**Teoremas de tipo Hilbert e Liebmann
para superfícies em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$**

Marcelo Kodi Inagaki

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof^a. Dr^a Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CNPq

São Paulo, janeiro de 2016

Título do trabalho a ser apresentado à CPG para a dissertação/tese

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 17/02/2016. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof^a. Dr^a. Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves (orientadora) - IME-USP
- Prof. Dr. Alexandre Lymberopoulos - IME-USP
- Prof. Dr. José María Espinar Garcia - IMPA

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, à minha família, meus pais Sérgio e Tiyako e meu irmão Marcos. O apoio incondicional e a compreensão às decisões que me levaram ao mestrado e às responsabilidades e necessidades que ele acarreta, é o que de mais próximo desta dissertação posso citar, dentre a infinidade de coisas pelas quais sou grato a vocês. Obrigado pelo amor, pela convivência, enfim, por tudo.

Agradeço a minha orientadora, a professora Rosa, que me apresentou à matemática orientando-me em uma iniciação científica. Desde então você se tornou uma mãe no meio acadêmico, sempre me guiando nos momentos de dúvida, me auxiliando nos momentos de frustração, me exigindo quando preciso. É por tudo isso que sou grato a você professora.

Agradeço aos professores Kawano e Alexandrino. Ao primeiro, pelas conversas, sempre em tom filosófico, por compartilhar seu vasto conhecimento matemático e pela orientação no fim da graduação. Ao segundo, sou grato pelas incontáveis vezes em que me ajudou nos mais variados problemas que um aluno enfrenta no mestrado, e por aceitar me orientar no doutorado.

Agradeço aos amigos, em especial aos do IME, por compartilharem o dia-a-dia, pelas conversas, quase sempre sobre matemática e pela troca de experiências.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro, sem o qual esta dissertação não seria possível.

Resumo

INAGAKI, M. K. **Teoremas de tipo Hilbert e Liebmann para superfícies em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.** 2016. 80 f. Dissertação de Mestrado - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

Neste trabalho será demonstrada uma versão dos teoremas de Hilbert e Liebmann para superfícies em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, que são teoremas de existência e unicidade de superfícies completas com curvatura Gaussiana constante nesses ambientes. Como parte da demonstração, a saber a existência, será apresentada uma classificação das superfícies de revolução completas com curvatura Gaussiana constante em torno de um eixo qualquer, em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e em torno de um eixo Lorentziano, em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Palavras-chave: superfícies, Hilbert, Liebmann.

Abstract

INAGAKI, M. K. **Hilbert and Liebmann type theorems for surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.** 2016. 80 f. Dissertação de Mestrado - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

In this work it will be proved a version of Hilbert and Liebmann theorems for surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, wich are theorems about existence and uniqueness of complete surfaces with constant Gaussian curvature in those ambients. As part of the proof, namely the existence, it will be presented a classification of complete revolution surfaces with constant Gaussian curvature around any axis in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and around a Lorentzian axis in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Keywords: surfaces, Hilbert, Liebmann.

Sumário

Introdução	ix
1 Geometria de $M^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$	1
1.1 Hipersuperfícies em $M^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$	2
1.2 Equações de Gauss - Codazzi	7
2 Superfícies de revolução em $M^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$	11
2.1 Superfícies de revolução em $S^2 \times \mathbb{R}$	16
2.2 Superfícies de revolução em $H^2 \times \mathbb{R}$	22
3 Superfícies completas com curvatura Gaussiana constante em $M^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$	37
3.1 Teorema de tipo Hilbert	53
3.2 Teorema de tipo Liebmann	56
Referências Bibliográficas	67

Introdução

O estudo de superfícies, no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, consiste em sua grande parte de resultados locais, acerca de propriedades da superfície. No entanto, o uso de resultados topológicos, dessas superfícies, permite a obtenção de resultados globais para as mesmas. Entre os vários resultados globais clássicos, destacam-se o Teorema de Liebmann, demonstrado em 1899 pelo mesmo, em [Lie99], e o Teorema de Hilbert, demonstrado em 1901 pelo mesmo, em [Hil01]. Os enunciados destes teoremas são apresentados a seguir, e foram retirados de [Car12].

Teorema de Hilbert. Seja S uma superfície de $\mathbb{R}^3$. Então não existe $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão completa com curvatura Gaussiana negativa.

Teorema de Liebmann. Seja S uma superfície compacta de $\mathbb{R}^3$, com curvatura constante. Então S é uma esfera.

Utilizando um corolário do teorema de Bonnet-Myers, que afirma que uma superfície completa com curvatura Gaussiana constante positiva é compacta, obtém-se, pelo Teorema de Liebmann, que a esfera é a única superfície completa com curvatura Gaussiana constante positiva, em $\mathbb{R}^3$. Ainda, é mostrado, por exemplo em [Car12], que o plano e o cilindro generalizado são as únicas superfícies completas com curvatura Gaussiana nula, em $\mathbb{R}^3$ (teorema de Hartman-Nirenberg). Estes resultados e o Teorema de Hilbert, classificam as superfícies completas de curvatura Gaussiana constante, em $\mathbb{R}^3$.

Uma versão destes dois teoremas, quando os espaços ambientes são $\mathbb{S}^3$ e $\mathbb{H}^3$, já foi demonstrada (ver, por exemplo, [Gal09]). Nesta dissertação, baseada nas referências [Ale07a] e [Ale07b], é abordada outra versão destes teoremas, onde o espaço ambiente é $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, com $\mathbb{M}^2(\varepsilon) = \mathbb{S}^2$ quando $\varepsilon = 1$, e $\mathbb{M}^2(\varepsilon) = \mathbb{H}^2$ quando $\varepsilon = -1$. Seguem os enunciados dos teoremas.

Teorema (de tipo Hilbert). Seja S uma superfície orientada. Então não existe $f : S \rightarrow \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ uma imersão completa com curvatura Gaussiana menor que -1 .

Teorema (de tipo Liebmann). Seja S uma superfície orientada. Se $K > 0$ é um número real, então existe uma única $f : S \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ imersão completa com curvatura Gaussiana constante igual a K . Se $K > 1$ é um número real, então existe uma única $f : S \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ imersão completa com curvatura Gaussiana constante igual a K .

Assim, em contraste com o que ocorre no ambiente $\mathbb{R}^3$, onde as superfícies completas com curvatura constante não nula ficam classificadas pelos Teoremas de Hilbert e Liebmann, no ambiente

$\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, os teoremas de tipo Hilbert e de tipo Liebmann, apresentados, classificam as superfícies completas de curvatura constante K em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, a menos dos casos em que $-1 \leq K \leq 1$; e em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, a menos dos casos em que $-1 \leq K \leq 0$. No ambiente $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, é mostrado em [Ale07b], que não existem superfícies completas com $0 < K < 1$; ainda os cilindros em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ são superfícies completas com $K = 0$; e existe uma única superfície completa de revolução com $K = 1$. O problema de existência e unicidade, para superfícies completas com $-1 \leq K < 0$, permanece aberto. Em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ existem infinitas superfícies completas com $-1 \leq K < 0$, o que mostra uma impossibilidade de classificá-las nesse caso. Assim, o problema de existência e unicidade de superfícies completas com curvatura constante, em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, está solucionado.

A demonstração da existência, no Teorema de tipo Liebmann, se faz por meio do estudo das superfícies de revolução completas com curvatura Gaussiana constante em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$. Em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, é possível mostrar que, existe uma única dessas superfícies com curvatura constante positiva, a menos de isometrias do ambiente; existe uma única dessas superfícies com curvatura nula, a menos de isometrias do ambiente e de cilindros; existem infinitas dessas superfícies com curvatura constante negativa. Em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, é possível mostrar que, existe uma única dessas superfícies com curvatura constante positiva, a menos de isometrias do ambiente; os cilindros são as únicas superfícies de revolução completas com curvatura nula; e não existem superfícies de revolução completas com curvatura constante negativa.

A demonstração da unicidade, no Teorema de tipo Liebmann, e a demonstração do Teorema de tipo Hilbert são baseadas no estudo da forma quadrática

$$A := I + \frac{1}{\varepsilon K - 1} dh^2,$$

definida sobre a superfície, que consiste em uma deformação da métrica da superfície, herdada do ambiente, onde I é a primeira forma fundamental de f e h é a função altura. No caso da unicidade no teorema de tipo Liebmann a demonstração dividi-se em duas partes, a saber, a unicidade de h (quarta coordenada de f) e a unicidade das três primeiras coordenadas de f . A unicidade da função altura é obtida por integração de expressões das derivadas parciais da mesma, em função da curvatura Gaussiana, da quarta componente, do campo normal N da imersão f e do parâmetro de proporcionalidade entre A e II , onde II é a segunda forma fundamental de f , e pelo teorema de analiticidade de Bernstein, que pode ser encontrado, por exemplo, em [Mor08]. A existência de tal parâmetro decorre dos fatos de que a curvatura positiva garante, através do teorema de Gauss-Bonnet, que S é uma esfera topológica, e que as condições sobre K , implicam que II é definida, A é Riemanniana e (A, II) é um par de Codazzi, o que permite aplicar um resultado de [Mil80], que leva a conclusão de que a $(2, 0)$ -parte de A é holomorfa sobre uma esfera topológica, e logo é identicamente nula para a estrutura conforme induzida por II , ou seja, A é conforme, e portanto A é proporcional a II . A unicidade das três primeiras coordenadas de f decorre do fato de que, se $\bar{f} : S \rightarrow \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ for outra imersão completa de curvatura Gaussiana constante K , então $\eta \circ \bar{\eta}^{-1}$ é uma isometria. No caso do teorema de tipo Hilbert, a essência da demonstração reside na conclusão de que, em uma superfície completa com $K < -1$, a forma quadrática A é uma métrica Riemanniana completa e (A, II) é um par de Codazzi, o que permite aplicar um resultado, apresentado conjuntamente em [Wei96] e [Wis72], que afirma que sob essas condições acerca de A , tem-se que o ínfimo do módulo da curvatura Gaussiana de S , munido da métrica A , é zero, o que contradiz o fato, obtido através do cálculo direto dessa curvatura, de que este ínfimo é positivo.

Capítulo 1

Geometria de $\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$

O objetivo central deste capítulo é apresentar definições, notações e propriedades básicas da variedade $\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ e das hipersuperfícies da mesma. Um estudo mais abrangente da geometria destas hipersuperfícies pode ser encontrado em [Dan09] e [Man11].

Ao longo do trabalho será considerado que $\mathbb{R}^n(\varepsilon)$ é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ com a métrica usual, quando $\varepsilon = 1$ e o espaço Lorentziano $\mathbb{L}^n$, quando $\varepsilon = -1$. Ainda será considerado que $\mathbb{M}^n(\varepsilon) = \mathbb{S}^n$, quando $\varepsilon = 1$ e $\mathbb{M}^n(\varepsilon) = \mathbb{H}^n$, quando $\varepsilon = -1$, onde

$$\begin{aligned}\mathbb{S}^n &= \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}, \\ \mathbb{H}^n &= \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{L}^{n+1} : -x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = -1 \text{ e } x_1 > 0\},\end{aligned}$$

e, frequentemente, se fará uso da inclusão $i : \mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+2}(\varepsilon)$, explicitamente dada por

$$i(p, t) = (i_\varepsilon(p), t), \quad (1.1)$$

onde $i_\varepsilon : \mathbb{M}^n(\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}(\varepsilon)$ é a inclusão e $\mathbb{R}^{n+1}(\varepsilon) \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}^{n+2}(\varepsilon)$, ou seja, se $i_\varepsilon(p) = (x_1, \dots, x_{n+1})$, então $i(p, t) = (x_1, \dots, x_{n+1}, t)$. Ainda, quando necessário, se fará uso das projeções canônicas $\pi_{\mathbb{M}(\varepsilon)} : \mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{M}^n(\varepsilon)$ e $\pi_{\mathbb{R}} : \mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

A variedade $\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ estará sempre munida da métrica induzida pela inclusão, que será denotada por $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varepsilon$ (quando não houver risco de confusão, a métrica de $\mathbb{R}^n(\varepsilon)$ também será denotada por $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varepsilon$). Observe que esta é a métrica produto, ou seja, se $g_{\mathbb{M}(\varepsilon)}$ é a métrica de $\mathbb{M}^n(\varepsilon)$ induzida pela inclusão i_ε e $g_{\mathbb{R}}$ é a métrica usual de $\mathbb{R}$, então $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varepsilon = g_{\mathbb{M}(\varepsilon)} \oplus g_{\mathbb{R}}$. Assim i será sempre uma imersão isométrica e $\pi_{\mathbb{M}(\varepsilon)}$ e $\pi_{\mathbb{R}}$ submersões Riemannianas.

Ainda, as conexões Riemannianas de $\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n(\varepsilon)$ serão denotadas por $\overline{\nabla}^\varepsilon$ e ∇^ε , e os respectivos tensores de curvatura serão denotados por $\overline{R}^\varepsilon$ e R^ε . Quando houver necessidade, as conexões Riemannianas de $\mathbb{M}^n(\varepsilon)$ e $\mathbb{R}$ serão denotadas por $\nabla^{\mathbb{M}(\varepsilon)}$ e $\nabla^{\mathbb{R}}$, e os tensores de curvatura por $R^{\mathbb{M}(\varepsilon)}$ e $R^{\mathbb{R}}$, respectivamente.

O campo normal η , da imersão i , compatível com a orientação de $\mathbb{R}^{n+2}(\varepsilon)$ e tal que $\langle \eta, \eta \rangle_\varepsilon = \varepsilon$, é dado por

$$\eta(p, t) = (i_\varepsilon(p), 0). \quad (1.2)$$

De fato, como $\langle i_\varepsilon(p), i_\varepsilon(p) \rangle_\varepsilon = \varepsilon$, para todo $p \in \mathbb{M}^n(\varepsilon)$, segue que $\langle d(i_\varepsilon)_p u, i_\varepsilon(p) \rangle_\varepsilon = 0$, para todo $u \in T_p \mathbb{M}^n(\varepsilon)$. Logo

$$\langle \eta(p, t), di_{(p,t)}(u, v) \rangle_\varepsilon = \langle (i_\varepsilon(p), 0), (d(i_\varepsilon)_p u, v) \rangle_\varepsilon = \langle i_\varepsilon(p), d(i_\varepsilon)_p u \rangle_\varepsilon = 0,$$

para todo $(u, v) \in T_p \mathbb{M}^n(\varepsilon) \oplus \mathbb{R} \approx T_{(p,t)}(\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R})$, ou seja, $\eta(p, t) \in (T_p \mathbb{M}^n(\varepsilon) \oplus \mathbb{R})^\perp$. Ainda, $\langle \eta(p, t), \eta(p, t) \rangle_\varepsilon = \langle i_\varepsilon(p), i_\varepsilon(p) \rangle_\varepsilon = \varepsilon$.

1.1 Hipersuperfícies em $\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$

Uma hipersuperfície, em $\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, será uma subvariedade imersa M orientável, de dimensão n e, frequentemente, essa imersão será denotada por f , e será considerado na hipersuperfície a métrica induzida pela imersão, denotada por I (primeira forma fundamental). A conexão Riemanniana, o respectivo tensor de curvatura e o operador de forma da hipersuperfície serão denotados por ∇ , R e S , respectivamente.

O campo normal unitário, desta imersão, compatível com a orientação de $\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, será denotado por N .

O campo tangente ao segundo fator de $\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ e unitário (desta imersão) será denotado por $\partial/\partial t$. Considerando $T_{f(p)}(\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}) = df_p(T_p M) \oplus T_p \mathbb{R}$, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} = f_* T + \nu N,$$

onde $T \in \Gamma(TM)$ e

$$\nu = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, N \right\rangle_\varepsilon. \quad (1.3)$$

Observe que $\partial/\partial t$ é paralelo. De fato, como $\partial/\partial t$ é unitário segue que $X(\langle \partial/\partial t, \partial/\partial t \rangle_\varepsilon) = 0$, para todo $X \in \Gamma(T(\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}))$ e portanto, pela compatibilidade da conexão, tem-se que $\langle \partial/\partial t, \nabla_X \partial/\partial t \rangle_\varepsilon = 0$. Como $\nabla_X \partial/\partial t$ é tangente ao segundo fator de $\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, segue que $\nabla_X \partial/\partial t = 0$.

A seguir serão apresentadas algumas propriedades básicas do campo T e da função ν , que decorrem do fato de $\partial/\partial t$ ser paralelo.

Proposição 1.1.1. Seja M^n uma variedade e $f : M \longrightarrow \mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ uma imersão. Então

- (a) $X(\nu) = -I(S(X), T)$,
- (b) $\nabla_X T = \nu S(X)$,
- (c) $1 = \|T\|^2 + \nu^2$,

para todo $X \in \Gamma(TM)$.

Demonstração. Seja $X \in \Gamma(TM)$ e $\overline{X}, \overline{N} \in \Gamma(T(\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}))$ extensões locais de X e do vetor normal unitário N .

Então como N é unitário, tem-se pela compatibilidade da métrica que

$$0 = X(\langle N, N \rangle_\varepsilon) = 2 \langle \nabla_{\overline{X}} \overline{N}, N \rangle_\varepsilon.$$

Logo, como a codimensão de M é 1, segue que $\nabla_{\overline{X}} \overline{N}$ é tangente a M .

- (a) Segue, da definição de ν em (1.3) e da compatibilidade da métrica, que

$$X(\nu) = \left\langle \nabla_{\overline{X}} \overline{N}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle_\varepsilon + \left\langle N, \nabla_{\overline{X}} \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle_\varepsilon,$$

e como $\partial/\partial t$ é paralelo e $\nabla_{\overline{X}} \overline{N}$ é tangente a M , tem-se que

$$X(\nu) = \left\langle -df(S(X)), \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle_\varepsilon = \langle -df(S(X)), f_* T + \nu N \rangle_\varepsilon = -I(S(X), T).$$

- (b) Segue da definição de $\partial/\partial t$ que

$$\nabla_{\overline{X}} \frac{\partial}{\partial t} = \nabla_{\overline{X}} f_* T + \nabla_{\overline{X}} (\nu \overline{N}) = \nabla_{\overline{X}} f_* T + \nu \nabla_{\overline{X}} \overline{N} + \overline{X}(\nu) \overline{N},$$

e como $\partial/\partial t$ é paralelo e $\nabla^\varepsilon_{\overline{X}}\overline{N}$ é tangente a M , tem-se que

$$(\nabla^\varepsilon_{\overline{X}}f_*T)^T = -\nu\nabla^\varepsilon_{\overline{X}}\overline{N} = \nu df(S(X)), \quad (\nabla^\varepsilon_{\overline{X}}f_*T)^N = -\overline{X}(\nu)N,$$

onde $(\nabla^\varepsilon_{\overline{X}}f_*T)^T$ e $(\nabla^\varepsilon_{\overline{X}}f_*T)^N$ são as projeções de $\nabla^\varepsilon_{\overline{X}}f_*T$ no espaço tangente e normal a hipersuperfície, respectivamente.

Logo

$$\nabla_X T = \nu S(X).$$

(c) Segue da definição de $\partial/\partial t$ que

$$1 = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle_\varepsilon = \langle f_*T + \nu N, f_*T + \nu N \rangle_\varepsilon = \langle f_*T, f_*T \rangle_\varepsilon + \nu^2 \langle N, N \rangle_\varepsilon = \|T\|^2 + \nu^2 \quad \blacksquare$$

A seguir será apresentada a expressão do tensor de curvatura R^ε de $\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, em função de parâmetros da hipersuperfície. Antes, será apresentada uma proposição necessária para a obtenção de tal expressão, que pode ser encontrada em [Car12].

Proposição 1.1.2. Seja (M, g) uma variedade pseudo-Riemanniana, com curvatura seccional constante K . Então

$$g(R(X, Y)Z, W) = K (g(X, Z)g(Y, W) - g(Y, Z)g(X, W)), \quad (1.4)$$

para todo $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$.

Proposição 1.1.3. Seja M^n uma variedade e $f : M \longrightarrow \mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ uma imersão. Então

(a)

$$\begin{aligned} \langle R^\varepsilon(\overline{X}, \overline{Y})\overline{Z}, \overline{W} \rangle_\varepsilon &= \varepsilon (I(X, Z)I(Y, W) - I(Y, Z)I(X, W) + \\ &\quad - I(Y, T)I(W, T)I(X, Z) - I(X, T)I(Z, T)I(Y, W) + \\ &\quad + I(X, T)I(W, T)I(Y, Z) + I(Y, T)I(Z, T)I(X, W)), \end{aligned}$$

(b)

$$\langle R^\varepsilon(\overline{X}, \overline{Y})\overline{N}, \overline{W} \rangle_\varepsilon = \varepsilon \nu (I(X, Z)I(Y, T) - I(Y, Z)I(X, T)),$$

para todo $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$, onde $N \in \Gamma(TM^\perp)$ é um campo normal unitário e $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}, \overline{W}, \overline{N} \in \Gamma(T(\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}))$ são extensões locais de X, Y, Z, W, N , respectivamente.

Demonstração. Defina $X_t^{\mathbb{M}(\varepsilon)} \in \Gamma(TM^n(\varepsilon))$ e $X_p^{\mathbb{R}} \in \Gamma(T\mathbb{R})$, tais que $\overline{X}(p, t) = (X_t^{\mathbb{M}(\varepsilon)}(p), X_p^{\mathbb{R}}(t))$,

para cada $(p, t) \in \mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$. O campo $X_t^{\mathbb{M}(\varepsilon)}$ será denotado por $X^{\mathbb{M}(\varepsilon)}$, por uma questão de simplicidade. Analogamente, definem-se $Y^{\mathbb{M}(\varepsilon)}, Z^{\mathbb{M}(\varepsilon)}, W^{\mathbb{M}(\varepsilon)}, N^{\mathbb{M}(\varepsilon)} \in \Gamma(TM^n(\varepsilon))$ e $Y^{\mathbb{R}}, Z^{\mathbb{R}}, W^{\mathbb{R}}, N^{\mathbb{R}} \in \Gamma(T\mathbb{R})$.

Então $X^{\mathbb{M}(\varepsilon)} = \overline{X} - (0, X^{\mathbb{R}})$. Como $\partial/\partial t$ é tangente ao segundo fator de $\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, tem-se que $(0, X^{\mathbb{R}}) = \lambda \partial/\partial t$. Logo $\langle \overline{X}, \partial/\partial t \rangle_\varepsilon = \langle (0, X^{\mathbb{R}}), \partial/\partial t \rangle_\varepsilon = \lambda$, e portanto $(0, X^{\mathbb{R}}) = \langle \overline{X}, \partial/\partial t \rangle_\varepsilon \partial/\partial t$.

Assim, $X^{\mathbb{M}(\varepsilon)} = \overline{X} - \langle \overline{X}, \partial/\partial t \rangle_\varepsilon \partial/\partial t$ e, analogamente, tem-se que $N^{\mathbb{M}(\varepsilon)} = \overline{N} - \langle \overline{N}, \partial/\partial t \rangle_\varepsilon \partial/\partial t$. Como

$$\left\langle \overline{X}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle_\varepsilon = \langle \overline{X}, f_*T + \nu N \rangle_\varepsilon = \langle \overline{X}, f_*T \rangle_\varepsilon = I(X, T), \quad (1.5)$$

sobre a hipersuperfície M , e $\langle N, \partial/\partial t \rangle_\varepsilon = \nu$ (pela definição de ν em (1.3)), segue que

$$\begin{aligned} X^{\mathbb{M}(\varepsilon)} &= \bar{X} - I(X, T) \frac{\partial}{\partial t}, \\ N^{\mathbb{M}(\varepsilon)} &= \bar{N} - \nu \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

(a) Segue de (1.6) que

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{M}(\varepsilon)}(X^{\mathbb{M}(\varepsilon)}, Z^{\mathbb{M}(\varepsilon)}) &= \langle \bar{X} - I(X, T) \partial/\partial t, \bar{Z} - I(Z, T) \partial/\partial t \rangle_\varepsilon \\ &= \langle \bar{X}, \bar{Z} \rangle_\varepsilon - I(Z, T) \langle \bar{X}, \partial/\partial t \rangle_\varepsilon - I(X, T) \langle \partial/\partial t, \bar{Z} \rangle_\varepsilon + I(X, T)I(Z, T), \end{aligned}$$

e por (1.5) tem-se que

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{M}(\varepsilon)}(X^{\mathbb{M}(\varepsilon)}, Z^{\mathbb{M}(\varepsilon)}) &= \langle \bar{X}, \bar{Z} \rangle_\varepsilon - I(X, T)I(Z, T) \\ &= I(X, Z) - I(X, T)I(Z, T). \end{aligned}$$

Analogamente, tem-se que

$$g_{\mathbb{M}(\varepsilon)}(Y^{\mathbb{M}(\varepsilon)}, W^{\mathbb{M}(\varepsilon)}) = I(Y, W) - I(Y, T)I(W, T).$$

Logo

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{M}(\varepsilon)}(X^{\mathbb{M}(\varepsilon)}, Z^{\mathbb{M}(\varepsilon)})g_{\mathbb{M}(\varepsilon)}(Y^{\mathbb{M}(\varepsilon)}, W^{\mathbb{M}(\varepsilon)}) &= \\ &= I(X, Z)I(Y, W) - I(X, Z)I(Y, T)I(W, T) + \\ &\quad - I(Y, W)I(X, T)I(Z, T) + I(X, T)I(Z, T)I(Y, T)I(W, T), \end{aligned} \quad (1.7)$$

e, analogamente, segue que

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{M}(\varepsilon)}(Y^{\mathbb{M}(\varepsilon)}, Z^{\mathbb{M}(\varepsilon)})g_{\mathbb{M}(\varepsilon)}(X^{\mathbb{M}(\varepsilon)}, W^{\mathbb{M}(\varepsilon)}) &= \\ &= I(Y, Z)I(X, W) - I(Y, Z)I(X, T)I(W, T) + \\ &\quad - I(X, W)I(Y, T)I(Z, T) + I(Y, T)I(Z, T)I(X, T)I(W, T). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Ainda, como $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varepsilon = g_{\mathbb{M}(\varepsilon)} \oplus g_{\mathbb{R}}$, tem-se que

$$\begin{aligned} \langle R^\varepsilon(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Z}, \bar{W} \rangle_\varepsilon &= g_{\mathbb{M}(\varepsilon)}(R^{\mathbb{M}(\varepsilon)}(X^{\mathbb{M}(\varepsilon)}, Y^{\mathbb{M}(\varepsilon)})Z^{\mathbb{M}(\varepsilon)}, W^{\mathbb{M}(\varepsilon)}) + g_{\mathbb{R}}(R^{\mathbb{R}}(X^{\mathbb{R}}, Y^{\mathbb{R}})Z^{\mathbb{R}}, W^{\mathbb{R}}) \\ &= g_{\mathbb{M}(\varepsilon)}(R^{\mathbb{M}(\varepsilon)}(X^{\mathbb{M}(\varepsilon)}, Y^{\mathbb{M}(\varepsilon)})Z^{\mathbb{M}(\varepsilon)}, W^{\mathbb{M}(\varepsilon)}). \end{aligned}$$

Mas, como $\mathbb{M}^n(\varepsilon)$ tem curvatura seccional constante igual a ε , segue da Proposição 1.1.2 que

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{M}(\varepsilon)}(R^{\mathbb{M}(\varepsilon)}(X^{\mathbb{M}(\varepsilon)}, Y^{\mathbb{M}(\varepsilon)})Z^{\mathbb{M}(\varepsilon)}, W^{\mathbb{M}(\varepsilon)}) &= \varepsilon \left(g_{\mathbb{M}(\varepsilon)}(X^{\mathbb{M}(\varepsilon)}, Z^{\mathbb{M}(\varepsilon)})g_{\mathbb{M}(\varepsilon)}(Y^{\mathbb{M}(\varepsilon)}, W^{\mathbb{M}(\varepsilon)}) + \right. \\ &\quad \left. - g_{\mathbb{M}(\varepsilon)}(Y^{\mathbb{M}(\varepsilon)}, Z^{\mathbb{M}(\varepsilon)})g_{\mathbb{M}(\varepsilon)}(X^{\mathbb{M}(\varepsilon)}, W^{\mathbb{M}(\varepsilon)}) \right), \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \langle R^\varepsilon(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Z}, \bar{W} \rangle_\varepsilon &= \varepsilon \left(g_{\mathbb{M}(\varepsilon)}(X^{\mathbb{M}(\varepsilon)}, Z^{\mathbb{M}(\varepsilon)})g_{\mathbb{M}(\varepsilon)}(Y^{\mathbb{M}(\varepsilon)}, W^{\mathbb{M}(\varepsilon)}) + \right. \\ &\quad \left. - g_{\mathbb{M}(\varepsilon)}(Y^{\mathbb{M}(\varepsilon)}, Z^{\mathbb{M}(\varepsilon)})g_{\mathbb{M}(\varepsilon)}(X^{\mathbb{M}(\varepsilon)}, W^{\mathbb{M}(\varepsilon)}) \right). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Assim, por (1.7), (1.8) e (1.9), segue que

$$\begin{aligned} \langle R^\varepsilon(\overline{X}, \overline{Y})\overline{Z}, \overline{W} \rangle_\varepsilon &= \varepsilon (I(X, Z)I(Y, W) - I(Y, Z)I(X, W) + \\ &\quad - I(Y, T)I(W, T)I(X, Z) - I(X, T)I(Z, T)I(Y, W) + \\ &\quad + I(X, T)I(W, T)I(Y, Z) + I(Y, T)I(Z, T)I(X, W)). \end{aligned}$$

(b) Segue, de (1.6), que

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{M}(\varepsilon)}(X^{\mathbb{M}(\varepsilon)}, N^{\mathbb{M}(\varepsilon)}) &= \langle \overline{X} - I(X, T)\partial/\partial t, \overline{N} - \nu\partial/\partial t \rangle_\varepsilon \\ &= \langle \overline{X}, \overline{N} \rangle_\varepsilon - \nu \langle \overline{X}, \partial/\partial t \rangle_\varepsilon - I(X, T) \langle \partial/\partial t, \overline{N} \rangle_\varepsilon + \nu I(X, T) \\ &= -\nu \langle \overline{X}, \partial/\partial t \rangle_\varepsilon, \end{aligned}$$

sobre a hipersuperfície M e, por (1.5), tem-se que

$$g_{\mathbb{M}(\varepsilon)}(X^{\mathbb{M}(\varepsilon)}, N^{\mathbb{M}(\varepsilon)}) = -\nu I(X, T).$$

Logo

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{M}(\varepsilon)}(X^{\mathbb{M}(\varepsilon)}, N^{\mathbb{M}(\varepsilon)})g_{\mathbb{M}(\varepsilon)}(Y^{\mathbb{M}(\varepsilon)}, Z^{\mathbb{M}(\varepsilon)}) &= \\ -\nu I(X, T)I(Y, Z) + \nu I(X, T)I(Y, T)I(Z, T), \end{aligned} \quad (1.10)$$

e analogamente

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{M}(\varepsilon)}(Y^{\mathbb{M}(\varepsilon)}, N^{\mathbb{M}(\varepsilon)})g_{\mathbb{M}(\varepsilon)}(X^{\mathbb{M}(\varepsilon)}, Z^{\mathbb{M}(\varepsilon)}) &= \\ -\nu I(Y, T)I(X, Z) + \nu I(Y, T)I(X, T)I(Z, T). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Mas, analogamente ao item (a), tem-se que

$$\begin{aligned} \langle R^\varepsilon(\overline{X}, \overline{Y})\overline{N}, \overline{Z} \rangle_\varepsilon &= \varepsilon \left(g_{\mathbb{M}(\varepsilon)}(X^{\mathbb{M}(\varepsilon)}, N^{\mathbb{M}(\varepsilon)})g_{\mathbb{M}(\varepsilon)}(Y^{\mathbb{M}(\varepsilon)}, Z^{\mathbb{M}(\varepsilon)}) \right. \\ &\quad \left. - g_{\mathbb{M}(\varepsilon)}(Y^{\mathbb{M}(\varepsilon)}, N^{\mathbb{M}(\varepsilon)})g_{\mathbb{M}(\varepsilon)}(X^{\mathbb{M}(\varepsilon)}, Z^{\mathbb{M}(\varepsilon)}) \right). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Assim, por (1.10), (1.11) e (1.12), segue que

$$\langle R^\varepsilon(\overline{X}, \overline{Y})\overline{N}, \overline{W} \rangle_\varepsilon = \varepsilon \nu (I(X, Z)I(Y, T) - I(Y, Z)I(X, T)) \quad \blacksquare$$

A função altura $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ de uma imersão $f : M \rightarrow \mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ será definida por

$$h := \left\langle i \circ f, di \circ \frac{\partial}{\partial t} \circ f \right\rangle_\varepsilon.$$

A seguir, serão apresentada algumas propriedades da função altura e sua relação com o campo T .

