Topologias enumeravelmente compactas em grupos abelianos de não torção via ultrafiltros seletivos

Ana Carolina Boero

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE DOUTOR
EM
CIÊNCIAS

Área de Concentração: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Artur Hideyuki Tomita

Durante a elaboração deste trabalho, a autora recebeu apoio financeiro da CAPES e do CNPq.

– São Paulo, 11 de março de 2011 –

Topologias enumeravelmente compactas em grupos abelianos de não torção via ultrafiltros seletivos

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Ana Carolina Boero e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 11 de março de 2011.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Artur Hideyuki Tomita (orientador)	IME-USP
Profa. Dra. Ofelia Teresa Alas	IME-USP
Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov	UNICAMP
Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui	UNICAMP
Profa. Dra. Irene Castro Pereira	UFPA

Aos meus pais e irmão.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Artur Hideyuki Tomita, pelo incentivo constante, por sua paciência com minhas faltas e pelos valiosos ensinamentos que me dispensou. Dito de outro modo: Artur, muito obrigada por acreditar em mim, por dedicar tanto tempo a este projeto e por me estimular a ter diversas experiências acadêmicas ao longo do doutorado. Obrigada por escutar minhas idéias e por me dar liberdade de pensamento e escrita. Obrigada por compreender meus momentos de angústia e euforia e, mais do que isso, obrigada por estar presente quando eu mais precisei. Principalmente, obrigada por partilhar sua experiência e seu conhecimento com generosidade.

Agradeço à banca examinadora pelos comentários e sugestões. Particularmente, agradeço aos especialistas de outras áreas que se dispuseram a participar da comissão julgadora desta tese de doutorado, enriquecendo-a com seus apontamentos e observações.

Agradeço ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo pelas diversas oportunidades de me desenvolver profissionalmente. Tendo recebido (gratuitamente) tanto, não posso fazer outra coisa senão exercer a minha profissão com ética e excelência, em prol da sociedade brasileira. Agradeço também à CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Agradeço aos meus amigos e colegas que, direta ou indiretamente, contribuíram com este trabalho. Em particular, agradeço ao Armando pelas dicas de LaTeX e ao Marquinhos, por ter me apresentado o Geogebra.

Agradeço ao meu namorado, companheiro e parceiro de todas as horas por partilhar a vida comigo; por me permitir amar e ser amada, guiando-me pelos caminhos em que se encontra a

felicidade.

Agradeço à minha família pelos exemplos de conduta e superação que me inspiram desde a mais tenra idade. Em especial, agradeço aos meus pais e irmão pelo apoio emocional, moral e financeiro, pelo lar que construímos e pelo amor que nos une.

Sobretudo, agradeço a Deus por todas as bênçãos derramadas sobre minha vida.

Resumo

Assumindo a existência de $\mathfrak{c}$ ultrafiltros seletivos dois a dois incomparáveis (segundo a ordem de Rudin-Keisler) provamos que o grupo abeliano livre de cardinalidade $\mathfrak{c}$ admite uma topologia de grupo enumeravelmente compacta com uma seqüência não trivial convergente. Sob as mesmas hipóteses, mostramos que um grupo topológico abeliano quase livre de torção $(G, +, \tau)$ com $|G| = |\tau| = \mathfrak{c}$ admite uma topologia independente de τ que o torna um grupo topológico e caracterizamos algebricamente os grupos abelianos de não torção que têm cardinalidade $\mathfrak{c}$ e que admitem uma topologia de grupo enumeravelmente compacta (sem seqüências não triviais convergentes). Provamos, ainda, que o grupo abeliano livre de cardinalidade $\mathfrak{c}$ admite uma topologia de grupo que torna seu quadrado enumeravelmente compacto e construímos um semigrupo de Wallace cujo quadrado é, também, enumeravelmente compacto. Por fim, assumindo a existência de $2^{\mathfrak{c}}$ ultrafiltros seletivos, garantimos que se um grupo abeliano de não torção e cardinalidade $\mathfrak{c}$ admite uma topologia de grupo enumeravelmente compacta, então o mesmo admite $2^{\mathfrak{c}}$ topologias de grupo enumeravelmente compactas (duas a duas não homeomorfas).

Palavras-chave: compacidade enumerável, grupos topológicos, ultrafiltros seletivos

Abstract

Assuming the existence of $\mathfrak{c}$ pairwise incomparable selective ultrafilters (according to the Rudin-Keisler ordering) we prove that the free abelian group of cardinality $\mathfrak{c}$ admits a countably compact group topology that contains a non-trivial convergent sequence. Under the same hypothesis, we show that an abelian almost torsion-free topological group $(G, +, \tau)$ with $|G| = |\tau| = \mathfrak{c}$ admits a group topology independent of τ and we algebraically characterize the non-torsion abelian groups of cardinality $\mathfrak{c}$ which admit a countably compact group topology (without non-trivial convergent sequences). We also prove that the free abelian group of cardinality $\mathfrak{c}$ admits a group topology that makes its square countably compact and we construct a Wallace's semigroup whose square is countably compact. Finally, assuming the existence of $2^{\mathfrak{c}}$ selective ultrafilters, we ensure that if a non-torsion abelian group of cardinality $\mathfrak{c}$ admits a countably compact group topology, then it admits $2^{\mathfrak{c}}$ (pairwise non-homeomorphic) countably compact group topologies.

Keywords: countable compactness, topological groups, selective ultrafilters

Sumário

Introdução **1**

1 Definições e resultados preliminares **5**

1.1 Álgebra 5

1.2 Topologia 8

1.3 Grupos topológicos 10

1.4 Teoria dos conjuntos 11

1.5 Ultrafiltros seletivos e p-limites 12

2 Uma topologia enumeravelmente compacta com uma seqüência não trivial convergente no grupo abeliano livre de cardinalidade $\mathfrak{c}$ que o torna um grupo topológico **15**

2.1 Uma escolha adequada de seqüências 16

2.2 Construindo homomorfismos de grupos 19

2.3 Explicitando a topologia 27

3 Uma topologia de grupo enumeravelmente compacta sem seqüências não triviais convergentes na reta real **29**

3.1 Uma escolha adequada de seqüências 29

3.2 Construindo homomorfismos de grupos 32

3.3 Explicitando a topologia 45

4 Grupos abelianos quase livres de torção que têm cardinalidade $\mathfrak{c}$: topologias de grupo enumeravelmente compactas sem seqüências não triviais convergentes e topologias independentes 49

4.1 Uma escolha adequada de seqüências 50
4.2 Construindo homomorfismos de grupos 55
4.3 Explicitando a topologia 69
4.4 Topologias independentes 71

5 Caracterização algébrica dos grupos abelianos de não torção que têm cardinalidade $\mathfrak{c}$ e que admitem uma topologia de grupo enumeravelmente compacta 75

5.1 Selecionando candidatos a pontos de acumulação 76
5.2 Uma escolha adequada de seqüências 81
5.3 Construindo homomorfismos de grupos 88
5.4 Explicitando a topologia 104
5.5 Caracterização algébrica dos grupos abelianos de não torção que têm cardinalidade $\mathfrak{c}$ e que admitem uma topologia de grupo enumeravelmente compacta 106
5.6 Aumentando o peso do grupo 107

6 Sobre o número de topologias de grupo enumeravelmente compactas que um grupo abeliano de não torção e cardinalidade $\mathfrak{c}$ admite 109

6.1 O invariante topológico $\mathcal{F}$ 109
6.2 Recordando a notação adotada no capítulo 5 111
6.3 A construção de uma nova topologia 113

7 Construindo uma topologia de grupo no grupo abeliano livre de cardinalidade $\mathfrak{c}$ que torna seu quadrado enumeravelmente compacto 117

7.1 Uma escolha adequada de seqüências 118
7.2 Construindo homomorfismos de grupos 127
7.3 Explicitando a topologia 145
7.4 Sobre o problema de Wallace 146

8 Considerações finais 149

8.1 Resultados obtidos 149
8.2 Problemas abertos 151

A Ultrafiltros seletivos **155**

B Ultrafiltros seletivos e o axioma de Martin **165**

Referências Bibliográficas **169**

Índice Remissivo **173**

Introdução

Em 1944, Halmos [23] mostrou que $(\mathbb{R}, +)$ admite uma topologia que o torna um grupo topológico compacto e perguntou que outros grupos abelianos podem ser munidos de uma tal topologia.[1] Esta questão contribuiu significativamente para o desenvolvimento da teoria dos grupos abelianos, particularmente através da introdução dos grupos algebricamente compactos por Kaplansky [27]. No fim da década de 50, Harrison [24] e Hulanicki [25] resolveram o problema proposto por Halmos. Eles mostraram que um grupo abeliano G admite uma topologia que o torna um grupo compacto se, e somente se, G é isomorfo a um produto de cópias de $\mathbb{R}$, de inteiros p-ádicos, de p-grupos quase cíclicos e de grupos cíclicos finitos onde, para cada número primo p, o número de cópias de $\mathbb{Z}_p(\infty)$ não excede o número de cópias de $\mathbb{R}$.

O teorema de Ivanovskij-Kuz'minov afirma que todo grupo topológico compacto é um espaço diádico (isto é, a imagem por uma aplicação contínua de um cubo de Cantor generalizado) e, portanto, todo grupo compacto infinito possui uma seqüência não trivial convergente. A questão da existência de grupos topológicos enumeravelmente compactos sem seqüências não triviais convergentes é bastante conhecida e não possui solução definitiva até o presente momento.

O primeiro exemplo de grupo enumeravelmente compacto (infinito) sem seqüências não triviais convergentes foi obtido por Hajnal e Juhász [22] em 1976, sob a hipótese do contínuo (CH). Quatro anos mais tarde, van Douwen [18] exibiu um outro exemplo com o auxílio do axioma de Martin (MA). Apenas recentemente, García-Ferreira, Tomita e Watson [20] mostraram que a existência de um grupo enumeravelmente compacto sem seqüências não triviais convergentes

[1] Neste trabalho, todas as topologias consideradas serão supostas T_1 — o que implica de Tychonoff, no caso de uma topologia de grupo.

não depende de qualquer forma do axioma de Martin.

Nesta tese, apresentamos algumas construções de topologias enumeravelmente compactas em grupos abelianos de não torção que dependem apenas da existência de ultrafiltros seletivos. A existência de ultrafiltros seletivos é independente de ZFC.[2] No apêndice B reproduzimos a prova de Blass [5] de que o axioma de Martin para ordens parciais enumeráveis ($\mathrm{MA}_{\mathrm{countable}}$) implica a existência de $2^{\mathfrak{c}}$ ultrafiltros seletivos. Todavia, a existência de $2^{\mathfrak{c}}$ ultrafiltros seletivos é compatível com a falha total de MA.[3]

Antes de descrevermos os resultados obtidos neste trabalho, gostaríamos de justificar nossa escolha de trabalhar com grupos abelianos de não torção. As técnicas que consideramos baseiam-se na demonstração do teorema de Kertész-Szele, o qual afirma que todo grupo abeliano infinito admite uma topologia de Tychonoff não discreta que o torna um grupo topológico. Além disso, Dikranjan e Shakhmatov [14] provaram que nenhum grupo livre com mais de um elemento admite uma topologia de grupo enumeravelmente compacta e, em [15], os mesmos autores demonstraram que o grupo de permutações de um conjunto infinito X também não admite uma tal topologia.

Sob condições mais fracas que a hipótese do contínuo generalizada (GCH), Castro-Pereira e Tomita [11] mostraram que um grupo abeliano de torção admite uma topologia de grupo enumeravelmente compacta se, e somente se, o mesmo admite uma topologia de grupo pseudocompacta. Assumindo a existência de um ultrafiltro seletivo, eles provaram que se G é um grupo abeliano de torção tal que $|G| = \mathfrak{c}$, então G admite uma topologia de grupo enumeravelmente compacta se, e somente se, G é isomorfo a uma soma direta finita de grupos da forma $\bigoplus_{i \leq l_p} \mathbb{Z}_{p^{t_{p,i}}}^{(\theta_{p,i})}$ onde p é um número primo, $t_{p,0} < t_{p,1} < ... < t_{p,l_p}$ são números naturais e cada $\theta_{p,i}$ é um cardinal tal que se $i \leq l_p$ é o maior inteiros para o qual $\theta_{p,i}$ é infinito, então $\theta_{p,i} = \mathfrak{c}$.

Com respeito à sua estrutura, esta tese é composta por oito capítulos e dois apêndices. O apêncice A apresenta algumas caracterizações da seletividade, além de propriedades relacionadas a este conceito. O apêndice B, por sua vez, traz uma prova de que $\mathrm{MA}_{\mathrm{countable}}$ implica a existência de $2^{\mathfrak{c}}$ ultrafiltros seletivos.

O primeiro capítulo tem por objetivo listar os principais conceitos e resultados que serão utilizados ao longo do texto, bem como fixar algumas notações e terminologias que serão empregadas adiante.

[2] Existem $2^{\mathfrak{c}}$ ultrafiltros seletivos sob CH ou MA. Por outro lado, Shelah mostrou via *forcing* que existem modelos de ZFC sem p-pontos (e, em particular, sem ultrafiltros seletivos). Kunen [28] mostrou que não existem ultrafiltros seletivos no modelo dos reais aleatórios.

[3] No sentido de Baumgartner [2].

No capítulo 2, assumimos a existência de $\mathfrak{c}$ ultrafiltros seletivos dois a dois incomparáveis (segundo a ordem de Rudin-Keisler) para construir uma topologia enumeravelmente compacta com uma seqüência não trivial convergente no grupo abeliano livre de cardinalidade $\mathfrak{c}$ que o torna um grupo topológico.[4] García-Ferreira e Tomita obtiveram o mesmo resultado assumindo o axioma de Martin para ordens parciais σ-centradas ($\mathrm{MA}_{\sigma-\mathrm{centered}}$).

O capítulo 3 mostra que a reta real admite uma topologia de grupo enumeravelmente compacta sem seqüências não triviais convergentes. Embora este seja um resultado original — já que assumimos apenas a existência de ultrafiltros seletivos para obtê-lo — o capítulo em questão foi colocado neste trabalho com o único intuito de facilitar a compreensão do leitor, uma vez que versões mais gerais dos resultados nele apresentados encontram-se nos capítulos 4 e 5.

O capítulo 4 generaliza as construções apresentadas no capítulo 3.[5] Explicitamente, mostramos que é possível munir um grupo abeliano quase livre de torção de cardinalidade $\mathfrak{c}$ de uma topologia que o torna um grupo topológico enumeravelmente compacto sem seqüências não triviais convergentes. Em 2002, Tkachenko e Yaschenko [37] usaram MA para mostrar que se $(G, +, \tau)$ é um grupo topológico abeliano quase livre de torção tal que $|G| = |\tau| = \mathfrak{c}$, então existe σ uma topologia em G independente de τ (isto é, tal que $\tau \cap \sigma$ é a topologia cofinita em G) que torna $(G, +)$ um grupo topológico. Este resultado também decorre da nossa construção, o que mostra que não é necessária qualquer forma do axioma de Martin para obtê-lo.

Sob MA, Dikranjan e Tkachenko [17] caracterizaram algebricamente os grupos abelianos de não torção que têm cardinalidade $\mathfrak{c}$ e que admitem uma topologia de grupo enumeravelmente compacta. A saber, eles mostraram que um tal grupo G admite uma tal topologia se, e somente se, $|G/T(G)| = \mathfrak{c}$ e, para quaisquer $n, d \in \mathbb{N}$ tais que $d \mid n$, o conjunto $dG[n]$ é finito ou tem cardinalidade $\mathfrak{c}$. No capítulo 5, mostramos que esta caracterização algébrica dos grupos abelianos de não torção que têm cardinalidade $\mathfrak{c}$ e que admitem uma topologia de grupo enumeravelmente compacta permanece válida se assumirmos apenas a existência de $\mathfrak{c}$ ultrafiltros seletivos dois a dois incomparáveis.

Assumindo $\mathrm{MA}_{\sigma-\mathrm{centered}}$, Tomita [39] mostrou que o grupo abeliano livre de cardinalidade $\mathfrak{c}$ admite $\mathfrak{c}^+$ topologias enumeravelmente compactas (duas a duas não homeomorfas) que o tornam um grupo topológico. No capítulo 6, provamos que a existência de $2^{\mathfrak{c}}$ ultrafiltros seletivos é suficiente para garantir que se um grupo abeliano de não torção e cardinalidade $\mathfrak{c}$

[4] Uma vez que dois grupos abelianos livres não enumeráveis de mesma cardinalidade são isomorfos, escreveremos "o grupo abeliano livre de cardinalidade κ" em vez de "um grupo abeliano livre de cardinalidade κ" onde $\kappa > \omega$ é um cardinal.

[5] Continuamos, aqui, assumindo a existência de $\mathfrak{c}$ ultrafiltros seletivos dois a dois incomparáveis.

admite uma topologia de grupo enumeravelmente compacta, então o mesmo admite $2^{\mathfrak{c}}$ topologias enumeravelmente compactas (duas a duas não homeomorfas) que o tornam um grupo topológico. Isto melhora o resultado de [39] em duas direções: em primeiro lugar, estamos assumindo uma hipótese mais fraca que o axioma de Martin para ordens parciais σ-centradas; além disso, ampliamos a classe dos grupos para os quais temos o resultado.

Em 1998, Tomita [38] provou que o grupo abeliano livre de cardinalidade $\mathfrak{c}$ não admite uma topologia de grupo que torna sua ω-ésima potência enumeravelmente compacta. No capítulo 7, assumimos a existência de $\mathfrak{c}$ ultrafiltros seletivos dois a dois incomparáveis e mostramos que existe uma topologia de grupo no grupo abeliano livre de cardinalidade $\mathfrak{c}$ que torna seu quadrado enumeravelmente compacto. Isto responde uma questão proposta por Madariaga-Garcia e Tomita em [30] e por Tkachenko em [36].

Em 1952, Numakura [31] mostrou que todo semigrupo cancelativo (à direita e à esquerda) compacto é um grupo topológico. Em 1955, Wallace [45] perguntou se todo semigrupo cancelativo enumeravelmente compacto é um grupo topológico e esta questão permanece aberta em ZFC. Um contraexemplo para a pergunta de Wallace é conhecido como *semigrupo de Wallace*. Robbie e Svetlichny [32] responderam negativamente a pergunta de Wallace usando CH em 1996. Em 2007, Madariaga-Garcia e Tomita [30] construíram um semigrupo de Wallace assumindo a existência de $\mathfrak{c}$ ultrafiltros seletivos dois a dois incomparáveis. Nestas mesmas condições, mostramos que existe um semigrupo topológico cancelativo que não é um grupo topológico e cujo quadrado é enumeravelmente compacto. Isto responde a questão 4 proposta por Grant em [21].

Destacamos que os resultados apresentados no capítulo 2 encontram-se submetidos a uma revista com arbitragem (vide [6]), bem como os resultados apresentados nos capítulos 5 e 6 (vide [7]). Além disso, os resultados apresentados no capítulo 4 foram aceitos para publicação no Houston Journal of Mathematics (vide [8]) e uma versão mais fraca dos resultados apresentados no capítulo 7 foi publicada no Fundamenta Mathematicae (vide [9]).

Finalmente, o capítulo 8 traz algumas considerações finais a respeito deste trabalho.

CAPÍTULO 1

Definições e resultados preliminares

Não temos o intuito de desenvolver neste capítulo toda a teoria necessária para a compreensão desta tese; seu propósito é fixar as nomenclaturas e notações que serão empregadas adiante, bem como enunciar alguns resultados que serão utilizados ao longo do texto. Nossas referências básicas são [33], [19], [1], e [29].

1.1 Álgebra

Seja $(G, +)$ um grupo abeliano. Denotaremos por 0_G o seu elemento neutro e por $-x$ o inverso de $x \in G$. Observamos desde já que alguns abusos de notação serão cometidos ao longo deste trabalho. Por exemplo, quando não houver risco à interpretação, representaremos o grupo $(G, +)$ e seu elemento neutro 0_G por G e 0, respectivamente.

Dado $X \subset G$, denotaremos por $\langle X \rangle$ o subgrupo de G gerado por X. Se $X = \{x\}$, o grupo cíclico gerado por x será denotado por $\langle x \rangle$. A ordem de um subgrupo H de G será representada por $|H|$. Se $|\langle x \rangle| \geq \omega$, diremos que x tem ordem infinita. Caso contrário, a ordem de x será dada por $\mathrm{o}(x) = |\langle x \rangle|$. Observamos que se $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $\mathrm{o}(x) = n$, então $\mathrm{o}(mx) = n/\operatorname{mdc}(m, n)$.

Proposição 1.1.1. *Sejam F e G grupos abelianos, H um subgrupo de G, $f : H \to F$ um homomorfismo de grupos, $x \in G$ e $y \in F$. É possível estender f a um homomorfismo de grupos*

$\tilde{f} : \langle H \cup \{x\}\rangle \to F$ satisfazendo $\tilde{f}(x) = y$ se, e somente se, uma das seguintes condições é satisfeita:

(i) $nx \notin H$, para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$;

(ii) $\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : nx \in H\} \neq \emptyset$ e $f(mx) = my$, onde $m = \min\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : nx \in H\}$.

Demonstração. Ver lema 1.1.5 de [1]. □

Dizemos que $S \subset G$ é *independente* se $0 \notin S$ e se, para quaisquer $s_1, ..., s_n \in S$ dois a dois distintos e quaisquer $m_1, ..., m_n \in \mathbb{Z}$ tais que $m_1 s_1 + ... + m_n s_n = 0$, tivermos que $m_1 s_1 = ... = m_n s_n = 0$.

Corolário 1.1.2. *Sejam S um subconjunto independente de G e H um grupo. Suponhamos que para cada $x \in S$ exista $\phi(x) \in H$ tal que se x tem ordem finita, então $\mathrm{o}(\phi(x)) \mid \mathrm{o}(x)$. É possível estender ϕ a um homomorfismo de grupos de $\langle S\rangle$ em H.* □

O *subgrupo de torção* de G é denotado por $T(G)$ e é constituído de todos os elementos de G que têm ordem finita. Dizemos que G é *de não torção* (ou que G é *não periódico*) se $G \neq T(G)$. Caso contrário, G é dito *de torção*. Se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{o}(x) \leq n$ para todo $x \in G$, dizemos que G é *de torção limitada*. Por fim, G é dito *quase livre de torção* se $|G[n]| < \omega$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, onde $G[n] = \{x \in G : nx = 0\}$.

Teorema 1.1.3. (Prüfer-Baer) *Todo grupo abeliano de torção limitada é isomorfo a uma soma direta de grupos cíclicos cujas ordens são finitas e limitadas.*

Demonstração. Ver 4.3.5 de [33]. □

Se X é um conjunto, escreveremos G^X para denotar o produto $\prod_{x \in X} G_x$ onde $G_x = G$, para cada $x \in X$. Escreveremos, ainda, $G^{(X)}$ para representar a soma direta $\bigoplus_{x \in X} G_x$ onde $G_x = G$, para cada $x \in X$. Se $J \in G^X$, o *suporte* de J é o conjunto $\operatorname{supp} J = \{x \in X : J(x) \neq 0\}$.

Dizemos que G é *abeliano livre* se existe X um subconjunto não vazio de G tal que cada função definida em X a valores em um grupo abeliano H se estende a um único homomorfismo de grupos de G em H.[1]

Proposição 1.1.4. *(i) Se um subconjunto X de G testemunha que G é um grupo abeliano livre, então G é isomorfo à soma direta dos subgrupos cíclicos infinitos $\langle x\rangle$, onde $x \in X$.*

[1] Neste caso, dizemos que X *testemunha* que G é um grupo abeliano livre.

(ii) O conjunto X testemunha que $\mathbb{Z}^{(X)}$ é um grupo abeliano livre.

Demonstração. Ver 2.3.8 de [33]. □

Corolário 1.1.5. *Seja X um conjunto de cardinalidade $\kappa > \omega$. Se G é um grupo abeliano livre de cardinalidade κ, então G é isomorfo a $\mathbb{Z}^{(X)}$.*

Demonstração. Como $|G| = \kappa > \omega$, existe Y um subconjunto de G de cardinalidade κ que testemunha que G é um grupo abeliano livre. Além disso, X testemunha que $\mathbb{Z}^{(X)}$ é um grupo abeliano livre. Uma vez que $|X| = |Y|$, o argumento apresentado na proposição 2.1.4 de [33] nos permite concluir que G é isomorfo a $\mathbb{Z}^{(X)}$. □

Dizemos que G é *divisível* se, para cada $g \in G$ e cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, a equação $nx = g$ tem uma solução $x \in G$.

Proposição 1.1.6. (Baer) *Sejam H um subgrupo do grupo abeliano G, D um grupo (abeliano) divisível e $f : H \to D$ um homomorfismo de grupos. Existe $\tilde{f} : G \to D$ um homomorfismo de grupos tal que $\tilde{f} \restriction_H = f$.*

Demonstração. Ver 4.1.2 de [33]. □

Teorema 1.1.7. *Um grupo abeliano é divisível se, e somente se, é isomorfo a uma soma direta de cópias de $\mathbb{Q}$ e de grupos quase-cíclicos.*[2]

Demonstração. Ver 4.1.5 de [33]. □

Teorema 1.1.8. *Todo grupo abeliano é isomorfo a um subgrupo de um grupo divisível.*

Demonstração. Ver 4.1.6 de [33]. □

A circunferência unitária centrada na origem do plano complexo munida da multiplicação usual de números complexos é um exemplo de grupo abeliano divisível, o qual será denotado por $\mathbb{T}$.

Se $w \in \mathbb{T}$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, então $z \in \mathbb{T}$ é uma *raiz n-ésima* de w se $z^n = w$. No caso particular em que $w = 1$, um tal z é denominado *raiz n-ésima da unidade*. É fácil ver que as raízes n-ésimas da unidade são precisamente os números complexos da forma

$$e^{\frac{2\pi i k}{n}} = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$$

[2] Dado p um número primo, o subgrupo de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ gerado pelo conjunto $\{1/p^n + \mathbb{Z} : n \in \omega\}$ é denominado *p-grupo quase-cíclico* e é denotado por $\mathbb{Z}(p^\infty)$.

onde $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Também não é difícil notar que para cada $w \in \mathbb{T}$, existem n raízes n-ésimas de w e que o conjunto das raízes n-ésimas de w é obtido através de uma translação do conjunto das raízes n-ésimas da unidade por uma raíz n-ésima de w.[3]

1.2 Topologia

Seja (X, τ) um espaço topológico.[4] Para cada $x \in X$, denotaremos por τ_x a família de todas as vizinhanças abertas de x em X.

Dizemos que X é *enumeravelmente compacto* se todo recobrimento aberto enumerável de X admite um sub-recobrimento finito.

Proposição 1.2.1. *Todo subconjunto fechado de um espaço enumeravelmente compacto é enumeravelmente compacto.*

Demonstração. Ver 3.10.4 de [19]. □

Proposição 1.2.2. *A imagem de um espaço enumeravelmente compacto por uma aplicação contínua é enumeravelmente compacta.*

Demonstração. Ver 3.10.5 de [19]. □

Dizemos que X é *pseudocompacto* se toda função contínua a valores reais definida em X é limitada.

Proposição 1.2.3. *Todo espaço topológico enumeravelmente compacto é pseudocompacto.*

Demonstração. Ver 3.10.20 de [19]. □

Dado $A \subset X$, denotaremos por $\overline{A}$ o fecho de A em X. Dizemos que $x \in X$ é um *ponto de acumulação* de A se $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$, para cada $U \in \tau_x$.

Proposição 1.2.4. *Um espaço topológico X é enumeravelmente compacto se, e somente se, todo subconjunto infinito de X tem um ponto de acumulação.*

Demonstração. Ver 3.10.3 de [19]. □

[3] Portanto, assim como as raízes n-ésimas da unidade, as raízes n-ésimas de w se encontram simetricamente distribuídas em $\mathbb{T}$.

[4] Quando não houver risco à interpretação, representaremos o espaço topológico (X, τ) por X, simplesmente.

O *caráter de um ponto* x no espaço topológico X é dado por

$$\chi(x, X) = \min\{|\mathcal{B}(x)| : \mathcal{B}(x) \text{ é um sistema fundamental de vizinhanças para } x \text{ em } X\}$$

e o *caráter* de X é dado por

$$\chi(X) = \sup\{\chi(x, X) : x \in X\} + \omega.$$

O *peso* de X, por sua vez, é dado por

$$w(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ é uma base de abertos para } X\} + \omega.$$

Observamos que $|\tau| \leq 2^{\omega(X)}$.

Teorema 1.2.5. (Kronecker) *Se $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então $\{(x + \mathbb{Z}, \zeta x + \mathbb{Z}) : x \in \mathbb{R}\}$ é um subconjunto denso do toro $\mathbb{T}^2$.*

Demonstração. Ver 4.13 na seção 4 do capítulo 1 de [10]. □

Sejam (M, δ) um espaço métrico e A um subconjunto de M. Se $A \neq \emptyset$, o *diâmetro* de A é definido por $\delta(A) = \sup\{\delta(x, y) : x, y \in A\}$. Se $A = \emptyset$, então $\delta(A) = 0$. Dado $\epsilon > 0$, dizemos que $A \subset M$ é *ϵ-denso* se, para cada $y \in M$, existe $a \in A$ tal que $\delta(y, a) < \epsilon$.

Corolário 1.2.6. *Sejam $\epsilon > 0$ e $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Existe $l = l(\zeta, \epsilon) > 0$ tal que se I é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ de comprimento maior que l, então $\{(x + \mathbb{Z}, \zeta x + \mathbb{Z}) : x \in I\}$ é ϵ-denso no toro $\mathbb{T}^2$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura finita do toro $\mathbb{T}^2$ por bolas abertas de raio $\epsilon/2$. Como $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, do teorema 1.2.5 decorre que $\{(x + \mathbb{Z}, \zeta x + \mathbb{Z}) : x \in \mathbb{R}\}$ é denso em $\mathbb{T}^2$. Logo, para cada $U \in \mathcal{C}$ existe $x_U \in \mathbb{R}$ tal que $(x_U + \mathbb{Z}, \zeta x_U + \mathbb{Z}) \in U$. Temos que $\{(x_U + \mathbb{Z}, \zeta x_U + \mathbb{Z}) : U \in \mathcal{C}\}$ é um subconjunto ϵ-denso do toro $\mathbb{T}^2$. Portanto, se J é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ que contém $\{x_U \in \mathbb{R} : U \in \mathcal{C}\}$, então o conjunto $\{(x + \mathbb{Z}, \zeta x + \mathbb{Z}) : x \in J\}$ é ϵ-denso em $\mathbb{T}^2$. Seja l o comprimento de J. Observamos que se I é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ de comprimento maior que l, então existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $J + a \subset I$. Como as translações em $\mathbb{T}^2$ são isometrias, concluímos que $\{(x + \mathbb{Z}, \zeta x + \mathbb{Z}) : x \in I\}$ é ϵ-denso em $\mathbb{T}^2$. □

1.3 Grupos topológicos

Um *semigrupo* é um conjunto munido de uma operação binária associativa. Dizemos que um semigrupo $(S, \cdot)$ é um *semigrupo topológico* se existe uma topologia no conjunto S que torna a operação $\cdot : S \times S \to S$ contínua, onde consideramos $S \times S$ munido da topologia produto.

Um *grupo topológico* é uma tripla $(G, \cdot, \tau)$, onde $(G, \cdot)$ é um grupo e τ é uma topologia em G que torna as aplicações

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \to & G \\ (x, y) & \mapsto & x \cdot y \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & x^{-1} \end{array}$$

contínuas.[5]

É evidente que todo grupo topológico é, em particular, um semigrupo topológico. Observamos, ainda, que todo subgrupo (no sentido algébrico) de um grupo topológico é um grupo topológico, se o considerarmos munido da topologia de subespaço.

Exemplo 1.3.1. *O grupo $\mathbb{T}$ munido da topologia de subespaço induzida por $\mathbb{R}^2$ é um grupo topológico.*

Exemplo 1.3.2. *O grupo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ munido da topologia quociente induzida pela projeção de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é um grupo topológico.*

Sejam G e H grupos topológicos. Uma aplicação $f : G \to H$ é dita um *isomorfismo de grupos topológicos* se f é um isomorfismo de grupos entre os grupos (no sentido algébrico) G e H e se f é um homeomorfismo entre os espaços topológicos G e H. Dizemos que dois grupos topológicos são *isomorfos* se existe um isomorfismo de grupos topológicos entre eles.

Proposição 1.3.3. *Os grupos topológicos $\mathbb{T}$ e $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ são isomorfos.*

Demonstração. A aplicação

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \to & \mathbb{T} \\ x + \mathbb{Z} & \mapsto & e^{2\pi i x} \end{array}$$

está bem definida, uma vez que se $x, y \in \mathbb{R}$ são tais que $x + \mathbb{Z} = y + \mathbb{Z}$, então existe $n \in \mathbb{Z}$ tal

[5] Novamente, estamos considerando $G \times G$ munido da topologia produto.

que $x = y + n$ e, portanto,

$$\varphi(x + \mathbb{Z}) = \varphi((y + n) + \mathbb{Z}) = e^{2\pi i(y+n)} = e^{2\pi iy}e^{2\pi in} = e^{2\pi iy} = \varphi(y + \mathbb{Z}).$$

Também não é difícil mostrar que φ é um homomorfismo de grupos. Com efeito,

$$\varphi((x + \mathbb{Z}) + (y + \mathbb{Z})) = \varphi((x + y) + \mathbb{Z}) = e^{2\pi i(x+y)} = e^{2\pi ix}e^{2\pi iy} = \varphi(x + \mathbb{Z})\varphi(y + \mathbb{Z})$$

quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Por fim, a prova de que φ é um homeomorfismo pode ser encontrada em [19] (ver Exemplo 2.4.11). □

No que segue, identificaremos os grupos topológicos $\mathbb{T}$ e $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e denotaremos por δ a métrica em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dada por

$$\delta(x + \mathbb{Z}, y + \mathbb{Z}) = \min\{|x - y + n| : n \in \mathbb{Z}\}$$

quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}$.

Proposição 1.3.4. *Seja $\{G_\alpha : \lambda \in \Lambda\}$ uma família de grupos topológicos. O conjunto $\prod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ com a operação usual de produto de grupos e munido da topologia produto é um grupo topológico.*

Demonstração. Ver 1.2.7 de [1]. □

1.4 Teoria dos conjuntos

Sejam α e β ordinais e $f : \alpha \to \beta$. Dizemos que f é uma *aplicação cofinal* se $f[\alpha]$ é ilimitado em β. A *cofinalidade* de um ordinal β é denotada por $\mathrm{cf}(\beta)$ e é definida como sendo o menor ordinal α tal que existe uma aplicação cofinal $f : \alpha \to \beta$.

Um cardinal κ é dito *regular* se $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$. Caso contrário, κ é dito *singular*.

Lema 1.4.1. (König) *Se κ é um cardinal infinito e $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda$, então $\kappa^\lambda > \kappa$.*

Demonstração. Ver 10.40 de [29]. □

Temos que $\mathfrak{c}^\omega = \mathfrak{c}$. Do lema de König segue que $\mathrm{cf}(\mathfrak{c}) > \omega$.

Uma família $\mathcal{A}$ de conjuntos é dita um Δ-*sistema* se existe um conjunto r — denominado *raiz do Δ-sistema* — tal que $a \cap b = r$, quaisquer que sejam a e b elementos distintos de $\mathcal{A}$.

Proposição 1.4.2. *Seja κ um cardinal infinito. Suponha que $\theta > \kappa$ seja um cardinal regular tal que $\forall \alpha < \theta$ $(|\alpha^{<\kappa}| < \theta)$. Assuma que $|\mathcal{A}| \geq \theta$ e que $\forall x \in \mathcal{A}$ $(|x| < \kappa)$. Existe $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ tal que $|\mathcal{B}| = \theta$ e $\mathcal{B}$ constitui um Δ-sistema.*

Demonstração. Ver 1.6 de [29]. □

1.5 Ultrafiltros seletivos e p-limites

Um *filtro sobre* ω é uma família não vazia $\mathfrak{F}$ de subconjuntos de ω com as seguintes propriedades:

(1) $\emptyset \notin \mathfrak{F}$;

(2) Se $A, B \in \mathfrak{F}$, então $A \cap B \in \mathfrak{F}$;

(3) Se $A \in \mathfrak{F}$ e $B \subset \omega$ é tal que $A \subset B$, então $B \in \mathfrak{F}$.

Uma *base para um filtro sobre* ω é uma família não vazia $\mathfrak{B}$ de subconjuntos de ω com as seguintes propriedades:

(1) $\emptyset \notin \mathfrak{B}$;

(2) Se $A, B \in \mathfrak{B}$, então existe $C \in \mathfrak{B}$ tal que $A \cap B \supset C$.

Se $\mathfrak{B}$ é uma base para um filtro sobre ω, então $\{X \subset \omega : \exists B \in \mathfrak{B}$ tal que $X \supset B\}$ é um filtro sobre ω, denominado *filtro gerado por* $\mathfrak{B}$.

Um *ultrafiltro sobre* ω é um filtro sobre ω maximal com respeito à inclusão. Dizemos que um ultrafiltro u sobre ω é *principal* se existe $n \in \omega$ tal que $u = \{A \subset \omega : n \in A\}$; caso contrário, u é denominado *livre*.

Proposição 1.5.1. *Um filtro $\mathfrak{F}$ sobre ω é um ultrafiltro se, e somente se, para cada $X \subset \omega$, $X \in \mathfrak{F}$ ou $\omega \setminus X \in \mathfrak{F}$.*

Demonstração. Ver lema 7.4 de [26]. □

Denotaremos por $\beta\omega$ a compactificação de Stone-Čech do espaço discreto ω, a qual será identificada com o conjunto de todos os ultrafiltros sobre ω munido da topologia que tem $\{V(A) : A \subset \omega\}$ como base de abertos, onde $V(A) = \{u : u$ é um ultrafiltro sobre ω e $A \in u\}$.

Nesta identificação, o espaço discreto ω corresponde à família dos ultrafiltros principais sobre ω. Representaremos por ω^* a família dos ultrafiltros livres sobre ω (isto é, $\omega^* = \beta\omega \setminus \omega$).

Dada $f : \omega \to \omega$, a função $\beta f : \beta\omega \to \beta\omega$ definida por

$$\beta f(p) = \{A \subset \omega : f^{-1}(A) \in p\}$$

é denominada a *extensão de Stone-Čech* de f.

Definição 1.5.2. *Dados $p, q \in \omega^*$, dizemos que $p \leq_{RK} q$ se existe uma função $f : \omega \to \omega$ tal que $\beta f(q) = p$, onde βf denota a extensão de Stone-Čech de f. A pré-ordem $\leq_{RK}$ em ω^* é chamada de* ordem de Rudin-Keisler.[6]

Definição 1.5.3. *Um ultrafiltro livre p sobre ω é dito* seletivo *se para cada partição $\{P_n : n \in \omega\}$ de ω, existe $m \in \omega$ tal que $P_m \in p$ ou existe $B \in p$ tal que $|B \cap P_n| \leq 1$, qualquer que seja $n \in \omega$.*[7]

O próximo lema será fortemente utilizado ao longo deste trabalho. Sua demonstração encontra-se no apêndice A.

Lema 1.5.4. *[40] Seja $\{p_j : j \in \omega\}$ uma família de ultrafiltros seletivos dois a dois incomparáveis (segundo a ordem de Rudin-Keisler). Para cada $j \in \omega$, seja $\{a_k^j : k \in \omega\} \in p_j$ uma seqüência estritamente crescente de números naturais tal que $k < a_k^j$, qualquer que seja $k \in \omega$. Existe $\{I_j : j \in \omega\}$ uma família de subconjuntos de ω dois a dois disjuntos tal que:*

(i) $\{a_k^j : k \in I_j\} \in p_j$, para cada $j \in \omega$;

(ii) $\{[k, a_k^j] : j \in \omega, k \in I_j\}$ é uma família de intervalos de ω dois a dois disjuntos.

A seguinte definição foi introduzida em [3] e está bastante ligada à noção de compacidade enumerável.

Definição 1.5.5. *Sejam $p \in \omega^*$ e $\{x_n : n \in \omega\}$ uma seqüência em um espaço topológico X. Dizemos que $x \in X$ é p-*limite *de $\{x_n : n \in \omega\}$ se, para cada vizinhança U de x, o conjunto $\{n \in \omega : x_n \in U\}$ é um elemento de p. Neste caso, escrevemos $x = p - \lim\{x_n : n \in \omega\}$.*

Proposição 1.5.6. *Se $p \in \omega^*$ e $\{X_i : i \in I\}$ é uma família de espaços topológicos, então $(y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ é p-limite da seqüência $\{(x_i^n)_{i\in I} : n \in \omega\} \subset \prod_{i\in I} X_i$ se, e somente se, $y_i = p - \lim\{x_i^n : n \in \omega\}$, para todo $i \in I$.*

[6] Por "pré-ordem", entendemos uma relação reflexiva e transitiva.

[7] Dizer que $p \in \omega^*$ é seletivo é o mesmo que dizer que, para cada partição $\{P_n : n \in \omega\}$ de ω, existe $m \in \omega$ tal que $P_m \in p$ ou existe $B \in p$ tal que $|B \cap P_n| = 1$, qualquer que seja $n \in \omega$.

Demonstração. Suponhamos que $(y_i)_{i\in I} = p - \lim\{(x_i^n)_{i\in I} : n \in \omega\}$ e tomemos $i \in I$. Se Ω_i é uma vizinhança de y_i em X_i, então $\{n \in \omega : x_i^n \in \Omega_i\} = \{n \in \omega : (x_i^n)_{i\in I} \in \Omega\} \in p$, onde $\Omega = \prod_{j\in I} \Omega_j$ e $\Omega_j = X_j$, para todo $j \in I \setminus \{i\}$. Portanto, $y_i = p - \lim\{x_i^n : n \in \omega\}$.

Reciprocamente, suponhamos que $y_i = p - \lim\{x_i^n : n \in \omega\}$, para todo $i \in I$. Sejam $\Omega = \prod_{i\in I} \Omega_i$ um aberto básico de $\prod_{i\in I} X_i$ tal que $(y_i)_{i\in I} \in \Omega$ e $F = \{i \in I : \Omega_i \neq X_i\}$. Observamos que F é um subconjunto finito de I e que, portanto, $\{n \in \omega : (x_i^n)_{i\in I} \in \Omega\} = \cap_{i\in F}\{n \in \omega : x_i^n \in \Omega_i\} \in p$. Logo, $(y_i)_{i\in I} = p - \lim\{(x_i^n)_{i\in I} : n \in \omega\}$. □

Proposição 1.5.7. *Sejam G um grupo topológico e $p \in \omega^*$.*

(i) Se $\{x_n : n \in \omega\}$ e $\{y_n : n \in \omega\}$ são seqüências em G e $x, y \in G$ são tais que $x = p - \lim\{x_n : n \in \omega\}$ e $y = p - \lim\{y_n : n \in \omega\}$, então $x + y = p - \lim\{x_n + y_n : n \in \omega\}$;

(ii) Se $\{x_n : n \in \omega\}$ é uma seqüência em G e $x \in G$ são tais que $x = p - \lim\{x_n : n \in \omega\}$, então $-x = p - \lim\{-x_n : n \in \omega\}$.

Demonstração. (i) Seja V uma vizinhança aberta de $x+y$ em G. Uma vez que $+ : G \times G \to G$ é contínua, existem V_x e V_y subconjuntos abertos de G tais que $x \in V_x$, $y \in V_y$ e $V_x + V_y \subset V$. Como $x = p - \lim\{x_n : n \in \omega\}$ e $y = p - \lim\{y_n : n \in \omega\}$, os conjuntos $A_x = \{n \in \omega : x_n \in V_x\}$ e $A_y = \{n \in \omega : y_n \in V_y\}$ são elementos de p. Temos que $\{n \in \omega : x_n + y_n \in V\} \supset A_x \cap A_y$ e, portanto, $\{n \in \omega : x_n + y_n \in V\} \in p$. Logo, $x + y = p - \lim\{x_n + y_n : n \in \omega\}$.

(ii) Análoga à de (i), uma vez que a aplicação que associa cada elemento x de G ao seu oposto $-x$ é contínua.

□

Proposição 1.5.8. *Se $p \in \omega^*$ e X é um espaço topológico compacto, então toda seqüência em X admite p-limite.*

Demonstração. Seja $\{x_n : n \in \omega\}$ uma seqüência em X. Como p é um filtro sobre ω, a família $\{\{x_n : n \in A\} : A \in p\}$ tem a propriedade da intersecção finita. Da compacidade de X decorre que $\bigcap_{A\in p} \overline{\{x_n : n \in A\}} \neq \emptyset$. Afirmamos que se $x \in \bigcap_{A\in p} \overline{\{x_n : n \in A\}}$, então $x = p - \lim\{x_n : n \in \omega\}$. Com efeito, seja U uma vizinhança de x em X. O conjunto $\{n \in \omega : x_n \in U\} \in p$, uma vez que p é um ultrafiltro sobre ω e $x \in \overline{\{x_n : n \in A\}}$ para todo $A \in p$. □

CAPÍTULO 2

Uma topologia enumeravelmente compacta com uma seqüência não trivial convergente no grupo abeliano livre de cardinalidade $\mathfrak{c}$ que o torna um grupo topológico

Neste capítulo, assumiremos a existência de $\mathfrak{c}$ ultrafiltros seletivos dois a dois incomparáveis (segundo a ordem de Rudin-Keisler) para mostrar que o grupo abeliano livre de cardinalidade $\mathfrak{c}$ admite uma topologia enumeravelmente compacta com uma seqüência não trivial convergente que o torna um grupo topológico.[1]

Para cada $J \in \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})} \setminus \{0\}$ construiremos um homomorfismo de grupos $\phi_J : \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})} \to \mathbb{T}$ de modo que o produto diagonal da família $\{\phi_J : J \in \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})} \setminus \{0\}\}$ seja injetor e que a imagem de $\mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})}$ por esta aplicação tenha as propriedades desejadas quando munida da topologia de subespaço induzida por $\mathbb{T}^{\mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})}\setminus\{0\}}$.

As aplicações ϕ_J serão estabelecidas de forma independente, em dois estágios: começaremos definindo ϕ_J em um subgrupo enumerável de $\mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})}$ e, em seguida, estenderemos este homomorfismo parcial a $\mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})}$. A primeira etapa será feita por indução onde, em cada passo, aproximaremos os valores de ϕ_J por arcos abertos não vazios de $\mathbb{T}$. Esta aproximação por arcos exige que as seqüências consideradas apresentem uma certa liberdade para terem atribuídos a si pontos de acumulação pré-determinados, o que justifica a próxima seção.

[1] Sejam X um conjunto e $f : \omega \to X$. Dizemos que f é trivial se existe $n_0 \in \omega$ tal que $f(n) = f(n_0)$ para todo $n \geq n_0$.

2.1 Uma escolha adequada de seqüências

Se $J \in \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})}$, então

$$J = \sum_{\mu \in \operatorname{supp} J} J(\mu) \cdot \chi_\mu$$

onde $\chi_\mu : \mathfrak{c} \to \mathbb{Z}$ é tal que

$$\chi_\mu(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \xi = \mu \\ 0 & \text{se} \quad \xi \neq \mu. \end{cases}$$

Definimos

$$|J| = \max\{|J(\mu)| : \mu \in \operatorname{supp} J\}$$

e

$$||J|| = \sum_{\mu \in \operatorname{supp} J} |J(\mu)|.$$

Denotaremos por $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as funções $f : \omega \to \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})}$ que satisfazem uma das seguintes condições:

(1) $||f(n)|| > n$, para todo $n \in \omega$;

(2) (a) $\operatorname{supp} f(n) \cap \omega = \emptyset$, para todo $n \in \omega$;

(b) $\operatorname{supp} f(n) \setminus \cup_{m<n} \operatorname{supp} f(m) \neq \emptyset$, para todo $n \in \omega$.

Definição 2.1.1. *Sejam $f \in \mathcal{F}$ e $i \in \{1, 2\}$. Dizemos que f é* do tipo *i se f satisfaz a condição (i) descrita acima.*

Proposição 2.1.2. *Se $f : \omega \to \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})}$, então existe $j : \omega \to \omega$ estritamente crescente satisfazendo uma das seguintes condições:*

(i) $f \circ j$ é do tipo 1;

(ii) $f \circ j = f_1 + f_2$, onde $f_1, f_2 : \omega \to \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})}$, f_2 é do tipo 2 ou constante e existe m um número natural tal que, para cada $n \in \omega$, $f_1(n)$ é uma combinação linear com coeficientes pertencentes a $\{-1, 1\}$ de m elementos de $\{\chi_n : n \in \omega\}$.[2]

Demonstração. Há dois casos a serem considerados:

[2] Se $m = 0$, então $f_1(n) = 0$, para todo $n \in \omega$.

Caso 1: $\{||f(n)|| : n \in \omega\}$ é ilimitado.

Por indução, tomemos $\{n_k : k \in \omega\}$ uma seqüência estritamente crescente de números naturais tal que $||f(n_k)|| > k$, para todo $k \in \omega$. Temos que

$$\begin{array}{rccc} j: & \omega & \to & \omega \\ & k & \mapsto & n_k \end{array}$$

é uma função estritamente crescente tal que $f \circ j$ é do tipo 1.

Caso 2: $\{||f(n)|| : n \in \omega\}$ é limitado.

Sejam $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : \omega \to \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})}$ dadas por

$$\tilde{f}_1(n) = \begin{cases} \sum_{\xi \in \operatorname{supp} f(n) \cap \omega} f(n)(\xi) \cdot \chi_\xi & \text{se} \quad \operatorname{supp} f(n) \cap \omega \neq \emptyset \\ 0 & \text{se} \quad \operatorname{supp} f(n) \cap \omega = \emptyset \end{cases}$$

e

$$\tilde{f}_2(n) = \begin{cases} \sum_{\xi \in \operatorname{supp} f(n) \setminus \omega} f(n)(\xi) \cdot \chi_\xi & \text{se} \quad \operatorname{supp} f(n) \setminus \omega \neq \emptyset \\ 0 & \text{se} \quad \operatorname{supp} f(n) \setminus \omega = \emptyset. \end{cases}$$

Observamos que $f(n) = \tilde{f}_1(n) + \tilde{f}_2(n)$, para todo $n \in \omega$.

Se $\cup_{n \in \omega} \operatorname{supp} \tilde{f}_2(n)$ for infinito, então existe $j_1 : \omega \to \omega$ estritamente crescente tal que $\tilde{f}_2 \circ j_1$ é do tipo 2. Se $\cup_{n \in \omega} \operatorname{supp} \tilde{f}_2(n)$ for finito, então existe $j_1 : \omega \to \omega$ estritamente crescente tal que $\tilde{f}_2 \circ j_1$ é constante.[3]

Temos que $\{||\tilde{f}_1 \circ j_1(n)|| : n \in \omega\}$ é limitado e, portanto, existem $m \in \omega$ e $j_2 : \omega \to \omega$ estritamente crescente tais que $||\tilde{f}_1 \circ j_1 \circ j_2(n)|| = m$, qualquer que seja $n \in \omega$. Sejam $j = j_1 \circ j_2$, $f_1 = \tilde{f}_1 \circ j$ e $f_2 = \tilde{f}_2 \circ j$. Note que $f_1, f_2 : \omega \to \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})}$, $f \circ j = f_1 + f_2$ e f_2 é do tipo 2 ou constante.

Se $m = 0$, então $f_1(n) = 0$, para todo $n \in \omega$. Se $m > 0$, então $\operatorname{supp} f_1(n) \neq \emptyset$, qualquer que seja $n \in \omega$. Para cada $n \in \omega$, consideremos $\{\xi_0^n, ..., \xi_{k_n}^n\}$ uma indexação de $\operatorname{supp} f_1(n)$

[3] De fato, temos que $\cup_{n \in \omega} \operatorname{supp} \tilde{f}_2(n) = \cup_{n \in \omega} (\operatorname{supp} f(n) \setminus \omega)$ e, portanto, $(\cup_{n \in \omega} \operatorname{supp} \tilde{f}_2(n)) \cap \omega = \emptyset$. Suponhamos que $\cup_{n \in \omega} \operatorname{supp} \tilde{f}_2(n)$ seja infinito. Façamos $n_0 = 0$ e suponhamos definidos $n_0, n_1, ..., n_k$ números naturais. Tomemos $n_{k+1} > n_k$ tal que $\operatorname{supp} \tilde{f}_2(n_{k+1}) \setminus \cup_{l<k+1} \operatorname{supp} \tilde{f}_2(n_l) \neq \emptyset$. Temos que $j_1 : \omega \to \omega$ dada por $j(k) = n_k$ é estritamente crescente e $\tilde{f}_2 \circ j_1$ é do tipo 2. Suponhamos, agora, que $\cup_{n \in \omega} \operatorname{supp} \tilde{f}_2(n)$ seja finito. Como $\{||f(n)|| : n \in \omega\}$ é limitado, $\{|\tilde{f}_2(n)| : n \in \omega\}$ também o é. Logo, $\{\tilde{f}_2(n) : n \in \omega\}$ é um conjunto finito e, portanto, existe $j_1 : \omega \to \omega$ estritamente crescente tal que $\tilde{f}_2 \circ j_1$ é constante.

tal que $\xi_0^n < \xi_1^n < ... < \xi_{k_n}^n$. Temos que

$$f_1(n) = \sum_{i=0}^{k_n} \operatorname{sgn}(f_1(n)(\xi_i^n)) \cdot \underbrace{(\chi_{\xi_i^n} + ... + \chi_{\xi_i^n})}_{|f_1(n)(\xi_i^n)| \text{ vezes}}$$

onde $\operatorname{sgn} : \mathbb{Z} \to \{-1, 1\}$ é dada por

$$\operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad a \geq 0 \\ -1 & \text{se} \quad a < 0. \end{cases}$$

Como

$$\sum_{i=0}^{k_n} |f_1(n)(\xi_i^n)| = ||f_1(n)|| = m$$

temos que $f_1(n)$ se escreve como combinação linear de m elementos de $\{\chi_n : n \in \omega\}$ com coeficientes pertencentes a $\{-1, 1\}$. □

Proposição 2.1.3. *Existe* $\{f_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$ *uma indexação de* $\mathcal{F}$ *tal que* $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f_\xi(n) \subset \xi$, *para todo* $\xi \in [\omega, \mathfrak{c}[$.

Demonstração. Observamos, primeiramente, que $|\mathcal{F}| = \mathfrak{c}^\omega = \mathfrak{c}$. Portanto, podemos considerar $\{\tilde{f}_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$ uma indexação de $\mathcal{F}$ tal que, para cada $f \in \mathcal{F}$, o conjunto

$$A_f = \{\xi \in [\omega, \mathfrak{c}[: f = \tilde{f}_\xi\}$$

tenha cardinalidade $\mathfrak{c}$.[4]

Fixemos $f \in \mathcal{F}$. Como $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f(n) \subset \mathfrak{c}$, $\operatorname{cf}(\mathfrak{c}) > \omega$ e $|\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f(n)| \leq \omega$, existe $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f(n) \subset \alpha$. Seja $\xi \in A_f$. Se $\xi < \alpha$, façamos $f_\xi = g$, onde $g(n) = (n+1) \cdot \chi_0$, para todo $n \in \omega$. Temos que g é do tipo 1 e, portanto, $g \in \mathcal{F}$. Se $\xi \geq \alpha$, façamos $f_\xi = \tilde{f}_\xi$.

Vê-se facilmente $\{f_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$ é uma indexação de $\mathcal{F}$ tal que $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f_\xi(n) \subset \xi$, para todo $\xi \in [\omega, \mathfrak{c}[$. □

[4]Seja $\phi : \mathfrak{c} \times \mathfrak{c} \to \mathfrak{c} \setminus \omega$ uma bijeção. Escrevamos $\mathfrak{c} \setminus \omega = \cup_{\xi<\mathfrak{c}} \phi(\{\xi\} \times \mathfrak{c})$. Para cada $\xi < \mathfrak{c}$, consideremos $\{\tilde{f}_\mu : \mu \in \phi(\{\xi\} \times \mathfrak{c})\}$ uma indexação de $\mathcal{F}$. Temos que $\{\tilde{f}_\mu : \mu \in \cup_{\xi<\mathfrak{c}} \phi(\{\xi\} \times \mathfrak{c})\} = \{\tilde{f}_\mu : \omega \leq \mu < \mathfrak{c}\}$ tem a propriedade desejada.

2.2 Construindo homomorfismos de grupos

Sejam $\{p_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$ uma família de ultrafiltros seletivos dois a dois incomparáveis segundo a ordem de Rudin-Keisler e $\{f_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$ uma indexação de $\mathcal{F}$ tal que $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f_\xi(n) \subset \xi$, qualquer que seja $\xi \in [\omega, \mathfrak{c}[$. Para cada $J \in \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})} \setminus \{0\}$, construiremos $\phi_J : \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})} \to \mathbb{T}$ um homomorfismo de grupos tal que:

- $\phi_J(J) \neq 0 + \mathbb{Z}$;
- $\phi_J(\chi_\xi) = p_\xi - \lim\{\phi_J(f_\xi(n)) : n \in \omega\}$, para todo $\xi \in [\omega, \mathfrak{c}[$;
- $\phi_J(\chi_n) \to 0 + \mathbb{Z}$.

A fim de conciliar a primeira condição com as demais, começaremos definindo ϕ_J em $\mathbb{Z}^{(E)}$, onde $E \in [\mathfrak{c}]^\omega$ é dado pela proposição abaixo.

Proposição 2.2.1. *Seja $J \in \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})} \setminus \{0\}$. Existe $E \in [\mathfrak{c}]^\omega$ tal que:*

(i) $\operatorname{supp} J \subset E$;

(ii) $|E \setminus \omega| = \omega$;

(iii) $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f_\xi(n) \subset E$, *qualquer que seja* $\xi \in E \setminus \omega$.

Demonstração. Para cada $n \in \omega$, façamos $E(n) = \omega$. Se $\xi \in [\omega, \mathfrak{c}[$, definimos indutivamente

$$E(\xi) = \{\xi\} \cup \bigcup_{\mu \in \cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f_\xi(n)} E(\mu)$$

e façamos

$$E = \bigcup_{\zeta \in \operatorname{supp} J \cup [\omega, \omega+\omega[} E(\zeta).$$

Temos que $\operatorname{supp} J \cup [\omega, \omega + \omega[\subset E$, uma vez que $\zeta \in E(\zeta) \subset E$, qualquer que seja $\zeta \in \operatorname{supp} J \cup [\omega, \omega + \omega[$. Além disso, um argumento indutivo garante que $E(\xi) \in [\mathfrak{c}]^\omega$ para todo $\xi < \mathfrak{c}$ e, portanto, $E \in [\mathfrak{c}]^\omega$. Por fim, se $\xi \in E \setminus \omega$, então existe $\zeta \in \operatorname{supp} J \cup [\omega, \omega + \omega[$ tal que $\xi \in E(\zeta)$. Um outro argumento indutivo garante que se $\alpha \in E(\beta)$, então $E(\alpha) \subset E(\beta)$, quaisquer que sejam $\alpha, \beta < \mathfrak{c}$.[5] Logo, $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f_\xi(n) \subset E(\xi) \subset E(\zeta) \subset E$. □

[5]Temos que $E(n) = \omega$, para todo $n \in \omega$. Logo, se $n \in \omega$ e $m \in E(n)$, então $E(m) = E(n)$. Fixemos $\beta \in [\omega, \mathfrak{c}[$ e suponhamos que, para todo $\gamma < \beta$, valha a seguinte propriedade: se $\delta \in E(\gamma)$, então $E(\delta) \subset E(\gamma)$. Tomemos $\alpha \in E(\beta)$. Se $\alpha = \beta$, então $E(\alpha) = E(\beta)$. Suponhamos, portanto, $\alpha \neq \beta$. Temos que $\alpha \in E(\mu) \subset E(\beta)$, para algum $\mu \in \cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f_\beta(n)$. Como $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f_\beta(n) \subset \beta$, segue que $\mu < \beta$. Por hipótese de indução, $E(\alpha) \subset E(\mu)$. Logo, $E(\alpha) \subset E(\beta)$.

Lema 2.2.2. *Sejam $J \in \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})} \setminus \{0\}$ e $E \in [\mathfrak{c}]^{\omega}$ satisfazendo as condições (i), (ii) e (iii) da proposição 2.2.1. Existe $\{E_k : k \in \omega\}$ uma família de subconjuntos finitos de E, $\{b_k : k \in \omega\}$ uma seqüência estritamente crescente de números naturais, $\{r_k : k \in \omega\}$ uma seqüência de números reais positivos e $i : \omega \to E \setminus \omega$ tais que:*

(i) $\operatorname{supp} J \subset E_0$;

(ii) $E = \cup_{k\in\omega} E_k$;

(iii) $i(k) \in E_k$, *para todo* $k \in \omega$;

(iv) $E_{k+1} \supset E_k \cup \bigcup\{\operatorname{supp} f_{i(m)}(b_m) : m \leq k\}$, *para todo* $k \in \omega$;

(v) $\{b_k : k \in i^{-1}(\{\xi\})\} \in p_\xi$, *para todo* $\xi \in E \setminus \omega$;

(vi) Se $f_{i(k)}$ *é do tipo 1, então* $||f_{i(k)}(b_k)|| \cdot r_k > 4$;

(vii) Se $f_{i(k)}$ *é do tipo 2, então* $\operatorname{supp} f_{i(k)}(b_k) \setminus E_k \neq \emptyset$;

(viii) $r_0 = \dfrac{1}{4 \cdot ||J||}$;

(ix) $r_{k+1} = \dfrac{r_k}{2 \cdot ||f_{i(k)}(b_k)||}$, *para todo* $k \in \omega$.

Demonstração. Consideremos $\{a_n : n \in \omega\}$ uma enumeração de E tal que $a_0 \notin \omega$. Sejam $F_0 = \operatorname{supp} J \cup \{a_0\}$ e $F_{n+1} = F_n \cup \bigcup\{\operatorname{supp} f_\xi(m) : m \leq n, \xi \in F_n \setminus \omega\} \cup \{a_{n+1}\}$, para cada $n \in \omega$. Temos que $\{F_n : n \in \omega\}$ é uma família de subconjuntos finitos de E tal que:

(1) $\operatorname{supp} J \subset F_0$;

(2) $E = \cup_{n\in\omega} F_n$;

(3) $F_{n+1} \supset F_n \cup \bigcup\{\operatorname{supp} f_\xi(m) : m \leq n, \xi \in F_n \setminus \omega\}$.

Fixemos $\xi \in E \setminus \omega$ e $n \in \omega$. Se f_ξ é do tipo 1, definimos

$$A_n^\xi = \{k \in \omega : ||f_\xi(k)|| > 2^{n+4} \cdot Y_{n-1}\}$$

onde

$$Y_m = ||J|| \cdot \prod_{\substack{l \leq m \\ \zeta \in F_m \setminus \omega}} ||f_\zeta(l)||$$

para todo $m \in \omega$ e

$$Y_{-1} = ||J||.$$

Se f_ξ é do tipo 2, definimos

$$A_n^\xi = \{k \in \omega : \operatorname{supp} f_\xi(k) \setminus F_n \neq \emptyset\}.$$

Afirmamos que A_n^ξ é um subconjunto cofinito de ω, quaisquer que sejam $n \in \omega$ e $\xi \in E \setminus \omega$. De fato, sejam $\xi \in E \setminus \omega$ e $n \in \omega$. Se f_ξ é do tipo 1, então $A_n^\xi \supset \{k \in \omega : k \geq 2^{n+4} \cdot Y_{n-1}\}$ e, portanto, A_n^ξ é um subconjunto cofinito de ω. Suponhamos que f_ξ seja do tipo 2. Se A_n^ξ não fosse um subconjunto cofinito de ω, então $\omega \setminus A_n^\xi$ seria um conjunto infinito. Como $\omega \setminus A_n^\xi = \{k \in \omega : \operatorname{supp} f_\xi(k) \subset F_n\}$, teríamos que $\cup_{k \in \omega \setminus A_n^\xi} \operatorname{supp} f_\xi(k) \subset F_n$, o que é absurdo, uma vez que f_ξ é do tipo 2 e F_n é finito.

