**Unificação das generalizações do teorema
de Banach-Stone para os espaços $C_0(K, X)$**

Fabiano Carlos Cidral

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Elói Medina Galego

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, 27 de junho de 2014

Unificação das generalizações do teorema de Banach-Stone para os espaços $C_0(K, X)$

Esta tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa realizada por Fabiano Carlos Cidral em 27/06/2014. O original encontra-se disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão julgadora:

- Prof. Dr. Elói Medina Galego - IME-USP
- Prof. Dr. Daniela Mariz Silva Vieira - IME-USP
- Prof. Dr. Antonio Roberto Silva - UFRJ
- Prof. Dr. Raymundo Luiz de Alencar - ITA
- Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi - ICMC-USP

Agradecimentos

Agradeço a Deus todas as oportunidades concedidas e as pessoas especiais que colocou no meu caminho. Como dizia Jorge Amado, “A vida me deu muito mais do que eu pedi e muito mais do que eu mereci”.

Aos meus pais, Antonio Carlos Cidral e Rose Maria Back Cidral, e ao meu irmão, Felipe Carlos Cidral, que sempre me incentivaram em cada etapa da minha vida.

A minha namorada, Cristiane Warmling dos Santos, agradeço por todo amor, carinho, paciência e compreensão durante todo esse período de muito estudo. Agradeço também, de maneira muito especial, a família da Cristiane por todo carinho e apoio nessa trajetória difícil.

Ao meu orientador, Professor Elói Medina Galego, por acreditar em mim e por todos os conhecimentos adquiridos durante essa caminhada. Agradeço também, a sua paciência em sanar todas as minhas dúvidas e a sua generosidade enorme.

Ao Professor da UFSC, Ivan Pontual Costa e Silva, pela amizade e confiança que muito me ajudaram a prosseguir nesta caminhada nada fácil. Os seus ensinamentos e conselhos foram fundamentais em todas as etapas de minha formação acadêmica.

A Professora, Daniela Mariz Silva Vieira, pelo excelente curso de Espaços de Banach ministrado no segundo semestre de 2012 e pela oportunidade de poder apresentar um seminário sobre o Teorema de Banach-Stone para os demais alunos.

A todos os meus amigos, em especial João Carlos Bez Batti, Lucas Ramiro Talarrico, André Vanderlinde, Maurício Zahn, Michael Rincón, Estefhan Dazzi Wandekokem, Thiago de Brum e João Gonçalves pela convivência, lealdade e compreensão.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pelo apoio financeiro.

“A mente que se abre a uma nova idéia jamais voltará ao seu tamanho original.”

Albert Einstein

Resumo

Dado um espaço localmente compacto Hausdorff K e um espaço de Banach X , $C_0(K, X)$ representa o espaço de Banach das funções contínuas em K com valores em X que se anulam no infinito com a norma do supremo. No presente trabalho, unificamos e melhoramos diversas generalizações obtidas nos últimos anos do teorema clássico de Banach-Stone para os espaços $C_0(K, X)$. No caso em que $X = l_p$ com $2 \leq p < \infty$, os resultados são maximais.

Abstract

Let K be a locally compact Hausdorff space and X a Banach space. By $C_0(K, X)$ we denote the Banach space of all X -valued continuous functions defined on K which vanish at infinity, provided with the supremum norm. In the present work, we unify and strengthen several generalizations obtained in recent years of the classical Banach-Stone theorem for $C_0(K, X)$ spaces. In the case where $X = l_p$ such that $2 \leq p < \infty$, our results are optimal.

Conteúdo

Introdução	13
1 Preliminares	19
1.1 Espaços de Banach	19
1.2 Generalizações do teorema de Banach-Stone	21
1.3 Medidas vetoriais	27
1.4 Representação do bidual de $C_0(K, X)$	30
2 Resultado principal	35
2.1 Observações iniciais	35
2.2 Propriedades do parâmetro $\lambda(X)$	37
2.3 Demonstração do resultado	42
2.4 Consequências	50
3 Outra generalização do teorema de Banach-Stone	53
3.1 O teorema de Jarosz	53
3.2 Problemas em aberto	57

Introdução

Neste trabalho $\mathbb{K}$ indica o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ ou o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$. Dado um espaço localmente compacto Hausdorff K e um espaço de Banach X , $C_0(K, X)$ representa o espaço de Banach das funções contínuas em K com valores em X que se anulam no infinito com a norma do supremo. No caso em que K é compacto, o espaço $C_0(K, X)$ será denotado por $C(K, X)$. Em particular, se $X = \mathbb{K}$, esses espaços serão identificados, respectivamente, por $C_0(K)$ e $C(K)$. Além disso, se existe um isomorfismo T de X em Y com $\|T^{-1}\| \|T\| < \lambda$ para algum $1 < \lambda < +\infty$, a notação será $X \lesssim^\lambda Y$. A bola unitária de X e a esfera unitária de X serão identificadas por B_X e S_X respectivamente.

O Teorema Clássico de Banach-Stone afirma que a topologia de um espaço compacto Hausdorff K é determinada pela estrutura métrica linear do espaço $C(K)$. Mais precisamente, se K e L são espaços compactos Hausdorff e existe uma isometria linear T de $C(K)$ sobre $C(L)$ então K e L são homeomorfos (notação, $K \approx L$). Esse resultado foi obtido para os espaços de funções com valores reais por Banach em 1933 para espaços compactos métricos [4] e estendido por Stone em 1937 para espaços compactos Hausdorff arbitrários [34]. Em 1947, Arens e Kelly provaram o resultado para os espaços de funções com valores complexos [3]. Além disso, o resultado ainda é verdadeiro para os espaços $C_0(K)$ e $C_0(L)$ essencialmente com a mesma prova [5].

Amir [2] e Cambern [9, 10] generalizaram independentemente o teorema de Banach-Stone provando que

$$C_0(K) \lesssim^2 C_0(L) \implies K \approx L. \quad (1)$$

Note que (1) é maximal no sentido que 2 é o maior número possível nesse contexto [11, 18].

Em 1974, Cambern [10] começou a estudar se generalizações do teorema de Banach-Stone para espaços de funções com valores vetoriais eram possíveis. Sendo assim, ele obteve a primeira versão vetorial de (1) provando que se X é um espaço de Hilbert de dimensão finita então

$$C_0(K, X) \lesssim^{\sqrt{2}} C_0(L, X) \implies K \approx L. \quad (2)$$

Obviamente (1) não é um corolário de (2). Onze anos depois, Cambern conseguiu a primeira extensão vetorial de (1) para espaços compactos Hausdorff K e L .

De fato, ele provou em [14, p. 244] que para todo espaço de Banach uniformemente convexo X ,

$$C(K, X) \lesssim^\alpha C(L, X) \text{ com } \alpha = \frac{1}{1 - \delta_X(1)} \implies K \approx L. \quad (3)$$

Como $\delta_{\mathbb{R}}(1) = 1/2$, segue que (3) generaliza (1) para espaços compactos Hausdorff K e L .

Em 1988, Beherends e Cambern [7] concentraram suas atenções em isomorfismos com pequenas distorções entre espaços $C_0(K, X)$. Dessa forma, eles melhoraram o teorema de Cambern (3) mostrando que os espaços uniformemente convexos têm a propriedade isomórfica de Banach-Stone (IBSP) [6]. Mais precisamente, eles demonstraram em [7, p. 24] que se $\lambda_{B-C}(X^*) > 1$ então

$$C_0(K, X) \lesssim^\alpha C_0(L, X) \text{ com } \alpha = \frac{11\lambda_{B-C}(X^*)}{1 + 10\lambda_{B-C}(X^*)} \implies K \approx L. \quad (4)$$

De fato, uma vez que $\|T\|\|T^{-1}\| = 1 + \delta < \alpha$ e $\lambda_{B-C}(X^*) > 1$ então δ satisfaz a condição

$$0 < \delta < \frac{\lambda_{B-C}(X^*) - 1}{1 + 10\lambda_{B-C}(X^*)}. \quad (5)$$

Logo, pelo Teorema 3.4 de [7], os espaços uniformemente convexos têm a propriedade IBSP pois

$$0 < \frac{1 + \delta}{1 - 10\delta} < \lambda_{B-C}(X^*). \quad (6)$$

Uma observação interessante é que a condição $\lambda_{B-C}(X^*) > 1$ coincide no caso real com o fato que X é um espaço uniformemente não quadrado. Portanto, espaços uniformemente convexos X possuem a propriedade $\lambda_{B-C}(X^*) > 1$ [7, p. 16].

Um ano depois, Jarosz [27] investigava ϵ -isometrias sobrejetivas entre espaços de Banach de funções contínuas com valores vetoriais. Como consequência, ele obteve uma nova prova para o teorema de Behrends e Cambern (4) mas com uma constante α diferente. Jarosz definiu o parâmetro

$$\mu(X) := \sup\{\min\{\|x_1 + \lambda x_2\| : |\lambda| = 1\} : x_1, x_2 \in S_X\}$$

e mostrou em [27, p. 313] que se $\mu(X^*) < 2$ então

$$C_0(K, X) \lesssim^\alpha C_0(L, X) \text{ com } \alpha = \frac{4}{2 + \mu(X^*)} \implies K \approx L. \quad (7)$$

Um fato importante é que a condição $\mu(X^*) < 2$ é equivalente à condição $\lambda_{B-C}(X^*) > 1$, veja Observação 2.2. O ponto de partida do nosso trabalho é a seguinte desigualdade envolvendo as constantes α do teorema de Behrends e Cambern (4) e do teorema de Jarosz (7):

$$\frac{11\lambda_{B-C}(X^*)}{1 + 10\lambda_{B-C}(X^*)} < \frac{4}{2 + \mu(X^*)}, \quad (8)$$

para todo espaço de Banach real X , veja Proposição 2.3.

Dessa forma, tendo em vista (4), (7) e (8) é natural perguntar se é possível melhorar ainda mais a constante do teorema de Jarosz (7), pelo menos no caso real. Com o objetivo de oferecer uma resposta afirmativa para o problema acima (Teorema 1 e Observação 2.5), precisamos considerar um novo parâmetro introduzido por Jarosz em [27].

Dado um espaço de Banach X , Jarosz associou ao espaço X o parâmetro

$$\lambda(X) := \inf\{\max\{\|x_1 + \lambda x_2\| : |\lambda| = 1\} : x_1, x_2 \in S_X\}.$$

A condição $\lambda(X) > 1$ é equivalente a condição $\mu(X^*) < 2$, veja Observação 2.2. Assim, podemos enunciar o resultado principal desse trabalho.

Teorema 1. Sejam K e L espaços localmente compactos Hausdorff e X um espaço de Banach real ou um espaço de Banach complexo reflexivo. Se $\lambda(X) > 1$ e T é um isomorfismo de $C_0(K, X)$ sobre $C_0(L, X)$ satisfazendo

$$\|T\| \|T^{-1}\| < \lambda(X),$$

então K é homeomorfo a L .

O Teorema 1 foi inspirado por outro teorema de Jarosz. Em [27, p. 299], ele mostrou que se X é um espaço de Banach com $\lambda(X) > 1$ e K e L são espaços métricos localmente compactos então

$$C_0(K, X) \stackrel{\leq \alpha}{\sim} C_0(L, X) \text{ com } \alpha = \lambda(X) \implies K \approx L. \quad (9)$$

Nossa principal tarefa é estender o resultado de Jarosz (9) para espaços localmente compactos Hausdorff arbitrários K e L no caso em que X é um espaço de Banach real ou um espaço de Banach complexo reflexivo.

A seguir destacaremos as principais consequências do Teorema 1. Primeiramente, observe que o resultado de Amir e Cambern (1) segue diretamente dele pois $\lambda(\mathbb{K}) = 2$. Além disso, o resultado de Cambern (2) também segue imediatamente do Teorema 1, pois

$\lambda(X) = \sqrt{2}$ para todo espaço de Hilbert X de dimensão finita maior do que ou igual a 2 [27, p. 298].

Para mostrar que o Teorema 1 melhora o resultado de Cambern (3), provaremos na Observação 2.1 que para todo espaço de Banach uniformemente convexo X com dimensão maior do que ou igual a 2,

$$\frac{1}{1 - \delta_X(1)} < \lambda(X).$$

Mais ainda, Teorema 1 também melhora o resultado de Behrends e Cambern (4). De fato, mostraremos na Proposição 2.4 que para todo espaço de Banach X com $\lambda_{B-C}(X^*) > 1$,

$$\frac{11\lambda_{B-C}(X^*)}{1 + 10\lambda_{B-C}(X^*)} < \lambda(X).$$

No caso em que X é um espaço de Banach real, Teorema 1 melhora o resultado de Jarosz (7) pois na Proposição 2.5 demonstraremos que

$$\frac{4}{2 + \mu(X^*)} < \lambda(X). \quad (10)$$

No caso em que X é um espaço de Banach complexo reflexivo, o resultado de Jarosz (7) é um corolário do Teorema 1 pois na Observação 2.6 provaremos que para todo espaço de Banach X

$$\frac{4}{2 + \mu(X^*)} \leq \lambda(X). \quad (11)$$

Finalmente, na Proposição 2.7, mostraremos que o Teorema 1 é maximal para os espaços de Banach $X = l_p$ com $2 \leq p < \infty$. Mais precisamente, mostraremos que

$$BS(X) = \lambda(X) = 2^{1/p}. \quad (12)$$

O restante do trabalho está organizado da seguinte maneira. No capítulo 1, apresentamos alguns conceitos e resultados da geometria em espaços de Banach e as principais generalizações do teorema de Banach-Stone. Além disso, lembramos as noções básicas de medidas vetoriais e provamos uma representação do bidual dos espaços $C_0(K, X)$ análoga aquela obtida por Cambern em [13] para os espaços $C(K, X)$. Esse resultado será fundamental na demonstração do Teorema 1. No capítulo 2, mostramos algumas propriedades importantes do parâmetro $\lambda(X)$. Em seguida, demonstramos o Teorema 1 e apresentamos as suas principais consequências.

No último capítulo, analisamos a última generalização do teorema de Banach-Stone para os espaços $C_0(K, X)$ que encontramos na literatura. Ela foi obtida na década de 80 por Jarosz em [26]. Assim, mostramos que no caso em que X e X^* possuem a mesma

constante de James, esse resultado também é uma consequência do teorema principal desta tese. A consideração do caso em que X e X^* não têm a mesma constante de James levou-nos a uma conjectura envolvendo essa constante de espaços de Banach.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Espaços de Banach

Nesta seção, nosso objetivo é lembrar alguns resultados bem conhecidos da geometria de espaços de Banach. Alguns deles serão usados mais para frente sem menção implícita.

