**Deslocamentos Isométricos
em Espaços de Banach**

Fernando Dallapé Madeira

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Elói Medina Galego

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES e do
CNPq

São Paulo, Agosto de 2014

Deslocamentos Isométricos em Espaços de Banach

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 15/08/2014. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Elói Medina Galego (orientador) - USP
- Prof. Dr. Antonio Roberto Silva - UFRJ
- Prof. Dr. Raymundo Luiz de Alencar - ITA

Agradecimentos

Agradeço sobretudo à Deus, por me dar saúde e oportunidades para chegar nesse momento tão feliz da minha vida.

Agradeço ao meu orientador por ser sempre muito atencioso e por estar envolvido com esse trabalho até o fim. Graças à ele, estou muito mais maduro e autônomo para ampliar meu conhecimento.

Agradeço aos meus queridos pais, Sônia e Victor, por serem pessoas tão amáveis e carinhosas e não terem medido esforços para me apoiar nessa conquista.

Agradeço à minha “companheira de sempre”, Angélica Turaça, por me dar muitas demonstrações de que a vida é bela e graciosa. Esse anjo me inspira todos os dias a mudar e ser cada vez melhor.

Agradeço ao meu irmão pelos momentos divertidos e alegres, esses permitiram um equilíbrio diante de toda seriedade que este trabalho demandou.

Agradeço aos meus amigos Anderson, Antonio, Artur, Renan Marcel, Renan Sanches, Romanig, Sheldon, Silmara e Thiago.

Agradeço aos professores Antonio Roberto Silva e Raymundo Luiz de Alencar por terem aceitado fazer parte da banca avaliadora e por suas observações, sugestões e correções.

Agradeço ao CNPq e à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

MADEIRA, F. D. **Deslocamentos Isométricos em Espaços de Banach**. 2014. 84 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

Neste trabalho, estudamos a existência de deslocamentos isométricos¹ no produto de espaços de Banach, munido tanto com a norma $\|\cdot\|_\infty$ como com a norma $\|\cdot\|_1$. Em alguns casos, assumimos que pelo menos um dos espaços envolvidos no produto é estritamente convexo e isso deu origem a resultados interessantes. Ainda, exploramos os deslocamentos isométricos em $C(X)$, mostrando como classificá-los de acordo com dois tipos.

Palavras-chave: deslocamentos isométricos, deslocamentos isométricos no espaço produto, deslocamentos isométricos em $C(X)$, deslocamentos reversos, existência de deslocamentos em espaços de Banach.

¹Os termos **deslocamento isométrico** e **deslocamento reverso** foram traduzidos do inglês, respectivamente, dos termos “**isometric shift**” e “**backward shift**”.

Abstract

MADEIRA, F. D. **Deslocamentos Isométricos em Espaços de Banach.** 2014. 84 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

In this work, we study the existence of isometric shifts on the product of Banach spaces, equipped with the norms $\|\cdot\|_\infty$ or $\|\cdot\|_1$. In some cases, we assume that at least one of these spaces on the product is strictly convex and obtain interesting results. Besides, we explore isometric shifts on $C(X)$, showing how to sort them on two groups.

Keywords: Isometric shifts, isometric shifts on the product of Banach spaces, isometric shifts on $C(X)$, backward shifts, existence of isometric shifts on Banach spaces.

Sumário

Notação	v
Introdução	vi
1 Preliminares	1
1.1 Topologia - Conceitos e resultados básicos	1
1.1.1 Axiomas de separação	1
1.1.2 Redes	2
1.1.3 Compactificações de um espaço topológico	3
1.2 Noções de Álgebra	4
1.3 Noções de Análise Funcional	8
2 Deslocamentos isométricos em $c \oplus_{\infty} X$	12
2.1 Introdução	12
2.2 Definição e algumas propriedades elementares dos deslocamentos isométricos	12
2.3 Construção de deslocamentos isométricos	15
2.4 Deslocamentos isométricos em $c \oplus_{\infty} X$	21
3 Deslocamentos isométricos em $E \oplus_1 F$	32
3.1 Introdução	32
3.2 Definições e resultados básicos	32
3.3 Espaços sem deslocamentos isométricos	39
3.4 Deslocamentos reversos em Espaços de Banach	43
4 Deslocamentos isométricos em $C(X)$	49
4.1 Introdução	49
4.2 Isometrias em $C(X)$	49
4.3 Classificação dos deslocamentos isométricos em $C(X)$	55
4.4 Estudo dos deslocamentos isométricos tipo I	62
4.5 Estudo dos deslocamentos isométricos tipo II	69
Referências Bibliográficas	73

Notação

$\mathbb{N}$	o conjunto dos números inteiros estritamente positivos
$\mathbb{K}$	os corpos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
X	um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ (exceto no Capítulo 4)
ℓ_∞	o espaço de Banach das sequências em $\mathbb{K}$ que são limitadas
c	o espaço de Banach das sequências em $\mathbb{K}$ que são convergentes
c_0	o espaço de Banach das sequências em $\mathbb{K}$ que convergem para 0
$[v_1, v_2, \dots, v_n]$	o subespaço gerado pelas combinações lineares dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$
$\mathbb{K}v$	o subespaço $[v]$
B_X	a bola unitária fechada de um espaço normado X
S_X	a esfera unitária de um espaço normado X
X^*	o espaço vetorial normado dos funcionais lineares e contínuos em X
$\frac{X}{M}$	o espaço quociente de X por um subespaço M
$X \oplus Y$	o espaço vetorial produto de dois espaços vetoriais normados X e Y
$X \oplus_\infty Y$	o espaço produto munido com a norma $\ \cdot\ _\infty$
$X \oplus_1 Y$	o espaço produto munido com a norma $\ \cdot\ _1$
$Re(z)$	a parte real de um número complexo z
$Im(z)$	a parte imaginária de um número complexo z
T	uma transformação linear
$KerT$	o núcleo de uma transformação linear T
ImT	a imagem de uma transformação linear T

Particularmente, para $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$:

ℓ_p	o espaço de Banach das sequências $(x_n)_n$ em $\mathbb{K}$, tais que $\sum_{j=1}^{\infty} x_j ^p < \infty$
----------	---

Exclusivamente no Capítulo 4:

X	um espaço topológico compacto e Hausdorff
$C(X)$	o espaço das funções contínuas em X e com valores em $\mathbb{K}$
βX	o compactificado de Stone-Cech de X

Introdução

Neste trabalho, estudaremos uma classe de operadores definidos em espaços de Banach, os **deslocamentos isométricos**. Esses operadores vem sendo explorados nas pesquisas e, em quase todos artigos que tratam do assunto, identificamos uma questão em comum. Essa questão diz respeito a **existência** de deslocamentos isométricos em determinados espaços de Banach.

O primeiro matemático a dar uma definição geral de **deslocamentos** em espaços de Banach foi **R. Crownover**, em um artigo publicado no ano de 1972. Essa definição não apenas abrangia **isometrias**, mas outros operadores contínuos e **injetores**. Esses deslocamentos são muitas vezes citados como **deslocamentos de Crownover** ou **deslocamentos clássicos**. Em 1988, outro importante matemático, **Holub**, publicou um artigo sobre deslocamentos. Nesse artigo, **Holub** reformulou e criou definições de deslocamentos, como por exemplo a noção de **deslocamento reverso**. Essa abordagem do assunto na década de 80 deu ênfase também para os **deslocamentos isométricos**, nosso objeto de estudo neste trabalho. Muitas questões e conjecturas foram feitas, principalmente, focadas na possibilidade de construção de deslocamentos isométricos em espaços de Banach dados.

Recentemente, no artigo da referência [5], **Pei-Kee Lin** explorou a existência de deslocamentos isométricos no **produto** de dois espaços de Banach, considerado com a norma $\|\cdot\|_\infty$. Nesse artigo, é nítido que quando os espaços envolvidos no produto são **estritamente convexos**, tiramos fortes conclusões a respeito dos deslocamentos isométricos e isso nos dá uma sensação de controle ou domínio sobre o estudo. A segunda parte do artigo é pautada no estudo de espaços da forma $c \oplus_\infty X$, sendo X um espaço de Banach qualquer e c o espaço das **seqüências convergentes**. Ainda no artigo, o autor deixou o seguinte problema em aberto:

Questão 1. *O espaço produto $c \oplus_\infty c_0$ admite um deslocamento isométrico quando considerado como $\mathbb{R}$ -espaço vetorial?*

No Capítulo 2, responderemos a questão 1 no caso **complexo**, tal como foi feito em [3]. Seguindo a referência [5], dedicaremos nossa atenção para os espaços $c \oplus_\infty X$, particularmente quando X for **estritamente convexo**. Nesse caso, notaremos algumas propriedades e consequências da hipótese de $c \oplus_\infty X$ admitir ao menos um deslocamento isométrico. Ainda apresentaremos um teorema capaz de **gerar** exemplos de deslocamentos, na medida em que traz condições suficientes para $c \oplus_\infty X$ admitir um deslocamento isométrico.

No Capítulo 3, estudaremos o espaço produto munido com a norma $\|\cdot\|_1$. Devemos ter em mente que os deslocamentos isométricos são operadores que preservam a norma, portanto este caso demanda um tratamento particular. Nosso interesse, nesse capítulo, será estudar especificamente o produto de espaços **estritamente convexos** - estabelecendo, quando possível,

comparações com os resultados do capítulo 2. Seguindo o que está feito em [3], mostraremos que um deslocamento isométrico definido no espaço produto é **fatorável** e sua **imagem** é um subespaço **retangular**. Além disso, mostraremos que, para $1 < p \neq q < \infty$, os espaços $\ell_p \oplus_\infty \ell_q$ e $\ell_p \oplus_1 \ell_q$ não admitem deslocamentos isométricos. Na última seção, definiremos os **deslocamentos reversos** e mostraremos como esses operadores estão relacionados aos deslocamentos isométricos. Para saber mais sobre os deslocamentos reversos, podemos consultar [7].

No Capítulo 4, estudaremos os deslocamentos isométricos no espaço $C(X)$, sendo X um espaço topológico **compacto** e **Hausdorff**. A importância de explorar os deslocamentos em $C(X)$ está em buscar mais exemplos sobre esses operadores e, também, exemplos de espaços que não os admitem. Iniciaremos o capítulo 4 enunciando e demonstrando um importante teorema, o qual pode ser visto em [8]. Com a ajuda desse teorema, construiremos funções induzidas por uma isometria definida em $C(X)$, as quais possibilitam descrevê-la. Após apresentar esse teorema, trataremos de como classificar um deslocamento isométrico definido em $C(X)$ segundo dois **tipos**. Feito isso, partiremos para o estudo de cada um dos tipos, dando diversos exemplos.

Antes de tudo, o Capítulo 1 tem o objetivo de trazer alguns conhecimentos que serão fundamentais para compreensão deste trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Topologia - Conceitos e resultados básicos

As noções de topologia presentes nesta seção serão fundamentais para entender o capítulo 4. Inicialmente, apresentaremos alguns **axiomas de separação** e enunciaremos o **Lema de Urysohn**. Depois disso, definiremos o que é uma **rede** e veremos alguns resultados básicos. Por fim, trataremos das **compactificações** de **Alexandroff** e **Stone-Cech**.

1.1.1 Axiomas de separação

Definição 1. (Axiomas de Separação) ([2], pg.36)

Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que:

- $S1)$ (X, τ) é $\mathbb{T}_1$ se para cada $x, y \in X$ com $x \neq y$ existem $U_x, U_y \in \tau$ tais que $U_x \cap \{x, y\} = \{x\}$ e $U_y \cap \{x, y\} = \{y\}$;
- $S2)$ (X, τ) é $\mathbb{T}_2$, ou **Hausdorff**, se para cada $x, y \in X$ com $x \neq y$ existem $U_x, U_y \in \tau$ tais que $x \in U_x$, $y \in U_y$ e $U_x \cap U_y = \emptyset$;
- $S3)$ (X, τ) é $\mathbb{T}_3$ se para cada $F \subseteq X$ fechado e para todo $x \in X$ tal que $x \notin F$ existem $U, V \in \tau$ tais que $F \subseteq U$, $x \in V$ e $U \cap V = \emptyset$;
- $S4)$ (X, τ) é $\mathbb{T}_{3\frac{1}{2}}$ se para cada $F \subseteq X$ fechado e para todo $x \in X$ tal que $x \notin F$ existe uma função contínua $f : X \rightarrow [0, 1]$ satisfazendo $f(x) = 0$ e $f(t) = 1$, para todo $t \in F$;
- $S5)$ (X, τ) é $\mathbb{T}_4$ se para cada par de conjuntos fechados e disjuntos $A, B \subseteq X$ existem $U, V \in \tau$ tais que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$;
- $S6)$ (X, τ) é um espaço de **Tychonoff** se (X, τ) é $\mathbb{T}_2$ e $\mathbb{T}_{3\frac{1}{2}}$.
- $S7)$ (X, τ) é **normal** se (X, τ) é $\mathbb{T}_1$ e $\mathbb{T}_4$.

Teorema 1. ([2], pg.125) Todo espaço topológico compacto e Hausdorff é **normal**.

No Capítulo 4, o **Lema de Urysohn** será usado várias vezes, principalmente na demonstração por absurdo. Logo é muito importante conhecer esse enunciado com clareza.

Teorema 2. (Lema de Urysohn)([2], pg.41) *Seja X um espaço topológico normal, isto é, um espaço topológico $\mathbb{T}_1$ e $\mathbb{T}_4$. Para cada par de conjuntos fechados e disjuntos A e B , existe uma função contínua $f : X \rightarrow [0, 1]$ de maneira que $f(x) = 0$, para todo $x \in A$ e $f(y) = 1$, para todo $y \in B$.*

1.1.2 Redes

Definição 2. *Um conjunto não vazio D é dirigido se existir uma relação $\preceq$ em D , satisfazendo*

- (1) $\alpha \preceq \alpha$, para todo $\alpha \in D$;
- (2) Para todos $\alpha, \beta, \gamma \in D$, se $\alpha \preceq \beta$ e $\beta \preceq \gamma$, então $\alpha \preceq \gamma$;
- (3) Para cada par α, β de elementos em D , existe $\gamma_{\alpha, \beta}$ em D tal que $\alpha \preceq \gamma_{\alpha, \beta}$ e $\beta \preceq \gamma_{\alpha, \beta}$.

Definição 3. *Sejam X um conjunto e D um conjunto dirigido. Uma rede em X é uma função definida da seguinte forma:*

$$f : D \rightarrow X.$$

O conjunto D é chamado de conjunto índice para a rede f .

Observação 1. *Para $\alpha \in D$, dizemos que $f(\alpha)$ é o α -ésimo termo de f . Analogamente à forma como denotamos as sequências, é usual representar o α -ésimo termo de f por x_α . A rede f também pode ser denotada por $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$.*

Definição 4. *Seja $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ uma rede em um espaço topológico X e seja x um elemento de X . Dizemos que $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ converge para x se, para todo aberto U contendo x , existe $\alpha_U \in D$ tal que $x_\alpha \in U$ para qualquer $\alpha \in D$, tal que $\alpha_U \preceq \alpha$. Nesse caso x é chamado de limite de $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ e usamos a notação*

$$x_\alpha \rightarrow x \text{ ou } \lim_{\alpha} x_\alpha = x.$$

Proposição 1. ([1], pg.145) *Um espaço topológico é Hausdorff se, e somente se, vale a unicidade do limite para cada rede convergente em X .*

Proposição 2. ([1], pg.146) *Seja S um subconjunto de um espaço topológico X e seja x um elemento de X . Então $x \in \overline{S}$ se, e somente se, existe uma rede de elementos de S convergindo para x .*

Proposição 3. ([1], pg.146) *Um subconjunto S de um espaço topológico X é fechado se, e somente se, S contém os limites de todas redes convergentes, cujos elementos estão em S .*

Proposição 4. ([1], pg.146) *Sejam X e Y espaços topológicos e seja $f : X \rightarrow Y$ uma função de X em Y .*

- (a) *A função f é contínua em $x_0 \in X$ se, e somente se, $f(x_\alpha) \rightarrow f(x_0)$ para toda rede $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ convergindo para x_0 ;*
- (b) *A função f é contínua em X se, e somente se, para todo $x \in X$ e para toda rede $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ convergindo para x , temos $f(x_\alpha) \rightarrow f(x)$.*

Definição 5. Um subconjunto J de um conjunto dirigido I é cofinal em I se para cada $\alpha \in I$, existe $\beta_\alpha \in J$ de modo que $\alpha \preceq \beta_\alpha$.

Definição 6. Suponhamos que X seja um conjunto, I seja um conjunto dirigido e suponhamos que $f : I \rightarrow X$ seja uma rede. Além disso, suponhamos que J seja um conjunto dirigido e $g : J \rightarrow I$ seja uma função de maneira que

- (1) Para todos $\beta_1, \beta_2 \in J$, se $\beta_1 \preceq \beta_2$, então $g(\beta_1) \preceq g(\beta_2)$ em I ;
- (2) $g(J)$ é cofinal em I .

Então a rede $f \circ g : J \rightarrow X$ é chamada subrede de f .

Proposição 5. ([1],pg.150) Seja D um conjunto dirigido e $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ uma rede em um conjunto X .

- (a) A rede $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ é subrede de si mesma;
- (b) Toda subrede de $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ é uma rede em X ;
- (c) Toda subrede de uma subrede de $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ é também uma subrede de $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$;
- (d) Se X é um espaço topológico e $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ converge para um elemento $x \in X$, então toda subrede de $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ converge para x ;
- (e) Se X é um espaço topológico e existe um elemento $x \in X$ tal que toda subrede de $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ tem uma subrede convergindo para x , então $x_\alpha \rightarrow x$.

Proposição 6. ([1],pg.152) Um subconjunto S de um espaço topológico X é compacto se, e somente se, toda rede em S admite uma subrede convergente com limite em S .

Essas noções sobre **redes** são mais do que suficientes para entender este trabalho, mas podemos encontrar exemplos e mais resultados interessantes em [1].

1.1.3 Compactificações de um espaço topológico

Nesta subseção, veremos dois casos especiais de **compactificação**. Sejam (X, τ) um espaço topológico **não compacto** e $\infty = \{X\}$. Logo ∞ não é um elemento do conjunto X . Vamos considerar

$$\tau' = \tau \cup \{A \cup \{\infty\} : A \in \mathcal{P}(X) \text{ e } X \setminus A \text{ é fechado e compacto em } X\}.$$

Definimos $X^* = X \cup \{\infty\}$, é simples verificar que (X^*, τ') é um espaço topológico e que X é denso em X^* . Com essa notação, enunciaremos o próximo teorema e a próxima definição.

Teorema 3. (Alexandroff) ([1], pg.150) O espaço topológico X^* é compacto e tem X como subespaço topológico. Além disso, X^* é Hausdorff se, e somente se, X é localmente compacto e Hausdorff.

Definição 7. O espaço topológico X^* é chamado de **compactificado de Alexandroff** de X , ou ainda, **compactificação de um ponto do espaço** X .

Ainda na referência [11], nas páginas 151, 152 e 153, prova-se a existência do **compactificado de Stone-Cech**. A seguir, vamos defini-lo.

Definição 8. *Seja X um espaço de Tychonoff, isto é, um espaço topológico $\mathbb{T}_2$ e $\mathbb{T}_{3\frac{1}{2}}$. Seja Y um espaço topológico compacto, Hausdorff e que tenha X como subespaço topológico denso. Dizemos que Y é um **compactificado de Stone-Cech** para X se, para todo K compacto, Hausdorff e para toda função contínua $f : X \rightarrow K$, existe $g : Y \rightarrow K$ contínua e que estende f .*

1.2 Noções de Álgebra

Nesta seção, vamos trabalhar com a noção de **independência sobre os racionais** e obter algumas propriedades algébricas que serão fundamentais para uma construção no segundo capítulo. Essas propriedades encontram-se em [3], na seção de preliminares. Antes de iniciarmos, vamos definir alguns conceitos básicos.

Definição 9. *Seja $G = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ um conjunto finito de números reais. Dizemos que G é **independente sobre os racionais** se, para todos inteiros $k_1, k_2, \dots, k_n, k_{n+1}$ que satisfizerem*

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 + \dots + k_n y_n = k_{n+1},$$

tivermos $k_1 = k_2 = \dots = k_n = k_{n+1} = 0$.

Essa definição trata apenas de subconjuntos finitos de $\mathbb{R}$, daí vem a necessidade de enunciar outra definição.

Definição 10. *Seja H um conjunto qualquer de números reais. Dizemos que H é **independente sobre os racionais** se cada subconjunto finito de H é independente sobre os racionais.*

Em [4], página 257 - exemplo 65, demonstra-se o seguinte resultado:

Proposição 7. *Seja $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ um conjunto finito de números reais, que seja independente sobre os racionais. Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ números reais e $\varepsilon > 0$ dado. Então existem inteiros $k, m_1, m_2, \dots, m_n$ tais que*

$$|x_i - k y_i - m_i| < \varepsilon, \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n.$$

Através da proposição 7, vamos demonstrar a próxima proposição.

Proposição 8. *Sejam $z_1, z_2, \dots, z_n$ números complexos com valor absoluto 1. Vamos supor que $z_t = e^{2\pi i y_t}$, para cada $t \in \{1, 2, \dots, n\}$. Além disso, suponhamos que o conjunto $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ seja independente sobre os racionais. Assim, dados $u_1, u_2, \dots, u_n$ números complexos com valor absoluto 1 e $\varepsilon > 0$, existe um inteiro k tal que*

$$|u_t - z_t^k| < \varepsilon, \text{ para todo } t = 1, 2, \dots, n.$$

Demonstração. Consideremos $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Sabemos que a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow S \\ x &\longmapsto e^{2\pi i x} \end{aligned}$$

é contínua e sobrejetora. Tomemos $\varepsilon > 0$ e $u_1, u_2, \dots, u_n \in S$ de maneira arbitrária. Existem $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tais que $u_t = f(x_t)$, para cada $t = 1, 2, \dots, n$. Pela continuidade de f nos pontos $x_1, x_2, \dots, x_n$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{se } |x - x_t| < \delta, \text{ então } |f(x) - f(x_t)| < \varepsilon, \text{ para cada } t \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Pela proposição 7, existem inteiros $k, m_1, m_2, \dots, m_n$ tais que

$$|x_t - ky_t - m_t| < \delta, \text{ para todo } t = 1, 2, \dots, n.$$

Para cada $t \in \{1, 2, \dots, n\}$, vale:

$$\begin{aligned} |f(x_t) - f(ky_t + m_t)| &= |e^{2\pi i x_t} - e^{2\pi i ky_t} e^{2\pi i m_t}| = \\ &= |u_t - (e^{2\pi i y_t})^k| = \\ &= |u_t - z_t^k| \end{aligned}$$

Portanto, para cada $t \in \{1, 2, \dots, n\}$, temos

$$|u_t - z_t^k| < \varepsilon$$

e isso conclui a demonstração. □

Seja z um número complexo de módulo 1. Vamos escrevê-lo na forma $z = e^{2\pi i y}$, com $0 \leq y < 1$, daí dizemos que y é o **argumento** de z e denotamos $y = \arg(z)$. Vamos continuar a usar a notação da proposição 8 e utilizar S para denotar o conjunto dos números complexos de módulo 1. Para $n \in \mathbb{Z}$ positivo, consideremos

$$S^n = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) : z_t \in S, \text{ para todo } t = 1, 2, \dots, n\}.$$

Consideremos ainda, a função $d_\infty : S^n \times S^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$, dada por:

$$d_\infty((z_1, z_2, \dots, z_n), (w_1, w_2, \dots, w_n)) = \sup \{|z_t - w_t| : t = 1, 2, \dots, n\}.$$

Essa função define uma **métrica** e uma **topologia** para S^n . Tendo isso em mente e a proposição 8, é imediato verificar o próximo resultado.

Proposição 9. *Sejam n um inteiro positivo e $z_1, z_2, \dots, z_n$ números complexos de módulo 1. Suponhamos que o conjunto $\{\arg(z_1), \arg(z_2), \dots, \arg(z_n)\}$ seja independente sobre os racionais. Então o conjunto*

$$H = \{(z_1^k, z_2^k, \dots, z_n^k) : k \in \mathbb{Z}\}$$

é denso em S^n .

O próximo resultado decorre das proposições 7 e 9.

Proposição 10. *Sejam n um inteiro positivo e $z_1, z_2, \dots, z_n$ números complexos de módulo 1. Suponhamos que o conjunto $\{\arg(z_1), \arg(z_2), \dots, \arg(z_n)\}$ seja independente sobre os racionais. Então o conjunto*

$$H = \left\{ (z_1^k, z_2^k, \dots, z_n^k) : k = 1, 2, \dots \right\}$$

é denso em S^n . Assim, dados $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in S^n$, $\varepsilon > 0$ e um inteiro k_0 , existe um inteiro $k > k_0$ de modo que

$$|x_t - z_t^k| < \varepsilon, \text{ para todo } t = 1, 2, \dots, n.$$

Demonstração. Vamos assumir $\arg(z_t) = y_t$, para cada $t = 1, 2, \dots, n$. Para demonstrarmos que H é denso em S^n , basta provarmos que H é denso em $\{(z_1^k, z_2^k, \dots, z_n^k) : k \in \mathbb{Z}\}$ e usar a proposição 9. Então, consideremos $(z_1^l, z_2^l, \dots, z_n^l)$, com $l < 0$ e $\varepsilon > 0$ dados. Pela continuidade da função exponencial, existe $\delta > 0$ de maneira que,

$$\text{para todo } x \in \mathbb{R}, \text{ se } |x| < \delta, \text{ então } |e^{2\pi i x} - 1| < \varepsilon. \quad (1.1)$$

Pela proposição 7, existem $k, m_1, m_2, \dots, m_t$ inteiros tais que

$$\left| \frac{\delta}{4|l|} - ky_t - m_t \right| < \frac{\delta}{8|l|}, \text{ para todo } t = 1, 2, \dots, n.$$

E obviamente $k \neq 0$ na relação acima. Assim, para cada $t \in \{1, 2, \dots, n\}$, valem

$$\begin{cases} -\frac{\delta}{8} - \frac{\delta}{4} < -k|l|y_t - m_t|l| < \frac{\delta}{8} - \frac{\delta}{4} \\ \frac{\delta}{4} - \frac{\delta}{8} < k|l|y_t + m_t|l| < \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{8} \end{cases}$$

Dessa forma, por (1.1) segue que

$$\left| e^{2\pi i(-k)|l|y_t} - 1 \right| < \varepsilon \text{ e } \left| e^{2\pi i k|l|y_t} - 1 \right| < \varepsilon, \text{ para todo } t = 1, 2, \dots, n.$$

Portanto, temos

$$\left| z_t^{-k|l|} - 1 \right| < \varepsilon \text{ e } \left| z_t^{k|l|} - 1 \right| < \varepsilon, \text{ para todo } t = 1, 2, \dots, n.$$

Como $|z_t^l| = 1$, para todo $t \in \{1, 2, \dots, n\}$, concluimos que

$$\left| z_t^{-k|l|+l} - z_t^l \right| < \varepsilon \text{ e } \left| z_t^{k|l|+l} - z_t^l \right| < \varepsilon, \text{ para todo } t \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Isso significa que

$$d_\infty((z_1^{-k|l|+l}, z_2^{-k|l|+l}, \dots, z_n^{-k|l|+l}), (z_1^l, z_2^l, \dots, z_n^l)) < \varepsilon$$

e

$$d_\infty((z_1^{k|l|+l}, z_2^{k|l|+l}, \dots, z_n^{k|l|+l}), (z_1^l, z_2^l, \dots, z_n^l)) < \varepsilon.$$

Evidentemente $(z_1^{-k|l|+l}, z_2^{-k|l|+l}, \dots, z_n^{-k|l|+l}) \in H$ ou $(z_1^{k|l|+l}, z_2^{k|l|+l}, \dots, z_n^{k|l|+l}) \in H$, assim o caso $l < 0$ está feito. Notemos que se $(z_1^l, z_2^l, \dots, z_n^l) \in S^n$ e $l > 0$, então $(z_1^l, z_2^l, \dots, z_n^l) \in H$ e não há nada para fazer. O caso $l = 0$ não precisa ser feito, pois o ponto $(z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0)$ não é isolado em S^n . Assim, concluímos que H é denso em S^n . O restante do enunciado segue imediatamente do fato de H ser denso em S^n , pois dado $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in S^n$, cada vizinhança desse ponto contém uma infinidade de pontos de H . $\square$

Proposição 11. *Sejam $n > 0$, um inteiro positivo e $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ um conjunto de números reais independente sobre os racionais. Vamos ainda definir, $z_t = e^{2\pi i y_t}$ para cada $t \in \{1, 2, \dots, n\}$. Daí, dados $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\varepsilon > 0$ e um inteiro k_0 , existe $k \in \mathbb{N}$, $k > k_0$ tal que*

$$|x_t| - x_t z_t^{-k}| < \varepsilon, \text{ para todo } t = 1, 2, \dots, n.$$

Demonstração. Consideremos $M = \sup\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\} > 0$. Pela proposição 10, existe um natural $k > k_0$ de maneira que

$$\left| \frac{x_t}{|x_t|} - z_t^k \right| < \frac{\varepsilon}{M}, \text{ para todo } t = 1, 2, \dots, n.$$

Portanto, para cada $t \in \{1, 2, \dots, n\}$, temos

$$\begin{aligned} |x_t| - x_t z_t^{-k}| &= \left| \frac{|x_t| z_t^k}{z_t^k} - \frac{x_t}{z_t^k} \right| = \frac{||x_t| z_t^k - x_t|}{|z_t^k|} = \\ &= \frac{||x_t| z_t^k - x_t|}{1} = |x_t| \left| z_t^k - \frac{x_t}{|x_t|} \right| < \\ &< |x_t| \frac{\varepsilon}{M} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, k é o natural procurado. $\square$

Notemos que, na proposição 11, se para algum $t \in \{1, 2, \dots, n\}$ tivéssemos $x_t = 0$, a tese seria válida da mesma forma. De fato, se $x_t = 0$, qualquer $k \in \mathbb{N}$ satisfaz

$$|x_t| - x_t z_t^{-k}| < \varepsilon.$$

Por isso, decorre da proposição 11 o seguinte corolário:

Corolário 1. *Sejam $n > 0$, um inteiro positivo e $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ um conjunto de números reais independente sobre os racionais. Com isso, vamos definir $z_t = e^{2\pi i y_t}$ para cada $t \in \{1, 2, \dots, n\}$. Daí, dados $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ e um inteiro k_0 , existe $k \in \mathbb{N}$, $k > k_0$ tal que*

$$|x_t| - x_t z_t^{-k}| < \varepsilon, \text{ para todo } t = 1, 2, \dots, n.$$

O corolário 1 é necessário para compreensão do teorema 11. Além disso, é importante ter em mente a seguinte ideia.