Logo, para cada $\xi \in E \setminus \omega$, temos que $\{A_n^\xi : n \in \omega\} \subset p_\xi$, uma vez que p_ξ é um ultrafiltro livre sobre ω. Da seletividade de p_ξ decorre que existe uma seqüência $\{a_n^\xi : n \in \omega\} \in p_\xi$ tal que $a_n^\xi \in A_n^\xi$ e $n < a_n^\xi$, para cada $n \in \omega$. Com efeito, fixemos $\xi \in E \setminus \omega$. Para cada $n \in \omega$, seja $B_n^\xi = A_n^\xi \setminus \{m \in \omega : m \leq n\}$. Como $A_n^\xi \in p_\xi$ e p_ξ é um ultrafiltro livre sobre ω, temos que $B_n^\xi \in p_\xi$. Do fato de p_ξ ser seletivo decorre que existe $B \in p_\xi$ tal que $B \subset^* B_n^\xi$, para todo $n \in \omega$. Tomemos $\{c_n : n \in \omega\}$ uma seqüência estritamente crescente de números naturais tal que $B \setminus \{m \in \omega : m < c_n\} \subset B_n^\xi$ e $]c_n, c_{n+1}] \cap B \neq \emptyset$. Para cada $n \in \omega$, consideremos $D_n =]c_n, c_{n+1}] \cap B$. Temos que $\{D_n : n \in \omega\} \cup \{\omega \setminus \cup_{n \in \omega} D_n\}$ é uma partição de ω tal que $\omega \setminus \cup_{n \in \omega} D_n \notin p_\xi$ e $D_n \notin p_\xi$, para todo $n \in \omega$. Da seletividade de p_ξ segue que existe $\{a_n^\xi : n \in \omega\} \in p_\xi$ tal que $a_n^\xi \in D_n$, para todo $n \in \omega$. Em particular, $a_n \in B_n^\xi$, o que implica que $a_n^\xi \in A_n^\xi$ e $n < a_n^\xi$, para todo $n \in \omega$.

Do lema 1.5.4 segue que existe $\{I_\xi : \xi \in E \setminus \omega\}$ uma família de subconjuntos de ω dois a dois disjuntos tal que:

(a) $\{a_n^\xi : n \in I_\xi\} \in p_\xi$, para cada $\xi \in E \setminus \omega$;

(b) $\{[n, a_n^\xi] : n \in I_\xi,\ \xi \in E \setminus \omega\}$ é uma família de intervalos de ω dois a dois disjuntos.

Para cada $\xi \in E \setminus \omega$, seja

(c) $N_\xi = \min\{n \in \omega : \xi \in F_n\}$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que

(d) $N_\xi < n$, para todo $n \in I_\xi$.[6]

Consideremos $\{n_k : k \in \omega\}$ uma enumeração estritamente crescente de $\dot{\cup}_{\xi \in E \setminus \omega} I_\xi$.[7] Seja

$$\begin{array}{rccc} i: & \omega & \to & E \setminus \omega \\ & k & \mapsto & i(k) \end{array}$$

onde $i(k)$ é o único elemento de $E \setminus \omega$ tal que $n_k \in I_{i(k)}$.

Para cada $k \in \omega$, façamos $b_k = a_{n_k}^{i(k)}$, $E_k = F_{n_k}$ e definamos r_k segundo os ítens (viii) e (ix) do enunciado deste lema. Resta mostrar que as condições (i)-(vii) estão satisfeitas.

(i) Como $0 \leq n_0$, temos que $E_0 = F_{n_0} \supset F_0 \supset \operatorname{supp} J$.

(ii) $\cup_{k \in \omega} E_k = \cup_{k \in \omega} F_{n_k} = E$.

(iii) Seja $k \in \omega$. Temos que $n_k \in I_{i(k)}$. De (d) segue que $N_{i(k)} < n_k$. De (c) e (3) vem que $i(k) \in F_{N_{i(k)}} \subset F_{n_k} = E_k$.

(iv) De (3) vem que $E_k \subset E_{k+1}$, pois $\{n_k : k \in \omega\}$ é uma enumeração estritamente crescente de $\dot{\cup}_{\xi \in E \setminus \omega} I_\xi$. Resta mostrar que $\operatorname{supp} f_{i(m)}(b_m) \subset E_{k+1}$, para cada $m \leq k$. De (3) decorre que

$$E_{k+1} = F_{n_{k+1}} \supset \bigcup \{\operatorname{supp} f_\xi(m) : m \leq n_{k+1} - 1, \xi \in F_{n_{k+1}-1} \setminus \omega\}.$$

Por (iii), $i(m) \in E_m \subset E_k = F_{n_k} \subset F_{n_{k+1}-1}$, para todo $m \leq k$. Além disso, $i(m) \notin \omega$. Por (b), $b_m = a_{n_m}^{i(m)} \leq n_{k+1} - 1$, para todo $m \leq k$. Logo, $\operatorname{supp} f_{i(m)}(b_m) \subset E_{k+1}$.

(v) Seja $\xi \in E \setminus \omega$. Temos que $\{b_k : k \in i^{-1}(\{\xi\})\} = \{a_{n_k}^{i(k)} : k \in i^{-1}(\{\xi\})\} = \{a_n^\xi : n \in I_\xi\} \in p_\xi$, por (a).

(vi) Suponhamos que $f_{i(k)}$ seja do tipo 1. Temos que $b_k = a_{n_k}^{i(k)} \in A_{n_k}^{i(k)}$. Da definição de $A_{n_k}^{i(k)}$ vem que

$$||f_{i(k)}(b_k)|| > 2^{n_k+4} \cdot Y_{n_k-1}$$

onde

$$Y_{n_k-1} = ||J|| \cdot \prod_{\substack{l \leq n_k-1 \\ \zeta \in F_{n_k-1} \setminus \omega}} ||f_\zeta(l)||.$$

[6] As condições (a) e (b) permanecem válidas se substituirmos I_ξ por $I_\xi \setminus \{0, 1, ..., N_\xi\}$.

[7] Logo, $k \leq n_k$, para cada $k \in \omega$.

Observamos que se $m < k$, então $n_m \leq n_{k-1}$ e, portanto, $i(m) \in E_m = F_{n_m} \subset F_{n_{k-1}} \subset F_{n_k-1}$. Note que $i(m) \notin \omega$. Como $b_m = a_{n_m}^{i(m)}$ e $[n_m, a_{n_m}^{i(m)}] \cap [n_k, a_{n_k}^{i(k)}] = \emptyset$, temos que $b_m < n_k$ e, portanto, $b_m \leq n_k - 1$. Uma vez que

$$r_k = \frac{1}{2^{k+2} \cdot ||J|| \cdot \prod_{m<k} ||f_{i(m)}(b_m)||}$$

concluímos que

$$||f_{i(k)}(b_k)|| \cdot r_k > 4.$$

(vii) Suponhamos que $f_{i(k)}$ seja do tipo 2. Temos que $b_k = a_{n_k}^{i(k)} \in A_{n_k}^{i(k)}$. Da definição de $A_{n_k}^{i(k)}$ vem que

$$\operatorname{supp} f_{i(k)}(b_k) \setminus E_k = \operatorname{supp} f_{i(k)}(b_k) \setminus F_{n_k} \neq \emptyset. \qquad \square$$

Recordamos que $\mathcal{B}$ denota o conjunto de todos os arcos abertos não vazios de $\mathbb{T}$.

Lema 2.2.3. *Sejam $J \in \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})} \setminus \{0\}$ e $E \in [\mathfrak{c}]^\omega$ satisfazendo as condições (i), (ii) e (iii) da proposição 2.2.1. Existe $\phi_J \restriction_{\mathbb{Z}^{(E)}} : \mathbb{Z}^{(E)} \to \mathbb{T}$ um homomorfismo de grupos com as seguintes propriedades:*

(i) $\phi_J \restriction_{\mathbb{Z}^{(E)}} (J) \neq 0 + \mathbb{Z}$;

(ii) $\phi_J \restriction_{\mathbb{Z}^{(E)}} (\chi_\xi) = p_\xi - \lim\{\phi_J \restriction_{\mathbb{Z}^{(E)}} (f_\xi(n)) : n \in \omega\}$, *para cada* $\xi \in E \setminus \omega$;

(iii) $\phi_J \restriction_{\mathbb{Z}^{(E)}} (\chi_n) \to 0 + \mathbb{Z}$.[8]

Demonstração. Consideremos $\{E_k : k \in \omega\}$, $\{b_k : k \in \omega\}$, $\{r_k : k \in \omega\}$ e $i : \omega \to E \setminus \omega$ de acordo com o lema 2.2.2. A fim de exibirmos um homomorfismo de grupos $\phi_J \restriction_{\mathbb{Z}^{(E)}}$ satisfazendo as condições (i), (ii) e (iii) deste lema, construiremos indutivamente aplicações auxiliares $\psi_k : E \to \mathcal{B}$, para cada $k \in \omega$.

Para cada $\xi \in E_0$, tomemos $y_\xi \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{\xi \in \operatorname{supp} J} J(\xi) \cdot y_\xi = \frac{1}{2}$$

e definamos $\psi_0(\xi)$ como sendo o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado em $y_\xi + \mathbb{Z}$ com diâmetro r_0. Temos

[8] Estamos considerando $\mathbb{Z}^{(E)} \subset \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})}$.

que

$$\delta\Big(\sum_{\xi\in\operatorname{supp} J} J(\xi)\cdot\psi_0(\xi)\Big) \leq \sum_{\xi\in\operatorname{supp} J} |J(\xi)|\cdot\delta(\psi_0(\xi)) = ||J||\cdot r_0 = \frac{1}{4}.$$

Logo,

$$0+\mathbb{Z} \notin \sum_{\xi\in\operatorname{supp} J} J(\xi)\cdot\psi_0(\xi)$$

uma vez que

$$\frac{1}{2}+\mathbb{Z} \in \sum_{\xi\in\operatorname{supp} J} J(\xi)\cdot\psi_0(\xi).$$

Por fim, se $\xi \in E\setminus E_0$, façamos $\psi_0(\xi)=\mathbb{T}$.

Seja $k\in\omega$ e suponhamos definida $\psi_k : E\to\mathcal{B}$. Vamos construir $\psi_{k+1} : E\to\mathcal{B}$ com as seguintes propriedades:

(1) $\overline{\psi_{k+1}(\xi)} \subset \psi_k(\xi)$, para todo $\xi\in E$;

(2) Se $\xi\in E\setminus E_{k+1}$, então $\psi_{k+1}(\xi)=\mathbb{T}$;
Se $\xi\in E_{k+1}$, então $\delta(\psi_{k+1}(\xi))=r_{k+1}$;

(3) $\psi_k(i(k))\cap\sum_{\mu\in\operatorname{supp} f_{i(k)}(b_k)} f_{i(k)}(b_k)(\mu)\cdot\psi_{k+1}(\mu)\neq\emptyset$;

(4) Se $\xi\in(E_{k+1}\setminus E_k)\cap\omega$, então $\delta(x,0+\mathbb{Z})<r_k$, para todo $x\in\psi_{k+1}(\xi)$.

Se $\xi\in(E_{k+1}\setminus E_k)\cap\omega$, seja $\tilde{\psi}_k(\xi)$ o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado em $0+\mathbb{Z}$ com diâmetro r_k. Se $\xi\in(E_{k+1}\setminus E_k)\setminus\omega$, seja $\tilde{\psi}_k(\xi)$ um arco aberto de $\mathbb{T}$ com diâmetro r_k. Se $\xi\in E_k$, tomemos $\tilde{\psi}_k(\xi)=\psi_k(\xi)$.

Se $\xi\in E\setminus E_{k+1}$, façamos $\psi_{k+1}(\xi)=\mathbb{T}$. Se $\xi\in E_{k+1}\setminus\operatorname{supp} f_{i(k)}(b_k)$, seja $\psi_{k+1}(\xi)$ o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado no ponto médio de $\tilde{\psi}_k(\xi)$ com diâmetro r_{k+1}. Vamos, agora, definir $\psi_{k+1}(\xi)$ para $\xi\in\operatorname{supp} f_{i(k)}(b_k)$.

Caso 1: $f_{i(k)}$ é do tipo 1.

Temos que

$$\sum_{\mu\in\operatorname{supp} f_{i(k)}(b_k)} f_{i(k)}(b_k)(\mu)\cdot\tilde{\tilde{\psi}}_k(\mu)=\mathbb{T}$$

onde $\tilde{\tilde{\psi}}_k(\mu)$ é o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado no ponto médio de $\tilde{\psi}_k(\mu)$ com diâmetro

$$\delta(\tilde{\tilde{\psi}}_k(\mu))=\frac{r_k}{4}.$$

Portanto, para cada $\mu \in \operatorname{supp} f_{i(k)}(b_k)$, existe $x_\mu^k \in \tilde{\tilde{\psi}}_k(\mu)$ tal que

$$\sum_{\mu \in \operatorname{supp} f_{i(k)}(b_k)} f_{i(k)}(b_k)(\mu) \cdot x_\mu^k \in \psi_k(i(k)).$$

Consideremos $\psi_{k+1}(\mu)$ o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado em x_μ^k com diâmetro r_{k+1}.

As condições (1), (2), (3) e (4) estão verificadas. De fato, se $\xi \in E_k$, então $\tilde{\tilde{\psi}}_k(\xi)$ é o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado no ponto médio de $\psi_k(\xi)$ com diâmetro $\frac{r_k}{4}$. Como $x_\xi^k \in \tilde{\tilde{\psi}}_k(\xi)$ e $r_{k+1} \leq \frac{r_k}{2}$, temos que $\overline{\psi_{k+1}(\xi)} \subset \psi_k(\xi)$. Se $\xi \in (E_{k+1} \setminus E_k) \cap \omega$, então $\tilde{\tilde{\psi}}_k(\xi)$ é o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado em $0 + \mathbb{Z}$ com diâmetro $\frac{r_k}{4}$. Como $x_\xi^k \in \tilde{\tilde{\psi}}_k(\xi)$ e $r_{k+1} \leq \frac{r_k}{2}$, temos que $\delta(x, 0 + \mathbb{Z}) < r_k$, para todo $x \in \psi_{k+1}(\xi)$.

Caso 2: $f_{i(k)}$ é do tipo 2.

Tomemos $\alpha \in \operatorname{supp} f_{i(k)}(b_k) \setminus E_k$. Para cada $\xi \in \operatorname{supp} f_{i(k)}(b_k) \setminus \{\alpha\}$, denotemos por z_ξ o ponto médio de $\tilde{\psi}_k(\xi)$. Como $\psi_k(\alpha) = \mathbb{T}$, existe $z_\alpha \in \psi_k(\alpha)$ tal que

$$\sum_{\mu \in \operatorname{supp} f_{i(k)}(b_k) \setminus \{\alpha\}} f_{i(k)}(b_k)(\mu) \cdot z_\mu + f_{i(k)}(b_k)(\alpha) \cdot z_\alpha \in \psi_k(i(k)).$$

Assim, para cada $\xi \in \operatorname{supp} f_{i(k)}(b_k)$, definimos $\psi_{k+1}(\xi)$ como sendo o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado em z_ξ com diâmetro r_{k+1}.

As condições (1), (2), (3) e (4) estão verificadas, uma vez que $\operatorname{supp} f_{i(k)}(b_k) \cap \omega = \emptyset$.

Como $\mathbb{T}$ é um espaço métrico completo e $(r_k)_{k \in \omega}$ é uma seqüência de números reais positivos que converge para 0, concluímos que se $\xi \in E$, então $\cap_{k \in \omega} \psi_k(\xi) = \cap_{k \in \omega} \overline{\psi_k(\xi)}$ é um conjunto unitário. Denotaremos por $\phi(\chi_\xi)$ o único elemento de $\cap_{k \in \omega} \psi_k(\xi)$. Uma vez que $\{\chi_\xi : \xi \in E\}$ é um subconjunto independente e gerador de $\mathbb{Z}^{(E)}$ é possível estender ϕ a um homomorfismo de grupos $\phi_J \restriction_{\mathbb{Z}^{(E)}} : \mathbb{Z}^{(E)} \to \mathbb{T}$.

Temos que

$$\phi_J \restriction_{\mathbb{Z}^{(E)}} (J) = \sum_{\mu \in \operatorname{supp} J} J(\mu) \cdot \phi_J \restriction_{\mathbb{Z}^{(E)}} (\chi_\mu) \in \sum_{\mu \in \operatorname{supp} J} J(\mu) \cdot \psi_0(\mu)$$

e, portanto, $\phi_J \restriction_{\mathbb{Z}^{(E)}} (J) \neq 0 + \mathbb{Z}$. Logo, (i) está verificada.

Fixemos $\xi \in E \setminus \omega$. Para cada $k \in i^{-1}(\{\xi\})$, temos que

$$\phi_J \restriction_{\mathbb{Z}^{(E)}} (f_{i(k)}(b_k)) \in \sum_{\mu \in \operatorname{supp} f_{i(k)}(b_k)} f_{i(k)}(b_k)(\mu) \cdot \psi_{k+1}(\mu)$$

e

$$\phi_J \restriction_{\mathbb{Z}^{(E)}} (\chi_{i(k)}) \in \psi_k(i(k)).$$

De (3) segue que

$$\begin{aligned} \delta(\phi_J \restriction_{\mathbb{Z}^{(E)}} (f_{i(k)}(b_k)), \phi_J \restriction_{\mathbb{Z}^{(E)}} (\chi_{i(k)})) &\leq d_1 + d_2 \\ &< 2r_k \end{aligned}$$

onde

$$d_1 = \delta(\textstyle\sum_{\mu \in \operatorname{supp} f_{i(k)}(b_k)} f_{i(k)}(b_k)(\mu) \cdot \psi_{k+1}(\mu))$$

e

$$d_2 = \delta(\psi_k(i(k))).$$

Como $r_k \to 0$, a seqüência $\{\phi_J \restriction_{\mathbb{Z}^{(E)}} (f_\xi(b_k)) : k \in i^{-1}(\xi)\}$ converge para $\phi_J \restriction_{\mathbb{Z}^{(E)}} (\chi_\xi)$. Da propriedade (v) do lema 2.2.2 segue que

$$\phi_J \restriction_{\mathbb{Z}^{(E)}} (\chi_\xi) = p_\xi - \lim\{\phi_J \restriction_{\mathbb{Z}^{(E)}} (f_\xi(n)) : n \in \omega\}.$$

Logo, (ii) está verificada.

Resta mostrar que a seqüência $\{\phi_J \restriction_{\mathbb{Z}^{(E)}} (\chi_n) : n \in \omega\}$ converge para $0 + \mathbb{Z}$. Para tanto, basta observar que fixado $k \in \omega$, o conjunto $\{n \in \omega : \delta(\phi_J \restriction_{\mathbb{Z}^{(E)}} (\chi_n), 0 + \mathbb{Z}) \geq r_k\}$ é finito (uma vez que o mesmo está contido em E_k). Logo, (iii) está verificada. $\square$

Estamos prontos para estender $\phi_J \restriction_{\mathbb{Z}^{(E)}}$ a um homomorfismo de grupos $\phi_J : \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})} \to \mathbb{T}$. Nossa única preocupação será garantir que $\phi_J(\chi_\xi) = p_\xi - \lim\{\phi_J(f_\xi(n)) : n \in \omega\}$ para cada $\xi \in \mathfrak{c} \setminus E$, uma vez que $\operatorname{supp} J \subset E$ e $\omega \subset E$.

Lema 2.2.4. *Para cada $J \in \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})} \setminus \{0\}$, existe $\phi_J : \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})} \to \mathbb{T}$ um homomorfismo de grupos tal que:*

(i) $\phi_J(J) \neq 0 + \mathbb{Z}$;

(ii) $\phi_J(\chi_\xi) = p_\xi - \lim\{\phi_J(f_\xi(n)) : n \in \omega\}$, *para cada* $\xi \in [\omega, \mathfrak{c}[$;

(iii) $\phi_J(\chi_n) \to 0 + \mathbb{Z}$.

Demonstração. Faremos a construção de ϕ_J por indução. De acordo com a proposição 2.2.1, existe $E \in [\mathfrak{c}]^\omega$ tal que $\operatorname{supp} J \subset E$, $|E \setminus \omega| = \omega$ e $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f_\xi(n) \subset E$, qualquer que seja $\xi \in E \setminus \omega$. Segundo o lema 2.2.3, é possível construir $\phi_J \restriction_{\mathbb{Z}^{(E)}} : \mathbb{Z}^{(E)} \to \mathbb{T}$ um homomorfismo de grupos com as seguintes propriedades:

(1) $\phi_J \restriction_{\mathbb{Z}^{(E)}} (J) \neq 0 + \mathbb{Z}$;

(2) $\phi_J \restriction_{\mathbb{Z}^{(E)}} (\chi_\xi) = p_\xi - \lim\{\phi_J \restriction_{\mathbb{Z}^{(E)}} (f_\xi(n)) : n \in \omega\}$, para cada $\xi \in E \setminus \omega$;

(3) $\phi_J \restriction_{\mathbb{Z}^{(E)}} (\chi_n) \to 0 + \mathbb{Z}$.

Consideremos $\{\alpha_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ uma enumeração estritamente crescente de $\mathfrak{c} \setminus E$. Definamos

$$\tilde{\phi}_J(\chi_{\alpha_0}) = p_{\alpha_0} - \lim\{\phi_J \restriction_{\mathbb{Z}^{(E)}} (f_{\alpha_0}(n)) : n \in \omega\}$$

e façamos

$$\tilde{\phi}_J(\tilde{J}) = \phi_J \restriction_{\mathbb{Z}^{(E)}} (\tilde{J})$$

para todo $\tilde{J} \in \mathbb{Z}^{(E)}$.[9] Note que a seqüência $\{\phi_J \restriction_{\mathbb{Z}^{(E)}} (f_{\alpha_0}(n)) : n \in \omega\}$ admite p_{α_0}-limite em $\mathbb{T}$, uma vez que $\mathbb{T}$ é compacto. Estendamos $\tilde{\phi}_J$ a um homomorfismo de grupos $\phi_J \restriction_{\mathbb{Z}^{(E\cup\{\alpha_0\})}} : \mathbb{Z}^{(E\cup\{\alpha_0\})} \to \mathbb{T}$.

Repetindo indutivamente esta construção, obteremos $\phi_J : \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})} \to \mathbb{T}$ um homomorfismo de grupos satisfazendo (i), (ii) e (iii). □

2.3 Explicitando a topologia

A próxima proposição mostra que o produto diagonal da família $\{\phi_J : J \in \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})} \setminus \{0\}\}$ é um monomorfismo de grupos.

Proposição 2.3.1. *Suponhamos que, para cada $J \in \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})} \setminus \{0\}$, exista um homomorfismo de grupos $\phi_J : \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})} \to \mathbb{T}$ tal que $\phi_J(J) \neq 0 + \mathbb{Z}$. A aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})} & \to & \mathbb{T}^{\mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})}\setminus\{0\}} \\ & \tilde{J} & \mapsto & \Phi(\tilde{J}) \end{array}$$

dada por

$$\Phi(\tilde{J})(J) = \phi_J(\tilde{J}), \text{ para cada } J \in \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})} \setminus \{0\}$$

[9] Estamos considerando $\mathbb{Z}^{(E)} \subset \mathbb{Z}^{(E\cup\{\alpha_0\})} \subset \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})}$.

é denominada produto diagonal *da família* $\{\phi_J : J \in \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})} \setminus \{0\}\}$ *e é um monomorfismo de grupos.*

Demonstração. Sejam $G, H \in \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})}$. Temos que $\Phi(G+H)(J) = \phi_J(G+H) = \phi_J(G) + \phi_J(H) = \Phi(G)(J) + \Phi(H)(J) = [\Phi(G) + \Phi(H)](J)$, para todo $J \in \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})} \setminus \{0\}$. Logo, Φ é um homomorfismo de grupos. A fim de provar que Φ é injetora, basta mostrar que se $H \in \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})}$ é tal que $\Phi(H) = 0$, então $H = 0$. Suponhamos, portanto, que $H \in \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})}$ seja tal que $\Phi(H) = 0$, ou seja, que $\Phi(H)(J) = 0 + \mathbb{Z}$ para todo $J \in \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})} \setminus \{0\}$. Então, $\phi_J(H) = 0 + \mathbb{Z}$, para todo $J \in \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})} \setminus \{0\}$. Como $\phi_J(J) \neq 0 + \mathbb{Z}$ para cada $J \in \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})} \setminus \{0\}$, temos que $H \notin \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})} \setminus \{0\}$. Logo, $H = 0$. □

Teorema 2.3.2. *O grupo abeliano livre de cardinalidade* $\mathfrak{c}$ *admite uma topologia enumeravelmente compacta com uma seqüência não trivial convergente que o torna um grupo topológico.*

Demonstração. O grupo abeliano livre $\Phi[\mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})}]$ munido da topologia de subespaço induzida por $\mathbb{T}^{\mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})} \setminus \{0\}}$ é um grupo topológico. Não é difícil ver que $\Phi(\chi_n) \to 0$, uma vez que $\phi_J(\chi_n) \to 0 + \mathbb{Z}$, para todo $J \in \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})} \setminus \{0\}$.

Consideremos $f : \omega \to \Phi[\mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})}]$. Da proposição 2.1.2 segue que existe $j : \omega \to \omega$ estritamente crescente tal que $\Phi^{-1} \circ f \circ j$ é do tipo 1 ou $\Phi^{-1} \circ f \circ j = f_1 + f_2$, onde f_2 é do tipo 2 ou constante e existe $m > 0$ um número natural tal que, para cada $n \in \omega$, $f_1(n)$ é uma combinação linear com coeficientes pertencentes a $\{-1, 0, 1\}$ de m elementos de $\{\chi_n : n \in \omega\}$. No primeiro caso temos que $\Phi^{-1} \circ f \circ j = f_\xi$ para algum $\xi \in [\omega, \mathfrak{c}[$ e, portanto, $\Phi(\chi_\xi) = p_\xi - \lim\{\Phi \circ f_\xi(n) : n \in \omega\}$. Suponhamos agora que o segundo caso ocorra. Do fato de a seqüência $\{\Phi(\chi_n) : n \in \omega\}$ ser convergente decorre que existe $\tilde{j} : \omega \to \omega$ estritamente crescente tal que $\Phi \circ f_1 \circ \tilde{j}$ tem p-limite em $\Phi[\mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})}]$, qualquer que seja $p \in \omega^*$. Uma vez que f_2 é do tipo 2 ou constante, temos que $f_2 \circ \tilde{j}$ também o é e, portanto, $\Phi \circ f_2 \circ \tilde{j}$ admite p-limite em $\Phi[\mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})}]$ para algum $p \in \omega^*$. Como $f \circ j \circ \tilde{j} = \Phi \circ f_1 \circ \tilde{j} + \Phi \circ f_2 \circ \tilde{j}$, concluímos que $f \circ j \circ \tilde{j}$ tem p-limite em $\Phi[\mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})}]$ e, portanto, $\Phi[\mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})}]$ é enumeravelmente compacto. □

CAPÍTULO 3

Uma topologia de grupo enumeravelmente compacta sem seqüências não triviais convergentes na reta real

Neste capítulo, assumiremos a existência de $\mathfrak{c}$ ultrafiltros seletivos dois a dois incomparáveis (segundo a ordem de Rudin-Keisler) para mostrar que o grupo aditivo da reta real admite uma topologia enumeravelmente compacta sem seqüências não triviais convergentes que o torna um grupo topológico.

Como queremos aproveitar as idéias desenvolvidas no capítulo 2, começaremos identificando $\mathbb{R}$ com $\mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})}$. Para cada $J \in \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})} \setminus \{0\}$, construiremos $\phi_J : \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})} \to \mathbb{T}$ um homomorfismo de grupos de modo que o produto diagonal da família $\{\phi_J : J \in \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})} \setminus \{0\}\}$ seja injetor e que a imagem de $\mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})}$ por esta aplicação tenha as propriedades desejadas quando munida da topologia de subespaço induzida por $\mathbb{T}^{\mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})}\setminus\{0\}}$.

A principal diferença entre os capítulos 2 e 3 está, justamente, na construção dos homomorfismos ϕ_J. Como os elementos de $\mathbb{T}$ têm mais de uma raiz n-ésima para cada $n > 1$ número natural, precisaremos definir uma aplicação auxiliar adicional no lema 3.2.6 a fim de garantir que cada ϕ_J esteja bem-definido e seja um homomorfismo de grupos.

3.1 Uma escolha adequada de seqüências

Proposição 3.1.1. *O grupo* $(\mathbb{R}, +)$ *é isomorfo ao grupo* $(\mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})}, +)$.

Demonstração. Seja $B = \{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ uma base ordenada de $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$-espaço vetorial. Para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existe um único $F_x \in [\mathfrak{c}]^{<\omega}$ não vazio e um único subconjunto $\{a_\xi : \xi \in F_x\}$ de $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ verificando

$$x = \sum_{\xi \in F_x} a_\xi x_\xi.$$

Façamos $F_0 = \emptyset$. A aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})} \\ & x & \mapsto & f_x \end{array}$$

onde

$$f_x(\xi) = \begin{cases} a_\xi & \text{se} \quad \xi \in F_x \\ 0 & \text{se} \quad \xi \in \mathfrak{c} \setminus F_x \end{cases}$$

é um isomorfismo de grupos. De fato, não há dúvidas de que φ é bijetora. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Se $x = 0$ ou $y = 0$, então $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, uma vez que $\varphi(0) = f_0 = 0$. Suponhamos, portanto, $0 \neq x = \sum_{\xi \in F_x} a_\xi x_\xi$ e $0 \neq y = \sum_{\xi \in F_y} b_\xi x_\xi$. Temos que

$$x + y = \sum_{\xi \in F_x \setminus F_y} a_\xi x_\xi + \sum_{\xi \in F_y \setminus F_x} b_\xi x_\xi + \sum_{\xi \in (F_x \cap F_y) \setminus I} (a_\xi + b_\xi) x_\xi$$

onde

$$I = \{\xi \in F_x \cap F_y : a_\xi + b_\xi = 0\}.$$

Logo, $f_{x+y} = f_x + f_y$, o que implica $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$. $\square$

Se $J \in \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})}$, então

$$J = \sum_{\mu \in \operatorname{supp} J} J(\mu) \cdot \chi_\mu$$

onde $\chi_\mu : \mathfrak{c} \to \mathbb{Q}$ é tal que

$$\chi_\mu(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \xi = \mu \\ 0 & \text{se} \quad \xi \neq \mu. \end{cases}$$

Dado $\mu \in \operatorname{supp} J$, podemos escrever

$$J(\mu) = \frac{p(J, \mu)}{q(J, \mu)}$$

onde $p(J, \mu), q(J, \mu) \in \mathbb{Z}$, $q(J, \mu) > 0$ e $\operatorname{mdc}(p(J, \mu), q(J, \mu)) = 1$. Seja

$$d(J) = \operatorname{mmc}\{q(J, \mu) : \mu \in \operatorname{supp} J\}$$

e, para cada $\mu \in \operatorname{supp} J$, seja

$$a(J,\mu) = p(J,\mu) \cdot \frac{d(J)}{q(J,\mu)}.$$

Por fim, sejam

$$|q(J)| = \max\{q(J,\mu) : \mu \in \operatorname{supp} J\},$$

$$|p(J)| = \max\{|p(J,\mu)| : \mu \in \operatorname{supp} J\},$$

$$|a(J)| = \max\{|a(J,\mu)| : \mu \in \operatorname{supp} J\}$$

e

$$||a(J)|| = \sum_{\mu \in \operatorname{supp} J} |a(J,\mu)|.$$

Denotaremos por $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as funções $f : \omega \to \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})}$ que satisfazem uma das seguintes condições:

(1) $\operatorname{supp} f(n) \setminus \cup_{m<n} \operatorname{supp} f(m) \neq \emptyset$, para todo $n \in \omega$;

(2) $|q(f(n))| > n$, para todo $n \in \omega$;

(3) $\{|q(f(n))| : n \in \omega\}$ é limitado e $|p(f(n))| > n$, para todo $n \in \omega$.

Definição 3.1.2. *Sejam $f \in \mathcal{F}$ e $i \in \{1,2,3\}$. Dizemos que f é* do tipo *i se f satisfaz a condição (i) descrita acima.*

A próxima proposição mostra que é possível recuperar uma subseqüência de cada seqüência não trivial em $\mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})}$ através de $\mathcal{F}$.

Proposição 3.1.3. *Se $f : \omega \to \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})}$, então existe $j : \omega \to \omega$ estritamente crescente tal que $f \circ j$ é constante ou é de um dos tipos acima mencionados.*

Demonstração. Há quatro casos a serem considerados.

Caso 1: $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f(n)$ é infinito.

Seja $n_0 = 0$. Fixemos $k \in \omega$ e suponhamos definidos $n_0, n_1, ..., n_k$. Uma vez que $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f(n)$ é infinito, existe um número natural $n_{k+1} > n_k$ tal que $\operatorname{supp} f(n_{k+1}) \setminus \cup_{l<k+1} \operatorname{supp} f(n_l) \neq \emptyset$. Temos que

$$\begin{array}{rccc} j: & \omega & \to & \omega \\ & k & \mapsto & n_k \end{array}$$

é uma função estritamente crescente tal que $f \circ j$ é do tipo 1.

Caso 2: $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f(n)$ é finito e $\{|q(f(n))| : n \in \omega\}$ é ilimitado.
Por indução, tomemos $\{n_k : k \in \omega\}$ uma seqüência estritamente crescente de números naturais tal que $|q(f(n_k))| > k$, para todo $k \in \omega$. Temos que

$$\begin{array}{rccc} j: & \omega & \to & \omega \\ & k & \mapsto & n_k \end{array}$$

é uma função estritamente crescente tal que $f \circ j$ é do tipo 2.

Caso 3: $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f(n)$ é finito, $\{|q(f(n))| : n \in \omega\}$ é limitado e $\{|p(f(n))| : n \in \omega\}$ é ilimitado.
Por indução, tomemos $\{n_k : k \in \omega\}$ uma seqüência estritamente crescente de números naturais tal que $|p(f(n_k))| > k$, para todo $k \in \omega$. Temos que

$$\begin{array}{rccc} j: & \omega & \to & \omega \\ & k & \mapsto & n_k \end{array}$$

é uma função estritamente crescente tal que $f \circ j$ é do tipo 3.

Caso 4: $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f(n)$ é finito, $\{|p(f(n))| : n \in \omega\}$ e $\{|q(f(n))| : n \in \omega\}$ são limitados.
Temos que $\{f(n) : n \in \omega\}$ é um conjunto finito e, portanto, f possui uma subseqüência constante. □

Proposição 3.1.4. *Existe* $\{f_\xi : 0 < \xi < \mathfrak{c}\}$ *uma indexação de* $\mathcal{F}$ *tal que* $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f_\xi(n) \subset \xi$, *para todo* $\xi \in]0, \mathfrak{c}[$.

Demonstração. Análoga à da proposição 2.1.3. □

3.2 Construindo homomorfismos de grupos

Sejam $\{p_\xi : 0 < \xi < \mathfrak{c}\}$ uma família de ultrafiltros seletivos dois a dois incomparáveis segundo a ordem de Rudin-Keisler e $\{f_\xi : 0 < \xi < \mathfrak{c}\}$ uma indexação de $\mathcal{F}$ tal que $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f_\xi(n) \subset \xi$, qualquer que seja $\xi \in]0, \mathfrak{c}[$.

Proposição 3.2.1. *Seja* $J \in \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})} \setminus \{0\}$. *Existe* $E \in [\mathfrak{c}]^\omega$ *tal que* $\operatorname{supp} J \subset E$ *e* $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f_\xi(n) \subset E$, *para cada* $\xi \in E \setminus \{0\}$.

Demonstração. Análoga à da proposição 2.2.1. □

Lema 3.2.2. *Sejam* $J \in \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})} \setminus \{0\}$ *e* $E \in [\mathfrak{c}]^{\omega}$ *tais que* $\operatorname{supp} J \subset E$ *e* $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f_\xi(n) \subset E$*, para cada* $\xi \in E\setminus\{0\}$*. Existe* $\{E_k : k \in \omega\}$ *uma família de subconjuntos finitos de* E*,* $\{b_k : k \in \omega\}$ *uma seqüência estritamente crescente de números naturais,* $\{r_k : k \in \omega\}$ *uma seqüência de números reais positivos e* $i : \omega \to E \setminus \{0\}$ *tais que:*

(i) $\operatorname{supp} J \subset E_0$*;*

(ii) $E = \cup_{k\in\omega} E_k$*;*

(iii) $i(k) \in E_k$*, para todo* $k \in \omega$*;*

(iv) $E_{k+1} \supset E_k \cup \bigcup\{\operatorname{supp} f_{i(m)}(b_m) : m \leq k\}$*, para todo* $k \in \omega$*;*

(v) $\{b_k : k \in i^{-1}(\{\xi\})\} \in p_\xi$*, para todo* $\xi \in E \setminus \{0\}$*;*

(vi) Se $f_{i(k)}$ *é do tipo 1, então* $\operatorname{supp} f_{i(k)}(b_k) \setminus E_k \neq \emptyset$*;*

(vii) Se $f_{i(k)}$ *é do tipo 2, então* $|q(f_{i(k)}(b_k))| \cdot r_k > d(J) \cdot \prod_{m<k} d(f_{i(m)}(b_m))$*;*

(viii) Se $f_{i(k)}$ *é do tipo 3, então* $|a(f_{i(k)}(b_k))| \cdot r_k > 4 \cdot d(f_{i(k)}(b_k))$*;*

(ix) $r_0 = \dfrac{1}{4 \cdot ||a(J)||}$*;*

(x) $r_{k+1} = \dfrac{r_k}{2 \cdot ||a(f_{i(k)}(b_k))||}$*, para todo* $k \in \omega$*.*

Demonstração. Consideremos $\{a_n : n \in \omega\}$ uma enumeração de E. Sejam $F_0 = \operatorname{supp} J \cup \{a_0\}$ e $F_{n+1} = F_n \cup \bigcup\{\operatorname{supp} f_\xi(m) : m \leq n, \xi \in F_n \setminus \{0\}\} \cup \{a_{n+1}\}$, para cada $n \in \omega$. Temos que $\{F_n : n \in \omega\}$ é uma família de subconjuntos finitos de E tal que:

(1) $\operatorname{supp} J \subset F_0$;

(2) $E = \cup_{n\in\omega} F_n$;

(3) $F_{n+1} \supset F_n \cup \bigcup\{\operatorname{supp} f_\xi(m) : m \leq n, \xi \in F_n \setminus \{0\}\}$.

Fixemos $\xi \in E \setminus \{0\}$ e $n \in \omega$. Se f_ξ é do tipo 1, definimos

$$A_n^\xi = \{k \in \omega : \operatorname{supp} f_\xi(k) \setminus F_n \neq \emptyset\}.$$

Se f_ξ é do tipo 2, definimos

$$A_n^\xi = \{k \in \omega : |q(f_\xi(k))| > 2^{n+2} \cdot X_{n-1}\}$$

onde

$$X_m = ||a(J)|| \cdot d(J) \cdot \prod_{\substack{l \leq m \\ \zeta \in F_m \setminus \{0\}}} d(f_\zeta(l)) \cdot \prod_{\substack{l \leq m \\ \zeta \in F_m \setminus \{0\}}} ||a(f_\zeta(l))||$$

para todo $m \in \omega$ e

$$X_{-1} = ||a(J)|| \cdot d(J).$$

Se f_ξ é do tipo 3, então $|a(f_\xi(n))| > n$ para cada $n \in \omega$ e $\{|q(f_\xi(n))| : n \in \omega\}$ é limitado. Tomemos $M_\xi \in \omega$ tal que $|q(f_\xi(n))| \leq M_\xi$, para todo $n \in \omega$. Definimos

$$A_n^\xi = \{k \in \omega : |a(f_\xi(k))| > 2^{n+4} \cdot M_\xi! \cdot Y_{n-1}\}$$

onde

$$Y_m = ||a(J)|| \cdot \prod_{\substack{l \leq m \\ \zeta \in F_m \setminus \{0\}}} ||a(f_\zeta(l))||$$

para todo $m \in \omega$ e

$$Y_{-1} = ||a(J)||.$$

Observamos que A_n^ξ é um subconjunto cofinito de ω, quaisquer que sejam $n \in \omega$ e $\xi \in E \setminus \{0\}$. Logo, para cada $\xi \in E \setminus \{0\}$, temos que $\{A_n^\xi : n \in \omega\} \subset p_\xi$, uma vez que p_ξ é um ultrafiltro livre sobre ω. Da seletividade de p_ξ decorre que existe uma seqüência $\{a_n^\xi : n \in \omega\} \in p_\xi$ tal que $a_n^\xi \in A_n^\xi$ e $n < a_n^\xi$, para cada $n \in \omega$.

Do lema 1.5.4 segue que existe $\{I_\xi : \xi \in E \setminus \{0\}\}$ uma família de subconjuntos de ω dois a dois disjuntos tal que:

(a) $\{a_n^\xi : n \in I_\xi\} \in p_\xi$, para cada $\xi \in E \setminus \{0\}$;

(b) $\{[n, a_n^\xi] : n \in I_\xi,\ \xi \in E \setminus \{0\}\}$ é uma família de intervalos de ω dois a dois disjuntos.

Para cada $\xi \in E \setminus \{0\}$, seja

(c) $N_\xi = \min\{n \in \omega : \xi \in F_n\}$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que

(d) $N_\xi < n$, para todo $n \in I_\xi$.

Consideremos $\{n_k : k \in \omega\}$ uma enumeração estritamente crescente de $\dot{\cup}_{\xi \in E\setminus\{0\}} I_\xi$. Seja

$$\begin{array}{rccc} i: & \omega & \to & E \setminus \{0\} \\ & k & \mapsto & i(k) \end{array}$$

onde $i(k)$ é o único elemento de $E \setminus \{0\}$ tal que $n_k \in I_{i(k)}$.

Para cada $k \in \omega$, façamos $b_k = a_{n_k}^{i(k)}$, $E_k = F_{n_k}$ e definamos r_k segundo os ítens (ix) e (x) do enunciado deste lema. Resta mostrar que as condições (i)-(viii) estão satisfeitas.

(i) Como $0 \leq n_0$, temos que $E_0 = F_{n_0} \supset F_0 \supset \operatorname{supp} J$.

(ii) $\cup_{k\in\omega} E_k = \cup_{k\in\omega} F_{n_k} = E$.

(iii) Seja $k \in \omega$. Temos que $n_k \in I_{i(k)}$. De (d) segue que $N_{i(k)} < n_k$. De (c) e (3) vem que $i(k) \in F_{N_{i(k)}} \subset F_{n_k} = E_k$.

(iv) De (3) vem que $E_k \subset E_{k+1}$, pois $\{n_k : k \in \omega\}$ é uma enumeração estritamente crescente de $\cup_{\xi\in E\setminus\{0\}} I_\xi$. Resta mostrar que $\operatorname{supp} f_{i(m)}(b_m) \subset E_{k+1}$, para cada $m \leq k$. De (3) decorre que

$$E_{k+1} = F_{n_{k+1}} \supset \bigcup\{\operatorname{supp} f_\xi(m) : m \leq n_{k+1} - 1, \xi \in F_{n_{k+1}-1} \setminus \{0\}\}.$$

Por (iii), $i(m) \in E_m \subset E_k = F_{n_k} \subset F_{n_{k+1}-1}$, para todo $m \leq k$. Além disso, $i(m) \neq 0$. Por (b), $b_m = a_{n_m}^{i(m)} \leq n_{k+1} - 1$, para todo $m \leq k$. Logo, $\operatorname{supp} f_{i(m)}(b_m) \subset E_{k+1}$.

(v) Seja $\xi \in E \setminus \{0\}$. Temos que $\{b_k : k \in i^{-1}(\{\xi\})\} = \{a_{n_k}^{i(k)} : k \in i^{-1}(\{\xi\})\} = \{a_n^\xi : n \in I_\xi\} \in p_\xi$, por (a).

(vi) Suponhamos que $f_{i(k)}$ seja do tipo 1. Temos que $b_k = a_{n_k}^{i(k)} \in A_{n_k}^{i(k)}$. Da definição de $A_{n_k}^{i(k)}$ vem que

$$\operatorname{supp} f_{i(k)}(b_k) \setminus E_k = \operatorname{supp} f_{i(k)}(b_k) \setminus F_{n_k} \neq \emptyset.$$

(vii) Suponhamos que $f_{i(k)}$ seja do tipo 2. Temos que $b_k = a_{n_k}^{i(k)} \in A_{n_k}^{i(k)}$. Da definição de $A_{n_k}^{i(k)}$ vem que

$$|q(f_{i(k)}(b_k))| > 2^{n_k+2} \cdot X_{n_k-1}$$

onde

$$X_{n_k-1} = ||a(J)|| \cdot d(J) \cdot \prod_{\substack{m \leq n_k-1 \\ \xi \in F_{n_k-1} \setminus \{0\}}} d(f_\xi(m)) \cdot \prod_{\substack{m \leq n_k-1 \\ \xi \in F_{n_k-1} \setminus \{0\}}} ||a(f_\xi(m))||.$$

Observamos que se $m < k$, então $n_m \leq n_{k-1}$ e, portanto, $i(m) \in E_m = F_{n_m} \subset F_{n_{k-1}} \subset F_{n_k-1}$. Note que $i(m) \neq 0$. Como $b_m = a_{n_m}^{i(m)}$ e $[n_m, a_{n_m}^{i(m)}] \cap [n_k, a_{n_k}^{i(k)}] = \emptyset$, temos que $b_m < n_k$ e, portanto, $b_m \leq n_k - 1$. Uma vez que

$$r_k = \frac{1}{2^{k+2} \cdot ||a(J)|| \cdot \prod_{m<k} ||a(f_{i(m)}(b_m))||}$$

concluímos que

$$|q(f_{i(k)}(b_k))| \cdot r_k > d(J) \cdot \prod_{m<k} d(f_{i(m)}(b_m)).$$

(viii) Suponhamos que $f_{i(k)}$ seja do tipo 3. Um argumento análogo ao apresentado em (vii) nos permite concluir que

$$|a(f_{i(k)}(b_k))| \cdot r_k > 4 \cdot M_{i(k)}! \geq 4 \cdot d(f_{i(k)}(b_k)).$$ □

Os próximos três lemas compreendem a parte técnica referente aos tipos 1, 2 e 3.

Lema 3.2.3. *Sejam $I \in [\mathfrak{c}]^{\mathfrak{c}}$, $c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\epsilon > 0$, $A \in \mathcal{B}$, $F \in [I]^{<\omega}$, $J \in \mathbb{Q}^{(I)}$, $\mu \in \operatorname{supp} J \setminus F$ e $\psi : F \to \mathcal{B} \setminus \{\mathbb{T}\}$ com $\delta(\psi(\xi)) \geq \epsilon/c$, para todo $\xi \in F$. Seja $\tilde{F} = F \cup \operatorname{supp} J$. Existe $\tilde{\psi} : \tilde{F} \to \mathcal{B}$ satisfazendo as seguintes condições:*

(i) $d(J) \cdot \overline{\tilde{\psi}(\xi)} \subset \psi(\xi)$, *para todo* $\xi \in F$;

(ii) $\delta(\tilde{\psi}(\xi)) = \dfrac{\epsilon}{2 \cdot ||a(J)|| \cdot c \cdot d(J)}$, *para todo* $\xi \in \tilde{F}$;

(iii) $\delta(\sum_{\xi \in \operatorname{supp} J} a(J, \xi) \cdot c \cdot \tilde{\psi}(\xi)) < \epsilon$;

(iv) $A \cap \sum_{\xi \in \operatorname{supp} J} a(J, \xi) \cdot c \cdot \tilde{\psi}(\xi) \neq \emptyset$.

Demonstração. Se $\xi \in \tilde{F} \setminus \operatorname{supp} J \subset F$, fixemos uma raiz $d(J)$-ésima do ponto médio de $\psi(\xi)$ e definamos $\tilde{\psi}(\xi)$ como sendo o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado na raiz em questão com diâmetro

$$\delta(\tilde{\psi}(\xi)) = \frac{\epsilon}{2 \cdot ||a(J)|| \cdot c \cdot d(J)}.$$

Se $\xi \in \operatorname{supp} J \setminus \{\mu\}$, fixemos $z_\xi \in \mathbb{T}$ da seguinte maneira: se $\xi \in F$, então z_ξ é uma raiz $d(J)$-ésima do ponto médio de $\psi(\xi)$; se $\xi \notin F$, então z_ξ é um elemento arbitrário de $\mathbb{T}$. Seja

$$x = \sum_{\xi \in \operatorname{supp} J \setminus \{\mu\}} a(J,\xi) \cdot c \cdot z_\xi.$$

Tomemos $z_\mu \in \mathbb{T}$ tal que

$$x + a(J,\mu) \cdot c \cdot z_\mu \in A.$$

Para cada $\xi \in \operatorname{supp} J$, definimos $\tilde{\psi}(\xi)$ como sendo o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado em z_ξ com diâmetro

$$\delta(\tilde{\psi}(\xi)) = \frac{\epsilon}{2 \cdot ||a(J)|| \cdot c \cdot d(J)}.$$

As condições (i), (ii), (iii) e (iv) estão verificadas. De fato, é evidente que (i) e (ii) estão satisfeitas, uma vez que para cada $\xi \in F$, z_ξ é uma raiz $d(J)$-ésima do ponto médio de $\psi(\xi)$. A condição (iii) é uma conseqüência de (ii). Por fim, a validade de (iv) decorre da escolha de z_μ. □

Lema 3.2.4. *Sejam $I \in [\mathfrak{c}]^{\mathfrak{c}}$, $c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\epsilon > 0$, $A \in \mathcal{B}$ com $\delta(A) \geq \epsilon$, $F \in [I]^{<\omega}$, $J \in \mathbb{Q}^{(I)}$, $\mu \in F \cap \operatorname{supp} J$ com $q(J,\mu) \cdot \epsilon > c$ e $\psi : F \to \mathcal{B} \setminus \{\mathbb{T}\}$ com $\delta(\psi(\xi)) \geq \epsilon/c$, para todo $\xi \in F$. Seja $\tilde{F} = F \cup \operatorname{supp} J$. Existe $\tilde{\psi} : \tilde{F} \to \mathcal{B}$ satisfazendo as seguintes condições:*

(i) $d(J) \cdot \overline{\tilde{\psi}(\xi)} \subset \psi(\xi)$, *para todo* $\xi \in F$;

(ii) $\delta(\tilde{\psi}(\xi)) = \dfrac{\epsilon}{2 \cdot ||a(J)|| \cdot c \cdot d(J)}$, *para todo* $\xi \in \tilde{F}$;

(iii) $\delta(\sum_{\xi \in \operatorname{supp} J} a(J,\xi) \cdot c \cdot \tilde{\psi}(\xi)) < \epsilon$;

(iv) $A \cap \sum_{\xi \in \operatorname{supp} J} a(J,\xi) \cdot c \cdot \tilde{\psi}(\xi) \neq \emptyset$.

Demonstração. Se $\xi \in \tilde{F} \setminus \operatorname{supp} J \subset F$, fixemos uma raiz $d(J)$-ésima do ponto médio de $\psi(\xi)$ e definamos $\tilde{\psi}(\xi)$ como sendo o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado na raiz em questão com diâmetro

$$\delta(\tilde{\psi}(\xi)) = \frac{\epsilon}{2 \cdot ||a(J)|| \cdot c \cdot d(J)}.$$

Se $\xi \in \operatorname{supp} J \setminus \{\mu\}$, fixemos $z_\xi \in \mathbb{T}$ da seguinte maneira: se $\xi \in F$, então z_ξ é uma raiz $d(J)$-ésima do ponto médio de $\psi(\xi)$; se $\xi \notin F$, então z_ξ é um elemento arbitrário de $\mathbb{T}$. Seja

$$x = \sum_{\xi \in \operatorname{supp} J \setminus \{\mu\}} a(J,\xi) \cdot c \cdot z_\xi.$$

Denotemos por x_μ o ponto médio de $\psi(\mu)$. Existem $d(J)$ raízes $d(J)$-ésimas de x_μ. Se multiplicarmos cada uma delas por $a(J,\mu)\cdot c$ teremos

$$\frac{q(J,\mu)}{\mathrm{mdc}(c, q(J,\mu))}$$

novos elementos, uma vez que $p(J,\mu)$ e $q(J,\mu)$ são primos entre si. De

$$\frac{q(J,\mu)}{\mathrm{mdc}(c, q(J,\mu))} \geq \frac{q(J,\mu)}{c} > \frac{1}{\epsilon}$$

segue que a distância entre dois desses novos elementos consecutivos é menor que ϵ. Como $\delta(A-x) = \delta(A) \geq \epsilon$, existe $z_\mu \in \mathbb{T}$ tal que $d(J)\cdot z_\mu = x_\mu$ e

$$x + a(J,\mu)\cdot c\cdot z_\mu \in A.$$

Para cada $\xi \in \operatorname{supp} J$, definimos $\tilde{\psi}(\xi)$ como sendo o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado em z_ξ com diâmetro

$$\delta(\tilde{\psi}(\xi)) = \frac{\epsilon}{2\cdot ||a(J)||\cdot c\cdot d(J)}.$$

As condições (i), (ii), (iii) e (iv) estão verificadas. De fato, é evidente que (i) e (ii) estão satisfeitas, uma vez que para cada $\xi \in F$, z_ξ é uma raiz $d(J)$-ésima do ponto médio de $\psi(\xi)$. A condição (iii) é uma conseqüência de (ii). Por fim, a validade de (iv) decorre da escolha de z_μ. □

Lema 3.2.5. *Sejam $I \in [\mathfrak{c}]^{\mathfrak{c}}$, $c \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\epsilon > 0$, $A \in \mathcal{B}$, $F \in [I]^{<\omega}$, $J \in \mathbb{Q}^{(I)}$, $\mu \in F \cap \operatorname{supp} J$ com $|a(J,\mu)|\cdot\epsilon > 4\cdot d(J)$ e $\psi : F \to \mathcal{B}\setminus\{\mathbb{T}\}$ com $\delta(\psi(\xi)) \geq \epsilon/c$, para todo $\xi \in F$. Seja $\tilde{F} = F \cup \operatorname{supp} J$. Existe $\tilde{\psi} : \tilde{F} \to \mathcal{B}$ satisfazendo as seguintes condições:*

(i) $d(J)\cdot\overline{\tilde{\psi}(\xi)} \subset \psi(\xi)$, *para todo* $\xi \in F$;

(ii) $\delta(\tilde{\psi}(\xi)) = \dfrac{\epsilon}{2\cdot ||a(J)||\cdot c\cdot d(J)}$, *para todo* $\xi \in \tilde{F}$;

(iii) $\delta(\sum_{\xi\in\operatorname{supp} J} a(J,\xi)\cdot c\cdot\tilde{\psi}(\xi)) < \epsilon$;

(iv) $A \cap \sum_{\xi\in\operatorname{supp} J} a(J,\xi)\cdot c\cdot\tilde{\psi}(\xi) \neq \emptyset$.

Demonstração. Se $\xi \in \tilde{F}\setminus\operatorname{supp} J \subset F$, fixemos uma raiz $d(J)$-ésima do ponto médio de $\psi(\xi)$ e

definamos $\tilde{\psi}(\xi)$ como sendo o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado na raiz em questão com diâmetro

$$\delta(\tilde{\psi}(\xi)) = \frac{\epsilon}{2 \cdot ||a(J)|| \cdot c \cdot d(J)}.$$

Se $\xi \in \operatorname{supp} J \setminus \{\mu\}$, fixemos $z_\xi \in \mathbb{T}$ da seguinte maneira: se $\xi \in F$, então z_ξ é uma raiz $d(J)$-ésima do ponto médio de $\psi(\xi)$; se $\xi \notin F$, então z_ξ é um elemento arbitrário de $\mathbb{T}$. Seja

$$x = \sum_{\xi \in \operatorname{supp} J \setminus \{\mu\}} a(J, \xi) \cdot c \cdot z_\xi.$$

Denotemos por x_μ o ponto médio de $\psi(\mu)$. Fixemos uma raiz $d(J)$-ésima de x_μ e, centrado nela, consideremos $\tilde{A}$ o arco aberto de $\mathbb{T}$ com diâmetro

$$\delta(\tilde{A}) = \frac{\epsilon}{4 \cdot c \cdot d(J)}.$$

Se multiplicarmos $\tilde{A}$ por $a(J, \mu) \cdot c$ obteremos $\mathbb{T}$, uma vez que $|a(J, \mu)| \cdot \epsilon > 4 \cdot d(J)$. Portanto, existe $z_\mu \in \tilde{A}$ tal que

$$x + a(J, \mu) \cdot c \cdot z_\mu \in A.$$

Para cada $\xi \in \operatorname{supp} J$, definimos $\tilde{\psi}(\xi)$ como sendo o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado em z_ξ com diâmetro

$$\delta(\tilde{\psi}(\xi)) = \frac{\epsilon}{2 \cdot ||a(J)|| \cdot c \cdot d(J)}.$$

As condições (i), (ii), (iii) e (iv) estão verificadas. De fato, temos que (i) e (ii) estão satisfeitas, já que $\tilde{A}$ é suficientemente pequeno para que $d(J) \cdot \tilde{A}$ esteja contido em $\psi(\xi)$ e $a(J, \mu) \cdot c$ é suficientemente grande para que $a(J, \mu) \cdot c \cdot \tilde{A}$ seja igual a $\mathbb{T}$. A condição (iii) é uma conseqüência de (ii). Por fim, a validade de (iv) decorre da escolha de z_μ. $\square$

Lema 3.2.6. *Sejam $J \in \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})} \setminus \{0\}$ e $E \in [\mathfrak{c}]^\omega$ tais que $\operatorname{supp} J \subset E$ e $\cup_{n \in \omega} \operatorname{supp} f_\xi(n) \subset E$, para cada $\xi \in E \setminus \{0\}$. Existe $\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E)}} \colon \mathbb{Q}^{(E)} \to \mathbb{T}$ um homomorfismo de grupos com as seguintes propriedades:*

(i) $\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E)}} (J) \neq 0 + \mathbb{Z}$;

(ii) $\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E)}} (\chi_\xi) = p_\xi - \lim\{\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E)}} (f_\xi(n)) : n \in \omega\}$, *para cada* $\xi \in E \setminus \{0\}$.[1]

[1] Estamos considerando $\mathbb{Q}^{(E)} \subset \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})}$.

Demonstração. Consideremos $\{E_n : n \in \omega\}$, $\{b_n : n \in \omega\}$, $\{r_n : n \in \omega\}$ e $i : \omega \to E \setminus \{0\}$ de acordo com o lema 3.2.2. A fim de exibirmos um homomorfismo de grupos $\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E)}}$ satisfazendo as condições (i) e (ii) deste lema, construiremos indutivamente aplicações auxiliares $\psi_n : E \to \mathcal{B}$ e $\psi_n^* : E_n \to \mathcal{B}$, para cada $n \in \omega$.

Para cada $\xi \in E_0$, tomemos $y_\xi \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{\xi \in \operatorname{supp} J} J(\xi) \cdot y_\xi = \frac{1}{2}$$

e façamos

$$x_\xi = \frac{1}{d(J)} \cdot y_\xi + \mathbb{Z}.$$

Temos que

$$\sum_{\xi \in \operatorname{supp} J} a(J, \xi) \cdot x_\xi = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}.$$

Seja $\psi_0^*(\xi)$ o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado em x_ξ com diâmetro

$$\delta(\psi_0^*(\xi)) = \frac{r_0}{d(J)}.$$

Seja, também, $\psi_0(\xi) = d(J) \cdot \psi_0^*(\xi)$. Claramente, $\delta(\psi_0(\xi)) = r_0$. Uma vez que

$$\frac{1}{2} + \mathbb{Z} \in \sum_{\xi \in \operatorname{supp} J} a(J, \xi) \cdot \psi_0^*(\xi)$$

e

$$\delta\Bigg(\sum_{\xi \in \operatorname{supp} J} a(J, \xi) \cdot \psi_0^*(\xi) \Bigg) \leq \sum_{\xi \in \operatorname{supp} J} |a(J, \xi)| \cdot \delta(\psi_0^*(\xi)) \leq \frac{1}{4}$$

concluímos que

$$0 + \mathbb{Z} \notin \sum_{\xi \in \operatorname{supp} J} a(J, \xi) \cdot \psi_0^*(\xi).$$

Por fim, se $\xi \in E \setminus E_0$, façamos $\psi_0(\xi) = \mathbb{T}$.

Seja $n \in \omega$. Suponhamos definidas $\psi_n : E \to \mathcal{B}$ e $\psi_n^* : E_n \to \mathcal{B}$. Vamos construir $\psi_{n+1} : E \to \mathcal{B}$ e $\psi_{n+1}^* : E_{n+1} \to \mathcal{B}$ com as seguintes propriedades:

(1) Se $\xi \in E \setminus E_{n+1}$, então $\psi_{n+1}(\xi) = \mathbb{T}$;

(2) Se $\xi \in E_{n+1} \setminus E_n$, então $\psi_{n+1}^*(\xi)$ é tal que:

(a) $d(J) \cdot \prod_{m<n+1} d(f_{i(m)}(b_m)) \cdot \overline{\psi^*_{n+1}(\xi)} \subset \psi_n(\xi)$;
(b) $\delta(\psi^*_{n+1}(\xi)) = \dfrac{r_{n+1}}{d(J) \cdot \prod_{m<n+1} d(f_{i(m)}(b_m))}$.

Neste caso, façamos

$$\psi_{n+1}(\xi) = d(J) \cdot \prod_{m<n+1} d(f_{i(m)}(b_m)) \cdot \psi^*_{n+1}(\xi).$$

(3) Se $\xi \in E_n$, então $\psi^*_{n+1}(\xi)$ é tal que:

(a) $d(f_{i(n)}(b_n)) \cdot \overline{\psi^*_{n+1}(\xi)} \subset \psi^*_n(\xi)$;
(b) $\delta(\psi^*_{n+1}(\xi)) = \dfrac{r_{n+1}}{d(J) \cdot \prod_{m<n+1} d(f_{i(m)}(b_m))}$.

Neste caso, façamos

$$\psi_{n+1}(\xi) = d(J) \cdot \prod_{m<n+1} d(f_{i(m)}(b_m)) \cdot \psi^*_{n+1}(\xi).$$

(4) $\psi_n(i(n)) \cap \sum_{\mu \in \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)} a(f_{i(n)}(b_n), \mu) \cdot d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m)) \cdot \psi^*_{n+1}(\mu) \neq \emptyset$.

Se $\xi \in E \setminus E_{n+1}$, façamos $\psi_{n+1}(\xi) = \mathbb{T}$. Se $\xi \in (E_{n+1} \setminus E_n) \setminus \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$, então $\psi_n(\xi) = \mathbb{T}$. Definimos $\psi^*_{n+1}(\xi)$ como sendo um elemento de $\mathcal{B}$ com diâmetro

$$\delta(\psi^*_{n+1}(\xi)) = \frac{r_{n+1}}{d(J) \cdot \prod_{m<n+1} d(f_{i(m)}(b_m))}$$

e façamos

$$\psi_{n+1}(\xi) = d(J) \cdot \prod_{m<n+1} d(f_{i(m)}(b_m)) \cdot \psi^*_{n+1}(\xi).$$

Se $\xi \in E_n \setminus \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$, fixemos uma raiz $d(f_{i(n)}(b_n))$-ésima do ponto médio de $\psi^*_n(\xi)$. Definimos $\psi^*_{n+1}(\xi)$ como sendo o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado na raiz em questão com diâmetro

$$\delta(\psi^*_{n+1}(\xi)) = \frac{r_{n+1}}{d(J) \cdot \prod_{m<n+1} d(f_{i(m)}(b_m))}$$

e façamos

$$\psi_{n+1}(\xi) = d(J) \cdot \prod_{m<n+1} d(f_{i(m)}(b_m)) \cdot \psi^*_{n+1}(\xi).$$

Vamos, agora, definir $\psi^*_{n+1}(\xi)$ e $\psi_{n+1}(\xi)$ para $\xi \in \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$.

Caso 1: $f_{i(n)}$ é do tipo 1.

Tomemos $\alpha \in \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n) \setminus E_n$. Aplicando o lema 3.2.3 para $\mathfrak{c}$, $d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m))$, r_n, $\psi_n(i(n))$, $E_n \cap \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$, $f_{i(n)}(b_n)$, α e ψ^*_n, obtemos $\tilde{\psi} : \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n) \to \mathbb{T}$ satisfazendo as condições (i), (ii), (iii) e (iv) do lema 3.2.3. Façamos $\psi^*_{n+1}(\xi) = \tilde{\psi}(\xi)$, para todo $\xi \in \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$. As condições (1), (2), (3) e (4) estão satisfeitas.

Caso 2: $f_{i(n)}$ é do tipo 2.

Tomemos $\alpha \in \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$ tal que $q(f_{i(n)}(b_n), \alpha) \cdot r_n > d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m))$. Podemos supor que $\alpha \in E_n$ pois, do contrário, os argumentos utilizados no caso 1 podem ser repetidos aqui. Aplicando o lema 3.2.4 para $\mathfrak{c}$, $d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m))$, r_n, $\psi_n(i(n))$, $E_n \cap \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$, $f_{i(n)}(b_n)$, α e ψ^*_n, obtemos $\tilde{\psi} : \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n) \to \mathbb{T}$ satisfazendo as condições (i), (ii), (iii) e (iv) do lema 3.2.4. Façamos $\psi^*_{n+1}(\xi) = \tilde{\psi}(\xi)$, para todo $\xi \in \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$. As condições (1), (2), (3) e (4) estão satisfeitas.

