**Sobre superfícies no espaço
pseudo-euclidiano $\mathbb{R}_2^4$**

Anuar Enrique Paternina Montalvo

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Área de Concentração: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Antonio Carlos Asperti

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da
CAPES

São Paulo, fevereiro de 2017

Sobre superficies no espaço pseudo-euclidiano $\mathbb{R}_2^4$

Esta é a versão original da tese elaborada pelo
candidato Anuar Enrique Paternina Montalvo, tal como
submetida à Comissão Julgadora.

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar superfícies no espaço pseudo-euclidiano $\mathbb{R}_2^4$. Basicamente, consideramos vários tipos de superfícies nesse espaço e assim se obter alguns resultados clássicos da Geometria Diferencial. Para superfícies que são certos tipos de gráficos nesse espaço se faz um estudo para os problemas de Bernstein e Björling.

Palavras-chave: Espaço pseudo-euclidiano, gráficos, superfícies, isóclinos, elípticos.

Abstract

The aim of this work is to study surfaces in pseudo-euclidean space $\mathbb{R}_2^4$. Basically, we consider several types of surfaces in this space and thus obtain some classical results in Differential Geometry. For surfaces that are certain types of graphs in this space is made a study for the Bernstein's problem and the Björling's problem.

Keywords: Pseudo-euclidean space, graphs, surfaces, isoclinic, elliptic.

Sumário

1	No espaço $\mathbb{R}_2^4$: Introdução	1
1.1	Preliminares algébricos	1
1.1.1	Curvas nulas em $\mathbb{R}_2^4$	3
1.2	Planos isóclinos	4
1.3	A álgebra de Clifford $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ e funções sobre essa álgebra	6
1.3.1	Séries de potências	7
1.3.2	Derivadas das funções analíticas	7
1.4	Gráficos de funções sobre $\mathbb{C}'$ analíticas	8
2	Superfícies em $\mathbb{R}_2^4$	10
2.1	Álgebra linear do espaço vetorial $\mathbb{R}_2^4$	10
2.1.1	Classificação dos planos	10
2.1.2	Isometrias sobre $\mathbb{R}_2^4$	11
2.2	Superfícies elípticas em $\mathbb{R}_2^4$	11
2.3	Superfícies tipo tempo	15
2.4	O diferencial nulo e a esfera nula centrada na origem	16
2.4.1	Imersão no subconjunto $F(\Omega) \subset S_2^4(0)$	18
2.5	Uma base para o plano normal de uma imersão isotérmica em $\mathbb{R}_2^4$	19
2.6	Imersão de uma superfície de Lorentz na esfera nula $S_2^4(0)$	21
3	Superfícies que são gráficos em $\mathbb{R}_2^4$	22
3.1	Definições gerais	22
3.2	Coordenadas homogêneas	24
3.3	Trocando a álgebra $\mathbb{C}$ para a álgebra $\mathbb{C}'$	25
3.3.1	Coordenadas homogêneas	26
3.4	Um exemplo para as superfícies do tipo elíptico	27
3.5	Um exemplo para as superfícies tipo hiperbólico	28
4	Os problemas de Björling, de Bernstein e de Plateau para gráficos isóclinos elípticos em $\mathbb{R}_2^4$	30
4.1	Os problemas de Bernstein e de Plateau	31
4.1.1	Equação dos gráficos minimais	36
4.2	O problema de Björling em $\mathbb{R}_2^4$ para superfícies tipo espaço	37

Introdução

Neste trabalho apresentamos um estudo de superfícies no espaço pseudo-euclidiano $\mathbb{R}_2^4$. Este espaço é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^4$ munido com uma forma bilinear simétrica não degenerada de índice 2. Os planos neste espaço são classificados segundo seus tipos causais e por meio desta classificação define-se vários tipos de superfícies.

A noção de superfície isoclina relativa a um plano coordenado, e de superfície elíptica é dada no primeiro e segundo capítulo, respectivamente. Gráficos isóclinos elípticos são considerados, para os quais são dados alguns resultados.

Uma relação entre a teoria de funções analíticas e propriedades de superfícies é conhecida, nós aqui vamos obter vários resultados relacionando alguns tipos de superfícies no espaço $\mathbb{R}_2^4$, com a teoria de funções analíticas sobre as duas álgebras $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

Superfícies com vetor curvatura média zero tem sido sempre de interesse e de estudo por muito tempo. Assim, seguindo esta linha vamos a estudar problemas bem conhecidos, considerando gráficos isóclinos elípticos. Os problemas estudados são os de Bernstein e Björling.

Capítulo 1

No espaço $\mathbb{R}_2^4$: Introdução

Neste capítulo introdutório apresentamos o espaço pseudo-euclidiano de dimensão 4 e índice 2, e a noção de curvas nulas nesse espaço. Além disso, vamos dar a definição de planos isóclinos e apresentar a álgebra de Clifford dos números para-complexos.

1.1 Preliminares algébricos

O espaço denotado por $\mathbb{R}_2^4$ é o espaço euclidiano de dimensão 4, equipado com a seguinte forma bilinear, simétrica, não degenerada de índice 2:

$$\langle u, v \rangle = -u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 - u_4v_4,$$

para todo $u = (u_1, u_2, u_3, u_4), v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^4$.

$\mathbb{R}_2^4$ é chamado o *espaço pseudo-euclidiano* de dimensão 4 e de índice 2.

Definição 1.1. Um vetor $v \in \mathbb{R}_2^4$ é

1. Tipo espaço, se $\langle v, v \rangle > 0$ ou $v = 0$,
2. Nulo, se $\langle v, v \rangle = 0$ e $v \neq 0$,
3. Tipo tempo, se $\langle v, v \rangle < 0$.

A classificação acima é chamada o *caráter causal* de um vetor. A *norma* $\|v\|$ de um vetor v em $\mathbb{R}_2^4$ é definida por $\|v\| = \sqrt{|\langle v, v \rangle|}$. Assim, qualquer vetor nulo tem norma zero. Um *vetor unitário* é um vetor de norma um. Vetores u e v são chamados *ortogonais*, se $\langle u, v \rangle = 0$. Assim, o vetor zero é ortogonal a qualquer outro vetor e, qualquer vetor nulo é ortogonal a si mesmo. Uma *base ortonormal* para $\mathbb{R}_2^4$ é um conjunto de n vetores unitários mutuamente ortogonais. A base canônica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}_2^4$ a qual também será chamada de canônica.

Uma *curva regular* em $\mathbb{R}_2^4$ é uma aplicação

$$\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))$$

de um intervalo aberto $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_2^4$, onde assumimos que cada componente $x_i(t)$ é uma função analítica real e, $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Exemplo 1.2. Sejam a, b, r e ρ números positivos e seja $d = \sqrt{|-r^2a^2 + \rho^2b^2|} > 0$. Tomemos a curva regular

$$\alpha(t) = \left(r \cos \frac{at}{d}, \rho \cos \frac{bt}{d}, \rho \sin \frac{bt}{d}, r \sin \frac{at}{d} \right), t \in \mathbb{R}.$$

Temos que:

$$\epsilon = \langle \alpha', \alpha' \rangle = \frac{-r^2a^2 + \rho^2b^2}{|-r^2a^2 + \rho^2b^2|} \in \{-1, 1\} \quad \text{e} \quad \kappa = \langle \alpha'', \alpha'' \rangle = \frac{-r^2a^4 + \rho^2b^4}{(-r^2a^2 + \rho^2b^2)^2}.$$

Dependendo dos valores que escolhemos para as constantes a, b, r e ρ podemos ter ou $\kappa\epsilon > 0$ ou $\kappa\epsilon = 0$ ou ainda $\kappa\epsilon < 0$. Supondo que $\kappa \neq 0$, sejam os seguintes campos ao longo da curva α :

$$T(t) := \alpha'(t) \quad \text{e} \quad N(t) := \frac{1}{\kappa} \alpha''(t).$$

Assim, o plano osculador da curva α tem por base em cada ponto o conjunto $\{T(t), N(t)\}$, e usaremos esse plano para classificar essa curva.

Como extensão desse exemplo podemos supor $r = 0$ com $\rho = a = b = 1$ e temos uma circunferência no plano $\text{span}[e_2, e_3]$. Esse plano tem a natureza riemanniana, com a métrica $ds^2 = (dx_2)^2 + (dx_3)^2$.

Também para $\rho = 0$ com $r = a = b = 1$ temos uma circunferência no plano $\text{span}[e_1, e_4]$. Esse plano tem a natureza riemanniana, com a métrica negativa $-ds^2 = (dx_1)^2 + (dx_4)^2$.

Agora, vamos supor que $1 + r^2a^2 = \rho^2b^2$ e temos $\rho^2b^4 = b^2(1 + r^2a^2)$. Consideremos a função:

$$\psi(a^2r^2) = -r^2a^4 + \rho^2b^4 = -r^2a^4 + b^2(1 + r^2a^2).$$

Para $b = 1$ e $r = 1$, temos para $x = a^2$:

$$\psi(x) = -x^2 + x + 1 = -\left(x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right).$$

Assim, para $0 < a^2 < (1 + \sqrt{5})/2$ temos $\psi(a^2) > 0$ e, para $a^2 > (1 + \sqrt{5})/2$ temos $\psi(a^2) < 0$.

O sinal da função ψ está ditando a natureza do operador de Laplace $\text{divgrad}U(u, v)$ induzido no plano osculador dessa curva. Pode ser positivo ou negativo mas, elíptico ou hiperbólico ou ainda parabólico, segundo as escolhas das constantes r, ρ, a e b . Será hiperbólico quando $\langle \alpha', \alpha' \rangle$ e $\langle \alpha'', \alpha'' \rangle$ tiverem sinais contrários. Será elíptico quando tiverem sinais iguais.

Exemplo 1.3. Seja a superfície paramétrica

$$X(u, v) = (r \cos u, \rho \cos v, \rho \sin v, r \sin u)$$

para $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$ e $\rho > 0$. A métrica induzida nessa superfície é dada por

$$ds^2(X) = -r^2 du^2 + \rho^2 dv^2.$$

Para

$$u(t) = \frac{at}{\sqrt{|-r^2 a^2 + \rho^2 b^2|}} \quad \text{e} \quad v(t) = \frac{bt}{\sqrt{|-r^2 a^2 + \rho^2 b^2|}},$$

temos que a curva do primeiro exemplo é $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$. Assim, como esse toro é isométrico a um plano lorentziano, $\bar{u} = u/r$ e $\bar{v} = v/\rho$, vê-se que dizer que a curva $\alpha(t)$ é elíptica significa que como curva desse toro, ela é tipo espaço. Hiperbólica está significando que, no toro, a curva $\alpha(t)$ é tipo tempo.

Com esses dois exemplos, fica claro que somente o sinal de $\langle \alpha', \alpha' \rangle$ não diz muito a respeito da natureza da curva em questão.

Ainda, temos o plano tangente dado pela base

$$\{X_u = (-r \sin u, 0, 0, r \cos u), X_v = (0, -\rho \sin v, \rho \cos v, 0)\},$$

com o plano normal dado pela base

$$\{A = (\cos u, 0, 0, \sin u), B = (0, \cos v, \sin v, 0)\}.$$

Consideremos novamente a curva do Toro, $\alpha(t) = X(at/d, bt/d)$. Então,

$$\alpha'' = \kappa N(t) = (a/d)^2 X_{uu} + 2ab/d^2 X_{uv} + (b/d)^2 X_{vv} = -r(a/d)^2 A - \rho(b/d)^2 B.$$

Assim, dizer que a curva α é do tipo elíptico é dizer que α' é do tipo espaço no plano tangente ao toro e que α'' também é do tipo espaço no plano normal desse mesmo toro. Também, dizer que a curva α é do tipo hiperbólico é dizer que α' é do tipo tempo no plano tangente ao toro e que α'' também é do tipo tempo no plano normal desse mesmo toro.

1.1.1 Curvas nulas em $\mathbb{R}_2^4$

Vamos considerar as curvas em $\mathbb{R}_2^4$ cujo campo tangente tem norma zero.

Definição 1.4. Dizemos que uma curva regular

$$\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)), t \in I$$

é uma *curva nula* se, e somente se, $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 0$ para todo $t \in I$.

Se α é uma curva nula então temos:

$$\langle \alpha', \alpha' \rangle = -(x'_1)^2 + (x'_2)^2 + (x'_3)^2 - (x'_4)^2 = 0.$$

Podemos assumir que $x'_1 \neq 0$ pois estamos assumindo que a curva é regular. Assim, temos:

$$\left(\frac{x'_2}{x'_1}\right)^2 + \left(\frac{x'_3}{x'_1}\right)^2 - \left(\frac{x'_4}{x'_1}\right)^2 = 1.$$

Assim, podemos definir um parâmetro ϕ tal que $t = x_1^{-1}(\phi)$ e temos a reparametrização

$$\beta(\phi) = (\phi, y_2(\phi), y_3(\phi), y_4(\phi)),$$

correspondendo a curva do tipo espaço de $\{0\} \times \mathbb{R}_1^3$, definida por

$$\beta(\phi) - \phi e_1 = (0, y_2(\phi), y_3(\phi), y_4(\phi)),$$

onde para cada $\phi \in J$ temos

$$\beta'(\phi) - e_1 \in S_1^2 = \{x \in \mathbb{R}_2^4 : x_1 = 0 \text{ e } \langle x, x \rangle = 1\}.$$

Proposição 1.5. *Toda curva regular nula $\beta(\phi)$ admite uma representação integral dada por*

$$\beta(\phi) - \beta(0) = \phi e_1 + \int_0^\phi r(\eta) d\eta \quad (1.1)$$

onde $r(\phi) = (0, x_2(\phi), x_3(\phi), x_4(\phi))$ com $\langle r(\phi), r(\phi) \rangle = 1$ para cada $\phi \in I$. O parâmetro ϕ vamos chamar de *arc-foton*.