Definição 1.1. Sejam X e Y espaços de Banach isomorfos e $T : X \rightarrow Y$ um isomorfismo. A **distorção** de T é o número $\|T\| \|T^{-1}\|$.

Definição 1.2. A **distância de Banach-Mazur** entre espaços de Banach X e Y isomorfos é $d(X, Y) = \inf \{ \|T\| \|T^{-1}\| : T : X \rightarrow Y \text{ é isomorfismo} \}$.

Definição 1.3. Dois espaços de Banach X e Y são **isometricamente isomorfos** quando existe um isomorfismo $T : X \rightarrow Y$ tal que, para todo $x \in X$, tem-se $\|T(x)\| = \|x\|$. Neste caso, a aplicação T é uma **isometria**.

Definição 1.4. Um espaço de Banach real X é chamado **uniformemente convexo** se para todo $0 < \epsilon \leq 2$ existe $0 < \delta < 1$ tal que para todo $x, y \in X$ satisfazendo

$$\|x\| = \|y\| = 1 \text{ e } \|x - y\| \geq \epsilon \text{ temos } \left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$$

Definição 1.5. Seja X um espaço de Banach. Dado $0 \leq \epsilon \leq 2$, o **módulo de convexidade** de X é definido por

$$\delta_X(\epsilon) = \inf \{ 1 - \frac{1}{2} \|x + y\| : \|x\| = \|y\| = 1 \text{ e } \|x - y\| \geq \epsilon \}.$$

Proposição 1.6. Se X é um espaço de Banach e $0 \leq \epsilon_1 < \epsilon_2 \leq 2$ então

$$\frac{\delta_X(\epsilon_2) - \delta_X(\epsilon_1)}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \leq \frac{1 - \delta_X(\epsilon_1)}{2 - \epsilon_1}.$$

Demonstração. Veja a referência [25, Teorema 3.1]. ■

Proposição 1.7. Se X é um espaço de Banach uniformemente convexo então o módulo de convexidade δ_X é estritamente crescente em $[0, 2]$.

Demonstração. Veja a referência [28, p. 276]. ■

Proposição 1.8. Se X é um espaço de Banach, então para todo $0 < \epsilon \leq 2$,

$$\delta_X(\epsilon) \leq 1 - \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}}.$$

Demonstração. Veja a referência [32, p. 15]. ■

Proposição 1.9. (Desigualdades de Clarkson) Se $2 \leq p < \infty$ e $x, y \in S_{l_p}$ então

$$2(\|x\|^p + \|y\|^p)^{q-1} \leq \|x + y\|^q + \|x - y\|^q$$

em que $1/p + 1/q = 1$. Por outro lado, se $1 < p \leq 2$ e $x, y \in S_{l_p}$ então

$$\|x + y\|^q + \|x - y\|^q \leq 2[\|x\|^p + \|y\|^p]^{q-1}$$

em que $1/p + 1/q = 1$.

Demonstração. Veja a referência [17, p. 400]. ■

Como consequência das desigualdades de Clarkson, segue os próximos exemplos.

Exemplo 1.10. Se $1 < p < \infty$ então l_p é uniformemente convexo.

Exemplo 1.11. Se $1 < p < \infty$ então $L_p(X, \Sigma, \mu)$ é uniformemente convexo.

Proposição 1.12. Se X é espaço de Hilbert então X é uniformemente convexo.

Demonstração. Veja a referência [24, p. 1]. ■

Proposição 1.13. Se X é um espaço uniformemente convexo então X é reflexivo.

Demonstração. Veja a referência [20, p. 147]. ■

Definição 1.14. Um espaço de Banach X é **uniformemente não quadrado** quando existe $0 < \delta < 1$ tal que para todo $x, y \in X$ com $\|x\| = \|y\| = 1$ temos que

$$\|x + y\| \leq 2(1 - \delta) \quad \text{ou} \quad \|x - y\| \leq 2(1 - \delta).$$

Exemplo 1.15. Se $1 < p < \infty$ então l_p é uniformemente não quadrado.

Exemplo 1.16. O espaço de Banach l_1 não é um espaço uniformemente não quadrado.

Proposição 1.17. Se X é um espaço uniformemente convexo então X é uniformemente não quadrado.

Demonstração. Segue imediatamente da definição. ■

A seguir, vamos recordar uma topologia muito importante no estudo dos espaços de Banach.

Definição 1.18. Seja X um espaço de Banach e $J : X \rightarrow X^{**}$ a imersão canônica. A topologia **fraca-estrela*** de X^* é a topologia menos fina tal que todos os funcionais lineares na imagem $J(X)$ são contínuos.

Proposição 1.19. Se X um espaço de Banach então X^* munido com a topologia-fraca* é um espaço topológico Hausdorff.

Demonstração. Veja a referência [8, p. 152]. ■

1.2 Generalizações do teorema de Banach-Stone

Nesta seção apresentamos os conceitos e principais resultados envolvendo as generalizações do teorema de Banach-Stone desde a década de 40.

Teorema 1.20. (Teorema de Banach-Stone) Sejam K e L são espaços topológicos localmente compactos Hausdorff. Se $T : C_0(K) \rightarrow C_0(L)$ é um isomorfismo isométrico então K e L são homeomorfos.

Demonstração. Veja a referência [4, p. 170]. ■

Observação 1.21. O Teorema Clássico de Banach-Stone foi obtido para os espaços de funções com valores reais por Banach em 1933 para espaços compactos métricos [4] e estendido por Stone em 1937 para espaços compactos Hausdorff arbitrários [34]. Em 1947, Arens e Kelly provaram o resultado para os espaços de funções com valores complexos [3].

A primeira generalização do Teorema de Banach-Stone foi obtida, independentemente, pelos matemáticos Amir [2] e Cambern [9, 10]. Eles mostraram que não era necessário que os espaços fossem isometricamente isomorfos. Na verdade, basta que os espaços sejam isomorfos com distorção menor do que 2. Esse resultado ficou conhecido como o Teorema de Amir-Cambern.

Teorema 1.22. (Teorema de Amir-Cambern) Sejam K e L são espaços localmente compactos Hausdorff. Se $T : C_0(K) \rightarrow C_0(L)$ é um isomorfismo tal que

$$\|T\| \|T^{-1}\| < 2$$

então K e L são homeomorfos.

Demonstração. Veja as referências [2, p. 206], [9, p. 396] e [10, p. 1062]. ■

Observação 1.23. Cambern provou que 2 é o maior número possível nesse contexto exibindo em [11] dois espaços localmente compactos Hausdorff K e L com K compacto e L não compacto e um isomorfismo $T : C_0(K) \rightarrow C_0(L)$ tal que $\|T\| \|T^{-1}\| = 2$. Um contra-exemplo para o caso em que K e L são compactos é apresentado por Cohen em [18].

Na década de 70, Cambern [12] obteve o primeira generalização vetorial para o teorema de Banach-Stone considerando espaços de Hilbert de dimensão finita maior do que 2. Nesse caso, basta que os espaços sejam isomorfos com distorção menor do que $\sqrt{2}$.

Teorema 1.24. Sejam K e L espaços localmente compactos Hausdorff e H espaço de Hilbert de dimensão finita maior do que 1. Se $T : C_0(K, H) \rightarrow C_0(L, H)$ é um isomorfismo tal que

$$\|T\| \|T^{-1}\| < \sqrt{2}$$

então K e L são homeomorfos.

Demonstração. Veja a referência [12, p. 1]. ■

Em 1985, Cambern obteve uma extensão vetorial do teorema de Banach-Stone para espaços compactos Hausdorff K e L considerando espaços de Banach uniformemente convexo X .

Teorema 1.25. Sejam K e L espaços topológicos compactos Hausdorff e X um espaço de Banach uniformemente convexo. Se $T : C(K, X) \rightarrow C(L, X)$ é um isomorfismo tal que

$$\|T\| \|T^{-1}\| < (1 - \delta_X(1))^{-1}$$

então K e L são homeomorfos.

Demonstração. Veja a referência [14, p. 244]. ■

Observação 1.26. Como $\delta_{\mathbb{R}}(1) = 1/2$, Teorema 1.25 generaliza o teorema de Amir-Cambern para espaços compactos Hausdorff K e L .

Observação 1.27. O Teorema 1.25 tem importância crucial nesse trabalho. Utilizaremos as técnicas de demonstração desse resultado para provar o teorema principal do trabalho.

Definição 1.28. Um espaço de Banach X possui a **propriedade isomórfica de Banach-Stone (IBSP)** se existe $\alpha > 1$ tal que para todos espaços localmente compactos Hausdorff K e L e para todos isomorfismos $T : C_0(K, X) \rightarrow C_0(L, X)$ com $\|T\| \|T^{-1}\| < \alpha$ temos que os espaços K e L são homeomorfos.

Observação 1.29. Note que, para cada espaço de Banach X que possui IBSP, os possíveis valores de α tem um limite superior. De fato, inspirados por Cambern em [10], considere

$$K = \{-1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \{n : n \in \mathbb{N}\}$$

e

$$L = \{-1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Defina $T : C_0(K, X) \rightarrow C_0(L, X)$ dada por

$$T(g)(x) = \begin{cases} g(0) & \text{se } x = 0, \\ g(n) + g(-1/n) & \text{se } x = 1/n, \\ -g(n) + g(-1/n) & \text{se } x = -1/n. \end{cases} \quad (1.1)$$

Sendo assim, é fácil ver $\|T\| \|T^{-1}\| = 2$ e K não é homeomorfo a L .

Essa observação nos motiva a introduzir a seguinte definição:

Definição 1.30. A **constante de Banach-Stone** $BS(X)$ de um espaço de Banach X que possui IBSP é o maior $1 < \alpha \leq 2$ que satisfaz a Definição 1.28.

Observação 1.31. Note que um número real $1 < \alpha \leq 2$ satisfaz a Definição 1.28 para algum espaço de Banach X se e somente se $1 < \alpha \leq BS(X)$.

Definição 1.32. Seja X um espaço de Banach. A **constante de Behrends-Cambern** é o número

$$\lambda_{B-C}(X) = \inf\{d(l_1^2, X') : X' \subset X, \dim(X') = 2\},$$

em que l_1^2 é o espaço $\mathbb{K}^2$ com a norma do l_1 .

Em 1988, Behrends e Cambern mostraram em [7] que os espaços uniformemente convexos tem a propriedade IBSP.

Teorema 1.33. Sejam K e L espaços compactos Hausdorff e X um espaço de Banach com $\lambda_{B-C}(X^*) > 1$. Se existe um isomorfismo $T : C(K, X) \rightarrow C(L, X)$ que satisfaz a condição

$$\|T\| \|T^{-1}\| < 11\lambda_{B-C}(X^*)/(1 + 10\lambda_{B-C}(X^*)),$$

então K e L são espaços homeomorfos.

Demonstração. Veja a referência [7, p. 25]. ■

Observação 1.34. A condição $\lambda_{B-C}(X^*) > 1$ coincide no caso real com o fato que X é um espaço uniformemente não quadrado. Portanto, espaços uniformemente convexos X tem a propriedade $\lambda_{B-C}(X^*) > 1$, veja [7, p. 16].

Definição 1.35. Seja X um espaço de Banach. A **constante de James** de X é o número

$$J(X) = \sup\{\min\{\|x_1 + x_2\|, \|x_1 - x_2\|\} : x_1, x_2 \in S_X\}.$$

Proposição 1.36. Se X é um espaço de Banach de dimensão maior ou igual a 2, então vale $\sqrt{2} \leq J(X) \leq 2$.

Demonstração. Veja a referência [35, p. 2]. ■

Proposição 1.37. Se X é um espaço de Banach então temos que

$$1 + (J(X) - 1)^2 \leq J(X^*) \leq 1 + \sqrt{J(X) - 1}.$$

Demonstração. Veja a referência [35, p. 7]. ■

Proposição 1.38. Se X é um espaço de Banach com dimensão maior ou igual a 2 então

$$J(X) = \sup\{\epsilon \in (0, 2) : \delta_X(\epsilon) \leq 1 - \epsilon/2\}.$$

Demonstração. Veja a referência [28, p. 280]. ■

Definição 1.39. Seja X um espaço de Banach. A **constante de Schäffer** de X é o número

$$S(X) = \inf\{\max\{\|x_1 + x_2\|, \|x_1 - x_2\|\} : x_1, x_2 \in S_X\}.$$

Proposição 1.40. Se X é um espaço de Banach com dimensão maior ou igual a 2, então

$$J(X) \cdot S(X) = 2.$$

Demonstração. Veja a referência [23, p. 4] e [35, p. 608]. ■

Proposição 1.41. Se X é um espaço de Banach então

$$J(X) = J(X^{**}).$$

Demonstração. Veja a referência [35, p. 608]. ■

Definição 1.42. Dado um espaço de Banach X , associamos ao espaço X o parâmetro

$$\mu(X) := \sup\{\min\{\|x_1 + \lambda x_2\| : |\lambda| = 1\} : x_1, x_2 \in S_X\}.$$

Em 1989, Jarosz introduziu esse parâmetro e obteve uma nova prova do teorema de Behrends e Cambern.

Teorema 1.43. Sejam K e L espaços compactos Hausdorff e X um espaço de Banach com $\mu(X^*) < 2$. Se $T : C(K, X) \rightarrow C(L, X)$ é um isomorfismo tal que

$$\|T\| \|T^{-1}\| < 4/(2 + \mu(X^*)),$$

então K e L são espaços homeomorfos.

Demonstração. Veja a referência [27, p. 313]. ■

Observação 1.44. A condição $\mu(X^*) < 2$ é equivalente à condição $\lambda_{B-C}(X^*) > 1$, veja Proposição 1.50.

Observação 1.45. Além de obter uma nova demonstração para o teorema de Behrends e Cambern, Jarosz melhorou o teorema pois, pela Proposição 2.3,

$$\frac{11\lambda_{B-C}(X^*)}{1 + 10\lambda_{B-C}(X^*)} < \frac{4}{2 + \mu(X^*)}$$

para todo espaço de Banach real X .