Caso 3: $f_{i(n)}$ é do tipo 3.

Tomemos $\alpha \in \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$ tal que $|a(f_{i(n)}(b_n), \alpha)| \cdot r_n > 4 \cdot d(f_{i(n)}(b_n))$. Novamente, podemos supor que $\alpha \in E_n$. Aplicando o lema 3.2.5 para $\mathfrak{c}$, $d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m))$, r_n, $\psi_n(i(n))$, $E_n \cap \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$, $f_{i(n)}(b_n)$, α e ψ^*_n, obtemos $\tilde{\psi} : \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n) \to \mathbb{T}$ satisfazendo as condições (i), (ii), (iii) e (iv) do lema 3.2.5. Façamos $\psi^*_{n+1}(\xi) = \tilde{\psi}(\xi)$, para todo $\xi \in \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$. As condições (1), (2), (3) e (4) estão satisfeitas.

Por indução, obtemos aplicações $\psi_n : E \to \mathcal{B}$ e $\psi^*_n : E_n \to \mathcal{B}$ para cada $n \in \omega$, satisfazendo as seguintes condições:

- $\overline{\psi_{n+1}(\xi)} \subset \psi_n(\xi)$, para todo $\xi \in E$;
- $\delta(\psi_n(\xi)) = r_n$, se $\xi \in E_n$ e $\psi_n(\xi) = \mathbb{T}$, se $\xi \in E \setminus E_n$;
- $\psi_n(\xi) = d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m)) \cdot \psi^*_n(\xi)$, se $\xi \in E_n$.

Como $\mathbb{T}$ é um espaço métrico completo e $(r_n)_{n\in\omega}$ é uma seqüência de números reais positivos que converge para 0, concluímos que se $\xi \in E$, então $\cap_{n\in\omega}\psi_n(\xi) = \cap_{n\in\omega}\overline{\psi_n(\xi)}$ é um conjunto unitário. Denotaremos por $\phi(\chi_\xi)$ o único elemento de $\cap_{n\in\omega}\psi_n(\xi)$.

Para cada $\xi \in E$, sejam $N_\xi = \min\{n \in \omega : \xi \in E_n\}$ e $n \geq N_\xi$. Temos que $\psi_n(\xi) \neq \mathbb{T}$ e, portanto, existe um único elemento de $\psi^*_n(\xi)$ que multiplicado por $d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m))$

é igual a $\phi(\chi_\xi)$. De fato, $\psi_n(\xi) = d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m)) \cdot \psi_n^*(\xi)$. Como $\phi(\chi_\xi) \in \psi_n(\xi)$, existe pelo menos um elemento de $\psi_n^*(\xi)$ que multiplicado por $d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m))$ é igual a $\phi(\chi_\xi)$. Se $d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m)) = 1$, nada temos a fazer. Suponhamos, portanto, que $d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m)) > 1$. A distância entre duas raízes $d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m))$-ésimas consecutivas de $\phi(\chi_\xi)$ é igual a

$$\frac{1}{d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m))}.$$

Como $\psi_n^*(\xi)$ contém uma raiz $d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m))$-ésima de $\phi(\chi_\xi)$ e

$$\delta(\psi_n^*(\xi)) = \frac{r_n}{d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m))} < \frac{1}{d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m))}$$

concluímos que $\psi_n^*(\xi)$ contém uma única raiz $d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m))$-ésima de $\phi(\chi_\xi)$, ou seja, que existe um único elemento de $\psi_n^*(\xi)$ que multiplicado por $d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m))$ é igual a $\phi(\chi_\xi)$. Denotaremos tal elemento por

$$\phi\left(\frac{1}{d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m))} \cdot \chi_\xi\right).$$

Consideremos

$$G_\xi = \left\{\frac{1}{d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m))} \cdot \chi_\xi \in \mathbb{Q}^{(E)} : n \geq N_\xi\right\}$$

e denotemos por G o grupo gerado por $\cup_{\xi \in E} G_\xi$. Uma vez que se $\xi \in E$ e $n > N_\xi$, então

$$\phi\left(\frac{1}{d(J) \cdot \prod_{m<N_\xi} d(f_{i(m)}(b_m))} \cdot \chi_\xi\right) = \prod_{N_\xi \leq m<n} d(f_{i(m)}(b_m)) \cdot \phi\left(\frac{1}{d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m))} \cdot \chi_\xi\right)$$

podemos estender ϕ a um homomorfismo de grupos de G em $\mathbb{T}$. Usando o fato de $\mathbb{T}$ ser um grupo divisível, estendemos ϕ a um homomorfismo de grupos $\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E)}} : \mathbb{Q}^{(E)} \to \mathbb{T}$.

Temos que

$$\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E)}} (J) = \sum_{\mu \in \operatorname{supp} J} a(J,\mu) \cdot \phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E)}} \left(\frac{1}{d(J)} \cdot \chi_\mu\right) \in \sum_{\mu \in \operatorname{supp} J} a(J,\mu) \cdot \psi_0^*(\mu)$$

e, portanto, $\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E)}} (J) \neq 0 + \mathbb{Z}$. Logo, (i) está verificada.

Fixemos $\xi \in E \setminus \{0\}$. Para cada $k \in i^{-1}(\{\xi\})$ temos que

$$\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E)}} (f_{i(k)}(b_k)) \in \sum_{\mu \in \operatorname{supp} f_{i(k)}(b_k)} a(f_{i(k)}(b_k), \mu) \cdot d(J) \cdot \prod_{m<k} d(f_{i(m)}(b_m)) \cdot \psi^*_{k+1}(\mu).$$

Além disso,

$$\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E)}} (\chi_{i(k)}) \in \psi_k(i(k)).$$

De (4) vem que

$$\begin{aligned} \delta(\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E)}} (f_{i(k)}(b_k)), \phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E)}} (\chi_\xi)) &\leq d_1 + d_2 \\ &< 2r_k \end{aligned}$$

onde

$$d_1 = \delta(\textstyle\sum_{\mu \in \operatorname{supp} f_{i(k)}(b_k)} a(f_{i(k)}(b_k), \mu) \cdot d(J) \cdot \prod_{m<k} d(f_{i(m)}(b_m)) \cdot \psi^*_{k+1}(\mu))$$

e

$$d_2 = \delta(\psi_k(i(k))).$$

Como $r_k \to 0$, concluímos que a seqüência $\{\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E)}} (f_{i(k)}(b_k)) : k \in i^{-1}(\{\xi\})\}$ converge para $\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E)}} (\chi_\xi)$. Da propriedade (v) do lema 3.2.2 segue que

$$\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E)}} (\chi_\xi) = p_\xi - \lim\{\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E)}} (f_\xi(n)) : n \in \omega\}.$$

Logo, (ii) está verificada. □

Estamos prontos para estender $\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E)}}$ a um homomorfismo de grupos $\phi_J : \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})} \to \mathbb{T}$. Nossa única preocupação será garantir que $\phi_J(\chi_\xi) = p_\xi - \lim\{\phi_J(f_\xi(n)) : n \in \omega\}$ para todo $\xi \in \mathfrak{c} \setminus E$, uma vez que $\operatorname{supp} J \subset E$.

Lema 3.2.7. *Para cada $J \in \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})} \setminus \{0\}$, existe $\phi_J : \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})} \to \mathbb{T}$ um homomorfismo de grupos tal que:*

(i) $\phi_J(J) \neq 0 + \mathbb{Z}$;

(ii) $\phi_J(\chi_\xi) = p_\xi - \lim\{\phi_J(f_\xi(n)) : n \in \omega\}$, *para cada* $\xi \in]0, \mathfrak{c}[$.

Demonstração. Faremos a construção de ϕ_J por indução. De acordo com a proposição 3.2.1, existe $E \in [\mathfrak{c}]^\omega$ tal que $\operatorname{supp} J \subset E$ e $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f_\xi(n) \subset E$, para cada $\xi \in E \setminus \{0\}$. Segundo o lema 3.2.6, é possível construir $\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E)}} : \mathbb{Q}^{(E)} \to \mathbb{T}$ um homomorfismo de grupos com as seguintes propriedades:

(1) $\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E)}} (J) \neq 0 + \mathbb{Z}$;

(2) $\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E)}} (\chi_\xi) = p_\xi - \lim\{\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E)}} (f_\xi(n)) : n \in \omega\}$, para cada $\xi \in E \setminus \{0\}$.

Consideremos $\{\alpha_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ uma indexação estritamente crescente de $\mathfrak{c} \setminus E$. Definamos

$$\tilde{\phi}_J(\chi_{\alpha_0}) = p_{\alpha_0} - \lim\{\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E)}} (f_{\alpha_0}(n)) : n \in \omega\}$$

e façamos

$$\tilde{\phi}_J(\tilde{J}) = \phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E)}} (\tilde{J})$$

para todo $\tilde{J} \in \mathbb{Q}^{(E)}$.[2]

Seja G_{α_0} o subgrupo de $\mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})}$ gerado por $\mathbb{Q}^{(E)} \cup \{\chi_{\alpha_0}\}$. Podemos estender $\tilde{\phi}_J$ a um homomorfismo de grupos de G_{α_0} em $\mathbb{T}$. Uma vez que $\mathbb{T}$ é divisível e G_{α_0} é um subgrupo de $\mathbb{Q}^{(E\cup\{\alpha_0\})}$, estendemos $\tilde{\phi}_J$ a um homomorfismo de grupos $\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E\cup\{\alpha_0\})}} : \mathbb{Q}^{(E\cup\{\alpha_0\})} \to \mathbb{T}$.

Repetindo indutivamente esta construção, obteremos $\phi_J : \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})} \to \mathbb{T}$ um homomorfismo de grupos satisfazendo (i) e (ii). □

3.3 Explicitando a topologia

A próxima proposição mostra que o produto diagonal da família $\{\phi_J : J \in \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})} \setminus \{0\}\}$ é um monomorfismo de grupos.

Proposição 3.3.1. *Suponhamos que para cada $J \in \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})} \setminus \{0\}$ exista um homomorfismo de grupos $\phi_J : \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})} \to \mathbb{T}$ tal que $\phi_J(J) \neq 0 + \mathbb{Z}$. A aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})} & \to & \mathbb{T}^{\mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})}\setminus\{0\}} \\ & \tilde{J} & \mapsto & \Phi(\tilde{J}) \end{array}$$

dada por

$$\Phi(\tilde{J})(J) = \phi_J(\tilde{J}), \ \ \textit{para cada} \ \ J \in \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})} \setminus \{0\}$$

é um monomorfismo de grupos.

Demonstração. Análoga à da proposição 2.3.1. □

[2]Estamos considerando $\mathbb{Q}^{(E)} \subset \mathbb{Q}^{(E\cup\{\alpha_0\})} \subset \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})}$.

Teorema 3.3.2. *O grupo aditivo da reta real admite uma topologia que o torna um grupo topológico enumeravelmente compacto sem seqüências não triviais convergentes.*

Demonstração. Temos que $\Phi[\mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})}]$ munido da topologia de subespaço induzida por $\mathbb{T}^{\mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})}\setminus\{0\}}$ é um grupo topológico. De acordo com as proposições 3.1.1 e 3.3.1, basta mostrar que $\Phi[\mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})}]$ é enumeravelmente compacto e não possui seqüências não triviais convergentes.

Consideremos $f : \omega \to \Phi[\mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})}]$. Se f é trivial, nada temos a fazer. Se não, f possui duas subseqüências constantes e distintas ou existe $j : \omega \to \omega$ estritamente crescente tal que $f \circ j$ é injetora. Com efeito, $\Phi^{-1} \circ f : \omega \to \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})}$ é não trivial. Se $\Phi^{-1} \circ f$ tem uma subseqüência do tipo i, para algum $i \in \{1, 2, 3\}$, então existe $j : \omega \to \omega$ estritamente crescente tal que $\Phi^{-1} \circ f \circ j$ é injetora. Suponhamos que $\Phi^{-1} \circ f$ não tenha subseqüências de qualquer um dos tipos acima mencionados. Existem, portanto, $j : \omega \to \omega$ estritamente crescente e $J \in \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})}$ tais que $(\Phi^{-1} \circ f \circ j)(n) = J$, para todo $n \in \omega$. Podemos supor que se $n \notin j[\omega]$, então $(\Phi^{-1} \circ f)(n) \neq J$. Como $\Phi^{-1} \circ f$ é não trivial, $\omega \setminus j[\omega]$ é um conjunto infinito. Aplicando novamente a proposição 3.1.3 e usando o fato de que $\Phi^{-1} \circ f$ não possui subseqüências dos tipos 1, 2 ou 3, asseguramos a existência de uma outra subseqüência constante de $\Phi^{-1} \circ f$, distinta de $\Phi^{-1} \circ f \circ j$.

No primeiro caso, temos que $\{f(n) \in \Phi[\mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})}] : n \in \omega\}$ tem pelo menos dois pontos de acumulação distintos e, portanto, f não é convergente. Suponhamos que o segundo caso ocorra. As aplicações

$$\begin{array}{rccl} g_0 : & \omega & \to & \Phi[\mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})}] \\ & n & \mapsto & (f \circ j)(2n) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccl} g_1 : & \omega & \to & \Phi[\mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})}] \\ & n & \mapsto & (f \circ j)(2n+1) \end{array}$$

são subseqüências distintas de f. De acordo com a proposição 3.1.3, existem $j_0, j_1 : \omega \to \omega$ estritamente crescentes tais que $\Phi^{-1} \circ g_0 \circ j_0, \Phi^{-1} \circ g_1 \circ j_1 \in \mathcal{F}$, uma vez que $f \circ j$ é injetora. Logo, existem $\xi_0, \xi_1 \in]0, \mathfrak{c}[$ distintos tais que $\Phi^{-1} \circ g_0 \circ j_0 = f_{\xi_0}$ e $\Phi^{-1} \circ g_1 \circ j_1 = f_{\xi_1}$.

Dado $i \in \{0, 1\}$, temos que

$$\phi_J(\chi_{\xi_i}) = p_{\xi_i} - \lim\{\phi_J(f_{\xi_i}(n)) : n \in \omega\}$$

para todo $J \in \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c})} \setminus \{0\}$ e, portanto,

$$\Phi(\chi_{\xi_i}) = p_{\xi_i} - \lim\{(\Phi \circ f_{\xi_i})(n) : n \in \omega\}.$$

Logo, $\Phi(\chi_{\xi_1})$ e $\Phi(\chi_{\xi_2})$ são pontos de acumulação distintos de $\{f(n) : n \in \omega\}$. $\square$

CAPÍTULO 4

Grupos abelianos quase livres de torção que têm cardinalidade $\mathfrak{c}$: topologias de grupo enumeravelmente compactas sem seqüências não triviais convergentes e topologias independentes

Neste capítulo, assumiremos a existência de $\mathfrak{c}$ ultrafiltros seletivos dois a dois incomparáveis (segundo a ordem de Rudin-Keisler) para mostrar que um grupo abeliano quase livre de torção G tal que $|G| = \mathfrak{c}$ admite uma topologia que o torna um grupo topológico enumeravelmente compacto sem seqüências não triviais convergentes.

Como queremos aproveitar as idéias desenvolvidas no capítulo 3, começaremos imergindo o grupo G na soma direta $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)}$. Para cada $(H, J) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)} \setminus \{(0,0)\}$ construiremos $\phi_{(H,J)} : (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)} \to \mathbb{T}$ um homomorfismo de grupos de modo que o produto diagonal da família $\{\phi_{(H,J)} : (H, J) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)} \setminus \{(0,0)\}\}$ seja injetor e que a topologia em G gerada pela composta deste produto diagonal com a imersão em $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)}$ tenha as propriedades desejadas.

Uma das novidades deste capítulo é que G pode conter elementos de ordem finita. Todavia, o fato de G ser um grupo abeliano quase livre de torção impedirá que os elementos de uma seqüência injetora em G tenham suas ordens limitadas por um número natural n. Portanto, poderemos continuar atribuindo a tais seqüências pontos de acumulação de ordem infinita.

Destacamos que é possível adaptar a construção descrita acima para obter o seguinte

resultado: se G é um grupo abeliano quase livre de torção e existe uma topologia τ em G tal que $|G| = |\tau| = \mathfrak{c}$, então é possível construir uma topologia σ em G que é independente de τ e que torna G um grupo topológico. Estas adaptações foram incorporadas já no início deste capítulo, fazendo com que o texto ficasse ligeiramente diferente do padrão apresentado nos capítulos 2 e 3.

4.1 Uma escolha adequada de seqüências

Seja G um grupo abeliano quase livre de torção tal que $|G| = \mathfrak{c}$ e suponhamos que exista τ uma topologia T_1 em G tal que $|\tau| = \mathfrak{c}$.[1] Denotemos por $\mathcal{F}$ a família de todos os subconjuntos fechados de G que têm cardinalidade $\mathfrak{c}$ e consideremos $\{F_\beta : \beta < \mathfrak{c}\}$ uma indexação de $\mathcal{F}$ tal que $F_0 = G$ e $F_\beta \neq G$, para todo $\beta \in]0, \mathfrak{c}[$.

Seja $\varphi_1 : G \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)}$ um monomorfismo de grupos.[2] Temos que

$$\varphi_1[F_\beta] = \{(x_\xi^\beta, y_\xi^\beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)} : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$$

qualquer que seja $\beta < \mathfrak{c}$. Para cada $\beta \in]0, \mathfrak{c}[$, tomemos $x^\beta \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}$ tal que $|Q_\beta| = \mathfrak{c}$, onde

$$Q_\beta = \{(x_\xi^\beta, y_\xi^\beta) \in \varphi_1[F_\beta] : x_\xi^\beta = x^\beta\}.$$

Tomemos, ainda, $x_0 \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}$ de modo que $\{(x_\xi^0, y_\xi^0) \in \varphi_1[G] : x_\xi^0 = x_0\}$ tenha cardinalidade $\mathfrak{c}$. Se $x_0 = 0$, façamos $x^0 = x_0$ e

$$Q_0 = \{(x_\xi^0, y_\xi^0) \in \varphi_1[G] : x_\xi^0 = x^0\}.$$

Se não, existe $n > 1$ um número natural tal que $\mathrm{o}(x_0) = n$. Neste caso, definimos

$$Q_0 = \{(nx_\xi^0, ny_\xi^0) \in \varphi_1[G] : x_\xi^0 = x_0\}$$

e $x^0 = nx_0 = 0$. Não é difícil notar que $|Q_0| = \mathfrak{c}$. Para cada $\beta < \mathfrak{c}$, consideremos

$$P_\beta = \{y \in \mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)} : (x^\beta, y) \in Q_\beta\}.$$

[1] Observamos que a topologia cofinita em G é T_1.

[2] Como G é um grupo abeliano, segue que G é isomorfo a um subgrupo de um grupo divisível. Além disso, todo grupo divisível é isomorfo a uma soma direta de cópias de $\mathbb{Q}$ e de $\mathbb{Z}_p(\infty) \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, para p número primo. Uma vez que $|G| = \mathfrak{c}$ e que $|T(G)| \leq \omega$, bastam ω cópias de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ e $\mathfrak{c}$ cópias de $\mathbb{Q}$.

Como $|P_\beta| = \mathfrak{c}$, existe $\{S_\beta : \beta < \mathfrak{c}\}$ tal que:

- $S_\beta \subset P_\beta$, para cada $\beta < \mathfrak{c}$;
- $|S_\beta| = \mathfrak{c}$, para cada $\beta < \mathfrak{c}$;
- $S_\alpha \cap S_\beta = \emptyset$, quaisquer que sejam $\alpha, \beta < \mathfrak{c}$ distintos.[3]

Tomemos $Z = \{z_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$ uma base de $\mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)}$ como $\mathbb{Q}$-espaço vetorial tal que $|Z \cap S_\beta| = \mathfrak{c}$, para todo $\beta < \mathfrak{c}$.[4] Consideremos $\varphi_2 : (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)} \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)}$ o isomorfismo de grupos dado por $\varphi_2(a, 0) = (a, 0)$ e $\varphi_2(0, z_\xi) = (0, \chi_\xi)$, quaisquer que sejam $(a, 0) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)}$ e $\xi \in [\omega, \mathfrak{c}[$, onde $\chi_\xi : [\omega, \mathfrak{c}[\to \mathbb{Q}$ é tal que

$$\chi_\xi(\mu) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \mu = \xi \\ 0 & \text{se} \quad \mu \neq \xi \end{cases}$$

e façamos $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$.

Dado $\beta < \mathfrak{c}$, seja

$$T_\beta = \{(x, y) \in Q_\beta : y \in S_\beta \cap Z\}.$$

Temos que $|T_\beta| = \mathfrak{c}$ e $T_\alpha \cap T_\beta = \emptyset$, quaisquer que sejam $\alpha, \beta < \mathfrak{c}$ distintos. Consideremos, ainda,

$$L_\beta = \{\xi \in [\omega, \mathfrak{c}[: (x^\beta, \chi_\xi) \in \varphi_2[T_\beta]\}.$$

Observamos que $|L_\beta| = \mathfrak{c}$ e que $L_\alpha \cap L_\beta = \emptyset$, quaisquer que sejam $\alpha, \beta < \mathfrak{c}$ distintos. Além disso,

$$\{(0, \chi_\xi) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)} : \xi \in L_0\} \subset \varphi[G].$$

[3]Para cada $\beta < \mathfrak{c}$, consideremos uma partição $\{P_{\beta,\alpha} : \alpha < \mathfrak{c}\}$ de P_β tal que $|P_{\beta,\alpha}| = \mathfrak{c}$, para todo $\alpha < \mathfrak{c}$. Tomemos $f : \mathfrak{c} \times \mathfrak{c} \to \mathfrak{c}$ uma bijeção tal que $f(0, 0) = 0$ e ordenemos $\mathfrak{c} \times \mathfrak{c}$ da seguinte maneira: $(\delta, \gamma) \prec (\beta, \alpha)$ se, e somente se, $f(\delta, \gamma) < f(\beta, \alpha)$. Fixemos $x_{0,0} \in P_{0,0}$. Seja $(\beta, \alpha) \in \mathfrak{c} \times \mathfrak{c}$ e suponhamos escolhidos $x_{\delta,\gamma} \in P_{\delta,\gamma}$, para todo $(\delta, \gamma) \prec (\alpha, \beta)$. Temos que $|\{x_{\delta,\gamma} : (\delta, \gamma) \prec (\alpha, \beta)\}| < \mathfrak{c}$, uma vez que $f(\alpha, \beta) < \mathfrak{c}$. Logo, existe $x_{\beta,\alpha} \in P_{\beta,\alpha} \setminus \{x_{\delta,\gamma} : (\delta, \gamma) \prec (\alpha, \beta)\}$. Dado $\beta < \mathfrak{c}$, denotemos $\{x_{\beta,\alpha} : \alpha < \mathfrak{c}\}$ por S_β.

[4]Consideremos $\mathcal{S} = \{S_\beta : \beta < \mathfrak{c}\}$ e tomemos $\{R_\delta : \delta < \mathfrak{c}\}$ uma indexação de $\mathcal{S}$ tal que, para cada $S \in \mathcal{S}$, o conjunto $\{\delta < \mathfrak{c} : S = R_\delta\}$ tenha cardinalidade $\mathfrak{c}$. Fixemos $x_0 \in R_0 \setminus \{0\}$. Seja $\alpha < \mathfrak{c}$ um ordinal e suponhamos escolhido, para cada $\gamma < \alpha$, $x_\gamma \in R_\gamma$ de modo que $\{x_\gamma : \gamma < \alpha\}$ seja um subconjunto linearmente independente do $\mathbb{Q}$-espaço vetorial $\mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)}$. Como $|\langle\{x_\gamma : \gamma < \alpha\}\rangle| \leq \max\{\omega, |\alpha|\} < \mathfrak{c}$ e $|R_\alpha| = \mathfrak{c}$, existe $x_\alpha \in R_\alpha$ tal que $\{x_\gamma : \gamma < \alpha + 1\}$ é linearmente independente. Por indução, obtemos $\{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} \subset \mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)}$ linearmente independente tal que $|\{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} \cap S_\beta| = \mathfrak{c}$, para todo $\beta < \mathfrak{c}$. Seja B uma base de $\mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)}$ que contém $\{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Como $|B| = \mathfrak{c}$, podemos tomar $\{z_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$ uma indexação de B.

Se $(H, J) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)}$, então

$$H(n) = \frac{p(H,n)}{q(H,n)} + \mathbb{Z}$$

onde $p(H,n), q(H,n) \in \mathbb{Z}$, $q(H,n) > 0$, $0 \leq p(H,n) \leq q(H,n) - 1$ e $\mathrm{mdc}(p(H,n), q(H,n)) = 1$, para cada $n \in \operatorname{supp} H$. Além disso,

$$J(\mu) = \frac{p(J,\mu)}{q(J,\mu)}$$

onde $p(J,\mu), q(J,\mu) \in \mathbb{Z}$, $q(J,\mu) > 0$ e $\mathrm{mdc}(p(J,\mu), q(J,\mu)) = 1$, para cada $\mu \in \operatorname{supp} J$. Sejam

$$|q(H)| = \max\{q(H,n) : n \in \operatorname{supp} H\},$$

$$|q(J)| = \max\{q(J,\mu) : \mu \in \operatorname{supp} J\}$$

e

$$|p(J)| = \max\{|p(J,\mu)| : \mu \in \operatorname{supp} J\}.$$

Consideremos

$$d(H) = \mathrm{mmc}\{q(H,n) : n \in \operatorname{supp} H\}$$

e

$$d(J) = \mathrm{mmc}\{q(J,\mu) : \mu \in \operatorname{supp} J\}.^{5}$$

Para cada $n \in \operatorname{supp} H$, seja

$$a(H,n) = p(H,n) \cdot \frac{d(H)}{q(H,n)}$$

e, para cada $\mu \in \operatorname{supp} J$, seja

$$a(J,\mu) = p(J,\mu) \cdot \frac{d(J)}{q(J,\mu)}.$$

Sejam, ainda,

$$|a(J)| = \max\{|a(J,\mu)| : \mu \in \operatorname{supp} J\}$$

e

$$||a(H,J)|| = \sum_{n \in \operatorname{supp} H} |a(H,n)| + \sum_{\mu \in \operatorname{supp} J} |a(J,\mu)|.$$

Por fim, observamos que $\operatorname{supp}(H,J) = \operatorname{supp} H \cup \operatorname{supp} J$.

[5] Se $H = 0$, então $d(H) = 1$. Analogamente, se $J = 0$, então $d(J) = 1$.

Denotaremos por $\mathcal{H}$ o conjunto de todas as funções

$$\begin{array}{rccl} h: & \omega & \to & \varphi[G] \subset (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)} \\ & n & \mapsto & (g(n), f(n)) \end{array}$$

que satisfazem uma das seguintes condições:

(1) $\operatorname{supp} f(n) \setminus \cup_{m<n} \operatorname{supp} f(m) \neq \emptyset$, para todo $n \in \omega$;

(2) $|q(f(n))| > n$, para todo $n \in \omega$;

(3) $\{|q(f(n))| : n \in \omega\}$ é limitado e $|p(f(n))| > n$, para todo $n \in \omega$;

(4) $|q(g(n))| > n$, para todo $n \in \omega$.

Definição 4.1.1. *Sejam $h \in \mathcal{H}$ e $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Dizemos que h é* do tipo i *se h satisfaz a condição (i) descrita acima.*

Proposição 4.1.2. *Se $h : \omega \to \varphi[G] \subset (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)}$, então existe $j : \omega \to \omega$ estritamente crescente tal que $h \circ j$ é constante ou é de um dos tipos acima mencionados.*

Demonstração. Para cada $n \in \omega$, escreveremos $h(n) = (g(n), f(n))$, onde $g : \omega \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}$ e $f : \omega \to \mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)}$.[6] Há cinco casos a serem considerados.

Caso 1: $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f(n)$ é infinito.

Seja $n_0 = 0$. Fixemos $k \in \omega$ e suponhamos definidos $n_0, n_1, ..., n_k$. Uma vez que $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f(n)$ é infinito, existe um número natural $n_{k+1} > n_k$ tal que $\operatorname{supp} f(n_{k+1}) \setminus \cup_{l<k+1} \operatorname{supp} f(n_l) \neq \emptyset$. Temos que

$$\begin{array}{rccl} j: & \omega & \to & \omega \\ & k & \mapsto & n_k \end{array}$$

é uma função estritamente crescente tal que $h \circ j$ é do tipo 1.

Caso 2: $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f(n)$ é finito e $\{|q(f(n))| : n \in \omega\}$ é ilimitado.

Por indução, tomemos $\{n_k : k \in \omega\}$ uma seqüência estritamente crescente de números

[6] Esta notação continuará sendo adotada ao longo deste capítulo.

naturais tal que $|q(f(n_k))| > k$, para todo $k \in \omega$. Temos que

$$\begin{array}{rccc} j: & \omega & \to & \omega \\ & k & \mapsto & n_k \end{array}$$

é uma função estritamente crescente tal que $h \circ j$ é do tipo 2.

Caso 3: $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f(n)$ é finito, $\{|q(f(n))| : n \in \omega\}$ é limitado e $\{|p(f(n))| : n \in \omega\}$ é ilimitado.
Por indução, tomemos $\{n_k : k \in \omega\}$ uma seqüência estritamente crescente de números naturais tal que $|p(f(n_k))| > k$, para todo $k \in \omega$. Temos que

$$\begin{array}{rccc} j: & \omega & \to & \omega \\ & k & \mapsto & n_k \end{array}$$

é uma função estritamente crescente tal que $h \circ j$ é do tipo 3.

Caso 4: $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f(n)$ é finito, $\{|q(f(n))| : n \in \omega\}$ e $\{|p(f(n))| : n \in \omega\}$ são limitados e $\{|q(g(n))| : n \in \omega\}$ é ilimitado.
Por indução, tomemos $\{n_k : k \in \omega\}$ uma seqüência estritamente crescente de números naturais tal que $|q(g(n_k))| > k$, para todo $k \in \omega$. Temos que

$$\begin{array}{rccc} j: & \omega & \to & \omega \\ & k & \mapsto & n_k \end{array}$$

é uma função estritamente crescente tal que $h \circ j$ é do tipo 4.

Caso 5: $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f(n)$ é finito, $\{|q(f(n))| : n \in \omega\}$, $\{|p(f(n))| : n \in \omega\}$ e $\{|q(g(n))| : n \in \omega\}$ são limitados.
Existe $j_1 : \omega \to \omega$ estritamente crescente tal que $f \circ j_1$ é constante. Existem, também, $m \in \omega$ e $j_2 : \omega \to \omega$ estritamente crescente tais que $|q(g \circ j_1 \circ j_2(n))| = m$, para todo $n \in \omega$. Se $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} g \circ j_1 \circ j_2(n)$ é finito, então existe $j_3 : \omega \to \omega$ estritamente crescente tal que $g \circ j_1 \circ j_2 \circ j_3$ é constante. Neste caso, temos que $h \circ j$ é constante, onde $j = j_1 \circ j_2 \circ j_3$. Se $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} g \circ j_1 \circ j_2(n)$ fosse infinito, existiria $j_3 : \omega \to \omega$ estritamente crescente tal que $\operatorname{supp} g \circ j_1 \circ j_2 \circ j_3(n) \setminus \cup_{m<n} \operatorname{supp} g \circ j_1 \circ j_2 \circ j_3(m) \neq \emptyset$, para todo $n \in \omega$. Neste caso, $\{h \circ j_1 \circ j_2 \circ j_3(n) : n \in \omega\} \not\subset \varphi[G]$ pois, do contrário, $\{h \circ j_1 \circ j_2 \circ j_3(n) - h \circ j_1 \circ j_2 \circ j_3(0) : n \in \omega\} = \{(g \circ j_1 \circ j_2 \circ j_3(n) - g \circ j_1 \circ j_2 \circ j_3(0), 0) : n \in \omega\}$ também estaria contido em $\varphi[G]$, o que é absurdo, uma vez que $\{(g \circ j_1 \circ j_2 \circ j_3(n) - g \circ j_1 \circ j_2 \circ j_3(0), 0) : n \in \omega\} \subset G[m!]$ é

infinito e G é quase livre de torção. $\square$

Proposição 4.1.3. *Existe* $\{h_\xi : \xi \in L_0\}$ *uma indexação de* $\mathcal{H}$ *tal que* $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} h_\xi(n) \subset \xi$, *para todo* $\xi \in L_0$.

Demonstração. Observamos, primeiramente, que $|\mathcal{H}| = \mathfrak{c}^\omega = \mathfrak{c}$. Portanto, podemos considerar $\{\tilde{h}_\xi : \xi \in L_0\}$ uma indexação de $\mathcal{H}$ tal que, para cada $h \in \mathcal{H}$, o conjunto

$$A_h = \{\xi \in L_0 : h = \tilde{h}_\xi\}$$

tenha cardinalidade $\mathfrak{c}$.

Fixemos $h \in \mathcal{H}$. Como $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} h(n) \subset \mathfrak{c}$, $\operatorname{cf}(\mathfrak{c}) > \omega$ e $|\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} h(n)| \leq \omega$, existe $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} h(n) \subset \alpha$. Seja $\xi \in A_h$. Se $\xi < \alpha$, façamos $h_\xi = h$, onde $h(n) = (g(n), 0_{\mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)}})$, com $g(n) = \frac{1}{n+1} \cdot \chi_0$, para todo $n \in \omega$. Temos que h é do tipo 4 e, portanto, $h \in \mathcal{H}$. Se $\xi \geq \alpha$, façamos $h_\xi = \tilde{h}_\xi$.

Vê-se facilmente que $\{h_\xi : \xi \in L_0\}$ é uma indexação de $\mathcal{H}$ tal que $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} h_\xi(n) \subset \xi$, para todo $\xi \in L_0$. $\square$

4.2 Construindo homomorfismos de grupos

Sejam $\{p_\xi : \xi \in L_0\}$ uma família de ultrafiltros seletivos dois a dois incomparáveis segundo a ordem de Rudin-Keisler e $\{h_\xi : \xi \in L_0\}$ uma indexação de $\mathcal{H}$ tal que $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} h_\xi(n) \subset \xi$, qualquer que seja $\xi \in L_0$.

Proposição 4.2.1. *Seja* $(H, J) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)} \setminus \{(0,0)\}$. *Existe* $E \in [\mathfrak{c}]^\omega$ *tal que:*

(i) $\operatorname{supp}(H, J) \subset E$;

(ii) $|E \cap L_0| = \omega$;

(iii) $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} h_\xi(n) \subset E$, *qualquer que seja* $\xi \in E \cap L_0$.

Demonstração. Para cada $\xi \in \mathfrak{c} \setminus L_0$, façamos $E(\xi) = \{\xi\} \cup \omega$. Se $\xi \in L_0$, definimos indutivamente

$$E(\xi) = \{\xi\} \cup \bigcup_{\mu \in \cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} h_\xi(n)} E(\mu).$$

Fixemos $\tilde{L}_0 \in [L_0]^\omega$ e façamos

$$E = \bigcup_{\zeta \in \operatorname{supp}(H,J) \cup \tilde{L}_0} E(\zeta).$$

Temos que $\mathrm{supp}(H,J) \cup \tilde{L}_0 \subset E$, uma vez que $\zeta \in E(\zeta) \subset E$, qualquer que seja $\zeta \in \mathrm{supp}(H,J) \cup \tilde{L}_0$. Além disso, um argumento indutivo garante que $E(\xi) \in [\mathfrak{c}]^\omega$ para todo $\xi < \mathfrak{c}$ e, portanto, $E \in [\mathfrak{c}]^\omega$. Por fim, se $\xi \in E \cap L_0$, então existe $\zeta \in \mathrm{supp}(H,J) \cup \tilde{L}_0$ tal que $\xi \in E(\zeta)$. Um outro argumento indutivo garante que se $\alpha \in E(\beta)$, então $E(\alpha) \subset E(\beta)$, quaisquer que sejam $\alpha, \beta < \mathfrak{c}$. Logo, $\cup_{n\in\omega} \mathrm{supp}\, h_\xi(n) \subset E(\xi) \subset E(\zeta) \subset E$. □

Lema 4.2.2. *Sejam* $(H,J) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)} \setminus \{(0,0)\}$ *e* $E \in [\mathfrak{c}]^\omega$ *satisfazendo as condições (i), (ii) e (iii) da proposição 4.2.1. Existe* $\{E_k : k \in \omega\}$ *uma família de subconjuntos finitos de* E, $\{b_k : k \in \omega\}$ *uma seqüência estritamente crescente de números naturais,* $\{r_k : k \in \omega\}$ *uma seqüência de números reais positivos e* $i : \omega \to E \cap L_0$ *tais que:*

(i) $\mathrm{supp}(H,J) \subset E_0$*;*

(ii) $E = \cup_{k\in\omega} E_k$*;*

(iii) $i(k) \in E_k$*, para todo* $k \in \omega$*;*

(iv) $E_{k+1} \supset E_k \cup \bigcup\{\mathrm{supp}\, h_{i(m)}(b_m) : m \leq k\}$*, para todo* $k \in \omega$*;*

(v) $\{b_k : k \in i^{-1}(\{\xi\})\} \in p_\xi$*, para todo* $\xi \in E \cap L_0$*;*

(vi) Se $h_{i(k)}$ *é do tipo 1, então* $\mathrm{supp}\, f_{i(k)}(b_k) \setminus E_k \neq \emptyset$*;*

(vii) Se $h_{i(k)}$ *é do tipo 2, então* $|q(f_{i(k)}(b_k))| \cdot r_k > d(J) \cdot \prod_{m<k} d(f_{i(m)}(b_m))$*;*

(viii) Se $h_{i(k)}$ *é do tipo 3, então* $|a(f_{i(k)}(b_k))| \cdot r_k > 4 \cdot d(f_{i(k)}(b_k))$*;*

(ix) Se $h_{i(k)}$ *é do tipo 4, então* $|q(g_{i(k)}(b_k))| \cdot r_k > d(H) \cdot \prod_{m<k} d(g_{i(m)}(b_m))$*;*

(x) $r_0 = \dfrac{1}{4 \cdot ||a(H,J)||}$*;*

(xi) $r_{k+1} = \dfrac{r_k}{2 \cdot ||a(h_{i(k)}(b_k))||}$*, para todo* $k \in \omega$*.*

Demonstração. Consideremos $\{a_n : n \in \omega\}$ uma enumeração de E. Sejam $F_0 = \mathrm{supp}(H,J) \cup \{a_0\}$ e $F_{n+1} = F_n \cup \bigcup\{\mathrm{supp}\, h_\xi(m) : m \leq n, \xi \in F_n \cap L_0\} \cup \{a_{n+1}\}$, para cada $n \in \omega$. Temos que $\{F_n : n \in \omega\}$ é uma família de subconjuntos finitos de E tal que:

(1) $\mathrm{supp}(H,J) \subset F_0$;

(2) $E = \cup_{n\in\omega} F_n$;

(3) $F_{n+1} \supset F_n \cup \bigcup\{\operatorname{supp} h_\xi(m) : m \leq n, \xi \in F_n \cap L_0\}$.

Fixemos $\xi \in E \cap L_0$ e $n \in \omega$. Se h_ξ é do tipo 1, definimos

$$A_n^\xi = \{k \in \omega : \operatorname{supp} f_\xi(k) \setminus F_n \neq \emptyset\}.$$

Se h_ξ é do tipo 2, definimos

$$A_n^\xi = \{k \in \omega : |q(f_\xi(k))| > 2^{n+2} \cdot X_{n-1}\}$$

onde

$$X_m = ||a(H,J)|| \cdot d(J) \cdot \prod_{\substack{l \leq m \\ \zeta \in \overline{F_m} \cap L_0}} d(f_\zeta(l)) \cdot \prod_{\substack{l \leq m \\ \zeta \in \overline{F_m} \cap L_0}} ||a(h_\zeta(l))||$$

para todo $m \in \omega$ e

$$X_{-1} = ||a(H,J)|| \cdot d(J).$$

Se h_ξ é do tipo 3, então $|a(f_\xi(n))| > n$, para cada $n \in \omega$ e $\{|q(f_\xi(n))| : n \in \omega\}$ é limitado. Tomemos $M_\xi \in \omega$ tal que $|q(f_\xi(n))| \leq M_\xi$, para todo $n \in \omega$. Definimos

$$A_n^\xi = \{k \in \omega : |a(f_\xi(k))| > 2^{n+4} \cdot M_\xi! \cdot Y_{n-1}\}$$

onde

$$Y_m = ||a(H,J)|| \cdot \prod_{\substack{l \leq m \\ \zeta \in \overline{F_m} \cap L_0}} ||a(h_\zeta(l))||$$

para todo $m \in \omega$ e

$$Y_{-1} = ||a(H,J)||.$$

Se h_ξ é do tipo 4, definimos

$$A_n^\xi = \{k \in \omega : |q(g_\xi(k))| > 2^{n+2} \cdot Z_{n-1}\}$$

onde

$$Z_m = ||a(H,J)|| \cdot d(H) \cdot \prod_{\substack{l \leq m \\ \zeta \in \overline{F_m} \cap L_0}} d(g_\zeta(l)) \cdot \prod_{\substack{l \leq m \\ \zeta \in \overline{F_m} \cap L_0}} ||a(h_\zeta(l))||$$

para todo $m \in \omega$ e

$$Z_{-1} = ||a(H,J)|| \cdot d(H).$$

Observamos que A_n^ξ é um subconjunto cofinito de ω, quaisquer que sejam $n \in \omega$ e $\xi \in E \cap L_0$. Logo, para cada $\xi \in E \cap L_0$, temos que $\{A_n^\xi : n \in \omega\} \subset p_\xi$, uma vez que p_ξ é um ultrafiltro livre sobre ω. Da seletividade de p_ξ decorre que existe uma seqüência $\{a_n^\xi : n \in \omega\} \in p_\xi$ tal que $a_n^\xi \in A_n^\xi$ e $n < a_n^\xi$, para cada $n \in \omega$.

Do lema 1.5.4 segue que existe $\{I_\xi : \xi \in E \cap L_0\}$ uma família de subconjuntos de ω dois a dois disjuntos tal que:

(a) $\{a_n^\xi : n \in I_\xi\} \in p_\xi$, para cada $\xi \in E \cap L_0$;

(b) $\{[n, a_n^\xi] : n \in I_\xi,\ \xi \in E \cap L_0\}$ é uma família de intervalos de ω dois a dois disjuntos.

Para cada $\xi \in E \cap L_0$, seja

(c) $N_\xi = \min\{n \in \omega : \xi \in F_n\}$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que

(d) $N_\xi < n$, para todo $n \in I_\xi$.

Consideremos $\{n_k : k \in \omega\}$ uma enumeração estritamente crescente de $\dot{\bigcup}_{\xi \in E \cap L_0} I_\xi$. Seja

$$\begin{array}{rccc} i: & \omega & \to & E \cap L_0 \\ & k & \mapsto & i(k) \end{array}$$

onde $i(k)$ é o único elemento de $E \cap L_0$ tal que $n_k \in I_{i(k)}$.

Para cada $k \in \omega$, façamos $b_k = a_{n_k}^{i(k)}$, $E_k = F_{n_k}$ e definamos r_k segundo os ítens (x) e (xi) do enunciado deste lema. Resta mostrar que as condições (i)-(ix) estão satisfeitas.

(i) Como $0 \leq n_0$, temos que $E_0 = F_{n_0} \supset F_0 \supset \mathrm{supp}(H,J)$.

(ii) $\cup_{k \in \omega} E_k = \cup_{k \in \omega} F_{n_k} = E$.

(iii) Seja $k \in \omega$. Temos que $n_k \in I_{i(k)}$. De (d) segue que $N_{i(k)} < n_k$. De (c) e (3) vem que $i(k) \in F_{N_{i(k)}} \subset F_{n_k} = E_k$.

(iv) De (3) vem que $E_k \subset E_{k+1}$, pois $\{n_k : k \in \omega\}$ é uma enumeração estritamente crescente de $\cup_{\xi \in E \cap L_0} I_\xi$. Resta mostrar que $\operatorname{supp} h_{i(m)}(b_m) \subset E_{k+1}$, para cada $m \leq k$. De (3) decorre que

$$E_{k+1} = F_{n_{k+1}} \supset \bigcup \{\operatorname{supp} h_\xi(m) : m \leq n_{k+1} - 1, \xi \in F_{n_{k+1}-1} \cap L_0\}.$$

Por (iii), $i(m) \in E_m \subset E_k = F_{n_k} \subset F_{n_{k+1}-1}$, para todo $m \leq k$. Além disso, $i(m) \in L_0$. Por (b), $b_m = a_{n_m}^{i(m)} \leq n_{k+1} - 1$, para todo $m \leq k$. Logo, $\operatorname{supp} h_{i(m)}(b_m) \subset E_{k+1}$.

(v) Seja $\xi \in E \cap L_0$. Temos que $\{b_k : k \in i^{-1}(\{\xi\})\} = \{a_{n_k}^{i(k)} : k \in i^{-1}(\{\xi\})\} = \{a_n^\xi : n \in I_\xi\} \in p_\xi$, por (a).

(vi) Suponhamos que $h_{i(k)}$ seja do tipo 1. Temos que $b_k = a_{n_k}^{i(k)} \in A_{n_k}^{i(k)}$. Da definição de $A_{n_k}^{i(k)}$ vem que

$$\operatorname{supp} f_{i(k)}(b_k) \setminus E_k = \operatorname{supp} f_{i(k)}(b_k) \setminus F_{n_k} \neq \emptyset.$$

(vii) Suponhamos que $h_{i(k)}$ seja do tipo 2. Temos que $b_k = a_{n_k}^{i(k)} \in A_{n_k}^{i(k)}$. Da definição de $A_{n_k}^{i(k)}$ vem que

$$|q(f_{i(k)}(b_k))| > 2^{n_k+2} \cdot X_{n_k-1}$$

onde

$$X_{n_k-1} = ||a(H,J)|| \cdot d(J) \cdot \prod_{\substack{m \leq n_k-1 \\ \xi \in F_{n_k-1} \cap L_0}} d(f_\xi(m)) \cdot \prod_{\substack{m \leq n_k-1 \\ \xi \in F_{n_k-1} \cap L_0}} ||a(h_\xi(m))||.$$

Observamos que se $m < k$, então $n_m \leq n_{k-1}$ e, portanto, $i(m) \in E_m = F_{n_m} \subset F_{n_{k-1}} \subset F_{n_k-1}$. Note que $i(m) \in L_0$. Como $b_m = a_{n_m}^{i(m)}$ e $[n_m, a_{n_m}^{i(m)}] \cap [n_k, a_{n_k}^{i(k)}] = \emptyset$, temos que $b_m < n_k$ e, portanto, $b_m \leq n_k - 1$. Uma vez que

$$r_k = \frac{1}{2^{k+2} \cdot ||a(H,J)|| \cdot \prod_{m<k} ||a(h_{i(m)}(b_m))||}$$

concluímos que

$$|q(f_{i(k)}(b_k))| \cdot r_k > d(J) \cdot \prod_{m<k} d(f_{i(m)}(b_m)).$$

(viii) Suponhamos que $h_{i(k)}$ seja do tipo 3. Um argumento análogo ao apresentado em (vii) nos permite concluir que

$$|a(f_{i(k)}(b_k))| \cdot r_k > 4 \cdot M_{i(k)}! \geq 4 \cdot d(f_{i(k)}(b_k)).$$

(ix) Suponhamos que $h_{i(k)}$ seja do tipo 4. Um argumento análogo ao apresentado em (vii) nos permite concluir que

$$|q(g_{i(k)}(b_k))| \cdot r_k > d(H) \cdot \prod_{m<k} d(g_{i(m)}(b_m)). \qquad \square$$

O próximo lema compreende a parte técnica referente ao tipo 4.

Lema 4.2.3. *Sejam I um conjunto infinito, $c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\epsilon > 0$, $A \in \mathcal{B}$ com $\delta(A) \geq \epsilon$, $H \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(I)}$, $n \in \operatorname{supp} H$ com $q(H,n) \cdot \epsilon > c$ e $x \in \mathbb{T}$. Existe $y \in \mathbb{T}$ tal que $d(H) \cdot y = x$ e $a(H,n) \cdot c \cdot y \in A$.*

Demonstração. Existem $d(H)$ raízes $d(H)$-ésimas de x. Se multiplicarmos cada uma delas por $a(H,n) \cdot c$ teremos

$$\frac{q(H,n)}{\operatorname{mdc}(c, q(H,n))}$$

novos elementos, uma vez que $p(H,n)$ e $q(H,n)$ são primos entre si. De

$$\frac{q(H,n)}{\operatorname{mdc}(c, q(H,n))} \geq \frac{q(H,n)}{c} > \frac{1}{\epsilon}$$

segue que a distância entre dois desses novos elementos consecutivos é menor que ϵ. Como $\delta(A) \geq \epsilon$, existe $y \in \mathbb{T}$ tal que $d(H) \cdot y = x$ e $a(H,n) \cdot c \cdot y \in A$. $\square$

Lema 4.2.4. *Sejam $(H,J) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)} \setminus \{(0,0)\}$ e $E \in [\mathfrak{c}]^{\omega}$ satisfazendo as condições (i), (ii) e (iii) da proposição 4.2.1. Existe $\phi_{(H,J)} \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(E \cap [\omega,\mathfrak{c}[)}} : (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(E \cap [\omega,\mathfrak{c}[)} \to \mathbb{T}$ um homomorfismo de grupos com as seguintes propriedades:*

(i) $\phi_{(H,J)} \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(E \cap [\omega,\mathfrak{c}[)}} (H,J) \neq 0 + \mathbb{Z}$*;*

(ii) $\phi_{(H,J)} \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(E \cap [\omega,\mathfrak{c}[)}} (0, \chi_\xi) = p_\xi - \lim\{\phi_{(H,J)} \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(E \cap [\omega,\mathfrak{c}[)}} (h_\xi(n)) : n \in \omega\}$*, para cada $\xi \in E \cap L_0$.*[7]

Demonstração. Consideremos $\{E_n : n \in \omega\}$, $\{b_n : n \in \omega\}$, $\{r_n : n \in \omega\}$ e $i : \omega \to E \cap L_0$ de acordo com o lema 4.2.2.

Se $H = 0$, façamos $\hat{\phi}(H) = 0 + \mathbb{Z}$. Se $H \neq 0$, seja $\hat{\phi}(H)$ um elemento não nulo de $\mathbb{T}$ tal que $\mathrm{o}(\hat{\phi}(H)) \mid \mathrm{o}(H)$. Em ambos os casos, estendemos $\hat{\phi}$ a um homomorfismo de grupos de $\langle H \rangle$ em

[7] Estamos considerando $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(E \cap [\omega,\mathfrak{c}[)} \subset (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)}$.

$\mathbb{T}$. Dados $k \in \omega$ e $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, definimos $\Lambda_{k,s} : \omega \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ por

$$\Lambda_{k,s}(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{s} + \mathbb{Z} & \text{se} \quad n = k \\ \\ 0 + \mathbb{Z} & \text{se} \quad n \neq k. \end{cases}$$

Seja

$$G_0 = \langle \{\Lambda_{k,d(H)} : k \in \operatorname{supp} H\} \rangle.$$

Como $\mathbb{T}$ é um grupo divisível e $\langle H \rangle$ é um subgrupo de G_0, podemos estender $\hat{\phi}$ a um homomorfismo de grupos $\phi \restriction_{G_0} : G_0 \to \mathbb{T}$.

Se $J = 0$, tomemos $\psi_0^*(\xi)$ um arco aberto de $\mathbb{T}$ com diâmetro

$$\delta(\psi_0^*(\xi)) = \frac{r_0}{d(J)}$$

e façamos $\psi_0(\xi) = d(J) \cdot \psi_0^*(\xi)$, para todo $\xi \in E_0 \cap [\omega, \mathfrak{c}[$.

Suponhamos $J \neq 0$. Para cada $\xi \in E_0 \cap [\omega, \mathfrak{c}[$, tomemos $y_\xi \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{\xi \in \operatorname{supp} J} J(\xi) \cdot y_\xi = \frac{1}{2} - x$$

onde $x \in [0, 1[$ é tal que $x + \mathbb{Z} = \phi \restriction_{G_0} (H)$ e façamos

$$x_\xi = \frac{1}{d(J)} \cdot y_\xi + \mathbb{Z}.$$

Temos que

$$\sum_{\xi \in \operatorname{supp} J} a(J, \xi) \cdot x_\xi = \left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}\right) - \phi \restriction_{G_0} (H).$$

Seja $\psi_0^*(\xi)$ o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado em x_ξ com diâmetro

$$\delta(\psi_0^*(\xi)) = \frac{r_0}{d(J)}.$$

Seja, também, $\psi_0(\xi) = d(J) \cdot \psi_0^*(\xi)$. Claramente, $\delta(\psi_0(\xi)) = r_0$. Uma vez que

$$\frac{1}{2} + \mathbb{Z} \in \phi \restriction_{G_0} (H) + \sum_{\xi \in \operatorname{supp} J} a(J, \xi) \cdot \psi_0^*(\xi)$$

e

$$\delta\Big(\phi\restriction_{G_0}(H)+\sum_{\xi\in\operatorname{supp}J}a(J,\xi)\cdot\psi_0^*(\xi)\Big)=\delta\Big(\sum_{\xi\in\operatorname{supp}J}a(J,\xi)\cdot\psi_0^*(\xi)\Big)\leq\sum_{\xi\in\operatorname{supp}J}|a(J,\xi)|\cdot\delta(\psi_0^*(\xi))\leq\frac{1}{4}$$

concluímos que

$$0+\mathbb{Z}\notin\phi\restriction_{G_0}(H)+\sum_{\xi\in\operatorname{supp}J}a(J,\xi)\cdot\psi_0^*(\xi).$$

Por fim, se $\xi\in(E\setminus E_0)\cap[\omega,\mathfrak{c}[$, façamos $\psi_0(\xi)=\mathbb{T}$.

Seja $n\in\omega$. Suponhamos definidas $\psi_n:E\cap[\omega,\mathfrak{c}[\to\mathcal{B}$ e $\psi_n^*:E_n\cap[\omega,\mathfrak{c}[\to\mathcal{B}$. Suponhamos, também, definido $\phi\restriction_{G_n}:G_n\to\mathbb{T}$ um homomorfismo de grupos, onde

$$G_n=\langle\{\Lambda_{k,d(H)\cdot\prod_{m<n}d(g_{i(m)}(b_m))}:k\in\operatorname{supp}H\cup\textstyle\bigcup_{m<n}\operatorname{supp}g_{i(m)}(b_m)\}\rangle.$$

Vamos definir $\psi_{n+1}:E\cap[\omega,\mathfrak{c}[\to\mathcal{B}$, $\psi_{n+1}^*:E_{n+1}\cap[\omega,\mathfrak{c}[\to\mathcal{B}$ e estender $\phi\restriction_{G_n}$ a um homomorfismo de grupos $\phi\restriction_{G_{n+1}}:G_{n+1}\to\mathbb{T}$, onde

$$G_{n+1}=\langle\{\Lambda_{k,d(H)\cdot\prod_{m<n+1}d(g_{i(m)}(b_m))}:k\in\operatorname{supp}H\cup\textstyle\bigcup_{m<n+1}\operatorname{supp}g_{i(m)}(b_m)\}\rangle$$

satisfazendo as seguintes condições:

(1) Se $\xi\in(E\setminus E_{n+1})\cap[\omega,\mathfrak{c}[$, então $\psi_{n+1}(\xi)=\mathbb{T}$;

(2) Se $\xi\in(E_{n+1}\setminus E_n)\cap[\omega,\mathfrak{c}[$, então $\psi_{n+1}^*(\xi)$ é tal que:

   (a) $d(J)\cdot\prod_{m<n+1}d(f_{i(m)}(b_m))\cdot\overline{\psi_{n+1}^*(\xi)}\subset\psi_n(\xi)$;
   (b) $\delta(\psi_{n+1}^*(\xi))=\dfrac{r_{n+1}}{d(J)\cdot\prod_{m<n+1}d(f_{i(m)}(b_m))}$.

   Neste caso, façamos

$$\psi_{n+1}(\xi)=d(J)\cdot\prod_{m<n+1}d(f_{i(m)}(b_m))\cdot\psi_{n+1}^*(\xi).$$

(3) Se $\xi\in E_n\cap[\omega,\mathfrak{c}[$, então $\psi_{n+1}^*(\xi)$ é tal que:

   (a) $d(f_{i(n)}(b_n))\cdot\overline{\psi_{n+1}^*(\xi)}\subset\psi_n^*(\xi)$;
   (b) $\delta(\psi_{n+1}^*(\xi))=\dfrac{r_{n+1}}{d(J)\cdot\prod_{m<n+1}d(f_{i(m)}(b_m))}$.

Neste caso, façamos

$$\psi_{n+1}(\xi) = d(J) \cdot \prod_{m<n+1} d(f_{i(m)}(b_m)) \cdot \psi^*_{n+1}(\xi).$$

(4) $\psi_n(i(n)) \cap (\phi \restriction_{G_{n+1}} (g_{i(n)}(b_n)) + \sum_{\mu \in \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)} a(f_{i(n)}(b_n), \mu) \cdot d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m)) \cdot \psi^*_{n+1}(\mu)) \neq \emptyset$.[8]

Se $\xi \in (E \setminus E_{n+1}) \cap [\omega, \mathfrak{c}[$, façamos $\psi_{n+1}(\xi) = \mathbb{T}$. Se $\xi \in [(E_{n+1} \setminus E_n) \setminus \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)] \cap [\omega, \mathfrak{c}[$, então $\psi_n(\xi) = \mathbb{T}$. Definimos $\psi^*_{n+1}(\xi)$ como sendo um elemento de $\mathcal{B}$ com diâmetro

$$\delta(\psi^*_{n+1}(\xi)) = \frac{r_{n+1}}{d(J) \cdot \prod_{m<n+1} d(f_{i(m)}(b_m))}$$

e façamos

$$\psi_{n+1}(\xi) = d(J) \cdot \prod_{m<n+1} d(f_{i(m)}(b_m)) \cdot \psi^*_{n+1}(\xi).$$

Se $\xi \in (E_n \setminus \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)) \cap [\omega, \mathfrak{c}[$, fixemos uma raiz $d(f_{i(n)}(b_n))$-ésima do ponto médio de $\psi^*_n(\xi)$. Definimos $\psi^*_{n+1}(\xi)$ como sendo o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado na raiz em questão com diâmetro

$$\delta(\psi^*_{n+1}(\xi)) = \frac{r_{n+1}}{d(J) \cdot \prod_{m<n+1} d(f_{i(m)}(b_m))}$$

e façamos

$$\psi_{n+1}(\xi) = d(J) \cdot \prod_{m<n+1} d(f_{i(m)}(b_m)) \cdot \psi^*_{n+1}(\xi).$$

Vamos, agora, definir $\psi^*_{n+1}(\xi)$ e $\psi_{n+1}(\xi)$ para $\xi \in \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$ e estender $\phi \restriction_{G_n}$ a $\phi \restriction_{G_{n+1}}$.

Caso 1: $h_{i(n)}$ é do tipo 1.

Como $\mathbb{T}$ é divisível e G_n é um subgrupo de G_{n+1}, podemos estender $\phi \restriction_{G_n}$ a um homomorfismo de grupos $\phi \restriction_{G_{n+1}} \colon G_{n+1} \to \mathbb{T}$. Fixemos $\alpha \in \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n) \setminus E_n$. Aplicando o lema 3.2.3 para $[\omega, \mathfrak{c}[$, $d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m))$, r_n, $\psi_n(i(n)) - \phi \restriction_{G_{n+1}} (g_{i(n)}(b_n))$, $E_n \cap \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$, $f_{i(n)}(b_n)$, α e ψ^*_n, obtemos $\tilde{\psi} : \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n) \to \mathbb{T}$ satisfazendo as condições (i), (ii), (iii) e (iv) do lema 3.2.3. Façamos $\psi^*_{n+1}(\xi) = \tilde{\psi}(\xi)$, para todo $\xi \in \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$. As condições (1), (2), (3) e (4) estão satisfeitas.

Caso 2: $h_{i(n)}$ é do tipo 2.

[8] Se $f_{i(n)}(b_n) = 0$, então $\sum_{\mu \in \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)} a(f_{i(n)}(b_n), \mu) \cdot d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m)) \cdot \psi^*_{n+1}(\mu) = \{0 + \mathbb{Z}\}$.

Como $\mathbb{T}$ é divisível e G_n é um subgrupo de G_{n+1}, podemos estender $\phi \restriction_{G_n}$ a um homomorfismo de grupos $\phi \restriction_{G_{n+1}}: G_{n+1} \to \mathbb{T}$. Fixemos $\alpha \in \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$ tal que $q(f_{i(n)}(b_n), \alpha) \cdot r_n > d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m))$. Podemos supor que $\alpha \in E_n$ pois, do contrário, os argumentos utilizados no caso 1 podem ser repetidos aqui. Aplicando o lema 3.2.4 para $[\omega, \mathfrak{c}[,\ d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m)),\ r_n,\ \psi_n(i(n)) - \phi \restriction_{G_{n+1}} (g_{i(n)}(b_n)),\ E_n \cap \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$, $f_{i(n)}(b_n)$, α e ψ_n^*, obtemos $\tilde{\psi} : \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n) \to \mathbb{T}$ satisfazendo as condições (i), (ii), (iii) e (iv) do lema 3.2.4. Façamos $\psi_{n+1}^*(\xi) = \tilde{\psi}(\xi)$, para todo $\xi \in \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$. As condições (1), (2), (3) e (4) estão satisfeitas.

Caso 3: $h_{i(n)}$ é do tipo 3.

Como $\mathbb{T}$ é divisível e G_n é um subgrupo de G_{n+1}, podemos estender $\phi \restriction_{G_n}$ a um homomorfismo de grupos $\phi \restriction_{G_{n+1}}: G_{n+1} \to \mathbb{T}$. Fixemos $\alpha \in \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$ tal que $|a(f_{i(n)}(b_n), \alpha)| \cdot r_n > 4 \cdot d(f_{i(n)}(b_n))$. Novamente, podemos supor que $\alpha \in E_n$. Aplicando o lema 3.2.5 para $[\omega, \mathfrak{c}[,\ d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m)),\ r_n,\ \psi_n(i(n)) - \phi \restriction_{G_{n+1}} (g_{i(n)}(b_n))$, $E_n \cap \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$, $f_{i(n)}(b_n)$, α e ψ_n^*, obtemos $\tilde{\psi} : \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n) \to \mathbb{T}$ satisfazendo as condições (i), (ii), (iii) e (iv) do lema 3.2.5. Façamos $\psi_{n+1}^*(\xi) = \tilde{\psi}(\xi)$, para todo $\xi \in \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$. As condições (1), (2), (3) e (4) estão satisfeitas.

Caso 4: $h_{i(n)}$ é do tipo 4.

Se $\xi \in (E_{n+1} \setminus E_n) \cap \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$, definimos $\psi_{n+1}^*(\xi)$ como sendo um elemento de $\mathcal{B}$ tal que

$$\delta(\psi_{n+1}^*(\xi)) = \frac{r_{n+1}}{d(J) \cdot \prod_{m<n+1} d(f_{i(m)}(b_m))}.$$

Se $\xi \in E_n \cap \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$, fixemos uma raiz $d(f_{i(n)}(b_n))$-ésima do ponto médio de $\psi_n^*(\xi)$. Definimos $\psi_{n+1}^*(\xi)$ como sendo o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado na raiz em questão com diâmetro

$$\delta(\psi_{n+1}^*(\xi)) = \frac{r_{n+1}}{d(J) \cdot \prod_{m<n+1} d(f_{i(m)}(b_m))}.$$

Em ambos os casos, façamos

$$\psi_{n+1}(\xi) = d(J) \cdot \prod_{m<n+1} d(f_{i(m)}(b_m)) \cdot \psi_{n+1}^*(\xi).$$

Denotemos por z_ξ o centro de $\psi_{n+1}^*(\xi)$, para todo $\xi \in \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$.

Seja

$$\tilde{G}_{n+1} = \langle \{\Lambda_{k,d(H)\cdot\prod_{m<n} d(g_{i(m)}(b_m))} : k \in \operatorname{supp} H \cup \bigcup_{m<n+1} \operatorname{supp} g_{i(m)}(b_m)\}\rangle.$$

Como $\mathbb{T}$ é divisível e G_n é um subgrupo de $\tilde{G}_{n+1}$, podemos estender $\phi \restriction_{G_n}$ a um homomorfismo de grupos $\phi \restriction_{\tilde{G}_{n+1}}: \tilde{G}_{n+1} \to \mathbb{T}$. Fixemos $l \in \operatorname{supp} g_{i(n)}(b_n)$ tal que $q(g_{i(n)}(b_n), l) \cdot r_n > d(H) \cdot \prod_{m<n} d(g_{i(m)}(b_m))$. Se $k \in \operatorname{supp} g_{i(n)}(b_n) \setminus \{l\}$, seja y_k uma raiz $d(g_{i(n)}(b_n))$-ésima de $\phi \restriction_{\tilde{G}_{n+1}} (\Lambda_{k,d(H)\cdot\prod_{m<n} d(g_{i(m)}(b_m))})$.