É bem conhecido que toda superfície tipo tempo com curvatura média igual a zero localmente é a soma de duas curvas nulas, pois em coordenadas u, v isotrópicas

$$X(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v), x_4(u, v)) \text{ tal que } \langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle = 0,$$

tem-se que $\text{divgrad} X = 0$ se, e somente se, $X_{uv} = 0$ em todo domínio $U \subset \mathbb{R}^2$.

Assim, temos que existem duas curvas nulas $\alpha(u)$ e $\beta(v)$ tais que $X(u, v) = \alpha(u) + \beta(v)$. Aplicando a Proposição 1.5 acima a essa observação temos o seguinte resultado.

Teorema 1.6. *Toda superfície regular tipo tempo com curvatura média zero pode ser localmente dada por uma representação integral na forma*

$$X(\phi, \psi) = p_0 + (\phi + \psi)e_1 + \int_0^\phi r(\eta) d\eta + \int_0^\psi s(\eta) d\eta, \quad (1.2)$$

onde r e s são curvas da esfera $S_1^2(1)$. Neste caso a métrica vem dada por

$$F(\phi, \psi) = \langle X_\phi, X_\psi \rangle = \langle r(\phi), s(\psi) \rangle.$$

1.2 Planos isóclinos

Sejam dois planos α e β do espaço $\mathbb{R}^4$ tais que se intersectam somente na origem. Podemos tomar o ângulo que um vetor unitário u em α faz com a projeção ortogonal desse vetor no plano β . Quando u descreve uma circunferência de raio 1 centrada na origem, o ângulo varia entre dois valores extremos, em geral diferentes. A circunferência unitária em α projeta-se como uma elipse em β , e os eixos correspondem aos valores extremos do ângulo acima.

Definição 1.7. Sejam α e β dois planos em $\mathbb{R}_2^4$ de natureza riemanniana, tais que se intersectam somente na origem. Dizemos que α e β são *isóclinos* se, e somente se toda circunferência centrada na origem do plano α projeta-se ortogonalmente como uma circunferência no plano β .

Proposição 1.8. Sejam α e β dois planos em $\mathbb{R}_2^4$ de natureza riemanniana, tais que se intersectam somente na origem. As seguintes sentenças são equivalentes:

- (i) Os planos α e β são isóclinos.
- (ii) Bases isotérmicas de α projetam-se ortogonalmente em bases isotérmicas de β , e viceversa.

Definição 1.9. Sejam α e β dois planos em $\mathbb{R}_2^4$ de natureza lorentziana, tais que se intersectam somente na origem. Dizemos que α e β são *isóclinos* se, e somente se toda hipérbole equilátera do plano α projeta-se ortogonalmente como uma hipérbole equilátera no plano β .

Proposição 1.10. Sejam α e β dois planos em $\mathbb{R}_2^4$ de natureza lorentziana, tais que se intersectam somente na origem. As seguintes sentenças são equivalentes:

- (i) Os planos α e β são isóclinos.
- (ii) Bases isotérmicas de α projetam-se ortogonalmente em bases isotérmicas de β , e viceversa.

Demonstração: Fixemos uma base $\{w_1, w_2\}$ no plano α tal que

$$[g_{ij}] = [\langle w_i, w_j \rangle] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Um ramo de uma hipérbole equilátera no plano α é obtida tomando-se

$$f(\eta) = \rho(\cosh \eta w_1 + \sinh \eta w_2).$$

Seja a sua projeção ortogonal no plano β dada por

$$pr(f(\eta)) = \rho(\cosh \eta \bar{w}_1 + \sinh \eta \bar{w}_2).$$

Temos a curva no plano β dada por:

$$\langle pr(f(\eta)), pr(f(\eta)) \rangle = \rho^2(E \cosh^2 \eta + 2F \cosh \eta \sinh \eta + G \sinh^2 \eta),$$

que será uma hipérbole equilátera se, e somente se,

$$-E = G \quad \text{e} \quad F = 0.$$

□

Corolário 1.11. Sejam α e β dois planos em $\mathbb{R}_2^4$ de natureza lorentziana, tais que se intersectam somente na origem. As seguintes sentenças são equivalentes:

- (i) Os planos α e β são planos isóclinos.
- (ii) Bases isotrópicas de α projetam-se ortogonalmente em bases isotrópicas de β , e viceversa.

Definição 1.12. Seja S uma superfície regular em $\mathbb{R}_2^4$, tipo espaço ou tipo tempo. Fixado um plano coordenado conveniente, S é *isóclina* em relação a esse plano coordenado se, e somente se, em cada ponto $p \in S$ o correspondente plano tangente de S em p , $T_p S$, e o plano coordenado são isóclinos.

Exemplo 1.13. Vamos dar um exemplo de uma superfície Lorentziana que é isóclina em relação ao plano coordenado $\text{span}[e_2, e_4]$. Seja

$$f(u, v) = (u^2 + v^2, u, 2uv, v) \quad \text{para} \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Temos que:

$$f_u = (2u, 1, 2v, 0) \quad \text{e} \quad f_v = (2v, 0, 2u, 1).$$

Logo,

$$E = -4u^2 + 4v^2 + 1, \quad G = 4u^2 - 4v^2 - 1 \quad \text{e} \quad F = 0.$$

Seja $W = \text{span}[e_2, e_4]$. Então,

$$\text{pr}_W(f_u) = (0, 1, 0, 0) \quad \text{e} \quad \text{pr}_W(f_v) = (0, 0, 0, -1).$$

1.3 A álgebra de Clifford $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ e funções sobre essa álgebra

A álgebra de Clifford $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ é o espaço vetorial munido do produto

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac + bd, ad + bc).$$

Escreve-se $1 \equiv (1, 0)$ e $j \equiv (0, 1)$. Assim, $a + jb \equiv (a, b)$ é uma das formas que se usa para representar esses números. Chamaremos essa álgebra a *álgebra dos números para-complexos* e a vamos denotar por $\mathbb{C}' := \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

$\mathbb{C}'$ admite divisores do zero: eles são os números da forma $a + ja$ para $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. A equação $w^2 - w = 0$ tem 4 soluções, duas triviais $w_3 = 0$ e $w_4 = 1$, e as outras duas são os divisores de zero dados por

$$w_1 = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad w_2 = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}. \quad (1.3)$$

A conjugação em $\mathbb{C}'$ define-se de modo usual: $\overline{a + jb} = a - jb$. Temos que, w_1 e w_2 são conjugados entre si. Além disso w_1 e w_2 são números idempotentes e $w_1 w_2 = 0$. Para cada número para-complexo $w \in \mathbb{C}'$ temos a seguinte identidade

$$w = (a + b)w_1 + (a - b)w_2 \quad \text{se e somente se} \quad w = a + jb.$$

Note que $w_1 + w_2 = 1$ e $w_1 - w_2 = j$.

Define-se $\Re(a + jb) = a$ e $\Im(a + jb) = b$. Se $w = a + jb$ é um elemento de $\mathbb{C}'$ o qual não é um divisor do zero, então existe o elemento inverso de w , denota-se por w^{-1} , e tem-se que $w^{-1} = \overline{w}/(w\overline{w})$.

1.3.1 Séries de potências

Considere-se a soma formal

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (w - w_0)^n \quad (1.4)$$

onde $c_n, w_0 \in \mathbb{C}'$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se existir um aberto $U \subset \mathbb{C}'$ ao redor do ponto w_0 onde essa soma formal é uma série absolutamente e localmente uniformemente convergente, dizemos que a função

$$f : U \rightarrow \mathbb{C}' \quad \text{dada por} \quad f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (w - w_0)^n$$

é uma função analítica em U .

Proposição 1.14. Colocando $w - w_0 = xw_1 + yw_2$ e $c_n = a_n w_1 + b_n w_2$ para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que a série formal acima fica descrita como uma soma de duas séries de potências de uma variável real da seguinte forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (w - w_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n w_1 + \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n w_2. \quad (1.5)$$

1.3.2 Derivadas das funções analíticas

Usando-se a representação acima para as funções analíticas, podemos derivar essas funções termo a termo, nas condições que a Análise Real prescreve, obtendo-se:

$$f'(w) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} w_1 + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n y^{n-1} w_2. \quad (1.6)$$

Definição 1.15. Para a variável $w = x + jy$ define-se os seguintes operadores diferenciais:

$$\frac{\partial}{\partial w} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{e seu conjugado} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{w}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - j \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (1.7)$$

e

$$dw = dx + jdy \quad \text{e seu conjugado} \quad d\bar{w} = dx - jdy. \quad (1.8)$$

Proposição 1.16. Se $f(w) = \phi(x, y) + j\psi(x, y)$, $w = x + jy$, é uma função analítica no aberto $U \subset \mathbb{C}'$, de tipo retangular, ao redor de $w_0 \in U$, então a sua derivada esta dada por

$$\frac{\partial f}{\partial w} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + j \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right).$$

Temos também a fórmula tipo Cauchy-Riemann para essa função

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{w}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + j \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0.$$

Reciprocamente, assumindo que cada componente ϕ e ψ são funções analíticas reais, e se $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, então a função $f(w) = \phi(w) + j\psi(w)$ é analítica para a álgebra $\mathbb{C}'$.

Exemplo 1.17. Como exemplo vamos definir a função $\sin w, w \in \mathbb{C}'$ ao redor da origem. Queremos uma função $f(w) = \sin w, w = x + jy$ tal que $f(x) = \sin x$, e que seja analítica. Assim tomamos

$$f((x+y)w_1 + (x-y)w_2) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (x+y)^{2n+1} \right) w_1 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (x-y)^{2n+1} \right) w_2,$$

isto é,

$$\sin w = \sin(x+y)w_1 + \sin(x-y)w_2 = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2} + j \frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{2}.$$

Ou de outra forma,

$$\sin w = \sin x \cos y + j \cos x \sin y = \sin \frac{w + \bar{w}}{2} \cos \frac{w - \bar{w}}{2j} + j \cos \frac{w + \bar{w}}{2} \sin \frac{w - \bar{w}}{2j}.$$

Esta função é a única solução analítica do problema de Cauchy

$$\frac{\partial^2 z}{\partial w^2} + z = 0 \quad \text{tal que} \quad z(0) = 0 \quad \text{e} \quad z'(0) = 1.$$

1.4 Gráficos de funções sobre $\mathbb{C}'$ analíticas

Definição 1.18. Seja $\Phi(w) = \phi(w) + j\psi(w)$ uma função analítica no retângulo aberto

$$U = \{w = x + jy \in \mathbb{C}' : (x, y) \in I \times J\}$$

onde $I \times J = (-\epsilon, \epsilon) \times (-\delta, \delta)$.

Define-se o gráfico sobre $\mathbb{R}^4$ dessa função, por a função

$$f(w) = (x, \phi(x, y), y, \psi(x, y)) = \left(\frac{w + \bar{w}}{2}, \frac{\Phi(w) + \overline{\Phi(w)}}{2}, \frac{w - \bar{w}}{2j}, \frac{\Phi(w) - \overline{\Phi(w)}}{2j} \right). \quad (1.9)$$

Teorema 1.19. O gráfico da função analítica $\Phi(w) = \phi(w) + j\psi(w)$ definido acima por $f(w) = (x, \phi(x, y), y, \psi(x, y))$ é uma imersão pseudo-isotérmica do retângulo U em $\mathbb{R}_2^4$ com a métrica induzida lorentziana dada por

$$ds^2 = (1 - \phi_x^2 + \phi_y^2)(-dx^2 + dy^2). \quad (1.10)$$

Mais ainda, o plano tangente e o plano normal em cada ponto da superfície são isóclinos relativo ao plano coordenado tipo Lorentz $\text{span}[e_1, e_2]$, e as suas bases são dadas por

$$f_x = (1, a, 0, b) \quad \text{e} \quad f_y = (0, b, 1, a) \quad (1.11)$$

e,

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{|1 - a^2 + b^2|}}(1, a, 0, b) \quad \text{e} \quad N_2 = \frac{1}{\sqrt{|1 - a^2 + b^2|}}(-b, 0, a, 1) \quad (1.12)$$

respectivamente, onde $a = \phi_x = \psi_y$ e $b = \psi_x = \phi_y$.

A imersão definida por

$$g(x, y) = (\phi(x, y), x, -\psi(x, y), -y) \quad (1.13)$$

é tal que

$$g_x = \frac{1}{\sqrt{|1 - a^2 + b^2|}} N_1 \quad e \quad g_y = \frac{-1}{\sqrt{|1 - a^2 + b^2|}} N_2. \quad (1.14)$$

Capítulo 2

Superfícies em $\mathbb{R}_2^4$

2.1 Álgebra linear do espaço vetorial $\mathbb{R}_2^4$

A base canônica desse espaço é o conjunto ordenado $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Por definição

$$e_i = (\delta_i^1, \delta_i^2, \delta_i^3, \delta_i^4),$$

onde δ_i^j é o símbolo de Kronecker. Assumiremos a seguinte assinatura $(-1, 1, 1, -1)$ para o tensor métrico de $\mathbb{R}_2^4$. O produto interno associado o escreveremos

$$\langle u, v \rangle = -u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 - u_4v_4.$$

Temos seis planos coordenados, ordenados em pares de planos mutuamente ortogonais: π_{14} e π_{23} onde a métrica inducida é respectivamente definida negativa e definida positiva, e para os outros quatro planos com métrica semi-definida temos o par, π_{12} e π_{34} , e o par, π_{13} e π_{24} . Além disso, temos um conjunto de planos com métrica degenerada, por exemplo: $\text{span}[(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)]$, onde temos se $v = (a, b, a, b)$ então $\langle v, v \rangle = 0$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$. Existem muitos outros planos degenerados.