Proposição 1.1.4. Seja M^n uma variedade e $f : M \rightarrow \mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ uma imersão, com h a função altura de f . Então

- (a) $h = \pi_{\mathbb{R}} \circ f$,
- (b) $\nabla h = T$,
- (c) $1 = \|\nabla h\|^2 + \nu^2$.

Demonstração.

(a) Como $f = (\pi_\varepsilon \circ f, \pi_\mathbb{R} \circ f)$, segue que $i \circ f = (i_\varepsilon \circ \pi_\varepsilon \circ f, \pi_\mathbb{R} \circ f)$, e portanto

$$h = \left\langle i \circ f, di \circ \frac{\partial}{\partial t} \circ f \right\rangle_\varepsilon = \left\langle (i_\varepsilon \circ \pi_\varepsilon \circ f, \pi_\mathbb{R} \circ f), di \circ \frac{\partial}{\partial t} \circ f \right\rangle_\varepsilon = \pi_\mathbb{R} \circ f.$$

(b) Segue do item (a), e do fato de que f é uma imersão isométrica, que

$$\begin{aligned} I|_p(\nabla h(p), v) &= dh|_p(v) \\ &= (d(\pi_\mathbb{R})_{f(p)} \circ df_p)(v) \\ &= \left\langle ((d(\pi_\varepsilon)_{f(p)} \circ df_p)(v), (d(\pi_\mathbb{R})_{f(p)} \circ df_p)(v)), \frac{\partial}{\partial t}(f(p)) \right\rangle_\varepsilon \\ &= \left\langle df_p(v), \frac{\partial}{\partial t}(f(p)) \right\rangle_\varepsilon \\ &= \langle df_p(v), f_*T(f(p)) + \nu N(f(p)) \rangle_\varepsilon \\ &= \langle df_p(v), df_p(T(p)) \rangle_\varepsilon \\ &= I|_p(v, T(p)), \end{aligned}$$

para todo $p \in M$ e $v \in T_pM$, e portanto $\nabla h = T$.

(c) Segue imediatamente do item (c) da Proposição 1.1.1 e do item (b), desta proposição, que $1 = \|\nabla h\|^2 + \nu^2$ ■

A seção terminará com um corolário que caracteriza topologicamente as superfícies orientáveis completas, com curvatura Gaussiana constante positiva, em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$. A fim de demonstrar tal proposição, serão enunciados corolários dos teoremas de Gauss-Bonnet e de Bonnet-Myers, cujas demonstrações podem ser encontradas em [Lee97] e [Car12], respectivamente.

Proposição 1.1.5 (Corolário do Teorema de Gauss-Bonnet). Seja M uma 2-variedade Riemanniana compacta,

- (a) se $K > 0$, então M é homeomorfa à esfera ou ao plano projetivo, e $\pi_1(M)$ é finito,
- (b) se $K \leq 0$, então $g \geq 1$ e $\pi_1(M)$ é infinito,

onde K é a curvatura Gaussiana de M e g é o gênero de M .

Proposição 1.1.6 (Corolário do Teorema de Bonnet-Myers). Seja M uma variedade Riemanniana completa, com curvatura seccional $K \geq c > 0$, onde $c \in \mathbb{R}$. Então M é compacta.

Corolário 1.1.7. Seja S uma superfície de $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, orientável e completa com curvatura Gaussiana K constante e positiva. Então S é homeomorfa à esfera, ou seja, S é uma esfera topológica.

Demonstração. Como $K > 0$ é constante, segue, da Proposição 1.1.6, que S é compacta.

Logo, pela Proposição 1.1.5, tem-se que S é homeomorfa à esfera ou ao plano projetivo. Como S é orientável e o plano projetivo não é, segue que S não é homeomorfa ao plano projetivo, e portanto S é homeomorfa à esfera ■

1.2 Equações de Gauss - Codazzi

As equações fundamentais de uma imersão isométrica serão dadas pelo teorema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [Car12], por exemplo. Algumas notações preliminares serão necessárias. Dada uma imersão isométrica $f : M \rightarrow \bar{M}$, serão denotadas por ∇ , $\nabla^\perp$ e $\bar{\nabla}$ a conexão Riemanniana de M , a conexão normal de M e a conexão Riemanniana de $\bar{M}$, respectivamente; e por R , $R^\perp$ e $\bar{R}$ os respectivos tensores de curvatura. Ainda, define-se o tensor $B \in \Gamma(TM^* \otimes TM^* \otimes TM^\perp)$ por

$$B(X, Y)|_p = \bar{\nabla}_X \bar{Y}|_{f(p)} - df(\nabla_X Y)|_p,$$

para todo $X, Y \in \Gamma(TM)$ e, por um abuso de notação, será denotado por ∇ a conexão induzida no fibrado $TM^* \otimes TM^* \otimes TM^\perp$ a partir de ∇ e $\nabla^\perp$ ou, mais especificamente, para B tem-se

$$\begin{aligned} \nabla_X B(Y, Z, \eta) &= X(\bar{g}(B(Y, Z), \eta)) - \bar{g}(B(\nabla_X Y, Z), \eta) + \\ &\quad - \bar{g}(B(Y, \nabla_X Z), \eta) - \bar{g}(B(Y, Z), \nabla_X^\perp \eta). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Seguem as equações fundamentais das imersões isométricas.

Teorema 1.2.1. Sejam (M, g) e $(\bar{M}, \bar{g})$ variedades pseudo-Riemannianas e $f : M \rightarrow \bar{M}$ uma imersão isométrica. Então

(a) (Equação de Gauss)

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{R}(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Z}, \bar{W})|_{f(p)} &= g(R(X, Y)Z, W)|_p + \\ &\quad + \bar{g}|_{f(p)}(B(X, W)|_p, B(Y, Z)|_p) - \bar{g}|_{f(p)}(B(Y, W)|_p, B(X, Z)|_p), \end{aligned}$$

(b) (Equação de Ricci)

$$\bar{g}(\bar{R}(\bar{X}, \bar{Y})\bar{\eta}, \bar{\zeta})|_{f(p)} = \bar{g}|_{f(p)}(R^\perp(X, Y)\eta|_p, \zeta|_p) - g([S_\eta, S_\zeta](X), Y)|_p,$$

(c) (Equação de Codazzi)

$$\bar{g}(\bar{R}(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Z}, \bar{\eta})|_{f(p)} = \bar{g}|_{f(p)}((\nabla_Y B)(X, Z)|_p, \eta|_p) - \bar{g}|_{f(p)}((\nabla_X B)(Y, Z)|_p, \eta|_p),$$

para todo $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ e $\eta, \zeta \in \Gamma(TM^\perp)$, onde $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}, \bar{W}, \bar{\eta}, \bar{\zeta} \in \Gamma(T\bar{M})$ são extensões locais de X, Y, Z, W, η, ζ , respectivamente, e $[S_\eta, S_\zeta](X) := S_\eta(S_\zeta(X)) - S_\zeta(S_\eta(X))$.

Observe que, no caso de hipersuperfícies (codimensão 1), a equação de Ricci não constitui em informação adicional acerca da hipersuperfície. De fato, como a codimensão de M é 1, tem-se que $\zeta = \lambda\eta$, e portanto $S_\zeta = \lambda S_\eta$. Logo $[S_\eta, S_\zeta] = 0$, e segue que

$$g([S_\eta, S_\zeta](X), Y) = 0.$$

Ainda

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{R}(\bar{X}, \bar{Y})\bar{\eta}, \bar{\zeta}) &= \lambda \bar{g}(\bar{R}(\bar{X}, \bar{Y})\bar{\eta}, \bar{\eta}) = 0, \\ \bar{g}(R^\perp(X, Y)\eta, \zeta) &= \lambda \bar{g}(R^\perp(X, Y)\eta, \eta) = 0. \end{aligned}$$

Assim, as equações fundamentais das imersões isométricas de codimensão 1 se reduzem as equações de Gauss e Codazzi, que serão apresentadas no seguinte corolário.

Corolário 1.2.2. Sejam (M^n, g) e $(\bar{M}^{n+1}, \bar{g})$ variedades pseudo-Riemannianas, $f : M \rightarrow \bar{M}$ uma imersão isométrica, e $N \in \Gamma(TM^\perp)$, tal que $\bar{g}(N, N) = \varepsilon$, com $|\varepsilon| = 1$. Então

(a) (Equação de Gauss)

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{R}(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Z}, \bar{W})|_{f(p)} &= g(R(X, Y)Z, W)|_p + \\ &+ \varepsilon(g(S(X), W)|_p g(S(Y), Z)|_p - g(S(Y), W)|_p g(S(X), Z)|_p), \end{aligned}$$

(b) (Equação de Codazzi)

$$\bar{g}(\bar{R}(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Z}, \bar{N})|_{f(p)} = g(\nabla_Y S(X), Z)|_p - g(\nabla_X S(Y), Z)|_p + g(S([X, Y]), Z)|_p,$$

para todo $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$, onde $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}, \bar{W} \in \Gamma(T\bar{M})$ são extensões locais de X, Y, Z, W , respectivamente.

Demonstração. Como a codimensão de M é 1, tem-se que existe $\lambda \in C^\infty(M)$, tal que $B(X, Y) = \lambda N$, e portanto

$$g(S(X), Y) = \bar{g}(B(X, Y), N) = \varepsilon\lambda,$$

e logo

$$B(X, Y) = \varepsilon g(S(X), Y)N, \quad (1.14)$$

para todo $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Ainda, como $\bar{g}(N, N) = \varepsilon$, tem-se que

$$\bar{X}(\bar{g}(\bar{N}, \bar{N})) = 0,$$

e pela compatibilidade da conexão $\bar{\nabla}$, segue que

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{N}, \bar{N}) = 0.$$

Mas,

$$\nabla_X^\perp N = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{N} - df(S(X)),$$

e portanto

$$\bar{g}(\nabla_X^\perp N, N) = 0,$$

ou seja,

$$\nabla_X^\perp N = 0, \quad (1.15)$$

para todo $X \in \Gamma(TM)$.

(a) Segue, de (1.14), que

$$\begin{aligned} \bar{g}(B(X, W), B(Y, Z)) &= \bar{g}(\varepsilon g(S(X), W)N, \varepsilon g(S(Y), Z)N), \\ \bar{g}(B(Y, W), B(X, Z)) &= \bar{g}(\varepsilon g(S(Y), W)N, \varepsilon g(S(X), Z)N). \end{aligned}$$

Assim, a equação de Gauss é dada por

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{R}(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Z}, \bar{W})|_{f(p)} &= g(R(X, Y)Z, W)|_p + \\ &+ \varepsilon(g(S(X), W)|_p g(S(Y), Z)|_p - g(S(Y), W)|_p g(S(X), Z)|_p). \end{aligned}$$

(b) Segue, de (1.13), que

$$\begin{aligned} (\nabla_Y B)(X, Z, N) &= Y(\bar{g}(B(X, Z), N)) - \bar{g}(B(\nabla_Y X, Z), N) + \\ &- \bar{g}(B(X, \nabla_Y Z), N) - \bar{g}(B(X, Z), \nabla_Y^\perp N), \end{aligned}$$

e, por (1.14) e (1.15), segue que

$$(\nabla_Y B)(X, Z, N) = Y(g(S(X), Z)) - g(S(\nabla_Y X), Z) - g(S(X), \nabla_Y Z),$$

e, pela compatibilidade da conexão ∇ , tem-se que

$$\begin{aligned} (\nabla_Y B)(X, Z, N) &= \\ &= g(\nabla_Y S(X), Z) + g(S(X), \nabla_Y Z) - g(S(\nabla_Y X), Z) - g(S(X), \nabla_Y Z) \\ &= g(\nabla_Y S(X), Z) - g(S(\nabla_Y X), Z). \end{aligned}$$

Analogamente

$$(\nabla_X B)(Y, Z, N) = g(\nabla_X S(Y), Z) - g(S(\nabla_X Y), Z).$$

Logo, pela linearidade do operador de forma e pela simetria da conexão ∇ , tem-se que

$$\begin{aligned} (\nabla_Y B)(X, Z, N) - (\nabla_X B)(Y, Z, N) &= \\ &= g(\nabla_Y S(X), Z) - g(\nabla_X S(Y), Z) + g(S([X, Y]), Z). \end{aligned}$$

Assim, a equação de Codazzi é dada por

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{R}(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Z}, \bar{N})|_{f(p)} &= \\ &= g(\nabla_Y S(X), Z)|_p - g(\nabla_X S(Y), Z)|_p + g(S([X, Y]), Z)|_p \quad \blacksquare \end{aligned}$$

A seguir serão apresentadas as equações fundamentais para as hipersuperfícies em $\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$.

Proposição 1.2.3. Sejam M^n uma variedade e $f : M^n \longrightarrow \mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica. Então

(a) (Equação de Gauss)

$$\begin{aligned} I(R(X, Y)Z, W) &= (I(S(Y), W) I(S(X), Z) - I(S(X), W) I(S(Y), Z)) + \\ &+ \varepsilon (I(X, Z)I(Y, W) - I(Y, Z)I(X, W) + \\ &- I(Y, T)I(W, T)I(X, Z) - I(X, T)I(Z, T)I(Y, W) + \\ &+ I(X, T)I(W, T)I(Y, Z) + I(Y, T)I(Z, T)I(X, W)), \end{aligned}$$

(b) (Equação de Codazzi)

$$\begin{aligned} \varepsilon \nu (I(X, Z)I(Y, T) - I(Y, Z)I(X, T)) &= \\ &= I(\nabla_X S(Y), Z) - I(\nabla_Y S(X), Z) - I(S([X, Y]), Z), \end{aligned}$$

para todo $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$.

Demonstração. Sejam $N \in \Gamma(TM^\perp)$, tal que $\langle N, N \rangle_\varepsilon = 1$ e $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}, \bar{W}, \bar{N} \in \Gamma(T(\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}))$ extensões locais de X, Y, Z, W, N , respectivamente.

(a) Segue, do item (a) da Proposição 1.2.2, que

$$\begin{aligned} \langle R^\varepsilon(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Z}, \bar{W} \rangle_\varepsilon |_{f(p)} &= I(R(X, Y)Z, W)|_p + \\ &+ I(S(X), W)|_p I(S(Y), Z)|_p - I(S(Y), W)|_p I(S(X), Z)|_p. \end{aligned}$$

Assim, pelo item (a) da Proposição 1.1.3, tem-se que

$$\begin{aligned} I(R(X, Y)Z, W) &= (I(S(Y), W) I(S(X), Z) - I(S(X), W) I(S(Y), Z)) + \\ &\quad + \varepsilon (I(X, Z)I(Y, W) - I(Y, Z)I(X, W) + \\ &\quad - I(Y, T)I(W, T)I(X, Z) - I(X, T)I(Z, T)I(Y, W) + \\ &\quad + I(X, T)I(W, T)I(Y, Z) + I(Y, T)I(Z, T)I(X, W)). \end{aligned}$$

(b) Segue, do item (b) da Proposição 1.2.2, que

$$\langle R^\varepsilon(\overline{X}, \overline{Y})\overline{Z}, \overline{N} \rangle_\varepsilon|_{f(p)} = I(\nabla_Y S(X), Z)|_p - I(\nabla_X S(Y), Z)|_p + I(S([X, Y]), Z)|_p.$$

Logo, pelo item (b) da Proposição 1.1.3, tem-se que

$$\varepsilon \nu(I(X, Z)I(Y, T) - I(Y, Z)I(X, T)) = \langle R^\varepsilon(\overline{X}, \overline{Y})\overline{N}, \overline{W} \rangle_\varepsilon = -\langle R^\varepsilon(\overline{X}, \overline{Y})\overline{W}, \overline{N} \rangle_\varepsilon$$

Assim,

$$\begin{aligned} \varepsilon \nu(I(X, Z)I(Y, T) - I(Y, Z)I(X, T)) &= \\ &= I(\nabla_X S(Y), Z) - I(\nabla_Y S(X), Z) - I(S([X, Y]), Z) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corolário 1.2.4. Sejam M uma hipersuperfície de $\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, e P um subespaço de dimensão 2 do espaço tangente de M . Então a equação de Gauss de M é dada por

$$\text{Sec}_M(P) = \det S|_P + \varepsilon(1 - \|T|_P\|^2),$$

onde $S|_P$ é a restrição do operador de forma a P e $T|_P$ é a projeção ortogonal de T em P .

Demonstração. Sejam $X, Y \in \Gamma(TM)$ campos ortonormais que geram P . Então, pela equação de Gauss do Corolário 1.2.3, tem-se que

$$\begin{aligned} \text{Sec}_M(P) &= I(R(X, Y)X, Y) \\ &= I(S(Y), Y)I(S(X), X) - I(S(X), Y)^2 + \varepsilon(1 - I(Y, T)^2 - I(X, T)^2) \\ &= \det S|_P + \varepsilon(1 - \|T|_P\|^2) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Capítulo 2

Superfícies de revolução em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$

O objetivo central deste capítulo é caracterizar as superfícies de revolução completas com curvatura Gaussiana constante em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, a menos de isometrias do ambiente, o que em linhas gerais será feito por intermédio da análise do perfil (parametrização explícita) da curva geratriz da superfície de revolução. Visando uma abrangência maior, o início do capítulo tratará de hipersuperfícies de revolução em $\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, de modo que os resultados obtidos serão válidos, particularmente, para o caso em que $n = 2$, ou seja, para superfícies de $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$.

A seguir será definido o conceito de hipersuperfície de revolução em $\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$. Essa definição foi retirada de [Dil08], onde um estudo mais aprofundado de tais hipersuperfícies é feito, e é fortemente baseado no conceito de superfícies de revolução no $\mathbb{R}^3$, amplamente conhecido, e no conceito de superfícies de revolução nos espaços forma, apresentado em [Car83].

Ao longo do capítulo será indicado por P^k um subespaço de $\mathbb{R}^{n+2}(\varepsilon)$, de dimensão k , e por $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}, \frac{\partial}{\partial t} \right\}$ o referencial canônico de $\mathbb{R}^{n+2}(\varepsilon)$. Quando $\varepsilon = -1$, destacam-se três tipos de subespaços, a saber, P^k será dito Riemanniano se $\langle \cdot, \cdot \rangle_{P^k}$ é uma métrica Riemanniana; Lorentziano se $\langle \cdot, \cdot \rangle_{P^k}$ é uma métrica Lorentziana e degenerado se $\langle \cdot, \cdot \rangle_{P^k}$ é uma forma bilinear degenerada.

Ainda, definem-se os seguintes subgrupos dos grupos de isometrias de $\mathbb{R}^{n+2}(\varepsilon)$ e de $\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$,

$$\text{Iso}(\mathbb{R}^{n+2}(\varepsilon))_{P^k}^+ = \{T \in \text{Iso}(\mathbb{R}^{n+2}(\varepsilon)) : \forall p \in P^k \quad T(p) = p \text{ e } \det T > 0\},$$

$$\mathcal{I}_{P^k} = \{F \in \text{Iso}(\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}) : \exists T \in \text{Iso}(\mathbb{R}^{n+2}(\varepsilon))_{P^k}^+ : T(\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}) \subset \mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R} \text{ e } T \circ i = i \circ F\},$$

respectivamente. Observe que quando $\varepsilon = 1$, tem-se que $\text{Iso}(\mathbb{R}^{n+2}(\varepsilon))_{P^k}^+ \approx \text{SO}(n+2-k)$ e quando $\varepsilon = -1$, tem-se que $\text{Iso}(\mathbb{R}^{n+2}(\varepsilon))_{P^k}^+ \approx \text{SO}(n+2-(k-1), 1)$, se P^k é Riemanniano, e $\text{Iso}(\mathbb{R}^{n+2}(\varepsilon))_{P^k}^+ \approx \text{SO}(n+2-k)$, se P^k é Lorentziano.

As órbitas da ação de $\mathcal{I}_{P^k}$ sobre $\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ serão denotadas por $\mathcal{I}_{P^k}(p, t)$, com $(p, t) \in \mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$. Observe que se $\partial/\partial t \in P^k$, então

$$\mathcal{I}_{P^k}(p, t) = \text{Iso}(\mathbb{R}^{n+2}(\varepsilon))_{P^k}^+(p, t),$$

e, portanto, quando $\varepsilon = 1$, tem-se que $\mathcal{I}_{P^k}(p, t) \approx \mathbb{S}^{n+1-k}(r)$ e quando $\varepsilon = -1$, tem-se que $\mathcal{I}_{P^k}(p, t) \approx \mathbb{H}^{n+1-k}(r)$, se P^k é Riemanniano, e $\mathcal{I}_{P^k}(p, t) \approx \mathbb{S}^{n+1-k}(r)$, se P^k é Lorentziano, com $r \in \mathbb{R}$ dependente de p .

Definição 2.1. Sejam $P^2, P^3 \subset \mathbb{R}^{n+2}(\varepsilon)$ subespaços tais que $P^2 \subset P^3$, $\partial/\partial t \in P^2$ e $C \subset \mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ uma curva suave, tal que

- $C \subset P^3$,
- $C \cap P^2 = \partial C \cap P^2$ e $\#(C \cap P^2) \leq 2$,

- $T_q C$ é ortogonal a P^2 , para todo $q \in C \cap P^2$.

Então $\bigcup_{q \in C} \mathcal{I}_{P^k}(q)$ é dita uma hipersuperfície de revolução em $\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, gerada pela curva C , com relação aos subespaços P^2 e P^3 . A curva C será dita a curva geratriz da hipersuperfície.

Ao longo deste capítulo será assumido que

$$P^3 = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial t} \right], \quad (2.1)$$

e

$$P^2 = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial t} \right], \quad (2.2)$$

e portanto, somente será abordado o caso em que P^2 é Lorentziano. A referência [Dil08] apresenta os demais casos, nos quais P^k pode ser Riemanniano ou degenerado.

Uma parametrização de uma hipersuperfície de revolução M , gerada por uma curva C , com relação aos subespaços P^2 e P^3 , pode ser obtida a partir de uma parametrização de sua curva geratriz C . De fato, seja $\alpha : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ uma parametrização de C , com

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, 0, \dots, 0, \alpha_{n+2}).$$

Assim, dado $q = (q_1, \dots, q_{n+2}) \in M$, segue, da definição, que existe $s_0 \in J$, tal que $q \in \mathcal{I}_{P^2}(\alpha(s_0))$, logo $q_1 = \alpha_1(s_0)$, $q_{n+2} = \alpha_{n+2}(s_0)$ e $(q_2, \dots, q_{n+1}) = T(\alpha_2(s_0), 0, \dots, 0)$, com $T \in \mathbb{SO}(n)$. Como $\|T(\alpha_2(s_0), 0, \dots, 0)\|^2 = (\alpha_2(s_0))^2$, tem-se que $(q_2, \dots, q_{n+1}) \in \mathbb{S}^{n-1}(\alpha_2(s_0))$. Seja $\psi : \Omega \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ uma parametrização de $\mathbb{S}^{n-1}$, tal que $(\alpha_2(s_0)\psi_1, \dots, \alpha_2(s_0)\psi_n)$ é uma parametrização de $\mathbb{S}^{n-1}(\alpha_2(s_0))$, em torno de $(q_2, \dots, q_{n+1})$, ou seja, tal que

$$(q_2, \dots, q_{n+1}) = \alpha_2(s_0) (\psi_1(x_1, \dots, x_{n-1}), \dots, \psi_n(x_1, \dots, x_{n-1})).$$

Assim

$$q = (\alpha_1(s_0), \alpha_2(s_0)\psi_1(x_1, \dots, x_{n-1}), \dots, \alpha_2(s_0)\psi_n(x_1, \dots, x_{n-1}), \alpha_{n+2}(s_0)),$$

logo $\varphi_{\alpha, \psi} : J \times \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ definida por

$$\varphi_{\alpha, \psi}(s, t_1, \dots, t_{n-1}) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s)\psi_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \alpha_2(s)\psi_n(t_1, \dots, t_{n-1}), \alpha_{n+2}(s)),$$

é uma parametrização de M , e será dita associada a α e ψ . Analogamente, a carta obtida pela inversa da parametrização associada a α e ψ será dita associada a α e ψ .

O lema a seguir apresentará uma condição necessária e suficiente para que uma curva $C \subset \mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ satisfaça o item ?? da definição de hipersuperfícies de revolução.

Lema 2.2. Seja $C \subset \mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ uma curva, $\alpha : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ uma parametrização de C , com $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, 0, \dots, 0, \alpha_{n+2})$ e $q = \alpha(s) \in C \cap P^2$. Então $T_q C$ é ortogonal a P^2 se, e somente se $\alpha'_{n+2}(s) = 0$.

Demonstração. Como $C \subset \mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, segue que

$$\varepsilon(\alpha_1)^2 + (\alpha_2)^2 = \varepsilon, \quad (2.3)$$

e portanto

$$-\varepsilon\alpha_1\alpha'_1 = \alpha_2\alpha'_2. \quad (2.4)$$

Mas $\alpha(s) \in P^2$, e portanto $\alpha_2(s) = 0$. Logo, por (2.3), tem-se que $\alpha_1(s) \neq 0$ e, por (2.4), segue que $\alpha'_1(s) = 0$.

Como $P^2 = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial t} \right]$, segue que $T_q C$ é ortogonal a P^2 se, e somente se $\alpha'_1(s) = 0$ e $\alpha'_{n+2}(s) = 0$, ou seja, se, e somente se $\alpha'_{n+2}(s) = 0$ ■

As proposições a seguir apresentarão algumas propriedades métricas das hipersuperfícies de revolução, considerando as mesmas com a métrica induzida pelo ambiente $\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$.

Proposição 2.3. Seja M uma hipersuperfície de revolução em $\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, gerada por uma curva C , com relação aos subespaços P^2 e P^3 , e $\alpha : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ uma parametrização de C , com $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, 0, \dots, 0, \alpha_{n+2})$. Então a métrica induzida por $\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ em M (primeira forma fundamental) é dada por

$$I = g_C + (\alpha_2)^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}},$$

onde g_C é a métrica induzida em C de $\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$.

Demonstração. Seja (ψ, Ω) uma parametrização ortogonal de $\mathbb{S}^{n-1}$ e φ a parametrização de M associada a α e ψ , ou seja,

$$\varphi(s, t_1, \dots, t_{n-1}) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s)\psi_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \alpha_2(s)\psi_n(t_1, \dots, t_{n-1}), \alpha_{n+2}(s)),$$

para todo $s \in J$ e $(t_1, \dots, t_{n-1}) \in \Omega$.

Então

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t_1, \dots, t_{n-1}) = (\alpha'_1(s), \alpha'_2(s)\psi_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \alpha'_2(s)\psi_n(t_1, \dots, t_{n-1}), \alpha'_{n+2}(s)),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_i}(s, t_1, \dots, t_{n-1}) = \left(0, \alpha_2(s) \frac{\partial \psi_1}{\partial t_i}(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \alpha_2(s) \frac{\partial \psi_n}{\partial t_i}(t_1, \dots, t_{n-1}), 0 \right),$$

e portanto, tem-se que

$$I \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) = \varepsilon (\alpha'_1)^2 + (\alpha'_2)^2 \sum_{k=1}^n \psi_k^2 + (\alpha'_{n+2})^2 = \|\alpha'\|_\varepsilon^2,$$

$$I \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right) = \alpha_2 \alpha'_2 \sum_{k=1}^n \psi_k \frac{\partial \psi_k}{\partial t_i} = \alpha_2 \alpha'_2 \left\langle \psi, \frac{\partial \psi}{\partial t_i} \right\rangle = 0,$$

$$I \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_j} \right) = (\alpha_2)^2 \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi_k}{\partial t_i} \frac{\partial \psi_k}{\partial t_j} = (\alpha_2)^2 \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t_i}, \frac{\partial \psi}{\partial t_j} \right\rangle,$$

para todo $i, j = 1, \dots, n-1$.

