**Resultados Tipo Björling para Superfícies Tipo Espaço
em quádricas de $\mathbb{R}_1^4$**

Elivaldo Rodrigues Macedo

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dra. Martha Patricia Dussan

Coorientador: Prof. Dr. Antonio de Padua Franco Filho

São Paulo, Outubro de 2019

Resultados Tipo Björling para Superfícies Tipo Espaço em quádricas de $\mathbb{R}_1^4$

Esta versão da dissertação/tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 04/10/2019. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof^a. Dr^a. Martha Patricia Dussan (orientadora) - IME-USP
- Prof^a. Dr^a. Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves - IME-USP
- Prof. Dr. Fernando Manfio - ICMC
- Prof. Dr. Juan Fernando Zapata Zapata - EEL-USP
- Prof. Dr. Guillermo Antonio Lobos Villagra - UFSCar

Agradecimentos

À minha família pelo apoio em toda os momentos dessa jornada.

Aos orientadores; Prof. Dr. Antonio de Padua Franco Filho e a Profa. Dra. Martha Patricia Dussan pela orientação segura, sugestões e conselhos em todo o processo de elaboração e diagramação deste trabalho.

Agradeço aos professores do IME: Alexandre Lymberopoulos, Ivan Struchiner, Glaucio Terra, Gaetano Siciliano, Orlando Lopez, Orlando Stanley, Raul Ferraz , Rosa Chavez, Cristian Ortiz e Marcos Alexandrino pelo apoio incondicional.

À todos os alunos da Pós-Graduação do IME meus sinceros agradecimentos. Em especial aos colegas; Carlos Gomes, Euripedes Carvalho, Benigno Alves, Arcelino Lobato, Marco Antonio, Marco Rafael, Daniel Reis, Rodrigo Santos, Yuri Maluf, Pablo Diaz, André Zaidan, César Batista, Ivo Terek, Kaique Matias, André Gomes, Ana Kelly, Carolina Lemos, Fernando Studzinski, Icaro Gonçalves, Oscar Morales, Jailson Calado, Jadevilson Cruz, Caio Sampaio, João Coelho, Dede Santos, Alexsandro Schneider(Leco), Sidney Crode e Edite Taufer pelo convívio resenhado durante essa jornada.

À todos da equipe CEPEUSP.

Ao DEMAT-UFMA, agradeço pelo incentivo e paciência durante esses anos em que estive afastado.

Aos servidores do setor gráfico do IME.

À todos da Secretaria da Pós-Graduação. Em especial, Ana Paula Veloso pelo desempenho com relação à serviços burocráticos e simpatia.

Por fim, agradeço a todos que de qualquer forma colaboram para realização deste projeto.

Resumo

MACEDO, E. R. **Resultados Tipo Björling para Superfícies Tipo Espaço em quádricas de $\mathbb{R}_1^4$** . 2019. 60 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

Neste trabalho, apresentamos uma contribuição para uma solução do problema tipo Björling para superfícies de tipo espaço em quádricas do espaço Lorentz-Minkowski $\mathbb{R}_1^4$, as quais têm vetor curvatura média tipo luz. A abordagem são variável complexa e as ideias de Hoffman e Osserman em [HO80], [HO83] e de Dussan, Franco Filho e Simões em [DFS], para obter fibrados normais especiais que facilitam o trabalho de obter uma fórmula de representação de tipo Weierstrass para tais superfícies, em termos das condições iniciais dadas, a saber uma curva analítica real tipo espaço nas quádricas junto com um fibrado normal restrito sobre a curva. No cone de luz futuro dirigido, determinamos localmente a expressão da superfície através de funções especiais $\lambda(w)$ e $L(x(w))$, onde as aplicações $x(w)$ e $\lambda(w)$ são a valores complexos e reais, respectivamente, e a aplicação $L(x)$ é uma aplicação tomando valores no cone de luz. Então trabalhando sobre quádricas projetivas, construímos fibrados normais especiais os quais permitem escrever as condições geométricas impostas no problema de Björling através de equações diferenciais parciais em variável complexa, cujas soluções resultam em condições que garantem a existência e unicidade de superfície solução. Por fim, estendemos os resultados para o espaço hiperbólico e o espaço de De Sitter, através de uma soma de duas imersões conformes no cone de luz ambas com vetor curvatura média de tipo luz, as quais são soluções ao problema de Björling no cone.

Palavras-chave: Espaço de Lorentz-Minkowski, Cone de Luz, Superfície de Tipo Espaço, Vetor Curvatura Média de Tipo Luz, Fórmula Integral Tipo Weierstrass.

Abstract

MACEDO, E. R. **Results Björling Type for Spacelike Surfaces in quadrics of $\mathbb{R}_1^4$** . 2019. 60 f. Thesis (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

In this work, we present a contribution to the solution of the Björling type problem for quadrics spacelike surfaces of the Lorentz-Minkowski space $\mathbb{R}_1^4$, which have lightlike mean curvature vector. The approach is a complex variable and the ideas of Hoffman and Osserman in [HO80], [HO83] and Dussan, Franco Filho and Simões in [DFS], to obtain special normal bundles that facilitate the work of obtaining a type Weierstrass representation formula for such surfaces in terms of the initial conditions given, namely a real spacelike analytic curve in with a normal bundle restricted on the curve. In the future directed lightcone, we locally determine the surface expression through special functions $\lambda(w)$ and $L(x(w))$, where the applications $x(w)$ and $\lambda(w)$ are at complex and real values, respectively, and the application $L(x)$ is an application taking values in the lightcone. Then working on projective quadrics, we construct special normal bundles which allow us to write the geometric conditions imposed on the Björling problem through partial differential equations in a complex variable whose solutions result in conditions that guarantee the existence and uniqueness of a solution surface. Finally, we extend the results to the hyperbolic space and the space of De Sitter, through a sum of two conformal immersions in the lightcone both with lightlike mean curvature vector, which are solutions to the Björling problem in the cone.

Keywords: Lorentz-Minkowski Space, Lightcone, Spacelike Surface, Lightlike Mean Curvature Vector, Type Weierstrass Integral Formula.

Sumário

1	Introdução	1
2	Preliminares	7
2.1	O espaço de Minkowski $\mathbb{R}_1^4$	7
2.2	Curvas em $\mathbb{R}_1^4$	12
2.3	Imersões Conformes em $\mathbb{R}_1^4$	15
3	Problema tipo Björling no cone	23
3.1	Imersões Conformes no Cone Luz	23
3.2	Problema tipo Björling em $\mathcal{C}$	29
4	Problema tipo Björling em $\mathbb{H}^3$	33
5	Problema tipo Björling em $\mathbb{S}_1^3$	45
	Referências Bibliográficas	49

Capítulo 1

Introdução

Na Teoria de superfícies de tipo espaço e de tipo tempo do espaço de Minkowski $\mathbb{R}_1^4$, as superfícies mínimas, isto é, as que o vetor curvatura média se anula, têm tido um maior destaque no decorrer dos anos, tanto no âmbito matemático quanto no físico. O problema clássico de Björling foi proposto por Björling em 1844 e consiste em construir uma superfície mínima em $\mathbb{R}^3$ contendo uma faixa analítica prescrita, a saber uma curva e um campo vetorial analítico (c, V) . Mais precisamente, o problema pode ser formulado da seguinte maneira.

Dada uma curva real analítica $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e um campo de vetores analítico unitário V ao longo de c , com $\langle c', V \rangle = 0$, determinar uma imersão mínima $X : I \times (-\epsilon, \epsilon) = \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

i) $X(t, 0) = c(t)$,

ii) $N(t, 0) = V(t)$, para todo $t \in I$, onde $N : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é a aplicação normal de Gauss da superfície.

A solução deste problema foi obtida por Schwarz em [Sch90], através de uma fórmula explícita em termos da faixa analítica. Muitos autores têm mostrado interesse nesse resultado em outros ambientes. Por exemplo, o problema de Björling foi resolvido para superfície de tipo espaço e de tipo tempo em [ACM03] e [CDM11] no espaço $\mathbb{R}_1^3$, respectivamente. Em [GM05], o problema foi resolvido de forma análoga no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$. Em $\mathbb{R}_1^4$, foi resolvido para superfícies de tipo espaço em [AV06], enquanto que em [DFFM17] foi resolvido para superfícies de tipo tempo através de uma aplicação de Gauss conveniente via variável paracomplexa. Para grupos de Lie tridimensional munido de uma métrica invariante à esquerda podemos ver o problema em [MO09], enquanto em [CMO16] obtiveram uma solução para grupos de Lie lorentziano tridimensional. O caso de métrica indefinida em $\mathbb{R}_2^4$, podemos ver o problema para superfícies de tipo tempo em [DM13], enquanto para superfícies de curvatura média constante não minimal, os autores em [BD10] generalizaram o problema clássico de Björling via grupo de Laços.

Neste trabalho pretendemos dar uma contribuição para a solução do problema de Björling para superfícies tipo espaço em quádricas de $\mathbb{R}_1^4$, a saber, no cone de luz futuro dirigido, no espaço hiperbólico e no espaço de De Sitter, com a condição geométrica extrínseca que o vetor de curvatura média seja tipo luz. Nossa abordagem para solucionar os problemas geométricos desta tese usa ideias do trabalho de Hoffman e Osserman em [HO80], [HO83] e de Dussan, Franco Filho e Simões em [DFS] para achar uma representação local complexa para a superfície através de uma aplicação $L(x)$ do espaço das funções complexas holomorfas tomando valores no cone de luz. Aqui, x inicialmente representará uma função com domínio $I \subset \mathbb{R}$ a valor complexo, a qual para o processo de achar a única superfície no cone de luz, x representará uma função $I \subset \mathbb{R}$, que deverá ser estendida para obtenção da solução do problema. Para o fibrado tangente encontramos que a derivada complexa da imersão vem representada na classe de uma aplicação especial $W(a, b)$, onde a, b são funções suaves de M em $\mathbb{C}$, a qual dá uma família de planos tangentes tipo espaço para a superfície. Quando

assumimos a aplicação a holomorfa, obtemos que a imersão tem vetor curvatura média tipo luz. Tais funções a e b são especiais e nos permitirão através delas encontrar soluções de certas equações diferenciais parciais associadas para a representação única da superfície solução do problema de Björling.

Argumentos complementares são feitos para solucionar o problema de Björling no cone de luz, o que também nos permite dar soluções, através de representações de Weierstrass, do problema de Björling para superfícies tipo espaço no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$ e no espaço de De Sitter $\mathbb{S}_1^3$ para uma curva analítica real c dada. Nosso principal argumento é baseado em construir duas imersões conformes (M, h) , (M, g) no cone de luz ambas com vetor curvatura média tipo luz, de modo que a imersão soma seja conforme no espaço hiperbólico com vetor curvatura média tipo luz, e de tal forma que as curvas $h(t, 0)$ e $g(t, 0)$ sejam tais que $X(t, 0) = \frac{1}{2}(h(t, 0) + g(t, 0)) = c(t)$. Então, usamos a teoria desenvolvida no Capítulo 3 no problema do cone de luz, para determinar a existência e a unicidade no caso hiperbólico. Para o problema no espaço de De Sitter, argumentos análogos permitem mostrar que a combinação da subtração das duas imersões do cone de luz, nos levam a solucionar o problema nesta terceira e última quádriga.

Para isto, organizamos a tese da seguinte maneira:

O Capítulo 2, encontram-se os preliminares e alguns resultados preliminares os quais serão usados nesta tese, o qual está dividido em três seções a seguir. Na primeira seção 2.1 apresentamos a estrutura do espaço de Minkowski $\mathbb{R}_1^4$ junto com as quádrigas principais: O cone de luz $\mathcal{C}$, o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$ e o espaço de De Sitter $\mathbb{S}_1^3$. Algumas definições sobre base de vetores tipo luz, produto vetorial e uma primeira explicação sobre a função $W(a, b)$ será dada. Na segunda seção 2.2, estudamos a teoria de curvas em $\mathbb{R}_1^4$, bem como definimos as “boas curvas” tipo espaço e provamos alguns resultados sobre existência de boas curvas que serão usados para solucionar o problema de Björling. Na terceira seção 2.3, introduzimos o conceito de imersões conformes com vetor curvatura média tipo luz em $\mathbb{R}_1^4$, bem como estabelecemos uma base ortonormal do fibrado normal $\{L_0(b), L_3(a)\}$, onde os vetores $L_0(b)$, $L_3(a)$ são de tipo luz na Definição 2.3.2 e as funções a e b são dadas na representação $W(a, b)$ na Proposição 2.3.1. Além disto, achamos as condições de compatibilidade para a existência da imersão conforme na Proposição 2.3.3 e provamos uma fórmula tipo Schwarz para superfície tipo espaço a qual contém a curva dada c no Teorema 2.3.1.

No Capítulo 3, tratamos do problema tipo Björling no cone de luz futuro dirigido $\mathcal{C}$. Na seção 3.1.1, provamos resultados os quais implicam existência de imersões conformes no cone de luz o que nos levará a concluir que a função x deve ser holomorfa não constante na Proposição 3.1.2, bem como provamos um resultado que dá condições para uma curva do espaço de Minkowski $\mathbb{R}_1^4$ estar contida no cone de luz na Corolário 3.1.1. Encontramos também os dados de Weierstrass no cone de luz na Proposição 3.1.3 e que a função a na representação da derivada complexa da imersão $X_w = \mu(w)W(a(w), b(w))$ deve ser holomorfa para garantir que a imersão tenha vetor curvatura média tipo luz. Em particular, encontramos também uma equação diferencial a qual a deve satisfazer, a saber: $a = x + \frac{x_w}{(\ln \lambda)_w}$ na Corolário 3.1.2. Isso implicará que a função $\frac{\lambda_w}{\lambda}$ deve ser uma função holomorfa e, portanto encontramos uma família de $\lambda(w)$ da forma $\lambda(w) = \lambda^0(w)e^{\theta(w)}$ para cada função harmônica real $\theta : M \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ com condição inicial em $\theta(t, 0) = 0$ para todo $t \in I$. Então, dada a condição inicial da distribuição normal tipo tempo sobre a curva c (correspondente ao dado inicial do problema de Björling), provamos a unicidade da solução, pois a distribuição dada fixará um único θ para o qual acontece a representação X . Como consequência dos resultados podemos provar os seguintes resultados principais, os quais fornecem a solução ao problema de Björling no cone. Como a seguir.

Teorema 1.0.1 *Dada uma curva analítica real $c(t) = \lambda(t)L(x(t))$ no cone $\mathcal{C}$ e uma distribuição normal tipo tempo $A(t) = \text{Span}\{L(x(t)), L_3(a(t))\}$ ao longo de c , então existe uma imersão conforme*

com vetor curvatura média de tipo luz $X : M \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que

$$X(w) = \lambda^0(w) e^{\theta(w)} L(x(w)) \quad (1.1)$$

com $X(t, 0) = c(t)$, onde $\theta : M \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função harmônica real tal que $\theta(t, 0) = 0$ para todo $t \in I \subseteq M$ e

$$a = x + \frac{x_w}{\theta_w + (\ln \lambda^0(w))_w}.$$

Teorema 1.0.2 Se $A(t) = \text{Span}\{m(t), n(t)\}$ é uma distribuição tipo tempo analítica real ao longo da curva analítica real $c(t) = \lambda(t)L(x(t))$, então, temos uma única $\theta(w)$ tal que o espaço normal $N_{c(t)}X(M)$ ao longo dessa curva satisfaz

$$N_{c(t)}X(M) = A(t),$$

para todo $t \in I$.

Neste caso, esta superfície é dada pela fórmula

$$X(w) = c(0) + \mathcal{R}e \int_0^w \left(\frac{\partial c}{\partial w}(\xi) - i \boxtimes \left(\frac{\partial c}{\partial w}(\xi), m(\xi), n(\xi) \right) \right) d\xi,$$

e a função harmônica real θ é dada pela equação

$$\theta_w = \frac{x_w}{a - x} - \frac{\lambda_w^0}{\lambda^0},$$

com $\theta(t, 0) = 0$, para todo $t \in I$. As funções holomórficas $x(w)$ e $a(w)$ de M em $\mathbb{C}$ são as únicas extensões holomorfas das funções a valores reais $x(t)$, $a(t)$, fixadas pelo triedro $c(t)$, $L(x(t))$, $L_3(a(t))$, onde a integral é tomada ao longo de um caminho arbitrário.

Finalizamos o capítulo com exemplo explícito de uma superfície que é solução ao problema de Björling no cone.

No Capítulo 4, tratamos do problema tipo Björling para superfícies tipo espaço com vetor curvatura média tipo luz em $\mathbb{H}^3$. A técnica usada neste capítulo é mostrar que podemos relacionar duas superfícies tipo espaço no cone de luz com vetor curvatura média tipo luz as quais são soluções do problema de Björling no cone de luz, e achar uma única superfície do problema no espaço hiperbólico. Mais precisamente, construímos duas imersões conformes no cone de luz (M, h) e (M, g) ambas com vetor curvatura média tipo as quais são soluções do problema de Björling no cone, de modo que a imersão $X(w) = \frac{1}{2}(h(w) + g(w))$, corresponde a superfície em $\mathbb{H}^3$ com campo de vetores $X_{w\bar{w}} = \frac{1}{2}(h_{w\bar{w}} + g_{w\bar{w}})$ de tipo luz e cuja curva dada $c(t) = X(t, 0) = \frac{1}{2}(h(t, 0) + g(t, 0))$.

Mais precisamente, provamos o seguinte resultado.