Definição 1.46. Dado um espaço de Banach X , associamos ao espaço X o parâmetro

$$\lambda(X) := \inf\{\max\{\|x_1 + \lambda x_2\| : |\lambda| = 1\} : x_1, x_2 \in S_X\}.$$

Observação 1.47. Em particular, $\lambda(\mathbb{K}) = 2$, veja a referência [27, p. 298].

Observação 1.48. Esse parâmetro também foi introduzido por Jarosz em 1989. Ele será fundamental ao longo do trabalho. No capítulo 2, provaremos algumas das suas propriedades mais importantes.

Observação 1.49. Além disso, dado um espaço de Banach X , Jarosz definiu em [27] o parâmetro $\lambda_0(X) := \inf d(X_2, l_\infty^2)$, em que X_2 representa todos os subespaços de dimensão 2 de X e l_∞^2 é o espaço $\mathbb{K}^2$ com a norma do l_∞ .

A próxima proposição relaciona todos esses parâmetros.

Proposição 1.50. Seja X um espaço de Banach. As seguintes afirmações são verdadeiras:

- (a) $\mu(X) < 2$ se, e somente se, $\lambda_{B-C}(X) > 1$.
- (b) $\lambda_0(X) > 1$ se, e somente se, $\lambda_{B-C}(X^*) > 1$.
- (c) $\mu(X) \lambda_{B-C}(X) \geq 2$.
- (d) $\lambda_{B-C}(X^*) \leq \lambda_0(X)$.
- (e) $2\lambda_0(X)/(1 + \lambda_0(X)) \leq \lambda(X) \leq \lambda_0(X)$.

Demonstração. Veja a referência [27, p. 296]. ■

Proposição 1.51. Seja X um espaço de Banach. Se $\lambda_{B-C}(X^*) > 1$ então

$$\lambda_0(X^*) = \lambda_{B-C}(X^*).$$

Demonstração. Veja a referência [27, p. 297]. ■

Proposição 1.52. Se H é um espaço de Hilbert de dimensão maior do que ou igual a 2 então $\lambda(H) = \sqrt{2}$.

Demonstração. Veja a referência [27, p. 298]. ■

Exemplo 1.53. Seja $X = \mathbb{R}^2$ com a norma $l_2 - l_1$ dada por:

$$\|(x_1, x_2)\| = \begin{cases} \|(x_1, x_2)\|_2 & \text{se } x_1 x_2 \geq 0, \\ \|(x_1, x_2)\|_1 & \text{se } x_1 x_2 \leq 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

em que $\|(x_1, x_2)\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}$ com $p = 1, 2$. Sendo assim, temos que $\delta_X(\epsilon) = 0$ se $0 \leq \epsilon \leq \sqrt{2}$, $\delta_X(\epsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{2}}$ se $\sqrt{2} \leq \epsilon \leq \sqrt{8/3}$ e $\delta_X(\epsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{8}}$ se $\sqrt{8/3} \leq \epsilon \leq 2$.

Portanto, pela Proposição 1.38, $J(X) = \sqrt{8/3}$. O espaço dual X^* possui a norma $l_2 - l_\infty$ dada por:

$$\|(x_1, x_2)\|_* = \begin{cases} \|(x_1, x_2)\|_2 & \text{se } x_1 x_2 \geq 0, \\ \|(x_1, x_2)\|_\infty & \text{se } x_1 x_2 \leq 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Dados os vetores $x = (-1, 1)$ e $y = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ em S_{X^*} , $\|x+y\|_* = \|x-y\|_* = 1+1/\sqrt{2}$. Logo, $J(X^*) = 1 + 1/\sqrt{2}$ ([28, p. 280] e [1, Exemplo 25]) e $J(X^*) \neq J(X)$.

Proposição 1.54. Se X é um espaço de Banach que satisfaz $\mu(X) < 2$ então temos que

$$\delta_{X^*}(\mu(X^*)) = 1 - \mu(X^*)/2.$$

Demonstração. Veja a referência [35, p. 2]. ■

1.3 Medidas vetoriais

Nesta seção apresentamos os conceitos e principais resultados sobre medidas vetoriais. Para um estudo mais detalhado sobre o assunto, segurimos [21] e [22].

Definição 1.55. Sejam K um conjunto, $\mathcal{A}$ uma σ -álgebra de K e X um espaço normado. Uma função $\mu : \mathcal{A} \rightarrow X$ é uma **medida vetorial** quando, para qualquer sequência $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos dois a dois disjuntos de $\mathcal{A}$, temos que $\mu(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Definição 1.56. Sejam K um conjunto, $\mathcal{A}$ uma σ -álgebra de K , X um espaço de Banach e $\mu : \mathcal{A} \rightarrow X$ uma medida vetorial. A **variação de μ** é a função $|\mu|$ definida em $\mathcal{A}$ tal que $|\mu|(A) = \sup \sum_{k=1}^n \|\mu(A_k)\|$, em que o supremo é considerado sob todas as partições finitas $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ de A em $\mathcal{A}$. Além disso, se $|\mu|(K) < \infty$, dizemos que μ tem **variação limitada**.

Definição 1.57. Sejam K um conjunto, $\mathcal{A}$ uma σ -álgebra de K e X um espaço de Banach. Uma função $f : K \rightarrow X$ é **simples** se existem $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ e $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ tais que $f = \sum_{k=1}^n \chi_{A_k} x_k$.

Observação 1.58. O conjunto $S(K, X)$ de todas as funções simples de K em X é um espaço vetorial com as operações usuais. Além disso, a função $\|\cdot\| : S(K, X) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\|f\| = \sup \|f(x)\|$ é uma norma em $S(K, X)$.

Definição 1.59. Sejam K um conjunto, $\mathcal{A}$ uma σ -álgebra de K e X um espaço de Banach. Uma função $f : K \rightarrow X$ é **mensurável** se existe uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções simples tal que $f_n \rightarrow f$ pontualmente.

Proposição 1.60. Sejam K um conjunto, $\mathcal{A}$ uma σ -álgebra de K e X um espaço de Banach. Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções mensuráveis de K em X convergindo pontualmente para f então f é mensurável.

Demonstração. Veja a referência [22, p. 6]. ■

Medidas vetoriais em duais de espaços de Banach desempenham um papel fundamental no estudo de funcionais lineares contínuos definidos em espaços de funções com valores vetoriais.

Sejam K um conjunto, $\mathcal{A}$ uma σ -álgebra de K , X um espaço de Banach e $\mu : \mathcal{A} \rightarrow X^*$ uma medida vetorial limitada. Dada $f = \sum_{k=1}^n \chi_{A_k} x_k$ em $S(K, X)$ defina $\phi(f) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k)(x_k)$. Não é difícil verificar que ϕ é um funcional linear contínuo em $S(K, X)$ tal que $\|\phi\| = |\mu|(K)$.

Seja $\overline{S(K, X)}$ o completamento de $S(K, X)$, isto é, o espaço das funções mensuráveis. Dessa forma, existe uma única extensão $\bar{\phi}$ de ϕ tal que $\bar{\phi}(f) = \int f d\mu$ em que $f \in \overline{S(K, X)}$ e $\|\bar{\phi}\| = \|\phi\|$.

Dado um espaço topológico K , a menor σ -álgebra $B(K)$ que contém todos os conjuntos abertos de K é chamada **σ -álgebra de Borel**. Os elementos de $B(K)$ são chamados **borelianos** de K e uma medida definida em $B(K)$ é chamada **medida de Borel**.

O próximo conceito está relacionado a medidas de Borel e será fundamental para o nosso estudo.

Definição 1.61. Seja K um espaço topológico. Uma medida $\mu : B(K) \rightarrow \mathbb{R}$ é **regular** quando $\mu(B) = \inf\{\mu(U) / U \text{ é aberto e } B \subset U\} = \sup\{\mu(C) / C \text{ é compacto e } C \subset B\}$ para todo $B \in B(K)$. Além disso, uma medida vetorial de Borel μ é **regular** quando $|\mu|$ é regular.

Observação 1.62. Dado um espaço de Banach X , o conjunto $M(K, X)$ das medidas de Borel $\mu : B(K) \rightarrow X$ regulares de variação limitada é um espaço vetorial com as operações usuais. Além disso, a função $\|\cdot\| : M(K, X) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\|\mu\| = |\mu|(K)$ é uma norma em $M(K, X)$.

Proposição 1.63. Sejam K um espaço localmente compacto Hausdorff e X um espaço de Banach. Dado $f \in C_0(K, X)$, existe uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $S(K, X)$ convergindo uniformemente para f tal que $\|f_n\| \leq \|f\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Veja a referência [16, p. 7]. ■

Dado um espaço localmente compacto Hausdorff K e um espaço de Banach X , segue da proposição 1.63 que $C_0(K, X) \subset \overline{S(K, X)}$. Dessa forma, se ϕ é um funcional linear contínuo definido em $C_0(K, X)$ então, pelo teorema de Hahn-Banach, existe $\bar{\phi}$ funcional linear contínuo definido em $\overline{S(K, X)}$ tal que $\|\bar{\phi}\| = \|\phi\|$. Portanto, podemos associar a $\bar{\phi}$ uma medida vetorial $\mu : B(K) \rightarrow X^*$ tal que $\mu(A)(v) = \bar{\phi}(\chi_A v)$ em que $A \in B(K)$ e $v \in X$. Não é difícil verificar que $\|\phi\| = |\mu|(K)$ e $\bar{\phi}(f) = \int f d\mu$ em que $f \in C_0(K, X)$.

Note que $\bar{\phi}$ não é única, assim como a medida μ correspondente. No entanto, I. Singer mostrou que dentre todas as possíveis μ , existe apenas uma que pertence a $M(K, X)$.

Teorema 1.64. (Teorema de Representação de Singer) Existe um isomorfismo isométrico entre os espaços $C_0(K, X)^*$ e $M(K, X^*)$ tal que para cada $\phi \in C_0(K, X)^*$ existe uma medida $\mu \in M(K, X^*)$ satisfazendo $\phi(f) = \int f d\mu$ em que $f \in C_0(K, X)$ e $\|\phi\| = |\mu|(K)$.

Demonstração. Veja a referência [31, p. 154]. ■

Observação 1.65. Em particular, segue que $M(K) \cong C_0(K)^*$. Uma vez que $C_0(K)$ é um M -espaço abstrato, segue que $M(K)$ é um L_1 -espaço abstrato, veja [29, p. 25]. Portanto, $M(K)$ é isometricamente isomorfo a $L_1(\mu)$, veja [29, p. 135].

Observação 1.66. $M(K)$ também é um ideal fechado no espaço $m(K, B(K), \mathbb{R})$ das medidas de Borel, veja [29, p. 46].

Lema 1.67. Sejam (Y, Σ) e (Y', Σ') espaços mensuráveis, M e M' ideais fechados em $m(Y, \Sigma, \mathbb{R})$ e $m(Y', \Sigma', \mathbb{R})$, respectivamente. Se existe um isomorfismo isométrico $T : M \rightarrow M'$ então, para cada espaço de Banach X , existe um isomorfismo isométrico $T_X : M_X \rightarrow M'_X$ em que M_X é o espaço de Banach das medidas de Σ em X com variação limitada (respectivamente M'_X).

Demonstração. Veja a referência [13, p. 54]. ■

Definição 1.68. Sejam K um conjunto, $\mathcal{A}$ uma σ -álgebra de K e X um espaço de Banach. Uma medida vetorial $\mu : \mathcal{A} \rightarrow X$ é **absolutamente contínua** com relação a uma medida positiva $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ e denotamos $\mu \ll \lambda$ quando $\lim_{\lambda(A) \rightarrow 0} \mu(A) = 0$.

Observação 1.69. Se (K, Σ, λ) é um espaço de medida e X um espaço de Banach, $M(\lambda, X)$ denota o espaço das medidas vetoriais em Σ com valores em X de variação limitada que são absolutamente contínuas com relação a uma medida positiva $\lambda : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$. Em particular, $M(\lambda)$ é um ideal fechado no espaço $m(K, \Sigma, \mathbb{R})$.

Teorema 1.70. (Radon-Nikodym) Sejam K um conjunto, $\mathcal{A}$ uma σ -álgebra de K e X um espaço de Banach. Se $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma medida positiva e $\mu : \mathcal{A} \rightarrow X$ é uma medida vetorial de variação limitada com $\mu \ll \lambda$ então existe uma função $\rho : K \rightarrow X$ mensurável e integrável tal que $\mu(A) = \int_A \rho d\lambda$ e $|\mu|(A) = \int_A |\rho| d\lambda$ em que $A \in \mathcal{A}$.

Demonstração. Veja a referência [33, p. 122]. ■

Definição 1.71. Um espaço de Banach X tem a **propriedade de Radon-Nikodym** quando para todo conjunto K , para toda σ -álgebra de K , para toda medida positiva

$\lambda : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ e para toda medida vetorial de variação limitada $\mu : \mathcal{A} \rightarrow X$ com $\mu \ll \lambda$, existe $\rho : K \rightarrow X$ mensurável e integrável tal que, para todo $A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) = \int_A \rho d\lambda.$$

Proposição 1.72. Se X é um espaço de Banach reflexivo então X tem a propriedade de Radon-Nikodym.

Demonstração. Veja a referência [21, p. 76]. ■

Proposição 1.73. Seja X um espaço de Banach. Se X^* é um espaço reflexivo então X tem a propriedade de Radon-Nikodym.

Demonstração. Segue da Proposição 1.72. ■

Proposição 1.74. Seja X um espaço de Banach. Se X tem a propriedade de Radon-Nikodym então $L_1(\mu, X) \cong M(\mu, X)$

Demonstração. Veja a referência [21, p. 61]. ■

1.4 Representação do bidual de $C_0(K, X)$

A maioria dos argumentos utilizados por Cambern para provar o Teorema 1.25 são baseados no fato de que se K é um espaço compacto Hausdorff e X^* é um espaço de Banach que possui a propriedade de Radon-Nikodym então o bidual de $C(K, X)$ pode ser representado como um espaço de funções contínuas de um espaço compacto Hausdorff Z para X^{**} , esse último munido da topologia fraca-estrela*. Um fato importante é que um resultado análogo vale para os espaços $C_0(K, X)$. Para justificar esse resultado, utilizaremos alguns resultados sobre o produto tensorial de espaços de Banach.