Observação 1. No capítulo 2, admitiremos a existência de um conjunto infinito (enumerável) de números reais que seja **independente sobre os racionais**. Notemos que a existência desse conjunto é garantida pelo fato de $\mathbb{R}$ ser um $\mathbb{Q}$ -espaço vetorial de dimensão infinita. Essa última afirmação é uma simples consequência do conjunto dos reais ser não-enumerável.

1.3 Noções de Análise Funcional

Nesta seção, vamos tratar de alguns conceitos da Análise Funcional que serão importantes para entendermos este trabalho. Todos espaços vetoriais serão considerados sobre um corpo $\mathbb{K}$, sendo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Nos capítulos 2 e 3, a noção de espaço normado **estritamente convexo** será usada **diversas vezes**. Então é muito conveniente tratarmos desse conceito com bastante cuidado.

Definição 11. Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado. Dizemos que $(X, \|\cdot\|)$ é **estritamente convexo** se para todos $x, y \in X$ tais que $x \neq y$ e $\|x\| = \|y\| = 1$, tivermos

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1.$$

Existem outras alternativas para definir espaços normados estritamente convexos. Por exemplo, a proposição a seguir revela uma condição equivalente a definição.

Proposição 12. Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado estritamente convexo. Sejam $x, y \in X$ pontos distintos tais que $\|x\| = \|y\| = 1$. Então para todo $\lambda \in \mathbb{R} \cap]0, 1[$ temos

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| < 1.$$

Demonstração. Notemos que para $\lambda = \frac{1}{2}$, o resultado é exatamente o que diz a definição de espaço normado estritamente convexo e não há nada a fazer. Diante disso, precisamos estudar apenas os dois casos que seguem:

Primeiro Caso. Suponhamos que $\lambda \in]0; \frac{1}{2}[$. Nesse caso notemos que

$$\begin{aligned} \|\lambda x + (1 - \lambda)y\| &= \|\lambda x + y - \lambda y\| = \|\lambda x + \lambda y + y - 2\lambda y\| = \\ &= \left\| 2\lambda \left(\frac{x+y}{2} \right) + (1 - 2\lambda)y \right\| \leq \\ &\leq \left\| 2\lambda \left(\frac{x+y}{2} \right) \right\| + \left\| (1 - 2\lambda)y \right\| < \\ &< |2\lambda| + |1 - 2\lambda| = 1. \end{aligned}$$

Na última desigualdade usamos que X é estritamente convexo.

Segundo Caso. Suponhamos que $\lambda \in]\frac{1}{2}; 1[$. Nesse caso notemos que

$$\begin{aligned}
 \|\lambda x + (1 - \lambda)y\| &= \|\lambda x + y - \lambda y\| = \|x + y - \lambda x - \lambda y - x + 2\lambda x\| = \\
 &= \left\| 2(1 - \lambda) \left(\frac{x + y}{2} \right) + (2\lambda - 1)x \right\| \leq \\
 &\leq \left\| 2(1 - \lambda) \left(\frac{x + y}{2} \right) \right\| + \left\| (2\lambda - 1)x \right\| < \\
 &< 2|(1 - \lambda)| + |(2\lambda - 1)| = 1.
 \end{aligned}$$

Novamente, na última desigualdade usamos que X é estritamente convexo. Com todos os casos estudados, provamos a tese. $\square$

Usando somente a definição de espaços estritamente convexos demonstraremos as duas próximas proposições.

Proposição 13. *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado estritamente convexo sobre um corpo $\mathbb{K}$. Então, para todos $x, y \in X$ tais que $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, existe $\alpha \geq 0$ tal que $x = \alpha y$ ou $y = \alpha x$.*

Demonstração. Sejam x e y satisfazendo $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$. Se $x = 0$ ou $y = 0$, basta tomar $\alpha = 0$ e acabou. Suponhamos $x \neq 0$ e $y \neq 0$, sem perda de generalidade suponhamos ainda que $0 < \|y\| \leq \|x\|$. Consideremos $\alpha = \frac{\|x\|}{\|y\|} \geq 1$, assim:

$$\begin{aligned}
 \alpha\|x\| + \alpha\|y\| &= \alpha\|x + y\| = \|\alpha x + \alpha y\| = \|\alpha x + \alpha y + x - x\| = \|x + \alpha y + (\alpha - 1)x\| \leq \\
 &\|x + \alpha y\| + (\alpha - 1)\|x\| \leq \|x\| + \alpha\|y\| + (\alpha - 1)\|x\| = \alpha\|x\| + \alpha\|y\|.
 \end{aligned}$$

Donde concluímos que $\|x + \alpha y\| + (\alpha - 1)\|x\| = \alpha\|x\| + \alpha\|y\|$, e assim $\|x + \alpha y\| = \|x\| + \alpha\|y\|$. Agora vamos dividir cada um dos lados da última equação por $\|x\|$:

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{\alpha y}{\|x\|} \right\| = 1 + \frac{\alpha\|y\|}{\|x\|}$$

Tínhamos $\alpha = \frac{\|x\|}{\|y\|}$, e daí segue que

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| = 2,$$

isso é o mesmo que

$$\left\| \frac{\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}}{2} \right\| = 1.$$

Por fim usamos que X é estritamente convexo e concluímos da última igualdade que $\frac{x}{\|x\|} = \frac{y}{\|y\|}$, donde segue a tese. $\square$

Proposição 14. *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado estritamente convexo sobre um corpo $\mathbb{K}$. Para todos $x, y \in X$ distintos e não nulos, temos*

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < \max \{ \|x\|, \|y\| \}.$$

Demonstração. Se $\|x\| = \|y\| = c$, temos

$$\left\| \frac{x}{c} \right\| = \left\| \frac{y}{c} \right\| = 1.$$

Pelo fato de X ser estritamente convexo, concluimos que

$$\left\| \frac{x+y}{2c} \right\| < 1,$$

então

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < c = \max \{ \|x\|, \|y\| \}.$$

Resta-nos, então, apenas o caso em que $\|x\| \neq \|y\|$, sem perda de generalidade suponhamos $c = \|x\| > \|y\|$. Nesse caso:

$$\left\| \frac{x+y}{2c} \right\| \leq \left\| \frac{x}{2c} \right\| + \left\| \frac{y}{2c} \right\| < 1.$$

Com isso,

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < c = \max \{ \|x\|, \|y\| \}.$$

Ao estudarmos todos os possíveis casos, temos a tese. $\square$

Corolário 2. *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado estritamente convexo sobre um corpo $\mathbb{K}$. Não existem $x, y \in X$ não nulos tais que*

$$\|x\| \geq \|x + \alpha y\|, \forall \alpha \in \mathbb{K}, |\alpha| = 1.$$

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que existem $x, y \in X$ nas condições do enunciado e satisfazendo a desigualdade acima. Então:

$$\|x\| \geq \|x - y\| \text{ e } \|x\| \geq \|x + y\|.$$

Por essas desigualdades fica evidente que $x + y \neq 0$ e $x - y \neq 0$. Além disso, por valer $y \neq 0$, segue que $x + y \neq x - y$. Notemos que

$$\|x\| = \left\| \frac{(x+y) + (x-y)}{2} \right\| \stackrel{\text{prop. 14}}{<} \max \{ \|x+y\|, \|x-y\| \} \leq \|x\|.$$

Uma contradição. Provamos a tese pela redução ao absurdo. $\square$

As demonstrações dos dois teoremas a seguir se encontram em [12], esses resultados nos darão suporte para demonstrar um importante resultado sobre os espaços ℓ_p .

Teorema 4. *Para quaisquer $x, y \in \ell_p$ com $2 \leq p < \infty$ e $q = \frac{p}{p-1}$, temos*

$$(a) \quad 2(\|x\|^p + \|y\|^p) \leq \|x + y\|^p + \|x - y\|^p \leq 2^{p-1}(\|x\|^p + \|y\|^p);$$

$$(b) \quad 2(\|x\|^p + \|y\|^p)^{q-1} \leq \|x + y\|^q + \|x - y\|^q.$$

Teorema 5. Para quaisquer $x, y \in \ell_p$ com $1 < p \leq 2$ e $q = \frac{p}{p-1}$, temos

$$(c) \quad 2^{p-1}(\|x\|^p + \|y\|^p) \leq \|x + y\|^p + \|x - y\|^p \leq 2(\|x\|^p + \|y\|^p);$$

$$(d) \quad \|x + y\|^q + \|x - y\|^q \leq 2(\|x\|^p + \|y\|^p)^{q-1}.$$

Utilizando os teoremas 4 e 5 e a própria definição para espaços **estritamente convexos**, vamos demonstrar o próximo teorema.

Teorema 6. O espaço ℓ_p , $1 < p < \infty$, com a norma usual é **estritamente convexo**.

Demonstração. Suponhamos $x, y \in \ell_p$, satisfazendo

$$\|x\| = \|y\| = \left\| \frac{x + y}{2} \right\| = 1.$$

Vamos analisar dois casos separadamente:

Primeiro Caso: $p \geq 2$. Pelo teorema 4 (a), temos:

$$\|x + y\|^p + \|x - y\|^p \leq 2^{p-1} \cdot 2 = 2^p.$$

Dividindo-se ambos os membros dessa equação por 2^p concluímos que

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\|^p + \left\| \frac{x - y}{2} \right\|^p \leq 1.$$

Por $\left\| \frac{x + y}{2} \right\| = 1$, devemos ter

$$\left\| \frac{x - y}{2} \right\| = 0,$$

daí segue que $x = y$ e isso conclui a demonstração neste caso.

Segundo Caso: $1 < p \leq 2$. Pelo teorema 5 (d), temos:

$$\|x + y\|^q + \|x - y\|^q \leq 2^{q-1} \cdot 2 = 2^q.$$

Dividindo-se ambos os membros dessa equação por 2^q concluímos que

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\|^q + \left\| \frac{x - y}{2} \right\|^q \leq 1.$$

Analogamente ao **primeiro caso**, concluímos que $x = y$. Isso conclui a demonstração do teorema, basta termos em mente a definição de espaços **estritamente convexos**.

□

Capítulo 2

Deslocamentos isométricos em

$$c \oplus_{\infty} X$$

2.1 Introdução

Neste capítulo, definiremos os **deslocamentos isométricos** em espaços de Banach quaisquer. Apesar da generalidade, estudá-los-emos, quase exclusivamente, em espaços da forma $c \oplus_{\infty} X$, sendo X um espaço de Banach arbitrário e c o espaço das **sequências convergentes**. Os lemas 3 e 4 e o teorema 10 descrevem um deslocamento isométrico definido em $c \oplus_{\infty} X$, quando X for **estritamente convexo**. Esse último teorema mostra que a restrição do operador a c é um novo deslocamento isométrico.

Os teoremas 8 e 9 são geradores de exemplos de deslocamentos em $c \oplus_{\infty} X$, após demonstrá-los, daremos uma noção de como esses resultados podem ser úteis. A questão 1, apresentada na introdução da dissertação, está relacionada ao teorema 11, o qual é uma resposta para o problema no caso **complexo**. O caso **real** não foi resolvido neste trabalho e permanece **em aberto**.

A menos de menção contrária, consideraremos todo espaço vetorial arbitrário de **dimensão infinita** sobre um **corpo** $\mathbb{K}$, sendo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. O espaço **produto** estará sempre munido com a norma $\|\cdot\|_{\infty}$, a qual será explicada na próxima seção.

2.2 Definição e algumas propriedades elementares dos deslocamentos isométricos

Nesta seção, vamos conhecer a definição de **deslocamento isométrico** e ver alguns resultados básicos. Esses resultados tratam do **espaço produto** entre dois espaços de Banach **estritamente convexos**, munido com a norma $\|\cdot\|_{\infty}$. Antes de apresentar a definição, vamos a um exemplo - talvez seja o exemplo mais conhecido de **deslocamento** em espaços de Banach.

Exemplo 1. *Seja T o operador definido por $(c_0, \|\cdot\|_{\infty}) \xrightarrow{T} (c_0, \|\cdot\|_{\infty})$ e pela relação:*

$$T((a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)) = (0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots).$$

Nesse exemplo, verificamos sem dificuldades que T é uma isometria, o espaço vetorial $\text{Im}T$ tem codimensão 1 e vale $\bigcap_{n=1}^\infty T^n(X) = \{0\}$.

Nossa intenção, a seguir, é generalizar operadores que satisfazem a essas propriedades.

Definição 12. *Seja X um espaço de Banach real ou complexo. Um operador T em X é chamado de **deslocamento isométrico** se satisfizer:*

- (1) T é uma isometria;
- (2) O subespaço $\text{Im}T$ tem codimensão 1;
- (3) $\bigcap_{n=1}^\infty T^n(X) = \{0\}$.

Vamos observar outros casos notáveis:

Exemplo 2. *Seja $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p \leq \infty$. Seja T o operador dado por*

$$\begin{aligned} T : \quad \ell_p & \longrightarrow \ell_p \\ (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) & \longmapsto (0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \end{aligned}$$

Vamos omitir a verificação de que T é um deslocamento isométrico, pois tal como no exemplo 1, é uma tarefa simples.

Antes de prosseguir, precisamos estar familiarizados com a norma $\|\cdot\|_\infty$, definida no espaço produto. Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dois espaços de Banach. O espaço produto será representado por $X \oplus Y$. Consideremos a função $\|\cdot\|_\infty : X \oplus Y \longrightarrow \mathbb{R}_+$, dada por:

$$\|(x, y)\|_\infty = \sup \{\|x\|_X, \|y\|_Y\}, \text{ para todos } x \in X \text{ e } y \in Y.$$

Podemos notar que $\|\cdot\|_\infty$ define uma norma em $X \oplus Y$, tornando $(X \oplus Y, \|\cdot\|_\infty)$ um espaço de Banach, o qual pode ser também denotado por $X \oplus_\infty Y$. Nesse caso, dizemos que o espaço **produto** está **munido** com a norma $\|\cdot\|_\infty$. Agora, vejamos alguns resultados básicos que podem ser encontrados em [5].

Lema 1. *Sejam X e Y dois espaços normados estritamente convexos. Seja T uma isometria de $X \oplus_\infty Y$ em $X \oplus_\infty Y$, então*

$$T(X) \subseteq Y \text{ ou } T(X) \subseteq X.$$

Demonstração. Suponhamos que o lema não seja verdadeiro. Então existem $x', x'' \in X$ de maneira que:

$$T((x', 0)) = (\alpha_1, \beta_1), \quad T((x'', 0)) = (\alpha_2, \beta_2), \text{ com } \alpha_1 \neq 0 \text{ e } \beta_2 \neq 0.$$

Daí existe $x \in X$ tal que $T((x, 0)) = (x_1, y_1)$ com $x_1 \neq 0$ e $y_1 \neq 0$, a saber $x = x'$ ou $x = x''$ ou $x = x' + x''$ (ao menos uma dessas possibilidades satisfaz o que afirmamos). Sem perder generalidade, podemos supor que $\|x_1\|_X \geq \|y_1\|_Y$, daí como T é isometria segue que

$$\|x\|_X = \|(x, 0)\|_\infty = \|T(x, 0)\|_\infty = \|(x_1, y_1)\|_\infty = \|x_1\|_X.$$

Consideremos $y \in Y$, $y \neq 0$ qualquer. Digamos que $T((0, y)) = (x_2, y_2)$, como T é isometria temos $x_2 \neq 0$ ou $y_2 \neq 0$. Devemos tratar, separadamente, os dois casos que seguem:

Primeiro Caso. Suponhamos que $\|x_2\|_X \geq \|y_2\|_Y$. Então, por ser T uma isometria, segue que

$$\|y\|_Y = \|T(0, y)\|_\infty = \|(x_2, y_2)\|_\infty = \|x_2\|_X.$$

Neste caso podemos assumir $\|y\|_Y \leq \|x\|_X$, caso isso não seja verdade basta trocar o y tomado inicialmente por $\frac{\|x\|_Y}{2\|y\|}$. Note que para todo $\theta \in \mathbb{K}$, $|\theta| = 1$, temos:

$$\|x_1\|_X = \|x\|_X = \|(x, \theta y)\|_\infty = \|T(x, \theta y)\|_\infty \geq \|x_1 + \theta x_2\|_X.$$

Uma contradição com o corolário 2, pois X é estritamente convexo, $x_1 \neq 0$ e $x_2 \neq 0$.

Segundo Caso. Suponhamos que $\|y_2\|_Y \geq \|x_2\|_X$. Então, por ser T uma isometria, segue que

$$\|y\|_Y = \|y_2\|_Y.$$

Neste caso podemos assumir $\|y\|_Y \geq \|x\|_X$, caso isso não seja verdade basta trocar o y tomado inicialmente por $\frac{2\|x\|_Y}{\|y\|}$. Note que para todo $\theta \in \mathbb{K}$, $|\theta| = 1$, temos:

$$\|y_2\|_Y = \|y\|_Y = \|(x, \theta y)\|_\infty = \|T(x, \theta y)\|_\infty \geq \|y_1 + \theta y_2\|_Y.$$

Uma contradição com o corolário 2, pois Y é estritamente convexo, $y_1 \neq 0$ e $y_2 \neq 0$.

Assim provamos o lema pela redução ao absurdo. $\square$

O teorema 7 é útil para concluir que alguns espaços não admitem deslocamentos isométricos. Faremos esse tipo de uso do teorema 7 no capítulo 3.

Teorema 7. *Sejam X e Y dois espaços de Banach estritamente convexos. Se $X \oplus_\infty Y$ admitir um deslocamento isométrico, então X é isometricamente isomorfo a Y e X admite um deslocamento isométrico.*

Demonstração. Suponhamos que $X \oplus_\infty Y$ admite um deslocamento isométrico T . Pelo lema 1, devemos ter $T(X) \subseteq X$ ou $T(X) \subseteq Y$. Vejamos que $T(X) \subseteq X$ não acontece:

Vamos admitir que $T(X) \subseteq X$. Pelo lema 1, vale $T(Y) \subseteq X$ ou $T(Y) \subseteq Y$, mas $\text{Im}T$ tem codimensão 1 e Y é um subespaço de $X \oplus_\infty Y$ e de dimensão infinita, logo devemos ter $T(Y) \subseteq Y$. Agora notemos que, sendo T um operador de codimensão 1, entre $T|_X : X \rightarrow X$ e $T|_Y : Y \rightarrow Y$, uma deve ser sobrejetora e a outra deve ter codimensão 1. Sem perder generalidade, suponhamos $T|_X : X \rightarrow X$ sobrejetora. Portanto

$$X \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} T^n(X \oplus Y).$$

Isso contradiz o fato de que T é um deslocamento isométrico. Assim sabemos que necessariamente $T(X) \subseteq Y$. Por analogia ao raciocínio acima, segue que $T(Y) \subseteq X$. Novamente vem a ideia que entre $T|_X : X \rightarrow Y$ e $T|_Y : Y \rightarrow X$, uma deve ser sobrejetora e a outra deve ter codimensão 1. De qualquer maneira já temos que X é isometricamente isomorfo a Y .

Suponhamos, sem perda de generalidade que $T|_X : X \rightarrow Y$ é sobrejetora. Vejamos que $(T^2)|_X$ é um deslocamento isométrico em X . Sabemos que

$$(T^2)|_X = T|_Y \circ T|_X,$$

logo $(T^2)|_X$ é uma isometria. Como $\text{Im} T|_Y \neq X$, segue que $\text{Im}(T^2)|_X \neq X$. Vamos provar que $\text{Im}(T^2)|_X$ é um subespaço em X , de codimensão 1. Consideremos $(x_1, 0) \in X \setminus \text{Im}(T^2)|_X$, vejamos que $(x_1, 0) \notin \text{Im} T$. De fato, se $(x_1, 0) = T(x_2, y_2)$, como $T(x_2, 0) \in Y$ e T é isometria, segue que $x_2 = 0$. Logo $(x_1, 0) = T(0, y_2)$. Mas $T|_X : X \rightarrow Y$ é sobrejetora e assim $(x_1, 0) \in \text{Im}(T^2)|_X$, contra nossa hipótese. Portanto $(x_1, 0) \notin \text{Im} T$.

Sabemos que $(x_1, 0) \notin \text{Im} T$ e T é um operador de codimensão 1, isso implica que

$$X \oplus Y = \mathbb{K}(x_1, 0) \oplus \text{Im} T.$$

Logo, para todo $x \in X$, existem $\lambda_x \in \mathbb{K}$ e $(\alpha_x, \beta_x) \in X \oplus Y$ tais que

$$(x, 0) = \lambda_x(x_1, 0) + T(\alpha_x, \beta_x).$$

Como $T(\alpha_x, 0) \in Y$ e T é uma isometria, segue que $\alpha_x = 0$. Então $(x, 0) = \lambda_x(x_1, 0) + T(0, \beta_x)$ e, por $T|_X : X \rightarrow Y$ ser sobrejetora, $(0, \beta_x) \in \text{Im} T|_X$. Segue que $((x, 0) - \lambda_x(x_1, 0)) \in \text{Im}(T^2)|_X$ e com isso provamos que

$$X = \mathbb{K}(x_1, 0) \oplus \text{Im}(T^2)|_X.$$

Pela generalidade envolvida, podemos concluir que $\text{Im}(T^2)|_X$ é um subespaço de codimensão 1. Resta-nos apenas demonstrar que $\bigcap_{n=1}^\infty \text{Im}((T^2)|_X)^n = \{0\}$, isso segue diretamente do fato que:

$$\text{Im} T \supseteq \text{Im} T^2 \supseteq \dots \supseteq \text{Im} T^n \supseteq \dots$$

Com isso, provamos que $(T^2)|_X$ é um deslocamento isométrico em X . Como Y é isometricamente isomorfo a X , concluímos que Y também admite um deslocamento isométrico. □

2.3 Construção de deslocamentos isométricos

Esta seção é dedicada a **construção de deslocamentos isométricos** no espaço produto, munido com a norma $\|\cdot\|_\infty$. Com os teoremas 8 e 9, seremos capazes de construir exemplos bem interessantes de **deslocamentos** em $c \oplus_\infty X$, como é o caso do exemplo 4. Todos os resultados e exemplos presentes nesta seção podem ser vistos em [5]. O exemplo 3 abrirá espaço para enunciar esses dois teoremas.

Exemplo 3. *Seja X um espaço de Banach e S uma isometria sobrejetora de X em X . Seja x^* um elemento da bola unitária de X^* . Definimos*

$$\begin{aligned} T_{S, x^*} : c \oplus_\infty X &\longrightarrow c \oplus_\infty X \\ ((a_n)_n, x) &\longmapsto ((b_n)_n, S(x)) \end{aligned}$$

de modo que:

$$b_n = \begin{cases} x^*(x), & \text{se } n = 1 \\ a_n, & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Obviamente T_{S,x^*} é uma aplicação linear, vejamos que T_{S,x^*} é uma isometria. De fato, para $((a_n)_n, x) \in c \oplus_\infty X$ qualquer, temos:

$$\begin{aligned} \|T_{S,x^*}((a_n)_n, x)\|_\infty &= \sup \{\|S(x)\|, \|(b_n)_n\|_c\} = \sup \{\|S(x)\|, |x^*(x)|, \|(a_n)_n\|_c\} = \\ &= \sup \{\|x\|, |x^*(x)|, \|(a_n)_n\|_c\} \\ &= \sup \{\|x\|, \|(a_n)_n\|_c\} \\ &= \|((a_n)_n, x)\|_\infty. \end{aligned}$$

Acima, usamos que $\|S(x)\| = \|x\|$ e $\|x^*(x)\| \leq \|x\|$. Logo T_{S,x^*} é uma isometria. Agora, mostremos que T_{S,x^*} é um operador de codimensão 1. Notemos que:

$$ImT_{S,x^*} = \{((a_n)_n, y) : a_1 = x^*(S^{-1}(y))\} \quad (2.1)$$

Assim, é evidente que T_{S,x^*} não é sobrejetora. Suponhamos $((b_n)_n, z) \in c \oplus_\infty X$, de modo que $((b_n)_n, z) \notin ImT_{S,x^*}$. Então já sabemos que $b_1 \neq x^*(S^{-1}(z))$, dado qualquer $((c_n)_n, w) \in c \oplus_\infty X$, consideremos

$$\lambda = \frac{c_1 - x^*(S^{-1}(w))}{b_1 - x^*(S^{-1}(z))}.$$

Pela igualdade (2.1), verificamos que $((c_n)_n, w) - \lambda((b_n)_n, z) \in ImT_{S,x^*}$. Assim, provamos que T_{S,x^*} é um operador de codimensão 1.

Observação 2. No exemplo 3, é evidente que $T_{S,x^*}(c_0 \oplus X) \subseteq c_0 \oplus X$. Além disso, concluímos que T_{S,x^*} é um deslocamento isométrico em $c \oplus_\infty X$ se, e somente se, $\bigcap_{n=1}^\infty T_{S,x^*}^n(c \oplus X) = \{0\}$.

Teorema 8. Seja X um espaço de Banach e S uma isometria sobrejetora de X em X . Seja x^* um elemento da bola unitária de X^* . Então T_{S,x^*} é um deslocamento isométrico em $c \oplus_\infty X$ se, e somente se, para cada $x \in X$, a existência do limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^*(S^{-n}(x)),$$

implica que $x = 0$.

Demonstração. Vamos provar primeiro que para cada $k \in \mathbb{N}$, vale:

$$\text{Se } ((a_n)_n, x) \in ImT_{S,x^*}^k, \text{ então } a_j = x^*(S^{-j}(x)), \text{ para todo } j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Façamos isso através de uma indução em k . Para $k = 1$, o resultado segue da definição do operador. Vamos supor que:

$$\text{Se } ((a_n)_n, x) \in ImT_{S,x^*}^k, \text{ então } a_j = x^*(S^{-j}(x)), \forall j \in \{1, 2, \dots, k\},$$

para algum $k \in \mathbb{N}$ arbitrário e consideremos $((a_n)_n, x) \in ImT_{S,x^*}^{k+1}$. Então existe $((b_n)_n, y) \in c \oplus_\infty X$ tal que $((a_n)_n, x) = T_{S,x^*}^{k+1}(((b_n)_n, y)) = T_{S,x^*}(T_{S,x^*}^k(((b_n)_n, y)))$. Seja $((c_n)_n, w) =$

$T_{S,x}^k(((b_n)_n, y))$. Portanto $((a_n)_n, x) = T_{S,x^*}(((c_n)_n, w))$ e $((c_n)_n, w) \in \text{Im} T_{S,x^*}^k$. Aplicando a hipótese de indução para $((c_n)_n, w)$, concluímos que $c_j = x^*(S^{-j}(w))$, para cada $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Pela definição do operador T_{S,x^*} , sabemos que

$$a_1 = x^*(w), a_2 = c_1 = x^*(S^{-1}(w)), a_3 = c_2 = x^*(S^{-2}(w)), \dots, a_{k+1} = c_k = x^*(S^{-k}(w)).$$

Por fim, notemos que $x = S(w)$, logo $w = S^{-1}(x)$. Substituindo esse fato nas igualdades acima, acarreta que $a_j = x^*(S^{-j}(x))$ para todo $j \in \{1, 2, \dots, k, k+1\}$, então o resultado vale para $k+1$ e está provado por indução.

Vejam agora que vale a recíproca do resultado - se $((a_n)_n, x) \in c \oplus_\infty X$ é tal que

$$a_j = x^*(S^{-j}(x)), \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, k\},$$

então $((a_n)_n, x) \in \text{Im} T_{S,x^*}^k$. Para tal, basta definir $((b_n)_n, y) \in c \oplus_\infty X$ da seguinte forma:

$$y = S^{-k}(x), \quad b_1 = a_{k+1}, \quad b_2 = a_{k+2}, \dots, \quad b_l = a_{k+l}, \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Uma fácil verificação mostra que $((a_n)_n, x) = T_{S,x^*}^k(((b_n)_n, y))$ e assim vale também a recíproca.

Dessa forma, consideremos $((a_n)_n, x) \in c \oplus X$. Provamos que, para todo $k \in \mathbb{N}$, vale

$$((a_n)_n, x) \in \text{Im} T_{S,x^*}^k \text{ se, e somente se, } a_j = x^*(S^{-j}(x)) \text{ para todo } j \in \{1, 2, \dots, k\}. \quad (2.2)$$

Queremos provar agora que T_{S,x^*} é um deslocamento isométrico em $c \oplus_\infty X$ se, e somente se, a existência do limite $\lim_{n \rightarrow \infty} x^*(S^{-n}(x))$, implica que $x = 0$. Vamos assumir que a existência do limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^*(S^{-n}(x)),$$

implica que $x = 0$. Notemos que, se $((a_n)_n, x) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} T_{S,x^*}^n(c \oplus X)$, o resultado (2.2) diz que $a_n = x^*(S^{-n}(x))$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Mas $(a_n)_n \in c$, logo existe o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Então o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^*(S^{-n}(x))$$

existe. Logo, pelo que assumimos, $x = 0$. Assim temos $a_n = x^*(S^{-n}(0)) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Com isso $((a_n)_n, x) = ((0)_n, 0)$. Através da generalidade e da observação 2, concluímos que T_{S,x^*} é um deslocamento isométrico.

Por outro lado, vamos assumir que T_{S,x^*} é um deslocamento isométrico em $c \oplus_\infty X$ e supor a existência do limite $\lim_{n \rightarrow \infty} x^*(S^{-n}(x))$. Para todo $n, k \in \mathbb{N}$ seja

$$a_k^n = x^*(S^{-n-k}(x)).$$

Portanto $(a_k^n)_k \in c$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Pela definição de T_{S,x^*} , vem que $T_{S,x^*}^n((a_k^n)_k, S^{-n}(x)) = ((a_{k-1}^1)_k, x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim $((a_{k-1}^1)_k, x) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} T_{S,x^*}^n(c \oplus X)$, mas como T_{S,x^*} é um deslocamento isométrico, devemos ter $x = 0$ e isso conclui a prova. $\square$

O teorema a seguir pode ser demonstrado de maneira análoga ao teorema 8, basta ter em mente a observação 2. Dessa maneira, enunciaremos o próximo teorema sem o demonstrar.