Teorema 1.0.3 Dada uma curva $c : I \longrightarrow \mathbb{H}^3$ e uma distribuição normal tipo espaço analítica real $A(t) = \text{Span}\{c(t), \nu(t)\}$. Então existem imersões de M no cone de luz $\mathcal{C}$ definidas por:

$$h(w) = 2\mathcal{R}e \int_0^w \mu(\xi) W(a(\xi), q(\xi)) d\xi \quad (1.2)$$

e

$$g(w) = 2\mathcal{R}e \int_0^w \eta(\xi) W(a(\xi), s(\xi)) d\xi, \quad (1.3)$$

onde (M, h) é uma solução para o problema $h(t) = c(t) + \nu(t)$ e (M, g) é uma solução para o problema $g(t) = c(t) - \nu(t)$ dada pelo Teorema 3.2.1, com distribuições normais $A(t) = \text{Span}\{c(t), \nu(t)\}$ em comum. Então, a imersão (M, X) dada por $X(w) = \frac{1}{2}(h(w) + g(w))$ é tal que

$$X(w) = c(0) + \mathcal{R}e \int_0^w (\mu(\xi)W(a(\xi), q(\xi)) + \eta(\xi)W(a(\xi), s(\xi))) d\xi,$$

é uma imersão conforme de M em $\mathbb{H}^3$ com vetor curvatura média $\vec{H}_X$ tipo luz tal que, para cada $t \in I$, temos

$$X(t, 0) = c(t) \quad e \quad N_{c(t)}X(M) = A(t).$$

Além disto, pelo Lema 3.3.3, se $X_w = \rho(w)W(x(w), y(w))$, obtemos

$$X(w) = c(0) + \mathcal{R}e \int_0^w (\mu(\xi) + \eta(\xi))W\left(a(\xi), \frac{\mu(\xi)q(\xi) + \eta(\xi)s(\xi)}{\mu(\xi) + \eta(\xi)}\right) d\xi.$$

Para uma versão da representação integral de Schwarz para a solução do problema de Björling em $\mathbb{H}^3$, provamos o seguinte resultado.

Teorema 1.0.4 *Dada uma curva analítica real $c : I \rightarrow \mathbb{H}^3$ e uma distribuição normal tipo tempo analítica real $A(t) = \text{Span}\{c(t), \nu(t)\}$. Então existe imersão de M no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$ dada por*

$$X(w) = c(0) + \mathcal{R}e \int_0^w \left(\frac{\partial c}{\partial w}(\xi) - i \boxtimes \left(\frac{\partial c}{\partial w}(\xi), T(\xi), N(\xi) \right) \right) d\xi, \quad (1.4)$$

onde $c(\xi)$ e $\nu(\xi)$ são, respectivamente as extensões de $c(t)$ e $\nu(t)$ dadas pelo Teorema 3.2.1 com a seguinte forma:

$$h(w) = h(0) + \lambda(w)L(x(w)) \quad e \quad g(w) = g(0) + \rho(w)L(y(w)), \quad (1.5)$$

onde $h(w) = c(w) + \nu(w)$ e $g(w) = c(w) - \nu(w)$.

Finalizamos o capítulo com exemplo explícito de superfície solução.

No Capítulo 5, solucionamos o problema tipo Björling para superfícies tipo espaço com vetor curvatura média tipo luz no espaço de De Sitter $\mathbb{S}_1^3$. Aqui, continuamos usando a técnica feita no Capítulo 4. De fato, construímos duas imersões conformes no cone de luz (M, h) e (M, g) ambas com vetor curvatura média tipo luz as quais são soluções do problema de Björling no cone, de modo que a imersão $X(w) = \frac{1}{2}(h(w) - g(w))$, corresponde a superfície em $\mathbb{S}_1^3$ com campo de vetores $X_{w\bar{w}} = \frac{1}{2}(h_{w\bar{w}} - g_{w\bar{w}})$ de tipo luz e cuja curva é dada por $\nu(t) = X(t, 0) = \frac{1}{2}(h(t, 0) - g(t, 0))$.

Mais precisamente, provamos o seguinte resultado.

Teorema 1.0.5 *Dada uma curva tipo espaço $\nu : I \rightarrow \mathbb{S}_1^3$ e uma distribuição normal tipo tempo analítica real $A(t) = \text{Span}\{c(t), \nu(t)\}$. Então existem imersões de M no cone de luz $\mathcal{C}$ dadas por:*

$$h(w) = 2\mathcal{R}e \int_0^w \mu(\xi) W(p(\xi), q(\xi)) d\xi \quad (1.6)$$

e

$$g(w) = 2\mathcal{R}e \int_0^w \eta(\xi) W(p(\xi), s(\xi)) d\xi, \quad (1.7)$$

onde (M, h) e (M, g) são soluções do problema de Björling em $\mathcal{C}$ com curvas respectivas $h(t) = c(t) + \nu(t)$ e $g(t) = c(t) - \nu(t)$ dadas pelo Teorema 3.2.1, com distribuições normais $A(t) = \text{Span}\{c(t), \nu(t)\}$ em comum. Então, a imersão (M, X) dada por $X(w) = \frac{1}{2}(h(w) - g(w))$ é tal que

$$X(w) = \nu(0) + \mathcal{R}e \int_0^w (\mu(\xi)W(p(\xi), q(\xi)) - \eta(\xi)W(p(\xi), s(\xi))) d\xi \quad (1.8)$$

é uma imersão conforme de M em $\mathbb{S}_1^3$ com vetor curvatura média $\vec{H}_X$ tipo luz tal que, para cada $t \in I$, temos

$$X(t, 0) = \nu(t) \quad e \quad N_{\nu(t)}X(M) = A(t).$$

Além disto, se escrevemos $X_w = \rho(w)W(x(w), y(w))$ com x sendo função holomorfa, a fórmula (1.8) se transforma em:

$$X(w) = \nu(0) + \mathcal{R}e \int_0^w (\mu(\xi) - \eta(\xi))W\left(p(\xi), \frac{\mu(\xi)q(\xi) - \eta(\xi)s(\xi)}{\mu(\xi) - \eta(\xi)}\right) d\xi.$$

Uma versão da representação integral de Schwarz para a solução do problema de Björling em $\mathbb{S}_1^3$ também é obtida:

Teorema 1.0.6 *Dada uma curva analítica real tipo espaço $\nu : I \rightarrow \mathbb{S}_1^3$ e uma distribuição normal tipo tempo analítica real $A(t) = \text{Span}\{c(t), \nu(t)\}$. Então existe imersão de M no espaço De Sitter $\mathbb{S}_1^3$ dada por*

$$X(w) = \nu(0) + \mathcal{R}e \int_0^w \left(\frac{\partial \nu}{\partial w}(\xi) - i \boxtimes \left(\frac{\partial \nu}{\partial w}(\xi), T(\xi), N(\xi) \right) \right) d\xi, \quad (1.9)$$

onde $c(\xi)$ e $\nu(\xi)$ são, respectivamente, as extensões de $c(t)$ e $\nu(t)$ dadas pelo Teorema 3.2.1 com a seguinte forma

$$h(w) = h(0) + \lambda(w)L(x(w)) \quad e \quad g(w) = g(0) + \rho(w)L(y(w)), \quad (1.10)$$

onde $h(w) = c(w) + \nu(w)$ e $g(w) = c(w) - \nu(w)$.

Assim a expressão (1.9) pode ser formulada como

$$X(w) = \nu(0) + \mathcal{R}e \int_0^w \left(\frac{h_w(\xi) - g_w(\xi)}{2} - i \boxtimes \left(\frac{h_w(\xi) - g_w(\xi)}{2}, T(\xi), N(\xi) \right) \right) d\xi.$$

Por fim, damos um exemplo explícito de superfície solução.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos conforme O'Neill em [O'N83] as notações e definições, bem como algumas propriedades básicas sobre estrutura, curvas e imersões conformes que são imprescindíveis para o estudo do espaço de Minkowski $\mathbb{R}_1^4$.

2.1 O espaço de Minkowski $\mathbb{R}_1^4$

O espaço de Minkowski ou espaço Lorentziano $\mathbb{R}_1^4$ é o espaço vetorial $\mathbb{R}^4 \doteq \{(x_0, x_1, x_2, x_3) : x_i \in \mathbb{R}\}$ munido do produto escalar Lorentziano

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = -(dx_0)^2 + (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2.$$

Dados $x, y, z \in \mathbb{R}_1^4$, definimos o produto vetorial $\boxtimes(x, y, z) \in \mathbb{R}_1^4$ por

$$\langle \boxtimes(x, y, z), w \rangle = -\det(w, x, y, z),$$

para todo $w \in \mathbb{R}_1^4$. A norma de um vetor $x \in \mathbb{R}_1^4$ é definida por $\|x\| = \sqrt{|\langle x, x \rangle|}$. O vetor x é chamado unitário se sua norma é 1.

Observação 2.1.1 *Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}_1^4$. Fixada uma base ortonormal orientada positivamente $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ com sinal $(-1, 1, 1, 1)$, o produto vetorial de x, y e z é o determinante formal calculado pela regra de Laplace na primeira linha dada por*

$$\boxtimes(x, y, z) = \begin{vmatrix} -e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix},$$

onde $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_0, y_1, y_2, y_3)$ e $z = (z_0, z_1, z_2, z_3)$.

Observação 2.1.2 *Se $\{x, y, z\}$ for um conjunto L.I., o produto vetorial $\boxtimes(x, y, z)$ é o único vetor ortogonal aos três vetores x, y, z , cuja norma é o volume do paralelepípedo formado por estes vetores, preserva a orientação fixada acima, e $\boxtimes(e_1, e_2, e_3) = e_0$ é futuro dirigido. Note que*

$$\langle \boxtimes(x, y, z), w \rangle = \begin{vmatrix} w_0 & w_1 & w_2 & w_3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix},$$

para todo $w = (w_0, w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}_1^4$.

Das propriedades do determinante, segue o seguinte resultado.

Proposição 2.1.1 *O produto vetorial $\boxtimes$ tem as seguintes propriedades operacionais:*

1. $\langle \boxtimes(x, y, z), x \rangle = \langle \boxtimes(x, y, z), y \rangle = \langle \boxtimes(x, y, z), z \rangle = 0$;
2. $\boxtimes(x, y, e_1) = \tilde{x} \times \tilde{y}$ e $\boxtimes(x, y, e_0) = \tilde{x} \times \tilde{y}$;
3. $\boxtimes(x, y, e_0) = -\tilde{x} \times \tilde{y}$ e $\boxtimes(x, y, e_2) = -\tilde{x} \times \tilde{y}$;
4. $\langle \boxtimes(x_0, x_1, x_2), \boxtimes(y_0, y_1, y_2) \rangle = -\det((\langle x_i, y_j \rangle)_{0 \leq i, j \leq 2}), x_i, y_j \in \mathbb{R}_1^4$,

onde $\tilde{x}$ significa omitir a primeira coordenada no primeiro caso, a segunda coordenada no segundo caso, etc., e o produto vetorial é tomado no espaço tridimensional com a métrica herdada de $\mathbb{R}_1^4$.

Definição 2.1.1 (*Caráter Causal*) Um vetor $x \in \mathbb{R}_1^4$ é dito:

- tipo espaço, se $\langle x, x \rangle > 0$, ou $x = 0$;
- tipo tempo, se $\langle x, x \rangle < 0$;
- tipo luz, se $\langle x, x \rangle = 0$ e $x \neq 0$.

Seja $x \in \mathbb{R}_1^4 \setminus \{0\}$ um vetor tipo tempo ou tipo espaço, definimos o sinal ε_x de x , como o sinal de $\langle x, x \rangle$, isto é, $\varepsilon_x = 1$ se x for tipo espaço, e $\varepsilon_x = -1$ se for de tipo tempo.

Temos as seguintes quádricas ou esferas centradas na origem em $\mathbb{R}_1^4$: O **espaço hiperbólico** dado por

$$\mathbb{H}^3(-1) = \{x \in \mathbb{R}_1^4; \langle x, x \rangle = -1 \text{ e } x_1 > 0\},$$

o **espaço de De Sitter** por

$$\mathbb{S}_1^3(1) = \{x \in \mathbb{R}_1^4; \langle x, x \rangle = 1\},$$

e o **cone de luz** por

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}_1^4 \setminus \{0\}; \langle x, x \rangle = 0\}.$$

Elas são variedades tridimensionais encontradas em muitos trabalhos da geometria e da física ver [Pen65], por exemplo. A geometria de tais quádricas é muito rica e seu estudo serve como ponte para estudar e entender geometrias de subvariedades com condições intrínsecas ou extrínsecas conforme podemos ver em [Kok97], [GM05], [AR03], [PR13] e [Izu09]. Assim, nosso principal objetivo nesta tese é solucionar o problema de Björling para superfícies tipo espaço em tais quádricas.

Agora a causalidade de subespaço vetorial de $\mathbb{R}_1^4$.

Definição 2.1.2 *Seja W um subespaço vetorial não trivial de $\mathbb{R}_1^4$. Então W é dito:*

1. tipo espaço, se $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{W \times W}$ é positiva definida;
2. tipo tempo, se $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{W \times W}$ é não degenerada de índice 1;
3. tipo luz, se $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{W \times W}$ é degenerada;

Em $\mathbb{R}_1^4$, dados $\vec{v}$ um vetor não nulo e um número real r , definimos um **hiperplano** com normal $\vec{v}$, pelo conjunto

$$\mathcal{P} = \{p \in \mathbb{R}_1^4; \langle p, \vec{v} \rangle = r\}.$$

O hiperplano $\mathcal{P}$ é dito tipo espaço (tipo tempo ou tipo luz) se $\vec{v}$ é tipo tempo (tipo espaço ou tipo luz, respectivamente).

Definição 2.1.3 *Dizemos que dois vetores $x, y \in \mathbb{R}_1^4$ são ortogonais se $\langle x, y \rangle = 0$.*

O seguinte resultado, pode ser encontrado em [Izu09] e [Rat06]. Mais precisamente:

Proposição 2.1.2 *Sejam x e y vetores não nulos ortogonais em $\mathbb{R}_1^4$.*

1. Se x e y são tipo luz, então x e y são linearmente dependentes.
2. Se x é tipo tempo, então y é tipo espaço.

Em $\mathbb{R}_1^4$, uma base $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ é dita **ortonormal** se $\langle v_0, v_0 \rangle = -1$ e $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ caso contrário, onde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$. Assim a base canônica $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^4$ é uma base ortonormal em $\mathbb{R}_1^4$, sendo e_0 tipo tempo e e_i tipo espaço para $i = 1, 2, 3$. Além disto, diremos que um vetor x tipo tempo ou luz, é **futuro dirigido** se $\langle x, e_0 \rangle < 0$ e **passado dirigido** se $\langle x, e_0 \rangle > 0$.

Definição 2.1.4 Um plano de tipo tempo é um subespaço vetorial bidimensional $T^2 \subset \mathbb{R}_1^4$ que admite uma base ortonormal $\{m, n\}$ satisfazendo

$$\langle m, m \rangle = -1, \langle n, n \rangle = 1 \text{ e } \langle m, n \rangle = 0.$$

Observação 2.1.3 Vemos que se m é um vetor de tipo tempo futuro dirigido, temos um plano de tipo tempo orientado cuja orientação é dada por uma família de bases ortonormais orientadas, relacionada por uma transformação de Lorentz de bases

$$\begin{cases} m_1 &= \cosh(\phi)m_0 + \sinh(\phi)n_0 \\ n_1 &= \sinh(\phi)m_0 + \cosh(\phi)n_0 \end{cases}$$

para bases ordenadas $\{m_0, n_0\}$ e $\{m_1, n_1\}$ onde $\cosh(\phi) = -\langle m_0, m_1 \rangle$.

No que segue temos.

Definição 2.1.5 Seja $\{m, n\}$ uma base ordenada de T^2 , onde T^2 é 2-plano tipo tempo, definimos uma nova base ordenada para T^2 formada por vetores de tipo luz futuro dirigidos $\{l_0, l_3\}$ dados por

$$l_0 = m - n \text{ e } l_3 = m + n.$$

Agora, daremos uma noção de bases isotrópicas.

Definição 2.1.6 Uma base de T^2 , onde T^2 é um 2-plano tipo tempo, formada por vetores de tipo luz é dita **base isotrópica** de T^2 . Se $\{l_0, l_3\}$ e $\{\tilde{l}_0, \tilde{l}_3\}$ são duas bases isotrópicas de T^2 , então existe um número real positivo ϕ , tal que

$$\tilde{l}_0 = e^\phi l_0 \text{ e } \tilde{l}_3 = e^{-\phi} l_3.$$

Agora, dado um vetor de tipo luz futuro dirigido L , podemos definir um vetor unitário da esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ por

$$\pi(L) = \left(\frac{L_1}{L_0}, \frac{L_2}{L_0}, \frac{L_3}{L_0} \right),$$

onde π é uma aplicação suave de $\mathbb{R}_1^4 \setminus \mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}^3$. É possível definir ou um número complexo $a(L)$ ou $a(L) = \infty$, tal que

$$\pi(L) = \left(\frac{2\operatorname{Re}(a(L))}{1 + |a(L)|^2}, \frac{2\operatorname{Im}(a(L))}{1 + |a(L)|^2}, \frac{-1 + |a(L)|^2}{1 + |a(L)|^2} \right).$$

Se st_N é a projeção estereográfica norte de $\mathbb{S}^2$ sobre o plano complexo estendido $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, então

$$a(L) = \operatorname{st}_N(\pi(L)).$$

De posse das informações precedentes os autores Dussan-Filho-Simões em [DFS], obtiveram o seguinte resultado cuja prova escrevemos nesta tese.

