_{\frac{1}{2}} = 0$. Segue que $u = u_0 \in A_0$, logo u não é idempotente. $\square$

Definição 1.24. Um idempotente e de uma álgebra A é dito **primitivo** se é o único idempotente em A_1 . Um idempotente e é chamado **absolutamente primitivo** se cada elemento de A_1 tem a forma $\alpha e + x$, onde $\alpha \in F$ e x é um elemento nilpotente.

Observação 1.7. No caso em que e é um idempotente absolutamente primitivo e se A é uma álgebra bária, então $A_1 = Fe \oplus \overline{A}_1$, onde $\overline{A}_1$ é uma nil-subálgebra de A .

Definição 1.25. Uma álgebra A é dita **e-estável** se A é uma álgebra de potências associativas tal que $A_i A_{\frac{1}{2}} \subseteq A_{\frac{1}{2}}$ ($i = 0, 1$), onde A_i ($i = 0, \frac{1}{2}, 1$) são os subespaços de A obtidos da decomposição de Peirce de A relativo ao idempotente e . A é **estável** se é estável para todo idempotente e . Em particular, álgebras de Jordan são estáveis.

Capítulo 2

Álgebras train

Nesta seção discutiremos as estruturas de álgebras train de potências associativas envolvendo as suas decomposições de Peirce. No decorrer dos nossos resultados o idempotente $e \in H$.

2.1 Álgebras associativas nilpotentes

Definição 2.1. Uma álgebra A sobre F é chamada uma **álgebra zero** se $ab = 0$ para todo $a, b \in A$.

Proposição 2.1. Uma álgebra A associativa sobre F de dimensão 1 é isomorfo à F ou é uma álgebra zero sobre F .

Demonstração: Como A é uma álgebra de dimensão 1, temos que $A = \langle a \rangle$ sobre F , onde $a \in A$. Seja $a^2 = \gamma a$, onde $\gamma \in F$.

Se $\gamma = 0$, temos que A é uma álgebra zero. De fato, sejam $x = \alpha a$, $y = \beta a \in A$ então $xy = \alpha\beta a^2 = \alpha\beta a^2 = \alpha\beta\gamma a = 0$, onde $\alpha, \beta \in F$.

Se $\gamma \neq 0$, temos que A é um isomorfo à F . De fato, $A = \langle a \rangle = \langle e \rangle$, onde $e = \gamma^{-1}a$ é um idempotente. Considere $\varphi : A \rightarrow F$ tal que $\varphi(\alpha e) = \alpha$, com $\alpha \in F$. Temos que $\varphi : A \rightarrow F$ é um isomorfismo de A em F . $\square$

Proposição 2.2. Seja A uma álgebra associativa, $g \in A$ e B uma subálgebra de A . A dimensão de Bg (ou gB) é igual a dimensão de B se, e somente se, $bg \neq 0$ ($gb \neq 0$) para todo $b \neq 0$ de B .

Demonstração: Suponhamos que a dimensão de B é igual a dimensão de Bg . Seja $\{u_1, \dots, u_m\}$ uma base de B . Como $\{u_1g, \dots, u_mg\}$ é um conjunto gerador de Bg , segue que $\{u_1g, \dots, u_mg\}$ é base de Bg . Seja $b \in B$ tal que $b \neq 0$. Afirmamos que $bg \neq 0$. De fato,

$$bg = \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i \right) g = \sum_{i=1}^m \alpha_i (u_i g). \quad (2.1)$$

Se $bg = 0$, teríamos $\alpha_i = 0$, em (2.1), para $i = 1, \dots, m$, mas isso não ocorre, pois $b \neq 0$.

Agora suponhamos que $bg \neq 0$, para todo $b \neq 0 \in B$. Seja $\{u_1, \dots, u_m\}$ uma base de B . Sabemos que $\{u_1g, \dots, u_mg\}$ é um conjunto gerador de Bg . Resta provarmos que $\{u_1g, \dots, u_mg\}$ é linearmente independente. Seja $\sum_{i=1}^m \alpha_i (u_i g) = 0$, onde $\alpha_i \in F$. Então, $\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i \right) g = 0$, daí $\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i = 0$, segue que $\alpha_i = 0$, $i = 1, \dots, m$. Logo, $\{u_1g, \dots, u_mg\}$ é linearmente independente. Portanto, dimensão de B é igual a dimensão de Bg . $\square$

Definição 2.2. Uma álgebra A associativa é dita **nilpotente** se $A^p = 0$, para algum inteiro positivo p . O menor inteiro positivo p , tal que $A^p = 0$ é chamado **índice de nilpotência** de A . Portanto A é uma álgebra nilpotente de índice α se, e somente se, $y_1 \cdots y_\alpha = 0$, para todo $y_i \in A$ e existem elementos $x_i \in A$ ($i = 1, \dots, \alpha - 1$) tais que $x_1 \cdots x_{\alpha-1} \neq 0$.

Proposição 2.3. Toda álgebra finitamente gerada nilpotente é de dimensão finita.

Demonstração: Seja $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ um conjunto de geradores de uma álgebra A . Suponhamos que A tenha índice de nilpotência n . Seja $u \in A$ então $u = f(a_1, \dots, a_k)$, onde f é um polinômio não associativo, não comutativo com grau menor que n e sem termo constante. Considere $S = \{a_1^{i_1}, \dots, a_k^{i_k} \mid 1 \leq i_j \leq n-1\}$, e T o conjunto formado por todos os produtos com no máximo $n-1$ elementos de S . Temos que T gera A como F -espaço vetorial e T é finito. Logo, A tem dimensão finita. $\square$

Proposição 2.4. Sejam B e C dois ideais à esquerda (direita) de uma álgebra associativa A . Então $B+C$ é um ideal à esquerda (direita) de A . Se B e C são nilpotentes, então $B+C$ também o é.

Demonstração: Primeiramente, observemos que é de fácil verificação que a soma de ideais à esquerda (direita) é um ideal à esquerda (direita). Agora vamos verificar que $B + C$ é nilpotente. De fato, observe que os elementos de $(B + C)^\alpha$ são somas de elementos da forma

$$a = a_1 \cdots a_\alpha, \quad (2.2)$$

onde a_i pertence ou a B ou a C , e α é um inteiro positivo.

Seja β o número de fatores de B que aparecem em (2.2), agrupados de maneira que, $a = b_1 \cdots b_\beta a_0$, com $b_i \in B$ e $a_0 \in C$. De modo semelhante $a = c_1 \cdots c_\gamma a_{00}$, com $c_i \in C$, $a_{00} \in B$ onde, $\alpha = \beta + \gamma$. Considere $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 - 1$, onde α_1 é o índice de nilpotência B e α_2 o de C . Se $\beta \geq \alpha_1$, então $a = 0$. Por outro lado se $\beta < \alpha_1$, então $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 - 1 - \beta > \alpha_2$, o que implica $a = 0$. Portanto $B + C$ é nilpotente de índice no máximo $\alpha_1 + \alpha_2 - 1$. De modo análogo, podemos provar que a soma de dois ideais nilpotentes à direita de A é um ideal nilpotente à direita de A . $\square$

Proposição 2.5. *Se S é um ideal à esquerda nilpotente da álgebra associativa A , então a soma $S + SA$ é um ideal nilpotente de A .*

Demonstração: Seja α o índice de nilpotência de S , segue que $(SA)^\alpha = S(AS)^{\alpha-1}A \subseteq SS^{\alpha-1}A = 0$ e portanto SA é um ideal à esquerda nilpotente de A . Pela Proposição (2.4), $S + SA$ é um ideal à esquerda nilpotente de A . Mas $(S + SA)A \subseteq SA + SA \subseteq S + SA$. Logo, $S + SA$ é um ideal nilpotente de A . $\square$

Proposição 2.6. *Todo ideal nilpotente à esquerda, à direita ou ideal de uma álgebra associativa A de dimensão finita está contido em um único ideal nilpotente maximal de A , este ideal é chamado **radical** ou **nil-radical** de A .*

Demonstração: Seja R um ideal nilpotente de A de dimensão máxima. Se R_0 é também um ideal nilpotente, pela Proposição (2.4) temos que $R + R_0$ é um ideal à esquerda nilpotente de A . Com isso, $R + R_0$ é um ideal nilpotente de A , cuja dimensão é maior ou igual a de R . Mas como R tem dimensão maximal, $R \supseteq R + R_0$, segue que $R \supseteq R_0$. Agora se S é um ideal nilpotente à esquerda de A , temos pela Proposição (2.5) que $S + SA$ é um ideal nilpotente de A , portanto como R tem dimensão máxima $S + SA \subseteq R$, logo $S \subseteq R$. De modo semelhante R também contém todos os ideais nilpotentes à direita de A . $\square$

2.2 Álgebras básicas associativas

Proposição 2.7. *Se (A, ω) é uma álgebra básica associativa e $a \in A$, com $\omega(a) = 1$, então Aa é uma subálgebra básica de (A, ω) .*

Demonstração: Temos que $Aa \neq \ker(\omega)$, pois $a^2 \in Aa$ e $\omega(a^2) = \omega(a)\omega(a) = 1$. Então, se $b, c \in A$, temos que $(ba)(ca) = (bac)a \in Aa$ $\square$

Proposição 2.8. *Se (A, ω) é uma álgebra básica de dimensão finita tal que para algum $a \in A$, temos $Aa = A$, com $\omega(a) = 1$, então (A, ω) contém um elemento idempotente de peso 1.*

Demonstração: De acordo com a Proposição (2.2) tem-se $\dim Aa = \dim A$ se, e só se, para todo $b \in A$ com $b \neq 0$, então $ba \neq 0$. Consequentemente, $ba = 0$ se, e só se, $b = 0$. Além disso, como $a \in A$, existe $e \in A$, $e \neq 0$ tal que $a = ea$. Então, $a = ea = e^2a$, daí $(e - e^2)a = 0$ e $e = e^2$. Como $1 = \omega(a) = \omega(e)\omega(a)$, segue que $\omega(e) = 1$. $\square$

Teorema 2.9. *Seja A uma álgebra associativa de dimensão finita que não é nilpotente, então A contém um elemento idempotente não nulo.*

Demonstração: Faremos a prova deste Teorema por indução na dimensão n da álgebra A . Para álgebras de dimensão 1 o resultado é consequência da Proposição (2.1). Assumiremos o resultado verdadeiro para álgebras de dimensão menor que n . Se $Aa = A$, para algum elemento $a \in A$, então pela Proposição (2.2) obtemos o resultado desejado. Agora, suponhamos que $Aa \subset A$, para todo $a \in A$. Então o ideal à esquerda Aa tem dimensão menor que A e dois casos serão considerados. Se Aa é não nilpotente, então por hipótese de indução Aa contém um elemento idempotente, o que implica que A contém um elemento idempotente. No caso em que Aa seja nilpotente, temos $(AaA)^k \subseteq (Aa)^k A = 0$, onde k é o índice de nilpotência de Aa . Segue que todos os ideais AaA são nilpotentes para todo $a \in A$. Pela Proposição (2.6) todos os ideais AaA estão contidos no radical R de A . Mas A^3 pode ser visto como uma soma de um número finito de ideais Aa_iA , onde $A = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ sobre F . Logo A^3 está no radical R de A e portanto é nilpotente, o que implica A ser nilpotente, o que contradiz a hipótese. Daí temos que Aa não é nilpotente. $\square$

Corolário 2.10. *Seja A uma álgebra de potências associativas de dimensão finita que não é uma nilálgebra. Então A tem um elemento idempotente.*

Demonstração: Como A não é uma nilálgebra, existe $a \in A$ que não é nilpotente. Seja $A(a)$ a subálgebra de A gerada por a . Como a não é nilpotente, então $A(a)$ não é nilpotente e como $A(a)$ é associativa segue do Teorema 2.9 que existe um idempotente $e \in A(a) \subseteq A$. Portanto A tem um elemento idempotente. $\square$

Corolário 2.11. *Seja A uma álgebra de potências associativas de dimensão finita, $e \in A$ idempotente. Então e é principal se, e só se, A_0 é uma nilálgebra, onde A_0 é o subespaço da decomposição de Peirce de A , com relação ao idempotente e (ver 1.48).*

Demonstração: Se e é principal, segue do Corolário 1.16 que A_0 não tem idempotentes, logo A_0 é um nilálgebra, pois caso contrário pelo Corolário 2.10 A_0 teria um idempotente. Agora se A_0 é uma nilálgebra, A_0 não tem elementos idempotentes, portanto pelo Corolário 1.16 e é principal. $\square$

Corolário 2.12. *Se (A, ω) é uma álgebra bária associativa de dimensão finita, então (A, ω) contém um idempotente de peso 1.*

Demonstração: A prova deste Corolário é feita por indução na dimensão de A . Se $\dim A = 1$, pela proposição 2.1, $A \cong F$ ou A é uma álgebra zero. Como A é bária então A não é álgebra zero. Segue que A possui um idempotente de peso 1. Suponhamos que o resultado é válido para álgebra de dimensão menores que n e seja A uma álgebra bária de dimensão n . Se $A = Aa$, para algum $a \in A$ tal que $\omega(a) = 1$, então que pela Proposição 2.8 A contém um idempotente de peso 1. Se $Aa \neq A$, então $\dim Aa < \dim A$ e pela Proposição 2.7 Aa é uma subálgebra bária de A . Da hipótese de indução temos que Aa contém um idempotente de peso 1. Como $Aa \subseteq A$, logo A contém um elemento idempotente de peso 1. $\square$

Corolário 2.13. *Se (A, ω) é uma álgebra bária de potências associativas de dimensão finita, então A contém um idempotente de peso 1.*

Demonstração: Seja $x \in A$ com $\omega(x) = 1$. Considere a subálgebra $B = A(x)$ de A . Então B é associativa e portanto contém um idempotente de peso 1. $\square$

2.3 Álgebras train de potências associativas

Proposição 2.14. *Seja A uma álgebra de potências associativas. Se A é uma álgebra train, então*

- (i) A contém um elemento idempotente de peso 1;
- (ii) Todo idempotente de A é principal e absolutamente primitivo.