2.1.1 Classificação dos planos

Seja $W = \text{span}[u, v]$ um plano (um subespaço de dimensão 2) em $\mathbb{R}_2^4$. Defina os números:

$$E = \langle u, u \rangle, \quad F = \langle u, v \rangle \quad \text{e} \quad G = \langle v, v \rangle.$$

O tensor métrico inducido sobre W , o escreveremos como segue:

$$ds^2 = E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2.$$

Dizemos que:

1. W é um plano parabólico se, e somente se $EG - F^2 = 0$.
2. W é um plano hiperbólico ou lorentziano se, e somente se $EG - F^2 < 0$.
3. W é um plano elíptico negativo se, e somente se, $EG - F^2 > 0$ e $E < 0$.
4. W é um plano elíptico positivo se, e somente se, $EG - F^2 > 0$ e $E > 0$.

2.1.2 Isometrias sobre $\mathbb{R}_2^4$

Seja $L : \mathbb{R}_2^4 \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ uma transformação linear. Dizemos que a transformação linear L é uma isometria se, e somente se

$$\langle L(u), L(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad \text{para todo } u \text{ e } v \text{ em } \mathbb{R}_2^4.$$

Dizemos que a transformação linear L é uma anti-isometria se, e somente se

$$\langle L(u), L(v) \rangle = -\langle u, v \rangle \quad \text{para todo } u \text{ e } v \text{ em } \mathbb{R}_2^4.$$

Um exemplo de uma anti-isometria é a transformação:

$$L(a, b, c, d) = (b, a, d, c).$$

Note que $L(e_1) = e_2$, $L(e_2) = e_1$, $L(e_3) = e_4$ e $L(e_4) = e_3$.

Fato 2.1. Toda isometria e toda anti-isometria preserva a classificação dos planos parabólicos e hiperbólicos. Além disso, toda isometria preserva planos elípticos positivos e negativos, e toda anti-isometria transforma planos elípticos positivos em planos elípticos negativos.

2.2 Superfícies elípticas em $\mathbb{R}_2^4$

Definição 2.2. Dizemos que uma superfície S do espaço $\mathbb{R}_2^4$ é uma superfície elíptica, se o tensor métrico induzido

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

obedece as seguintes condições:

$$EG - F^2 > 0 \text{ e, ou } E > 0 \text{ ou } E < 0.$$

O seguinte é um fato bem conhecido:

Proposição 2.3. *Para toda superfície elíptica S , existe um atlas completo $\mathcal{A}$ onde o tensor métrico é ou λ^2 -isotérmico, ou $-\lambda^2$ -isotérmico. Isto significa, qualquer carta em $\mathcal{A}$ satisfaz:*

$$\text{ou } E = G = \lambda^2 \text{ ou } E = G = -\lambda^2, \text{ com } F = 0.$$

Definição 2.4. Sejam $U \subseteq \mathbb{C}$ aberto e $\Psi : U \rightarrow \mathbb{C}$, $\Psi(z) = \varphi(u, v) + i\psi(u, v)$, $z = u + iv$ uma função holomorfa. O gráfico de Ψ é a superfície paramétrica em $\mathbb{R}_2^4$ dada por

$$f(u, v) = (u, \varphi(u, v), \psi(u, v), v). \quad (2.1)$$

Essa superfície paramétrica pode ser escrita como segue:

$$f(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{\Psi(z) + \overline{\Psi(z)}}{2}, \frac{\Psi(z) - \overline{\Psi(z)}}{2i}, \frac{z - \bar{z}}{2i} \right). \quad (2.2)$$

Teorema 2.5. *Seja $U \subseteq \mathbb{C}$ aberto, conexo e simplesmente conexo e seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}_2^4$, $f(u, v) = (u, \varphi(u, v), \psi(u, v), v)$ uma superfície paramétrica elíptica positiva. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $\Psi : U \rightarrow \mathbb{C}$, $\Psi(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$ é uma função holomorfa ou anti-holomorfa.
- (ii) O plano tangente em qualquer ponto z_0 da superfície $S = f(U)$, $T_{f(z_0)}S = df_{z_0}(\mathbb{R}^2)$, é um plano isóclino relativo ao plano $\text{span}[e_2, e_3]$.
- (iii) O tensor métrico da superfície $S = f(U)$ é λ^2 -isotérmico.

Demonstração: (i) implica (ii). Assumamos as equações de Cauchy-Riemann e escrevamos $a = \varphi_u = \psi_v$ e $b = \varphi_v = -\psi_u$. Então, tem-se $f_u = (1, a, -b, 0)$ e $f_v = (0, b, a, 1)$. Para $\theta \in [0, 2\pi]$, tomando o vetor

$$v = \cos \theta f_u + \sin \theta f_v,$$

obtemos:

$$\langle v, v \rangle = -1 + a^2 + b^2 = E = G \quad \text{e} \quad F = 0.$$

Agora, a projeção $pr_{23}(v)$ de v no plano π_{23} é

$$w = pr_{23}(v) = \cos \theta (0, a, -b, 0) + \sin \theta (0, b, a, 0).$$

Por conseguinte,

$$\langle v, w \rangle = |v||w| \cosh \vartheta = a^2 + b^2.$$

Assim,

$$\cosh \vartheta = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{-1 + a^2 + b^2}}$$

é uma constante, já que não depende do ângulo hiperbólico ϑ .

(ii) implica (iii). Tomando a elipse $v(\theta) = \cos \theta f_u + \sin \theta f_v$, temos que

$$\langle v(\theta), v(\theta) \rangle = E \cos^2 \theta + 2F \cos \theta \sin \theta + G \sin^2 \theta$$

e sua projeção é a elipse dada por $w(\theta)$. Assim,

$$\langle w(\theta), w(\theta) \rangle = (E + 1) \cos^2 \theta + 2F \cos \theta \sin \theta + (G + 1) \sin^2 \theta.$$

O ângulo hiperbólico de cada vetor radial é dado por

$$\cosh \vartheta(\theta) = \sqrt{\frac{E \cos^2 \theta + 2F \cos \theta \sin \theta + G \sin^2 \theta + 1}{E \cos^2 \theta + 2F \cos \theta \sin \theta + G \sin^2 \theta}} = \text{constante}.$$

Segue-se de $\cosh \vartheta(0) = \cosh \vartheta(\pi/2) = \cosh \vartheta(\pi/4)$ que $E = G$ e $F = 0$.

(iii) implica (i). As equações de Cauchy-Riemann seguem do sistema de equações:

$$\varphi_u^2 + \psi_u^2 - 1 = \varphi_v^2 + \psi_v^2 - 1 \quad \text{e} \quad \varphi_u \varphi_v = -\psi_u \psi_v.$$

□

Proposição 2.6. *Seja $U \subseteq \mathbb{C}$ aberto, conexo e simplesmente conexo e seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}_2^4$, $f(u, v) = (u, \varphi(u, v), \psi(u, v), v)$ uma superfície paramétrica elíptica positiva. O subespaço de todos os vetores ortogonais ao plano tangente $T_z S$ tem como base $\{A(z), B(z)\}$, onde esses dois vetores estão dados por:*

$$A(z) = (\varphi_u(z), 1, 0, \varphi_v(z)) \quad e \quad B(z) = (\psi_u(z), 0, 1, \psi_v(z)). \quad (2.3)$$

Demonstração: Como $f_u = (1, \varphi_u, \psi_u, 0)$ e $f_v = (0, \varphi_v, \psi_v, 1)$ a afirmação segue-se de um cálculo fácil. Notemos que este plano é um plano elíptico negativo em cada ponto, já que $\langle A, A \rangle = -E$, $\langle B, B \rangle = -G$ e $\langle A, B \rangle = -F$. $\square$

Corolário 2.7. *Seja $U \subseteq \mathbb{C}$ aberto, conexo e simplesmente conexo e seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}_2^4$, $f(u, v) = (u, \varphi(u, v), \psi(u, v), v)$ uma superfície paramétrica elíptica positiva. Se o tensor métrico da superfície $S = f(U)$ é λ^2 -isotérmico, então*

$$g(u, v) = (\psi(u, v), v, u, \varphi(u, v))$$

é uma superfície paramétrica elíptica negativa com $g_u = B$ e $g_v = A$. Além disso, $i\bar{z} = v + iu$ e $i\bar{\Psi} = \psi + i\varphi$.

Demonstração: Seja $a = \varphi_u = \psi_v$ e $b = \varphi_v = -\psi_u$. Então, temos: $f_u = (1, a, -b, 0)$, $f_v = (0, b, a, 1)$ e $A = (a, 1, 0, b)$, $B = (-b, 0, 1, a)$. $\square$

Exemplo 2.8. Para $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ temos o gráfico da função holomorfa $\Psi(z) = z^2/2$:

$$f(u, v) = \left(u, \frac{u^2 - v^2}{2}, uv, v \right).$$

Façamos os cálculos das afirmações anteriores para esta superfície. Primeiro, notemos que

$$f_u = (1, u, v, 0), \quad f_v = (0, -v, u, 1), \quad A = (u, 1, 0, -v) \quad e \quad B = (v, 0, 1, u).$$

Por conseguinte, temos a superfície paramétrica elíptica negativa

$$g(u, v) = \left(uv, v, u, \frac{u^2 - v^2}{2} \right),$$

tal que $A = g_v$ e $B = g_u$. As métricas dessas duas superfícies são:

$$ds_f^2 = (-1 + u^2 + v^2)(du^2 + dv^2) \quad e \quad ds_g^2 = (1 - u^2 - v^2)(du^2 + dv^2).$$

O tensor métrico é positivo para $u^2 + v^2 > 1$, negativo para $u^2 + v^2 < 1$ e nulo na circunferência $u^2 + v^2 = 1$. Por conseguinte, considerada como uma variedade o gráfico desta função tem uma curva de singularidades da métrica, mas a estrutura diferencial se mantém sobre todo $\mathbb{R}^2$.

A segunda forma quadrática de f , a forma curvatura normal, é calculada tomando $A_{ij} = \langle D_{ij}f, A/|A| \rangle$ e $B_{ij} = \langle D_{ij}f, B/|B| \rangle$. Então, obtemos:

$$[A_{ij}] = \frac{1}{\sqrt{-1+u^2+v^2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [B_{ij}] = \frac{1}{\sqrt{-1+u^2+v^2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

para

$$B(,) = (A_{ij}du^i du^j)A + (B_{ij}du^i du^j)B.$$

A curvatura de Gauss é

$$K(u, v) = \frac{\det([A_{ij}])}{\det([g_{ij}])} + \frac{\det([B_{ij}])}{\det([g_{ij}])} = \frac{-2\epsilon}{(-1+u^2+v^2)^3},$$

onde $\epsilon = \text{sinal}(ds^2)$.

O vetor curvatura média é

$$H(u, v) = -\frac{1}{2} (A_{ij}g^{ij}A + B_{ij}g^{ij}B) = 0.$$

A 1-forma o campo de vetores covariantes γ , o qual é definido por

$$\gamma = \gamma_i du^i = \langle A_u, B \rangle du + \langle A_v, B \rangle dv = -\langle B_u, A \rangle du - \langle B_v, A \rangle dv,$$

aparece nas fórmulas de estrutura da superfície paramétrica. Definiremos essas fórmulas logo. A torção ou curvatura normal é a aplicação pseudo-escalar, definida por

$$\text{Rot}\gamma(u, v) = -\epsilon \frac{A_1^i B_i^2 - A_2^i B_i^1}{\det([g_{ij}])} = \frac{-2\epsilon}{(-1+u^2+v^2)^3}.$$

A função mede quanto as matrizes $[A_{ij}]$ e $[B_{ij}]$ comutam.

Definição 2.9. Seja

$$f(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v), x_4(u, v))$$

uma superfície paramétrica elíptica do espaço $\mathbb{R}_2^4$ com domínio $U \subseteq \mathbb{C}$ aberto, conexo e simplesmente conexo. Sejam A e B campos vetoriais ortogonais unitários do fibrado normal. Temos as fórmulas

$$D_{ij}f = \Gamma_{ij}^k D_k f + A_{ij}A + B_{ij}B \quad (\text{Gauss}) \quad (2.4)$$

$$D_k A = -A_k^m D_m f + \gamma_k B \quad (\text{Weingarten}) \quad (2.5)$$

$$D_k B = -B_k^m D_m f - \gamma_k A \quad (\text{Weingarten}). \quad (2.6)$$

A segunda forma fundamental é um campo vetorial do fibrado normal composto por dois tensores covariantes de segunda ordem:

$$B(,) = (A_{ij}du^i du^j)A + (B_{ij}du^i du^j)B. \quad (2.7)$$

Os símbolos de Christoffel são dados por

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{mk} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right). \quad (2.8)$$

O tensor covariante alternado

$$\text{rot}(\gamma(u, v)) = \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial u^j} - \frac{\partial \gamma_j}{\partial u^i} \right) du^i \otimes du^j. \quad (2.9)$$

mede a comutatividade das matrizes $[A_{ij}]$ e $[B_{ij}]$. Note que essas matrizes comutam se, e somente se $\text{rot}(\gamma) = 0$.