Proposição 2.1.3 *Para cada plano de tipo tempo orientado T^2 :*

1. *Existem dois números complexos $a = a(l_3)$ e $b = b(l_0)$, onde $\{l_0, l_3\}$ é uma base isotrópica desse plano.*
2. *Para cada um desses planos tipo tempo existe um único plano orientado de tipo espaço E^2 , que é o complemento ortogonal de T^2 , munido com uma base conformal orientada X, Y , tal que o vetor complexo $W = X + iY \in \mathbb{C}^4$ pode escrito como:*

$$W(a, b) = (a + b, 1 + ab, i(1 - ab), a - b),$$

Além disto, $\langle W, W \rangle = 0$, $\langle W, \bar{W} \rangle = 2(1 - \bar{a}b)(1 - a\bar{b})$, e, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^$ tais que podemos escrever a base isotrópica $\{l_0, l_3\}$ como*

$$l_0 = \frac{\beta}{1 + b\bar{b}} \bar{b}W \left(\frac{1}{\bar{b}}, b \right) \quad e \quad l_3 = \frac{\alpha}{1 + a\bar{a}} \bar{a}W \left(a, \frac{1}{\bar{a}} \right).$$

Os vetores de tipo luz

$$L_0(b) = \bar{b}W \left(\frac{1}{\bar{b}}, b \right) \quad e \quad L_3(a) = \bar{a}W \left(a, \frac{1}{\bar{a}} \right)$$

são tais que

$$\langle L_0(b), L_3(a) \rangle = -2(1 - \bar{a}b)(1 - a\bar{b}).$$

Prova: *Para (1), defina*

$$a = a(l_3) = st_N(\pi(l_3)) \quad e \quad b = b(l_0) = st_S(\pi(l_0)).$$

Para (2), fixado o plano tipo tempo $T^2 = \text{Span}\{l_0, l_3\}$, seu complemento ortogonal relativo a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o subespaço vetorial tipo espaço bidimensional, $E^2 = \text{Span}\{X, Y\}$, onde X, Y é uma base conformal orientada, isto é,

$$\langle X, X \rangle = \langle Y, Y \rangle = \lambda^2 > 0 \quad e \quad \langle X, Y \rangle = 0.$$

Considere o vetor complexo $W = X + iY \in \mathbb{C}^4$, temos

$$\langle W, W \rangle = 0.$$

Por outro lado, se $W = (W_0, W_1, W_2, W_3)$, temos

$$\langle W, W \rangle = -W_0^2 + W_1^2 + W_2^2 + W_3^2.$$

Daí

$$W_1^2 + W_2^2 = W_0^2 - W_3^2,$$

ou seja,

$$(W_1 + iW_2)(W_1 - iW_2) = (W_0 - W_3)(W_0 + W_3). \quad (2.1)$$

Temos

$$W_1 - iW_2 = 0 \iff W_0^2 - W_3^2 = 0.$$

$$W_1 + iW_2 = 0 \iff W_0^2 - W_3^2 = 0.$$

$$W_1 - iW_2 \neq 0 \iff W_0 - W_3 \neq 0, W_0 + W_3 \neq 0.$$

Dividindo por $(W_1 - iW_2)^2$ em (2.1), obtemos

$$\frac{W_1 + iW_2}{W_1 - iW_2} = \frac{W_0 - W_3}{W_1 - iW_2} \frac{W_0 + W_3}{W_1 - iW_2}.$$

Considere

$$a = \frac{W_0 - W_3}{W_1 - iW_2} \quad e \quad b = \frac{W_0 + W_3}{W_1 - iW_2}.$$

Daí

$$1 + ab = \frac{2W_1}{W_1 - iW_2}$$

$$1 - ab = \frac{2iW_2}{W_1 - iW_2}$$

$$a + b = \frac{2W_0}{W_1 - iW_2}$$

$$a - b = \frac{2W_3}{W_1 - iW_2}$$

Defina

$$\mu = \frac{W_1 - iW_2}{2}.$$

Então

$$W = \mu W(a, b),$$

onde $W(a, b) = (a + b, 1 + ab, i(1 - ab), a - b)$.

Segue-se daí

$$\begin{aligned} W\left(a, \frac{1}{\bar{a}}\right) &= \left(a + \frac{1}{\bar{a}}, 1 + \frac{a}{\bar{a}}, i\left(1 - \frac{a}{\bar{a}}\right), a - \frac{1}{\bar{a}}\right) \\ &= \frac{1}{\bar{a}}(1 + a\bar{a}, a + \bar{a}, -i(a - \bar{a}), -1 + a\bar{a}) \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} \bar{a}W\left(a, \frac{1}{\bar{a}}\right) &= (1 + a\bar{a}, a + \bar{a}, -i(a - \bar{a}), -1 + a\bar{a}) \\ &= L_3(a). \end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$\begin{aligned} \bar{b}W\left(\frac{1}{\bar{b}}, b\right) &= (1 + b\bar{b}, b + \bar{b}, -i(b - \bar{b}), 1 - b\bar{b}) \\ &= L_0(b). \end{aligned}$$

Pelo item (1), temos que existe um $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tal que

$$\begin{aligned} l_3 &= \alpha \left(1, \frac{a + \bar{a}}{1 + a\bar{a}}, -i \frac{a - \bar{a}}{1 + a\bar{a}}, \frac{-1 + a\bar{a}}{1 + a\bar{a}} \right) \\ &= \frac{\alpha}{1 + a\bar{a}} (1 + a\bar{a}, a + \bar{a}, -i(a - \bar{a}), -1 + a\bar{a}) \\ &= \frac{\alpha}{1 + a\bar{a}} \bar{a} W \left(a, \frac{1}{\bar{a}} \right). \end{aligned}$$

De forma análogo, temos

$$l_0 = \frac{\beta}{1 + b\bar{b}} \bar{b} W \left(\frac{1}{\bar{b}}, b \right).$$

□

Finalizaremos esta seção com as seguintes questões: Sejam a e b duas aplicações suaves de um domínio simplesmente conexo $M \subset \mathbb{C}$ e $W(a(w), b(w))$ uma família de subespaços vetoriais tipo espaço bidimensional de $\mathbb{R}_1^4$, onde

$$W(a, b) = (a + b, 1 + ab, i(1 - ab), a - b).$$

Sob quais condições podemos garantir a existência de uma imersão tipo espaço (M, X) de M em $\mathbb{R}_1^4$ tal que $X_w(w) = \mu(w)W(a(w), b(w))$, onde μ deve ser uma constante de integração. Nesta tese estamos interessados quando obtemos a imersão nas quádricas principais do espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{R}_1^4$, e também estamos interessados em saber quais seriam as restrições analíticas para assumir que a superfície tem vetor curvatura média de tipo luz. Esta tese responderá esse tipo de questões na direção de resolver o problema de Björling nas quádricas.

2.2 Curvas em $\mathbb{R}_1^4$

Nesta seção, construiremos o tetraedro de Frenet para curvas em $\mathbb{R}_1^4$. Uma curva em $\mathbb{R}_1^4$ é uma aplicação suave $c : I \rightarrow \mathbb{R}_1^4$, onde I é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$. Dizemos que c é regular, se $c'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Definição 2.2.1 *Seja $c : I \rightarrow \mathbb{R}_1^4$ uma curva suave regular. Dizemos que*

- *c é tipo espaço, se $c'(t)$ é um vetor tipo espaço para todo $t \in I$;*
- *c é tipo tempo, se $c'(t)$ é um vetor tipo tempo para todo $t \in I$;*
- *c é tipo luz, se $c'(t)$ é um vetor tipo luz para todo $t \in I$.*

Exemplo 2.2.1 *A curva $c(t) = (\cosh(t), \cos(t), \sen(t), \sinh(t))$ é uma curva de tipo espaço, pois*

$$\langle c'(t), c'(t) \rangle = 2 > 0,$$

para todo t , ou seja, $c'(t)$ é um vetor tipo espaço.

Considere c uma curva regular tipo espaço ou tipo tempo. A função comprimento de arco de c é dada por

$$s(t) = \int_0^t \|c'(\xi)\| d\xi.$$

Além disto, dizemos que c está parametrizada pela função comprimento de arco s , se $\|c'(s)\| = 1$ para todo $s \in I$.

Exemplo 2.2.2 A curva $c(s) = \left(\frac{1}{2}s^2 + 1, \frac{1}{2}s^2, s, 1\right)$ está parametrizada pelo comprimento de arco, pois

$$\langle c'(s), c'(s) \rangle = -s^2 + s^2 + 1 + 0 = 1.$$

Para levar adiante nosso estudo de solucionar o problema de Björling precisamos impor condições sobre as curvas que vamos tomar, a saber, precisamos que tais curvas sejam “boas curvas”.

Definição 2.2.2 Dizemos que o conjunto $\{T(t), N(t), B(t), R(t)\}$ é um referencial de Frenet adaptado à curva parametrizada $c : I \longrightarrow \mathbb{R}_1^4$, se para todo $t \in I$

1. $\{T(t), N(t), B(t), R(t)\}$ é uma base ortonormal positiva de $\mathbb{R}_1^4$.
2. $T(t) = c'(t)$ é o vetor tangente unitário à curva c .
3. $\{T(t), N(t)\}$ é uma base do $\text{Span}\{c'(t), c''(t)\}$.
4. $\{T(t), N(t), B(t)\}$ é uma base do $\text{Span}\{c'(t), c''(t), c'''(t)\}$.
5. $\langle \boxtimes(T(t), N(t), B(t)), R(t) \rangle = 1$.

Definição 2.2.3 Uma curva $c : I \longrightarrow \mathbb{R}_1^4$, parametrizada pelo comprimento de arco é uma “boa curva” quando o referencial de Frenet

$$\{T(t), N(t), B(t), R(t)\},$$

adaptado é livre de vetores tipo luz.

Seja $c(t)$ é uma curva suave regular tal que para cada $t \in I$ temos

$$\dim(\text{Span}\{c'(t), c''(t), c'''(t)\}) = 3.$$

Então se $c(t)$ não é boa curva, temos

$$\langle N(t), N(t) \rangle = 0 \quad \text{ou} \quad \langle B(t), B(t) \rangle = 0.$$

Portanto, $c(t)$ é uma boa curva se, e somente se, o espaço $[c'(t)]^\perp$ contém uma família de planos de tipo tempo $T^2(c(t))$ ao longo da curva. Conforme podemos ver em [Wal95], se $c(t)$ é uma “boa curva”, então $T(t)$ é o vetor tangente unitário de c . Se $T'(t) \neq O$, então $T'(t)$ é perpendicular a $T(t)$, então temos $N(t)$ na direção de $T'(t)$. Estudaremos tal causalidade e vamos construir o referencial de Frenet. Mais precisamente, o caso onde $\langle T'(t), T'(t) \rangle > 0$ e o caso onde $\langle T'(t), T'(t) \rangle < 0$.

Seja $\langle T'(t), T'(t) \rangle > 0$. Então, o vetor normal unitário tipo espaço $N(t)$ é definido na direção de $T'(t)$. O vetor binormal unitário $B(t)$ está direção da componente normal de $N'(t)$ com respeito ao $\text{Span}\{T(t), N(t)\}$. Assim, o tipo causal de $[N'(t)]^\perp$ pode ser ou tipo espaço ou tipo tempo:

Se $[N'(t)]^\perp$ for tipo espaço então $B(t)$ é o vetor binormal unitário $[N'(t)]^\perp$ e $R(t)$ é o único vetor trinormal unitário tipo tempo tal que a orientação de $\{T(t), N(t), B(t), R(t)\}$ é a mesma de $\mathbb{R}_1^4$. Assim, obtemos as fórmulas de Frenet de c dadas por

$$\begin{cases} T'(t) &= \kappa(t)N(t) \\ N'(t) &= -\kappa(t)T(t) + \tau(t)B(t) \\ B'(t) &= -\tau(t)N(t) + \rho(t)R(t) \\ R'(t) &= \rho(t)B(t) \end{cases}$$

Quando $[N'(t)]^\perp$ for tipo tempo, $B(t)$ é o vetor binormal unitário $[N'(t)]^\perp$ e $R(t)$ é o único vetor trinormal unitário tipo espaço tal que a orientação de $\{T(t), N(t), B(t), R(t)\}$ é a mesma de $\mathbb{R}_1^4$.

Assim, obtemos as fórmulas de Frenet de c dadas por

$$\begin{cases} T'(t) &= \kappa(t)N(t) \\ N'(t) &= -\kappa(t)T(t) + \tau(t)B(t) \\ B'(t) &= \tau(t)N(t) + \rho(t)R(t) \\ R'(t) &= -\rho(t)B(t) \end{cases}$$

Se $\langle T'(t), T'(t) \rangle < 0$, o vetor normal unitário tipo tempo $N(t)$ é definido na direção de $T'(t)$. O vetor binormal unitário $B(t)$ está na direção de $[N'(t)]^\perp$ e pela Proposição 2.1.2 será de tipo espaço, e $R(t)$ é o único vetor trinormal tipo espaço. Assim, obtemos as fórmulas de Frenet de c dadas por

$$\begin{cases} T'(t) &= \kappa(t)N(t) \\ N'(t) &= \kappa(t)T(t) + \tau(t)B(t) \\ B'(t) &= -\tau(t)N(t) + \rho(t)R(t) \\ R'(t) &= -\rho(t)B(t) \end{cases}$$

onde κ , τ e ρ são primeira, segunda e terceira curvaturas, respectivamente.

Começaremos caracterizando as componentes da curva dada $c(t)$ em termos da função $W(a(t), b(t))$, como a seguir.

Lema 2.2.1 *Sejam $c(t) = (x_0(t), x_1(t)), x_2(t), x_3(t))$ e $d(t) = (y_0(t), y_1(t)), y_2(t), y_3(t))$ duas curvas tal que $c(0) = d(0)$ e*

$$\langle c'(t), d'(t) \rangle = 0 \quad e \quad \|c'(t)\| = \|d'(t)\|,$$

para todo $t \in I$. Então, existem três funções $\mu(t), a(t), b(t) \in \mathbb{C}$ tais que

$$\frac{c'(t) - id'(t)}{2} = \mu(t)W(a(t), b(t))$$

e

$$\text{Span}\{L_0(b), L_3(a)\} = \text{Span}\{N_c(t), B_c(t), R_c(t)\} \cap \text{Span}\{N_d(t), B_d(t), R_d(t)\}.$$

Prova: Para cada $t \in I$, seja $\mathcal{B} = \{m(t), n(t)\}_{t \in I}$ uma família de bases ortonormais da família de planos tipo tempo $\text{Span}\{N_c(t), B_c(t), R_c(t)\} \cap \text{Span}\{N_d(t), B_d(t), R_d(t)\}$. Considere

$$x(t) = \langle \boxtimes(c'(t), m(t), n(t)), T_d(t) \rangle T_d(t).$$

Temos

$$d(t) = d(0) + \int_0^t x(\xi) \, d\xi,$$

pela hipótese sobre as curvas $c(t)$ e $d(t)$. Agora, pela Proposição 2.1.3 as funções complexas $a(t)$ e $b(t)$ determinada pelo plano tipo tempo $\text{Span}\{L_0(b), L_3(a)\}$ e o correspondente complemento ortogonal dado por $W(a, b)$ como um campo de vetores a valores complexos ao longo da curva $c(t)$, temos

$$c'(t) \in [W(a(t), b(t))] \quad e \quad d'(t) \in [W(a(t), b(t))],$$

ou seja, estão na mesma classe.

Então, existe uma rotação $e^{i\theta(t)}$ da família de bases $\{\mathcal{R}e(W(a(t), b(t))), \mathcal{I}m(W(a(t), b(t)))\}$ e uma função positiva $\rho(t) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{c'(t) - id'(t)}{2} = \rho(t)e^{i\theta(t)} W(a(t), b(t)) = \mu(t)W(a(t), b(t)),$$

onde, por definição

$$\mu(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)} \quad e \quad \theta(t) \in [0, 2\pi)$$

para cada $t \in I$.

□

Retomando os campos de vetores de tipo luz futuros dirigidos $L_0(b)$ e $L_3(a)$ definidos na seção precedente, os quais formam uma base isotrópica para o espaço normal à superfície, e assumindo a boa curva, temos o seguinte corolário o qual garante que o triedro $(c'(t), L_0(b), L_3(a))$ fixa uma única boa curva $d(t)$. Tal expressão explícita da boa curva $d(t)$ será útil mais adiante quando solucionemos o problema de Björling.

Corolário 2.2.1 *Dados uma curva $c(t)$ e um campo de planos de tipo tempo $T_c^2(t)$ ao longo de c na distribuição tridimensional $\mathcal{D}(t) = \text{Span}\{N_c(t), B_c(t), R_c(t)\}$, existe uma única curva $d(t)$ tal que*

$$d(t) = d(0) + \int_0^t \boxtimes(c'(\xi), m(\xi), n(\xi)) d\xi.$$

Então

$$\frac{c'(t) - id'(t)}{2} = \frac{c'(t) - i \boxtimes (c'(t), m(t), n(t))}{2} = \mu(t)W(a(t), b(t)).$$

Prova: Pela Proposição 2.1.1, os vetores

$$c'(t) \quad e \quad d'(t) = \boxtimes(c'(t), m(t), n(t))$$

são ortogonais e tem o mesmo comprimento. Pela Lema 2.2.1, temos

$$\frac{c'(t) - id'(t)}{2} = \frac{c'(t) - i \boxtimes (c'(t), m(t), n(t))}{2} = \mu(t)W(a(t), b(t)).$$

□

2.3 Imersões Conformes em $\mathbb{R}_1^4$

Nesta seção, estudaremos imersões conformes em $\mathbb{R}_1^4$ com um olhar especial para imersões de tipo espaço com vetor curvatura média tipo luz. A seguinte definição pode ser em enontrada [HO80].

Definição 2.3.1 *Seja M um domínio de $\mathbb{R}^2$. Uma imersão $X : M \rightarrow \mathbb{R}_1^4$ é dita:*

1. *tipo tempo, se para cada $p \in X(M)$ o plano tangente $T_p X(M)$ é um plano tipo tempo.*
2. *tipo espaço, se para cada $p \in X(M)$ o plano tangente $T_p X(M)$ é um plano tipo espaço.*
3. *tipo luz, se para cada $p \in X(M)$ o plano tangente $T_p X(M)$ é um plano tipo luz.*

Uma imersão **não degenerada** é uma imersão de tipo espaço ou tipo tempo.

No que segue denotamos por M um subconjunto aberto, conexo, simplesmente conexo de $\mathbb{C}$, e $\mathcal{H}(M)$ o conjunto das funções holomorfas de M em $\mathbb{C}$. Uma aplicação $f = P + iQ$ de M em $\mathbb{C}$ é anti-holomorfa se, e somente se, sua aplicação $\bar{f} = P - iQ$ é uma aplicação holomorfa. O conjunto das aplicações anti-holomorfas será denotado por $\overline{\mathcal{H}}(M)$. O conjunto de todas as aplicações diferenciáveis de M em $\mathbb{C}$ será denotado por $C^\infty(M, \mathbb{C})$, e dizemos que tais aplicações são suaves de M em $\mathbb{C}$.

Seja

$$\frac{\partial X}{\partial w} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial X}{\partial u} - i \frac{\partial X}{\partial v} \right) \quad e \quad \frac{\partial X}{\partial \bar{w}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial X}{\partial u} + i \frac{\partial X}{\partial v} \right),$$

operadores diferenciais definidos sobre o conjunto de todas as aplicações suaves de M em $\mathbb{C}$, onde $w = u + iv \in M$.

Segue-se então que uma aplicação suave f de M em $\mathbb{C}$ é holomorfa se, e somente se, $\frac{\partial f}{\partial \bar{w}} = 0$ para todo $w \in M$.