Demonstração:

(i) Seja $x \in A$ com $\omega(x) = 1$. Pela Proposição 1.3 a subálgebra $A(x)$ gerada por x coincide com o subespaço $\langle x, x^2, \dots, x^{n-1} \rangle$. De fato, claramente $\langle x, x^2, \dots, x^{n-1} \rangle \subset A(x)$. Seja $B = \langle x, x^2, \dots, x^{n-1} \rangle$, mostremos que B é uma subálgebra de A . Sabemos que $x^n = -\gamma_1\omega(x)x^{n-1} - \gamma_2\omega(x)^2x^{n-2} - \dots - \gamma_{n-1}\omega(x)^{n-1}x$, usando isto e o fato que A é de potências associativas, então para todo $u, v \in B$, temos que $uv \in B$. Como $x \in B$, segue que $A(x) \subset B$, já que $A(x)$ é a menor subálgebra de A que contém x . Daí $A(x) = B$. Portanto, $A(x)$ é uma álgebra de potências associativas de dimensão finita que não é nilálgebra, pois $\omega(x) = 1$. Pelo Corolário 2.13 $A(x)$ contém um elemento idempotente de peso 1. Logo, A possui um idempotente de peso 1.

(ii) Seja e um idempotente de A de peso 1 e $A = A_1 \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$ a decomposição de Peirce de A relativa ao idempotente e . Para cada elemento $x_0 \in A_0$, x_0 satisfaz $ex_0 = 0$, então $\omega(x_0) = \omega(ex_0) = 0$ e além disso, segue da Proposição 1.3 que x_0 é nilpotente. Portanto, A_0 é uma nilálgebra. Logo, e é principal. Agora pela Observação 1.1, temos que $A_1 = Fe \oplus \ker(\omega)|_{A_1}$, segue que para todo $x \in A_1$, $x = \alpha e + y$, onde $\alpha = \frac{\omega(x)}{\omega(e)} = \omega(x)$ e $y \in \ker(\omega)|_{A_1}$. Portanto, e é absolutamente primitivo. Além disso, $A_1 = Fe \oplus \overline{A}_1$, onde $\overline{A}_1 = A_1 \cap \ker(\omega)$. De fato, seja $x \in A_1$ então $x = \omega(x)e + (x - \omega(x)e)$, temos que $(x - \omega(x)e) \in \overline{A}_1$. $\square$

Lema 2.15. *Sejam A uma álgebra de potências associativas de dimensão finita, e $e \in A$ um idempotente principal. Então os elementos de $A_{\frac{1}{2}}$ são todos nilpotentes.*

Demonstração: Como e é um idempotente principal, pelo Corolário 2.11 temos que A_0 é uma nilálgebra. Seja $x_{\frac{1}{2}} \in A_{\frac{1}{2}}$, tal que $x_{\frac{1}{2}}^2 = w_1 + w_0$, onde $w_1 \in A_1$ e $w_0 \in A_0$. Pelo item (vi) do Lema 1.14, temos $S_{\frac{1}{2}}(w_1^n)x_{\frac{1}{2}}^n = T_{\frac{1}{2}}(w_0^n)x_{\frac{1}{2}}^n$, onde $(x_{\frac{1}{2}}^n)^2 = w_1^n + w_0^n$. Como A_0 é uma nilálgebra, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $w_0^k = 0$, daí $S_{\frac{1}{2}}(w_1^k)x_{\frac{1}{2}}^k = 0$. Faça $z = x_{\frac{1}{2}}^{3k}$. Então

$$\begin{aligned} z &= x_{\frac{1}{2}}^{3k} = x_{\frac{1}{2}}^k x_{\frac{1}{2}}^{2k} = x_{\frac{1}{2}}^k (w_1^k + w_0^k) = x_{\frac{1}{2}}^k w_1^k = (x_{\frac{1}{2}}^k w_1^k)_{\frac{1}{2}} + (x_{\frac{1}{2}}^k w_1^k)_0 \\ &= S_{\frac{1}{2}}(w_1^k)x_{\frac{1}{2}}^k + S_0(w_1^k)x_{\frac{1}{2}}^k = S_0(w_1^k)x_{\frac{1}{2}}^k \end{aligned}$$

Portanto, $z \in A_0$, logo z é nilpotente e portanto $x_{\frac{1}{2}}$ é nilpotente. $\square$

Proposição 2.16. *Seja A uma álgebra de potências associativas de dimensão finita. Se A tem um elemento idempotente e que é principal e absolutamente primitivo, então*

- (i) *A transformação linear $\omega : A = Fe \oplus \overline{A}_1 \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0 \longrightarrow F$, tal que $x = \alpha e + \overline{x}_1 + x_{\frac{1}{2}} + x_0 \longmapsto \alpha$, é a única função peso de A .*
- (ii) *(A, ω) é uma álgebra train.*

Demonstração:

(i) Seja $A = A_1 \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$ a decomposição de Peirce de A , como e é absolutamente primitivo, $A_1 = Fe \oplus \overline{A}_1$, onde $\overline{A}_1$ é uma nilálgebra, segue que $A = Fe \oplus \overline{A}_1 \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$. Agora, como e é um idempotente principal, pelo Lema 2.15, temos que os elementos de $A_{\frac{1}{2}}$ são nilpotentes, além disso pelo Corolário 2.11 A_0 é uma nilálgebra. Portanto, $B = \overline{A}_1 \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$ é uma nilálgebra de A . Defina $\omega : A \longrightarrow F$ tal que $\omega(\gamma e + b) = \gamma$, para todo $b \in B$ e $\gamma \in F$. Temos que $\omega : A \longrightarrow F$ está bem definida e é um homomorfismo não nulo de A em F . Observe que $B = \ker(\omega)$, portanto $\omega : A \longrightarrow F$ é uma função peso de A e pela Proposição 1.1 $\omega : A \longrightarrow F$ é única.

(ii) Seja $0 \neq x \in \ker(\omega)$, tal que $x^k = 0$ e $x^{k-1} \neq 0$, então $x, x^2, \dots, x^{k-1}$ são linearmente independentes. De fato, seja

$$\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha x^{k-1} = 0, \quad (2.3)$$

multiplicando (2.3) por x^{k-2} tem-se $\alpha_1 x^{k-1} = 0$, daí $\alpha_1 = 0$. Portanto

$$\alpha_2 x^2 + \dots + \alpha x^{k-1} = 0, \quad (2.4)$$

multiplicando (2.4) por x^{k-3} temos $\alpha_2 x^{k-1} = 0$. Logo, $\alpha_2 = 0$. Procedendo dessa forma obtemos $\alpha_i = 0$, para todo $i = 1, 2, \dots, k-1$. Portanto, $k-1 = \dim \langle x, x^2, \dots, x^{k-1} \rangle \leq \dim \ker(\omega) = \dim A - 1$, segue que $k = \text{nilíndice}(x) \leq \dim A$. Agora, seja m o nilíndice de $\ker(\omega)$. Se $x \in A$ então $x^2 - \omega(x)x \in \ker(\omega)$, logo $(x^2 - \omega(x)x)^m = 0$. Usando a associatividade das potências de A , temos

$$x^{2m} + \sum_{k=1}^m (-1)^k \binom{m}{k} \omega(x)^k x^{2m-k} = 0,$$

segue que (A, ω) é uma álgebra train. □

Lema 2.17. *Seja A uma álgebra train de potências associativas onde $A = Fe \oplus \overline{A}_1 \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$ é a sua decomposição de Peirce relativa ao idempotente e . Se $A_{\frac{1}{2}} = 0$, então:*

- (i) *e é o único idempotente de A ,*
- (ii) *A equação train de A é $x^s(x - \omega(x))^t = 0$, onde s e t são respectivamente os nilíndices de A_0 e $\overline{A}_1$.*

Demonstração:

(i) Seja e' um idempotente de A , cuja decomposição é $e' = \alpha e + x_1 + x_0$, onde $x_1 \in \overline{A}_1$ e $x_0 \in A_0$. Como $e'^2 = e'$, temos que $x_1 = -x_1^2$, $x_0 = x_0^2$ e $\alpha e = e$. Segue que $x_1 = 0$, pois $x_1 \in \overline{A}_1$ que é uma nilálgebra e $x_0 = 0$, pois pelo corolário 1.16 e é principal e A é de potências associativas. Logo, A_0 não possui idempotentes, daí $e' = \alpha e = e$.

(ii) Seja $x = \alpha e + a_1$, onde $\alpha \in F$, $a_1 \in \overline{A}_1$ e $\omega(x) = \alpha$. Para todo $k \geq 1$, temos

$$x^k = \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} \alpha^i a_1^{k-i} + \alpha^k e.$$

Assim,

$$\begin{aligned} x^s(x - \alpha)^t &= x^s \left(\sum_{i=0}^{t-1} \sum_{j=0}^{t-i-1} \binom{t}{i} \binom{t-i}{j} (-1)^i \alpha^{i+j} a_1^{t-i-j} \right) + \\ &\quad \sum_{i=0}^{t-1} \binom{t}{i} (-1)^i \alpha^t x^s e + (-1)^t \alpha^t x^s. \end{aligned}$$

Como $x^s \in A_1$ então $x^s e = x^s$, logo

$$\sum_{i=0}^{t-1} \binom{t}{i} (-1)^i \alpha^t x^s e + (-1)^t \alpha^t x^s = \left(\sum_{i=0}^t \binom{t}{i} (-1)^i \right) \alpha^t x^s = (1 - 1)^t \alpha^t x^s = 0.$$

Seja $0 < k < t$. O coeficiente de $\alpha^k a_1^{t-k}$ em

$$\sum_{i=0}^{t-1} \sum_{j=0}^{t-i-1} \binom{t}{i} \binom{t-i}{j} (-1)^i \alpha^{i+j} a_1^{t-i-j}$$

é

$$\sum_{i+j=k} \binom{t}{i} \binom{t-i}{j} (-1)^i = \sum_{i=0}^k \binom{t}{i} \binom{t-i}{k-i} (-1)^i.$$

Mas,

$$\binom{t}{i} \binom{t-i}{k-i} = \binom{t}{k} \binom{k}{i}$$

logo

$$\sum_{i=0}^k \binom{t}{i} \binom{t-i}{k-i} (-1)^i = \binom{t}{k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i = \binom{t}{k} (1-1)^k = 0.$$

Notemos que para $k = 0$, temos que $a_1^t = 0$, logo $x^s(x - \omega(x))^t = 0$. Sejam $a_0 \in A_0$, $a_1 \in \overline{A_1}$ e $x = \alpha e + a_0 + a_1 = b_1 + a_0$ onde $b_1 = \alpha e + a_1 \in A_1$. Para todo $k \geq 1$, temos que $x^k = b_1^k + a_0^k$ pois $A_1 A_0 = 0$, $A_1^2 \subseteq A_1$ e $A_0^2 \subseteq A_0$. Assim,

$$\begin{aligned} x^s(x - \alpha)^t &= (b_1^s + a_0^s)(b_1 + a_0 - \alpha)^t \\ &= b_1^s((b_1 - \alpha) + a_0)^t \\ &= b_1^s \sum_{i=0}^t \binom{t}{i} (b_1 - \alpha)^i a_0^{t-i} \\ &= b_1^s \left(a_0^t + \sum_{i=1}^{t-1} \binom{t}{i} (b_1 - \alpha)^i a_0^{t-i} + (b_1 - \alpha)^t \right). \end{aligned}$$

Mas, $\sum_{i=1}^{t-1} \binom{t}{i} (b_1 - \alpha)^i a_0^{t-i} \in A_0$, Logo,

$$b_1^s \left(a_0^t + \sum_{i=1}^{t-1} \binom{t}{i} (b_1 - \alpha)^i a_0^{t-i} + (b_1 - \alpha)^t \right) = b_1^s (b_1 - \alpha)^t = 0.$$

Portanto, $x^s(x - \omega(x))^t = 0$. □

Proposição 2.18. *Se (A, ω) é uma F -álgebra train de posto $n+1$, então existe $y \in A$ tal que $\omega(y) = 1$ e $\{y, y^2, \dots, y^n\}$ é linearmente independente.*

Demonstração: Seja P o polinômio train de A e $H = \{x \in A \mid \omega(x) = 1\}$. Suponhamos por absurdo que para todo $y \in H$, o conjunto $\{y, y^2, \dots, y^n\}$ é linearmente dependente e considere m_y o menor inteiro tal que o conjunto $\{y, y^2, \dots, y^{m_y-1}\}$ é linearmente dependente, com $1 < m_y \leq n$. Portanto para todo $y \in H$, existe um polinômio $M_y \in F[x]$, tal que $M_y(y) = 0$, com o grau de M_y igual m_y . Observe

que M_y divide P , pois caso contrário $P = QM_y + R$, com $0 < \text{grau } R < m_y$. Mas $R(y) = P(y) - Q(y)M_y(y) = 0$, contradizendo o fato de M_y ser o polinômio de grau mínimo que anula y . Consequentemente, o conjunto dos divisores de P , $\text{div}(P)$, não são todos triviais. Agora, como A tem dimensão finita, existe $D \in \text{div}(P)$ tal que $H = V(D)$, onde $V(D) = \{y \in H \mid D(y) = 0\}$. Logo, D anula todo elemento de H e o grau $D < \text{grau } P$, contradizendo o fato de P ser o polinômio de menor grau que anula H , portanto $\{y, y^2, \dots, y^n\}$ é linearmente independente. $\square$

2.4 Representação (s, t) de uma álgebra train de potências associativas

Teorema 2.19. *Seja A uma álgebra train de potências associativas. Então:*

- (i) *A equação train de A é $x^s(x - \omega(x))^t = 0$, para alguns inteiros $s, t \geq 1$;*
- (ii) *Se $A = Fe \oplus \overline{A}_1 \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$ é a decomposição de Peirce de A associada ao idempotente e , então o nilíndice de $A_0 \leq s$ e o nilíndice de $\overline{A}_1 \leq t$;*
- (iii) *Se A é de dimensão finita, então os limites superiores s e t são simultaneamente atingidos por algum idempotente e .*

Demonstração:

(i) Como A é uma álgebra train de potências associativas, então pela Proposição 2.14, todo idempotente de A é principal e absolutamente primitivo, segue da demonstração do item ii da Proposição 2.16, que $(x^2 - \omega(x)x)^r = 0$, para qualquer $x \in A$, onde r é o posto de A . Portanto, o polinômio train de A que divide $(X^2 - X)^r$ tem a forma $X^s(X - 1)^t$. Logo a equação train de A é $x^s(x - \omega(x))^t = 0$, para alguns inteiros $s, t \geq 1$.