Assim

$$I = \|\alpha'\|_\varepsilon^2 ds^2 + (\alpha_2)^2 \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t_i}, \frac{\partial \psi}{\partial t_i} \right\rangle dt_i^2 = g_C + (\alpha_2)^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}} \quad \blacksquare \quad (2.5)$$

Proposição 2.4. Seja M uma hipersuperfície de revolução em $\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, gerada por curva C , com relação aos subespaços P^2 e P^3 e $\alpha : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ uma parametrização de C por comprimento de arco, com $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, 0, \dots, 0, \alpha_{n+2})$. Então a curvatura seccional de um plano P ($\text{Sec}(P)$) que contém α' é

$$\text{Sec}(P) = -\frac{\alpha''_2}{\alpha_2}.$$

Demonstração. Seja ψ uma parametrização ortogonal da esfera $\mathbb{S}^n$ e φ a parametrização de M associada a α e ψ , ou seja,

$$\varphi(s, t_1, \dots, t_{n-1}) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s)\psi_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \alpha_2(s)\psi_n(t_1, \dots, t_{n-1}), \alpha_{n+2}(s)).$$

Então, os coeficientes da métrica I , como visto na Proposição 2.3, são dados localmente por

$$\begin{aligned} I_{00} &= I\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}, \frac{\partial\varphi}{\partial s}\right) = 1, & I_{0i} &= I\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}, \frac{\partial\varphi}{\partial t_i}\right) = 0, \\ I_{i0} &= I\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_i}, \frac{\partial\varphi}{\partial s}\right) = 0, & I_{ij} &= I\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_i}, \frac{\partial\varphi}{\partial t_j}\right) = (\alpha_2)^2 \delta_{ij} \left\| \frac{\partial\psi}{\partial t_i} \right\|^2, \end{aligned}$$

para todo $i, j = 1, 2, \dots, n-1$, e como a matriz $(I_{ij})_{i,j=0,\dots,n-1}$ da métrica I é diagonal, segue que os elementos da matriz inversa $(I^{ij})_{i,j=0,\dots,n-1}$ são dados por

$$I^{00} = 1, \quad I^{0i} = I^{i0} = 0, \quad I^{ij} = (\alpha_2)^{-2} \delta_{ij} \left\| \frac{\partial\psi}{\partial t_i} \right\|^{-2}.$$

Segue que os símbolos de Christoffel da carta φ ,

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial t_i} I_{jk} + \frac{\partial}{\partial t_j} I_{ki} - \frac{\partial}{\partial t_k} I_{ij} \right) I^{km},$$

com $t_0 = s$, são dados por

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= 0, & \Gamma_{i0}^0 &= \Gamma_{0i}^0 = 0, & \Gamma_{ij}^0 &= -\alpha_2' \alpha_2 \delta_{ij} \left\| \frac{\partial\psi}{\partial t_i} \right\|^2, \\ \Gamma_{00}^m &= 0, & \Gamma_{i0}^m &= \Gamma_{0i}^m = \frac{\alpha_2'}{\alpha_2} \delta_{mi}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Logo

$$R_{0i0}^i = \left(\frac{\alpha_2'}{\alpha_2} \right)^2 - \left(\frac{\alpha_2'}{\alpha_2} \right)' = -\frac{\alpha_2''}{\alpha_2},$$

onde R é o tensor de curvatura de M , dado localmente por

$$R_{ijk}^s = \sum_{l=0}^{n-1} \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s - \sum_{l=0}^{n-1} \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s + \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \Gamma_{ik}^s - \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \Gamma_{jk}^s,$$

e portanto

$$I\left(R\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}, \frac{\partial\varphi}{\partial t_i}\right) \frac{\partial\varphi}{\partial s}, \frac{\partial\varphi}{\partial t_i}\right) = R_{0i0i} = -\frac{\alpha_2''}{\alpha_2} (\alpha_2)^2 \left\| \frac{\partial\psi}{\partial t_i} \right\|^2 = -\alpha_2'' \alpha_2 \left\| \frac{\partial\psi}{\partial t_i} \right\|^2,$$

onde

$$R_{ijk}^s = \sum_{l=0}^{n-1} R_{ijk}^l I_{ls}.$$

Assim

$$\text{Sec}(P) = \frac{I\left(R\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}, \frac{\partial\varphi}{\partial t_i}\right) \frac{\partial\varphi}{\partial s}, \frac{\partial\varphi}{\partial t_i}\right)}{I_{00}I_{ii} - (I_{0i})^2} = -\frac{\alpha_2'' \alpha_2 \left\| \frac{\partial\psi}{\partial t_i} \right\|^2}{(\alpha_2)^2 \left\| \frac{\partial\psi}{\partial t_i} \right\|^2} = -\frac{\alpha_2''}{\alpha_2} \quad \blacksquare$$

Corolário 2.5. Sejam S uma superfície de revolução em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, gerada por uma curva C , com

relação aos subespaços P^2 e P^3 e com curvatura Gaussiana constante K , e $\alpha : J \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ uma parametrização de C por comprimento de arco, com $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, 0, \alpha_4)$. Então

$$\begin{aligned} \alpha_2(s) &= A \cos(\sqrt{K}s) + B \sin(\sqrt{K}s) & \text{se } K > 0, \\ \alpha_2(s) &= As + B & \text{se } K = 0, \\ \alpha_2(s) &= A \cosh(\sqrt{-K}s) + B \sinh(\sqrt{-K}s) & \text{se } K < 0, \end{aligned}$$

para todo $s \in J$, com $A, B \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Segue, da Proposição 2.4, que

$$K = -\frac{\alpha_2''}{\alpha_2},$$

e portanto $\alpha_2'' + K\alpha_2 = 0$, e como K é constante, segue o afirmado ■

Proposição 2.6. Seja M uma hipersuperfície de revolução em $\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, gerada por uma curva C , com relação aos subespaços P^2 e P^3 . Então C é uma geodésica de M .

Demonstração. Seja $\alpha : J \subset \mathbb{R} \longrightarrow C$ uma parametrização de C por comprimento de arco, com $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, 0, \dots, 0, \alpha_{n+2})$, ψ uma parametrização de $\mathbb{S}^{n-1}$, com $\psi(x_1, \dots, x_{n-1}) = (1, 0, \dots, 0)$ e φ a carta associada a α e ψ , ou seja,

$$\varphi(s, t_1, \dots, t_{n-1}) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s)\psi_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \alpha_2(s)\psi_n(t_1, \dots, t_{n-1}), \alpha_{n+2}(s)),$$

com

$$\varphi(s, x_1, \dots, x_{n-1}) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), 0, \dots, 0, \alpha_{n+2}(s)) = \alpha(s).$$

Então, $(\varphi^{-1} \circ \alpha)(s) = (s, x_1, \dots, x_{n-1})$, ou seja,

$$(\varphi^{-1} \circ \alpha)_0(s) = s, \quad (\varphi^{-1} \circ \alpha)_i(u) = x_i,$$

para todo $i = 1, \dots, n-1$.

Logo, por (2.6), tem-se que

$$\frac{d^2(\varphi^{-1} \circ \alpha)_m}{ds^2} + \sum_{i,j=0}^{n-1} \Gamma_{ij}^m \frac{d(\varphi^{-1} \circ \alpha)_i}{ds} \frac{d(\varphi^{-1} \circ \alpha)_j}{ds} = \Gamma_{00}^m = 0,$$

para todo $m = 0, \dots, n-1$, ou seja, α satisfaz a equação diferencial das geodésicas, e portanto é uma geodésica ■

As seguintes proposições (ver a próxima em [O'N83]) têm por objetivo, obter condições necessárias para que uma hipersuperfície de revolução, em $\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, seja completa. Como será visto, tal condição será imposta sobre a curva geratriz da hipersuperfície.

Proposição 2.7. Sejam B e F variedades Riemannianas completas e $f \in C^\infty(B)$, tal que $f > 0$. Então $B \times_f F$ é completa.

Proposição 2.8. Seja M uma hipersuperfície de revolução em $\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, gerada por uma curva C , com relação aos subespaços P^2 e P^3 , e $\alpha : J \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ uma parametrização de C por comprimento de arco, com $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, 0, \dots, \alpha_{n+2})$. Então M , com a métrica induzida de $\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, é isométrica a $C \times_{(\alpha_2)^2} \mathbb{S}^{n-1}$.

Demonstração. Segue da definição de hipersuperfície de revolução que

$$M = \bigcup_{p \in C} \mathcal{I}_{P^k}(p) = \bigcup_{p \in C} \text{Iso}(\mathbb{R}^{n+2}(\varepsilon))_{P^k}^+(p),$$

e como $\text{Iso}(\mathbb{R}^{n+2}(\varepsilon))_{P^2}^+ \approx \mathbb{SO}(n)$ segue que as órbitas de $\text{Iso}(\mathbb{R}^{n+2}(\varepsilon))_{P^2}^+$ são esferas, e portanto

$$M \approx \bigcup_{p \in C} \mathbb{S}^{n-1} = C \times \mathbb{S}^{n-1},$$

Logo, segue da Proposição 2.3, que M é isométrica a $C \times_{(\alpha_2)^2} \mathbb{S}^{n-1}$ ■

Corolário 2.9. Seja M uma hipersuperfície de revolução em $\mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, gerada por curva C completa, com relação aos subespaços P^2 e P^3 . Então M é completa.

Demonstração. Como C e $\mathbb{S}^{n-1}$ são completas, segue, da Proposição 2.7, que $C \times_{(\alpha_2)^2} \mathbb{S}^{n-1}$ é completa. Mas, pela Proposição 2.8, segue que M é isométrica a $C \times_{(\alpha_2)^2} \mathbb{S}^{n-1}$, e portanto M é completa ■

2.1 Superfícies de revolução em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$

O objetivo desta seção é classificar (exibindo o perfil da curva geratriz) as superfícies de revolução completas com curvatura Gaussiana constante, em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Ao longo desta seção será retomada a notação do início do capítulo, onde

$$P^3 = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial t} \right], \quad P^2 = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial t} \right].$$

Algumas notações e convenções adicionais ainda serão estabelecidas.

Uma superfície de revolução, em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, gerada por uma curva C , com relação aos subespaços P^2 e P^3 , será dita uma superfície de revolução em torno de $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$. Essa denominação tem origem no fato de que $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}) \cap P^2 = (\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}) \cup (\{(-1, 0, 0)\} \times \mathbb{R})$. A menos de isometrias do ambiente, será assumido que $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}) \cap P^2 = (\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R})$.

A curvatura Gaussiana de uma superfície de revolução, em torno de $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$, com relação a métrica induzida de $\mathbb{S}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, será denotada por $K(I)$.

Ainda, dada uma parametrização α de C , com $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, 0, \alpha_4)$, a parametrização φ associada a α e ψ , onde ψ é a parametrização de $\mathbb{S}^1$ dada por $\psi(v) = (\cos v, \text{senv} v)$, será dita, apenas, associada a α . Assim

$$\varphi(u, v) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u) \cos v, \alpha_2(u) \text{senv} v, \alpha_4(u)).$$

O seguinte lema exhibirá, de forma generalizada, o perfil da curva geratriz.

Lema 2.1.1. Seja $C \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ uma curva, tal que $C \subset (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}) \cap P^3$ e $\alpha : J \subset \mathbb{R} \rightarrow C$ uma parametrização de C . Então existe $k : J \subset \mathbb{R} \rightarrow [0, \pi/2]$, tal que

$$\alpha(u) = (\text{sen}(k(u)), \cos(k(u)), 0, h(u)).$$

Demonstração. Seja

$$\alpha(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u), h(u)).$$

Então como $\alpha(J) \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, segue que $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$, e portanto $-1 \leq \alpha_2 \leq 1$; e como α intersecta P^2 apenas nos pontos inicial e final, pode-se supor que $\alpha_2 \geq 0$, e portanto $0 \leq \alpha_2 \leq 1$.

Ainda, como $\text{Im } \alpha \subset (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}) \cap P^3$, segue que

$$\alpha_3 \equiv 0. \quad (2.7)$$

Como $\cos : [0, \pi/2] \rightarrow [0, 1]$ é um difeomorfismo C^∞ , é possível definir $k := \arccos(\alpha_2)$. Então k é C^∞ e

$$\alpha_2 = \cos(k). \quad (2.8)$$

Logo $\alpha_1^2 = 1 - \cos^2(k) = \sin^2(k)$, e portanto

$$\alpha_1 = \sin(k). \quad (2.9)$$

Assim, por (2.7), (2.8) e (2.9), tem-se que

$$\alpha(u) = (\sin(k(u)), \cos(k(u)), 0, h(u)).$$

Ainda, se α é parametrizada pelo comprimento de arco, então

$$(k')^2 \cos^2(k) + (k')^2 \sin^2(k) + (h')^2 = \|\alpha'\|^2 = 1,$$

e portanto

$$(k')^2 + (h')^2 = 1 \quad \blacksquare \quad (2.10)$$

As proposições a seguir classificarão as superfícies de revolução completas com curvatura Gaussiana constante, de acordo com o sinal da curvatura Gaussiana (análise caso a caso).

Proposição 2.1.2. Seja $K \in \mathbb{R}_+^*$. Então existe uma única superfície de revolução S , em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, em torno de $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$, completa e com curvatura Gaussiana constante K . Ainda, tem-se que $K \geq 1$ e $C \cap (\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}) \neq \emptyset$, onde C é a curva geratriz de S .

Demonstração. Será provada, primeiramente, a existência.

Defina $k : [0, \pi/\sqrt{K}] \rightarrow [0, \pi/2]$ e $h : [0, \pi/\sqrt{K}] \rightarrow \mathbb{R}$, por

$$\begin{aligned} k(u) &= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}u)\right), \\ h(u) &= -\sqrt{\frac{K-1}{K}} \ln\left(\frac{\cos(\sqrt{K}u) + \sqrt{K - \sin^2(\sqrt{K}u)}}{1 + \sqrt{K}}\right), \end{aligned}$$

defina $\alpha : [0, \pi/\sqrt{K}] \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ por

$$\alpha(u) = (\sin(k(u)), \cos(k(u)), 0, h(u)),$$

e $C = \text{Im } \alpha$.

Então, pelo Lema 2.1.1, tem-se que $C \subset (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}) \cap P^3$. Ainda, $\alpha(u) \in P^2$ se, e somente se $\cos(k(u)) = 0$, ou seja, se, e somente se

$$\frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}u) = 0.$$

Logo $C \cap P^2 = \{\alpha(0), \alpha(\pi/\sqrt{K})\}$. Como $h'(0) = 0 = h'(\pi/\sqrt{K})$, segue, do Lema 2.2, que $T_p C$ é ortogonal a P^2 , para todo $p \in C \cap P^2$.

Seja S a superfície de revolução gerada por C . Como C é compacta (pois α é contínua), segue que C é completa e, pelo Corolário 2.9, tem-se que S é completa. Ainda, segue, da Proposição 2.4, que

$$K(I) = -\frac{\alpha_2''}{\alpha_2} = -\frac{(\cos(k))''}{(\cos(k))} = -\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K} \text{Id})\right)''}{\frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K} \text{Id})} = K.$$

Assim, S é uma superfície de revolução completa, com curvatura Gaussiana constante K e $C \cap (\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}) \neq \emptyset$.

A seguir será provada a unicidade da S .

Seja $\bar{S}$ uma superfície de revolução em torno de $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$, gerada por uma curva $\bar{C}$, completa e com curvatura Gaussiana constante $K \in \mathbb{R}_+^*$; e $\bar{\alpha} : \bar{J} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ uma parametrização de $\bar{C}$, dada por

$$\bar{\alpha}(u) = (\sin(\bar{k}(u)), \cos(\bar{k}(u)), 0, \bar{h}(u)),$$

onde $\bar{k} : \bar{J} \subset \mathbb{R} \rightarrow [0, \pi/2]$.

Assim, do Corolário 2.5, segue que

$$\cos(\bar{k}(u)) = A \cos(\sqrt{K}u) + B \sin(\sqrt{K}u).$$

Como $K > 0$ e S é completa e orientável, segue, do Corolário 1.1.7, que S é uma esfera topológica, e portanto

$$C \cap (\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}) \neq \emptyset,$$

e $\bar{J} = [u_i, u_f]$, com $\bar{\alpha}(u_i) = (1, 0, 0, \bar{h}(u_i))$, $\bar{\alpha}(u_f) = (1, 0, 0, \bar{h}(u_f))$ e $\cos(\bar{k}(u)) \neq 0$, para todo $u \in]u_i, u_f[$.

Assim, $\cos(\bar{k}(u_i)) = 0$ e, pela equação anterior, tem-se que

$$A \cos(\sqrt{K}u_i) + B \sin(\sqrt{K}u_i) = 0,$$

e portanto

$$\begin{aligned} \cos(\bar{k}(u + u_i)) &= \\ &= A \cos(\sqrt{K}(u + u_i)) + B \sin(\sqrt{K}(u + u_i)) \\ &= A \cos(\sqrt{K}u) \cos(\sqrt{K}u_i) - A \sin(\sqrt{K}u) \sin(\sqrt{K}u_i) + \\ &\quad + B \sin(\sqrt{K}u) \cos(\sqrt{K}u_i) + B \cos(\sqrt{K}u) \sin(\sqrt{K}u_i) \\ &= (A \cos(\sqrt{K}u_i) + B \sin(\sqrt{K}u_i)) \cos(\sqrt{K}u) + \\ &\quad + (-A \sin(\sqrt{K}u_i) + B \cos(\sqrt{K}u_i)) \sin(\sqrt{K}u) \\ &= (-A \sin(\sqrt{K}u_i) + B \cos(\sqrt{K}u_i)) \sin(\sqrt{K}u). \end{aligned}$$

Tomando-se

$$D = (-A \sin(\sqrt{K}u_i) + B \cos(\sqrt{K}u_i)),$$

segue que

$$\cos(\bar{k}(u + u_i)) = D \sin(\sqrt{K}u),$$

e definindo $\tilde{k} : [0, u_f - u_i] \subset \mathbb{R} \rightarrow [0, \pi/2]$ por $\tilde{k}(u) = \bar{k}(u + u_i)$, obtém-se que

$$\cos(\tilde{k}(u)) = D \sin(\sqrt{K}u).$$

Como $D \neq 0$ (pois α intersecta o eixo $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$ apenas em seu ponto inicial ou final), segue que $\sin(\sqrt{K}(u_f - u_i)) = 0$, e portanto existe $r \in \mathbb{Z}_+^*$, tal que $u_f - u_i = r\pi/\sqrt{K}$. Suponha que $r \neq 1$, então $a = \pi/\sqrt{K} \in]u_i, u_f[$, com $\cos(\tilde{k}(a)) = D \sin(\sqrt{K}(\pi/\sqrt{K})) = 0$, e logo $\cos(\bar{k}(u_i + a)) = 0$ (absurdo!). Logo $r = 1$ e portanto $u_f - u_i = \pi/\sqrt{K}$.

Segue que

$$\tilde{k}(u) = \arccos\left(D \sin(\sqrt{K}u)\right), \quad (2.11)$$

e portanto

$$\tilde{k}'(u) = \frac{D\sqrt{K} \cos(\sqrt{K}u)}{\sqrt{1 - D^2 \sin^2(\sqrt{K}u)}},$$

ou seja,

$$\tilde{k}'(u)^2 = \frac{D^2 K \cos^2(\sqrt{K}u)}{1 - D^2 \sin^2(\sqrt{K}u)},$$

e, por (2.10), segue que

$$\tilde{h}'(u)^2 = 1 - \frac{D^2 K \cos^2(\sqrt{K}u)}{1 - D^2 \sin^2(\sqrt{K}u)}.$$

Como, pelo Lema 2.2, tem-se que $\tilde{h}'(0) = \bar{h}'(u_i) = 0$, segue que $D^2 K = 1$, e portanto

$$\tilde{h}'(u)^2 = 1 - \frac{\cos^2(\sqrt{K}u)}{1 - \frac{1}{K^2} \sin^2(\sqrt{K}u)},$$

e por integração tem-se que

$$\tilde{h}(u) = -\sqrt{\frac{K-1}{K}} \log \left(\frac{\cos(\sqrt{K}u) + \sqrt{K - \sin^2(\sqrt{K}u)}}{1 + \sqrt{K}} \right). \quad (2.12)$$

Assim, de (2.11) e (2.12), tem-se que

$$\begin{aligned} \tilde{k}(u) &= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}u)\right), \\ \tilde{h}(u) &= -\sqrt{\frac{K-1}{K}} \log \left(\frac{\cos(\sqrt{K}u) + \sqrt{K - \sin^2(\sqrt{K}u)}}{1 + \sqrt{K}} \right), \end{aligned}$$

e portanto $\text{Im } k = \text{Im } \tilde{k} = \text{Im } \bar{k}$ e $\text{Im } h = \text{Im } \tilde{h} = \text{Im } \bar{h}$, logo $\alpha = \bar{\alpha}$, ou seja, $C = \bar{C}$ e segue que $S = \bar{S}$.

Ainda, como $\sin(\sqrt{K}u) \geq 0$, para todo $u \in [0, \pi/\sqrt{K}]$, e $D > 0$, segue que $D \sin(\sqrt{K}u) \geq 0$, e como $\cos(\tilde{k}(u)) \leq 1$, segue que $1 \geq D \sin(\sqrt{K}u) \geq 0$, ou seja, $1 \geq D^2 \sin^2(\sqrt{K}u) \geq 0$, e portanto $K \geq D^2 K \sin^2(\sqrt{K}u) = \sin^2(\sqrt{K}u)$, para todo $u \in [0, \pi/\sqrt{K}]$.

Logo $K \geq \sin^2(\sqrt{K}\pi/2\sqrt{K}) = 1$ ■

Proposição 2.1.3. Os cilindros são as únicas superfícies completas de revolução, em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, em torno de $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$, com curvatura Gaussiana nula.

Demonstração. Será provado, primeiramente, que os cilindros satisfazem as hipóteses da

proposição.

Seja C a reta parametrizada por $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha(u) = (A, B, 0, u),$$

com $A, B \in \mathbb{R}$, tais que $C \subset (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}) \cap P^3$ e $C \cap P^2 = \emptyset$.

Seja S o cilindro gerado por C . Então, como C é completa, segue, pelo Corolário 2.9, que S é completa. Ainda, segue, da Proposição 2.4, que

$$K(I) = -\frac{\alpha_2''}{\alpha_2} = 0.$$

Assim, S é uma superfície de revolução completa e com curvatura Gaussiana nula.

A seguir será provado que os cilindros são as únicas superfícies que satisfazem as hipóteses da proposição.

Seja $\bar{S}$ uma superfície de revolução em torno de $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$, gerada por uma curva $\bar{C}$, completa e com curvatura Gaussiana nula; e $\bar{\alpha} : \bar{J} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ uma parametrização de $\bar{C}$, dada por

$$\bar{\alpha}(u) = (\sin(\bar{k}(u)), \cos(\bar{k}(u)), 0, \bar{h}(u)), \quad (2.13)$$

onde $\bar{k} : \bar{J} \subset \mathbb{R} \longrightarrow [0, \pi/2]$.

Assim, do Corolário 2.5, segue que

$$\cos(\bar{k}(u)) = Au + B. \quad (2.14)$$

Suponha que $\text{Im } \bar{\alpha} \cap (\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}) \neq \emptyset$. Então existe $u_i \in \bar{J}$, tal que $\bar{\alpha}(u_i) = (1, 0, 0, \bar{h}(u_i))$ e, por (2.13) e (2.14), segue que

$$Au_i + B = \cos(\bar{k}(u_i)) = 0. \quad (2.15)$$

Suponha que existe $v \in \bar{J} - \{u_i\}$, tal que $\cos(\bar{k}(v)) = 0$. Então, por (2.13) e (2.14), segue que $Av + B = \cos(\bar{k}(v)) = 0$ e, por (2.15), tem-se que $A(v - u_i) = 0$, e portanto $A = 0$ e $B = 0$. Logo, por (2.14), $\cos(\bar{k}(u)) = 0$, para todo $u \in \bar{J}$, e portanto $\sin^2(\bar{k}(u)) = 1$. Mas $\sin(\bar{k}(u_i)) = 1$, e portanto existe $\varepsilon > 0$, tal que $\sin(\bar{k}(u)) = 1$, para todo $u \in]u_i - \varepsilon, u_i + \varepsilon[\subset \bar{J}$. Logo $\bar{\alpha}(]u_i - \varepsilon, u_i + \varepsilon[) \subset \{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$, o que contraria o fato de $\bar{\alpha}$ intersectar o eixo $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$ em no máximo 2 pontos.

Assim, não existe $v \in \bar{J} - \{u_i\}$, tal que $\cos(\bar{k}(v)) = 0$. Como, pela Proposição 2.6, $\bar{\alpha}$ é uma geodésica da superfície, que intersecta o eixo $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$ apenas em seu ponto inicial ou final, e a superfície é completa, pode-se tomar $\bar{J} = [u_i, +\infty[$ ou $\bar{J} =]-\infty, u_i]$.

Suponha que $\bar{J} = [u_i, +\infty[$. Logo, por (2.13) e (2.14), tem-se que

$$\cos(\bar{k}(u + u_i)) = A(u + u_i) + B = Au,$$

e definindo $\tilde{k} : [0, +\infty[\subset \mathbb{R} \longrightarrow [0, \pi/2]$, por $\tilde{k}(u) = \bar{k}(u + u_i)$, obtém-se que

$$\cos(\tilde{k}(u)) = Au.$$

Mas, $\cos(\tilde{k}(u)) \leq 1$, para todo $u \in [0, +\infty[$, logo $Au \leq 1$, para todo $u \in [0, +\infty[$ (absurdo!).

Assim, $\bar{J} =]-\infty, u_i]$. Logo, por (2.13) e (2.14), tem-se que

$$\cos(\bar{k}(u + u_i)) = A(u + u_i) + B = Au,$$

e definindo $\tilde{k} :]-\infty, 0] \subset \mathbb{R} \longrightarrow [0, \pi/2]$, por $\tilde{k}(u) = \bar{k}(u + u_i)$, obtém-se que

$$\cos(\tilde{k}(u)) = Au.$$

Mas, $\cos(\bar{k}(u)) \geq -1$, para todo $u \in]-\infty, 0]$, logo $Au \geq -1$, para todo $u \in [0, +\infty[$ (absurdo!).

Assim, $\text{Im } \bar{\alpha} \cap (\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}) = \emptyset$. Como $\bar{\alpha}$ é uma geodésica da superfície e a superfície é completa, pode-se tomar $\bar{J} = \mathbb{R}$ e não existe $v \in \bar{J}$, tal que $\bar{\alpha}(v) = (1, 0, 0, \bar{h}(v))$.

Logo, por (2.13) e (2.14), não existe $v \in \mathbb{R}$, tal que $Av + B = \cos(\bar{k}(v)) = 0$.

Suponha que $A \neq 0$. Então $A(-BA^{-1}) + B = 0$, ou seja, existe $v = (-BA^{-1})$, tal que $Av + B = 0$ (absurdo!).

Assim, $A = 0$ e segue que

$$\cos(\bar{k}(u)) = B,$$

ou seja, $\bar{k}'(u) = 0$, para todo $u \in \mathbb{R}$. Segue, de (2.10), que $\bar{h}'(u)^2 = 1$, e portanto

$$\bar{h}(u) = \pm u + D, \quad (2.16)$$

para todo $u \in \mathbb{R}$.

Assim, de (2.13), (2.14) e (2.16), segue que $\bar{\alpha}(u) = (\sqrt{1 - B^2}, B, 0, \pm u + D)$, e portanto $\bar{S}$ é um cilindro em torno de $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$ ■

Proposição 2.1.4. Seja $K \in \mathbb{R}_+^*$. Então, não existe uma superfície de revolução S , em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, em torno de $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$, completa e com curvatura Gaussiana constante K .

Demonstração. Suponha que exista uma superfície de revolução S , em torno de $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$, completa e com curvatura Gaussiana constante $K \in \mathbb{R}_+^*$.

Seja C a curva geratriz de S e $\alpha : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ uma parametrização de C , dada por

$$\alpha(u) = (\sin(k(u)), \cos(k(u)), 0, h(u)), \quad (2.17)$$

onde $k : J \subset \mathbb{R} \rightarrow [0, \pi/2]$.

Assim, do Corolário 2.5, segue que

$$\cos(k(u)) = A \cosh(\sqrt{-K}u) + B \sinh(\sqrt{-K}u). \quad (2.18)$$

Suponha que $\text{Im } \alpha \cap (\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}) = \emptyset$. Como, pela Proposição 2.6, α é uma geodésica da superfície, e a superfície é completa, pode-se tomar $J = \mathbb{R}$. Mas

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} A \cosh(\sqrt{-K}u) + B \sinh(\sqrt{-K}u) = +\infty,$$

e portanto, existe $u_0 \in \mathbb{R}$, tal que

$$A \cosh(\sqrt{-K}u_0) + B \sinh(\sqrt{-K}u_0) > 1,$$

ou seja, $\cos(k(u_0)) > 1$ (absurdo!).

Assim, $\text{Im } \alpha \cap (\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}) \neq \emptyset$. Logo existe $u_i \in J$, tal que $\alpha(u_i) = (1, 0, 0, h(u_i))$ e, por (2.17), tem-se que $\cos(k(u_i)) = 0$ e, por (2.18), tem-se que

$$A \cosh(\sqrt{-K}u_i) + B \sinh(\sqrt{-K}u_i) = 0,$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\cos(k(u + u_i)) &= \\
&= A \cosh(\sqrt{-K}(u + u_i)) + B \sinh(\sqrt{-K}(u + u_i)) \\
&= A \cosh(\sqrt{-K}u) \cosh(\sqrt{-K}u_i) + A \sinh(\sqrt{-K}u) \sinh(\sqrt{-K}u_i) + \\
&\quad + B \sinh(\sqrt{-K}u) \cosh(\sqrt{-K}u_i) + B \cosh(\sqrt{-K}u) \sinh(\sqrt{-K}u_i) \\
&= (A \cosh(\sqrt{-K}u_i) + B \sinh(\sqrt{-K}u_i)) \cosh(\sqrt{-K}u) + \\
&\quad + (A \sinh(\sqrt{-K}u_i) + B \cosh(\sqrt{-K}u_i)) \sinh(\sqrt{-K}u) \\
&= (A \sinh(\sqrt{-K}u_i) + B \cosh(\sqrt{-K}u_i)) \sinh(\sqrt{-K}u).
\end{aligned}$$

Tomando-se

$$D = A \sinh(\sqrt{-K}u_i) + B \cosh(\sqrt{-K}u_i),$$

obtém-se que

$$\cos(k(u + u_i)) = D \sinh(\sqrt{-K}u). \quad (2.19)$$

Suponha que existe $v \in J - \{u_i\}$, tal que $\cos(k(v)) = 0$. Logo

$$D \sinh(\sqrt{-K}(v - u_i)) = 0,$$

e como $D \neq 0$ (pois α intersecta o eixo $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$, apenas, em seu ponto inicial ou final), e o seno hiperbólico é injetor, segue que $v = u_i$ (absurdo!).