Teorema 9. *Seja X um espaço de Banach e S uma isometria sobrejetora de X em X . Seja x^* um elemento da bola unitária de X^* . Então T_{S,x^*} é um deslocamento isométrico em $c_0 \oplus_\infty X$ se, e somente se, para cada $x \in X$, quando*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^*(S^{-n}(x)) = 0,$$

necessariamente temos $x = 0$.

O próximo lema ajudará no exemplo 4. Esse lema é um resultado bem simples de topologia. A notação $\mathbb{C}_\infty^n$ indica o espaço produto $\mathbb{C}^n$, munido com a norma $\|\cdot\|_\infty$.

Lema 2. *Existe um conjunto $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}_\infty^n$ satisfazendo as seguintes condições:*

- (1) *A é enumerável;*
- (2) *$\|z\|_\infty = 1$, para todo $z \in A$;*
- (3) *Dados quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $w \in \mathbb{C}_\infty^n$ com $\|w\|_\infty = 1$, existe $z \in A \cap \mathbb{C}_\infty^n$ de modo que $\|w - z\|_\infty < \frac{1}{6}$.*

Demonstração. Vamos fixar $n \in \mathbb{N}$ e considerar $r = \frac{1}{6}$. Evidentemente a família

$$\mathcal{F} = \{B(z; r) : z \in \mathbb{C}_\infty^n \text{ e } \|z\|_\infty = 1\}$$

é uma cobertura por abertos do conjunto $\{z \in \mathbb{C}_\infty^n : \|z\|_\infty = 1\}$. Como esse conjunto é compacto, admite uma subcobertura finita. Logo existe $\{B(z_1; r), B(z_2; r), \dots, B(z_l; r)\} \subseteq \mathcal{F}$ de modo que

$$\{z \in \mathbb{C}_\infty^n : \|z\|_\infty = 1\} \subseteq \bigcup_{j=1}^l B(z_j; r).$$

Consideremos $A_n = \{z_1, z_2, \dots, z_l\}$. Ao fazer esse raciocínio para todo $n \in \mathbb{N}$, construímos um conjunto

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

É fácil ver que esse conjunto satisfaz (1), (2) e (3). □

Observação 3. *Vamos enumerar o conjunto A do lema 2:*

$$A = \{z_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

Com isso, podemos exigir também que o conjunto A satisfaça a seguinte condição:

- (4) *Para dois naturais k_1, k_2 quaisquer de modo que $k_1 \leq k_2$, $z_{k_1} \in \mathbb{C}_\infty^n$ e $z_{k_2} \in \mathbb{C}_\infty^m$, temos $n \leq m$.*

Por fim, encerramos esta seção com uma aplicação dos teoremas 8 e 9.

Exemplo 4. Consideremos o espaço de Banach $X = \ell_1(\mathbb{Z})$ sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Seja S a isometria definida por :

$$\begin{aligned} S : X &\longrightarrow X \\ (x_n) &\longmapsto (y_n) \end{aligned}$$

com $y_n = x_{n-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Através da definição observamos que, para um $k \in \mathbb{N}$ arbitrário, valem:

i) $S^k((x_n)) = (y_n)$ com $y_n = x_{n-k}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

ii) $S^{-k}((x_n)) = (y_n)$ com $y_n = x_{n+k}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Consideremos $A = \{z_k : k \in \mathbb{N}\}$, um conjunto como no enunciado do lema 2 e de acordo com a observação 3. Vamos definir $(d_n)_n \in \ell_\infty(\mathbb{Z})$ da seguinte forma:

$$d_n = 0, \text{ para cada } n \geq 0.$$

Suponhamos $z_1 = (a_1, a_2, \dots, a_j) \in \mathbb{C}_\infty^j$, definimos $d_{-i} = a_i$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, j\}$. Suponhamos $N < 0$ o menor índice para o qual d_n está definido e que o processo acima foi repetido para $z_1, z_2, \dots, z_k$ (k vezes). Daí, se $z_{k+1} = (b_1, b_2, \dots, b_l) \in \mathbb{C}_\infty^l$, fazemos: $d_{N-i} = b_i$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, l\}$. Temos assim $(d_n)_n \in \ell_\infty(\mathbb{Z})$ definido por indução. Observemos que $\|d_n\|_\infty \leq 1$ e $(d_n)_n$ pode ser identificado com $x^* \in \ell_1^*(\mathbb{Z})$ da seguinte forma:

$$x^*((a_n)_n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n d_n \in \mathbb{C},$$

para todo $(a_n)_n \in \ell_1(\mathbb{Z})$. Sabemos ainda que esse funcional satisfaz $\|x^*\|_{X^*} \leq 1$.

Vamos mostrar que, para todo $x \in X$ e para todo $N \in \mathbb{N}$, existem N_1, N_2 naturais tais que $N_1 > N, N_2 > N$ e:

$$\mathcal{R}(x^*(S^{-N_1}(x))) \leq -\frac{\|x\|_1}{2} \leq \frac{\|x\|_1}{2} \leq \mathcal{R}(x^*(S^{-N_2}(x))). \quad (2.3)$$

Vamos mostrar apenas que $\frac{\|x\|_1}{2} \leq \mathcal{R}(x^*(S^{-N_2}(x)))$ e comentar como obter a outra desigualdade. Sendo assim, considere $x = (x_n) \in X$, $x \neq 0$ e $N \in \mathbb{N}$ arbitrários. Seja $\varepsilon = \frac{\|x\|_1}{6} > 0$. Segue que existe $F \subseteq \mathbb{Z}$ finito de modo que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n| - \sum_{n \in F} |x_n| < \varepsilon. \quad (2.4)$$

Notemos ainda que, todo conjunto F' de inteiros tal que $F \subseteq F'$, satisfaz

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n| - \sum_{n \in F'} |x_n| < \varepsilon.$$

Por esse motivo, podemos supor $F = \{c, c-1, \dots, c-l\} \subseteq \mathbb{Z}$ finito satisfazendo (2.4), para algum natural l .

Podemos supor, sem perder generalidade, que todo índice $n \in \mathbb{Z}$ dos $d_{n'}$ s correspondentes aos $z_{k'}$ s $\in \mathbb{C}_\infty^{l+1}$, verifica $c-n > N$. Vejamos que se isso não acontece, existe $t \in \mathbb{N}$, $t > l$, tal que

essa afirmação é válida para t .

Sabemos que existem $w_0, w_1, \dots, w_l \in \mathbb{C}$ de módulo 1 tais que $w_i x_{c-i} = |x_{c-i}|$, para todo $i \in \{0, 1, \dots, l\}$. Considere $(w_l, w_{l-1}, \dots, w_1, w_0) \in \mathbb{C}_\infty^{l+1}$, daí existe $m \in \mathbb{Z}$, $m < 0$ tal que

$$\|(d_{m-l}, \dots, d_{m-1}, d_m) - (w_l, \dots, w_1, w_0)\|_\infty < \frac{1}{6}.$$

Pelo que estamos supondo, $c - m > N$. Sejam $N_2 = c - m > N$ e $S^{-N_2}((x_n)) = (y_n)$, então $y_n = x_{N_2+n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto temos:

$$y_m = x_c, y_{m-1} = x_{c-1}, \dots, y_{m-l} = x_{c-l}.$$

Temos $x^*(S^{-N_2}(x)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (d_n y_n)$. Considere $I = \{n \in \mathbb{Z} : m - l \leq n \leq m\}$, daí:

$$\left| \|x\|_1 - \mathcal{R} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n y_n \right) \right| = \left| \|x\|_1 - \mathcal{R} \left(\sum_{n \in I} d_n y_n \right) - \mathcal{R} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus I} d_n y_n \right) \right| \leq A + B,$$

$$\text{para } A = \left| \|x\|_1 - \mathcal{R} \left(\sum_{n \in I} d_n y_n \right) \right| \text{ e } B = \left| \mathcal{R} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus I} d_n y_n \right) \right|.$$

$$\begin{aligned} A &= \left| \|x\|_1 - \mathcal{R} \left(\sum_{n \in I} d_n y_n \right) \right| = \left| \|x\|_1 - \mathcal{R}(d_m x_c + d_{m-1} x_{c-1} + \dots + d_{m-l} x_{c-l}) \right| = \\ &= \left| \|x\|_1 - \mathcal{R} \left(\sum_{i=0}^{l} w_i x_{c-i} \right) + \mathcal{R} \left(\sum_{i=0}^{l} w_i x_{c-i} \right) - \mathcal{R} \left(\sum_{i=0}^{l} d_{m-i} x_{c-i} \right) \right| \leq \\ &\leq \left| \|x\|_1 - \sum_{i=0}^l |x_{c-i}| \right| + \left| \mathcal{R} \left(\sum_{i=0}^l x_{c-i} (w_i - d_{m-i}) \right) \right| < \\ &< \varepsilon + \frac{1}{6} \sum_{i=0}^l |x_{c-i}| \leq \varepsilon + \frac{1}{6} \|x\|_1 = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Temos ainda:

$$\begin{aligned} B &= \left| \mathcal{R} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus I} d_n y_n \right) \right| \leq \left| \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus I} d_n y_n \right| \leq \|x^*\| \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus I} |y_n| \leq \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus I} |y_n| = \sum_{n \notin \{c, c-1, \dots, c-l\}} |x_n| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim $\left| \|x\|_1 - \mathcal{R}(x^*(S^{-N_2}(x))) \right| \leq A + B < 3\varepsilon = \frac{\|x\|_1}{2}$. Então temos $N_2 > N$ e:

$$\frac{\|x\|_1}{2} \leq \mathcal{R}(x^*(S^{-N_2}(x))).$$

Vejamos uma ideia de como obter $\mathcal{R}(x^*(S^{-N_1}(x))) \leq -\frac{\|x\|_1}{2}$ para algum $N_1 \in \mathbb{N}$, $N_1 > N$. Sejam $x = (x_n) \in X$, $x \neq 0$ e $N \in \mathbb{N}$ arbitrários. Consideremos $\varepsilon = \frac{\|x\|_1}{6} > 0$ e $F =$

$\{c, c-1, \dots, c-l\} \subseteq \mathbb{Z}$, como em (2.4). Novamente, suponhamos que todo índice $n \in \mathbb{Z}$ dos d_n 's correspondentes aos $z_{k'_s} \in \mathbb{C}_\infty^{l+1}$, verifica $c-n > N$. Daí existem $w_0, w_1, \dots, w_l \in \mathbb{C}$ de módulo 1 tais que $w_i x_{c-i} = -|x_{c-i}|$, para todo $i \in \{0, 1, \dots, l\}$. Considere $(w_l, w_{l-1}, \dots, w_1, w_0) \in \mathbb{C}_\infty^{l+1}$, daí existe $m \in \mathbb{Z}$, $m < 0$ tal que

$$\|(d_{m-l}, \dots, d_{m-1}, d_m) - (w_l, \dots, w_1, w_0)\|_\infty < \frac{1}{6}.$$

Daí, seguindo analogamente a primeira parte, obtemos:

$$|-\|x\|_1 - \mathcal{R}(x^*(S^{-N_1}(x)))| \leq \frac{\|x\|_1}{2},$$

donde tiramos que $\mathcal{R}(x^*(S^{-N_1}(x))) \leq -\frac{\|x\|_1}{2}$. Então, provamos as desigualdades em (2.3). Dessa forma para um $N \in \mathbb{N}$ arbitrário, existem $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, maiores que N , de modo que:

$$0 \leq \|x\|_1 = \frac{\|x\|_1}{2} - \left(-\frac{\|x\|_1}{2}\right) \leq \mathcal{R}(x^*(S^{-N_2}(x))) - \mathcal{R}(x^*(S^{-N_1}(x))).$$

Notemos que essas desigualdades são estabelecidas para cada $x \in X$, apenas variando os naturais N_1 e N_2 . Logo se $x \in X$ e existe $\lim_{n \rightarrow \infty} x^*(S^{-n}(x))$, devemos ter $x = 0$. Pelos teoremas 8 e 9, $c \oplus_\infty \ell_1$ e $c_0 \oplus_\infty \ell_1$ admitem um deslocamento isométrico.

2.4 Deslocamentos isométricos em $c \oplus_\infty X$

Nesta seção, descreveremos um **deslocamento isométrico** em $c \oplus_\infty X$, quando X for **estritamente convexo**. Nesse contexto, o lema 3 não apenas trata de deslocamentos, mas de qualquer **isometria**. Já o lema 4, explora qualquer **isometria** cuja **imagem** tenha **codimensão 1**. O teorema 10 provará que se T é um **deslocamento isométrico** definido em $c \oplus_\infty X$, então a restrição de T a c é um **novο deslocamento isométrico**. Esses três resultados podem ser encontrados em [5].

O teorema 11 é uma solução do problema da questão 1, no **caso complexo**. Após demonstrá-lo, comentaremos sobre seus desdobramentos, os quais envolvem muitos exemplos de **deslocamentos**. Esse teorema foi estudado em [3].

Lema 3. *Seja X um espaço de Banach estritamente convexo e de dimensão infinita e seja Q a projeção natural de $c \oplus_\infty X$ em X . Suponhamos que T seja uma isometria, definida por $T : c \oplus_\infty X \rightarrow c \oplus_\infty X$. Então:*

- (1) $T(c) \subseteq c$;
- (2) $Q \circ T|_X$ é uma isometria.

Demonstração. Antes de mostrarmos (1), vamos observar alguns fatos. Como X é um espaço de Banach de dimensão infinita, existe $x \in X$, $x \neq 0$ tal que $T((0, x)) = (y_1, x_1)$, com $y_1 \in c_0$. De fato, basta tomar $\{x_a, x_b\} \subseteq X$ linearmente independente. Digamos que

$$T((0, x_a)) = (y_a, z_a), \quad T((0, x_b)) = (y_b, z_b) \quad \text{com } y_a \rightarrow \alpha \text{ e } y_b \rightarrow \beta.$$

Daí para $\alpha = 0$, tomamos $x = x_a$. Para $\beta = 0$, tomamos $x = x_b$ e quando $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$, tomamos $x = x_a - \frac{\alpha}{\beta}x_b$. Já que garantimos a existência, fixemos x como acima.

Afirmo que $\|x\|_X = \|x_1\|_X$. Suponhamos, por absurdo, $\|x\|_X - \|x_1\|_X = \varepsilon > 0$. Seja $y_1 = (a_n)_n$, logo $\|x\|_X = \|y_1\|_c$. Considere

$$A = \left\{ k \in \mathbb{N} : |a_k| \geq \|y_1\|_c - \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Como $y_1 \in c_0$, A deve ser finito. Vamos construir $z \in X$, $z \neq 0$ que satisfaz $T((0, z)) = ((b_n)_n, x_3)$ e $b_k = 0$ para todo $k \in A$. Para tal, suponhamos $A = \{k_1, k_2, \dots, k_l\}$, ou seja, $|A| = l \in \mathbb{N}$. Sejam $w_1, w_2, \dots, w_{l+1}$ vetores linearmente independentes em X e $T(w_i) = ((\alpha_n^i)_n, \beta_i)$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, l+1\}$. Consideremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \lambda_1 \alpha_{k_1}^1 + \lambda_2 \alpha_{k_1}^2 + \dots + \lambda_{l+1} \alpha_{k_1}^{l+1} = 0 \\ \lambda_1 \alpha_{k_2}^1 + \lambda_2 \alpha_{k_2}^2 + \dots + \lambda_{l+1} \alpha_{k_2}^{l+1} = 0 \\ \vdots + \vdots + \dots + \vdots \\ \lambda_1 \alpha_{k_l}^1 + \lambda_2 \alpha_{k_l}^2 + \dots + \lambda_{l+1} \alpha_{k_l}^{l+1} = 0 \end{cases}$$

Esse sistema tem l equações e $l+1$ incógnitas, logo admite uma solução não trivial, digamos $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{l+1})$. Observe daí que $z = \sum_{i=1}^{l+1} \delta_i w_i$ verifica o que gostaríamos. Ainda podemos supor $\|z\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2}$, pois se isso não for verdade basta trocar z por $\frac{\varepsilon}{2\|z\|} z$.

Assim, para todo $\theta \in \mathbb{K}$ com $|\theta| = 1$, temos:

$$\begin{aligned} \|x + \theta z\|_X &= \|T(0, x + \theta z)\|_\infty = \|((a_n), x_1) + \theta((b_n), x_3)\|_\infty \leq \\ &\leq \sup(\{|a_n| : n \in A\} \cup \{|a_n + \theta b_n| : n \notin A\} \cup \{\|x_1 + \theta x_3\|_X\}). \end{aligned}$$

Notemos que:

$$\sup(\{|a_n| : n \in A\}) \leq \|y_1\|_c = \|x\|_X;$$

Se $n \notin A$, $|a_n + \theta b_n| \leq |a_n| + |\theta b_n| \leq \|y_1\|_c - \frac{\varepsilon}{2} + |\theta| \|z\|_X \leq \|y_1\|_c - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \|y_1\|_c = \|x\|_X$, aqui usamos que $|a_n| \leq \|y_1\|_c - \frac{\varepsilon}{2}$ se $n \notin A$, $|\theta| = 1$ e $\|z\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2}$;

$$\|x_1 + \theta x_3\|_X \leq \|x_1\| + |\theta| \|x_3\| \leq \|x_1\| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \|x\|_X, \text{ lembrando que } \|x\|_X - \|x_1\|_X = \varepsilon.$$

Portanto $\|x + \theta z\|_X \leq \|x\|_X$ para todo $\theta \in \mathbb{K}$ de módulo 1, uma contradição com o corolário 2, pois X é estritamente convexo, $x \neq 0$ e $z \neq 0$. Provamos então que $\|x\|_X = \|x_1\|_X$, pela redução ao absurdo.

Mostremos (1). Para tal, seja $y \in c$, $y \neq 0$ arbitrário. Seja $\bar{y} = \frac{\|x\|}{2\|y\|} y$, logo $\|\bar{y}\|_c \leq \|x\|_X$. Suponhamos $T((\bar{y}, 0)) = (y_2, x_2)$, daí para todo $\theta \in \mathbb{K}$, $|\theta| = 1$, temos:

$$\|x_1\|_X = \|x\|_X = \|(\theta \bar{y}, x)\|_\infty = \|T(\theta \bar{y}, x)\|_\infty \geq \|\theta x_2 + x_1\|.$$

Como X é estritamente convexo e $x_1 \neq 0$, pelo corolário 2 segue que $x_2 = 0$. Daí $T(\bar{y}, 0) = (y_2, 0) \in c$ e, por consequência, $T(y, 0) \in c$. Pela generalidade no raciocínio acima, provamos (1).

Agora, provemos que se $x \in X$ e $T((0, x)) = (y_1, x_1)$, então $y_1 \in c_0$. Suponhamos por absurdo que existe $x \in X$ de maneira que $T(0, x) = ((a_n)_n, x_1)$ e $\lim a_n \neq 0$. Consideremos $A = \{k \in \mathbb{N} : a_k = 0\}$. Certamente A é um conjunto finito.

Analogamente a construção de z na primeira parte, podemos construir $y \in c \setminus \{0\}$ de modo que $T((y, 0)) = ((b_n)_n, x_4)$ e $b_k = 0$ para todo $k \in A$. Além disso, observemos que por (1) devemos ter $x_4 = 0$. Podemos ainda supor, sem perder generalidade, que $\|y\|_c \geq \|x\|_X$. Se isso não for verdade, basta substituir y por αy , para $\alpha = \frac{2\|x\|}{\|y\|}$. Daí temos dois possíveis casos para estudar:

Primeiro Caso. Suponhamos que $\|y\|_c = |b_{k_0}|$ para algum $k_0 \in \mathbb{N}$.

Obviamente $k_0 \notin A$, pois $y \neq 0$. Neste caso, vale para todo $\theta \in \mathbb{K}$, $|\theta| = 1$:

$$|b_{k_0}| = \|y\|_c = \|(y, \theta x)\|_\infty = \|T(y, \theta x)\|_\infty \geq |b_{k_0} + \theta a_{k_0}|.$$

Uma contradição com o corolário 2, pois $b_{k_0} \neq 0$, $a_{k_0} \neq 0$, e $\mathbb{K}$ é estritamente convexo.

Segundo Caso. Suponhamos que $\|y\|_c = \lim_{k \rightarrow \infty} |b_k|$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $\theta_k \in \mathbb{K}$, $|\theta_k| = 1$ um escalar que satisfaz $|b_k + \theta_k a_k| = |b_k| + |a_k|$. Daí para cada $k \in \mathbb{N}$, temos:

$$\|y\|_c = \|(y, \theta_k x)\|_\infty = \|T(y, \theta_k x)\|_\infty \geq |b_k + \theta_k a_k| = |b_k| + |a_k|.$$

Segue que $|a_k| \leq \|y\|_c - |b_k|$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Daí por hipótese, $\|y\|_c = \lim_{k \rightarrow \infty} |b_k|$, então $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k| = 0$, uma contradição, já que estávamos supondo $\lim a_n \neq 0$.

Em ambos os casos, chegamos a um contradição. Isso se deve ao fato de admitirmos que $\lim a_n \neq 0$.

Na primeira parte provamos que se $x \in X$ e $T(0, x) = (y_1, x_1)$, com $y_1 \in c_0$, então $\|x_1\|_X = \|x\|_X$. Por fim mostramos que, se $x \in X$ e $T(0, x) = (y_1, x_1)$, então $y_1 \in c_0$. Com isso, temos que se $x \in X$ e $T(0, x) = (y_1, x_1)$, então $\|x_1\|_X = \|x\|_X$, donde concluímos que $Q \circ T|_X$ é uma isometria e isso corresponde a (2). Por fim, consideremos $(y, x) \in c \oplus X$, temos:

$$Q \circ T((y, x)) = Q \circ T((y, 0)) + Q \circ T((0, x)) = Q \circ T((0, x))$$

Pelo fato de $Q \circ T|_X$ ser uma isometria e por (1), concluímos que $T(y, x) \in c$ se, e somente se, $x = 0$.

□

Antes de demonstrar o lema 4, vamos definir o que é o **suporte** de uma **sequência**.

Definição 13. Seja $y = (a_n)_n \in c$. Vamos considerar o seguinte subconjunto dos naturais

$$A = \{k \in \mathbb{N} : a_k \neq 0\}.$$

Chamamos o conjunto A de **conjunto suporte** da sequência $(a_n)_n$ e o denotamos por $\text{supp}(y)$.

Lema 4. *Seja X um espaço de Banach estritamente convexo e de dimensão infinita. Seja*

$$T : c \oplus_\infty X \longrightarrow c \oplus_\infty X$$

uma isometria cuja imagem é um subespaço de codimensão 1. Seja P a projeção de $c \oplus_\infty X$ em c . Nessas condições, valem:

(3) *Seja $D = \{k \in \mathbb{N} : \text{existe } x \in X, \text{ tal que } k \in \text{supp}(P(T(0, x)))\}$. Então D tem, no máximo, 1 elemento.*

(4) *Para todo $k \in \mathbb{N}$, $D \cup \text{supp}(T(e_k, 0))$ tem, no máximo, dois elementos.*

Demonstração. Para $y = (a_n) \in c$, vamos definir:

$$m(y) = \{k \in \mathbb{N} : |a_k| = \|y\|_c\}.$$

Do lema 3 (1), sabemos que $T(y, 0) \in c$, daí $T(y, 0) = ((b_n)_n, 0)$, para $(b_n)_n \in c$. Nessa demonstração usaremos o lema 3 (1) inúmeras vezes. Além disso, vamos cometer abusos de linguagem daqui para frente e denotar o conjunto $\{k \in \mathbb{N} : |b_k| = \|(b_n)_n\|_c\}$ por $m(T(y))$. Vamos mostrar que se $y \in c$, $y \neq 0$, valem:

- a) $D \cap m(T(y)) = \emptyset$;
- b) Se $k \notin \text{supp}(y)$, então $\text{supp}(T(e_k, 0)) \cap m(T(y)) = \emptyset$;
- c) Se $k \notin \text{supp}(y)$, então $m(T(y)) \cap (D \cup \text{supp}(T(e_k, 0))) = \emptyset$.

Para concluir a), consideremos $y \in c$, $y \neq 0$ e $T(y, 0) = (y', 0)$ com $y' = (\delta_n)_n$. Vamos supor, por absurdo, $k_0 \in D \cap m(T(y))$. Daí $|\delta_{k_0}| = \|y'\|_c$ e existe $x \in X$ tal que $T(0, x) = ((\gamma_n)_n, x_5)$ com $\gamma_{k_0} \neq 0$. Podemos supor, sem perder generalidade que $\|x\|_X \leq \|y\|_c$. Veja que se isso não for verdade basta trocar x por αx com $\alpha = \frac{\|y\|_c}{2\|x\|_X}$. Assim, para todo $\theta \in \mathbb{K}$, $|\theta| = 1$, temos:

$$|\delta_{k_0}| = \|y'\|_c = \|y\|_c = \|(y, \theta x)\|_\infty = \|T(y, \theta x)\|_\infty \geq |\delta_{k_0} + \theta \gamma_{k_0}|.$$

Uma contradição com o corolário 2, pois $\delta_{k_0} \neq 0$, $\gamma_{k_0} \neq 0$ e $\mathbb{K}$ é estritamente convexo.

Para provar b), suponhamos $y \in c$, $y \neq 0$, $T(y, 0) = (y', 0)$ com $y' = (\delta_n)_n$ e $k \in \mathbb{N}$ fixado de maneira que $k \notin \text{supp}(y)$. Vamos admitir, por absurdo, que $k_0 \in \text{supp}(T(e_k, 0)) \cap m(T(y))$. Podemos admitir, sem perda de generalidade, que $\|y\|_c \geq 1$, pois se isso não for verdade basta trocar y por αy , para $\alpha = \frac{1}{\|y\|_c}$. Se $T(e_k, 0) = ((\gamma_n)_n, 0)$, daí para todo $\theta \in \mathbb{K}$, $|\theta| = 1$, vale:

$$|\delta_{k_0}| = \|y'\|_c = \|y\|_c = \|\theta e_k + y\|_c = \|T(\theta e_k + y, 0)\|_\infty \geq |\theta \gamma_{k_0} + \delta_{k_0}|.$$

Uma contradição com o corolário 2, pois $\delta_{k_0} \neq 0$, $\gamma_{k_0} \neq 0$ e $\mathbb{K}$ é estritamente convexo. Dessa forma provamos b). É evidente que c) segue de a) e b).

Agora mostremos (3). Suponhamos, por absurdo, que

$$\{m, n\} \subseteq D,$$

sendo m e n dois naturais arbitrários e distintos. Vamos mostrar que, para quaisquer escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $(\alpha e_m + \beta e_n, 0) \in ImT$ se, e somente se, $\alpha = \beta = 0$.

De fato, se $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \setminus \{(0, 0)\}$ e $(\alpha e_m + \beta e_n, 0) = T(y, 0)$, temos:

se $|\alpha| \geq |\beta|$, então $m \in D \cap m(T(y))$;

se $|\alpha| \leq |\beta|$, então $n \in D \cap m(T(y))$.

Por a), $D \cap m(T(y)) = \emptyset$, portanto $(\alpha e_m + \beta e_n, 0) \notin ImT$. Pelo que acabamos de mostrar, $(e_m, 0) \notin ImT$, $(e_n, 0) \notin ImT$ e $(e_m, 0) \notin \mathbb{K}(e_n, 0) \oplus ImT$, isso contradiz o fato de T ter codimensão 1. Assim provamos (3).

Agora vamos provar que para cada $k \in \mathbb{N}$, o conjunto $supp(T(e_k, 0))$ é finito. Na verdade mostraremos que este conjunto não pode ter 4 elementos distintos. Sem perder generalidade e usando uma notação mais simples suponhamos, por absurdo, que 1, 2, 3 e 4 são elementos de $supp(T(e_k, 0))$.

Como T tem codimensão 1, existem escalares α e β , não ambos nulos, tais que $(\alpha e_1 + \beta e_2, 0) \in ImT$. Analogamente existem escalares γ e δ , não ambos nulos, tais que $(\gamma e_3 + \delta e_4, 0) \in ImT$. Digamos que $(\alpha e_1 + \beta e_2, 0) = T(y', 0)$, $(\gamma e_3 + \delta e_4, 0) = T(y'', 0)$ com $y', y'' \in c$. Existem λ_1, λ_2 escalares, não ambos nulos tais que $k \notin supp(\lambda_1 y' + \lambda_2 y'')$. Claramente temos:

$$T(\lambda_1 y' + \lambda_2 y'', 0) = (\lambda_1 \alpha e_1 + \lambda_1 \beta e_2 + \lambda_2 \gamma e_3 + \lambda_2 \delta e_4, 0).$$

Assim, 1, 2, 3 ou 4 pertencem ao conjunto $m(T(\lambda_1 y' + \lambda_2 y'')) \cap supp(T(e_k, 0))$, sendo que $k \notin supp(\lambda_1 y' + \lambda_2 y'')$, o que contradiz b). Assim já sabemos que para cada $k \in \mathbb{N}$, o conjunto $D \cup supp(T(e_k, 0))$ é finito.

Vamos mostrar que, fixado $k \in \mathbb{N}$, se $y_1, y_2 \in c$ e

$$supp(T(y_1, 0)) \cup supp(T(y_2, 0)) \subseteq D \cup supp(T(e_k, 0)), \quad (2.5)$$

então o conjunto $\{y_1, y_2\}$ é linearmente dependente. Sendo assim, suponhamos $y_1, y_2 \in c$ e que vale (2.5). Sabemos que existem escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, não ambos nulos, tais que $k \notin supp(\alpha y_1 + \beta y_2)$. Afirimo que, nessas condições, $supp(T(\alpha y_1 + \beta y_2, 0)) = \emptyset$. De fato, se isso não fosse verdade, teríamos:

$$\emptyset \neq supp(T(\alpha y_1 + \beta y_2, 0)) \subseteq supp(T(y_1, 0)) \cup supp(T(y_2, 0)) \subseteq D \cup supp(T(e_k, 0)).$$

Logo, $supp(T(\alpha y_1 + \beta y_2, 0))$ tem que ser finito. Então existe $k_0 \in m(T(\alpha y_1 + \beta y_2, 0))$, note que $k_0 \in supp(T(\alpha y_1 + \beta y_2, 0)) \subseteq D \cup supp(T(e_k, 0))$. Isso contradiz c), pois $k \notin supp(\alpha y_1 + \beta y_2)$ e $k_0 \in m(T(\alpha y_1 + \beta y_2, 0)) \cap (D \cup supp(T(e_k, 0)))$.