(ii) Pelo Lema 2.17, a subálgebra $B = Fe \oplus \overline{A}_1 \oplus A_0$ é uma álgebra train de equação train $x^{s_0}(x - \omega(x))^{t_0} = 0$, onde s_0 e t_0 são respectivamente os nilíndices de A_0 e $\overline{A}_1$. Cosequentemente o polinômio train de B divide o polinômio train de A . Portanto, $s_0 \leq s$ e $t_0 \leq t$.

(iii) Pela Proposição 2.18, temos que existe $a \in A$ com $\omega(a) = 1$ tal que

$$\{a, a^2, \dots, a^{r-1}\}$$

é linearmente independente, onde $r = s + t = \text{posto de } A$. Então a subálgebra $S := A(a)$ gerada por a é uma álgebra train de posto r e associativa. De fato, suponhamos que a equação train de S fosse

$$x^m + \gamma_1 \omega(x) x^{m-1} + \cdots + \gamma_{m-1} \omega(x)^{m-1} x = 0,$$

com $m < r$. Logo $a^m + \gamma_1 a^{m-1} + \cdots + \gamma_{m-1} a = 0$, contradizendo o fato de $\{a, a^2, \dots, a^{r-1}\}$ ser linearmente independente. Agora, como S é uma subálgebra train de posto r , temos que S possui a mesma equação train de A , ou seja, $x^s(x - \omega(x))^t = 0$. Seja e um idempotente de S e considere a decomposição de Peirce $S = Fe \oplus \bar{S}_1 \oplus S_0$ relativa ao idempotente e . Observe que $S_{\frac{1}{2}} = 0$. De fato, seja $x \in S_{\frac{1}{2}}$ então

$$ex = \frac{1}{2}x$$

$$e(ex) = \frac{1}{4}x.$$

Como S é associativa, segue que $e^2x = \frac{1}{4}x$ e pelo fato de e ser um idempotente temos

$$ex = \frac{1}{4}x \text{ e } \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}x.$$

Logo $x = 0$. Com isso $S_{\frac{1}{2}} = 0$. Pelo Lema 2.17, a equação train de S é $x^{s_e}(x - \omega(x))^{t_e} = 0$, onde s_e e t_e são respectivamente os nilíndices de S_0 e $\bar{S}_1$. Consequentemente $s_e = s$ e $t_e = t$. Sabemos que o idempotente e fornece uma decomposição de Peirce $A = Fe \oplus \bar{A}_1 \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$ de A , onde $\bar{S}_1 \subseteq \bar{A}_1$ e $S_0 \subseteq A_0$. Portanto, $s_e = s \leq \text{nilíndice } A_0$ e $t_e = t \leq \text{nilíndice } \bar{A}_1$. Completamos a demonstração usando a parte (ii) do Teorema, que nos garante que nilíndice de $A_0 \leq s$ e nilíndice de $\bar{A}_1 \leq t$. $\square$

Definição 2.3. Uma álgebra train é dita de **representação** (s, t) se sua equação train é $x^s(x - \omega(x))^t = 0$.

Observação 2.1. Existe uma dualidade entre álgebras train de potências associativas de representação (s, t) e as de representação (t, s) . Precisamente, atribui-se a cada álgebra bária (A, ω) uma nova álgebra bária (A^*, ω) com o mesmo espaço vetorial A e multiplicação $x*y = \omega(x)y + \omega(y)x - xy$, então A é uma álgebra train de potências associativas de representação (s, t) se, e somente se, A^* é uma álgebra train de potências associativas de representação (t, s) . Além disso, $I(A) = I(A^*)$, onde $I(A)$ é conjunto

dos idempotentes de A , e se $A = Fe \oplus \overline{A}_1 \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$ e $A^* = Fe \oplus \overline{A}_1^* \oplus A_{\frac{1}{2}}^* \oplus A_0^*$, são as respectivas decomposições de Peirce de A e A^* com relação ao idempotente e , então $\overline{A}_1 = \overline{A}_1^*$, $A_{\frac{1}{2}} = A_{\frac{1}{2}}^*$ e $A_0 = A_0^*$. Ocasionalmente usaremos essa dualidade para simplificar nossas demonstrações.

Nossa próxima tarefa é estudar a invariância das dimensões das componentes de Peirce.

Teorema 2.20. *Seja $A = A_1 \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$ a decomposição de Peirce da álgebra train de potências associativas A e de dimensão finita, relativa ao idempotente e . Então as dimensões de A_1 , $A_{\frac{1}{2}}$ e A_0 são independentes da escolha do idempotente e .*

Demonstração: Como A é uma álgebra train, por definição o polinômio característico $P(X) = \det(L_a - Xid_A)$ do operador L_a é o mesmo para todo $a \in H$. Em particular, $P(X) = \det(L_e - Xid_A)$, para cada idempotente $e \in A$. Por outro lado, a soma direta $A = A_1 \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$ nos diz que os possíveis autovalores para L_e são 1, 0 e $\frac{1}{2}$. Consequentemente $P(X) = (X - 1)^{n(1)}(X - \frac{1}{2})^{n(\frac{1}{2})}X^{n(0)}$, onde os inteiros $n(1)$, $n(\frac{1}{2})$ e $n(0)$ são independentes da escolha do idempotente e . Finalmente temos que $A = \ker(L_e - id_A)^{n(1)} \oplus \ker(L_e - \frac{1}{2}id_A)^{n(\frac{1}{2})} \oplus \ker(L_e^{n(0)})$ e $A_k = \ker(L_e - kid_A) \subseteq \ker(L_e - kid_A)^{n(k)}$. Assim, concluímos que $A_k = \ker(L_e - kid_A)^{n(k)}$ tem dimensão $n(k)$, para $k = 1, \frac{1}{2}$ e 0. $\square$

Definição 2.4. *A terna $(\dim A_1, \dim A_{\frac{1}{2}}, \dim A_0)$ é chamada o **tipo** da álgebra train de potências associativas e de dimensão finita A .*

Observemos que se (A, ω) é uma álgebra train, então também o é toda subálgebra básica B de A . Mostremos que a situação contrária também é verdadeira para o caso de álgebras de potências associativas de dimensão finita.

2.5 Álgebra básica localmente train

Definição 2.5. *Dizemos que uma álgebra básica (A, ω) é **localmente train** se a subálgebra $A(x)$ gerada por x é uma álgebra train para todo $x \in H$.*

Teorema 2.21. *Seja (A, ω) uma álgebra básica de potências associativas de dimensão finita. Se (A, ω) é localmente train, então (A, ω) é uma álgebra train.*

Demonstração:

Por hipótese e Lema 2.17, para cada $x \in H$, existe inteiros $s_x \geq 1$ e $t_x \geq 1$ tal que $y^{s_x}(y - \omega(y))^{t_x} = 0$, para todo $y \in A(x)$. Além disso, s_x e t_x são os nilíndices das componentes de Peirce de $A(x)$. Como A tem dimensão finita, os conjuntos $\mathbf{S} = \{s_x \mid x \in H\}$ e $\mathbf{T} = \{t_x \mid x \in H\}$ são limitados. Considere $s = \text{máx } \mathbf{S}$ e $t = \text{máx } \mathbf{T}$, temos $x^s(x - \omega(x))^t = 0$ para todo $x \in H$. Segue da Proposição 1.3 que $x^s(x - \omega(x))^t = 0$, para todo $x \in A$. $\square$

Capítulo 3

Conjunto de idempotentes em uma álgebra train

Nesta seção A será sempre uma álgebra de dimensão finita. Um tópico interessante no estudo de álgebras train é o conhecimento sobre a existência e as propriedades dos idempotentes. Guzzo [13] e Gutiérrez [10] assumem a existência de um idempotente para encontrar a decomposição de Peirce de uma álgebra train. Foi provado na Proposição 2.14 a existência de tais elementos em álgebras train de potências associativas de dimensão arbitrária. Nesta seção estudaremos dois métodos distintos na obtenção de fórmulas interessantes para os idempotentes.

3.1 Parte A: Cálculo de idempotentes

O próximo Teorema mostra como calcular idempotentes em termos dos elementos de peso 1.

Teorema 3.1. *Seja (A, ω) uma álgebra train de potências associativas de equação train $x^s(x - \omega(x))^t = 0$. Sejam $f(X)$ e $g(X)$ os únicos polinômios satisfazendo a identidade de Bezout.*

$$f(X)X^s + g(X)(X - 1)^t = 1, \quad (3.1)$$

com grau $f(X) < t$ e grau $g(X) < s$. Então o conjunto de todos os idempotentes de A é dado por $I(A) = \{e_a := h(a) \mid a \in H\}$, onde $h(X) = f(X)X^s$.

Demonstração:

Considere o polinômio train de A , $P(X) = X^s(X-1)^t$ e $f(X) = \sum_{i=0}^{t-1} b_i X^i$. Por (3.1) temos que $f(1) = 1$. Assim, para todo $a \in H$, temos que $\omega(e_a) = \omega(h(a)) = \omega(f(a)a^s) = \omega\left(\left(\sum_{i=0}^{t-1} b_i a^i\right)a^s\right) = \omega\left(\sum_{i=0}^{t-1} b_i a^{i+s}\right) = \sum_{i=0}^{t-1} b_i \omega(a^{i+s}) = \sum_{i=0}^{t-1} b_i = f(1) = 1$. Portanto $e_a \neq 0$. Por outro lado, (3.1) implica $h^2(X) - h(X) = h(X)[h(X) - 1] = f(X)X^s[-g(X)(X-1)^t] = -P(X)f(X)g(X) \equiv 0 \pmod{P(X)}$. Segue que $e_a^2 = h^2(a) = h(a) = e_a$. Reciprocamente, cada idempotente e surge desta maneira, pois $h(e) = \sum_{i=0}^{t-1} b_i e^{s+i} = \left(\sum_{i=0}^{t-1} b_i\right)e = e$. $\square$

Observe que o Teorema 3.1 mostra que para obter os idempotentes de uma álgebra train de potências associativas de equação train $x^s(x-\omega(x))^t = 0$, necessitamos somente saber quem é o polinômio $f(X)$. Este é o objetivo do próximo Lema.

Lema 3.2. *O polinômio $f(X)$ em (3.1) é dado por*

$$f(X) = \sum_{p=0}^{t-1} \binom{p+s-1}{p} (1-X)^p \quad (3.2)$$

Demonstração: O caso $t = 1$ é imediato, desde que o grau $f(X) < 1$, já que $f(X) = f(1) = 1$, que é igual o lado direito de (3.2). Para $t \geq 2$, considere o polinômio

$$T(X) := Xf^{(1)}(X) + sf(X) \quad (3.3)$$

onde $f^{(1)}$ é a primeira derivada de f . Derivando (3.1) temos

$$f^{(1)}(X)X^s + sf(X)X^{s-1} + g^{(1)}(X)(X-1)^t + tg(X)(X-1)^{t-1} = 0$$

o que implica em

$$X^{s-1}(Xf^{(1)}(X) + sf(X)) + g^{(1)}(X)(X-1)^t + tg(X)(X-1)^{t-1} = 0,$$

isto é,

$$X^{s-1}T(X) = -(X-1)^{t-1}[tg(X) + g^{(1)}(X)(X-1)].$$

Assim, $(X - 1)^{t-1}$ divide $X^{s-1}T(X)$, o que implica que $(X - 1)^{t-1}$ divide $T(X)$, pois os polinômios $(X - 1)^{t-1}$ e X^{s-1} são primos entre si. Como grau $T(X) < t$, então

$$T(X) = \alpha(X - 1)^{t-1}, \quad (3.4)$$

para algum $\alpha \in F$. Agora, derivando (3.3) p -vezes obtemos

$$T^{(p)}(X) = (p + s)f^{(p)}(X) + Xf^{(p+1)}(X), \quad (3.5)$$

para todo $p \geq 0$. Assim, para $p \in 0, 1, \dots, t - 2$ temos que

$$f^{(p+1)}(1) = -(s + p)f^{(p)}(1). \quad (3.6)$$

De fato, pois para esses casos

$$T^{(p)}(X) = \alpha(t - 1) \cdots (t - p)(X - 1)^{t-(p+1)}. \quad (3.7)$$

o que implica em $T^{(p)}(1) = 0$. Agora, usando indução em $p \geq 0$ e (3.6) mostremos que

$$f^{(p)}(1) = (-1)^p \frac{(s + p - 1)!}{(s - 1)!}, \quad (3.8)$$

para todo $p \in \{0, 1, \dots, t - 1\}$. De fato, para $k = 0$ tem-se $f^{(0)}(1) = f(1) = 1 = (-1)^0 \frac{(s + 0 - 1)!}{(s - 1)!}$. Suponhamos que para $k = p$, temos $f^{(p)}(1) = (-1)^p \frac{(s + p - 1)!}{(s - 1)!}$, portanto por (3.6) segue que

$$f^{(p+1)}(1) = -(s + p)f^{(p)}(1) = -(s + p)(-1)^p \frac{(s + p - 1)!}{(s - 1)!} = (-1)^{p+1} \frac{(s + p)!}{(s - 1)!}. \quad (3.9)$$

Usando a fórmula de Taylor, obtemos

$$\begin{aligned} f(X) &= f(1) + f^{(1)}(1)(X - 1) + \frac{f^{(2)}(1)}{2!}(X - 1)^2 + \cdots + \frac{f^{(t-1)}(1)}{(t - 1)!}(X - 1)^{t-1} \\ &= 1 + (-s)(X - 1) + \frac{(s + 1)!}{(s - 1)!} \frac{(X - 1)^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^{t-1}}{(t - 1)!} \frac{(s + t - 2)!}{(s - 1)!}(X - 1)^{t-1} \\ &= \sum_{p=0}^{t-1} \binom{p + s - 1}{p} (1 - X)^p. \end{aligned}$$