Sejam X e Y espaços de Banach e $L(X, Y)^*$ o espaço dual das aplicações multilineares de $X \times Y$. Dados os vetores $x \in X$ e $y \in Y$, a aplicação $x \otimes y : L(X, Y) \rightarrow \mathbb{K}$ definida como $(x \otimes y)(A) = A(x, y) \in \mathbb{K}$. Utilizando essa notação, surge a definição de produto tensorial.

Definição 1.75. Sejam X e Y espaços de Banach. O **produto tensorial** de X e Y é o subespaço vetorial de $L(X, Y)^*$ gerado pelo conjunto

$$D = \{x \otimes y : x \in X, y \in Y\}.$$

Esse subespaço é denotado por $X \otimes Y$. Os elementos do produto tensorial $X \otimes Y$ são chamados de **tensores** e os tensores da forma $x \otimes y$ são denominados **tensores elementares**.

Nosso objetivo é introduzir uma norma especial no produto tensorial.

Definição 1.76. Sejam X e Y espaços de Banach. Uma norma α em $X \otimes Y$ é **balanceada** quando satisfaz as seguintes condições:

- (a) $\alpha(x \otimes y) \leq \|x\| \|y\|$;
- (b) Se $\phi \in X^*$ e $\varphi \in Y^*$ então $\phi \otimes \varphi \in (X \otimes Y, \alpha)^*$ e $\|\phi \otimes \varphi\| \leq \|\phi\| \|\varphi\|$.

Proposição 1.77. Se X e Y espaços de Banach e α uma norma balanceada em $X \otimes Y$ então:

- (a) $\alpha(x \otimes y) = \|x\| \|y\|$;
- (b) Se $\phi \in X^*$ and $\varphi \in Y^*$ então $\|\phi \otimes \varphi\| = \|\phi\| \|\varphi\|$;
- (c) Se α^* é a norma induzida em $X^* \otimes Y^*$ considerando $X^* \otimes Y^*$ um subespaço linear de $(X \otimes Y, \alpha)^*$ então α^* é uma norma balanceada em $X^* \otimes Y^*$.

Demonstração. Veja a referência [21, p. 222]. ■

Proposição 1.78. Sejam X e Y espaços de Banach. Dado $u \in X \otimes Y$, defina em $X \otimes Y$ a norma $\beta(u) = \sup\{|(\phi \otimes \varphi)(u)| : \phi \in X^*, \varphi \in Y^*, \|\phi\| \leq 1, \|\varphi\| \leq 1\}$. A norma β em $X \otimes Y$ é balanceada. Além disso, se α é uma norma balanceada em $X \otimes Y$ então $\lambda(u) \leq \alpha(u)$ para todo $u \in X \otimes Y$.

Demonstração. Veja a referência [21, p. 223]. ■

Observação 1.79. De acordo com a Proposição 1.78, β é a menor norma balanceada em $X \otimes Y$.

Definição 1.80. Sejam X e Y espaços de Banach. O **produto tensorial injetivo** de X e Y é o complemento de $X \otimes Y$ com relação a sua menor norma balanceada. O produto tensorial injetivo é por $X \hat{\otimes} Y$

A seguir, enunciaremos dois resultados importantes que utilizam o produto tensorial injetivo.

Proposição 1.81. Se X é um espaço de Banach então $L_1(\mu, X)$ é isometricamente isomorfo ao produto tensorial injetivo $L_1(\mu) \hat{\otimes} X$.

Demonstração. Veja a referência [21, p. 228]. ■

Proposição 1.82. O espaço de Banach $\mathcal{L}(X^*, M(X)^*)$ é isometricamente isomorfo a $[X^* \hat{\otimes} M(K)]^*$.

Demonstração. Veja a referência [21, p. 230]. ■

A partir deste momento, enunciaremos e demonstraremos alguns resultados auxiliares com o objetivo de obter uma representação do espaço bidual de $C_0(K, X)$.

Proposição 1.83. Se K um espaço localmente compacto Hausdorff e X um espaço de Banach então existe um espaço de medida (S, Σ, μ) tal que $M(K, X) \cong M(\mu, X)$.

Demonstração. Pela Observação 1.65, segue que $M(K)$ é um L_1 -espaço abstrato. Sendo assim, pela Observação 1.66, $M(K)$ é um ideal fechado no espaço das medidas de Borel. Além disso, note que a integral indefinida determina uma imersão isométrica de $L_1(\mu)$ em $M(\mu)$. Pelo Teorema 1.70, segue que $L_1(\mu) \cong M(\mu)$. Portanto, pela Observação 1.65, $M(K)$ é isometricamente isomorfo a $M(\mu)$. Logo, $M(K, X) \cong M(\mu, X)$ é garantido pelo Lema 1.67. ■

Corolário 1.84. Seja K um espaço localmente compacto Hausdorff e X um espaço de Banach. $M(K) \hat{\otimes} X$ pode ser imerso em $M(K, X)$ de tal maneira que $\nu \otimes x$ corresponda a $\nu(\cdot)x$ para todo $\nu \in M(K)$ e $x \in X$.

Demonstração. Pela Proposição 1.65, $M(K) \cong L_1(\mu)$. Portanto, $M(K) \hat{\otimes} X \cong L_1(\mu) \hat{\otimes} X$. Dessa forma, pela Proposição 1.81, $M(K) \hat{\otimes} X \cong L_1(\mu, X)$. Uma vez que $L_1(\mu, X)$ está imerso canonicamente em $M(\mu, X)$ e a Proposição 1.83 garante que $M(\mu, X)$ é isométrico a $M(K, X)$, $M(K) \hat{\otimes} X$ pode ser imerso em $M(K, X)$. ■

Corolário 1.85. Seja K um espaço localmente compacto Hausdorff e X um espaço de Banach. Se X tem a propriedade de Radon-Nikodym então $M(K, X) = \overline{M(K) \otimes X}$.

Demonstração. Como X tem a propriedade de Radon-Nikodym então, pela Proposição 1.74, segue que $L_1(\mu, X) \cong M(\mu, X)$. Portanto, pelo Corolário 1.83, pela Proposição 1.65 e pela Proposição 1.81, temos que $M(K) \hat{\otimes} X \cong M(K, X)$. Como $M(K) \otimes X$ é denso em $M(K) \hat{\otimes} X$, segue que $M(K, X) = \overline{M(K) \otimes X}$. ■

O próximo resultado caracteriza o espaço bidual de $C_0(K, X)$ para o caso em que X^* tem a propriedade de Radon-Nikodym.

Teorema 1.86. Seja K um espaço localmente compacto Hausdorff e X um espaço de Banach tal que X^* tem a propriedade de Radon-Nikodym. Existe um espaço compacto Hausdorff Z satisfazendo

$$C_0(K, X)^{**} \cong C(Z, X_{\sigma^*}^{**}) \text{ em que } C_0(K)^{**} \cong C(Z).$$

Demonstração. Pelo Teorema 1.64,

$$C_0(K, X)^* \cong M(K, X^*).$$

Por outro lado, Corolário 1.84 e Corolário 1.85 garantem que

$$M(K) \hat{\otimes} X^* \cong \overline{M(K) \otimes X^*} = M(K, X^*).$$

Portanto,

$$C_0(K, X)^{**} \cong M(K, X^*)^* \cong [M(K) \hat{\otimes} X^*]^* \cong [X^* \hat{\otimes} M(K)]^*.$$

Além disso, pela Proposição 1.82,

$$[X^* \hat{\otimes} M(K)]^* \cong \mathcal{L}(X^*, M(X)^*) \cong \mathcal{L}(X^*, C(Z)).$$

Defina uma função T de $\mathcal{L}(X^*, C(Z))$ em $C(Z, X_{\sigma}^{**})$ por

$$T(\Psi)(z)(\phi) = (\delta_z \circ \Psi)(\phi),$$

for $\phi \in X^*$, $z \in Z$ and $\Psi \in \mathcal{L}(X^*, C(Z))$, em que δ_z representa a função avaliação no ponto $z \in Z$. Claramente, para cada $z \in Z$ fixo, $T(\Psi)(z)$ é um funcional linear de X^* . Mais ainda, para todo $\phi \in X^*$,

$$|T(\Psi)(z)(\phi)| = |\Psi(\phi)(z)| \leq \|\Psi(\phi)\| \leq \|\Psi\| \|\phi\|.$$

Consequentemente,

$$T(\Psi)(z) \in X^{**} \text{ e } \|T(\Psi)(z)\| \leq \|\Psi\|.$$

Note que como função de Z em X^{**} , $T(\Psi)(\cdot)$ é fraca-estrela contínua pois, para todo $\phi \in X^*$,

$$T(\Psi)(\cdot)(\phi) = \Psi(\phi)(\cdot) \in C(Z).$$

Dessa forma, temos que T está bem definida. Obviamente, T é linear e $\|T\| \leq 1$ pois

$$\|T(\Psi)\| = \sup \|T(\Psi)(z)\| \leq \|\Psi\|.$$

Vamos mostrar que T é uma isometria. Sejam $\epsilon > 0$ e $\Psi \in \mathcal{L}(X^*, C(Z))$ não nulo. Escolha $\phi \in X^*$ tal que $\|\phi\| = 1$ e $\|\Psi(\phi)\| \geq \|\Psi\| - \epsilon$. Além disso, considere $z \in Z$ tal que $|\Psi(\phi)(z)| = \|\Psi(\phi)\|$. Dessa forma, temos que

$$\|T(\Psi)\| \geq \|T(\Psi)(z)\| \geq |T(\Psi)(z)(\phi)| = |\Psi(\phi)(z)| \geq \|\Psi\| - \epsilon.$$

Portanto, T é uma isometria. Finalmente, provaremos que T é uma função sobrejetora. Seja $G \in C(Z, X_{\sigma}^{**})$. Defina Ψ por $\Psi(\phi)(z) = G(z)(\phi)$ para $\phi \in X^*$ e $z \in Z$. É claro que

$\Psi(\phi)(\cdot) \in C(Z)$ e Ψ é uma função linear de X^* em $C(Z)$. Além disso, Ψ é limitada pois

$$\|\Psi(\phi)\| = \sup |G(z)(\phi)| \leq \|G\| \|\phi\|.$$

Portanto, utilizando a definição de T , temos que

$$T(\Psi)(z)(\phi) = \Psi(\phi)(z) = G(z)(\phi),$$

para todo $z \in Z$ e $\phi \in X^*$. Logo $T(\Psi) = G$. ■

Finalmente, no caso em que $X = \mathbb{K}$, apresentamos também uma caracterização dos pontos isolados de Z .

Teorema 1.87. Se K é um espaço topológico localmente compacto então existe um espaço topológico compacto Z tal que $C_0(K)^{**} \cong C(Z)$. Além disso, se K_0 é o conjunto dos pontos isolados de Z então cada ponto de K_0 é da forma tx para algum $x \in K$, em que $t : K \rightarrow Z$ é uma imersão natural de K em Z e todo ponto da forma tx é um ponto isolado de Z .

Demonstração. Veja a referência [19, p. 42]. ■

Capítulo 2

Resultado principal

Nesse capítulo provaremos o resultado principal desse trabalho, isto é, o Teorema 1 mencionado na introdução. A demonstração desse resultado utiliza as técnicas do artigo de Cambern [14]. Na verdade, a demonstração é um refinamento dos argumentos apresentados na prova do teorema principal de [14] utilizando os resultados do capítulo 1.

2.1 Observações iniciais

Sejam K e L espaços localmente compactos Hausdorff e X um espaço de Banach real ou um espaço de Banach complexo reflexivo. Vamos assumir que $\lambda(X) > 1$ e que T é um isomorfismo de $C_0(K, X)$ em $C_0(L, X)$ tal que $\|T\| \|T^{-1}\| < \lambda(X)$. Suponha, sem perda de generalidade, substituindo T por $(1 + \epsilon)\|T^{-1}\|T$ para algum ϵ positivo suficientemente pequeno, que T é estritamente crescente em norma, isto é, que T satisfaz

$$\|T(F)\| \geq (1 + \epsilon)\|F\|,$$

para todo $F \in C_0(K, X)$ e $\|T\| < \lambda(X)$. Fixe ϵ e escolha um número positivo P tal que $1 < P < 1 + \epsilon$.

Portanto, T satisfaz $\|T(F)\| > P\|F\|$ para todo $F \in C_0(K, X)$, $F \neq 0$. Além disso, como $\lambda(X) \leq 2 < 2P$, podemos fixar também um número positivo b tal que

$$\frac{1}{P} - \frac{1}{\lambda(X)} < b < \frac{P}{\lambda(X)(\lambda(X) - P)}. \quad (2.1)$$

Como X é reflexivo então X^* também é reflexivo. Além disso, pela Proposição 1.72, X^*

tem a propriedade Radon-Nikodym. Portanto, segue do Teorema 1.86 que

$$C_0(K, X)^{**} \cong C(Z, X_{\sigma^*}),$$

onde Z é um espaço compacto Hausdorff com

$$C_0(K)^{**} \cong C(Z).$$

Analogamente,

$$C_0(L, X)^{**} \cong C(W, X_{\sigma^*}),$$

onde W é um espaço compacto Hausdorff com

$$C_0(L)^{**} \cong C(W).$$

Dessa forma, podemos considerar T^{**} como sendo um isomorfismo de $C(Z, X_{\sigma^*})$ em $C(W, X_{\sigma^*})$ tal que

$$\|T^{**}\| < \lambda(X) \text{ e } \|T^{**}(F)\| > P\|F\|,$$

para todo $F \in C(Z, X_{\sigma^*})$, $F \neq 0$.

Seja K_0 o conjunto dos pontos isolados de Z . Pelo Teorema 1.87, cada ponto de K_0 é da forma tx para algum $x \in K$, em que $t : K \rightarrow Z$ é uma imersão natural de K em Z e todo ponto da forma tx é isolado. Analogamente, se L_0 denota o conjunto dos pontos isolados de W então L_0 consiste de pontos sy , $y \in L$, em que $s : L \rightarrow W$ é uma imersão natural.