Aplicando o lema 4.2.3 para ω, $d(H) \cdot \prod_{m<n} d(g_{i(m)}(b_m))$, r_n, $\psi_n(i(n)) - u - v$, $g_{i(n)}(b_n)$, l e $x = \phi \restriction_{\tilde{G}_{n+1}} (\Lambda_{l,d(H)\cdot\prod_{m<n} d(g_{i(m)}(b_m))})$, onde

$$u = \sum_{k \in \operatorname{supp} g_{i(n)}(b_n) \setminus \{l\}} a(g_{i(n)}(b_n), k) \cdot d(H) \cdot \prod_{m<n} d(g_{i(m)}(b_m)) \cdot y_k$$

e

$$v = \sum_{\xi \in \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)} a(f_{i(n)}(b_n), \xi) \cdot d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m)) \cdot z_\xi,$$

obtemos $y_l \in \mathbb{T}$ tal que $d(g_{i(n)}(b_n)) \cdot y_l = \phi \restriction_{\tilde{G}_{n+1}} (\Lambda_{l,d(H)\cdot\prod_{m<n} d(g_{i(m)}(b_m))})$ e

$$a(g_{i(n)}(b_n), l) \cdot d(H) \cdot \prod_{m<n} d(g_{i(m)}(b_m)) \cdot y_l + u + v \in \psi_n(i(n)).$$

Estendamos $\phi \restriction_{\tilde{G}_{n+1}}$ a um homomorfismo de grupos $\phi \restriction_{G_{n+1}}: G_{n+1} \to \mathbb{T}$ de modo que

$$\phi \restriction_{G_{n+1}} (\Lambda_{k,d(H)\cdot\prod_{m<n+1} d(g_{i(m)}(b_m))}) = y_k$$

para todo $k \in \operatorname{supp} g_{i(n)}(b_n)$. As condições (1), (2), (3) e (4) estão satisfeitas.

Por indução, obtemos aplicações $\psi_n : E \cap [\omega, \mathfrak{c}[\to \mathcal{B}$ e $\psi_n^* : E_n \cap [\omega, \mathfrak{c}[\to \mathcal{B}$ para cada $n \in \omega$, satisfazendo as seguintes condições:

- $\overline{\psi_{n+1}(\xi)} \subset \psi_n(\xi)$, para todo $\xi \in E \cap [\omega, \mathfrak{c}[$;
- $\delta(\psi_n(\xi)) = r_n$, se $\xi \in E_n \cap [\omega, \mathfrak{c}[$ e $\psi_n(\xi) = \mathbb{T}$, se $\xi \in (E \setminus E_n) \cap [\omega, \mathfrak{c}[$;
- $\psi_n(\xi) = d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m)) \cdot \psi_n^*(\xi)$, se $\xi \in E_n \cap [\omega, \mathfrak{c}[$.

Obtemos, ainda, $\phi\restriction_G\colon G \to \mathbb{T}$ um homomorfismo de grupos, onde $G = \cup_{n\in\omega} G_n \subset (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}$. Usando o fato de $\mathbb{T}$ ser um grupo divisível, estendemos $\phi\restriction_G$ a um homomorfismo de grupos $\phi\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}}\colon (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \to \mathbb{T}$.

Como $\mathbb{T}$ é um espaço métrico completo e $(r_n)_{n\in\omega}$ é uma seqüência de números reais positivos que converge para 0, concluímos que se $\xi \in E \cap [\omega, \mathfrak{c}[$, então $\cap_{n\in\omega}\psi_n(\xi) = \cap_{n\in\omega}\overline{\psi_n(\xi)}$ é um conjunto unitário. Denotaremos por $\tilde{\phi}(\chi_\xi)$ o único elemento de $\cap_{n\in\omega}\psi_n(\xi)$.

Para cada $\xi \in E \cap [\omega, \mathfrak{c}[$, sejam $N_\xi = \min\{n \in \omega : \xi \in E_n\}$ e $n \geq N_\xi$. Temos que $\psi_n(\xi) \neq \mathbb{T}$ e, portanto, existe um único elemento de $\psi_n^*(\xi)$ que multiplicado por $d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m))$ é igual a $\tilde{\phi}(\chi_\xi)$. Denotaremos tal elemento por

$$\tilde{\phi}\left(\frac{1}{d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m))} \cdot \chi_\xi\right).$$

Consideremos

$$G_\xi = \left\{\frac{1}{d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m))} \cdot \chi_\xi \in \mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)} : n \geq N_\xi\right\}$$

e denotemos por $\tilde{G}$ o grupo gerado por $\cup_{\xi\in E\cap[\omega,\mathfrak{c}[} G_\xi$. Uma vez que se $\xi \in E \cap [\omega, \mathfrak{c}[$ e $n > N_\xi$, então

$$\tilde{\phi}\left(\frac{1}{d(J) \cdot \prod_{m<N_\xi} d(f_{i(m)}(b_m))} \cdot \chi_\xi\right) = \prod_{N_\xi \leq m<n} d(f_{i(m)}(b_m)) \cdot \tilde{\phi}\left(\frac{1}{d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m))} \cdot \chi_\xi\right)$$

podemos estender $\tilde{\phi}$ a um homomorfismo de grupos de $\tilde{G}$ em $\mathbb{T}$. Usando o fato de $\mathbb{T}$ ser um grupo divisível, estendemos $\tilde{\phi}$ a um homomorfismo de grupos $\phi\restriction_{\mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)}}\colon \mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)} \to \mathbb{T}$.

Definimos $\phi_{(H,J)}\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)}}\colon (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)} \to \mathbb{T}$ por

$$\phi_{(H,J)}\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)}} (\tilde{H}, \tilde{J}) = \phi\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}} (\tilde{H}) + \phi\restriction_{\mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)}} (\tilde{J})$$

para todo $(\tilde{H}, \tilde{J}) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)}$.

Se $J = 0$, então $\phi\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)}} (H, J) = \phi\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}} (H) \neq \mathbb{Z}$, uma vez que $(H, J) \neq (0, 0)$. Suponhamos, portanto, que $J \neq 0$. Temos que

$$\phi\restriction_{\mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)}} (J) \in \sum_{\xi\in\operatorname{supp} J} a(J, \xi) \cdot \psi_0^*(\xi).$$

Como

$$0+\mathbb{Z} \notin \phi \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}} (H) + \sum_{\xi \in \operatorname{supp} J} a(J,\xi)\cdot \psi_0^*(\xi)$$

temos que $\phi \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)}} (H,J) \neq \mathbb{Z}$. Logo, (i) está verificada.

Fixemos $\xi \in E \cap L_0$. Para cada $k \in i^{-1}(\{\xi\})$, temos que $\phi \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)}} (h_{i(k)}(b_k))$ é um elemento de

$$\phi \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)}} (g_{i(k)}(b_k)) + \sum_{\mu \in \operatorname{supp} f_{i(k)}(b_k)} a(f_{i(k)}(b_k),\mu)\cdot d(J)\cdot \prod_{m<k} d(f_{i(m)}(b_m))\cdot \psi_{k+1}^*(\mu).$$

Além disso,

$$\phi \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)}} (0,\chi_{i(k)}) \in \psi_k(i(k)).$$

De (4) vem que

$$\begin{aligned} \delta(\phi \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)}} (h_{i(k)}(b_k)), \phi \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)}} (0,\chi_{i(k)})) &\leq d_1+d_2 \\ &< 2r_k \end{aligned}$$

onde

$$d_1 = \delta(\textstyle\sum_{\mu \in \operatorname{supp} f_{i(k)}(b_k)} a(f_{i(k)}(b_k),\mu)\cdot d(J)\cdot \prod_{m<k} d(f_{i(m)}(b_m))\cdot \psi_{k+1}^*(\mu))$$

e

$$d_2 = \delta(\psi_k(i(k))).$$

Como $r_k \to 0$, concluímos que a seqüência $\{\phi \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)}} (h_{i(k)}(b_k)) : k \in i^{-1}(\{\xi\})\}$ converge para $\phi \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)}} (0,\chi_\xi)$. Da propriedade (v) do lema 4.2.2 segue que

$$\phi \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)}} (0,\chi_\xi) = p_\xi - \lim\{\phi \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)}} (h_\xi(n)) : n \in \omega\}.$$

Logo, (ii) está verificada. □

Estamos prontos para estender $\phi_{(H,J)} \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)}}$ a um homomorfismo de grupos $\phi_{(H,J)} : (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)} \to \mathbb{T}$.

Lema 4.2.5. *Para cada* $(H,J) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)}\setminus\{(0,0)\}$, *existe* $\phi_{(H,J)} : (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)} \to \mathbb{T}$ *um homomorfismo de grupos tal que:*

(i) $\phi_{(H,J)}(H,J) \neq 0+\mathbb{Z}$;

(ii) $\phi_{(H,J)}(0,\chi_\xi) = p_\xi - \lim\{\phi_{(H,J)}(h_\xi(n)) : n \in \omega\}$, *para cada* $\xi \in L_0$.

Demonstração. Faremos a construção de $\phi_{(H,J)}$ por indução. De acordo com a proposição 4.2.1, existe $E \in [\mathfrak{c}]^\omega$ tal que $\operatorname{supp}(H,J) \subset E$, $|E \cap L_0| = \omega$ e $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} h_\xi(n) \subset E$, qualquer que seja $\xi \in E \cap L_0$. Segundo o lema 4.2.4 é possível construir $\phi_{(H,J)} \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)}}$: $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)} \to \mathbb{T}$ um homomorfismo de grupos com as seguintes propriedades:

(1) $\phi_{(H,J)} \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)}} (H,J) \neq 0 + \mathbb{Z}$;

(2) $\phi_{(H,J)} \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)}} (0,\chi_\xi) = p_\xi - \lim\{\phi_{(H,J)} \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)}} (h_\xi(n)) : n \in \omega\}$, para cada $\xi \in E \cap L_0$.

Consideremos $\{\alpha_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ uma indexação estritamente crescente de $[\omega,\mathfrak{c}[\setminus E$ e fixemos $\{O_\delta : \delta < \mathfrak{c}\}$ uma indexação da família dos abertos básicos de $\mathbb{T}^{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)}\setminus\{(0,0)\}}$ cujas projeções em cada coordenada são arcos abertos de $\mathbb{T}$ com extremos racionais ou o próprio $\mathbb{T}$. Suponhamos que $O_0 = \mathbb{T}^{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)}\setminus\{(0,0)\}}$. Dado $\delta < \mathfrak{c}$, escreveremos

$$\operatorname{coord}(O_\delta) = \{(H,J) \in \mathbb{T}^{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)}} : \operatorname{proj}_{(H,J)}(O_\delta) \neq \mathbb{T}\}$$

onde

$$\operatorname{proj}_{(H,J)}(x) = x(H,J)$$

para todo $x \in \mathbb{T}^{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)}\setminus\{(0,0)\}}$. Para cada $\beta \in \mathfrak{c}\setminus\{0\}$, fixemos $\{L_{\beta,\delta} : \delta < \mathfrak{c}\}$ uma partição de L_β tal que $|L_{\beta,\delta}| = \mathfrak{c}$, para todo $\delta < \mathfrak{c}$.

- Se $\alpha_0 \in L_0$, definamos

$$\tilde{\phi}_{(H,J)}(0,\chi_{\alpha_0}) = p_{\alpha_0} - \lim\{\phi_{(H,J)} \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)}} (h_{\alpha_0}(n)) : n \in \omega\}$$

  e façamos

$$\tilde{\phi}_{(H,J)}(\tilde{H},\tilde{J}) = \phi_{(H,J)} \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)}} (\tilde{H},\tilde{J})$$

  para todo $(\tilde{H},\tilde{J}) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)}$.[9]

- Se existem $\beta \in \mathfrak{c}\setminus\{0\}$ e $\delta < \mathfrak{c}$ tais que $\alpha_0 \in L_{\beta,\delta}$, definamos $\tilde{\phi}_{(H,J)}(0,\chi_{\alpha_0})$ de modo que

$$\tilde{\phi}_{(H,J)}(x^{\alpha_0},\chi_{\alpha_0}) \in \operatorname{proj}_{(H,J)}(O_\delta)$$

[9] Estamos considerando $\mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)} \subset \mathbb{Q}^{((E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)\cup\{\alpha_0\})} \subset \mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)}$.

e façamos

$$\tilde{\phi}_{(H,J)}(\tilde{H},\tilde{J}) = \phi_{(H,J)} \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)}} (\tilde{H},\tilde{J})$$

para todo $(\tilde{H},\tilde{J}) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)}$.

- Se $\alpha_0 \notin \cup_{\beta<\mathfrak{c}} L_\beta$, definamos $\tilde{\phi}_{(H,J)}(0,\chi_{\alpha_0})$ arbitrariamente e façamos

$$\tilde{\phi}_{(H,J)}(\tilde{H},\tilde{J}) = \phi_{(H,J)} \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)}} (\tilde{H},\tilde{J})$$

para todo $(\tilde{H},\tilde{J}) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)}$.

Seja G_0 o subgrupo de $\mathbb{Q}^{((E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)\cup\{\alpha_0\})}$ gerado por $\mathbb{Q}^{(E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)} \cup \{\chi_{\alpha_0}\}$. Podemos estender $\tilde{\phi}_{(H,J)}$ a um homomorfismo de grupos de $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus G_0$ em $\mathbb{T}$. Uma vez que $\mathbb{T}$ é divisível, estendemos $\tilde{\phi}_{(H,J)}$ a um homomorfismo de grupos $\phi_{(H,J)} \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{((E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)\cup\{\alpha_0\})}}$: $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{((E\cap[\omega,\mathfrak{c}[)\cup\{\alpha_0\})} \to \mathbb{T}$.

Repetindo indutivamente esta construção, obteremos $\phi_{(H,J)} : (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)} \to \mathbb{T}$ um homomorfismo de grupos satisfazendo (i) e (ii). □

4.3 Explicitando a topologia

A próxima proposição mostra que o produto diagonal da família $\{\phi_{(H,J)} : (H,J) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)} \setminus \{(0,0)\}\}$ é um monomorfismo de grupos.

Proposição 4.3.1. *Suponhamos que para cada $(H,J) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)} \setminus \{(0,0)\}$ exista um homomorfismo de grupos $\phi_{(H,J)} : (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)} \to \mathbb{T}$ tal que $\phi_{(H,J)}(H,J) \neq 0+\mathbb{Z}$. A aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)} & \to & \mathbb{T}^{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)}\setminus\{(0,0)\}} \\ & (\tilde{H},\tilde{J}) & \mapsto & \Phi(\tilde{H},\tilde{J}) \end{array}$$

dada por

$$\Phi(\tilde{H},\tilde{J})(H,J) = \phi_{(H,J)}(\tilde{H},\tilde{J}), \ \textit{para cada} \ (H,J) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)} \setminus \{(0,0)\}$$

é um monomorfismo de grupos.

Demonstração. Análoga à da proposição 2.3.1. □

Teorema 4.3.2. *Se G é um grupo abeliano quase livre de torção tal que $|G| = \mathfrak{c}$, então G admite uma topologia que o torna um grupo topológico (regular) enumeravelmente compacto sem seqüências não triviais convergentes.*

Demonstração. Seja

$$\sigma = \{\varphi^{-1} \circ \Phi^{-1}(U \cap \Phi[\varphi[G]]) : U \text{ é aberto em } \mathbb{T}^{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)} \setminus \{(0,0)\}}\}.$$

Temos que σ é uma topologia em G que o torna um grupo topológico (regular).

Consideremos $h : \omega \to G$. Se h é trivial, nada temos a fazer. Se não, h possui duas subseqüências constantes e distintas ou existe $j : \omega \to \omega$ estritamente crescente tal que $h \circ j$ é injetora. No primeiro caso, temos que $\{h(n) \in G : n \in \omega\}$ tem pelo menos dois pontos de acumulação distintos e, portanto, h não é convergente. Suponhamos que o segundo caso ocorra.

As aplicações

$$\begin{array}{rccl} h_0 : & \omega & \to & G \\ & n & \mapsto & (h \circ j)(2n) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccl} h_1 : & \omega & \to & G \\ & n & \mapsto & (h \circ j)(2n+1) \end{array}$$

são subseqüências distintas de h. De acordo com a proposição 4.1.2, existem $j_0, j_1 : \omega \to \omega$ estritamente crescentes tais que $\varphi \circ h_0 \circ j_0, \varphi \circ h_1 \circ j_1 \in \mathcal{H}$, uma vez que $h \circ j$ é injetora. Logo, existem $\xi_0, \xi_1 \in L_0$ distintos tais que $\varphi \circ h_0 \circ j_0 = h_{\xi_0}$ e $\varphi \circ h_1 \circ j_1 = h_{\xi_1}$.

Dado $i \in \{0, 1\}$, temos que

$$\phi_{(H,J)}(0, \chi_{\xi_i}) = p_{\xi_i} - \lim\{\phi_{(H,J)}(h_{\xi_i}(n)) : n \in \omega\}$$

para todo $(H, J) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)} \setminus \{(0, 0)\}$ e, portanto,

$$\Phi(0, \chi_{\xi_i}) = p_{\xi_i} - \lim\{\Phi(h_{\xi_i}(n)) : n \in \omega\}.$$

Logo,

$$\varphi^{-1}(0, \chi_{\xi_i}) = p_{\xi_i} - \lim\{(h_i \circ j_i)(n) : n \in \omega\}.$$

Assim, $\varphi^{-1}(0, \chi_{\xi_0})$ e $\varphi^{-1}(0, \chi_{\xi_1})$ são pontos de acumulação distintos de $\{h(n) : n \in \omega\}$. $\square$

4.4 Topologias independentes

Definição 4.4.1. *[35] Sejam τ_1 e τ_2 duas topologias T_1 e não discretas em um conjunto X. Dizemos que τ_1 e τ_2 são* independentes *se $\tau_1 \cap \tau_2$ coincide com a topologia cofinita em X.*

Observamos que se (G, τ) é um grupo topológico abeliano, então $G[n]$ é um subconjunto fechado de G para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, se G é um grupo de não torção, uma condição necessária para que G admita uma topologia independente de τ é ser quase livre de torção.

A prova da próxima proposição baseia-se na demonstração de um caso particular do teorema de Čech-Pospísil, o qual afirma que se X é um espaço compacto de Hausdorff tal que $\chi(x, X) \geq \omega$ para todo $x \in X$, então $|X| \geq \mathfrak{c}$.

Proposição 4.4.2. *Se X é um espaço topológico regular, enumeravelmente compacto e sem seqüências não triviais convergentes, então $|X| \geq \mathfrak{c}$.*

Demonstração. Para cada $n \in \omega$, vamos construir uma família $\{K_f : f \in 2^n\}$ de subconjuntos fechados infinitos de X tal que:

(1) Se $f \in 2^n$ e $m < n$, então $K_f \subset K_{f\restriction_m}$;

(2) Se $f, g \in 2^n$ e $f \neq g$, então $K_f \cap K_g = \emptyset$.

Se $n = 0$, então $2^n = \{\emptyset\}$. Façamos $K_\emptyset = X$. Fixemos $n \in \omega$ e suponhamos que $\{K_f : f \in 2^n\}$ seja uma família de subconjuntos fechados infinitos de X satisfazendo as condições (1) e (2). Para cada $f \in 2^n$, consideremos $f_0, f_1 \in 2^{n+1}$ tais que $f_0 \restriction_n = f$, $f_1 \restriction_n = f$, $f_0(n) = 0$ e $f_1(n) = 1$. Como K_f é um subconjunto fechado infinito de X, existem $x, y \in K_f$ pontos de acumulação distintos de K_f em X.[10] Da regularidade de X segue que existem U e V subconjuntos abertos de X tais que $x \in U$, $y \in V$ e $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Uma vez que x e y são pontos de acumulação de K_f em X, temos que $U \cap K_f$ e $V \cap K_f$ são subconjuntos infinitos de X. Como K_f é fechado em X, temos que $\overline{U \cap K_f} \subset K_f$ e $\overline{V \cap K_f} \subset K_f$. Definimos $K_{f_1} = \overline{U \cap K_f}$ e $K_{f_2} = \overline{V \cap K_f}$. Temos

[10] Seja F um subconjunto fechado infinito de X. Do fato de X ser enumeravelmente compacto decorre que existe $x \in F$ um ponto de acumulação de F em X. Suponhamos que, para cada vizinhança aberta U de x em X, o conjunto $F \setminus U$ seja finito. Seja $\{x_n : n \in \omega\}$ uma enumeração injetora de F. Temos que $\{x_n : n \in \omega\} \setminus U$ é um conjunto finito, para toda vizinhança aberta U de x em X. Isto implica que a seqüência não trivial $\{x_n : n \in \omega\}$ de X converge para x, o que é absurdo. Logo, existe uma vizinhança aberta U de x em X tal que $F \setminus U$ é um subconjunto infinito de X. Da compacidade enumerável de X segue que existe y um ponto de acumulação de $F \setminus U$ (e, portanto, de F) em X. Como $F \setminus U$ é um subconjunto fechado de X, temos que $y \in F \setminus U$ e, portanto, $x \neq y$.

que $\{K_f : f \in 2^{n+1}\} = \{K_{f_0} : f \in 2^n\} \cup \{K_{f_1} : f \in 2^n\}$ é uma família de subconjuntos fechados infinitos de X que satisfaz as condições (1) e (2).

Para cada $f \in 2^\omega$, seja $K_f = \cap_{n\in\omega} K_{f\restriction n}$. De (1) segue que $K_f \neq \emptyset$, uma vez que X é enumeravelmente compacto. De (2) decorre que se $f, g \in 2^\omega$ e $f \neq g$, então $K_f \cap K_g = \emptyset$. Logo, $|F| \geq \mathfrak{c}$. □

Corolário 4.4.3. *Seja X um espaço topológico regular, enumeravelmente compacto e sem seqüências não triviais convergentes. Se F é um subconjunto fechado e infinito de X, então $|F| \geq \mathfrak{c}$.*

Demonstração. Basta observar que se F é um subconjunto fechado e infinito de X, então F é um espaço topológico regular, enumeravelmente compacto e sem seqüências não triviais convergentes. Da proposição 4.4.2 segue que $|F| \geq \mathfrak{c}$. □

Teorema 4.4.4. *Se G é um grupo abeliano quase livre de torção e existe uma topologia τ em G tal que $|G| = |\tau| = \mathfrak{c}$, então existe uma topologia σ em G com as seguintes propriedades:*

(i) (G, σ) é um grupo topológico;

(ii) τ e σ são independentes.

Demonstração. Seja σ a topologia em G dada pelo teorema 4.3.2. De acordo com o corolário 4.4.3, a fim de mostrar que τ e σ são independentes, é suficiente verificar que $G \setminus F_\beta \notin \sigma$, para todo $\beta \in]0, \mathfrak{c}[$.

Fixemos $\beta \in \mathfrak{c} \setminus \{0\}$. Se mostrarmos que $\Phi[\varphi(F_\beta)] \cap O_\delta \neq \emptyset$ para todo $\delta < \mathfrak{c}$, teremos que $\Phi[\varphi(F_\beta)]$ será denso em $\mathbb{T}^{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)} \setminus \{(0,0)\}}$, uma vez que $\{O_\delta : \delta < \mathfrak{c}\}$ constitui uma base de abertos para $\mathbb{T}^{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{([\omega,\mathfrak{c}[)} \setminus \{(0,0)\}}$. Logo, F_β não será um subconjunto fechado de (G, σ), uma vez que $F_\beta \neq G$.

Temos que $\varphi[F_\beta] = (\varphi_2 \circ \varphi_1)[F_\beta] \supset \varphi_2[T_\beta] = \{(x^\beta, \chi_\xi) : \xi \in L_\beta\}$. Portanto, $\Phi[\varphi[F_\beta]] \supset \Phi[\{(x^\beta, \chi_\xi) : \xi \in L_\beta\}]$. Claramente, $\Phi[\{(x^\beta, \chi_\xi) : \xi \in L_\beta\}] \cap O_0 \neq \emptyset$. Seja $\delta < \mathfrak{c}$ e suponhamos escolhidos $\{\xi_\gamma : \gamma < \delta\} \subset L_\beta$ tais que $\Phi(x^\beta, \chi_{\xi_\gamma}) \in O_\gamma$. Seja $\mathrm{coord}(O_\delta) = \{(H_0, J_0), ..., (H_k, J_k)\}$. Temos que $L_{\beta,\delta} \setminus (\{\xi_\gamma : \gamma < \delta\} \cup \bigcup_{i=0}^k E_{(H_i,J_i)}) \neq \emptyset$, onde $E_{(H_i,J_i)}$ é obtido através da proposição 4.2.1 aplicada a (H_i, J_i). Tomemos $\xi_\delta \in L_{\beta,\delta} \setminus (\{\xi_\gamma : \gamma < \delta\} \cup \bigcup_{i=0}^k E_{(H_i,J_i)}) \neq \emptyset$. Do lema 4.2.5 segue que $\phi_{(H_i,J_i)}(x^\beta, \chi_{\xi_\delta}) \in \mathrm{proj}_{(H_i,J_i)}(O_\delta)$, para todo $i < k+1$. Portanto, $\Phi(x^\beta, \chi_{\xi_\delta}) \in O_\delta$. □

Corolário 4.4.5. *Se G é um grupo abeliano quase livre de torção tal que $|G| = \mathfrak{c}$ e existe uma topologia τ em G tal que $w(G, \tau) = \omega$, então existe uma topologia σ em G com as seguintes propriedades:*

(i) (G, σ) *é um grupo topológico;*

(ii) τ *e* σ *são independentes.*

Demonstração. Basta observar que $|\tau| \leq 2^{w(G,\tau)} = \mathfrak{c}$ e que, como (G, τ) é T_1, então $|\tau| \geq |G| = \mathfrak{c}$. Logo, $|\tau| = \mathfrak{c}$, o que nos permite aplicar o teorema 4.4.4. $\square$

CAPÍTULO 5

Caracterização algébrica dos grupos abelianos de não torção que têm cardinalidade $\mathfrak{c}$ e que admitem uma topologia de grupo enumeravelmente compacta

Neste capítulo, assumiremos a existência de $\mathfrak{c}$ ultrafiltros seletivos dois a dois incomparáveis (segundo a ordem de Rudin-Keisler) para caracterizar algebricamente os grupos abelianos de não torção que têm cardinalidade $\mathfrak{c}$ e que admitem uma topologia de grupo enumeravelmente compacta sem seqüências não triviais convergentes.

Seja G um grupo abeliano de não torção tal que $|G| = \mathfrak{c}$. Sabemos que se G admite uma topologia de grupo enumeravelmente compacta, então $|G/T(G)| = \mathfrak{c}$ e, para quaisquer $n, d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tais que $d \mid n$, o conjunto $dG[n]$ é finito ou tem cardinalidade $\mathfrak{c}$. Nosso objetivo é mostrar que estas condições algébricas também são suficientes para garantir a existência de uma topologia de grupo enumeravelmente compacta em G.

A principal diferença com relação ao capítulo anterior é a necessidade de atribuir pontos de acumulação de ordem finita a algumas seqüências em G. Começaremos selecionando candidatos adequados e imergindo G em uma soma direta conveniente de cópias de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. A idéia de "reduzir" a quantidade de seqüências para as quais serão atribuídos pontos de acumulação pré-fixados também se faz presente neste capítulo e, a fim de escolhê-las adequadamente, recorremos à noção de subconjuntos n-rounds de um grupo fixado, onde n é um número natural não nulo.

Encerraremos este capítulo mostrando que se um grupo abeliano de não torção e cardinalidade $\mathfrak{c}$ admite uma topologia de grupo enumeravelmente compacta sem seqüências não triviais convergentes, então o mesmo admite uma topologia de grupo enumeravelmente compacta sem seqüências não triviais convergentes com peso $2^{\mathfrak{c}}$.

5.1 Selecionando candidatos a pontos de acumulação

Seja G um grupo abeliano tal que:

- $|G| = \mathfrak{c}$;
- $|G/T(G)| = \mathfrak{c}$;
- $\forall n, d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $(d \mid n \to |dG[n]| < \omega$ ou $|dG[n]| = \mathfrak{c})$.

Consideremos $\{P_0, P_1\}$ uma partição de $\mathfrak{c}$ tal que $|P_0| = |P_1| = \mathfrak{c}$, $\omega \cup \{\omega\} \subset P_1$ e $\{\omega + n : n \geq 1\} \subset P_0$.

Afirmação 5.1.1. *Existem $L_1 \in [P_1]^{\mathfrak{c}}$ e $\tilde{\varphi} : G \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)}$ um monomorfismo de grupos tais que $\omega \cup \{\omega\} \subset L_1$ e $\{(0, \chi_\xi) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} : \xi \in L_1\} \subset \tilde{\varphi}[G]$.*

Demonstração. Seja $\varphi_1 : G \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)}$ um monomorfismo de grupos.[1] Por hipótese, $|G/T(G)| = \mathfrak{c}$. Logo, existe W um subconjunto de G tal que:

- $w \notin T(G)$, para todo $w \in W$;
- $w_1 - w_2 \notin T(G)$, quaisquer que sejam $w_1, w_2 \in W$ com $w_1 \neq w_2$.

Tomemos $y_0 \in W$ e definamos $Y_0 = \{y_0\}$. Seja $\alpha < \mathfrak{c}$ um ordinal. Para cada $\beta < \alpha$, suponhamos definido $Y_\beta = \{y_\gamma : \gamma < \beta\}$ um subconjunto independente de G tal que:

- $Y_\beta \subset W$;
- Se $\gamma < \beta < \alpha$, então $Y_\gamma \subset Y_\beta$.

[1] Como G é um grupo abeliano, segue que G é isomorfo a um subgrupo de um grupo divisível. Além disso, todo grupo divisível é isomorfo a uma soma direta de cópias de $\mathbb{Q}$ e de $\mathbb{Z}_p(\infty) \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, para p número primo. Uma vez que $|G| = \mathfrak{c}$, bastam $\mathfrak{c}$ cópias de $\mathbb{Q}$ e de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Se α for um ordinal limite, façamos $Y_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} Y_\beta$. Suponhamos, portanto, que α seja um ordinal sucessor — digamos, $\alpha = \beta + 1$. Afirmamos que existe $y_\alpha \in W$ tal que $\langle y_\alpha \rangle \cap \langle Y_\beta \rangle = \{0\}$. Com efeito, se não existisse um tal elemento, então para cada $w \in W$ existiria $m_w \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ de modo que $m_w \cdot w \in \langle Y_\beta \rangle$. Todavia, $|\langle Y_\beta \rangle| \leq \max\{\omega, |\beta|\} < \mathfrak{c}$. Como $|W| = \mathfrak{c}$, existiriam $y \in \langle Y_\beta \rangle$ e $\tilde{W} \subset W$ tais que:

- $|\tilde{W}| = \mathfrak{c}$;
- $m_w \cdot w = y$, para todo $w \in \tilde{W}$.

Uma vez que $|\mathbb{Z} \setminus \{0\}| = \omega$, seria possível tomar $\tilde{\tilde{W}} \subset \tilde{W}$ e $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tais que:

- $|\tilde{\tilde{W}}| = \mathfrak{c}$;
- $m \cdot w = y$, para todo $w \in \tilde{\tilde{W}}$.

Todavia, isto contradiz o fato de que a diferença de dois elementos distintos quaisquer de W não pertence a $T(G)$. Portanto, existe $y_\alpha \in W$ tal que $\langle y_\alpha \rangle \cap \langle Y_\beta \rangle = \{0\}$. Façamos $Y_\alpha = Y_\beta \cup \{y_\alpha\}$. Temos que Y_α é um subconjunto independente de G tal que $Y_\alpha \subset W$ e $Y_\beta \subset Y_\alpha$, qualquer que seja $\beta < \alpha$. Seja $Y = \cup_{\alpha<\mathfrak{c}} Y_\alpha$.

Temos que $Y \subset W$ é um subconjunto independente de G de cardinalidade $\mathfrak{c}$. Consideremos $\{z_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ uma indexação de Y e escrevamos

$$\varphi_1(z_\xi) = (a_\xi, b_\xi) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)}$$

qualquer que seja $\xi < \mathfrak{c}$. Para cada $n \in \omega$, seja

$$A_n = \{\xi < \mathfrak{c} : n \cdot a_\xi = 0\}.$$

Como $|Y| = \mathfrak{c}$, existe $n \in \omega$ tal que $|A_n| = \mathfrak{c}$. Fixemos um tal n e olhemos para o conjunto $\{n \cdot z_\xi : \xi \in A_n\}$. Observamos que o mesmo tem cardinalidade $\mathfrak{c}$, uma vez que $|A_n| = \mathfrak{c}$ e $Y \subset W$ é um subconjunto independente de G. Além disso, $\varphi_1(n \cdot z_\xi) = (0, n \cdot b_\xi)$, para todo $\xi \in A_n$.

Tomemos $\{c_\zeta : \zeta \in P_1\}$ uma base do $\mathbb{Q}$-espaço vetorial $\mathbb{Q}^{(P_1)}$ que contém $\{n \cdot b_\xi : \xi \in A_n\}$ e tal que $\{c_\zeta : \zeta \in \omega \cup \{\omega\}\} \subset \{n \cdot b_\xi : \xi \in A_n\}$. Seja $\varphi_2 : (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)}$ o isomorfismo de grupos dado por $\varphi_2(a, 0) = (a, 0)$, qualquer que seja $(a, 0) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)}$ e $\varphi_2(0, \sum_{\zeta \in F} \alpha_\zeta \cdot c_\zeta) = (0, \sum_{\zeta \in F} \alpha_\zeta \cdot \chi_\zeta)$, qualquer que seja $F \in [P_1]^{<\omega}$ com $\{\alpha_\zeta : \zeta \in F\} \subset \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Tomemos $L_1 \in [P_1]^{\mathfrak{c}}$ tal que $|P_1 \setminus L_1| = \mathfrak{c}$ e $\{n \cdot b_\xi : \xi \in A_n\} = \{c_\zeta : \zeta \in L_1\}$. Temos que $\omega \cup \{\omega\} \subset L_1$ e $\{(0, \chi_\xi) : \xi \in L_1\} \subset \tilde{\varphi}[G]$, onde $\tilde{\varphi} = \varphi_2 \circ \varphi_1$. $\square$

Denotemos por D o conjunto dos números naturais $n > 1$ tais que G contém uma cópia de $\mathbb{Z}_n^{(\mathfrak{c})}$ — e, portanto, um subconjunto independente de cardinalidade $\mathfrak{c}$ constituído de elementos de ordem n.

Afirmação 5.1.2. *Para cada $n \in D$, existe $\{(x_\xi^n, 0) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} : \xi < \mathfrak{c}\} \subset \tilde{\varphi}[G]$ com as seguintes propriedades:*

(i) $\mathrm{o}(x_\xi^n) = n$, *para todo* $\xi < \mathfrak{c}$;

(ii) $\operatorname{supp} x_\xi^n \cap \operatorname{supp} x_\mu^n = \emptyset$, *quaisquer que sejam* $\xi, \mu < \mathfrak{c}$ *com* $\xi \neq \mu$.

Demonstração. Sejam $n \in D$ e $\{(y_\xi^n, 0) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} : \xi < \mathfrak{c}\} \subset \tilde{\varphi}[G]$ independente com $\mathrm{o}(y_\xi^n) = n$, para todo $\xi < \mathfrak{c}$.

Caso 1: $\mathfrak{c}$ é regular.

Aplicando o lema do Δ-sistema para $\{\operatorname{supp} y_\xi^n : \xi < \mathfrak{c}\}$, obtemos $I_n \in [\mathfrak{c}]^{\mathfrak{c}}$ e $R_n \in [P_0]^{<\omega}$ tais que $\{\operatorname{supp} y_\xi^n : \xi \in I_n\}$ constitui um Δ-sistema de raiz R_n. Tomemos $J_n \in [I_n]^{\mathfrak{c}}$ tal que se $\xi, \mu \in J_n$, então $y_\xi^n(\zeta) = y_\mu^n(\zeta)$ para todo $\zeta \in R_n$.[2] Seja $\{J_{n,0}, J_{n,1}\}$ uma partição de J_n tal que $|J_{n,0}| = |J_{n,1}| = \mathfrak{c}$. Fixemos $f : \mathfrak{c} \to J_{n,0}$ e $g : \mathfrak{c} \to J_{n,1}$ bijeções e definamos $x_\xi^n = y_{f(\xi)}^n - y_{g(\xi)}^n$, para todo $\xi < \mathfrak{c}$.

Dado $\xi < \mathfrak{c}$, temos que $\mathrm{o}(x_\xi^n) = n$, uma vez que $n \cdot x_\xi^n = n \cdot (y_{f(\xi)}^n - y_{g(\xi)}^n) = n \cdot y_{f(\xi)}^n - n \cdot y_{g(\xi)}^n = 0 - 0 = 0$ e se m é um número natural não nulo menor que n, então $m \cdot x_\xi^n = m \cdot y_{f(\xi)}^n - m \cdot y_{g(\xi)}^n \neq 0$, uma vez que $\mathrm{o}(y_{f(\xi)}^n) = \mathrm{o}(y_{g(\xi)}^n) = n$ e $\{y_\xi^n : \xi < \mathfrak{c}\}$ é um subconjunto independente de G.

Por fim, sejam $\xi, \mu < \mathfrak{c}$ tais que $\xi \neq \mu$. Se $\zeta \in \operatorname{supp} x_\xi^n \cap \operatorname{supp} x_\mu^n$, então uma das seguintes possibilidades ocorre:

- $\zeta \in \operatorname{supp} y_{f(\xi)}^n \cap \operatorname{supp} y_{f(\mu)}^n$;
- $\zeta \in \operatorname{supp} y_{f(\xi)}^n \cap \operatorname{supp} y_{g(\mu)}^n$;
- $\zeta \in \operatorname{supp} y_{g(\xi)}^n \cap \operatorname{supp} y_{f(\mu)}^n$;
- $\zeta \in \operatorname{supp} y_{g(\xi)}^n \cap \operatorname{supp} y_{g(\mu)}^n$.

[2] Um tal J_n existe, uma vez que R_n é finito, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ é enumerável e $|I_n| = \mathfrak{c}$.

Logo, $\zeta \in R_n$ e, portanto, $\zeta \in \operatorname{supp} y^n_{f(\xi)} \cap \operatorname{supp} y^n_{f(\mu)} \cap \operatorname{supp} y^n_{g(\xi)} \cap \operatorname{supp} y^n_{g(\mu)}$. Como $f(\xi), g(\xi), f(\mu), g(\mu) \in J_n$, temos que $y^n_{f(\xi)}(\zeta) = y^n_{f(\mu)}(\zeta) = y^n_{g(\xi)}(\zeta) = y^n_{g(\mu)}(\zeta)$ e, portanto, $x^n_\xi(\zeta) = x^n_\mu(\zeta) = 0$ — o que é absurdo, pois tomamos $\zeta \in \operatorname{supp} x^n_\xi \cap \operatorname{supp} x^n_\mu$. Portanto, $\operatorname{supp} x^n_\xi \cap \operatorname{supp} x^n_\mu = \emptyset$, quaisquer que sejam $\xi, \mu < \mathfrak{c}$ com $\xi \neq \mu$.

Caso 2: $\mathfrak{c}$ não é regular.

Neste caso, $\operatorname{cf}(\mathfrak{c}) < \mathfrak{c}$ e $\mathfrak{c}$ é um cardinal limite.

Seja $\{I_\alpha : \alpha < \operatorname{cf}(\mathfrak{c})\}$ uma família de subconjuntos de $\mathfrak{c}$ dois a dois disjuntos tal que $\mathfrak{c} = \cup_{\alpha<\operatorname{cf}(\mathfrak{c})} I_\alpha$ e $|I_\alpha| = \kappa_\alpha$, para cada $\alpha < \operatorname{cf}(\mathfrak{c})$, onde:

- $\{\kappa_\alpha : \alpha < \operatorname{cf}(\mathfrak{c})\}$ é uma seqüência estritamente crescente e cofinal em $\mathfrak{c}$;
- κ_α é um cardinal regular, para todo $\alpha < \mathfrak{c}$;
- $\kappa_\alpha \geq \max\{\omega, |\alpha|, \sup_{\beta<\alpha} \kappa_\beta\}^+$.[3]

Para cada $\alpha < \operatorname{cf}(\mathfrak{c})$ podemos repetir a construção feita no caso 1 e obter $\{(x^n_\xi, 0) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} : \xi \in I_\alpha\} \subset \tilde{\varphi}[G]$ tal que $\mathrm{o}(x^n_\xi) = n$ para todo $\xi \in I_\alpha$ e $\operatorname{supp} x^n_\xi \cap \operatorname{supp} x^n_\mu = \emptyset$, quaisquer que sejam $\xi, \mu \in I_\alpha$ com $\xi \neq \mu$.

Sejam $J_0 = I_0$ e $\alpha < \operatorname{cf}(\mathfrak{c})$ um ordinal. Suponhamos que para cada $\beta < \alpha$, exista $J_\beta \subset I_\beta$ tal que $|J_\beta| = |I_\beta| = \kappa_\beta$ e $\operatorname{supp} x^n_\xi \cap \operatorname{supp} x^n_\mu = \emptyset$, quaisquer que sejam $\xi, \mu \in \cup_{\beta<\alpha} J_\beta$ com $\xi \neq \mu$. Seja $X_\alpha = \cup_{\xi \in \cup_{\beta<\alpha} J_\beta} \operatorname{supp} x^n_\xi$. Temos que $|X_\alpha| < \kappa_\alpha$ e, portanto, existe $J_\alpha \subset I_\alpha$ tal que $|J_\alpha| = |I_\alpha|$ e $\operatorname{supp} x^n_\xi \cap X_\alpha = \emptyset$, para todo $\xi \in J_\alpha$.[4]

Definimos $J = \cup_{\alpha<\operatorname{cf}(\mathfrak{c})} J_\alpha$. Temos que $|J| = \mathfrak{c}$ e $\operatorname{supp} x^n_\xi \cap \operatorname{supp} x^n_\mu = \emptyset$, quaisquer que sejam $\xi, \mu \in J$ com $\xi \neq \mu$. □

[3] Seja $\{\lambda_\alpha : \alpha < \operatorname{cf}(\mathfrak{c})\}$ uma seqüência estritamente crescente e cofinal em $\mathfrak{c}$. Definamos $\kappa_0 = \max\{\omega, |\lambda_0|^+\}^+$. Temos que $\kappa_0 > \omega$ e $\kappa_0 < \mathfrak{c}$, uma vez que $\mathfrak{c}$ é um cardinal limite e $\lambda_0 < \mathfrak{c}$. Seja $\alpha < \operatorname{cf}(\mathfrak{c})$ e suponhamos que κ_β esteja definido para todo $\beta < \alpha$, de modo que:

- $\max\{|\beta|, |\lambda_\beta|^+\} < \kappa_\beta < \mathfrak{c}$;
- κ_β é um cardinal regular;
- Se $\gamma < \beta < \alpha$, então $\kappa_\gamma < \kappa_\beta$.

Definimos $\kappa_\alpha = \max\{|\alpha|, |\lambda_\alpha|^+, \sup_{\beta<\alpha} \kappa_\beta\}^+$. Temos que $\max\{|\alpha|, |\lambda_\alpha|^+\} < \kappa_\alpha$ e como $\alpha < \operatorname{cf}(\mathfrak{c})$, temos que $\sup_{\beta<\alpha} \kappa_\beta < \mathfrak{c}$. Logo, $\kappa_\alpha < \mathfrak{c}$, uma vez que $\mathfrak{c}$ é um cardinal limite. Do fato de κ_α ser um cardinal sucessor decorre que κ_α é um cardinal regular. Por fim, observamos que se $\beta < \alpha$, então $\kappa_\beta < \kappa_\alpha$. Por indução em $\operatorname{cf}(\mathfrak{c})$, construímos $\{\kappa_\alpha : \alpha < \operatorname{cf}(\mathfrak{c})\}$ satisfazendo as condições listadas acima. Façamos $I_0 = \kappa_0$ e, para cada $\alpha < \operatorname{cf}(\mathfrak{c})$, tomamos $I_\alpha = \kappa_\alpha \setminus \cup_{\beta<\alpha} \kappa_\beta$. Temos que $\mathfrak{c} = \dot{\cup}_{\alpha<\operatorname{cf}(\mathfrak{c})} I_\alpha$ e $|I_\alpha| = \kappa_\alpha$, para todo $\alpha < \operatorname{cf}(\mathfrak{c})$.

[4] Isto ocorre uma vez que $\operatorname{supp} x^n_\xi \cap \operatorname{supp} x^n_\mu = \emptyset$, quaisquer que sejam $\xi, \mu \in I_\alpha$ com $\xi \neq \mu$.

Afirmação 5.1.3. *Para cada $n \in D$, existe $L_n \in [P_0]^{\mathfrak{c}}$ tal que $L_m \cap L_n = \emptyset$, quaisquer que sejam $m, n \in D$ com $m \neq n$. Além disso, existe $\{(x_\xi, 0) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} : \xi \in \cup_{n\in D} L_n\} \subset \tilde{\varphi}[G]$ com as seguintes propriedades:*

(i) Se $\xi \in L_n$, então $\mathrm{o}(x_\xi) = n$;

(ii) Se $\xi, \mu \in \cup_{n\in D} L_n$ e $\xi \neq \mu$, então $\operatorname{supp} x_\xi \cap \operatorname{supp} x_\mu = \emptyset$;

(iii) $\xi \in \operatorname{supp} x_\xi$, para todo $\xi \in \cup_{n\in D} L_n$.

Demonstração. Para cada $n \in D$, seja $\{x^n_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ onde $\{(x^n_\xi, 0) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} : \xi < \mathfrak{c}\} \subset \tilde{\varphi}[G]$ satisfaz as condições (i) e (ii) da afirmação 5.1.2. Consideremos $\{X_\zeta : \zeta < \mathfrak{c}\}$ uma indexação de $\{\{x^n_\xi : \xi < \mathfrak{c}\} : n \in D\}$ de modo que

$$|\{\zeta < \mathfrak{c} : X_\zeta = \{x^n_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}\}| = \mathfrak{c}$$

para todo $n \in D$.

Fixemos $x \in X_0$ e definamos $\xi_0 = \min \operatorname{supp} x$. Denotaremos x por x_{ξ_0}. Seja $\alpha < \mathfrak{c}$ um ordinal. Para cada $\beta < \alpha$, suponhamos definidos $\xi_\beta \in P_0$ e $x_{\xi_\beta} \in X_\beta$ com as seguintes propriedades:

- $\xi_\beta = \min \operatorname{supp} x_{\xi_\beta}$;
- Se $\gamma < \beta < \alpha$, então $\operatorname{supp} x_{\xi_\gamma} \cap \operatorname{supp} x_{\xi_\beta} = \emptyset$.

Temos que $|\cup_{\beta<\alpha} \operatorname{supp} x_{\xi_\beta}| \leq \max\{|\alpha|, \omega\} < \mathfrak{c}$. Uma vez que $|X_\alpha| = \mathfrak{c}$ e $\operatorname{supp} x \cap \operatorname{supp} y = \emptyset$ para quaisquer x e y elementos distintos de X_α, existe $z \in X_\alpha$ tal que $\operatorname{supp} z \cap (\cup_{\beta<\alpha} \operatorname{supp} x_{\xi_\beta}) = \emptyset$. Definamos $\xi_\alpha = \min \operatorname{supp} z$ e escrevamos $x_{\xi_\alpha} = z$. Por indução, obtemos $\xi_\alpha \in P_0$ e $x_{\xi_\alpha} \in X_\alpha$, para todo $\alpha < \mathfrak{c}$.

Se $n \in D$, definimos

$$L_n = \{\xi_\alpha \in P_0 : X_\alpha = \{x^n_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}\} \setminus \{\omega + m : m \geq 1\}.$$

Note que $|L_n| = \mathfrak{c}$, uma vez que $|\{\alpha < \mathfrak{c} : X_\alpha = \{x^n_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}\}| = \mathfrak{c}$ e $\xi_\alpha \neq \xi_\beta$ se α e β são elementos distintos de $\mathfrak{c}$. Além disso, $L_m \cap L_n = \emptyset$, se $m, n \in D$ e $m \neq n$. Se $\xi \in L_n$, então $\mathrm{o}(x_\xi) = n$ e se $\xi, \mu \in \cup_{n\in D} L_n$ e $\xi \neq \mu$, então $\operatorname{supp} x_\xi \cap \operatorname{supp} x_\mu = \emptyset$. Por fim, se $\xi \in \cup_{n\in D} L_n$, então $\xi \in \operatorname{supp} x_\xi$. $\square$

Proposição 5.1.4. *Existe* $\varphi : G \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)}$ *um monomorfismo de grupos tal que* $\{(0,\chi_\xi) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} : \xi \in L_1\} \subset \varphi[G]$ *e* $\{(y_\xi, 0) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} : \xi \in \cup_{n\in D} L_n\} \subset \varphi[G]$*, onde:*

(i) Se $\xi \in L_n$*, então* $\mathrm{o}(y_\xi) = n$*;*

(ii) Se $\xi \in \cup_{n\in D} L_n$*, então* $\operatorname{supp} y_\xi \subset \{\xi\} \times \omega$*.*

Demonstração. Seja $\{(x_\xi, 0) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} : \xi \in \cup_{n\in D} L_n\} \subset \tilde{\varphi}[G]$ satisfazendo as condições (i), (ii) e (iii) da afirmação 5.1.3. Consideremos a aplicação $\hat{\varphi} : (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)}$ definida da seguinte maneira:

- Seja $\xi \in L_n$, para algum $n \in D$. Denotemos $\operatorname{supp} x_\xi$ por $\{\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_m\}$, onde $\alpha_0 < \alpha_1 < ... < \alpha_m$. A α_i-ésima parcela $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ da soma direta $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0)}$ será levada identicamente na (ξ, i)-ésima parcela da soma direta $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)}$.

- Se $\mu \in P_0 \setminus \cup_{\xi\in\cup_{n\in D} L_n} \operatorname{supp} x_\xi$, então a μ-ésima parcela $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ da soma direta $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0)}$ será levada identicamente na $(\mu, 0)$-ésima parcela da soma direta $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)}$.

- $\hat{\varphi}(0, b) = (0, b)$, para todo $b \in \mathbb{Q}^{(P_1)}$.

A aplicação $\hat{\varphi}$ é um monomorfismo de grupos. Sejam $\varphi = \hat{\varphi} \circ \tilde{\varphi}$ e $(y_\xi, 0) = \hat{\varphi}(x_\xi, 0)$, para todo $\xi \in \cup_{n\in D} L_n$. Temos que φ é um monomorfismo de grupos tal que

$$\{(0,\chi_\xi) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} : \xi \in L_1\} \subset \varphi[G]$$

e

$$\{(y_\xi, 0) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} : \xi \in \cup_{n\in D} L_n\} \subset \varphi[G].$$

Além disso, se $\xi \in L_n$, então $\mathrm{o}(y_\xi) = \mathrm{o}(\hat{\varphi}(x_\xi, 0)) = n$, uma vez que $\hat{\varphi}$ é um monomorfismo de grupos. Por fim, $\operatorname{supp} y_\xi \subset \{\xi\} \times \omega$, qualquer que seja $\xi \in \cup_{n\in D} L_n$. □

5.2 Uma escolha adequada de seqüências

Se $(H, J) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)}$, então

$$H(\xi, n) = \frac{p(H, (\xi, n))}{q(H, (\xi, n))} + \mathbb{Z}$$

onde $p(H,(\xi,n)), q(H,(\xi,n)) \in \mathbb{Z}$, $q(H,(\xi,n)) > 0$, $\mathrm{mdc}(p(H,(\xi,n)), q(H,(\xi,n))) = 1$ e $0 \leq p(H,(\xi,n)) \leq q(H,(\xi,n)) - 1$ para cada $(\xi,n) \in \operatorname{supp} H$. Além disso,

$$J(\mu) = \frac{p(J,\mu)}{q(J,\mu)}$$

onde $p(J,\mu), q(J,\mu) \in \mathbb{Z}$, $q(J,\mu) > 0$ e $\mathrm{mdc}(p(J,\mu), q(J,\mu)) = 1$, para cada $\mu \in \operatorname{supp} J$. Sejam

$$|q(H)| = \max\{q(H,(\xi,n)) : (\xi,n) \in \operatorname{supp} H\},$$

$$|q(J)| = \max\{q(J,\mu) : \mu \in \operatorname{supp} J\}$$

e

$$|p(J)| = \max\{|p(J,\mu)| : \mu \in \operatorname{supp} J\}.$$

Consideremos

$$d(H) = \mathrm{mmc}\{q(H,(\xi,n)) : (\xi,n) \in \operatorname{supp} H\}$$

e

$$d(J) = \mathrm{mmc}\{q(J,\mu) : \mu \in \operatorname{supp} J\}.^{5}$$

Para cada $(\xi,n) \in \operatorname{supp} H$, seja

$$a(H,(\xi,n)) = p(H,(\xi,n)) \cdot \frac{d(H)}{q(H,(\xi,n))}$$

e, para cada $\mu \in \operatorname{supp} J$, seja

$$a(J,\mu) = p(J,\mu) \cdot \frac{d(J)}{q(J,\mu)}.$$

Sejam, ainda,

$$|a(J)| = \max\{|a(J,\mu)| : \mu \in \operatorname{supp} J\}$$

e

$$||a(H,J)|| = \sum_{(\xi,n)\in \operatorname{supp} H} |a(H,(\xi,n))| + \sum_{\mu \in \operatorname{supp} J} |a(J,\mu)|.$$

Observamos que

$$\operatorname{supp}(H,J) = \operatorname{supp} H \cup \operatorname{supp} J.$$

[5] Se $H = 0$, então $d(H) = 1$. Analogamente, se $J = 0$, então $d(J) = 1$.

Se $H \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0 \times \omega)}$ e $X \subset P_0 \times \omega$, então $H \restriction_X \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0 \times \omega)}$ é dada por

$$H \restriction_X (\xi, n) = \begin{cases} H(\xi, n) & \text{se} \quad (\xi, n) \in X \\ 0 + \mathbb{Z} & \text{se} \quad (\xi, n) \notin X \end{cases}$$

para todo $(\xi, n) \in P_0 \times \omega$. Por fim, se $X \subset P_0 \times \omega$, escreveremos

$$\pi_1[X] = \{\xi \in P_0 : \exists n \in \omega \text{ tal que } (\xi, n) \in X\}$$

e

$$\pi_2[X] = \{n \in \omega : \exists \xi \in P_0 \text{ tal que } (\xi, n) \in X\}.$$

Definição 5.2.1. *[17] Sejam $S \subset G$ infinito e $n > 1$ um número natural. Dizemos que S é* n-round *se:*

- *$S \subset G[n]$;*
- *A restrição do homomorfismo de grupos*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_d : & G & \to & G \\ & x & \mapsto & dx \end{array}$$

a S é finita-a-um, qualquer que seja d divisor próprio de n.[6]

As duas proposições seguintes encontram-se em [17]. Como suas demonstrações são curtas, optamos por reproduzi-las aqui.

Proposição 5.2.2. *[17] Sejam $n > 1$ um número natural e S um subconjunto infinito de $G[n]$. Existem $T \subset G$ infinito e $z \in G$ tais que $T + z \subset S$ e T é d-round, para algum divisor d de n.*

Demonstração. Seja $S \subset G[n]$ infinito. Se S é n-round, tomamos $T = S$ e $z = 0$. Se não, existe d um divisor próprio de n tal que a restrição de φ_d a S não é finita-a-um. Tomemos d minimal com respeito a esta propriedade. Existem $g \in G$ e $S' \subset S$ infinito tais que $\varphi_d(x) = g$, para todo $x \in S'$. Fixemos $z \in S'$ e façamos $T = S' - z$. Temos que $T \subset G[d]$. Além disso, se r é um divisor próprio de d, então r é, em particular, um divisor próprio de n e $r < d$. Logo, a restrição de φ_r a S é finita-a-um. Daí segue que a restrição de φ_r a T é finita-a-um e, portanto, T é d-round. Por fim, $T + z = (S' - z) + z \subset S' \subset S$. $\square$

[6] Isto é, $\varphi_d^{-1}(\{x\})$ é um subconjunto finito de G, qualquer que seja $x \in G$.

Proposição 5.2.3. *[17] Seja $n > 1$ um número natural. Se existe $S \subset G$ tal que S é n-round, então $n \in D$.*

Demonstração. Observamos que $|S| \geq \omega$ e que $S \subset G[n]$. Como $|G[n]| < \omega$ ou $|G[n]| = \mathfrak{c}$, temos que $|G[n]| = \mathfrak{c}$. Para cada divisor próprio d de n, temos que dS é um subconjunto infinito de $dG[n]$ e como $|dG[n]| < \omega$ ou $|dG[n]| = \mathfrak{c}$, concluímos que $|dG[n]| = \mathfrak{c}$. Vamos mostrar que $\mathbb{Z}_n^{(\mathfrak{c})}$ é isomorfo a um subgrupo de G por indução no número de divisores de n.

Se n é um número primo, então $G[n]$ é isomorfo à soma direta de $\mathfrak{c}$ cópias de $\mathbb{Z}_n^{(\mathfrak{c})}$ e, portanto, $n \in D$. Suponhamos, agora, que $n = mp$, onde $m > 1$ é um número natural e p é um número primo. Temos que pS é um subconjunto m-round de G.[7] Como o número de divisores de m é estritamente menor que o número de divisores de n temos, por hipótese de indução, que $m \in D$. Isto significa que $\mathbb{Z}_m^{(\mathfrak{c})}$ é isomorfo a um subgrupo de G. Podemos escrever $m = m_0 p^k$, onde $\mathrm{mdc}(m_0, p) = 1$. Observamos que $G[n] = G[m_0 p^{k+1}] \cong G[m_0] \oplus G[p^{k+1}]$. Do teorema de 1.1.3 decorre que $G[p^{k+1}] \cong \oplus_{i=1}^{k+1} \mathbb{Z}_{p^i}^{(\theta_i)}$, onde $\theta_1, ..., \theta_{k+1}$ são cardinais menores ou iguais a $\mathfrak{c}$. Uma vez que $|mG[n]| = \mathfrak{c}$ e

$$mG[n] \cong m_0 p^k (G[m_0] \oplus G[p^{k+1}]) \cong m_0 p^k G[p^{k+1}] \cong m_0 p^k \oplus \mathbb{Z}_{p^i}^{(\theta_i)}$$

concluímos que $\theta_{k+1} = \mathfrak{c}$. Logo, $\mathbb{Z}_{p^{k+1}}^{(\mathfrak{c})}$ é isomorfo a um subgrupo de G, o que significa que $p^{k+1} \in D$. Portanto, se $n = p^{k+1}$ (ou seja, se $m_0 = 1$), então $n \in D$. Se $n \neq p^{k+1}$, então $m_0 > 1$ e $p^{k+1}S$ é um subconjunto m_0-round de G. Como o número de divisores de m_0 é estritamente menor que o número de divisores de n, da hipótese de indução segue que $m_0 \in D$. Logo, $\mathbb{Z}_{m_0}^{(\mathfrak{c})}$ é isomorfo a um subgrupo de G. Portanto, $\mathbb{Z}_n^{(\mathfrak{c})} \cong \mathbb{Z}_{m_0}^{(\mathfrak{c})} \oplus \mathbb{Z}_{p^{k+1}}^{(\mathfrak{c})}$ é isomorfo a um subgrupo de G, o que implica que $n \in D$. □

Denotaremos por $\mathcal{H}$ o conjunto de todas as funções

$$\begin{array}{rccl} h: & \omega & \to & \varphi[G] \subset (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0 \times \omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} \\ & n & \mapsto & (g(n), f(n)) \end{array}$$

que satisfazem uma das seguintes condições:

(1) $\operatorname{supp} f(n) \setminus \cup_{m<n} \operatorname{supp} f(m) \neq \emptyset$, para todo $n \in \omega$;

[7] Com efeito, pS é um subconjunto infinito de G, pois S o é e S é $n = mp$-round, o que faz com que φ_p restrita a S seja finita-a-um. Além disso, $pS \subset G[m]$, pois $S \subset G[n]$. Por fim, se r é um divisor próprio de m, então pr é um divisor próprio de n e, portanto, φ_{pr} restrita a S é finita-a-um, o que significa que φ_r restrita a pS é finita-a-um. Logo, pS é m-round.

(2) $|q(f(n))| > n$, para todo $n \in \omega$;

(3) $\{|q(f(n))| : n \in \omega\}$ é limitado e $|p(f(n))| > n$, para todo $n \in \omega$;

(4) $|q(g(n))| > n$, para todo $n \in \omega$;

(5) (a) $\operatorname{supp} g(n) \setminus \cup_{m<n} \operatorname{supp} g(m) \neq \emptyset$, para todo $n \in \omega$;

(b) $f(n) = 0$, para todo $n \in \omega$;

(c) Existe $k \in D$ tal que $\mathrm{o}(h(n)) = \mathrm{o}(g(n)) = k$, para todo $n \in \omega$;

(d) $\{h(n) : n \in \omega\}$ é um subconjunto k-round de $\varphi[G]$.

Proposição 5.2.4. *Se $h : \omega \to \varphi[G] \subset (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0 \times \omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)}$, então existem $j : \omega \to \omega$ estritamente crescente e $c \in \varphi[G]$ tais que a seqüência $n \mapsto (h \circ j)(n) + c$ é constante ou é de um dos tipos acima mencionados.*

Demonstração. Para cada $n \in \omega$, escreveremos $h(n) = (g(n), f(n))$, onde $g : \omega \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0 \times \omega)}$ e $f : \omega \to \mathbb{Q}^{(P_1)}$. Além disso, observamos que $(0,0) = \varphi(0) \in \varphi[G]$. Há seis casos a serem considerados.

Caso 1: $\cup_{n \in \omega} \operatorname{supp} f(n)$ é infinito.

Por indução, tomemos $\{n_k : k \in \omega\}$ uma seqüência estritamente crescente de números naturais tal que $\operatorname{supp} f(n_{k+1}) \setminus \cup_{l<k+1} \operatorname{supp} f(n_l) \neq \emptyset$. Temos que

$$\begin{array}{rccc} j: & \omega & \to & \omega \\ & k & \mapsto & n_k \end{array}$$

é uma função estritamente crescente tal que $h \circ j$ é do tipo 1. Neste caso, tomamos $c = (0,0)$.

Caso 2: $\cup_{n \in \omega} \operatorname{supp} f(n)$ é finito e $\{|q(f(n))| : n \in \omega\}$ é ilimitado.

Por indução, tomemos $\{n_k : k \in \omega\}$ uma seqüência estritamente crescente de números naturais tal que $|q(f(n_k))| > k$, para todo $k \in \omega$. Temos que

$$\begin{array}{rccc} j: & \omega & \to & \omega \\ & k & \mapsto & n_k \end{array}$$

é uma função estritamente crescente tal que $h \circ j$ é do tipo 2. Neste caso, tomamos $c = (0,0)$.

Caso 3: $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f(n)$ é finito, $\{|q(f(n))| : n \in \omega\}$ é limitado e $\{|p(f(n))| : n \in \omega\}$ é ilimitado.
Por indução, tomemos $\{n_k : k \in \omega\}$ uma seqüência estritamente crescente de números naturais tal que $|p(f(n_k))| > k$, para todo $k \in \omega$. Temos que

$$\begin{array}{rccc} j: & \omega & \to & \omega \\ & k & \mapsto & n_k \end{array}$$

é uma função estritamente crescente tal que $h \circ j$ é do tipo 3. Neste caso, tomamos $c = (0, 0)$.

Caso 4: $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f(n)$ é finito, $\{|q(f(n))| : n \in \omega\}$ e $\{|p(f(n))| : n \in \omega\}$ são limitados e $\{|q(g(n))| : n \in \omega\}$ é ilimitado.
Por indução, tomemos $\{n_k : k \in \omega\}$ uma seqüência estritamente crescente de números naturais tal que $|q(g(n_k))| > k$, para todo $k \in \omega$. Temos que

$$\begin{array}{rccc} j: & \omega & \to & \omega \\ & k & \mapsto & n_k \end{array}$$

é uma função estritamente crescente tal que $h \circ j$ é do tipo 4. Neste caso, tomamos $c = (0, 0)$.