□

3.2 Processo de unitização

Definição 3.1. *Seja A uma álgebra sobre o corpo F . Definiremos $\bar{A} = F \times A$ como a F -álgebra obtida de A , com as seguintes operações:*

$$(\alpha, a) + (\beta, b) = (\alpha + \beta, a + b);$$

$$\lambda(\alpha, a) = (\lambda\alpha, \lambda a);$$

$$(\alpha, a)(\beta, b) = (\alpha\beta, \beta a + \alpha b + ab),$$

onde $\alpha, \beta, \lambda \in F$ e $a, b \in A$. A esse processo de obtenção da álgebra $\bar{A}$ chamaremos de **unitização** de A , pois $(1, 0)$ é a unidade de $\bar{A}$ e denotado pelo símbolo $1_{\bar{A}}$

Observação 3.1. *Como $A' = \{(0, a) \mid a \in A\}$ é isomorfa a A como álgebras, vamos identificar A' com A colocando $(0, a) := a$. Assim, $\bar{A} = F1_{\bar{A}} + A'$.*

Observação 3.2. *Seja A uma álgebra train e $\bar{A}$ a álgebra obtida de A pelo processo de unitização. Então para todo $a \in H$, o elemento $e'_a = g(a)(a - 1)^t$ é um idempotente em $\bar{A}$, que é ortogonal a $e_a = f(a)a^s$. De fato,*

$$e'_a = g(a)(a - 1)^t = 1 - f(a)a^s = 1 - e_a$$

o que implica que

$$(e'_a)^2 = (1 - e_a)^2 = 1 - 2e_a + e_a = 1 - e_a = e'_a.$$

Além disso,

$$e'_a e_a = (1 - e_a)e_a = e_a - e_a^2 = e_a - e_a = 0.$$

Semelhantemente, obtemos $e_a e'_a = 0$. Note também que é possível calcular o polinômio $g(X)$. Para isso, substitua X por $1 - X$, em (3.1) e escrevamos $f_{s,t}(X)$ e $g_{s,t}(X)$ no lugar de $f(X)$ e $g(X)$. Então

$$(-1)^t g_{s,t}(1 - X)X^t + (-1)^s f_{s,t}(1 - X)(X - 1)^s = 1. \quad (3.10)$$

Comparando (3.10) com $f_{t,s}(X)X^t + g_{t,s}(X)(X - 1)^s = 1$, segue que $f_{t,s}(X) = (-1)^t g_{s,t}(1 - X)$ e $g_{s,t}(X) = (-1)^t f_{t,s}(1 - X)$. Por (3.2) temos,

$$g_{s,t}(X) = (-1)^t \sum_{p=0}^{s-1} \binom{p+t-1}{p} X^p. \quad (3.11)$$

Se (A, ω) é uma álgebra train de potências associativas então A tem uma representação (s, t) onde $x^s(x - \omega(x))^t = 0$ é a sua equação train, ver parágrafo 2.3.

Corolário 3.3. *Seja (A, ω) uma álgebra train de posto n , de potências associativas e $I(A) = \{e_a \mid a \in H\}$. Se a representação de A é $(n-1, 1), (n-2, 2), (n-3, 3), (n-4, 4)$ ou $(n-5, 5)$, então:*

$$e_a = a^{n-1},$$

$$e_a = (n-1)a^{n-2} - (n-2)a^{n-1},$$

$$e_a = \frac{(n-1)(n-2)}{2} a^{n-3} - (n-1)(n-3)a^{n-2} + \frac{(n-2)(n-3)}{2} a^{n-1},$$

$$e_a = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} a^{n-4} - \frac{(n-1)(n-2)(n-4)}{2} a^{n-3} \\ + \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{2} a^{n-2} - \frac{(n-1)(n-3)(n-4)}{6} a^{n-1},$$

$$e_a = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24} a^{n-5} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-5)}{6} a^{n-4} \\ + \frac{(n-1)(n-3)(n-4)(n-5)}{4} a^{n-3} - \frac{(n-1)(n-3)(n-4)(n-5)}{6} a^{n-2} \\ + \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{24} a^{n-1},$$

respectivamente.

Demonstração: Usando o Teorema 3.1 e (3.2) basta calcularmos o polinômio $f(X)$. De fato, supondo que a representação de A é $(n-1, 1)$, então $x^{n-1}(x - w(x)) = 0$ é a equação train de A . Daí por (3.2) tem-se $f(X) = \sum_{p=0}^0 \binom{p+(n-1)-1}{p} (1-X)^p = 1$. Segue do Teorema 3.1 que $I(A) = \{e_a = a^{n-1} \mid a \in H\}$. Agora, se a representação de A for $(n-2, 2)$ segue que a equação train de A é $x^{n-2}(x - w(x))^2 = 0$. Logo por (3.2),

$$f(X) = \sum_{p=0}^1 \binom{p+n-3}{p} (1-X)^p = 1 + (n-2)(1-X).$$

Pelo Teorema 3.1 temos

$$\begin{aligned}
 e_a = h(a) = f(a)a^{n-2} &= [1 + (n-2)(1-a)]a^{n-2} \\
 &= a^{n-2} + (n-2)(1-a)a^{n-2} \\
 &= a^{n-2} + (n-2)a^{n-2} - (n-2)a^{n-1} \\
 &= (n-1)a^{n-2} - (n-2)a^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Os casos $(n-3, 3)$, $(n-4, 4)$ e $(n-5, 5)$ podem ser determinados de maneira análoga aos anteriores. $\square$

A expressão geral dos idempotentes em representação (t, s) pode ser imediatamente deduzida fazendo uma pequena modificação na representação (s, t) . De fato, seja (A, ω) uma álgebra train de potências associativas de representação (t, s) . Vimos na Observação 2.1 que a álgebra básica A induz uma nova álgebra básica A^* , onde $I(A) = I(A^*)$. Seja $f_{s,t}(X) = \sum_{i=0}^{t-1} b_i X^i$ e $h_{s,t}(X) = f_{s,t}(X)X^s$. Pelo Teorema 3.1, $I(A^*) = \{e_a = h_{s,t}^*(a) \mid a \in H\}$, onde $h_{s,t}^*(a) = \sum_{i=0}^{t-1} b_i a^{*(i+s)}$ e $a^{*(i+s)}$ são as potências

de a em A^* . Por outro lado, de acordo com [16, pág 6], temos $a^{*k} = \sum_{i=1}^k (-1)^i \binom{k}{i} a^i$, que pode ser formalmente escrito como $a^{*k} = 1 - (1-a)^k$. Portanto,

$$e_a = h_{s,t}^*(a) = \sum_{i=0}^{t-1} b_i [1 - (1-a)^{i+s}] = \sum_{i=0}^{t-1} b_i - \sum_{i=0}^{t-1} b_i (1-a)^{i+s} = 1 - \sum_{i=0}^{t-1} b_i (1-a)^{i+s}. \quad (3.12)$$

Tomando em conta o Corolário 3.3, obtemos diretamente de (3.12) o seguinte Corolário

Corolário 3.4. *Se a representação de A é $(1, n-1)$, $(2, n-2)$, $(3, n-3)$, $(4, n-4)$ ou $(5, n-5)$, e $I(A) = \{e_a \mid a \in H\}$, então:*

$$e_a = 1 - (1 - a)^{n-1},$$

$$e_a = 1 - (n - 1)(1 - a)^{n-2} + (n - 2)(1 - a)^{n-1},$$

$$e_a = 1 - \frac{(n - 1)(n - 2)}{2} (1 - a)^{n-3} - (n - 1)(n - 3)(1 - a)^{n-2} \\ + \frac{(n - 2)(n - 3)}{2} (1 - a)^{n-1},$$

$$e_a = 1 - \frac{(n - 1)(n - 2)(n - 3)}{6} (1 - a)^{n-4} - \frac{(n - 1)(n - 2)(n - 4)}{2} (1 - a)^{n-3} \\ + \frac{(n - 2)(n - 3)(n - 4)}{2} (1 - a)^{n-2} - \frac{(n - 1)(n - 3)(n - 4)}{6} (1 - a)^{n-1},$$

$$\begin{aligned}
e_a = & 1 - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24} (1-a)^{n-5} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-5)}{6} (1-a)^{n-4} \\
& + \frac{(n-1)(n-3)(n-4)(n-5)}{4} (1-a)^{n-3} - \frac{(n-1)(n-3)(n-4)(n-5)}{6} (1-a)^{n-2} \\
& + \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{24} (1-a)^{n-1},
\end{aligned}$$

respectivamente.

3.3 Parte B: Caracterização do conjunto dos idempotentes

Nosso próximo objetivo é conhecer uma caracterização alternativa do conjunto dos idempotentes. Uma questão natural consiste em encontrar todos os idempotentes a partir de um idempotente fixado. Para isso, assumiremos que a álgebra A é e -estável (ver Definição 1.25). Antes de começarmos essa discussão, precisamos de alguns resultados auxiliares.

Como primeiro resultado temos uma reformulação do Lema 1.14 para álgebras e -estáveis.

Proposição 3.5. *Seja A uma álgebra de potências associativas e e um idempotente. Considere $A = A_1 \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$ sua decomposição de Peirce, relativa ao idempotente e . Se A é e -estável, então para todo $x_i, y_i \in A_i$ ($i = 0, 1$) e $a_{\frac{1}{2}} \in A_{\frac{1}{2}}$, temos*

- (i) $(x_1 y_1) a_{\frac{1}{2}} = x_1 (y_1 a_{\frac{1}{2}}) + y_1 (x_1 a_{\frac{1}{2}});$
- (ii) $(x_0 y_0) a_{\frac{1}{2}} = x_0 (y_0 a_{\frac{1}{2}}) + y_0 (x_0 a_{\frac{1}{2}});$
- (iii) $x_0 (y_1 a_{\frac{1}{2}}) = y_1 (x_0 a_{\frac{1}{2}});$
- (iv) $x_0 (x_{\frac{1}{2}} y_{\frac{1}{2}}) = [x_{\frac{1}{2}} (y_{\frac{1}{2}} x_0)]_0 + [y_{\frac{1}{2}} (x_{\frac{1}{2}} x_0)]_0$
 $x_1 (x_{\frac{1}{2}} y_{\frac{1}{2}}) = [x_{\frac{1}{2}} (y_{\frac{1}{2}} x_1)]_1 + [y_{\frac{1}{2}} (x_{\frac{1}{2}} x_1)]_1;$
- (v) $(a_{\frac{1}{2}}^2)_1 a_{\frac{1}{2}} = (a_{\frac{1}{2}}^2)_0 a_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} a_{\frac{1}{2}}^3;$

- (vi) $S_{x_\lambda y_\lambda} = S_{x_\lambda} S_{y_\lambda} + S_{y_\lambda} S_{x_\lambda}$, onde $S_{x_\lambda} : A_{\frac{1}{2}} \longrightarrow A_{\frac{1}{2}}$ é a transformação tal que $x_{\frac{1}{2}} \longmapsto x_\lambda x_{\frac{1}{2}}$, com $\lambda \in \{0, 1\}$.

Demonstração:

Usando o item (i) do Lema 1.14, sabemos que

$$S_{\frac{1}{2}}(x_1 y_1) = S_{\frac{1}{2}}(x_1) S_{\frac{1}{2}}(y_1) + S_{\frac{1}{2}}(y_1) S_{\frac{1}{2}}(x_1),$$

para todo $x_1, y_1 \in A_1$. Logo,

$$S_{\frac{1}{2}}(x_1 y_1) a_{\frac{1}{2}} = S_{\frac{1}{2}}(x_1) S_{\frac{1}{2}}(y_1) a_{\frac{1}{2}} + S_{\frac{1}{2}}(y_1) S_{\frac{1}{2}}(x_1) a_{\frac{1}{2}}$$

o que conduz a

$$((x_1 y_1) a_{\frac{1}{2}})_{\frac{1}{2}} = (x_1 (y_1 a_{\frac{1}{2}})_{\frac{1}{2}})_{\frac{1}{2}} + (y_1 (x_1 a_{\frac{1}{2}})_{\frac{1}{2}})_{\frac{1}{2}}.$$

Agora como A é e -estável então $A_1 A_{\frac{1}{2}} \subseteq A_{\frac{1}{2}}$ e $A_0 A_{\frac{1}{2}} \subseteq A_{\frac{1}{2}}$. Daí $(x_1 y_1) a_{\frac{1}{2}} = x_1 (y_1 a_{\frac{1}{2}}) + y_1 (x_1 a_{\frac{1}{2}})$. A demonstração dos demais casos é análoga ao item (i), usando os outros itens do Lema 1.14. $\square$

Com isso obtemos o seguinte Lema

Lema 3.6. *Com as mesmas hipóteses da Proposição 3.5, para todo $k \geq 2$, $\lambda \in \{0, 1\}$ e $x_\lambda \in A_\lambda$, temos*

- (i) $S_{x_\lambda^k} = 2^{k-1} S_{x_\lambda}^k$;
- (ii) $S_{x_\lambda^k} = 2 S_{x_\lambda} S_{x_\lambda^{k-1}}$;
- (iii) $S_{x_\lambda} S_{x_\lambda^{k+1}} = S_{x_\lambda^{k+1}} S_{x_\lambda}$.

Demonstração:

Os itens (i) e (ii) são demonstrados por indução em k .