Assim, não existe $v \in J - \{u_i\}$, tal que $\cos(k(v)) = 0$, e portanto α intersecta o eixo $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$ apenas no ponto u_i . Como α é uma geodésica que intersecta o eixo $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$ apenas em seu ponto inicial ou final, e a superfície é completa, pode-se tomar $J = [u_i, +\infty[$ ou $J =]-\infty, u_i]$.

Suponha que $J = [u_i, +\infty[$. Como o seno hiperbólico é bijetor em $\mathbb{R}_+$, existe $u_0 \in [u_i, +\infty[$, tal que $\sinh(\sqrt{-K}(u_0 - u_i)) = 2|D|^{-1}$, e por (2.19), $\cos(k(u_0)) = 2D/|D|$ (absurdo!).

Assim, $J =]-\infty, u_i]$. Como o seno hiperbólico é bijetor em $\mathbb{R}_-$, existe $u_0 \in]-\infty, u_i]$, tal que $\sinh(\sqrt{-K}(u_0 - u_i)) = -2|D|^{-1}$, e por (2.19), $\cos(k(u_0)) = -2D/|D|$ (absurdo!).

Assim, não existe uma superfície de revolução S , em torno de $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$, completa e com curvatura Gaussiana constante $K \in \mathbb{R}_*$ ■

Os resultados desta seção serão resumidos no seguinte teorema.

Teorema 2.1.5.

- (a) existe uma única superfície de revolução completa com curvatura Gaussiana constante positiva em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, a menos de isometrias de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$,
- (b) existe uma única superfície de revolução completa com curvatura Gaussiana nula em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, a menos de isometrias de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$,
- (c) não existe uma superfície de revolução completa com curvatura Gaussiana constante negativa em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

2.2 Superfícies de revolução em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

O objetivo desta seção é classificar (exibindo o perfil da curva geratriz) as superfícies de revolução completas com curvatura Gaussiana constante, em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Ao longo desta seção será retomada a notação do início do capítulo, onde

$$P^3 = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial t} \right], \quad P^2 = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial t} \right].$$

Algumas notações e convenções adicionais ainda serão estabelecidas.

Uma superfície de revolução, em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, gerada por uma curva C , com relação aos subespaços P^2 e P^3 , será dita uma superfície de revolução em torno de $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$. Essa denominação tem origem no fato de que $(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}) \cap P^2 = \{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$.

A curvatura Gaussiana de uma superfície de revolução, em torno de $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$, com relação a métrica induzida de $\mathbb{H}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, será denotada por $K(I)$.

Ainda, dada uma parametrização α de C , com $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, 0, \alpha_4)$, a parametrização φ associada a α e ψ , onde ψ é a parametrização de $\mathbb{S}^1$ dada por $\psi(v) = (\cos v, \sin v)$, será dita, apenas, associada a α . Assim

$$\varphi(u, v) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u) \cos v, \alpha_2(u) \sin v, \alpha_4(u)).$$

O seguinte lema exibirá, de forma generalizada, o perfil da curva geratriz.

Lema 2.2.1. Seja $C \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ uma curva, tal que $C \subset (\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}) \cap P^3$ e $\alpha : J \subset \mathbb{R} \rightarrow C$, uma parametrização de C . Então existe $k : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que

$$\alpha(u) = (\cosh(k(u)), \sinh(k(u)), 0, h(u)). \quad (2.20)$$

Demonstração. Seja

$$\alpha(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u), h(u)).$$

Então, como α intersecta P^2 apenas nos pontos inicial e final, pode-se supor que $\alpha_2 \geq 0$, e como $\alpha(J) \subset P^3$, segue que

$$\alpha_3 \equiv 0. \quad (2.21)$$

Uma vez que $\sinh : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ é um difeomorfismo C^∞ , é possível definir $k := \text{arc sinh}(\alpha_2)$. Então k é C^∞ , $k \geq 0$ e

$$\alpha_2 = \sinh(k). \quad (2.22)$$

Ainda, como $\alpha(J) \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, tem-se que $-\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = -1$ e $\alpha_1 > 0$ e portanto $\alpha_1^2 = \sinh^2(k) + 1 = \cosh^2(k)$, e segue que

$$\alpha_1 = \cosh(k). \quad (2.23)$$

Assim, de (2.21), (2.22) e (2.23), tem-se que

$$\alpha(u) = (\cosh(k(u)), \sinh(k(u)), 0, h(u)).$$

Ainda, se α é parametrizada pelo comprimento de arco, então

$$-(k')^2 \sinh^2(k) + (k')^2 \cosh^2(k) + (h')^2 = \|\alpha'\|^2 = 1,$$

e portanto

$$(k')^2 + (h')^2 = 1 \quad \blacksquare \quad (2.24)$$

As proposições a seguir classificarão as superfícies de revolução completas com curvatura Gaussiana constante, de acordo com o sinal da curvatura Gaussiana e com a intersecção, ou não, da curva geratriz com o eixo de revolução (análise caso a caso).

Proposição 2.2.2. Seja $K \in \mathbb{R}_+^*$. Então existe uma única superfície de revolução S , em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, em torno de $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$, com curvatura Gaussiana constante K . Ainda $C \cap (\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}) \neq \emptyset$, onde C é a curva geratriz de S .

Demonstração. Será provada, primeiramente, a existência.

Defina $k : [0, \pi/\sqrt{K}] \rightarrow \mathbb{R}_+$ e $h : [0, \pi/\sqrt{K}] \rightarrow \mathbb{R}$, por

$$k(u) = \operatorname{arc\,senh} \left(\frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{sen}(\sqrt{K}u) \right),$$

$$h(u) = -\sqrt{\frac{1+K}{K}} \arctan \left(\frac{\cos(\sqrt{K}u)}{\sqrt{K + \operatorname{sen}^2(\sqrt{K}u)}} \right),$$

defina $\alpha : [0, \pi/\sqrt{K}] \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ por

$$\alpha(u) = (\cosh(k(u)), \operatorname{senh}(k(u)), 0, h(u)),$$

e $C = \operatorname{Im} \alpha$.

Então, pelo Lema 2.2.1, tem-se que $C \subset (\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}) \cap P^3$. Ainda, $\alpha(u) \in P^2$ se, e somente se $\operatorname{senh}(k(u)) = 0$, ou seja, se, e somente se

$$\frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{sen}(\sqrt{K}u) = 0.$$

Logo $C \cap P^2 = \{\alpha(0), \alpha(\pi/\sqrt{K})\}$. Como $h'(0) = 0 = h'(\pi/\sqrt{K})$, segue, do Lema 2.2, que $T_p C$ é ortogonal a P^2 , para todo $p \in C \cap P^2$.

Seja S a superfície de revolução gerada por C . Como C é compacta (pois α é contínua), segue que C é completa e, pelo Corolário 2.9, tem-se que S é completa. Ainda, segue, da Proposição 2.4, que

$$K(I) = -\frac{(\alpha_2)''}{(\alpha_2)} = -\frac{(\operatorname{senh}(k))''}{(\operatorname{senh}(k))} = -\frac{\left(\frac{1}{K} \operatorname{sen}(\sqrt{K} \operatorname{Id})\right)''}{\frac{1}{K} \operatorname{sen}(\sqrt{K} \operatorname{Id})} = K.$$

Assim, S é uma superfície de revolução completa e com curvatura Gaussiana constante K e $C \cap (\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}) \neq \emptyset$.

A seguir será provada a unicidade da S .

Seja $\bar{S}$ uma superfície de revolução em torno de $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$, gerada por uma curva $\bar{C}$, completa e com curvatura Gaussiana constante K ; e $\bar{\alpha} : \bar{J} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ uma parametrização de $\bar{C}$, dada por

$$\bar{\alpha}(u) = (\cosh(\bar{k}(u)), \operatorname{senh}(\bar{k}(u)), 0, \bar{h}(u)),$$

onde $\bar{k} : \bar{J} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Assim, do Corolário 2.5, segue que

$$\operatorname{senh}(\bar{k}(u)) = A \cos(\sqrt{K}u) + B \operatorname{sen}(\sqrt{K}u).$$

Como $K > 0$ e S é completa e orientável, segue do Corolário 1.1.7, que S é uma esfera topológica, e portanto

$$C \cap (\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}) \neq \emptyset,$$

e $\bar{J} = [u_i, u_f]$, com $\bar{\alpha}(u_i) = (1, 0, 0, \bar{h}(u_i))$ e $\bar{\alpha}(u_f) = (1, 0, 0, \bar{h}(u_f))$.

Assim, $\sinh(\bar{k}(u_i)) = 0$, e pela equação anterior, tem-se que

$$A \cos(\sqrt{K}u_i) + B \sin(\sqrt{K}u_i) = 0,$$

e portanto

$$\begin{aligned} \sinh(\bar{k}(u + u_i)) &= \\ &= A \cos(\sqrt{K}(u + u_i)) + B \sin(\sqrt{K}(u + u_i)) \\ &= A \cos(\sqrt{K}u) \cos(\sqrt{K}u_i) - A \sin(\sqrt{K}u) \sin(\sqrt{K}u_i) + \\ &\quad + B \sin(\sqrt{K}u) \cos(\sqrt{K}u_i) + B \cos(\sqrt{K}u) \sin(\sqrt{K}u_i) \\ &= (A \cos(\sqrt{K}u_i) + B \sin(\sqrt{K}u_i)) \cos(\sqrt{K}u) + \\ &\quad + (-A \sin(\sqrt{K}u_i) + B \cos(\sqrt{K}u_i)) \sin(\sqrt{K}u) \\ &= (-A \sin(\sqrt{K}u_i) + B \cos(\sqrt{K}u_i)) \sin(\sqrt{K}u). \end{aligned}$$

Tomando-se

$$D = (-A \sin(\sqrt{K}u_i) + B \cos(\sqrt{K}u_i)),$$

segue que

$$\sinh(\bar{k}(u + u_i)) = D \sin(\sqrt{K}u),$$

e definindo $\tilde{k} : [0, u_f - u_i] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ por $\tilde{k}(u) = \bar{k}(u + u_i)$, obtém-se que

$$\sinh(\tilde{k}(u)) = D \sin(\sqrt{K}u).$$

Como $D \neq 0$ (pois α intersecta o eixo $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$ apenas em seu ponto inicial ou final), segue que $\sin(\sqrt{K}(u_f - u_i)) = 0$, e portanto existe $r \in \mathbb{Z}_+^*$, tal que $u_f - u_i = r\pi/\sqrt{K}$. Suponha que $r \neq 1$, então $a = \pi/\sqrt{K} \in]u_i, u_f[$, com $\cos(\tilde{k}(a)) = D \sin(\sqrt{K}(\pi/\sqrt{K})) = 0$, e logo $\cos(\bar{k}(u_i + a)) = 0$ (absurdo!). Logo, $r = 1$ e portanto $u_f - u_i = \pi/\sqrt{K}$.

Assim, como o seno hiperbólico é uma função bijetora, segue que

$$\tilde{k}(u) = \operatorname{arc} \sinh(D \sin(\sqrt{K}u)), \quad (2.25)$$

e portanto

$$\tilde{k}'(u) = \frac{D\sqrt{K} \cos(\sqrt{K}u)}{\sqrt{1 + D^2 \sin^2(\sqrt{K}u)}},$$

e, por (2.24), segue que

$$\tilde{h}'(u)^2 = 1 - \frac{D^2 K \cos^2(\sqrt{K}u)}{1 + D^2 \sin^2(\sqrt{K}u)}.$$

Como, pelo Lema 2.2, tem-se que $\tilde{h}'(0) = \tilde{h}'(u_i) = 0$, segue que $D^2 K = 1$, e portanto

$$\tilde{h}'(u)^2 = 1 - \frac{\cos^2(\sqrt{K}u)}{1 + \frac{1}{K^2} \sin^2(\sqrt{K}u)},$$

e, por integração, tem-se que

$$\tilde{h}(u) = -\sqrt{\frac{1+K}{K}} \arctan \left(\frac{\cos(\sqrt{K}u)}{\sqrt{K + \sin^2(\sqrt{K}u)}} \right). \quad (2.26)$$

Assim, de (2.25) e (2.26), tem-se que

$$\begin{aligned} \tilde{k}(u) &= \operatorname{arc\,senh} \left(\frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}u) \right), \\ \tilde{h}(u) &= -\sqrt{\frac{1+K}{K}} \arctan \left(\frac{\cos(\sqrt{K}u)}{\sqrt{K + \sin^2(\sqrt{K}u)}} \right), \end{aligned}$$

e portanto $\operatorname{Im} k = \operatorname{Im} \tilde{k} = \operatorname{Im} \bar{k}$ e $\operatorname{Im} h = \operatorname{Im} \tilde{h} = \operatorname{Im} \bar{h}$, logo $\alpha = \bar{\alpha}$, ou seja, $C = \bar{C}$ e segue que $S = \bar{S}$ ■

Proposição 2.2.3. Existe uma única superfície de revolução S em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, em torno de $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$, completa e com curvatura Gaussiana nula, tal que $C \cap (\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}) \neq \emptyset$, onde C é a curva geratriz de S .

Demonstração. Será provada, primeiramente, a existência.

Defina $k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ e $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, por

$$\begin{aligned} k(u) &= \operatorname{arc\,senh}(u), \\ h(u) &= -1 + \sqrt{1 + u^2}, \end{aligned}$$

defina $\alpha : [0, \pi/\sqrt{K}] \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ por

$$\alpha(u) = (\cosh(k(u)), \sinh(k(u)), 0, h(u)),$$

e $C = \operatorname{Im} \alpha$.

Então, pelo Lema 2.2.1, tem-se que $C \subset (\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}) \cap P^3$. Ainda, $\alpha(u) \in P^2$ se, e somente se $\sinh(k(u)) = 0$, ou seja, se, e somente se $u = 0$.

Logo $C \cap P^2 = \{\alpha(0)\}$. Como $h'(0) = 0$, segue, do Lema 2.2, que $T_q C$ é ortogonal a P^2 , para todo $q \in C \cap P^2$.

Seja S a superfície de revolução gerada por C . Como C é compacta (pois α é contínua), segue que C é completa e, pelo Corolário 2.9, tem-se que S é completa. Ainda, segue, da Proposição 2.4, que

$$K(I) = -\frac{\alpha_2''}{\alpha} = -\frac{(\sinh(k))''}{(\sinh(k))} = -\frac{\operatorname{Id}''}{\operatorname{Id}} = 0.$$

Assim, S é uma superfície de revolução completa, com curvatura Gaussiana nula e $C \cap (\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}) \neq \emptyset$.

A seguir será provada a unicidade da S .

Seja $\bar{S}$ uma superfície de revolução em torno de $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$, gerada pela curva $\bar{C}$, completa e com curvatura Gaussiana nula e $\bar{C} \cap (\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}) \neq \emptyset$; e $\bar{\alpha} : \bar{J} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ uma parametrização de $\bar{C}$, dada por

$$\bar{\alpha}(u) = (\cosh(\bar{k}(u)), \sinh(\bar{k}(u)), 0, \bar{h}(u)), \quad (2.27)$$

onde $\bar{k} : \bar{J} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$.

Assim, do Corolário 2.5, segue que

$$\sinh(\bar{k}(u)) = Au + B. \quad (2.28)$$

Como $\text{Im } \bar{\alpha} \cap (\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}) \neq \emptyset$, existe $u_i \in \bar{J}$, tal que $\bar{\alpha}(u_i) = (1, 0, 0, \bar{h}(u_i))$.

Assim, pela equação anterior, tem-se que

$$Au_i + B = \sinh(\bar{k}(u_i)) = 0. \quad (2.29)$$

Suponha que existe $v \in \bar{J} - \{u_i\}$, tal que $\sinh(\bar{k}(v)) = 0$. Então, por (2.27) e (2.28), segue que $Av + B = \sinh(\bar{k}(v)) = 0$, e por (2.29), tem-se que $A(v - u_i) = 0$, e portanto $A = 0$ e $B = 0$. Logo, por (2.28), tem-se $\sinh(\bar{k}(u)) = 0$, para todo $u \in \bar{J}$, e portanto $\cosh(\bar{k}(u)) = 1$. Logo $\text{Im } \bar{\alpha} \subset (\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R})$, o que contraria o fato de $\bar{\alpha}$ intersectar o eixo $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$ em no máximo 2 pontos.

Assim, não existe $v \in \bar{J} - \{u_i\}$, tal que $\sinh(\bar{k}(v)) = 0$. Como, pela Proposição 2.6, $\bar{\alpha}$ é uma geodésica da superfície, que intersecta o eixo $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$ apenas em seu ponto inicial ou final; e a superfície é completa, pode-se tomar $\bar{J} = [u_i, +\infty[$ ou $\bar{J} =]-\infty, u_i]$.

Seja $\bar{J} = [u_i, +\infty[$ (resp. $\bar{J} =]-\infty, u_i]$). Então segue, por (2.27) e (2.28), que

$$\sinh(\bar{k}(\pm u + u_i)) = A(\pm u + u_i) + B = \pm Au + Au_i + B = \pm Au,$$

e definindo $\tilde{k} : \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, por $\tilde{k}(u) = \bar{k}(u + u_i)$ (resp. $\tilde{k} : \mathbb{R}_- \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, por $\tilde{k}(u) = \bar{k}(-u + u_i)$), obtém-se que

$$\sinh(\tilde{k}(u)) = \pm Au.$$

Assim, como o seno hiperbólico é uma função bijetora, segue que

$$\tilde{k}(u) = \text{arc sinh}(\pm Au), \quad (2.30)$$

e portanto

$$\tilde{k}'(u) = \pm \frac{A}{\sqrt{1 + (Au)^2}},$$

e, por (2.24), segue que

$$\tilde{h}'(u)^2 = 1 - \frac{A^2}{1 + A^2 u^2}.$$

Como, pelo Lema 2.2, tem-se $\tilde{h}'(0) = \bar{h}'(u_i) = 0$, segue que $A^2 = 1$. Como $\sinh(\tilde{k}(u)) = \bar{\alpha}_2(\pm u + u_i) \geq 0$, e $u \in \mathbb{R}_+$ (resp. $u \in \mathbb{R}_-$), tem-se que $A = 1$ (resp. $A = -1$), e segue que

$$\tilde{h}'(u)^2 = \frac{u^2}{1 + u^2},$$

e, por integração, segue que

$$\tilde{h}(u) = -1 + \sqrt{1 + u^2}. \quad (2.31)$$

Assim, de (2.30) e (2.31), tem-se que

$$\begin{aligned} \tilde{k}(u) &= \text{arc sinh}(u), \\ \tilde{h}(u) &= -1 + \sqrt{1 + u^2}, \end{aligned}$$

e portanto $\text{Im } k = \text{Im } \tilde{k} = \text{Im } \bar{k}$ e $\text{Im } h = \text{Im } \tilde{h} = \text{Im } \bar{h}$, logo $\alpha = \bar{\alpha}$, ou seja, $C = \bar{C}$ e segue que $S = \bar{S}$ ■

Proposição 2.2.4. Os cilindros são as únicas superfícies de revolução, em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, em torno de

$\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$, completas e com curvatura Gaussiana nula, tais que $C \cap (\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}) = \emptyset$, onde C é a curva geratriz do cilindro.

Demonstração. Será provado, primeiramente, que os cilindros satisfazem as hipóteses da proposição.

Seja C a reta parametrizada por $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha(u) = (A, B, 0, u),$$

com $A, B \in \mathbb{R}$, tal que $C \subset (\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}) \cap P^3$ e $C \cap P^2 = \emptyset$.

Seja S o cilindro gerado por C . Então, como C é completa, segue, pelo Corolário 2.9, que S é completa. Ainda, segue, da Proposição 2.4, que

$$K(I) = -\frac{\alpha_2''}{\alpha_2} = 0.$$

Assim, S é uma superfície de revolução completa e com curvatura Gaussiana nula.

Ainda, $C \cap (\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}) = \emptyset$, pois $C \subset (\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}) \cap P^3$ e $C \cap P^2 = \emptyset$.

A seguir será provado que os cilindros são as únicas superfícies que satisfazem as hipóteses da proposição.

Seja $\bar{S}$ uma superfície de revolução em torno de $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$, gerada por uma curva $\bar{C}$, completa e com curvatura Gaussiana nula e $\bar{C} \cap (\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}) \neq \emptyset$; e $\bar{\alpha} : \bar{J} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ uma parametrização de $\bar{C}$, dada por

$$\bar{\alpha}(u) = (\cosh(\bar{k}(u)), \sinh(\bar{k}(u)), 0, \bar{h}(u)),$$

onde $\bar{k} : \bar{J} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$.

Assim, do Corolário 2.5, segue que

$$\sinh(\bar{k}(u)) = Au + B.$$

Como, pela Proposição 2.6, $\bar{\alpha}$ é uma geodésica da superfície, a superfície é completa e $\text{Im } \bar{\alpha} \cap (\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}) = \emptyset$, pode-se tomar $\bar{J} = \mathbb{R}$ e não existe $v \in \bar{J}$, tal que $\bar{\alpha}(v) = (1, 0, 0, h(v))$.

Logo não existe $v \in \mathbb{R}$, tal que $Av + B = \sinh(\bar{k}(v)) = 0$.

Suponha que $A \neq 0$. Então $A(-BA^{-1}) + B = 0$, ou seja, existe $v = (-BA^{-1})$, tal que $Av + B = 0$ (absurdo!).

Assim, $A = 0$ e segue que

$$\sinh(\bar{k}(u)) = B, \tag{2.32}$$

e portanto $\bar{k}'(u) = 0$, para todo $u \in \mathbb{R}$. Segue, de (2.24), que $\bar{h}'(u)^2 = 1$, e portanto

$$\bar{h}(u) = \pm u + D, \tag{2.33}$$

para todo $u \in \mathbb{R}$.

Assim, de (2.20), (2.32) e (2.33), segue que $\bar{\alpha}(u) = (\sqrt{1+B^2}, B, 0, \pm u + D)$, e portanto $\bar{S}$ é um cilindro, em torno de $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$ ■

Proposição 2.2.5. Seja $K \in \mathbb{R}^*$. Então existe uma única superfície de revolução S em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, em torno de $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$, completa e com curvatura Gaussiana constante K , tal que $C \cap (\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}) \neq \emptyset$, onde C é a curva geratriz de S . Ainda $K \geq -1$.

Demonstração. Será provada, primeiramente, a existência.

Defina $k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ e $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, por

$$k(u) = \operatorname{arc\,senh} \left(\frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{senh} (\sqrt{-K}u) \right),$$

$$h(u) = \sqrt{-\frac{1+K}{K}} \ln \left(\frac{\cosh (\sqrt{-K}u) + \sqrt{-K + \operatorname{senh}^2 (\sqrt{-K}u)}}{1 + \sqrt{-K}} \right),$$

defina $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ por

$$\alpha(u) = (\cosh(k(u)), \operatorname{senh}(k(u)), 0, h(u)),$$

e $C = \operatorname{Im} \alpha$.

Então, pelo Lema 2.2.1, tem-se que $C \subset (\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}) \cap P^3$. Ainda, $\alpha(u) \in P^2$ se, e somente se $\operatorname{senh}(k(u)) = 0$, ou seja, se, e somente se

$$\frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{senh} (\sqrt{K}u) = 0.$$

Logo $C \cap P^2 = \{\alpha(0)\}$. Como $h'(0) = 0$, segue, do Lema 2.2, que $T_q C$ é ortogonal a P^2 , para todo $q \in C \cap P^2$.

Seja S a superfície de revolução gerada por C . Então, como C é completa, segue, pelo Corolário 2.9, que S é completa. Ainda, segue, da Proposição 2.4, que

$$K(I) = -\frac{(\alpha_2)''}{(\alpha_2)} = -\frac{(\operatorname{senh} \circ k)''}{(\operatorname{senh} \circ k)} = -\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{senh} (\sqrt{-K} \operatorname{Id})\right)''(u)}{\frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{senh} (\sqrt{-K} \operatorname{Id})} = K.$$

Assim, S é uma superfície de revolução completa, com curvatura Gaussiana constante K e $C \cap (\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}) \neq \emptyset$.

A seguir será provada a unicidade da S .

Seja $\bar{S}$ uma superfície de revolução em torno de $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$, gerada pela curva $\bar{C}$, completa e com curvatura Gaussiana K e $\bar{C} \cap (\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}) \neq \emptyset$; e $\bar{\alpha} : \bar{J} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ uma parametrização de $\bar{C}$, dada por

$$\bar{\alpha}(u) = (\cosh(\bar{k}(u)), \operatorname{senh}(\bar{k}(u)), 0, \bar{h}(u)), \quad (2.34)$$

onde $\bar{k} : \bar{J} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Assim, do Corolário 2.5, segue que

$$\operatorname{senh}(\bar{k}(u)) = A \cosh(\sqrt{-K}u) + B \operatorname{senh}(\sqrt{-K}u).$$

Como $\operatorname{Im} \alpha \cap (\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}) \neq \emptyset$, existe $u_i \in \bar{J}$, tal que $\bar{\alpha}(u_i) = (1, 0, 0, \bar{h}(u_i))$ e, por (2.34), tem-se que $\operatorname{senh}(\bar{k}(u_i)) = 0$, e pela equação anterior, tem-se que

$$A \cosh(\sqrt{-K}u_i) + B \operatorname{senh}(\sqrt{-K}u_i) = 0,$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\sinh(\bar{k}(u + u_i)) &= \\
&= A \cosh(\sqrt{-K}(u + u_i)) + B \sinh(\sqrt{-K}(u + u_i)) \\
&= A \cosh(\sqrt{-K}u) \cosh(\sqrt{-K}u_i) + A \sinh(\sqrt{-K}u) \sinh(\sqrt{-K}u_i) + \\
&\quad + B \sinh(\sqrt{-K}u) \cosh(\sqrt{-K}u_i) + B \cosh(\sqrt{-K}u) \sinh(\sqrt{-K}u_i) \\
&= (A \cosh(\sqrt{-K}u_i) + B \sinh(\sqrt{-K}u_i)) \cosh(\sqrt{-K}u) + \\
&\quad + (A \sinh(\sqrt{-K}u_i) + B \cosh(\sqrt{-K}u_i)) \sinh(\sqrt{-K}u) \\
&= (A \sinh(\sqrt{-K}u_i) + B \cosh(\sqrt{-K}u_i)) \sinh(\sqrt{-K}u).
\end{aligned}$$

Tomando-se

$$D = A \sinh(\sqrt{-K}u_i) + B \cosh(\sqrt{-K}u_i),$$

obtém-se que

$$\sinh(\bar{k}(u + u_i)) = D \sinh(\sqrt{-K}u). \quad (2.35)$$

Suponha que existe $v \in \bar{J} - \{u_i\}$, tal que $\sinh(\bar{k}(v)) = 0$. Logo

$$D \sinh(\sqrt{-K}(v - u_i)) = 0,$$

e como $D \neq 0$ (pois α intersecta o eixo $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$ apenas em seu ponto inicial ou final), e o seno hiperbólico é injetor, segue que $v = u_i$ (absurdo!).

Assim, não existe $v \in \bar{J} - \{u_i\}$, tal que $\sinh(\bar{k}(v)) = 0$, e portanto $\bar{\alpha}$ intersecta o eixo $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$ apenas no ponto u_i . Como α é uma geodésica que intersecta o eixo $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$ apenas em seu ponto inicial ou final, e a superfície é completa, pode-se tomar $\bar{J} = [u_i, +\infty[$ ou $\bar{J} =]-\infty, u_i]$.

Seja $\bar{J} = [u_i, +\infty[$ (resp. $\bar{J} =]-\infty, u_i]$). Então, por (2.35), segue que

$$\sinh(\bar{k}(\pm u + u_i)) = \pm D \sinh(\sqrt{-K}u),$$

e como $\sinh(\bar{k}) \geq 0$ e $D \neq 0$, tem-se que $D > 0$ (resp. $D < 0$), e definindo $\tilde{k} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ por $\tilde{k}(u) = \bar{k}(u + u_i)$ (resp. por $\tilde{k}(u) = \bar{k}(-u + u_i)$), obtém-se que

$$\sinh(\tilde{k}(u)) = |D| \sinh(\sqrt{-K}u),$$

e como o seno hiperbólico é uma função bijetora em $\mathbb{R}_+$, segue que

$$\tilde{k}(u) = \operatorname{arc} \sinh(|D| \sinh(\sqrt{-K}u)), \quad (2.36)$$

e portanto

$$\tilde{k}'(u) = \frac{|D| \sqrt{-K} \cosh(\sqrt{-K}u)}{\sqrt{1 + D^2 \sinh^2(\sqrt{-K}u)}},$$

e, por (2.24), segue que

$$\tilde{h}'(u)^2 = 1 + \frac{D^2 K \cosh^2(\sqrt{-K}u)}{1 + D^2 \sinh^2(\sqrt{-K}u)}.$$

Como, pelo Lema 2.2, tem-se que $\tilde{h}'(0) = \tilde{h}'(u_i) = 0$, segue que $D^2 K = -1$, e portanto

$|D| = 1/\sqrt{-K}$, e segue que

$$\tilde{h}'(u)^2 = 1 - \frac{\cosh^2(\sqrt{-K}u)}{1 - \frac{1}{K} \sinh^2(\sqrt{-K}u)},$$

e, por integração, segue que

$$\tilde{h}(u) = \sqrt{-\frac{1+K}{K}} \ln \left(\frac{\cosh(\sqrt{-K}u) + \sqrt{-K + \sinh^2(\sqrt{-K}u)}}{1 + \sqrt{-K}} \right). \quad (2.37)$$

Assim, de (2.36) e (2.37), tem-se que

$$\begin{aligned} \tilde{k}(u) &= \operatorname{arc} \sinh \left(\frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K}u) \right), \\ \tilde{h}(u) &= \sqrt{-\frac{1+K}{K}} \ln \left(\frac{\cosh(\sqrt{-K}u) + \sqrt{-K + \sinh^2(\sqrt{-K}u)}}{1 + \sqrt{-K}} \right), \end{aligned}$$

e portanto $\operatorname{Im} k = \operatorname{Im} \tilde{k} = \operatorname{Im} \bar{k}$ e $\operatorname{Im} h = \operatorname{Im} \tilde{h} = \operatorname{Im} \bar{h}$, logo $\alpha = \bar{\alpha}$, ou seja, $C = \bar{C}$ e segue que $S = \bar{S}$.