Portanto $supp(T(\alpha y_1 + \beta y_2, 0)) = \emptyset$, logo $T(\alpha y_1 + \beta y_2, 0) = (0, 0)$ e, pelo fato de T ser uma isometria segue que $\alpha y_1 + \beta y_2 = 0$, para escalares α e β não ambos nulos. Em outras palavras, o conjunto $\{y_1, y_2\}$ é linearmente dependente.

Por fim, provemos que $supp(T(e_k, 0)) \cup D$ tem, no máximo, 2 elementos. Suponhamos que k_1 e k_2 sejam dois naturais distintos e pertençam a $supp(T(e_k, 0)) \cup D$. Existem $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, escalares não ambos nulos de modo que $(\alpha e_{k_1} + \beta e_{k_2}, 0) \in ImT$, pois T tem codimensão 1. Daí $(\alpha e_{k_1} + \beta e_{k_2}, 0) = T(y', 0)$, para algum $y' \in c$. Com isso concluímos que

$\text{supp}(T(y', 0)) \cup \text{supp}(T(e_k, 0)) \subseteq D \cup \text{supp}(T(e_k, 0))$. Pelo que acabamos de mostrar, vem que $\{y', e_k\}$ é linearmente dependente, digamos que $e_k = \lambda y'$. Segue que $T(e_k, 0) = \lambda(\alpha e_{k_1} + \beta e_{k_2}, 0)$ e assim $\text{supp}(T(e_k, 0)) \subseteq \{k_1, k_2\}$. Mostramos que se k_1, k_2 são naturais distintos e $\{k_1, k_2\} \subseteq \text{supp}(T(e_k, 0)) \cup D$, então $\text{supp}(T(e_k, 0)) \subseteq \{k_1, k_2\}$. Daí como D tem no máximo um elemento, segue que $\text{supp}(T(e_k, 0)) \cup D$ tem, no máximo, 2 elementos.

□

Através dos lemas 3 e 4 podemos compreender melhor o comportamento dos deslocamentos isométricos em $c \oplus_\infty X$. Além disso, estamos em condições de provar o seguinte:

Teorema 10. *Seja X um espaço de Banach estritamente convexo. Seja Q a projeção natural de $c \oplus_\infty X$ em X e seja T um deslocamento isométrico em $c \oplus_\infty X$, então $Q \circ T|_X : X \rightarrow X$ é isometria sobrejetora e $T|_c$ é um deslocamento isométrico em c .*

Demonstração. Seja $(y, x) \in c \oplus X$ arbitrário. No fim do lema 3 provamos que

$$T(y, x) \in c \text{ se, e somente se, } x = 0. \quad (2.6)$$

Esse fato será muito útil para demonstrar este teorema. Temos dois casos a considerar:

Primeiro caso. $T(X) \subseteq X$ (mostraremos que essa hipótese não acontece).

Vamos mostrar que $X \subseteq \text{Im}T$ ou $c \subseteq \text{Im}T$. Suponhamos, por absurdo, que existe $x \in X$ com $(0, x) \notin \text{Im}T$ e $y \in c$ com $(y, 0) \notin \text{Im}T$. Pelo fato de T ter codimensão 1, existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $(0, x) = \lambda(y, 0) + T(y', x')$ para algum $(y', x') \in c \oplus X$. Daí vale

$$(0, x) - T(0, x') = \lambda(y, 0) + T(y', 0).$$

Como estamos no primeiro caso, $(0, x) - T(0, x') \in X$. Por (2.6), $\lambda(y, 0) + T(y', 0) \in c$. Daí deve valer

$$(0, x) - T(0, x') = \lambda(y, 0) + T(y', 0) = 0.$$

Segue que $T(y', 0) = -\lambda(y, 0)$. Como $(0, x) \notin \text{Im}T$, devemos ter $\lambda \neq 0$. Portanto $(y, 0) \in \text{Im}T$, uma contradição.

Logo $X \subseteq \text{Im}T$ ou $c \subseteq \text{Im}T$. Por estarmos no primeiro caso e por (2.6), devemos ter $T(X) = X$ ou $T(c) = c$. Isso contradiz o fato de T ser um deslocamento isométrico, pois

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Im}T^n = \{0\}.$$

Segundo Caso. Suponhamos que $T(X) \not\subseteq X$.

Nesse caso $D \neq \emptyset$. Pelo lema 4 (3), existe $m \in \mathbb{N}$ de modo que $D = \{m\}$. Na demonstração do lema 4 provamos que $m(T(y)) \cap D = \emptyset$, para todo $y \in c \setminus \{0\}$, daí $(e_m, 0) \notin \text{Im}T$. Então $T(c) \neq c$.

Como $(e_m, 0) \notin \text{Im}T$ e T tem codimensão 1, para cada $x \in X$, temos:

$$(0, x) = \lambda(e_m, 0) + T(y', x') = \lambda(e_m, 0) + T(y', 0) + T(0, x')$$

para algum $\lambda \in \mathbb{K}$ e para algum $(y', x') \in c \oplus X$. Daí aplicando Q nas igualdades acima implica que:

$$x = Q \circ T(0, x) = Q \circ T(\lambda e_m, 0) + Q \circ T(y', 0) + Q \circ T(0, x').$$

Por (2.6), $Q \circ T(\lambda e_m, 0) = 0$ e $Q \circ T(y', 0) = 0$. Daí $x = Q \circ T(0, x') = Q \circ T|_X(0, x')$. Pelo lema 3 (2), $Q \circ T|_X$ é isometria, então é uma isometria sobrejetora. Resta-nos apenas mostrar que $T|_c$ é um deslocamento isométrico em c . Evidentemente:

$$T|_c \text{ é isometria e } \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Im}(T|_c)^n = \{0\}.$$

Já temos que $\text{Im}T|_c \neq c$, vejamos que $T|_c$ tem codimensão 1. Seja $y \in c$ de modo que $y \notin \text{Im}T|_c$, o que é equivalente a $(y, 0) \notin \text{Im}T$. Daí, como T tem codimensão 1, para todo $y' \in c$, existem $(y_0, x_0) \in c \oplus X$ e $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ satisfazendo:

$$(y', 0) = \lambda_0(y, 0) + T(y_0, x_0).$$

Por (2.6), $x_0 = 0$, daí $y' = \lambda_0 y + T|_c(y_0)$, e isso conclui a prova. $\square$

Apesar de não resolver a questão 1, vamos estudar o **caso complexo** deste problema, o qual também pode ser encontrado em [3]. Para entendermos bem o enunciado desse teorema e as propriedades nele usadas, é fundamental recordarmos o corolário 1 e a observação 1, ambos presentes no capítulo 1.

Teorema 11. *O espaço de Banach $c \oplus_\infty c_0$, sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, admite um deslocamento isométrico.*

Demonstração. Consideremos um conjunto infinito e enumerável de números reais que seja independente sobre os racionais, digamos $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots\}$. Daí, para cada $k \in \mathbb{N}$, vamos definir o número complexo

$$z_k = e^{2\pi i \alpha_k}.$$

Temos, dessa maneira, uma sequência de números complexos $(z_n)_n$ satisfazendo $|z_k| = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Para $f = ((x_n), (y_n)) \in c \oplus c_0$ definimos:

$$T(f) = (\bar{x}, \bar{y}), \text{ com } \bar{x} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n z_n}{2^n}, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \right) \text{ e } \bar{y} = (y_1 z_1, y_2 z_2, \dots, y_n z_n, \dots).$$

Evidentemente, $T : c \oplus c_0 \longrightarrow c \oplus c_0$ está bem definido e T é linear. Seja $f = (x, y) \in c \oplus c_0$ como acima. Vejamos que T é uma isometria:

$$\begin{aligned} \|T(x, y)\|_\infty &= \|(\bar{x}, \bar{y})\|_\infty = \\ &= \sup \left(\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} \cup \{|y_n z_n| : n \in \mathbb{N}\} \cup \left\{ \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n z_n}{2^n} \right| \right\} \right) = \\ &= \sup \left(\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} \cup \{|y_n| : n \in \mathbb{N}\} \cup \left\{ \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n z_n}{2^n} \right| \right\} \right). \end{aligned}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{y_k z_k}{2^k} \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{|y_k z_k|}{2^k} = \sum_{k=1}^n \frac{|y_k|}{2^k} \leq \|y\|_\infty \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \leq \|y\|_\infty.$$

Assim,

$$\left| \sum_{k=1}^\infty \frac{y_k z_k}{2^k} \right| \leq \|y\|_\infty \text{ e } \|T(x, y)\|_\infty = \sup(\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y_n : n \in \mathbb{N}\}) = \|(x, y)\|_\infty.$$

Então T é uma isometria. Vamos supor que $f \in \bigcap_{n=1}^\infty \text{Im}(T^n)$ e provar que $f = 0$. Daqui para frente adotaremos a seguinte notação:

$$\begin{aligned} T^{-k}(f) &= T^{-k}((x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)) = \\ &= ((x_{-k1}, x_{-k2}, \dots, x_{-kn}, \dots), (y_{-k1}, y_{-k2}, \dots, y_{-kn}, \dots)), \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Sabemos que $T(T^{-1}(f)) = f$, ou seja,

$$T((x_{-11}, x_{-12}, \dots, x_{-1n}, \dots), (y_{-11}, y_{-12}, \dots, y_{-1n}, \dots)) = ((x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)).$$

Através da definição do operador T , tiramos que $y_n = y_{-1n} z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ou ainda, $y_{-1n} = y_n(z_n)^{-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, pelo fato de $T(T^{-1}(f)) = f$, tiramos que $x_1 = \sum_{n=1}^\infty \frac{y_{-1n} z_n}{2^n} = \sum_{n=1}^\infty \frac{y_n}{2^n}$ e $x_{n+1} = x_{-1n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Vamos provar por indução (em k) que $y_{-kn} = y_n(z_n)^{-k} \forall n, k \in \mathbb{N}$. Já temos o resultado para $k = 1$, vamos admiti-lo para k arbitrário, daí para $k + 1$ temos:

$$\begin{aligned} T(T^{-(k+1)}(f)) &= T((x_{-(k+1)1}, x_{-(k+1)2}, \dots, x_{-(k+1)n}, \dots), (y_{-(k+1)1}, y_{-(k+1)2}, \dots, y_{-(k+1)n}, \dots)) = \\ &= T^{-k}(f) = ((x_{-k1}, x_{-k2}, \dots, x_{-kn}, \dots), (y_{-k1}, y_{-k2}, \dots, y_{-kn}, \dots)). \end{aligned}$$

Logo $y_{-kn} = z_n y_{-(k+1)n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí $y_{-(k+1)n} = y_{-kn}(z_n)^{-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela hipótese de indução, $y_{-kn} = y_n(z_n)^{-k}$ e portanto temos $y_{-(k+1)n} = y_n(z_n)^{-(k+1)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então está provado por indução. Assim podemos escrever:

$$\begin{aligned} T^{-k}(f) &= T^{-k}((x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)) = \\ &= ((x_{-k1}, x_{-k2}, \dots, x_{-kn}, \dots), (y_1(z_1)^{-k}, y_2(z_2)^{-k}, \dots, y_n(z_n)^{-k}, \dots)). \end{aligned}$$

Nossa meta agora é escrever cada x_n em função dos elementos dos conjuntos $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$, notemos que isso já foi feito para x_1 . Vamos mostrar que $x_{n+1} = x_{-n1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Acima mostramos que $x_2 = x_{-11}$. Notemos que:

$$\begin{aligned} T(T^{-2}(f)) &= T((x_{-21}, x_{-22}, \dots, x_{-2n}, \dots), (y_{-21}, y_{-22}, \dots, y_{-2n}, \dots)) = \\ &= T^{-1}(f) = ((x_{-11}, x_{-12}, \dots, x_{-1n}, \dots), (y_{-11}, y_{-12}, \dots, y_{-1n}, \dots)), \end{aligned}$$

daí $x_{-21} = x_{-12}$. Pelo que tínhamos, $x_{-12} = x_3$, logo temos o resultado para $n = 1, 2$. Vamos

provar agora para $k \in \mathbb{N}$ arbitrário, $k > 2$. Temos:

$$\begin{aligned} T(T^{-k}(f)) &= T((x_{-k1}, x_{-k2}, \dots, x_{-kn}, \dots), (y_{-k1}, y_{-k2}, \dots, y_{-kn}, \dots)) = \\ &= T^{-(k-1)}(f) = ((x_{-(k-1)1}, x_{-(k-1)2}, \dots, x_{-(k-1)n}, \dots), (y_{-(k-1)1}, y_{-(k-1)2}, \dots, y_{-(k-1)n}, \dots)), \end{aligned}$$

daí $x_{-k1} = x_{-(k-1)2}$. Se notarmos que $T(T^{-(k-1)}(f)) = T^{-(k-2)}(f)$ e usarmos novamente a definição do operador T , obtemos $x_{-(k-1)2} = x_{-(k-2)3}$. Daí usando que $T(T^{-(k-2)}(f)) = T^{-(k-3)}(f)$, obtemos $x_{-(k-2)3} = x_{-(k-3)4}$ (desde que $k \geq 4$). Usando esse raciocínio indutivamente obtemos:

$$x_{-k1} = x_{-(k-1)2} = x_{-(k-2)3} = \dots = x_{-2(k-1)} = x_{-1k}.$$

Tínhamos que $x_{-1k} = x_{k+1}$, logo $x_{k+1} = x_{-k1}$, é o que queríamos.

Novamente, usando a definição do operador T e que $T(T^{-(k+1)}(f)) = T^{-k}(f)$, concluimos que:

$$x_{-k1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_{-(k+1)n} z_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(z_n)^{-k}}{2^n},$$

sendo que na última igualdade usamos que $y_{-(k+1)n} = y_n(z_n)^{-(k+1)}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto:

$$x_{k+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(z_n)^{-k}}{2^n},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Concluimos que se $f = (x, y) \in c \oplus c_0$ satisfizer $f \in \bigcap_{n=1}^{\infty} Im(T^n)$, então $x_{k+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(z_n)^{-k}}{2^n}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Daí como $x \in c$, existe $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(z_n)^{-k}}{2^n}$. Suponhamos $M = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(z_n)^{-k}}{2^n}$ e $L = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y_n|}{2^n}$. Vamos mostrar que $M = L$ e $M = -L$, e pela unicidade do limite, concluir que L deve ser 0.

Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário, sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{|y_n|}{2^n} < \varepsilon \text{ e } \left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{y_n(z_n)^{-k}}{2^n} \right| < \varepsilon,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Temos ainda que existe $k' \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| M - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(z_n)^{-k}}{2^n} \right| < \varepsilon, \text{ para todo } k \geq k'.$$

Pelo corolário 1, existe $k_0 > k'$ de maneira que $||y_n| - y_n(z_n)^{-k_0}| < \varepsilon$, para todo $n \in \{1, 2, 3, \dots, n_0\}$. Segue que:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{n_0} \frac{y_n(z_n)^{-k_0}}{2^n} - \sum_{n=1}^{n_0} \frac{|y_n|}{2^n} \right| &\leq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{|y_n(z_n)^{-k_0} - |y_n||}{2^n} < \\ &< \varepsilon \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
|M - L| &\leq \left| M - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(z_n)^{-k_0}}{2^n} \right| + \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(z_n)^{-k_0}}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y_n|}{2^n} \right| < \\
&< \varepsilon + \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(z_n)^{-k_0}}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y_n|}{2^n} \right| = \\
&= \varepsilon + \left| \sum_{n=1}^{n_0} \frac{y_n(z_n)^{-k_0}}{2^n} - \sum_{n=1}^{n_0} \frac{|y_n|}{2^n} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{y_n(z_n)^{-k_0}}{2^n} - \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{|y_n|}{2^n} \right| \leq \\
&\leq \varepsilon + \left| \sum_{n=1}^{n_0} \frac{y_n(z_n)^{-k_0}}{2^n} - \sum_{n=1}^{n_0} \frac{|y_n|}{2^n} \right| + \left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{y_n(z_n)^{-k_0}}{2^n} - \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{|y_n|}{2^n} \right| < \\
&< \varepsilon + \varepsilon + 2\varepsilon = 4\varepsilon.
\end{aligned}$$

Como tomamos $\varepsilon > 0$ arbitrário, segue que $M = L$. Analogamente, pelo corolário 1, existe $k_1 \geq k'$ tal que $|y_n| + y_n(z_n)^{-k_1} < \varepsilon$, para todo $n \in \{1, 2, 3, \dots, n_0\}$. Assim, o mesmo raciocínio feito acima nos dá $|M + L| < 4\varepsilon$ e, dessa maneira, $M = -L$. Com isso $L = 0$, como queríamos. Daí:

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y_n|}{2^n} = 0.$$

Então $y_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $x_{k+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(z_n)^{-k}}{2^n}$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e $x_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n}$, vem que $x_k = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim $f = (x, y) = (0, 0)$.

Para concluir o teorema, basta mostrarmos que T tem codimensão 1. Acima mostramos que, se $f = ((x_n), (y_n)) \in \text{Im}T$, então $x_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n}$. Essa condição não é apenas necessária, mas também suficiente para garantir que $f \in \text{Im}T$. De fato, suponhamos que $g = ((a_n), (b_n)) \in c \oplus c_0$ e $a_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}$, nesse caso temos:

$$g = T((a_2, a_3, \dots, a_n, \dots), (b_1(z_1)^{-1}, b_2(z_2)^{-1}, \dots, b_n(z_n)^{-1}, \dots)).$$

Com isso em mente, podemos escrever:

$$\text{Im}T = \left\{ ((x_n), (y_n)) \in c \oplus c_0 : x_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n} \right\}.$$

É evidente que $\text{Im}T \neq c \oplus c_0$. Suponhamos agora que $(x, y) = ((x_n), (y_n)) \in c \oplus c_0$ e $(x, y) \notin \text{Im}T$. Dado $(a, b) = ((a_n), (b_n)) \in c \oplus c_0$, tomemos

$$\lambda = \frac{a_1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}}{x_1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n}} \in \mathbb{C}.$$

Um simples cálculo mostra que $(a, b) - \lambda(x, y) \in \text{Im}T$. Segue que $\text{Im}T \oplus [(x, y)] = c \oplus c_0$. Mostramos que T tem codimensão 1 e portanto é um deslocamento isométrico em $c \oplus_\infty c_0$. $\square$

Observação 4. Seja $1 \leq p < \infty$. No teorema 11, poderíamos trocar $c \oplus c_0$ pelo espaço de Banach $c \oplus \ell_p$, ainda sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Nesse caso, definiríamos um operador linear T_p

exatamente como foi feito no teorema anterior, alterando apenas o conjunto em que o operador está definido. Uma prova muito parecida mostraria que T_p é um deslocamento isométrico em $c \oplus \ell_p$, para $1 \leq p < \infty$. Seguindo o mesmo raciocínio, poderíamos definir um operador linear T_{p_0} em $c_0 \oplus \ell_p$ e mostrar que T_{p_0} é um deslocamento isométrico em $c_0 \oplus \ell_p$.

Com isso, enunciamos, sem demonstrar, o seguinte teorema:

Teorema 12. *Seja $1 \leq p < \infty$. Os espaços de Banach $c \oplus_\infty \ell_p$ e $c_0 \oplus_\infty \ell_p$, sobre o corpo dos complexos, admitem um deslocamento isométrico.*

Capítulo 3

Deslocamentos isométricos em $E \oplus_1 F$

3.1 Introdução

Neste capítulo, estudaremos os **deslocamentos isométricos** definidos no espaço **produto**, munido com a norma $\|\cdot\|_1$. Neste instante, poderíamos ter a ideia de aproveitar todos os resultados do capítulo 2, trocando a norma $\|\cdot\|_\infty$ pela norma $\|\cdot\|_1$. Isso seria um equívoco, pois nos resultados do capítulo 2, sobretudo nas **desigualdades**, utilizamos propriedades intrínsecas da norma $\|\cdot\|_\infty$. Além disso, os deslocamentos isométricos são operadores que **preservam a norma**, logo ao lidar com a norma $\|\cdot\|_1$, precisamos de um tratamento particular.

Nosso objeto de estudo, em específico, será o **produto** de espaços **estritamente convexos**. Os teoremas 15 e 16 mostram que, se um deslocamento isométrico T está definido no produto de dois espaços normados estritamente convexos e o espaço produto estiver munido com a norma $\|\cdot\|_1$, então o subespaço ImT é **retangular** e T é **fatorável**. Depois de mostrar esses teoremas, apresentaremos exemplos de espaços que **não admitem** deslocamentos isométricos - provaremos que esse é o caso dos espaços produto $\ell_p \oplus_\infty \ell_q$ e $\ell_p \oplus_1 \ell_q$, para $1 < p \neq q < \infty$.

Na última seção, definiremos operadores que estão relacionados com os **deslocamentos isométricos**, os **deslocamentos reversos**. Mostraremos no teorema 19 que um deslocamento reverso definido num espaço de Banach E induz um deslocamento isométrico em E^* .

A menos de menção contrária, consideraremos todo espaço vetorial arbitrário de **dimensão infinita** e sobre um **corpo** $\mathbb{K}$, sendo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

3.2 Definições e resultados básicos

Nesta seção provaremos alguns resultados básicos que serão usados no resto do capítulo. O foco de estudo nesse contexto são as **isometrias** cuja imagem tem **codimensão 1**, definidas no **produto** de dois espaços vetoriais normados **estritamente convexos**. Em grande parte dos resultados, a noção de **ponto extremo** de um conjunto convexo será fortemente usada. Vamos definir esse conceito.

Definição 14. *Sejam X um espaço vetorial e $A \subseteq X$ um conjunto convexo. Dizemos que $x \in A$ é um **ponto extremo** em (ou de) A , se para todos $u, v \in A$, $\lambda \in \mathbb{R} \cap]0, 1[$, a seguinte implicação for verdadeira:*

$$\text{se } x = \lambda u + (1 - \lambda)v, \text{ então } u = v = x.$$

O conjunto dos pontos extremos de A é denotado por $ExtA$.

Observação 5. Neste capítulo, quando estivermos nos referindo a um espaço vetorial normado X , confundiremos os conjuntos $ExtX$ e $Ext(B_X)$. Assim

$$ExtX = Ext(B_X) = Ext(\{x \in X : \|x\| \leq 1\}).$$

Notemos que X é um espaço vetorial normado, se usarmos a definição com rigor, $ExtX = \emptyset$.

Tendo em mente a definição 14 e a observação 5, os próximos dois resultados são imediatos.

Corolário 3. Seja X um espaço vetorial normado arbitrário, então $ExtX \subseteq \{x \in X : \|x\| = 1\}$.

Corolário 4. Seja X um espaço normado estritamente convexo. Então $ExtX = \{x \in X : \|x\| = 1\}$.

Além do conceito de ponto extremo, é necessário conhecer a norma $\|\cdot\|_1$, definida no espaço produto. Sejam $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ dois espaços de Banach. Consideremos a função

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 : E \oplus F &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longmapsto \|x\|_E + \|y\|_F \end{aligned}$$

Podemos notar que $\|\cdot\|_1$ define uma norma em $E \oplus F$, tornando $(E \oplus F, \|\cdot\|_1)$ um espaço de Banach, o qual pode ser também denotado por $E \oplus_1 F$. Nesse caso, dizemos que o espaço **produto** está **munido** com a norma $\|\cdot\|_1$.

Através desses conceitos, podemos notar alguns resultados básicos, esses podem ser vistos em [6]. O próximo resultado mostra que, ao munirmos o espaço produto com a norma $\|\cdot\|_1$, o conjunto dos pontos extremos se torna bem simples.

Proposição 15. Sejam E e F dois espaços vetoriais normados e seja $X = E \oplus F$ munido da norma $\|\cdot\|_1$, então

$$ExtX = \{(x, y) \in X : x \in ExtE \text{ e } y = 0 \text{ ou } x = 0 \text{ e } y \in ExtF\}.$$

Demonstração. Suponhamos que $(x, y) \in ExtX$ e $x \neq 0$, suponhamos por absurdo que $y \neq 0$. Como $(x, y) \in B_X$, $\|x\|_E + \|y\|_F \leq 1$. Então $0 < \|x\|_E < 1$ e $0 < 1 - \|x\|_E < 1$. Além disso, vale

$$\left\| \frac{y}{1 - \|x\|_E} \right\|_F = \frac{\|y\|_F}{1 - \|x\|_E} \leq \frac{\|y\|_F}{\|y\|_F} = 1.$$

Assim temos

$$(x, y) = \|x\|_E \left(\frac{x}{\|x\|_E}, 0 \right) + (1 - \|x\|_E) \left(0, \frac{y}{1 - \|x\|_E} \right).$$

Uma contradição, já que estamos supondo $(x, y) \in ExtX$. Logo devemos ter $y = 0$. Precisamos apenas mostrar que $x \in ExtE$, já temos que $x \in B_E$. Suponhamos $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda < 1$ e $u, v \in B_E$ tais que

$$x = \lambda u + (1 - \lambda)v,$$

daí $(x, y) = (x, 0) = \lambda(u, 0) + (1 - \lambda)(v, 0)$. Como $(u, 0) \in B_X$, $(v, 0) \in B_X$ e $(x, y) \in ExtX$, segue que $(x, y) = (u, 0) = (v, 0)$. Portanto $x = u = v$. Pela generalidade, vem que $x \in ExtE$. Portanto temos

$$ExtX \subseteq \{(x, y) \in X : x \in ExtE \text{ e } y = 0 \text{ ou } x = 0 \text{ e } y \in ExtF\}.$$

Reciprocamente e sem perda de generalidade, tomemos $x \in ExtE$, vamos provar que $(x, 0) \in ExtX$. Obviamente $\|(x, 0)\|_1 \leq 1$. Suponhamos $0 < \lambda < 1$, um número real e $(u, z), (v, w) \in B_X$ tais que

$$(x, 0) = \lambda(u, z) + (1 - \lambda)(v, w).$$

Daí $x = \lambda u + (1 - \lambda)v$. Evidentemente $u, v \in B_E$, como $x \in ExtE$, devemos ter

$$x = u = v.$$

Notemos que $\|(x, 0)\|_1 = \|x\|_E = 1$, pois $x \in ExtE$. Daí $\|u\|_E = \|v\|_E = 1$. Além disso, $(u, z), (v, w) \in B_X$, então $\|u\|_E + \|z\|_F \leq 1$ e $\|v\|_E + \|w\|_F \leq 1$. Logo $z = w = 0$ e tiramos que

$$(x, 0) = (u, z) = (v, w).$$

Pela generalidade, segue que $(x, 0) \in ExtX$, é o que queríamos. Assim vale também

$$ExtX \supseteq \{(x, y) \in X : x \in ExtE \text{ e } y = 0 \text{ ou } x = 0 \text{ e } y \in ExtF\},$$

então temos a tese. □

Os lemas 5 e 6 serão usados na demonstração do próximo teorema, tratam-se de resultados bem simples e notáveis. Em especial, o lema 6 mostra que as imagens dos pontos extremos por uma isometria também são pontos extremos.

Lema 5. *Sejam E e F dois espaços vetoriais normados e seja M um subespaço de $(E \oplus F, \|\cdot\|_1)$, suponhamos $(x, 0) \in M$, $(0, y) \in M$ tais que $x \neq 0$, $y \neq 0$ e $\|x\|_E + \|y\|_F = 1$. Nessas condições, $(x, y) \notin ExtM$.*

Demonstração. Como M é um subespaço, $(x, y) \in M$. Além disso, $\|(x, y)\|_1 = \|x\|_E + \|y\|_F = 1$. No entanto, notemos que

$$(x, y) = \|x\|_E \left(\frac{x}{\|x\|_E}, 0 \right) + \|y\|_F \left(0, \frac{y}{\|y\|_F} \right).$$

Evidentemente $0 < \|x\|_E < 1$ e $\|y\|_F = 1 - \|x\|_E$. Portanto $(x, y) \notin ExtM$. □

Lema 6. *Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados e seja $T : X \rightarrow Y$ uma isometria, com $M = ImT$. Então para cada $x \in X$, temos*

$$x \in ExtX \iff T(x) \in ExtM.$$

Demonstração. Suponhamos que $x \in \text{Ext}X$ e $y = T(x)$. Suponhamos que existam $z, w \in M = \text{Im}T$, com $\|z\| \leq 1$, $\|w\| \leq 1$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, com $0 < \lambda < 1$ satisfazendo

$$y = \lambda z + (1 - \lambda)w.$$

Daí existem $u, v \in X$ tais que $z = T(u)$ e $w = T(v)$. Com isso, concluímos que

$$T(x) = y = \lambda T(u) + (1 - \lambda)T(v) = T(\lambda u + (1 - \lambda)v).$$

Como T é isometria, T é injetora, logo $x = \lambda u + (1 - \lambda)v$. Também, por ser T uma isometria, tiramos que $\|u\| \leq 1$ e $\|v\| \leq 1$. Estamos supondo $x \in \text{Ext}X$, isso só é possível se $u = v = x$. Segue que $y = z = w$. Com isso concluímos que $y = T(x) \in \text{Ext}M$. Provamos

$$x \in \text{Ext}X \implies T(x) \in \text{Ext}M.$$

Para provar a recíproca, suponhamos que $y = T(x) \in \text{Ext}M$, queremos provar que $x \in \text{Ext}X$. Assim, suponhamos $u, v \in X$, com $\|u\| \leq 1$, $\|v\| \leq 1$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, com $0 < \lambda < 1$ tais que

$$x = \lambda u + (1 - \lambda)v.$$

Nesse caso, $\|T(u)\| \leq 1$, $\|T(v)\| \leq 1$ e temos $y = T(x) = \lambda T(u) + (1 - \lambda)T(v)$. Como $y \in \text{Ext}M$, segue que $y = T(u) = T(v)$. Mas T é injetora e $T(x) = y = T(u) = T(v)$, daí

$$x = u = v.$$

Assim concluímos que $x \in \text{Ext}X$ e

$$T(x) \in \text{Ext}M \implies x \in \text{Ext}X.$$

Então temos a tese. □

O teorema 13 pode ser visto como um análogo do lema 1, presente no capítulo 2. Mas o próximo resultado é mais fraco que esse lema.