(iii)

$$S_{x_\lambda} S_{x_\lambda^{k+1}} = 2 S_{x_\lambda} S_{x_\lambda} S_{x_\lambda^k} = 2^k S_{x_\lambda}^{k+2} = 2^k S_{x_\lambda}^{k+1} S_{x_\lambda} = S_{x_\lambda^{k+1}} S_{x_\lambda}.$$

$\square$

Lema 3.7. *Com as mesmas hipóteses da Proposição 3.5, para todo $k \geq 1$ e $x_{\frac{1}{2}} \in A_{\frac{1}{2}}$, temos:*

$$x_{\frac{1}{2}} (x_{\frac{1}{2}}^2)_0^k \stackrel{(i)}{=} x_{\frac{1}{2}} (x_{\frac{1}{2}}^2)_1^k \stackrel{(ii)}{=} \frac{1}{2} x_{\frac{1}{2}}^{2k+1}.$$

Demonstração:

Para mostrarmos o item (i) usaremos indução em k . Para $k = 1$, o resultado segue da Proposição 3.5 item (v). Seja $k \geq 2$ e suponha que o resultado seja verdadeiro para k . Com o auxílio da Proposição 3.5 e do Lema 3.6, junto com a hipótese de indução (H.I.), temos

$$\begin{aligned} x_{\frac{1}{2}}(x_{\frac{1}{2}}^2)_0^{k+1} &\stackrel{3.6(ii)}{=} 2(x_{\frac{1}{2}}^2)_0[x_{\frac{1}{2}}(x_{\frac{1}{2}}^2)_0^k] \stackrel{H.I.}{=} 2(x_{\frac{1}{2}}^2)_0[x_{\frac{1}{2}}(x_{\frac{1}{2}}^2)_1^k] \stackrel{3.5(iii)}{=} 2(x_{\frac{1}{2}}^2)_1[x_{\frac{1}{2}}(x_{\frac{1}{2}}^2)_0^k] \stackrel{3.5(v)}{=} \\ &2(x_{\frac{1}{2}}^2)_1[x_{\frac{1}{2}}(x_{\frac{1}{2}}^2)_1^k] \stackrel{3.6(iii)}{=} 2(x_{\frac{1}{2}}^2)_1[x_{\frac{1}{2}}(x_{\frac{1}{2}}^2)_1^k] \stackrel{3.6(ii)}{=} x_{\frac{1}{2}}(x_{\frac{1}{2}}^2)_1^{k+1}. \end{aligned}$$

Isso prova (i). Agora (ii), segue de (i), pois $x_{\frac{1}{2}}^{2k+1} = x_{\frac{1}{2}}(x_{\frac{1}{2}}^2)^k = x_{\frac{1}{2}}[(x_{\frac{1}{2}}^2)_0^k + (x_{\frac{1}{2}}^2)_1^k] \stackrel{3.7(i)}{=} x_{\frac{1}{2}}(x_{\frac{1}{2}}^2)_0^k + x_{\frac{1}{2}}(x_{\frac{1}{2}}^2)_1^k = 2x_{\frac{1}{2}}(x_{\frac{1}{2}}^2)_1^k$.

□

Combinando o Lema 3.7, e o Teorema 2.19, item (ii), segue o seguinte Corolário.

Corolário 3.8. *Seja A uma álgebra train de potências associativas e-estável de representação (s, t) . Então $x_{\frac{1}{2}}^{2r+1} = 0$, para todo $x_{\frac{1}{2}} \in A_{\frac{1}{2}}$, onde $r = \min\{s, t\}$.*

Demonstração:

Pelo Lema 3.7 sabemos que $x_{\frac{1}{2}}(x_{\frac{1}{2}}^2)_0^r \stackrel{(i)}{=} x_{\frac{1}{2}}(x_{\frac{1}{2}}^2)_1^r \stackrel{(ii)}{=} \frac{1}{2}x_{\frac{1}{2}}^{2r+1}$, para todo inteiro $r \geq 1$, e pelo Teorema 2.19, item (ii), segue o resultado.

□

Observação 3.3. *Como $x_{\frac{1}{2}}^{2r+1} = 0$, implica $(x_{\frac{1}{2}}^2)^{r+1} = 0$, então $(x_{\frac{1}{2}}^2)_0^{r+1} = (x_{\frac{1}{2}}^2)_1^{r+1} = 0$. Logo, $(x_{\frac{1}{2}}^2)_0^k = (x_{\frac{1}{2}}^2)_1^k = 0$, para todo $k \geq r + 1$.*

Lema 3.9. *Com as mesmas hipóteses da Proposição 3.5, seja a um elemento de A tal que $a^r = 0$, para algum inteiro $r \geq 1$:*

(i) *Se $v = a - a^2$, então $a = \sum_{p=1}^{r-1} \mu_p v^p$, onde a sequência $\{\mu_p\}_p$ é dada por:*

$$\mu_1 = 1 \quad e \quad \mu_p = \sum_{\frac{p}{2} \leq k \leq p-1} \mu_k (-1)^{p-k+1} \binom{k}{p-k}, \quad \text{para } p \geq 2; \quad (3.13)$$

(ii) *Reciprocamente, se $a = \sum_{p=1}^{r-1} \mu_p v^p$ e $v \in A$ com $v^r = 0$, então $v = a - a^2$.*

Demonstração:

(i) Sem perda de generalidade, assumiremos que $a^{r-1} \neq 0$. Como $v^r = 0$ e $v^{r-1} \neq 0$, a família $\{v, v^2, \dots, v^{r-1}\}$ é uma base de $A(a)$. Consequentemente, existem $\mu_1, \dots, \mu_{r-1}$ em F tal que

$$a = \sum_{k=1}^{r-1} \mu_k v^k = \sum_{k=1}^{r-1} \mu_k \left(\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} a^{k+i} \right).$$

Isso implica que $a = \sum_{p=1}^{r-1} \lambda_p a^p$, onde

$$\lambda_1 = \mu_1 = 1 \quad e \quad \lambda_p = \sum_{1 \leq k \leq r-1, \quad 0 \leq i \leq k, \quad k+i=p} \mu_k (-1)^i \binom{k}{i} \quad (2 \leq p \leq r-1).$$

Mas a condição $0 \leq i \leq k$ e $k+i=p$ implica em $k \leq p \leq 2k$. Segue disso que

$$\lambda_p = \sum_{\frac{p}{2} \leq k \leq p} \mu_k (-1)^{p-k} \binom{k}{p-k} = \mu_p + \sum_{\frac{p}{2} \leq k \leq p-1} \mu_k (-1)^{p-k} \binom{k}{p-k} \quad (2 \leq p \leq r-1). \quad (3.14)$$

Por outro lado, temos $a = \sum_{p=1}^{r-1} \lambda_p a^p$, com $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_p = 0$ para $2 \leq p \leq r-1$.

Comparando esse último fato com (3.14), concluímos a relação (3.13).

(ii) Por hipótese, temos que $a = \sum_{p=1}^{r-1} \mu_p v^p$ e pela parte (i), $a = \sum_{p=1}^{r-1} \mu_p w^p$, onde $w = a - a^2$. Agora, usando o binômio de Newton e o fato de $a^j = v^j = w^j = 0$, para todo $j \geq r$, pois A é de potências associativas, temos que $a^{r-1} = v^{r-1} = w^{r-1}$. Segue que $a^{r-2} = v^{r-2} + (r-2)\mu_2 v^{r-1} = w^{r-2} + (r-2)\mu_2 w^{r-1}$. Logo $v^{r-2} = w^{r-2}$. Continuando esse procedimento nas potências a^k ($1 \leq k \leq r-1$) obteremos $v = w$. □

Tomando $l = p - k$ em (3.13), então

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_p = \sum_{1 \leq l \leq \frac{p}{2}} (-1)^{l+1} \binom{p-l}{l} \mu_{p-l} \quad (p \geq 2).$$

Os primeiros valores da sequência $\{\mu_p\}_p$, com $p = 1, \dots, 10$, estão disponíveis na seguinte tabela:

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
μ_p	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862

Observação 3.4. *Seja a e b dois elementos em uma álgebra de potências associativas A . Se $a^r = b^r = 0$ e $a - a^2 = b - b^2$, então $a = b$.*

De posse de nossos resultados auxiliares, estamos em condições a apresentar o principal resultado da parte B.

Teorema 3.10. *Seja A uma álgebra train de potências associativas e-estável e considere $A = Fe \oplus \overline{A_1} \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$ sua decomposição de Peirce. Se A tem representação (s, t) , então o conjunto de idempotentes de A é dado por*

$$I(A) = \left\{ e + x_{\frac{1}{2}} + \sum_{p=1}^r \mu_p [(x_{\frac{1}{2}}^2)_0^p - (x_{\frac{1}{2}}^2)_1^p] \mid x_{\frac{1}{2}} \in A_{\frac{1}{2}} \right\}, \quad (3.15)$$

onde $r = \min\{s, t\}$ e os escalares $\mu_1, \dots, \mu_r$ dependem somente de r e satisfazem a equação (3.13).

Demonstração:

Seja $f = e + x_{\frac{1}{2}} + x_0 + x_1$ um idempotente de A , necessariamente de peso 1. Como $f^2 = f$, temos que

$$(x_{\frac{1}{2}}^2)_0 + x_0^2 = x_0, \quad (x_{\frac{1}{2}}^2)_1 + x_1^2 + x_1 = 0, \quad x_{\frac{1}{2}}x_0 + x_{\frac{1}{2}}x_1 = 0. \quad (3.16)$$

Como $x_0^s = 0$ e $x_1^t = 0$, podemos então aplicar o Lema 3.9, parte (i), para $a = x_0$, $v = (x_{\frac{1}{2}}^2)_0$ e para $a = -x_1$, $v = (x_{\frac{1}{2}}^2)_1$, respectivamente. Assim,

$$x_0 = \sum_{p=1}^{s-1} \mu_p (x_{\frac{1}{2}}^2)_0^p \quad e \quad x_1 = - \sum_{p=1}^{t-1} \mu_p (x_{\frac{1}{2}}^2)_1^p.$$

Como $(x_{\frac{1}{2}}^2)_0^s = 0$ e $(x_{\frac{1}{2}}^2)_1^t = 0$, temos também

$$x_0 = \sum_{p=1}^s \mu_p (x_{\frac{1}{2}}^2)_0^p \quad e \quad x_1 = - \sum_{p=1}^t \mu_p (x_{\frac{1}{2}}^2)_1^p. \quad (3.17)$$

Agora, pela Observação 3.3 e (3.17), obtemos

$$x_0 = \sum_{p=1}^r \mu_p (x_{\frac{1}{2}}^2)_0^p \quad e \quad x_1 = - \sum_{p=1}^r \mu_p (x_{\frac{1}{2}}^2)_1^p. \quad (3.18)$$

Portanto, f está em $I(A)$. Reciprocamente, todo elemento $f = e + x_{\frac{1}{2}} + x_0 + x_1$ satisfazendo (3.18) é um idempotente. De fato, pelo Lema 3.7, temos

$$x_{\frac{1}{2}}x_0 + x_{\frac{1}{2}}x_1 = \sum_{p=1}^r \mu_p [x_{\frac{1}{2}}(x_{\frac{1}{2}}^2)_0^p - x_{\frac{1}{2}}(x_{\frac{1}{2}}^2)_1^p] = 0.$$

Além disso, como $(x_{\frac{1}{2}}^2)_0^{r+1} = (x_{\frac{1}{2}}^2)_1^{r+1} = 0$, pela Observação 3.3, segue de (3.18) que $x_0^{r+1} = x_1^{r+1} = 0$. Consequentemente, obtemos de (3.18) e o Lema 3.9, parte (ii), que $(x_{\frac{1}{2}}^2)_0 = x_0 - x_0^2$ e $(x_{\frac{1}{2}}^2)_1 = -x_1 - x_1^2$. Logo, (3.16) é satisfeita. Portanto, f é um idempotente. □

Corolário 3.11. *Com as hipóteses do Teorema 3.10, temos:*

- (i) *Se $A = Fe \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$ é de representação $(s, 1)$, então $I(A) = \left\{ e + x_{\frac{1}{2}} + x_{\frac{1}{2}}^2 \mid x_{\frac{1}{2}} \in A_{\frac{1}{2}} \right\}$.*
- (ii) *Se $A = Fe \oplus \overline{A_1} \oplus A_{\frac{1}{2}}$ é de representação $(1, t)$, então $I(A) = \left\{ e + x_{\frac{1}{2}} - x_{\frac{1}{2}}^2 \mid x_{\frac{1}{2}} \in A_{\frac{1}{2}} \right\}$.*

Capítulo 4

Álgebras train de Jordan

Neste capítulo iremos estudar as álgebras de Jordan que são álgebras train. Em particular, forneceremos algumas condições que garantam que álgebras train de potências associativas sejam álgebras de Jordan.

Seja A uma álgebra de Jordan e considere $A = A_1 \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$ a decomposição de Peirce de A , relativa ao idempotente e . Sabemos que A é e -estável e além disso, temos o seguinte.

Lema 4.1. *Se A é uma álgebra de Jordan e $A = A_1 \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$ a decomposição de Peirce de A , relativa ao idempotente e , então*

$$[(x_\lambda x_{\frac{1}{2}})y_{\frac{1}{2}}]_{1-\lambda} = [(x_\lambda y_{\frac{1}{2}})x_{\frac{1}{2}}]_{1-\lambda}, \quad (4.1)$$

para todo $x_\lambda \in A_\lambda$, $x_{\frac{1}{2}}, y_{\frac{1}{2}} \in A_{\frac{1}{2}}$ e $\lambda = 0, 1$.

Demonstração:

Tomando $x = x_0$, $w = x_{\frac{1}{2}}$, $y = y_{\frac{1}{2}}$ e $z = e$ em (1.35) obtemos,

$$\frac{1}{2}[(x_0 x_{\frac{1}{2}})y_{\frac{1}{2}}]_1 + \frac{1}{2}[x_{\frac{1}{2}}(y_{\frac{1}{2}} x_0)]_1 = [(x_0 x_{\frac{1}{2}})y_{\frac{1}{2}}]_1.$$

Portanto, $[(x_0 x_{\frac{1}{2}})y_{\frac{1}{2}}]_1 = [x_{\frac{1}{2}}(y_{\frac{1}{2}} x_0)]_1$. Agora, tomando, $x = x_1$, $w = y_{\frac{1}{2}}$, $y = x_{\frac{1}{2}}$ e $z = e$ novamente em (1.35), temos

$$[(x_1 x_{\frac{1}{2}})y_{\frac{1}{2}}]_0 = [(x_1 y_{\frac{1}{2}})x_{\frac{1}{2}}]_0.$$

□

Sabemos que toda álgebra de Jordan é de potências associativas, mas nem toda álgebra de potências associativas é uma álgebra de Jordan.