Caso 5: $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f(n)$ é finito, $\{|q(f(n))| : n \in \omega\}$, $\{|p(f(n))| : n \in \omega\}$ e $\{|q(g(n))| : n \in \omega\}$ são limitados e $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} g(n)$ é infinito.
Uma vez que $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} g(n)$ é infinito, existe $j_1 : \omega \to \omega$ estritamente crescente tal que $\operatorname{supp} g \circ j_1(n) \setminus \cup_{m<n} \operatorname{supp} g \circ j_1(m) \neq \emptyset$, para todo $n \in \omega$. Como $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f(n)$ é finito e tanto $\{|q(f(n))| : n \in \omega\}$ quanto $\{|p(f(n))| : n \in \omega\}$ são limitados, existe $j_2 : \omega \to \omega$ estritamente crescente tal que $f \circ j_1 \circ j_2(n) = b \in \mathbb{Q}^{(P_1 \times \omega)}$, para todo $n \in \omega$. Temos que $\{(g \circ j_1 \circ j_2(n), b) : n \in \omega\}$ é um subconjunto infinito de $\varphi[G]$ e, portanto, $S = \{(g \circ j_1 \circ j_2(n) - g \circ j_1 \circ j_2(0), 0) : n \in \omega\}$ também o é. Como $\{|q(g(n))| : n \in \omega\}$ é limitado, existe $k > 1$ um número natural tal que $S \subset \varphi[G][k]$. Logo, existem $T \subset \varphi[G]$ infinito e $z \in \varphi[G]$ tais que $T + z \subset S$ e T é d-round, para algum divisor d de k.[8] Seja $j_3 : \omega \to \omega$ uma função estritamente crescente tal que $T + z = \{(g \circ j_1 \circ j_2 \circ j_3(n) - g \circ j_1 \circ j_2(0), 0) : n \in \omega\}$. Em outras palavras, $T = \{(g \circ j_1 \circ j_2 \circ j_3(n) - g \circ j_1 \circ j_2(0), 0) - z : n \in \omega\}$. Como T é d-round, temos que $T \subset \varphi[G][d]$. Portanto, existem $j_4 : \omega \to \omega$ uma função estritamente crescente e r um divisor de d tais que $\mathrm{o}((g \circ j_1 \circ j_2 \circ j_3 \circ j_4(n) - g \circ j_1 \circ j_2(0), 0) - z) = r$, para todo $n \in \omega$. Observamos que $r \in D$, uma vez que $\{(g \circ j_1 \circ j_2 \circ j_3 \circ j_4(n) - g \circ j_1 \circ j_2(0), 0) - z : n \in \omega\}$ é r-round. Sejam

[8] Observe que z tem ordem finita.

$c = -h \circ j_1 \circ j_2(0) - z$ e $j = j_1 \circ j_2 \circ j_3 \circ j_4 \circ j_5$, onde $j_5 : \omega \to \omega$ é uma função estritamente crescente tal que $\operatorname{supp}(g \circ j(n) - g \circ j_1 \circ j_2(0) - z) \setminus \cup_{m<n} \operatorname{supp}(g \circ j(m) - g \circ j_1 \circ j_2(0) - z) \neq \emptyset$, para todo $n \in \omega$.

Caso 6: $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f(n)$ é finito, $\{|q(f(n))| : n \in \omega\}$, $\{|p(f(n))| : n \in \omega\}$ e $\{|q(g(n))| : n \in \omega\}$ são limitados e $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} g(n)$ é finito.

Temos que $\{g(n) : n \in \omega\}$ é finito, bem como $\{f(n) : n \in \omega\}$. Portanto, h possui uma subseqüência constante. □

Proposição 5.2.5. *Existe* $\{h_\xi : \xi \in (L_1 \cup \bigcup_{n\in D} L_n) \setminus \omega\}$ *uma indexação de* $\mathcal{H}$ *tal que:*

(i) $h_\omega(n) = (0, \chi_n)$, *para todo* $n \in \omega$.

(ii) Se $\xi \in L_1$, *então* h_ξ *é do tipo 1, 2, 3 ou 4;*

(iii) Se existe $k \in D$ *tal que* $\xi \in L_k$, *então* h_ξ *é do tipo 5 e* $\mathrm{o}(h_\xi(n)) = k$, *para todo* $n \in \omega$;

(iv) $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} h_\xi(n) \subset (\xi \times \omega) \cup \xi$, *para todo* $\xi \in (L_1 \cup \bigcup_{n\in D} L_n) \setminus \omega$.

Demonstração. Observamos, primeiramente, que $|\mathcal{H}| = \mathfrak{c}^\omega = \mathfrak{c}$. Portanto, podemos considerar $\{\tilde{h}_\xi : \xi \in (L_1 \cup \bigcup_{n\in D} L_n) \setminus \omega\}$ uma indexação de $\mathcal{H}$ tal que, para cada $h \in \mathcal{H}$, o conjunto

$$A_h = \{\xi \in (L_1 \cup \bigcup_{n\in D} L_n) \setminus \omega : \tilde{h}_\xi = h\}$$

tenha cardinalidade $\mathfrak{c}$.

Fixemos $h \in \mathcal{H}$. Como $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} h(n) \subset (\mathfrak{c} \times \omega) \cup \mathfrak{c}$, $\operatorname{cf}(\mathfrak{c}) > \omega$ e $|\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} h(n)| \leq \omega$, existe $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $\alpha > \omega$ e $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} h(n) \subset (\alpha \times \omega) \cup \alpha$.

Caso 1: h é do tipo 1, 2, 3 ou 4.

Se $\xi \in L_1$ e $\xi \geq \alpha$, façamos $h_\xi = \tilde{h}_\xi$.

Se $\xi \in L_1$ e $\xi < \alpha$, façamos $h_\xi = H$, onde $H(n) = (0, \chi_n)$ para todo $n \in \omega$. Observamos que H é do tipo 1 e, portanto, $H \in \mathcal{H}$.

Se $\xi \in \cup_{n\in D} L_n$, existe um único $m \in D$ tal que $\xi \in L_m$. Neste caso, façamos $h_\xi = F_m$, onde $F_m(n)(\omega+n+1, 0)$ é um elemento de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ de ordem m, $F_m(n)(\mu, k) = 0 + \mathbb{Z}$ qualquer que seja $(\mu, k) \in (P_0 \times \omega) \setminus \{(\omega+n+1, 0)\}$ e $F_m(n)(\theta) = 0$, qualquer que seja $\theta \in P_1$, para todo $n \in \omega$. Temos que F_m é do tipo 5 e, portanto, $F_m \in \mathcal{H}$. Além disso, $\mathrm{o}(F_m(n)) = m$, para todo $n \in \omega$.

Caso 2: h é do tipo 5.

Se $\xi \in L_1$, façamos $h_\xi = H$.

Como h é do tipo 5, existe $m \in D$ tal que $\mathrm{o}(h(n)) = m$, para todo $n \in \omega$.

Se $\xi \in L_m$ e $\xi \geq \alpha$, façamos $h_\xi = \tilde{h}_\xi$.

Se $\xi \in L_m$ e $\xi < \alpha$, façamos $h_\xi = F_m$.

Se $\xi \in L_k$, para algum $k \in D \setminus \{m\}$, façamos $h_\xi = F_k$.

As condições (i), (ii), (iii) e (iv) estão verificadas. □

5.3 Construindo homomorfismos de grupos

Sejam $\{p_\xi : \xi \in (L_1 \cup \bigcup_{n\in D} L_n) \setminus \omega\}$ uma família de ultrafiltros seletivos dois a dois incomparáveis segundo a ordem de Rudin-Keisler e $\{h_\xi : \xi \in (L_1 \cup \bigcup_{n\in D} L_n) \setminus \omega\}$ uma indexação de $\mathcal{H}$ satisfazendo as condições (i), (ii), (iii) e (iv) da proposição 5.2.5. No que segue, escreveremos $h_\xi(n) = (g_\xi(n), f_\xi(n))$, onde $g_\xi : \omega \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)}$ e $f_\xi : \omega \to \mathbb{Q}^{(P_1)}$.

Proposição 5.3.1. *Seja* $(H, J) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} \setminus \{(0,0)\}$. *Existe* $E \in [\mathfrak{c}]^\omega$ *tal que:*

(i) $\mathrm{supp}(H, J) \subset (E \times \omega) \cup E$;

(ii) $|E \cap [(L_1 \cup \bigcup_{n\in D} L_n) \setminus \omega]| = \omega$;

(iii) $\cup_{n\in\omega} \mathrm{supp}\, h_\xi(n) \subset (E \times \omega) \cup E$, *qualquer que seja* $\xi \in E \cap [(L_1 \cup \bigcup_{n\in D} L_n) \setminus \omega]$.

Demonstração. Para cada $\xi \in \mathfrak{c} \setminus [(L_1 \cup \bigcup_{n\in D} L_n) \setminus \omega]$, façamos $E(\xi) = \{\xi\} \cup \omega$. Se $\xi \in (L_1 \cup \bigcup_{n\in D} L_n) \setminus \omega$, definimos indutivamente

$$E(\xi) = \{\xi\} \cup \bigcup_{\mu\in\pi_1[\cup_{n\in\omega}\mathrm{supp}\, g_\xi(n)]\cup\bigcup_{n\in\omega}\mathrm{supp}\, f_\xi(n)} E(\mu).$$

Fixemos $\tilde{L}_1 \in [L_1 \setminus \omega]^\omega$ e façamos

$$E = \cup_{\zeta\in\pi_1[\mathrm{supp}\, H]\cup\mathrm{supp}\, J\cup\tilde{L}_1} E(\zeta).$$

Temos que $\mathrm{supp}(H, J) \cup \tilde{L}_1 \subset (E \times \omega) \cup E$, uma vez que $\zeta \in E(\zeta) \subset E$, qualquer que seja $\zeta \in \pi_1[\mathrm{supp}\, H] \cup \mathrm{supp}\, J \cup \tilde{L}_1$. Além disso, um argumento indutivo garante que $E(\xi) \in [\mathfrak{c}]^\omega$ para todo $\xi < \mathfrak{c}$ e, portanto, $E \in [\mathfrak{c}]^\omega$. Por fim, se $\xi \in E \cap [(L_1 \cup \bigcup_{n\in D} L_n) \setminus \omega]$, então existe $\zeta \in \pi_1[\mathrm{supp}\, H] \cup \mathrm{supp}\, J \cup \tilde{L}_1$ tal que $\xi \in E(\zeta)$. Um outro argumento indutivo garante que

se $\alpha \in E(\beta)$, então $E(\alpha) \subset E(\beta)$, quaisquer que sejam $\alpha, \beta < \mathfrak{c}$. Logo, $\pi_1[\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} g_\xi(n)] \cup \bigcup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f_\xi(n) \subset E(\xi) \subset E(\zeta) \subset E$ e, portanto, $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} h_\xi(n) \subset (E \times \omega) \cup E$. $\square$

Lema 5.3.2. *Sejam $(H, J) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} \setminus \{(0,0)\}$ e $E \in [\mathfrak{c}]^\omega$ satisfazendo as condições (i), (ii) e (iii) da proposição 5.3.1. Existe $\{E_k : k \in \omega\}$ uma família de subconjuntos finitos de E, $\{e_k : k \in \omega\}$ e $\{b_k : k \in \omega\}$ seqüências estritamente crescentes de números naturais, $\{r_k : k \in \omega\}$ uma seqüência de números reais positivos e $i : \omega \to E \cap [(L_1 \cup \bigcup_{n\in D} L_n) \setminus \omega]$ tais que:*

(i) $\operatorname{supp}(H, J) \subset (E_0 \times e_0) \cup E_0$*;*

(ii) $E = \cup_{k\in\omega} E_k$*;*

(iii) $i(k) \in E_k$*, para todo* $k \in \omega$*;*

(iv) $(E_{k+1} \times e_{k+1}) \cup E_{k+1} \supset (E_k \times e_k) \cup E_k \cup \bigcup\{\operatorname{supp} h_{i(m)}(b_m) : m \leq k\}$*, para todo* $k \in \omega$*;*

(v) $\{b_k : k \in i^{-1}(\{\xi\})\} \in p_\xi$*, para todo* $\xi \in E \cap [(L_1 \cup \bigcup_{n\in D} L_n) \setminus \omega]$*;*

(vi) Se $h_{i(k)}$ *é do tipo 1, então* $\operatorname{supp} f_{i(k)}(b_k) \setminus E_k \neq \emptyset$*;*

(vii) Se $h_{i(k)}$ *é do tipo 2, então* $|q(f_{i(k)}(b_k))| \cdot r_k > d(J) \cdot \prod_{m<k} d(f_{i(m)}(b_m))$*;*

(viii) Se $h_{i(k)}$ *é do tipo 3, então* $|a(f_{i(k)}(b_k))| \cdot r_k > 4 \cdot d(f_{i(k)}(b_k))$*;*

(ix) Se $h_{i(k)}$ *é do tipo 4, então* $|q(g_{i(k)}(b_k))| \cdot r_k > d(H) \cdot \prod_{m<k} d(g_{i(m)}(b_m))$*;*

(x) Se $h_{i(k)}$ *é do tipo 5, então* $\operatorname{supp} g_{i(k)}(b_k) \setminus (E_k \times e_k) \neq \emptyset$ *e* $\mathrm{o}(g_{i(k)}(b_k)) = \mathrm{o}(g_{i(k)}(b_k) \restriction_{\operatorname{supp} g_{i(k)}(b_k)\setminus(E_k\times e_k)})$*;*

(xi) $r_0 = \dfrac{1}{4 \cdot ||a(H, J)||}$*;*

(xii) $r_{k+1} = \dfrac{r_k}{2 \cdot ||a(h_{i(k)}(b_k))||}$*, para todo* $k \in \omega$*.*

Demonstração. Consideremos $\{a_n : n \in \omega\}$ uma enumeração de E. Seja

$$F_0 = \pi_1[\operatorname{supp} H] \cup \operatorname{supp} J \cup \{a_0\}$$

e tomemos $g_0 \in \omega$ tal que $g_0 > \max \pi_2[\operatorname{supp} H]$. Para cada $n \in \omega$, definimos

$$F_{n+1} = F_n \cup \bigcup\{\pi_1[\operatorname{supp} g_\xi(m)] \cup \operatorname{supp} f_\xi(m) : m \leq n, \xi \in F_n \cap [(L_1 \cup \bigcup_{n\in D} L_n) \setminus \omega]\} \cup \{a_{n+1}\}$$

e tomemos $g_{n+1} \in \omega$ tal que $g_{n+1} > g_n$ e

$$g_{n+1} > \max \pi_2[\bigcup\{\operatorname{supp} g_\xi(n) : m \leq n, \xi \in F_n \cap [(L_1 \cup \bigcup_{n\in D} L_n) \setminus \omega]\}].$$

Temos que $\{F_n : n \in \omega\}$ é uma família de subconjuntos finitos de E e $\{g_n : n \in \omega\}$ é uma seqüência estritamente crescente de números naturais tais que:

(1) $\operatorname{supp}(H, J) \subset (F_0 \times g_0) \cup F_0$;

(2) $E = \cup_{n\in\omega} F_n$;

(3) $(F_{n+1} \times g_{n+1}) \cup F_{n+1} \supset (F_n \times g_n) \cup F_n \cup \bigcup\{\operatorname{supp} h_\xi(m) : m \leq n, \xi \in F_n \cap [(L_1 \cup \bigcup_{n\in D} L_n) \setminus \omega]\}$.

Fixemos $\xi \in E \cap [(L_1 \cup \bigcup_{n\in D} L_n) \setminus \omega]$ e $n \in \omega$. Se h_ξ é do tipo 1, definimos

$$A_n^\xi = \{k \in \omega : \operatorname{supp} f_\xi(k) \setminus F_n \neq \emptyset\}.$$

Se h_ξ é do tipo 2, definimos

$$A_n^\xi = \{k \in \omega : |q(f_\xi(k))| > 2^{n+2} \cdot X_{n-1}\}$$

onde

$$X_m = ||a(H, J)|| \cdot d(J) \cdot \prod_{\substack{l \leq m \\ \zeta \in F_m \cap [(L_1 \cup \bigcup_{n\in D} L_n) \setminus \omega]}} d(f_\zeta(l)) \cdot \prod_{\substack{l \leq m \\ \zeta \in F_m \cap [(L_1 \cup \bigcup_{n\in D} L_n) \setminus \omega]}} ||a(h_\zeta(l))||$$

para todo $m \in \omega$ e

$$X_{-1} = ||a(H, J)|| \cdot d(J).$$

Se h_ξ é do tipo 3, então $|a(f_\xi(n))| > n$, para cada $n \in \omega$ e $\{|q(f_\xi(n))| : n \in \omega\}$ é limitado. Tomemos $M_\xi \in \omega$ tal que $|q(f_\xi(n))| \leq M_\xi$, para todo $n \in \omega$ e definimos

$$A_n^\xi = \{k \in \omega : |a(f_\xi(k))| > 2^{n+4} \cdot M_\xi! \cdot Y_{n-1}\}$$

onde

$$Y_m = ||a(H, J)|| \cdot \prod_{\substack{l \leq m \\ \zeta \in F_m \cap [(L_1 \cup \bigcup_{n\in D} L_n) \setminus \omega]}} ||a(h_\zeta(l))||$$

para todo $m \in \omega$ e

$$Y_{-1} = ||a(H,J)||.$$

Se h_ξ é do tipo 4, definimos

$$A_n^\xi = \{k \in \omega : |q(g_\xi(k))| > 2^{n+2} \cdot Z_{n-1}\}$$

onde

$$Z_m = ||a(H,J)|| \cdot d(H) \cdot \prod_{\substack{l \leq m \\ \zeta \in F_m \cap [(L_1 \cup \bigcup_{n\in D} L_n) \setminus \omega]}} d(g_\zeta(l)) \cdot \prod_{\substack{l \leq m \\ \zeta \in F_m \cap [(L_1 \cup \bigcup_{n\in D} L_n) \setminus \omega]}} ||a(h_\zeta(l))||$$

para todo $m \in \omega$ e

$$Z_{-1} = ||a(H,J)|| \cdot d(H).$$

Se h_ξ é do tipo 5, definimos

$$A_n^\xi = \{k \in \omega : \operatorname{supp} g_\xi(k) \setminus (F_n \times g_n) \neq \emptyset\} \cap \{k \in \omega : \mathrm{o}(g_\xi(k) \restriction_{\operatorname{supp} g_\xi(k) \setminus (F_n \times g_n)}) = \mathrm{o}(g_\xi(k))\}.$$

Observamos que A_n^ξ é um subconjunto cofinito de ω, quaisquer que sejam $n \in \omega$ e $\xi \in [E \cap (L_1 \cup \bigcup_{n\in D} L_n)] \setminus \omega$.[9] Logo, para cada $\xi \in [E \cap (L_1 \cup \bigcup_{n\in D} L_n)] \setminus \omega$, temos que $\{A_n^\xi : n \in \omega\} \subset p_\xi$, uma vez que p_ξ é um ultrafiltro livre sobre ω. Da seletividade de p_ξ decorre que existe uma seqüência $\{a_n^\xi : n \in \omega\} \in p_\xi$ tal que $a_n^\xi \in A_n^\xi$ e $n < a_n^\xi$, para cada $n \in \omega$.

Do lema 1.5.4 segue que existe $\{I_\xi : \xi \in [E \cap (L_1 \cup \bigcup_{n\in D} L_n)] \setminus \omega\}$ uma família de subconjuntos de ω dois a dois disjuntos tal que:

(a) $\{a_n^\xi : n \in I_\xi\} \in p_\xi$, para cada $\xi \in [E \cap (L_1 \cup \bigcup_{n\in D} L_n)] \setminus \omega$;

(b) $\{[n, a_n^\xi] : n \in I_\xi,\ \xi \in [E \cap (L_1 \cup \bigcup_{n\in D} L_n)] \setminus \omega\}$ é uma família de intervalos de ω dois a dois disjuntos.

Para cada $\xi \in [E \cap (L_1 \cup \bigcup_{n\in D} L_n)] \setminus \omega$, seja

[9] Sejam $\xi \in [E \cap (L_1 \cup \bigcup_{n\in D} L_n)] \setminus \omega$ e $n \in \omega$. Suponhamos que h_ξ seja do tipo 5. Temos que $\{k \in \omega : \operatorname{supp} g_\xi(k) \setminus (F_n \times g_n) \neq \emptyset\}$ é um subconjunto cofinito de ω. Como h_ξ é do tipo 5, existe $d \in D$ tal que $\{h_\xi(k) : k \in \omega\}$ é um subconjunto d-round de $\varphi[G]$ e $\mathrm{o}(h_\xi(k)) = \mathrm{o}(g_\xi(k)) = d$, para todo $k \in \omega$. Por absurdo, suponhamos que $\{k \in \omega : \mathrm{o}(g_\xi(k) \restriction_{\operatorname{supp} g_\xi(k) \setminus (F_n \times g_n)}) = \mathrm{o}(g_\xi(k))\}$ não seja um subconjunto cofinito de ω. Tomemos r um divisor próprio de d e $I \in [\omega]^\omega$ tais que $\mathrm{o}(g_\xi(k) \restriction_{\operatorname{supp} g_\xi(k) \setminus (F_n \times g_n)}) = r$, para todo $k \in I$. Note que $\operatorname{supp}(r \cdot h_\xi(k)) \subset F_n \times g_n$, para todo $k \in I$. Temos que $\{r \cdot h_\xi(k) : k \in I\} \subset \oplus_{(\zeta,m) \in F_n \times g_n} G_{(\zeta,m)}$, onde $G_{(\zeta,m)} = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})[d/r]$ e, portanto, $\{r \cdot h_\xi(k) : k \in I\}$ é um conjunto finito, o que contradiz o fato de $\{h_\xi(k) : k \in \omega\}$ ser d-round.

(c) $N_\xi = \min\{n \in \omega : \xi \in F_n\}$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que

(d) $N_\xi < n$, para todo $n \in I_\xi$.

Consideremos $\{n_k : k \in \omega\}$ uma enumeração estritamente crescente de $\dot{\bigcup}_{\xi \in E \cap [(L_1 \cup \bigcup_{n \in D} L_n) \setminus \omega]} I_\xi$. Seja

$$\begin{array}{rccl} i: & \omega & \to & E \cap [(L_1 \cup \bigcup_{n \in D} L_n) \setminus \omega] \\ & k & \mapsto & i(k) \end{array}$$

onde $i(k)$ é o único elemento de $E \cap [(L_1 \cup \bigcup_{n \in D} L_n) \setminus \omega]$ tal que $n_k \in I_{i(k)}$.

Para cada $k \in \omega$, façamos $b_k = a_{n_k}^{i(k)}$, $E_k = F_{n_k}$, $e_k = g_{n_k}$ e definamos r_k segundo os ítens (xi) e (xii) do enunciado deste lema. Resta mostrar que as condições (i)-(x) estão satisfeitas.

(i) Como $0 \leq n_0$, temos que $E_0 = F_{n_0} \supset F_0 \supset \pi_1[\operatorname{supp} H] \cup \operatorname{supp} J$ e $e_0 = g_{n_0} > g_0 > \max \pi_2[\operatorname{supp} H]$. Logo, $\operatorname{supp}(H, J) \subset (E_0 \times e_0) \cup E_0$.

(ii) $\cup_{k \in \omega} E_k = \cup_{k \in \omega} F_{n_k} = E$.

(iii) Seja $k \in \omega$. Temos que $n_k \in I_{i(k)}$. De (d) segue que $N_{i(k)} < n_k$. De (c) e (3) vem que $i(k) \in F_{N_{i(k)}} \subset F_{n_k} = E_k$.

(iv) De (3) vem que $E_k \subset E_{k+1}$ e $(E_k \times e_k) \subset (E_{k+1} \times e_{k+1})$, pois $\{n_k : k \in \omega\}$ é uma enumeração estritamente crescente de $\cup_{\xi \in E \cap [(L_1 \cup \bigcup_{n \in D} L_n) \setminus \omega]} I_\xi$. Resta mostrar que $\operatorname{supp} h_{i(m)}(b_m) \subset (E_{k+1} \times e_{k+1}) \cup E_{k+1}$, para todo $m \leq k$. Temos que $(E_{k+1} \times e_{k+1}) \cup E_{k+1} = (F_{n_{k+1}} \times g_{n_{k+1}}) \cup F_{n_{k+1}}$ e de (3) decorre que

$$(F_{n_{k+1}} \times g_{n_{k+1}}) \cup F_{n_{k+1}} \supset \bigcup \{\operatorname{supp} h_\xi(m) : m \leq n_{k+1} - 1, \xi \in F_{n_{k+1}-1} \cap [(L_1 \cup \bigcup_{n \in D} L_n) \setminus \omega]\}.$$

Por (iii), $i(m) \in E_m \subset E_k = F_{n_k} \subset F_{n_{k+1}-1}$, para todo $m \leq k$. Além disso, $i(m) \in [(L_1 \cup \bigcup_{n \in D} L_n) \setminus \omega]$. Por (b), $b_m = a_{n_m}^{i(m)} \leq n_{k+1} - 1$, para todo $m \leq k$. Logo, $\operatorname{supp} h_{i(m)}(b_m) \subset (E_{k+1} \times e_{k+1}) \cup E_{k+1}$, para todo $m \leq k$.

(v) Seja $\xi \in E \cap [(L_1 \cup \bigcup_{n \in D} L_n) \setminus \omega]$. Temos que $\{b_k : k \in i^{-1}(\{\xi\})\} = \{a_{n_k}^{i(k)} : k \in i^{-1}(\{\xi\})\} = \{a_n^\xi : n \in I_\xi\} \in p_\xi$, por (a).

(vi) Suponhamos que $h_{i(k)}$ seja do tipo 1. Temos que $b_k = a_{n_k}^{i(k)} \in A_{n_k}^{i(k)}$. Da definição de $A_{n_k}^{i(k)}$ vem que

$$\operatorname{supp} f_{i(k)}(b_k) \setminus E_k = \operatorname{supp} f_{i(k)}(b_k) \setminus F_{n_k} \neq \emptyset.$$

(vii) Suponhamos que $h_{i(k)}$ seja do tipo 2. Temos que $b_k = a_{n_k}^{i(k)} \in A_{n_k}^{i(k)}$. Da definição de $A_{n_k}^{i(k)}$ vem que

$$|q(f_{i(k)}(b_k))| > 2^{n_k+2} \cdot X_{n_k-1}$$

onde

$$X_{n_k-1} = ||a(H,J)|| \cdot d(J) \cdot \prod_{\substack{m \leq n_k-1 \\ \xi \in F_{n_k-1} \cap [(\overline{L}_1 \cup \bigcup_{n \in D} L_n) \setminus \omega]}} d(f_\xi(m)) \cdot \prod_{\substack{m \leq n_k-1 \\ \xi \in F_{n_k-1} \cap [(\overline{L}_1 \cup \bigcup_{n \in D} L_n) \setminus \omega]}} ||a(h_\xi(m))||.$$

Observamos que se $m < k$, então $n_m < n_k$ e, portanto, $i(m) \in E_m = F_{n_m} \subset F_{n_{k-1}} \subset F_{n_k-1}$. Como $b_m = a_{n_m}^{i(m)}$ e $[n_m, a_{n_m}^{i(m)}] \cap [n_k, a_{n_k}^{i(k)}] = \emptyset$, temos que $b_m < n_k$ e, portanto, $b_m \leq n_k - 1$. Uma vez que

$$r_k = \frac{1}{2^{k+2} \cdot ||a(H,J)|| \cdot \prod_{m<k} ||a(h_{i(m)}(b_m))||}$$

concluímos que

$$|q(f_{i(k)}(b_k))| \cdot r_k > d(J) \cdot \prod_{m<k} d(f_{i(m)}(b_m)).$$

(viii) Suponhamos que $h_{i(k)}$ seja do tipo 3. Um argumento análogo ao utilizado em (vii) nos permite concluir que

$$|a(f_{i(k)}(b_k))| \cdot r_k > 4 \cdot M_{i(k)}! \geq 4 \cdot d(f_{i(k)}(b_k)).$$

(ix) Suponhamos que $h_{i(k)}$ seja do tipo 4. Um argumento análogo ao utilizado em (vii) nos permite concluir que

$$|q(g_{i(k)}(b_k))| \cdot r_k > d(H) \cdot \prod_{m<k} d(g_{i(m)}(b_m)).$$

(x) Suponhamos que $h_{i(k)}$ seja do tipo 5. Temos que $b_k = a_{n_k}^{i(k)} \in A_{n_k}^{i(k)}$. Da definição de $A_{n_k}^{i(k)}$ vem que

$$\operatorname{supp} g_{i(k)}(b_k) \setminus (E_k \times e_k) = \operatorname{supp} g_{i(k)}(b_k) \setminus (F_{n_k} \times g_{n_k}) \neq \emptyset$$

e

$$\mathrm{o}(g_{i(k)}(b_k)\restriction_{\operatorname{supp} g_{i(k)}(b_k)\setminus(E_k\times e_k)}) = \mathrm{o}(g_{i(k)}(b_k)\restriction_{\operatorname{supp} g_{i(k)}(b_k)\setminus(F_{n_k}\times g_{n_k})}) = \mathrm{o}(g_{i(k)}(b_k)). \qquad \square$$

Lema 5.3.3. *Sejam* $(H,J)\in(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1)}\setminus\{(0,0)\}$ *e* $E\in[\mathfrak{c}]^\omega$ *satisfazendo as condições (i), (ii) e (iii) da proposição 5.3.1. Existe* $\phi_{(H,J)}\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}}\colon (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}\to\mathbb{T}$ *um homomorfismo de grupos com as seguintes propriedades:*

(i) $\phi_{(H,J)}\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}}(H,J)\neq 0+\mathbb{Z}$*;*

(ii) $\phi_{(H,J)}\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}}(0,\chi_\xi) = p_\xi - \lim\{\phi_{(H,J)}\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}}(h_\xi(n)) : n\in\omega\}$*, para cada* $\xi\in(E\cap L_1)\setminus\omega$*;*

(iii) $\phi_{(H,J)}\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}}(y_\xi,0) = p_\xi - \lim\{\phi_{(H,J)}\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}}(h_\xi(n)) : n\in\omega\}$*, para cada* $\xi\in(E\cap\bigcup_{n\in D}L_n)\setminus\omega$*.*[10]

Demonstração. Consideremos $\{E_n : n\in\omega\}$, $\{e_n : n\in\omega\}$, $\{b_n : n\in\omega\}$, $\{r_n : n\in\omega\}$ e $i:\omega\to[E\cap(L_1\cup\bigcup_{n\in D}L_n)]\setminus\omega$ de acordo com o lema 5.3.2.

Se $H=0$, façamos $\hat\phi(H)=0+\mathbb{Z}$. Se $H\neq 0$, seja $\hat\phi(H)$ um elemento não nulo de $\mathbb{T}$ tal que $\mathrm{o}(\hat\phi(H))\mid\mathrm{o}(H)$. Em ambos os casos, estendemos $\hat\phi$ a um homomorfismo de grupos de $\langle H\rangle$ em $\mathbb{T}$. Dados $(\zeta,m)\in(P_0\cap E)\times\omega$ e $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, definimos $\Lambda_{(\zeta,m),k}:(P_0\cap E)\times\omega\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ por

$$\Lambda_{(\zeta,m),k}(\mu,l)=\begin{cases}\dfrac{1}{k}+\mathbb{Z} & \text{se} \quad (\mu,l)=(\zeta,m)\\[2ex] 0+\mathbb{Z} & \text{se} \quad (\mu,l)\neq(\zeta,m).\end{cases}$$

Seja

$$G_0=\langle\{\Lambda_{(\zeta,m),c_0} : (\zeta,m)\in E_0\times e_0\}\rangle$$

onde

$$c_0=\begin{cases} c_{-1} & \text{se} \quad i(0)\notin\cup_{n\in D}L_n\\ c_{-1}\cdot d(y_{i(0)}) & \text{se} \quad i(0)\in\cup_{n\in D}L_n\end{cases}$$

e

$$c_{-1}=d(H).$$

[10] Estamos considerando $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}\subset(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1)}$.

Como $\mathbb{T}$ é um grupo divisível e $\langle H \rangle$ é um subgrupo de G_0, podemos estender $\hat{\phi}$ a um homomorfismo de grupos $\phi \restriction_{G_0} \colon G_0 \to \mathbb{T}$.

Se $J = 0$, tomemos $\psi_0^*(\xi)$ um arco aberto de $\mathbb{T}$ com diâmetro

$$\delta(\psi_0^*(\xi)) = \frac{r_0}{d(J)}$$

e façamos $\psi_0(\xi) = d(J) \cdot \psi_0^*(\xi)$, para todo $\xi \in E_0 \cap P_1$.

Suponhamos $J \neq 0$. Para cada $\xi \in E_0 \cap P_1$, tomemos $s_\xi \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{\xi \in \operatorname{supp} J} J(\xi) \cdot s_\xi = \frac{1}{2} - x$$

onde $x \in [0, 1[$ é tal que $x + \mathbb{Z} = \phi \restriction_{G_0} (H)$ e façamos

$$t_\xi = \frac{1}{d(J)} \cdot s_\xi + \mathbb{Z}.$$

Temos que

$$\sum_{\xi \in \operatorname{supp} J} a(J, \xi) \cdot t_\xi = \left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z} \right) - \phi \restriction_{G_0} (H).$$

Seja $\psi_0^*(\xi)$ o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado em t_ξ com diâmetro

$$\delta(\psi_0^*(\xi)) = \frac{r_0}{d(J)}.$$

Seja, também, $\psi_0(\xi) = d(J) \cdot \psi_0^*(\xi)$. Claramente, $\delta(\psi_0(\xi)) = r_0$. Uma vez que

$$\frac{1}{2} + \mathbb{Z} \in \phi \restriction_{G_0} (H) + \sum_{\xi \in \operatorname{supp} J} a(J, \xi) \cdot \psi_0^*(\xi)$$

e

$$\delta\left(\phi \restriction_{G_0} (H) + \sum_{\xi \in \operatorname{supp} J} a(J, \xi) \cdot \psi_0^*(\xi) \right) = \delta\left(\sum_{\xi \in \operatorname{supp} J} a(J, \xi) \cdot \psi_0^*(\xi) \right) \leq \sum_{\xi \in \operatorname{supp} J} |a(J, \xi)| \cdot \frac{r_0}{d(J)} \leq \frac{1}{4}$$

concluímos que

$$0 + \mathbb{Z} \notin \phi \restriction_{G_0} (H) + \sum_{\xi \in \operatorname{supp} J} a(J, \xi) \cdot \psi_0^*(\xi).$$

Por fim, se $\xi \in (E \setminus E_0) \cap P_1$, façamos $\psi_0(\xi) = \mathbb{T}$.

Seja $n \in \omega$. Suponhamos definidas $\psi_n : E \cap P_1 \to \mathcal{B}$ e $\psi_n^* : E_n \cap P_1 \to \mathcal{B}$. Suponhamos, também, definido $\phi \restriction_{G_n} : G_n \to \mathbb{T}$ um homomorfismo de grupos, onde

$$G_n = \langle \{\Lambda_{(\zeta,m),c_n \cdot \prod_{k<n} d(g_{i(k)}(b_k))} : (\zeta, m) \in E_n \times e_n\} \rangle$$

e

$$c_n = \begin{cases} c_{n-1} & \text{se} \quad i(n) \notin \cup_{m \in D} L_m \\ c_{n-1} \cdot d(y_{i(n)}) & \text{se} \quad i(n) \in \cup_{m \in D} L_m \end{cases}$$

Vamos definir $\psi_{n+1} : E \cap P_1 \to \mathcal{B}$, $\psi_{n+1}^* : E_{n+1} \cap P_1 \to \mathcal{B}$ e estender $\phi \restriction_{G_n}$ a um homomorfismo de grupos $\psi \restriction_{G_{n+1}} : G_{n+1} \to \mathbb{T}$, onde

$$G_{n+1} = \langle \{\Lambda_{(\zeta,m),c_{n+1} \cdot \prod_{k<n+1} d(g_{i(k)}(b_k))} : (\zeta, m) \in E_{n+1} \times e_{n+1}\} \rangle$$

com

$$c_{n+1} = \begin{cases} c_n & \text{se} \quad i(n+1) \notin \cup_{m \in D} L_m \\ c_n \cdot d(y_{i(n+1)}) & \text{se} \quad i(n+1) \in \cup_{m \in D} L_m \end{cases}$$

satisfazendo as seguintes condições:

(1) Se $\xi \in (E \setminus E_{n+1}) \cap P_1$, então $\psi_{n+1}(\xi) = \mathbb{T}$;

(2) Se $\xi \in (E_{n+1} \setminus E_n) \cap P_1$, então $\psi_{n+1}^*(\xi)$ é tal que:

(a) $d(J) \cdot \prod_{m<n+1} d(f_{i(m)}(b_m)) \cdot \overline{\psi_{n+1}^*(\xi)} \subset \psi_n(\xi)$;

(b) $\delta(\psi_{n+1}^*(\xi)) = \dfrac{r_{n+1}}{d(J) \cdot \prod_{m<n+1} d(f_{i(m)}(b_m))}$.

Neste caso, façamos

$$\psi_{n+1}(\xi) = d(J) \cdot \prod_{m<n+1} d(f_{i(m)}(b_m)) \cdot \psi_{n+1}^*(\xi).$$

(3) Se $\xi \in E_n \cap P_1$, então $\psi_{n+1}^*(\xi)$ é tal que:

(a) $d(f_{i(n)}(b_n)) \cdot \overline{\psi_{n+1}^*(\xi)} \subset \psi_n^*(\xi)$;

(b) $\delta(\psi_{n+1}^*(\xi)) = \dfrac{r_{n+1}}{d(J) \cdot \prod_{m<n+1} d(f_{i(m)}(b_m))}$.

Neste caso, façamos

$$\psi_{n+1}(\xi) = d(J) \cdot \prod_{m<n+1} d(f_{i(m)}(b_m)) \cdot \psi^*_{n+1}(\xi).$$

(4) Se $h_{i(n)}$ for do tipo 1, 2, 3 ou 4, então

$$\psi_n(i(n)) \cap \left(\phi \restriction_{G_{n+1}} (g_{i(n)}(b_n)) + \sum_{\mu \in \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)} a(f_{i(n)}(b_n), \mu) \cdot d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m)) \cdot \psi^*_{n+1}(\mu) \right) \neq \emptyset;$$

(5) Se $h_{i(n)}$ for do tipo 5, então $\phi \restriction_{G_{n+1}} (g_{i(n)}(b_n)) = \sum_{(\zeta,p) \in \operatorname{supp} y_{i(n)} \cap (E_n \times e_n)} a(y_{i(n)}, (\zeta, p)) \cdot c_{n-1} \cdot \prod_{m<n} d(g_{i(m)}(b_m)) \cdot \phi \restriction_{G_n} (\Lambda_{(\zeta,p), c_n \cdot \prod_{m<n} d(g_{i(m)}(b_m))})$.

Se $\xi \in (E \setminus E_{n+1}) \cap P_1$, façamos $\psi_{n+1}(\xi) = \mathbb{T}$. Se $\xi \in [(E_{n+1} \setminus E_n) \setminus \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)] \cap P_1$, então $\psi_n(\xi) = \mathbb{T}$. Definimos $\psi^*_{n+1}(\xi)$ como sendo um elemento de $\mathcal{B}$ com diâmetro

$$\delta(\psi^*_{n+1}(\xi)) = \frac{r_{n+1}}{d(J) \cdot \prod_{m<n+1} d(f_{i(m)}(b_m))}$$

e façamos

$$\psi_{n+1}(\xi) = d(J) \cdot \prod_{m<n+1} d(f_{i(m)}(b_m)) \cdot \psi^*_{n+1}(\xi).$$

Se $\xi \in (E_n \setminus \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)) \cap P_1$, fixemos uma raiz $d(f_{i(n)}(b_n))$-ésima do ponto médio de $\psi^*_n(\xi)$. Definimos $\psi^*_{n+1}(\xi)$ como sendo o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado na raiz em questão com diâmetro

$$\delta(\psi^*_{n+1}(\xi)) = \frac{r_{n+1}}{d(J) \cdot \prod_{m<n+1} d(f_{i(m)}(b_m))}$$

e façamos

$$\psi_{n+1}(\xi) = d(J) \cdot \prod_{m<n+1} d(f_{i(m)}(b_m)) \cdot \psi^*_{n+1}(\xi).$$

Vamos, agora, definir $\psi^*_{n+1}(\xi)$ e $\psi_{n+1}(\xi)$ para $\xi \in \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$ e estender $\phi \restriction_{G_n}$ a $\phi \restriction_{G_{n+1}}$.

Caso 1: $h_{i(n)}$ é do tipo 1.

Como $\mathbb{T}$ é divisível e G_n é um subgrupo de G_{n+1}, podemos estender $\phi \restriction_{G_n}$ a um homomorfismo de grupos $\phi \restriction_{G_{n+1}} \colon G_{n+1} \to \mathbb{T}$. Fixemos $\alpha \in \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n) \setminus E_n$. Aplicando o lema 3.2.3 para P_1, $d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m))$, r_n, $\psi_n(i(n)) - \phi \restriction_{G_{n+1}} (g_{i(n)}(b_n))$,

$E_n \cap \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$, $f_{i(n)}(b_n)$, α e ψ_n^*, obtemos $\tilde{\psi} : \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n) \to \mathbb{T}$ satisfazendo as condições (i), (ii), (iii) e (iv) do lema 3.2.3. Façamos $\psi_{n+1}^*(\xi) = \tilde{\psi}(\xi)$, para todo $\xi \in \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$. As condições (1), (2), (3) e (4) estão satisfeitas.

Caso 2: $h_{i(n)}$ é do tipo 2.

Como $\mathbb{T}$ é divisível e G_n é um subgrupo de G_{n+1}, podemos estender $\phi \restriction_{G_n}$ a um homomorfismo de grupos $\phi \restriction_{G_{n+1}}: G_{n+1} \to \mathbb{T}$. Tomemos $\alpha \in \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$ tal que $q(f_{i(n)}(b_n), \alpha) \cdot r_n > d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m))$. Podemos supor que $\alpha \in E_n$ pois, do contrário, os argumentos utilizados no caso 1 podem ser repetidos aqui. Aplicando o lema 3.2.4 para P_1, $d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m))$, r_n, $\psi_n(i(n)) - \phi \restriction_{G_{n+1}} (g_{i(n)}(b_n))$, $E_n \cap \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$, $f_{i(n)}(b_n)$, α e ψ_n^*, obtemos $\tilde{\psi} : \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n) \to \mathbb{T}$ satisfazendo as condições (i), (ii), (iii) e (iv) do lema 3.2.4. Façamos $\psi_{n+1}^*(\xi) = \tilde{\psi}(\xi)$, para todo $\xi \in \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$. As condições (1), (2), (3) e (4) estão satisfeitas.

Caso 3: $h_{i(n)}$ é do tipo 3.

Como $\mathbb{T}$ é divisível e $G_n \subset G_{n+1}$, podemos estender ϕ a um homomorfismo de grupos de G_{n+1} em $\mathbb{T}$. Tomemos $\alpha \in \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$ tal que $|a(f_{i(n)}(b_n), \alpha)| \cdot r_n > 4 \cdot d(f_{i(n)}(b_n))$. Novamente, podemos supor que $\alpha \in E_n$. Aplicando o lema 3.2.5 para P_1, $d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m))$, r_n, $\psi_n(i(n)) - \phi \restriction_{G_{n+1}} (g_{i(n)}(b_n))$, $E_n \cap \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$, $f_{i(n)}(b_n)$, α e ψ_n^*, obtemos $\tilde{\psi} : \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n) \to \mathbb{T}$ satisfazendo as condições (i), (ii), (iii) e (iv) do lema 3.2.5. Façamos $\psi_{n+1}^*(\xi) = \tilde{\psi}(\xi)$, para todo $\xi \in \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$. As condições (1), (2), (3) e (4) estão satisfeitas.

Caso 4: $h_{i(n)}$ é do tipo 4.

Se $\xi \in (E_{n+1} \setminus E_n) \cap \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$, definimos $\psi_{n+1}^*(\xi)$ como sendo um elemento de $\mathcal{B}$ tal que

$$\delta(\psi_{n+1}^*(\xi)) = \frac{r_{n+1}}{d(J) \cdot \prod_{m<n+1} d(f_{i(m)}(b_m))}.$$

Se $\xi \in E_n \cap \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$, fixemos uma raiz $d(f_{i(n)}(b_n))$-ésima do ponto médio de $\psi_n^*(\xi)$. Definimos $\psi_{n+1}^*(\xi)$ como sendo o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado na raiz em questão com diâmetro

$$\delta(\psi_{n+1}^*(\xi)) = \frac{r_{n+1}}{d(J) \cdot \prod_{m<n+1} d(f_{i(m)}(b_m))}.$$

Em ambos os casos, façamos

$$\psi_{n+1}(\xi) = d(J) \cdot \prod_{m<n+1} d(f_{i(m)}(b_m)) \cdot \psi^*_{n+1}(\xi).$$

Denotemos por z_ξ o centro de $\psi^*_{n+1}(\xi)$, para todo $\xi \in \operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)$.

Seja

$$\tilde{G}_{n+1} = \langle \{\Lambda_{(\zeta,p),c_{n+1}\cdot\prod_{m<n} d(g_{i(m)}(b_m))} : (\zeta,p) \in (E_n \times e_n) \cup \operatorname{supp} g_{i(n)}(b_n)\}\rangle.$$

Como $\mathbb{T}$ é divisível e G_n é um subgrupo de $\tilde{G}_{n+1}$, podemos estender $\phi \restriction_{G_n}$ a um homomorfismo de grupos $\phi \restriction_{\tilde{G}_{n+1}}: \tilde{G}_{n+1} \to \mathbb{T}$. Fixemos $(\mu,l) \in \operatorname{supp} g_{i(n)}(b_n)$ tal que $q(g_{i(n)}(b_n),(\mu,l)) \cdot r_n > d(H) \cdot \prod_{m<n} d(g_{i(m)}(b_m))$. Se $(\zeta,p) \in \operatorname{supp} g_{i(n)}(b_n) \setminus \{(\mu,l)\}$, fixemos $y_{(\zeta,p)}$ uma raiz $d(g_{i(n)}(b_n))$-ésima de $\phi \restriction_{\tilde{G}_{n+1}} (\Lambda_{(\zeta,p),c_{n+1}\cdot\prod_{m<n} d(g_{i(m)}(b_m))})$.

Aplicando o lema 4.2.3 para $P_0 \times \omega$, $c_{n+1} \cdot \prod_{m<n} d(g_{i(m)}(b_m))$, r_n, $\psi_n(i(n)) - u - v$, $g_{i(n)}(b_n)$, (μ,l) e $x = \phi \restriction_{\tilde{G}_{n+1}} (\Lambda_{(\mu,l),c_{n+1}\cdot\prod_{m<n} d(g_{i(m)}(b_m))})$, onde

$$u = \sum_{(\zeta,p)\in\operatorname{supp} g_{i(n)}(b_n)\setminus\{(\mu,l)\}} a(g_{i(n)}(b_n),(\zeta,p)) \cdot c_{n+1} \cdot \prod_{m<n} d(g_{i(m)}(b_m)) \cdot y_{(\zeta,p)}$$

e

$$v = \sum_{\xi\in\operatorname{supp} f_{i(n)}(b_n)} a(f_{i(n)}(b_n),\xi) \cdot d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m)) \cdot z_\xi,$$

obtemos $y_{(\mu,l)} \in \mathbb{T}$ tal que $d(g_{i(n)}(b_n)) \cdot y_{(\mu,l)} = \phi \restriction_{\tilde{G}_{n+1}} (\Lambda_{(\mu,l),c_{n+1}\cdot\prod_{m<n} d(g_{i(m)}(b_m))})$ e

$$a(g_{i(n)}(b_n),(\mu,l)) \cdot c_{n+1} \cdot \prod_{m<n} d(g_{i(m)}(b_m)) \cdot y_{(\mu,l)} + u + v \in \psi_n(i(n)).$$

Estendamos $\phi \restriction_{\tilde{G}_{n+1}}$ a um homomorfismo de grupos $\phi \restriction_{G_{n+1}}: G_{n+1} \to \mathbb{T}$ de modo que

$$\phi \restriction_{G_{n+1}} (\Lambda_{(\zeta,p),c_{n+1}\cdot\prod_{m<n+1} d(g_{i(m)}(b_m))}) = y_{(\zeta,p)}$$

para todo $(\zeta,p) \in \operatorname{supp} g_{i(n)}(b_n)$.

Caso 5: $h_{i(n)}$ é do tipo 5.

Uma vez que $\operatorname{supp} g_{i(n)}(b_n) \setminus (E_n \times e_n) \neq \emptyset$ e $\mathrm{o}(g_{i(n)}(b_n) \restriction_{\operatorname{supp} g_{i(n)}(b_n)\setminus(E_n\times e_n)}) = \mathrm{o}(g_{i(n)}(b_n))$,

concluímos que

$$\{g_{i(n)}(b_n)\} \cup \{\Lambda_{(\zeta,p),c_n\cdot\prod_{m<n} d(g_{i(m)}(b_m))} : (\zeta,p) \in E_n \times e_n\}$$

é um subconjunto independente do grupo $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}$. Portanto, podemos definir $\hat{\phi}(g_{i(n)}(b_n)) = \sum_{(\zeta,p)\in \operatorname{supp} y_{i(n)}\cap(E_n\times e_n)} a(y_{i(n)},(\zeta,p)) \cdot c_{n-1} \cdot \prod_{m<n} d(g_{i(m)}(b_m)) \cdot \phi \restriction_{G_n} (\Lambda_{(\zeta,p),c_n\cdot\prod_{m<n} d(g_{i(m)}(b_m))})$, $\hat{\phi}(x) = \phi \restriction_{G_n} (x)$ para todo $x \in G_n$ e estender $\hat{\phi}$ a um homomorfismo de grupos de $\langle\{g_{i(n)}(b_n)\} \cup \{\Lambda_{(\zeta,p),c_n\cdot\prod_{m<n} d(g_{i(m)}(b_m))} : (\zeta,p) \in E_n \times e_n\}\rangle$ em $\mathbb{T}$. Como $\mathbb{T}$ é divisível e $\langle\{g_{i(n)}(b_n)\} \cup \{\Lambda_{(\zeta,p),c_n\cdot\prod_{m<n} d(g_{i(m)}(b_m))} : (\zeta,p) \in E_n \times e_n\}\rangle$ é um subgrupo de G_{n+1}, podemos estender $\hat{\phi}$ a um homomorfismo de grupos $\phi \restriction_{G_{n+1}}: G_{n+1} \to \mathbb{T}$.

Por indução, obtemos aplicações $\psi_n : E \cap P_1 \to \mathcal{B}$ e $\psi_n^* : E_n \cap P_1 \to \mathcal{B}$ para cada $n \in \omega$, satisfazendo as seguintes condições:

- $\overline{\psi_{n+1}(\xi)} \subset \psi_n(\xi)$, para todo $\xi \in E \cap P_1$.
- $\delta(\psi_n(\xi)) = r_n$, se $\xi \in E_n \cap P_1$ e $\psi_n(\xi) = \mathbb{T}$, se $\xi \in (E \setminus E_n) \cap P_1$.
- $\psi_n(\xi) = d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m)) \cdot \psi_n^*(\xi)$, se $\xi \in E_n \cap P_1$.

Obtemos, ainda, $\phi \restriction_G$: $G \to \mathbb{T}$ um homomorfismo de grupos, onde $G = \cup_{n\in\omega} G_n \subset (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}$. Usando o fato de $\mathbb{T}$ ser um grupo divisível, estendemos $\phi \restriction_G$ a um homomorfismo de grupos $\phi \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}}: (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)} \to \mathbb{T}$.

Como $\mathbb{T}$ é um espaço métrico completo e $(r_n)_{n\in\omega}$ é uma seqüência de números reais positivos que converge para 0, concluímos que se $\xi \in E\cap P_1$, então $\cap_{n\in\omega}\psi_n(\xi) = \cap_{n\in\omega}\overline{\psi_n(\xi)}$ é um conjunto unitário. Denotaremos por $\tilde{\phi}(\chi_\xi)$ o único elemento de $\cap_{n\in\omega}\psi_n(\xi)$.

Para cada $\xi \in E \cap P_1$, sejam $N_\xi = \min\{n \in \omega : \xi \in E_n\}$ e $n \geq N_\xi$. Temos que $\psi_n(\xi) \neq \mathbb{T}$ e, portanto, existe um único elemento de $\psi_n^*(\xi)$ que multiplicado por $d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m))$ é igual a $\tilde{\phi}(\chi_\xi)$. Denotaremos tal elemento por

$$\tilde{\phi}\left(\frac{1}{d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m))} \cdot \chi_\xi\right).$$

Consideremos

$$G_\xi = \left\{\frac{1}{d(J) \cdot \prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m))} \cdot \chi_\xi \in \mathbb{Q}^{(E\cap P_1)} : n \geq N_\xi\right\}$$

e denotemos por $\tilde{G}$ o grupo gerado por $\cup_{\xi\in E\cap P_1} G_\xi$. Uma vez que que se $\xi \in E\cap P_1$ e $n > N_\xi$, então

$$\tilde{\phi}\left(\frac{1}{d(J)\cdot\prod_{m<N_\xi} d(f_{i(m)}(b_m))}\cdot\chi_\xi\right) = \prod_{N_\xi\leq m<n} d(f_{i(m)}(b_m))\cdot\tilde{\phi}\left(\frac{1}{d(J)\cdot\prod_{m<n} d(f_{i(m)}(b_m))}\cdot\chi_\xi\right)$$

podemos estender $\tilde{\phi}$ a um homomorfismo de grupos de $\tilde{G}$ em $\mathbb{T}$.

Usando o fato de $\mathbb{T}$ ser um grupo divisível, estendemos $\tilde{\phi}$ a um homomorfismo de grupos $\phi\restriction_{\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}}\colon \mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}\to\mathbb{T}$.

Definimos $\phi_{(H,J)}\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}}\colon (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}\to\mathbb{T}$ por

$$\phi_{(H,J)}\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}}(\tilde{H},\tilde{J}) = \phi\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}}(\tilde{H}) + \phi\restriction_{\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}}(\tilde{J})$$

para todo $(\tilde{H},\tilde{J})\in(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}$.

Se $J=0$, então $\phi_{(H,J)}\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}}(H,J) = \phi\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}}(H)\neq 0+\mathbb{Z}$, uma vez que $(H,J)\neq(0,0)$. Suponhamos, portanto, que $J\neq 0$. Temos que

$$\phi\restriction_{\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}}(J)\in\sum_{\xi\in\operatorname{supp}J} a(J,\xi)\cdot\psi_0^*(\xi).$$

Como

$$0+\mathbb{Z}\notin\phi\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}}(H)+\sum_{\xi\in\operatorname{supp}J} a(J,\xi)\cdot\psi_0^*(\xi)$$

temos que $\phi_{(H,J)}\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}}(H,J)\neq 0+\mathbb{Z}$. Portanto, (i) está verificada.

Fixemos $\xi\in(E\cap L_1)\setminus\omega$. Para cada $k\in i^{-1}(\{\xi\})$ temos que $\phi_{(H,J)}\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}}$ $(h_{i(k)}(b_k))$ é um elemento de

$$\phi\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}}(g_{i(k)}(b_k)) + \sum_{\mu\in\operatorname{supp}f_{i(k)}(b_k)} a(f_{i(k)}(b_k),\mu)\cdot d(J)\cdot\prod_{m<k} d(f_{i(m)}(b_m))\cdot\psi_{k+1}^*(\mu).$$

Além disso,

$$\phi_{(H,J)}\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}}(0,\chi_{i(k)})\in\psi_k(i(k)).$$

De (4) vem que

$$\begin{aligned}\delta(\phi_{(H,J)}\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}}(h_{i(k)}(b_k)),\phi_{(H,J)}\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}}(0,\chi_{i(k)})) &\leq d_1+d_2\\ &< 2r_k\end{aligned}$$

onde

$$d_1 = \delta(\phi \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}} (g_{i(k)}(b_k)) + \sum_{\mu\in\operatorname{supp} f_{i(k)}(b_k)} a(f_{i(k)}(b_k),\mu)\cdot d(J)\cdot\prod_{m<k} d(f_{i(m)}(b_m))\cdot\psi^*_{k+1}(\mu))$$

e

$$d_2 = \delta(\psi_k(i(k))).$$

Como $r_k \to 0$, concluímos que a seqüência $\{\phi_{(H,J)} \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}} (h_{i(k)}(b_k)) : k \in i^{-1}(\{\xi\})\}$ converge para $\phi_{(H,J)} \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}} (0,\chi_\xi)$. Da propriedade (v) do lema 5.3.2 segue que

$$\phi_{(H,J)} \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}} (0,\chi_\xi) = p_\xi - \lim\{\phi_{(H,J)} \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}} (h_\xi(n)) : n\in\omega\}.$$

Logo, (ii) está verificada.

Por fim, seja $\xi \in E \cap \bigcup_{n\in D} L_n$. Como $E\times\omega = \cup_{n\in\omega}(E_n\times e_n)$, existe $n\in\omega$ tal que $\operatorname{supp} y_\xi \subset E_n\times e_n$. Para cada $k\in i^{-1}(\{\xi\})$ temos que $\phi_{(H,J)} \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}} (h_{i(k)}(b_k)) = \phi \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}} (g_{i(k)}(b_k))$, uma vez que $h_{i(k)}$ é do tipo 5. Além disso, temos que $\phi \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}} (g_{i(k)}(b_k)) = \phi \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}} (y_{i(k)})$, para todo $k>n$. Da propriedade (v) do lema 5.3.2 segue que

$$\phi_{(H,J)} \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}} (y_\xi,0) = p_\xi - \lim\{\phi_{(H,J)} \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}} (h_\xi(n)) : n\in\omega\}.$$

Logo, (iii) está verificada. □

Estamos prontos para estender $\phi_{(H,J)} \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}}$ a um homomorfismo de grupos $\phi_{(H,J)} : (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1)} \to \mathbb{T}$.

Lema 5.3.4. *Para cada $(H,J)\in(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1)}\setminus\{(0,0)\}$, existe $\phi_{(H,J)} : (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1)}\to\mathbb{T}$ um homomorfismo de grupos tal que:*

(i) $\phi_{(H,J)}(H,J) \neq 0+\mathbb{Z}$;

(ii) $\phi_{(H,J)}(0,\chi_\xi) = p_\xi - \lim\{\phi_{(H,J)}(h_\xi(n)) : n\in\omega\}$, *para cada* $\xi\in L_1\setminus\omega$.

(iii) $\phi_{(H,J)}(y_\xi,0) = p_\xi - \lim\{\phi_{(H,J)}(h_\xi(n)) : n\in\omega\}$, *para cada* $\xi\in\cup_{n\in D}L_n$.

Demonstração. Faremos a construção de $\phi_{(H,J)}$ por indução. De acordo com a proposição 5.3.1, existe $E\in[\mathfrak{c}]^\omega$ tal que $\operatorname{supp}(H,J)\subset(E\times\omega)\cup E$, $|E\cap[(L_1\cup\bigcup_{n\in D}L_n)\setminus\omega]| = \omega$ e

$\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} h_\xi(n) \subset (E\times\omega)\cup E$, qualquer que seja $\xi \in E\cap[(L_1\cup\bigcup_{n\in D} L_n)\setminus\omega]$. Segundo o lema 5.3.3 é possível construir $\phi_{(H,J)}\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}}\colon (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}\to\mathbb{T}$ um homomorfismo de grupos tal que:

(1) $\phi_{(H,J)}\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}}(H,J)\neq 0+\mathbb{Z}$;

(2) $\phi_{(H,J)}\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}}(0,\chi_\xi) = p_\xi - \lim\{\phi_{(H,J)}\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}}(h_\xi(n)) : n\in\omega\}$, para cada $\xi\in(E\cap L_1)\setminus\omega$;

(3) $\phi_{(H,J)}\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}}(y_\xi,0) = p_\xi - \lim\{\phi_{(H,J)}\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}}(h_\xi(n)) : n\in\omega\}$, para cada $\xi\in E\cap\cup_{n\in D}L_n$.

Consideremos $\{\alpha_\xi : \xi<\mathfrak{c}\}$ uma indexação estritamente crescente de $\mathfrak{c}\setminus E$.

- Se $\alpha_0\in P_0\setminus\bigcup_{n\in D}L_n$, usamos o fato de $\mathbb{T}$ ser um grupo divisível para estender $\phi_{(H,J)}\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}}$ a um homomorfismo de grupos

$$\phi_{(H,J)}\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{([(P_0\cap E)\cup\{\alpha_0\}]\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}}\colon (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{([(P_0\cap E)\cup\{\alpha_0\}]\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}\to\mathbb{T}.$$

- Se $\alpha_0\in P_1\setminus(L_1\setminus\omega)$, usamos o fato de $\mathbb{T}$ ser um grupo divisível para estender $\phi_{(H,J)}\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}}$ a um homomorfismo de grupos

$$\phi_{(H,J)}\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{((P_1\cap E)\cup\{\alpha_0\})}}\colon (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{((P_1\cap E)\cup\{\alpha_0\})}\to\mathbb{T}.$$

- Se $\alpha_0\in\cup_{n\in D}L_n$, definamos

$$\tilde{\phi}_{(H,J)}(y_{\alpha_0},0) = p_{\alpha_0} - \lim\{\phi_{(H,J)}\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}}(h_{\alpha_0}(n)) : n\in\omega\}$$

  e façamos

$$\tilde{\phi}_{(H,J)}(\tilde{H},\tilde{J}) = \phi_{(H,J)}\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}}(\tilde{H},\tilde{J})$$

  para todo $(\tilde{H},\tilde{J})\in(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}$.

  Seja G_0 o subgrupo de $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{([(P_0\cap E)\cup\{\alpha_0\}]\times\omega)}$ gerado por $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\cap E)\times\omega)}\cup\{y_{\alpha_0}\}$. Podemos estender $\tilde{\phi}_{(H,J)}$ a um homomorfismo de grupos de $G_0\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}$ em $\mathbb{T}$. Uma vez que $\mathbb{T}$ é divisível, estendemos $\tilde{\phi}_{(H,J)}$ a um homomorfismo de grupos

$$\phi_{(H,J)}\restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{([(P_0\cap E)\cup\{\alpha_0\}]\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}}\colon (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{([(P_0\cap E)\cup\{\alpha_0\}]\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1\cap E)}\to\mathbb{T}.$$

- Se $\alpha_0 \in L_1 \setminus \omega$, definamos

$$\tilde{\phi}_{(H,J)}(0, \chi_{\alpha_0}) = p_{\alpha_0} - \lim\{\phi_{(H,J)} \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0 \cap E)\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1 \cap E)}} (h_{\alpha_0}(n)) : n \in \omega\}$$

  e façamos

$$\tilde{\phi}_{(H,J)}(\tilde{H}, \tilde{J}) = \phi_{(H,J)} \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0 \cap E)\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1 \cap E)}} (\tilde{H}, \tilde{J})$$

  para todo $(\tilde{H}, \tilde{J}) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0 \cap E)\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1 \cap E)}$.

  Seja G_0 o subgrupo de $\mathbb{Q}^{((P_1 \cap E) \cup \{\alpha_0\})}$ gerado por $\mathbb{Q}^{(P_1 \cap E)} \cup \{\chi_{\alpha_0}\}$. Podemos estender $\tilde{\phi}_{(H,J)}$ a um homomorfismo de grupos de $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0 \cap E)\times\omega)} \oplus G_0$ em $\mathbb{T}$. Uma vez que $\mathbb{T}$ é divisível, estendemos $\tilde{\phi}_{(H,J)}$ a um homomorfismo de grupos

$$\phi_{(H,J)} \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0 \cap E)\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{((P_1 \cap E) \cup \{\alpha_0\})}} : (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0 \cap E)\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{((P_1 \cap E) \cup \{\alpha_0\})} \to \mathbb{T}.$$

Repetindo indutivamente esta construção, obteremos $\phi_{(H,J)} : (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0 \times \omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} \to \mathbb{T}$ um homomorfismo de grupos satisfazendo (i), (ii) e (iii). □

5.4 Explicitando a topologia

A próxima proposição mostra que o produto diagonal da família $\{\phi_{(H,J)} : (H,J) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0 \times \omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} \setminus \{(0,0)\}\}$ é um monomorfismo de grupos.

Proposição 5.4.1. *Suponhamos que para cada $(H,J) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0 \times \omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} \setminus \{(0,0)\}$ exista um homomorfismo de grupos $\phi_{(H,J)} : (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0 \times \omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} \to \mathbb{T}$ tal que $\phi_{(H,J)}(H,J) \neq 0 + \mathbb{Z}$. A aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0 \times \omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} & \to & \mathbb{T}^{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0 \times \omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} \setminus \{(0,0)\}} \\ & (\tilde{H}, \tilde{J}) & \mapsto & \Phi(\tilde{H}, \tilde{J}) \end{array}$$

dada por

$$\Phi(\tilde{H}, \tilde{J})(H,J) = \phi_{(H,J)}(\tilde{H}, \tilde{J}), \text{ para cada } (H,J) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0 \times \omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} \setminus \{(0,0)\}$$

é um monomorfismo de grupos.