Ainda, por (2.24), tem-se que $k'(u)^2 \leq 1$ e como $D^2 = -K^{-1}$, segue que

$$\frac{-K \cosh^2(\sqrt{-K}u)}{-K + \sinh^2(\sqrt{-K}u)} \leq 1,$$

Mas, $K < 0$ e, consequentemente, $-K + \sinh^2(\sqrt{-K}u) > 0$.

Assim

$$K \left(1 - \cosh^2(\sqrt{-K}u) \right) \leq \sinh^2(\sqrt{-K}u),$$

e como $1 - \cosh^2(\sqrt{-K}u) = -\sinh^2(\sqrt{-K}u)$, segue que $K \geq -1$ ■

Proposição 2.2.6. Seja $K \in \mathbb{R}_+^*$. Então existe uma superfície de revolução S , em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, em torno de $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$, completa e com curvatura Gaussiana constante K , tal que $C \cap (\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}) = \emptyset$, onde C é a curva geratriz de S .

Demonstração. Defina $k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ e $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, por

$$\begin{aligned} k(u) &= \operatorname{arc} \sinh \left(e^{\sqrt{-K}u} \right), \\ h(u) &= \int_0^u \left(\frac{1 + (1+K)e^{2\sqrt{-K}x}}{1 + e^{2\sqrt{-K}x}} \right)^{\frac{1}{2}} dx, \end{aligned}$$

defina $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ por

$$\alpha(u) = (\cosh(k(u)), \sinh(k(u)), 0, h(u)),$$

e $C = \operatorname{Im} \alpha$.

Então, pelo Lema 2.2.1, tem-se que $C \subset (\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}) \cap P^3$. Ainda, $\alpha(u) \in P^2$ se, e somente se $\sinh(k(u)) = 0$, ou seja, se, e somente se

$$e^{\sqrt{-K}u} = 0.$$

Logo $C \cap P^2 = \emptyset$.

Seja S a superfície de revolução gerada por C . Então, como C é completa segue, pelo Corolário 2.9, que S é completa. Ainda, segue, da Proposição 2.4 que

$$K(I) = -\frac{(\alpha_2)''}{(\alpha_2)} = -\frac{(\sinh(k))''}{(\sinh(k))} = -\frac{(e^{\sqrt{-K}u})''}{e^{\sqrt{-K}u}} = K.$$

Assim, S é uma superfície de revolução completa e com curvatura Gaussiana constante K , e $C \cap (\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}) = \emptyset$ ■

Proposição 2.2.7. Seja S uma superfície de revolução em torno de $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$, completa e com curvatura Gaussiana constante $K \in \mathbb{R}_*$, gerada por uma curva C , tal que $C \cap \{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R} = \emptyset$, com $\alpha : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ uma parametrização de C . Então

$$\alpha(u) = (\cosh(k(u)), \sinh(k(u)), 0, h(u)),$$

com

$$k(u) = \operatorname{arc\,senh} \left(e^{\sqrt{-K}(\pm u - u_0)} \right),$$

$$h(u) = \int_0^{(\pm u - u_0)} \left(\frac{1 + (1 + K)e^{2\sqrt{-K}x}}{1 + e^{2\sqrt{-K}x}} \right)^{\frac{1}{2}} dx,$$

ou

$$k(u) = \operatorname{arc\,senh} \left(D \cosh \left(\sqrt{-K} \left(u + \frac{\theta}{\sqrt{-K(I)}} \right) \right) \right),$$

$$h(u) = \int_0^{\left(u + \frac{\theta}{\sqrt{-K(I)}} \right)} \frac{1 - D^2 K + (K + 1) D^2 \cosh^2 \left(\sqrt{-K(I)} x \right)}{1 + D^2 \cosh^2 \left(\sqrt{-K(I)} x \right)} dx,$$

para algum $D \in \mathbb{R}$, com $u_0, \theta \in \mathbb{R}$ constantes. Ainda, $K > -1$.

Demonstração. Seja $\alpha : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ uma parametrização de C , dada por

$$\alpha(u) = (\cosh(k(u)), \sinh(k(u)), 0, h(u)),$$

onde $k : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Assim, do Corolário 2.5, segue que

$$\sinh(k(u)) = A \cosh(\sqrt{-K}u) + B \sinh(\sqrt{-K}u). \quad (2.38)$$

Como, pelo Corolário 2.5, α é uma geodésica da superfície, e a superfície é completa e $\operatorname{Im} \alpha \cap (\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}) = \emptyset$, pode-se tomar $J = \mathbb{R}$ e não existe $v \in J$, tal que $\alpha(v) = (1, 0, 0, h(v))$. Ainda, $A \neq 0$ ou $B \neq 0$.

Suponha que $A^2 < B^2$. Então $(A + B) < 0$ ou $(A - B) < 0$.

Ainda,

$$\begin{aligned} A \cosh(\sqrt{-K}u) + B \sinh(\sqrt{-K}u) &= \\ &= \frac{1}{2} \left(A e^{\sqrt{-K}u} + A e^{-\sqrt{-K}u} + B e^{\sqrt{-K}u} - B e^{-\sqrt{-K}u} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left((A + B) e^{\sqrt{-K}u} + (A - B) e^{\sqrt{-K}(-u)} \right). \end{aligned}$$

Se $(A + B) < 0$, segue que

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} A \cosh(\sqrt{-K}u) + B \sinh(\sqrt{-K}u) = -\infty,$$

e, por (2.38), segue que $\lim_{u \rightarrow +\infty} \sinh(k(u)) = -\infty$. Mas, como $\sinh(k) \geq 0$ (pois $k \geq 0$), tem-se que $\lim_{u \rightarrow +\infty} \sinh(k(u)) \geq 0$ (absurdo!).

Se $(A - B) < 0$, segue que

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} A \cosh(\sqrt{-K}u) + B \sinh(\sqrt{-K}u) = -\infty,$$

e, por (2.38), segue que $\lim_{u \rightarrow -\infty} \sinh(k(u)) = -\infty$. Mas, como $\sinh(k) \geq 0$ (pois $k \geq 0$), tem-se que $\lim_{u \rightarrow -\infty} \sinh(k(u)) \geq 0$ (absurdo!).

Assim $A^2 \geq B^2$.

Se $A^2 = B^2$, então $A = \pm B$.

Segue, de (2.38), que

$$\sinh(k(u)) = A \left(\frac{e^{\sqrt{-K}u} + e^{-\sqrt{-K}u}}{2} \right) \pm A \left(\frac{e^{\sqrt{-K}u} - e^{-\sqrt{-K}u}}{2} \right) = A e^{\pm \sqrt{-K}u}.$$

Mas, como $\sinh(k) \geq 0$ (pois $k \geq 0$), tem-se que $A > 0$, e portanto existe $u_0 \in \mathbb{R}$, tal que $A = e^{-\sqrt{-K}u_0}$. Logo

$$\sinh(k(u)) = e^{\sqrt{-K}(\pm u - u_0)},$$

e definindo $\tilde{k} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, por $\tilde{k}(u) = k(\pm(u + u_0))$, obtém-se que

$$\sinh(\tilde{k}(u)) = e^{\sqrt{-K}u}.$$

Assim, como o seno hiperbólico é uma função bijetora, segue que

$$\tilde{k}(u) = \operatorname{arc} \sinh \left(e^{\sqrt{-K}u} \right), \quad (2.39)$$

e portanto

$$\tilde{k}'(u) = \frac{\sqrt{-K} e^{\sqrt{-K}u}}{\sqrt{1 + e^{2\sqrt{-K}u}}},$$

e, por (2.24), segue que

$$\tilde{h}'(u)^2 = 1 + K \frac{e^{2\sqrt{-K}u}}{1 + e^{2\sqrt{-K}u}},$$

ou seja,

$$\tilde{h}'(u) = \left(\frac{1 + (1 + K)e^{2\sqrt{-K}x}}{1 + e^{2\sqrt{-K}x}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.40)$$

Assim, de (2.39) e (2.40), tem-se que

$$\begin{aligned} k(u) &= \operatorname{arc} \sinh \left(e^{\sqrt{-K}(\pm u - u_0)} \right), \\ h(u) &= \int_0^{(\pm u - u_0)} \left(\frac{1 + (1 + K)e^{2\sqrt{-K}x}}{1 + e^{2\sqrt{-K}x}} \right)^{\frac{1}{2}} dx. \end{aligned}$$

Ainda, como $k'(u)^2 \leq 1$, segue que $-K e^{2\sqrt{-K}u} \leq 1 + e^{2\sqrt{-K}u}$, para todo $u \in \mathbb{R}$. Tomando-se $u = 0$, obtém-se $K \geq -1$.

Se $A^2 > B^2$, então $-1 < BA^{-1} < 1$.

Como a tangente hiperbólica é uma função bijetora de $\mathbb{R}$ em $] -1, 1[$, existe $\theta \in \mathbb{R}$, tal que $\tanh \theta = BA^{-1}$, e como o seno hiperbólico é uma função bijetora de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tem-se que existe $D > 0$, tal que $B = D \sinh \theta$, e portanto $A = D \cosh \theta$.

Segue, de (2.38), que

$$\begin{aligned} \sinh(k(u)) &= D \cosh \theta \cosh(\sqrt{-K}u) + D \sinh \theta \sinh(\sqrt{-K}u) \\ &= D \cosh(\theta + \sqrt{-K}u), \end{aligned}$$

e definindo $\tilde{k} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, por $\tilde{k}(u) = k(u - \theta(-K)^{-\frac{1}{2}})$, obtém-se que

$$\sinh(\tilde{k}(u)) = D \cosh(\sqrt{-K}u).$$

Assim, como o seno hiperbólico é uma função bijetora, segue que

$$\tilde{k}(u) = \operatorname{arc} \sinh \left(D \cosh(\sqrt{-K}u) \right), \quad (2.41)$$

e portanto

$$\tilde{k}'(u) = \frac{D\sqrt{-K} \sinh(\sqrt{-K}u)}{\sqrt{1 + D^2 \cosh^2(\sqrt{-K}u)}},$$

e, por (2.24), segue que

$$\tilde{h}'(u)^2 = 1 + \frac{D^2 K \sinh^2(\sqrt{-K}u)}{1 + D^2 \cosh^2(\sqrt{-K}u)},$$

ou seja,

$$\tilde{h}'(u) = \frac{1 - D^2 K + (K + 1)D^2 \cosh^2(\sqrt{-K}u)}{1 + D^2 \cosh^2(\sqrt{-K}u)}. \quad (2.42)$$

Assim, de (2.41) e (2.42), tem-se que

$$\begin{aligned} k(u) &= \operatorname{arc} \sinh \left(D \cosh \left(\sqrt{-K} \left(u + \frac{\theta}{\sqrt{-K}} \right) \right) \right), \\ h(u) &= \int_0^{u + \frac{\theta}{\sqrt{-K}}} \frac{1 - D^2 K + (K + 1)D^2 \cosh^2(\sqrt{-K}x)}{1 + D^2 \cosh^2(\sqrt{-K}x)} dx. \end{aligned}$$

Ainda, como $k'(u)^2 \leq 1$, segue que

$$-D^2 K \sinh^2(\sqrt{-K}u) \leq 1 + D^2 \cosh^2(\sqrt{-K}u),$$

para todo $u \in \mathbb{R}$, e portanto

$$-K \leq \frac{1 + D^2 + D^2 \sinh^2(\sqrt{-K}u)}{D^2 \sinh^2(\sqrt{-K}u)} = \frac{1 + D^2}{D^2 \sinh^2(\sqrt{-K}u)} + 1.$$

Logo

$$-K \leq \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1 + D^2}{D^2 \sinh^2(\sqrt{-K}u)} + 1 = 1,$$

e portanto $K \geq -1$ ■

Os resultados desta seção serão resumidos no seguinte teorema.

Teorema 2.2.8.

- (a) Existe uma única superfície de revolução completa com curvatura Gaussiana constante positiva em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, a menos de isometrias de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$,
- (b) existe uma única superfície de revolução completa com curvatura Gaussiana nula em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, a menos de cilindros e isometrias de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$,
- (c) existem infinitas superfícies de revolução completas com curvatura Gaussiana constante negativa em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Capítulo 3

Superfícies completas com curvatura Gaussiana constante em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$

O objetivo deste capítulo é caracterizar as superfícies completas com curvatura Gaussiana constante no espaço $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, a menos de isometrias do ambiente.

Além das notações do Capítulo 1, algumas definições e notações adicionais serão necessárias.

Ao longo deste capítulo, S será uma superfície orientável de $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, ou seja, uma subvariedade imersa de dimensão 2.

Ainda, dada (φ, Ω) uma parametrização de S , quando não houver risco de confusão, será usado o seguinte abuso de notação

$$f := i \circ f \circ \varphi, \quad N := di \circ N \circ \varphi, \quad \eta := \eta \circ f \circ \varphi,$$

onde f é a imersão de S , em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, N é o campo normal unitário de S e η é o campo normal unitário da imersão $i : \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4(\varepsilon)$, já definido no Capítulo 1 (ver (1.2)). Este abuso se estenderá às funções definidas a partir de f e N , como por exemplo, a função altura h e a função ν , definidas no início Capítulo 1.

Uma forma quadrática Q , em S , será uma aplicação que para cada $p \in S$ associa uma forma quadrática em $T_p S$, e por um abuso de notação, Q também denotará a forma bilinear associada ($Q \in \Gamma(TM^* \otimes TM^*)$).

Um par de formas quadráticas $(Q, \overline{Q})$, em S , será dito um par de Codazzi se, e somente se Q é uma métrica Riemanniana, em S , e para toda carta (φ, U) de S , tem-se que

$$\begin{aligned} \overline{E}\Gamma_{12}^1 + \overline{F}(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - \overline{G}\Gamma_{11}^2 &= \overline{E}_v - \overline{F}_u, \\ \overline{E}\Gamma_{22}^1 + \overline{F}(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - \overline{G}\Gamma_{12}^2 &= \overline{F}_v - \overline{G}_u, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \varphi^* Q &= E du^2 + 2F dudv + G dv^2, \\ \varphi^* \overline{Q} &= \overline{E} du^2 + 2\overline{F} dudv + \overline{G} dv^2. \end{aligned}$$

Ainda, a curvatura extrínseca do par $(Q, \overline{Q})$, denotada por $K(Q, \overline{Q})$, será definida, localmente, por

$$K(Q, \overline{Q}) = \frac{EG - F^2}{\overline{E}\overline{G} - \overline{F}^2}.$$

Um estudo mais aprofundado das formas quadráticas e dos pares de Codazzi pode ser encontrado em [Mil80].

Antes de prosseguir com os teoremas de tipo Hilbert e de tipo Liebmann, algumas relações envolvendo a curvatura extrínseca de uma superfície, em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, serão apresentadas, pois serão utilizadas ao longo deste capítulo. As demonstrações de tais relações, bem como as demais

proposições do capítulo, farão uso frequente da existência de cartas isotérmicas, em 2-variedades, ou seja, cartas (φ, U) tais que

$$\varphi^*I = E(du^2 + dv^2).$$

Uma prova simples da existência de tais cartas pode ser encontrada em [Che55].

Proposição 3.1. Sejam M^n uma variedade, $f : M \rightarrow \mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ uma imersão, h a função altura de f e η o campo normal unitário da inclusão $i : \mathbb{M}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}(\varepsilon)$, compatível com a orientação de $\mathbb{R}^{n+2}(\varepsilon)$. Então

- (a) $II_\eta \circ df = -\langle df, df \rangle_\varepsilon + dh^2$,
- (b) $K(I, II_\eta) = 1 - \|\nabla h\|^2$ (quando $n = 2$),

onde II_η é a segunda forma fundamental da imersão i .

Demonstração.

- (a) Seja $f = (\pi_{\mathbb{M}(\varepsilon)} \circ f, \pi_{\mathbb{R}} \circ f)$. Então, por (1.2), tem-se que $\eta \circ f = (\pi_{\mathbb{M}(\varepsilon)} \circ f, 0)$, e logo

$$df - d\eta = (0, dh), \quad (3.1)$$

e, como $df = (d(\pi_{\mathbb{M}(\varepsilon)} \circ f), dh)$, segue que

$$\langle df, df \rangle_\varepsilon - \langle d\eta, df \rangle_\varepsilon = dh^2,$$

ou seja,

$$\langle -d\eta, df \rangle_\varepsilon = -I + dh^2. \quad (3.2)$$

Mas

$$II_\eta \circ df = \langle S_\eta \circ df, df \rangle_\varepsilon = \langle -\overline{\nabla}_{df}^\varepsilon \eta, df \rangle_\varepsilon = \langle -d\eta, df \rangle_\varepsilon,$$

onde $\overline{\nabla}^\varepsilon$ é a conexão Riemanniana de $\mathbb{R}^{n+2}(\varepsilon)$.

Logo $II_\eta = -I + dh^2$.

- (b) Seja (φ, U) um sistema de coordenadas isotérmico para a métrica Riemanniana induzida em M^2 , com

$$\varphi^*I = E(du^2 + dv^2).$$

Então

$$\varphi^*dh^2 = h_u^2 du^2 + 2h_u h_v dudv + h_v^2 dv^2,$$

onde $h_u := (h \circ \varphi)_u$ e $h_v := (h \circ \varphi)_v$.

Logo, pelo item (a), segue que

$$\varphi^*II_\eta = (h_u^2 - E)du^2 + 2h_u h_v dudv + (h_v^2 - E)dv^2,$$

e portanto

$$\begin{aligned} K(I, II_\eta) &= \frac{(h_u^2 - E)(h_v^2 - E) - (h_u h_v)^2}{E^2} \\ &= \frac{E^2 - E(h_u^2 + h_v^2)}{E^2} \\ &= 1 - \frac{h_u^2 + h_v^2}{E}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$K(I, II_\eta) = 1 - \|\nabla h\|^2 \quad \blacksquare$$

Corolário 3.2. Sejam S uma superfície de $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ e η o campo normal unitário da inclusão $i : \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4(\varepsilon)$, que é compatível com a orientação de $\mathbb{R}^4(\varepsilon)$. Então

$$K(I) = K(I, II) + \varepsilon K(I, II_\eta),$$

onde $K(I)$ é a curvatura Gaussiana de S (curvatura seccional), com relação a métrica I .

Demonstração. Seja (φ, U) uma carta ortogonal e $X_i = \partial/\partial\varphi_i$, para $i = 1, 2$. Então, como o operador de forma da superfície S_N é auto-adjunto, segue que

$$\det S_N = \frac{I(S_N(X_1), X_1) I(S_N(X_2), X_2) - I(S_N(X_1), X_2)^2}{I(X_1, X_1)I(X_2, X_2)}.$$

Mas, $II(X_i, X_j) = I(S_N(X_i), X_j)$. Logo, tem-se que

$$\det S_N = \frac{II(X_1, X_1) II(X_2, X_2) - II(X_1, X_2)^2}{I(X_1, X_1)I(X_2, X_2) - I(X_1, X_2)^2} = K(I, II).$$

Ainda, segue, do Corolário 1.2.4 e do item (b) da Proposição 3.1, que

$$K(I) = \det S_N + \varepsilon K(I, II_\eta),$$

e portanto

$$K(I) = K(I, II) + \varepsilon K(I, II_\eta) \quad \blacksquare$$

Ao longo do capítulo, A será a forma quadrática definida por

$$A = I + \frac{1}{\varepsilon K(I) - 1} dh^2, \quad (3.3)$$

onde I é a métrica de S induzida de $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ (primeira forma fundamental de S), $K(I)$ é a curvatura Gaussiana de S , com relação à métrica I e h a função altura de S . Ainda, com frequência, será usada a seguinte notação

$$c = \frac{1}{\varepsilon K(I) - 1}. \quad (3.4)$$

Observe que A é, de fato, uma forma quadrática, pois é combinação linear de formas quadráticas.

A seguir algumas propriedades básicas da forma quadrática A serão apresentadas, pois serão recorrentemente utilizadas ao longo do capítulo.

Proposição 3.3. Seja S uma superfície, em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, tal que A é uma métrica Riemanniana em S . Então

$$K(A, II) = K(I) - \varepsilon,$$

onde II é a 2ª forma fundamental de S .

Demonstração. Seja (φ, U) um sistema de coordenadas isotérmico para a métrica I , com

$$\begin{aligned} \varphi^* I &= E(du^2 + dv^2), \\ \varphi^* II &= Jdu^2 + 2Ldudv + Mdv^2. \end{aligned}$$

Então, tem-se que

$$\varphi^* dh^2 = h_u^2 du^2 + 2h_u h_v dudv + h_v^2 dv^2,$$

e segue, da definição de A em (3.3), que

$$\varphi^* A = (E + c h_u^2) du^2 + (2c h_u h_v) dudv + (E + c h_v^2) dv^2,$$

e portanto

$$\begin{aligned} K(A, II) &= \frac{JM - L^2}{(E + c h_u^2)(E + c h_v^2) - (c h_u h_v)^2} \\ &= \frac{JM - L^2}{E^2 + Ec(h_u^2 + h_v^2)} \\ &= \frac{JM - L^2}{E^2} \left(\frac{1}{1 + c \frac{h_u^2 + h_v^2}{E}} \right) \\ &= K(I, II) \frac{\varepsilon K(I) - 1}{\varepsilon K(I) - 1 + \|\nabla h\|^2}. \end{aligned}$$

Segue, do item (a) da Proposição 3.1, que

$$K(A, II) = \frac{K(I, II)(\varepsilon K(I) - 1)}{\varepsilon K(I) - K(I, II_\eta)},$$

e portanto, pela equação de Gauss do Corolário 3.2, tem-se que

$$\begin{aligned} K(A, II) &= \frac{(K(I) - \varepsilon K(I, II_\eta))(\varepsilon K(I) - 1)}{\varepsilon K(I) - K(I, II_\eta)} \\ &= \frac{(K(I) - \varepsilon K(I, II_\eta))(\varepsilon^2 K(I) - \varepsilon)}{\varepsilon^2 K(I) - \varepsilon K(I, II_\eta)} \\ &= K(I) - \varepsilon \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lema 3.4. Seja S uma superfície, em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$. Então A é uma métrica Riemanniana se, e somente se $1 + c \|\nabla h\|^2 > 0$.

Demonstração. Seja (φ, U) um sistema de coordenadas isotérmico para a métrica I , com

$$\varphi^* I = E(du^2 + dv^2).$$

Então, tem-se que

$$\varphi^* dh^2 = h_u^2 du^2 + 2h_u h_v dudv + h_v^2 dv^2,$$

e segue, da definição de A em (3.3), que

$$\varphi^* A = (E + c h_u^2) du^2 + (2c h_u h_v) dudv + (E + c h_v^2) dv^2,$$

ou seja,

$$A(\varphi_u, \varphi_u) = (E + c h_u^2), \quad A(\varphi_u, \varphi_v) = c h_u h_v, \quad A(\varphi_v, \varphi_v) = (E + c h_v^2).$$

Se A é uma métrica Riemanniana, como $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ é linearmente independente, segue, pela desigualdade de Schwarz, que

$$A(\varphi_u, \varphi_v)^2 < A(\varphi_u, \varphi_u)A(\varphi_v, \varphi_v),$$

e portanto

$$0 < (E + ch_u^2)(E + ch_v^2) - (ch_uh_v)^2 = E^2(1 + c\|\nabla h\|^2),$$

ou seja,

$$0 < 1 + c\|\nabla h\|^2.$$

Se $1 + c\|\nabla h\|^2 > 0$, então

$$\begin{aligned} 0 &< E(2 + c\|\nabla h\|^2) = (E + ch_u^2) + (E + ch_v^2), \\ 0 &< E^2(1 + c\|\nabla h\|^2) = (E + ch_u^2)(E + ch_v^2) - (ch_uh_v)^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &< (E + ch_u^2) + (E + ch_v^2), \\ 0 &< (ch_uh_v)^2 < (E + ch_u^2)(E + ch_v^2), \end{aligned}$$

e

$$\det A = A(\varphi_u, \varphi_u)A(\varphi_v, \varphi_v) - A(\varphi_u, \varphi_v)^2 > 0. \quad (3.5)$$

Suponha que $(E + ch_u^2) < 0$. Então, tem-se que $(E + ch_v^2) < 0$, e logo $(E + ch_u^2) + (E + ch_v^2) < 0$ (absurdo).

Assim $(E + ch_u^2) \geq 0$, e como $(E + ch_u^2)(E + ch_v^2) > 0$, tem-se que $(E + ch_v^2) > 0$, ou seja,

$$A(\varphi_u, \varphi_u) > 0. \quad (3.6)$$

Logo, por (3.5) e (3.6), segue pelo critério de Sylvester que A é definida positiva. Ainda, segue diretamente da definição de A , em (3.3), que A é simétrica e suave, pois é combinação linear de formas bilineares simétricas e suaves.

Assim A é uma métrica Riemanniana ■

Proposição 3.5. Seja S uma superfície, em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$. Então A não é uma métrica Riemanniana em S se, e somente se

- (a) existe $p \in S$, tal que $K(I)|_p \in [0, 1]$ e $\|\nabla h(p)\|^2 \geq 1 - K(I)|_p$, quando $\varepsilon = 1$,
- (b) existe $p \in S$, tal que $K(I)|_p \in [-1, 0]$ e $\|\nabla h(p)\|^2 \geq 1 + K(I)|_p$, quando $\varepsilon = -1$.

Demonstração. Considere que

- (I) $1 + c\|\nabla h\|^2 \leq 0$ se, e somente se $c \leq -1$ e $\|\nabla h\|^2 \geq -c^{-1}$. De fato, se $1 + c\|\nabla h\|^2 \leq 0$, então

$$c\|\nabla h\|^2 \leq -1. \quad (3.7)$$

Suponha que $c > -1$. Então

$$c\|\nabla h\|^2 > -\|\nabla h\|^2,$$

ou seja, $1 < \|\nabla h\|^2$. Mas pelo item (c) da Proposição 1.1.4, tem-se que $1 \geq \|\nabla h\|^2$ (absurdo).

Assim $c \leq -1 < 0$ e multiplicando a desigualdade em (3.7) por c^{-1} , obtém-se que $\|\nabla h\|^2 \geq -c^{-1}$.

Se $c \leq -1$ e $\|\nabla h\|^2 \geq -c^{-1}$, então $c < 0$ e segue que $c\|\nabla h\|^2 \leq -1$, e portanto $c\|\nabla h\|^2 + 1 \leq 0$.

- (II) Se $\|\nabla h\|^2 \geq -c^{-1}$, então $c \leq -1$ se, e somente se $\varepsilon K(I) \in [0, 1]$. De fato, pelo item (c) da Proposição 1.1.4, tem-se que $1 \geq -c^{-1}$.

Se $c \leq -1$, então $c < 0$ e $1 \geq -c^{-1}$, ou seja, $-1 \leq c^{-1} < 0$, e portanto $0 \leq \varepsilon K(I) < 1$.

Se $0 \leq \varepsilon K(I) < 1$, então $-1 \leq c^{-1}$ e $c^{-1} < 0$, ou seja, $-1 \leq c^{-1}$ e $c < 0$, e portanto $c \leq -1$.

Logo, por (I) e (II), tem-se que $1 + c\|\nabla h\|^2 \leq 0$ se, e somente se $\varepsilon K(I) \in [0, 1]$ e $\|\nabla h\|^2 \geq -c^{-1} = 1 - \varepsilon K(I)$, ou seja,

$$\begin{aligned} K(I) \in [0, 1] \text{ e } \|\nabla h\|^2 &\geq 1 - K(I), & \text{quando } \varepsilon = 1, \\ K(I) \in [-1, 0] \text{ e } \|\nabla h\|^2 &\geq 1 + K(I), & \text{quando } \varepsilon = -1. \end{aligned}$$

Mas, pelo Lema 3.4, A não é uma métrica Riemanniana se, e somente se existe $p \in S$, tal que $1 + c|_p \|\nabla h(p)\|^2 \leq 0$.

Assim, A não é uma métrica Riemanniana se, e somente se existe $p \in S$, tal que

$$\begin{aligned} K(I)|_p \in [0, 1] \text{ e } \|\nabla h(p)\|^2 &\geq 1 - K(I)|_p, & \text{quando } \varepsilon = 1, \\ K(I)|_p \in [-1, 0] \text{ e } \|\nabla h(p)\|^2 &\geq 1 + K(I)|_p, & \text{quando } \varepsilon = -1 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

O lema anterior estabelece uma condição necessária e suficiente para que a forma quadrática A seja uma métrica Riemanniana, em S . Os lemas a seguir estabelecerão as propriedades locais de S , quando A for uma métrica Riemanniana.

Lema 3.6. Sejam S uma superfície com curvatura Gaussiana constante $K(I)$, em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, tal que A é uma métrica Riemanniana em S e (φ, Ω) uma parametrização isotérmica para a métrica induzida I , em S , tal que

$$\begin{aligned} \varphi^* I &= \frac{1}{d^2}(du^2 + dv^2), \\ \varphi^* II &= Jdu^2 + 2Ldudv + Mdv^2, \end{aligned}$$

onde $d : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ é definida por

$$d(u, v) = \frac{1}{2}(1 + K(I)(u^2 + v^2)).$$

Então

$$\begin{aligned} f_{uu} &= \left(-\frac{K(I)u}{d}\right) f_u + \left(\frac{K(I)v}{d}\right) f_v + JN + \left(\varepsilon \left(h_u^2 - \frac{1}{d^2}\right)\right) \eta, \\ f_{uv} &= \left(-\frac{K(I)v}{d}\right) f_u + \left(-\frac{K(I)u}{d}\right) f_v + LN + (\varepsilon h_u h_v) \eta, \\ f_{vv} &= \left(\frac{K(I)u}{d}\right) f_u + \left(-\frac{K(I)v}{d}\right) f_v + MN + \left(\varepsilon \left(h_v^2 - \frac{1}{d^2}\right)\right) \eta, \end{aligned}$$

onde f é a imersão de S , em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, e h é a função altura de f .