Exemplo 4.1. Considere A uma álgebra com base $\{u, f, g, h\}$ sobre o corpo F de característica diferente de 2, 3 e 5 tal que

$$u^2 = u, f^2 = g^2 = h^2 = uh = fh = gh = 0, uf = f, ug = \frac{1}{2}g, fg = h.$$

Assim $A = A_1 \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$ que é a decomposição de Peirce de A relativa ao idempotente u , onde $A_1 = Fu + Ff$, $A_{\frac{1}{2}} = Fg$, $A_0 = Fh$ e $A_1 A_{\frac{1}{2}} = A_{\frac{1}{2}} + A_0$. Logo, A não é e -estável e portanto não é uma álgebra de Jordan. Agora, para mostrarmos que A é de potências associativas vamos verificar que $x^2 x^2 = x^4$, para todo $x \in A$. Seja $x = \alpha u + \beta f + \gamma g + \delta h$. Daí $x^2 = \alpha^2 u + 2\alpha\beta f + \alpha\gamma g + 2\beta\gamma h$. Segue que

$$x^2 x^2 = \alpha^4 u + 4\alpha^3 \beta f + \alpha^3 \gamma g + 4\alpha^2 \beta \gamma h.$$

Por outro lado, $x^2 x = \alpha^3 u + 2\alpha^2 \beta f + \frac{1}{2}\alpha^2 \gamma g + \alpha^2 \beta f + \alpha\beta\gamma h + \frac{1}{2}\alpha^2 \gamma g + 2\alpha\beta\gamma h = \alpha^3 u + 3\alpha^2 \beta f + \alpha^2 \gamma g + 3\alpha\beta\gamma h$. Agora, $(x^2 x)x = \alpha^4 u + 3\alpha^3 \beta f + \frac{1}{2}\alpha^3 \gamma g + \alpha^3 \beta f + \alpha^2 \beta \gamma h + \frac{1}{2}\alpha^3 \gamma g + 3\alpha^2 \beta \gamma h = \alpha^4 u + 4\alpha^3 \beta f + \alpha^3 \gamma g + 4\alpha^2 \beta \gamma h = x^2 x^2$. Portanto, pela Proposição 1.10 A , é de potências associativas.

O próximo exemplo mostra uma álgebra train de potências associativas e -estável que não verifica (4.1), logo não é de Jordan. Com isso, álgebras train de potências associativas e e -estáveis não implicam necessariamente em serem álgebras de Jordan.

Exemplo 4.2. Seja A uma álgebra bária com base $\{e, u_1, u_2, u_3, u_4, v, z\}$ tal que

$$e^2 = e, eu_i = \frac{1}{2}u_i \quad (i = 1, \dots, 4), ez = z, u_1 v = u_1 z = u_3, u_2 v = u_2 z = u_4,$$

$$u_2 u_3 = -u_1 u_4 = v + z$$

e os outros produtos são zero. Então, A possui a função peso $\omega : A \longrightarrow F$ tal que $\omega(e) = 1, \omega(u_i) = \omega(v) = \omega(z) = 0$ ($i = 1, \dots, 4$). Por meio de cálculos diretos podemos mostrar que $x^2 x^2 = x^4$, para todo $x \in A$. Logo pela Proposição 1.10, A é de potências associativas. Considere $A = Fe \oplus \overline{A_1} \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$ a decomposição de Peirce de A , relativa ao idempotente e . Segue da Proposição 2.16, item (ii), que (A, ω) é uma álgebra train e pelo Teorema 2.19, item (i), a equação train de A é $x^s(x - w(x))^t = 0$, para

alguns inteiros $s, t \geq 1$. Novamente a partir de cálculos diretos podemos mostrar que $s = t = 2$, isto é, que A tem representação $(2, 2)$, com $\overline{A_1} = \langle z \rangle$, $A_{\frac{1}{2}} = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$ e $A_0 = \langle v \rangle$. Portanto, A é e -estável. Consequentemente, $[(vu_1)u_2]_1 = z$ e $[(vu_2)u_1]_1 = -z$. Logo A não satisfaz (4.1) o que implica que A não é uma álgebra de Jordan.

Em [22] o autor prova a seguinte Proposição.

Proposição 4.2. *Seja A uma álgebra train de potências associativas de representação $(s, 1)$ ou $(1, t)$. Considere $A = Fe \oplus \overline{A_1} \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$ a decomposição de Peirce de A , relativa ao idempotente e . Então, A é uma álgebra de Jordan se, e somente se, as subálgebras A_0 e A_1 são álgebras de Jordan.*

Observação 4.1. *É conhecido que nilálgebras comutativas de nilíndice menor ou igual a 3 são álgebras de Jordan. De fato, para um nilíndice menor ou igual a 2 é evidente. Para um nilíndice igual a 3, temos que*

$$x^3 = 0. \quad (4.2)$$

Linearizando (4.2), obtemos

$$x^2y + 2(xy)x = 0. \quad (4.3)$$

Agora multiplicando (4.3) por x , temos que

$$(x^2y)x + 2((xy)x)x = 0. \quad (4.4)$$

Substituindo y por yx em (4.3), obtemos

$$x^2(yx) + 2(x(yx))x = 0. \quad (4.5)$$

Como a álgebra é comutativa, segue de (4.4) e (4.5) que $x^2(yx) = (x^2y)x$. Logo A é uma álgebra de Jordan.

Consequentemente, segue da Proposição 4.2 e do Teorema 2.19, parte (ii), o seguinte resultado.

Corolário 4.3. *Toda álgebra train de potências associativas de representação $(s, 1)$ ou $(1, t)$ com $1 \leq s, t \leq 3$ é uma álgebra de Jordan.*

Um caso especial desse Corolário é :

Corolário 4.4. *Toda álgebra train de potências associativas de posto menor ou igual a 3 é uma álgebra de Jordan.*

Para álgebras train de potências associativas de posto 4, o Corolário 4.3 nos permite obter imediatamente a caracterização como álgebra de Jordan relativos as representações $(3, 1)$ e $(1, 3)$, a saber:

Corolário 4.5. *Seja A uma álgebra train de potências associativas de posto 4 com equação train $x^4 - \omega(x)x^3 = 0$ ou $x^4 - 3\omega(x)x^3 + 3\omega(x)^2x^2 - \omega(x)^3x = 0$. Então A é uma álgebra de Jordan.*

Demonstração:

De fato, aplique o Corolário 4.3, observando que a representação é $(3, 1)$ ou $(1, 3)$, respectivamente.

□

No caso de álgebras train de potências associativas de posto 4 com representação $(2, 2)$ damos um exemplo de uma álgebra que não é de Jordan.

Exemplo 4.3. *Seja A uma F -álgebra comutativa de dimensão 4 com base $\{e, e_1, e_2, e_3\}$, onde $e^2 = e$, $ee_1 = \frac{1}{2}e_1$, $ee_2 = e_2$, $e_1e_2 = e_3$, os outros produtos são nulos. Verifique-se que $x^2x^2 = x^4$ para todo $x \in A$. Logo pela Proposição 1.10, A é de potências associativas. Considere $A = Fe \oplus \overline{A_1} \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$ a decomposição de Peirce de A , relativa ao idempotente e . Segue da Proposição 2.16, item (ii), que (A, w) é álgebra train e pelo Teorema 2.19, item (i), a equação train de A é $x^s(x - w(x))^t = 0$, para alguns inteiros $s, t \geq 1$. Mostra-se que se A tem representação $(2, 2)$ com $A_1 = \text{vet}_F \langle e, e_2 \rangle$, $A_{\frac{1}{2}} = \text{vet}_F \langle e_1 \rangle$ e $A_0 = \text{vet}_F \langle e_3 \rangle$, então $A_1A_{\frac{1}{2}} = A_{\frac{1}{2}} + A_0$ o que implica que A não é álgebra de Jordan, pois não é e -estável.*

Agora, damos um critério para que algumas álgebras train de potências associativas de posto 5 sejam álgebras de Jordan.

Proposição 4.6. *Seja A uma álgebra train de potências associativas de posto 5 com equação train $x^5 - w(x)x^4 = 0$ ou $x^5 - 4w(x)x^4 + 6w(x)^2x^3 - 4w(x)^3x^2 + w(x)^4x = 0$. Então, A é uma álgebra de Jordan se, e somente se, a identidade $(x^2y)x = 0$ se verifica para todo $x, y \in A_0$ ($x, y \in \overline{A_1}$ resp.).*

Demonstração:

No caso em que a representação é $(4, 1)$, A_0 tem nilíndice menor ou igual a 4. Assim $(x^2)^2 = 0$, para todo $x \in A_0$. Linearizando $(x^2)^2 = 0$, obtemos $x^2(yx) = 0$. Aplicando a Proposição 4.2, segue o resultado. Quando a representação é $(1, 4)$ a demonstração é análoga ao caso $(4, 1)$.

□

Para terminar, vamos estudar o caso sobre álgebras finitamente geradas. Vamos relembrar a Definição 1.5, (ii) e (iv).

Definição 4.1. *Seja A uma F -álgebra e consideremos a série derivada de subálgebras*

$$A^{[1]} \supseteq A^{[2]} \supseteq A^{[3]} \supseteq \dots$$

*Diremos que a álgebra A é **solúvel** no caso em que $A^{[r]} = 0$, para algum inteiro r .*

Definição 4.2. *Uma álgebra bária comutativa (B, ω) é denominada de **Bernstein** se $(x^2)^2 = x^2\omega(x)^2$, para todo $x \in B$.*

Definição 4.3. *Uma álgebra de **Bernstein de ordem n** é uma álgebra bária comutativa (A, ω) tal que*

$$x^{[n+2]} = (\omega(x))^{2^n} x^{[n+1]},$$

para todo $x \in A$, onde n é o menor natural que verifica esta propriedade.

Em [36] o autor prova o seguinte:

Proposição 4.7. *Se A é uma nilálgebra de Jordan de nilíndice limitado sobre um corpo de característica zero, então A é solúvel.*

Em [30], o Corolário 1, nos informa o seguinte:

Proposição 4.8. *Seja A uma álgebra de Bernstein-Jordan finitamente gerada. Então A é uma álgebra de dimensão finita.*

Também, em [37] o Teorema 2, página 90, afirma que:

Teorema 4.9. *Toda álgebra de Jordan solúvel finitamente gerada é nilpotente.*

Finalmente, em [38] o Teorema 6.7 nos afirma que:

Teorema 4.10. *Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein-Jordan de ordem n . Se A é finitamente gerada, então A é de dimensão finita.*

Nossa contribuição, nessa dissertação, será a de provar uma versão análoga da Proposição 4.8 e do Teorema 4.10 para a classe das álgebras train de Jordan. Para isso, vamos assumir que a característica do corpo F é zero, no seguinte Teorema:

Teorema 4.11. *Suponhamos que F é um corpo de característica zero. Então toda F -álgebra train de Jordan finitamente gerada é de dimensão finita.*

Demonstração:

Seja A uma álgebra train de Jordan finitamente gerada. Considere $A = Fe \oplus \overline{A_1} \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$ a decomposição de Peirce, de A relativa ao idempotente e . Inicialmente mostremos que $N = \ker(\omega)$ é finitamente gerado como uma álgebra. Considere $\{a_1, \dots, a_n\}$ um conjunto de geradores de A , onde cada a_i é da forma $a_i = \alpha_i e + b_i + c_i + d_i$, com $\alpha_i \in F$, $b_i \in \overline{A_1}$, $c_i \in A_{\frac{1}{2}}$ e $d_i \in A_0$ ($i = 1, \dots, n$). Seja $x = f(a_1, \dots, a_n) \in N$, onde f é um polinômio não associativo. Então,

$$x = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)e + g(e, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n),$$

para algum polinômio não associativo g , tal que $y = g(e, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n) \in N$. Como $\omega(x) = 0$, $\omega(e) = 1$ e $\omega(y) = 0$, então $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ o que implica em $x = y$. Agora, consideremos os produtos $c_i c_j = b'_{ij} + d'_{ij}$, onde $b'_{ij} \in \overline{A_1}$ e $d'_{ij} \in A_0$, para $c_i, c_j \in A_{\frac{1}{2}}$. Como $A_0 \overline{A_1} = 0$, $\overline{A_1} A_{\frac{1}{2}} \subseteq A_{\frac{1}{2}}$ e $A_0 A_{\frac{1}{2}} \subseteq A_{\frac{1}{2}}$ então não é difícil verificar que

$$x = h(b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n, \{b'_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}, \{d'_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}),$$

onde h é um polinômio não associativo. Isto prova que N é finitamente gerado como uma álgebra. Pela Proposição 4.7, N é solúvel. Mas, pelo Teorema 4.9, N é nilpotente. Concluimos pela Proposição 2.3 que N é de dimensão finita.

□

Capítulo 5

Álgebras train e de Bernstein de ordem arbitrária

Neste capítulo estudaremos alguns aspectos das álgebras de Bernstein de ordem n

5.1 Álgebras de Bernstein de ordem n e período p

Definição 5.1. *Uma álgebra bária (A, ω) é chamada de álgebra de Bernstein de ordem n e período p , ou simplesmente uma $B(n, p)$ -álgebra, se a identidade*

$$x^{[n+p+1]} = \omega(x)^{2^n(2^p-1)} x^{[n+1]} \quad (5.1)$$

vale para todo $x \in A$, onde $n \geq 0$, $p \geq 1$.

Observação 5.1. *As $B(n, 1)$ -álgebras satisfazem a identidade $x^{[n+2]} = \omega(x)^{2^n} x^{[n+1]}$ e portanto são as álgebras de Bernstein de ordem n . Em particular, as $B(1, 1)$ -álgebras são justamente as álgebras de Bernstein.*

5.2 Decomposição de Peirce

Seja (B, ω) uma álgebra de Bernstein. Então B possui um elemento idempotente de peso 1. De fato, como B é uma b -álgebra seja $e' \in B$ um elemento de peso 1. Assim, $(e'^2)^2 = e'^2$. Logo, e'^2 é um idempotente de peso 1. A partir de um idempotente de

peso 1, veremos que é possível decompor uma álgebra de Bernstein como soma direta de subespaços. De fato, sabemos que $B = Fe \oplus \ker(\omega)$. Seja $x \in B$, então $x = \alpha e + y$, onde $\alpha \in F$ e $y \in \ker(\omega)$. Agora observemos que

$$1. (x^2)^2 = \alpha^4 e + 4\alpha^3 e(ey) + 2\alpha^2 y^2 e + 4\alpha^2 (ey)^2 + 4\alpha (ey)y^2 + (y^2)^2;$$

$$2. (\omega(x))^2 x^2 = \alpha^2 (\alpha^2 e + 2\alpha ey + y^2) = \alpha^4 e + 2\alpha^3 ey + \alpha^2 y^2.$$

Comparando as expressões obtidas em 1 e 2, e considerando que α percorre o corpo F , de característica diferente de 2, 3 e 5 então obtemos:

$$2e(2ey) = 2ey; \quad (5.2)$$

$$2y^2 e + (2ey)^2 = y^2; \quad (5.3)$$

$$(2ey)y^2 = 0; \quad (5.4)$$

$$(y^2)^2 = 0. \quad (5.5)$$

Considere $L'_e := 2L_e$. Assim, para qualquer $y \in \ker(\omega)$, $L'_e(y) = 2L_e(y) = 2ey$. Desse modo, da igualdade (5.2), temos que $L'_e(L'_e(y)) = L'_e(y)$. Portanto $(L'_e)^2(y) = L'_e(y)$, para qualquer $y \in \ker(\omega)$. Logo L'_e é uma projeção. Consequentemente, podemos escrever $\ker(\omega) = U \oplus V$, onde $U = \text{Im}(L'_e)$ e $V = \ker(L'_e)$.