Finalmente, dado $F^* \in C(Z, X_{\sigma^*})^*$, a restrição de F^* para $C(Z, X)$ é um funcional linear contínuo de norma menor do que ou igual a $\|F^*\|$. Pelo Teorema 1.64, existe uma medida $n \in M(Z, X^*)$ tal que $\|n\| \leq \|F^*\|$. Dado $z \in Z$, podemos escrever de maneira única $n = \psi\mu_z + m$ em que μ_z denota a medida de massa pontual em z , $\psi \in X^*$ e $m \in C(Z, X)^*$ com $m(\{z\}) = 0$. De fato, sejam $\psi = n(\{z\})$ e $m = n - \psi\mu_z$. Pelo teorema de Hahn-Banach, existe $\bar{m} \in C(Z, X_{\sigma^*})^*$ extensão linear de m que preserve a norma. Portanto, $\Phi = F^* - \psi\mu_z - \bar{m}$ é um funcional linear contínuo em $C(Z, X_{\sigma^*})$ que se anula em $C(Z, X)$ e $F^* = \psi\mu_z + \bar{m} + \Phi$. Logo, dado $F^* \in C(Z, X_{\sigma^*})^*$ e $z \in Z$, sempre podemos representá-los de maneira que

$$F^* = \psi\mu_z + \bar{m} + \Phi.$$

Analogamente, dado $G^* \in C(W, X_{\sigma^*})^*$ e $w \in W$, podemos representá-los de maneira que

$$G^* = \psi\mu_w + \bar{m} + \Phi.$$

2.2 Propriedades do parâmetro $\lambda(X)$

Nesta seção apresentaremos os nossos primeiros resultados, que justificam as propriedades do parâmetro $\lambda(X)$ mencionadas na introdução. Essas propriedades serão importantíssimas no processo de unificação das generalizações do teorema de Banach-Stone, como veremos no final do capítulo.

Proposição 2.1. Para todo espaço uniformemente convexo X com dimensão maior ou igual a 2, temos que

$$\frac{1}{1 - \delta_X(1)} < \lambda(X).$$

Demonstração. Como X é um espaço de Banach real, seguem das Definições 1.42 e 1.46 que $J(X) = \mu(X)$ e $S(X) = \lambda(X)$. Assim, pela Proposição 1.40, $\mu(X)\lambda(X) = 2$. Além disso, uma vez que X é um espaço de Banach de dimensão maior ou igual a 2, segue da Proposição 1.38 que

$$\mu(X) = \sup\{\epsilon \in (0, 2) : \delta_X(\epsilon) \leq 1 - \epsilon/2\}. \quad (2.2)$$

Fixe $1 < \epsilon_0 < \sqrt{2}$. Pela Proposição 1.36, temos que $J(X) \geq \sqrt{2}$. Sendo assim, $\mu(X)$ é o supremo de

$$A = \{\epsilon \in (\epsilon_0, 2) : \delta_X(\epsilon) \leq 1 - \epsilon/2\}. \quad (2.3)$$

Seja $\epsilon \in A$. Assim, $\delta_X(\epsilon) \leq 1 - \epsilon/2$. Como X é uniformemente convexo, a Proposição 1.7 garante que a função δ_X é estritamente crescente em $[0, 2]$. Portanto, $\delta_X(\epsilon_0) < 1 - \epsilon/2$, isto é, $\epsilon < 2(1 - \delta_X(\epsilon_0))$. Consequentemente, por (2.3), temos que

$$\mu(X) \leq 2(1 - \delta_X(\epsilon_0)) < 2(1 - \delta_X(1)).$$

Logo,

$$\frac{1}{1 - \delta_X(1)} < \frac{2}{\mu(X)} = \lambda(X).$$

■

Observação 2.2. Suponha que X é um espaço de Banach. Sendo assim, a Proposição 1.50 garante $\mu(X^*) < 2$ se, e somente se, $\lambda(X) > 1$ se, e somente se, $\lambda_{B-C}(X^*) > 1$.

Proposição 2.3. Se X é um espaço de Banach real com $\lambda_{B-C}(X^*) > 1$ então

$$\frac{11\lambda_{B-C}(X^*)}{1 + 10\lambda_{B-C}(X^*)} < \frac{4}{2 + \mu(X^*)}. \quad (2.4)$$

Demonstração. De fato, pela primeira desigualdade do item (e) da Proposição 1.50, temos que

$$11\lambda_0(X^*) \leq 2\lambda(X^*) + 3,5\lambda(X^*) + 5,5\lambda_0(X^*)\lambda(X^*).$$

Como $\lambda_{B-C}(X^*) > 1$, segue da Proposição 1.51 que

$$\lambda_0(X^*) = \lambda_{B-C}(X^*) > 1. \quad (2.5)$$

Portanto, novamente pelo item (e) da Proposição 1.50, $\lambda(X^*) > 1$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} 11\lambda_0(X^*) &< 2\lambda(X^*) + 3,5\lambda_0(X^*)\lambda(X^*) + 5,5\lambda_0(X^*)\lambda(X^*) \\ &= 2\lambda(X^*) + 9\lambda_0(X^*)\lambda(X^*). \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando a Proposição 1.40 e a igualdade (2.5), temos que

$$11\lambda_0(X^*)\mu(X^*) < 4 + 18\lambda_0(X^*).$$

Logo, (2.4) é verdadeira. ■

Proposição 2.4. Se X é um espaço de Banach com $\lambda_{B-C}(X^*) > 1$ então

$$\frac{11\lambda_{B-C}(X^*)}{1 + 10\lambda_{B-C}(X^*)} < \lambda(X).$$

Demonstração. Pela item (d) da Proposição 1.50, se $\lambda(X) > 1$ então $\lambda_0(X) > 1$. Além disso, os itens (c) e (d) da Proposição 1.50 garantem que

$$\frac{11\lambda_{B-C}(X^*)}{1 + 10\lambda_{B-C}(X^*)} \leq \frac{11\lambda_0(X)}{1 + 10\lambda_0(X)} < \frac{2\lambda_0(X)}{1 + \lambda_0(X)} \leq \lambda(X).$$

Proposição 2.5. Se X é um espaço de Banach real com $\lambda(X) > 1$ então ■

$$\frac{4}{2 + \mu(X^*)} < \lambda(X). \quad (2.6)$$

Demonstração. Novamente, $\mu(X)$ e $\lambda(X)$ coincidem com as constantes de James $J(X)$ e de Schäffer $S(X)$, respectivamente. Portanto, segue da Proposição 1.37 que

$$1 + (\mu(X) - 1)^2 \leq \mu(X^*) \leq 1 + \sqrt{\mu(X) - 1}. \quad (2.7)$$

A primeira desigualdade de (2.7) pode ser reescrita como

$$\mu(X) \leq 1 + \sqrt{\mu(X^*) - 1}. \quad (2.8)$$

Por outro lado, como $\mu(X) \cdot \lambda(X) = 2$, temos que $\mu(X) < 2$. Dessa forma, pela segunda desigualdade de (2.7), segue que $\mu(X^*) < 2$. Portanto,

$$1 + \sqrt{\mu(X^*) - 1} < \frac{2 + \mu(X^*)}{2}. \quad (2.9)$$

Utilizando (2.8) e (2.9), concluimos que

$$\frac{2}{\lambda(X)} = \mu(X) < \frac{2 + \mu(X^*)}{2}.$$

Logo, (2.6) é verdadeira. ■

Observação 2.6. Se X é um espaço de Banach então

$$\frac{4}{2 + \mu(X^*)} \leq \lambda(X).$$

De fato, pelos itens (c) e (d) da Proposição 1.50, temos que

$$2 \leq \mu(X^*) \lambda_{B-C}(X^*) \leq \mu(X^*) \lambda_0(X).$$

Portanto,

$$\frac{4}{2 + \mu(X^*)} \leq \frac{2\lambda_0(X)}{1 + \lambda_0(X)}.$$

Logo, o resultado segue do item (e) da Proposição 1.50.

Proposição 2.7. Se $X = l_p$ com $2 \leq p < \infty$ então $BS(X) = \lambda(X) = 2^{1/p}$.

Demonstração. Primeiramente, note que para todo $2 \leq p < \infty$, temos $\lambda(l_p) = 2^{1/p}$. De fato, sejam $x, y \in S_{l_p}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ com $|\lambda| = 1$. Pela Proposição 1.9, temos que

$$2(\|x\|^p + \|y\|^p)^{q-1} \leq \|x + y\|^q + \|x - y\|^q \quad (2.10)$$

em que $1/p + 1/q = 1$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} 2^q &= 2(\|x\|^p + \|\lambda y\|^p)^{q-1} \\ &\leq \|x + \lambda y\|^q + \|x - \lambda y\|^q \\ &\leq 2 \max_{|\lambda|=1} \|x + \lambda y\|^q \leq 2 \left(\max_{|\lambda|=1} \|x + \lambda y\| \right)^q. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$2^{1/p} \leq \max_{|\lambda|=1} \|x + \lambda y\|.$$

Portanto, $2^{1/p} \leq \lambda(l_p)$. Por outro lado, se $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$ e $e_2 = (0, 1, 0, \dots)$ então

$$\max_{|\lambda|=1} \|e_1 + \lambda e_2\| = 2^{1/p}.$$

Além disso, vamos provar que $BS(l_p) \leq 2^{1/p}$ para todo $2 \leq p < \infty$. Com efeito, sejam

$$K = \{1 - 1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{2 - 1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{2\}$$

e

$$L = \{4 - 1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{4\}.$$

Sendo assim, existe um isomorfismo T de $C_0(K, l_p)$ em $C(L, l_p)$ tal que $\|T\|\|T^{-1}\| = 2^{1/p}$, veja a referência [15, Observação 1.4]. No entanto, K e L não são homeomorfos. ■

Observação 2.8. A desigualdade (2.6) também é verdadeira para o caso complexo $X = l_p$, $2 \leq p < \infty$. De fato, é suficiente mostrar que $\mu(l_p) = 2^{1/p}$ para todo $1 < p \leq 2$. Sejam $x, y \in S_{l_p}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ com $|\lambda| = 1$. Novamente, pela Proposição 1.9, se $1 < p \leq 2$ e $1/p + 1/q = 1$ então

$$\|x + y\|^q + \|x - y\|^q \leq 2[\|x\|^p + \|y\|^p]^{q-1}.$$

Assim, procedendo como na Proposição 2.7, temos que

$$\min_{|\lambda|=1} \|x + \lambda y\| \leq 2^{1/p}.$$

Portanto, $\mu(l_p) \leq 2^{1/p}$. Além disso, se $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$ e $e_2 = (0, 1, 0, \dots)$ então

$$\min_{|\lambda|=1} \|e_1 + \lambda e_2\| = 2^{1/p}.$$

Observação 2.9. A primeira parte da prova da Proposição 2.7 foi obtida por Michael Ricon e aparecerá na tese de doutorado dele. Registramos aqui o nosso agradecimento.

A principal ferramenta que será incorporada nos argumentos utilizados por Cambern em [14] para obter a demonstração do resultado principal do trabalho é a proposição seguinte. Essa proposição substituirá o [14, Lema 1] do artigo de Cambern.

Proposição 2.10. Sejam X um espaço de Banach, $r \in \mathbb{N}$ e $\eta > 0$. Dados $x_1, x_2, \dots, x_{2^r}$ em X com $\|x_j\| \geq \eta$ para todo $1 \leq j \leq 2^r$, existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2^r} \in \mathbb{K}$ com $\max\{|\alpha_j| : 1 \leq j \leq 2^r\} \leq 1$ tal que

$$\left\| \sum_{j=1}^{2^r} \alpha_j x_j \right\| \geq \eta \lambda(X)^r.$$

Demonstração. Vamos provar por indução em r . Considere o caso $r = 1$. Sejam $x, y \in X$ tais que $\min\{\|x\|, \|y\|\} \geq \eta$. Defina $u = x/\|x\|$ e $v = y/\|y\|$. Sendo assim, $u, v \in S_X$ e $\lambda(X) \leq \max\{\|u + \beta v\| : |\beta| = 1\}$. Além disso, existe $\beta_0 \in \mathbb{K}$ com $|\beta_0| = 1$ tal que $\lambda(X) \leq \|u + \beta_0 v\|$. Se $N = \min\{\|x\|, \|y\|\}$ então

$$\eta\lambda(X) \leq N\lambda(X) \leq \|Nu + N\beta_0 v\|.$$

Logo, considerando $\alpha_1 = N/\|x\|$ e $\alpha_2 = N/\|y\|\beta_0$ então $\max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|\} \leq 1$ e o resultado segue imediatamente. Suponha que a proposição é válida para todo r com $1 \leq r \leq k$. Sejam $x_1, \dots, x_{2^{k+1}}$ vetores em X satisfazendo $\|x_j\| \geq \eta$ para todo $1 \leq j \leq 2^{k+1}$. Pela hipótese de indução, existem constantes $\beta_1, \dots, \beta_{2^k}, \dots, \beta_{2^{k+1}}$ com $\max\{|\beta_j| : 1 \leq j \leq 2^{k+1}\} \leq 1$ satisfazendo

$$M_1 := \left\| \sum_{j=1}^{2^k} \beta_j x_j \right\| \geq \eta\lambda(X)^k,$$

e

$$M_2 := \left\| \sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} \beta_j x_j \right\| \geq \eta\lambda(X)^k.$$

Seja

$$c = \frac{1}{M_1} \sum_{j=1}^{2^k} \beta_j x_j \quad \text{e} \quad d = \frac{1}{M_2} \sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} \beta_j x_j.$$

Assim, $c, d \in S_X$. Utilizando o caso $r = 1$, existem $s_1, s_2 \in \mathbb{K}$ com $\max\{|s_1|, |s_2|\} \leq 1$ tais que $\lambda(X) \leq \|s_1 c + s_2 d\|$. Portanto, obtemos a desigualdade

$$\left\| \sum_{j=1}^{2^k} \frac{s_1}{M_1} \beta_j x_j + \sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{s_2}{M_2} \beta_j x_j \right\| \geq \lambda(X).$$

Seja $M_0 = \min\{M_1, M_2\}$. Dessa forma, $M_0 \geq \eta\lambda(X)^k$ e

$$\left\| \sum_{j=1}^{2^k} \frac{s_1 M_0}{M_1} \beta_j x_j + \sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{s_2 M_0}{M_2} \beta_j x_j \right\| \geq \eta\lambda(X)^{k+1}.$$

Definindo

$$\alpha_j = \frac{s_1 M_0}{M_1} \beta_j, \quad \text{if } 1 \leq j \leq 2^k,$$

e

$$\alpha_j = \frac{s_2 M_0}{M_2} \beta_j, \quad \text{if } 2^k + 1 \leq j \leq 2^{k+1},$$

segue o caso $r = k + 1$. Isso completa a prova da proposição. ■

2.3 Demonstração do resultado

Nesta seção apresentaremos a demonstração do resultado principal desse trabalho.