A seguir usaremos a notação

$$\frac{\partial f}{\partial w} = f_w \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} = f_{\bar{w}}.$$

De acordo com [DFS] definimos imersões conformes de tipo espaço como a seguir:

Definição 2.3.2 *Seja M um domínio simplesmente conexo de $\mathbb{C}$. Uma imersão conforme tipo espaço X de M em $\mathbb{R}_1^4$ é uma aplicação de classe C^∞ (ou suave) tal que:*

(i) *A métrica induzida $ds^2 \doteq X^*\langle, \rangle$ sobre M é uma métrica Riemanniana.*

(ii) *Para todo $w = u + iv \in M$, tem-se:*

$$\langle X_w, X_w \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle X_w, X_{\bar{w}} \rangle = \frac{\lambda^2(w)}{2} > 0 \quad (\text{conforme}).$$

(iii) *Cada espaço normal $(T_p X(M))^\perp$, $p \in X(M)$, é de tipo tempo e bidimensional, e portanto admite duas direções normais tipo luz futuro dirigido à $X(M)$.*

(iv) *Fixado o plano tipo espaço $T_p X(M)$, seu complemento ortogonal relativo à métrica $\langle, \rangle$ é o subespaço vetorial tipo tempo bidimensional $(T_p X(M))^\perp = \text{Span}\{L_0(b), L_3(a)\}$, onde os vetores são de tipo luz futuro dirigido, dados por*

$$L_0(b) = (1 + b\bar{b}, b + \bar{b}, -i(b - \bar{b}), 1 - b\bar{b}) \quad \text{e} \quad L_3(a) = (1 + a\bar{a}, a + \bar{a}, -i(a - \bar{a}), -1 + a\bar{a}),$$

com $a, b : M \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{C}$ satisfazendo

$$\langle L_0(b), L_3(a) \rangle = -2(1 - a\bar{b})(1 - \bar{a}b).$$

Observe que a segunda condição em (ii) implica que $\langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle = r^2$ e, portanto, o tensor métrico de (M, X) é tal que $g_{11} = g_{22} = \lambda^2$ e $g_{12} = 0$. Isto significa que o tensor métrico é dado por $ds^2 = r^2 dw d\bar{w}$. Para estabelecermos nossos próximos resultados, exibiremos os dados de Weierstrass $a(X)$, $b(X)$ e $\mu(X)$ de uma imersão conforme (M, X) de M em $\mathbb{R}_1^4$, no caso geral, os quais podem ser encontrados no trabalho de Dussan-Filho-Simões [DFS] e os teoremas citamos na tese com a finalidade de estender resultados.

Proposição 2.3.1 *Seja (M, X) uma imersão conforme tipo espaço de M em $\mathbb{R}_1^4$. Então:*

(1) *Existem funções suaves de M em $\mathbb{C}$, a saber, μ, a, b tal que*

$$X_w(w) = \mu(w)W(a(w), b(w)).$$

(2) *A métrica induzida é*

$$\begin{aligned} ds^2(X) &= 2\langle X_w, X_{\bar{w}} \rangle dw d\bar{w} \\ &= 4\mu\bar{\mu}(1 - a\bar{b})(1 - \bar{a}b)dw d\bar{w}. \end{aligned}$$

Prova: Para (1), escreva $X(w) = (X_0(w), X_1(w), X_2(w), X_3(w))$. Então

$$X_w = (X_{0w}, X_{1w}, X_{2w}, X_{3w}) \in \mathbb{C}^4.$$

Agora, como $\langle X_w, X_w \rangle = 0$ e $\langle X_w, X_{\bar{w}} \rangle = \frac{\lambda^2(w)}{2} > 0$, com $X_{1w} - iX_{2w} \neq 0$, definimos as funções μ , a e b por

$$\mu = \frac{X_{1w} - iX_{2w}}{2}, \quad a = \frac{X_{0w} + X_{3w}}{X_{1w} - iX_{2w}}, \quad b = \frac{X_{0w} - X_{3w}}{X_{1w} - iX_{2w}}.$$

Então, segue-se que

$$X_w(w) = \mu(w)W(a(w), b(w)).$$

Para provar item (2), sabemos que

$$X_{\bar{w}} = \bar{\mu} \bar{a}(1, \bar{b}, i\bar{b}, 1) + \bar{\mu}(\bar{b}, 1, -i, -\bar{b}).$$

Daí

$$\begin{aligned} \langle X_w, X_{\bar{w}} \rangle &= \langle \mu a(1, b, -ib, 1) + \mu(b, 1, i, -b), \bar{\mu} \bar{a}(1, \bar{b}, i\bar{b}, 1) + \bar{\mu}(\bar{b}, 1, -i, -\bar{b}) \rangle \\ &= 2\mu \bar{\mu} a \bar{a} b \bar{b} - 2\mu \bar{\mu} a \bar{b} - 2\mu \bar{\mu} \bar{a} b + 2\mu \bar{\mu} \\ &= 2\mu \bar{\mu} (-a\bar{b}(1 - \bar{a}b) + 1 - \bar{a}b) \\ &= 2\mu \bar{\mu} (1 - \bar{a}b)(1 - a\bar{b}). \end{aligned}$$

□

Do trabalho em [DFS] retomemos a teoria de integralidade de 1-formas complexas, a saber: Seja $\beta = \phi dw$ uma 1-forma complexa, onde $\phi = P - iQ$. Isto é,

$$\beta = (P - iQ)(du + idv) = (Pdu + Qdv) + i(Pdv - Qdu).$$

Dizemos que a 1-forma complexa β não tem período real se, e somente se, a 1-forma real

$$\mathcal{Re}(\beta) = Pdu + Qdv$$

é fechada, ou seja

$$d(\mathcal{Re}(\beta)) = (-P_v + Q_u)du \wedge dv = 0,$$

o qual é equivalente a $P_v = Q_u$. Neste caso, a integral de linha

$$I(\gamma, w) = \int_{\gamma} \mathcal{Re}(\phi(\gamma(t)))\gamma'(t) dt$$

independe do caminho contínuo de integração $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, onde $\gamma(0) = w_0$, $\gamma(1) = w$ e é tal que existe $\gamma'(t)$, exceto para um conjunto finito de pontos. Então, tomamos por definição

$$\int_{w_0}^w \mathcal{Re}(\beta) = \int_{\gamma} \mathcal{Re}(\phi(\gamma(t)))\gamma'(t) dt.$$

Agora, seja

$$J(\gamma, w) = \int_{\gamma} \mathcal{Re}(\phi(\gamma(t)))\gamma'(t) dt = I(\gamma, w) + \int_{\gamma} \mathcal{Im}(\phi(\gamma(t)))\gamma'(t) dt,$$

a integral da 1-forma complexa $\beta = \phi dw$, sobre um bom caminho γ .

Como $I(\gamma, w)$ depende unicamente do ponto inicial w_0 e do ponto final w , temos que

$$\mathcal{Re}(J(\gamma, w)) = I(\gamma, w) = \int_{w_0}^w \mathcal{Re}(\beta),$$

e, então definimos

$$\operatorname{Re} \int_{w_0}^w \beta = \operatorname{Re} \int_{\gamma} \phi(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = I(\gamma, w) = \int_{w_0}^w \operatorname{Re}(\beta).$$

De posse das informações anteriores os autores em [DFS] obtiveram o seguinte resultado.

Proposição 2.3.2 *A 1-forma complexa $\beta = \phi dw$ não tem período real se, e somente se, ϕ_w é real. Então neste caso, para cada $w \in M$*

$$\frac{\partial}{\partial w} \left(2 \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \beta \right) = \phi(w).$$

Prova: Defina a função a valor real

$$\Psi = 2 \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \beta = 2 \int_{w_0}^w P du + Q dv.$$

Então, segue-se da teoria de cálculo diferencial e integral que $\nabla \Psi(u, v) = (\Psi_u, \Psi_v) = (P(u, v), Q(u, v))$, logo

$$\Psi_w = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial u} - i \frac{\partial \Psi}{\partial v} \right) = P(u, v) - iQ(u, v) = \phi(w).$$

□

Voltando para curvas $c(t)$ agora assumindo que temos uma extensão complexa $c(w)$ e vetores $m(w)$ e $n(w)$ os quais são extensões dos vetores $m(t)$ e $n(t)$, respectivamente, de tal forma que

$$\frac{\partial c}{\partial w}(t, 0) = c'(t), \quad m(t, 0) = m(t), \quad n(t, 0) = n(t),$$

definimos a seguinte 1-forma complexa

$$\beta(w) = \left[\frac{\partial c}{\partial w} - i \boxtimes \left(\frac{\partial c}{\partial w}, m(w), n(w) \right) \right] dw. \quad (2.2)$$

Então observamos que para cada $w \in M$

$$\beta(w) = \frac{1}{2}(c_u - ic_v) - i \boxtimes \left(\frac{(c_u - ic_v)}{2}, m, n \right) = \frac{1}{2}(c_u - ic_v) - \frac{i}{2}(c_v + ic_u) = 2c_w.$$

Logo temos o resultado a seguir:

Teorema 2.3.1 *Sejam $c(t)$ uma curva definida em I , $I \times J$ um subconjunto aberto do plano complexo e uma distribuição tipo tempo bidimensional $\operatorname{Span}\{m(t), n(t)\} \subset [c'(t)]^\perp$ para a qual a 1-forma complexa $\beta(w)$, definida acima (2.2) não tem período real. Então existe uma superfície parametrizada de tipo espaço*

$$X(w) = c(0) + \operatorname{Re} \int_0^w \left(\frac{\partial c}{\partial w}(\xi) - i \boxtimes \left(\frac{\partial c}{\partial w}(\xi), m(\xi), n(\xi) \right) \right) d\xi, \quad (2.3)$$

satisfazendo as seguintes condições:

- (i) $X(t, 0) = c(t)$,
- (ii) $N_{c(t)}X(I \times J) = \operatorname{Span}\{m(t), n(t)\}$, para todo $t \in I$.

Prova: Para (ii), assumamos que $c(w)$, $m(w)$ e $n(w)$ sejam as extensões complexas de $c(t)$, $m(t)$

e $n(t)$, respectivamente tais que

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial w}(t, 0) &= c'(t), \\ m(t, 0) &= m(t), \\ n(t, 0) &= n(t), \end{cases}$$

Por outro lado, como $\beta(w) = 2 \frac{\partial X}{\partial w}(w) dw$, segue-se de (2.2) que, restringindo ao intervalo I , temos:

$$\beta(t, 0) = (c'(t) - i \boxtimes (c'(t), m(t), n(t))) dt.$$

Pelo Corolário 2.2.1, temos

$$\frac{\partial X}{\partial u}(t, 0) = c'(t) \quad e \quad \frac{\partial X}{\partial v}(t, 0) = \boxtimes(c'(t), m(t), n(t)).$$

Portanto

$$N_{c(t)}X(I \times J) = \text{Span}\{m(t), n(t)\},$$

para todo $t \in I$. Para (i), notemos que

$$X(t, 0) = c(0) + \mathcal{R}e \int_{(0,0)}^{(t,0)} \left(\frac{\partial c}{\partial w}(\xi) - i \boxtimes \left(\frac{\partial c}{\partial w}(\xi), m(\xi), n(\xi) \right) \right) d\xi$$

Logo, tomando o caminho reto $z(\xi) = (0, 0) + i\xi(1, 0)$, $\xi \in [0, t]$, temos que a integral fica

$$\begin{aligned} X(t, 0) &= c(0) + \mathcal{R}e \int_0^t \left(\frac{\partial c}{\partial w}(\xi, 0) - i \boxtimes \left(\frac{\partial c}{\partial w}(\xi, 0), m(\xi, 0), n(\xi, 0) \right) \right) d\xi \\ &= c(0) + \mathcal{R}e \int_0^t (c'(\xi) - i \boxtimes (c'(\xi), m(\xi), n(\xi))) d\xi \\ &= c(0) + \int_0^t \mathcal{R}e \beta(\xi, 0) d\xi \\ &= \int_0^t c'(\xi) d\xi \\ &= c(t), \end{aligned}$$

uma vez que a integral $\mathcal{R}e(\beta(t, 0)) = 2\mathcal{R}e \left(\frac{\partial c}{\partial w}(t, 0) \right) = c'(t)$ e a parte real da integral de linha independe do caminho de integração.

□

Corolário 2.3.1 *Sejam $c(t)$ uma boa curva definida sobre I , $I \times J$ um subconjunto aberto do plano complexo e uma distribuição de tipo tempo bidimensional $\text{Span}\{m(t), n(t)\} \subset [c'(t)]^\perp$ para a qual a 1-forma complexa $\beta(w)$, definida acima (2.2) não tem período real. Então, existem funções $a(t)$, $b(t)$ e $\mu(t)$ e extensões delas tais que a superfície dada pela equação (2.3) pode ser reescrita na forma*

$$X(w) = c(0) + 2\mathcal{R}e \int_0^w \mu(\xi) W(a(\xi), b(\xi)) d\xi. \quad (2.4)$$

Prova: Seja $d(t) = c(0) + \int_0^t \boxtimes(c'(\xi), m(\xi), n(\xi)) d\xi$ uma boa curva. Como, para todo $t \in I$

$$\langle c'(t), d'(t) \rangle = 0 \quad e \quad \|c'(t)\| = \|d'(t)\|,$$

temos pelo Lema 2.2.1, que existem as três funções suaves $a(t)$, $b(t)$ e $\mu(t)$ tais que

$$\frac{c'(t) - i \boxtimes (c'(t), m(t), n(t))}{2} = \mu(t)W(a(t), b(t)).$$

Logo tomando sua extensão, temos

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial c}{\partial w}(\xi) - i \boxtimes \left(\frac{\partial c}{\partial w}(\xi), m(\xi), n(\xi) \right) \right) = \mu(\xi)W(a(\xi), b(\xi)).$$

Pelo Teorema 2.3.1, segue-se que

$$X(w) = c(0) + 2\mathcal{R}e \int_0^w \mu(\xi)W(a(\xi), b(\xi)) d\xi.$$

□

Notemos que para a solução do problema de Björling, onde são dadas as condições iniciais da curva $c(t)$ e da distribuição normal ao longo da curva, as duas representações integrais dadas em Teorema 2.3.1 e Corolário 2.3.1 são equivalentes. A primeira é conhecida como Fórmula Integral de Schwarz e a segunda como Fórmula Integral de Weierstrass. Com base na expressão da integral do Corolário 2.3.1, chamaremos os dados $a(w)$, $b(w)$ e $\mu(w)$ de dados de Weierstrass.

A seguir [DFS] provaram um resultado que nos fornece condições necessárias e suficientes para que a Fórmula Integral de Weierstrass represente uma imersão conforme de M em $\mathbb{R}_1^4$.

Proposição 2.3.3 *Para cada imersão conforme (M, X) dada pela fórmula (2.4), temos:*

- (i) $\frac{\mu_{\bar{w}}}{\mu} = -\frac{\langle W_{\bar{w}}, \bar{W} \rangle}{\langle W, \bar{W} \rangle} = \frac{\bar{b}a_{\bar{w}}}{1 - a\bar{b}} + \frac{\bar{a}b_{\bar{w}}}{1 - b\bar{a}};$
- (ii) $\mu_{\bar{w}}W + \mu W_{\bar{w}} = \overline{\mu_{\bar{w}}W + \mu W_{\bar{w}}} \quad (\text{condição de compatibilidade}).$

Prova: De fato, notemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \left(\frac{\partial X}{\partial w} \right) &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial X}{\partial u} - i \frac{\partial X}{\partial v} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} - i \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} + i \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \right] \\ &= \frac{1}{4} (X_{uu} + X_{vv}). \end{aligned}$$

Portanto, $X_{w\bar{w}} \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Por outro lado, temos

$$\langle X_w, X_w \rangle = 0 \implies \langle X_{w\bar{w}}, X_w \rangle = 0.$$

Segue-se que $X_{w\bar{w}}$ é um campo de vetores a valores reais ortogonal à S . Daí

$$\begin{aligned} 0 &= \langle X_{w\bar{w}}, \bar{W} \rangle \\ &= \mu_{\bar{w}} \langle W, \bar{W} \rangle + \mu \langle W_{\bar{w}}, \bar{W} \rangle. \end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{\mu_{\bar{w}}}{\mu} = -\frac{\langle W_{\bar{w}}, \bar{W} \rangle}{\langle W, \bar{W} \rangle}.$$

Como

$$W = a(1, b, -ib, 1) + (b, 1, i, -b),$$

$$\overline{W} = \overline{a}(1, \overline{b}, i\overline{b}, 1) + (\overline{b}, 1, -i, -\overline{b}),$$

e

$$W_{\overline{w}} = a_{\overline{w}}(1, b, -ib, 1) + b_{\overline{w}}(1, a, -ia, -1),$$

temos

$$\begin{aligned} \langle W, \overline{W} \rangle &= \langle a(1, b, -ib, 1) + (b, 1, i, -b), \overline{a}(1, \overline{b}, i\overline{b}, 1) + (\overline{b}, 1, -i, -\overline{b}) \rangle \\ &= 2a\overline{a}b\overline{b} - 2a\overline{b} - 2\overline{a}b + 2 \\ &= -2a\overline{b}(1 - \overline{a}b) + 2(1 - \overline{a}b) \\ &= 2(1 - \overline{a}b)(1 - ab). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle W_{\overline{w}}, \overline{W} \rangle &= \langle a_{\overline{w}}(1, b, -ib, 1) + b_{\overline{w}}(1, a, -ia, -1), \overline{a}(1, \overline{b}, i\overline{b}, 1) + (\overline{b}, 1, -i, -\overline{b}) \rangle \\ &= 2a_{\overline{w}}\overline{a}b\overline{b} - 2a_{\overline{w}}\overline{b} - 2b_{\overline{w}}\overline{a} + 2b_{\overline{w}}\overline{a}a\overline{b} \\ &= -2a_{\overline{w}}\overline{b}(1 - \overline{a}b) - 2\overline{a}b_{\overline{w}}(1 - ab). \end{aligned}$$

Segue-se daí que

$$-\frac{\langle W_{\overline{w}}, \overline{W} \rangle}{\langle W, \overline{W} \rangle} = \frac{\overline{b}a_{\overline{w}}}{1 - ab} + \frac{\overline{a}b_{\overline{w}}}{1 - b\overline{a}}$$

Para (ii), temos

$$X_{w\overline{w}} = \mu_{\overline{w}}W + \mu W_{\overline{w}} = \alpha L_0(b) + \beta L_3(a).$$

Tomando o produto interno por $L_3(a)$, temos

$$\begin{aligned} \langle \mu_{\overline{w}}W + \mu W_{\overline{w}}, L_3(a) \rangle &= \langle \alpha L_0(b) + \beta L_3(a), L_3(a) \rangle \\ \underbrace{\mu_{\overline{w}}\langle W, L_3(a) \rangle}_{=0} + \mu\langle W_{\overline{w}}, L_3(a) \rangle &= \alpha\langle L_0(b), L_3(a) \rangle + \beta\underbrace{\langle L_3(a), L_3(a) \rangle}_{=0}. \end{aligned}$$