Vamos determinar U e V mais precisamente. Para isso, seja $u \in U$. Então existe $u' \in \ker(\omega)$ tal que $L'_e(u') = u$. Assim, $L'_e(L'_e(u')) = L'_e(u)$ e desse modo $u = L'_e(u') = L'_e(u) = 2eu$. Portanto $U = \{u \in \ker(\omega) \mid eu = \frac{1}{2}u\}$. Por outro lado, se $v \in V$, então $L'_e(v) = 0$ e assim $2ev = 0$. Logo $V = \{v \in \ker(\omega) \mid ev = 0\}$. Além disso, observemos que usando o operador linear L'_e também podemos escrever as identidades (5.3) e (5.4) da seguinte forma:

$$L'_e(y^2) + (L'_e(y))^2 = y^2; \quad (5.6)$$

$$L'_e(y)y^2 = 0, \quad (5.7)$$

respectivamente.

Proposição 5.1. *As seguintes relações valem:*

- (i) $U^2 \subseteq V$;
- (ii) $UV \subseteq U$;
- (iii) $V^2 \subseteq U$.

Demonstração:

(i) Inicialmente, vejamos que se $u \in U$, então $u^2 \in V$. De fato, dado $u \in U$, como L'_e é uma projeção, então $u = L'_e(u)$ o que implica em $u^2 = (L'_e(u))^2$ e assim, pela igualdade (5.6), $L'_e(u^2) + (L'_e(u))^2 = (L'_e(u))^2$. Logo, $L'_e(u^2) = 0$ isto é $u^2 \in \ker(L'_e) = V$. Agora sejam u_1 e $u_2 \in U$. Como U é um subespaço de $\ker(\omega)$, então $u_1 + u_2 \in U$ o que implica que $(u_1 + u_2)^2 \in V$, ou seja, $u_1^2 + 2u_1u_2 + u_2^2 \in V$. Como $u_1^2, u_2^2 \in V$, podemos concluir então que $u_1u_2 \in V$.

(ii) Sejam $u \in U$ e $v \in V$. Verifiquemos que $uv \in U$. Linearizando a igualdade (5.6), substituindo u por $u + v$, obtemos

$$L'_e(u^2 + 2uv + v^2) + (L'_e(u + v))^2 = u^2 + 2uv + v^2.$$

Como L'_e é um operador linear, então

$$L'_e(u^2) + 2L'_e(uv) + L'_e(v^2) + (L'_e(u))^2 + 2L'_e(u)L'_e(v) + (L'_e(v))^2 = u^2 + 2uv + v^2$$

Usando o fato de que $v \in V$ e novamente (5.6), para cancelar os termos possíveis podemos concluir que $2L'_e(uv) = 2uv$. Portanto, $uv \in U$.

(iii) Se $v \in V$, então $L'_e(v) = 0$. Assim por (5.6), $v^2 = L'_e(v^2) \in \text{Im}L'_e = U$. Agora sejam $v_1, v_2 \in V$. Então $v_1 + v_2 \in V$, pois V é um subespaço vetorial de $\ker(\omega)$ e $(v_1 + v_2)^2 = v_1^2 + 2v_1v_2 + v_2^2 \in U$. Como $v_1^2, v_2^2 \in U$, então temos que $v_1v_2 \in U$.

□

Lema 5.2. *Seja (A, ω) uma álgebra train de posto n e equação train $x^n - \omega(x)^{n-p}x^p = 0$ com $1 \leq p \leq n - 1$. Se A é de potências associativas, então $n = p + 1$.*

Demonstração:

Pelo Teorema 2.19, o polinômio train de A é $P(X) = X^s(X-1)^t$ para alguns inteiros $s, t \geq 1$. Como $P(X)$ coincide com $Q(X) = X^n - X^p = X^p(X^{n-p} - 1)$, segue que $s = p$, $t = 1$ e $n - p = 1$. □

Em [12], os autores provam o seguinte:

Teorema 5.3. *Seja (A, ω) uma álgebra train de posto n com train equação 1.3. Se (A, ω) é uma álgebra de Bernstein, então*

$$\gamma_k = \frac{(-1)^k}{2^k} \left[\binom{n-3}{k} + 2 \binom{n-3}{k-1} \right], \quad (5.8)$$

onde $1 \leq k \leq n-1$.

Vamos analisar as consequencias do Lema 5.2

Proposição 5.4. *Seja (A, ω) uma álgebra train com equação train $x^n - \omega(x)^{n-1}x = 0$, $n \geq 2$ ($x^n - \omega(x)^{n-2}x^2 = 0, n \geq 3$). Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) A é de potências associativas;
- (ii) A é uma álgebra de Jordan;
- (iii) A é uma álgebra de Bernstein de ordem 0 (de ordem 1);
- (iv) $n = 2$ ($n = 3$).

Demonstração:

De acordo com o Lema 5.2, (i) implica (iv). Por outro lado, se A é uma álgebra bária satisfazendo $x^2 - \omega(x)x = 0$ ($x^3 - \omega(x)x^2 = 0$), então A é uma álgebra de Jordan e uma álgebra de Bernstein de ordem 0 (de ordem 1). De fato, pois multiplicando a expressão $x^2 - \omega(x)x = 0$; primeiramente por y e depois por x , obtemos $(x^2y)x = \omega(x)(xy)x$. Por outro lado, multiplicando a expressão $x^2 - \omega(x)x = 0$ por (yx) temos $x^2(yx) = \omega(x)x(yx)$. Como A é comutativa, segue que $(x^2y)x = x^2(yx)$. Assim A é uma álgebra de Jordan. Além disso, $x^{[2]} - \omega(x)x^{[1]} = x^2 - \omega(x)x = 0$. Portanto A é

também uma álgebra de Bernstein de ordem 0. No caso em que $n = 3$, linearizamos $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$, substituindo x por $x + \lambda y$, onde $\lambda \in F$ e $y \in A$ e obtemos

$$x^2y + 2(xy)x = 2\omega(x)(xy) + \omega(y)x^2. \quad (5.9)$$

Multiplicando (5.9) por x temos

$$(x^2y)x = 2\omega(x)(xy)x + \omega(y)x^3 - 2((xy)x)x. \quad (5.10)$$

Agora, fazendo $y = yx$ em (5.9) obtemos

$$x^2(yx) = 2\omega(x)(x(yx)) + \omega(yx)x^2 - 2(x(yx))x. \quad (5.11)$$

Logo, de (5.10) e (5.11) temos que $(x^2y)x = x^2(yx)$. Portanto A é de Jordan e de Bernstein de ordem 1, visto que $x^4 = \omega(x)x^3 = \omega(x)\omega(x)x^2 = \omega(x)^2x^2$ daí $x^{[3]} = \omega(x)x^{[2]}$. Com isso, mostramos que (iv) implica (ii) e (iii). Para completarmos a demonstração, precisamos mostrar que (iii) implica (iv). Para isso, se A é uma álgebra de Bernstein de ordem 0, então é evidente que $n = 2$. Se A é uma álgebra de Bernstein de ordem 1, pelo Teorema 5.3, segue que

$$-1 = \gamma_{n-2} = \frac{(-1)^{n-2}}{2^{n-2}}(n-1).$$

Logo, concluímos que n deve ser ímpar. Agora, observe que se $n \geq 4$, então $n-1 < 2^{n-2}$. De fato, para $n = 4$ é evidente. Agora suponhamos que para $k \geq 4$ o resultado é verdadeiro. Então para $k+1$ temos que

$$(k+1) - 1 = (k-1) + 1 < 2^{k-2} + 1 < 2^{k-2} + 2^{k-2} = 22^{k-2} = 2^{k-1}.$$

Portanto $n = 3$.

□

Proposição 5.5. *Seja (A, ω) uma álgebra train com equação train $x^n - \omega(x)^{n-3}x^3 = 0$, $n \geq 4$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *A é uma álgebra de potências associativas;*
- (ii) *A é uma álgebra de Jordan;*
- (iii) *A satisfaz $x^{[3]} - \omega(x)x^3 = 0$.*

Além disso, se uma das condições (i) – (iii) for satisfeita, então A é uma álgebra de Bernstein de ordem 2.

Demonstração:

Supondo A de potências associativas, pelo Lema 5.2 segue que (i) implica (iii). Mostremos que (iii) implica (ii). Suponhamos que A satisfaça $(x^2)^2 - \omega(x)x^3 = 0$, para todo $x \in A$. Por [2] A tem idempotente de peso 1 e admite uma decomposição de Peirce $A = Fe \oplus N_{\frac{1}{2}} \oplus N_0$, onde $N_i = \{x \in \ker(\omega) \mid ex = ix\}$, $i = \{0, \frac{1}{2}\}$ e $N_{\frac{1}{2}}^2 \subseteq N_0$, $N_{\frac{1}{2}}N_0 \subseteq N_{\frac{1}{2}}$ e $N_0^2 \subseteq N_0$. Agora, fazendo $x = \alpha e + u + v$ e $y = \beta e + u' + v'$, onde $\alpha, \beta \in F$, $u, u' \in N_{\frac{1}{2}}$, $v, v' \in N_0$ e efetuando os devidos cálculos podemos mostrar que $x^2(yx) - (x^2y)x = 0$. Portanto A é uma álgebra de Jordan.

Finalmente se uma das condições for satisfeita, então A é uma álgebra de Bernstein de ordem 2, pois $((x^2)^2)^2 = x^8$. Daí, usando (iii) temos $x^8 = ((x^2)^2)^2 = (\omega(x)x^3)^2 = \omega(x)^2x^6 = \omega(x)^2x^4x^2 = \omega(x^3)x^3x^2 = \omega(x)^3x^4x = \omega(x)^4x^4$.

□

Proposição 5.6. *Seja (A, ω) uma $B(n, p)$ -álgebra de potências associativas. Então A satisfaz $x^{2^{n+1}} - \omega(x)x^{2^n} = 0$ e A é uma álgebra de Bernstein de ordem n .*

Demonstração:

Como A é uma $B(n, p)$ -álgebra, A satisfaz (5.1), pelo fato de A ser de potências associativas segue que $x^{2^{n+p}} - w(x)^{2^n(2^p-1)}x^{2^n} = 0$, pois $x^{[l+1]} = x^{2^l}$, para $l \geq 0$. Logo A é uma álgebra train. De acordo com o Teorema 2.19, o polinômio train de A é $P(X) = X^s(X-1)^t$, para alguns inteiros $s, t \geq 1$. Portanto $P(X)$ divide o polinômio $Q(X) = X^{2^{n+p}} - X^{2^n} = X^{2^n}(X^{2^n(2^p-1)} - 1)$, o que implica em $s \leq 2^n$ e $t = 1$. Então A satisfaz $x^{s+1} - w(x)x^s = 0$ e também $x^{2^{n+1}} - w(x)x^{2^n} = 0$. Agora usando um argumento de indução mostra-se que $x^{2^{n+k}} = w(x)^k x^{2^n}$, para todo $k \geq 1$. Fazendo $k = 2^n$ temos $x^{2^{n+1}} = w(x)^{2^n} x^{2^n}$, ou seja,

$$x^{[n+2]} = w(x)^{2^n} x^{[n+1]}. \quad (5.12)$$

Comparando (5.12) com (5.1) temos que $p = 1$. Logo A é uma álgebra de Bernstein de ordem n .