De fato, como $\gamma_i = \langle D_i A, B \rangle$ temos que:

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial u^j} = \gamma_{i,j} = \langle D_{ij} A, B \rangle + \langle D_i A, D_j B \rangle = -\gamma_i \gamma_j + \langle D_i A, D_j B \rangle.$$

Por conseguinte,

$$\gamma_{i,j} - \gamma_{j,i} = (A_i^m B_j^n - A_j^m B_i^n) g_{mn} = A_{in} B_j^m - A_{jn} B_i^m. \quad (2.10)$$

Proposição 2.10. *As matrizes $[A_{ij}]$ e $[B_{ij}]$ comutam se, e somente se $\text{rot}(\gamma) = 0$ se, e somente se existe uma função de valor real $c(u, v)$ de U em $\mathbb{R}$ tal que $\nabla c(u, v) = (\gamma_1, \gamma_2)$.*

2.3 Superfícies tipo tempo

Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ uma superfície paramétrica tipo tempo, onde $U \subseteq \mathbb{R}^2$ é um subconjunto aberto, conexo e simplesmente conexo do plano. Isto quer dizer: f satisfaz as condições de uma superfície e, as derivadas parciais de f em qualquer ponto $(u, v) \in U$, $D_1 f = \frac{\partial f}{\partial u} = df_{(u,v)}(e_1)$ e $D_2 f = \frac{\partial f}{\partial v} = df_{(u,v)}(e_2)$, obedecem a seguinte condição:

$$g_{11}g_{22} - g_{12}^2 < 0 \quad \text{onde} \quad g_{ij} = \langle D_i f, D_j f \rangle. \quad (2.11)$$

Usaremos a notação clássica para o tensor métrico $E = g_{11}$, $F = g_{12}$ e $G = g_{22}$.

Definição 2.11. Diremos que (U, f) é uma imersão isotrópica futuro dirigida se $E = G = 0$ e $F < 0$. As curvas coordenadas são curvas nulas futuro dirigidas.

Seja $[\tau, \nu]$ o plano normal ao longo de U da imersão (U, f) . Note que em cada ponto $(u, v) \in U$ o plano normal é um espaço vetorial bidimensional tipo tempo. Assumamos que esses dois campos de vetores formam um conjunto ortonormal, onde $\langle \tau, \tau \rangle = -1$ e $\langle \nu, \nu \rangle = 1$ com $\langle \tau, \nu \rangle = 0$.

Equações de estrutura para essas superfícies:

Proposição 2.12. Para a imersão (U, f) temos:

$$D_{ij}f = \Gamma_{ij}^k D_k f + A_{ij}\tau + B_{ij}\nu \quad \text{equação de Gauss} \quad (2.12)$$

$$D_k\tau = -A_k^m D_m f + \gamma_k\nu \quad \text{equação de Weingarten} \quad (2.13)$$

$$D_k\nu = -B_k^m D_m f - \gamma_k\tau \quad \text{equação de Weingarten.} \quad (2.14)$$

onde $A_k^m g_{mj} = A_{kj}$ e $B_k^m g_{mj} = B_{kj}$.

Os símbolos de Christoffel são dados por

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{mk} (D_j g_{im} + D_i g_{jm} - D_m g_{ij}). \quad (2.15)$$

O campo vetorial covariante $\gamma = \gamma_k du^k$ é definido por

$$\gamma_k = \langle D_k\tau, \nu \rangle = \langle D_k\nu, \tau \rangle. \quad (2.16)$$

Definição 2.13. A segunda forma bilinear B é o tensor 2-covariante

$$B(,) = (A_{ij} du^i \otimes du^j)\tau + (B_{ij} du^i \otimes du^j)\nu. \quad (2.17)$$

O operador forma S^n é o tensor de tipo 1-1 dado por

$$\langle S^n(V), W \rangle = \langle B(V, W), n \rangle \quad \text{para cada } n \in \text{span}[\tau, \nu]. \quad (2.18)$$

A curvatura de Gauss K é o campo escalar

$$K(u, v) = -\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} + \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}. \quad (2.19)$$

O vetor curvatura média é

$$H(u, v) = -\frac{1}{2} (A_{ij} g^{ij} \tau + B_{ij} g^{ij} \nu). \quad (2.20)$$

A curvatura normal é o tensor covariante

$$\text{rot}(\gamma) = \gamma_{i,k} - \gamma_{k,j} = A_{ij} B_k^j - A_i^j B_{jk}. \quad (2.21)$$

2.4 O diferencial nulo e a esfera nula centrada na origem

Como o tensor métrico do espaço $\mathbb{R}_2^4$ é

$$ds^2 = -(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 - (dx_4)^2,$$

dados dos planos tipo tempo $\text{span}[V, W]$ e $\text{span}[A, B]$ tais que $\mathbb{R}_2^4 = \text{span}[V, W] \oplus \text{span}[A, B]$, podemos tomar uma base adaptada $\{L_1, L_2, L_3, L_4\}$ para o espaço $\mathbb{R}_2^4$, composta por vetores nulos, tal que $\mathbb{R}_2^4 = [L_1, L_2] \oplus [L_3, L_4]$. Assumindo, por exemplo a base canônica $\{e_i\}_{1 \leq i \leq 4}$, podemos tomar

$$L_1 = e_1 + e_2, \quad L_2 = e_1 - e_2, \quad L_3 = e_4 + e_3 \quad \text{e} \quad L_4 = e_4 - e_3.$$

Todos esses vetores nulos são futuros dirigidos e o segundo par é o complemento ortogonal do primeiro par.

Definição 2.14. A esfera nula é a hipersuperfície dada por

$$S_2^4(0) = \{x \in \mathbb{R}_2^4 : \langle x, x \rangle = 0\}. \quad (2.22)$$

Proposição 2.15. Se $x \in S_2^4(0)$ e $x \neq 0$ então existem tres números reais a, b e ρ tal que

$$X = \rho(a + b, a - b, 1 + ab, -1 + ab). \quad (2.23)$$

Demonstração: Primeiro assumamos que $X = (x, y, z, w) \neq 0$. Assim, $\langle X, X \rangle = -x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = 0$, logo $x^2 - y^2 = z^2 - w^2$. O que implica $(x - y)(x + y) = (z - w)(z + w)$. Por conseguinte, assumindo que $z - w \neq 0$ tendríamos que

$$\frac{x - y}{z - w} \frac{x + y}{z - w} = \frac{z + w}{z - w}.$$

Tomar por definição

$$a = \frac{x + y}{z - w}, \quad b = \frac{x - y}{z - w} \quad \text{e} \quad \rho = \frac{z - w}{2}. \quad (2.24)$$

Segue-se: $a + b = 2x/(z - w) = x/\rho$ e $a - b = y/\rho$. De,

$$1 + ab = 1 + \frac{z + w}{z - w} = \frac{2z}{z - w} = \frac{z}{\rho} \quad \text{e} \quad -1 + ab = -1 + \frac{z + w}{z - w} = \frac{2w}{z - w} = \frac{w}{\rho}$$

temos a equação desejada. $\square$

Notemos que existem outras parametrizações do ponto $X \in S_2^4(0)$.

Proposição 2.16. Para o subconjunto aberto e conexo:

$$\Omega = \{(\lambda, u, v) \in \mathbb{R}^3 : \lambda > 0 \text{ e } (u, v) \in \mathbb{R}^2\},$$

a aplicação

$$F(\lambda, u, v) = \lambda(u + v, u - v, 1 + uv, -1 + uv) \quad (2.25)$$

é uma imersão de Ω na esfera nula com tensor métrico (degenerado) dado por

$$[G_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda^2 \\ 0 & -2\lambda^2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Demonstração: Segue-se facilmente de

$$F_\lambda = (u + v, u - v, 1 + uv, -1 + uv), \quad F_u = \lambda(1, 1, v, v) \quad \text{e} \quad F_v = \lambda(1, -1, u, u)$$

que $G_{11} = G_{12} = G_{13} = 0$ e $G_{22} = G_{33} = 0$, com $G_{23} = G_{32} = -2\lambda^2$. $\square$

Observação 2.17. Pode-se construir um atlas maximal para a esfera nula, com tensor métrico análogo à equação anterior.

Proposição 2.18. *Para o subconjunto aberto e conexo:*

$$\Omega = \{(\lambda, x, y) \in \mathbb{R}^3 : \lambda > 0 \text{ e } (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

a aplicação

$$G(\lambda, x, y) = \lambda(2x, 2y, 1 + x^2 - y^2, -1 + x^2 - y^2), \quad (2.27)$$

é uma imersão de Ω na esfera nula com tensor métrico (degenerado) dado por

$$[G_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4\lambda^2 \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

tomando $2x = u + v$ e $2y = u - v$.

2.4.1 Imersão no subconjunto $F(\Omega) \subset S_2^4(0)$

Dada uma imersão X de um subconjunto aberto e conexo $U \subset \mathbb{R}^2$ no subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ definimos a aplicação:

$$f : U \rightarrow S_2^4(0) \quad \text{tal que} \quad f(t, s) = F(X(t, s)) \quad (\forall (t, s) \in U). \quad (2.29)$$

Teorema 2.19. *A imersão de $U \subset \mathbb{R}^2$ em $F(\Omega)$ dada por*

$$f(t, s) = \lambda(t, s)(u(t, s) + v(t, s), u(t, s) - v(t, s), 1 + u(t, s)v(t, s), -1 + u(t, s)v(t, s)) \quad (2.30)$$

tem parâmetros isotrópicos se, e somente se as aplicações $u(t, s) = u(t)$ e $v(t, s) = v(s)$ ou, $u(t, s) = u(s)$ e $v(t, s) = v(t)$, em outras palavras, essas duas funções dependem só de uma variável.

Demonstração: Escrevamos $f = \lambda L$. Tomando as derivadas

$$f_t = \lambda_t L + \lambda(L_u u_t + L_v v_t) \quad \text{e} \quad f_s = \lambda_s L + \lambda(L_u u_s + L_v v_s),$$

segue de $\langle L, L \rangle = 0$ que

$$\langle f_t, f_t \rangle = -2\lambda^2 u_t v_t = 0 \quad \text{e} \quad \langle f_s, f_s \rangle = -2\lambda^2 u_s v_s = 0,$$

se, e só se $u_t v_t = u_s v_s = 0$. Assumamos que $u_s = v_t = 0$ e $u_t \neq 0 \neq v_s$. Assim,

$$g_{12}(t, s) = \langle f_t, f_s \rangle = -2\lambda^2 u_t u_s \neq 0.$$

□

Teorema 2.20. *A imersão de $U \subset \mathbb{R}^2$ em $F(\Omega)$ dada por*

$$f(t, s) = \lambda(t, s)(2x(t, s), 2y(t, s), 1 + x^2(t, s) - y^2(t, s), -1 + x^2(t, s) - y^2(t, s)), \quad (2.31)$$

tem parâmetros isotérmicos se, e somente se a aplicação $z(t, s) = x(t, s) + jy(t, s)$ é uma função para-holomorfa ou é uma função para anti para-holomorfa de U em $\mathbb{C}'$. Isto significa: as equações de Cauchy-Riemann para-complexas

$$\begin{cases} x_t = y_s \\ x_s = y_t \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_t = -y_s \\ x_s = -y_t \end{cases} \quad (2.32)$$

se cumprem em $w = t + js \in U$, ou para os operadores derivadas parciais ∂ e $\bar{\partial}$ temos:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{w}} z(w) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial w} z(w) = 0.$$

Demonstração: Tomando $W(x, y) = (2x, 2y, 1 + x^2 - y^2, -1 + x^2 - y^2)$, temos que

$$f_t = \lambda_t W + \lambda(W_x x_t + W_y y_t) \quad \text{e} \quad f_s = \lambda_s W + \lambda(W_x x_s + W_y y_s).$$

Agora, calculemos o tensor métrico observando que $W_x = (2, 0, 2x, 2x)$ e $W_y = (0, 2, -2y, -2y)$, assim

$$\langle f_t, f_t \rangle = -4x_t^2 + 4y_t^2, \quad \langle f_s, f_s \rangle = -4x_s^2 + 4y_s^2 \quad \text{e} \quad \langle f_t, f_s \rangle = -4x_t x_s + 4y_t y_s.$$

Resolvendo o sistema

$$-4x_t^2 + 4y_t^2 = -(-4x_s^2 + 4y_s^2) \quad \text{e} \quad -4x_t x_s + 4y_t y_s = 0,$$

obtemos as fórmulas acima. Note que esse sistema é equivalente ao sistema

$$(x_t + y_s)^2 = (x_s + y_t)^2 \quad \text{e} \quad (x_t - y_s)^2 = (x_s - y_t)^2.$$

□

2.5 Uma base para o plano normal de uma imersão isotérmica em $\mathbb{R}_2^4$

Seja

$$f(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v), x_4(u, v)) \quad (2.33)$$

uma imersão isotérmica do subconjunto aberto conexo $U \subset \mathbb{C}'$ no espaço $\mathbb{R}_2^4$. Usando os operadores diferenciais para-complexos temos:

$$f_w = \mu(w)Z(w) \quad \text{tal que} \quad \langle\langle Z, Z \rangle\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle\langle f_w, f_{\bar{w}} \rangle\rangle \neq 0.$$

Agora, observemos que no cálculo da fórmula 2.23 e na definição dada pela fórmula 2.24 não usamos, de fato, o fato de que usamos nesses cálculos a álgebra real. Assim, na álgebra de Clifford $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ podemos definir:

Definição 2.21. Assumindo que $\langle Z, \bar{Z} \rangle \neq 0$ e que $Z_3 - Z_4 \neq 0$, definamos:

$$a = \frac{Z_1 + jZ_2}{Z_3 - Z_4}, \quad b = \frac{Z_1 - jZ_2}{Z_3 - Z_4} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{2}{Z_3 - Z_4}. \quad (2.34)$$

O motivo para tomar jZ_2 , deixaremos claro nas próximas fórmulas para calcular a base do fibrado normal. Temos:

$$f_w = \mu(a + b, j(a - b), 1 + ab, -1 + ab). \quad (2.35)$$

A condição $\langle\langle f_w, f_{\bar{w}} \rangle\rangle \neq 0$ também se cumpre, já que assumimos que $a \neq b$ e

$$\langle\langle f_w, f_{\bar{w}} \rangle\rangle = 2\mu\bar{\mu}(a - b)(\bar{a} - \bar{b}) \neq 0. \quad (2.36)$$

Sejam os vetores de $\mathbb{R}_2^4$

$$A = (a + \bar{a}, j(a - \bar{a}), 1 + a\bar{a}, -1 + a\bar{a}), \quad (2.37)$$

$$B = (b + \bar{b}, j(b - \bar{b}), 1 + b\bar{b}, -1 + b\bar{b}). \quad (2.38)$$

Note que $\langle A, B \rangle = -2(a - b)(\bar{a} - \bar{b})$.