Demonstração. Análoga à da proposição 2.3.1. □

Teorema 5.4.2. *Se G é um grupo abeliano de não torção tal que $|G| = \mathfrak{c}$, $|G/T(G)| = \mathfrak{c}$ e, para quaisquer $n, d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tais que $d \mid n$, o conjunto $dG[n]$ é finito ou tem cardinalidade $\mathfrak{c}$, então G admite uma topologia que o torna um grupo topológico enumeravelmente compacto sem seqüências não triviais convergentes.*

Demonstração. Seja

$$\tau = \{\varphi^{-1} \circ \Phi^{-1}(U \cap \Phi[\varphi[G]]) : U \text{ é aberto em } \mathbb{T}^{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0 \times \omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} \setminus \{(0,0)\}}\}.$$

Temos que τ é uma topologia em G que o torna um grupo topológico.

Consideremos $h : \omega \to G$. Se h é trivial, nada temos a fazer. Se não, h possui duas subseqüências constantes e distintas ou existe $j : \omega \to \omega$ estritamente crescente tal que $h \circ j$ é injetora. No primeiro caso, temos que $\{h(n) \in G : n \in \omega\}$ tem pelo menos dois pontos de acumulação distintos e, portanto, h não é convergente. Suponhamos que o segundo caso ocorra.

As aplicações

$$\begin{array}{rccl} h_0 : & \omega & \to & G \\ & n & \mapsto & (h \circ j)(2n) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccl} h_1 : & \omega & \to & G \\ & n & \mapsto & (h \circ j)(2n+1) \end{array}$$

são subseqüências distintas de h. De acordo com a proposição 5.2.4, existem $j_0, j_1 : \omega \to \omega$ estritamente crescentes e $c_0, c_1 \in \varphi[G]$ tais que $\tilde{h}_0, \tilde{h}_1 \in \mathcal{H}$, onde $\tilde{h}_0, \tilde{h}_1 : \omega \to \varphi[G]$ são dadas por $\tilde{h}_0(n) = \varphi \circ h_0 \circ j_0(n) + c_0$ e $\tilde{h}_1(n) = \varphi \circ h_1 \circ j_1(n) + c_1$, para todo $n \in \omega$. Logo, existem $\xi_0, \xi_1 \in (L_1 \cup \bigcup_{n \in D} L_n) \setminus \omega$ distintos tais que $\tilde{h}_0 = h_{\xi_0}$ e $\tilde{h}_1 = h_{\xi_1}$.

Seja $i \in \{0, 1\}$. Se h_{ξ_i} é do tipo 1, 2, 3 ou 4, então

$$\phi_{(H,J)}(0, \chi_{\xi_i}) = p_{\xi_i} - \lim\{\phi_{(H,J)}(h_{\xi_i}(n)) : n \in \omega\}$$

para todo $(H, J) \in \setminus(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0 \times \omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)}\{(0,0)\}$ e, portanto,

$$\Phi(0, \chi_{\xi_i}) = p_{\xi_i} - \lim\{\Phi(h_{\xi_i}(n)) : n \in \omega\}.$$

Logo,

$$\varphi^{-1}(0, \chi_{\xi_i}) - \varphi^{-1}(c_i) = p_{\xi_i} - \lim\{(h_i \circ j_i)(n) : n \in \omega\}.$$

Se h_{ξ_i} é do tipo 5, então

$$\phi_{(H,J)}(y_{\xi_i}, 0) = p_{\xi_i} - \lim\{\phi_{(H,J)}(h_{\xi_i}(n)) : n \in \omega\}$$

para todo $(H, J) \in \setminus(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0 \times \omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)}\{(0,0)\}$ e, portanto,

$$\Phi(y_{\xi_i}, 0) = p_{\xi_i} - \lim\{\Phi(h_{\xi_i}(n)) : n \in \omega\}.$$

Logo,

$$\varphi^{-1}(y_{\xi_i}, 0) - \varphi^{-1}(c_i) = p_{\xi_i} - \lim\{(h_i \circ j_i)(n) : n \in \omega\}.$$

Assim, $\{h(n) \in G : n \in \omega\}$ tem dois pontos de acumulação distintos. □

5.5 Caracterização algébrica dos grupos abelianos de não torção que têm cardinalidade $\mathfrak{c}$ e que admitem uma topologia de grupo enumeravelmente compacta

Proposição 5.5.1. *Se G é um grupo topológico pseudocompacto infinito, então $|G| \geq \mathfrak{c}$.*

Demonstração. Ver teorema 9.11.2 de [1]. □

Proposição 5.5.2. *Seja G um grupo abeliano de não torção. Se G admite uma topologia de grupo pseudocompacta, então $|G/T(G)| \geq \mathfrak{c}$.*

Demonstração. Ver teorema 9.11.5 de [1]. □

Como todo espaço topológico enumeravelmente compacto é, em particular, pseudocompacto, obtemos os seguintes corolários:

Corolário 5.5.3. *Seja G um grupo abeliano de não torção tal que $|G| = \mathfrak{c}$. Se G admite uma topologia de grupo enumeravelmente compacta então, para cada número natural $n > 1$ e para cada divisor d de n, o conjunto $dG[n]$ é finito ou tem cardinalidade $\mathfrak{c}$.*

Demonstração. Seja τ uma topologia enumeravelmente compacta em G que o torna um grupo topológico. A aplicação $\varphi_n : G \to G$ dada por $\varphi_n(x) = nx$ para cada $x \in G$, é contínua. Logo, $G[n] = \varphi_n^{-1}(\{0_G\})$ é um subgrupo fechado de G e, portanto, enumeravelmente compacto. Como φ_d é um homomorfismo de grupos contínuo, temos que $dG[n] = \varphi_d[G[n]]$ é um subgrupo

enumeravelmente compacto de $G[n]$. Da proposição 5.5.1 segue que $dG[n]$ é finito ou tem cardinalidade $\mathfrak{c}$. $\square$

Corolário 5.5.4. *Seja G um grupo abeliano de não torção tal que $|G| = \mathfrak{c}$. Se G admite uma topologia de grupo enumeravelmente compacta, então $|G/T(G)| = \mathfrak{c}$.*

Demonstração. Decorre imediatamente da proposição 5.5.2. $\square$

Teorema 5.5.5. *Seja G um grupo abeliano de não torção tal que $|G| = \mathfrak{c}$. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) G admite uma topologia de grupo enumeravelmente compacta;

(ii) G admite uma topologia de grupo enumeravelmente compacta sem seqüências não triviais convergentes;

(iii) $|G/T(G)| = \mathfrak{c}$ e para quaisquer $n, d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ com $d \mid n$, o conjunto $dG[n]$ é finito ou tem cardinalidade $\mathfrak{c}$.

Demonstração. Claramente, (ii) implica (i). Dos corolários 5.5.3 e 5.5.4 decorre que (i) implica (iii). Por fim, do teorema 5.4.2 segue que (iii) implica (ii).[11] $\square$

5.6 Aumentando o peso do grupo

Teorema 5.6.1. *Seja G um grupo abeliano de não torção tal que $|G| = \mathfrak{c}$, $|G/T(G)| = \mathfrak{c}$ e, para quaisquer $n, d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ com $d \mid n$, o conjunto $dG[n]$ é finito ou tem cardinalidade $\mathfrak{c}$. Existe uma topologia em G que o torna um grupo topológico enumeravelmente compacto sem seqüências não triviais convergentes com peso $2^{\mathfrak{c}}$.*

Demonstração. Seja $\{z_\xi : \xi \in P_1 \setminus L_1\}$ um subconjunto denso de $\mathbb{T}^{[\mathfrak{c},2^{\mathfrak{c}}[}$. Denotemos por S o subgrupo de $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)}$ gerado por $\{(0,\chi_\xi) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} : \xi \in P_1 \setminus L_1\}$ e consideremos $\rho : S \to \mathbb{T}^{[\mathfrak{c},2^{\mathfrak{c}}[}$ o homomorfismo de grupos dado por $\rho(0,\chi_\xi) = z_\xi$, para todo $\xi \in P_1 \setminus L_1$. Como $\mathbb{T}^{[\mathfrak{c},2^{\mathfrak{c}}[}$ é divisível, podemos estender ρ a um homomorfismo de grupos $\rho : (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((P_0\setminus\cup_{n\in D}L_n)\times\omega)} \oplus Q^{((P_1\setminus L_1)\cup\omega)} \to \mathbb{T}^{[\mathfrak{c},2^{\mathfrak{c}}[}$.

[11] As implicações (ii) $\Rightarrow$ (i) e (i) $\Rightarrow$ (iii) valem em ZFC. Usamos a existência de ultrafiltros seletivos apenas para mostrar que (iii) $\Rightarrow$ (ii).

Seja $\{\alpha_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ uma indexação estritamente crescente de $(L_1 \cup \bigcup_{n\in D} L_n) \setminus \omega$. Definimos

$$z_{\alpha_0} = p_{\alpha_0} - \lim\{\rho(h_{\alpha_0}(n)) : n \in \omega\}$$

e façamos $\rho(0, \chi_{\alpha_0}) = z_{\alpha_0}$, se $\alpha_0 \in L_1 \setminus \omega$ e $\rho(y_{\alpha_0}, 0) = z_{\alpha_0}$, se $\alpha_0 \in \cup_{n\in D} L_n$.

Repetindo indutivamente esta construção, obtemos $\rho : (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} \to \mathbb{T}^{[\mathfrak{c},2^{\mathfrak{c}}[}$ um homomorfismo de grupos tal que $\rho(0, \chi_\xi) = p_\xi - \lim\{\rho(h_\xi(n)) : n \in \omega\}$, se $\xi \in L_1 \setminus \omega$ e $\rho(y_\xi, 0) = p_\xi - \lim\{\rho(h_\xi(n)) : n \in \omega\}$, se $\xi \in \cup_{n\in D} L_n$.

Seja $\tilde{G} \subset \mathbb{T}^{2^{\mathfrak{c}}}$ dado por $\tilde{G} = \{(\Phi(\varphi(x)), \rho(\varphi(x))) \in \mathbb{T}^{\mathfrak{c}} \times \mathbb{T}^{[\mathfrak{c},2^{\mathfrak{c}}[} : x \in G\}$ onde φ e Φ foram definidas nas proposições 5.1.4 e 5.4.1, respectivamente. Temos que G é isomorfo a $\tilde{G}$ e $\tilde{G}$, munido da topologia de subespaço induzida por $\mathbb{T}^{2^{\mathfrak{c}}}$ é um grupo topológico enumeravelmente compacto sem seqüências não triviais convergentes com peso $2^{\mathfrak{c}}$. $\square$

CAPÍTULO 6

Sobre o número de topologias de grupo enumeravelmente compactas que um grupo abeliano de não torção e cardinalidade $\mathfrak{c}$ admite

Neste capítulo, assumiremos a existência de $2^{\mathfrak{c}}$ ultrafiltros seletivos para mostrar que se um grupo abeliano de não torção e cardinalidade $\mathfrak{c}$ admite uma topologia de grupo enumeravelmente compacta, então o mesmo admite $2^{\mathfrak{c}}$ topologias enumeravelmente compactas (duas a duas não homeomorfas) que o tornam um grupo topológico.

Começaremos definindo o invariante topológico $\mathcal{F}$ e, após uma breve recordação da notação adotada no capítulo 5, mostraremos que se G é um grupo abeliano de não torção e cardinalidade $\mathfrak{c}$ que admite uma topologia de grupo enumeravelmente compacta, então dados $\kappa < 2^{\mathfrak{c}}$ um cardinal e $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha < \kappa\}$ uma família de espaços topológicos, é possível munir G de uma topologia τ que o torna um grupo topológico enumeravelmente compacto com $\mathcal{F}(G, \tau) \neq \mathcal{F}(X_\alpha, \tau_\alpha)$ para todo $\alpha < \kappa$.

6.1 O invariante topológico $\mathcal{F}$

Recordamos que se (X, τ) é um espaço topológico e $x \in X$, então τ_x denota o conjunto de todas as vizinhanças abertas de x em X.

Definição 6.1.1. *Se X é um espaço topológico e $x \in X$ é um ponto de acumulação de*

$\{x_n : n \in \omega\} \subset X$, *definimos*

$$\mathcal{F}(X, \{x_n : n \in \omega\}, x) = \{A \subset \omega : \exists U \in \tau_x \text{ tal que } \{n \in \omega : x_n \in U\} \subset A\}.$$

Proposição 6.1.2. *Se X é um espaço topológico e $x \in X$ é um ponto de acumulação de $\{x_n : n \in \omega\} \subset X$, então $\mathcal{F}(X, \{x_n : n \in \omega\}, x)$ é um filtro sobre ω.*

Demonstração. Como x é ponto de acumulação de $\{x_n : n \in \omega\}$, para cada $U \in \tau_x$ existe $n \in \omega$ tal que $x_n \in U$. Logo, $\emptyset \notin \mathcal{F}(X, \{x_n : n \in \omega\}, x)$ e $\omega \in \mathcal{F}(X, \{x_n : n \in \omega\}, x)$. Se $A, B \in \mathcal{F}(X, \{x_n : n \in \omega\}, x)$, então existem $U, V \in \tau_x$ tais que $\{n \in \omega : x_n \in U\} \subset A$ e $\{n \in \omega : x_n \in V\} \subset B$. Como $U \cap V \in \tau_x$ e $\{n \in \omega : x_n \in U \cap V\} \subset A \cap B$, temos que $A \cap B \in \mathcal{F}(X, \{x_n : n \in \omega\}, x)$. Por fim, se $A \in \mathcal{F}(X, \{x_n : n \in \omega\}, x)$ e $B \subset \omega$ são tais que $A \subset B$, então existe $U \in \tau_x$ tal que $\{n \in \omega : x_n \in U\} \subset A \subset B$. Logo, $B \in \mathcal{F}(X, \{x_n : n \in \omega\}, x)$. Portanto, $\mathcal{F}(X, \{x_n : n \in \omega\}, x)$ é um filtro sobre ω. □

Denotaremos por $\mathcal{F}(X)$ a família de todos os filtros $\mathcal{F}(X, \{x_n : n \in \omega\}, x)$, onde X é um espaço topológico fixado e $x \in X$ é um ponto de acumulação de $\{x_n : n \in \omega\} \subset X$. Observamos que se $|X| = \mathfrak{c}$, então $|\mathcal{F}(X)| \leq \mathfrak{c}$.[1]

Lema 6.1.3. *Sejam X e Y espaços topológicos e $h : X \to Y$ um homeomorfismo. Se $x \in X$ é um ponto de acumulação de $\{x_n : n \in \omega\} \subset X$, então $h(x) \in Y$ é um ponto de acumulação de $\{h(x_n) : n \in \omega\} \subset Y$ e $\mathcal{F}(X, \{x_n : n \in \omega\}, x) = \mathcal{F}(Y, \{h(x_n) : n \in \omega\}, h(x))$.*

Demonstração. Seja U uma vizinhança aberta de $h(x)$ em Y. Como h é contínua, temos que $h^{-1}(U)$ é uma vizinhança aberta de x em X. Do fato de x ser ponto de acumulação de $\{x_n : n \in \omega\}$ decorre que $(\{x_n : n \in \omega\} \setminus \{x\}) \cap h^{-1}(U) \neq \emptyset$. Logo, existe $n \in \omega$ tal que $x_n \in h^{-1}(U) \setminus \{x\}$ e, portanto, $h(x_n) \in U \setminus \{h(x)\}$ uma vez que h é injetora. Com isso, concluímos que $(\{h(x_n) : n \in \omega\} \setminus \{h(x)\}) \cap U \neq \emptyset$. Logo, $h(x)$ é um ponto de acumulação de $\{h(x_n) : n \in \omega\}$.

Se $A \in \mathcal{F}(X, \{x_n : n \in \omega\}, x)$, então existe U uma vizinhança aberta de x em X tal que $\{n \in \omega : x_n \in U\} \subset A$. Como h é um homeomorfismo, temos que $h(U)$ é uma vizinhança aberta de $h(x)$ em Y e $\{n \in \omega : h(x_n) \in h(U)\} = \{n \in \omega : x_n \in U\} \subset A$. Portanto, $A \in \mathcal{F}(Y, \{h(x_n) : n \in \omega\}, h(x))$. Analogamente, mostramos que $\mathcal{F}(Y, \{h(x_n) : n \in \omega\}, h(x)) \subset \mathcal{F}(X, \{x_n : n \in \omega\}, x)$. □

Corolário 6.1.4. *Se X e Y são espaços topológicos homeomorfos, então $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(Y)$.* □

[1] Basta notar que $|[\mathfrak{c}]^{\leq\omega}| = \mathfrak{c}$ e que $\mathfrak{c} \times \mathfrak{c}$ é equipotente a $\mathfrak{c}$.

6.2 Recordando a notação adotada no capítulo 5

Seja G um grupo abeliano de não torção e cardinalidade $\mathfrak{c}$ que admite uma topologia de grupo enumeravelmente compacta.[2] Denotaremos por D o conjunto dos números naturais $n > 1$ tais que G contém uma cópia de $\mathbb{Z}_n^{(\mathfrak{c})}$ e consideraremos $\{P_0, P_1\}$ uma partição de $\mathfrak{c}$ tal que $|P_0| = |P_1| = \mathfrak{c}$, $\omega \cup \{\omega\} \subset P_1$ e $\{\omega + n : n \geq 1\} \subset P_0$. Tomemos $\varphi : G \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0 \times \omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)}$ um monomorfismo de grupos tal que

$$\{(0, \chi_\xi) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0 \times \omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} : \xi \in L_1\} \subset \varphi[G]$$

e

$$\{(y_\xi, 0) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0 \times \omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} : \xi \in \cup_{n \in D} L_n\} \subset \varphi[G]$$

onde $L_1 \in [P_1]^{\mathfrak{c}}$ é tal que $\omega \cup \{\omega\} \subset L_1$ e $\{L_n : n \in D\}$ é uma família de elementos de $[P_0]^{\mathfrak{c}}$ dois a dois disjuntos satisfazendo:

- $\{\omega + n : n \in \mathbb{N}\} \cap \bigcup_{n \in D} L_n = \emptyset$;
- $\mathrm{o}(y_\xi) = n$, para todo $\xi \in L_n$ e todo $n \in D$;
- $\operatorname{supp} y_\xi \subset \{\xi\} \times \omega$, para todo $\xi \in \cup_{n \in D} L_n$.

Se $(H, J) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0 \times \omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)}$, então

$$H(\xi, n) = \frac{p(H, (\xi, n))}{q(H, (\xi, n))} + \mathbb{Z}$$

onde $p(H, (\xi, n)), q(H, (\xi, n)) \in \mathbb{Z}$, $q(H, (\xi, n)) > 0$, $\mathrm{mdc}(p(H, (\xi, n)), q(H, (\xi, n))) = 1$ e $0 \leq p(H, (\xi, n)) \leq q(H, (\xi, n)) - 1$, para cada $(\xi, n) \in \operatorname{supp} H$. Além disso,

$$J(\mu) = \frac{p(J, \mu)}{q(J, \mu)}$$

onde $p(J, \mu), q(J, \mu) \in \mathbb{Z}$, $q(J, \mu) > 0$ e $\mathrm{mdc}(p(J, \mu), q(J, \mu)) = 1$, para cada $\mu \in \operatorname{supp} J$.

Sejam

$$|q(H)| = \max\{q(H, (\xi, n)) : (\xi, n) \in \operatorname{supp} H\},$$

[2] De acordo com os corolários 5.5.3 e 5.5.4, para cada número natural $n > 1$ e para cada divisor d de n, o conjunto $dG[n]$ é finito ou tem cardinalidade $\mathfrak{c}$ e $|G/T(G)| = \mathfrak{c}$.

$$|q(J)| = \max\{q(J,\mu) : \mu \in \operatorname{supp} J\},$$

e

$$|p(J)| = \max\{|p(J,\mu)| : \mu \in \operatorname{supp} J\}.$$

Denotaremos por $\mathcal{H}$ o conjunto de todas as funções

$$\begin{array}{rccl} h: & \omega & \to & \varphi[G] \subset (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} \\ & n & \mapsto & (g(n), f(n)) \end{array}$$

que satisfazem uma das seguintes condições:

(1) $\operatorname{supp} f(n) \setminus \cup_{m<n} \operatorname{supp} f(m) \neq \emptyset$, para todo $n \in \omega$;

(2) $|q(f(n))| > n$, para todo $n \in \omega$;

(3) $\{|q(f(n))| : n \in \omega\}$ é limitado e $|p(f(n))| > n$, para todo $n \in \omega$;

(4) $|q(g(n))| > n$, para todo $n \in \omega$;

(5) (a) $\operatorname{supp} g(n) \setminus \cup_{m<n} \operatorname{supp} g(m) \neq \emptyset$, para todo $n \in \omega$;
 (b) Existe $k \in D$ tal que $\mathrm{o}(g(n)) = k$, para todo $n \in \omega$;
 (c) $f(n) = 0$, para todo $n \in \omega$;
 (d) $\{g(n) : n \in \omega\}$ é um subconjunto k-round de $\varphi[G]$.

Sabemos que se $h : \omega \to \varphi[G] \subset (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)}$, então existem $j : \omega \to \omega$ estritamente crescente e $c \in \varphi[G]$ tais que a seqüência $n \mapsto (h \circ j)(n) + c$ é constante ou é de um dos tipos acima mencionados. Consideremos $\{h_\xi : \xi \in (L_1 \cup \bigcup_{n\in D} L_n) \setminus \omega\}$ uma indexação de $\mathcal{H}$ tal que:

- $h_\omega(n) = (0, \chi_n)$, para todo $n \in \omega$;
- Se $\xi \in L_1$, então h_ξ é do tipo 1, 2, 3 ou 4;
- Se existe $k \in D$ tal que $\xi \in L_k$, então h_ξ é do tipo 5 e $\mathrm{o}(h_\xi(n)) = k$, para todo $n \in \omega$;
- $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} h_\xi(n) \subset (\xi \times \omega) \cup \xi$, para todo $\xi \in (L_1 \cup \bigcup_{n\in D} L_n) \setminus \omega$.

Sabemos também que se $\{p_\xi : \xi \in (L_1 \cup \bigcup_{n\in D} L_n) \setminus \omega\}$ é uma família de ultrafiltros seletivos dois a dois incomparáveis segundo a ordem de Rudin-Keisler, então para cada $(H, J) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} \setminus \{(0,0)\}$, existe $\phi_{(H,J)} : (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} \to \mathbb{T}$ um homomorfismo de grupos tal que:

- $\phi_{(H,J)}(H,J) \neq 0 + \mathbb{Z}$;
- $\phi_{(H,J)}(0,\chi_\xi) = p_\xi - \lim\{\phi_{(H,J)}(h_\xi(n)) : n \in \omega\}$, para cada $\xi \in L_1 \setminus \omega$.
- $\phi_{(H,J)}(y_\xi, 0) = p_\xi - \lim\{\phi_{(H,J)}(h_\xi(n)) : n \in \omega\}$, para cada $\xi \in \cup_{n\in D} L_n \setminus \omega$.

Em particular, temos que $\phi_{(H,J)}(0,\chi_\omega) = p_\omega - \lim\{\phi_{(H,J)}(0,\chi_n) : n \in \omega\}$.

6.3 A construção de uma nova topologia

Fixemos $\kappa < 2^{\mathfrak{c}}$ um cardinal e consideremos $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha < \kappa\}$ uma família de espaços topológicos tal que $|X_\alpha| = \mathfrak{c}$, para todo $\alpha < \kappa$. Mostraremos que é possível munir G de uma topologia que o torna um grupo topológico enumeravelmente compacto não homeomorfo a (X_α, τ_α), para todo $\alpha < \kappa$. Como estamos assumindo a existência de $2^{\mathfrak{c}}$ ultrafiltros seletivos, podemos tomar $\{p_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\} \subset \omega^*$ uma família de ultrafiltros seletivos dois a dois incomparáveis (segundo a ordem de Rudin-Keisler) tal que $p_\omega \notin \cup_{\alpha<\kappa}\mathcal{F}(X_\alpha)$.[3]

Lema 6.3.1. *Seja $A \in p_\omega$. Existe $\phi_A : (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} \to \mathbb{T}$ um homomorfismo de grupos tal que:*

(i) $\phi_A(0,\chi_\xi) = p_\xi - \lim\{\phi_A(h_\xi(n)) : n \in \omega\}$, *para cada* $\xi \in L_1 \setminus \omega$;

(ii) $\phi_A(y_\xi, 0) = p_\xi - \lim\{\phi_A(h_\xi(n)) : n \in \omega\}$, *para cada* $\xi \in \bigcup_{n\in D} L_n \setminus \omega$;

(iii) $\{n \in \omega : \phi_A(h_\omega(n)) \in \Omega_A\} = A$, *para alguma vizinhança* Ω_A *de* $\phi_A(0,\chi_\omega)$ *em* $\mathbb{T}$.

Demonstração. Para cada $n \in \omega$, seja

$$\phi(0,\chi_n) = \begin{cases} 0 + \mathbb{Z} & \text{se} \quad n \notin A \\ \frac{1}{2} + \mathbb{Z} & \text{se} \quad n \in A. \end{cases}$$

Façamos, ainda,

$$\phi(0,\chi_\omega) = \tfrac{1}{2} + \mathbb{Z}.$$

Temos que $\phi(0,\chi_\omega) = p_\omega - \lim\{\phi(h_\omega(n)) : n \in \omega\}$ e $\{n \in \omega : \phi_A(h_\omega(n)) \in \Omega_A\} = A$, onde Ω_A denota o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado em $\frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ com diâmetro $\frac{1}{4}$. Estendamos ϕ a um homomorfismo de grupos de $\{0_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)}}\} \oplus \mathbb{Z}^{(\omega+1)}$ em $\mathbb{T}$ e usemos o fato de $\mathbb{T}$ ser um

[3] Isto é possível, já que $|\cup_{\alpha<\kappa}\mathcal{F}(X_\alpha)| \leq \max\{\kappa, \mathfrak{c}\} < 2^{\mathfrak{c}}$.

grupo divisível para estender ϕ a um homomorfismo de grupos $\phi_A \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((\omega+\omega\setminus\omega+1)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(\omega+1)}}: (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((\omega+\omega\setminus\omega+1)\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(\omega+1)} \to \mathbb{T}$.

Consideremos $\{\alpha_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ uma indexação estritamente crescente de $\mathfrak{c} \setminus (\omega + \omega)$.

- Se $\alpha_0 \in P_1 \setminus L_1$, usamos a divisibilidade de $\mathbb{T}$ para estender $\phi_A \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((\omega+\omega\setminus\omega+1)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(\omega+1)}}$ a um homomorfismo de grupos

$$\phi_A \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((\omega+\omega\setminus\omega+1)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{((\omega+1)\cup\{\alpha_0\})}}: (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((\omega+\omega\setminus\omega+1)\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{((\omega+1)\cup\{\alpha_0\})} \to \mathbb{T}.$$

- Se $\alpha_0 \in P_0 \setminus \cup_{n\in D} L_n$, também usamos a divisibilidade de $\mathbb{T}$ para estender $\phi_A \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((\omega+\omega\setminus\omega+1)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(\omega+1)}}$ a um homomorfismo de grupos

$$\phi \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{([(\omega+\omega\setminus\omega+1)\cup\{\alpha_0\}]\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(\omega+1)}}: (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{([(\omega+\omega\setminus\omega+1)\cup\{\alpha_0\}]\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(\omega+1)} \to \mathbb{T}.$$

- Se $\alpha_0 \in L_1$, definimos

$$\tilde{\phi}_A(0, \chi_{\alpha_0}) = p_{\alpha_0} - \lim\{\phi_A \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((\omega+\omega\setminus\omega+1)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(\omega+1)}} (h_{\alpha_0}(n)) : n \in \omega\}$$

  e façamos

$$\tilde{\phi}_A(H, J) = \phi_A \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((\omega+\omega\setminus\omega+1)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(\omega+1)}} (H, J)$$

  para todo $(H, J) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((\omega+\omega\setminus\omega+1)\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(\omega+1)}$.

  Seja G_0 o subgrupo de $\mathbb{Q}^{((\omega+1)\cup\{\alpha_0\})}$ gerado por $\mathbb{Q}^{(\omega+1)} \cup \{\chi_{\alpha_0}\}$. Estendamos $\tilde{\phi}_A$ a um homomorfismo de grupos de $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((\omega+\omega\setminus\omega+1)\times\omega)} \oplus G_0$ em $\mathbb{T}$ e usemos a divisibilidade de $\mathbb{T}$ para estender $\tilde{\phi}_A$ a um homomorfismo de grupos

$$\phi_A \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((\omega+\omega\setminus\omega+1)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{((\omega+1)\cup\{\alpha_0\})}}: (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((\omega+\omega\setminus\omega+1)\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{((\omega+1)\cup\{\alpha_0\})} \to \mathbb{T}.$$

- Se $\alpha_0 \in \cup_{n\in D} L_n$, definimos

$$\tilde{\phi}_A(y_{\alpha_0}, 0) = p_{\alpha_0} - \lim\{\phi_A \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((\omega+\omega\setminus\omega+1)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(\omega+1)}} (h_{\alpha_0}(n)) : n \in \omega\}$$

  e façamos

$$\tilde{\phi}_A(H, J) = \phi_A \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((\omega+\omega\setminus\omega+1)\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(\omega+1)}} (H, J)$$

  para todo $(H, J) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((\omega+\omega\setminus\omega+1)\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(\omega+1)}$.

Seja G_0 o subgrupo de $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{([(\omega+\omega\setminus\omega+1)\cup\{\alpha_0\}]\times\omega)}$ gerado por $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{((\omega+\omega\setminus\omega+1)\times\omega)} \cup \{y_{\alpha_0}\}$. Estendamos $\tilde{\phi}_A$ a um homomorfismo de grupos de $G_0 \oplus \mathbb{Q}^{(\omega+1)}$ em $\mathbb{T}$ e usemos a divisibilidade de $\mathbb{T}$ para estender $\tilde{\phi}_A$ a um homomorfismo de grupos

$$\phi_A \restriction_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{([(\omega+\omega\setminus\omega+1)\cup\{\alpha_0\}]\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(\omega+1)}} : (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{([(\omega+\omega\setminus\omega+1)\cup\{\alpha_0\}]\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(\omega+1)} \to \mathbb{T}.$$

Repetindo indutivamente esta construção, obteremos $\phi_A : (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} \to \mathbb{T}$ um homomorfismo de grupos satisfazendo (i) e (ii). $\square$

Temos que

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} & \to & \mathbb{T}^{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1)}\setminus\{(0,0)\}} \\ & (\tilde{H},\tilde{J}) & \mapsto & \Phi(\tilde{H},\tilde{J}) \end{array}$$

dada por

$$\Phi(\tilde{H},\tilde{J})(H,J) = \phi_{(H,J)}(\tilde{H},\tilde{J}), \text{ para cada } (H,J) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} \setminus \{(0,0)\}$$

é um monomorfismo de grupos. Além disso,

$$\begin{array}{rccc} \hat{\Phi}: & (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} & \to & \mathbb{T}^{p_\omega} \\ & (\tilde{H},\tilde{J}) & \mapsto & \hat{\Phi}(\tilde{H},\tilde{J}) \end{array}$$

dada por

$$\hat{\Phi}(\tilde{H},\tilde{J})(A) = \phi_A(\tilde{H},\tilde{J}), \text{ para cada } A \in p_\omega$$

é um homomorfismo de grupos. Logo,

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} & \to & \mathbb{T}^{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1)}\setminus\{(0,0)\}} \oplus \mathbb{T}^{p_\omega} \\ & (\tilde{H},\tilde{J}) & \mapsto & (\Phi(\tilde{H},\tilde{J}), \hat{\Phi}(\tilde{H},\tilde{J})) \end{array}$$

é um monomorfismo de grupos.

Temos que

$$\tau = \{\varphi^{-1} \circ \Psi^{-1}(U \cap \Psi[\varphi[G]]) : U \text{ é aberto em } \mathbb{T}^{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1)}\setminus\{(0,0)\}} \oplus \mathbb{T}^{p_\omega}\}$$

é uma topologia em G que o torna um grupo topológico. Além disso, temos que

$$\varphi^{-1}(0,\chi_\xi) = p_\xi - \lim\{\varphi^{-1}(h_\xi(n)) : n \in \omega\}, \text{ se } \xi \in L_1 \setminus \omega$$

e

$$\varphi^{-1}(y_\xi, 0) = p_\xi - \lim\{\varphi^{-1}(h_\xi(n)) : n \in \omega\}, \text{ se } \xi \in \cup_{n\in D} L_n \setminus \omega.$$

Em particular, temos que

$$\mathcal{F}(G, \{\varphi^{-1}(0, \chi_n) : n \in \omega\}, \varphi^{-1}(0, \chi_\omega)) \subset p_\omega.$$

De fato, se $A \in \mathcal{F}(G, \{\varphi^{-1}(0, \chi_n) : n \in \omega\}, \varphi^{-1}(0, \chi_\omega))$, então existe U vizinhança aberta de $\varphi^{-1}(0, \chi_\omega)$ em G tal que $\{n \in \omega : \varphi^{-1}(h_\omega(n)) \in U\} \subset A$. Como $\varphi^{-1}(0, \chi_\omega) = p_\omega - \lim\{\varphi^{-1}(h_\omega(n)) : n \in \omega\}$, temos que $\{n \in \omega : \varphi^{-1}(h_\omega(n)) \in U\} \in p_\omega$ e, portanto, $A \in p_\omega$.

Observamos, ainda, que

$$p_\omega \subset \mathcal{F}(G, \{\varphi^{-1}(0, \chi_n) : n \in \omega\}, \varphi^{-1}(0, \chi_\omega)).$$

Com efeito, sejam $A \in p_\omega$ e $\Omega \subset \mathbb{T}^{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)}\oplus\mathbb{Q}^{(P_1)}\setminus\{(0,0)\}} \oplus \mathbb{T}^{p_\omega}$ tal que $\mathrm{proj}_{(H,J)}(\Omega) = \mathbb{T}$ para todo $(H, J) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(P_0\times\omega)} \oplus \mathbb{Q}^{(P_1)} \setminus \{(0, 0)\}$, $\mathrm{proj}_{\tilde{A}}(\Omega) = \mathbb{T}$ para todo $\tilde{A} \in p_\omega \setminus \{A\}$ e $\mathrm{proj}_A(\Omega) = \Omega_A$. Temos que $\Psi(0, \chi_\omega) \in \Omega$ e $\{n \in \omega : \varphi^{-1}(h_\omega(n)) \in \varphi^{-1} \circ \Psi^{-1}(\Omega)\} = \{n \in \omega : \Psi(h_\omega(n)) \in \Omega\} = \{n \in \omega : \Psi(h_\omega(n))(A) \in \mathrm{proj}_A(\Omega)\} = \{n \in \omega : \phi_A(h_\omega(n)) \in \Omega_A\} = A$. Logo, $A \in \mathcal{F}(G, \{\varphi^{-1}(0, \chi_n) : n \in \omega\}, \varphi^{-1}(0, \chi_\omega))$.

Assim, $\mathcal{F}(G, \{\varphi^{-1}(0, \chi_n) : n \in \omega\}, \varphi^{-1}(0, \chi_\omega)) = p_\omega \notin \cup_{\alpha<\kappa}\mathcal{F}(X_\alpha)$, o que implica que o grupo topológico (G, τ) não é homeomorfo a (X_α, τ_α), qualquer que seja $\alpha < \kappa$. Temos, portanto, o seguinte resultado.

Teorema 6.3.2. *Se G é um grupo abeliano de não torção e cardinalidade $\mathfrak{c}$ que admite uma topologia de grupo enumeravelmente compacta, então G admite $2^{\mathfrak{c}}$ topologias enumeravelmente compactas (duas a duas não homeomorfas) que o tornam um grupo topológico.* □

CAPÍTULO 7

Construindo uma topologia de grupo no grupo abeliano livre de cardinalidade $\mathfrak{c}$ que torna seu quadrado enumeravelmente compacto

Neste capítulo, assumiremos a existência de $\mathfrak{c}$ ultrafiltros seletivos dois a dois incomparáveis (segundo a ordem de Rudin-Keisler) para mostrar que o grupo abeliano livre de cardinalidade $\mathfrak{c}$ pode ser munido de uma topologia de grupo que torna seu quadrado enumeravelmente compacto.

Para cada $J \in \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}$ construiremos um homomorfismo de grupos $\phi_J : \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c}\times\omega)} \to \mathbb{T}$ de modo que o produto diagonal da família $\{\phi_J : J \in \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c}\times\omega)} \setminus \{0\}\}$ seja injetor e que a imagem de $\mathbb{Z}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}$ pelo mesmo tenha quadrado enumeravelmente compacto quando munida da topologia de subespaço induzida por $\mathbb{T}^{\mathbb{Q}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}\setminus\{0\}}$. A construção de tais homomorfismos continuará sendo feita em duas etapas: por indução, definiremos ϕ_J em um subgrupo enumerável de $\mathbb{Q}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}$ e, em seguida, o estenderemos convenientemente a $\mathbb{Q}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}$. Em cada passo da indução, aproximaremos os valores de ϕ_J por arcos abertos não vazios de $\mathbb{T}$. Para que isto se torne viável, lidaremos com três famílias de seqüências em $\mathbb{Q}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}$ que possuem liberdade suficiente para terem atribuído a si um ponto de acumulação pré-determinado.

As famílias do tipo A são compostas por algumas seqüências cujos suportes são dois a dois disjuntos. O tratamento que daremos a elas é semelhante ao apresentado nos capítulos anteriores desta tese. São necessárias, contudo, novas idéias para tratar das famílias do tipo B e C, uma vez que estas possuem um par $\{f_0, f_1\}$ de seqüências em $\mathbb{Q}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}$ cujos suportes não são disjuntos e que, portanto, não podem ser tratados independentemente.

Para cada $n \in \omega$, fixaremos $(\theta_n, m_n) \in \operatorname{supp} f_0(n) \cap \operatorname{supp} f_1(n)$ e consideraremos a seqüência $\{a_n : n \in \omega\}$ dada por

$$a_n = \frac{|f_0(n)(\theta_n, m_n)|}{|f_1(n)(\theta_n, m_n)|}.$$

As famílias do tipo B estão relacionadas à convergência da seqüência $\{a_n : n \in \omega\}$ para 0 e as famílias do tipo C estão relacionadas à convergência de $\{a_n : n \in \omega\}$ para um número irracional. No primeiro caso, trataremos de f_0 e f_1 separadamente, enquanto no segundo, usaremos o teorema de Kronecker para lidar simultaneamente com ambas.

Se a seqüência $\{a_n : n \in \omega\}$ convergir para um número racional não nulo, usaremos a caracterização das soluções gerais de equações diofantinas lineares em duas variáveis para obter uma família do tipo A ou teremos de escrever uma combinação linear de elementos de $\mathbb{Z}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}$ com coeficientes racionais. É por esta razão que trabalhamos com seqüências em $\mathbb{Q}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}$ em vez de $\mathbb{Z}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}$.

7.1 Uma escolha adequada de seqüências

Se $J \in \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}$, então

$$J = \sum_{(\mu,k)\in\operatorname{supp} J} J(\mu, k) \cdot \chi_{(\mu,k)}$$

onde $\chi_{(\mu,k)} : \mathfrak{c} \times \omega \to \mathbb{Q}$ é tal que

$$\chi_{(\mu,k)}(\xi, n) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad (\xi, n) = (\mu, k) \\ 0 & \text{se} \quad (\xi, n) \neq (\mu, k). \end{cases}$$

Se $(\mu, k) \in \operatorname{supp} J$, podemos escrever

$$J(\mu, k) = \frac{p(J, (\mu, k))}{q(J, (\mu, k))}$$

onde $p(J, (\mu, k)), q(J, (\mu, k)) \in \mathbb{Z}$, $q(J, (\mu, k)) > 0$ e $\operatorname{mdc}(p(J, (\mu, k)), q(J, (\mu, k))) = 1$. Seja

$$b(J) = \operatorname{mmc}\{q(J, (\mu, k)) : (\mu, k) \in \operatorname{supp} J\}$$

e, para cada $(\mu, k) \in \operatorname{supp} J$, seja

$$a(J,(\mu,k)) = p(J,(\mu,k)) \cdot \frac{b(J)}{q(J,(\mu,k))}.$$

Seja, ainda,

$$|a(J)| = \max\{|a(J,(\mu,k))| : (\mu,k) \in \operatorname{supp} J\}.$$

Por fim, se $X \subset \mathfrak{c} \times \omega$, então

$$\pi_1[X] = \{\xi < \mathfrak{c} : \exists n \in \omega \text{ tal que } (\xi, n) \in X\}$$

e

$$\pi_2[X] = \{n \in \omega : \exists \xi < \mathfrak{c} \text{ tal que } (\xi, n) \in X\}.$$

Definição 7.1.1. *Seja $f : \omega \to \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}$. Dizemos que f é* do tipo 1 *se* $\operatorname{supp} f(n) \setminus \cup_{m<n} \operatorname{supp} f(m) \neq \emptyset$ *para cada $n \in \omega$. Dizemos que f é* do tipo 2 *se $|f(n)| > n$ para cada $n \in \omega$, onde* $|f(n)| = \max\{|f(n)(\mu,k)| : (\mu,k) \in \operatorname{supp} f(n)\}$.

A proposição abaixo encontra-se em [30]. Como sua demonstração é curta, optamos por reproduzi-la aqui.

Proposição 7.1.2. *[30] Se $f : \omega \to \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}$, então existe $j : \omega \to \omega$ estritamente crescente tal que $f \circ j$ é constante ou é de um dos tipos acima mencionados.*

Demonstração. Há três casos a serem considerados.

Caso 1: $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f(n)$ é infinito.

Seja $n_0 = 0$. Fixemos $k \in \omega$ e suponhamos definidos $n_0, n_1, ..., n_k$. Uma vez que $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f(n)$ é infinito, existe um número natural $n_{k+1} > n_k$ tal que $\operatorname{supp} f(n_{k+1}) \setminus \cup_{l<k+1} \operatorname{supp} f(n_l) \neq \emptyset$. Temos que

$$\begin{array}{rccc} j: & \omega & \to & \omega \\ & k & \mapsto & n_k \end{array}$$

é uma função estritamente crescente tal que $f \circ j$ é do tipo 1.

Caso 2: $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f(n)$ é finito e $\{|f(n)| : n \in \omega\}$ é ilimitado.

Por indução, tomemos $\{n_k : k \in \omega\}$ uma seqüência estritamente crescente de números

naturais tal que $|f(n_k)| > k$, para todo $k \in \omega$. Temos que

$$\begin{array}{rccc} j: & \omega & \to & \omega \\ & k & \mapsto & n_k \end{array}$$

é uma função estritamente crescente tal que $f \circ j$ é do tipo 2.

Caso 3: $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f(n)$ é finito e $\{|f(n)| : n \in \omega\}$ é limitado.

Temos que $\{f(n) : n \in \omega\}$ é um conjunto finito e, portanto, f possui uma subseqüência constante. □

Definição 7.1.3. *Seja $F = \{f_0, ..., f_k\}$ uma família finita de seqüências em $\mathbb{Q}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}$. Dizemos que F é* do tipo A *se:*

- *$f_i(n) \in \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}$ para todo $n \in \omega$ e todo $i \in \{0, ..., k\}$;*
- *f_i é do tipo 1 ou 2, para todo $i \in \{0, ..., k\}$;*
- $\operatorname{supp} f_i(n) \cap \operatorname{supp} f_j(n) = \emptyset$ *para todo $n \in \omega$ e para quaisquer $i, j \in \{0, ..., k\}$ com $i \neq j$.*

Se F é do tipo A, façamos $d(F) = 1$. Dizemos que F é do tipo B *se:*

- *$f_i(n) \in \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}$ para todo $n \in \omega$ e todo $i \in \{2, ..., k\}$;*
- *f_i é do tipo 1 ou 2, para todo $i \in \{2, ..., k\}$;*
- *$f_0(n) = \frac{1}{d(F)} \cdot \tilde{f}_0(n)$ e $f_1(n) = \frac{1}{d(F)} \cdot \tilde{f}_1(n)$ para cada $n \in \omega$, onde $\tilde{f}_0 : \omega \to \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}$ é do tipo 1 ou 2, $\tilde{f}_1 : \omega \to \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}$ é do tipo 1 ou 2 e $d(F)$ é um inteiro positivo;*
- $\operatorname{supp} f_0(n) \subset \operatorname{supp} f_1(n)$, *para todo $n \in \omega$;*
- $\operatorname{supp} f_i(n) \cap \operatorname{supp} f_j(n) = \emptyset$ *para todo $n \in \omega$ e para quaisquer $i, j \in \{2, ..., k\}$ com $i \neq j$;*
- $\operatorname{supp} f_i(n) \cap \operatorname{supp} f_j(n) = \emptyset$ *para todo $n \in \omega$, para todo $i \in \{0, 1\}$ e todo $j \in \{2, ..., k\}$;*
- *Para cada $n \in \omega$, existe $(\theta_n, m_n) \in \operatorname{supp} f_0(n)$ tal que a seqüência*

$$\left\{ \frac{f_0(n)(\theta_n, m_n)}{f_1(n)(\theta_n, m_n)} : n \in \omega \right\}$$

é estritamente monótona e converge para 0.

Dizemos que F é do tipo C *se:*

- $f_i(n) \in \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}$ *para todo* $n \in \omega$ *e todo* $i \in \{0, ..., k\}$*;*
- f_i *é do tipo 1 ou 2, para todo* $i \in \{0, ..., k\}$*;*
- $\operatorname{supp} f_0(n) = \operatorname{supp} f_1(n)$*, para todo* $n \in \omega$*;*
- $\operatorname{supp} f_i(n) \cap \operatorname{supp} f_j(n) = \emptyset$ *para todo* $n \in \omega$ *e para quaisquer* $i, j \in \{2, ..., k\}$ *com* $i \neq j$*;*
- $\operatorname{supp} f_i(n) \cap \operatorname{supp} f_j(n) = \emptyset$ *para todo* $n \in \omega$*, para todo* $i \in \{0, 1\}$ *e todo* $j \in \{2, ..., k\}$*;*
- *Para cada* $n \in \omega$*, existe* $(\theta_n, m_n) \in \operatorname{supp} f_0(n)$ *tal que a seqüência*

$$\left\{ \frac{f_0(n)(\theta_n, m_n)}{f_1(n)(\theta_n, m_n)} : n \in \omega \right\}$$

  é estritamente monótona e converge para algum $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$*.*

Se F é do tipo C, façamos $d(F) = 1$*.*

O conjunto $\mathcal{F}$ de todas as famílias do tipo A, B ou C nos permite recuperar uma subseqüência de um par qualquer de seqüências em $\mathbb{Z}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}$.

Proposição 7.1.4. *Sejam* $g, h : \omega \to \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}$*. Existem* $F \in \mathcal{F}$*,* $j : \omega \to \omega$ *estritamente crescente e* $\tilde{g}, \tilde{h} \in \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}$ *tais que* $(g \circ j)(n) = \tilde{g} + \sum_{f\in F} a_f f(n)$ *e* $(h \circ j)(n) = \tilde{h} + \sum_{f\in F} b_f f(n)$ *para todo* $n \in \omega$*, onde* $a_f, b_f \in \mathbb{Z}$ *para todo* $f \in F$*.*

Demonstração. Consideremos $g_0, g_1, h_0, h_1 : \omega \to \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}$ dadas por

$$g_0(n) = \sum_{(\mu,k)\in \operatorname{supp} g(n)\setminus \operatorname{supp} h(n)} g(n)(\mu, k) \cdot \chi_{(\mu,k)},$$

$$g_1(n) = \sum_{(\mu,k)\in \operatorname{supp} g(n)\cap \operatorname{supp} h(n)} g(n)(\mu, k) \cdot \chi_{(\mu,k)},$$

$$h_0(n) = \sum_{(\mu,k)\in \operatorname{supp} h(n)\setminus \operatorname{supp} g(n)} h(n)(\mu, k) \cdot \chi_{(\mu,k)}$$

e

$$h_1(n) = \sum_{(\mu,k)\in \operatorname{supp} h(n)\cap \operatorname{supp} g(n)} h(n)(\mu, k) \cdot \chi_{(\mu,k)}.$$

Temos que $g(n) = g_0(n) + g_1(n)$ e $h(n) = h_0(n) + h_1(n)$, para todo $n \in \omega$.

Da proposição 7.1.2 segue que existe $j_1 : \omega \to \omega$ estritamente crescente tal que $g_0 \circ j_1$, $g_1 \circ j_1$, $h_0 \circ j_1$ e $h_1 \circ j_1$ são do tipo 1, 2, ou constante. Se $g_1 \circ j_1$ ou $h_1 \circ g_1$ for constante, é possível tomar $F \in [{}^{\omega}\mathbb{Q}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}]^{<\omega}$ do tipo A e $\tilde{g}, \tilde{h} \in \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}$ tais que $(g \circ j_1)(n) = \tilde{g} + \sum_{f\in F} a_f f(n)$ e $(h \circ j_1)(n) = \tilde{h} + \sum_{f\in F} b_f f(n)$ para todo $n \in \omega$, onde $a_f, b_f \in \mathbb{Z}$ para todo $f \in F$. Podemos, portanto, supor que $g_1 \circ j_1$ e $h_1 \circ g_1$ são do tipo 1 ou 2.

Seja

$$A = \left\{ \frac{(g_1 \circ j_1)(n)(\mu, k)}{(h_1 \circ j_1)(n)(\mu, k)} : (\mu, k) \in \operatorname{supp}(g_1 \circ j_1)(n) = \operatorname{supp}(h_1 \circ j_1)(n), n \in \omega \right\}.$$

Se A é finito — digamos $A = \left\{\frac{p_0}{q_0}, ..., \frac{p_k}{q_k}\right\}$, onde $p_i, q_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $q_i > 0$ e $\operatorname{mdc}(p_i, q_i) = 1$ para todo $i \in \{0, ..., k\}$ — consideremos

$$g_{1,i}(n) = \sum_{\substack{(\mu,k)\in\operatorname{supp}(g_1\circ j_1)(n),\\ \frac{(g_1\circ j_1)(n)(\mu,k)}{(h_1\circ j_1)(n)(\mu,k)}=\frac{p_i}{q_i}}} (g_1 \circ j_1)(n)(\mu, k) \cdot \chi_{(\mu,k)}$$

e

$$h_{1,i}(n) = \sum_{\substack{(\mu,k)\in\operatorname{supp}(h_1\circ j_1)(n),\\ \frac{(g_1\circ j_1)(n)(\mu,k)}{(h_1\circ j_1)(n)(\mu,k)}=\frac{p_i}{q_i}}} (h_1 \circ j_1)(n)(\mu, k) \cdot \chi_{(\mu,k)}$$

para cada $n \in \omega$ e cada $i \in \{0, ..., k\}$. Note que

$$(g_1 \circ j_1)(n) = \sum_{i=0}^{k} g_{1,i}(n)$$

e

$$(h_1 \circ j_1)(n) = \sum_{i=0}^{k} h_{1,i}(n).$$

Se $i \in \{0, ..., k\}$ e $n \in \omega$, então $\operatorname{supp} g_{1,i}(n) = \operatorname{supp} h_{1,i}(n)$. Além disso,

$$\frac{g_{1,i}(n)(\mu, k)}{h_{1,i}(n)(\mu, k)} = \frac{p_i}{q_i}$$

para cada $(\mu, k) \in \operatorname{supp} g_{1,i}(n) = \operatorname{supp} h_{1,i}(n)$. Como $\operatorname{mdc}(p_i, q_i) = 1$, temos que $q_i \mid h_{1,i}(n)(\mu, k)$

para todo $(\mu, k) \in \operatorname{supp} g_{1,i}(n) = \operatorname{supp} h_{1,i}(n)$. Seja $f_i : \omega \to \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}$ dada por

$$f_i(n)(\mu, k) = \frac{h_{1,i}(n)(\mu, k)}{q_i}$$

para cada $(\mu, k) \in \mathfrak{c} \times \omega$ e cada $n \in \omega$. Temos que

$$(g_1 \circ j_1)(n) = \sum_{i=0}^{k} p_i \cdot f_i(n)$$

e

$$(h_1 \circ j_1)(n) = \sum_{i=0}^{k} q_i \cdot f_i(n).$$

Tomemos $j_2 : \omega \to \omega$ estritamente crescente tal que $f_i \circ j_2$ é do tipo 1, 2 ou constante, para cada $i \in \{0, ..., k\}$. Dado $i \in \{0, ..., k\}$, definimos $s_i = f_i \circ j_2$. Sejam $s_{k+1} = g_0 \circ j_1 \circ j_2$ e $s_{k+2} = h_0 \circ j_1 \circ j_2$. Consideremos $\{n_0, ..., n_l\}$ uma enumeração estritamente crescente do conjunto $I = \{i \in \{0, ..., k\} : s_i \text{ não é constante}\}$. Se s_{k+1} e s_{k+2} são constantes, façamos $F = \{s_{n_i} : 0 \leq i \leq l\}$; se s_{k+1} é constante e s_{k+2} não é constante, façamos $F = \{s_{n_i} : 0 \leq i \leq l\} \cup \{s_{k+2}\}$; se s_{k+1} não é constante e s_{k+2} é constante, façamos $F = \{s_{n_i} : 0 \leq i \leq l\} \cup \{s_{k+1}\}$; se s_{k+1} e s_{k+2} não são constantes, façamos $F = \{s_{n_i} : 0 \leq i \leq l\} \cup \{s_{k+1}\} \cup \{s_{k+2}\}$. Temos que F é do tipo A e, portanto, pertence a $\mathcal{F}$. Observamos que

$$(g \circ j_1 \circ j_2)(n) = \sum_{i \in \{0,...,k\} \setminus I} s_i(0) + s_{k+1}(n) + \sum_{i=0}^{l} p_{n_i} \cdot s_{n_i}$$

e

$$(h \circ j_1 \circ j_2)(n) = \sum_{i \in \{0,...,k\} \setminus I} s_i(0) + s_{k+2}(n) + \sum_{i=0}^{l} q_{n_i} \cdot s_{n_i}$$

para todo $n \in \omega$.

Se A é infinito, existem $j_2 : \omega \to \omega$ estritamente crescente e $\{(\theta_n, m_n) : n \in \omega\} \subset \mathfrak{c} \times \omega$ tais que $g_1 \circ j_1 \circ j_2$ e $h_1 \circ j_1 \circ j_2$ são do tipo 1 ou 2, $(\theta_n, m_n) \in \operatorname{supp}(g_1 \circ j_1 \circ j_2)(n) \cap \operatorname{supp}(h_1 \circ j_1 \circ j_2)(n)$ para todo $n \in \omega$,

$$\frac{(g_1 \circ j_1 \circ j_2)(n)(\theta_n, m_n)}{(h_1 \circ j_1 \circ j_2)(n)(\theta_n, m_n)} \to \zeta$$

para algum $\zeta \in [-\infty, +\infty]$, com

$$\left\{ \frac{(g_1 \circ j_1 \circ j_2)(n)(\theta_n, m_n)}{(h_1 \circ j_1 \circ j_2)(n)(\theta_n, m_n)} : n \in \omega \right\}$$

estritamente monótona.

Se $\zeta = 0$, consideremos $s_0 = g_1 \circ j_1 \circ j_2$, $s_1 = h_1 \circ j_1 \circ j_2$, $s_2 = g_0 \circ j_1 \circ j_2$ e $s_3 = h_0 \circ j_1 \circ j_2$. Seja $I = \{i \in \{0,1,2,3\} : s_i \text{ não é constante}\}$. Observe que $0, 1 \in I$. Se $2, 3 \in I$, então $F = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ é do tipo B e, portanto, pertence a $\mathcal{F}$. Tomemos $j = j_1 \circ j_2$ e $\tilde{g} = \tilde{h} = 0$. Temos que $(g \circ j)(n) = s_0(n) + s_2(n)$ e $(h \circ j)(n) = s_1(n) + s_3(n)$ para todo $n \in \omega$. Se $2 \in I$ e $3 \notin I$, façamos $F = \{s_0, s_1, s_2\}$, $j = j_1 \circ j_2$, $\tilde{g} = 0$ e $\tilde{h} = s_3(0)$. Se $2 \notin I$ e $3 \in I$, façamos $F = \{s_0, s_1, s_3\}$, $j = j_1 \circ j_2$, $\tilde{g} = s_2(0)$ e $\tilde{h} = 0$. Por fim, se $2, 3 \notin I$, façamos $F = \{s_0, s_1\}$, $j = j_1 \circ j_2$, $\tilde{g} = s_2(0)$ e $\tilde{h} = s_3(0)$.

Se $\zeta = -\infty$ ou $\zeta = +\infty$, então

$$\frac{(h_1 \circ j_1 \circ j_2)(n)(\theta_n, m_n)}{(g_1 \circ j_1 \circ j_2)(n)(\theta_n, m_n)} \to 0.$$

Procedamos, agora, como no caso $\zeta = 0$.

Se $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, consideremos $s_0 = g_1 \circ j_1 \circ j_2$, $s_1 = h_1 \circ j_1 \circ j_2$, $s_2 = g_0 \circ j_1 \circ j_2$ e $s_3 = h_0 \circ j_1 \circ j_2$. Seja $I = \{i \in \{0,1,2,3\} : s_i \text{ não é constante}\}$. Observe que $0, 1 \in I$. Se $2, 3 \in I$, então $F = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ é do tipo C e, portanto, pertence a $\mathcal{F}$. Tomemos $j = j_1 \circ j_2$ e $\tilde{g} = \tilde{h} = 0$. Temos que $(g \circ j)(n) = s_0(n) + s_2(n)$ e $(h \circ j)(n) = s_1(n) + s_3(n)$ para todo $n \in \omega$. Os outros casos ($2 \in I$ e $3 \notin I$, $2 \notin I$ e $3 \in I$, $2, 3 \notin I$) são tratados de maneira análoga.

Se $\zeta \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, então $\zeta = \frac{p}{q}$, onde $p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $q > 0$ e $\text{mdc}(p, q) = 1$. Consideremos

$$r_0(n) = \frac{q \cdot (g_1 \circ j_1 \circ j_2)(n) - p \cdot (h_1 \circ j_1 \circ j_2)(n)}{q}$$

e

$$r_1(n) = \frac{(h_1 \circ j_1 \circ j_2)(n)}{q}$$

para cada $n \in \omega$. Além disso, sejam $r_2 = g_0 \circ j_1 \circ j_2$ e $r_3 = h_0 \circ j_1 \circ j_2$. Existe $j_3 : \omega \to \omega$ estritamente crescente tal que

$$n \mapsto q \cdot (g_1 \circ j_1 \circ j_2 \circ j_3)(n) - p \cdot (h_1 \circ j_1 \circ j_2 \circ j_3)(n)$$

é do tipo 1, 2 ou constante. Se tal seqüência for do tipo 1 ou 2, façamos $\tilde{s}_0 = q \cdot (g_1 \circ j_1 \circ j_2 \circ j_3) - p \cdot (h_1 \circ j_1 \circ j_2 \circ j_3)$, $\tilde{s}_1 = h_1 \circ j_1 \circ j_2 \circ j_3$, $s_2 = r_2 \circ j_3$ e $s_3 = r_3 \circ j_3$. Seja $I = \{i \in \{2,3\} : s_i \text{ não é constante}\}$. Se $2,3 \in I$, então $F = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ é do tipo B, onde $s_0(n) = \frac{1}{q} \cdot \tilde{s}_0(n)$ e $s_1(n) = \frac{1}{q} \cdot \tilde{s}_1(n)$ para todo $n \in \omega$. Tomemos $j = j_1 \circ j_2 \circ j_3$, $\tilde{g} = 0$ e $\tilde{h} = 0$. Temos que $(g \circ j)(n) = s_0(n) + p \cdot s_1(n) + s_2(n)$ e $(h \circ j)(n) = q \cdot s_1(n) + s_3(n)$ para todo $n \in \omega$. Os outros casos ($2 \in I$ e $3 \notin I$, $2 \notin I$ e $3 \in I$, $2,3 \notin I$) são tratados de maneira análoga.

Se a seqüência

$$n \mapsto q \cdot (g_1 \circ j_1 \circ j_2 \circ j_3)(n) - p \cdot (h_1 \circ j_1 \circ j_2 \circ j_3)(n)$$

é constante, existe $J \in \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c} \times \omega)}$ tal que

$$q \cdot (g_1 \circ j_1 \circ j_2 \circ j_3)(n)(\mu, k) - p \cdot (h_1 \circ j_1 \circ j_2 \circ j_3)(n)(\mu, k) = J(\mu, k)$$

para todo $(\mu, k) \in \mathfrak{c} \times \omega$ e todo $n \in \omega$.

Fixemos $(\mu, k) \in \mathfrak{c} \times \omega$. Como $\mathrm{mdc}(p, q) = 1$, a equação diofantina $qx - py = J(\mu, k)$ tem infinitas soluções. Se $x = x_{(\mu,k)}$, $y = y_{(\mu,k)}$ é uma solução particular da mesma, então todas as suas soluções são da forma $x = x_{(\mu,k)} - pt$, $y = y_{(\mu,k)} - qt$, para $t \in \mathbb{Z}$. Logo, para cada $n \in \omega$ e cada $(\mu, k) \in \mathrm{supp}(g_1 \circ j_1 \circ j_2 \circ j_3)(n) = \mathrm{supp}(g_1 \circ j_1 \circ j_2 \circ j_3)(n)$, existe $t_{n,(\mu,k)} \in \mathbb{Z}$ tal que

$$(g_1 \circ j_1 \circ j_2 \circ j_3)(n)(\mu, k) = x_{(\mu,k)} - pt_{n,(\mu,k)}$$

e

$$(h_1 \circ j_1 \circ j_2 \circ j_3)(n)(\mu, k) = y_{(\mu,k)} - qt_{n,(\mu,k)}.$$

Observe que se $(\mu, k) \notin \mathrm{supp}\, J$, podemos tomar $x_{(\mu,k)} = 0$, $y_{(\mu,k)} = 0$. Destacamos, ainda, que se $p, q > 0$, então é possível tomar $x_{(\mu,k)}, y_{(\mu,k)} \geq 0$.[1] Portanto, para cada $n \in \omega$, temos que

$$(g_1 \circ j_1 \circ j_2 \circ j_3)(n) = \sum_{(\mu,k) \in \mathrm{supp}\, J} x_{(\mu,k)} \cdot \chi_{(\mu,k)} + p \cdot \sum_{(\mu,k) \in \mathrm{supp}(g_1 \circ j_1 \circ j_2 \circ j_3)(n)} -t_{n,(\mu,k)} \cdot \chi_{(\mu,k)}$$

e

$$(h_1 \circ j_1 \circ j_2 \circ j_3)(n) = \sum_{(\mu,k) \in \mathrm{supp}\, J} y_{(\mu,k)} \cdot \chi_{(\mu,k)} + q \cdot \sum_{(\mu,k) \in \mathrm{supp}(h_1 \circ j_1 \circ j_2 \circ j_3)(n)} -t_{n,(\mu,k)} \cdot \chi_{(\mu,k)}.$$

[1] Isto será importante na construção de um semigrupo de Wallace cujo quadrado é enumeravelmente compacto.

Além disso,

$$n \mapsto \sum_{(\mu,k)\in \operatorname{supp} J} x_{(\mu,k)} \cdot \chi_{(\mu,k)}$$

e

$$n \mapsto \sum_{(\mu,k)\in \operatorname{supp} J} y_{(\mu,k)} \cdot \chi_{(\mu,k)}$$

são constantes.

Tomemos $j_4 : \omega \to \omega$ estritamente crescente tal que a seqüência $s_0 : \omega \to \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}$ dada por

$$s_0(n) = \sum_{(\mu,k)\in \operatorname{supp}(g_1\circ j_1\circ j_2\circ j_3\circ j_4)(n)} -t_{n,(\mu,k)} \cdot \chi_{(\mu,k)}$$

seja do tipo 1 ou 2 e definamos $j = j_1 \circ j_2 \circ j_3 \circ j_4$, $\tilde{g} = \sum_{(\mu,k)\in \operatorname{supp} J} x_{(\mu,k)} \cdot \chi_{(\mu,k)}$, $\tilde{h} = \sum_{(\mu,k)\in \operatorname{supp} J} y_{(\mu,k)} \cdot \chi_{(\mu,k)}$, $s_1 = g_0 \circ j$ e $s_2 = h_0 \circ j$. Consideremos $I = \{i \in \{1,2\} : s_i$ não é constante$\}$. Se $1,2 \in I$, então $F = \{s_0, s_1, s_2\}$ é do tipo A e, portanto, pertence a $\mathcal{F}$. Além disso, $(g \circ j)(n) = \tilde{g} + p \cdot s_0(n) + s_1(n)$ e $(h \circ j)(n) = \tilde{h} + q \cdot s_0(n) + s_2(n)$ para todo $n \in \omega$. Os outros casos ($1 \in I$ e $2 \notin I$, $1 \notin I$ e $2 \in I$, $1,2 \notin I$) são tratados de maneira análoga. □

Proposição 7.1.5. *Existe* $\{F_\xi : 0 < \xi < \mathfrak{c}\}$ *uma indexação de* $\mathcal{F}$ *tal que* $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f(n) \subset \xi \times \omega$, *para toda* $f \in F_\xi$ *e todo* $\xi \in]0, \mathfrak{c}[$.