□

Observação 5.2. *Seja A uma álgebra de Bernstein de ordem n . Então para todo $x \in A$ temos*

$$x^{[n+2]} = \omega(x)^{2^n} x^{[n+1]}.$$

Sejam $\alpha \in F$ e $x, y \in A$. Podemos escrever

$$(x + \alpha y)^{[m+1]} = x^{[m+1]} + \sum_{k=1}^{2^m} \alpha^k P_{k,m}(x, y), \quad (5.13)$$

onde $P_{k,m}(x, y)$ é um polinômio não associativo de grau k , na variável y , e grau total igual a 2^m . Segue da igualdade $(x + \alpha y)^{[m+2]} = (x + \alpha y)^{[m+1]}(x + \alpha y)^{[m+1]}$ e de (5.13) que

$$\begin{aligned} \left(x^{[m+1]} + \sum_{k=1}^{2^m} \alpha^k P_{k,m}(x, y) \right) \left(x^{[m+1]} + \sum_{k=1}^{2^m} \alpha^k P_{k,m}(x, y) \right) &= x^{[m+2]} + \sum_{k=1}^{2^{m+1}} \alpha^k P_{k,m+1}(x, y) \\ &= x^{[m+1]} x^{[m+1]} + 2\alpha P_{1,m}(x, y) x^{[m+1]} + 2x^{[m+1]} \left(\sum_{k=2}^{2^m} \alpha^k P_{k,m}(x, y) \right) \\ &\quad + \left(\sum_{k=1}^{2^m} \alpha^k P_{k,m}(x, y) \right) \left(\sum_{k=1}^{2^m} \alpha^k P_{k,m}(x, y) \right) = \\ &= x^{[m+2]} + \alpha P_{1,m+1}(x, y) + \sum_{k=2}^{2^{m+1}} \alpha^k P_{k,m+1}(x, y). \end{aligned}$$

Portanto, identificando os coeficientes de α

$$P_{1,m+1}(x, y) = 2P_{1,m}(x, y)x^{[m+1]}. \quad (5.14)$$

Por outro lado, como A é uma álgebra de Bernstein de ordem n , então

$$(x + \alpha y)^{[n+2]} = [w(x) + \alpha w(y)]^{2^n} (x + \alpha y)^{[n+1]}.$$

Assim,

$$x^{[n+2]} + \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \alpha^k P_{k,n+1}(x, y) = [w(x) + \alpha w(y)]^{2^n} \left(x^{[n+1]} + \sum_{k=1}^{2^n} \alpha^k P_{k,n}(x, y) \right).$$

Novamente, identificando os coeficientes de α temos

$$\begin{aligned} \alpha P_{1,n+1}(x, y) &= \alpha [2^n \omega(x)^{2^n-1} \omega(y) x^{[n+1]} + \omega(x)^{2^n} P_{1,n}(x, y)] \\ P_{1,n+1}(x, y) &= [2^n \omega(x)^{2^n-1} \omega(y) x^{[n+1]} + \omega(x)^{2^n} P_{1,n}(x, y)]. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Teorema 5.7. *Seja (A, ω) uma F -álgebra de Bernstein de ordem n , com a característica de F diferente de 2. Se A é de potências associativas, então $x^{2^{n+1}} = \omega(x)x^{2^n}$.*

Demonstração:

Suponhamos que A é uma álgebra de potências associativas. Por recorrência em m e utilizando as identidades (5.13) e (5.14), temos que $P_{1,m}(x, x^2) = 2^m x^{2^{m+1}}$. Também, tomando $y = x^2$, segue de (5.15) que $2^{n+1} x^{2^{n+1}+1} = 2^n [\omega(x)^{2^n-1} \omega(x)^2 x^{2^n} + \omega(x)^{2^n} x^{2^{n+1}}]$. Logo

$$2x^{2^{n+1}+1} = \omega(x)^{2^{n+1}} x^{2^n} + \omega(x)^{2^n} x^{2^{n+1}}. \quad (5.16)$$

Agora observemos que $x^{[n+2]} = \omega(x)^{2^n} x^{[n+1]}$ pode ser visto como

$$x^{2^{n+1}} = \omega(x)^{2^n} x^{2^n}. \quad (5.17)$$

Assim, multiplicando (5.17) por $2x$ obtemos,

$$2x^{2^{n+1}+1} = 2\omega(x)^{2^n} x^{2^{n+1}}. \quad (5.18)$$

Fazendo a diferença entre (5.16) e (5.18) temos,

$$\omega(x)^{2^n} [x^{2^{n+1}} - \omega(x)x^{2^n}] = 0.$$

Se $\omega(x) \neq 0$, então $x^{2^{n+1}} = \omega(x)x^{2^n}$. Agora se $\omega(x) = 0$ temos,

$$\omega(e + \alpha x)^{2^n} [(e + \alpha x)^{2^{n+1}} - \omega(e + \alpha x)(e + \alpha x)^{2^n}] = 0,$$

como $\omega(e + \alpha x) = 1$, segue que

$$(e + \alpha x)^{2^{n+1}} = (e + \alpha x)^{2^n}. \quad (5.19)$$

Identificando os coeficientes de α em (5.19), obtemos $x^{2^{n+1}} = 0$. Consequentemente, $x^{2^{n+1}} = \omega(x)x^{2^n}$, para todo $x \in A$.

□

O Teorema que segue é importante no desenvolvimento desse capítulo, pois ele nos diz todas as possíveis equações train para as álgebras de Bernstein de ordem n .

Teorema 5.8. *Seja (A, ω) uma álgebra básica de potências associativas. As seguintes afirmações são verificadas :*

- (i) Se A é uma álgebra de Bernstein de ordem n , então A é uma álgebra train de posto $m + 1$ e equação train $x^{m+1} - \omega(x)x^m = 0$, para algum inteiro m com $2^{n-1} < m \leq 2^n$;
- (ii) Reciprocamente, se A é uma álgebra train de posto $m + 1$ e equação train $x^{m+1} - \omega(x)x^m = 0$, então A é uma álgebra de Bernstein de ordem n , onde n é o único inteiro com $2^{n-1} < m \leq 2^n$.

Demonstração:

(i) Suponhamos que A é uma álgebra de Bernstein de ordem n . Então pelo Teorema 5.7 a identidade $x^{2^n+1} - \omega(x)x^{2^n} = 0$ vale para todo $x \in A$. Consequentemente A é uma álgebra train com polinômio train $P(X)$, tal que $P(X)$ divide $Q(X) = X^{2^n+1} - X^{2^n} = X^{2^n}(X - 1)$. Então, $P(X) = X^m(X - 1)$ para algum $m \leq 2^n$, o que implica que a equação train de A é $x^{m+1} - \omega(x)x^m = 0$, onde $2^{n-1} < m$. De fato, suponhamos que $m \leq 2^{n-1}$. Então multiplicando $x^{m+1} - \omega(x)x^m = 0$ por $x^{2^{n-1}-m}$ obtemos $x^{2^{n-1}+1} = \omega(x)x^{2^{n-1}}$. Pela demonstração da Proposição 5.6 temos que $x^{[n+1]} = \omega(x)^{2^{n-1}}x^{[n]}$, portanto A é uma álgebra de Bernstein de ordem menor que n , uma contradição.

(ii) Reciprocamente, suponhamos que A satisfaz a equação train $x^{m+1} - \omega(x)x^m = 0$, e seja n o único inteiro com $2^{n-1} < m \leq 2^n$. Multiplicando $x^{m+1} - \omega(x)x^m = 0$ por x^{2^l-m} , onde $m \leq 2^l$ obtemos $x^{2^l+1} - \omega(x)x^{2^l} = 0$. Portanto como visto no item (i), temos que $x^{[l+2]} = \omega(x)^{2^l}x^{[l+1]}$ que nos diz que A é uma álgebra de Bernstein de ordem $n \leq l$. Segue ainda da parte (i), que $2^{n-1} < m \leq 2^n$.

□

Como consequência do Teorema 5.8, existem exatamente 2^{n-1} possibilidades de equações train para as álgebras de Bernstein de ordem n . Por exemplo, as equações train para $n \leq 3$ são :

- $n = 1 : x^3 - \omega(x)x^2 = 0$;
- $n = 2 : x^4 - \omega(x)x^3 = 0, x^5 - \omega(x)x^4 = 0$;
- $n = 3 : x^6 - \omega(x)x^5 = 0, x^7 - \omega(x)x^6, x^8 - \omega(x)x^7 = 0, x^9 - \omega(x)x^8 = 0$.

Dado arbitrariamente inteiros $n \geq 1$ e $m \geq 2$ com $2^{n-1} < m \leq 2^n$, construiremos uma álgebra de Bernstein associativa de ordem n que é uma álgebra train de posto $m + 1$.

Exemplo 5.1. *Seja A_m a álgebra com base $\{e, v_1, v_2, \dots, v_{m-1}\}$, onde a multiplicação é dada por $e^2 = e$ e $v_i v_j = v_{i+j}$, sempre que $i + j \leq m - 1$ e os outros produtos iguais a zero. Temos que A_m com essa multiplicação é associativa com função peso ω dada por $\omega(e) = 1$ e $\omega(v_i) = 0$ ($i = 1, \dots, m - 1$). Se x é um elemento arbitrário de A_m , então $x = \alpha e + \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i v_i$. A partir de um cálculo direto, podemos verificar que*

$$x^p = \alpha^p e + \sum_{i=p}^{m-1} \beta_i^{(p)} v_i,$$

para alguns escalares $\beta_i^{(p)}$. Em particular, $x^{m-1} = \alpha^{m-1} e + \beta_{m-1}^{(m-1)} v_{m-1}$, $x^m = \alpha^m e$ e $x^{m+1} = \alpha^{m+1} e$, então $x^{m+1} - \omega(x)x^m = 0$. Logo A_m é uma álgebra train e pela definição da multiplicação em A_m o posto da equação train é $m + 1$. Por (ii) do Teorema 5.8 A_m é álgebra de Bernstein de ordem n , com $2^{n-1} < m \leq 2^n$.

Concluimos nosso trabalho com esta última Observação.

Observação 5.3. *Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein de potências associativas de ordem n . Vimos no Teorema 5.8 que (A, ω) é uma álgebra train de representação $(m, 1)$, onde $2^{n-1} < m \leq 2^n$. Considerando $A = Fe \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$ a decomposição de Peirce de A relativa ao idempotente $e \in A$, segue do Teorema 2.19, parte (ii), que $x_0^m = 0$, para todo $x_0 \in A_0$.*

Referências Bibliográficas

- [1] A. A. Albert, *A theory of power-associative commutative algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **69** (1950) 503-527.
- [2] M. T. Alcalde, C. Burgueno, C. Mallol, *Les $Pol(n,m)$ -algèbres*, Linear Algebra Appl **191** (1993) 215-234.
- [3] R. Andrade, A. Labra, *On a Class of Baric Algebras*, Linear Algebra Appl **245** (1996) 49-53.
- [4] J. Bayara, A. Conseibo, M. Ouattara, F. Zitan, *Power-associative algebras that are train algebras*, J. Algebra **324** (2010) 1159-1176.
- [5] R. Costa, H. Guzzo Jr., *Indecomposable baric algebras*, Linear Algebra Appl **183** (1993) 223-236.
- [6] R. Costa, H. Guzzo Jr., *Indecomposable baric algebras II*, Linear Algebra Appl **196**, (1994) 233-242.
- [7] I. M. H. Etherington, *Genetic Algebras*, Proc. Roy. Soc. Edinb. **59** (1939), 242-258.
- [8] I. M. H. Etherington, *Commutative train algebras of ranks 2 and 3*, J. Lond. Math. Soc. **15** (1940) 136-149. *Corrigendum ibid* **20** (1945) 238.
- [9] M. A. García-Muñiz, S. González, *Baric, Bernstein and Jordan Algebras*, Comm. Algebra **26** (3) (1998) 913-930.
- [10] J. C. Gutiérrez, *Principal and plenary train algebras*, Comm. Algebra **28** (2) (2000) 653-667.

- [11] H. Guzzo Jr., *Embedding nil algebras in train algebras*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **37** (3) (1994) 463-470.
- [12] H. Guzzo Jr., P. Vicente, *Train algebras of rank n which are Bernstein or power-associative algebras*, Nova J. Math. Game Theory Algebra **6** (2-3) (1997) 103-112.
- [13] H. Guzzo Jr., *The Peirce decomposition for commutative train algebras*, Comm. Algebra, **22** (1994) 5745-5757.
- [14] P. Holgate, *Jordan algebras arising in population genetics*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **15** (1967) 291-294. Corrigendum ibid **17** (1970) 120.
- [15] J. Lopez Sanchez, E. Rodriguez S. Maria, *Multibaric algebras, Non-associative algebra and its Applications (Oviedo 1993)*, Math. Appl. **303** Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (1994).
- [16] J. Lopez Sanchez, E. Rodriguez S. Maria, *On train algebras of rank 4*, Comm. Algebra **24** (1996), no. 14, 4439-4445.
- [17] Yu. I. Lyubich, *Mathematical Structures in Population Genetic*, Biomathematics, Vol. 22, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [18] C. Mallol, R. Varro, R. Benavides, *Gamétisation d'algèbres pondérées*, J. Algebra, **261** (2003), 1-18.
- [19] C. Mallol, R. Varro, *Train algèbres alternatives: Relation entre nilindice et degré*, Comm. Algebra **35** (2007), no. 11, 3603-3610.
- [20] C. Mallol, A. Micali, M. Ouattara, *Sur les algèbres de Bernstein IV*, Linear Algebra Appl. **158** (1991) 1-26.
- [21] A. Micali, M. Ouattara, *Structure des algèbres de Bernstein*, Linear Algebra Appl. **218** (1995) 77-88.
- [22] M. Ouattara, *Sur une classe d'algèbres à puissances associatives*, Linear Algebra Appl. **235** (1996) 47-62.
- [23] M. Ouattara, *Sur les T -algèbres de Jordan*, Linear Algebra Appl. **144** (1991) 11-21.

- [24] M. Ouattara, *Sur les algèbres de Bernstein qui sont des T -algèbres*, Linear Algebra Appl. **148** (1991) 171-178.
- [25] J. M. Osborn, *Commutative algebras satisfying an identity of degree four*, Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965) 1114-1120.
- [26] M. L. Reed, *Algebraic structure of genetic inheritance*, Bull. Amer. Math. Soc. **34** (1997), no. 2, 107-130.
- [27] C. Reyes, *Train algebras identidades y representationes*, Ph.D. University of Chile, 2003.
- [28] R. D. Schafer, *Structure of genetic algebras*, Amer. J. Math. **71** (1949) 121-135.
- [29] R. D. Schafer, *An introduction to nonassociative algebras*, Academic Press, New York, 1966.
- [30] A. Suazo, *On nuclear Bernstein algebras*, Int. Math. Game Theory Algebra **8** (1999), no. 4, 207-212.
- [31] D. A. Towers, K. Bowman, *On power associative Bernstein algebras of arbitrary order*, Algebras, Groups and Geometries **13** (1996) 295-322.
- [32] R. Varro, *Introduction aux algèbres de Bernstein Périodiques*, in S. González (ed.), Nonassociative algebra and its applications (Oviedo, 1993), 384-388, Math. Appl., 303, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.
- [33] S. Walcher, *Bernstein algebras which are Jordan algebras*, Arch. Math. **50** (1988), no. 3, 218-222.
- [34] S. Walcher, *On Bernstein algebras which are train algebras*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **35** (1992), no. 1, 159-166.
- [35] A. Wörz-Busekros, *Algebras in Genetics, Lecture Notes in Biomathematics*, Vol. 36, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.
- [36] E. I. Zel'manov, *On solvability of Jordan nil-algebras*, Siberian Adv. Math. **1** (1991), no. 1, 185-203.

- [37] K. A. Zhevlakov, A. M. Slin'ko, I. P. Shestakov, A. I. Shirshov, *Rings that are nearly associative*, Academic Press, New York, 1982.
- [38] F. Zitan, *Some results on baric algebras*, Algebras, Groups Geom. **19** (1) (2002) 109-128.