Teorema 13. *Sejam E, F dois espaços normados estritamente convexos e seja T uma isometria definida por $T : (E \oplus F, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (E \oplus F, \|\cdot\|_1)$. Se $M = \text{Im}T$ é um subespaço de codimensão 1, então para cada $x \in E$, $T(x, 0) \in E \times \{0\} \cup \{0\} \times F$. Uma inclusão similar a essa cabe a cada $y \in F$.*

Demonstração. Como M é um subespaço de codimensão 1, existe $h \in (E \oplus F)^*$ tal que $M = \text{Ker}(h) = \{(x, y) \in E \oplus F : h(x, y) = (0, 0)\}$. Seja $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por $f(x) = h(x, 0)$, para todo $x \in E$. É imediato que $f \in E^*$. Analogamente seja $g \in F^*$, dada por $g(y) = h(0, y)$, para todo $y \in F$. Logo

$$M = \{(x, y) \in E \oplus F : f(x) + g(y) = 0\}.$$

Vamos provar o resultado para cada $x \in E$, com $\|x\|_E = 1$. Consideremos $x \in E$ nessas condições. Como E é estritamente convexo, vem que $x \in \text{Ext}E$ e, pela proposição 15, segue que

$(x, 0) \in \text{Ext}(E \oplus F)$. Suponhamos que $T(x, 0) = (x_1, y_1)$, por ser T uma isometria, resulta do lema 6 que $(x_1, y_1) \in \text{Ext}M$. Para concluir a demonstração precisamos mostrar que $x_1 = 0$ ou $y_1 = 0$. Suponhamos, por absurdo, $x_1 \neq 0$ e $y_1 \neq 0$.

Notemos que, do fato de $(x_1, y_1) \in M$, temos $f(x_1) + g(y_1) = 0$. Vejamos que $f(x_1) \neq 0$ e $g(y_1) \neq 0$. Caso contrário devemos ter $f(x_1) = g(y_1) = 0$, pois $f(x_1) + g(y_1) = 0$. Logo $(x_1, 0) \in M$ e $(0, y_1) \in M$. Mas $\|(x_1, y_1)\|_1 = \|T(x, 0)\|_1 = \|(x, 0)\|_1 = 1$, então $\|x_1\| + \|y_1\| = 1$. Segue do lema 5 que $(x_1, y_1) \notin \text{Ext}M$, uma contradição. Portanto

$$f(x_1) \neq 0 \text{ e } g(y_1) \neq 0.$$

Tomemos $y \in F$ arbitrário, com $\|y\|_F = 1$. Suponhamos que $(x_2, y_2) = T(0, y)$. Analogamente temos $(x_2, y_2) \in \text{Ext}M$. Notemos que:

$$\begin{aligned} 2 &= \|(x, y)\|_1 = \|T(x, y)\|_1 = \|(x_1 + x_2, y_1 + y_2)\|_1 = \\ &= \|x_1 + x_2\| + \|y_1 + y_2\| \leq \\ &\leq \|x_1\| + \|x_2\| + \|y_1\| + \|y_2\| = 2. \end{aligned}$$

Então $\|x_1 + x_2\| + \|y_1 + y_2\| = \|x_1\| + \|x_2\| + \|y_1\| + \|y_2\|$. A desigualdade triangular nos diz que

$$\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| \text{ e } \|y_1 + y_2\| \leq \|y_1\| + \|y_2\|.$$

Portanto devemos ter $\|x_1 + x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\|$ e $\|y_1 + y_2\| = \|y_1\| + \|y_2\|$. Assim temos dois casos para considerar:

Primeiro Caso: Suponhamos $x_2 \neq 0$ e $y_2 \neq 0$.

Nesse caso, como $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ são espaços estritamente convexos, pela proposição 13, existem números reais $t > 0$, $s > 0$ tais que $x_2 = tx_1$ e $y_2 = sy_1$. Como $(x_2, y_2) \in M$, $f(x_2) + g(y_2) = 0$. Assim $tf(x_1) + sg(y_1) = 0$ e temos o sistema:

$$\begin{cases} f(x_1) + g(y_1) = 0 \\ tf(x_1) + sg(y_1) = 0 \end{cases}$$

Como $f(x_1) \neq 0$ e $g(y_1) \neq 0$, devemos ter $s = t$. Portanto $(x_2, y_2) = s(x_1, y_1)$, mas temos $\|(x_1, y_1)\|_1 = \|(x_2, y_2)\|_1 = 1$. Segue que $s = 1$ e

$$T(x, 0) = (x_1, y_1) = (x_2, y_2) = T(0, y),$$

daí como T é injetora, devemos ter $(x, 0) = (0, y)$, uma contradição, pois $x \neq 0$.

Segundo Caso: Suponhamos $x_2 = 0$ ou $y_2 = 0$ (devemos lembrar que $\|(x_2, y_2)\|_1 = 1$).

Sem perder generalidade suponhamos que $x_2 = 0$, então $y_2 \neq 0$. Temos $\|y_1 + y_2\| = \|y_1\| + \|y_2\|$, logo pela proposição 13 existe $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$ tal que $y_2 = sy_1$. Como $(0, y_2) \in M$, $f(0) + g(y_2) = 0$, daí $g(sy_1) = g(y_2) = 0$. Isso implica que $g(y_1) = 0$, uma contradição.

Provamos por absurdo que, se $x \in E$ e $\|x\|_E = 1$, então

$$T(x, 0) \in E \times \{0\} \cup \{0\} \times F.$$

Isso é suficiente para garantir a tese, tendo em mente que T é linear. $\square$

Corolário 5. *Sejam E, F dois espaços normados estritamente convexos e seja T uma isometria definida por $T : (E \oplus F, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E \oplus F, \|\cdot\|_1)$. Se $M = \text{Im}T$ é um subespaço de codimensão 1, então $\text{Ext}M \subseteq \text{Ext}(E \oplus F)$.*

Demonstração. Fixemos $(x_1, y_1) \in \text{Ext}M$ de maneira arbitrária. Suponhamos que $(x_1, y_1) = T(x, y)$. Pelo lema 6, segue que $(x, y) \in \text{Ext}(E \oplus F)$. Assim pela proposição 15, $x = 0$ e $y \in \text{Ext}F$ ou $y = 0$ e $x \in \text{Ext}E$. Sem perder generalidade, suponhamos que $x = 0$ e $y \in \text{Ext}F$. Logo $(x_1, y_1) = T(0, y)$ e pelo teorema 13, $x_1 = 0$ ou $y_1 = 0$. Pelo fato de $y \in \text{Ext}F$, concluímos que $\|y\| = 1$. Daí

$$\|(x_1, y_1)\|_1 = \|T(0, y)\|_1 = \|(0, y)\|_1 = 1.$$

Se $x_1 = 0$, devemos ter $\|y_1\| = 1$. Daí, por F ser estritamente convexo, segue que $y_1 \in \text{Ext}F$. Então, pela proposição 15, concluímos que $(x_1, y_1) \in \text{Ext}(E \oplus F)$.

Se $y_1 = 0$, então $\|x_1\| = 1$. Daí, por E ser estritamente convexo, segue que $x_1 \in \text{Ext}E$. Então, pela proposição 15, concluímos que $(x_1, y_1) \in \text{Ext}(E \oplus F)$.

Em qualquer um dos casos temos a tese. $\square$

A seguir, o lema 7 tem um forte significado geométrico. Provaremos que se x não é um ponto extremo de E , então existem pontos $y, z \in B_E$ de modo que x é o ponto médio do segmento com extremos em y e z .

Lema 7. *Seja E um espaço vetorial normado. Se $x \in E$ é tal que $\|x\|_E = 1$ e $x \notin \text{Ext}E$, então existem $y \in E, z \in E$ distintos tais que $\|y\| \leq 1, \|z\| \leq 1$ e $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$.*

Demonstração. Por hipótese $x \notin \text{Ext}E$, logo existem $u, v \in B_E$, distintos e $\lambda \in \mathbb{R}, 0 < \lambda < 1$, tais que $x = \lambda u + (1 - \lambda)v$. Temos dois casos a considerar:

Primeiro Caso: $\frac{1}{2} \leq \lambda < 1$.

Nesse caso, basta tomarmos $y = u$ e $z = 2x - u$. Obviamente $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$. Note que, se $y = z$, então $u = x = v$, uma contradição. Daí $y \neq z$. Além disso, $\|y\| = \|u\| \leq 1$ e

$$\begin{aligned} \|z\| &= \|2x - u\| = \|2(\lambda u + (1 - \lambda)v) - u\| = \|(2\lambda - 1)u + (2 - 2\lambda)v\| \leq \\ &\leq \|(2\lambda - 1)u\| + \|(2 - 2\lambda)v\| = |2\lambda - 1|\|u\| + |2 - 2\lambda|\|v\| \leq 1. \end{aligned}$$

E assim está provado.

Segundo Caso: $0 < \lambda < \frac{1}{2}$.

Nesse caso, basta tomarmos $y = v$ e $z = 2x - v$. Tudo é verificado tal como no primeiro caso. $\square$

Teorema 14. *Sejam E e F espaços normados estritamente convexos e M um subespaço de $E \oplus_1 F$ de codimensão 1. Suponhamos que $x \in E, y \in F$ são tais que $x \neq 0, y \neq 0, (x, 0) \notin M, (0, y) \notin M, (x, y) \in M$ e $\|(x, y)\|_1 = 1$. Nessas condições, $(x, y) \in \text{Ext}M$.*

Demonstração. Notemos que, por ser M um subespaço de codimensão 1, existe $h \in (E \oplus F)^*$ tal que

$$M = \text{Ker}(h) = \{(a, b) \in E \oplus F : h(a, b) = 0\}.$$

Sejam $f \in E^*$ e $g \in F^*$ definidos por $f(a) = h(a, 0)$, para todo $a \in E$ e $g(b) = h(0, b)$, para todo $b \in F$. Nesse caso, M é dado por

$$M = \{(a, b) \in E \oplus F : f(a) + g(b) = 0\}. \quad (3.1)$$

Suponhamos, por absurdo, que $x \in E$ e $y \in F$ satisfaçam as condições do enunciado e $(x, y) \notin \text{Ext}M$. Pelo lema 7, existem $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in M$ distintos, com $\|(x_1, y_1)\|_1 \leq 1$, $\|(x_2, y_2)\|_1 \leq 1$ tais que

$$(x, y) = \frac{1}{2}(x_1, y_1) + \frac{1}{2}(x_2, y_2).$$

Daqui notamos que:

$$\begin{aligned} 2 &= \|2(x, y)\|_1 = \|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\|_1 = \\ &= \|x_1 + x_2\| + \|y_1 + y_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| + \|y_1\| + \|y_2\| = \\ &= \|(x_1, y_1)\|_1 + \|(x_2, y_2)\|_1 = 2. \end{aligned}$$

Temos $\|(x_1, y_1)\|_1 \leq 1$, $\|(x_2, y_2)\|_1 \leq 1$ e $\|(x_1, y_1)\|_1 + \|(x_2, y_2)\|_1 = 2$, então

$$\|(x_1, y_1)\|_1 = \|(x_2, y_2)\|_1 = 1.$$

Além disso, concluímos que $\|x_1 + x_2\| + \|y_1 + y_2\| = \|x_1\| + \|x_2\| + \|y_1\| + \|y_2\|$. Pela desigualdade triangular, temos:

$$\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| \text{ e } \|y_1 + y_2\| \leq \|y_1\| + \|y_2\|.$$

Portanto $\|x_1 + x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\|$ e $\|y_1 + y_2\| = \|y_1\| + \|y_2\|$. Vamos estudar dois possíveis casos:

Primeiro Caso: Suponhamos $x_i \neq 0$ e $y_i \neq 0$, para todo $i = 1, 2$;

Nesse caso, como E e F são estritamente convexos, concluímos pela proposição 13 que existem números reais $s, t > 0$ tais que $x_2 = sx_1$ e $y_2 = ty_1$. Notemos que $f(x_1) \neq 0$ e $g(y_1) \neq 0$. De fato, se $f(x_1) = 0$, então $f(x_2) = sf(x_1) = 0$. Daí $f(\frac{x_1+x_2}{2}) = \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) = 0$. Como

$$(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right),$$

concluímos por (3.1) que $(x, 0) \in M$, uma contradição. Analogamente, por $(0, y) \notin M$, concluímos que $g(y_1) \neq 0$. Além disso, tendo em mente (3.1) e usando que $(x_1, y_1) \in M$ e $(x_2, y_2) \in M$ chegamos ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} f(x_1) + g(y_1) = 0 \\ sf(x_1) + tg(y_1) = 0 \end{cases}$$

Como $f(x_1) \neq 0$ e $g(y_1) \neq 0$, devemos ter $t = s$. Logo $(x_2, y_2) = s(x_1, y_1)$. Daí como $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$ e $\|(x_1, y_1)\|_1 = \|(x_2, y_2)\|_1 = 1$, segue que $s = 1$. Assim

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) = (x, y).$$

E assim, admitir as hipóteses do primeiro caso nos levou a uma contradição.

Segundo Caso: Suponhamos $x_i = 0$ ou $y_i = 0$, para algum $i \in \{1, 2\}$.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $x_1 = 0$. Como $\|(x_1, y_1)\|_1 = 1$, $y_1 \neq 0$. Como $0 \neq x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $x_2 \neq 0$. Além disso, vejamos que $y_2 \neq 0$. Se $y_2 = 0$, então $(x_2, y_2) = (x_2, 0) \in M$. Daí temos $(x, 0) = (\frac{x_2}{2}, 0) \in M$, o que contraria a hipótese. Logo $x_2 \neq 0$ e $y_i \neq 0$, para todo $i \in \{1, 2\}$. Sabemos que

$$\|y_1 + y_2\| = \|y_1\| + \|y_2\|.$$

Assim, pelo fato de F ser estritamente convexo, existe $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$ tal que $y_2 = sy_1$. Como $(x_1, y_1) = (0, y_1) \in M$, segue que $f(0) + g(y_1) = 0$. Logo $g(y_2) = sg(y_1) = 0$. Com isso, $g(y_1) = g(y_2) = 0$. Então, por (3.1), temos

$$(0, y) = \left(0, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \in M.$$

Uma contradição. As contradições aconteceram por supor que $(x, y) \notin \text{Ext}M$. □

3.3 Espaços sem deslocamentos isométricos

Nossa intenção agora é mostrar que para $1 < p \neq q < \infty$, o espaço produto $\ell_p \oplus \ell_q$ não admite deslocamento isométrico. Mostraremos esse fato tanto para norma $\|\cdot\|_1$, quanto para a norma $\|\cdot\|_\infty$. Além disso, ampliaremos nosso conhecimento de como os deslocamentos isométricos se comportam no espaço produto munido com a norma $\|\cdot\|_1$.

Antes de começarmos, devemos definir o que são um **subespaço retangular** e uma **isometria fatorável**.

Definição 15. *Sejam E, F espaços vetoriais e $M \subseteq E \oplus F$ um subespaço. Dizemos que M é retangular se existem subespaços $M_1 \subseteq E$ e $M_2 \subseteq F$, tais que $M = M_1 \oplus M_2$.*

Definição 16. *Sejam E, F espaços vetoriais normados e seja $T : E \oplus_1 F \longrightarrow E \oplus_1 F$ uma isometria. Dizemos que T é fatorável se existem isometrias*

$$T_1 : E \longrightarrow E \text{ e } T_2 : F \longrightarrow F$$

tais que $T = T_1 \times T_2$, isto é, $T(x, y) = (T_1(x), T_2(y))$, para todo $(x, y) \in E \oplus F$.

Por fim, é importante introduzir uma última definição que segue a nomenclatura encontrada em [6]. Essa definição, que relaciona dois espaços de Banach, será importante para enunciarmos um teorema de uma maneira mais breve e clara.

Definição 17. *Sejam E e F espaços de Banach. Dizemos que E e F são quasi isometricamente incomparáveis se forem verificadas as três seguintes condições:*

- i) E e F não são isometricamente isomorfos;
- ii) não existe um subespaço M de E , com codimensão 1, isometricamente isomorfo a F ;
- iii) não existe um subespaço N de F , com codimensão 1, isometricamente isomorfo a E .

Os teoremas 15 e 16 mostram que, se um deslocamento isométrico T está definido no produto de dois espaços normados estritamente convexos e o espaço produto estiver munido com a norma $\|\cdot\|_1$, então o subespaço ImT é retangular e T é fatorável. Na verdade esses teoremas provam algo mais forte, como veremos. Todos os resultados encontrados nesta seção podem ser vistos em [6].

Teorema 15. *Sejam E e F espaços normados estritamente convexos e seja $T : (E \oplus F, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E \oplus F, \|\cdot\|_1)$ uma isometria, com $ImT = M$. Suponhamos que M tenha codimensão 1. Nessas condições, M é retangular. Além disso, existe um subespaço E_0 de E de codimensão 1 de modo que $M = E_0 \oplus F$, ou existe um subespaço F_0 de F de codimensão 1 de modo que $M = E \oplus F_0$.*

Demonstração. Por hipótese, M é um subespaço de $E \oplus F$ de codimensão 1. Então existem $f \in E^*$, $g \in F^*$ tais que

$$M = \{(a, b) \in E \oplus F : f(a) + g(b) = 0\}.$$

Sabemos que $M \neq E \oplus F$, daí existe $x \in E$ tal que $(x, 0) \notin M$ ou existe $y \in F$ tal que $(0, y) \notin M$. Se isso não fosse verdade, como M é um subespaço teríamos que $(x, y) \in M$ para todos $x \in E$ e $y \in F$, o que não acontece. Sendo assim, suponhamos sem perder generalidade que existe $x \in E$ tal que $(x, 0) \notin M$.

Afirmo que, para todo $y \in F$, $(0, y) \in M$. Suponhamos, por absurdo, que existe $y \in F$ tal que $(0, y) \notin M$. Temos $f(x) \neq 0$ e $g(y) \neq 0$, logo existem $t_1, t_2 \in \mathbb{K}$, ambos não nulos, tais que

$$t_1 f(x) + t_2 g(y) = 0.$$

Portanto $(t_1 x, t_2 y) \in M$. Fazendo $A = \|(t_1 x, t_2 y)\|_1$, temos

$$\left(\frac{t_1 x}{A}, 0\right) \notin M, \left(0, \frac{t_2 y}{A}\right) \notin M, \left\|\left(\frac{t_1 x}{A}, \frac{t_2 y}{A}\right)\right\|_1 = 1 \text{ e } \left(\frac{t_1 x}{A}, \frac{t_2 y}{A}\right) \in M.$$

Segue do teorema 14 que $(\frac{t_1 x}{A}, \frac{t_2 y}{A}) \in ExtM$. Ainda mais, pelo corolário 5, segue que $(\frac{t_1 x}{A}, \frac{t_2 y}{A}) \in Ext(E \oplus F)$ e pela proposição 15 devemos ter

$$\frac{t_1 x}{A} = 0 \text{ ou } \frac{t_2 y}{A} = 0.$$

Vejamos que isso é uma contradição. De fato, como $(x, 0) \notin M$ e $(0, y) \notin M$, devemos ter $x \neq 0$ e $y \neq 0$, ainda $t_1 \neq 0$ e $t_2 \neq 0$. Essa contradição aconteceu por admitirmos que existe $y \in F$ tal que $(0, y) \notin M$. Logo $(0, y) \in M$, para todo $y \in F$. Consideremos o seguinte subespaço de E :

$$E_0 = \{a \in E : (a, 0) \in M\}.$$

Para concluir a tese é suficiente provar que E_0 é um subespaço de E de codimensão 1 e que $M = E_0 \oplus F$. É evidente que E_0 é um subespaço de E . Além disso, tomemos $(x_0, y_0) \in M$. Pelo que vimos acima, $(0, y_0) \in M$. Logo

$$(x_0, 0) = (x_0, y_0) - (0, y_0) \in M.$$

Segue que $x_0 \in E_0$, então $(x_0, y_0) \in E_0 \oplus F$. Assim $M \subseteq E_0 \oplus F$. Por outro lado, seja $(x_0, y_0) \in E_0 \oplus F$, segue que $(x_0, 0) \in M$. Como $\{0\} \times F \subseteq M$, $(0, y_0) \in M$. Daí

$$(x_0, y_0) = (x_0, 0) + (0, y_0) \in M.$$

Concluimos que $E_0 \oplus F \subseteq M$ e assim $M = E_0 \oplus F$. Vejamos que E_0 tem codimensão 1. Obviamente E_0 é um subespaço próprio, já que $x \notin E_0$. Tomemos $x_1 \notin E_0$ arbitrário, logo $(x_1, 0) \notin M$ e portanto $f(x_1) \neq 0$. Dado $x_2 \in E$ qualquer, para $\lambda = \frac{f(x_2)}{f(x_1)} \in \mathbb{K}$, temos

$$f(x_2 - \lambda x_1) = 0,$$

assim $(x_2 - \lambda x_1, 0) \in M$, ou ainda, $x_2 - \lambda x_1 \in E_0$. Provamos que $E = E_0 \oplus [x_1]$, logo E_0 é um subespaço de codimensão 1.

Na demonstração acima supomos que existe $x \in E$ tal que $(x, 0) \notin M$. Se ao invés disso, supuséssemos que existe $y \in F$ tal que $(0, y) \notin M$, com uma demonstração exatamente análoga concluiríamos que $M = E \oplus F_0$, para algum subespaço F_0 de F com codimensão 1.

□

Teorema 16. *Sejam E e F espaços de Banach estritamente convexos e de dimensão infinita. Suponhamos que E e F sejam quasi isometricamente incomparáveis. Seja $T : (E \oplus F, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E \oplus F, \|\cdot\|_1)$ uma isometria, com $\text{Im}T = M$, suponhamos que M tenha codimensão 1. Então T é fatorável.*

Demonstração. Pelo teorema 15, existe um subespaço E_0 de E com codimensão 1 satisfazendo $M = E_0 \oplus F$, ou existe um subespaço F_0 de F com codimensão 1 satisfazendo $M = E \oplus F_0$. Suponhamos, sem perder generalidade, $M = E \oplus F_0$, sendo F_0 exatamente como acima.

Consideremos $x \in E$, com $\|x\|_E = 1$. Pelo fato de T ser uma isometria e pelo teorema 13, concluimos que existe $x_1 \in E$ de norma 1 tal que $T(x, 0) = (x_1, 0)$ ou existe $y_1 \in F_0$ de norma 1 tal que $T(x, 0) = (0, y_1)$. Vejamos que $T(x, 0) = (0, y_1)$ nos leva a um absurdo. Se $T(x, 0) = (0, y_1)$, mostremos que $T(E \oplus \{0\}) \subseteq \{0\} \oplus F_0$. De fato, suponhamos que $u \in E$, $\|u\|_E = 1$ e $T(u, 0) = (x_2, 0)$, logo $\|x_2\|_E = 1$, já que T é isometria. Temos assim

$$\|x + u\|_E = \|(x + u, 0)\|_1 = \|T(x + u, 0)\|_1 = \|(x_2, y_1)\|_1 = 2 = \|x\|_E + \|u\|_E.$$

Pelo fato de E ser estritamente convexo, segue da proposição 13 que existe $\alpha > 0$ tal que $x = \alpha u$ ou $u = \alpha x$. Como $\|x\|_E = \|u\|_E = 1$, devemos ter $x = u$, uma contradição pois $(x_2, 0) \neq (0, y_1)$. Usando o teorema 13, provamos que se $T(x, 0) = (0, y_1)$, então $T(E \oplus \{0\}) \subseteq \{0\} \oplus F_0$.

Suponhamos $y \in F$, com $\|y\|_F = 1$, se $T(0, y) = (0, y_2)$ segue que

$$\|y_1 + y_2\|_F = \|(0, y_1 + y_2)\|_1 = \|T(x, y)\|_1 = \|(x, y)\|_1 = 2.$$

E novamente, usando o fato de F ser estritamente convexo e a proposição 13, chegamos a um absurdo. Portanto, tendo em mente o teorema 13, acabamos de provar que $T(\{0\} \oplus F) \subseteq E \oplus \{0\}$. Provamos que se $T(x, 0) = (0, y_1)$, então

$$T(E \oplus \{0\}) \subseteq \{0\} \oplus F_0 \text{ e } T(\{0\} \oplus F) \subseteq E \oplus \{0\}. \quad (3.2)$$

Consideremos $(0, y) \in \{0\} \oplus F_0 \subseteq \text{Im}T$ arbitrário, logo existe $(x_0, y_0) \in E \oplus F$ tal que $T(x_0, y_0) = (0, y)$. Por (3.2), concluímos que $T(x_0, 0) = (0, y)$. Portanto

$$T|_{E \oplus \{0\}} : E \oplus \{0\} \longrightarrow \{0\} \oplus F_0$$

é sobrejetora e E é isometricamente isomorfo a F_0 . Esse último fato é uma contradição, pois E e F são quasi isometricamente incomparáveis. A contradição veio por admitir $T(x, 0) = (0, y_1)$. Portanto

$$T(E \oplus \{0\}) \subseteq E \oplus \{0\}.$$

Notemos que, se existe $y \in F$, $\|y\|_F = 1$ e $x_1 \in E$ tais que $T(0, y) = (x_1, 0)$, por analogia ao que fizemos acima, devemos ter $T(\{0\} \oplus F) \subseteq E \oplus \{0\}$. Com isso, teríamos $M = E \oplus \{0\}$, o que não acontece. Então, através do teorema 13, concluímos que

$$T(\{0\} \oplus F) \subseteq \{0\} \oplus F_0.$$

Seja $(z, w) \in \text{Im}T = E \oplus F_0$. Assim, existe $(x, y) \in E \oplus F$ de maneira que $T(x, y) = (z, w)$. Pelo que mostramos, devemos ter

$$T(x, 0) = (z, 0) \text{ e } T(0, y) = (0, w).$$

Logo $T(E \oplus \{0\}) = E \oplus \{0\}$ e $T(\{0\} \oplus F) = \{0\} \oplus F_0$. Já estamos em condições de provar que T é retangular. Sejam $T_1 : E \longrightarrow E$ e $T_2 : F \longrightarrow F$ funções definidas como segue:

$$T_1(x) = z, \text{ se } T(x, 0) = (z, 0) \text{ e } T_2(y) = w, \text{ se } T(0, y) = (0, w).$$

Evidentemente T_1 e T_2 são isometrias lineares, $\text{Im}T_1 = E$, $\text{Im}T_2 = F_0$ e $T(x, y) = (T_1(x), T_2(y))$, para todo $(x, y) \in E \oplus F$. Essa última propriedade pode ser denotada por $T = T_1 \times T_2$. Assim, T é retangular. $\square$

O teorema 17 nos traz condições para garantir que certos espaços de Banach **não admitem** deslocamentos isométricos. A demonstração desse resultado é simples tendo em mente os teoremas 15 e 16. No fim desta seção construiremos alguns exemplos aproveitando o próximo resultado.

Teorema 17. *Sejam E e F espaços de Banach estritamente convexos, de dimensão infinita e quasi isometricamente incomparáveis. Então $(E \oplus F, \|\cdot\|_1)$ não admite deslocamentos isométricos.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que existe um deslocamento isométrico

$$T : (E \oplus F, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (E \oplus F, \|\cdot\|_1).$$

Pelo teorema 15, existe um subespaço E_0 de E com codimensão 1 satisfazendo $ImT = E_0 \oplus F$, ou existe um subespaço F_0 de F com codimensão 1 satisfazendo $ImT = E \oplus F_0$.

Vamos supor, sem perder generalidade, que $ImT = E_0 \oplus F$. Usando o teorema 16 e adotando a mesma notação, existem isometrias $T_1 : E \longrightarrow E$ e $T_2 : F \longrightarrow F$ tais que $T = T_1 \times T_2$, $ImT_1 = E_0$ e $ImT_2 = F$. Devemos ter em mente que a notação $T = T_1 \times T_2$ significa que, para todo $(x, y) \in E \oplus F$, vale $T(x, y) = (T_1(x), T_2(y))$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ vale

$$T^n(x, y) = (T_1^n(x), T_2^n(y)), \text{ para todo } (x, y) \in E \oplus F.$$

Ou ainda, para cada $n \in \mathbb{N}$, vale $T^n = T_1^n \times T_2^n$. Temos, pelo fato de T_2 ser sobrejetora, $F \subseteq ImT_2^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo

$$\{0\} \oplus F \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} T^n(E \oplus F).$$

Isso é uma contradição, pois T é deslocamento isométrico em $E \oplus F$. Provamos a tese pela redução ao absurdo. $\square$

Notemos que, do teorema 7, decorre o seguinte teorema:

Teorema 18. *Sejam E e F espaços de Banach estritamente convexos, de dimensão infinita e que não sejam isometricamente isomorfos. Então não existe deslocamento isométrico em $(E \oplus F, \|\cdot\|_{\infty})$.*

O próximo corolário é imediato desde que tenhamos um bom conhecimento dos espaços ℓ_p . Na demonstração dele, assumimos que se $1 < p \neq q < \infty$, então ℓ_p e ℓ_q são quasi isometricamente incomparáveis. Na referência [10], na página 75, conclui-se que esses espaços são totalmente incomparáveis.

Corolário 6. *Sejam $p, q \in \mathbb{R}$ tais que $1 < p \neq q < \infty$, os espaços $\ell_p \oplus_1 \ell_q$ e $\ell_p \oplus_{\infty} \ell_q$ não admitem deslocamentos isométricos.*

Demonstração. Segue dos teoremas 17 e 18, tendo em mente que ℓ_p é estritamente convexo se $1 < p < \infty$ e que ℓ_p e ℓ_q são quasi isometricamente incomparáveis. $\square$

3.4 Deslocamentos reversos em Espaços de Banach

Nesta seção veremos operadores que estão relacionados com os deslocamentos isométricos. Os resultados abaixo, e outros, podem ser encontrados em [7].

Definição 18. *Seja E um espaço de Banach, um operador contínuo $T : E \longrightarrow E$ é um deslocamento reverso geral se satisfizer:*

- (1) $\text{Ker}(T)$ é unidimensional;
- (2) A transformação $\hat{T} : \frac{E}{\text{Ker}T} \longrightarrow E$, definida por $\hat{T}(x + \text{Ker}T) = T(x)$ é uma isometria;
- (3) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Ker}T^n$ é denso em E .

Observação 6. *Daqui para frente chamaremos um deslocamento reverso geral simplesmente de deslocamento reverso.*

Exemplo 5. *Seja $1 \leq p < \infty$, consideremos o seguinte operador contínuo em ℓ_p :*

$$\begin{aligned} T : \quad \ell_p & \longrightarrow \ell_p \\ (x_1, x_2, \dots, x_n \dots) & \longmapsto (x_2, x_3, \dots, x_n \dots) \end{aligned}$$

Nesse exemplo, é fácil ver que T define um deslocamento reverso em ℓ_p . Veremos adiante que para um espaço de Banach admitir um deslocamento reverso, ele precisa ser separável, logo ℓ_∞ não admite um deslocamento reverso.