Demonstração. Observamos, primeiramente, que $|\mathcal{F}| = \mathfrak{c}^\omega = \mathfrak{c}$. Portanto, podemos considerar $\{\tilde{F}_\xi : 0 < \xi < \mathfrak{c}\}$ uma indexação de $\mathcal{F}$ tal que, para cada $F \in \mathcal{F}$, o conjunto

$$A_F = \{\xi \in]0, \mathfrak{c}[: F = \tilde{F}_\xi\}$$

tenha cardinalidade $\mathfrak{c}$.

Fixemos $F \in \mathcal{F}$. Como $\cup_{f\in F} \cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f(n) \subset \mathfrak{c} \times \omega$, $\operatorname{cf}(\mathfrak{c}) > \omega$ e $|\cup_{f\in F} \cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f(n)| \leq \omega$, existe $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $\cup_{f\in F} \cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f(n) \subset \alpha \times \omega$. Seja $\xi \in A_F$. Se $\xi < \alpha$, façamos $F_\xi = \{f\}$, onde $f(n) = (n+1) \cdot \chi_{(0,0)}$. Temos que f é do tipo 2 e, portanto, F_ξ é do tipo A. Em particular, $F_\xi \in \mathcal{F}$. Se $\xi \geq \alpha$, façamos $F_\xi = \tilde{F}_\xi$.

Vê-se facilmente que $\{F_\xi : 0 < \xi < \mathfrak{c}\}$ é uma indexação de $\mathcal{F}$ tal que $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f(n) \subset \xi \times \omega$, para toda $f \in F_\xi$ e todo $\xi \in]0, \mathfrak{c}[$. □

Se $\xi \in]0, \mathfrak{c}[$, denotaremos por $n(F_\xi)$ a cardinalidade de F_ξ e escreveremos $F_\xi =$

$\{f_{\xi,0}, ..., f_{\xi,n(F_\xi)-1}\}$. Se F_ξ é do tipo C, o limite da seqüência

$$\left\{\frac{f_{\xi,0}(n)(\theta_n, m_n)}{f_{\xi,1}(n)(\theta_n, m_n)} : n \in \omega\right\}$$

será denotado por ζ_ξ.

Seja $\zeta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Do teorema de Kronecker segue que $\{(x+\mathbb{Z}, \zeta x+\mathbb{Z}) : x \in \mathbb{R}\}$ é um subconjunto denso do toro $\mathbb{T}^2$. Portanto, para cada $\epsilon > 0$, existe $l_\zeta(\epsilon) > 0$ de modo que $\{(x+\mathbb{Z}, \zeta x+\mathbb{Z}) : x \in I\}$ é ϵ-denso no toro $\mathbb{T}^2$, para todo I intervalo aberto de $\mathbb{R}$ de comprimento maior ou igual a $l_\zeta(\epsilon)$. Podemos supor que se $\epsilon_1 \leq \epsilon_2$, então $l_\zeta(\epsilon_1) \geq l_\zeta(\epsilon_2)$.

7.2 Construindo homomorfismos de grupos

Sejam $\{p_\xi : 0 < \xi < \mathfrak{c}\}$ uma família de ultrafiltros seletivos dois a dois incomparáveis e $\{F_\xi : 0 < \xi < \mathfrak{c}\}$ uma indexação de $\mathcal{F}$ tal que $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f_{\xi,j}(n) \subset \xi \times \omega$ para todo $j < n(F_\xi)$ e todo $\xi \in]0, \mathfrak{c}[$.

Proposição 7.2.1. *Seja $J \in \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c}\times\omega)} \setminus \{0\}$. Existe $E \in [\mathfrak{c}]^\omega$ de modo que $\operatorname{supp} J \subset E \times \omega$ e tal que se $\xi \in E \setminus \{0\}$, então $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f_{\xi,j}(n) \subset E \times \omega$, para todo $j < n(F_\xi)$.*

Demonstração. Façamos $E(0) = \omega$. Se $\xi \in]0, \mathfrak{c}[$, definimos indutivamente

$$E(\xi) = \{\xi\} \cup \bigcup_{\mu\in X_\xi} E(\mu)$$

onde

$$X_\xi = \pi_1[\cup_{j<n(F_\xi)} \cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f_{\xi,j}(n)].$$

Seja

$$E = \cup_{\zeta\in\pi_1[\operatorname{supp} J]} E(\zeta).$$

Temos que $\operatorname{supp} J \subset E \times \omega$, uma vez que $\zeta \in E(\zeta) \subset E$, qualquer que seja $\zeta \in \pi_1[\operatorname{supp} J]$. Além disso, um argumento indutivo garante que $E(\xi) \in [\mathfrak{c}]^\omega$, para todo $\xi < \mathfrak{c}$ e, portanto, $E \in [\mathfrak{c}]^\omega$. Por fim, se $\xi \in E \setminus \{0\}$, então existe $\zeta \in \pi_1[\operatorname{supp} J]$ tal que $\xi \in E(\zeta)$. Um outro argumento indutivo garante que se $\alpha \in E(\beta)$, então $E(\alpha) \subset E(\beta)$, quaisquer que sejam $\alpha, \beta < \mathfrak{c}$. Logo, $\pi_1[\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f_{\xi,j}(n)] \subset E(\xi) \subset E(\zeta) \subset E$, para todo $j < n(F_\xi)$. □

Lema 7.2.2. *Sejam $J \in \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c}\times\omega)} \setminus \{0\}$ e $E \in [\mathfrak{c}]^\omega$ de modo que $\operatorname{supp} J \subset E \times \omega$ e tal que se $\xi \in E \setminus \{0\}$, então $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f_{\xi,j}(n) \subset E \times \omega$, para todo $j < n(F_\xi)$. Existe $\{E_k : k \in \omega\}$ uma*

família de subconjuntos finitos de E, $\{e_k : k \in \omega\}$ e $\{b_k : k \in \omega\}$ seqüências estritamente crescentes de números naturais, $\{r_k : k \in \omega\}$ uma seqüência de números reais positivos e $i : \omega \to E \setminus \{0\}$ tais que:

(i) $\operatorname{supp} J \subset E_0 \times e_0$;

(ii) $E \times \omega = \cup_{k\in\omega}(E_k \times e_k)$;

(iii) $i(k) \in E_k$, *para todo* $k \in \omega$;

(iv) $e_k > n(F_{i(k)})$, *para todo* $k \in \omega$;

(v) $(E_{k+1} \times e_{k+1}) \supset (E_k \times e_k) \cup \bigcup\{\operatorname{supp} f_{i(m),j}(b_m) : j < n(F_{i(m)}), m \leq k\}$, *para todo* $k \in \omega$;

(vi) $\{b_k : k \in i^{-1}(\{\xi\})\} \in p_\xi$, *para todo* $\xi \in E \setminus \{0\}$;

(vii) Se $F_{i(k)}$ *é do tipo A, então:*

- $\operatorname{supp} f_{i(k),j}(b_k) \setminus (E_k \times e_k) \neq \emptyset$, *se* $f_{i(k),j}$ *é do tipo 1 e* $j < n(F_{i(k)})$;
- $|a(f_{i(k),j}(b_k))| \cdot r_k > 4 \cdot d(F_{i(k)})$, *se* $f_{i(k),j}$ *é do tipo 2 e* $j < n(F_{i(k)})$;

(viii) Se $F_{i(k)}$ *é do tipo B, então:*

- $\operatorname{supp} f_{i(k),j}(b_k) \setminus (E_k \times e_k) \neq \emptyset$, *se* $\tilde{f}_{i(k),j}$ *é do tipo 1 e* $j < 2$;
- $|a(f_{i(k),j}(b_k))| \cdot r_k > 4 \cdot d(F_{i(k)})$, *se* $\tilde{f}_{i(k),j}$ *é do tipo 2 e* $j < 2$;
- $\operatorname{supp} f_{i(k),j}(b_k) \setminus (E_k \times e_k) \neq \emptyset$, *se* $f_{i(k),j}$ *é do tipo 1 e* $2 \leq j < n(F_{i(k)})$;
- $|a(f_{i(k),j}(b_k))| \cdot r_k > 4 \cdot d(F_{i(k)})$, *se* $f_{i(k),j}$ *é do tipo 2 e* $2 \leq j < n(F_{i(k)})$;
- $|a(f_{i(k),1}(b_k), (\theta_{b_k}, m_{b_k}))| \cdot r_k > 4 \cdot |a(f_{i(k),0}(b_k), (\theta_{b_k}, m_{b_k}))| \cdot d(F_{i(k)})$;

(ix) Se $F_{i(k)}$ *é do tipo C, então:*

- $\operatorname{supp} f_{i(k),j}(b_k) \setminus (E_k \times e_k) \neq \emptyset$, *se* $f_{i(k),j}$ *é do tipo 1 e* $2 \leq j < n(F_{i(k)})$;
- $|a(f_{i(k),j}(b_k))| \cdot r_k > 4 \cdot d(F_{i(k)})$, *se* $f_{i(k),j}$ *é do tipo 2 e* $2 \leq j < n(F_{i(k)})$;
- $|a(f_{i(k),1}(b_k), (\theta_{b_k}, m_{b_k}))| \cdot r_k > 4 \cdot l_{\zeta_{i(k)}}(\frac{r_k}{8})$;
- $\left|\dfrac{a(f_{i(k),0}(b_k), (\theta_{b_k}, m_{b_k}))}{a(f_{i(k),1}(b_k), (\theta_{b_k}, m_{b_k}))} \cdot l_{\zeta_{i(k)}}\left(\dfrac{r_k}{8}\right) - \zeta_{i(k)} \cdot l_{\zeta_{i(k)}}\left(\dfrac{r_k}{8}\right)\right| < \dfrac{r_k}{8}$;

(x) $r_0 = \dfrac{1}{4 \cdot \sum_{(\xi,n)\in \operatorname{supp} J} |a(J,(\xi,n))|}$;

(xi) $r_{k+1} = \dfrac{r_k}{2 \cdot \sum_{j<n(F_{i(k)})} \sum_{(\xi,n)\in \operatorname{supp} f_{i(k),j}(b_k)} |a(f_{i(k),j}(b_k),(\xi,n))|}$.

Demonstração. Consideremos $\{a_n : n \in \omega\}$ uma enumeração de $E \times \omega$. Seja

$$G_0 = \pi_1[\operatorname{supp} J \cup \{a_0\}]$$

e tomemos $g_0 \in \omega$ tal que $g_0 > \max \pi_2[\operatorname{supp} J \cup \{a_0\}]$. Para cada $n \in \omega$, definimos

$$G_{n+1} = \pi_1[\{a_{n+1}\} \cup \bigcup\{\operatorname{supp} f_{\xi,j}(m) : m \leq n, \xi \in G_n \setminus \{0\}, j < n(F_\xi)\}] \cup G_n$$

e tomemos $g_{n+1} \in \omega$ tal que $g_{n+1} > g_n$,

$$g_{n+1} > \max\{n(F_\xi) : \xi \in G_{n+1} \setminus \{0\}\}$$

e

$$g_{n+1} > \max \pi_2[\{a_{n+1}\} \cup \bigcup\{\operatorname{supp} f_{\xi,j}(m) : m \leq n, \xi \in G_n \setminus \{0\}, j < n(F_\xi)\}].$$

Temos que $\{G_n : n \in \omega\}$ é uma família de subconjuntos finitos de E e $\{g_n : n \in \omega\}$ é uma seqüência estritamente crescente de números naturais tais que:

(1) $\operatorname{supp} J \subset G_0 \times g_0$;

(2) $E \times \omega = \cup_{n\in\omega} G_n \times g_n$;

(3) $(G_{n+1} \times g_{n+1}) \supset (G_n \times g_n) \cup \bigcup\{\operatorname{supp} f_{\xi,j}(m) : m \leq n, \xi \in G_n \setminus \{0\}, j < n(F_\xi)\}$.

Fixemos $\xi \in E \setminus \{0\}$ e $n \in \omega$. Suponhamos, primeiramente, que F_ξ seja do tipo A. Se $j < n(F_\xi)$ e $f_{\xi,j}$ é do tipo 1, definimos

$$A_n^{\xi,j} = \{k \in \omega : \operatorname{supp} f_{\xi,j}(k) \setminus (G_n \times g_n) \neq \emptyset\}.$$

Se $j < n(F_\xi)$ e $f_{\xi,j}$ é do tipo 2, definimos

$$A_n^{\xi,j} = \{k \in \omega : |a(f_{\xi,j}(k))| > 2^{n+4} \cdot d(F_\xi) \cdot X_{n-1}\}$$

onde

$$X_p = \sum_{(\mu,k)\in \operatorname{supp} J} |a(J,(\mu,k))| \cdot \prod_{\substack{l\leq p \\ \zeta\in G_p\setminus\{0\}}} \left(\sum_{j<n(F_\zeta)} \sum_{(\mu,k)\in \operatorname{supp} f_{\zeta,j}(l)} |a(f_{\zeta,j}(l),(\mu,k))| \right)$$

para cada $p \in \omega$ e

$$X_{-1} = \sum_{(\mu,k)\in \operatorname{supp} J} |a(J,(\mu,k))|.$$

Por fim, definimos

$$A_n^\xi = \cap_{j<n(F_\xi)} A_n^{\xi,j}.$$

Suponhamos, agora, que F_ξ seja do tipo B. Se $j < 2$ e $\tilde{f}_{\xi,j}$ é do tipo 1, definimos

$$A_n^{\xi,j} = \{k \in \omega : \operatorname{supp} f_{\xi,j}(k) \setminus (G_n \times g_n) \neq \emptyset\}.$$

Se $j < 2$ e $\tilde{f}_{\xi,j}$ é do tipo 2, definimos

$$A_n^{\xi,j} = \{k \in \omega : |a(f_{\xi,j}(k))| > 2^{n+4} \cdot d(F_\xi) \cdot X_{n-1}\}.$$

Se $2 \leq j < n(F_\xi)$ e $f_{\xi,j}$ é do tipo 1, definimos

$$A_n^{\xi,j} = \{k \in \omega : \operatorname{supp} f_{\xi,j}(k) \setminus (G_n \times g_n) \neq \emptyset\}.$$

Se $2 \leq j < n(F_\xi)$ e $f_{\xi,j}$ é do tipo 2, definimos

$$A_n^{\xi,j} = \{k \in \omega : |a(f_{\xi,j}(k))| > 2^{n+4} \cdot d(F_\xi) \cdot X_{n-1}\}.$$

Seja, também,

$$B_n^\xi = \{k \in \omega : |a(f_{\xi,1}(k),(\theta_k,m_k))| > 2^{n+4} \cdot d(F_\xi) \cdot |a(f_{\xi,0}(k),(\theta_k,m_k))| \cdot X_{n-1}\}.$$

Definimos

$$A_n^\xi = \bigcap_{j<n(F_\xi)} A_n^{\xi,j} \cap B_n^\xi.$$

Finalmente, suponhamos que F_ξ seja do tipo C. Se $2 \leq j < n(F_\xi)$ e $f_{\xi,j}$ é do tipo 1, definimos

$$A_n^{\xi,j} = \{k \in \omega : \operatorname{supp} f_{\xi,j}(k) \setminus (G_n \times g_n) \neq \emptyset\}.$$

Se $2 \leq j < n(F_\xi)$ e $f_{\xi,j}$ é do tipo 2, definimos

$$A_n^{\xi,j} = \{k \in \omega : |a(f_{\xi,j}(k))| > 2^{n+4} \cdot d(F_\xi) \cdot X_{n-1}\}.$$

Façamos

$$A_n^{\xi,1} = \{k \in \omega : |a(f_{\xi,1}(k), (\theta_k, m_k))| > 2^{n+4} \cdot l_{n,\xi} \cdot X_{n-1}\}$$

e

$$C_\xi^n = \left\{k \in \omega : \left|\frac{a(f_{\xi,0}(k), (\theta_k, m_k))}{a(f_{\xi,1}(k), (\theta_k, m_k))} \cdot l_{n,\xi} - \zeta_\xi \cdot l_{n,\xi}\right| \cdot 2^{n+5} \cdot X_{n-1} < 1\right\}$$

onde

$$l_{n,\xi} = l_{\zeta_\xi}\left(\frac{1}{2^{n+5} \cdot X_{n-1}}\right).$$

Definimos

$$A_n^\xi = \bigcap_{1 \leq j < n(F_\xi)} A_n^{\xi,j} \cap C_n^\xi.$$

Observamos que A_n^ξ é um subconjunto cofinito de ω, quaisquer que sejam $n \in \omega$ e $\xi \in E \setminus \{0\}$.[2] Logo, para cada $\xi \in E \setminus \{0\}$, temos que $\{A_n^\xi : n \in \omega\} \subset p_\xi$, uma vez que p_ξ é um ultrafiltro livre sobre ω. Da seletividade de p_ξ decorre que existe uma seqüência $\{a_n^\xi : n \in \omega\} \in p_\xi$ tal que $a_n^\xi \in A_n^\xi$ e $n < a_n^\xi$, para cada $n \in \omega$.

Do lema 1.5.4 segue que existe $\{I_\xi : \xi \in E \setminus \{0\}\}$ uma família de subconjuntos de ω dois a dois disjuntos tal que:

(a) $\{a_n^\xi : n \in I_\xi\} \in p_\xi$, para cada $\xi \in E \setminus \{0\}$;

(b) $\{[n, a_n^\xi] : n \in I_\xi,\ \xi \in E \setminus \{0\}\}$ é uma família de intervalos de ω dois a dois disjuntos.

Para cada $\xi \in E \setminus \{0\}$, seja

(c) $N_\xi = \min\{n \in \omega : \xi \in G_n\}$.

[2] Se F_ξ é do tipo B, então B_n^ξ é um subconjunto cofinito de ω já que $\frac{f_{\xi,0}(k)((\theta_k,m_k))}{f_{\xi,1}(k)((\theta_k,m_k))} \to 0$. Se F_ξ é do tipo C, então $A_n^{\xi,1}$ e C_n^ξ são subconjuntos cofinitos de ω, pois $\frac{f_{\xi,0}(k)((\theta_k,m_k))}{f_{\xi,1}(k)((\theta_k,m_k))} \to \zeta_\xi$ e $\zeta_\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que

(d) $N_\xi < n$, para todo $n \in I_\xi$.

Consideremos $\{n_k : k \in \omega\}$ uma enumeração estritamente crescente de $\dot{\cup}_{\xi \in E\setminus\{0\}} I_\xi$. Seja

$$\begin{array}{rccl} i: & \omega & \to & E \setminus \{0\} \\ & k & \mapsto & i(k) \end{array}$$

onde $i(k)$ é o único elemento de $E \setminus \{0\}$ tal que $n_k \in I_{i(k)}$.

Para cada $k \in \omega$, façamos $b_k = a_{n_k}^{i(k)}$, $E_k = G_{n_k}$, $e_k = g_{n_k}$ e definamos r_k segundo os ítens (x) e (xi) do enunciado deste lema. Resta mostrar que as condições (i)-(ix) estão satisfeitas.

(i) Como $0 \leq n_0$, temos que $E_0 \times e_0 = G_{n_0} \times g_{n_0} \supset G_0 \times g_0 \supset \operatorname{supp} J$.

(ii) $\cup_{k\in\omega}(E_k \times e_k) = \cup_{k\in\omega}(G_{n_k} \times g_{n_k}) = E \times \omega$.

(iii) Seja $k \in \omega$. Temos que $n_k \in I_{i(k)}$. De (d) segue que $N_{i(k)} < n_k$. De (c) e (3) vem que $i(k) \in G_{N_{i(k)}} \subset G_{n_k} = E_k$.

(iv) $e_k = g_{n_k} > \max\{n(F_\xi) : \xi \in G_{n_k} \setminus \{0\}\}$. Como $i(k) \in G_{n_k} \setminus \{0\}$, temos que $e_k > n(F_{i(k)})$.

(v) De (3) vem que $E_{k+1} \times e_{k+1} \supset E_k \times e_k$, pois $\{n_k : k \in \omega\}$ é uma enumeração estritamente crescente de $\cup_{\xi\in E\setminus\{0\}} I_\xi$. Resta mostrar que $\operatorname{supp} f_{i(m),j}(b_m) \subset E_{k+1} \times e_{k+1}$, para cada $m \leq k$ e cada $j < n(F_{i(m)})$. De (3) decorre que

$$E_{k+1}\times e_{k+1} = G_{n_{k+1}}\times g_{n_{k+1}} \supset \bigcup\{\operatorname{supp} f_{\xi,j}(m) : m \leq n_{k+1}-1, \xi \in G_{n_{k+1}-1}\setminus\{0\}, j < n(F_\xi)\}.$$

Por (iii), $i(m) \in E_m \subset E_k = G_{n_k} \subset G_{n_{k+1}-1}$, para todo $m \leq k$. Além disso, $i(m) \neq 0$. Por (b), $b_m = a_{n_m}^{i(m)} \leq n_{k+1} - 1$, para todo $m \leq k$. Logo, $\operatorname{supp} f_{i(m),j}(b_m) \subset E_{k+1} \times e_{k+1}$, para todo $j < n(F_{i(m)})$.

(vi) Seja $\xi \in E \setminus \{0\}$. Temos que $\{b_k : k \in i^{-1}(\{\xi\})\} = \{a_{n_k}^{i(k)} : k \in i^{-1}(\{\xi\})\} = \{a_n^\xi : n \in I_\xi\} \in p_\xi$, por (a).

(vii) Suponhamos que $F_{i(k)}$ seja do tipo A. Temos que $b_k = a_{n_k}^{i(k)} \in A_{n_k}^{i(k)}$. Se $f_{i(k),j}$ é do tipo 1 e $j < n(F_{i(k)})$, então

$$\operatorname{supp} f_{i(k),j}(b_k) \setminus (E_k \times e_k) = \operatorname{supp} f_{i(k),j}(b_k) \setminus (G_{n_k} \times g_{n_k}) \neq \emptyset.$$

Se $f_{i(k),j}$ é do tipo 2 e $j < n(F_{i(k)})$, então

$$|a(f_{i(k),j}(b_k))| > 2^{n_k+4} \cdot d(F_{i(k)}) \cdot X_{n_k-1}$$

onde

$$X_{n_k-1} = \sum_{(\theta,m)\in \operatorname{supp} J} |a(J,(\theta,m))| \cdot \prod_{\substack{l\leq n_k-1 \\ \zeta\in G_{n_k-1}\setminus\{0\}}} \Bigg(\sum_{j<n(F_\zeta)} \sum_{(\theta,m)\in \operatorname{supp} f_{\zeta,j}(l)} |a(f_{\zeta,j}(l),(\theta,m))| \Bigg).$$

Observamos que se $m < k$, então $n_m \leq n_{k-1}$ e, portanto, $i(m) \in E_m = G_{n_m} \subset G_{n_{k-1}} \subset G_{n_k-1}$. Note que $i(m) \neq 0$. Como $b_m = a_{n_m}^{i(m)}$ e $[n_m, a_{n_m}^{i(m)}] \cap [n_k, a_{n_k}^{i(k)}] = \emptyset$, temos que $b_m < n_k$ e, portanto, $b_m \leq n_k - 1$. Logo,

$$|a(f_{i(k),j}(b_k))| \cdot r_k > 4 \cdot d(F_{i(k)}).$$

(viii) Suponhamos que $F_{i(k)}$ seja do tipo B. Os argumentos utilizados em (vii) nos permitem mostrar que:

- $\operatorname{supp} f_{i(k),j}(b_k) \setminus (E_k \times e_k) \neq \emptyset$, se $\tilde{f}_{i(k),j}$ é do tipo 1 e $j < 2$;
- $|a(f_{i(k),j}(b_k))| \cdot r_k > 4 \cdot d(F_{i(k)})$, se $\tilde{f}_{i(k),j}$ é do tipo 2 e $j < 2$;
- $\operatorname{supp} f_{i(k),j}(b_k) \setminus (E_k \times e_k) \neq \emptyset$, se $f_{i(k),j}$ é do tipo 1 e $2 \leq j < n(F_{i(k)})$;
- $|a(f_{i(k),j}(b_k))| \cdot r_k > 4 \cdot d(F_{i(k)})$, se $f_{i(k),j}$ é do tipo 2 e $2 \leq j < n(F_{i(k)})$.

Temos que $b_k = a_{n_k}^{i(k)} \in A_{n_k}^{i(k)}$. Da definição de $B_{n_k}^{i(k)}$ segue que

$$|a(f_{i(k),1}(b_k),(\theta_{b_k},m_{b_k}))| > 2^{n_k+4} \cdot d(F_{i(k)}) \cdot |a(f_{i(k),0}(b_k),(\theta_{b_k},m_{b_k}))| \cdot X_{n_k-1}$$

Observamos que se $m < k$, então $n_m \leq n_{k-1}$ e, portanto, $i(m) \in E_m = G_{n_m} \subset G_{n_{k-1}} \subset G_{n_k-1}$. Note que $i(m) \neq 0$. Como $b_m = a_{n_m}^{i(m)}$ e $[n_m, a_{n_m}^{i(m)}] \cap [n_k, a_{n_k}^{i(k)}] = \emptyset$, temos que $b_m < n_k$ e, portanto, $b_m \leq n_k - 1$. Logo,

$$|a(f_{i(k),1}(b_k),(\theta_{b_k},m_{b_k}))| \cdot r_k > 4 \cdot |a(f_{i(k),0}(b_k),(\theta_{b_k},m_{b_k}))| \cdot d(F_{i(k)}).$$

(ix) Suponhamos que $F_{i(k)}$ seja do tipo C. Os argumentos utilizados em (vii) nos permitem mostrar que:

- $\operatorname{supp} f_{i(k),j}(b_k) \setminus (E_k \times e_k) \neq \emptyset$, se $f_{i(k),j}$ é do tipo 1 e $2 \leq j < n(F_{i(k)})$;
- $|a(f_{i(k),j}(b_k))| \cdot r_k > 4 \cdot d(F_{i(k)})$, se $f_{i(k),j}$ é do tipo 2 e $2 \leq j < n(F_{i(k)})$.

Temos que $b_k = a_{n_k}^{i(k)} \in A_{n_k}^{i(k)}$. Da definição de $A_{n_k}^{i(k),1}$ segue que

$$|a(f_{i(k),1}(b_k), (\theta_{b_k}, m_{b_k}))| > 2^{n_k+4} \cdot l_{n_k,i(k)} \cdot X_{n_k-1}$$

onde

$$l_{n_k,i(k)} = l_{\zeta_{i(k)}}\left(\frac{1}{2^{n_k+5} \cdot X_{n_k-1}}\right).$$

Como

$$\frac{1}{2^{n_k+5} \cdot X_{n_k-1}} \leq \frac{r_k}{8}$$

temos que

$$l_{\zeta_{i(k)}}\left(\frac{r_k}{8}\right) \leq l_{n_k,i(k)}.$$

Portanto,

$$|a(f_{i(k),1}(b_k), (\theta_{b_k}, m_{b_k}))| \cdot r_k > 4 \cdot l_{n_k,i(k)} \geq 4 \cdot l_{\zeta_{i(k)}}\left(\frac{r_k}{8}\right).$$

Da definição de $C_{n_k}^{i(k)}$ segue que

$$\left|\frac{a(f_{i(k),0}(b_k), (\theta_{b_k}, m_{b_k}))}{a(f_{i(k),1}(b_k), (\theta_{b_k}, m_{b_k}))} \cdot l_{n_k,i(k)} - \zeta_{i(k)} \cdot l_{n_k,i(k)}\right| \cdot 2^{n_k+5} \cdot X_{n_k-1} < 1$$

e, portanto,

$$\left|\frac{a(f_{i(k),0}(b_k), (\theta_{b_k}, m_{b_k}))}{a(f_{i(k),1}(b_k), (\theta_{b_k}, m_{b_k}))} \cdot l_{\zeta_{i(k)}}\left(\frac{r_k}{8}\right) - \zeta_{i(k)} \cdot l_{\zeta_{i(k)}}\left(\frac{r_k}{8}\right)\right| < \frac{r_k}{8}. \qquad \square$$

Lema 7.2.3. *Sejam $J \in \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c}\times\omega)} \setminus \{0\}$ e $E \in [\mathfrak{c}]^\omega$ de modo que $\operatorname{supp} J \subset E \times \omega$ e tal que se $\xi \in E \setminus \{0\}$, então $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f_{\xi,j}(n) \subset E \times \omega$, para todo $j < n(F_\xi)$. Existe $\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E\times\omega)}} : \mathbb{Q}^{(E\times\omega)} \to \mathbb{T}$ um homomorfismo de grupos com as seguintes propriedades:*

(i) $\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E\times\omega)}} (J) \neq 0 + \mathbb{Z}$;

(ii) Se $\xi \in E \setminus \{0\}$, então $\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E\times\omega)}} (\chi_{(\xi,j)}) = p_\xi - \lim\{\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E\times\omega)}} (f_{\xi,j}(n)) : n \in \omega\}$, para cada $j < n(F_\xi)$.[3]

[3] Estamos considerando $\mathbb{Q}^{(E\times\omega)} \subset \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}$.

Demonstração. Consideremos $\{E_m : m \in \omega\}$, $\{e_m : m \in \omega\}$, $\{b_m : m \in \omega\}$, $\{r_m : m \in \omega\}$ e $i : \omega \to E \setminus \{0\}$ de acordo com o lema 7.2.2. A fim de exibirmos um homomorfismo de grupos $\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E\times\omega)}}$ satisfazendo as condições (i) e (ii) deste lema, construiremos indutivamente aplicações auxiliares $\psi_m : E \times \omega \to \mathcal{B}$ e $\psi_m^* : E_m \times e_m \to \mathcal{B}$, para cada $m \in \omega$.

Para cada $(\xi, n) \in E_0 \times e_0$, tomemos $y_{(\xi,n)} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{(\xi,n)\in \operatorname{supp} J} J(\xi, n) \cdot y_{(\xi,n)} = \frac{1}{2}$$

e façamos

$$x_{(\xi,n)} = \frac{1}{d(J)} \cdot y_{(\xi,n)} + \mathbb{Z}.$$

Temos que

$$\sum_{(\xi,n)\in \operatorname{supp} J} a(J, (\xi, n)) \cdot x_{(\xi,n)} = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}.$$

Seja $\psi_0^*(\xi, n)$ o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado em $x_{(\xi,n)}$ com diâmetro

$$\delta(\psi_0^*(\xi, n)) = \frac{r_0}{d(J)}.$$

Seja também $\psi_0(\xi, n) = d(J) \cdot \psi_0^*(\xi, n)$. Claramente, $\delta(\psi_0(\xi, n)) = r_0$. Uma vez que

$$\frac{1}{2} + \mathbb{Z} \in \sum_{(\xi,n)\in \operatorname{supp} J} a(J, (\xi, n)) \cdot \psi_0^*(\xi, n)$$

e

$$\delta\Bigg(\sum_{(\xi,n)\in \operatorname{supp} J} a(J, (\xi, n)) \cdot \psi_0^*(\xi, n)\Bigg) \leq \sum_{(\xi,n)\in \operatorname{supp} J} |a(J, (\xi, n))| \cdot \delta(\psi_0^*(\xi, n)) \leq \frac{1}{4}$$

concluímos que

$$0 + \mathbb{Z} \notin \sum_{(\xi,n)\in \operatorname{supp} J} a(J, (\xi, n)) \cdot \psi_0^*(\xi, n).$$

Por fim, se $(\xi, n) \in (E \times \omega) \setminus (E_0 \times e_0)$, façamos $\psi_0(\xi, n) = \mathbb{T}$.

Seja $m \in \omega$. Suponhamos definidas $\psi_m : E \times \omega \to \mathcal{B}$ e $\psi_m^* : E_m \times e_m \to \mathcal{B}$. Vamos construir $\psi_{m+1} : E \times \omega \to \mathcal{B}$ e $\psi_{m+1}^* : E_{m+1} \times e_{m+1} \to \mathcal{B}$ com as seguintes propriedades:

(1) Se $(\xi, n) \in (E \times \omega) \setminus (E_{m+1} \times e_{m+1})$, então $\psi_{m+1}(\xi, n) = \mathbb{T}$;

(2) Se $(\xi, n) \in (E_{m+1} \times e_{m+1}) \setminus (E_m \times e_m)$, então $\psi_{m+1}^*(\xi, n)$ é tal que:

(a) $b(J) \cdot \prod_{k<m+1} d(F_{i(k)}) \cdot \overline{\psi^*_{m+1}(\xi, n)} \subset \psi_m(\xi, n)$;
(b) $\delta(\psi^*_{m+1}(\xi, n)) = \dfrac{r_{m+1}}{b(J) \cdot \prod_{k<m+1} d(F_{i(k)})}$.

Neste caso, façamos

$$\psi_{m+1}(\xi, n) = b(J) \cdot \prod_{k<m+1} d(F_{i(k)}) \cdot \psi^*_{m+1}(\xi, n).$$

(3) Se $(\xi, n) \in E_m \times e_m$, então $\psi^*_{m+1}(\xi, n)$ é tal que:

(a) $d(F_{i(m)}) \cdot \overline{\psi^*_{m+1}(\xi, n)} \subset \psi^*_m(\xi, n)$;
(b) $\delta(\psi^*_{m+1}(\xi, n)) = \dfrac{r_{m+1}}{b(J) \cdot \prod_{k<m+1} d(F_{i(k)})}$.

Neste caso, façamos

$$\psi_{m+1}(\xi, n) = b(J) \cdot \prod_{k<m+1} d(F_{i(k)}) \cdot \psi^*_{m+1}(\xi, n).$$

(4) Para cada $j < n(F_{i(m)})$,

$$\psi_m(i(m), j) \cap \left(\sum_{(\xi,n) \in \operatorname{supp} f_{i(m),j}(b_m)} a(f_{i(m),j}(b_m), (\xi, n)) \cdot b(J) \cdot \prod_{k<m} d(F_{i(k)}) \cdot \psi^*_{m+1}(\xi, n) \right) \neq \emptyset.$$

Se $(\xi, n) \in (E \times \omega) \setminus (E_{m+1} \times e_{m+1})$, façamos $\psi_{m+1}(\xi, n) = \mathbb{T}$. Se $(\xi, n) \in [(E_{m+1} \times e_{m+1}) \setminus (E_m \times e_m)] \setminus \cup_{j<n(F_{i(m)})} \operatorname{supp} f_{i(m),j}(b_m)$, então $\psi_m(\xi, n) = \mathbb{T}$. Definimos $\psi^*_{m+1}(\xi, n)$ como sendo um elemento de $\mathcal{B}$ com diâmetro

$$\delta(\psi^*_{m+1}(\xi, n)) = \frac{r_{m+1}}{b(J) \cdot \prod_{k<m+1} d(F_{i(k)})}$$

e façamos

$$\psi_{m+1}(\xi, n) = b(J) \cdot \prod_{k<m+1} d(F_{i(k)}) \cdot \psi^*_{m+1}(\xi, n).$$

Se $(\xi, n) \in (E_m \times e_m) \setminus \cup_{j<n(F_{i(m)})} \operatorname{supp} f_{i(m),j}(b_m)$, fixemos uma raiz $d(F_{i(m)})$-ésima do ponto médio de $\psi^*_m(\xi, n)$. Definimos $\psi^*_{m+1}(\xi, n)$ como sendo o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado na raiz em questão com diâmetro

$$\delta(\psi^*_{m+1}(\xi, n)) = \frac{r_{m+1}}{b(J) \cdot \prod_{k<m+1} d(F_{i(k)})}$$

e façamos

$$\psi_{m+1}(\xi,n) = b(J)\cdot \prod_{k<m+1} d(F_{i(k)})\cdot \psi^*_{m+1}(\xi,n).$$

Vamos, agora, definir $\psi^*_{m+1}(\xi,n)$ e $\psi_{m+1}(\xi,n)$ para $(\xi,n)\in \cup_{j<n(F_{i(m)})} \operatorname{supp} f_{i(m),j}(b_m)$.

Caso 1: $F_{i(m)}$ é do tipo A.

Seja $j<n(F_{i(m)})$. Fixemos $(\mu,k)\in \operatorname{supp} f_{i(m),j}(b_m)$ tal que:

- $(\mu,k)\notin E_m\times e_m$, se $f_{i(m),j}$ é do tipo 1;
- $|a(f_{i(m),j}(b_m),(\mu,k))|\cdot r_m > 4\cdot d(F_{i(m)})$, se $f_{i(m),j}$ é do tipo 2.

Para cada $(\xi,n)\in \operatorname{supp} f_{i(m),j}(b_m)\setminus\{(\mu,k)\}$, fixemos $z_{(\xi,n)}\in\mathbb{T}$ da seguinte maneira: se $(\xi,n)\in E_m\times e_m$, então $z_{(\xi,n)}$ é uma raiz $d(F_{i(m)})$-ésima do ponto médio de $\psi^*_m(\mu,k)$; se $(\xi,n)\notin E_m\times e_m$, então $z_{(\xi,n)}$ é escolhido arbitrariamente. Seja

$$x_j = \sum_{(\xi,n)\in \operatorname{supp} f_{i(m),j}(b_m)\setminus\{(\mu,k)\}} a(f_{i(m),j}(b_m),(\xi,n))\cdot b(J)\cdot \prod_{k<m} d(F_{i(k)})\cdot z_{(\xi,n)}.$$

Se $f_{i(m),j}$ é do tipo 1, tomemos $z_{(\mu,k)}\in\mathbb{T}$ tal que

$$a(f_{i(m),j}(b_m),(\mu,k))\cdot b(J)\cdot \prod_{k<m} d(F_{i(k)})\cdot z_{(\mu,k)} + x_j \in \psi_m(i(m),j).$$

Se $f_{i(m),j}$ é do tipo 2, podemos supor que $(\mu,k)\in E_m\times e_m$ pois, do contrário, os argumentos utilizados acima podem ser repetidos aqui. Sejam $\tilde{z}_{(\mu,k)}$ uma raiz $d(F_{i(m)})$-ésima do ponto médio de $\psi^*_m(\mu,k)$ e A o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado em $\tilde{z}_{(\mu,k)}$ com diâmetro

$$\delta(A) = \frac{r_m}{4\cdot b(J)\cdot \prod_{k<m+1} d(F_{i(k)})}.$$

Observamos que

$$a(f_{i(m),j}(b_m),(\mu,k))\cdot b(J)\cdot \prod_{k<m} d(F_{i(k)})\cdot A = \mathbb{T}$$

e, portanto, existe $z_{(\mu,k)}\in A$ tal que

$$a(f_{i(m),j}(b_m),(\mu,k))\cdot b(J)\cdot \prod_{k<m} d(F_{i(k)})\cdot z_{(\mu,k)} + x_j \in \psi_m(i(m),j).$$

Para cada $(\xi, n) \in \operatorname{supp} f_{i(m),j}(b_m)$, seja $\psi^*_{m+1}(\xi, n)$ o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado em $z_{(\xi,n)}$ com diâmetro

$$\delta(\psi^*_{m+1}(\xi, n)) = \frac{r_{m+1}}{b(J) \cdot \prod_{k<m+1} d(F_{i(k)})}$$

e façamos

$$\psi_{m+1}(\xi, n) = b(J) \cdot \prod_{k<m+1} d(F_{i(k)}) \cdot \psi^*_{m+1}(\xi, n).$$

As condições (1), (2), (3) e (4) estão satisfeitas.

Caso 2: $F_{i(m)}$ é do tipo B.

Se $(\xi, n) \in \cup_{2 \leq j < n(F_{i(m)})} \operatorname{supp} f_{i(m),j}(b_m)$, procedemos como no caso 1 para definir $\psi^*_{m+1}(\xi, n)$ e $\psi_{m+1}(\xi, n)$. Fixemos $(\mu, k) \in \operatorname{supp} f_{i(m),0}(b_m)$ tal que

$$|a(f_{i(m),1}(b_m), (\mu, k))| \cdot r_m > 4 \cdot |a(f_{i(m),0}(b_m), (\mu, k))| \cdot d(F_{i(m)})$$

e fixemos $(\nu, l) \in \operatorname{supp} f_{i(m),0}(b_m)$ tal que:

- $(\nu, l) \notin E_m \times e_m$, se $\tilde{f}_{i(m),0}$ é do tipo 1;
- $|a(f_{i(m),0}(b_m), (\nu, l))| \cdot r_m > 4 \cdot d(F_{i(m)})$, se $\tilde{f}_{i(m),0}$ é do tipo 2.

Para cada $(\xi, n) \in \operatorname{supp} f_{i(m),1}(b_m) \setminus \{(\mu, k), (\nu, l)\}$, definimos $z_{(\xi,n)}$ como no caso 1.

Se $(\mu, k) = (\nu, l)$, sejam x_0 e x_1 também como no caso 1. Seja $\tilde{z}_{(\mu,k)}$ uma raiz $a(f_{i(m),0}(b_m), (\mu, k)) \cdot b(J) \cdot \prod_{k<m} d(F_{i(k)})$-ésima do ponto médio de $\psi_m(i(m), 0) - x_0$. Se $(\mu, k) \in E_m \times e_m$, pedimos também que $d(F_{i(m)}) \cdot \tilde{z}_{(\mu,k)} \in \tilde{\psi}^*_m(\mu, k)$, onde $\tilde{\psi}^*_m(\mu, k)$ é o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado no ponto médio de $\psi^*_m(\mu, k)$ com diâmetro

$$\delta(\tilde{\psi}^*_m(\mu, k)) = \frac{\delta(\psi^*_m(\mu, k))}{4}.$$ [4]

Seja I o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado em $\tilde{z}_{(\mu,k)}$ com diâmetro

$$\delta(I) = \frac{r_m}{4 \cdot |a(f_{i(m),0}(b_m), (\mu, k))| \cdot b(J) \cdot \prod_{k<m+1} d(F_{i(k)})}.$$

[4] Isto pode ser feito como no caso 1.

Existe $z_{(\mu,k)} \in I$ tal que

$$a(f_{i(m),1}(b_m),(\mu,k)) \cdot b(J) \cdot \prod_{k<m} d(F_{i(k)}) \cdot z_{(\mu,k)} + x_1 \in \psi_m(i(m),1)$$

e

$$a(f_{i(m),0}(b_m),(\mu,k)) \cdot b(J) \cdot \prod_{k<m} d(F_{i(k)}) \cdot z_{(\mu,k)} + x_0 \in \psi_m(i(m),0).$$

Para cada $(\xi,n) \in \operatorname{supp} f_{i(m),1}(b_m)$, seja $\psi^*_{m+1}(\xi,n)$ o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado em $z_{(\xi,n)}$ com diâmetro

$$\delta(\psi^*_{m+1}(\xi,n)) = \frac{r_{m+1}}{b(J) \cdot \prod_{k<m+1} d(F_{i(k)})}$$

e façamos

$$\psi_{m+1}(\xi,n) = b(J) \cdot \prod_{k<m+1} d(F_{i(k)}) \cdot \psi^*_{m+1}(\xi,n).$$

As condições (1), (2), (3) e (4) estão satisfeitas.

Suponhamos, agora, que $(\mu,k) \neq (\nu,l)$. Se $(\mu,k) \in E_m \times e_m$, seja $\tilde{z}_{(\mu,k)}$ uma raiz $d(F_{i(m)})$-ésima do ponto médio de $\psi^*_m(\mu,k)$. Se $(\mu,k) \notin E_m \times e_m$, seja $\tilde{z}_{(\mu,k)}$ um elemento arbitrário de $\mathbb{T}$. Seja $z_{(\nu,l)}$ uma raiz $a(f_{i(m),0}(b_m),(\nu,l)) \cdot b(J) \cdot \prod_{k<m} d(F_{i(k)})$-ésima do ponto médio de $\psi_m(i(m),0) - \tilde{x}_0 - x$, onde

$$\tilde{x}_0 = \sum_{(\xi,n) \in \operatorname{supp} f_{i(m),0}(b_m) \setminus \{(\mu,k),(\nu,l)\}} a(f_{i(m),0}(b_m),(\xi,n)) \cdot b(J) \prod_{k<m} d(F_{i(k)}) \cdot z_{(\xi,n)}$$

e

$$x = a(f_{i(m),0}(b_m),(\mu,k)) \cdot b(J) \prod_{k<m} d(F_{i(k)}) \cdot \tilde{z}_{(\mu,k)}.$$

Se $(\nu,l) \in E_m \times e_m$, pedimos também que $d(F_{i(m)}) \cdot z_{(\nu,l)} \in \tilde{\psi}^*_m(\nu,l)$, onde $\tilde{\psi}^*_m(\nu,l)$ é o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado no ponto médio de $\psi^*_m(\nu,l)$ com diâmetro

$$\delta(\tilde{\psi}^*_m(\nu,l)) = \frac{\delta(\psi^*_m(\nu,l))}{4}.$$

Definimos

$$x_0 = \tilde{x}_0 + a(f_{i(m),0}(b_m),(\nu,l)) \cdot b(J) \prod_{k<m} d(F_{i(k)}) \cdot z_{(\nu,l)}.$$

Temos que x é o ponto médio de $\psi_m(i(m),0) - x_0$. Seja I o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado em

$\tilde{z}_{(\mu,k)}$ com diâmetro

$$\delta(I) = \frac{r_m}{4 \cdot |a(f_{i(m),0}(b_m), (\mu,k))| \cdot b(J) \cdot \prod_{k<m+1} d(F_{i(k)})}.$$

Existe $z_{(\mu,k)} \in I$ tal que

$$a(f_{i(m),1}(b_m), (\mu,k)) \cdot b(J) \cdot \prod_{k<m+1} d(F_{i(k)}) \cdot z_{(\mu,k)} + x_1 \in \psi_m(i(m), 1)$$

e

$$a(f_{i(m),0}(b_m), (\mu,k)) \cdot b(J) \cdot \prod_{k<m+1} d(F_{i(k)}) \cdot z_{(\mu,k)} + x_0 \in \psi_m(i(m), 0).$$

Para cada $(\xi, n) \in \operatorname{supp} f_{i(m),1}(b_m)$, seja $\psi^*_{m+1}(\xi, n)$ o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado em $z_{(\xi,n)}$ com diâmetro

$$\delta(\psi^*_{m+1}(\xi, n)) = \frac{r_{m+1}}{b(J) \cdot \prod_{k<m+1} d(F_{i(k)})}$$

e façamos

$$\psi_{m+1}(\xi, n) = b(J) \cdot \prod_{k<m+1} d(F_{i(k)}) \cdot \psi^*_{m+1}(\xi, n).$$

As condições (1), (2), (3) e (4) estão satisfeitas.

Caso 3: $F_{i(m)}$ é do tipo C.

Se $(\xi, n) \in \cup_{2 \le j < n(F_{i(m)})} \operatorname{supp} f_{i(m),j}(b_m)$, procedemos como no caso 1 para definir $\psi^*_{m+1}(\xi, n)$ e $\psi_{m+1}(\xi, n)$. Fixemos $(\mu, k) \in \operatorname{supp} f_{i(m),0}(b_m)$ tal que

$$\frac{|a(f_{i(m),1}(b_m), (\mu,k))|}{4} \cdot r_m > l_{\zeta_{i(m)}}\left(\frac{r_m}{8}\right)$$

e

$$\left| \frac{a(f_{i(m),0}(b_m), (\mu,k))}{a(f_{i(m),1}(b_m), (\mu,k))} \cdot l_{\zeta_{i(m)}}\left(\frac{r_m}{8}\right) - \zeta_{i(m)} \cdot l_{\zeta_{i(m)}}\left(\frac{r_m}{8}\right) \right| < \frac{r_m}{8}.$$

Para cada $(\xi, n) \in \operatorname{supp} f_{i(m),0}(b_m) \setminus \{(\mu, k)\}$, definimos $z_{(\xi,n)}$ como no caso 1. Sejam, também, x_0 e x_1 como no caso 1. Se $(\mu, k) \in E_m \times e_m$, seja $\tilde{z}_{(\mu,k)}$ uma raiz $d(F_{i(m)})$-ésima do ponto médio de $\psi^*_m(\mu, k)$. Se $(\mu, k) \notin E_m \times e_m$, seja $\tilde{z}_{(\mu,k)}$ um elemento arbitrário de $\mathbb{T}$. Consideremos A o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado em $\tilde{z}_{(\mu,k)}$ com diâmetro

$$\delta(A) = \frac{r_m}{4 \cdot b(J) \cdot \prod_{k<m+1} d(F_{i(k)})}.$$

A fim de provar que existe $z_{(\mu,k)} \in A$ tal que

$$a(f_{i(m),0}(b_m),(\mu,k)) \cdot b(J) \cdot \prod_{k<m} d(F_{i(k)}) \cdot z_{(\mu,k)} \in \psi_m(i(m),0) - x_0$$

e

$$a(f_{i(m),1}(b_m),(\mu,k)) \cdot b(J) \cdot \prod_{k<m} d(F_{i(k)}) \cdot z_{(\mu,k)} \in \psi_m(i(m),1) - x_1$$

é suficiente mostrar que o conjunto

$$X = \left\{ \left(x+\mathbb{Z}, \frac{a(f_{i(m),0}(b_m),(\mu,k))}{a(f_{i(m),1}(b_m),(\mu,k))} \cdot x+\mathbb{Z} \right) : x \in a(f_{i(m),1}(b_m),(\mu,k)) \cdot b(J) \cdot \prod_{k<m} d(F_{i(k)}) \cdot \tilde{A} \right\}$$

é $r_m/4$-denso em $\mathbb{T}^2$, onde $\tilde{A}$ é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ tal que $\tilde{A} + \mathbb{Z} = A$. Temos que

$$\left\{ \left(x + \mathbb{Z}, \frac{a(f_{i(m),0}(b_m),(\mu,k))}{a(f_{i(m),1}(b_m),(\mu,k))} \cdot x + \mathbb{Z} \right) : x \in]0, l_{\zeta_{i(m)}}(r_m/8)[\right\}$$

é $r_m/4$-denso em $\mathbb{T}^2$, uma vez que

$$\left| \frac{a(f_{i(m),0}(b_m),(\mu,k))}{a(f_{i(m),1}(b_m),(\mu,k))} \cdot l_{\zeta_{i(m)}}\left(\frac{r_m}{8}\right) - \zeta_{i(m)} \cdot l_{\zeta_{i(m)}}\left(\frac{r_m}{8}\right) \right| < \frac{r_m}{8}.$$

Logo,

$$Y = \left\{ \left(x + \mathbb{Z}, \frac{a(f_{i(m),0}(b_m),(\mu,k))}{a(f_{i(m),1}(b_m),(\mu,k))} \cdot x + \mathbb{Z} \right) : x \in]0, |a(f_{i(m),1}(b_m),(\mu,k))| \cdot r_m/4[\right\}$$

também é $r_m/4$-denso em $\mathbb{T}^2$, já que

$$\frac{|a(f_{i(m),1}(b_m),(\mu,k))|}{4} \cdot r_m > l_{\zeta_{i(m)}}\left(\frac{r_m}{8}\right).$$

Observamos que $d(F_{i(m)}) = 1$, pois $F_{i(m)}$ é do tipo C. Logo,

$$\left]0, \frac{|a(f_{i(m),1}(b_m),(\mu,k))| \cdot r_m}{4}\right[= a(f_{i(m),1}(b_m),(\mu,k)) \cdot b(J) \cdot \prod_{k<m} d(F_{i(k)}) \cdot \tilde{A} + r$$

para algum $r \in \mathbb{R}$ e, portanto,

$$Y = X + \left(r + \mathbb{Z}, \frac{a(f_{i(m),0}(b_m), (\mu, k))}{a(f_{i(m),1}(b_m), (\mu, k))} \cdot r + \mathbb{Z} \right).$$

Como as translações são isometrias de $\mathbb{T}^2$, concluímos que X é $r_m/4$-denso em $\mathbb{T}^2$. Tomemos $z_{(\mu,k)} \in A$ tal que

$$a(f_{i(m),0}(b_m), (\mu, k)) \cdot b(J) \cdot \prod_{k<m} d(F_{i(k)}) \cdot z_{(\mu,k)} \in \psi_m(i(m), 0) - x_0$$

e

$$a(f_{i(m),1}(b_m), (\mu, k)) \cdot b(J) \cdot \prod_{k<m} d(F_{i(k)}) \cdot z_{(\mu,k)} \in \psi_m(i(m), 1) - x_1.$$

Para cada $(\xi, n) \in \operatorname{supp} f_{i(m),1}(b_m)$, seja $\psi^*_{m+1}(\xi, n)$ o arco aberto de $\mathbb{T}$ centrado em $z_{(\xi,n)}$ com diâmetro

$$\delta(\psi^*_{m+1}(\xi, n)) = \frac{r_{m+1}}{b(J) \cdot \prod_{k<m+1} d(F_{i(k)})}$$

e façamos

$$\psi_{m+1}(\xi, n) = b(J) \cdot \prod_{k<m+1} d(F_{i(k)}) \cdot \psi^*_{m+1}(\xi, n).$$

As condições (1), (2), (3) e (4) estão satisfeitas.

Por indução, obtemos aplicações $\psi_m : E \times \omega \to \mathcal{B}$ e $\psi^*_m : E_m \times e_m \to \mathcal{B}$ para cada $m \in \omega$, satisfazendo as seguintes condições:

- $\overline{\psi_{m+1}(\xi, n)} \subset \psi_m(\xi, n)$, para todo $(\xi, n) \in E \times \omega$;
- $\delta(\psi_m(\xi, n)) = r_m$, se $(\xi, n) \in E_m \times e_m$ e $\psi_m(\xi, n) = \mathbb{T}$, se $(\xi, n) \in (E \times \omega) \setminus (E_m \times e_m)$;
- $\psi_m(\xi, n) = b(J) \cdot \prod_{k<m} d(F_{i(k)}) \cdot \psi^*_m(\xi, n)$, se $(\xi, n) \in E_m \times e_m$.

Como $\mathbb{T}$ é um espaço métrico completo e $(r_m)_{m\in\omega}$ é uma seqüência de números reais positivos que converge para 0, concluímos que se $(\xi, n) \in E \times \omega$, então $\cap_{m\in\omega}\psi_m(\xi, n) = \cap_{m\in\omega}\overline{\psi_m(\xi, n)}$ é um conjunto unitário. Denotaremos por $\phi(\chi_{(\xi,n)})$ o único elemento de $\cap_{m\in\omega}\psi_m(\xi, n)$.

Para cada $(\xi, n) \in E \times \omega$, sejam $N_{(\xi,n)} = \min\{m \in \omega : (\xi, n) \in E_m \times e_m\}$ e $m \geq N_\xi$. Temos que $\psi_m(\xi, n) \neq \mathbb{T}$ e, portanto, existe um único elemento de $\psi^*_m(\xi, n)$ que multiplicado por

$b(J)\cdot\prod_{k<m} d(F_{i(k)})$ é igual a $\phi(\chi_{(\xi,n)})$. Denotaremos tal elemento por

$$\phi\left(\frac{1}{b(J)\cdot\prod_{k<m} d(F_{i(k)})}\cdot\chi_{(\xi,n)}\right).$$

Consideremos

$$G_{(\xi,n)}=\left\{\frac{1}{b(J)\cdot\prod_{k<m} d(F_{i(k)})}\cdot\chi_{(\xi,n)}\in\mathbb{Q}^{(E\times\omega)}:m\geq N_{(\xi,n)}\right\}$$

e denotemos por G o grupo gerado por $\cup_{(\xi,n)\in E\times\omega}G_{(\xi,n)}$. Uma vez que se $(\xi,n)\in E\times\omega$ e $m>n$, então

$$\phi\left(\frac{1}{b(J)\cdot\prod_{k<N_{(\xi,n)}} d(F_{i(k)})}\cdot\chi_{(\xi,n)}\right)=\prod_{N_{(\xi,n)}\leq k<m} d(F_{i(k)})\cdot\phi\left(\frac{1}{b(J)\cdot\prod_{k<m} d(F_{i(k)})}\cdot\chi_{(\xi,n)}\right)$$

podemos estender ϕ a um homomorfismo de grupos de G em $\mathbb{T}$. Usando o fato de $\mathbb{T}$ ser divisível, estendemos ϕ a um homomorfismo de grupos $\phi_J\restriction_{\mathbb{Q}^{(E\times\omega)}}:\mathbb{Q}^{(E)}\to\mathbb{T}$.

Temos que

$$\phi_J\restriction_{\mathbb{Q}^{(E\times\omega)}}(J)\in\sum_{(\xi,n)\in\operatorname{supp}J} a(J,(\xi,n))\cdot\psi_0^*(\xi,n).$$

Como

$$0+\mathbb{Z}\notin\sum_{(\xi,n)\in\operatorname{supp}J} a(J,(\xi,n))\cdot\psi_0^*(\xi,n)$$

concluímos que $\phi_J\restriction_{\mathbb{Q}^{(E\times\omega)}}(J)\neq 0+\mathbb{Z}$. Logo, (i) está verificada.

Fixemos $\xi\in E\setminus\{0\}$ e $j<n(F_\xi)$. Para cada $m\in i^{-1}(\{\xi\})$ temos que

$$\phi_J\restriction_{\mathbb{Q}^{(E\times\omega)}}(f_{i(m),j}(b_m))\in\sum_{(\xi,n)\in\operatorname{supp}f_{i(m),j}(b_m)} a(f_{i(m),j}(b_m),(\xi,n))\cdot b(J)\cdot\prod_{k<m} d(F_{i(k)})\cdot\psi_{m+1}^*(\xi,n).$$

Além disso,

$$\phi_J\restriction_{\mathbb{Q}^{(E\times\omega)}}(\chi_{(i(m),j)})\in\psi_m(i(m),j).$$

De (4) segue que

$$\begin{aligned}\delta(\phi_J\restriction_{\mathbb{Q}^{(E\times\omega)}}(f_{i(m),j}(b_m)),\phi_J\restriction_{\mathbb{Q}^{(E\times\omega)}}(\chi_{(i(m),j)}))&\leq d_1+d_2\\&<2r_m\end{aligned}$$

onde

$$d_1 = \delta\Big(\textstyle\sum_{(\xi,n)\in \operatorname{supp} f_{i(m),j}(b_m)} a(f_{i(m),j}(b_m),(\xi,n)) \cdot b(J) \cdot \prod_{k<m} d(F_{i(k)}) \cdot \psi^*_{m+1}(\xi,n)\Big)$$

e

$$d_2 = \delta(\psi_m(i(m),j)).$$

Como $r_m \to 0$, concluímos que a seqüência $\{\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E\times\omega)}} (f_{i(m),j}(b_m)) : m \in i^{-1}(\{\xi\})\}$ converge para $\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E\times\omega)}} (\chi_{(i(m),j)})$. Da propriedade (vi) do lema 7.2.2 segue que

$$\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E\times\omega)}} (\chi_{(i(m),j)}) = p_\xi - \lim\{\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E\times\omega)}} (f_{i(m),j}(n)) : n \in \omega\}.$$

Logo, (ii) está verificada. □

Estamos prontos para estender $\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E\times\omega)}}$ a um homomorfismo de grupos $\phi_J : \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c}\times\omega)} \to \mathbb{T}$. Nossa única preocupação será garantir que se $\xi \in \mathfrak{c} \setminus E$, então $\phi_J(\chi_{(\xi,j)}) = p_\xi - \lim\{\phi_J(f_{\xi,j}(n)) : n \in \omega\}$, para cada $j < n(F_\xi)$.

Lema 7.2.4. *Para cada $J \in \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c}\times\omega)} \setminus \{0\}$, existe $\phi_J : \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c}\times\omega)} \to \mathbb{T}$ um homomorfismo de grupos tal que:*

(i) $\phi_J(J) \neq 0 + \mathbb{Z}$;

(ii) Se $\xi \in]0,\mathfrak{c}[$, então $\phi_J(\chi_{(\xi,j)}) = p_\xi - \lim\{\phi_J(f_{\xi,j}(n)) : n \in \omega\}$, para cada $j < n(F_\xi)$.

Demonstração. Faremos a construção de ϕ_J por indução. De acordo com a proposição 7.2.1, existe $E \in [\mathfrak{c}]^\omega$ de modo que $\operatorname{supp} J \subset E \times \omega$ e tal que se $\xi \in E \setminus \{0\}$, então $\cup_{n\in\omega} \operatorname{supp} f_{\xi,i}(n) \subset E \times \omega$, para todo $j < n(F_\xi)$. Segundo o lema 7.2.3, é possível construir $\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E\times\omega)}} : \mathbb{Q}^{(E\times\omega)} \to \mathbb{T}$ um homomorfismo de grupos com as seguintes propriedades:

(1) $\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E\times\omega)}} (J) \neq 0 + \mathbb{Z}$;

(2) Se $\xi \in E \setminus \{0\}$, então $\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E\times\omega)}} (\chi_{(\xi,j)}) = p_\xi - \lim\{\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E\times\omega)}} (f_{\xi,j}(n)) : n \in \omega\}$, para cada $j < n(F_\xi)$.

Consideremos $\{\alpha_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ uma indexação estritamente crescente de $\mathfrak{c} \setminus E$. Para cada $j < n(F_{\alpha_0})$, definamos

$$\tilde{\phi}_J(\chi_{(\alpha_0,j)}) = p_{\alpha_0} - \lim\{\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E\times\omega)}} (f_{\alpha_0,j}(n)) : n \in \omega\}.$$

Se $j \geq n(F_{\alpha_0})$, definamos $\tilde{\phi}_J(\chi_{(\alpha_0,j)})$ arbitrariamente. Por fim, façamos

$$\tilde{\phi}_J(\tilde{J}) = \phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E\times\omega)}} (\tilde{J})$$

para todo $\tilde{J} \in \mathbb{Q}^{(E\times\omega)}$.[5]

Seja H_{α_0} o subgrupo de $\mathbb{Q}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}$ gerado por $\mathbb{Q}^{(E\times\omega)} \cup \{\chi_{(\alpha_0,n)} : n \in \omega\}$. Podemos estender $\tilde{\phi}_J$ a um homomorfismo de grupos de H_{α_0} em $\mathbb{T}$. Uma vez que $\mathbb{T}$ é divisível, estendemos $\tilde{\phi}_J$ a um homomorfismo de grupos $\phi_J \restriction_{\mathbb{Q}^{(E\cup\{\alpha_0\}\times\omega)}} : \mathbb{Q}^{((E\cup\{\alpha_0\})\times\omega)} \to \mathbb{T}$.

Repetindo indutivamente esta construção, obteremos $\phi_J : \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c}\times\omega)} \to \mathbb{T}$ um homomorfismo de grupos satisfazendo (i) e (ii). □

7.3 Explicitando a topologia

A próxima proposição mostra que o produto diagonal da família $\{\phi_J : J \in \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c}\times\omega)} \setminus \{0\}\}$ é um monomorfismo de grupos.

Proposição 7.3.1. *Suponhamos que para cada $J \in \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c}\times\omega)} \setminus \{0\}$ exista um homomorfismo de grupos $\phi_J : \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c}\times\omega)} \to \mathbb{T}$ tal que $\phi_J(J) \neq 0 + \mathbb{Z}$. A aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c}\times\omega)} & \to & \mathbb{T}^{\mathbb{Q}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}\setminus\{0\}} \\ & \tilde{J} & \mapsto & \Phi(\tilde{J}) \end{array}$$

dada por

$$\Phi(\tilde{J})(J) = \phi_J(\tilde{J}), \ \text{ para cada } \ J \in \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c}\times\omega)} \setminus \{0\}$$

é um monomorfismo de grupos.

Demonstração. Análoga à da proposição 2.3.1. □

Teorema 7.3.2. *Existe uma topologia de grupo no grupo abeliano livre de cardinalidade $\mathfrak{c}$ que torna seu quadrado enumeravelmente compacto.*

Demonstração. O grupo abeliano livre $\Phi[\mathbb{Z}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}]$ munido da topologia de subespaço induzida por $\mathbb{T}^{\mathbb{Q}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}\setminus\{0\}}$ é um grupo topológico.

[5] Estamos considerando $\mathbb{Q}^{(E\times\omega)} \subset \mathbb{Q}^{(E\cup\{\alpha_0\}\times\omega)} \subset \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}$.

Sejam $g, h : \omega \to \Phi[\mathbb{Z}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}]$. De acordo com a proposição 7.1.4, existem $\xi \in]0, \mathfrak{c}[$, $j : \omega \to \omega$ estritamente crescente e $\tilde{g}, \tilde{h} \in \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}$ tais que

$$(\Phi^{-1} \circ g \circ j)(n) = \tilde{g} + \sum_{i<n(F_\xi)} a_{\xi,i} \cdot f_{\xi,i}(n)$$

e

$$(\Phi^{-1} \circ h \circ j)(n) = \tilde{h} + \sum_{i<n(F_\xi)} b_{\xi,i} \cdot f_{\xi,i}(n)$$

para todo $n \in \omega$, onde $a_{\xi,i}, b_{\xi,i} \in \mathbb{Z}$, para todo $i < n(F_\xi)$.