Proposição 2.22. *O conjunto*

$$\left\{ \frac{1}{2}(Z + \bar{Z}), \frac{j}{2}(Z - \bar{Z}), A, B \right\} \quad (2.39)$$

é uma base do espaço $\mathbb{R}_2^4$ onde o par $\{A, B\}$ é ortogonal ao espaço $[Z]$. Além disso, A e B são vetores nulos.

Proposição 2.23. *Os números*

$$n_0 = \frac{1 + j}{2} \quad \text{e} \quad n_1 = \frac{1 - j}{2} \quad (2.40)$$

são os dois divisores de zero da álgebra $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. Note que eles são as soluções não triviais da equação $x^2 = x$ nesta álgebra. Além disso,

$$x = a + jb \quad \text{se, e somente se} \quad x = (a + b)n_0 + (a - b)n_1.$$

Se escrevemos $z = xn_0 + yn_1$ então para cada número inteiro k obtemos

$$z^k = x^k n_0 + y^k n_1.$$

Tomando series de potencia, tendríamos

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k n_0 + b_k n_1) (x^k n_0 + y^k n_1) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) n_0 + \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k y^k \right) n_1.$$

Proposição 2.24. *O conjunto*

$$\{Zn_0 + \bar{Z}n_1, Zn_0 - \bar{Z}n_1\} \quad (2.41)$$

é uma base do fibrado tangente de (U, f) composta por vetores nulos.

Dado um conjunto de dois vetores nulos linearmente independentes $\{L_1, L_2\}$ podemos definir o vetor para complexo nulo Z por

$$Z = L_1 n_0 + L_2 n_1 \quad \text{se, e somente se} \quad Z = \frac{1}{2}(L_1 + L_2) + \frac{j}{2}(L_1 - L_2). \quad (2.42)$$

2.6 Imersão de uma superfície de Lorentz na esfera nula $S_2^4(0)$

Proposição 2.25. *Toda superfície de Lorentz pode ser equipada com um atlas maximal isotrópico $\mathcal{A}$. Isto significa que a métrica é tal que $E = G = 0$ e $F \neq 0$, para toda carta deste atlas.*

Proposição 2.26. *Dado um par $(U, ds^2 = -2\lambda^2 dudv)$, onde $U \subset \mathbb{R}^2$ é um subconjunto aberto conexo, a aplicação*

$$f(u, v) = \lambda(u + v, u - v, 1 + uv, -1 + uv) \quad (2.43)$$

é uma imersão de U em $F(\Omega) \subset S_2^4(0)$ tal que

$$\langle f_u, f_u \rangle = \langle f_v, f_v \rangle = 0 \quad e \quad \langle f_u, f_v \rangle = -\lambda^2.$$

A aplicação f é uma imersão isométrica da carta (U, g_{ij}) .

Proposição 2.27. *Para a imersão $f(u, v) = \lambda(u + v, u - v, 1 + uv, -1 + uv)$ temos:*
(1) *O fibrado normal é $\{A, B\}$ onde esses campos vetoriais são os vetores nulos dados por*

$$A = (0, 0, 1, 1) \quad e \quad B = (0, 0, -1, -1).$$

(2) *A segunda forma quadrática é*

$$B(,) = \dots$$

(3) *A curvatura de Gauss é dada por*

$$K = \dots$$

(4) *A curvatura normal é $\text{rot}\gamma = 0$*

(5) *A curvatura média é $H = \dots$*

Proposição 2.28. *Seja $I^2 = (-\epsilon, \epsilon)^2$ um quadrado aberto de $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. Se (I^2, f) é uma superfície paramétrica isotérmica tipo tempo então $df_q(1, 1)$ e $df_q(1, -1)$ são vetores nulos para todo $q \in I^2$.*

Proposição 2.29. *Seja (S, g) uma superfície lorentziana isotrópica. Se $p \in V \cap W$ onde V e W são domínios de duas cartas (V, x) e (W, y) , então, o difeomorfismo*

$$\psi = y \circ x^{-1} : x(V \cap W) \rightarrow y(V \cap W),$$

é uma isometria para-isotrópica para a métrica inducida por essas cartas nos correspondentes subconjuntos abertos $x(V \cap W)$ e $y(V \cap W)$ de $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

Demonstração: Primeiro note que vetores nulos são preservados. □

Capítulo 3

Superfícies que são gráficos em $\mathbb{R}_2^4$

3.1 Definições gerais

Vamos assumir a assinatura $(-1, 1, 1, -1)$ para a métrica do espaço $\mathbb{R}_2^4$. É bem conhecido que as superfícies admitem parâmetros isotérmicos, tanto as riemannianas como as lorentzianas. Assim, se

$$f(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v), x_4(u, v))$$

é uma parametrização isotérmica, temos:

$$E = \langle f_u, f_u \rangle, \quad G = \langle f_v, f_v \rangle \quad \text{e} \quad F = \langle f_u, f_v \rangle = 0,$$

e para o caso em que $E = G > 0$ e $E = G < 0$ temos que a métrica induzida

$$ds^2 = E(\epsilon du^2 + dv^2)$$

é positiva riemanniana se $E > 0$ ou é negativa riemanniana se $E < 0$, correspondendo ao valor $\epsilon = 1$, e será lorentziana quando $\epsilon = -1$.

Proposição 3.1. *Seja $S \subset \mathbb{R}_2^4$ uma superfície riemanniana. Suponhamos que uma mesma vizinhança aberta esteja parametrizada por dois sistemas de coordenadas isotérmicos (U, f) e $(\bar{U}, \bar{f})$ de mesma orientação. A função mudança de coordenadas*

$$\Psi : \begin{cases} \bar{u} = \bar{u}(u, v) \\ \bar{v} = \bar{v}(u, v) \end{cases} \quad (3.1)$$

satisfaz as equações de Cauchy-Riemann

$$[d\Psi] = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

onde

$$a = \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \quad \text{e} \quad b = -\frac{\partial \bar{u}}{\partial v} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial u}. \quad (3.3)$$

Demonstração: Sabemos que o tensor métrico transforma-se por essa mudança de coordenadas na forma covariante dada por

$$\overline{g_{ij}} = g_{mn} \frac{\partial u^m}{\partial \overline{u}^i} \frac{\partial u^n}{\partial \overline{u}^j}.$$

Como estamos supondo que esse tensor nos dois sistemas de coordenadas está na forma isotérmica, se escrevermos a matriz de $d\Psi$ como segue

$$[d\Psi] = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

então, vamos obter o sistema de equações:

$$x^2 + y^2 = z^2 + w^2 \quad \text{e} \quad xz + yw = 0. \quad (3.4)$$

Uma solução que preserva a orientação é obtida quando $x = w = a$ e $y = -z = -b$.
□

Proposição 3.2. *Seja a variável complexa $z = u + iv$. Definimos $dz = du + idv$ e seu conjugado $d\bar{z} = du - idv$, e os dois operadores diferenciais parciais $\partial/\partial z$ e $\partial/\partial \bar{z}$ de modo que tenhamos:*

$$dz \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) = 1, \quad dz \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = 0, \quad d\bar{z} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{e} \quad d\bar{z} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = 1.$$

Resolvendo-se esse sistema linear temos:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right). \quad (3.5)$$

Definição 3.3. Em cada sistema de coordenadas de uma superfície riemanniana $S \subset \mathbb{R}_2^4$ usamos a variável complexa $(U, z = u + iv)$ e temos

$$f(z) = (x_1(z), x_2(z), x_3(z), x_4(z)),$$

com as derivadas parciais dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} - i \frac{\partial f}{\partial v} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + i \frac{\partial f}{\partial v} \right).$$

Estendemos a forma bilinear $\langle , \rangle$ para a complexificação $\mathbb{C}_2^4 = \mathbb{R}_2^4 + i\mathbb{R}_2^4$ tomando-se

$$\langle\langle X + iY, A + iB \rangle\rangle = \langle X, A \rangle - \langle Y, B \rangle + i(\langle Y, A \rangle + \langle X, B \rangle).$$

Proposição 3.4. *O sistema de coordenadas $(U, z = u + iv)$ com a parametrização $f(z) = (x_1(z), x_2(z), x_3(z), x_4(z))$ é isotérmico se, e somente se*

$$\langle\langle f_z, f_z \rangle\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle\langle f_z, f_{\bar{z}} \rangle\rangle = \frac{E}{2} \neq 0. \quad (3.6)$$

3.2 Coordenadas homogêneas

Definição 3.5. Seja $Z = X + iY$ um vetor de $\mathbb{C}_2^4$ tal que $\langle\langle Z, Z \rangle\rangle = 0$ e $\langle\langle Z, \bar{Z} \rangle\rangle \neq 0$. Para cada número complexo $\mu = \alpha + i\beta$ temos que $W = \mu Z$ é um vetor de $\mathbb{C}_2^4$, dado por

$$W = \alpha X - \beta Y + i(\beta X + \alpha Y).$$

Por definição:

$$[Z] = \{W \in \mathbb{C}_2^4 : \exists \mu \in \mathbb{C}, \mu \neq 0 \text{ t.q. } W = \mu Z\}. \quad (3.7)$$

O conjunto desses objetos acima definidos é por definição

$$Q_2^2 = \{[Z] : \langle\langle Z, Z \rangle\rangle = 0 \text{ e } \langle\langle Z, \bar{Z} \rangle\rangle \neq 0\}, \quad (3.8)$$

e é chamado de *Grassmanniano* dos planos tipo elíptico do espaço $\mathbb{R}_2^4$ positivos ou negativos.

Teorema 3.6. *Seja $Z \in \mathbb{C}_2^4$ um vetor tal que $[Z] = [Z_1, Z_2, Z_3, Z_4] \in Q_2^2$. Então, existem três números complexos μ, a e b tais que*

$$Z = \mu(a + b, a - b, 1 + ab, -1 + ab) \quad (3.9)$$

nas melhores condições. Ainda vale que

$$\langle\langle Z, \bar{Z} \rangle\rangle = 2\mu\bar{\mu}(a - \bar{a})(b - \bar{b}). \quad (3.10)$$

Demonstração: Como $\langle\langle Z, Z \rangle\rangle = -(Z_1)^2 + (Z_2)^2 + (Z_3)^2 - (Z_4)^2$, assumindo-se que $Z_3 - Z_4 \neq 0$ podemos tomar

$$\frac{Z_1 + Z_2}{Z_3 - Z_4} \frac{Z_1 - Z_2}{Z_3 - Z_4} = \frac{Z_3 + Z_4}{Z_3 - Z_4}.$$

Nessas condições definimos

$$a = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_3 - Z_4} \text{ e } b = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_3 - Z_4}, \quad (3.11)$$

e vamos obter

$$a + b = \frac{2Z_1}{Z_3 - Z_4}, \quad a - b = \frac{2Z_2}{Z_3 - Z_4}, \quad 1 + ab = \frac{2Z_3}{Z_3 - Z_4} \text{ e } -1 + ab = \frac{2Z_4}{Z_3 - Z_4}.$$

Definindo-se

$$\mu = \frac{Z_3 - Z_4}{2} \neq 0, \quad (3.12)$$

obtem-se o resultado. $\square$

Corolário 3.7. *Com pequenas variações podemos obter a representação*

$$[Z] = [a - b, a + b, 1 - ab, 1 + ab] \quad \text{com} \quad \langle\langle Z, \bar{Z} \rangle\rangle = -2\mu\bar{\mu}(a - \bar{a})(b - \bar{b}). \quad (3.13)$$

Outras variações obtêm-se tomando-se

$$\frac{Z_1 + iZ_4}{Z_2 - iZ_3} \frac{Z_1 - iZ_4}{Z_2 - iZ_3} = \frac{Z_2 + iZ_3}{Z_2 - iZ_3},$$

e definindo-se

$$x = \frac{Z_1 + iZ_4}{Z_2 - iZ_3}, \quad y = \frac{Z_1 - iZ_4}{Z_2 - iZ_3} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{Z_2 - iZ_3}{2}. \quad (3.14)$$

Cabe ainda estudar os casos em que temos $Z_3 - Z_4 = 0$ e seus correspondentes análogos.