Demonstração. Como f é uma imersão isométrica, relativa à métrica I , da expressão da métrica, tem-se que

$$\langle f_u, f_u \rangle_\varepsilon = \frac{1}{d^2} = \langle f_v, f_v \rangle_\varepsilon, \quad \langle f_u, f_v \rangle_\varepsilon = 0. \quad (3.8)$$

Ainda, como $\{f_u, f_v, N, \eta\}$ é um conjunto ortogonal e N e η são unitários, tem-se que

$$\begin{aligned} f_{uu} &= d^2 \langle f_{uu}, f_u \rangle_\varepsilon f_u + d^2 \langle f_{uu}, f_v \rangle_\varepsilon f_v + \langle f_{uu}, N \rangle_\varepsilon N + \varepsilon \langle f_{uu}, \eta \rangle_\varepsilon \eta, \\ f_{uv} &= d^2 \langle f_{uv}, f_u \rangle_\varepsilon f_u + d^2 \langle f_{uv}, f_v \rangle_\varepsilon f_v + \langle f_{uv}, N \rangle_\varepsilon N + \varepsilon \langle f_{uv}, \eta \rangle_\varepsilon \eta, \\ f_{vv} &= d^2 \langle f_{vv}, f_u \rangle_\varepsilon f_u + d^2 \langle f_{vv}, f_v \rangle_\varepsilon f_v + \langle f_{vv}, N \rangle_\varepsilon N + \varepsilon \langle f_{vv}, \eta \rangle_\varepsilon \eta. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Segue, diretamente, de (3.8), que

$$\begin{aligned} \langle f_{uu}, f_u \rangle_\varepsilon &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d^2} \right)_u, & \langle f_{vu}, f_u \rangle_\varepsilon &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d^2} \right)_v, \\ \langle f_{vv}, f_v \rangle_\varepsilon &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d^2} \right)_v, & \langle f_{uv}, f_v \rangle_\varepsilon &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d^2} \right)_u, \\ \langle f_{uu}, f_v \rangle_\varepsilon &= -\langle f_u, f_{uv} \rangle_\varepsilon, & \langle f_{vv}, f_u \rangle_\varepsilon &= -\langle f_v, f_{vu} \rangle_\varepsilon. \end{aligned}$$

Mas, da expressão de d , segue que

$$d_u = K(I)u, \quad d_v = K(I)v,$$

e portanto

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{d^2} \right)_u &= -\frac{2d_u d}{d^4} = -\frac{2d_u}{d^3} = -\frac{2K(I)u}{d^3}, \\ \left(\frac{1}{d^2} \right)_v &= -\frac{2d_v d}{d^4} = -\frac{2d_v}{d^3} = -\frac{2K(I)v}{d^3}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Assim

$$\begin{aligned} \langle f_{uu}, f_u \rangle_\varepsilon &= -\frac{2K(I)u}{d^3}, & \langle f_{vu}, f_u \rangle_\varepsilon &= -\frac{2K(I)v}{d^3}, \\ \langle f_{vv}, f_v \rangle_\varepsilon &= -\frac{2K(I)v}{d^3}, & \langle f_{uv}, f_v \rangle_\varepsilon &= -\frac{2K(I)u}{d^3}, \\ \langle f_{uu}, f_v \rangle_\varepsilon &= \frac{2K(I)v}{d^3}, & \langle f_{vv}, f_u \rangle_\varepsilon &= \frac{2K(I)u}{d^3}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Ainda, como $\langle f_u, N \rangle_\varepsilon = 0 = \langle f_v, N \rangle_\varepsilon$, segue que

$$\langle f_{uu}, N \rangle_\varepsilon = -\langle N_u, f_u \rangle_\varepsilon, \quad \langle f_{uv}, N \rangle_\varepsilon = -\langle N_u, f_v \rangle_\varepsilon, \quad \langle f_{vv}, N \rangle_\varepsilon = -\langle N_v, f_v \rangle_\varepsilon.$$

Mas, como i e f são imersões isométricas, segue que

$$\varphi^* II = II(d\varphi) = I(S_N(d\varphi), d\varphi) = \langle df(S_N(d\varphi)), df(d\varphi) \rangle_\varepsilon = \langle -\overline{\nabla}_{df}^\varepsilon N, df \rangle_\varepsilon = \langle -dN, df \rangle_\varepsilon,$$

e portanto

$$\begin{aligned} -\langle N_u, f_u \rangle_\varepsilon &= J, & -\langle N_u, f_v \rangle_\varepsilon &= L, \\ -\langle N_v, f_u \rangle_\varepsilon &= L, & -\langle N_v, f_v \rangle_\varepsilon &= M. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Assim

$$\langle f_{uu}, N \rangle_\varepsilon = J, \quad \langle f_{uv}, N \rangle_\varepsilon = L, \quad \langle f_{vv}, N \rangle_\varepsilon = M. \quad (3.13)$$

Ainda, como $f_u, f_v \in T\mathbb{M}^2(\varepsilon) \oplus T\mathbb{R}$ e $\eta \in (T\mathbb{M}^2(\varepsilon) \oplus T\mathbb{R})^\perp$, segue que

$$\langle f_u, \eta \rangle_\varepsilon = 0, \quad \langle f_v, \eta \rangle_\varepsilon = 0,$$

e portanto

$$\begin{aligned} \langle f_{uu}, \eta \rangle_\varepsilon &= -\langle f_u, \eta_u \rangle_\varepsilon, & \langle f_{uv}, \eta \rangle_\varepsilon &= -\langle f_v, \eta_u \rangle_\varepsilon, \\ \langle f_{vu}, \eta \rangle_\varepsilon &= -\langle f_u, \eta_v \rangle_\varepsilon, & \langle f_{vv}, \eta \rangle_\varepsilon &= -\langle f_v, \eta_v \rangle_\varepsilon. \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}\langle -d\eta, df \rangle_\varepsilon &= \langle -\eta_u du - \eta_v dv, f_u du + f_v dv \rangle_\varepsilon \\ &= \langle -\eta_u, f_u \rangle_\varepsilon du^2 + (\langle -\eta_u, f_v \rangle_\varepsilon + \langle -\eta_v, f_u \rangle_\varepsilon) dudv + \langle -\eta_v, f_v \rangle_\varepsilon dv^2 \\ &= \langle -\eta_u, f_u \rangle_\varepsilon du^2 + 2 \langle -\eta_u, f_v \rangle_\varepsilon dudv + \langle -\eta_v, f_v \rangle_\varepsilon dv^2,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\langle -df, df \rangle_\varepsilon + dh^2 &= \langle -f_u du - f_v dv, f_u du + f_v dv \rangle_\varepsilon + h_u^2 du^2 + 2h_u h_v dudv + h_v^2 dv^2 \\ &= \left(h_u^2 - \frac{1}{d^2} \right) du^2 + \left(h_v^2 - \frac{1}{d^2} \right) dv^2 + 2h_u h_v dudv,\end{aligned}$$

portanto, por (3.2), segue que

$$\langle -\eta_u, f_u \rangle_\varepsilon = h_u^2 - \frac{1}{d^2}, \quad \langle -\eta_u, f_v \rangle_\varepsilon = h_u h_v, \quad \langle -\eta_v, f_v \rangle_\varepsilon = h_v^2 - \frac{1}{d^2}. \quad (3.14)$$

Assim

$$\langle f_{uu}, \eta \rangle_\varepsilon = h_u^2 - \frac{1}{d^2}, \quad \langle f_{uv}, \eta \rangle_\varepsilon = h_u h_v, \quad \langle f_{vv}, \eta \rangle_\varepsilon = h_v^2 - \frac{1}{d^2}. \quad (3.15)$$

Segue, de (3.9), (3.11), (3.13) e (3.15), que

$$\begin{aligned}f_{uu} &= \left(-\frac{K(I)u}{d} \right) f_u + \left(\frac{K(I)v}{d} \right) f_v + JN + \left(\varepsilon \left(h_u^2 - \frac{1}{d^2} \right) \right) \eta, \\ f_{uv} &= \left(-\frac{K(I)v}{d} \right) f_u + \left(-\frac{K(I)u}{d} \right) f_v + LN + (\varepsilon h_u h_v) \eta, \\ f_{vv} &= \left(\frac{K(I)u}{d} \right) f_u + \left(-\frac{K(I)v}{d} \right) f_v + MN + \left(\varepsilon \left(h_v^2 - \frac{1}{d^2} \right) \right) \eta \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Lema 3.7. Sejam S uma superfície, em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, tal que A é uma métrica Riemanniana em S e (φ, Ω) uma parametrização isotérmica para a métrica induzida I , em S , tal que

$$\begin{aligned}\varphi^* I &= \frac{1}{d^2} (du^2 + dv^2), \\ \varphi^* II &= Jdu^2 + 2Ldudv + Mdv^2,\end{aligned}$$

onde $d : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ é definida por

$$d(u, v) = \frac{1}{2} (1 + K(I)(u^2 + v^2)).$$

Então

$$\begin{aligned}-N_u &= (Jd^2)f_u + (Ld^2)f_v + (-\varepsilon \nu h_u)\eta, \\ -N_v &= (Ld^2)f_u + (Md^2)f_v + (-\varepsilon \nu h_v)\eta, \\ -\eta_u &= (h_u^2 d^2 - 1)f_u + (h_u h_v d^2)f_v + (\nu h_u)N, \\ -\eta_v &= (h_u h_v d^2)f_u + (h_v^2 d^2 - 1)f_v + (\nu h_v)N,\end{aligned} \quad (3.16)$$

onde f é a imersão de S , em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, e h é a função altura de f .

Demonstração. Como $\{f_u, f_v, N, \eta\}$ é um conjunto ortogonal e N e η são unitários, tem-se

que

$$\begin{aligned}
N_u &= d^2 \langle N_u, f_u \rangle_\varepsilon f_u + d^2 \langle N_u, f_v \rangle_\varepsilon f_v + \langle N_u, N \rangle_\varepsilon N + \varepsilon \langle N_u, \eta \rangle_\varepsilon \eta, \\
N_v &= d^2 \langle N_v, f_u \rangle_\varepsilon f_u + d^2 \langle N_v, f_v \rangle_\varepsilon f_v + \langle N_v, N \rangle_\varepsilon N + \varepsilon \langle N_v, \eta \rangle_\varepsilon \eta, \\
\eta_u &= d^2 \langle \eta_u, f_u \rangle_\varepsilon f_u + d^2 \langle \eta_u, f_v \rangle_\varepsilon f_v + \langle \eta_u, N \rangle_\varepsilon N + \varepsilon \langle \eta_u, \eta \rangle_\varepsilon \eta, \\
\eta_v &= d^2 \langle \eta_v, f_u \rangle_\varepsilon f_u + d^2 \langle \eta_v, f_v \rangle_\varepsilon f_v + \langle \eta_v, N \rangle_\varepsilon N + \varepsilon \langle \eta_v, \eta \rangle_\varepsilon \eta.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Segue do fato de que N e η são unitários, que

$$\begin{aligned}
\langle N_u, N \rangle_\varepsilon &= 0, & \langle \eta_u, \eta \rangle_\varepsilon &= 0, \\
\langle N_v, N \rangle_\varepsilon &= 0, & \langle \eta_v, \eta \rangle_\varepsilon &= 0.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Ainda, segue, de (3.1), que

$$\begin{aligned}
\langle N, d\eta \rangle_\varepsilon &= \langle N, df - d((0, dh)) \rangle_\varepsilon \\
&= \langle N, df \rangle_\varepsilon - \langle N, (0, dh) \rangle_\varepsilon \\
&= \langle N, df \rangle_\varepsilon - \nu dh.
\end{aligned}$$

Assim, como $\langle N, df \rangle_\varepsilon = 0$, segue que

$$\langle N, d\eta \rangle_\varepsilon = -\nu dh,$$

ou seja,

$$\langle \eta_u, N \rangle_\varepsilon = -\nu h_u, \quad \langle \eta_v, N \rangle_\varepsilon = -\nu h_v. \tag{3.19}$$

Ainda, como $N \in T\mathbb{M}^2(\varepsilon) \oplus T\mathbb{R}$ e $\eta \in (T\mathbb{M}^2(\varepsilon) \oplus T\mathbb{R})^\perp$, tem-se que

$$\langle N, \eta \rangle_\varepsilon = 0,$$

e portanto

$$\langle dN, \eta \rangle_\varepsilon = -\langle N, d\eta \rangle_\varepsilon,$$

ou seja,

$$\langle N_u, \eta \rangle_\varepsilon = -\langle N, \eta_u \rangle_\varepsilon, \quad \langle N_v, \eta \rangle_\varepsilon = -\langle N, \eta_v \rangle_\varepsilon.$$

Assim, por (3.19), segue que

$$\langle N_u, \eta \rangle_\varepsilon = \nu h_u, \quad \langle N_v, \eta \rangle_\varepsilon = \nu h_v. \tag{3.20}$$

Segue, de (3.12), (3.14), (3.17), (3.18), (3.19) e (3.20), que

$$\begin{aligned}
-N_u &= (Jd^2)f_u + (Ld^2)f_v + (-\varepsilon\nu h_u)\eta, \\
-N_v &= (Ld^2)f_u + (Md^2)f_v + (-\varepsilon\nu h_v)\eta, \\
-\eta_u &= (h_u^2d^2 - 1)f_u + (h_u h_v d^2)f_v + (\nu h_u)N, \\
-\eta_v &= (h_u h_v d^2)f_u + (h_v^2d^2 - 1)f_v + (\nu h_v)N \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Lema 3.8. Sejam S uma superfície com curvatura Gaussiana constante $K(I)$, em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, tal que A é uma métrica Riemanniana em S e (φ, Ω) uma parametrização isotérmica para a métrica induzida I , em S , tal que

$$\begin{aligned}
\varphi^* I &= \frac{1}{d^2}(du^2 + dv^2), \\
\varphi^* II &= Jdu^2 + 2Ldudv + Mdv^2,
\end{aligned}$$

onde $d : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ é definida por

$$d(u, v) = \frac{1}{2}(1 + K(I)(u^2 + v^2)).$$

Então

$$\begin{aligned} K(I) &= (JM - L^2)d^4 + \varepsilon(1 - \|\nabla h\|^2), \\ J_v - L_u &= \left(-\frac{K(I)v}{d}\right)(J + M) + \left(-\varepsilon\frac{\nu h_v}{d^2}\right), \\ L_v - M_u &= \left(\frac{K(I)u}{d}\right)(J + M) + \left(\varepsilon\frac{\nu h_u}{d^2}\right). \end{aligned}$$

onde f é a imersão de S , em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, e h é a função altura de f .

Demonstração. Segue, do Corolário 3.2, que

$$K(I) = K(I, II) + \varepsilon K(I, II_\eta),$$

e, pelo item (b) da Proposição 3.1, que

$$K(I) = (JM - L^2)d^4 + \varepsilon(1 - \|\nabla h\|^2).$$

Segue, de (3.13), que

$$\begin{aligned} J_v &= \langle f_{vuu}, N \rangle_\varepsilon + \langle f_{uu}, N_v \rangle_\varepsilon, \quad L_u = \langle f_{uuv}, N \rangle_\varepsilon + \langle f_{uv}, N_u \rangle_\varepsilon, \\ L_v &= \langle f_{vuv}, N \rangle_\varepsilon + \langle f_{uv}, N_v \rangle_\varepsilon, \quad M_u = \langle f_{uvv}, N \rangle_\varepsilon + \langle f_{vv}, N_u \rangle_\varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, como N é unitário, segue, pelo Lema 3.6, que

$$\begin{aligned} J_v - L_u &= \\ &= \langle f_{uu}, N_v \rangle_\varepsilon - \langle f_{uv}, N_u \rangle_\varepsilon \\ &= \left(-\frac{K(I)u}{d}\right) \langle f_u, N_v \rangle_\varepsilon + \left(\frac{K(I)v}{d}\right) \langle f_v, N_v \rangle_\varepsilon + \left(\varepsilon \left(h_u^2 - \frac{1}{d^2}\right)\right) \langle \eta, N_v \rangle_\varepsilon + \\ &\quad - \left(-\frac{K(I)v}{d}\right) \langle f_u, N_u \rangle_\varepsilon - \left(-\frac{K(I)u}{d}\right) \langle f_v, N_u \rangle_\varepsilon - (\varepsilon h_u h_v) \langle \eta, N_u \rangle_\varepsilon, \\ L_v - M_u &= \\ &= \langle f_{uv}, N_v \rangle_\varepsilon - \langle f_{vv}, N_u \rangle_\varepsilon \\ &= \left(-\frac{K(I)v}{d}\right) \langle f_u, N_v \rangle_\varepsilon + \left(-\frac{K(I)u}{d}\right) \langle f_v, N_v \rangle_\varepsilon + (\varepsilon h_u h_v) \langle \eta, N_v \rangle_\varepsilon + \\ &\quad - \left(\frac{K(I)u}{d}\right) \langle f_u, N_u \rangle_\varepsilon - \left(-\frac{K(I)v}{d}\right) \langle f_v, N_u \rangle_\varepsilon - \left(\varepsilon \left(h_v^2 - \frac{1}{d^2}\right)\right) \langle \eta, N_u \rangle_\varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, por (3.14) e (3.20), segue que

$$\begin{aligned} J_v - L_u &= \left(-\frac{K(I)u}{d}\right)(-L) + \left(\frac{K(I)v}{d}\right)(-M) + \left(\varepsilon \left(h_u^2 - \frac{1}{d^2}\right)\right) \nu h_v + \\ &\quad - \left(-\frac{K(I)v}{d}\right)(-J) - \left(-\frac{K(I)u}{d}\right)(-L) - (\varepsilon h_u h_v) \nu h_u, \\ L_v - M_u &= \left(-\frac{K(I)v}{d}\right)(-L) + \left(-\frac{K(I)u}{d}\right)(-M) + (\varepsilon h_u h_v) \nu h_v + \\ &\quad - \left(\frac{K(I)u}{d}\right)(-J) - \left(-\frac{K(I)v}{d}\right)(-L) - \left(\varepsilon \left(h_v^2 - \frac{1}{d^2}\right)\right) \nu h_u, \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} J_v - L_u &= \left(-\frac{K(I)v}{d} \right) (J + M) + \left(-\varepsilon \frac{\nu h_v}{d^2} \right), \\ L_v - M_u &= \left(\frac{K(I)u}{d} \right) (J + M) + \left(\varepsilon \frac{\nu h_u}{d^2} \right) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lema 3.9. Sejam S uma superfície com curvatura Gaussiana constante $K(I)$, em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, tal que A é uma métrica Riemanniana em S e (φ, Ω) uma parametrização isotérmica para a métrica induzida I , em S , tal que

$$\begin{aligned} \varphi^* I &= \frac{1}{d^2} (du^2 + dv^2), \\ \varphi^* II &= J du^2 + 2L du dv + M dv^2, \end{aligned}$$

onde $d : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ é definida por

$$d(u, v) = \frac{1}{2} (1 + K(I)(u^2 + v^2)).$$

Então

$$\begin{aligned} -\nu f_{uu}^\varepsilon &= \left(-\frac{K(I)u}{d} \nu + J d^2 h_u \right) f_u^\varepsilon + \left(\frac{K(I)v}{d} \nu + J d^2 h_v \right) f_v^\varepsilon + \\ &\quad + \left(\varepsilon \nu (h_u + h_v) \left(h_u^2 - \frac{1}{d^2} \right) \right) f^\varepsilon, \\ -\nu f_{uv}^\varepsilon &= \left(-\frac{K(I)v}{d} \nu + L d^2 h_u \right) f_u^\varepsilon + \left(-\frac{K(I)u}{d} \nu + L d^2 h_v \right) f_v^\varepsilon + \\ &\quad + (\varepsilon \nu (h_u + h_v) h_u h_v) f^\varepsilon, \\ -\nu f_{vv}^\varepsilon &= \left(\frac{K(I)u}{d} \nu + M d^2 h_u \right) f_u^\varepsilon + \left(-\frac{K(I)v}{d} \nu + M d^2 h_v \right) f_v^\varepsilon + \\ &\quad + \left(\varepsilon \nu (h_u + h_v) \left(h_v^2 - \frac{1}{d^2} \right) \right) f^\varepsilon, \end{aligned}$$

onde f é a imersão de S , em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, h é a função altura de f e $f^\varepsilon = \pi_{\mathbb{M}(\varepsilon)} \circ f$.

Demonstração. Seja $\pi_{\mathbb{R}^3} : \mathbb{R}^4(\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^3(\varepsilon)$ a projeção canônica nas três primeiras coordenadas. Então, pela definição de η em (1.2), segue que

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbb{R}^3} \circ f_u &= (\pi_{\mathbb{R}^3} \circ f)_u = f_u^\varepsilon, & \pi_{\mathbb{R}^3} \circ f_{uu} &= (\pi_{\mathbb{R}^3} \circ f)_{uu} = f_{uu}^\varepsilon, \\ \pi_{\mathbb{R}^3} \circ f_v &= (\pi_{\mathbb{R}^3} \circ f)_v = f_v^\varepsilon, & \pi_{\mathbb{R}^3} \circ f_{vv} &= (\pi_{\mathbb{R}^3} \circ f)_{vv} = f_{vv}^\varepsilon, \\ \pi_{\mathbb{R}^3} \circ \eta &= f^\varepsilon, & \pi_{\mathbb{R}^3} \circ f_{uv} &= (\pi_{\mathbb{R}^3} \circ f)_{uv} = f_{uv}^\varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, aplicando $\pi_{\mathbb{R}^3}$ às equações do Lema 3.6, obtém-se que

$$\begin{aligned} f_{uu}^\varepsilon &= \left(-\frac{K(I)u}{d} \right) f_u^\varepsilon + \left(\frac{K(I)v}{d} \right) f_v^\varepsilon + J(\pi_{\mathbb{R}^3} \circ N) + \left(\varepsilon \left(h_u^2 - \frac{1}{d^2} \right) \right) f^\varepsilon, \\ f_{uv}^\varepsilon &= \left(-\frac{K(I)v}{d} \right) f_u^\varepsilon + \left(-\frac{K(I)u}{d} \right) f_v^\varepsilon + L(\pi_{\mathbb{R}^3} \circ N) + (\varepsilon h_u h_v) f^\varepsilon, \\ f_{vv}^\varepsilon &= \left(\frac{K(I)u}{d} \right) f_u^\varepsilon + \left(-\frac{K(I)v}{d} \right) f_v^\varepsilon + M(\pi_{\mathbb{R}^3} \circ N) + \left(\varepsilon \left(h_v^2 - \frac{1}{d^2} \right) \right) f^\varepsilon. \end{aligned}$$

Mas, aplicando $\pi_{\mathbb{R}^3}$ às equações do Lema 3.7, obtém-se que

$$-\nu(\pi_{\mathbb{R}^3} \circ N) = d^2 (h_u f_u^\varepsilon + h_v f_v^\varepsilon).$$

Assim

$$\begin{aligned} -\nu f_{uu}^\varepsilon &= \left(-\frac{K(I)u}{d} \nu + Jd^2 h_u \right) f_u^\varepsilon + \left(\frac{K(I)v}{d} \nu + Jd^2 h_v \right) f_v^\varepsilon + \\ &\quad + \left(\varepsilon \nu (h_u + h_v) \left(h_u^2 - \frac{1}{d^2} \right) \right) f^\varepsilon, \\ -\nu f_{uv}^\varepsilon &= \left(-\frac{K(I)v}{d} \nu + Ld^2 h_u \right) f_u^\varepsilon + \left(-\frac{K(I)u}{d} \nu + Ld^2 h_v \right) f_v^\varepsilon + \\ &\quad + (\varepsilon \nu (h_u + h_v) h_u h_v) f^\varepsilon, \\ -\nu f_{vv}^\varepsilon &= \left(\frac{K(I)u}{d} \nu + Md^2 h_u \right) f_u^\varepsilon + \left(-\frac{K(I)v}{d} \nu + Md^2 h_v \right) f_v^\varepsilon + \\ &\quad + \left(\varepsilon \nu (h_u + h_v) \left(h_v^2 - \frac{1}{d^2} \right) \right) f^\varepsilon \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lema 3.10. Sejam S uma superfície com curvatura Gaussiana constante $K(I)$, em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, tal que A é uma métrica Riemanniana em S e (φ, Ω) uma parametrização isotérmica para a métrica induzida I , em S , tal que

$$\begin{aligned} \varphi^* I &= \frac{1}{d^2} (du^2 + dv^2), \\ \varphi^* II &= Jdu^2 + 2Ldudv + Mdv^2, \end{aligned}$$

onde $d : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ é definida por

$$d(u, v) = \frac{1}{2} (1 + K(I)(u^2 + v^2)).$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{2h_{uu}}{d^2} &= \left(\frac{1}{d^2} \right)_u h_u - \left(\frac{1}{d^2} \right)_v h_v + \frac{2J}{d^2} \nu, \\ \frac{2h_{uv}}{d^2} &= \left(\frac{1}{d^2} \right)_v h_u + \left(\frac{1}{d^2} \right)_u h_v + \frac{2L}{d^2} \nu, \\ \frac{2h_{vv}}{d^2} &= - \left(\frac{1}{d^2} \right)_u h_u + \left(\frac{1}{d^2} \right)_v h_v + \frac{2M}{d^2} \nu, \end{aligned}$$

onde f é a imersão de S , em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, e h é a função altura de f .

Demonstração. Seja $\pi_4 : \mathbb{R}^4(\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ a projeção canônica na quarta coordenada. Então, pelo item (a) da Proposição 1.1.4, tem-se que $h = (\pi_4 \circ f)$, e portanto segue que

$$\begin{aligned} \pi_4 \circ f_u &= (\pi_4 \circ f)_u = h_u, & \pi_4 \circ f_{uu} &= (\pi_4 \circ f)_{uu} = h_{uu}, \\ \pi_4 \circ f_v &= (\pi_4 \circ f)_v = h_v, & \pi_4 \circ f_{vv} &= (\pi_4 \circ f)_{vv} = h_{vv}, \\ \pi_4 \circ f_{uv} &= (\pi_4 \circ f)_{uv} = h_{uv}. \end{aligned}$$

Ainda, da definição de ν em (1.3) e de η em (1.2) segue que

$$\pi_4 \circ N = \nu, \quad \pi_4 \circ \eta = 0.$$

Assim, aplicando π_4 às equações do Lema 3.6, obtém-se que

$$\begin{aligned} h_{uu} &= \left(-\frac{K(I)u}{d}\right) h_u + \left(\frac{K(I)v}{d}\right) h_v + J\nu, \\ h_{uv} &= \left(-\frac{K(I)v}{d}\right) h_u + \left(-\frac{K(I)u}{d}\right) h_v + L\nu, \\ h_{vv} &= \left(\frac{K(I)u}{d}\right) h_u + \left(-\frac{K(I)v}{d}\right) h_v + M\nu, \end{aligned} \quad (3.21)$$

e, por (3.10), segue que

$$\begin{aligned} \frac{2h_{uu}}{d^2} &= \left(\frac{1}{d^2}\right)_u h_u - \left(\frac{1}{d^2}\right)_v h_v + \frac{2J}{d^2}\nu, \\ \frac{2h_{uv}}{d^2} &= \left(\frac{1}{d^2}\right)_v h_u + \left(\frac{1}{d^2}\right)_u h_v + \frac{2L}{d^2}\nu, \\ \frac{2h_{vv}}{d^2} &= -\left(\frac{1}{d^2}\right)_u h_u + \left(\frac{1}{d^2}\right)_v h_v + \frac{2M}{d^2}\nu \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lema 3.11. Sejam S uma superfície com curvatura Gaussiana constante $K(I)$, em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, tal que A é uma métrica Riemanniana em S e (φ, Ω) uma parametrização isotérmica para a métrica induzida I , em S , tal que

$$\begin{aligned} \varphi^* I &= \frac{1}{d^2}(du^2 + dv^2), \\ \varphi^* II &= edu^2 + 2fdudv + gdv^2, \end{aligned}$$

onde $d : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ é definida por

$$d(u, v) = \frac{1}{2}(1 + K(I)(u^2 + v^2)).$$

Então os símbolos de Christoffel da métrica A são dados por

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{Jc d^2 \nu h_u}{1 + c \|\nabla h\|^2} - \frac{K(I)u}{d}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{Jc d^2 \nu h_v}{1 + c \|\nabla h\|^2} + \frac{K(I)v}{d}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{Lc d^2 \nu h_u}{1 + c \|\nabla h\|^2} - \frac{K(I)v}{d}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{Lc d^2 \nu h_v}{1 + c \|\nabla h\|^2} - \frac{K(I)u}{d}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{Mc d^2 \nu h_u}{1 + c \|\nabla h\|^2} + \frac{K(I)u}{d}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{Mc d^2 \nu h_v}{1 + c \|\nabla h\|^2} - \frac{K(I)v}{d}, \end{aligned}$$

onde f é a imersão de S , em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, e h é a função altura de f .