A proposição a seguir revela a única propriedade dos deslocamentos reversos que usaremos neste trabalho. Para demonstrar esse resultado, usaremos o princípio da indução finita várias vezes.

Proposição 16. *Seja E um espaço de Banach de dimensão infinita e $T : E \longrightarrow E$ um deslocamento reverso. Daí $\text{Im}T = E$.*

Demonstração. Consideremos $z \in E$, $z \neq 0$ de modo que

$$\text{Ker}(T) = [z].$$

Vamos provar por indução que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existem $z_0, z_1, \dots, z_{n-1} \in E$ tais que

- (a) $z_0 = z$;
- (b) $T(z_i) = z_{i-1}$, para cada $i = 1, 2, \dots, n-1$;
- (c) $\text{Ker}T^n = [z_0, z_1, \dots, z_{n-1}]$;
- (d) $\text{Ker}T^n \subseteq \text{Im}T$.

Para $n = 1$, a afirmação é $\text{Ker}T = [z] \subseteq \text{Im}T$. Assim, basta mostrarmos que $z \in \text{Im}T$. Suponhamos, por absurdo, $z \notin \text{Im}T$. Vamos mostrar, por indução, que $\text{Ker}T^k = \text{Ker}T$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Para $k = 2$, dado $w \in E$ arbitrário, se $T^2(w) = 0$, então $T(T(w)) = 0$, logo $T(w) \in [z]$. Mas $z \notin \text{Im}T$, logo devemos ter $T(w) = 0$ e assim $\text{Ker}T^2 \subseteq \text{Ker}T$. Evidentemente $\text{Ker}T \subseteq \text{Ker}T^2$, daí mostramos o resultado para $k = 2$. Vamos admitir que $\text{Ker}T^k = \text{Ker}T$ para algum $k \geq 2$. Seja $w \in E$ arbitrário, se $T^{k+1}(w) = 0$, então $T(T^k(w)) = 0$, logo $T^k(w) \in [z]$. Novamente, pelo fato de $z \notin \text{Im}T$, devemos ter $T^k(w) = 0$. Segue que

$\text{Ker}T^{k+1} \subseteq \text{Ker}T^k \subseteq \text{Ker}T$. Portanto $\text{Ker}T = \text{Ker}T^{k+1}$ e está provado por indução. Veja que isso implica que $[z] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Ker}T^n$ é denso em E . Uma contradição pois E é um espaço de dimensão infinita e $\overline{[z]} = [z]$. A contradição veio do fato de admitir que $z \notin \text{Im}T$, daí devemos ter $\text{Ker}T = [z] \subseteq \text{Im}T$ e portanto está provado o resultado inicial para $n = 1$.

Vamos assumir o resultado para $n \geq 1$ arbitrário. Sejam $z_0, z_1, \dots, z_{n-1} \in E$, satisfazendo as quatro condições enunciadas. Como $z_{n-1} \in \text{Im}T$, existe $z_n \in E$ de modo que $T(z_n) = z_{n-1}$. Vamos mostrar que $\text{Ker}T^{n+1} = [z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n]$, a inclusão $[z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n] \subseteq \text{Ker}T^{n+1}$ é imediata. Suponhamos que $w \in E$ e $T^{n+1}(w) = 0$, daí $T^n(T(w)) = 0$. Como $T(w) \in \text{Ker}T^n = [z_0, z_1, \dots, z_{n-1}]$, existem $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tais que $T(w) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i z_i = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i T(z_{i+1})$. Assim temos

$$T\left(w - \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i z_{i+1}\right) = 0.$$

Então $w - \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i z_{i+1} \in [z]$, ou ainda $w \in [z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n]$, pois $z_0 = z$. Com isso, $\text{Ker}T^{n+1} = [z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n]$. Para concluir o resultado para $n + 1$, resta-nos mostrar que $\text{Ker}T^{n+1} \subseteq \text{Im}T$. Suponhamos, por absurdo, que isso não aconteça. Daí, claramente, devemos ter $z_n \notin \text{Im}T$. Vamos mostrar, por indução, que $\text{Ker}T^{n+k+1} = \text{Ker}T^{n+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$.

Para $k = 1$, temos de mostrar que $\text{Ker}T^{n+2} = \text{Ker}T^{n+1}$. Seja $w \in E$ arbitrário. Se $T^{n+2}(w) = 0$, então $T^{n+1}(T(w)) = 0$ e daí existem $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$T(w) = \sum_{i=0}^n \lambda_i z_i = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i T(z_{i+1}) + \lambda_n z_n.$$

Como $z_n \notin \text{Im}T$, devemos ter $\lambda_n = 0$. Daí

$$T^{n+1}(w) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i T^{n+1}(z_{i+1}) = 0.$$

Então $w \in \text{Ker}T^{n+1}$ e assim $\text{Ker}T^{n+2} = \text{Ker}T^{n+1}$. Vamos admitir o resultado válido para um $k \geq 1$ arbitrário, ou seja, que $\text{Ker}T^{n+k+1} = \text{Ker}T^{n+1} = [z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n]$. Então, para $w \in E$ qualquer, se $T^{n+k+2}(w) = 0$ segue que $T^{n+k+1}(T(w)) = 0$. Assim, existem $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$T(w) = \sum_{i=0}^n \lambda_i z_i = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i T(z_{i+1}) + \lambda_n z_n.$$

E novamente, pelo fato de $z_n \notin \text{Im}T$, segue que $\lambda_n = 0$. Com isso, $T^{n+1}(w) = 0$ e podemos concluir que $\text{Ker}T^{n+k+2} = \text{Ker}T^{n+1}$. Mostramos, pelo princípio da indução finita, que $\text{Ker}T^{n+k+1} = \text{Ker}T^{n+1}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim $[z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n] = \text{Ker}T^{n+1} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \text{Ker}T^k$ é denso em E , uma contradição pois $[z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n]$ é fechado e E tem dimensão infinita. A contradição veio do fato de admitirmos $z_n \notin \text{Im}T$. Logo $z_n \in \text{Im}T$ e

$$\text{Ker}T^{n+1} = [z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n] \subseteq \text{Im}T.$$

Assim, provamos pelo princípio da indução finita que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existem $z_0, z_1, \dots, z_{n-1} \in$

E satisfazendo as quatro condições listadas. Logo

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Ker} T^n \subseteq \text{Im} T.$$

Como $\hat{T} : \frac{E}{\text{Ker} T} \rightarrow E$, dada por $\hat{T}(x + \text{Ker} T) = T(x)$ é uma isometria, temos que o subespaço $\text{Im} T$ é fechado em E . Daí $E = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Ker} T^n} \subseteq \text{Im} T$ e temos a tese. $\square$

Corolário 7. *Seja E um espaço de Banach de dimensão infinita. Se E admite um deslocamento reverso, então E é separável.*

Demonstração. Notemos que o conjunto $\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Ker} T^n$ é denso em E . Na demonstração da proposição 16, provamos que $\{z_k : k = 0, 1, \dots\}$ é um conjunto gerador de $\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Ker} T^n$. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, o conjunto

$$\left\{ \sum_{j=1}^n q_j z_j : n \in \mathbb{N} \text{ e } q_j \in \mathbb{Q}, \text{ para todo } j \in \{1, 2, \dots, n\} \right\}$$

é enumerável e denso em E . Ao passo que, para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, o enumerável denso é dado por

$$\left\{ \sum_{j=1}^n (a_j + b_j i) z_j : n \in \mathbb{N} \text{ e } a_j, b_j \in \mathbb{Q}, \text{ para todo } j \in \{1, 2, \dots, n\} \right\}.$$

Com uma simples verificação, concluímos a demonstração. $\square$

O teorema 19 relaciona os deslocamentos isométricos com os deslocamentos reversos. Esse teorema apresenta desdobramentos quando E é um espaço de Banach **reflexivo**.

Teorema 19. *Seja E um espaço de Banach de dimensão infinita que admite um deslocamento reverso. Então E^* admite um deslocamento isométrico.*

Demonstração. Vamos construir o deslocamento isométrico e verificar as propriedades. Suponhamos T um deslocamento reverso definido em E . Definimos $S : E^* \rightarrow E^*$ por

$$S(x^*) = x^* \circ T.$$

Evidentemente, S está bem definida e é linear. Como T é um deslocamento reverso, a definição 18 (2) nos diz que

$$\|T(x)\|_E = d(x, \text{Ker} T) = \inf \{\|x - y\|_E : y \in \text{Ker} T\}, \text{ para todo } x \in E.$$

Assim, se $x^* \in E^*$ e $x \in E$, segue que

$$\begin{aligned} |S(x^*)(x)| &= |x^*(T(x))| \leq \|x^*\|_{E^*} \|T(x)\|_E = d(x, \text{Ker} T) \|x^*\|_{E^*} \leq \\ &\leq \|x^*\|_{E^*} \|x - 0\|_E = \|x^*\|_{E^*} \|x\|_E. \end{aligned}$$

Assim concluímos que $\|S(x^*)\|_{E^*} \leq \|x^*\|_{E^*}$. Por outro lado, considere $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como $\|x^*\|_{E^*} = \sup \{|x^*(x)| : x \in E, \|x\| \leq 1\}$, existe $x_0 \in E$, com $\|x_0\| \leq 1$, satisfazendo

$$\|x^*\| - |x^*(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Pela proposição 16, T é sobrejetora, logo existe $y_0 \in E$ tal que $T(y_0) = x_0$. Assim, $|S(x^*)(y_0)| = |x^*(x_0)|$. Sabemos que

$$d(y_0, \text{Ker}T) = \inf \{\|y_0 - y\|_E : y \in \text{Ker}T\} = \|T(y_0)\|_E = \|x_0\|_E \leq 1.$$

Daí, existe $y_1 \in \text{Ker}T$ tal que

$$d(y_0, \text{Ker}T) \leq \|y_0 - y_1\|_E < d(y_0, \text{Ker}T) + \varepsilon \leq 1 + \varepsilon.$$

Vamos supor $y_0 \neq y_1$, já que se $y_0 = y_1 \in \text{Ker}T$ a demonstração segue trivialmente. Temos

$$\begin{aligned} \left| S(x^*) \left(\frac{y_0 - y_1}{\|y_0 - y_1\|} \right) \right| &= \left| x^* \left(\frac{T(y_0) - T(y_1)}{\|y_0 - y_1\|} \right) \right| = \left| x^* \left(\frac{x_0}{\|y_0 - y_1\|} \right) \right| \geq \\ &\geq \frac{\|x^*\|_{E^*} - \varepsilon}{\|y_0 - y_1\|} \geq \frac{\|x^*\|_{E^*} - \varepsilon}{1 + \varepsilon}. \end{aligned}$$

Concluimos que $\|S(x^*)\|_{E^*} = \sup \{|S(x^*)(x)| : x \in E, \|x\| \leq 1\} \geq \frac{\|x^*\|_{E^*} - \varepsilon}{1 + \varepsilon}$ para todo $\varepsilon > 0$. Portanto $\|S(x^*)\|_{E^*} \geq \|x^*\|_{E^*}$. Como tínhamos $\|S(x^*)\|_{E^*} \leq \|x^*\|_{E^*}$, segue que

$$\|S(x^*)\|_{E^*} = \|x^*\|_{E^*}.$$

Como tomamos $x^* \in E^*$ arbitrário, concluímos que S é uma isometria. Suponhamos que $\text{Ker}T = [z]$, com $z \neq 0$, vamos provar que

$$\text{Im}S = \{x^* \in E^* : x^*(z) = 0\}. \quad (3.3)$$

É claro que $\text{Im}S \subseteq \{x^* \in E^* : x^*(z) = 0\}$. Por outro lado, suponhamos $y^* \in E^*$, tal que $y^*(z) = 0$. Defino

$$\begin{aligned} x^* : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x = T(u) &\longmapsto y^*(u) \end{aligned}$$

Vejamos que isso define, de fato, uma função. Para todo $a, b \in E$, temos:

$$T(a) = T(b) \iff a - b \in \text{Ker}T \iff a - b \in [z] \implies y^*(a - b) = 0 \iff y^*(a) = y^*(b).$$

Além disso, sabemos que T é sobrejetora, daí x^* é função. É fácil verificar que x^* é linear, contínuo e $S(x^*) = y^*$. Assim provamos (3.3).

Evidentemente $\text{Im}S \neq E^*$. Suponhamos $w^* \in E^*$ e $w^* \notin \text{Im}S$, logo $w^*(z) \neq 0$. Fixemos $y^* \in E^*$ arbitrário. Daí, por (3.3), $y^* - \frac{y^*(z)}{w^*(z)}w^* \in \text{Im}S$. Segue que $E^* = [w^*] \oplus \text{Im}S$. Assim

concluimos que ImS tem codimensão 1. Para concluirmos a tese, resta-nos provar que

$$\bigcap_{n \geq 1} ImS^n = \{0\}.$$

Para tal, fixemos $y^* \in \bigcap_{n \geq 1} ImS^n$. Sejam $x \in E$ e $m \in \mathbb{N}$ arbitrários. Como T é um deslocamento reverso, $\bigcup_{n \geq 1} KerT^n$ é denso em E . Segue que existem $k \in \mathbb{N}$, $x_m \in KerT^k$ de maneira que:

$$\|x - x_m\|_E < \frac{1}{m}.$$

Sabemos que $y^* \in ImS^k$, portanto existe $w^* \in E^*$ tal que $y^* = S^k(w^*) = w^* \circ T^k$. Daí $y^*(x_m) = 0$. Portanto

$$|y^*(x)| = |y^*(x) - y^*(x_m)| = |y^*(x - x_m)| \leq \|y^*\|_{E^*} \|x - x_m\|_E \leq \frac{\|y^*\|_{E^*}}{m}.$$

Acabamos de mostrar que, para todo $x \in E$ e para todo $m \in \mathbb{N}$, $|y^*(x)| \leq \frac{\|y^*\|_{E^*}}{m}$. Desse fato podemos concluir que $y^*(x) = 0$ para todo $x \in E$. Então $y^* = 0$ e concluimos que S é um deslocamento isométrico em E^* . $\square$

Corolário 8. *Seja E um espaço de Banach reflexivo e de dimensão infinita. Se E^* admite um deslocamento reverso, então E admite um deslocamento isométrico.*

Corolário 9. *Sejam $p, q \in \mathbb{R}$ tais que $1 < p \neq q < \infty$, os espaços $\ell_p \oplus_1 \ell_q$ e $\ell_p \oplus_\infty \ell_q$ não admitem deslocamento reverso.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $\ell_p \oplus_1 \ell_q$ admite um deslocamento reverso. Pelo teorema 19, $(\ell_p \oplus_1 \ell_q)^*$ admite um deslocamento isométrico. Notemos que os espaços $(\ell_p \oplus_1 \ell_q)^*$ e $\ell_p^* \oplus_\infty \ell_q^*$ são isometricamente isomorfos. Basta tomar a isometria linear

$$\begin{aligned} S : \ell_p^* \oplus_\infty \ell_q^* &\longrightarrow (\ell_p \oplus_1 \ell_q)^* \\ (f, g) &\longmapsto f \oplus g \end{aligned}$$

sendo $(f \oplus g)(x, y) = f(x) + g(y)$ para todo $x \in \ell_p$, $y \in \ell_q$. Daí, segue que $\ell_p^* \oplus_\infty \ell_q^*$ admite um deslocamento isométrico. Isso contradiz o corolário 6.

A demonstração de que $\ell_p \oplus_\infty \ell_q$ não admite um deslocamento reverso é análoga. Para essa, precisamos notar que os espaços $(\ell_p \oplus_\infty \ell_q)^*$ e $\ell_p^* \oplus_1 \ell_q^*$ são isometricamente isomorfos. $\square$

Capítulo 4

Deslocamentos isométricos em $C(X)$

4.1 Introdução

Seja X um espaço topológico **compacto** e **Hausdorff**. Seja $\mathbb{K}$ a **reta real** ou o **espaço dos números complexos**, ambos com a topologia usual. Neste capítulo, estudaremos os **deslocamentos isométricos** definidos em $C(X)$, o espaço das **funções contínuas** definidas em X , com valores em $\mathbb{K}$.

Nosso primeiro passo será entender o teorema 20, esse não trata apenas de deslocamentos isométricos, mas de qualquer **operador isométrico** definido em $C(X)$. Através desse teorema, construiremos **funções induzidas** por uma **isometria** definida em $C(X)$, as quais possibilitam descrevê-la.

Após terminar essa primeira parte, estaremos em condições de **classificar** um deslocamento isométrico definido em $C(X)$ **segundo dois tipos**, esse é o papel do teorema 21. Passada essa etapa, estudaremos cada um dos **tipos** separadamente.

Essa abordagem nos possibilitará provar alguns resultados bem interessantes a respeito dos **deslocamentos** em $C(X)$, como é o caso do teorema 22 - demonstraremos que $C([a, b])$ **não admite** deslocamentos isométricos. Além disso, no corolário 11 construiremos um **deslocamento isométrico** num espaço topológico compacto, Hausdorff e com uma **infinitude** de **componentes conexas**. Esse último fato tem um importante significado, já que na década de 80 alguns matemáticos conjecturaram exatamente o contrário.

4.2 Isometrias em $C(X)$

Em todo o capítulo, consideraremos o espaço de Banach $C(X)$ munido com a norma $\|\cdot\|_\infty$. Essa função é definida por:

$$\|f\|_\infty = \sup \{|f(x)| : x \in X\}, \text{ para toda } f \in C(X).$$

Inicialmente, vamos considerar $C(X)$ como o espaço das funções contínuas definidas em X e com valores **complexos**. Sejam X e Y dois espaços topológicos compactos e Hausdorff. Vamos admitir que

$$T : C(X) \longrightarrow C(Y)$$

seja uma isometria. Nossa intenção, nesta seção, é construir algumas funções induzidas por essa isometria e que serão fundamentais para o estudo dos deslocamentos isométricos em todo o capítulo. Antes de apresentar o próximo teorema, vamos introduzir algumas notações que serão nele usadas.

Sejam $x \in X$ e $y \in Y$ arbitrários, definimos:

$$S_x = \{f \in C(X) : \|f\| = 1 \text{ e } |f(x)| = 1\} \text{ e } R_y = \{g \in C(Y) : \|g\| = 1 \text{ e } |g(y)| = 1\}.$$

Ainda, para cada $x \in X$, definimos

$$Q_x = \{y \in Y : T(S_x) \subseteq R_y\}.$$

Com isso, definimos

$$Y_0 = \bigcup_{x \in X} Q_x.$$

Consideraremos os espaços $C(X)$ e $C(Y)$ sobre o corpo $\mathbb{C}$ e denotamos $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Essa notação é suficiente para entender a demonstração e o enunciado do teorema 20, esse também pode ser visto em [8].

Teorema 20. *Sejam X e Y dois espaços topológicos compactos e Hausdorff. Seja $T : C(X) \rightarrow C(Y)$ uma isometria linear. Então, o conjunto Y_0 é fechado e a relação $\phi \subseteq Y \times X$ dada por*

$$(y, x) \in \phi \text{ se, e somente se, } y \in Q_x$$

define uma função contínua e sobrejetora $\phi : Y_0 \rightarrow X$. Além disso, existe uma função $\alpha \in C(Y)$ tal que

$$\|\alpha\| = 1, \quad |\alpha(y)| = 1, \text{ para todo } y \in Y_0$$

e que verifica:

$$(Tf)(y) = \alpha(y)f(\phi(y)), \text{ para todos } y \in Y_0 \text{ e } f \in C(X).$$

Demonstração. Primeiro mostraremos que, para cada $x \in X$ e $f \in C(X)$,

$$\text{se } f(x) = 0 \text{ e } y \in Q_x, \text{ então } (Tf)(y) = 0. \quad (4.1)$$

É suficiente mostrar para $f \in C(X)$ que satisfaz $\|f\| = 1$, pois T é linear. Suponhamos, por absurdo, $\|f\| = 1$, $f(x_0) = 0$ e $(Tf)(y_0) \neq 0$, para algum $x_0 \in X$ e $y_0 \in Q_{x_0}$. Para cada $z \in \Gamma$, consideremos

$$g_z = z \left[\min \left\{ 1 + \operatorname{Re}(\bar{z}f), \sqrt{1 - (\operatorname{Im}(\bar{z}f))^2} \right\} + i \operatorname{Im}(\bar{z}f) \right].$$

É fácil ver que $g_z : X \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua, pois tanto sua parte real como sua parte imaginária são funções contínuas. É claro que $|g_z(x_0)| = |z| = 1$, $\|g_z\| = 1$, logo $g_z \in S_{x_0}$. Da mesma forma $|g_z(x_0) - f(x_0)| = 1$. Notemos que

$$\|g_z - f\| = |\bar{z}| \|g_z - f\| = \|\bar{z}g_z - \bar{z}f\|.$$

Temos ainda

$$\bar{z}g_z - \bar{z}f = \min \left\{ 1, \sqrt{1 - \operatorname{Im}(\bar{z}f)^2} - \operatorname{Re}(\bar{z}f) \right\},$$

daí obviamente $\|g_z - f\| = \|\bar{z}g_z - \bar{z}f\| = 1$. Com isso, concluímos que $g_z - f \in S_{x_0}$. Daí, pelo fato de $y_0 \in Q_{x_0}$, para cada $z \in \Gamma$, vale que:

$$|(Tg_z)(y_0)| = 1 \text{ e } |T(g_z - f)(y_0)| = |(Tg_z)(y_0) - (Tf)(y_0)| = 1.$$

Com base nisso, vamos definir a seguinte função

$$\begin{aligned} \kappa : \Gamma &\longrightarrow \Gamma \\ z &\longmapsto (Tg_z)(y_0) \end{aligned}$$

Vejamos que κ é contínua. Para $z_1, z_2 \in \Gamma$, temos:

$$\begin{aligned} |\kappa(z_1) - \kappa(z_2)| &= |(Tg_{z_1})(y_0) - (Tg_{z_2})(y_0)| = \\ &= |T(g_{z_1} - g_{z_2})(y_0)| \leq \\ &\leq \|T(g_{z_1} - g_{z_2})\| = \|g_{z_1} - g_{z_2}\| = \sup \{|g_{z_1}(x) - g_{z_2}(x)| : x \in X\}. \end{aligned}$$

Daí, usando que $f \in C(X)$ e $\|f\| = 1$, não é difícil ver que κ é uma função contínua. Vamos ver outras propriedades da função κ . Pela desigualdade triangular em $C(X)$, vale para cada $z \in \Gamma$:

$$2 = |g_z(x_0) - g_{-z}(x_0)| \leq \|g_z - g_{-z}\| \leq \|g_z\| + \|g_{-z}\| = 2.$$

Dessas desigualdades, concluímos que $|(\frac{g_z - g_{-z}}{2})(x_0)| = 1$ e $\|\frac{g_z - g_{-z}}{2}\| = 1$. Assim, $\frac{g_z - g_{-z}}{2} \in S_{x_0}$ e, por $y_0 \in Q_{x_0}$, acarreta que $|(Tg_z)(y_0) - (Tg_{-z})(y_0)| = 2 = |(Tg_z)(y_0)| + |-(Tg_{-z})(y_0)|$. Logo, por ser $\mathbb{C}$ estritamente convexo e pela proposição 13, concluímos que

$$(Tg_{-z})(y_0) = -(Tg_z)(y_0), \text{ para todo } z \in \Gamma.$$

Isso é o mesmo que $\kappa(-z) = -\kappa(z)$, para todo $z \in \Gamma$. Essa propriedade nos diz que, se $z \in \kappa(\Gamma)$, então $-z \in \kappa(\Gamma)$. Notemos que Γ é conexo e, por ser κ contínua, o conjunto $\kappa(\Gamma) \subseteq \Gamma$ também é conexo. Daí, como $\kappa(\Gamma) \neq \emptyset$, devemos ter $\kappa(\Gamma) = \Gamma$. Segue que existe $z_0 \in \Gamma$ tal que

$$(Tg_{z_0})(y_0) = \kappa(z_0) = \frac{(Tf)(y_0)}{|(Tf)(y_0)|}.$$

Pelo que tínhamos visto:

$$|(Tg_{z_0})(y_0)| = 1 \text{ e } |(Tg_{z_0})(y_0) - (Tf)(y_0)| = 1.$$

Logo:

$$1 = |(Tg_{z_0})(y_0) - (Tf)(y_0)| = \left| \frac{(Tf)(y_0)}{|(Tf)(y_0)|} - (Tf)(y_0) \right| = 1 - |(Tf)(y_0)|.$$

Uma contradição, pois estamos supondo $(Tf)(y_0) \neq 0$. Assim provamos (4.1) por absurdo.

Provemos, então, a seguinte afirmação

$$Q_{x_1} \cap Q_{x_2} = \emptyset, \text{ para } x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2. \quad (4.2)$$

De fato, suponhamos $x_1, x_2 \in X$ e $x_1 \neq x_2$. Pelo lema de Urysohn, existe $f \in C(X)$ tal que $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = 0$ e $f(x) \in [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$, para todo $x \in X$. Evidentemente, $\|f\| = 1$, daí $f \in S_{x_1}$.

Se $y \in Q_{x_1}$, por definição, devemos ter $|Tf(y)| = 1$. Se $y \in Q_{x_2}$, por (4.1), segue que $|Tf(y)| = 0$. Assim, devemos ter $Q_{x_1} \cap Q_{x_2} = \emptyset$. Com isso, provamos (4.2).

Agora vamos provar que

$$Q_x \neq \emptyset, \text{ para todo } x \in X. \quad (4.3)$$

Para tal, mostremos que a família $\{(Tf)^{-1}(\Gamma) : f \in S_x\}$ de subconjuntos fechados de Y tem a propriedade da intersecção finita. Sejam $x \in X$ fixado e $f_1, f_2, \dots, f_n \in S_x$. Definimos

$$h = \sum_{j=1}^n \overline{f_j(x)} f_j.$$

Daí, $h \in C(X)$ e $|h(x)| = |\sum_{j=1}^n \overline{f_j(x)} f_j(x)| = |\sum_{j=1}^n 1| = n$. Pelo fato de $f_j \in S_x$, para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, acarreta que $\|h\| \leq \sum_{j=1}^n \|\overline{f_j(x)} f_j\| = n$. Assim $\|h\| = n$ e, por ser T uma isometria, vem que $\|Th\| = n$. Como Y é compacto, existe $y \in Y$ tal que

$$|(Th)(y)| = \left| \sum_{j=1}^n \overline{f_j(x)} (Tf_j)(y) \right| = n.$$

Observemos que

$$n = \left| \sum_{j=1}^n \overline{f_j(x)} (Tf_j)(y) \right| \leq \sum_{j=1}^n |\overline{f_j(x)} (Tf_j)(y)| = \sum_{j=1}^n |(Tf_j)(y)| \leq n,$$

pois $\|Tf_j\| = 1$, para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Logo devemos ter $|(Tf_j)(y)| = 1$, para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Isso é equivalente a

$$y \in \bigcap_{j=1}^n (Tf_j)^{-1}(\Gamma).$$

Assim $\{(Tf)^{-1}(\Gamma) : f \in S_x\}$ é uma família de fechados em Y com a propriedade da intersecção finita. Por ser Y compacto, vem que

$$\bigcap_{f \in S_x} (Tf)^{-1}(\Gamma) \neq \emptyset.$$

Consideremos $y' \in \bigcap_{f \in S_x} (Tf)^{-1}(\Gamma)$. Se $f \in S_x$, então $|(Tf)(y')| = 1$, daí por definição $(Tf) \in R_{y'}$ e $y' \in Q_x$. Pela generalidade, provamos (4.3).

Pelo que fizemos em (4.2), a relação ϕ define uma função $\phi : Y_0 \rightarrow X$, enquanto (4.3) nos diz que ϕ deve ser sobrejetora. Precisamos mostrar que ϕ é contínua, para isso é importante

provar a seguinte desigualdade:

$$\text{para } f \in C(X), x_0 \in X \text{ e } x_0 = \phi(y_0), \text{ temos } |(Tf)(y_0)| \geq |f(x_0)|. \quad (4.4)$$

Para mostrar essa relação é suficiente provar para $f \in C(X)$ com $\|f\| = 1$, já que T é linear. Notemos que, se $|f(x_0)| = 1$, como $y_0 \in Q_{x_0}$, segue que $|Tf(y_0)| = |f(x_0)| = 1$. Se $|f(x_0)| = 0$, por (4.1), $|(Tf)(y_0)| = 0$, daí esses dois casos estão de acordo com (4.4).

Suponhamos então $f \in C(X)$ com $\|f\| = 1$. Fixemos $x_0 \in X$, $x_0 = \phi(y_0)$, satisfazendo $0 < |f(x_0)| < 1$. Consideremos

$$g(x) = \frac{f(x)}{\max(|f(x)|, |f(x_0)|)}, \text{ para todo } x \in X.$$

Observemos que $g \in C(X)$ e $|g(x)| \leq 1$ para todo $x \in X$. Pelo fato de $|g(x_0)| = 1$, vem que $\|g\| = 1$. Como $g \in S_{x_0}$ e $y_0 \in Q_{x_0}$, segue que $|(Tg)(y_0)| = 1$. Para cada $x \in X$, temos:

$$|g(x) - f(x)| = \frac{|f(x)| \cdot |1 - \max(|f(x)|, |f(x_0)|)|}{\max(|f(x)|, |f(x_0)|)}.$$

Portanto $|g(x) - f(x)| \leq 1 - |f(x_0)|$, para todo $x \in X$. É claro que $|g(x_0) - f(x_0)| = 1 - |f(x_0)|$. Com isso, concluímos que $\|g - f\| = 1 - |f(x_0)|$ e $\frac{g-f}{\|g-f\|} \in S_{x_0}$. Dado que $y_0 \in Q_{x_0}$, devemos ter

$$|Tg(y_0) - Tf(y_0)| = \|g - f\| = 1 - |f(x_0)|.$$

E daí temos

$$1 - |f(x_0)| = |Tg(y_0) - Tf(y_0)| \geq |Tg(y_0)| - |Tf(y_0)| = 1 - |Tf(y_0)|.$$

Dessa desigualdade concluímos (4.4). Vamos provar que, para todo $A \subseteq X$ fechado, $\phi^{-1}(A)$ é fechado em Y .

Seja $A \subseteq X$ um subconjunto fechado e não vazio. Evidentemente:

$$\phi^{-1}(A) = \bigcup_{a \in A} Q_a.$$

Seja $y_0 \in Y$ tal que $y_0 \notin \phi^{-1}(A)$. Para cada $a \in A$, como $y_0 \notin Q_a$, existe $f_a \in S_a$ tal que $|(Tf_a)(y_0)| < 1$. Portanto para cada $a \in A$, existe $f_a \in S_a$ e $\varepsilon_a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_a > 0$ de maneira que $|(Tf_a)(y_0)| < 1 - \varepsilon_a$.