Do lema 7.2.4 segue que

$$\phi_J(\chi_{(\xi,i)}) = p_\xi - \lim\{\phi_J(f_{\xi,i}(n)) : n \in \omega\}$$

para todo $i < n(F_\xi)$ e todo $J \in \mathbb{Q}^{(\mathfrak{c}\times\omega)} \setminus \{0\}$. Portanto,

$$\Phi(\chi_{(\xi,i)}) = p_\xi - \lim\{\Phi(f_{\xi,i}(n)) : n \in \omega\}$$

para todo $i < n(F_\xi)$. Isto implica que

$$\Phi\left(\tilde{g} + \sum_{i<n(F_\xi)} a_{\xi,i} \cdot \chi_{(\xi,i)}\right) = p_\xi - \lim\left\{\Phi\left(\tilde{g} + \sum_{i<n(F_\xi)} a_{\xi,i} \cdot f_{\xi,i}(n)\right) : n \in \omega\right\}$$

e

$$\Phi\left(\tilde{h} + \sum_{i<n(F_\xi)} b_{\xi,i} \cdot \chi_{(\xi,i)}\right) = p_\xi - \lim\left\{\Phi\left(\tilde{h} + \sum_{i<n(F_\xi)} b_{\xi,i} \cdot f_{\xi,i}(n)\right) : n \in \omega\right\}.$$

Logo,

$$\left(\Phi\left(\tilde{g} + \sum_{i<n(F_\xi)} a_{\xi,i} \cdot \chi_{(\xi,i)}\right), \Phi\left(\tilde{h} + \sum_{i<n(F_\xi)} b_{\xi,i} \cdot \chi_{(\xi,i)}\right)\right)$$

é um ponto de acumulação de $\{(g(n), h(n)) : n \in \omega\}$. Portanto, $\Phi[\mathbb{Z}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}] \times \Phi[\mathbb{Z}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}]$ é enumeravelmente compacto. $\square$

7.4 Sobre o problema de Wallace

Recordamos que um semigrupo é um conjunto não vazio munido de uma operação binária associativa. Um *semigrupo de Wallace* é um semigrupo topológico cancelativo (à direita e à

esquerda) enumeravelmente compacto que não é um grupo topológico.[6]

Teorema 7.4.1. *Existe um semigrupo de Wallace cujo quadrado é enumeravelmente compacto.*

Demonstração. Temos que $S = \{\Phi(J) \in \mathbb{T}^{\mathbb{Q}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}\setminus\{0\}} : J \in \mathbb{N}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}\}$ é um semigrupo topológico cancelativo (à direita e à esquerda) que não é um grupo. Seja $\{(g(n), h(n)) : n \in \omega\}$ um subconjunto infinito de $S \times S$, onde $g, h : \omega \to \Phi[\mathbb{N}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}]$. De acordo com a demonstração da proposição 7.1.4, existem $\xi \in]0, \mathfrak{c}[$, $j : \omega \to \omega$ estritamente crecente e $\tilde{g}, \tilde{h} \in \mathbb{N}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}$ tais que

$$(\Phi^{-1} \circ g \circ j)(n) = \tilde{g} + \sum_{i<n(F_\xi)} a_{\xi,i} \cdot f_{\xi,i}(n)$$

e

$$(\Phi^{-1} \circ h \circ j)(n) = \tilde{h} + \sum_{i<n(F_\xi)} b_{\xi,i} \cdot f_{\xi,i}(n)$$

para todo $n \in \omega$, onde $a_{\xi,i}, b_{\xi,i} \in \mathbb{N}$ para todo $i < n(F_\xi)$.

Mostramos no teorema 7.3.2 que $(\Phi(\tilde{g} + \sum_{i<n(F_\xi)} a_{\xi,i} \cdot \chi_{(\xi,i)}), \Phi(\tilde{h} + \sum_{i<n(F_\xi)} b_{\xi,i} \cdot \chi_{(\xi,i)}))$ é um ponto de acumulação de $\{(g(n), h(n)) : n \in \omega\}$. Como $(\Phi(\tilde{g} + \sum_{i<n(F_\xi)} a_{\xi,i} \cdot \chi_{(\xi,i)}), \Phi(\tilde{h} + \sum_{i<n(F_\xi)} b_{\xi,i} \cdot \chi_{(\xi,i)})) \in \Phi[\mathbb{N}^{(\mathfrak{c}\times\omega)}]$, concluímos que $S \times S$ é enumeravelmente compacto. $\square$

[6]Um semigrupo $(S, \cdot)$ é dito *cancelativo* (à direita e à esquerda) se $z \cdot x = z \cdot y$ implica $x = y$ e $x \cdot z = y \cdot z$ implica $x = y$, sempre que $x, y, z \in S$.

CAPÍTULO 8

Considerações finais

8.1 Resultados obtidos

Nesta tese, utilizamos técnicas de teoria dos conjuntos para construir topologias enumeravelmente compactas em grupos abelianos de não torção. Assumindo a existência de $\mathfrak{c}$ ultrafiltros seletivos dois a dois incomparáveis segundo a ordem de Rudin-Keisler, obtivemos os seguintes resultados:

(1) *O grupo abeliano livre de cardinalidade* $\mathfrak{c}$ *admite uma topologia enumeravelmente compacta com uma seqüência não trivial convergente que o torna um grupo topológico.*

Conforme mencionamos, García-Ferreira e Tomita obtiveram o mesmo resultado assumindo $\mathrm{MA}_{\sigma-\mathrm{centered}}$. Nós [6] mostramos que a existência de uma topologia de grupo enumeravelmente compacta com uma seqüência não trivial convergente no grupo abeliano livre de cardinalidade $\mathfrak{c}$ é compatível com a falha total de MA.

(2) *Se* $(G, +, \tau)$ *é um grupo topológico abeliano quase livre de torção tal que* $|G| = |\tau| = \mathfrak{c}$*, então existe* σ *uma topologia em* G *independente de* τ *(isto é, tal que* $\tau \cap \sigma$ *é a topologia cofinita em* G*) que torna* $(G, +)$ *um grupo topológico.*

Tkachenko e Yaschenko [37] obtiveram o mesmo resultado assumindo MA. Todavia, eles afirmaram não saber se era possível obtê-lo assumindo apenas $\mathrm{MA}_{\mathrm{countable}}$. Nós [8] mostramos que sim, uma vez que $\mathrm{MA}_{\mathrm{countable}}$ implica a existência de $2^{\mathfrak{c}}$ ultrafiltros seletivos.

(3) *Se G é um grupo abeliano de não torção tal que $|G| = \mathfrak{c}$, então G admite uma topologia de grupo enumeravelmente compacta se, e somente se, $|G/T(G)| = \mathfrak{c}$ e, para quaisquer $n, d \in \mathbb{N}$ tais que $d \mid n$, o conjunto $dG[n]$ é finito ou tem cardinalidade $\mathfrak{c}$.*

A caracterização algébrica dos grupos abelianos de não torção e cardinalidade $\mathfrak{c}$ que admitem uma topologia de grupo enumeravelmente compacta apresentada em (3) havia sido obtida por Dikranjan e Tkachenko [17] sob MA. Nós [7] mostramos que não é necessária qualquer forma do axioma de Martin para obtê-la.

(4) *Existe uma topologia de grupo no grupo abeliano livre de cardinalidade $\mathfrak{c}$ que torna seu quadrado enumeravelmente compacto.*

Tomita [38] provou que o grupo abeliano livre de cardinalidade $\mathfrak{c}$ não admite uma topologia de grupo que torna sua ω-ésima potência enumeravelmente compacta, mas nada se sabia a respeito de potências finitas. Com (4), nós [9] respondemos uma questão proposta por Madariaga-Garcia e Tomita em [30] e por Tkachenko em [36].

(5) *Existe um semigrupo topológico cancelativo que não é um grupo topológico e cujo quadrado é enumeravelmente compacto.*

Em outras palavras, nós [9] asseguramos a existência de um semigrupo de Wallace cujo quadrado é enumeravelmente compacto, o que responde uma questão proposta por Grant em [21].

Assumindo a existência de $2^{\mathfrak{c}}$ ultrafiltros seletivos, obtivemos o seguinte resultado:

(6) *Se um grupo abeliano de não torção e cardinalidade $\mathfrak{c}$ admite uma topologia de grupo enumeravelmente compacta, então o mesmo admite $2^{\mathfrak{c}}$ topologias enumeravelmente compactas (duas a duas não homeomorfas) que o tornam um grupo topológico.*

Assumindo $\mathrm{MA}_{\sigma-\mathrm{centered}}$, Tomita [39] mostrou que o grupo abeliano livre de cardinalidade $\mathfrak{c}$ admite $\mathfrak{c}^+$ topologias enumeravelmente compactas (duas a duas não homeomorfas) que o tornam um grupo topológico. Nós [7] melhoramos o resultado de [39] em duas direções: em primeiro

lugar, estamos assumindo uma hipótese mais fraca que o axioma de Martin para ordens parciais σ-centradas; além disso, ampliamos a classe dos grupos para os quais temos o resultado.

Os resultados enunciados em (2), (3) e (6) referem-se a classes bastante gerais de grupos. Para obtê-los, tivemos de lidar com o fato de os elementos de $\mathbb{T}$ possuírem mais de uma raiz n-ésima, para cada $n > 1$ número natural; isto nos levou a considerar uma aplicação auxiliar adicional na construção dos homomorfismos por aproximação. Observamos, também, que a imersão de um grupo abeliano em um grupo divisível não é necessariamente sobrejetora e, portanto, foi preciso tomar um cuidado maior na seleção dos candidatos a pontos de acumulação. Além disso, houve necessidade de considerar seqüências com termos de ordem finita, as quais receberam um tratamento especial. Os resultados enunciados em (1) e (4), por sua vez, dizem respeito ao grupo abeliano livre de cardinalidade $\mathfrak{c}$. A dificuldade em obtê-los reside no fato de fazermos exigências extras sobre a topologia a ser construída: em (1), impomos que a mesma deve ter uma seqüência não trivial convergente e em (4), pedimos que seu quadrado seja enumeravelmente compacto.

8.2 Problemas abertos

Problema 8.2.1. (ZFC) *O grupo abeliano livre de cardinalidade $\mathfrak{c}$ admite uma topologia de grupo enumeravelmente compacta (sem seqüências não triviais convergentes)?*

O problema 8.2.1 aparece, por exemplo, em [12] e em [13] e é considerado uma das grandes questões da área. Madariaga-Garcia e Tomita [30] mostraram que a existência de $\mathfrak{c}$ ultrafiltros seletivos dois a dois incomparáveis (segundo a ordem de Rudin-Keisler) permite muni-lo de uma tal topologia e este é o melhor resultado obtido até então. Eles perguntaram se podemos concluir o mesmo assumindo a existência de apenas um ultrafiltro seletivo.

Problema 8.2.2. *Assumindo a existência de um ultrafiltro seletivo, é possível munir o grupo abeliano livre de cardinalidade $\mathfrak{c}$ de uma topologia de grupo enumeravelmente compacta sem seqüências não triviais convergentes?*

O próximo problema, proposto por Dikranjan e Shakhmatov em [16] e [15], também relaciona a compacidade enumerável de um grupo topológico com a existência de seqüências não triviais convergentes. Neste trabalho, demos uma resposta afirmativa ao mesmo no caso de um grupo abeliano livre, assumindo a existência de $\mathfrak{c}$ ultrafiltros seletivos dois a dois incomparáveis.

Problema 8.2.3. *Se um grupo abeliano de cardinalidade* $\mathfrak{c}$ *admite uma topologia de grupo enumeravelmente compacta, então o mesmo admite uma topologia de grupo enumeravelmente compacta com uma seqüência não trivial convergente?*

Um grupo abeliano G é dito *algebricamente compacto* se existe um grupo abeliano H tal que $G \times H$ admite uma topologia de grupo compacta. Os grupos algebricamente compactos formam uma subclasse "estreita" da classe dos grupos abelianos (por exemplo, $\mathbb{Z}$ não é um grupo algebricamente compacto). Por outro lado, todo grupo abeliano G é *algebricamente pseudocompacto*, ou seja, é possível encontrar um grupo abeliano H tal que $G \times H$ admite uma topologia de grupo pseudocompacta. Em [16], os autores perguntam se todo grupo abeliano G é algebricamente enumeravelmente compacto, isto é, se é possível encontrar um grupo abeliano H tal que $G \times H$ admite uma topologia de grupo enumeravelmente compacta.

Madariaga-Garcia e Tomita [30] e Tkachenko [36] propuseram uma questão semelhante. Eles perguntaram se o grupo abeliano livre de cardinalidade $\mathfrak{c}$ admite uma topologia de grupo que torna seu quadrado enumeravelmente compacto. Neste trabalho, demos uma resposta afirmativa a tal indagação, assumindo a existência de $\mathfrak{c}$ ultrafiltros seletivos dois a dois incomparáveis e utilizando ferramentas até então inusitadas, tais como o teorema de Kronecker para curvas no toro $\mathbb{T}^2$ e a caracterização das soluções gerais de equações diofantinas lineares em duas variáveis.

Há interesse em saber que outros grupos abelianos admitem uma tal topologia (e, em particular, são algebricamente enumeravelmente compactos).

Problema 8.2.4. *Caracterizar algebricamente os grupos abelianos de não torção que têm cardinalidade* $\mathfrak{c}$ *e que admitem uma topologia de grupo que torna seu quadrado enumeravelmente compacto.*

Em [15], os autores mostraram (via *forcing*) que a existência de uma topologia de grupo enumeravelmente compacta no grupo abeliano livre de cardinalidade $2^{\mathfrak{c}}$ é consistente (com ZFC). Todavia, nada se sabe a respeito de grupos maiores.

Problema 8.2.5. *É possível munir o grupo abeliano livre de cardinalidade* $2^{2^{\mathfrak{c}}}$ *de uma topologia que o torna um grupo topológico enumeravelmente compacto?*

Encerraremos esta seção discorrendo sobre o problema de Scarborough-Stone, o qual relaciona as noções de compacidade seqüencial em produtos e compacidade enumerável no espaço resultante. Recordamos que um espaço topológico X é *seqüencialmente compacto* se toda seqüência em X possui uma subseqüência convergente.

Em 1966, Scarborough e Stone [34] perguntaram se qualquer produto de espaços topológicos seqüencialmente compactos é enumeravelmente compacto. Assumindo o axioma diamante $\diamondsuit$, Vaughan [42] construiu uma família de espaços T_6 seqüencialmente compactos cujo produto não é enumeravelmente compacto. Isto mostra a consistência (com ZFC) de uma resposta negativa para o problema de Scarborough-Stone.

Uma conjunção de resultados de diversos matemáticos — incluindo Vaughan, Nyikos, Soukup, Velicovic e Weiss — soluciona completamente o problema em questão para espaços topológicos satisfazendo determinados axiomas de separação. Eles mostraram que tanto "sim" quanto "não" são respostas consistentes (com ZFC) para o problema de Scarborough-Stone restrito à classe dos espaços T_5 e T_6.

A restrição do problema de Scarborough-Stone à classe dos grupos topológicos — citada em [44] e [43], por exemplo — permanece, contudo, aberta.

Problema 8.2.6. (Problema de Scarborough-Stone para grupos topológicos) *O produto de grupos topológicos seqüencialmente compactos é enumeravelmente compacto?*

APÊNDICE A

Ultrafiltros seletivos

Denotaremos por $\beta\omega$ a compactificação de Stone-Čech do espaço discreto ω, a qual será identificada com o conjunto de todos os ultrafiltros sobre ω munido da topologia que tem $\{V(A) : A \subset \omega\}$ como base de abertos, onde $V(A) = \{u : u$ é um ultrafiltro sobre ω e $A \in u\}$. Nesta identificação, o espaço discreto ω corresponde à família dos ultrafiltros principais sobre ω. Representaremos por ω^* a família dos ultrafiltros livres sobre ω (isto é, $\omega^* = \beta\omega \setminus \omega$).

Dada $f : \omega \to \omega$, a função $\beta f : \beta\omega \to \beta\omega$ definida por

$$\beta f(p) = \{A \subset \omega : f^{-1}(A) \in p\}$$

é denominada a *extensão de Stone-Čech* de f.

Definição A.1. *Dados $p, q \in \omega^*$, dizemos que $p \leq_{RK} q$ se existe uma função $f : \omega \to \omega$ tal que $\beta f(q) = p$, onde βf denota a extensão de Stone-Čech de f. A pré-ordem $\leq_{RK}$ em ω^* é chamada de* ordem de Rudin-Keisler.[1]

Definição A.2. *Dizemos que $p, q \in \omega^*$ são* equivalentes *(e escrevemos $p \equiv_{RK} q$) se existe uma bijeção $f : \omega \to \omega$ tal que $p = \beta f(q)$, onde onde βf denota a extensão de Stone-Čech de f.*

A demonstração do próximo lema foi extraída de [4].

[1] Por "pré-ordem", entendemos uma relação reflexiva e transitiva.

Lema A.3. *Se $f : \omega \to \omega$ e $p \in \omega^*$ são tais que $\beta f(p) = p$, então $\{n \in \omega : f(n) = n\} \in p$.*

Demonstração. Se $x, y \in \omega$, escreveremos $x \sim y$ se, e somente se, existem $m, n \in \omega$ tais que $f^n(x) = f^m(y)$.[2] Temos que $\sim$ é uma relação de equivalência em ω e, evidentemente, $f(x) \sim x$. Diremos que $x \in \omega$ é *periódico* se existir $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $f^k(x) = x$. Tomemos $A \subset \omega$ de modo que:

- $|A \cap E| = 1$, para todo $E \in \omega/\sim$;
- Se E possui um elemento periódico, então o elemento de $A \cap E$ também é periódico, qualquer que seja $E \in \omega/\sim$.

Fixemos $E \in \omega/\sim$ e denotemos por a o elemento de $A \cap E$. Para cada $x \in E$, sejam

$$m(x) = \min\{m \in \omega : \exists n \in \omega \text{ tal que } f^n(x) = f^m(a)\},$$

$$n(x) = \min\{n \in \omega : f^n(x) = f^{m(x)}(a)\}$$

e

$$d(x) = m(x) - n(x).$$

Afirmamos que $d(f(x)) = d(x) + 1$ ou $x = a$. Com efeito, seja $y = f(x)$. Temos que

$$f^{n(y)+1}(x) = f^{n(y)}(y) = f^{m(y)}(a)$$

e, portanto, $m(x) \leq m(y)$. Há dois casos a serem considerados:

Caso 1: $m(x) < m(y)$.

Se $n(x) \geq 1$, então $f^{n(x)-1}(y) = f^{n(x)}(x) = f^{m(x)}(a)$ o contradiz a definição de $m(y)$, uma vez que $m(x) < m(y)$. Logo, $n(x) = 0$, o que implica $x = f^{m(x)}(a)$ e, portanto, $y = f(x) = f^{m(x)+1}(a)$. Assim, $m(y) \leq m(x) + 1$. Como $m(x) < m(y)$, temos que $m(y) = m(x)+1$. Uma vez que $y = f^{m(x)+1}(a)$, concluímos que $n(y) = 0$. Dado o exposto, $d(y) = m(y) - n(y) = m(y) = m(x) + 1 = m(x) - n(x) + 1 = d(x) + 1$.

Caso 2: $m(x) = m(y)$.

Sejam $m = m(x) = m(y)$ e $b = f^m(a)$. Como $m(x) = m(y)$ e $f^{n(y)+1}(x) = f^{n(y)}(y) = f^{m(y)}(a)$, temos que $n(x) \leq n(y)+1$. Se $n(x) = n(y)+1$, então $d(y) = d(x)+1$. Suponhamos

[2] $f^0 = \mathrm{id}_\omega$ e $f^{n+1} = f \circ f^n$, para todo $n \in \omega$.

que $n(x) < n(y) + 1$. Se $n(x) \geq 1$, então $f^{n(x)-1}(y) = f^{n(x)}(x) = f^m(a)$, o que contradiz o fato de $n(x) - 1 < n(y)$. Logo, $n(x) = 0$, o que implica $x = f^m(a) = b$. Como $f^{n(y)+1}(b) = f^{n(y)}(y) = b$, temos que b é periódico. Da definição de A segue que a também é periódico e, portanto, $f^k(a) = a$, para algum $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Tomemos $p \in \mathbb{N}$ tal que $pk \geq m$ e observamos que $f^{pk-m}(x) = f^{pk-m}(f^m(a)) = f^{pk}(a) = a$. Logo, $m = m(x) = 0$ e, portanto, $x = b = a$.

Como E foi tomada arbitrária, podemos considerar $d(x)$, para todo $x \in \omega$. Mostramos acima que $d(f(x)) = d(x) + 1$, para todo $x \in \omega \setminus A$.

Sejam

$$X_0 = \{x \in \omega : d(x) \text{ é par}\}$$

e

$$X_1 = \{x \in \omega : d(x) \text{ é ímpar}\}.$$

Temos que $\omega = X_0 \cup X_1$ e $X_0 \cap X_1 = \emptyset$. Como $p \in \omega^*$, existe $i \in \{0, 1\}$ tal que $X_i \in p$. Observamos que $X_i \cap f^{-1}(X_i) \subset A$. Uma vez que $\beta f(p) = p$, concluímos que $f^{-1}(X_i) \in p$ e, portanto, $A \in p$. O mesmo argumento mostra que $f^{-1}(A) \in p$, o que implica $A \cap f^{-1}(A) \in p$. Contudo, se $x \in A \cap f^{-1}(A)$, então $x, f(x) \in A$. Da definição de A e do fato de $x \sim f(x)$ decorre que $f(x) = x$. Assim, $A \cap f^{-1}(A) \subset \{x \in \omega : f(x) = x\}$ e daí segue que $\{x \in \omega : f(x) = x\} \in p$. $\square$

Proposição A.4. *Se $p, q \in \omega^*$, então $p \equiv_{RK} q$ se, e somente se, $p \leq_{RK} q$ e $q \leq_{RK} p$.*

Demonstração. Se $p \equiv_{RK} q$, então existe $f : \omega \to \omega$ uma bijeção tal que $\beta f(q) = p$ (e, conseqüentemente, $\beta(f^{-1})(p) = q$). Logo, $p \leq_{RK} q$ e $q \leq_{RK} p$. Reciprocamente, suponhamos que $p \leq_{RK} q$ e $q \leq_{RK} p$. Sejam $g, h : \omega \to \omega$ tais que $\beta g(q) = p$ e $\beta h(p) = q$. Temos que $\beta(g \circ h)(p) = p$ e, de acordo com o lema A.3, o conjunto $A = \{n \in \omega : (g \circ h)(n) = n\}$ é um elemento de p. Observamos que $(g \circ h) \restriction_A$ é injetora, o que implica que $h \restriction_A$ também o é. Seja $B \subset A$ tal que $B \in p$ e $|\omega \setminus B| = |\omega \setminus h[B]| = \omega$. Tomemos $f : \omega \to \omega$ uma bijeção tal que $f \restriction_B = h \restriction_B$. Temos que $\beta f(p) = \beta h(p) = q$. Logo, $p \equiv_{RK} q$. $\square$

Dizemos que $p \in \omega^*$ é *minimal com respeito à ordem de Rudin-Keisler* se não existe $q \in \omega^*$ tal que $q \leq_{RK} p$ e $p \not\equiv_{RK} q$. Portanto, se $p, q \in \omega^*$ são minimais com respeito à ordem de Rudin-Keisler, então $p \equiv_{RK} q$ ou p e q são incomparáveis.

Definição A.5. *Um ultrafiltro livre p sobre ω é dito* seletivo *se para cada partição $\{P_n : n \in \omega\}$*

de ω, existe $m \in \omega$ tal que $P_m \in p$ ou existe $B \in p$ tal que $|B \cap P_n| \leq 1$, qualquer que seja $n \in \omega$.[3]

Lema A.6. *Seja $p \in \omega^*$. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) p é Rudin-Keisler minimal;

(ii) Para cada $f : \omega \to \omega$, existe $A \in p$ tal que $f \restriction_A$ é injetora ou constante;

(iii) Se $\{P_n : n \in \omega\}$ é uma partição de ω, então existe $m \in \omega$ tal que $P_m \in p$, ou existe $B \in p$ tal que $|B \cap P_n| \leq 1$, para cada $n \in \omega$;

(iv) Para cada coloração $g : [\omega]^2 \to \{0, 1\}$, existe $C \in p$ tal que C é g-homogêneo (isto é, existe $j \in \{0, 1\}$ tal que $g(\{a, b\}) = j$, para cada par $\{a, b\} \in [C]^2$).

(v) Para cada partição $\{P_0, P_1\}$ de $[\omega]^2$, existem $D \in p$ e $j \in \{0, 1\}$ tais que $[D]^2 \subset P_j$.

Demonstração. Mostraremos que $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Seja $f : \omega \to \omega$ uma função. Se $\beta f(p)$ é um ultrafiltro principal sobre ω, então existe $a \in \omega$ tal que $\{a\} \in \beta f(p)$ e, portanto, $f^{-1}(\{a\}) \in p$. Neste caso, temos que $f \restriction_A$ é constante, onde $A = f^{-1}(\{a\})$. Suponhamos que $\beta f(p)$ seja um ultrafiltro livre sobre ω. Temos que $\beta f(p) \leq_{RK} p$ e, por hipótese, p é minimal. Logo, $p \equiv_{RK} \beta f(p)$. Portanto, existe uma permutação π de ω que satisfaz $p = \beta\pi(\beta f(p)) = (\beta\pi \circ \beta f)(p) = \beta(\pi \circ f)(p)$. Seja $A = \{n \in \omega : (\pi \circ f)(n) = n\}$. Do lema A.3 segue que $A \in p$. Além disso, $f \restriction_A$ é injetora.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Seja $\{P_n : n \in \omega\}$ uma partição de ω e consideremos $f : \omega \to \omega$ dada por $f(x) = n$ se, e somente se, $x \in P_n$. Por hipótese, existe $A \in p$ tal que $f \restriction_A$ é injetora ou constante. No primeiro caso, temos que $|A \cap P_n| \leq 1$, para todo $n \in \omega$. No segundo, temos que existe $n \in \omega$ tal que $P_n \in p$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Seja $g : [\omega]^2 \to \{0, 1\}$ uma coloração. Definamos

$$X_0^0 = \{n \in \omega \setminus \{0\} : g(\{n, 0\}) = 0\}$$

e

$$X_1^0 = \{n \in \omega \setminus \{0\} : g(\{n, 0\}) = 1\}.$$

Temos que $\omega \setminus \{0\} = X_0^0 \cup X_1^0$ e $X_0^0 \cap X_1^0 = \emptyset$. Como $\omega \setminus \{0\} \in p$, existe $i \in \{0, 1\}$ tal que $X_i^0 \in p$. Façamos $A_0 = X_i^0$ e $l_0 = i$. Seja $m \in \omega$ e suponhamos definidos $A_m \in p$ e $l_m \in \{0, 1\}$.

[3] Dizer que $p \in \omega^*$ é seletivo é o mesmo que dizer que, para cada partição $\{P_n : n \in \omega\}$ de ω, existe $m \in \omega$ tal que $P_m \in p$ ou existe $B \in p$ tal que $|B \cap P_n| = 1$, qualquer que seja $n \in \omega$.

Consideremos

$$X_0^{m+1} = \{n \in A_m \setminus (m+1) : g(\{n, m+1\}) = 0\}$$

e

$$X_1^{m+1} = \{n \in A_m \setminus (m+1) : g(\{n, m+1\}) = 1\}.$$

Novamente, existe $i \in \{0,1\}$ tal que $X_i^{m+1} \in p$. Façamos $A_{m+1} = X_i^{m+1}$ e $l_{m+1} = i$.

Observamos que $A_0 \supset A_1 \supset ... \supset A_n \supset ....$ Sejam $P_0 = \omega \setminus A_0$ e $P_{n+1} = A_n \setminus A_{n+1}$, para cada $n \in \omega$. Temos que $\{P_n : n \in \omega\}$ é uma partição de ω tal que $P_n \notin p$, qualquer que seja $n \in \omega$. De (iii) decorre que existe $A \in p$ tal que $|A \cap P_n| \leq 1$, para todo $n \in \omega$. Fixemos um tal A e consideremos $f : \omega \to \omega$ dada por $f(0) = 0$ e

$$f(n+1) = \max\{f(n), \max A \setminus A_{f(n)}\} + 1$$

para cada $n \in \omega$.[4] Uma vez que f é estritamente crescente e $f(0) = 0$, temos que $\{[f(n), f(n+1)[: n \in \omega\}$ é uma partição de ω. Como cada elemento desta partição é um subconjunto finito de ω, nenhum deles pertence a p. De (iii), novamente, segue que existe $B \in p$ tal que $|B \cap [f(n), f(n+1)[| \leq 1$, para todo $n \in \omega$. Temos que $A \cap B \in p$.

Sejam $\{x_n : n \in \omega\}$ uma enumeração estritamente crescente de $A \cap B$,

$$Y_0 = \{x_{2n} : n \in \omega\}$$

e

$$Y_1 = \{x_{2n+1} : n \in \omega\}.$$

Tomemos $i \in \{0,1\}$ tal que $Y_i \in p$ e façamos $D = Y_i$.

Afirmamos que se $m, n \in D$ e $m < n$, então $n \in A_m$. Com efeito, da definição de D segue que existe $k \in \omega$ tal que

$$m < f(k) < f(k+1) \leq n$$

e, portanto, $n > \max A \setminus A_{f(k)}$. Como $n \in A$, temos que $n \in A_{f(k)}$. Contudo, $A_m \supset A_{f(k)}$, uma vez que $m < f(k)$. Logo, $n \in A_m$.

Sejam

$$D_0 = \{n \in D : l_n = 0\},$$

[4] Observamos que $A \setminus A_{f(n)} = A \cap (P_0 \cup P_1 \cup ... \cup P_{f(n)})$ e, portanto, este é um conjunto finito.

$$D_1 = \{n \in D : l_n = 1\}$$

e $i \in \{0,1\}$ tal que $D_i \in p$. Temos que $C = D_i$ é g-homogêneo. De fato, se $\{m,n\} \in [C]^2$ e $m < n$, então $g(\{m,n\}) = l_m = i$, uma vez que $n \in A_m$.

$(iv) \Rightarrow (v)$: Seja $\{P_0, P_1\}$ uma partição de $[\omega]^2$. Consideremos a coloração $g : [\omega]^2 \to \{0,1\}$ dada por $g(\{x,y\}) = 0$, se $\{x,y\} \in P_0$ e $g(\{x,y\}) = 1$, se $\{x,y\} \in P_1$. Por hipótese, existe $C \in p$ tal que C é g-homogêneo e, portanto, existe $j \in 2$ tal que $[C]^2 \subset P_j$.

$(v) \Rightarrow (iv)$: Seja $g : [\omega]^2 \to \{0,1\}$ uma coloração. Consideremos $\{P_0, P_1\}$ a seguinte partição de $[\omega]^2$: $\{x,y\} \in [\omega]^2$ pertence a P_0 se $g(\{x,y\}) = 0$. Caso contrário, $\{x,y\} \in P_1$. Por hipótese, existem $D \in p$ e $j \in 2$ tais que $[D]^2 \subset P_j$. Logo, D é g-homogêneo.

$(iv) \Rightarrow (iii)$: Seja $\{P_n : n \in \omega\}$ uma partição de ω. Suponhamos que $P_n \notin p$, para todo $n \in \omega$. Definamos a coloração $g : [\omega]^2 \to \{0,1\}$ da seguinte maneira: $g(\{x,y\}) = 0$ se $\{x,y\} \subset P_n$, para algum $n \in \omega$ e $g(\{x,y\}) = 1$, caso contrário. Por hipótese, existe $A \in p$ tal que g é constante em $[A]^2$. Como estamos supondo que $P_n \notin p$, para todo $n \in \omega$, temos que $|A \cap P_n| \leq 1$, para cada $n \in \omega$.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Seja p um ultrafiltro livre sobre ω satisfazendo (3). Vamos mostrar que para cada função $f : \omega \to \omega$ tal que $\beta f(p) \in \omega^*$, temos que $\beta f(p) \equiv_{RK} p$. Seja, portanto, f como acima. Para cada $n \in \omega$, consideremos $P_n = f^{-1}(\{n\})$. Temos que $\{P_n : n \in \omega\}$ é uma partição de ω tal que $P_n \notin p$, para todo $n \in \omega$. Por hipótese, existe $A \in p$ tal que $|A \cap P_n| \leq 1$, para cada $n \in \omega$. Daí, segue que $f \restriction_A$ é injetora e, portanto, $\beta f(p) \equiv_{RK} p$. □

Lema A.7. *[41] Sejam p um ultrafiltro seletivo e $\{a_k : k \in \omega\} \in p$ uma seqüência estritamente crescente de números naturais tal que $k < a_k$, para todo $k \in \omega$. Existe $I \subset \omega$ tal que:*

(i) $\{a_k : k \in I\} \in p$;

(ii) $\{[k, a_k] : k \in I\}$ *é uma família de intervalos de ω dois a dois disjuntos.*

Demonstração. Consideremos $A = \{a_k : k \in \omega\} \in p$ uma seqüência estritamente crescente de números naturais tal que $k < a_k$, para cada $k \in \omega$. Definamos uma partição $\{P_0, P_1\}$ de $[\omega]^2$ da seguinte maneira: para cada $\{x,y\} \in [\omega]^2$, $\{x,y\}$ é um elemento de P_0 se, e somente se, existem $i, k \in \omega$, com $i < k$, tais que $\{x,y\} = \{a_i, a_k\}$ e $a_i < k$. Como p é um ultrafiltro seletivo, do lema A.6 decorre que existe $B \in p$ tal que $B \subset A$ e $[B]^2 \subset P_0$ ou $[B]^2 \subset P_1$.

Afirmamos que $[B]^2 \not\subset P_1$. Com efeito, seja $\{t_n : n \in \omega\}$ uma seqüência estritamente crescente de números naturais tal que $B = \{a_{t_n} : n \in \omega\}$. Se $\{a_{t_0}, a_{t_n}\} \in P_1$, então $a_{t_0} \geq t_n$ para todo $n > 0$, o que é uma contradição. Portanto, $[B]^2 \subset P_0$. Assim, se $\{a_i, a_k\} \in [B]^2$ com $a_i < a_k$,

então $i < a_i < k < a_k$. Seja $I \subset \omega$ tal que $B = \{a_k : k \in I\}$. As condições (i) e (ii) são satisfeitas. $\square$

Lema A.8. *[41] Sejam p_0 e p_1 ultrafiltros seletivos incomparáveis (segundo a ordem de Rudin-Keisler). Para cada $j \in 2$, seja $\{a_k^j : k \in \omega\} \in p_j$ uma seqüência estritamente crescente de números naturais tal que $k < a_k^j$, qualquer que seja $k \in \omega$. Existem I_0 e I_1 subconjuntos disjuntos de ω tais que:*

(i) $\{a_k^j : k \in I_j\} \in p_j$, para cada $j \in 2$;

(ii) $\{[k, a_k^j] : j \in 2, k \in I_j\}$ é uma família de intervalos de ω dois a dois disjuntos.

Demonstração. De acordo com o lema A.7, existem $J_0, J_1 \subset \omega$ tais que

(1) $B_j = \{a_k^j : k \in J_j\} \in p_j$, para cada $j \in 2$;

(2) $\{[k, a_k^j] : k \in J_j\}$ é uma família de intervalos de ω dois a dois disjuntos, para cada $j < 2$.

Uma vez que p_0 e p_1 são ultrafiltros distintos, podemos assumir que

(3) $B_0 \cap B_1 = \emptyset$.[5]

Nosso objetivo é encontrar $I_0 \subset J_0$ e $I_1 \subset J_1$ subconjuntos disjuntos de ω de modo a satisfazer os ítens (i) e (ii). De acordo com (2), o item (ii) estará satisfeito se valer

(4) $[i, a_i^0] \cap [k, a_k^1] = \emptyset$, quaisquer que sejam $i \in I_0$ e $k \in I_1$.[6]

Da seletividade de p_1 e de (3) decorre que existe $C_1 \in p_1$ tal que $C_1 \subset B_1$ e tal que se a e b são elementos consecutivos de B_0, então $|[a, b] \cap C_1| \leq 1$. Seja

$$T = \bigcup \{[i, a_i^0] : a_i^0 \in B_0 \text{ e } [i, a_i^0] \cap C_1 \neq \emptyset\}.$$

Se $n \in T$, existe um único $t \in \omega$ tal que $n \in [t, a_t^0]$ e existe um único $m \in \omega$ tal que $\{m\} = [t, a_t^0] \cap C_1$. Façamos $f_0(n) = m$ para cada $n \in T$ e definamos f_0 em $\omega \setminus T$ arbitrariamente.

Uma vez que $\beta f_0(p_0) \neq p_1$ (pois p_0 e p_1 são incomparáveis), existe $D_1 \in p_1$ tal que $D_1 \subset C_1$ e $f_0^{-1}(D_1) \notin p_0$. Seja $C_0 = B_0 \setminus f_0^{-1}(D_1) \in p_0$.

[5] De fato, se tomarmos $C \in p_0 \setminus p_1$, podemos trabalhar com os conjuntos $B_0 \cap C \in p_0$ e $B_1 \cap (\omega \setminus C) \in p_1$.

[6] Se valer (4), então I_0 e I_1 serão disjuntos.

Afirmamos que se $a_i^0 \in C_0$, então $[i, a_i^0] \cap D_1 = \emptyset$. De fato, se $a_t^1 \in [i, a_i^0] \cap D_1$, então $\{a_t^1\} = [i, a_i^0] \cap D_1 = [i, a_i^0] \cap C_1$ e, portanto, $f_0(a_i^0) = a_t^1 \in D_1$. Assim, $a_i^0 \in f_0^{-1}(D_1)$, o que contradiz a definição de C_0.

Usando a seletividade de p_0, podemos encontrar $D_0 \in p_0$ tal que $D_0 \subseteq C_0$ e tal que se a e b são elementos consecutivos de D_1, então $|[a, b] \cap D_0| \leq 1$.

Por um argumento análogo, concluímos que existem $E_0 \in p_0$, $E_1 \in p_1$ tais que:

(5) $E_j \subset D_j$, para cada $j \in 2$;

(6) Se $a_t^1 \in E_1$, então $[t, a_t^1] \cap E_0 = \emptyset$.

(7) Se $a_i^0 \in E_0$, então $[i, a_i^0] \cap E_1 = \emptyset$.

Seja $I_j \subset \omega$ tal que $E_j = \{a_k^j : k \in I_j\}$, para cada $j \in 2$. Do item (5), segue que I_0 e I_1 satisfazem (i). Conforme observado, para mostrar que vale (ii), é suficiente mostrar que vale (4). Portanto, suponhamos por absurdo que existam $i \in I_0$ e $t \in I_1$ tais que $[i, a_i^0] \cap [t, a_t^1] \neq \emptyset$. Então, $a_i^0 \in [t, a_t^i]$ ou $a_t^1 \in [i, a_i^0]$, o que contradiz (6) e (7). Logo, (ii) está satisfeita. □

Lema A.9. *[40] Seja $\{p_j : j \in \omega\}$ uma família de ultrafiltros seletivos dois a dois incomparáveis (segundo a ordem de Rudin-Keisler). Para cada $j \in \omega$, seja $\{a_k^j : k \in \omega\} \in p_j$ uma seqüência estritamente crescente de números naturais tal que $k < a_k^j$, qualquer que seja $k \in \omega$. Existe $\{I_j : j \in \omega\}$ uma família de subconjuntos de ω dois a dois disjuntos tal que:*

(i) $\{a_k^j : k \in I_j\} \in p_j$, para cada $j \in \omega$;

(ii) $\{[k, a_k^j] : j \in \omega, k \in I_j\}$ é uma família de intervalos de ω dois a dois disjuntos.

Demonstração. Por indução, vamos construir para quaisquer $j, t \in \omega$, um subconjunto $I_{j,t}$ de ω tal que:

(1) $I_{j,t+1} \subset I_{j,t}$, para cada $t \in \omega$;

(2) $\{[k, a_k^j] : j \leq t,\ k \in I_{j,t}\}$ é uma família de intervalos de ω dois a dois disjuntos, para todo $t \in \omega$;

(3) $\{a_k^j : k \in I_{j,t}\} \in p_j$, quaisquer que sejam $j, t \in \omega$.

Do lema A.7 segue que existe $I_{0,0} \subset \omega$ tal que $\{a_k^0 : k \in I_{0,0}\} \in p_0$ e $\{[k, a_k^j] : k \in I_{0,0}\}$ é uma família de intervalos de ω dois a dois disjuntos.

Suponha que $I_{j,t}$ tenha sido definido para $j, t \leq s$ de modo a satisfazer as condições (1), (2) e (3). Seja $I_{s+1,0} = \omega$. Resta definir $I_{s+1,t+1}$ e $I_{t,s+1}$, para $0 \leq t \leq s$. Aplicamos o lema A.8 para $\{a_k^{s+1} : k \in I_{s+1,0}\}$ e $\{a_k^0 : k \in I_{0,s}\}$, obtendo $I_{s+1,1}$ e $I_{0,s+1}$. Em seguida, aplicamos novamente o lema A.8 para $\{a_k^{s+1} : k \in I_{s+1,1}\}$ e $\{a_k^1 : k \in I_{1,s}\}$, obtendo $I_{s+1,2}$ e $I_{1,s+1}$. Continuamos com este processo até aplicarmos o lema A.8 para $\{a_k^{s+1} : k \in I_{s+1,s}\}$ e $\{a_k^s : k \in I_{s,s}\}$, obtendo assim $I_{s+1,s+1}$ e $I_{s,s+1}$. Observamos que:

- $I_{t,s+1} \subset I_{t,s}$ e $I_{s+1,t+1} \subset I_{s+1,t}$, para todo $t \leq s$;
- $\{[k, a_k^t] : k \in I_{t,s+1}\} \cup \{[k, a_k^{s+1}] : k \in I_{s+1,t+1}\}$ é uma família de intervalos de ω dois a dois disjuntos;
- $\{a_k^t : k \in I_{t,s+1}\} \in p_t$ e $\{a_k^{s+1} : k \in I_{s+1,t+1}\} \in p_{s+1}$, para todo $t \leq s$.

Temos que (1), (2) e (3) são satisfeitas para quaisquer $j, t \leq s+1$. Portanto, podemos definir $I_{j,t}$ satisfazendo (1), (2) e (3) para quaisquer $j, t \in \omega$.

Para cada $j \in \omega$, p_j é seletivo. De acordo com (3), existe $K_j \subset I_{j,j}$ tal que:

(4) $K_j \setminus I_{j,t}$ é finito, para cada $t \in \omega$;

(5) $\{a_k^j : k \in K_j\} \in p_j$.

De (4) decorre que existe $M_j \in \omega$ tal que:

(6) $K_l \subset I_{l,j} \cup M_j$, para todo $l \leq j$;

Seja

(7) $I_j = K_j \setminus \max\{a_k^l + 1 : l < j, k < M_j\}$.

De acordo com (5), I_j satisfaz (i), para cada $j \in \omega$.

Sejam $j, j', k, k' \in \omega$ com $k \in I_j$ e $k' \in I_{j'}$. Se $j = j'$, dos ítens (7) e (4) decorre que k, $k' \in I_j \subset I_{j,j}$. De (2) segue que $[k, a_k^j] \cap [k', a_{k'}^j] = \emptyset$. Podemos assumir, portanto, que $j' < j$. Temos que $k \in I_{j,j}$. Se $k' \in I_{j',j}$, de (2) segue que $[k, a_k^j] \cap [k', a_{k'}^{j'}] = \emptyset$. Se $k' \notin I_{j',j}$, então $k' \in M_j$, pois $k' \in I_{j'} \subset K_{j'} \subset I_{j',j} \cup M_j$. De (7) segue que $k > a_{k'}^{j'}$. Logo, $[k, a_k^j] \cap [k', a_{k'}^{j'}] = \emptyset$. $\square$

APÊNDICE B

Ultrafiltros seletivos e o axioma de Martin

Seja $(\mathbb{P}, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Dizemos que $p, q \in \mathbb{P}$ são *incompatíveis* se não existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ e $r \leq q$. Um subconjunto A de $\mathbb{P}$ é uma *anticadeia* se quaisquer dois elementos distintos de A forem incompatíveis. Dizemos que $D \subset \mathbb{P}$ é *denso* se, para cada $p \in \mathbb{P}$, existe $q \in D$ tal que $q \leq p$. Por fim, $G \subset \mathbb{P}$ é dito um *filtro genérico* para uma família $\mathcal{D}$ de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ se:

(1) $\forall p, q \in G \; \exists r \in G \; (r \leq p \text{ e } r \leq q)$;

(2) $\forall p \in G \; \forall q \in \mathbb{P} \; (p \leq q \to q \in G)$;

(3) $D \in \mathcal{D} \to G \cap D \neq \emptyset$.

O *axioma de Martin* (MA) afirma que se $\mathbb{P}$ é um conjunto parcialmente ordenado de modo que todas as suas anticadeias sejam enumeráveis, então para cada família $\mathcal{D}$ de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ tal que $|\mathcal{D}| < \mathfrak{c}$, existe um filtro genérico.

O *axioma de Martin para ordens parciais enumeráveis* ($\mathrm{MA}_{\mathrm{countable}}$) afirma, por sua vez, que se $\mathbb{P}$ é um conjunto parcialmente ordenado enumerável, então para cada família $\mathcal{D}$ de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ tal que $|\mathcal{D}| < \mathfrak{c}$, existe um filtro genérico.

Não há dúvidas de que MA implica $\mathrm{MA}_{\mathrm{countable}}$. Mostraremos a seguir que $\mathrm{MA}_{\mathrm{countable}}$ implica a existência de $2^{\mathfrak{c}}$ ultrafiltros seletivos (dois a dois incomparáveis segundo a ordem de

Rudin-Keisler em ω^*). A demonstração que apresentaremos aqui deve-se a A. Blass e encontra-se em [5].[1]

Lema B.1. ($\mathrm{MA}_{\mathrm{countable}}$) *Se $\mathfrak{B}$ é base para um ultrafiltro livre sobre ω, então $|\mathfrak{B}| = \mathfrak{c}$.*

Demonstração. Por absurdo, suponhamos que exista $\mathfrak{B}$ uma base para um ultrafiltro livre sobre ω tal que $|\mathfrak{B}| < \mathfrak{c}$. Afirmamos que existem $S_0, S_1 \subset \omega$ infinitos e disjuntos tais que $S_0 \cap B \neq \emptyset$ e $S_1 \cap B \neq \emptyset$, qualquer que seja $B \in \mathfrak{B}$. Com efeito, consideremos $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega, 2)$ ordenado pela inclusão reversa (isto é, se $p, q \in \mathbb{P}$, então $p \leq q$ se, e somente, se $p \supset q$). Para cada $n \in \omega$, seja

$$D_n = \{p \in \mathbb{P} : n \in \operatorname{dom} p\}$$

e, dados $B \in \mathfrak{B}$ e $m \in \omega$, consideremos

$$D^m_{B,0} = \{p \in \mathbb{P} : \exists n \in B \setminus m \text{ tal que } p(n) = 0\}$$

e

$$D^m_{B,1} = \{p \in \mathbb{P} : \exists n \in B \setminus m \text{ tal que } p(n) = 1\}.$$

Como $\mathfrak{B}$ é base para um ultrafiltro livre sobre ω, os elementos de $\mathfrak{B}$ são subconjuntos infinitos de ω e, portanto,

$$\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\} \cup \{D^m_{B,0} : B \in \mathfrak{B}, m \in \omega\} \cup \{D^m_{B,1} : B \in \mathfrak{B}, m \in \omega\}$$

é uma família de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ tal que $|\mathcal{D}| \leq \max\{\omega, |\mathfrak{B}|\} < \mathfrak{c}$. Como $|\mathbb{P}| = \omega$, podemos aplicar $\mathrm{MA}_{\mathrm{countable}}$ e garantir a existência de $G \subset \mathbb{P}$ um filtro genérico para $\mathcal{D}$. Se $f = \bigcup G$, então que $f \in {}^{\omega}2$. Definimos $S_1 = f^{-1}(\{0\})$ e $S_2 = f^{-1}(\{1\})$. Temos que S_0 e S_1 são subconjuntos infinitos de ω tais que $S_0 \cap B \neq \emptyset$ e $S_1 \cap B \neq \emptyset$, qualquer que seja $B \in \mathfrak{B}$.

Como $\mathfrak{B}$ gera um ultrafiltro sobre ω e tanto S_0 quanto S_1 intersecta todo elemento de $\mathfrak{B}$, então S_0 e S_1 pertencem ao ultrafiltro em questão, o que é absurdo, uma vez que $S_0 \cap S_1 = \emptyset$. $\square$

Teorema B.2. ($\mathrm{MA}_{\mathrm{countable}}$) *Existem $2^{\mathfrak{c}}$ ultrafiltros seletivos.*

[1] Em [5], o autor mostra que MA implica a existência de $2^{\mathfrak{c}}$ ultrafiltros seletivos (dois a dois incomparáveis segundo a ordem de Rudin-Keisler em ω^*). Como estamos interessados em obter o mesmo resultado partindo de $\mathrm{MA}_{\mathrm{countable}}$, foi necessário fazer uma pequena modificação na demonstração do lema B.1, uma vez que $\mathrm{MA}_{\mathrm{countable}}$ não garante que $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$. Achamos, também, mais adequado reescrever a demonstração do teorema B.2 usando a notação de árvore binária.

Demonstração. Seja $\{f_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ uma indexação do conjunto de todas as funções $f : \omega \to \omega$ de modo que se $\alpha < \mathfrak{c}$ é um ordinal limite, então f_α é uma função limitada. Para cada $\alpha < \mathfrak{c}$ e cada $\varphi \in {}^{\mathfrak{c}}2$, vamos definir $\mathcal{Y}_\alpha^\varphi$ como sendo uma base para algum filtro sobre ω tal que:

(1) $\mathcal{Y}_\alpha^\varphi$ contém todos os subconjuntos cofinitos de ω;

(2) Se $\beta < \alpha$, então $\mathcal{Y}_\beta^\varphi \subset \mathcal{Y}_\alpha^\varphi$;

(3) $|\mathcal{Y}_\alpha^\varphi| \leq \max\{\omega, |\alpha|\}$;

(4) f_α é limitada ou injetora em algum elemento de $\mathcal{Y}_\alpha^\varphi$;

(5) Se α é o primeiro ordinal em que $\varphi : \mathfrak{c} \to 2$ e $\phi : \mathfrak{c} \to 2$ diferem, $\mathcal{Y}_\alpha^\varphi = \mathcal{Y}_\alpha^\psi$, mas $\mathcal{Y}_{\alpha+1}^\varphi$ possui um elemento disjunto de algum elemento de $\mathcal{Y}_{\alpha+1}^\psi$.

Se $\varphi \in {}^0 2$, definimos $\mathcal{Y}_0^\varphi$ como sendo a família de todos os subconjuntos cofinitos de ω. Fixemos $\alpha < \mathfrak{c}$ um ordinal e suponhamos construído $\mathcal{Y}_\beta^\varphi$ para cada $\beta < \alpha$ e cada $\varphi \in {}^\beta 2$. Vamos definir $\mathcal{Y}_\alpha^\varphi$ para cada $\varphi \in {}^\alpha 2$. Se $\alpha < \mathfrak{c}$ é um ordinal limite e $\varphi \in {}^\alpha 2$, façamos $\mathcal{Y}_\alpha^\varphi = \cup_{\beta<\alpha} \mathcal{Y}_\beta^{\varphi\restriction\beta}$. Suponhamos que $\alpha < \mathfrak{c}$ seja um ordinal sucessor — digamos, $\alpha = \beta + 1$ — e fixemos $\varphi \in {}^\alpha 2$. Vamos construir $\mathfrak{B}$ uma base para um filtro sobre ω com as seguintes propriedades:

- $\mathfrak{B} \supset \mathcal{Y}_\beta^{\varphi\restriction\beta}$;
- $|\mathfrak{B}| \leq \max\{\omega, |\alpha|\} < \mathfrak{c}$;
- f_α é limitada ou injetora em algum elemento de $\mathfrak{B}$.[2]

Se f_α é limitada em algum elemento de $\mathcal{Y}_\beta^{\varphi\restriction\beta}$, façamos $\mathfrak{B} = \mathcal{Y}_\beta^{\varphi\restriction\beta}$. Suponhamos, portanto, que f_α seja ilimitada em todo elemento de $\mathcal{Y}_\beta^{\varphi\restriction\beta}$. Seja $\mathbb{P}$ a família de todos os subconjuntos finitos de ω nos quais f_α é injetora, ordenada pela inclusão reversa. Temos que $\mathbb{P}$ é enumerável. Para cada $Y \in \mathcal{Y}_\beta^{\varphi\restriction\beta}$, seja $D_Y = \{p \in \mathbb{P} : p \cap Y \neq \emptyset\}$. Temos que D_Y é denso em $\mathbb{P}$, uma vez que f_α é ilimitada em Y. Como $|\mathcal{Y}_\beta^{\varphi\restriction\beta}| < \mathfrak{c}$, podemos usar $\mathrm{MA}_{\text{countable}}$ para assegurar a existência de um filtro G em $\mathbb{P}$ tal que $G \cap D_Y \neq \emptyset$, para todo $Y \in \mathcal{Y}_\beta^{\varphi\restriction\beta}$. Seja $T = \bigcup G$. Como G é filtro, temos que f_α é injetora em T. Como $G \cap D_Y \neq \emptyset$ para todo $Y \in \mathcal{Y}_\beta^{\varphi\restriction\beta}$, temos que T intersecta todo elemento de $\mathcal{Y}_\beta^{\varphi\restriction\beta}$. Seja $\mathfrak{B}$ a base para um filtro sobre ω obtida adicionando T a $\mathcal{Y}_\beta^{\varphi\restriction\beta}$ e fechando a família resultante por intersecções finitas.

[2] O conjunto $\mathfrak{B}$ funcionará quase como $\mathcal{Y}_\alpha^\varphi$, já que a condição (5) pode falhar.

Como $\mathfrak{B}$ contém todos os subconjuntos cofinitos de ω e $|\mathfrak{B}| < \mathfrak{c}$, do lema B.1 decorre que o filtro gerado por $\mathfrak{B}$ não é um ultrafiltro sobre ω. Portanto, existe $S \subset \omega$ tal que S e $\omega \setminus S$ intersectam todo elemento de $\mathfrak{B}$. Fixemos um tal S. Se $\varphi(\beta) = 0$, adicionamos a $\mathfrak{B}$ o conjunto S e fechamos esta família por intersecções finitas, a fim de obter $\mathcal{Y}_\alpha^\varphi$. Se $\varphi(\beta) = 1$, fazemos o mesmo para o conjunto $\omega \setminus S$.

Para cada $\alpha < \mathfrak{c}$ e cada $\varphi \in {}^{\mathfrak{c}}2$, definimos $\mathcal{Y}_\alpha^\varphi = \mathcal{Y}_\alpha^{\varphi\restriction\alpha}$. As condições (1), (2), (3), (4) e (5) estão satisfeitas. Se $\varphi \in {}^{\mathfrak{c}}2$, tomemos D^φ um ultrafiltro contendo $\cup_{\alpha<\mathfrak{c}}\mathcal{Y}_\alpha^\varphi$. De (1) segue que D^φ é livre. De (4) segue que D^φ é seletivo.[3] De (5) vem que $D^\varphi \neq D^\psi$, se $\varphi \neq \psi$. □

Corolário B.3. ($\mathrm{MA}_{\mathrm{countable}}$) *Existem $2^{\mathfrak{c}}$ ultrafiltros seletivos dois a dois incomparáveis segundo a ordem de Rudin-Keisler em ω^*.*

Demonstração. Do teorema B.2 segue que existem $2^{\mathfrak{c}}$ ultrafiltros seletivos. Sabemos que quaisquer dois deles são incomparáveis ou equivalentes. Como existem apenas $\mathfrak{c}$ bijeções de ω em ω, temos que cada classe de equivalência possui no máximo $\mathfrak{c}$ elementos e, portanto, devemos ter $2^{\mathfrak{c}}$ dessas classes, cada uma tendo um ultrafiltro seletivo como representante. Logo, existem $2^{\mathfrak{c}}$ ultrafiltros seletivos dois a dois incomparáveis segundo a ordem de Rudin-Keisler em ω^*. □

[3] Observamos que se $\mathfrak{U}$ é um ultrafiltro sobre ω, $A \in \mathfrak{U}$ e $f : \omega \to \omega$ é limitada em A, então existe $B \in \mathfrak{U}$ tal que $f\restriction_B$ é constante. Com efeito, $F = \{n \in \omega : f^{-1}(\{n\}) \cap A \neq \emptyset\}$ é um conjunto finito e $A \subset \cup_{n\in F} f^{-1}(\{n\})$. Se $f^{-1}(\{n\}) \notin \mathfrak{U}$ para cada $n \in \omega$, então $\omega \setminus A = \cap_{n\in D}(\omega \setminus f^{-1}(\{n\})) \in \mathfrak{U}$, o que é absurdo. Logo, existe $n \in F$ tal que $B = f^{-1}(\{n\}) \in \mathfrak{U}$. Claramente, $f\restriction_B$ é constante.

Referências Bibliográficas

[1] A. Arhangel'skii and M. Tkachenko, *Topological groups and related structures*, Atlantis Press, 2008.

[2] J. E. Baumgartner, *Sacks forcing and the total failure of Martin's axiom*, Topology Appl. **19** (1985), 211–225.

[3] A. R. Bernstein, *A new kind of compactness for topological spaces*, Fund. Math. **66** (1970), 185–193.

[4] A. R. Blass, *Orderings of ultrafilters*, Ph.D. thesis, Harvard University, 1970.

[5] _____, *The Rudin-Keisler ordering of p-points*, Trans. Am. Math. Soc. **179** (1973), 145–166.

[6] A. C. Boero, S. Garcia-Ferreira, and A. H. Tomita, *A countably compact free Abelian group of size continuum that admits a non-trivial convergent sequence*, submitted.

[7] A. C. Boero and A. H. Tomita, *Algebraic structure of countably compact Abelian groups of size continuum from selective ultrafilters*, submitted.

[8] _____, *A countably compact group topology on Abelian almost torsion-free groups from selective ultrafilters*, to appear in Houston J. Math.

[9] _____, *A group topology on the free Abelian group of cardinality* $\mathfrak{c}$ *that makes its square countably compact*, Fund. Math. **212** (2011), 235–260.

[10] T. Bröcker and T. tom Dieck, *Representations of compact Lie groups*, Springer, 1985.

[11] I. Castro-Pereira and A. H. Tomita, *Abelian torsion groups with a countably compact group topology*, Topology Appl. **157** (2010), 44–52.

[12] W. W. Comfort, *Problems on topological groups and other homogeneous spaces*, Open problems in topology (J. van Mill and G. M. Reed, eds.), North-Holland, 1990, pp. 313–347.

[13] W. W. Comfort, K. H. Hofmann, and D. Remus, *Topological groups and semigroups*, Recent progress in general topology (M. Husek and J. van Mill, eds.), North-Holland, 1992, pp. 57–144.

[14] D. Dikranjan and D. Shakhmatov, *Algebraic structure of pseudocompact groups*, Memoirs Amer. Math. Soc. **133** (1998).

[15] ———, *Forcing hereditarily separable compact-like group topologies on Abelian groups*, Topology Appl. **151** (2005), 2–54.

[16] ———, *Selected topics from the structure theory of topological groups*, Open problems in topology II (E. Pearl, ed.), Elsevier, 2007, pp. 389–406.

[17] D. Dikranjan and M. G. Tkachenko, *Algebraic structure of small countably compact Abelian groups*, Forum Math. **15** (2003), 811–837.

[18] E. K. van Douwen, *The product of two countably compact topological groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **262** (1980), 417–427.

[19] R. Engelking, *General topology*, Heldermann, 1989.

[20] S. Garcia-Ferreira, A. H. Tomita, and S. Watson, *Countably compact groups from a selective ultrafilter*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), 937–943.

[21] D. L. Grant, *Sequentially compact cancellative topological semigroups: some progress on the Wallace problem*, Ann. N. Y. Acad. Sci. **704** (1993), 150–154.

[22] A. Hajnal and L. Juhász, *A separable normal topological group need not be Lindelöf*, Gen. Topology Appl. **6** (1976), 199–205.

[23] P. R. Halmos, *Comment on the real line*, Bull. Amer. Math. Soc. **50** (1944), 877–878.

[24] D. K. Harrison, *Infinite Abelian groups and homological methods*, Ann. Math. **69** (1959), 366–391.

[25] A. Hulanicki, *Algebraic structure of compact Abelian groups*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys. **6** (1958), 71–73.

[26] T. Jech, *Set theory*, Springer, 2003.

[27] I. Kaplansky, *Infinite Abelian groups*, University of Michigan Press, 1954.

[28] K. Kunen, *Some points in* $\beta\mathbb{N}$, Proc. Cambridge Philos. Soc. **80** (1976), 385–398.

[29] ———, *Set theory: an introduction to independence proofs*, North Holland, 1983.

[30] R. E. Madariaga-Garcia and A. H. Tomita, *Countably compact topological group topologies on free Abelian groups from selective ultrafilters*, Topology Appl. **154** (2007), 1470–1480.

[31] K. Numakura, *On bicompact semigroups*, Math. J. Okayama Univ. **1** (1952), 99–108.

[32] D. Robbie and S. Svetlichny, *An answer to A. D. Wallace's question about countably compact cancellative semigroups*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 325–330.

[33] D. J. S. Robinson, *A course in the theory of groups*, Springer, 1995.

[34] C. T. Scarborough and A. H. Stone, *Products of nearly compact spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **124** (1966), 131–147.

[35] M. G. Tkachenko, *Countably compact and pseudocompact topologies on free Abelian groups*, Soviet Math. (Izv. VUZ) **34** (1990), 79–86.

[36] ———, *Topological groups: between compactness and* $\aleph_0$*-boundedness*, Recent progress in general topology II (J. van Mill M. Husek, ed.), Elsevier, 2002, pp. 515–543.

[37] M. G. Tkachenko and I. Yaschenko, *Independent group topologies on Abelian groups*, Topology Appl. **122** (2002), 425–451.

[38] A. H. Tomita, *The existence of initially* ω_1*-compact group topologies on free Abelian groups is independent of ZFC*, Comment. Math. Univ. Carolinae **39** (1998), 401–413.

[39] ———, *On the number of countably compact group topologies on a free Abelian group*, Topology Appl. **98** (1999), 345–353.

[40] _____, *A solution to Comfort's question on the countable compactness of powers of a topological group*, Fund. Math. **186** (2005), 1–24.

[41] A. H. Tomita and S. Watson, *Ultraproducts, p-limits and antichains on the Comfort group order*, Topology Appl. **143** (2004), 147–157.

[42] J. E. Vaughan, *Products of perfectly normal sequentially compact spaces*, J. London Math. Soc. **14** (1976), 517–520.

[43] _____, *Small uncountable cardinals and topology*, Open problems in topology (J. van Mill and G. M. Reed, eds.), North-Holland, 1990, pp. 195–218.

[44] _____, *The Scarborough-Stone problem*, Open problems in topology II (E. Pearl, ed.), Elsevier, 2007, pp. 249–256.

[45] A. D. Wallace, *The structure of topological semigroups*, Bull. Amer. Math. Soc. **61** (1955), 95–112.

Índice Remissivo

Δ-sistema, 11
ϵ-denso, 9

anticadeia, 165
aplicação
    cofinal, 11
axioma de Martin, 165
    para ordens parciais enumeráveis, 165

base
    para um filtro, 12

caráter
    de um ponto, 9
cardinal
    regular, 11
    singular, 11
cofinalidade, 11

denso, 165

espaço
    enumeravelmente compacto, 8
    pseudocompacto, 8

filtro, 12
    genérico, 165
    gerado, 12

grupo
    de não torção, 6
    de torção, 6
    de torção limitada, 6
    divisível, 7
    quase livre de torção, 6
    quase-cíclico, 7
    topológico, 10
grupos topológicos
    isomorfos, 10

incompatíveis, 165
isomorfismo
    de grupos topológicos, 10

periódico, 156
peso, 9
ponto
    de acumulação, 8
produto diagonal, 28

raiz

n-ésima, 7
n-ésima da unidade, 7
do Δ-sistema, 11

semigrupo, 10
topológico, 10
subconjunto
independente, 6
subgrupo
de torção, 6
suporte, 6

ultrafiltro, 12
livre, 12
principal, 12