Ou seja

$$\mu\langle W_{\overline{w}}, L_3(a) \rangle = \alpha\langle L_0(b), L_3(a) \rangle.$$

De

$$W_{\overline{w}} = a_{\overline{w}}(1, b, -ib, 1) + b_{\overline{w}}(1, a, -ia, -1). \quad (2.5)$$

De (2.5), temos

$$\begin{aligned} \alpha &= \mu \frac{\langle W_{\overline{w}}, L_3(a) \rangle}{\langle L_0(b), L_3(a) \rangle} \\ &= \mu \frac{-2a_{\overline{w}}(1 - \overline{a}b)}{-2(1 - \overline{a}b)(1 - ab)} \\ &= \mu \frac{a_{\overline{w}}}{(1 - ab)}. \end{aligned}$$

De forma análoga, segue-se que

$$\begin{aligned} \beta &= \mu \frac{\langle W_{\overline{w}}, L_0(b) \rangle}{\langle L_0(b), L_3(a) \rangle} \\ &= \mu \frac{b_{\overline{w}}}{(1 - ab)}. \end{aligned}$$

Concluimos que $\bar{\alpha} = \alpha$ e $\bar{\beta} = \beta$, pois

$$X_{w\bar{w}} = \mu_{\bar{w}}W + \mu W_{\bar{w}} \in C^\infty(M, \mathbb{R}).$$

□

De acordo com [HO83] o vetor curvatura média $\vec{H}_X$ é dado por

$$\vec{H}_X(w) = \frac{2}{\lambda^2} X_{w\bar{w}}(w).$$

Com isto, temos uma consequência imediata, usando os cálculos realizados na prova da Proposição 2.3.3 acima a saber;

Corolário 2.3.2 *Para cada imersão conforme (M, X) dada por (2.4), temos*

$$\vec{H}_X(w) = \frac{2}{\lambda^2} \left(\frac{\mu a_{\bar{w}}}{1 - a\bar{b}} L_0(b) + \frac{\mu b_{\bar{w}}}{1 - \bar{a}b} L_3(a) \right). \quad (2.6)$$

Observação 2.3.1 *O corolário acima nos permite concluir que o vetor curvatura média $\vec{H}_X$ é tipo luz se, e somente se, ou $a_{\bar{w}} = 0$ ou $b_{\bar{w}} = 0$, isto é, ou $a \in \mathcal{H}(M)$ e $b \notin \mathcal{H}(M)$ ou $a \notin \mathcal{H}(M)$ e $b \in \mathcal{H}(M)$.*

Capítulo 3

Problema tipo Björling no cone

Neste capítulo, resolveremos problemas tipo Björling para imersões conformes de tipo espaço no cone de luz com vetor curvatura média de tipo luz. Nesse sentido, construiremos uma superfície tipo espaço com vetor curvatura média tipo luz no cone de luz contendo uma dada curva com um par de vetores normais ao longo da curva que são ortonormais. Primeiramente, focaremos no estudo de imersões conformes no cone de luz futuro dirigido como estratégia principal. Em seguida, resolveremos o problema no cone de luz.

3.1 Imersões Conformes no Cone Luz

Definição 3.1.1 *O cone de luz futuro dirigido em $\mathbb{R}_1^4$ com vértice na origem é o conjunto*

$$\mathcal{C} = \{v \in \mathbb{R}_1^4 \setminus \{0\}; \langle v, v \rangle = 0 \text{ e } v_0 > 0\}, \quad v = (v_0, v_1, v_2, v_3)$$

Para nossos propositos a seguir referenciamos o seguinte resultado provado em [DFS] o qual caracteriza uma aplicação suave representada por $\lambda(w)L(x(w))$ pode ser assumida conforme no cone de luz $\mathcal{C}$. Nesta tese descrevemos a proposição deles como a seguir

Proposição 3.1.1 *Para cada vetor tipo luz futuro dirigido L , podemos associar um número real positivo $\lambda > 0$ e um número complexo $x \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ tais que*

$$L(x) = \lambda(1 + x\bar{x}, x + \bar{x}, -i(x - \bar{x}), -1 + x\bar{x}),$$

ou no caso em que $x = \infty$ tomamos $L = \lambda(1, 0, 0, 1)$ que corresponde ao pólo norte da esfera de Riemann.

Prova: De fato, ponha $L = (L_0, L_1, L_2, L_3)$, temos

$$-L_0^2 + L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = 0 \implies L_0^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2.$$

Supondo $L_0 > 0$, divida a expressão acima por L_0^2 , obtendo

$$\left(\frac{L_1}{L_0}\right)^2 + \left(\frac{L_2}{L_0}\right)^2 + \left(\frac{L_3}{L_0}\right)^2 = 1.$$

Usando a noção de projeção estereográfica clássica, existirá um número complexo $x \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ tais que

$$\frac{L_3}{L_0} = 1 - \frac{2}{1 + x\bar{x}} = \frac{-1 + x\bar{x}}{1 + x\bar{x}},$$

$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{x + \bar{x}}{1 + x\bar{x}},$$

$$\frac{L_2}{L_0} = -\frac{i(x - \bar{x})}{1 + x\bar{x}}.$$

Assim

$$\begin{aligned} L &= (L_0, L_1, L_2, L_3) \\ &= L_0 \left(1, \frac{L_1}{L_0}, \frac{L_2}{L_0}, \frac{L_3}{L_0} \right) \\ &= L_0 \left(1, \frac{x + \bar{x}}{1 + x\bar{x}}, -\frac{i(x - \bar{x})}{1 + x\bar{x}}, \frac{-1 + x\bar{x}}{1 + x\bar{x}} \right) \\ &= \frac{L_0}{1 + x\bar{x}} (1 + x\bar{x}, x + \bar{x}, -i(x - \bar{x}), -1 + x\bar{x}) \\ &= \lambda (1 + x\bar{x}, x + \bar{x}, -i(x - \bar{x}), -1 + x\bar{x}). \end{aligned}$$

Então

$$L = \lambda (1 + x\bar{x}, x + \bar{x}, -i(x - \bar{x}), -1 + x\bar{x}),$$

onde $\lambda(w) = \frac{L_0}{1 + x\bar{x}} > 0$.

□

O próximo resultado estabelecerá condições para uma curva do espaço de Minkowski $\mathbb{R}_1^4$ estar contida no cone de luz, bem como um olhar para possíveis extensões.

Corolário 3.1.1 *Uma curva parametrizada $c(t) = (x_0(t), x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, $x_0 \neq x_3$, de um intervalo I no cone de luz futuro dirigido $\mathcal{C}$, pode ser descrita na forma $c(t) = \lambda(t)L(x(t))$ onde $L(x) = (1 + x\bar{x}, x + \bar{x}, -i(x - \bar{x}), -1 + x\bar{x})$. Então, para todo $t \in I$ temos*

$$\lambda(t) = \left(\frac{x_0 - x_3}{2} \right) (t)$$

e

$$x(t) = \left(\frac{x_1 + ix_2}{x_0 - x_3} \right) (t), \quad x_0 \neq x_3.$$

Prova: Se o traço $c(I)$ da curva c é um subconjunto do cone futuro dirigido $\mathcal{C}$, então

$$(x_0(t), x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = \lambda(1 + x\bar{x}, x + \bar{x}, -i(x - \bar{x}), -1 + x\bar{x}).$$

Assim,

$$\begin{cases} x_0 &= \lambda(1 + x\bar{x}) \\ x_1 &= \lambda(x + \bar{x}) \\ x_2 &= -i\lambda(x - \bar{x}) \\ x_3 &= \lambda(-1 + x\bar{x}). \end{cases}$$

Portanto, uma condição para que uma curva c esteja contida em um cone de luz é

$$\lambda(t) = \left(\frac{x_0 - x_3}{2} \right) (t) > 0,$$

para todo $t \in I$, e que

$$x(t) = \left(\frac{x_1 + ix_2}{x_0 - x_3} \right) (t), \quad \text{com } x_0 \neq x_3,$$

para todo $t \in I$.

□

O seguinte resultado de [DFS] nos mostra condições sobre a aplicação X , de tal forma que conseguimos imersões conformes no cone de luz, os quais serão úteis adiante.

Proposição 3.1.2 *Uma aplicação suave $X(w) = \lambda(w)L(x(w))$ em que*

$$L(x) = (1 + x\bar{x}, x + \bar{x}, -i(x - \bar{x}), -1 + x\bar{x}), \quad (3.1)$$

para todo $x \in \mathbb{C}$ e $\lambda > 0$, é uma imersão conforme de M no cone de luz futuro dirigido $\mathcal{C}$ se, e somente se, a aplicação x é uma aplicação holomorfa não constante ou x é uma aplicação anti-holomorfa não constante.

Prova: *Pela Proposição 3.1.1, a imersão de M pode ser parametrizada na forma*

$$X(w) = \lambda(w)L(x(w)),$$

para $w \in M \subset \mathbb{C}$ e $\lambda > 0$. Analogamente como foi feito no corolário anterior, temos a expressão de λ e x .

Agora, como

$$\begin{aligned} X_w &= \lambda_w L(x) + \lambda(x_w \bar{x} + x \bar{x}_w, x_w + \bar{x}_w, -i(x_w - \bar{x}_w), x_w \bar{x} + x \bar{x}_w) \\ &= \lambda_w L(x) + \lambda x_w (\bar{x}, 1, -i, \bar{x}) + \lambda \bar{x}_w (x, 1, i, x), \end{aligned}$$

e pondo $L = L(x(w))$, $Y = (\bar{x}, 1, -i, \bar{x})$ e $K = (x, 1, i, x)$, temos

$$\begin{aligned} \langle X_w, X_w \rangle &= \underbrace{\lambda_w^2 \langle L, L \rangle}_{=0} + 2\lambda \lambda_w x_w \underbrace{\langle L, Y \rangle}_{=0} + 2\lambda \lambda_w \bar{x}_w \underbrace{\langle L, K \rangle}_{=0} + \\ &\quad 2\lambda^2 x_w \bar{x}_w \underbrace{\langle Y, K \rangle}_{=2} + \lambda^2 \bar{x}_w^2 \underbrace{\langle Y, Y \rangle}_{=0} + \lambda^2 x_w^2 \underbrace{\langle K, K \rangle}_{=0} \\ &= 4\lambda^2 x_w \bar{x}_w \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle X_w, X_{\bar{w}} \rangle &= \lambda^2 x_w \bar{x}_{\bar{w}} \underbrace{\langle Y, K \rangle}_{=2} + \lambda \bar{x}_w x_{\bar{w}} \underbrace{\langle K, Y \rangle}_{=2} \\ &= 2\lambda^2 x_w \bar{x}_{\bar{w}} + 2\lambda^2 \bar{x}_w x_{\bar{w}} \\ &= 2\lambda^2 (|x_w|^2 + |\bar{x}_w|^2) > 0. \end{aligned}$$

Então, X é uma imersão conforme se, e somente se

$$x_w \bar{x}_w = 0$$

e

$$|x_w|^2 + |\bar{x}_w|^2 > 0,$$

o que implica que ou x é holomorfa não constante ou x é anti-holomorfa não constante.

□

Inspirado pelo resultado os autores em [DFS] exibiram os dados de Weierstrass no cone de luz como são descritos na seguinte proposição.

Proposição 3.1.3 *Considere uma imersão conforme*

$$X(w) = \lambda(w)L(x(w)), \quad \lambda(w) > 0$$

no cone de luz $\mathcal{C}$, sendo $L(x(w))$ dada por (3.1). Se a função $x(w)$ é holomorfa não nula sobre $\mathbb{C}$, e $\lambda_w \neq 0$ para todo $w \in M$, para $X_w = \mu(w)W(a(w), b(w))$. temos

$$\mu = \bar{x}\lambda_w,$$

$$b = \frac{1}{\bar{x}},$$

$$a = x + \frac{x_w}{(\ln\lambda)_w}.$$

Prova: Já que $W(a, b) = (a+b, 1+ab, i(1-ab), a-b)$ e $X(w) = \lambda(1+x\bar{x}, x+\bar{x}, -i(x-\bar{x}), -1+x\bar{x})$, para todo $w \in M$, temos

$$\begin{cases} \mu(a+b) &= [\lambda(1+x\bar{x})]_w \\ \mu(a-b) &= [\lambda(-1+x\bar{x})]_w \\ \mu(1+ab) &= [\lambda(x+\bar{x})]_w \\ \mu(1-ab) &= -[\lambda(x-\bar{x})]_w \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, temos

$$2\mu b = 2\lambda_w.$$

Da soma da terceira com a quarta, obteremos

$$2\mu = 2\lambda_w \bar{x} \implies \mu = \bar{x}\lambda_w.$$

Segue-se daí que

$$b = \frac{1}{\bar{x}}.$$

Por outro lado, somando a primeira com a segunda, teremos

$$\begin{aligned} 2\mu a &= 2(\lambda x \bar{x})_w \\ 2\bar{x}\lambda_w a &= 2(\lambda_w x \bar{x} + \lambda x_w \bar{x} + \lambda x \underbrace{\bar{x}_w}_{=0}). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} a &= x + \frac{\lambda x_w}{\lambda_w} \\ &= x + \frac{x_w}{(\ln\lambda)_w}. \end{aligned}$$

□

A proposição precedente tem como consequência imediata o seguinte.

Corolário 3.1.2 *A função $a(w)$ é holomorfa se, e somente se a função*

$$\frac{\lambda_w}{\lambda} = \frac{x_w}{a-x}, \quad x \neq a$$

é uma função holomorfa. Neste caso, o vetor curvatura média $\vec{H}_X$ é um vetor de tipo luz e a curvatura gaussiana K_X é nula.

Portanto, para obter solução ao Problema de Björling no cone vamos impor as condições da função $x(w)$ ser holomorfa e não nula e $a(w)$ ser holomorfa não nula com $a(w) \neq x(w)$. A primeira condição garante que a imersão é realizada conformemente no cone de luz e a segunda para impor a condição geométrica que a imersão tenha vetor curvatura média $\vec{H}_X$ de tipo luz.

Já que $K_X = -\frac{1}{\lambda^2} \Delta \ln \lambda$, $x \in \mathcal{H}(M)$ e $(\ln \lambda)_{w\bar{w}} = 0$, temos

$$K_X = 0.$$

No que segue, o corolário anterior nos diz que para nossos objetivos de achar a imersão conforme no cone de luz com vetor curvatura médio de tipo luz, precisamos definir uma função a valores reais $\lambda(w)$ de modo que:

(i) $\lambda(t, 0) = \lambda(t)$, para todo $t \in I$;

(ii) $\ln \lambda(w)$ seja harmônica.

Como $c(t) = \lambda(t)L(x(t))$ é uma curva analítica real, o Corolário 3.1.1, nos dá a seguinte extensão holomorfa:

$$\frac{x_0(w) - x_3(w)}{2} = \Lambda(w) \in \mathcal{H}(M), \text{ com } c(t) = (x_0(t), x_1(t), x_2(t), x_3(t)), x_0 \neq x_3,$$

tal que $\Lambda(t, 0) = \lambda(t) > 0$. Assim temos

$$\operatorname{Re}(\Lambda(w)) = \lambda^0(w)$$

é tal que $\Delta \ln(\operatorname{Re}(\Lambda(w))) = 0$.

Segue-se daí que, para cada função harmônica real $\theta : M \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\theta(t, 0) = 0$ para todo $t \in I \subset M$, temos

$$\lambda(w) = \lambda^0(w) e^{\theta(w)}$$

satisfazendo:

- $\lambda(w) > 0$;
- $\Delta \ln \lambda(w) = 0$, para todo $w \in M$.

O próximo resultado assegura a expansão em série de potências para uma função harmônica real.

Lema 3.1.1 *Toda função harmônica a valores reais $\theta(w)$ em $M = I \times J$ tal que $\theta(t, 0) = 0$ para todo $t \in I$, tem a seguinte série de Maclaurin em volta de $t = 0$*

$$\theta(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \left(\frac{w^{n+1} - \bar{w}^{n+1}}{2i} \right),$$

onde, para cada $n = 0, 1, \dots$, a_n é um número real.

Prova: Como $\theta_{w\bar{w}} = 0$ em M , a função θ_w é holomorfa (analítica complexa) em M . Portanto, como queremos que $\theta(t, 0) = 0$, podemos tomar a seguinte expansão em série de potências

$$\theta_w = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$$

no disco aberto $\mathbb{D} = \{w; |w| < 1\}$ em M , sendo a convergência uniforme em todo disco fechado $|w| \leq r < 1$ com $c_n \in \mathbb{C}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Então, para cada função anti-holomorfa arbitrária $\bar{g}$ em $\mathbb{D}$, definimos a função complexa $\Theta(w)$ tal que $\Theta_w = \theta_w$ dada por

$$\Theta(w) - g(w) = \int_0^w \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n \right) d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} w^{n+1},$$

para todo $w \in \mathbb{D}$.

Se $\Theta(t, 0) = 0$, então

$$g(t, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} t^{n+1} = 0$$

para todo $-1 < t < 1$.

Agora

$$\begin{aligned} \theta(t, 0) &= \mathcal{R}e(\Theta(t, 0)) \\ &= \mathcal{R}e \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} t^{n+1} \right) \\ &= \mathcal{R}e \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_n + ib_n)}{n+1} t^{n+1} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $-1 < t < 1$.

No que segue, a função harmônica real θ é dada por $\theta(w) = \pm \mathcal{I}m(\Theta(w))$, onde

$$\begin{aligned} \theta(w) &= \frac{\Theta(w) - \overline{\Theta(w)}}{2i} \\ &= \frac{1}{2i} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} c_n w^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \overline{c_n w^{n+1}} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \left(\frac{w^{n+1} - \bar{w}^{n+1}}{2i} \right), \end{aligned}$$

e, novamente, $\theta(t, 0) = 0$ implica que $c_n - \bar{c}_n = 0$ para todo $n = 0, 1, 2, \dots$. Portanto, $c_n = a_n \in \mathbb{R}$.

□

Corolário 3.1.3 Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\mathcal{R}e \left(\frac{\partial^n \theta(t, 0)}{\partial w^n} \right) = 0.$$

De posse das informações precedentes passamos a estudar as extensões da distribuição normal de tipo tempo $A(t) = \text{Span}\{m(t), n(t)\}$, com $\langle m(t), m(t) \rangle = -1$, $\langle n(t), n(t) \rangle = 1$, $\langle m(t), n(t) \rangle = 0$ ao longo de uma boa curva $c(t)$. Isto permitirá provar a existência e unicidade da superfície que precisamos construir para a solução do Problema de Björling.