Teorema 1. Sejam K e L espaços localmente compactos Hausdorff e X um espaço de Banach real ou um espaço de Banach complexo reflexivo. Se $\lambda(X) > 1$ e T é um isomorfismo de $C_0(K, X)$ sobre $C_0(L, X)$ satisfazendo

$$\|T\| \|T^{-1}\| < \lambda(X),$$

então K é homeomorfo a L .

Observação 2.11. Como veremos na próxima seção, Teorema 1 garante uma unificação das generalizações do teorema de Banach-Stone.

Observação 2.12. Provaremos que K é homeomorfo à L através de uma sequência de lemas, da mesma análogo ao que foi feito em [14].

Lema 2.13. Dados $w \in W$ e $tx \in K_0$, existe $\phi \in X^*$ com $\|\phi\| = 1$ tal que $T^{***}(\phi\mu_w)$ é da forma $\psi\mu_{tx} + \overline{m} + \Phi$ e $\|\psi\| > P$ se, e somente se, para algum $e \in X$ com $\|e\| = 1$ vale

$$\|T^{**}(\chi_{tx}e)(w)\| > P.$$

Demonstração. Seja $e \in X$ tal que $\|e\| = 1$ e $\|T^{**}(\chi_{tx}e)(w)\| > P$. Pelo teorema de Hahn-Banach, seja $\phi \in X^*$ tal que $\|\phi\| = 1$ e

$$\phi(T^{**}(\chi_{tx}e)(w)) = \|T^{**}(\chi_{tx}e)(w)\|.$$

Além disso, como podemos escrever $T^{***}(\phi\mu_w) = \psi\mu_{tx} + \overline{m} + \Phi$, segue que

$$P < \|T^{**}(\chi_{tx}e)(w)\| = \phi(T^{**}(\chi_{tx}e)(w)) = T^{***}(\phi\mu_w)(\chi_{tx}e) = \psi(e).$$

Portanto, $\|\psi\| > P$. Reciprocamente, suponha que exista $\phi \in X^*$ tal que $\|\phi\| = 1$ e $T^{***}(\phi\mu_w)$ possa ser escrito da forma $\psi\mu_{tx} + \overline{m} + \Phi$ com $\|\psi\| > P$. Seja $e \in X$ com $\|e\| = 1$ tal que $\psi(e) > P$. Sendo assim, temos que

$$\phi(T^{**}(\chi_{tx}e)(w)) = \psi(e) > P.$$

Logo, $\|T^{**}(\chi_{tx}e)(w)\| > P$. ■

Lema 2.14. Dados $z \in Z$ e $sy \in L_0$, existe $\phi \in X^*$ com $\|\phi\| = 1$ tal que $(T^{***})^{-1}(\phi\mu_z)$ é da forma $\psi\mu_{sy} + \overline{m} + \Phi$ e $\|\psi\| > (\lambda(X))^{-1}$ se, e somente se, para algum $e \in X$ com $\|e\| = 1$ vale

$$\|(T^{**})^{-1}(\chi_{sy}e)(z)\| > (\lambda(X))^{-1}.$$

Demonstração. Análoga ao Lema 2.13. ■

Observação 2.15. Seja W_1 o conjunto de todos $w \in W$ tal que para algum $\phi \in X^*$ com $\|\phi\| = 1$ existe $tx \in K_0$ tal que

$$T^{***}(\phi\mu_w) = \psi\mu_{tx} + \overline{m} + \Phi,$$

em que $\|\psi\| > P$. Pelo Lema 2.13, existe uma função sobrejetora $\rho : W_1 \rightarrow K_0$ dada por $\rho(w) = tx$. De fato, primeiramente vamos mostrar que $\rho : W_1 \rightarrow K_0$ está bem definida. Pelo Lema 2.13, $\rho(w) = tx$ se e somente se para algum $e \in X$ com $\|e\| = 1$ temos que $\|T^{**}(\chi_{tx}e)(w)\| > P$. Suponha que existissem $\phi_1, \phi_2 \in X^*$ tal que $\|\phi_1\| = \|\phi_2\| = 1$ e

$$T^{***}(\phi_i\mu_w) = \psi_i\mu_{tx_i} + \overline{m}_i + \Phi,$$

para $i = 1, 2$ com $\|\psi_i\| > P$ e $tx_1 \neq tx_2$. Sendo assim, para toda escolha de escalares α_i com $|\alpha_i| \leq 1$ e e_i com $\|e_i\| = 1$, $i = 1, 2$, temos que

$$\|\alpha_1\chi_{tx_1}e_1 + \alpha_2\chi_{tx_2}e_2\| \leq 1.$$

No entanto, pela Proposição 2.10 e pelo Lema 2.13, segue que

$$\|T^{**}(\alpha_1\chi_{tx_1}e_1 + \alpha_2\chi_{tx_2}e_2)\| \geq \|\alpha_1T^{**}(\chi_{tx_1}e_1)(w) + \alpha_2T^{**}(\chi_{tx_2}e_2)(w)\| \geq P\lambda(X) > \lambda(X),$$

uma contradição pois $\|T^{**}\| < \lambda(X)$. Portanto, $\rho : W_1 \rightarrow K_0$ está bem definida. Além disso, $\rho : W_1 \rightarrow K_0$ é sobrejetora. Dado $tx \in K_0$, para todo $e \in X$ com $\|e\| = 1$ existe algum $w \in W$ tal que $\|T^{**}(\chi_{tx}e)(w)\| > P$. Logo, $w \in W_1$ e $\rho(w) = tx$. Analogamente, seja Z_1 o conjunto dos $z \in Z$ tal que para algum $\phi \in X^*$ com $\|\phi\| = 1$ existe $sy \in L_0$ tal que

$$(T^{***})^{-1}(\phi\mu_z) = \psi\mu_{sy} + \overline{m} + \Phi,$$

em que $\|\psi\| > (\lambda(X))^{-1}$. Pelo Lema 2.14, existe uma função sobrejetora $\tau : Z_1 \rightarrow L_0$ dada por $\tau(z) = sy$.

Lema 2.16. (i) Para cada $tx \in K_0$, $\rho^{-1}(\{tx\})$ é um conjunto aberto e finito de pontos. Dessa forma, $W_1 \subseteq L_0$. (ii) Para cada $sy \in L_0$, $\tau^{-1}(\{sy\})$ é um conjunto aberto e finito

de pontos. Dessa forma, $Z_1 \subseteq K_0$.

Demonstração. (i) Sejam $tx \in K_0$ e $w \in \rho^{-1}(\{tx\})$. Sendo assim, existe $e_w \in X$ com $\|e_w\| = 1$ tal que

$$\|T^{**}(\chi_{tx}e_w)(w)\| > P.$$

Considere

$$\hat{e}_w = \frac{T^{**}(\chi_{tx}e_w)(w)}{\|T^{**}(\chi_{tx}e_w)(w)\|}$$

e escolha uma função contínua $g : W \rightarrow [0, 1]$ tal que $g(w) = 1$. Sendo assim, defina a função $G \in C(W, X) \subseteq C(W, X_{\sigma^*})$ dada por

$$G(w') = g(w')\hat{e}_w,$$

para todo $w' \in W$. Portanto,

$$\|G + T^{**}(\chi_{tx}e_w)\| \geq \|G(w) + T^{**}(\chi_{tx}e_w)(w)\| > 1 + P.$$

Consequentemente, temos que

$$\|(T^{**})^{-1}(G) + \chi_{tx}e_w\| > \frac{1+P}{\lambda(X)} \geq \frac{1+P}{2} > 1.$$

Como $\|(T^{**})^{-1}(G)\| < 1$, segue que

$$\|(T^{**})^{-1}(G)(tx)\| > \frac{P-1}{2} > 0.$$

Pelo teorema de Hahn-Banach, seja $\phi_w \in X^*$ com $\|\phi_w\| = 1$ tal que $\phi_w(\hat{e}_w) = 1$. Considere o conjunto

$$A = \{w' \in W : |\phi_w(T^{**}(\chi_{tx}e_w)(w'))| > P\}.$$

Note que A é aberto e $w \in A$. Além disso, para cada $w' \in A$,

$$\|T^{**}(\chi_{tx}e_w)(w')\| > P.$$

Portanto, $w' \in \rho^{-1}(\{tx\})$. Dessa forma, fixando e_w e ϕ_w para cada $w \in \rho^{-1}(\{tx\})$, segue que

$$\rho^{-1}(\{tx\}) = \bigcup_{w \in \rho^{-1}(\{tx\})} \{w' \in W : |\phi_w(T^{**}(\chi_{tx}e_w)(w'))| > P\}.$$

Logo, $\rho^{-1}(\{tx\})$ é um conjunto aberto.

Vamos mostrar que $\rho^{-1}(\{tx\})$ é um conjunto finito. Suponha que, para cada $1 \leq k \leq 2^r$, $w_k \in \rho^{-1}(\{tx\})$. Sendo assim, para cada $1 \leq k \leq 2^r$, existe $G_k \in C(W, X_{\sigma^*})$ com $\|G_k\| = 1$ tal que

$$\|(T^{**})^{-1}(G_k)(tx)\| > \frac{P-1}{2}.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que as funções G_k tem suportes disjuntos. Dessa forma, para quaisquer escalares α_k com $|\alpha_k| \leq 1$, temos

$$\left\| \sum_{k=1}^{2^r} \alpha_k G_k \right\| \leq 1.$$

No entanto, pela Proposição 2.10, existem escalares α_k tais que

$$\left\| \sum_{k=1}^{2^r} \alpha_k (T^{**})^{-1}(G_k)(tx) \right\| \geq \frac{(P-1)(\lambda(X))^r}{2}.$$

Como $\lambda(X) > 1$, segue que $\rho^{-1}(\{tx\})$ é finito. Portanto, para cada $tx \in K_0$, $\rho^{-1}(\{tx\})$ é um conjunto aberto e finito de pontos. Isso implica que os pontos de $\rho^{-1}(\{tx\})$ são isolados. Logo,

$$W_1 = \bigcup_{tx \in K_0} \rho^{-1}(\{tx\})$$

possui apenas pontos isolados, isto é, $W_1 \subseteq L_0$.

(ii) Sejam $sy \in L_0$ e $z \in \tau^{-1}(\{sy\})$. Sendo assim, existe $e_z \in X$ com $\|e_z\| = 1$ tal que

$$\|(T^{**})^{-1}(\chi_{sy}e_z)(z)\| > (\lambda(X))^{-1}.$$

Considere

$$\hat{e}_z = \frac{(T^{**})^{-1}(\chi_{sy}e_z)(z)}{\|(T^{**})^{-1}(\chi_{sy}e_z)(z)\|}$$

e escolha uma função contínua $h : Z \rightarrow [0, 1]$ tal que $h(z) = 1$. Sendo assim, defina a função $H \in C(K, X) \subseteq C(Z, X_{\sigma^*})$ dada por

$$H(z') = bh(z')\hat{e}_z,$$

para todo $z' \in Z$, em que b é um número fixo satisfazendo (2.1). Portanto,

$$\|H + (T^{**})^{-1}(\chi_{sy}e_z)\| \geq \|H(z) + (T^{**})^{-1}(\chi_{sy}e_z)(z)\| > b + \frac{1}{\lambda(X)}.$$

Consequentemente, pela desigualdade (2.1), temos que

$$\|T^{**}(H) + \chi_{sy}e_z\| > P\left(b + \frac{1}{\lambda(X)}\right) > b\lambda(X).$$

Como $\|T^{**}(H)\| < b\lambda(X)$, novamente pela desigualdade (2.1), segue que

$$\|T^{**}(H)(sy)\| > P\left(b + \frac{1}{\lambda(X)}\right) - 1 > 0.$$

Finalmente, defina $H' = \frac{1}{b}H$. Sendo assim, $\|H'\| = 1$ e

$$\|T^{**}(H')(sy)\| > \frac{1}{b} \left[P\left(b + \frac{1}{\lambda(X)}\right) - 1 \right] := c > 0.$$

Pelo teorema de Hahn-Banach, seja $\phi_z \in X^*$ com $\|\phi_z\| = 1$ tal que $\phi_z(\hat{e}_z) = 1$. Considere o conjunto

$$A = \{z' \in Z : |\phi_z((T^{**})^{-1}(\chi_{sy}e_z)(z'))| > (\lambda(X))^{-1}\}.$$

Note que A é aberto e $z \in A$. Além disso, para cada $z' \in A$,

$$\|(T^{**})^{-1}(\chi_{sy}e_z)(z')\| > (\lambda(X))^{-1}.$$

Portanto, $z' \in \tau^{-1}(\{sy\})$. Dessa forma, fixando e_z e ϕ_z para cada $z \in \tau^{-1}(\{sy\})$, segue que

$$\tau^{-1}(\{sy\}) = \bigcup_{z \in \tau^{-1}(\{sy\})} \{z' \in Z : |\phi_z((T^{**})^{-1}(\chi_{sy}e_z)(z'))| > (\lambda(X))^{-1}\}.$$

Logo, $\tau^{-1}(\{sy\})$ é um conjunto aberto.

Vamos mostrar que $\tau^{-1}(\{sy\})$ é um conjunto finito. Suponha que, para cada $1 \leq k \leq 2^r$, $z_k \in \tau^{-1}(\{sy\})$. Sendo assim, para cada $1 \leq k \leq 2^r$, existe $H'_k \in C(Z, X_{\sigma^*})$ com $\|H'_k\| = 1$ tal que

$$\|T^{**}(H'_k)(sy)\| > c.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que as funções H'_k tem suportes disjuntos. Dessa forma, para quaisquer escalares α_k com $|\alpha_k| \leq 1$, temos

$$\left\| \sum_{k=1}^{2^r} \alpha_k H'_k \right\| \leq 1.$$

No entanto, pela Proposição 2.10, existem escalares α_k tais que

$$\left\| \sum_{k=1}^{2^r} \alpha_k T^{**}(H'_k)(sy) \right\| \geq c(\lambda(X))^r.$$

Como $\lambda(X) > 1$, segue que $\tau^{-1}(\{sy\})$ é finito.