Para cada $a \in A$, vamos considerar o seguinte subconjunto de X :

$$U_a = \{x \in X : |f_a(x)| > 1 - \varepsilon_a\}.$$

Por ser imagem inversa de aberto de $\mathbb{R}$ por função contínua, cada U_a é aberto em X . Consideremos também, para cada $a \in A$, os seguintes subconjuntos de Y :

$$V_a = \{y \in Y : |(Tf_a)(y)| > 1 - \varepsilon_a\} \text{ e } G_a = \{y \in Y : |(Tf_a)(y)| < 1 - \varepsilon_a\}.$$

Analogamente, esses conjuntos são abertos em Y . Notemos que, se $y \in \phi^{-1}(U_a)$, então $x = \phi(y) \in U_a$. Pela definição do conjunto U_a , vem que $|f_a(x)| > 1 - \varepsilon_a$. Assim, usando o que provamos em (4.4), segue que $|(Tf_a)(y)| \geq |f_a(x)| > 1 - \varepsilon_a$. Dessa forma $y \in V_a$. E com isso mostramos que, para cada $a \in A$, vale

$$\phi^{-1}(U_a) \subseteq V_a.$$

Como o conjunto X é compacto e $A \subseteq X$ é fechado, então A é compacto. Além disso, para cada $a \in A$, temos $|f_a(a)| = 1$, pois $f_a \in S_a$. Isso significa que $a \in U_a$ e a família

$$\{U_a : a \in A\}$$

é uma cobertura de A por abertos de X . Logo admite uma subcobertura finita, suponhamos $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ de modo que

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{a_j}.$$

Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} \bigcup_{j=1}^n V_{a_j} &\supseteq \bigcup_{j=1}^n \phi^{-1}(U_{a_j}) = \\ &= \phi^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^n U_{a_j}\right) \supseteq \phi^{-1}(A). \end{aligned}$$

Obviamente para cada $a \in A$, $G_a \cap V_a = \emptyset$. Logo os conjuntos $\bigcap_{j=1}^n G_{a_j}$ e $\bigcup_{j=1}^n V_{a_j}$ são disjuntos. Pelo que fizemos no início, $y_0 \in \bigcap_{j=1}^n G_{a_j}$. Daí $\bigcap_{j=1}^n G_{a_j}$ é uma vizinhança de y_0 em Y que não encontra $\phi^{-1}(A)$, pois:

$$\phi^{-1}(A) \cap \left(\bigcap_{j=1}^n G_{a_j}\right) \subseteq \left(\bigcup_{j=1}^n V_{a_j}\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^n G_{a_j}\right) = \emptyset.$$

Como tomamos $y_0 \in Y \setminus \phi^{-1}(A)$ arbitrariamente, podemos concluir que $\phi^{-1}(A)$ é um conjunto fechado. Mostramos que se $A \subseteq X$ é fechado em X , então $\phi^{-1}(A)$ é fechado em Y . Logo ϕ é contínua e $Y_0 = \phi^{-1}(X)$ é fechado em Y .

Mostremos a seguinte relação:

$$f'(x).(Tf(y)) = f(x).(Tf'(y)), \text{ para } f, f' \in C(X), x \in X \text{ e } y \in Q_x. \quad (4.5)$$

Para isso, consideremos $f, f' \in C(X)$, $x \in X$ e $y \in Q_x$. Para x fixado, consideremos a seguinte função:

$$g = f'(x)f - f(x)f' \in C(X).$$

Obviamente $g(x) = 0$. Daí, por (4.1) devemos ter $(Tg)(y) = 0$ e isso prova (4.5). Por fim, consideremos $h : X \rightarrow \mathbb{C}$, a função que verifica $h(x) = 1$ para todo $x \in X$. Seja $\alpha = Th$, como T é uma isometria, devemos ter $\|\alpha\| = \|h\| = 1$. Além disso, fixemos $y \in Y_0 \subseteq Y$, seja $x = \phi(y)$.

É evidente que $h \in S_x$, como $y \in Q_x$, devemos ter

$$|\alpha(y)| = |(Th)(y)| = 1.$$

Daí $|\alpha(y)| = 1$, para todo $y \in Y_0$. Se fizermos $f' = h$ em (4.5), concluímos que:

$$(Tf(y)) = \alpha(y) \cdot f(\phi(y)) \text{ para todo } y \in Y_0, f \in C(X).$$

Assim provamos a tese. □

Observação 7. *Sejam X e Y espaços topológicos compactos e Hausdorff, vamos considerar os espaços de Banach $C(X)$ e $C(Y)$ das funções contínuas com domínio em X e Y (respectivamente) e contradomínio em $\mathbb{R}$. Nesse caso, uma demonstração muito parecida e mais simples que a do teorema 20 prova a tese para os espaços reais $C(X)$ e $C(Y)$.*

4.3 Classificação dos deslocamentos isométricos em $C(X)$

Nesta seção, através do teorema 21, veremos uma maneira de **classificar** os **deslocamentos isométricos** em $C(X)$. Ao fazer isso, desenvolveremos uma noção mais forte de como esses **operadores** agem no **espaço** das **funções contínuas** e isso será importante para decidir, em alguns casos, se $C(X)$ admite ao menos um deslocamento isométrico. No restante do capítulo, X denotará um espaço topológico compacto e Hausdorff. Consideraremos $C(X)$ como o espaço de todas as funções contínuas definidas em X e com valores em $\mathbb{K}$, podendo esse ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Com o uso do teorema 20, o próximo resultado é quase imediato. Os resultados desta seção podem ser encontrados em [9].

Teorema 21. *Suponhamos que T seja um deslocamento isométrico em $C(X)$. Então existe um conjunto $X_0 \subseteq X$ fechado, uma função contínua e sobrejetora $\psi : X_0 \rightarrow X$ e uma função $w \in C(X_0)$ satisfazendo*

$$|w(x)| = 1 \text{ e } (Tf)(x) = w(x)f(\psi(x)), \text{ para todos } x \in X_0, f \in C(X).$$

Além disso, existem duas possibilidades para o conjunto X_0 :

- (i) $X_0 = X \setminus \{p\}$, sendo p um ponto isolado de X ;
- (ii) $X_0 = X$.

Demonstração. Pelo teorema 20, existe um subconjunto $X_0 \subseteq X$ fechado, uma aplicação contínua e sobrejetora $\psi : X_0 \rightarrow X$ e uma função $w \in C(X_0)$ tais que

$$|w(x)| = 1 \text{ e } (Tf)(x) = w(x)f(\psi(x)), \text{ para todos } x \in X_0, f \in C(X).$$

Na demonstração do teorema 20, em (4.3), provamos que o conjunto X_0 é não vazio. Resta-nos provar que o conjunto X_0 pode ser apenas dos dois tipos descritos acima. De fato, suponhamos por absurdo que $X \setminus X_0$ contenha dois pontos distintos, digamos x_1 e x_2 .

Notemos que os conjuntos $X_0 \cup \{x_1\}$ e $X_0 \cup \{x_2\}$ são fechados. Pelo lema de Urysohn, existem funções $f_1 : X \rightarrow [0, 1]$, $f_2 : X \rightarrow [0, 1]$ em $C(X)$ tais que

$$f_1(x_1) = f_2(x_2) = 1, f_1(x_2) = f_2(x_1) = 0 \text{ e } f_1(x) = f_2(x) = 0, \text{ para cada } x \in X_0.$$

Vamos mostrar que nenhuma combinação linear não trivial de f_1 e f_2 pertence a ImT . Suponhamos $g = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in ImT$. Assim existe $h \in C(X)$ tal que $g = Th$ e portanto temos

$$g(x) = (Th)(x) = w(x)h(\psi(x)), \text{ para todo } x \in X_0.$$

Como f_1 e f_2 se anulam em X_0 , segue que $g|_{X_0} \equiv 0$. Sabemos que $|w(x)| = 1$ para todo $x \in X_0$, logo $w(x) \neq 0$ para todo $x \in X_0$. Então devemos ter

$$h(\psi(x)) = 0, \text{ para todo } x \in X_0.$$

Pelo fato de $\psi : X_0 \rightarrow X$ ser sobrejetora, devemos ter $h \equiv 0$. Com isso $g = Th = 0$. Daí a única combinação linear entre f_1 e f_2 que pertence a ImT é a trivial. Como f_1 e f_2 são linearmente independentes em $C(X)$, isso contradiz o fato de T ser um operador cuja imagem tem codimensão 1. A contradição ocorreu por supormos que $X \setminus X_0$ tem dois elementos distintos.

Então $X_0 = X$ ou $X_0 = X \setminus \{p\}$. Nesse último caso p é um ponto isolado, já que o conjunto X_0 é fechado. $\square$

Observação 8. *Daqui para frente, T sempre irá denotar um deslocamento isométrico em $C(X)$, sendo X um espaço topológico compacto e Hausdorff. As letras ψ e w irão denotar as funções definidas no teorema 21, X_0 será sempre o domínio de ψ e p será o ponto isolado de X quando estivermos no caso (i) do teorema 21. Com essa convenção, a leitura se torna mais agradável e os enunciados se tornam mais simples e diretos.*

Corolário 10. *Seja $T : C(X) \rightarrow C(X)$ um deslocamento isométrico. Suponhamos $f \in C(X)$ de modo que $f(x) = 0$, para todo $x \in X_0$. Então $f \in ImT$ se, e somente se, $f = 0$.*

Demonstração. A prova deste fato está na demonstração do teorema 21. $\square$

Usando os resultados obtidos pelo teorema 21, podemos classificar um deslocamento isométrico definido em $C(X)$ da seguinte forma:

Definição 19. *Seja $T : C(X) \rightarrow C(X)$ um deslocamento isométrico.*

- (I) *Dizemos que T é do tipo I se X_0 pode ser escolhido de modo que $X_0 \neq X$, satisfazendo todas as condições do teorema 21;*
- (II) *Dizemos que T é do tipo II se é possível tomar $X_0 = X$, satisfazendo todas as condições do teorema 21.*

Observação 9. *Como veremos adiante, um deslocamento isométrico T , em $C(X)$, pode ser simultaneamente dos tipos I e II.*

Vejamos alguns exemplos de deslocamentos isométricos em $C(X)$ e como classificamos esses de acordo com a definição 19. Nos três exemplos que seguiremos consideraremos $K = \mathbb{C}$.

Exemplo 6. Seja X o compactificado de Alexandroff dos números naturais, $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Então $C(X)$ é isometricamente isomorfo ao espaço de todas as sequências convergentes. Ao identificarmos $C(X)$ com c , vamos definir T como segue:

$$\begin{aligned} T : C(X) &\longrightarrow C(X) \\ x = (x_n)_n &\longmapsto (0, x_1, x_2, \dots) \end{aligned}$$

É evidente que T é um deslocamento isométrico em $C(X) \approx c$. Sejam $X_0 = X \setminus \{1\}$ e ψ a função

$$\begin{aligned} \psi : X_0 &\longrightarrow X \\ \psi(x) &= \begin{cases} x - 1, & \text{se } x \in \mathbb{N} \\ \infty, & \text{se } x = \infty \end{cases} \end{aligned}$$

Vamos definir ainda, $w : X_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ de modo que $w(x) = 1$ para todo $x \in X_0$. Daí é fácil verificar que X_0 , ψ , w e $p = 1$ estão de acordo com o teorema 21. Em especial, é rápido ver que

$$(Tf)(x) = w(x)f(\psi(x)), \text{ para todos } x \in X_0, f \in C(X).$$

Portanto, pela definição 19, T é um deslocamento isométrico tipo I.

Exemplo 7. Seja X como no exemplo 6, vamos identificar $C(X)$ com c . Seja T o operador linear definido por

$$\begin{aligned} T : C(X) &\longrightarrow C(X) \\ x = (x_n)_n &\longmapsto (-x_1, x_1, x_2, x_3, \dots) \end{aligned}$$

Com efeito, vamos mostrar que T é, de fato, um deslocamento isométrico. Suponhamos $(x_n)_n \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Im} T^n$, daí segue que $x_k = -x_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Temos que $(x_n)_n$ é convergente, suponhamos $x_n \rightarrow L$, daí

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = - \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = -L.$$

Portanto devemos ter $L = 0$. É evidente que $(x_1, x_2, \dots) = (x_1, -x_1, x_1, -x_1, \dots)$. Assim devemos ter $(x_n)_n = 0$. Acabamos de mostrar que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Im} T^n = \{0\}.$$

Claramente $\text{Im} T = \{(x_n)_n \in c : x_1 = -x_2\}$. Logo $\text{Im} T \neq C(X)$. Fixemos $(y_n)_n \in c \setminus \text{Im} T$ arbitrário, daí $y_1 + y_2 \neq 0$. Dado $(x_n)_n \in c$ qualquer, para $\lambda = \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} \in \mathbb{C}$, temos

$$(x_n) - \lambda(y_n) \in \text{Im} T.$$

Portanto $\text{Im} T \oplus [(y_n)_n] = c$ e dessa forma concluímos que $\text{Im} T$ é um subespaço de codimensão 1. Notemos que, para cada $(x_n)_n \in c$, vale

$$\|T((x_n)_n)\|_{\infty} = \sup(\{|-x_1|\} \cup \{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}) = \sup(\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}) = \|(x_n)_n\|_{\infty}.$$

Com isso, mostramos que T é uma isometria e concluímos que T é um deslocamento isométrico

em $C(X)$. Ao consideramos X_0 , ψ , w e p como no exemplo 6, verificamos que T é um deslocamento isométrico do tipo I. Por outro lado, seja $X_0 = X$ e $\psi : X \rightarrow X$ a função dada por

$$\psi(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{se } x \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \\ 1, & \text{se } x = 1 \\ \infty, & \text{se } x = \infty \end{cases}$$

Vamos definir ainda $w : X \rightarrow \mathbb{C}$, de modo que $w(1) = -1$ e $w(x) = 1$ para todo $x \in X \setminus \{1\}$. Com isso, vemos através da definição 19 que T é um deslocamento isométrico do tipo II. Para conhecer melhor as possibilidades para um deslocamento isométrico, vamos a mais um exemplo.

Exemplo 8. Seja X como no exemplo 6, vamos identificar $C(X)$ com c . Seja T o operador linear definido por

$$\begin{aligned} T : C(X) &\longrightarrow C(X) \\ x = (x_n)_n &\longmapsto \left(-\frac{x_1+x_2}{2}, x_1, x_2, \dots\right) \end{aligned}$$

A demonstração de que T é um deslocamento isométrico não é muito diferente do exemplo 7, exceto pela prova de que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Im} T^n = \{0\}.$$

Mostremos esse fato. Suponhamos $(x_n)_n \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Im} T^n$. Usando o princípio da indução finita, é fácil ver que

$$x_k = -\frac{x_{k+1} + x_{k+2}}{2}, \text{ para cada } k \in \mathbb{N}. \quad (4.6)$$

Da igualdade acima concluímos diretamente que $|x_k| \leq \max\{|x_{k+1}|, |x_{k+2}|\}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Por (4.6), notemos ainda que, dado um $k \in \mathbb{N}$ arbitrário, entre os três termos consecutivos

$$x_k, x_{k+1}, x_{k+2},$$

pelo menos um deles tem parte real maior ou igual a zero e pelo menos um deles tem parte real menor ou igual a zero. Para a parte imaginária cabe a mesma conclusão. Como $(x_n)_n$ é uma sequência convergente, isso só é possível se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Segue que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $|x_n| < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_0$. Por 4.6, fixado $k \in \mathbb{N}$ arbitrário, existe uma subsequência $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_n$, de modo que

$$|x_k| \leq |x_{n_j}|, \text{ para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Assim $|x_n| < \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Provamos que, para cada $\varepsilon > 0$, $|x_n| < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim podemos concluir que $|x_n| = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e dessa forma $(x_n)_n$ é a sequência nula. Logo

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Im} T^n = \{0\}.$$

Com isso, vamos admitir que T é um deslocamento isométrico em $C(X)$. Ao definirmos X_0 , ψ , w e p como no exemplo 6, é fácil mostrar que T é um deslocamento isométrico do tipo I. Vamos ver que T não é um deslocamento isométrico do tipo II. Suponhamos, por absurdo, $\psi : X \rightarrow X$ contínua e sobrejetora e $w : X \rightarrow \mathbb{C}$ contínua satisfazendo

$$|w(x)| = 1 \text{ e } Tf(x) = w(x)f(\psi(x)) \text{ para todo } x \in X, f \in C(X).$$

Para $f = (0, i, 0, \dots)$ e $x = 1$, a igualdade acima só é possível se $\psi(1) = 2$ e $|w(1)| = \frac{1}{2}$. Uma contradição, já que estávamos supondo $|w(x)| = 1$, para todo $x \in X$.

Os lemas 8 e 9 são resultados básicos decorrentes do teorema 21, o objetivo deles é descrever propriedades básicas da função ψ , a qual é induzida por um deslocamento isométrico definido em $C(X)$. Como podemos notar, o Lema de Urysohn é frequentemente usado nos resultados, principalmente na **prova por absurdo**.

Lema 8. *Suponhamos que T seja um deslocamento isométrico em $C(X)$ e $f \in C(X) \cap \text{Im}T$. Então $|f|$ é constante em cada fibra de ψ (olhar observação 8). Fixado $y \in X$, uma fibra de ψ é um conjunto da forma $\psi^{-1}(y) = \{x \in X_0 : \psi(x) = y\}$.*

Demonstração. Suponhamos $f \in C(X) \cap \text{Im}T$, digamos que $f = Tg$. Daí $\psi : X_0 \rightarrow X$ verifica:

$$f(x) = Tg(x) = w(x)g(\psi(x)), \text{ para todo } x \in X_0.$$

Como $w : X_0 \rightarrow \mathbb{K}$ é tal que $|w(x)| = 1$ para todo $x \in X_0$, segue que

$$|f(x)| = |Tg(x)| = |g(\psi(x))|, \text{ para todo } x \in X_0.$$

Sejam x_1, x_2 elementos de X_0 numa mesma fibra de ψ , ou seja, tais que $\psi(x_1) = \psi(x_2)$, usando a igualdade anterior temos

$$|f(x_1)| = |g(\psi(x_1))| = |g(\psi(x_2))| = |f(x_2)|.$$

Assim $|f|$ é constante em cada fibra de ψ . □

Lema 9. *Seja T um deslocamento isométrico em $C(X)$. Seja X_0 , ψ e w como no teorema 21, vamos provar que:*

- (i) $\psi^{-1}(x)$ tem, no máximo, dois elementos, para cada $x \in X$;
- (ii) Se existem $a, b \in X_0$, distintos tais que $\psi(a) = \psi(b) = x_0$, então $\psi^{-1}(x)$ é um conjunto unitário, para cada $x \in X \setminus \{x_0\}$;
- (iii) Se $X_0 \neq X$ (T é do tipo I), então ψ é injetora, logo é um homeomorfismo.

Demonstração. (i) Vamos provar esse resultado por absurdo. Suponhamos que existam três pontos x_1, x_2 e x_3 em X_0 , dois a dois distintos, satisfazendo $\psi(x_1) = \psi(x_2) = \psi(x_3)$. Pelo Lema de Urysohn, existem funções $f_1 : X \rightarrow [0, 1]$, $f_2 : X \rightarrow [0, 1]$ em $C(X)$ tais que

$$f_1(x) = 1, \text{ se } x \in \{x_1\} \text{ e } f_1(x) = 0, \text{ se } x \in \{x_2, x_3\};$$

$$f_2(x) = 1, \text{ se } x \in \{x_3\} \text{ e } f_2(x) = 0, \text{ se } x \in \{x_1, x_2\}.$$

Como T é um operador de codimensão 1 e $\{f_1, f_2\}$ é linearmente independente, existem λ e β constantes em $\mathbb{K}$, não ambas nulas de modo que $\lambda f_1 + \beta f_2 \in \text{Im}T$. Pelo lema 8, devemos ter

$$|\lambda f_1(x_1) + \beta f_2(x_1)| = |\lambda f_1(x_2) + \beta f_2(x_2)| = |\lambda f_1(x_3) + \beta f_2(x_3)|.$$

Das igualdades acima concluímos que $\lambda = \beta = 0$, uma contradição.

(ii) Vamos provar este item por absurdo. Suponhamos $x_1, x_2 \in X$ distintos de maneira que $\psi^{-1}(x_1)$ e $\psi^{-1}(x_2)$ ambos tenham dois elementos distintos. Digamos que existem a, b, c e d em X_0 , dois a dois distintos, satisfazendo:

$$\psi(a) = \psi(b) = x_1 \text{ e } \psi(c) = \psi(d) = x_2.$$

Pelo Lema de Urysohn, existem funções $g_1 : X \rightarrow [0, 1]$, $g_2 : X \rightarrow [0, 1]$ em $C(X)$ tais que

$$g_1(x) = 1, \text{ se } x \in \{b\} \text{ e } g_1(x) = 0, \text{ se } x \in \{a, c, d\};$$

$$g_2(x) = 1, \text{ se } x \in \{a, c\} \text{ e } g_2(x) = 0, \text{ se } x \in \{b, d\}.$$

Novamente, por ser T um operador de codimensão 1 e por ser $\{g_1, g_2\}$ um conjunto linearmente independente, vem que existem λ, β constantes em $\mathbb{K}$, não ambas nulas, tais que $(\lambda g_1 + \beta g_2) \in \text{Im}T$. Pelo lema 8, segue que

$$|\lambda g_1(a) + \beta g_2(a)| = |\lambda g_1(b) + \beta g_2(b)| \text{ e } |\lambda g_1(c) + \beta g_2(c)| = |\lambda g_1(d) + \beta g_2(d)|.$$

Dessas igualdades concluímos que $\beta = \lambda = 0$, uma contradição. Assim provamos (ii) por absurdo.

(iii) Suponhamos que T seja do tipo I, daí como vimos no teorema 21, $X_0 = X \setminus \{p\}$ e $\{p\}$ é um conjunto aberto e fechado. Assim, pelo Lema de Urysohn, existe $f : X \rightarrow [0, 1]$ em $C(X)$ tal que

$$f(p) = 1 \text{ e } f(x) = 0, \text{ se } x \in X_0.$$

Suponhamos, por absurdo, que ψ não é injetora, ou seja, que existem $a, b \in X_0$ distintos satisfazendo $\psi(a) = \psi(b)$. Pelo Lema de Urysohn, existe $g : X \rightarrow [0, 1]$ em $C(X)$ tal que

$$g(b) = 1 \text{ e } g(x) = 0, \text{ se } x \in \{p, a\}.$$

Como o conjunto $\{f, g\}$ é linearmente independente em $C(X)$ e T é um operador de codimensão 1, existem constantes λ, β em $\mathbb{K}$, não ambas nulas, tais que $\lambda f + \beta g \in \text{Im}T$. Daí, pelo lema 8 temos

$$|\lambda f(a) + \beta g(a)| = |\lambda f(b) + \beta g(b)|.$$

Essa última igualdade nos diz que $\beta = 0$. Assim $\lambda f \in \text{Im}T$ e $\lambda \neq 0$. Como $\text{Im}T$ é um subespaço de $C(X)$, segue que $f \in \text{Im}T$, isso é uma contradição com o corolário 10. Assim concluímos que $\psi : X_0 \rightarrow X$ é injetora. Como já tínhamos que ψ é contínua e sobrejetora, X_0 é compacto

e X é Hausdorff, segue que ψ é um homeomorfismo. $\square$

Observação 10. Se $T : C(X) \rightarrow C(X)$ é do tipo I, então $X \setminus X_0 = \{p\}$, onde p é um ponto isolado de X . Pelo lema 9, $\psi : X_0 \rightarrow X$ é um homeomorfismo, daí existe um único ponto p_1 em X_0 de modo que $\psi(p_1) = p$. Pela continuidade e injetividade de ψ , concluímos que p_1 é um ponto isolado de X_0 . Ainda mais, como X_0 é aberto em X , p_1 é um ponto isolado de X satisfazendo $\psi(p_1) = p$.

Portanto, repetindo o raciocínio acima para p_1 no lugar de p , concluímos que existe p_2 ponto isolado de X de maneira que $\psi(p_2) = p_1$. Como $p \notin X_0$, temos $p \neq p_1$ e $p \neq p_2$. Além disso, pela injetividade de ψ , temos $p_1 \neq p_2$. Usando o mesmo raciocínio, construímos indutivamente uma sequência

$$(p, p_1, p_2, \dots, p_n, \dots)$$

de pontos isolados em X - distintos dois a dois. Além disso, os pontos da sequência satisfazem $\psi(p_{n+1}) = p_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\psi(p_1) = p$. Com isso, concluímos que se $C(X)$ admite um deslocamento isométrico do tipo I, então X tem um conjunto infinito de pontos isolados.

Terminaremos a seção mostrando como a **classificação** dos deslocamentos em $C(X)$ pode ser uma ferramenta útil. Através dessa abordagem, no teorema 22, provaremos que $C([a, b])$ **não admite** deslocamentos isométricos. Para chegar nesse resultado, precisamos apenas provar um simples lema, o qual exibe uma propriedade da função ψ nos deslocamentos isométricos do tipo II.

Lema 10. Seja T um deslocamento isométrico tipo II em $C(X)$. Então $\psi : X \rightarrow X$ não é injetora.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $\psi : X \rightarrow X$ seja injetora. Como X é um compacto Hausdorff, ψ é homeomorfismo e satisfaz

$$(Tf)(x) = w(x)f(\psi(x)), \text{ para todo } x \in X \text{ e } f \in C(X).$$

Seja $g \in C(X)$ uma função qualquer. Notemos que

$$f = \frac{g \circ \psi^{-1}}{w \circ \psi^{-1}} \in C(X)$$

e, evidentemente, $Tf = g$. Pela arbitrariedade, concluímos que T é sobrejetora. Uma contradição, pois $\text{Im} T$ tem codimensão 1. $\square$

Teorema 22. Não existe um deslocamento isométrico definido no espaço $C([a, b])$, sendo $[a, b]$ um intervalo fechado da reta real.

Demonstração. Faremos a demonstração por absurdo. Suponhamos que $C([a, b])$ admite um deslocamento isométrico T . Como $[a, b]$ não tem pontos isolados, T deve ser do tipo II. Pelo lema 10, $\psi : [a, b] \rightarrow [a, b]$ não é injetora. Consideremos $y, z \in [a, b]$ distintos tais que $\psi(y) = \psi(z)$. Podemos supor, sem perder generalidade, que $y < z$. Fixemos $x_0 \in [a, b]$ com $y < x_0 < z$.

Pelo lema 9 (i) e (ii),

$$\psi(x_0) \neq \psi(z) \text{ e } \psi \text{ é injetora quando restrita ao intervalo }]y, z[. \quad (4.7)$$

Suponhamos, sem perder generalidade, que $\psi(x_0) > \psi(y) = \psi(z)$. Daí, como ψ é contínua, ψ preserva conexidade e compacidade. Segue que o conjunto $\psi([y, x_0])$ é um intervalo fechado da reta real contido em $[a, b]$. Além disso, esse intervalo deve conter $[\psi(y), \psi(x_0)]$. Por analogia, o conjunto $\psi([x_0, z])$ é um intervalo fechado da reta real contido em $[a, b]$ e que contém o intervalo $[\psi(y), \psi(x_0)]$.

Como estamos supondo $\psi(y) < \psi(x_0)$ e $\psi(z) < \psi(x_0)$, existe $v \in [a, b]$ tal que

$$\psi(z) = \psi(y) < v < \psi(x_0).$$

Pelo fato de $[\psi(y), \psi(x_0)] \subseteq \psi([y, x_0])$ e $[\psi(y), \psi(x_0)] \subseteq \psi([x_0, z])$, existem $u \in]y, x_0[$, $u' \in]x_0, z[$ tais que

$$\psi(u) = \psi(u') = v,$$

isso contradiz (4.7). □

4.4 Estudo dos deslocamentos isométricos tipo I

A meta desta seção é trazer uma **condição suficiente** para garantir a **existência** de um deslocamento isométrico do tipo I em $C(X)$, isso será feito no teorema 24. Ao fim, daremos um exemplo bem interessante, aplicando as ferramentas desenvolvidas nesta parte do trabalho. Apesar de fazer essa proposta, vamos iniciar com uma definição e um resultado que pressupõe que $C(X)$ já admite um deslocamento isométrico. Vale enfatizar que nesta seção, da mesma maneira como na anterior, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definição 20. *Seja T um deslocamento isométrico do tipo I definido em $C(X)$, seja $X \setminus X_0 = \{p\}$ como no teorema 21. Definimos Γ_T , o funcional linear contínuo associado a T , da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} \Gamma_T : C(X) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\longmapsto (Tf)(p) \end{aligned}$$

Os próximos resultados que trataremos nesta seção podem ser vistos em [9].

Teorema 23. *Seja T um deslocamento isométrico do tipo I definido em $C(X)$. Suponhamos $X \setminus X_0 = \{p\}$, seguindo a notação do teorema 21, e $\Gamma_T \equiv 0$. Então o conjunto $D = \{p, \psi^{-1}(p), \psi^{-2}(p), \dots, \psi^{-n}(p), \dots\}$ é denso em X . Portanto X é homeomorfo a uma compactificação dos naturais.*

Demonstração. Suponhamos $g \in C(X)$ tal que $g(x) = 0$, para todo $x \in \overline{D}$, mostremos que g é necessariamente a função nula. Consideremos $\chi_p : X \longrightarrow \mathbb{K}$ a função característica de $\{p\}$, isto é,

$$\chi_p(p) = 1 \text{ e } \chi_p(x) = 0, \text{ para todo } x \in X \setminus \{p\}.$$

Afirmo que existem constantes $\lambda, \beta \in \mathbb{K}$, não ambas nulas, de maneira que $\lambda\chi_p + \beta g \in \text{Im}T$. De fato, se $g \equiv 0$ essas constantes trivialmente existem. Por outro lado, se $g \not\equiv 0$, o conjunto $\{g, \chi_p\}$ é lineamente independente em $C(X)$, já que $g(p) = 0$ e $\chi_p(p) = 1$. Daí, a existência dessas constantes segue do fato de $\text{Im}T$ ter codimensão 1.