Demonstração. Segue, da definição da forma quadrática A , em (3.3), que os coeficientes de A são dados por

$$A_{11} = \frac{1}{d^2} + c h_u^2, \quad A_{12} = A_{21} = c h_u h_v, \quad A_{22} = \frac{1}{d^2} + c h_v^2,$$

e portanto

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_{11} &= \left(\frac{1}{d^2} \right)_u + 2c h_u h_{uu}, & \frac{\partial}{\partial \varphi_2} A_{11} &= \left(\frac{1}{d^2} \right)_v + 2c h_u h_{vu}, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_{12} &= c(h_{uu} h_v + h_u h_{uv}), & \frac{\partial}{\partial \varphi_2} A_{12} &= c(h_{vu} h_v + h_u h_{vv}), \\ \frac{\partial}{\partial \varphi_1} A_{22} &= \left(\frac{1}{d^2} \right)_u + 2c h_v h_{uv}, & \frac{\partial}{\partial \varphi_2} A_{22} &= \left(\frac{1}{d^2} \right)_v + 2c h_v h_{vv}.\end{aligned}$$

Como os símbolos de Christoffel da métrica A são dados por

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_i} A_{jk} + \frac{\partial}{\partial \varphi_j} A_{ki} - \frac{\partial}{\partial \varphi_k} A_{ij} \right) A^{km},$$

com

$$(A^{ij}) = (A_{11}A_{22} - A_{12}^2)^{-1} \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix},$$

e

$$\begin{aligned}(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)^{-1} &= \left(\left(\frac{1}{d^2} + c h_u^2 \right) \left(\frac{1}{d^2} + c h_v^2 \right) - (c h_u h_v)^2 \right)^{-1} \\ &= \left(\left(\frac{1}{d^2} \right)^2 \left(1 + c \frac{h_u^2 + h_v^2}{\left(\frac{1}{d^2} \right)} \right) \right)^{-1} \\ &= \left(\left(\frac{1}{d^2} \right)^2 (1 + c \|\nabla h\|^2) \right)^{-1} \\ &=: \frac{1}{D},\end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}D\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d^2} \left(\frac{1}{d^2} \right)_u + \frac{2h_{uu}}{d^2} c h_u + c \left(\frac{1}{d^2} \right)_u h_v^2 + c \left(\frac{1}{d^2} \right)_v h_u h_v \right), \\ D\Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{d^2} \left(\frac{1}{d^2} \right)_v + \frac{2h_{uu}}{d^2} c h_v - c \left(\frac{1}{d^2} \right)_u h_u h_v + c \left(\frac{1}{d^2} \right)_v h_u^2 \right), \\ D\Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d^2} \left(\frac{1}{d^2} \right)_v + \frac{2h_{uu}}{d^2} c h_u + c \left(\frac{1}{d^2} \right)_v h_v^2 - c \left(\frac{1}{d^2} \right)_u h_u h_v \right), \\ D\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d^2} \left(\frac{1}{d^2} \right)_u + \frac{2h_{uv}}{d^2} c h_v + c \left(\frac{1}{d^2} \right)_u h_u^2 - c \left(\frac{1}{d^2} \right)_v h_u h_v \right), \\ D\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{d^2} \left(\frac{1}{d^2} \right)_u + \frac{2h_{vv}}{d^2} c h_u - c \left(\frac{1}{d^2} \right)_u h_v^2 - c \left(\frac{1}{d^2} \right)_v h_u h_v \right), \\ D\Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d^2} \left(\frac{1}{d^2} \right)_v + \frac{2h_{vv}}{d^2} c h_v + c \left(\frac{1}{d^2} \right)_u h_u h_v + c \left(\frac{1}{d^2} \right)_v h_u^2 \right),\end{aligned}$$

e, pelas equações do Lema 3.10, obtém-se que

$$\begin{aligned}
D\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d^2} \left(\frac{1}{d^2} \right)_u + \left(\frac{1}{d^2} \right)_u c h_u^2 + \left(\frac{1}{d^2} \right)_u c h_v^2 + \left(\frac{2Jc d^2 \nu h_u}{d^2} \right) \frac{1}{d^2} \right), \\
D\Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{d^2} \left(\frac{1}{d^2} \right)_v - \left(\frac{1}{d^2} \right)_v c h_u^2 - \left(\frac{1}{d^2} \right)_v c h_v^2 + \left(\frac{2Jc d^2 \nu h_v}{d^2} \right) \frac{1}{d^2} \right), \\
D\Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d^2} \left(\frac{1}{d^2} \right)_v + \left(\frac{1}{d^2} \right)_v c h_u^2 + \left(\frac{1}{d^2} \right)_v c h_v^2 + \left(\frac{2Lc d^2 \nu h_u}{d^2} \right) \frac{1}{d^2} \right), \\
D\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d^2} \left(\frac{1}{d^2} \right)_u + \left(\frac{1}{d^2} \right)_u c h_u^2 + \left(\frac{1}{d^2} \right)_u c h_v^2 + \left(\frac{2Lc d^2 \nu h_v}{d^2} \right) \frac{1}{d^2} \right), \\
D\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{d^2} \left(\frac{1}{d^2} \right)_u - \left(\frac{1}{d^2} \right)_u c h_u^2 - \left(\frac{1}{d^2} \right)_u c h_v^2 + \left(\frac{2Mc d^2 \nu h_u}{d^2} \right) \frac{1}{d^2} \right), \\
D\Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d^2} \left(\frac{1}{d^2} \right)_v + \left(\frac{1}{d^2} \right)_v c h_u^2 + \left(\frac{1}{d^2} \right)_v c h_v^2 + \left(\frac{2Mc d^2 \nu h_v}{d^2} \right) \frac{1}{d^2} \right),
\end{aligned}$$

e portanto, por (3.10), tem-se que

$$\begin{aligned}
(1 + c \|\nabla h\|^2) \Gamma_{11}^1 &= \left(Jc d^2 \nu h_u - \frac{K(I)u}{d} (1 + c \|\nabla h\|^2) \right), \\
(1 + c \|\nabla h\|^2) \Gamma_{11}^2 &= \left(Jc d^2 \nu h_v + \frac{K(I)v}{d} (1 + c \|\nabla h\|^2) \right), \\
(1 + c \|\nabla h\|^2) \Gamma_{12}^1 &= \left(Lc d^2 \nu h_u - \frac{K(I)v}{d} (1 + c \|\nabla h\|^2) \right), \\
(1 + c \|\nabla h\|^2) \Gamma_{12}^2 &= \left(Lc d^2 \nu h_v - \frac{K(I)u}{d} (1 + c \|\nabla h\|^2) \right), \\
(1 + c \|\nabla h\|^2) \Gamma_{22}^1 &= \left(Mc d^2 \nu h_u + \frac{K(I)u}{d} (1 + c \|\nabla h\|^2) \right), \\
(1 + c \|\nabla h\|^2) \Gamma_{22}^2 &= \left(Mc d^2 \nu h_v - \frac{K(I)v}{d} (1 + c \|\nabla h\|^2) \right),
\end{aligned}$$

e segue que

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{Jc d^2 \nu h_u}{1 + c \|\nabla h\|^2} - \frac{K(I)u}{d}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{Jc d^2 \nu h_v}{1 + c \|\nabla h\|^2} + \frac{K(I)v}{d}, \\
\Gamma_{12}^1 &= \frac{Lc d^2 \nu h_u}{1 + c \|\nabla h\|^2} - \frac{K(I)v}{d}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{Lc d^2 \nu h_v}{1 + c \|\nabla h\|^2} - \frac{K(I)u}{d}, \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{Mc d^2 \nu h_u}{1 + c \|\nabla h\|^2} + \frac{K(I)u}{d}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{Mc d^2 \nu h_v}{1 + c \|\nabla h\|^2} - \frac{K(I)v}{d} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

A seguir será apresentado um teorema acerca do par (A, II) .

Teorema 3.12. Seja S uma superfície com curvatura Gaussiana constante $K(I)$, em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, tal que A é uma métrica Riemanniana em S , e II a 2ª forma fundamental de S . Então

- (a) (A, II) é um par de Codazzi,
- (b) $K(A, II)$ é constante.

Demonstração.

(a) Seja (φ, Ω) uma parametrização isotérmica para a métrica I , tal que

$$\begin{aligned}\varphi^* I &= \frac{1}{d^2}(du^2 + dv^2), \\ \varphi^* II &= Jdu^2 + 2Ldudv + Mdv^2,\end{aligned}$$

onde $d : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ é definida por

$$d(u, v) = \frac{1}{2}(1 + K(I)(u^2 + v^2)).$$

Então, tem-se que

$$\varphi^* dh^2 = h_u^2 du^2 + 2h_u h_v dudv + h_v^2 dv^2,$$

e segue, da definição de A , em (3.3), que

$$\varphi^* A = \left(\frac{1}{d^2} + c h_u^2 \right) du^2 + (2c h_u h_v) dudv + \left(\frac{1}{d^2} + c h_v^2 \right) dv^2.$$

Então, pela expressão dos símbolos de Christoffel da métrica A , no Lema 3.11, segue que

$$\begin{aligned}J\Gamma_{12}^1 + L(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - M\Gamma_{11}^2 &= \\ &= J \left(\frac{Lc d^2 \nu h_u}{1 + c \|\nabla h\|^2} - \frac{K(I)v}{d} \right) + L \left(\frac{Lc d^2 \nu h_v}{1 + c \|\nabla h\|^2} - \frac{Jc d^2 \nu h_u}{1 + c \|\nabla h\|^2} \right) + \\ &\quad - M \left(\frac{Jc d^2 \nu h_v}{1 + c \|\nabla h\|^2} + \frac{K(I)v}{d} \right) \\ &= \left(-\frac{K(I)v}{d} \right) (J + M) + \left(-\frac{(JM - L^2)c d^2 \nu h_v}{1 + c \|\nabla h\|^2} \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J\Gamma_{22}^1 + L(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - M\Gamma_{12}^2 &= \\ &= J \left(\frac{Mcd^2 \nu h_u}{1 + c \|\nabla h\|^2} + \frac{K(I)u}{d} \right) + L \left(\frac{Mcd^2 \nu h_v}{1 + c \|\nabla h\|^2} - \frac{Lcd^2 \nu h_u}{1 + c \|\nabla h\|^2} \right) + \\ &\quad - M \left(\frac{Lcd^2 \nu h_v}{1 + c \|\nabla h\|^2} - \frac{K(I)u}{d} \right) \\ &= \left(\frac{K(I)u}{d} \right) (J + M) + \left(\frac{(JM - L^2)cd^2 \nu h_u}{1 + c \|\nabla h\|^2} \right).\end{aligned}$$

Mas, pelas equações do Lema 3.8 e pela definição de c em (3.4), segue que

$$c^{-1} = (-1 + \varepsilon K(I)) = \varepsilon(JM - L^2)d^4 - \|\nabla h\|^2,$$

e multiplicando a igualdade anterior por c , obtém-se que

$$1 = \frac{\varepsilon(JM - L^2)c d^4}{1 + c \|\nabla h\|^2},$$

ou seja,

$$\frac{\varepsilon}{d^2} = \frac{(JM - L^2)c d^2}{1 + c \|\nabla h\|^2}.$$

Assim

$$\begin{aligned} J\Gamma_{12}^1 + L(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - M\Gamma_{11}^2 &= \left(-\frac{K(I)v}{d}\right)(J+M) + \left(-\varepsilon\frac{\nu h_v}{d^2}\right), \\ J\Gamma_{22}^1 + L(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - M\Gamma_{12}^2 &= \left(\frac{K(I)u}{d}\right)(J+M) + \left(\varepsilon\frac{\nu h_u}{d^2}\right), \end{aligned}$$

e, pelo Lema 3.8, segue que

$$\begin{aligned} J\Gamma_{12}^1 + L(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - M\Gamma_{11}^2 &= J_v - L_u, \\ J\Gamma_{22}^1 + L(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - M\Gamma_{12}^2 &= L_v - M_u, \end{aligned}$$

ou seja, (A, II) é um par de Codazzi.

- (b) Segue, da Proposição 3.3, que $K(A, II) = K(I) - \varepsilon$, e como $K(I)$ é constante, tem-se que $K(A, II)$ é constante ■

3.1 Teorema de tipo Hilbert

O objetivo central desta seção é obter um resultado análogo ao Teorema de Hilbert (ver Introdução), para superfícies de $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$. Assim, alguns lemas serão apresentados, para facilitar a demonstração do teorema. Nestes lemas já será possível notar o contraste com o caso de superfícies em $\mathbb{R}^3$ (teorema de Hilbert), ao substituir a condição de curvatura Gaussiana negativa, pela condição de curvatura Gaussiana menor que -1 , para superfícies em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$.

Lema 3.1.1. Seja S uma superfície completa, com curvatura Gaussiana $K(I) < -1$, em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$. Então A é uma métrica Riemanniana completa.

Demonstração. Segue, diretamente, da Proposição 3.5, que A é uma métrica Riemanniana. Ainda, A é completa, pois

- Quando $\varepsilon = 1$, tem-se que $c = (K(I) - 1)^{-1}$.

Mas, como $K(I) < -1$, segue que $K(I) - 1 < -2$, ou seja,

$$\begin{aligned} (K(I) - 1)^{-1} &< 0, \\ (K(I) - 1)^{-1} &> -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

e portanto

$$-\frac{1}{2} < c < 0. \quad (3.22)$$

Também, segue da desigualdade de Schwarz que

$$|I(\nabla h, w)| \leq \|\nabla h\| \cdot \|w\|,$$

para todo $w \in \Gamma(TS)$ e, como pelo item (c) da Proposição 1.1.4, tem-se que $\|\nabla h\|^2 \leq 1$, segue que

$$I(\nabla h, w)^2 \leq \|w\|^2. \quad (3.23)$$

Logo, por (3.22) e (3.23), tem-se que

$$cI(\nabla h, w)^2 \geq c\|w\|^2,$$

e portanto

$$\|w\|^2 + c I(\nabla h, w)^2 \geq (c+1)\|w\|^2,$$

e segue, pela definição de A em (3.3), que

$$A(w) \geq (c+1)I(w),$$

ou seja,

$$A \geq (c+1)I. \quad (3.24)$$

- Quando $\varepsilon = -1$, tem-se que $c = (-K(I)-1)^{-1}$. Mas, como $K(I) < -1$, segue que $-K(I) > 1$, ou seja, $(-K(I)-1)^{-1} > 0$ e portanto $c > 0$.

Assim, tem-se que $c dh^2 > 0$, e portanto

$$A = I + c dh^2 \geq I. \quad (3.25)$$

Assim, por (3.24) e (3.25), tem-se que A é maior ou igual a uma métrica completa, ou seja, A é completa ■

Lema 3.1.2. Seja S uma superfície com curvatura Gaussiana constante $K(I) < -1$, em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$. Então a curvatura Gaussiana de S , munida da métrica A , é dada por

$$K(A) = \frac{(1+c)K(I) - \varepsilon c(1 - \|\nabla h\|^2)^2}{(1+c\|\nabla h\|^2)^2}.$$

Demonstração. Seja (φ, Ω) uma parametrização isotérmica na métrica induzida I , em S , tal que

$$\begin{aligned} \varphi^* I &= \frac{1}{d^2}(du^2 + dv^2), \\ \varphi^* II &= Jdu^2 + 2Ldudv + Mdv^2, \end{aligned}$$

onde $d : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ é definida por

$$d(u, v) = \frac{1}{2}(1 + K(I)(u^2 + v^2)).$$

Então, tem-se que

$$\varphi^* dh^2 = h_u^2 du^2 + 2h_u h_v dudv + h_v^2 dv^2,$$

e segue, da definição de A em (3.3), que

$$\varphi^* A = \left(\frac{1}{d^2} + c h_u^2 \right) du^2 + (2c h_u h_v) dudv + \left(\frac{1}{d^2} + c h_v^2 \right) dv^2.$$

Ainda, os coeficientes do tensor de curvatura da métrica A são dados por

$$\begin{aligned} R_{ijks} &= A \left(R \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_i}, \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi_k}, \frac{\partial}{\partial \varphi_s} \right) \\ &= \sum_{p=1}^2 \left(\sum_{l=1}^2 \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^p - \sum_{l=1}^2 \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^p + \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \Gamma_{ik}^p - \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \Gamma_{jk}^p \right) g_{ps}, \end{aligned}$$

onde Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel de A .

Logo, como $g_{ij} = 0$, para $i \neq j$, pois φ é isotérmico, segue que

$$R_{ijij} = \left(\sum_{l=1}^2 \Gamma_{ii}^l \Gamma_{jl}^j - \sum_{l=1}^2 \Gamma_{ji}^l \Gamma_{il}^j + \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \Gamma_{ii}^j - \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \Gamma_{ji}^j \right) g_{jj}.$$

Mas

$$K(A) = \frac{R_{1212}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} = \frac{R_{1212}}{A_{11}A_{22}},$$

e portanto

$$\begin{aligned} K(A) &= \left(\sum_{l=1}^2 \Gamma_{11}^l \Gamma_{2l}^2 - \sum_{l=1}^2 \Gamma_{21}^l \Gamma_{1l}^2 + \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \Gamma_{11}^2 - \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \Gamma_{21}^2 \right) \frac{1}{A_{11}} \\ &= d^2 (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{1l}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2 + (\Gamma_{11}^2)_u - (\Gamma_{12}^2)_v). \end{aligned}$$

Logo, por (3.21), e pelas equações do Lema 3.11, tem-se que

$$\begin{aligned} K(A) &= \frac{K(I)(1 + c h_u d^2 (h_u + u d(J + M)\nu)) - c h_u d^4 (h_u d^2 (JM - L^2) + (L_v - M_u)\nu)}{1 + c \|\nabla h\|^2} + \\ &+ \frac{c d^4 (JM - L^2)\nu^2}{(1 + c \|\nabla h\|^2)^2}, \end{aligned}$$

e, pelas equações do Lema 3.8 e pelo item (c) da Proposição 1.1.4, segue que

$$K(A) = \frac{(1 + c)K(I) - \varepsilon c (1 - \|\nabla h\|^2)^2}{(1 + c \|\nabla h\|^2)^2} \quad \blacksquare$$

Lema 3.1.3. Seja S uma superfície orientada e completa, com curvatura Gaussiana constante $K(I) < -1$, em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$. Então

$$\inf_{p \in S} |K(A)_p| > 0.$$

Demonstração. Como $K(I) < -1$, segue que $-c^{-1} > 2$, quando $\varepsilon = 1$, e $-c^{-1} < 0$, quando $\varepsilon = -1$. Logo $-c^{-1} \notin [0, 1]$. Assim é possível definir $f : [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, por

$$f(x) = \frac{(1 + c)K(I) - \varepsilon c (1 - x)^2}{(1 + c x)^2}.$$

Segue, da definição, que f é monótona e portanto

$$\min\{f(0), f(1)\} \leq f(x) \leq \max\{f(0), f(1)\},$$

para todo $x \in [0, 1]$. Logo, por (3.4), tem-se que

$$f(0) = (1 + c)K(I) - \varepsilon c = K(I) + \varepsilon c(\varepsilon K(I) - 1) = K(I) + \varepsilon,$$

e

$$f(1) = \frac{(1 + c)K(I)}{(1 + c)^2} = K(I) \frac{\varepsilon K(I) - 1}{\varepsilon K(I)} = K(I) - \frac{1}{\varepsilon} = K(I) - \varepsilon,$$

e portanto, tem-se que

$$\begin{aligned} \min\{f(0), f(1)\} &= \min\{K(I) + \varepsilon, K(I) - \varepsilon\} = K(I) - 1, \\ \max\{f(0), f(1)\} &= \max\{K(I) + \varepsilon, K(I) - \varepsilon\} = K(I) + 1, \end{aligned}$$

e segue que

$$K(I) - 1 \leq f(x) \leq K(I) + 1 < 0.$$

Mas, pelo item (c) da Proposição 1.1.4, tem-se que $\|\nabla h(p)\|^2 \in [0, 1]$, para todo $p \in S$, e portanto, pelo Lema 3.1.2, segue que $f(\|\nabla h(p)\|^2) = K(A)|_p$.

Assim

$$K(I) - 1 \leq K(A)_p \leq K(I) + 1 < 0,$$

e portanto $\inf_{p \in S} |K(A)|_p > 0$ ■

O teorema a seguir (ver [Alb09]) será utilizado na demonstração do Teorema de tipo Hilbert, e uma demonstração do mesmo pode ser encontrada em [Wei96] e [Wis72].

Teorema 3.1.4. Seja S uma superfície orientável e $(Q, \overline{Q})$ um par de Codazzi, com curvatura extrínseca $K(Q, \overline{Q})$ negativa e constante e tal que Q é completa. Então

$$\inf_{p \in S} |K(Q)|_p = 0.$$

Teorema 3.1.5 (de tipo Hilbert). Não existe uma superfície orientada, completa e com curvatura Gaussiana constante $K(I) < -1$, em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$.

Demonstração. Suponha que existe uma imersão $f : S \rightarrow \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ completa e com curvatura Gaussiana constante $K(I) < -1$.

Então segue, do Lema 3.1.1, que A é uma métrica Riemanniana completa em S e portanto, pelo Teorema 3.12, tem-se que (A, II) é um par de Codazzi, com curvatura extrínseca $K(A, II)$ constante. Ainda, pela Proposição 3.3, tem-se que

$$K(A, II) = K(I) - \varepsilon < -1 - \varepsilon \leq 0.$$

Logo, pelo Teorema 3.1.4, tem-se que

$$\inf_{p \in S} |K(A)|_p = 0.$$

Mas, pelo Lema 3.1.3, tem-se que

$$\inf_{p \in S} |K(A)|_p > 0,$$

o que é uma contradição.

Assim, não existe uma imersão f completa e com curvatura Gaussiana constante $K(I) < -1$ ■

3.2 Teorema de tipo Liebmann

O objetivo central desta seção é obter um resultado análogo ao Teorema de Liebmann (ver Introdução), para superfícies em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$. Algumas definições e notações adicionais serão necessárias no decorrer da seção.

Uma estrutura complexa em uma 2-variedade M é um atlas maximal $\{z_i : U_i \subset M \rightarrow \mathbb{C}\}_{i \in I}$, onde $z_j \circ z_i^{-1}$ é holomorfa, para todo $i, j \in I$. Uma 2-variedade munida de uma estrutura complexa é dita uma superfície de Riemann.

Ainda, dada uma 2-variedade M , será estabelecida a seguinte relação de equivalência no espaço das métricas de M . Se $g, \bar{g}$ são duas métricas de M , então g será dita equivalente a $\bar{g}$ se, e somente se existe $\lambda \in C^\infty(M, \mathbb{R}_+)$ tal que $g = \lambda \bar{g}$. Uma classe de equivalência desta relação será dita uma estrutura conforme em M .

Seja (M, g) uma superfície orientável. Então existe uma única estrutura complexa $R_g = \{z_i : U_i \subset M \rightarrow \mathbb{C}\}_{i \in I}$, tal que, localmente,

$$g = \lambda_i dz_i d\bar{z}_i,$$

com $\lambda_i \in C^\infty(M, \mathbb{R}_+)$, para todo $i \in I$. Este fato mostra que existe uma correspondência entre as estruturas conformes e as estruturas complexas. Uma prova dessa existência pode ser encontrada, por exemplo, em [Jos06].

Seguem alguns lemas (ver [Mil80]), que facilitarão a demonstração do Teorema de tipo Liebmann.

Lema 3.2.1. Seja M uma 2-variedade, Q uma métrica Riemanianna em M , $\bar{Q}$ uma forma bilinear definida positiva em M , e $R_{\bar{Q}}$ a estrutura conforme induzida, em M , por $\bar{Q}$. Se $(Q, \bar{Q})$ é um par de Codazzi, tal que $K(Q, \bar{Q})$ é constante, então a $(2, 0)$ -parte de Q , na estrutura $R_{\bar{Q}}$, é holomorfa.

Demonstração. Seja

$$\begin{aligned} Q &= E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2 \\ &= \frac{1}{4} (E - G - 2iF) dz^2 + \frac{1}{2} (E + G) dz d\bar{z} + \frac{1}{4} (E - G + 2iF) d\bar{z}^2, \\ \bar{Q} &= \lambda dx^2 + \lambda dy^2 = \lambda dz d\bar{z}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

na estrutura conforme $R_{\bar{Q}}$.

Como $(Q, \bar{Q})$ é um par de Codazzi, tem-se que

$$\lambda_y = \lambda \Gamma_{12}^1 - \lambda \Gamma_{11}^2, \quad -\lambda_x = \lambda \Gamma_{22}^1 - \lambda \Gamma_{12}^2,$$

ou seja,

$$\frac{\lambda_y}{\lambda} = \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2, \quad \frac{\lambda_x}{\lambda} = \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^1. \quad (3.27)$$

Defina $D := EG - F^2$. Então

$$K(Q, \bar{Q}) = \frac{\lambda^2}{D},$$

e, como $K(Q, \bar{Q})$ é constante, segue que

$$\left(\frac{\lambda^2}{D} \right)_x = 0 = \left(\frac{\lambda^2}{D} \right)_y,$$

ou seja,

$$2\lambda\lambda_x D - \lambda^2 D_x = 0 = 2\lambda\lambda_y D - \lambda^2 D_y,$$

e, como $\lambda > 0$, tem-se que

$$2\lambda_x D - \lambda D_x = 0 = 2\lambda_y D - \lambda D_y,$$

ou seja,

$$\frac{\lambda_x}{\lambda} = \frac{1}{2} \frac{D_x}{D}, \quad \frac{\lambda_y}{\lambda} = \frac{1}{2} \frac{D_y}{D}. \quad (3.28)$$

Logo, de (3.27) e (3.28), segue que

$$\frac{1}{2} \frac{D_x}{D} = \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^1, \quad \frac{1}{2} \frac{D_y}{D} = \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2. \quad (3.29)$$

Mas, como os símbolos de Christoffel de Q são dados por

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 ((Q_{jk})_{x_i} + (Q_{ki})_{x_j} - (Q_{ij})_{x_k}) Q^{km},$$

com

$$(Q^{ij}) = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} Q_{22} & -Q_{12} \\ -Q_{21} & Q_{11} \end{bmatrix},$$

segue que

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2D} (E_x G - (2F_x - E_y)F), & \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2D} (-E_x F + (2F_x - E_y)E), \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2D} (E_y G - G_x F), & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2D} (-E_y F + G_x E), \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2D} ((2F_y - G_x)F + G_y E), & \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2D} (-(2F_y - G_x)G - G_y F), \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2D} (E_x G + G_x E - 2F_x F) = \frac{1}{2} \frac{D_x}{D}, \\ \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2D} (E_y G + G_y E - 2F_y F) = \frac{1}{2} \frac{D_y}{D}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Logo, de (3.29) e (3.30), segue que

$$\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 = 0 = \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{11}^2,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 = (G(E_x - G_x + 2F_y) + F(E_y - G_y - 2F_x)), \\ 0 &= \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{11}^2 = (-E(E_y - G_y - 2F_x) - F(E_x - G_x + 2F_y)). \end{aligned} \tag{3.31}$$

Suponha que $E_x - G_x + 2F_y \neq 0$. Então $E_y - G_y - 2F_x \neq 0$ e $F \neq 0$, pois caso contrário, seguiria que $G(E_x - G_x + 2F_y) = 0$, e portanto $G = 0$ (absurdo). Logo

$$\frac{F}{G} = -\frac{E_x - G_x + 2F_y}{E_y - G_y - 2F_x} = \frac{E}{F},$$

e portanto $EG - F^2 = 0$ (absurdo).

Assim, por (3.31), tem-se que $E_x - G_x + 2F_y = 0$ e $E_y - G_y - 2F_x = 0$, ou seja, $(E - G)_x = (-2F)_y$ e $(E - G)_y = -(-2F)_x$.

Logo a função $E - G - 2iF$ satisfaz as equações de Cauchy-Riemann e portanto é holomorfa.

Assim, segue, de (3.26), que a $(2, 0)$ -parte de Q , na estrutura $R_{\overline{Q}}$, é holomorfa ■

Lema 3.2.2. Seja S uma superfície orientável e completa, com curvatura Gaussiana $K(I) > \max\{0, \varepsilon\}$, em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$. Então II é definida.

Demonstração. Como $K(I) > \max\{0, \varepsilon\}$, segue que

$$K(I) - \varepsilon\nu^2 > \max\{0, \varepsilon\} - \varepsilon\nu^2 > 0.$$

Ainda, pelo item (b) da Proposição 3.1 e pelo do Corolário 3.2, segue que

$$K(I) = K(I, II) + \varepsilon(1 - \|\nabla h\|^2) = \det S_N + \varepsilon\nu^2$$

e portanto $\det S_N > 0$.

Sejam e_1, e_2 os autovetores de S_N e k_1, k_2 os respectivos autovalores (curvaturas principais). Então, tem-se que $k_1 k_2 > 0$.

Logo, se $II(v) = 0$, tem-se que

$$0 = II(\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2) = I(S_N(\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2), \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2) = k_1 \mu_1^2 + k_2 \mu_2^2,$$

onde $v = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2$, e como $k_1 k_2 > 0$, segue que

$$k_1 \mu_1^2 = 0, \quad k_2 \mu_2^2 = 0,$$

e como $k_1 \neq 0 \neq k_2$, segue que $\mu_1^2 = 0 = \mu_2^2$, ou seja, $v = 0$.

Assim, II é definida ■

Lema 3.2.3. Seja S uma superfície orientável e completa, com curvatura Gaussiana constante $K(I) > \max.\{0, \varepsilon\}$, em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$. Então existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $II = \lambda A$ e $\lambda^2 = K(I) - \varepsilon$.

Demonstração. Segue, do Lema 3.2.2, que II é definida. Assuma, sem perda de generalidade, que II é definida positiva.

Seja R_{II} a estrutura conforme induzida por II , em S , e

$$\begin{aligned} A &= A_{zz} dz^2 + A_{z\bar{z}} dz d\bar{z} + A_{\bar{z}\bar{z}} d\bar{z}^2, \\ II &= \mu dz d\bar{z}, \end{aligned}$$

na estrutura conforme R_{II} .

Como $K(I) > \max.\{0, \varepsilon\} \geq 0$, segue, da Proposição 3.5, que A é uma métrica Riemanniana e portanto, pela Proposição 3.12, tem-se que (A, II) é um par de Codazzi e $K(A, II)$ é constante.

Logo, aplicando o Lema 3.2.1 ao par (A, II) , tem-se que A_{zz} (a $(2, 0)$ -parte de A) é holomorfa, na estrutura R_{II} .

Como $K(I) > 0$ e S é orientável e completa segue, pelo Corolário 1.1.7, que S é uma esfera topológica.

Logo, como $A_{zz} dz^2$ é uma forma quadrática holomorfa e S é uma esfera topológica, segue que $A_{zz} = 0$, para a estrutura R_{II} . Mas, $A_{\bar{z}\bar{z}}$ (a $(0, 2)$ -parte de A) é o conjugado de A_{zz} (ver (3.26)) e portanto $A_{\bar{z}\bar{z}} = 0$.