De fato, a distribuição normal $A(t) = \text{Span}\{m(t), n(t)\}$ ao longo de $c(t)$ pode ser obtida em termos das funções a valores complexos $a(t)$, $b(t)$ como

$$m(t) = \frac{1}{\sqrt{2} |\langle L_0(b(t)), L_3(a(t)) \rangle|} \left(e^{-\psi(t)} L_3(a(t)) + e^{\psi(t)} L_0(b(t)) \right),$$

$$n(t) = \frac{1}{\sqrt{2} |\langle L_0(b(t)), L_3(a(t)) \rangle|} \left(e^{-\psi(t)} L_3(a(t)) - e^{\psi(t)} L_0(b(t)) \right),$$

onde a função $\psi(t)$ é uma função a valor real que depende de $a(t)$ e $x(t)$.

Portanto, se obtemos extensões complexas $a(w)$ e $x(w) = \frac{1}{b}$ das funções $a(t)$ e $x(t)$, as fórmulas anteriores nos fornecem vetores a valores reais $m(w)$ e $n(w)$, os quais usaremos para solucionar o problema de Björling. A função $\psi(w)$ é também uma função a valor real quando tomamos as extensões de $a(w)$ e $x(w)$.

Em particular, usando as fórmulas anteriores para m e n , temos a seguinte proposição:

Proposição 3.1.4 *Seja $c(t)$ uma boa curva e a distribuição normal de tipo tempo $A(t) = \text{Span}\{m(t), n(t)\}$, com $\langle m, m \rangle = -1$, $\langle n, n \rangle = 1$, $\langle m, n \rangle = 0$, ao longo de $c(t)$. Então*

$$\boxtimes(c'(t), m(t), n(t)) = \frac{1}{|\langle L_0(b(t)), L_3(a(t)) \rangle|} \boxtimes(c'(t), L_0(b(t)), L_3(a(t))).$$

Para as extensões, temos

$$\boxtimes(c_w(w), m(w), n(w)) = \frac{1}{|\langle L_0(b(w)), L_3(a(w)) \rangle|} \boxtimes(c_w, L_0(b(w)), L_3(a(w))),$$

com $\boxtimes(c_w(t, 0), m(t, 0), n(t, 0)) = \boxtimes(c'(t), m(t), n(t))$.

Definição 3.1.2 *Diremos que uma distribuição $A(t) = \text{Span}\{L(x(t)), L_3(a(t))\}$ é analítica real se cada função real $x(t)$ e $a(t)$ é analítica real.*

3.2 Problema tipo Björling em $\mathcal{C}$

Na presente seção, resolveremos o problema tipo Björling para superfícies tipo espaço, que pode ser proposto como a seguir:

Sejam uma curva real analítica tipo espaço $c : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$ no cone de luz e uma distribuição ortonormal de tipo tempo analítica real $A(t) = \text{Span}\{m(t), n(t)\}$ normal à curva c . Encontre uma superfície tipo espaço S com vetor curvatura média de tipo luz, definida por $X : M \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{C}$, onde $M = I \times J$ e tal que para $t \in I \subset M$

1. $X(t, 0) = c(t)$.
2. $N_{c(t)} S = A(t)$.

Para encontrar a solução do problema de Björling retomamos os resultados anteriores e começamos fazendo uma conexão entre os dados de Björling com a estratégia de usar a expressão da curva, dos vetores da distribuição normal e do vetor curvatura média de tipo luz em termos dos dados de Weierstrass $a(w)$, $x(w)$ e da distribuição normal $\text{Span}\{L(x(w)), L_3(a(w))\}$. Descreva a curva $c(t)$ como $c(t) = \lambda(t)L(x(t))$ onde a função a valores complexos $x(t)$ e a função a valores reais

$\lambda(t)$ são analíticas reais em I . Dada $\theta(u, v)$ uma função harmônica real definida em $M = I \times J$ tal que $\theta(t, 0) = 0$, seja $x(w)$ a única extensão holomorfica da função $x(t)$ de M em $\mathbb{C}$. Seja também

$$\lambda(w) = e^{\theta(w)} \lambda^0(w),$$

onde $\lambda^0(w) = \operatorname{Re}(\Lambda(w)) = \left| \frac{x_0(w) - x_3(w)}{2} \right|$. Seja também a extensão

$$\ln(\lambda^0(w)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n \lambda(0)}{dt^n} \left(\frac{w^n + \bar{w}^n}{2} \right).$$

De posse das informações precedentes, podemos enunciar e provar o próximo resultado, que trata da existência da solução para problema de Björling no cone de luz.

Teorema 3.2.1 *Dada uma curva analítica real $c(t) = \lambda(t)L(x(t))$ no cone $\mathcal{C}$ e uma distribuição normal tipo tempo $A(t) = \operatorname{Span}\{L(x(t)), L_3(a(t))\}$ ao longo de c , então existe uma imersão conforme com vetor curvatura média de tipo luz $X : M \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que*

$$X(w) = \lambda^0(w) e^{\theta(w)} L(x(w)) \quad (3.2)$$

com $X(t, 0) = c(t)$, onde $\theta : M \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função harmônica real tal que $\theta(t, 0) = 0$ para todo $t \in I \subseteq M$ e

$$a = x + \frac{x_w}{\theta_w + (\ln \lambda^0(w))_w}.$$

Prova: Notemos que a fórmula (3.2) nos diz que a função harmônica real θ está unicamente determinada pelo vetor curvatura média tipo luz $\vec{H}_X$ da família de imersões (M, X) com o fibrado normal dado. O Corolário 2.3.1 e o Lema 2.2.1 nos assegura que $x(t)$ e $a(t)$ admitem extensões holomorfas $x(w)$ e $a(w)$, respectivamente. Das equações da Proposição 3.1.3, segue-se que

$$\begin{aligned} a(w) &= x(w) + \frac{x_w(w)}{(\ln \lambda(w))_w} \\ &= x(w) + \frac{x_w(w)}{\theta_w + (\ln \lambda^0(w))_w}. \end{aligned}$$

□

Usando a fórmula (3.2), mostraremos que o problema tipo Björling tem solução única.

Teorema 3.2.2 *Se $A(t) = \operatorname{Span}\{m(t), n(t)\}$ é uma distribuição tipo tempo analítica real ao longo da curva analítica real $c(t) = \lambda(t)L(x(t))$, então, temos uma única $\theta(w)$ tal que o espaço normal $N_{c(t)}X(M)$ ao longo dessa curva satisfaz*

$$N_{c(t)}X(M) = A(t), \quad (3.3)$$

para todo $t \in I$.

Neste caso, esta superfície é dada pela fórmula

$$X(w) = c(0) + \operatorname{Re} \int_0^w \left(\frac{\partial c}{\partial w}(\xi) - i \boxtimes \left(\frac{\partial c}{\partial w}(\xi), m(\xi), n(\xi) \right) \right) d\xi, \quad (3.4)$$

e a função harmônica real θ é dada pela equação

$$\theta_w = \frac{x_w}{a - x} - \frac{\lambda_w^0}{\lambda^0}, \quad (3.5)$$

com $\theta(t, 0) = 0$, para todo $t \in I$. As funções holomorficas $x(w)$ e $a(w)$ de M em $\mathbb{C}$ são as únicas extensões holomorficas das funções a valores reais $x(t)$, $a(t)$, fixadas pelo triedro $c(t)$, $L(x(t))$, $L_3(a(t))$, onde a integral é tomada ao longo de um caminho arbitrário.

Prova: Seja $m(t) + n(t) = \alpha L(x(t))$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ um vetor de tipo luz ortogonal a $c'(t)$. Então, existe uma função $a : I \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$m(t) - n(t) = \beta L_3(a(t)), \quad \beta \in \mathbb{R}$$

é um vetor de tipo luz ortogonal a $c'(t)$. Claramente $a(t)$ é analítica real, e portanto, existe uma única extensão holomorfa $a(w)$ tal que

$$a(t, 0) = a(t),$$

para todo $t \in I$. Do Corolário 3.1.2, segue-se que

$$\frac{\lambda_w}{\lambda} = \frac{x_w}{a - x}$$

é uma função holomorfa, e que pelo Teorema de Cauchy-Goursat admite uma primitiva em M , isto é,

$$\lambda(w) = \lambda^0(w) e^{\theta(w)}$$

onde $\theta(w) = 2\mathcal{R}e \left(\int_0^w \frac{x_w(\xi)}{a(\xi) - x(\xi)} d\xi \right)$ é a única função harmônica real fixada pelo triedro $c(t)$, $L(x(t))$ e $L_3(a(t))$ tal que $\theta(t, 0) = 0$ para todo $t \in I$. Então, para todo $w \in M$ temos

$$X(w) = c(0) + \mathcal{R}e \int_0^w \left(\frac{\partial c}{\partial w}(\xi) - i \boxtimes \left(\frac{\partial c}{\partial w}(\xi), m(\xi), n(\xi) \right) \right) d\xi,$$

é uma imersão conforme de $M \subseteq \mathbb{C}$ em $\mathcal{C}$ tal que

$$X_w = \frac{\partial c}{\partial w}(w) - i \boxtimes \left(\frac{\partial c}{\partial w}(w), m(w), n(w) \right),$$

com $X(t, 0) = c(t)$. Pelo Teorema 2.3.1 e o Corolário 2.3.2, segue-se que

$$\begin{aligned} N_{c(t)}X(M) &= \text{Span}\{L(x(t)), L_3(a(t))\} \\ &= \text{Span}\{m(t), n(t)\} \\ &= A(t) \end{aligned}$$

e

$$\vec{H}_X(w) = \psi(w) L_3 \left(x + \frac{\lambda x_w}{\lambda_w} \right), \quad \psi \in C^\infty(M, \mathbb{R}).$$

□

Exemplo 3.2.1 Este exemplo começa com uma curva tipo espaço

$$c(t) = e^{\frac{t^2}{2}} (1 + t^2, 2t, 0, -1 + t^2) = \lambda(t) L(x(t)),$$

a qual está contida no cone de luz. Considere a distribuição normal $A(t) = \text{Span}\{m(t), n(t)\}$ dada por

$$\begin{aligned} m(t) &= \frac{1}{4}(t^4 + 6t^2 + 5, 2t^3 + 6t, 0, t^4 + 4t^2 + 3), \\ n(t) &= \frac{1}{4}(t^4 + 4t^2 + 3, 2t^3 + 2t, 0, t^4 + 2t^2 + 5), \end{aligned}$$

onde $m(t)$ e $n(t)$ são vetores ortogonais unitários tipo tempo e tipo espaço, respectivamente, definidos sobre a curva $c(t)$ num intervalo I com $0 \notin I$. Então, após alguns cálculos simples, temos

$$m(t) + n(t) = \frac{t^2}{2} L_3(a(t)) \quad e \quad m(t) - n(t) = \frac{t^2}{2} L_0(b(t)),$$

onde

$$a(t) = t + \frac{2}{t} \quad e \quad b(t) = \frac{1}{t},$$

Sendo que $\langle L_0(b(t)), L_3(a(t)) \rangle = -\frac{8}{t^4}$, segue-se que

$$m(t) = \frac{1}{\sqrt{2} |\langle L_0(b(t)), L_3(a(t)) \rangle|} [L_3(a(t)) + L_0(b(t))],$$

$$n(t) = \frac{1}{\sqrt{2} |\langle L_0(b(t)), L_3(a(t)) \rangle|} [L_3(a(t)) - L_0(b(t))].$$

Portanto, temos que a função $\psi(t)$ é identicamente nula, fazendo a extensão para $\psi(w) = 0$, escolhemos a função $\theta(w) = \psi(w) = 0$, sendo tal função harmônica conveniente para a solução do problema de Björling.

Agora, extendemos de forma única e holomorfa as funções $x(t) = t$ e $a(t) = t + \frac{2}{t}$ (tomando $x(t, 0) = t$ e $a(t, 0) = t + \frac{2}{t}$) para as funções $x(w) = w$ e $a(w) = w + \frac{2}{w}$.

Logo, para achar a função $\lambda(w)$ solucionamos a equação

$$\frac{\lambda_w}{\lambda} = \frac{x_w}{a - x}.$$

Isto é equivalente à $(\ln \lambda(w))_w = \frac{w}{2}$. Segue-se então que $\lambda(w) = e^{\frac{w^2 + \bar{w}^2}{4}}$. Portanto, a solução ao problema de Björling dada pelo Teorema 3.2.2 é

$$X(w) = e^{\frac{w^2 + \bar{w}^2}{4}} (1 + w\bar{w}, w + \bar{w}, -i(w - \bar{w}), -1 + w\bar{w}),$$

a qual em termos de coordenadas (u, v) fica

$$X(u, v) = e^{\frac{u^2 - v^2}{2}} (1 + u^2 + v^2, 2u, 2v, -1 + u^2 + v^2).$$

O vetor curvatura média fica

$$\vec{H}_X(w) = \frac{1}{\langle X_w, X_{\bar{w}} \rangle} \frac{\mu(w)b_{\bar{w}}}{1 - \bar{a}b} L_3(a(w)),$$

onde $\mu(w) = \bar{x}\lambda_w = \frac{w\bar{w}}{2} e^{\frac{w^2 + \bar{w}^2}{4}}$. Como $\langle X_w, X_{\bar{w}} \rangle = 2 \left(e^{\frac{w^2 + \bar{w}^2}{4}} \right)$, temos que

$$\vec{H}_X(w) = \frac{w\bar{w}}{8} L_3 \left(w + \frac{2}{w} \right).$$

Capítulo 4

Problema tipo Björling em $\mathbb{H}^3$

Neste capítulo, desenvolvemos solução do problema de Björling para superfícies tipo espaço em $\mathbb{H}^3$, isto é, construímos uma superfície conforme tipo espaço com vetor curvatura média tipo luz em $\mathbb{H}^3$ contendo uma dada curva com uma distribuição normal tipo tempo ao longo desta curva. Mais precisamente.

Considere uma boa curva tipo espaço analítica $c : I \rightarrow \mathbb{H}^3$ e uma distribuição normal tipo tempo $A(t) = \text{Span}\{m(t), n(t)\}$ analítica ao longo desta curva. O problema tipo Björling consiste em encontrar uma imersão conforme X de $M = I \times J$ em $\mathbb{H}^3$ com vetor curvatura média de tipo luz, tal que

1. $X(t, 0) = c(t)$
2. $N_{c(t)}X(M) = A(t)$, para todo $t \in I$.

Nossa técnica para obter a solução do problema é construir duas superfícies tipo espaço no cone de luz $\mathcal{C}$, ambas com vetor curvatura média tipo luz, tal que a curva $c(t)$ do problema de Björling seja escrita como a soma de duas boas curvas, cada uma delas pertencendo a cada uma das superfícies construídas, e tal que elas sejam solução ao problema de Björling no cone. Segue-se, então através desse nosso procedimento, a fórmula de Weierstrass e a fórmula tipo Schwarz para a solução ao problema em $\mathbb{H}^3$. Para isso, começamos observando que dada uma curva tipo espaço no espaço hiperbólico com uma distribuição normal tipo tempo $A(t)$ dada ao longo da curva, existe um único campo de vetores tipo espaço unitário $\nu(t)$ ao longo desta curva, preservando a orientação dada pela distribuição. De fato, dada uma boa curva tipo espaço analítica $c : I \rightarrow \mathbb{H}^3$ e uma distribuição normal tipo tempo $A(t) = \text{Span}\{m(t), n(t)\}$, onde

$$\langle m, m \rangle = -1, \quad \langle n, n \rangle = 1, \quad \langle m, n \rangle = 0 \quad \text{e} \quad m_0 > 0,$$

existe um único campo de vetores tipo espaço unitário $\nu(t)$ ao longo desta curva, preservando a orientação dada por $A(t)$, tal que

$$[A(t)] \cap T_{c(t)}\mathbb{H}^3 = [\nu(t)], \quad \text{onde} \quad T_{c(t)}\mathbb{H}^3 = [c'(t)].$$

No que segue, podemos então substituir a base $\{m(t), n(t)\}$ da distribuição normal $A(t)$ pela base $\{c(t), \nu(t)\}$ pontualmente, pois cada plano tipo tempo $A(t) \in [c'(t)]^\perp$ com $\langle c(t), c'(t) \rangle = 0$. Portanto para obter a solução do problema em apreço, começamos estabelecendo uma versão equivalente dele, como a seguir.

Considere uma boa curva tipo espaço $c : I \rightarrow \mathbb{H}^3$ e uma distribuição normal tipo tempo $A(t) = \text{Span}\{c(t), \nu(t)\}$ analítica ao longo desta curva. Assim, o problema tipo Björling é encontrar uma imersão conforme X de $M = I \times J$ em $\mathbb{H}^3$ com vetor curvatura média de tipo luz, tal que

1. $X(t, 0) = c(t)$

2. $N_{c(t)}X(M) = A(t)$, para todo $t \in I$.

Para isto, precisaremos de alguns resultados.

Lema 4.0.1 *Seja $X : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ uma superfície parametrizada do espaço hiperbólico. Se $c(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva da superfície $S = X(M)$, onde $A(t) = \text{Span}\{m(t), n(t)\}$ é uma distribuição normal ao longo desta curva, tal que*

$$N_{c(t)}S = A(t)$$

para cada $t \in I \subset M$. Então

$$c(t) \in A(t),$$

para cada $t \in I$.

Prova: Como $\langle X(u, v), X(u, v) \rangle = -1$, temos uma base $\{X(u, v), X_u(u, v), X_v(u, v), \nu(u, v)\}$ de $\mathbb{R}_1^4$ tal que $T_{X(u, v)}S = \{X_u(u, v), X_v(u, v)\}$ e $N_{X(u, v)}S = \{X(u, v), \nu(u, v)\}$ para cada $(u, v) \in M$. Podemos assumir que $\nu(u, v) \in T_{X(u, v)}\mathbb{H}^3$ com $\langle \nu(u, v), \nu(u, v) \rangle = 1$. Portanto, para cada $t \in I$, temos que:

$$N_{c(t)}S = \text{Span}\{m(t), n(t)\} \iff \text{Span}\{m(t), n(t)\} = \text{Span}\{X(u(t), v(t)), \nu(u(t), v(t))\}.$$

□

Portanto o problema de Björling em $\mathbb{H}^3$ pode ser enunciado como segue:

Dada uma boa curva tipo espaço $c : I \rightarrow \mathbb{H}^3$ e uma distribuição normal tipo espaço $\text{Span}\{\nu(t)\} \in T_{c(t)}\mathbb{H}^3$ encontrar uma imersão conforme X de $M = I \times J$ em $\mathbb{H}^3$, tal que

1. $X(t, 0) = c(t)$
2. $N_{c(t)}X(M) = \text{Span}\{c(t), \nu(t)\}$, para todo $t \in I$,
3. O vetor curvatura média $\vec{H}_X X(M)$ é um vetor tipo luz ao longo da curva c .