Portanto, para cada $sy \in L_0$, $\tau^{-1}(\{sy\})$ é um conjunto aberto e finito de pontos. Isso implica que os pontos de $\tau^{-1}(\{sy\})$ são isolados. Logo,

$$Z_1 = \bigcup_{sy \in L_0} \tau^{-1}(\{sy\})$$

possui apenas pontos isolados, isto é, $Z_1 \subseteq K_0$. ■

Lema 2.17. Se $sy \in W_1 \subseteq L_0$ e $\rho(sy) = tx$ então $tx \in Z_1$ e $\tau(tx) = sy$.

Demonstração. Seja $sy \in W_1$ tal que $\rho(sy) = tx$. Suponha que tx não é um elemento de Z_1 ou que $tx \in Z_1$ mas $\tau(tx) \neq sy$. Sendo assim, para todo $e \in X$ com $\|e\| = 1$ temos que

$$\|(T^{**})^{-1}(\chi_{sy}e)(tx)\| \leq (\lambda(X))^{-1}.$$

Fixe um elemento $e \in X$ com $\|e\| = 1$ e considere

$$Q = \sup \|(T^{**})^{-1}(\chi_{sy}e)(z)\|.$$

Pelo Lema 2.16 (ii), segue que

$$\begin{aligned} \{z \in Z : \|(T^{**})^{-1}(\chi_{sy}e)(z)\| > (\lambda(X))^{-1}\} &= \{tx' \in K_0 : \|(T^{**})^{-1}(\chi_{sy}e)(tx')\| > (\lambda(X))^{-1}\} \\ &\subseteq \tau^{-1}(\{sy\}) \end{aligned}$$

que é um conjunto finito. Dessa forma, existe $tx' \in K_0$ tal que $\|(T^{**})^{-1}(\chi_{sy}e)(tx')\| = Q$. Note que $tx' \neq tx$ pois $\tau(tx) \neq sy$. Seja

$$\hat{e} = (T^{**})^{-1}(\chi_{sy}e)(tx') \quad \text{e} \quad \tilde{e} = \hat{e}/\|\hat{e}\|.$$

Sendo assim, existe $w \in W$ tal que

$$\|T^{**}(\chi_{tx'}\tilde{e})(w)\| > P.$$

Portanto, $w \in W_1 \subseteq L_0$, isto é, $w = sy'$ para algum $sy' \in L_0$. Novamente, $sy' \neq sy$ pois

$\rho(sy') = tx' \neq tx = \rho(sy)$. Assim, se $\phi \in X^*$ com $\|\phi\| = 1$ é tal que

$$\phi(T^{**}(\chi_{tx'}\tilde{e})(sy')) = \|T^{**}(\chi_{tx'}\tilde{e})(sy')\|,$$

então

$$T^{***}(\phi\mu_{sy'}) = \psi\mu_{tx'} + \overline{m} + \Phi,$$

com $\phi(\tilde{e}) > P$. Logo,

$$\psi(\hat{e}) = \|\hat{e}\|\psi(\tilde{e}) > QP > Q.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} 0 &= \int \chi_{sy}\hat{e}d(\phi\mu_{sy'}) = \phi\mu_{sy'}(\chi_{sy}\hat{e}) \\ &= \int (T^{**})^{-1}(\chi_{sy}\hat{e})d(\psi\mu_{tx'}) + (\overline{m} + \Phi)((T^{**})^{-1}(\chi_{sy}\hat{e})) \\ &= \psi(\hat{e}) + (\overline{m} + \Phi)((T^{**})^{-1}(\chi_{sy}\hat{e})). \end{aligned}$$

Mas isso é um absurdo pois $\psi(\hat{e}) > Q$ e

$$|(\overline{m} + \Phi)((T^{**})^{-1}(\chi_{sy}\hat{e}))| \leq (\|T\| - \|\psi\|)Q < Q.$$

■

Observação 2.18. Lema 2.17 garante que $K_0 = \rho(W_1) \subseteq Z_1$. Portanto, $K_0 = Z_1$. Além disso, $L_0 = \tau(Z_1) \subseteq W_1$. De fato, como $\rho : W_1 \rightarrow K_0$ é sobrejetora, dado $tx \in Z_1 = K_0$ existe $sy \in W_1$ tal que $\rho(sy) = tx$. Pelo Lema 2.17, $\tau(tx) = sy \in W_1$. Assim, $\rho : L_0 \rightarrow K_0$. Como τ é uma função e $\rho^{-1} = \tau$, segue que ρ é injetora. Portanto, $\hat{\rho} = t^{-1} \circ \rho \circ s$ é uma função bijetora de L em K .

Finalmente, nosso objetivo é mostrar que $\hat{\rho} = t^{-1} \circ \rho \circ s$ é um homeomorfismo.

Lema 2.19. $\hat{\rho}$ é um homeomorfismo de L em K .

Demonstração. Vamos mostrar que $\hat{\tau} = s^{-1} \circ \tau \circ t$ também é contínua. A demonstração de que $\hat{\rho}$ é uma função contínua é análoga. Sabemos que $\hat{\tau}(x) = y$ se, e somente se, para todo $e \in X$ com $\|e\| = 1$ temos

$$\|(T^{**})^{-1}(\chi_{sy}e)(tx)\| > (\lambda(X))^{-1}.$$

Portanto, para todo $e \in X$ existe, pelo teorema de Hahn-Banach, $\phi \in X^*$ com $\|\phi\| = 1$

tal que

$$\begin{aligned} ||(T^{**})^{-1}(\chi_{sy}e)(tx)|| &= \phi((T^{**})^{-1}(\chi_{sy}e)(tx)) = \phi\mu_{tx}((T^{**})^{-1}(\chi_{sy}e)) = (T^{**})^{-1}(\chi_{sy}e)(\phi\mu_x) \\ &= (\chi_{sy}e)((T^*)^{-1}(\phi\mu_x)) = (T^*)^{-1}(\phi\mu_x)(\{y\})(e) \end{aligned}$$

é real e maior do que $(\lambda(X))^{-1}$. Suponha que $\{x_\beta : \beta \in B\}$ é uma rede em K convergente para x_0 mas $y_\beta = \hat{\tau}(x_\beta)$ não converge para $\hat{\tau}(x_0) = y_0$. Sendo assim, existe uma vizinhança compacta V de y_0 tal que para todo $\beta_0 \in B$ existe $\beta \geq \beta_0$ com $y_\beta \notin V$. Fixe $e \in X$ com $||e|| = 1$. Assim, pelo teorema de Hahn-Banach, existe $\phi_0 \in X^*$ com $||\phi_0|| = 1$ e

$$(T^*)^{-1}(\phi_0\mu_{x_0})(\{y_0\})(e) > (\lambda(X))^{-1}.$$

Escreva $(T^*)^{-1}(\phi_0\mu_{x_0})$ na forma $\psi_0\mu_{y_0} + m$, em que $\psi_0 \in X^*$ e m é uma medida vetorial regular de Borel em L para X^* com $m(\{y_0\}) = 0$. Portanto,

$$\psi_0(e) > (\lambda(X))^{-1}.$$

Pela regularidade da medida, podemos escolher uma vizinhança V_1 de y_0 , $V_1 \subseteq V$ tal que

$$|m|(V_1) < (\lambda(X))^{-1} - (P\lambda(X))^{-1}.$$

Seja $g_1 : L \rightarrow [0, 1]$ uma função contínua com o suporte de g_1 contido em V_1 e $g_1(y_0) = 1$. Defina $G_1 \in C(L, X)$ dada por $G_1(y) = g_1(y)e$, $y \in L$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} |\phi_0(T^{-1}(G_1)(x_0))| &= |\phi_0\mu_{x_0}(T^{-1}(G_1))| = |(T^*)^{-1}(\phi_0\mu_{x_0})(G_1)| \\ &= |(\psi_0\mu_{y_0} + m)(G_1)| = |\psi_0(G_1(y_0)) + \int G_1 dm| \\ &\geq \psi_0(e) - \int ||G_1||d|m| > (P\lambda(X))^{-1}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$||T^{-1}(G_1)(x_0)|| > (P\lambda(X))^{-1}.$$

Como x_β converge para x_0 e $T^{-1}(G_1)$ é contínua na topologia da norma, existe $\beta_0 \in B$ tal que $\beta \geq \beta_0$ implica que

$$||T^{-1}(G_1)(x_\beta)|| > (P\lambda(X))^{-1}. \quad (2.11)$$

Fixe β satisfazendo (2.11) tal que $y_\beta = \hat{\tau}(x_\beta) \notin V$. Assim, para algum $\phi_\beta \in X^*$ com

$$\|\phi_\beta\| = 1,$$

$$(T^*)^{-1}(\phi_\beta \mu_{x_\beta})(\{y_\beta\})(e) > (\lambda(X))^{-1}.$$

Escreva $(T^*)^{-1}(\phi_\beta \mu_{x_\beta})$ também na forma $\psi_\beta \mu_{y_\beta} + n$, em que $\psi_\beta \in X^*$ e $n(\{y_\beta\}) = 0$. Portanto,

$$\psi_\beta(e) > (\lambda(X))^{-1}.$$

Pela regularidade da medida, podemos escolher uma vizinhança V_2 de y_β disjunta de V tal que

$$|m|(V_2) < (\lambda(X))^{-1} - (P\lambda(X))^{-1}$$

e uma função contínua $g_2 : L \rightarrow [0, 1]$ com o suporte de g_2 contido em V_2 e $g_2(y_\beta) = 1$. Definindo $G_2 \in C(L, X)$ como $G_2(y) = g_2(y)e$, $y \in L$, segue que

$$\|T^{-1}(G_2)(x_\beta)\| > (P\lambda(X))^{-1}.$$

Como G_1 e G_2 têm suportes disjuntos, para quaisquer escalares α_i com $|\alpha_i| \leq 1$, $i = 1, 2$, temos que $\|\alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2\| \leq 1$. No entanto, pela Proposição 2.10, existem escalares α_i satisfazendo

$$\|T^{-1}(\alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2)\| \geq \|\alpha_1 T^{-1}(G_1)(x_\beta) + \alpha_2 T^{-1}(G_2)(x_\beta)\| \geq \frac{1}{P}.$$

Isso contraria nossa hipótese pois $\|T^{-1}(G)\| < P^{-1}$ para todo $G \in C(L, X)$ com $\|G\| \leq 1$. Logo, $\hat{\rho}$ é um homeomorfismo de L em K . ■

2.4 Consequências

Nessa seção, vamos mostrar que os principais resultados sobre generalizações do teorema de Banach-Stone apresentados no capítulo 1 são consequências do resultado principal. Assim, além de melhorar o resultado obtido de Jarosz, unificamos e melhoramos “quase” todos os teoremas sobre o assunto no caso real.

Teorema 2.20. (Teorema de Amir-Cambern) Sejam K e L são espaços localmente compactos Hausdorff. Se $T : C_0(K) \rightarrow C_0(L)$ é um isomorfismo tal que

$$\|T\| \|T^{-1}\| < 2,$$

então K e L são homeomorfos.

Demonstração. Pela Observação 1.47, temos que $\lambda(\mathbb{K}) = 2$. ■

Teorema 2.21. Sejam K e L espaços localmente compactos Hausdorff e H um espaço de Hilbert de dimensão finita maior ou igual a 2. Se $T : C_0(K, H) \rightarrow C_0(L, H)$ é um isomorfismo tal que

$$\|T\| \|T^{-1}\| < \sqrt{2},$$

então K e L são homeomorfos.

Demonstração. Pela Proposição 1.52, $\lambda(H) = \sqrt{2}$ para todo espaço de Hilbert H cuja dimensão maior ou igual a 2. ■

Teorema 2.22. Sejam K e L espaços compactos Hausdorff e X um espaço de Banach que é uniformemente convexo. Se $T : C(K, X) \rightarrow C(L, X)$ é um isomorfismo que satisfaz

$$\|T\| \|T^{-1}\| < (1 - \delta_X(1))^{-1},$$

então K e L são homeomorfos.

Demonstração. O resultado principal implica e melhora o Teorema 2.22 uma vez que, pela Proposição 2.1, para todo espaço uniformemente convexo X temos que

$$(1 - \delta_X(1))^{-1} < \lambda(X).$$

■

Teorema 2.23. Sejam K e L espaços compactos Hausdorff e X um espaço de Banach tal que $\lambda_{B-C}(X^*) > 1$. Se $T : C(K, X) \rightarrow C(L, X)$ é um isomorfismo que satisfaz a condição

$$\|T\| \|T^{-1}\| < 11\lambda_{B-C}(X^*)/(1 + 10\lambda_{B-C}(X^*)),$$

então K e L são espaços homeomorfos.

Demonstração. Teorema 2.23 também é consequência do resultado principal uma vez que, pela Proposição 2.4,

$$11\lambda_{B-C}(X^*)/(1 + 10\lambda_{B-C}(X^*)) < \lambda(X),$$

quando $\lambda(X) > 1$. ■

Teorema 2.24. Sejam K e L espaços compactos Hausdorff e X um espaço de Banach com $\mu(X^*) < 2$. Se $T : C(K, X) \rightarrow C(L, X)$ é um isomorfismo tal que

$$\|T\| \|T^{-1}\| < 4/(2 + \mu(X^*)),$$

então K e L são espaços homeomorfos.

Demonstração. No caso real, o resultado principal implica e melhora o Teorema 2.24 pois, pela Proposição 2.5,

$$4/(2 + \mu(X^*)) < \lambda(X).$$

Além disso, no caso em que X é um espaço complexo reflexivo, Teorema 2.24 também é consequência do resultado principal uma vez que, pela Observação 2.6,

$$4/(2 + \mu(X^*)) \leq \lambda(X).$$

■

Teorema 2.25. O resultado principal é o melhor possível no caso $X = l_p$ em que $2 \leq p < \infty$, isto é, $BS(l_p) = \lambda(l_p) = \sqrt[p]{2}$.

Demonstração. A demonstração segue imediatamente da Proposição 2.7. ■

Observação 2.26. Portanto, o resultado principal unifica e melhora os principais teoremas sobre o assunto no caso real. No entanto, ainda falta analisar um outro teorema de Jarosz da década de 80. Esse será o tema do último capítulo.

Capítulo 3

Outra generalização do teorema de Banach-Stone

Nesse capítulo vamos analisar uma última generalização do teorema de Banach-Stone para os espaços $C_0(K, X)$ obtida por Jarosz em 1982. Tendo em vista a unificação conseguida de todas as outras generalizações bem conhecidas desse teorema existentes na literatura, é natural perguntar se essa última também segue como corolário dos resultados obtidos nessa tese. Nós mostraremos que para espaços de Banach reais X cuja constante de Schäffer de X e de X^* sejam iguais ou estejam suficientemente próximas, a generalização de Jarosz aqui considerada é consequência do resultado principal desse trabalho.