3.3 Trocando a álgebra $\mathbb{C}$ para a álgebra $\mathbb{C}'$

Proposição 3.8. *Seja $S \subset \mathbb{R}_2^4$ uma superfície lorentziana. Suponhamos que uma mesma vizinhança aberta esteja parametrizada por dois sistemas de coordenadas pseudo-isotérmicos (U, f) e $(\bar{U}, \bar{f})$ de mesma orientação. A função mudança de coordenadas*

$$\Phi : \begin{cases} \bar{x} = \bar{x}(x, y) \\ \bar{y} = \bar{y}(x, y) \end{cases} \quad (3.15)$$

satisfaz as equações do tipo Cauchy-Riemann para a álgebra $\mathbb{C}'$

$$[d\Phi] = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

onde

$$a = \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \quad \text{e} \quad b = \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}. \quad (3.17)$$

Demonstração: Tem-se que o tensor métrico transforma-se por essa mudança de coordenadas na forma covariante dada por

$$\bar{g}_{ij} = g_{mn} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j}.$$

Como estamos supondo que esse tensor nos dois sistemas de coordenadas está na forma pseudo-isotérmica, se escrevermos a matriz de $d\Phi$ como segue

$$[d\Phi] = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \theta & \lambda \end{bmatrix}$$

então, vamos obter o sistema de equações:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \theta^2 + \lambda^2 \quad \text{e} \quad \alpha\theta + \beta\lambda = 0. \quad (3.18)$$

Uma solução que preserva a orientação é obtida quando $\alpha = \lambda = a$ e $\beta = \theta = b$. $\square$

Proposição 3.9. *Seja a variável para-complexa $w = x + jy$. Definimos $dw = dx + jdy$ e seu conjugado $d\bar{w} = dx - jdy$, e os dois operadores diferenciais parciais $\partial/\partial w$ e $\partial/\partial \bar{w}$ de modo que tenhamos:*

$$dw \left(\frac{\partial}{\partial w} \right) = 1, \quad dw \left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right) = 0, \quad d\bar{w} \left(\frac{\partial}{\partial w} \right) = 0 \quad e \quad d\bar{w} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right) = 1.$$

Resolvendo-se esse sistema linear temos:

$$\frac{\partial}{\partial w} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad e \quad \frac{\partial}{\partial \bar{w}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - j \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (3.19)$$

Definição 3.10. Em cada sistema de coordenadas de uma superfície lorentziana $S \subset \mathbb{R}_2^4$ usamos a variável para-complexa $(U, w = x + jy)$ e temos

$$f(w) = (x_1(w), x_2(w), x_3(w), x_4(w)),$$

com as derivadas parciais dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial w} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - j \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Estendemos a forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para a para-complexificação $\mathbb{C}'_2^4 = \mathbb{R}_2^4 + j\mathbb{R}_2^4$ tomando-se

$$\langle\langle X + jY, A + jB \rangle\rangle = \langle X, A \rangle + \langle Y, B \rangle + j(\langle Y, A \rangle + \langle X, B \rangle).$$

Proposição 3.11. *O sistema de coordenadas $(U, w = x + jy)$ com a parametrização $f(w) = (x_1(w), x_2(w), x_3(w), x_4(w))$ é pseudo-isotérmico se, e somente se*

$$\langle\langle f_w, f_w \rangle\rangle = 0 \quad e \quad \langle\langle f_w, f_{\bar{w}} \rangle\rangle \neq 0. \quad (3.20)$$

3.3.1 Coordenadas homogêneas

Definição 3.12. Seja $Z = X + jY$ um vetor de $\mathbb{C}'_2^4$ tal que $\langle\langle Z, Z \rangle\rangle = 0$ e $\langle\langle Z, \bar{Z} \rangle\rangle \neq 0$. Para cada número para-complexo $\mu = \alpha + j\beta$ temos que $W = \mu Z$ é um vetor de $\mathbb{C}'_2^4$, dado por

$$W = \alpha X + \beta Y + j(\beta X + \alpha Y).$$

Por definição:

$$[Z] = \left\{ W \in \mathbb{C}'_2^4 : \exists \mu \in \mathbb{C}', \mu \neq 0 \quad \text{t.q.} \quad W = \mu Z \right\}. \quad (3.21)$$

O conjunto desses objetos acima definidos é por definição

$$Q_2'^2 = \{ [Z] : \langle\langle Z, Z \rangle\rangle = 0 \quad e \quad \langle\langle Z, \bar{Z} \rangle\rangle \neq 0 \}, \quad (3.22)$$

e é chamado de *Grassmanniano* dos planos tipo hiperbólico do espaço $\mathbb{R}_2^4$.

Teorema 3.13. *Seja $Z \in \mathbb{C}_2^4$ um vetor tal que $[Z] = [Z_1, Z_2, Z_3, Z_4] \in Q_2^2$. Então, existem três números para-complexos μ, a e b tais que*

$$Z = \mu(a + b, a - b, 1 + ab, -1 + ab) \quad (3.23)$$

nas melhores condições. Ainda vale que

$$\langle\langle Z, \bar{Z} \rangle\rangle = 2\mu\bar{\mu}(a - \bar{a})(b - \bar{b}). \quad (3.24)$$

Demonstração: Como $\langle\langle Z, Z \rangle\rangle = -(Z_1)^2 + (Z_2)^2 + (Z_3)^2 - (Z_4)^2$, assumindo-se que $Z_3 - Z_4 \neq 0$ podemos tomar

$$\frac{Z_1 + Z_2}{Z_3 - Z_4} \frac{Z_1 - Z_2}{Z_3 - Z_4} = \frac{Z_3 + Z_4}{Z_3 - Z_4}.$$

Nessas condições definimos

$$a = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_3 - Z_4} \quad \text{e} \quad b = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_3 - Z_4}, \quad (3.25)$$

e vamos obter

$$a + b = \frac{2Z_1}{Z_3 - Z_4}, \quad a - b = \frac{2Z_2}{Z_3 - Z_4}, \quad 1 + ab = \frac{2Z_3}{Z_3 - Z_4} \quad \text{e} \quad -1 + ab = \frac{2Z_4}{Z_3 - Z_4}.$$

Definindo-se

$$\mu = \frac{Z_3 - Z_4}{2} \neq 0, \quad (3.26)$$

obtem-se o resultado. $\square$

Corolário 3.14. *Com pequenas variações podemos obter a representação*

$$[Z] = [a - b, a + b, 1 - ab, 1 + ab] \quad \text{com} \quad \langle\langle Z, \bar{Z} \rangle\rangle = -2\mu\bar{\mu}(a - \bar{a})(b - \bar{b}). \quad (3.27)$$

Cabe ainda estudar os casos em que temos $Z_3 - Z_4 = 0$ e seu correspondente análogo.

3.4 Um exemplo para as superfícies do tipo elíptico

Seja $\Psi(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$ uma função holomorfa no aberto, conexo e simplesmente conexo $U \subset \mathbb{R}^2$. Consideremos o gráfico de Ψ , o qual é a superfície parametrizada por

$$f(z) = (u, \varphi(u, v), \psi(u, v), v).$$

Proposição 3.15. *Nas condições acima temos*

$$f_z = \left(\frac{1}{2}, \frac{\Psi_z}{2}, -i\frac{\Psi_z}{2}, -\frac{i}{2} \right).$$

Usando a representação dada pela fórmula 3.9 temos:

$$a = i \frac{\Psi_z + 1}{\Psi_z - 1}, \quad b = i \quad e \quad \mu = -\frac{i}{4}(\Psi_z - 1).$$

Usando-se a fórmula 3.14 obtemos:

$$x = \frac{1}{\Psi_z}, \quad y = 0 \quad e \quad \mu = \frac{\Psi_z}{2}.$$

Demonstração: Temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \mu(a + b) = 1/2 \\ \mu(a - b) = \Psi_z/2 \\ \mu(1 + ab) = -i\Psi_z/2 \\ \mu(-1 + ab) = -i/2. \end{cases}$$

Resolvendo-o obtemos as fórmulas acima. Para a fórmula 3.14 temos:

$$\begin{cases} \mu(x + y) = 1/2 \\ \mu(1 + xy) = \Psi_z/2 \\ i\mu(-1 + xy) = -i\Psi_z/2 \\ i\mu(x - y) = -i/2. \end{cases}$$

□

Teorema 3.16. *Temos a fórmula 3.14 originando a seguinte representação:*

$$f_z = \mu(x + y, 1 + xy, i(-1 + xy), -i(x - y)). \quad (3.28)$$

Tomando a transformação $T(x, y) = (a, -1/b)$ vamos obter:

$$f_z = \eta(-1 + ab, -a + b, -i(a + b), -i(1 + ab)). \quad (3.29)$$

Dessa última fórmula tomamos a transformação $S(a, b) = (-a, -b)$ e temos ainda

$$f_z = \eta(-1 + ab, a - b, i(a + b), -i(1 + ab)). \quad (3.30)$$

Podemos usar a representação que quisermos, qualquer uma delas, incluindo-se as que não listamos ainda, conforme julgarmos que a que estamos usando é a mais adequada para as nossas proposições.

3.5 Um exemplo para as superfícies tipo hiperbólico

Seja $\Phi(w) = \phi(w) + i\psi(w)$ uma função para-holomorfa no aberto, conexo e simplesmente conexo $U \subset \mathbb{R}^2$. Consideremos o gráfico de Ψ , o qual é a superfície parametrizada por

$$f(w) = (u, v, \phi(u, v), \psi(u, v)).$$

Proposição 3.17. *Nas condições acima temos*

$$f_w = \left(\frac{1}{2}, \frac{j}{2}, \frac{\Phi_w}{2}, j \frac{\Phi_w}{2} \right).$$

Usando a representação dada pela fórmula 3.23 temos:

$$a = \frac{1+j}{1-j} \frac{2}{\Phi_w}, \quad b = \frac{2}{\Phi_w} \quad e \quad \mu = \frac{1-j}{4} \Phi_w. \quad (3.31)$$

Demonstração: Temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \mu(a+b) = 1/2 \\ \mu(a-b) = j/2 \\ \mu(1+ab) = \Phi_w/2 \\ \mu(-1+ab) = j\Phi_w/2. \end{cases}$$

Resolvendo-o obtemos as fórmulas acima. □

Capítulo 4

Os problemas de Björling, de Bernstein e de Plateau para gráficos isóclinos elípticos em $\mathbb{R}_2^4$

Vamos sempre supor que $U \subset \mathbb{C}$ é um aberto, conexo e simplesmente conexo, que os intervalos I são os maiores possíveis do tipo $I = (-r, r) \subset U$ e que as curvas $\alpha(t)$ e as imersões $f(u, v)$ que vamos construir são tais que

$$\alpha(0) = (0, 0, 0, 0) \quad \text{e também que} \quad f(0, 0) = (0, 0, 0, 0).$$

Seja $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. O problema de Björling que estudaremos aqui, é encontrar uma superfície S tipo espaço com curvatura média $H_S = 0$ tal que a curva α esteja contida em S e seja ou:

1. Uma linha geodésica de S , o que significa que a normal à curva α , em cada ponto, pertença ao plano normal à superfície $N_{\alpha(s)}S$ ou,
2. Uma linha assintótica de S , o que significa que a normal à curva α , em cada ponto, pertença ao plano tangente à superfície $T_{\alpha(s)}S$.

No primeiro caso, quando α é uma linha geodésica, como sua normal é ortogonal à superfície, o plano osculador

$$\text{span} [\alpha'(s), \alpha''(s)]$$

dessa curva tem que ser tipo hiperbólico. Já no segundo caso, quando a curva α é uma linha assintótica, temos

$$\text{span} [\alpha'(s), \alpha''(s)] = T_{\alpha(s)}S,$$

logo seu plano osculador tem que ser elíptico positivo ou negativo, em concordância com a superfície S ser positiva ou negativa.

4.1 Os problemas de Bernstein e de Plateau

Teorema 4.1. *Sejam $U \subseteq \mathbb{C}$ aberto, conexo e simplesmente conexo e $\Psi : U \rightarrow \mathbb{C}$, $\Psi(z) = \varphi(u, v) + i\psi(u, v)$, $z = u + iv$ uma função holomorfa. Seja a superfície gráfico dessa função,*

$$f(u, v) = (u, \phi(u, v), \psi(u, v), v).$$

A superfície $S = f(U) \subset \mathbb{R}_2^4$ tem curvatura média $H(f)(z) = 0$ para todo $z \in U$. Se a superfície S não for regradada então, não existem direções assintóticas para essa superfície.

Demonstração: Seja $\alpha(t) = f(u(t), v(t))$ uma curva tal que $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 1$. Usando a notação já definida anteriormente temos por hipótese que $\alpha'' \neq 0$. Assim,

$$\alpha'' = \left(\frac{d^2 u^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \right) D_k f + A_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} A + B_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} B,$$

será linha assintótica se, e somente se,

$$A_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = 0 \quad \text{e} \quad B_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = 0.$$

Como

$$A_{11} = -A_{22} = \frac{\phi_{uu}}{\sqrt{E}}, A_{12} = \frac{\phi_{uv}}{\sqrt{E}}, B_{11} = -B_{22} = -\frac{\phi_{uv}}{\sqrt{E}} \quad \text{e} \quad B_{12} = \frac{\phi_{uu}}{\sqrt{E}},$$

o sistema de equações acima tem solução se, e somente se, ao longo da curva $\alpha(t)$ a segunda derivada da função $\Phi(w)$ se anula, isto é,

$$\Phi''(w(t)) = 0 \quad (\forall t \in \text{dom}(\alpha)).$$

Notamos que se essas matrizes $[A_{ij}]$ e $[B_{ij}]$ não são matrizes nulas, elas são invertíveis, e resulta do fato de Φ'' ser uma função holomorfa que se anula ao longo de uma curva que $\Phi''(w) = 0$ em todo aberto U . Resulta que S é um aberto de um plano. $\square$

No espaço $\mathbb{R}^4$ os gráficos dos polinômios complexos são superfícies isóclinas e minimais, livres de singularidades. Em contraste, em $\mathbb{R}_2^4$ temos a seguinte versão do famoso teorema de Bernstein:

Teorema 4.2 (Bernstein). *Se a superfície gráfico de uma função inteira*

$$\Psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

é uma superfície isóclina, então essa função é da forma

$$\Psi(z) = az + b \quad \text{para constantes } a, b \in \mathbb{C}.$$

Demonstração: Seja $f(z) = (u, \phi(u, v), \psi(u, v), v)$ o gráfico de Ψ . Temos que, o tensor métrico (no caso positivo) é dado por

$$ds^2 = (-1 + |\Psi'|^2)(du^2 + dv^2).$$

Assim, se não existem singularidades nessa superfície temos que

$$|\Psi'(z)|^2 > 1$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Logo, a função holomorfa Ψ' omite todos os pontos do disco unitário fechado, portanto omite mais de um ponto. Então, do pequeno teorema de Picard, a função Ψ' é constante. Analogamente para o caso da métrica ser negativa. $\square$

Observação 4.3. Seja $\Psi = \Psi(z)$ uma função holomorfa num aberto, conexo e simplesmente conexo $U \subseteq \mathbb{C}$. A matriz da diferencial dessa função num ponto $z_0 \in U$ tem a seguinte forma:

$$[d\Psi(z_0)] = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

onde se $\Psi(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$ temos que $a = \varphi_u(z_0) = \psi_v(z_0)$ e $b = -\varphi_v(z_0) = \psi_u(z_0)$. Se essa matriz não é a matriz nula, ela tem inversa, e segue do teorema da função inversa do Cálculo de várias variáveis reais, que existe uma função $z = z(\Psi)$ que é a inversa da função dada, e de mesma classe $C^\infty(W)$, ao redor do ponto $\Psi_0 = \Psi(z_0)$. A matriz inversa tem a forma:

$$[dz(\Psi_0)] = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Portanto, essa única inversa é holomorfa ao redor do ponto Ψ_0 .