Nossa técnica para solucionar tal problema de Björling envolve construir duas imersões conformes no cone de luz (M, h) e (M, g) , as duas com vetor curvatura média tipo luz, tal que a imersão

$$X(w) = \frac{1}{2}(h(w) + g(w)),$$

fornece uma imersão conforme em $\mathbb{H}^3$ com vetor curvatura média tipo luz, e com duas boas curvas definidas por $h(t) = c(t) + \nu(t)$ e $g(t) = c(t) - \nu(t)$ tal que

$$2c(t) = h(t) + g(t).$$

Após isso, aplicamos o Teorema 3.2.1 e o Teorema 3.2.2, para encontrar a representação de Weierstrass para a solução do problema de Björling no cone de luz para as imersões h e g , e consequentemente obtemos a solução do problema de Björling em $\mathbb{H}^3$. Para conseguir tais resultados, procuramos por relações entre os dados de Weierstrass de X , a saber, a_X , b_X , μ_X e os respectivos de h e g como segue.

Lema 4.0.2 *Sejam (M, h) e (M, g) duas imersões conformes dadas por*

$$h(w) = p_0 + \mathcal{R}e \int_{w_0}^w \mu(\xi) W(p(\xi), q(\xi)) d\xi$$

e

$$g(w) = q_0 + \mathcal{R}e \int_{w_0}^w \eta(\xi) W(r(\xi), s(\xi)) d\xi.$$

A soma de imersões $X(w) \doteq h(w) + g(w)$ é conforme se, e somente se, $\langle W(p, q), W(r, s) \rangle = 0$ se, e somente se, ou $p = r$ ou $q = s$.

Prova: Notemos que $h_w = \mu W(p, q)$ e $g_w = \eta W(r, s)$, então

$$\begin{aligned}
 \langle X_w, X_w \rangle &= \langle h_w + g_w, h_w + g_w \rangle \\
 &= \underbrace{\langle h_w, h_w \rangle}_{=0} + 2\langle h_w, g_w \rangle + \underbrace{\langle g_w, g_w \rangle}_{=0} \\
 &= 2\langle h_w, g_w \rangle \\
 &= 2\mu\eta \langle W(p, q), W(r, s) \rangle \\
 &= 2\mu\eta \{ -(p+q)(r+s) + (1+pq)(1+rs) - (1-pq)(1-rs) + (p-q)(r-s) \} \\
 &= 2\mu\eta \{ -2ps - 2qr + 2rs + 2pq \} \\
 &= 4\mu\eta \{ rs + pq - ps - qr \} \\
 &= 4\mu\eta (p-r)(q-s).
 \end{aligned}$$

Segue-se que

$$\langle X_w, X_w \rangle = 0 \iff \text{ou } p = r \text{ ou } q = s.$$

□

Como consequência do lema anterior, temos que

$$2 \leq \dim(\text{Span}\{L_3(p), L_0(q), L_3(r), L_0(s)\}) \leq 3 \iff \langle W(p, q), W(r, s) \rangle = 0,$$

isto significa que os espaços tangentes $T_{h(w)}h(M)$ e $T_{g(w)}g(M)$ como também os respectivos espaços normais $N_{g(w)}g(M)$ e $N_{h(w)}h(M)$ se intersectam numa linha reta.

Lema 4.0.3 Nas hipóteses acima, se para cada $w \in M$ temos $p(w) = r(w)$ e $q(w) \neq s(w)$, então

$$N_{h(w)}h(M) \cap N_{g(w)}g(M) = \text{Span}\{L(p(w))\}.$$

Para $X = \frac{1}{2}(h + \epsilon g)$ onde $\epsilon \in \{-1, 1\}$, temos

$$X(w) = \mathcal{R}e \int_0^w (\mu(\xi)W(p(\xi), q(\xi)) + \epsilon\eta(\xi)W(p(\xi), s(\xi))) d\xi,$$

e tomando $X_w = \rho(w)W(x(w), y(w))$, obtemos

$$x(w) = p(w), \quad \rho(w) = \mu(w) + \epsilon\eta(w) \quad e \quad y = \frac{\mu q + \epsilon\eta s}{\mu + \epsilon\eta}. \quad (4.1)$$

Prova: Suponha que $l(w) \in N_{h(w)}h(M) \cap N_{g(w)}g(M)$, então

$$l(w) \in N_{h(w)}h(M) \quad e \quad l(w) \in N_{g(w)}g(M),$$

ou seja, $l(w)$ é campo de vetores ortogonal a $\text{Span}\{h_w\}$ e $\text{Span}\{g_w\}$. Defina

$$l(w) = h(w) + g(w).$$

Então, para todo $w \in M$

$$\begin{aligned}
 \langle l_w, L(p(w)) \rangle &= \langle h_w + g_w, L(p) \rangle \\
 &= \langle \mu W(p, q) + \eta W(p, s), L(p) \rangle \\
 &= \mu \langle W(p, q), L(p) \rangle + \eta \langle W(p, s), L(p) \rangle \\
 &= -2\mu \underbrace{(p - p)(\bar{q} - \bar{p})}_{=0} - 2\eta \underbrace{(p - p)(\bar{s} - \bar{p})}_{=0} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Portanto

$$l(w) \in \text{Span}\{L(p(w))\}.$$

Inversamente, seja $l(w) \in \text{Span}\{L(p(w))\}$, então

$$l(w) = \lambda(w)L(p(w)),$$

para alguma função $\lambda(w)$ a valores reais. Então, para todo $w \in M$

$$\begin{aligned}
 \langle l(w), h_w \rangle &= \langle \lambda L(p), \mu W(p, q) \rangle \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \langle l(w), h_w \rangle &= \langle \lambda L(p), \eta W(p, s) \rangle \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Isto implica que

$$l(w) \in N_{h(w)}h(M) \quad e \quad l(w) \in N_{g(w)}g(M).$$

Assim, para todo $w \in M$, segue-se que

$$N_{h(w)}h(M) \cap N_{g(w)}g(M) = \text{Span}\{L(p(w))\}.$$

Agora provemos a segunda parte. Para, $\rho W(x, y) = \mu W(p, q) + \epsilon \eta W(p, s)$, temos

$$\begin{cases} \rho(x + y) &= \mu(p + q) &+& \epsilon \eta(p + s) \\ \rho(1 + xy) &= \mu(1 + pq) &+& \epsilon \eta(1 + ps) \\ \rho i(1 - xy) &= \mu i(1 - pq) &+& \epsilon \eta i(1 - ps) \\ \rho(x - y) &= \mu(p - q) &+& \epsilon \eta(p - s). \end{cases}$$

Somando a primeira com a quarta equação, temos:

$$\rho x = p\mu + p\epsilon\eta \implies \rho x = p(\mu + \epsilon\eta).$$

Da multiplicação da terceira equação por $(-i)$ e somando com a segunda, obtemos

$$2\rho = 2\mu + 2\epsilon\eta \implies \rho = \mu + \epsilon\eta.$$

Ou seja

$$x = p.$$

Da multiplicação da quarta por (-1) e seguida somando com a primeira, teremos

$$y = \frac{\mu q + \epsilon \eta s}{\mu + \epsilon \eta}.$$

□

O próximo resultado em [DFS] estabelece que a função holomorfa $x(w)$ a qual usamos para representar localmente a imersão com vetor curvatura média tipo luz no cone de luz, pertence ao conjunto de soluções da equação diferencial parcial de Riccati com parâmetros holomorfos. De fato,

Lema 4.0.4 *Sejam $h(w) = \lambda(w)L(x(w))$ e $g(w) = \rho(w)L(y(w))$ duas imersões conformes de M no cone de luz $\mathcal{C}$ tal que:*

$$\langle h(w), g(w) \rangle = -2\lambda(w)\rho(w) |x(w) - y(w)|^2 = \epsilon r^2 > 0.$$

Suponha que as funções $x(w)$ e $y(w)$ são funções holomorfas e que ambas imersões têm vetores curvaturas média de tipo luz e $h_w = \mu W\left(p, \frac{1}{x}\right)$, $g_w = \eta W\left(p, \frac{1}{y}\right)$ para $p(w)$ função holomorfa.

Então, obtemos a seguinte equação diferencial parcial de Riccati com parâmetros holomorfos $p(w)$ e $P(w)$, a saber

$$\frac{\phi_w}{(\phi - p)^2} = P,$$

que tem $x(w)$ e $y(w)$ como soluções holomorfas distintas.

Prova: *Tomando a derivada logaritmica de*

$$\lambda\rho |x - y|^2 = -\frac{\epsilon r^2}{2}.$$

Temos

$$\frac{\partial}{\partial w} \ln(\lambda\rho |x - y|^2) = 0,$$

ou seja

$$\frac{\lambda_w}{\lambda} + \frac{\rho_w}{\rho} + \frac{x_w - y_w}{x - y} = 0.$$

Da Proposição 3.1.3 segue que

$$\frac{x_w}{p - x} + \frac{y_w}{p - y} + \frac{x_w - y_w}{x - y} = 0.$$

Da equação acima, temos

$$\begin{aligned} 0 &= x_w \left(\frac{1}{p - x} + \frac{1}{x - y} \right) + y_w \left(\frac{1}{p - y} - \frac{1}{x - y} \right) \\ &= x_w \left(\frac{x - y + p - x}{(p - x)(x - y)} \right) + y_w \left(\frac{x - y - p + y}{(p - y)(x - y)} \right) \\ &= x_w \frac{p - y}{(p - x)(x - y)} - y_w \frac{p - x}{(p - y)(x - y)} \\ &= \frac{1}{x - y} \left(\frac{x_w(p - y)}{p - x} - \frac{y_w(p - x)}{p - y} \right). \end{aligned}$$

Por hipótese, x e y são funções holomorfas distintas, logo

$$\frac{x_w(p - y)}{p - x} - \frac{y_w(p - x)}{p - y} = 0,$$

ou seja

$$\frac{x_w(p - y)}{p - x} = \frac{y_w(p - x)}{p - y} \implies \frac{\frac{x_w}{p - x}}{\frac{1}{p - y}} = \frac{\frac{y_w}{p - y}}{\frac{1}{p - x}},$$

e, então temos a equação desejada

$$\frac{x_w}{(p-x)^2} = \frac{y_w}{(p-y)^2} = P \in \mathcal{H}(M),$$

onde $\frac{\phi_w}{(\phi-p)^2} = P.$

□

Com os lemas obtidos até agora, podemos enunciar e resolver nosso problema de Björling. Mais precisamente.

Teorema 4.0.1 *Dada uma curva tipo espaço $c : I \rightarrow \mathbb{H}^3$ e uma distribuição normal tipo tempo analítica real $A(t) = \text{Span}\{c(t), \nu(t)\}$, então existem imersões de M no cone de luz $\mathcal{C}$ definidas por*

$$h(w) = 2\mathcal{R}e \int_0^w \mu(\xi) W(p(\xi), q(\xi)) d\xi \quad (4.2)$$

e

$$g(w) = 2\mathcal{R}e \int_0^w \eta(\xi) W(p(\xi), s(\xi)) d\xi, \quad (4.3)$$

onde (M, h) e (M, g) são soluções do problema de Björling em $\mathcal{C}$ com curvas respectivas $h(t) = c(t) + \nu(t)$ e $g(t) = c(t) - \nu(t)$ dadas pelo Teorema 3.2.1, com distribuições normais $A(t) = \text{Span}\{c(t), \nu(t)\}$ em comum. Então, a imersão (M, X) dada por $X(w) = \frac{1}{2}(h(w) + g(w))$ é tal que

$$X(w) = c(0) + \mathcal{R}e \int_0^w (\mu(\xi)W(p(\xi), q(\xi)) + \eta(\xi)W(p(\xi), s(\xi))) d\xi \quad (4.4)$$

é uma imersão conforme de M em $\mathbb{H}^3$ com vetor curvatura média $\vec{H}_X$ tipo luz tal que, para cada $t \in I$, temos

$$X(t, 0) = c(t) \quad e \quad N_{c(t)}X(M) = A(t).$$

Além disto, se escrevemos $X_w = \rho(w)W(x(w), y(w))$ com x sendo função holomorfa, a fórmula (4.4) se transforma em

$$X(w) = c(0) + \mathcal{R}e \int_0^w (\mu(\xi) + \eta(\xi))W\left(p(\xi), \frac{\mu(\xi)q(\xi) + \eta(\xi)s(\xi)}{\mu(\xi) + \eta(\xi)}\right) d\xi.$$

Prova: Inicialmente, mostraremos que $h(t)$ é uma curva do cone de luz munido com a mesma distribuição normal $A(t)$. De fato, já que

$$h'(t) = c'(t) + \nu'(t),$$

para todo $t \in I$, temos

$$\begin{aligned} \langle h'(t), c(t) \rangle &= \langle c'(t) + \nu'(t), c(t) \rangle \\ &= \underbrace{\langle c'(t), c(t) \rangle}_{=0} + \langle \nu'(t), c(t) \rangle \\ &= \langle \nu'(t), c(t) \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\langle c(t), \nu(t) \rangle = 0,$$

para todo $t \in I$. Derivando, obteremos

$$\langle c(t), \nu'(t) \rangle = -\langle c'(t), \nu(t) \rangle = 0,$$

pois $\nu(t) \in [c'(t)]^\perp$. Então, $\langle h'(t), c(t) \rangle = 0$, segue-se daí que

$$\langle h'(t), \nu(t) \rangle = 0,$$

para todo $t \in I$.

De forma análoga, mostra-se que $g(t) = c(t) - \nu(t)$ é uma curva do cone de luz com a mesma distribuição normal $A(t)$.

Para construir as superfícies no cone de luz, se $h(t) = (h_0(t), h_1(t), h_2(t), h_3(t))$ é uma curva do cone de luz tal que

$$h(t) = \lambda(t)L(x(t)),$$

para todo $t \in I$, temos, pelo Corolário 3.1.1

$$\lambda(t) = \frac{h_0(t) - h_3(t)}{2} \quad e \quad x(t) = \frac{h_1(t) + ih_2(t)}{h_0(t) - h_3(t)}, \quad \text{com } h_0(t) \neq h_3(t).$$

Agora para cada $t \in I$, temos

$$\begin{aligned} \langle h(t), g(t) \rangle &= \langle c(t) + \nu(t), c(t) - \nu(t) \rangle \\ &= \underbrace{\langle c(t), c(t) \rangle}_{=-1} - 2 \underbrace{\langle c(t), \nu(t) \rangle}_{=0} - \underbrace{\langle \nu(t), \nu(t) \rangle}_{=1} \\ &= -2. \end{aligned}$$

Isto implica que

$$h(I) \cap g(I) = \emptyset.$$

Além disto, para cada $t \in I$, o conjunto

$$\{h'(t), g'(t)\}$$

é linearmente independente.

Segue-se do Lema 4.0.3, as imagens das imersões (M, h) e (M, g) são disjuntas no cone de luz, para algum intervalo aberto maximal $J \subset \mathbb{R}$, com uma única direção tipo luz em comum.

□

A seguir obtemos uma versão da representação integral de Schwarz para a solução do problema de Björling em $\mathbb{H}^3$. Para isso enunciamos o seguinte lema, cuja prova segue devido as condições de analiticidade real e Proposição 3.1.4:

Lema 4.0.5 Dada uma curva analítica real $c : I \longrightarrow \mathbb{H}^3$ e uma distribuição normal tipo tempo analítica real $A(t) = \text{Span}\{c(t), \nu(t)\}$, então existem extensões $T, N : M \longrightarrow \mathbb{R}_1^4$ tais que

$$T(t, 0) = c(t) \quad e \quad N(t, 0) = \nu(t),$$

para cada $t \in I$.

Logo temos:

Teorema 4.0.2 Dada uma curva analítica real $c : I \longrightarrow \mathbb{H}^3$ e uma distribuição normal tipo tempo analítica real $A(t) = \text{Span}\{c(t), \nu(t)\}$, então existe imersão de M no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$ dada

por

$$X(w) = c(0) + \mathcal{R}e \int_0^w \left(\frac{\partial c}{\partial w}(\xi) - i \boxtimes \left(\frac{\partial c}{\partial w}(\xi), T(\xi), N(\xi) \right) \right) d\xi, \quad (4.5)$$

onde $c(\xi)$ e $\nu(\xi)$ são, respectivamente, as extensões de $c(t)$ e $\nu(t)$ dadas pelo Teorema 3.2.1 com a seguinte forma

$$h(w) = h(0) + \lambda(w)L(x(w)) \quad e \quad g(w) = g(0) + \rho(w)L(y(w)), \quad (4.6)$$

onde $h(w) = c(w) + \nu(w)$ e $g(w) = c(w) - \nu(w)$.

Prova: Do Teorema 3.2.2, segue-se que $X(t, 0) = c(t)$ e que $N_{c(t)}X(M) = \text{Span}\{c(t), \nu(t)\}$. Da equação (2.4) do Corolário 2.3.1, segue-se que

$$X_w = \rho(w)W(p(w), y(w)),$$

onde essas funções são dadas pelas equações (4.1) do Lema 4.0.3. Portanto, das equações (4.2), (4.3) e (4.4) do Teorema 4.0.1, obtemos que a equação (4.5) define a mesma imersão de M em $\mathbb{H}^3$. E mais, a equação (4.5) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$X(w) = c(0) + \mathcal{R}e \int_0^w \left(\frac{h_w(\xi) + g_w(\xi)}{2} - i \boxtimes \left(\frac{h_w(\xi) + g_w(\xi)}{2}, T(\xi), N(\xi) \right) \right) d\xi,$$

onde $\boxtimes$ é calculado na Observação 2.1.1.

□

Finalizamos este capítulo com um exemplo explícito de uma superfície solução ao problema de Björling no $\mathbb{H}^3$. Descrevemos passo a passo a nossa técnica dada pelos Teoremas 3.2.1 e 3.2.2.