3.1 O teorema de Jarosz

No início da década de 80, Jarosz demonstrou em [26] o seguinte resultado:

Teorema 3.1. Sejam K e L espaços compactos Hausdorff e X um espaço de Banach. Se existe um isomorfismo $T : C(K, X) \rightarrow C(L, X)$ satisfazendo $\|T\| \|T^{-1}\| \leq k$ e, além disso,

$$\sup\{\|x_1^* - x_2^*\| : x_1^*, x_2^* \in X^*, \|x_1^* + x_2^*\| = 2, \|x_1^*\| \leq k, \|x_2^*\| \leq k\} = a < 4/3,$$

então K e L são espaços homeomorfos.

Para relacionarmos esse teorema com o resultado principal desse trabalho é conveniente introduzir a seguinte definição.

Definição 3.2. Para todo espaço de Banach real X e número real $k > 1$, coloquemos

$$a(k) = \sup\{\|x_1^* - x_2^*\| : \|x_1^* + x_2^*\| = 2, \|x_1^*\| \leq k, \|x_2^*\| \leq k\}.$$

A proposição abaixo mostra que uma das hipóteses do Teorema 3.1 está ligada com o módulo de convexidade de X^* . Nós agradecemos ao professor Satit Saejung pela sua ajuda em prová-la.

Proposição 3.3. Sejam X um espaço de Banach real e $k > 1$. Então

$$a(k) = 2k(1 - \delta_{X^*}(2/k)).$$

Demonstração. Sejam $x_1^*, x_2^* \in X^*$ em que $\|x_1^*\| \leq k$, $\|x_2^*\| \leq k$ e $\|x_1^* + x_2^*\| = 2$. Considere $x^* = x_1^*/k$ e $y^* = x_2^*/k$. Sendo assim, $\|x^*\| \leq 1$, $\|y^*\| \leq 1$ e $\|x^* + y^*\| = 2/k$. Pela definição de módulo de convexidade, segue que

$$\delta_{X^*}(2/k) \leq 1 - \|x^* - y^*\|/2,$$

ou seja,

$$\|x_1^* - x_2^*\| \leq 2k(1 - \delta_{X^*}(2/k)).$$

Portanto,

$$a(k) \leq 2k(1 - \delta_{X^*}(2/k)).$$

Por outro lado, existem sequências $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n^*)_{n \in \mathbb{N}} \in S_{X^*}$ tais que $\|x_n^* + y_n^*\| = 2/k$ e $\|x_n^* - y_n^*\|$ converge para $2(1 - \delta_{X^*}(2/k))$. Considerando $x_n'^* = kx_n^*$ e $y_n'^* = ky_n^*$, temos $\|x_n'^*\| = \|y_n'^*\| = k$, $\|x_n'^* + y_n'^*\| = 2$ e $\|x_n'^* - y_n'^*\|$ converge para $2k(1 - \delta_{X^*}(2/k))$. Logo, $a(k) = 2k(1 - \delta_{X^*}(2/k))$. ■

Observação 3.4. A Observação 3.6 e próxima proposição mostram que o Teorema 3.1 é um corolário do resultado principal dessa tese no caso em que o espaço de Banach real X satisfaça $\lambda(X^*) = \lambda(X)$. É interessante observar que nós só conhecemos dois espaços de Banach não satisfazendo essa igualdade, a saber: os espaços X e X^* mencionados na Exemplo 1.53.

Observação 3.5. Note que se X é um espaço de Banach real, $k > 1$ e $a(k) < 4/3$ então $k < \sqrt{13}/3$. De fato, pela Proposição 1.8,

$$\delta_{X^*}(\epsilon) \leq 1 - \sqrt{1 - \epsilon^2/4},$$

para todo $0 < \epsilon \leq 2$. Portanto

$$1 - 2/3k < \delta_{X^*}(2/k) \leq 1 - \sqrt{1 - (2/k)^2/4}.$$

Consequentemente,

$$\sqrt{1 - (2/k)^2/4} < 2/3k,$$

isto é, $k < \sqrt{13}/3$.

Observação 3.6. No caso em que $X = \mathbb{R}$, o Teorema 3.1 é corolário do nosso resultado principal pois pela Observação 3.5 e pela Observação 1.47 temos que $k < \sqrt{13}/3 < 2 = \lambda(X)$.

Proposição 3.7. Sejam X um espaço de Banach real com dimensão maior ou igual a 2 e $k > 1$. Se $a(k) < 4/3$ então $\mu(X^*) < 2$ e $k < \lambda(X^*)$.

Demonstração. Inicialmente vamos provar que $\mu(X^*) < 2$. Pela Proposição 1.38,

$$\mu(X^*) = \sup\{\epsilon \in (0, 2) : \delta_{X^*}(\epsilon) \leq 1 - \epsilon/2\}.$$

Dessa forma, basta mostrar que

$$\mu(X^*) \leq 2/k.$$

De fato, se $\mu(X^*) > 2/k$ então existe $\epsilon > 0$ tal que $\mu(X^*) > \epsilon > 2/k$ e

$$\delta_{X^*}(\epsilon) \leq 1 - \epsilon/2.$$

Como o módulo de convexidade é uma função estritamente crescente, segue que

$$\delta_{X^*}(2/k) < \delta_{X^*}(\epsilon),$$

consequentemente

$$1 - \delta_{X^*}(\epsilon) < 1 - \delta_{X^*}(2/k).$$

Portanto, vale

$$\epsilon/2 < 1 - \delta_{X^*}(2/k) < 2/3k,$$

pois

$$2k(1 - \delta_{X^*}(2/k)) < 4/3.$$

Logo, $2/k < \epsilon < 4/3k$, ou seja, temos que $6 < 4$ uma contradição. Isso prova que $\mu(X^*) < 2$. Agora provaremos que $k < \lambda(X^*)$. Pela Proposição 1.54, temos que

$$\delta_{X^*}(\mu(X^*)) = 1 - \mu(X^*)/2.$$

Assim, segue que

$$a(\lambda(X^*)) = 2\lambda(X^*)(1 - \delta_{X^*}(2/\lambda(X^*))) = 2\lambda(X^*)(\mu(X^*)/2) = 2 > 4/3 > a(k).$$

Logo, $\lambda(X^*) > k$ como queríamos demonstrar. ■

Observação 3.8. A seguir, melhoraremos a proposição acima para mostrarmos que mesmo para os espaços X e X^* mencionados na Observação 3.4, o Teorema 3.1 é uma consequência do resultado principal dessa tese. De fato, usando as Proposições 1.40 e 1.41 e o Exemplo 1.53, é imediato que

$$2\lambda(X^*)/3 + 1/3 < \lambda(X) \quad \text{e} \quad 2\lambda(X^{**})/3 + 1/3 < \lambda(X^*).$$

Proposição 3.9. Sejam X um espaço de Banach real de dimensão maior ou igual a 2 e $k > 1$. Se $a(k) < 4/3$ e

$$2\lambda(X^*)/3 + 1/3 < \lambda(X),$$

então $k < \lambda(X)$.

Demonstração. Sejam $\epsilon_1 = \mu(X^*)$ e $\epsilon_2 = 2/k$. Pela Proposição 1.6 temos que

$$\frac{\delta_{X^*}(2/k) - \delta_{X^*}(\mu(X^*))}{2/k - \mu(X^*)} \leq \frac{1 - \delta_{X^*}(\mu(X^*))}{2 - \mu(X^*)}.$$

Pela Proposição 3.3, vale que

$$1 - \delta_{X^*}(2/k) < 2/3k,$$

e, pela Proposição 3.7, $\mu(X^*) < 2$. Logo, temos que

$$\frac{(1 - 2/3k) - (1 - \mu(X^*)/2)}{2/k - \mu(X^*)} \leq \frac{\delta_{X^*}(2/k) - \delta_{X^*}(\mu(X^*))}{2/k - \mu(X^*)} \leq \frac{\mu(X^*)/2}{2 - \mu(X^*)}.$$

Portanto,

$$k \leq (4 + \mu(X^*))/3\mu(X^*) = 2\lambda(X^*)/3 + 1/3 < \lambda(X).$$
■

Finalmente, no caso em que X é um espaço de Banach real, nosso resultado principal pode ser reescrito da seguinte maneira.

Teorema 2. Sejam K e L espaços localmente compactos Hausdorff e X um espaço de Banach real. Se T é um isomorfismo de $C_0(K, X)$ em $C_0(L, X)$ satisfazendo

$$J(X) \|T\| \|T^{-1}\| < 2$$

em que $J(X) = \sup\{\min\{\|x_1 + x_2\|, \|x_1 - x_2\|\} : x_1, x_2 \in S_X\}$ é a constante de James de X então K e L são espaços homeomorfos.

3.2 Problemas em aberto

Nessa seção final, enunciaremos alguns problemas sobre as generalizações do teorema de Banach-Stone que tentamos resolver mas que ainda permanecem sem resposta.

Quando $X = l_p$ com $2 \leq p < \infty$, a Proposição 2.7 garante que $BS(X) = \lambda(X) = 2^{1/p}$. Mas não sabemos resolver:

Problema 3.10. Seja X um espaço de Banach real ou espaço de Banach complexo reflexivo. Se $\lambda(X) > 1$ então $BS(X) = \lambda(X)$?

Em virtude da Proposição 3.9, o Teorema 3.1 será um corolário do resultado principal dessa tese para espaços de Banach reais se for verdadeira a seguinte conjectura:

Conjectura 3.11. Se X é um espaço de Banach real com $\lambda(X) > 1$, então

$$2\lambda(X^*)/3 + 1/3 < \lambda(X).$$

Bibliografia

- [1] J. Alonso, E. Llorens-Fuster, *Geometric mean and triangles inscribed in a semi-circle in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. 340, 2008, 1271-1283.
- [2] D. Amir, *On isomorphisms of continuous function spaces*, Israel J. Math. 3 (1965) 205-210.
- [3] A. Arens, J. L. Kelly, *Characterization of spaces of continuous functions over a compact Hausdorff space*, Trans. Amer. math. Soc. 62, 1947 499-500.
- [4] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne, Warsaw, 1933.
- [5] E. Behrends, *M-Structure and Banach-Stone theorem*, Lecture Notes in Math. 736, Springer-Verlag, 1979.
- [6] E. Behrends, *Isomorphic Banach-Stone theorems and isomorphisms which are close to isometries*, Pacific J. Math., 113 (1988), 229-250.
- [7] E. Behrends, M. Cambern, *An isomorphic Banach-Stone theorem*, Studia Math. 90 (1988), 15-26.
- [8] G. Botelho, D. Pellegrino, E. Teixeira, *Fundamentos de Análise Funcional*, textos universitários, SBM, 2012.
- [9] M. Cambern, *A generalized Banach-Stone theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966) 396-400.
- [10] M. Cambern, *On isomorphisms with small bound*, Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), 1062-1066.
- [11] M. Cambern, *Isomorphisms of $C_0(Y)$ onto $C(X)$* , Pacific J. Math. 35 (1970), 307-212.
- [12] M. Cambern, *Isomorphisms of spaces of continuous vector-valued functions*, Illinois J. Math. 20 (1976), 1, 1-11.

- [13] M. Cambern, *The Bidual of $C(X, E)$* , Proc. Amer. Math. Soc. 85 (1982), 53-58.
- [14] M. Cambern, *Isomorphisms of spaces of norm-continuous functions*, Pacific J. Math. 116 (1985), 243-254.
- [15] L. Candido, E. M. Galego, *Embeddings of $C(K)$ spaces into $C(S, X)$ spaces with distortion strictly less than 3*, Fund. Math. 220 (2013), 1, 83-92.
- [16] L. Candido, *Teoria isomorfa dos espaços de Banach $C_0(K, X)$* , Tese de Doutorado, 2012.
- [17] J. A. Clarkson, *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), 396-414.
- [18] H. B. Cohen, *A bound-two isomorphisms between $C(K)$ Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 50 (1975), 215-217.
- [19] H. G. Dales, A. T. Lau and D. Strauss, *Second duals of measure algebras*, Dissertationes Math., 481 (2012), 1-121.
- [20] M. M. Day, *Normed Linear Spaces*, 3rd. ed., Springer, Berlin-Heidelberg-New York, SBM, 1973.
- [21] J. Diestel and J. J. Uhl, *Vector Measures*, Math. Surveys 15, Amer. Math. Soc., Providence, 1977.
- [22] N. Dinculeanu, *Vector Measures*, Pergamon Press, New York, 1967.
- [23] J. Gao and K. S. Lau, *On the geometry of spheres in normed linear spaces*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A 48 (1990), 101-112.
- [24] A. J. Guirao, P. Hájek, *On the moduli of convexity*, Proc. Amer. Math. Soc. 50 (2007), 3233-3240.
- [25] H. Ishihara, W. Takahashi, *Modulus of convexity, characteristic of convexity and fixed point theorems*, Kodai Math. J. 10 (1987), 197-208.
- [26] K. Jarosz, *A generalization of the Banach-Stone theorem*, Studia Math. 56 (1982), 33-39.
- [27] K. Jarosz, *Small isomorphisms of $C(X, E)$ spaces*, Pacific J. Math. 138 (1989), 295-315.
- [28] M. Kato, L. Maligranda, Y. Takahashi, *On James and Jordan-von Neumann constants and the normal structure coefficient of Banach spaces*, Studia Math. 144 (2001), 275-295.

- [29] H. E. Lacey, *The isometrical theory of classical Banach spaces*, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1974.
- [30] E. L. Lima, *Elementos de topologia geral*, textos universitários, SBM, 2009.
- [31] L. Meziani, *On the dual space $C_0^*(S, X)$* , Acta. Math. Univ. Comenian., LXXVIII, 1, (2009), 153-160.
- [32] G. Nordlander, *The modulus of convexity in normed linear spaces*, Ark. Mat. 4 (1960), 15-17.
- [33] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, Third Edition, McGraw-Hill International Editions, 1987.
- [34] M. H. Stone, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), 375-481.
- [35] Y. Takahashi, M. Kato, *A simple inequality for the von Neumann-Jordan and James constants of a Banach space*, J. Math. Anal. Appl. 359 (2009), 602-609.