Relembramos ainda que os zeros de uma função holomorfa são os pontos isolados no seu domínio $U \subset \mathbb{C}$. Portanto o conjunto dos zeros de uma função holomorfa é enumerável.

Teorema 4.4 (Bernstein para gráficos generalizados). *Seja S uma superfície tipo espaço, isóclina e com curvatura média $H_S = 0$. Se S é o gráfico generalizado das duas funções inteiras*

$$Z, \Psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C},$$

então S é congruente a um plano.

Demonstração: Seja

$$f(z) = \left(\frac{Z(z) + \overline{Z(z)}}{2}, \frac{\Psi(z) + \overline{\Psi(z)}}{2}, \frac{\Psi(z) - \overline{\Psi(z)}}{2i}, \frac{Z(z) - \overline{Z(z)}}{2i} \right)$$

o gráfico de Z e Ψ . Tem-se que:

$$E = -|Z'(z)|^2 + |\Psi'(z)|^2 > 0 \quad \text{ou} \quad |Z'(z)| < |\Psi'(z)|.$$

Logo, a função holomorfa $\Psi'(z)$ não tem zeros, pois $|Z'(z)| \geq 0$. Assim, temos a função inteira

$$h(z) = \frac{Z'(z)}{\Psi'(z)} \quad \text{tal que} \quad |h(z)| < 1.$$

Do teorema de Liouville, segue-se que $h(z) = c, \forall z \in \mathbb{C}$ onde c é constante. Segue de $Z'(z) = c\Psi'(z)$ que $Z(z) = c\Psi(z) + d$ para uma constante d . Localmente, temos a inversa $z = z(\Psi)$, assim obtemos $Z(\Psi) = c\Psi + d$. Portanto, ao reparametrizar a superfície para a forma de gráfico, localmente temos um aberto de um plano. Por conexidade segue-se que globalmente temos um plano. $\square$

Teorema 4.5. *Se a projeção de uma superfície elíptica $S \subset \mathbb{R}_2^4$ no plano π_{23} é todo esse plano, e seu vetor curvatura média $H_S = 0$, então essa superfície S é o gráfico de uma função inteira do plano complexo $\mathbb{C}$, portanto ele é um plano isóclino (relativo ao plano acima).*

Demonstração: Seja (U, f) uma vizinhança isotérmica dessa superfície. Suponha que ela é positiva. Tomemos

$$f(u, v) = (\phi(u, v), x(u, v), y(u, v), \psi(u, v)).$$

Vamos supor que $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$. Temos $E = G$ e $F = 0$ onde

$$E = x_u^2 + y_u^2 - \phi_u^2 - \psi_u^2, \quad G = x_v^2 + y_v^2 - \phi_v^2 - \psi_v^2 \quad \text{e} \quad F = x_u x_v + y_u y_v - \phi_u \phi_v - \psi_u \psi_v.$$

Assim, temos o sistema

$$\begin{cases} (x_u^2 + y_u^2) - (x_v^2 + y_v^2) = (\phi_u^2 + \psi_u^2) - (\phi_v^2 + \psi_v^2) \\ x_u x_v + y_u y_v = \phi_u \phi_v + \psi_u \psi_v. \end{cases}$$

Por outro lado, como essa superfície é maximal, cada coordenada de $f(u, v)$ é uma função harmônica. Ou ainda, cada coordenada de f_w é uma função holomorfa. Para a projeção no plano π_{23} temos a função harmônica $z = x + iy$ tal que z_w é uma função holomorfa. Temos,

$$z_w = x_w + iy_w = \frac{1}{2}((x_u - ix_v) + i(y_u - iy_v)).$$

Assim, podemos localmente inverter a função harmônica $z = z(w)$ obtendo uma função $w = w(z)$ que escrevemos na forma:

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y). \end{cases}$$

Sua derivada é a função

$$w_z = w_x + iw_y = \frac{1}{z_w(w(z))},$$

pelo teorema da função inversa. Na forma matricial temos

$$[dw_z][dz_{w(z)}] = [dw_z] \begin{bmatrix} \Re(z_w) & \Im(z_w) \\ -\Im(z_w) & \Re(z_w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

assim, a matriz $[dw_z]$ tem a mesma forma

$$\begin{bmatrix} \Re(w_z) & \Im(w_z) \\ -\Im(w_z) & \Re(w_z) \end{bmatrix}.$$

Por tanto, a reparametrização dessa vizinhança

$$g(x, y) = (\phi(u(x, y), v(x, y)), x, y, \psi(u(x, y), v(x, y)))$$

também é uma imersão harmônica, e ainda, essa imersão é isotérmica. Por tanto, a superfície resultante é isóclina e maximal. Do teorema de Bernstein para gráficos como ela é inteira, essa superfície é um plano. $\square$

Vamos considerar o nosso exemplo mais simples de superfícies isóclinas positivas:

Exemplo 4.6. Construção de Ciclos.

Definição 4.7. Um ciclo é uma curva de Jordan $\mathcal{C}$ em $\mathbb{R}_2^4$ cujas duas projeções

$$pr_{14}(\mathcal{C}) \quad \text{e} \quad pr_{23}(\mathcal{C})$$

ainda são curvas simples e fechadas desses dois planos $span[e_1, e_4]$ e $span[e_2, e_3]$, respectivamente.

As várias curvas obtidas a seguir são ciclos.

Seja a imersão, para $z = (u, v) \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z\bar{z} > 1\}$:

$$f(u, v) = (u, (u^2 - v^2)/2, uv, v).$$

Façamos, $u = r \cos \theta$ e $v = r \sin \theta$. Temos a curva $\alpha(\theta)$, onde $r > 1$, dada por

$$\alpha(\theta) = (r \cos \theta, (r^2 \cos 2\theta)/2, (r^2 \sin 2\theta)/2, r \sin \theta).$$

Temos

$$\alpha'(\theta) = (-r \sin \theta, -r^2 \sin 2\theta, r^2 \cos 2\theta, r \cos \theta) \quad \text{e} \quad \langle \alpha', \alpha' \rangle = r^2(r^2 - 1).$$

A fronteira de singularidades ocorre na curva correspondente a tomarmos $r = 1$, e nesse caso temos que $\beta = f(\cos \theta, \sin \theta)$ é uma curva nula do Toro Lorentziano flat

$$X(x, y) = (\cos x, \cos y, \sin y, \sin x),$$

contido na esfera nula $S_2^3(0)$. A nossa fronteira de singularidades corresponde a $\beta(\theta) = X(\theta, 2\theta)$.

Consideremos agora a função $\Phi(w) = w^n/n!$ para $n = 2, 3, \dots$. Em coordenadas polares temos que:

$$w^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)/n!$$

e assim, para o gráfico dessa função e para a curva correspondente temos

$$f(re^{i\theta}) = \left(r \cos \theta, \frac{r^n}{n!} \cos n\theta, \frac{r^n}{n!} \sin n\theta, r \sin \theta \right),$$

para r_0 fixado temos:

$$\alpha(\theta) = \left(r_0 \cos \theta, \frac{r_0^n}{n!} \cos n\theta, \frac{r_0^n}{n!} \sin n\theta, r_0 \sin \theta \right).$$

Agora, suponhamos que

$$\Phi(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!} w^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta),$$

assumindo que $c_n = \Phi^{(n)}(0)/n! \in \mathbb{R}$ convergindo em todo o plano complexo $\mathbb{C}$. A correspondente curva é dada por :

$$\alpha(\theta) = r(\cos \theta, 0, 0, \sin \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n (0, \cos n\theta, \sin n\theta, 0).$$

Finalmente, quando $c_n = \Phi^{(n)}(0)/n! \in \mathbb{C}$, escrevemos na forma polar e temos $c_n = \rho_n e^{i\xi_n}$ e a série fica na forma polar

$$\Phi(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n r^n (\cos(n\theta + \xi_n) + i \sin(n\theta + \xi_n)).$$

Dadas uma curva analítica real $w(t) = (u(t), v(t))$ e uma superfície isóclina positiva

$$f(w) = \left(\frac{w + \bar{w}}{2}, \frac{\Phi(w) + \overline{\Phi(w)}}{2}, \frac{\Phi(w) - \overline{\Phi(w)}}{2i}, \frac{w - \bar{w}}{2i} \right),$$

temos a curva analítica real $\alpha(t) = f(w(t))$. Podemos olhar outra curva em questão ao escrever a imersão f na forma:

$$f(w) = \left(\frac{w + \bar{w}}{2}, 0, 0, \frac{w - \bar{w}}{2i} \right) + f(w) = \left(0, \frac{\Phi(w) + \overline{\Phi(w)}}{2}, \frac{\Phi(w) - \overline{\Phi(w)}}{2i}, 0 \right).$$

Assim, escrevemos uma curva analítica real $\alpha : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ com tangente positiva na forma

$$\alpha_{14}(t) = (x(t), 0, 0, y(t)), \quad \alpha_{23}(t) = (0, \eta(t), \xi(t), 0) \quad \text{e} \quad \alpha(t) = \alpha_{14}(t) + \alpha_{23}(t).$$

4.1.1 Equação dos gráficos minimais

Teorema 4.8. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ uma imersão tipo gráfico, com vetor curvatura média $H_f(w) = 0$ para todo $w = u + iv \in U$, onde supomos que*

$$f(u, v) = (u, \phi(u, v), \psi(u, v), v) \quad \text{com} \quad ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Então, a função complexa $\Phi(w) = \phi(w) + i\psi(w)$ obedece a seguinte equação

$$G\Phi_{uu} - 2F\Phi_{uv} + E\Phi_{vv} = 0.$$

Demonstração:

Corolário 4.9. *Observemos que somente usamos que $EG - F^2 \neq 0$. Por tanto, a equação acima vale para superfícies tipo elípticas (tipo espaço) positivas e negativas, e para as superfícies tipo hiperbólicas (tipo tempo).*

Corolário 4.10. *Para toda função holomorfa $\Phi = \phi + i\psi$, como $E = G = 1 - |\Phi'|^2$ e $F = 0$, bem como $\nabla\Phi = 0$, temos que essa classe de funções obedecem a equação dos gráfico minimais.*

Corolário 4.11. *Explicitamente o sistema anterior em $\mathbb{R}_2^4$, para as superfícies tipo elípticas, é:*

$$\begin{cases} (-1 + (\phi_v)^2 + (\psi_v)^2)\phi_{uu} - 2(\phi_u\psi_u + \phi_v\psi_v)\phi_{uv} + (-1 + (\phi_u)^2 + (\psi_u)^2)\phi_{vv} = 0 \\ (-1 + (\phi_v)^2 + (\psi_v)^2)\psi_{uu} - 2(\phi_u\psi_u + \phi_v\psi_v)\psi_{uv} + (-1 + (\phi_u)^2 + (\psi_u)^2)\psi_{vv} = 0. \end{cases}$$

Para o próximo resultado iremos estender separadamente cada uma dessas curvas para o plano complexo e definir o gráfico generalizado que sempre resulta em uma superfície isóclina, positiva ou negativa.

Teorema 4.12 (Plateau para gráficos). *Para cada curva analítica real $\alpha : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ com tangente positiva na forma*

$$\alpha(t) = (x(t), \eta(t), \xi(t), y(t))$$

existe uma superfície isóclina

$$f(w) = \left(\frac{Z(w) + \overline{Z(w)}}{2}, \frac{\Phi(w) + \overline{\Phi(w)}}{2}, \frac{\Phi(w) - \overline{\Phi(w)}}{2i}, \frac{Z(w) - \overline{Z(w)}}{2i} \right),$$

tal que $f(t, 0) = \alpha(t), \forall t \in (-r, r)$. Além do mais, essa superfície é a única extensão na forma de gráfico generalizado da curva dada.