Exemplo 4.0.1 Para $k > 0$, considere

$$c(t) = (\sqrt{1+k^2} \cosh(t), k \cos(t), k \sen(t), \sqrt{1+k^2} \senh(t)),$$

uma curva tipo espaço em $\mathbb{H}^3$ com normal intrínseca dada por

$$\nu(t) = (k \cosh(t), \sqrt{1+k^2} \cos(t), \sqrt{1+k^2} \sen(t), k \senh(t)),$$

para todo $t \in I$.

Afirmção 4.0.1 As imagens das curvas $h(t) = c(t) + \nu(t)$ e $g(t) = c(t) - \nu(t)$ estão contidas no cone de luz $\mathcal{C}$.

Prova: De fato, para todo $t \in I$, temos

$$\begin{aligned} \langle h(t), h(t) \rangle &= (k + \sqrt{1+k^2})^2 \{-\cosh^2(t) + \cos^2(t) + \sen^2(t) + \senh^2(t)\} \\ &= (k + \sqrt{1+k^2})^2 \{-1 + 1\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto:

$$h(I) \subset \mathcal{C}.$$

De forma análoga, prova-se que $g(I) \subset \mathcal{C}$.

□

Segue-se daí e do Corolário 3.1.1 que devemos encontrar as funções $\lambda(t)$, $\rho(t)$, $x(t)$ e $y(t)$ de modo que tenhamos

$$h(t) = \lambda(t)L(x(t)) \quad e \quad g(t) = \rho(t)L(y(t)),$$

para todo $t \in I$.

Sendo assim, temos

$$(k + \sqrt{1 + k^2})(\cosh(t), \cos(t), \sen(t), \sinh(t)) = \lambda(t)(1 + x\bar{x}, x + \bar{x}, -i(x - \bar{x}), -1 + x\bar{x}),$$

ou equivalentemente

$$\begin{cases} (k + \sqrt{1 + k^2})\cosh(t) &= \lambda(t)(1 + x\bar{x}) \\ (k + \sqrt{1 + k^2})\cos(t) &= \lambda(t)(x + \bar{x}) \\ (k + \sqrt{1 + k^2})\sen(t) &= -i\lambda(t)(x - \bar{x}) \\ (k + \sqrt{1 + k^2})\sinh(t) &= \lambda(t)(-1 + x\bar{x}). \end{cases}$$

Usando a primeira e a quarta equações do sistema acima, obteremos

$$\begin{aligned} 2\lambda(t) &= (k + \sqrt{1 + k^2})(\cosh(t) - \sinh(t)) \\ &= (k + \sqrt{1 + k^2})\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} - \frac{e^t - e^{-t}}{2}\right) \\ &= (k + \sqrt{1 + k^2})e^{-t}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\lambda(t) = \frac{(k + \sqrt{1 + k^2})}{2} e^{-t}. \quad (4.7)$$

Com a segunda e a terceira equações, teremos

$$2x\lambda(t) = (k + \sqrt{1 + k^2})e^{it}. \quad (4.8)$$

Substituindo a expressão (4.7) em (4.8), segue-se que

$$2x \frac{(k + \sqrt{1 + k^2})}{2} e^{-t} = (k + \sqrt{1 + k^2})e^{it}$$

ou seja;

$$x(t) = e^{it+t}.$$

Analogamente, usando a expressão $g(t) = \rho(t)L(y(t))$, teremos

$$\rho(t) = \frac{(\sqrt{1 + k^2} - k)}{2} e^{-t} \quad e \quad y(t) = -e^{it+t}. \quad (4.9)$$

As famílias de imersões no cone de luz $h(w) = \lambda(w)e^{\theta(w)}L(x(w))$ e $g(w) = \rho(w)e^{\beta(w)}L(y(w))$ tais que $h(t, 0) = h(t)$ e $g(t, 0) = g(t)$, com a condição que

$$X(w) = \frac{1}{2}(h(w) + g(w)),$$

seja imersão conforme em $\mathbb{H}^3$, fixada pela condição

$$\theta(w) + \beta(w) = 2v = 2\mathcal{I}m(w),$$

quando tomamos as extensões

$$\begin{cases} \lambda(w) &= \frac{(k + \sqrt{1+k^2})}{2} e^{-\mathcal{R}e(w)} \\ \rho(w) &= \frac{(\sqrt{1+k^2} - k)}{2} e^{-\mathcal{R}e(w)} \\ x(w) &= -y(w) = e^{iw+w}. \end{cases} \quad (4.10)$$

A equação (3.5) do Teorema 3.2.2, fornece

$$\theta_w = \frac{x_w}{p-x} - \frac{\lambda_w}{\lambda} \quad e \quad \beta_w = -\frac{x_w}{p+x} - \frac{\rho_w}{\rho}.$$

De (4.10), temos:

$$(\ln \lambda)_w = (\ln \rho)_w = -\frac{1}{2}$$

Obtemos equações ligando as funções harmônicas a valores reais θ , β e função holomorfa $p(h) = p(g) = p$ com as condições iniciais $\theta(t, 0) = 0 = \beta(t, 0)$. Pelo Lema 4.0.4, para $y = -x$, temos:

$$P(w) = \frac{x_w}{(p-x)^2} = -\frac{x_w}{(p+x)^2},$$

então, ou $p = ix$ ou $p = -ix$. Da equação (3.5) segue-se para $p = ix$

$$\begin{aligned} \theta_w &= \frac{x_w}{(i-1)x} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{e^{iw+w}(i+1)}{(i-1)e^{iw+w}} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1+i}{1-i} \\ &= \frac{1}{2} - i. \end{aligned}$$

Note que $\theta(t, 0) \neq 0$, pois

$$\mathcal{I}m(\Theta(w)) = \mathcal{I}m\left(\left(\frac{1}{2} - i\right)(u + iv)\right) = \frac{v}{2} - u.$$

No caso $p = -ix$, temos

$$\begin{aligned} \theta_w &= \frac{x_w}{-(i+1)x} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{e^{iw+w}(i+1)}{-(i+1)e^{iw+w}} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1+i}{1+i} \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Portanto os valores únicos que fornecem a solução ao problema de Björling são

$$\theta(u, v) = \mathcal{I}m(\Theta(w)) = \mathcal{I}m\left(-\frac{u+iv}{2}\right) = -\frac{v}{2} \quad e \quad \beta(u, v) = \frac{5v}{2}.$$

Sendo que $\rho = \frac{\sqrt{1+k^2}-k}{k+\sqrt{1+k^2}}\lambda$ conseguimos as imersões

$$h(w) = \lambda(w)e^{-\frac{v}{2}}L(x(w)) \quad e \quad g(w) = \lambda(w)e^{\frac{5v}{2}}L(-x(w)).$$

Portanto a superfície solução $X(w)$ para o problema de Björling em $\mathbb{H}^3$ é

$$\begin{aligned} X(w) &= \frac{h(w) + g(w)}{2} \\ &= \frac{\lambda}{2}e^{-\frac{v}{2}} \left[L(x(w)) + \frac{\sqrt{1+k^2}-k}{k+\sqrt{1+k^2}}e^{3v}L(-x(w)) \right], \end{aligned}$$

onde

$$\lambda(w) = \frac{k + \sqrt{1+k^2}}{2}e^{-u} \quad e \quad x(w) = e^{iw+w}.$$

Capítulo 5

Problema tipo Björling em $\mathbb{S}_1^3$

Neste capítulo, desenvolvemos a solução ao problema de Björling para superfícies tipo espaço no espaço De Sitter $\mathbb{S}_1^3$. A primeira versão desse problema é:

Dada uma boa curva tipo espaço analítica $\nu : I \longrightarrow \mathbb{S}_1^3$ e uma distribuição normal tipo tempo $A(t) = \text{Span}\{m(t), n(t)\}$ analítica ao longo da curva. O problema tipo Björling consiste em encontrar uma imersão conforme X de $M = I \times J$ em $\mathbb{S}_1^3$ com vetor curvatura média de tipo luz, tal que

1. $X(t, 0) = \nu(t)$
2. $N_{\nu(t)}X(M) = A(t)$, para todo $t \in I$.

Analogamente como no Capítulo 4, onde foi resolvido o problema de Björling em $\mathbb{H}^3$, podemos reformular o problema no $\mathbb{S}_1^3$ como segue

Dada uma boa curva tipo espaço $\nu : I \longrightarrow \mathbb{S}_1^3$ e uma distribuição normal tipo tempo $\text{Span}\{c(t)\} \in T_{\nu(t)}\mathbb{S}_1^3$ encontrar uma imersão conforme de $M = I \times J$ em $\mathbb{S}_1^3$, tal que

1. $X(t, 0) = \nu(t)$
2. $N_{\nu(t)}X(M) = \text{Span}\{c(t), \nu(t)\}$, para todo $t \in I$
3. O vetor curvatura média $\vec{H}_X X(M)$ é um vetor tipo luz ao longo da curva ν .

Nossa técnica retoma a construção feita no Capítulo 4, mas aqui desejamos construir duas imersões (M, h) e (M, g) no cone de luz, as duas com vetor curvatura média tipo luz, tal que a imersão

$$X(w) = \frac{1}{2}(h(w) - g(w)),$$

fornece uma imersão conforme em $\mathbb{S}_1^3$ com vetor curvatura média tipo luz, e com duas boas curvas definidas por $h(t) = c(t) + \nu(t)$ e $g(t) = c(t) - \nu(t)$ tal que $2\nu(t) = h(t) - g(t)$. De forma análoga, usamos Teorema 3.2.1 e o Teorema 3.2.2, para encontrar a representação de Weierstrass para a solução do problema de Björling no cone de luz para as imersões h e g , e consequentemente obtemos a solução do problema de Björling em $\mathbb{S}_1^3$.

Observamos que Lema 4.0.2 é igualmente provado para o caso de $h(w) - g(w)$. O Lema 4.0.3 já está provado na versão de sinal negativo, isto é, para quando $\epsilon = -1$. Igualmente Lema 4.0.5 também satisfaz para nossas condições da curva real analítica ν em $\mathbb{S}_1^3$ e a distribuição normal tipo tempo $A(t) = \text{Span}\{c(t), \nu(t)\}$.

Portanto a solução ao problema de Björling em $\mathbb{S}_1^3$ fica estabelecida na seguinte forma.

Teorema 5.0.1 *Dada uma curva tipo espaço $\nu : I \rightarrow \mathbb{S}_1^3$ e uma distribuição normal tipo tempo analítica real $A(t) = \text{Span}\{c(t), \nu(t)\}$. Então existem imersões de M no cone de luz $\mathcal{C}$ definidas por*

$$h(w) = 2\mathcal{R}e \int_0^w \mu(\xi) W(p(\xi), q(\xi)) d\xi \quad (5.1)$$

e

$$g(w) = 2\mathcal{R}e \int_0^w \eta(\xi) W(p(\xi), s(\xi)) d\xi, \quad (5.2)$$

com p função holomorfa onde (M, h) e (M, g) são soluções do problema de Björling em $\mathcal{C}$ com curvas respectivas $h(t) = c(t) + \nu(t)$ e $g(t) = c(t) - \nu(t)$ dadas pelo Teorema 3.2.1, com distribuições normais $A(t) = \text{Span}\{c(t), \nu(t)\}$ em comum. Então, a imersão (M, X) dada por $X(w) = \frac{1}{2}(h(w) - g(w))$ é tal que

$$X(w) = \nu(0) + \mathcal{R}e \int_0^w (\mu(\xi)W(p(\xi), q(\xi)) - \eta(\xi)W(p(\xi), s(\xi))) d\xi \quad (5.3)$$

é uma imersão conforme de M em $\mathbb{S}_1^3$ com vetor curvatura média $\vec{H}_X$ tipo luz tal que, para cada $t \in I$, temos

$$X(t, 0) = \nu(t) \quad e \quad N_{\nu(t)}X(M) = A(t).$$

Além disto, se escrevemos $X_w = \rho(w)W(x(w), y(w))$ com x sendo função holomorfa, a fórmula (5.3) se transforma em

$$X(w) = \nu(0) + \mathcal{R}e \int_0^w (\mu(\xi) - \eta(\xi))W\left(p(\xi), \frac{\mu(\xi)q(\xi) - \eta(\xi)s(\xi)}{\mu(\xi) - \eta(\xi)}\right) d\xi.$$

De forma análoga ao Teorema 4.0.2, obtemos uma versão da representação integral de Schwarz para a solução do problema de Björling em $\mathbb{S}_1^3$ na seguinte forma.

Teorema 5.0.2 *Dada uma curva analítica real tipo espaço $\nu : I \rightarrow \mathbb{S}_1^3$ e uma distribuição normal tipo tempo analítica real $A(t) = \text{Span}\{c(t), \nu(t)\}$, então existe imersão de M no espaço De Sitter $\mathbb{S}_1^3$ dada por*

$$X(w) = \nu(0) + \mathcal{R}e \int_0^w \left(\frac{\partial \nu}{\partial w}(\xi) - i \boxtimes \left(\frac{\partial \nu}{\partial w}(\xi), T(\xi), N(\xi) \right) \right) d\xi, \quad (5.4)$$

onde $c(\xi)$ e $\nu(\xi)$ são, respectivamente, as extensões de $c(t)$ e $\nu(t)$ dadas pelo Teorema 3.2.1 com a seguinte forma

$$h(w) = h(0) + \lambda(w)L(x(w)) \quad e \quad g(w) = g(0) + \rho(w)L(y(w)), \quad (5.5)$$

onde $h(w) = c(w) + \nu(w)$ e $g(w) = c(w) - \nu(w)$. Assim a expressão (5.4) pode ser formulada como

$$X(w) = \nu(0) + \mathcal{R}e \int_0^w \left(\frac{h_w(\xi) - g_w(\xi)}{2} - i \boxtimes \left(\frac{h_w(\xi) - g_w(\xi)}{2}, T(\xi), N(\xi) \right) \right) d\xi.$$

Finalmente vejamos um exemplo em $\mathbb{S}_1^3$.

Exemplo 5.0.1 *Tomando os mesmos dados de Björling $c(t)$ e $\nu(t)$ do Exemplo 4.0.1, temos que a*

solução ao problema de Björling em $\mathbb{S}_1^3$ é dada pela expressão

$$\begin{aligned} X(w) &= \frac{h(w) - g(w)}{2} \\ &= \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{v}{2}} \left[L(x(w)) - \frac{\sqrt{1+k^2} - k}{k + \sqrt{1+k^2}} e^{3v} L(-x(w)) \right], \end{aligned}$$

onde $\lambda(w) = \frac{k + \sqrt{1+k^2}}{2} e^{-u}$ e $x(w) = e^{iw+w}$.

Referências Bibliográficas

- [ACM03] Luis J Alías, Rosa MB Chaves e Pablo Mira. Björling problem for maximal surfaces in lorentz-minkowski space. Em *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 134, páginas 289–316. Cambridge University Press, 2003. 1
- [AR03] Juan A Aledo e Alfonso Romero. Compact spacelike surfaces in the 3-dimensional de sitter space with non-degenerate second fundamental form. *Differential Geometry and its Applications*, 19(1):97–111, 2003. 8
- [AV06] Antonio C Asperti e José Antonio M Vilhena. Björling problem for spacelike, zero mean curvature surfaces in $\mathbf{L}^4$. *Journal of Geometry and physics*, 56(2):196–213, 2006. 1
- [BD10] David Brander e Josef F Dorfmeister. The björling problem for non-minimal constant mean curvature surfaces. *Communications in Analysis and Geometry*, 18(1):171–194, 2010. 1
- [CDM11] Rosa MB Chaves, Martha P Dussan e Martin Magid. Björling problem for timelike surfaces in the lorentz-minkowski space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 377(2):481–494, 2011. 1
- [CMO16] Adriana A Cintra, Francesco Mercuri e Irene I Onnis. The björling problem for minimal surfaces in a lorentzian three-dimensional lie group. *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-)*, 195(1):95–110, 2016. 1
- [DFFM17] Martha P Dussan, Antonio P Franco Filho e Martin Magid. The björling problem for timelike minimal surfaces in $\mathbb{R}_1^4$. *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-)*, 196(4):1231–1249, 2017. 1
- [DFS] Martha P. Dussan, Antonio P. Franco Filho e Plínio Simões. Some partial differential equations and conformal surfaces of the 4-dimensional minkowski space. arxiv.org/abs/1904.11856. [iii](#), [v](#), [1](#), [9](#), [16](#), [17](#), [18](#), [20](#), [23](#), [25](#), [26](#), [37](#)
- [DM13] Martha P Dussan e Martin Magid. The björling problem for timelike surfaces in $\mathbf{R}_2^4$. *Journal of Geometry and Physics*, 73:187–199, 2013. 1
- [GM05] José A Gálvez e Pablo Mira. The cauchy problem for the liouville equation and bryant surfaces. *Advances in Mathematics*, 195(2):456–490, 2005. 1, 8
- [HO80] David A Hoffman e Robert Osserman. *The geometry of the generalized Gauss map*, volume 236. American Mathematical Soc., 1980. [iii](#), [v](#), [1](#), [15](#)
- [HO83] David A. Hoffman e Robert Osserman. The gauss map of surfaces in $\mathbf{R}^n$. *J. Differential Geom.*, 18(4):733–754, 1983. [iii](#), [v](#), [1](#), [22](#)
- [Izu09] Shyuichi Izumiya. Legendrian dualities and spacelike hypersurfaces in the lightcone. *Moscow Mathematical Journal*, 9(2):325–357, 2009. 8
- [Kok97] Masatoshi Kokubu. Weierstrass representation for minimal surfaces in hyperbolic space. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 49(3):367–377, 1997. 8

- [MO09] Francesco Mercuri e Irene I Onnis. On the björling problem in a three-dimensional lie group. *Illinois Journal of Mathematics*, 53(2):431, 2009. [1](#)
- [O’N83] Barrett O’Neill. *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, volume 103. Academic press, 1983. [7](#)
- [Pen65] Roger Penrose. Gravitational collapse and space-time singularities. *Physical Review Letters*, 14(3):57, 1965. [8](#)
- [PR13] Francisco J Palomo e Alfonso Romero. On spacelike surfaces in four-dimensional lorentz-minkowski spacetime through a light cone. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, 143(4):881–892, 2013. [8](#)
- [Rat06] John Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds*, volume 149. Springer Science & Business Media, 2006. [8](#)
- [Sch90] Hermann Amandus Schwarz. *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, volume 1. J. Springer, 1890. [1](#)
- [Wal95] Johan Walrave. *Curves and surfaces in Minkowski space*. Tese de Doutorado, 1995. [13](#)