Assim

$$\begin{aligned} A &= A_{z\bar{z}} dz d\bar{z}, \\ II &= \mu dz d\bar{z}, \end{aligned}$$

ou seja, existe $\lambda : S \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $II = \lambda A$. Logo

$$K(A, II) = \frac{(\lambda A_{11})(\lambda A_{22}) - \lambda^2 A_{12}^2}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} = \lambda^2,$$

e, pela Proposição 3.3, tem-se que

$$\lambda^2 = K(I) - \varepsilon,$$

e como $K(I)$ é constante, tem-se que λ é constante ■

Lema 3.2.4. Seja S uma superfície orientável e completa, com curvatura Gaussiana constante $K(I) > \max.\{0, \varepsilon\}$, em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned} \nu &= \sqrt{K(I)} \tanh \left(-\sqrt{\frac{K(I)}{K(I) - 1}} h + c_1 \right) && \text{quando } \varepsilon = 1, \\ \nu &= \sqrt{K(I)} \tan \left(-\sqrt{\frac{K(I)}{K(I) + 1}} h + c_2 \right) && \text{quando } \varepsilon = -1, \end{aligned}$$

onde h é a função altura de S e c_1 e c_2 são constantes.

Demonstração. Seja (φ, Ω) uma parametrização isotérmica para a métrica I , tal que

$$\begin{aligned}\varphi^* I &= \frac{1}{d^2}(du^2 + dv^2), \\ \varphi^* II &= Jdu^2 + 2Ldudv + Mdv^2,\end{aligned}$$

onde $d : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ é definida por

$$d(u, v) = \frac{1}{2}(1 + K(I)(u^2 + v^2)).$$

Então, tem-se que

$$\varphi^* dh^2 = h_u^2 du^2 + 2h_u h_v dudv + h_v^2 dv^2,$$

e segue, da definição de A em (3.3), que

$$\varphi^* A = \left(\frac{1}{d^2} + c h_u^2 \right) du^2 + (2c h_u h_v) dudv + \left(\frac{1}{d^2} + c h_v^2 \right) dv^2.$$

Ainda, segue, da definição de ν em (1.3), que

$$\left\langle N_u, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle_\varepsilon = \nu_u, \quad \left\langle N_v, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle_\varepsilon = \nu_v,$$

uma vez que $\partial/\partial t$ é paralelo.

Logo, por (3.16), tem-se que

$$\begin{aligned}\left\langle Jd^2 f_u + Ld^2 f_v - \varepsilon \nu h_u \eta, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle_\varepsilon &= -\nu_u, \\ \left\langle Ld^2 f_u + Md^2 f_v - \varepsilon \nu h_v \eta, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle_\varepsilon &= -\nu_v,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}Jd^2 h_u + Ld^2 h_v &= -\nu_u, \\ Ld^2 h_u + Md^2 h_v &= -\nu_v.\end{aligned}$$

Segue, do Lema 3.2.3, que existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $II = \lambda A$, e portanto

$$J = \lambda \left(c h_u^2 + \frac{1}{d^2} \right), \quad L = \lambda c h_u h_v, \quad M = \lambda \left(c h_v^2 + \frac{1}{d^2} \right),$$

e, pelo item (c) da Proposição 1.1.4, tem-se que

$$\begin{aligned}Jd^2 h_u + Ld^2 h_v &= \left(\lambda \left(c h_u^2 + \frac{1}{d^2} \right) \right) d^2 h_u + (\lambda c h_u h_v) d^2 h_v \\ &= \lambda h_u (1 + c d^2 h_u^2 + c d^2 h_v^2) \\ &= \lambda h_u (1 + c \|\nabla h\|^2) \\ &= \lambda h_u (1 + c(1 - \nu^2)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ld^2h_u + Md^2h_v &= \left(\lambda \left(ch_v^2 + \frac{1}{d^2} \right) \right) d^2h_v + (\lambda ch_uh_v) d^2h_u \\
&= \lambda h_v (1 + cd^2h_u^2 + cd^2h_v^2) \\
&= \lambda h_v (1 + c\|\nabla h\|^2) \\
&= \lambda h_v (1 + c(1 - \nu^2)).
\end{aligned}$$

Assim

$$-\nu_u = \lambda h_u (1 + c(1 - \nu^2)), \quad -\nu_v = \lambda h_v (1 + c(1 - \nu^2)),$$

ou seja,

$$\lambda h_u = \frac{-\nu_u}{(1 + c(1 - \nu^2))}, \quad \lambda h_v = \frac{-\nu_v}{(1 + c(1 - \nu^2))},$$

e, por integração, obtém-se que

$$\begin{aligned}
\nu &= \sqrt{K(I)} \tanh \left(-\sqrt{\frac{K(I)}{K(I) - 1}} h + c_1 \right), & \text{quando } \varepsilon = 1, \\
\nu &= \sqrt{K(I)} \tan \left(-\sqrt{\frac{K(I)}{K(I) + 1}} h + c_2 \right), & \text{quando } \varepsilon = -1 \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

A seguir será apresentado um teorema de analiticidade de soluções de sistemas equações diferenciais elípticas quasi-lineares. Este teorema foi, primeiramente, demonstrado por Bernstein, para o caso de uma única equação diferencial elíptica não linear. O enunciado que será apresentado pode ser encontrado em [Nir73] e uma demonstração, do mesmo, pode ser encontrada em [Mor08]. Antes do teorema, a apresentação de algumas definições básicas se faz necessária.

Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^{2+6n}$ abertos, $f \in C^l(U; \mathbb{R}^n)$ e $\{F_k\}_{k=1, \dots, \bar{n}} \subset C^m(\Omega; \mathbb{R})$, com $\bar{n} \geq n$. Então o sistema de equações de 2^a ordem

$$F_k(x_1, x_2, f, D^1f, D^2f, D^{(1,1)}f, D^{(1,2)}f, D^{(2,2)}f) = 0, \quad k = 1, \dots, \bar{n},$$

onde $D^i f := (D^i f_1, D^i f_2, \dots, D^i f_n)$, com $D^i f_r = (f_r)_{x_i}$ e $D^{(i,j)} f := (D^{(i,j)} f_1, D^{(i,j)} f_2, \dots, D^{(i,j)} f_n)$, com $D^{(i,j)} f_r = (f_r)_{x_i x_j}$, será dito elíptico se, e somente se a sua linearização

$$\sum_{\substack{|\alpha| \leq 2 \\ r \leq n}} \underbrace{\frac{\partial F_k}{\partial D^\alpha f_r}(x_1, x_2, f, D^1f, D^2f, D^{(1,1)}f, D^{(1,2)}f, D^{(2,2)}f)}_{a_\alpha^{kr}} D^\alpha g_r, \quad k = 1, \dots, \bar{n},$$

é um sistema de equações lineares elíptico de 2^a ordem ou, equivalentemente, se para todo $y \in \mathbb{R}^2/\{0\}$ e para todo $(x_1, x_2) \in U$ a matriz $\left(\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha^{kr} y_\alpha \right)_{kr}$ tem posto n .

Em particular, se $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$, o sistema de $3n$ equações

$$\begin{aligned}
A(x_1, x_2, f, D^1f, D^2f) f_{x_1 x_1} &= B_{11}(x_1, x_2, f, D^1f, D^2f) f_{x_1} + C_{11}(x_1, x_2, f, D^1f, D^2f) f_{x_2} + \\
&\quad + D_{11}(x_1, x_2, f, D^1f, D^2f) \\
A(x_1, x_2, f, D^1f, D^2f) f_{x_1 x_2} &= B_{12}(x_1, x_2, f, D^1f, D^2f) f_{x_1} + C_{12}(x_1, x_2, f, D^1f, D^2f) f_{x_2} + \\
&\quad + D_{12}(x_1, x_2, f, D^1f, D^2f) \\
A(x_1, x_2, f, D^1f, D^2f) f_{x_2 x_2} &= B_{22}(x_1, x_2, f, D^1f, D^2f) f_{x_1} + C_{22}(x_1, x_2, f, D^1f, D^2f) f_{x_2} + \\
&\quad + D_{22}(x_1, x_2, f, D^1f, D^2f)
\end{aligned}$$

com $A(x_1, x_2, f, D^1 f, D^2 f) \neq 0$, é elíptico, pois a matriz

$$\begin{pmatrix} Ay_1^2 (\text{Id})_{n \times n} \\ Ay_1 y_2 (\text{Id})_{n \times n} \\ Ay_2^2 (\text{Id})_{n \times n} \end{pmatrix}$$

tem posto n , onde $(\text{Id})_{n \times n}$ é a matriz identidade de dimensão $n \times n$.

Teorema 3.2.5 (Analiticidade de Bernstein). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{2+6n}$ um aberto e $F_k \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$, tal que

$$F_k(x_1, x_2, f, D^1 f, D^2 f, D^{(1,1)} f, D^{(1,2)} f, D^{(2,2)} f) = 0, \quad k = 1, \dots, \bar{n},$$

é um sistema de equações elíptico de 2^a ordem. Se $f_0 \in C^3$ é solução do sistema e F_k é analítica real, em todos os seus argumentos, então f_0 é analítica real.

Além do teorema de analiticidade, para a demonstração do Teorema de tipo Liebmann, no final desta seção, será necessário o Teorema de uniformização de Koebe, cujo enunciado, apresentado a seguir, pode ser encontrado em [Lin11], onde também se encontra uma demonstração do mesmo.

Teorema 3.2.6 (Teorema de uniformização de Koebe). Seja S uma superfície de Riemann simplesmente conexa. Então S é conformemente equivalente a apenas uma das seguintes superfícies de Riemann

- (a) uma esfera de Riemann $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$,
- (b) um plano complexo $\mathbb{R}^2$,
- (c) um disco unitário aberto $B(0, 1)$.

A seguir serão apresentadas duas proposições acerca da unicidade de imersões completas com curvatura Gaussiana constante $K(I) > \max\{0, \varepsilon\}$, em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$. As duas proposições demonstrarão o teorema de tipo Liebmann, no final desta seção.

Proposição 3.2.7. Sejam S uma 2-variedade e $f_1, f_2 : S \rightarrow \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ imersões completas, com curvatura Gaussiana constante $K(I) > \max\{0, \varepsilon\}$. Então $h_1 = h_2$, a menos de isometria do ambiente, onde h_i é a função altura de f_i .

Demonstração. Seja $\pi : \bar{S} \rightarrow S$ o recobrimento universal de S , e considere $\bar{S}$ com a métrica de recobrimento, ou seja, com a métrica que torna π uma isometria local.

Então $\bar{S}$ é orientável e, como S é completa e tem curvatura Gaussiana constante $K(I) > 0$, segue que $\bar{S}$ é completa e com curvatura Gaussiana constante $K(I) > 0$ e, pela Proposição 1.1.6, segue que $\bar{S}$ é compacta.

Além disso, $\bar{S}$ é simplesmente conexa. Logo, pelo Teorema 3.2.6, existe uma bijeção conforme (portanto com inversa conforme) $\Phi : \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \rightarrow \bar{S}$, onde $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ é a esfera de Riemann com a métrica

$$I = \frac{1}{d^2}(du^2 + dv^2),$$

onde $d : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ é definida por

$$d(u, v) = \frac{1}{2}(1 + K(I)(u^2 + v^2)).$$

Defina $\bar{f}_i := f_i \circ \pi \circ \Phi$, com $\bar{h}_i$ a função altura de $\bar{f}_i$.

Como $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ é compacta e $\bar{h}_i$ é contínua, para todo $i = 1, 2$, tem-se que ambas atingem o mínimo em $\bar{p}_i \in \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$.

Seja T uma isometria de $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, tal que $\bar{p} := \tilde{p}_1 = \bar{p}_2$ e $\tilde{h}_1(\tilde{p}_1) = \bar{h}_2(\bar{p}_2)$, onde $\tilde{p}_1$ é um mínimo da função altura $\tilde{h}_1$ de $T \circ \bar{f}_1$. Redefina, por um abuso de notação, $\bar{f}_1 := T \circ \bar{f}_1$ e $\bar{h}_1 := \tilde{h}_1$.

Então, da definição da forma quadrática A , em (3.3), segue que

$$\bar{A}_i = \left(\frac{1}{d^2} + c(\bar{h}_i)_u^2 \right) du^2 + (2c(\bar{h}_i)_u(\bar{h}_i)_v) dudv + \left(\frac{1}{d^2} + c(\bar{h}_i)_v^2 \right) dv^2. \quad (3.32)$$

Segue, do Lema 3.2.2, que $\bar{I}_i$ é definida. Assuma, sem perda de generalidade, que $\bar{I}_i$ é definida positiva. Logo, pelo Lema 3.2.2 e por (3.32), segue que

$$\begin{aligned} \bar{J}_i &= \sqrt{K(I) - \varepsilon} \left(\frac{1}{d^2} + c(\bar{h}_i)_u^2 \right), \\ \bar{L}_i &= \sqrt{K(I) - \varepsilon} (c(\bar{h}_i)_u(\bar{h}_i)_v), \\ \bar{M}_i &= \sqrt{K(I) - \varepsilon} \left(\frac{1}{d^2} + c(\bar{h}_i)_v^2 \right), \end{aligned}$$

e, pelas equações (3.21), tem-se que

$$\begin{aligned} (\bar{h}_i)_{uu} &= \left(-\frac{K(I)u}{d} \right) (\bar{h}_i)_u + \left(\frac{K(I)v}{d} \right) (\bar{h}_i)_v + \sqrt{K(I) - \varepsilon} \left(\frac{1}{d^2} + c(\bar{h}_i)_u^2 \right) \bar{\nu}_i, \\ (\bar{h}_i)_{uv} &= \left(-\frac{K(I)v}{d} \right) (\bar{h}_i)_u + \left(-\frac{K(I)u}{d} \right) (\bar{h}_i)_v + c\sqrt{K(I) - \varepsilon} (\bar{h}_i)_u (\bar{h}_i)_v \bar{\nu}_i, \\ (\bar{h}_i)_{vv} &= \left(\frac{K(I)u}{d} \right) (\bar{h}_i)_u + \left(-\frac{K(I)v}{d} \right) (\bar{h}_i)_v + \sqrt{K(I) - \varepsilon} \left(\frac{1}{d^2} + c(\bar{h}_i)_v^2 \right) \bar{\nu}_i. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Como $\bar{\nu}_i$ é uma função analítica de $\bar{h}_i$ (ver Lema 3.2.4), segue que $\bar{h}_i$ é solução de um sistema de equações de derivadas parciais elíptico, analítico, de 2ª ordem. Então, pelo Teorema 3.2.5, tem-se que $\bar{h}_i$ é analítica.

Logo, como $\bar{h}_1(\bar{p}) = \bar{h}_2(\bar{p})$ e $(\bar{h}_1)_u(\bar{p}) = 0 = (\bar{h}_2)_u(\bar{p})$ e $(\bar{h}_1)_v(\bar{p}) = 0 = (\bar{h}_2)_v(\bar{p})$ (pois $\bar{p}$ é um ponto de mínimo), segue, pelas equações (3.33), que as derivadas de qualquer ordem de $\bar{h}_1$ e $\bar{h}_2$ coincidem em $\bar{p}$. Mas, como $\bar{h}_1$ e $\bar{h}_2$ são analíticas, segue que $\bar{h}_1 = \bar{h}_2$ em uma vizinhança de $\bar{p}$ e, pelo princípio de prolongamento analítico, segue que $\bar{h}_1 = \bar{h}_2$, em $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$.

Assim, como $\pi \circ \Phi$ é sobrejetora, tem-se que $h_1 = h_2$, a menos de isometrias ■

Proposição 3.2.8. Sejam S uma 2-variedade e $f_1, f_2 : S \rightarrow \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ imersões completas, com curvatura Gaussiana constante $K(I) > \max\{0, \varepsilon\}$, tais que $h := h_1 = h_2$, onde h_1 e h_2 são as funções altura de f_1 e f_2 , respectivamente. Então $f_1^\varepsilon = f_2^\varepsilon$, a menos de isometria de $\mathbb{M}^2(\varepsilon)$, onde $f_i^\varepsilon := \pi_{\mathbb{M}(\varepsilon)} \circ f_i$.

Demonstração. Seguindo as notações do início da demonstração da proposição anterior, define $\bar{f}_i := f_i \circ \pi \circ \Phi$, com $\bar{h}$ a função altura de $\bar{f}_i$, onde $\pi : \bar{S} \rightarrow S$ é o recobrimento universal de S , $\Phi : \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \rightarrow \bar{S}$ é uma bijeção conforme e $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ é a esfera de Riemann com a métrica

$$I = \frac{1}{d^2}(du^2 + dv^2),$$

onde $d : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ é definida por

$$d(u, v) = \frac{1}{2}(1 + K(I)(u^2 + v^2)).$$

Como $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ é compacta e $\bar{h}$ é contínua, tem-se que $\bar{h}$ atinge o mínimo em $\bar{p} \in \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$.

Defina $\tilde{\eta} : \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ por

$$\tilde{\eta}(p, t) := (p, 0).$$

Então

$$\begin{aligned}\overline{f_i^\varepsilon} &= \pi_{\mathbb{M}(\varepsilon)} \circ \tilde{\eta} \circ \overline{f_i}, \\ \overline{\eta_i} &= i \circ \tilde{\eta} \circ \overline{f_i},\end{aligned}$$

onde $\overline{f_i^\varepsilon} := \pi_{\mathbb{M}(\varepsilon)} \circ \overline{f_i}$ e $\overline{\eta_i} := \eta \circ \overline{f_i}$. Como $\pi_{\mathbb{M}(\varepsilon)}$ é uma submersão Riemanniana e i uma imersão isométrica, segue que

$$\begin{aligned}g_{\mathbb{M}(\varepsilon)}(\overline{df_i^\varepsilon}, \overline{df_i^\varepsilon}) &= g_{\mathbb{M}(\varepsilon)}(d\pi_{\mathbb{M}(\varepsilon)} \circ d(\tilde{\eta} \circ \overline{f_i}), d\pi_{\mathbb{M}(\varepsilon)} \circ d(\tilde{\eta} \circ \overline{f_i})) \\ &= \langle d(\tilde{\eta} \circ \overline{f_i}), d(\tilde{\eta} \circ \overline{f_i}) \rangle_\varepsilon \\ &= \langle d\overline{\eta_i}, d\overline{\eta_i} \rangle_\varepsilon.\end{aligned}\tag{3.34}$$

Mas, pela equação (3.1), tem-se que

$$g_{\mathbb{M}(\varepsilon)}(\overline{df_i^\varepsilon}, \overline{df_i^\varepsilon}) = \langle d\overline{f_i} - (0, d\overline{h_i}), d\overline{f_i} - (0, d\overline{h_i}) \rangle_\varepsilon,$$

e, como $\overline{p}$ é ponto de mínimo de $\overline{h}$, segue que

$$\|d(\overline{f_i^\varepsilon})_{\overline{p}}\|_{\mathbb{M}(\varepsilon)} = \|d(\overline{f_i})_{\overline{p}}\|_\varepsilon,$$

e, como $\overline{f_i}$ é uma imersão, tem-se que

$$\ker(d(\overline{f_i^\varepsilon})_{\overline{p}}) = \ker(d(\overline{f_i})_{\overline{p}}) = \{0\},$$

Portanto, pelo teorema da função inversa, existe uma vizinhança aberta U de $\overline{p}$, tal que $(\overline{f_i^\varepsilon})|_U$ é um difeomorfismo.

Ainda, pelo Lema 3.7, segue que

$$\begin{aligned}\langle (\overline{\eta_i})_u, (\overline{\eta_i})_u \rangle_\varepsilon &= \left(\overline{h_u}^2 d^2 - 1\right)^2 \frac{1}{d^2} + (\overline{h_u} \overline{h_v} d^2)^2 \frac{1}{d^2} + \overline{\nu_i}^2 \overline{h_u}^2, \\ \langle (\overline{\eta_i})_v, (\overline{\eta_i})_v \rangle_\varepsilon &= (\overline{h_u} \overline{h_v} d^2)^2 \frac{1}{d^2} + \left(\overline{h_v}^2 d^2 - 1\right)^2 \frac{1}{d^2} + \overline{\nu_i}^2 \overline{h_v}^2, \\ \langle (\overline{\eta_i})_u, (\overline{\eta_i})_v \rangle_\varepsilon &= \left(\overline{h_u}^2 d^2 - 1\right) (\overline{h_u} \overline{h_v} d^2) \frac{1}{d^2} + (\overline{h_u} \overline{h_v} d^2) \left(\overline{h_v}^2 d^2 - 1\right) \frac{1}{d^2} + (\overline{\nu_i}^2 \overline{h_u} \overline{h_v}),\end{aligned}$$

e, como $\overline{p}$ é um ponto de mínimo e II é definida positiva tem-se, pelo item (c) da Proposição 1.1.4, que $\overline{\nu_i}(\overline{p}) = 1$ e segue, pelo Lema 3.2.4, que $\overline{\nu_1} = \overline{\nu_2}$, e portanto

$$\langle d\overline{\eta_1}, d\overline{\eta_1} \rangle_\varepsilon = \langle d\overline{\eta_2}, d\overline{\eta_2} \rangle_\varepsilon,$$

logo, por (3.34), tem-se que

$$g_{\mathbb{M}(\varepsilon)}(\overline{df_1^\varepsilon}, \overline{df_1^\varepsilon}) = g_{\mathbb{M}(\varepsilon)}(\overline{df_2^\varepsilon}, \overline{df_2^\varepsilon}).$$

Assim $F := \overline{f_2^\varepsilon} \circ (\overline{f_1^\varepsilon})^{-1} : \overline{f_1^\varepsilon}(U) \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon) \longrightarrow \overline{f_2^\varepsilon}(U) \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon)$ é uma isometria.

Seja T uma isometria de $\mathbb{M}^2(\varepsilon)$, tal que $T|_{\overline{f_1^\varepsilon}(U)} = F$. Redefina, por um abuso de notação, $\overline{f_1^\varepsilon} := T \circ \overline{f_1^\varepsilon}$.

Então, do Lema 3.2.2, segue que $\overline{II}$ é definida. Assuma, sem perda de generalidade, que $\overline{II}$ é

definida positiva. Logo, pelo Lema 3.2.2 e por (3.32), segue que

$$\begin{aligned}\bar{J} &= \sqrt{K(I) - \varepsilon} \left(\frac{1}{d^2} + c(\bar{h})_u^2 \right), \\ \bar{L} &= \sqrt{K(I) - \varepsilon} \left(c(\bar{h})_u(\bar{h})_v \right), \\ \bar{M} &= \sqrt{K(I) - \varepsilon} \left(\frac{1}{d^2} + c(\bar{h})_v^2 \right).\end{aligned}\tag{3.35}$$

Logo, pelas equações do Lema 3.9, tem-se que

$$\begin{aligned}-\bar{\nu}_i(\bar{f}_i^\varepsilon)_{uu} &= \left(-\frac{K(I)u}{d}\bar{\nu}_i + \bar{J}d^2\bar{h}_u \right) (\bar{f}_i^\varepsilon)_u + \left(\frac{K(I)v}{d}\bar{\nu}_i + \bar{J}d^2\bar{h}_v \right) (\bar{f}_i^\varepsilon)_v + \\ &\quad + \left(\varepsilon\bar{\nu}_i \left(\bar{h}_u^2 - \frac{1}{d^2} \right) \right) \bar{f}_i^\varepsilon, \\ -\bar{\nu}_i(\bar{f}_i^\varepsilon)_{uv} &= \left(-\frac{K(I)v}{d}\bar{\nu}_i + \bar{L}d^2\bar{h}_u \right) (\bar{f}_i^\varepsilon)_u + \left(-\frac{K(I)u}{d}\bar{\nu}_i + \bar{L}d^2\bar{h}_v \right) (\bar{f}_i^\varepsilon)_v + \\ &\quad + (\varepsilon\bar{\nu}_i\bar{h}_u\bar{h}_v) \bar{f}_i^\varepsilon, \\ -\bar{\nu}_i(\bar{f}_i^\varepsilon)_{vv} &= \left(\frac{K(I)u}{d}\bar{\nu}_i + \bar{M}d^2\bar{h}_u \right) (\bar{f}_i^\varepsilon)_u + \left(-\frac{K(I)v}{d}\bar{\nu}_i + \bar{M}d^2\bar{h}_v \right) (\bar{f}_i^\varepsilon)_v + \\ &\quad + \left(\varepsilon\bar{\nu}_i \left(\bar{h}_v^2 - \frac{1}{d^2} \right) \right) \bar{f}_i^\varepsilon,\end{aligned}$$

e portanto, como $\bar{\nu}_i$ é uma função de $\bar{h}$ (ver Lema 3.2.4), $\bar{J}$, $\bar{L}$ e $\bar{M}$ são funções de $(\bar{h})_u$ e $(\bar{h})_v$, pela equação (3.35), e $\bar{h}$ é analítica, pela demonstração da proposição anterior, segue que $\bar{f}_i^\varepsilon$ é solução de um sistema de equações de derivadas parciais elíptico, analítico, de 2ª ordem. Logo, pelo Teorema 3.2.5, tem-se que $\bar{f}_i^\varepsilon$ é analítica.

Como $\bar{f}_1^\varepsilon = \bar{f}_2^\varepsilon$ em U segue, pelo princípio de prolongamento analítico, que $\bar{f}_1^\varepsilon = \bar{f}_2^\varepsilon$.

Assim, como $\pi \circ \Phi$ é sobrejetora, tem-se que $\bar{f}_1^\varepsilon = \bar{f}_2^\varepsilon$, a menos de uma isometria T de $\mathbb{M}^2(\varepsilon)$ ■

Teorema 3.2.9 (de tipo Liebmann). Seja $K > \max\{0, \varepsilon\}$. Então existe uma única imersão completa com curvatura Gaussiana constante K , em $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, a menos de isometrias.

Demonstração. A existência segue dos Teoremas 2.1.5 e 2.2.8.

A seguir será provada a unicidade de S . Sejam $f_1, f_2 : S \rightarrow \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ imersões completas, com curvatura Gaussiana constante $K > \max\{0, \varepsilon\}$. Então segue, da Proposição 3.2.7, que existe uma isometria T de $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, tal que $h_1 = h_2$, onde h_1 e h_2 são as funções altura de $T \circ f_1$ e f_2 , respectivamente.

Logo, pela Proposição 3.2.8, existe uma isometria T_ε em $\mathbb{M}^2(\varepsilon)$, tal que

$$T_\varepsilon \circ \pi_{\mathbb{M}(\varepsilon)} \circ (T \circ f_1) = \pi_{\mathbb{M}(\varepsilon)} \circ f_2.$$

Como $f_i = (\pi_{\mathbb{M}(\varepsilon)} \circ f_i, h_i)$, segue que $(T_\varepsilon, Id) \circ T \circ f_1 = f_2$, ou seja, $f_1 = f_2$, a menos de uma isometria de $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ ■

Referências Bibliográficas

- [Alb09] Albuje, A. L. and Espinar, J. M. and Alías, L. J. A Hilbert-type theorem for space-like surfaces with constant Gaussian curvature in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_1$. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, 40(4):465–478, 2009. [56](#)
- [Ale07a] Aledo, J. A. and Espinar, J. M. and Gálvez, J. A. Complete surfaces of constant curvature in $H^2 \times R$ and $S^2 \times R$. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 29(3):347–363, 2007. [ix](#)
- [Ale07b] Aledo, J. A. and Espinar, J. M. and Gálvez, J. A. Surfaces with constant curvature in $S^2 \times R$ and $H^2 \times R$. Height estimates and representation. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, 38(4):533–554, 2007. [ix](#), [x](#)
- [Car83] Carmo, M. P. and Dajczer, M. Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature. *Transactions of the American Mathematical Society*, 277(2):685–709, 1983. [11](#)
- [Car12] Carmo, M. P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. SBM, 5ª edição, 2012. [ix](#), [3](#), [6](#), [7](#)
- [Che55] Chern, S. S. An elementary proof of the existence of isothermal parameter on a surface. *Proceedings of American Mathematical Society*, 6(5):771–782, 1955. [38](#)
- [Dan09] Daniel, B. Isometric immersions into $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ and applications to minimal surfaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 361(12):6255–6682, 2009. [1](#)
- [Dil08] Dillen, F. and Fastenakels, J. and der Veken, J. V. Rotation hypersurfaces in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ and applications to minimal surfaces. *Note di Matematica*, 29(1):41–54, 2008. [11](#), [12](#)
- [Gal09] Galvez, J. A. Surfaces of constant curvature in 3-dimensional space form. *Matemática Contemporânea, Winter School on Nonlinear Analysis*, 37:1–42, 2009. [ix](#)
- [Hil01] Hilbert, D. Über flächen von konstanter gausscher krümmung. *Transactions of the American Mathematical Society*, 2:87–89, 1901. [ix](#)
- [Jos06] Jost, J. *Compact Riemann Surfaces-an Introduction to Contemporary Mathematics*. Springer-Verlag, 3ª edição, 2006. [57](#)
- [Lee97] Lee, J. M. *Riemannian Manifold-an Introduction to Curvature*. Springer-Verlag, 1997. [6](#)
- [Lie99] Liebmann, H. Eine neue eigenschaft der kugel. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 2:44–55, 1899. [ix](#)
- [Lin11] Lin, I. H. *Classical Complex Analysis: a Geometric Approach-vol. 2*. World Scientific, 2011. [62](#)
- [Man11] Manfio, F. and Ruy, T. Hypersurfaces with constant sectional curvature of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. *Illinois J. of Mathematics*, 55(3):397–415, 2011. [1](#)

- [Mil80] Milnor, T. K. Abstract weingarten surfaces. *J. of Differential Geometry*, 15(3):365–380, 1980. [x](#), [37](#), [57](#)
- [Mor08] Morrey, C. B. *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*. Springer-Verlag, 2008. [x](#), [61](#)
- [Nir73] Nirenberg, L. *Lectures on linear partial differential equations*. AMS, 1973. [61](#)
- [O’N83] O’Neill, B. *Semi-Riemannian Geometry: with Applications to Relativity*. Academic Press, 1983. [15](#)
- [Wei96] Weinstein, T. *An introduction to Lorentz Surfaces*. Walter de Gruyter, 1996. [x](#), [56](#)
- [Wis72] Wissler, C. Globale tschebyscheff-netze auf riemannschen mannigfaltigkeiten und fortsetzung von flächen konstanter negativer krümmung. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 47(1):348–372, 1972. [x](#), [56](#)