Demonstração: Dada a curva analítica real $z(t) = x(t) + iy(t)$ definimos a seguinte função $Z(w)$:

$$Z(w) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n)(u + iv)^n \quad \text{para} \quad z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n)t^n.$$

Assim, $Z(t, 0) = z(t)$ em todo intervalo ao redor de $t = 0$ onde a série de Taylor converge. Do mesmo modo temos

$$\Phi(w) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n + id_n)(u + iv)^n \quad \text{para} \quad \eta(t) + i\xi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n + id_n)t^n.$$

Tomamos

$$f(w) = (\Re(Z(w)), \Re(\Phi(w)), \Im(\Phi(w)), \Im(Z(w))).$$

A unicidade segue por contradição. Supondo, por absurdo, que Z_1 e Z_2 são duas extensões de $z(t)$ temos que $Z_1(t, 0) - Z_2(t, 0) = 0$ para todo $t \in (-r, r)$. Como são funções holomorfas coincidindo em um intervalo, elas coincidem, isto é: $Z_1(w) - Z_2(w) = 0$, pois seus zeros não são isolados. $\square$

4.2 O problema de Björling em $\mathbb{R}_2^4$ para superfícies tipo espaço

Problema: Dada uma curva analítica real e positiva

$$\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)) \quad \text{satisfazendo} \quad \langle \alpha', \alpha' \rangle = 1$$

e, dada uma família de planos elípticos negativos ao longo dessa curva com bases ortonormais

$$\pi(t) = \text{span} [\nu(t), \mu(t)]$$

tal que cada componente de cada um dos seus vetores sejam funções analíticas reais e satisfazem

$$\langle \alpha'(t), \nu(t) \rangle = 0 = \langle \alpha'(t), \mu(t) \rangle,$$

construir uma superfície elíptica positiva $S \subset \mathbb{R}_2^4$ com curvatura média zero tal que

$$\{\alpha(t) : t \in I\} \subset S \quad \text{com plano normal} \quad N_{\alpha(t)}S = \pi(t) \quad (\forall t \in I).$$

Se $\alpha''(t) \in \text{span} [\nu(t), \mu(t)]$ a curva α será uma linha geodésica dessa superfície S e nesse caso o plano osculador $\text{span} [\alpha', \alpha'']$ dessa curva é tipo Lorentz ou hiperbólico.

Lema 4.13. *Seja $\{u, m, n\}$ um conjunto ortonormal de vetores de $\mathbb{R}_2^4$ tal que u é positivo e os outros dois m e n são negativos. Então existe um único vetor unitário e positivo $v \in \mathbb{R}_2^4$ tal que nas duas ordens a seguir*

$$\{u, m, n, v\} \quad \text{ou} \quad \{m, u, v, n\}$$

tem-se uma base ortonormal com a mesma orientação da base canônica de $\mathbb{R}_2^4$.

Demonstração: Seja

$$\Omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$$

a forma de volume de $\mathbb{R}_2^4$. Relembramos que $\Omega(e_1, e_2, e_3, e_4) = 1$, pois $dx_i(e_j) = \delta_{ij}$. Defina o vetor v pela identidade abaixo:

$$(\forall x \in \mathbb{R}_2^4)(\exists v \in \mathbb{R}_2^4) \quad \text{tal que} \quad \langle v, x \rangle = -\Omega(u, m, n, x).$$

Para efeito de cálculos com produtos exteriores de três vetores usaremos o determinante simbólico:

$$v = u \wedge m \wedge n = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 & -e_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{vmatrix} = -\Delta_{234}e_1 - \Delta_{134}e_2 + \Delta_{124}e_3 + \Delta_{123}e_4,$$

com o uso da regra de Laplace aplicada na primeira linha. $\square$

Lema 4.14 (Fórmula de Schwarz). *Seja*

$$\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)) \quad \text{satisfazendo} \quad \langle \alpha', \alpha' \rangle = 1,$$

uma curva analítica real e positiva cujo domínio é um intervalo I centrado na origem ($0 \in I \subset \mathbb{R}$).

Para uma família dada de planos elípticos negativos ao longo dessa curva com bases ortonormais $\pi(t) = \text{span}[\nu(t), \mu(t)]$, onde cada componente de cada um dos seus vetores sejam funções analíticas reais, sejam:

$$c(w) = (x_1(w), x_2(w), x_3(w), x_4(w))$$

a única extensão analítica dessa curva e

$$p(w) = (\alpha' \wedge \nu \wedge \mu)(w)$$

a correspondente extensão analítica do vetor $p(t) = \alpha'(t) \wedge \nu(t) \wedge \mu(t)$, num aberto conexo e simplesmente conexo $U \subset \mathbb{C}$, contendo um sub-intervalo $\{0\} \times (-r, r) \subset U \cap (\{0\} \times I)$.

Definimos a seguinte função de U em $\mathbb{R}_2^4$:

$$f(w) = 2\Re \left(\int_0^w (c'(\xi) - ip(\xi)) d\xi \right). \quad (4.1)$$

Assim, temos os seguintes fatos:

- (1) *As quatro componentes da função f são funções harmônicas em U .*
- (2) *$f(t, 0) = \alpha(t)$ em todo o intervalo $(-r, r)$.*
- (3) *$\langle\langle f_w, \overline{f_w} \rangle\rangle = 0$.*
- (4) *$\langle\langle f_w, f_w \rangle\rangle > 0$.*

Demonstração: (1) Segue imediatamente do fato de $f(w)$ ser a parte real de um campo de vetores complexos cujas componentes são funções holomorfas.

(2) Segue de $f(t, 0) = 2\Re \left(\frac{1}{2}c(t, 0) - i \int_0^t p(\xi)d\xi \right) = \alpha(t)$ pois a integral

$$\int_0^t (\alpha' \wedge \nu \wedge \mu)(\xi)d\xi$$

é uma função a valores reais.

(3) Derivando a fórmula 4.1 vamos obter $f_w(w) = c'(w) + ip(w)$. Assim, temos

$$f_w(t, 0) = \alpha'(t) - i(\alpha'(t) \wedge \nu(t) \wedge \mu(t)).$$

Tomemos as extensões analíticas $m(w)$ e $n(w)$ dos campos $\nu(t)$ e $\mu(t)$, respectivamente. Estendendo o produto exterior do lema anterior para o caso complexo:

$$c'(w) \wedge m(w) \wedge n(w) = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 & -e_4 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 & c'_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{vmatrix},$$

temos que

$$p(w) = c'(w) \wedge m(w) \wedge n(w).$$

Logo,

$$\langle\langle c'(w), p(w) \rangle\rangle = \langle\langle c'(w), c'(w) \wedge m(w) \wedge n(w) \rangle\rangle = 0.$$

Da forma como $\nu(t)$ e $\mu(t)$ foram tomados tem-se:

$$\langle\langle f_w(t, 0), f_w(t, 0) \rangle\rangle = \langle\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle\rangle - \langle\langle \alpha'(t) \wedge \nu(t) \wedge \mu(t), \alpha'(t) \wedge \nu(t) \wedge \mu(t) \rangle\rangle = 0.$$

Como a forma bilinear $\langle\langle, \rangle\rangle$ estendida ao campo complexo preserva holomorfia no sentido:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \langle\langle V(w), W(w) \rangle\rangle &= \langle\langle V_{\bar{w}}(w), W(w) \rangle\rangle + \langle\langle V(w), W_{\bar{w}}(w) \rangle\rangle \\ &= \langle\langle 0, W(w) \rangle\rangle + \langle\langle V(w), 0 \rangle\rangle = 0 \end{aligned}$$

para campos de coordenadas holomorfas em U , segue que

$$\langle\langle f_w(w), f_w(w) \rangle\rangle = \langle\langle c'(w), c'(w) \rangle\rangle - \langle\langle p(w), p(w) \rangle\rangle = 0, \quad (4.2)$$

pois cada uma das parcelas acima é a única extensão holomórfica das respectivas parcelas que seguem:

$$\langle\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle\rangle \quad \text{e} \quad \langle\langle \alpha'(t) \wedge \nu(t) \wedge \mu(t), \alpha'(t) \wedge \nu(t) \wedge \mu(t) \rangle\rangle.$$

(4) Como, $f(w)$ é um vetor de $\mathbb{R}_2^4$ para cada $w \in U$, podemos escrever $2f_w = f_u - if_v$. A fórmula 4.2 está dizendo que $\langle f_u, f_u \rangle = \langle f_v, f_v \rangle$ e $\langle f_u, f_v \rangle = 0$, para um aberto conexo ao redor de $\alpha(0)$. Temos assim que:

$$\langle \langle f_w(w), \overline{f_w(w)} \rangle \rangle \in \mathbb{R},$$

portanto:

$$\langle \langle f_w(w), \overline{f_w(w)} \rangle \rangle = \langle \langle f_w(w), f_{\overline{w}}(w) \rangle \rangle = |c'(w)|^2 + |p(w)|^2 > 0,$$

no maior aberto conexo e simplesmente conexo possível $U \subset \mathbb{C}$. $\square$

Observação 4.15. As extensões que tomamos das funções do lema anterior são garantidas pela suposição das funções serem analíticas real, e a unicidade de ditas extensões são consequência do teorema da identidade para funções holomorfas.

Teorema 4.16 (Björlling para linhas geodésicas). *Para cada curva analítica com tangente positiva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ e plano osculador hiperbólico existe uma superfície minimal positiva $S \subset \mathbb{R}_2^4$, isto é: $H_S = 0$, tal que $\alpha(t)$ é uma linha geodésica de S .*

Demonstração: Para isto, escolha um campo unitário e negativo $V(t)$ de modo que $V(t) \in \text{span} [\alpha'(t), \alpha''(t)]^\perp$ para cada $t \in I$. Tome

$$\alpha''(t) = \kappa(t)\nu(t) \quad \text{e} \quad \mu(t) = V(t)$$

e segue o resultado do lema 4.14 acima. $\square$

Corolário 4.17 (Björlling para linhas assintóticas). *Para cada curva elíptica positiva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ existem superfícies minimais $S \subset \mathbb{R}_2^4$, isto é: $H_S = 0$, que passam por essa curva, que é uma linha assintótica de S .*

Ao longo da curva $\alpha(t)$, o plano tangente à superfície S é

$$T_{\alpha(t)}S = \text{span} [\alpha'(t), \alpha''(t)].$$

Do Teorema 4.1, essas superfícies não podem serem gráficos isóclinos.

Demonstração: Aplicamos o Lema 4.14 para $\text{span} [\nu(t), \mu(t)] = (T_{\alpha(t)}S)^\perp$. $\square$

Observação 4.18. Suponhamos que $f(u, v) = (u, \phi(u, v), \psi(u, v), v)$ seja uma superfície isóclina, com a curva coordenada $\alpha(u) = f(u, 0)$ sendo uma linha geodésica, parametrizada pelo comprimento de arco. Aplicando a fórmula

$$\alpha'' = \left(\frac{d^2 u^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \right) D_k f + A_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} A + B_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} B,$$

a essa condição vamos obter

$$\Gamma_{11}^1(u, 0) = \frac{E_u(u, 0)}{2E(u, 0)} = 0.$$

Assim como consequência temos $E_u(u, 0) = 0$. Para a função $\Phi'(u, v) = \sqrt{2}e^{iw} = \sqrt{2}e^{-v}(\cos u + i \sin u)$ temos $\Phi'(u, 0) = \sqrt{2}(\cos u + i \sin u)$ cujo módulo é $|\Phi'(u, 0)| = \sqrt{2}$.

Falta fazer todas as contas como exemplo para o gráfico de

$$\Phi(w) = -i\sqrt{2}e^{iw} \text{ portanto } E(u, v) = -1 + 2e^{-v} \text{ e } E_u(u, v) = 0.$$

Também resolver o problema de Björling para uma linha geodésica com a curva

$$\alpha(u) = (u, \phi(u, 0), \psi(u, 0), 0).$$

Referências Bibliográficas

- [1] R. Aiyama, K. Akutagawa, *Kenmotsu type representation formula for surfaces with prescribed mean curvature in the 3-sphere*, Tohoku Math. J. (2) 52 (2000), no. 1, 95-105.
- [2] R. Aiyama, K. Akutagawa, *Kenmotsu type representation formula for surfaces with prescribed mean curvature in the hyperbolic 3-space*, J. Math. Soc. Japan 52 (2000), no. 4, 877-898.
- [3] R. Aiyama, K. Akutagawa, *Kenmotsu-Bryant type representation formulas for constant mean curvature surfaces in $\mathbb{H}^3(-c^2)$ and $\mathbb{S}_1^3(c^2)$* , Ann. Global Anal. Geom. 17 (1999), no. 1, 49-75.
- [4] K. Akutagawa, S. Nishikawa, *The Gauss map and spacelike surfaces with prescribed mean curvature in Minkowski 3-space*, Tohoku Math. J. 42 (1990), 67-82.
- [5] J. A. Aledo, J. A. Gálvez, J. M. Espinar *Timelike surfaces in the Lorentz-Minkowski space with prescribed Gaussian curvature and Gauss map*, Journal of Geometry and Physics 56 (2006), 1357-1369.
- [6] A. C. Asperti, J. A. M. Vilhena, *Spacelike surfaces in $\mathbb{L}^4$ with prescribed Gauss map and nonzero mean curvature*, Mat. Contemp. 33 (2007), 55-83.
- [7] A. C. Asperti, J. A. M. Vilhena, *Spacelike surfaces in $\mathbb{L}^4$ with degenerate Gauss map*, Results Math. 60 (2011), no. 1-4, 185-211.
- [8] R. L. Bishop, S. I. Goldberg, *Tensor Analysis on Manifolds*, Dover Publications Inc., New York, 1980.
- [9] M. Dajczer, *Submanifolds and Isometric Immersions*, Mathematics Lecture Series 13, Publish or Perish Inc., Houston, 1990.
- [10] K. Kenmotsu, *Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature*, Math. Ann. 245 (1979), 89-99.
- [11] M. A. Magid, *Timelike surfaces in the Lorentz 3-space with prescribed mean curvature and Gauss map*, Hokkaido Math. J. 20 (1991), 447-464.

- [12] B. O'Neill, *Elementary Differential Geometry*, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2006.
- [13] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press Inc., New York, 1983.
- [14] B. Schutz, *A First Course in GENERAL RELATIVITY*, Cambridge University Press, New York, 2009.
- [15] T. Weinstein, *An Introduction to Lorentz Surfaces*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, New York, 1996.
- [16] C. Xifang, T. Chou, *Integrable system and spacelike surfaces with prescribed mean curvature in Minkowski 3-space*, Acta Math. Sci. (English Ed.) 19 (1999), no. 1, 91-96.