Daí, fixemos $\lambda, \beta \in \mathbb{K}$, não ambas nulas, tais que $\lambda\chi_p + \beta g \in \text{Im}T$. Pelo colorário 10, χ_p não está em $\text{Im}T$, logo $\beta \neq 0$. Tomando $\alpha = \frac{\lambda}{\beta}$ e tendo em mente que $\text{Im}T$ é subespaço de $C(X)$, segue que

$$\alpha\chi_p + g \in \text{Im}T.$$

Suponhamos que $\alpha\chi_p + g = Th$, para $h \in C(X)$. Temos, por hipótese,

$$0 = \Gamma_T(h) = Th(p) = \alpha\chi_p(p) + g(p) = \alpha.$$

Assim $g \in \text{Im}T$, $g = Th$. Sabemos que

$$g(x) = Th(x) = w(x)h(\psi(x)), \text{ para todo } x \in X_0.$$

Veja que, por ser ψ um homeomorfismo, segue que

$$h = \frac{g \circ \psi^{-1}}{w \circ \psi^{-1}}.$$

Notemos que $\psi^{-1}(D) \subseteq D$, pela definição do conjunto D . Como ψ^{-1} é uma função contínua, segue que $\psi^{-1}(\overline{D}) \subseteq \overline{D}$. Como g é uma função que se anula em $\overline{D}$, devemos ter (pela igualdade acima) que h se anula em $\overline{D}$.

Tomamos g uma função qualquer que se anula em $\overline{D}$ e concluímos que $g \in \text{Im}T$. Depois disso, provamos que se $g = Th$, então h se anula em $\overline{D}$. Com isso, $h \in \text{Im}T$ e $g \in \text{Im}T^2$. Com esse argumento, provamos por indução que

$$g \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Im}T^n.$$

Como T é um deslocamento isométrico, devemos ter $g \equiv 0$. Portanto toda função que se anula em $\overline{D}$ deve ser nula em X . Como $\overline{D}$ é um conjunto fechado, segue pelo Lema de Urysohn que $\overline{D} = X$.

Da observação 10, cada elemento do conjunto D é um ponto isolado em X . Daí D , como subespaço topológico de X , é o espaço discreto - e evidentemente é homeomorfo aos naturais. Como vimos, D é denso em X e X é um espaço topológico compacto e Hausdorff. Logo X é homeomorfo a uma compactificação dos naturais. $\square$

O próximo teorema é, em certo sentido, uma **recíproca** do último resultado. Esse teorema se adequa a proposta da seção.

Teorema 24. *Seja X um espaço topológico compacto e Hausdorff com um ponto isolado p , seja ainda $X_0 = X \setminus \{p\}$. Suponhamos que existe um homeomorfismo $\psi : X_0 \rightarrow X$ de modo que o conjunto $D = \{p, \psi^{-1}(p), \psi^{-2}(p), \dots, \psi^{-n}(p), \dots\}$ seja denso em X . Nessas condições, existe um deslocamento isométrico T definido em $C(X)$ tal que $\Gamma_T \equiv 0$.*

Demonstração. Vamos definir T da seguinte forma

$$\begin{array}{ccc} T : C(X) & \longrightarrow & C(X) \\ f & \longmapsto & g \end{array}$$

de modo que $g(p) = 0$ e $g(x) = f(\psi(x))$, para todo $x \in X_0$. Como p é ponto isolado em X , a função g é, de fato, contínua e T está bem definida. Além disso, através da definição verificamos, sem dificuldades, que T é um operador linear. Como ψ é sobrejetora é verdade que

$$\begin{aligned} \sup \{|Tf(x)| : x \in X_0\} &= \sup \{|f \circ \psi(x)| : x \in X_0\} = \\ &= \sup \{|f(x)| : x \in X\} = \\ &= \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Daí, como $|Tf(p)| = 0$, concluímos que T é uma isometria.

Por definição, se $g \in \text{Im}T$, então $g(p) = 0$. Ainda, pelo princípio de indução finita é simples mostrar que, se $g \in \text{Im}T^{n+1}$, então $g(\psi^{-n}(p)) = 0$. Assim consideremos

$$g \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Im}T^n.$$

Pelo que observamos acima, segue que g se anula em D . Assim g é uma função contínua que coincide com a função nula em um conjunto denso em X , logo $g \equiv 0$.

Resta-nos mostrar que $\text{Im}T$ é um subespaço de $C(X)$ com codimensão 1. Para tal, vamos mostrar que

$$\text{Im}T = \{h \in C(X) : h(p) = 0\}. \quad (4.8)$$

A inclusão $\text{Im}T \subseteq \{h \in C(X) : h(p) = 0\}$ segue diretamente da definição de T . Por outro lado, seja $h \in C(X)$ com $h(p) = 0$. Consideremos a função

$$g = h \circ \psi^{-1} \in C(X).$$

Notemos que, se $x \in X_0$, $Tg(x) = h \circ \psi^{-1}(\psi(x)) = h(x)$. Temos ainda, $Tg(p) = 0 = h(p)$. Segue que $h = Tg$, daí $h \in \text{Im}T$ e assim provamos a igualdade (4.8). A demonstração de que o subespaço $\{h \in C(X) : h(p) = 0\}$ tem codimensão 1 é simples e será omitida. $\square$

O próximo lema foge do contexto dos deslocamentos isométricos, trata-se de um simples resultado de análise na reta real. Esse dará suporte para o próximo corolário desta seção.

Lema 11. *O conjunto $\{n\sqrt{2} + m : n, m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \geq 0\}$ é denso na reta real.*

Demonstração. De fato, consideremos $y \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários. Seja $k \in \mathbb{Z}$ de forma que $k \leq y < k + 1$. Sabemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} - 1)^n = 0.$$

Seja $n_0 \in \mathbb{N}$, ímpar e que verifica $(\sqrt{2} - 1)^{n_0} < \varepsilon$. Claro que

$$(\sqrt{2} - 1)^{n_0} = \sum_{j=0}^{n_0} C_{n_0,j} (-1)^j (\sqrt{2})^{n_0-j}, \text{ sendo } C_{n_0,j} = \frac{n_0!}{j!(n_0-j)!}.$$

Através da expressão acima e do fato de n_0 ser ímpar, fica claro que existem $s, t \in \mathbb{Z}$, $s > 0$ tais que $(\sqrt{2} - 1)^{n_0} = s\sqrt{2} + t$. Daí observe que um dos termos da sequência

$$k, k + (s\sqrt{2} + t), k + 2(s\sqrt{2} + t), k + 3(s\sqrt{2} + t), \dots, k + n(s\sqrt{2} + t), \dots$$

pertence ao intervalo $]y - \varepsilon; y + \varepsilon[$ e ao conjunto $\{n\sqrt{2} + m : n, m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \geq 0\}$. □

Consideremos X um espaço topológico compacto, Hausdorff e com uma infinidade de componentes conexas. Na década de 80, muitos matemáticos que estudavam os deslocamentos em espaços de Banach conjecturaram que $C(X)$ não admitiria um deslocamento isométrico nessas condições. Um importante matemático, entre esses, é **J. R. Holub** (artigo [13]). O próximo corolário é uma forma de ver que essa conjectura é falsa.

Corolário 11. *Existe um espaço topológico X , compacto, Hausdorff e com um número infinito de componentes conexas de maneira que $C(X)$ admite um deslocamento isométrico.*

Demonstração. Consideremos $\mathbb{N}$ o espaço topológico dos números naturais munido da topologia discreta, na qual todo subconjunto dos números naturais é aberto. Seja $\beta\mathbb{N}$ o compactificado de Stone-Cech de $\mathbb{N}$, logo $\mathbb{N}$ é denso em $\beta\mathbb{N}$. Vejamos que para cada $n_0 \in \mathbb{N}$, $\{n_0\}$ é aberto em $\beta\mathbb{N}$. Para isso, consideremos a função

$$\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow [0, 1],$$

definida por:

$$\alpha(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \in \mathbb{N} \setminus \{n_0\} \\ 0, & \text{se } n = n_0 \end{cases}$$

Como $\mathbb{N}$ é o espaço discreto, a função α é trivialmente contínua. Seja $\hat{\alpha}$ a extensão contínua de α a $\beta\mathbb{N}$. Então o conjunto $\hat{\alpha}^{-1}([0, \frac{1}{2}])$ é aberto em $\beta\mathbb{N}$. Como $\hat{\alpha}$ estende α , o único natural pertencente ao conjunto $\hat{\alpha}^{-1}([0, \frac{1}{2}])$ é n_0 . Daí, pelo fato de $\mathbb{N}$ ser denso em $\beta\mathbb{N}$, devemos ter $\hat{\alpha}^{-1}([0, \frac{1}{2}]) = \{n_0\}$. Segue que para cada $n_0 \in \mathbb{N}$, $\{n_0\}$ é aberto em $\beta\mathbb{N}$ e que $\mathbb{N}$ é aberto em $\beta\mathbb{N}$.

Seja S^1 o círculo unitário, ou ainda,

$$S^1 = \{e^{2\pi ix} : x \in [0, 1]\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Consideremos a função f dada por:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow S^1 \\ n &\longmapsto e^{2\pi i n \sqrt{2}} \end{aligned}$$

Evidentemente, a função f é contínua e, pelo lema 11, $Im f$ é um conjunto denso em S^1 . Por ser S^1 um compacto Hausdorff, f admite uma extensão contínua a $\beta\mathbb{N}$. Seja $\hat{f} : \beta\mathbb{N} \longrightarrow S^1$ a extensão contínua de f . Como $\beta\mathbb{N}$ é compacto e $\hat{f}$ é contínua, $\hat{f}(\beta\mathbb{N})$ é compacto em S^1 , logo

é fechado. Segue daí que

$$\text{Im} \hat{f} = \hat{f}(\beta\mathbb{N}) = \overline{\hat{f}(\beta\mathbb{N})} \supseteq \overline{\hat{f}(\mathbb{N})} = S^1,$$

e assim concluímos que $\hat{f}$ é sobrejetora. Vamos definir uma relação de equivalência $\sim$ em $\beta\mathbb{N}$. Sejam $x, y \in \beta\mathbb{N}$ arbitrários, então:

$$x \sim y \iff \begin{array}{l} x, y \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad x = y \\ \text{ou} \\ x, y \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \hat{f}(x) = \hat{f}(y) \end{array}$$

É muito simples verificar que $\sim$ é, de fato, uma relação de equivalência. Consideremos o conjunto quociente $X = \beta\mathbb{N} / \sim$. Seja $q : \beta\mathbb{N} \rightarrow X$ a aplicação quociente dada por

$$\begin{array}{ccc} q : \beta\mathbb{N} & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & [x]. \end{array}$$

Vamos munir X da topologia quociente τ , a topologia mais fina que torna q contínua, dada por

$$\tau = \{U \in \mathcal{P}(X) : q^{-1}(U) \text{ é aberto em } \beta\mathbb{N}\}.$$

Mostremos que o espaço topológico X é Hausdorff. Temos que verificar 3 possíveis casos:

Primeiro Caso: Suponhamos $x, y \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ de maneira que $[x] \neq [y]$. Pela definição de $\sim$, devemos ter $\hat{f}(x) \neq \hat{f}(y)$. Daí, como S^1 é Hausdorff, existem abertos disjuntos U e V em S^1 tais que $\hat{f}(x) \in U$ e $\hat{f}(y) \in V$. Dessa forma, $\hat{f}^{-1}(U)$ e $\hat{f}^{-1}(V)$ são abertos disjuntos em $\beta\mathbb{N}$ tais que $x \in \hat{f}^{-1}(U)$ e $y \in \hat{f}^{-1}(V)$. Pela definição de τ , os conjuntos $q(\hat{f}^{-1}(U))$ e $q(\hat{f}^{-1}(V))$ são abertos em X , disjuntos, tais que $[x] \in q(\hat{f}^{-1}(U))$ e $[y] \in q(\hat{f}^{-1}(V))$. E assim este caso está resolvido.

Segundo Caso: Suponhamos $x \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{N}$, daí $[x] \neq [y]$. Nesse caso, notemos que $q^{-1}(\{[y]\}) = \{y\}$ é aberto em $\beta\mathbb{N}$. Além disso, $q^{-1}(X \setminus \{[y]\}) = \beta\mathbb{N} \setminus \{y\}$ é aberto em $\beta\mathbb{N}$. Daí $\{[y]\}$ e $X \setminus \{[y]\}$ são abertos disjuntos em X e separam os pontos $[x]$ e $[y]$.

Terceiro Caso: Suponhamos $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$ distintos. Daí $[x] \neq [y]$. Neste caso, usando o que foi feito no segundo caso, sabemos que $\{[x]\}$ e $\{[y]\}$ são abertos em X , disjuntos e que separam os pontos dados.

Provamos assim que X é Hausdorff. No meio dessa demonstração, vimos também que $\mathbb{N}$ é aberto em X e, evidentemente, $\mathbb{N}$ é denso em X . Notemos que, do fato de q ser contínua e $\beta\mathbb{N}$ compacto, concluímos que $X = q(\beta\mathbb{N})$ deve ser compacto. Além disso, $X \setminus \mathbb{N}$ é fechado em X , logo também é compacto. Seja g a função dada por:

$$\begin{array}{ccc} g : X & \longrightarrow & S^1 \\ [x] & \longmapsto & \hat{f}(x) \end{array}$$

Notemos que, pela definição da relação $\sim$, g está bem definida. A função g é trivialmente contínua em $\mathbb{N}$, pois para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{[n]\}$ é aberto em X . Consideremos então $x \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ e suponhamos que V seja um aberto em S^1 contendo o ponto $g([x]) = \hat{f}(x)$. Como $\hat{f}$ é contínua, $\hat{f}^{-1}(V)$ é um aberto em $\beta\mathbb{N}$ que contém o ponto x . Notemos que $q(\hat{f}^{-1}(V))$ é um aberto em X contendo o ponto $[x]$ e que $g(q(\hat{f}^{-1}(V))) \subseteq V$. Pela generalidade desse argumento, concluímos que a função g é contínua em todo X . Por ser $\hat{f}$ sobrejetora, concluímos que g é sobrejetora.

Sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, vale

$$g([n+1]) = \hat{f}(n+1) = e^{2\pi i\sqrt{2}(n+1)} = \hat{f}(n)e^{2\pi i\sqrt{2}} = g([n])e^{2\pi i\sqrt{2}}.$$

Seja $(n_k)_k$ uma sequência de números naturais arbitrária. Decorre da expressão acima que

$$(g([n_k]))_k \text{ converge se, e somente se, } (g([n_k+1]))_k \text{ converge.} \quad (4.9)$$

Notemos que a restrição $g|_{X \setminus \mathbb{N}}$ tem imagem densa em S^1 , já que $\mathbb{N}$ é um conjunto enumerável e todo aberto não vazio de S^1 é um conjunto não enumerável. Além disso, $X \setminus \mathbb{N}$ é compacto, assim concluímos que $g|_{X \setminus \mathbb{N}}$ é sobrejetora. Tendo em mente a definição de g e a compacidade dos conjuntos $X \setminus \mathbb{N}$ e S^1 , concluímos que :

$$g|_{X \setminus \mathbb{N}} : X \setminus \mathbb{N} \longrightarrow S^1 \text{ é um homeomorfismo.} \quad (4.10)$$

Mostremos agora que, dada uma sequência qualquer de naturais $([n_k])_k$ em X ,

$$([n_k])_k \text{ é convergente em } X \text{ se, e somente se, } ([n_k+1])_k \text{ é convergente em } X. \quad (4.11)$$

Suponhamos que $([n_k])_k$ seja uma sequência de números naturais convergente em X , de modo que $\lim_{k \rightarrow \infty} [n_k] = [x_0]$. Vamos supor que $[x_0] \in X \setminus \mathbb{N}$ e depois provar o caso $[x_0] \in \mathbb{N}$. Como g é contínua, segue que $(g([n_k]))_k$ converge para $g([x_0])$ em S^1 . Por (4.9), $(g([n_k+1]))_k$ converge em S^1 , a saber para $y = e^{2\pi i\sqrt{2}}g([x_0])$. Por (4.10), existe $[y_0] \in X \setminus \mathbb{N}$ de maneira que $g([y_0]) = y$. Afirimo que $\lim_{k \rightarrow \infty} [n_k+1] = [y_0]$. De fato, suponhamos por absurdo que isso não seja verdade. Daí existe um aberto V em X de maneira que $[y_0] \in V$ e $\{k \in \mathbb{N} : [n_k+1] \in X \setminus V\}$ é infinito. Notemos que o conjunto $X \setminus V$ é compacto e, pela continuidade da função g , $g(X \setminus V)$ também o é. O conjunto $\{k \in \mathbb{N} : g([n_k+1]) \in g(X \setminus V)\}$ é infinito e $\lim_{k \rightarrow \infty} g([n_k+1]) = y$, logo $y \in g(X \setminus V)$. Segue que existe $[n_0] \in (X \setminus V) \cap \mathbb{N}$ de maneira que $g([n_0]) = y$. Notemos que o conjunto $V \cup \{[n_0]\}$ é um aberto contendo $[y_0]$ de modo que $\{k \in \mathbb{N} : [n_k+1] \in X \setminus (V \cup \{[n_0]\})\}$ é infinito, pois a sequência $([n_k+1])_k$ certamente não tem uma infinidade de termos iguais a $[n_0]$. Novamente o compacto $g(X \setminus (V \cup \{[n_0]\}))$ é tal que $\{k \in \mathbb{N} : g([n_k+1]) \in g(X \setminus (V \cup \{[n_0]\}))\}$ é infinito e $y \notin g(X \setminus (V \cup \{[n_0]\}))$, uma contradição. Nessa prova consideramos $[x_0] \in X \setminus \mathbb{N}$, notemos que se $\lim_{k \rightarrow \infty} [n_k] = [x_0]$ e $[x_0] \in \mathbb{N}$, a sequência $([n_k])_k$ deve ser quase constante, bem como a sequência $([n_k+1])_k$, logo esse caso é resolvido de maneira trivial. A recíproca:

$$\text{se } ([n_k+1])_k \text{ converge em } X, \text{ então } ([n_k])_k \text{ converge em } X.$$

é análoga e com isso demonstramos (4.11). Na demonstração de (4.11) provamos também,

que dada uma sequência de naturais $([n_k])_k$, em X , de maneira que $([n_k])_k$ não tenha uma subsequência constante e dado um ponto $[x] \in X \setminus \mathbb{N}$, temos:

$$\text{se } (g([n_k]))_k \text{ converge para } g([x]), \text{ então } ([n_k])_k \text{ converge para } [x]. \quad (4.12)$$

Dessa maneira, vamos definir uma nova função $s : X \rightarrow X$. Para isso, seja $[x] \in X$ arbitrário e suponhamos que $([n_k])_k$ seja uma sequência de naturais convergindo para $[x]$. Defino $s([x])$ como o ponto limite da sequência $([n_k + 1])_k$, que sabemos ser convergente por (4.11). Para $[x] \in \mathbb{N}$, está claro que s está bem definida. Suponhamos $[x] \in X \setminus \mathbb{N}$ arbitrário e $([n_k])_k, ([m_k])_k$ duas sequências de naturais em X , ambas convergindo para $[x]$. Digamos que $\lim_{k \rightarrow \infty} [n_k + 1] = [y_1]$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} [m_k + 1] = [y_2]$. Evidentemente $[y_1] \notin \mathbb{N}$ e $[y_2] \notin \mathbb{N}$, pois $[x] \notin \mathbb{N}$. Em (4.9), vimos que

$$g([y_1]) = e^{2\pi i \sqrt{2}} g([x]) = g([y_2]),$$

logo, por (4.10), $[y_1] = [y_2]$. Com isso, a função s está bem definida e sabemos que vale:

$$g(s([x])) = e^{2\pi i \sqrt{2}} g([x]), \text{ para todo } [x] \in X.$$

Vamos mostrar que s é contínua. Se $[x] \in \mathbb{N}$, obviamente s é contínua em $[x]$, pois $[x]$ é aberto em X . Resta mostrarmos que s é contínua em $[x] \in X \setminus \mathbb{N}$ arbitrário. Suponhamos $[x] \in X \setminus \mathbb{N}$ e V um aberto em X de maneira que $s([x]) = [y] \in V$, claramente $[y] \in X \setminus \mathbb{N}$. Por (4.10), $g(V \setminus \mathbb{N})$ é aberto em S^1 . O conjunto $A_0 = \{z \in S^1 : e^{2\pi i \sqrt{2}} z \in g(V \setminus \mathbb{N})\}$ também é aberto em S^1 . Seja A um aberto de S^1 , que contém o ponto $e^{-2\pi i \sqrt{2}} g([y])$ e que satisfaz $\bar{A} \subseteq A_0$, consideremos ainda o conjunto $U = g^{-1}(A)$, que é aberto em X . Evidentemente $[x] \in U$ e notemos que, se $[u] \in U \cap (X \setminus \mathbb{N})$, então $g(s([u])) = e^{2\pi i \sqrt{2}} g([u]) \in g(V \setminus \mathbb{N})$, daí $s([u]) \in V$. Para concluir que s é contínua em $[x]$, consideremos o conjunto

$$I = \{[n] \in \mathbb{N} \cap U : [n + 1] \notin V\}.$$

Vamos provar, por absurdo, que esse conjunto é finito. De fato, suponhamos que I seja infinito. Consideremos $([n_k])_k$, uma sequência de naturais em I de modo que $[n_j] \neq [n_t]$ para todos $j, t \in \mathbb{N}$ com $j \neq t$. Notemos que o conjunto $\bar{A}$ é compacto, daí a sequência $(g([n_k]))_k$ admite uma subsequência convergente em $\bar{A}$. Sem perdermos generalidade, suponhamos que $(g([n_k]))_k$ converge para $w \in \bar{A}$. Seja $[x_1] \in X \setminus \mathbb{N}$ tal que $g([x_1]) = w$, logo $w \in \bar{A} \subseteq A_0$. Portanto $g(s([x_1])) = e^{2\pi i \sqrt{2}} g([x_1]) \in g(V \setminus \mathbb{N})$ e assim concluímos que $s([x_1]) \in V$. Por outro lado, decorre de (4.12) que $([n_k])_k$ converge para $[x_1]$. Daí pela definição de s , segue que $([n_k + 1])_k$ converge para $s([x_1])$. Notemos que $\{[n_k + 1] : k \in \mathbb{N}\} \subseteq X \setminus V$, pois a sequência $([n_k])_k$ foi tomada em I . Vejamos que, por $X \setminus V$ ser fechado, $s([x_1]) \in X \setminus V$, uma contradição. Para concluir que s é contínua em $[x]$, basta notarmos que o conjunto $U \setminus I$ é um aberto contendo $[x]$ e $s(U) \subseteq V$.

Suponhamos que $[x] \in X \setminus \mathbb{N}$, $[y] \in X \setminus \mathbb{N}$ e $s([x]) = s([y])$. Daí, segue que

$$g([x]) = e^{-2\pi i \sqrt{2}} g(s([x])) = e^{-2\pi i \sqrt{2}} g(s([y])) = g([y]),$$

logo $[x] = [y]$. É claro que se $[x] \in \mathbb{N}$ ou $[y] \in \mathbb{N}$, $s([x]) = s([y])$ implica que $[x] = [y]$. Assim, s é injetora.

Notemos que, dado $[x] \in X \setminus \mathbb{N}$, existe uma sequência de naturais $([n_k])_k$ convergindo para $[x]$ de maneira que $[n_k] \neq [1]$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Daí, decorre de (4.11) que $([n_k - 1])_k$ converge em X . Digamos que $([n_k - 1])_k$ convirja para $[u]$, é imediato verificar que $s([u]) = [x]$. Com isso, mostramos que $X \setminus \mathbb{N} \subseteq s(X)$. Daí, é fácil ver que $s(X) = X \setminus \{[1]\}$.

Tendo em mente que X e $X \setminus \{[1]\}$ são ambos compactos Hausdorff, concluímos que

$$s : X \longrightarrow X \setminus \{[1]\}$$

é um homeomorfismo. Fazendo $D = \mathbb{N}$, $p = [1]$ e $\psi = s^{-1}$, segue do teorema 24 que $C(X)$ admite um deslocamento isométrico do tipo I. Isso demonstra este corolário, visto que X possui um número infinito de componentes conexas. $\square$

4.5 Estudo dos deslocamentos isométricos tipo II

Agora, voltemos nossa atenção para os **deslocamentos isométricos do tipo II**. Vamos notar as consequências de $C(X)$ admitir esse tipo de deslocamento. Pelos lemas 9 e 10, sabemos que existe um único par de pontos distintos $a, b \in X$ de maneira que $\psi(a) = \psi(b)$. Consideremos $c = \psi(a)$. Com essa notação vamos provar os próximos resultados, os quais podem ser encontrados em [9].

Teorema 25. *Seja T um deslocamento isométrico do tipo II definido em $C(X)$, sejam $a, b, c \in X$ como acima e sejam ψ e w como no teorema 21. Vamos definir $F \subseteq X$ da seguinte forma*

$$F = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \psi^k(c).$$

Então F é denso em X .

Demonstração. Pela definição de F , concluímos que $\psi(F) \subseteq F$. Daí, por ser ψ contínua, segue que $\psi(\overline{F}) \subseteq \overline{F}$. Por outro lado, suponhamos que $\psi(x) \in \overline{F}$, vamos provar que $x \in \overline{F}$. Notemos que se $\psi(x) = c$, isso é imediato. Então suponhamos $\psi(x) \in \overline{F} \setminus \{c\} \subseteq \overline{F \setminus \{c\}}$, logo existe uma rede $(z_\alpha)_{\alpha \in D}$ em $F \setminus \{c\}$, convergindo para $\psi(x)$. Para cada $\alpha \in D$, $\psi^{-1}(z_\alpha)$ é um conjunto unitário. Observemos que, pela definição de F , $(\psi^{-1}(z_\alpha))_{\alpha \in D}$ é uma rede em F . Como $\overline{F}$ é compacto em X , $(\psi^{-1}(z_\alpha))_{\alpha \in D}$ admite subrede convergente para $x_0 \in \overline{F}$. Sem perda de generalidade e usando uma notação mais simples, suponhamos que $(\psi^{-1}(z_\alpha))_{\alpha \in D}$ converge para $x_0 \in \overline{F}$. Pela continuidade de ψ , segue que a rede

$$(\psi(\psi^{-1}(z_\alpha)))_{\alpha \in D} = (z_\alpha)_{\alpha \in D}$$

converge para $\psi(x_0)$. Como X é Hausdorff, devemos ter $\psi(x_0) = \psi(x)$, mas $\psi(x) \neq c$, portanto $x = x_0 \in \overline{F}$. Mostramos que $\psi(\overline{F}) \subseteq \overline{F}$ e que se $\psi(x) \in \overline{F}$, então $x \in \overline{F}$. Tendo em mente que ψ é sobrejetora, concluímos que $\psi(\overline{F}) = \overline{F}$ e $\psi(X \setminus \overline{F}) = X \setminus \overline{F}$.

Vejam agora que $\overline{F} = X$. Suponhamos, por absurdo, $\overline{F} \neq X$, daí existe $g \in C(X)$ não nula tal que $g(x) = 0$, para todo $x \in \overline{F}$. Seja $h : X \rightarrow \mathbb{K}$ a função definida por

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \overline{F} \\ \frac{g(\psi^{-1}(x))}{w(\psi^{-1}(x))}, & \text{se } x \in X \setminus \overline{F} \end{cases}$$

Vejam que h é contínua em cada $x_0 \in \overline{F}$. Se isso não fosse verdade, teríamos que existe uma rede $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ em X convergindo para x_0 , enquanto $(h(x_\alpha))_{\alpha \in D}$ não converge para $h(x_0) = 0$. Sem perder generalidade, podemos supor que existe $\varepsilon > 0$ tal que $|h(x_\alpha)| > \varepsilon$ para cada $\alpha \in D$, pois isso vale para alguma subrede de $(h(x_\alpha))_{\alpha \in D}$. Logo, pela definição de h , $x_\alpha \notin \overline{F}$, para cada $\alpha \in D$. Segue que $\psi^{-1}(x_\alpha)$ é um conjunto unitário para cada $\alpha \in D$. Como X é compacto, $(\psi^{-1}(x_\alpha))_{\alpha \in D}$ admite uma subrede convergente em X . Novamente, sem perda de generalidade, suponhamos que $(\psi^{-1}(x_\alpha))_{\alpha \in D}$ converge para $z \in X$. Como ψ é contínua, concluímos que $(\psi(\psi^{-1}(x_\alpha)))_{\alpha \in D} = (x_\alpha)_{\alpha \in D}$ converge para $\psi(z)$, daí por ser X Hausdorff, segue que $\psi(z) = x_0$. Provamos na primeira parte que $\psi(X \setminus \overline{F}) = X \setminus \overline{F}$, logo $z \in \overline{F}$. Veja que, por ser g contínua, concluímos que

$$|h(x_\alpha)| = |g(\psi^{-1}(x_\alpha))| \rightarrow |g(z)| = 0, \text{ pois } z \in \overline{F}.$$

Isso contradiz a hipótese, daí devemos concluir que h é contínua em cada $x_0 \in \overline{F}$.

Agora suponhamos, por absurdo, que existe $x_0 \in X \setminus \overline{F}$ de maneira que h não é contínua em x_0 . Nessas condições, sabemos que existe uma rede $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ convergindo para x_0 , enquanto $(h(x_\alpha))_{\alpha \in D}$ não converge para $h(x_0)$. Como $X \setminus \overline{F}$ é aberto em X , podemos supor, sem perda de generalidade, que $x_\alpha \in X \setminus \overline{F}$ para cada $\alpha \in D$. Sem perda de generalidade, podemos supor também que existe $\varepsilon > 0$ de modo que $|h(x_\alpha) - h(x_0)| > \varepsilon$, para todo $\alpha \in D$, pois esses resultados valem para alguma subrede de $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$. Segue que $\psi^{-1}(x_\alpha)$ é um conjunto unitário para cada $\alpha \in D$. Análogo ao que foi feito quando $x_0 \in \overline{F}$, concluímos que $(\psi^{-1}(x_\alpha))_{\alpha \in D}$ admite uma subrede convergente em X , vamos supor que $(\psi^{-1}(x_\alpha))_{\alpha \in D}$ converge para $z \in X$. Pela continuidade de ψ , segue que $(\psi(\psi^{-1}(x_\alpha)))_{\alpha \in D} = (x_\alpha)_{\alpha \in D}$ converge para $\psi(z)$ e assim, devemos ter $\psi(z) = x_0$. Como $\psi(\overline{F}) = \overline{F}$, certamente $z \in X \setminus \overline{F}$. Pela continuidade de g e de w , temos:

$$h(x_\alpha) = \frac{g(\psi^{-1}(x_\alpha))}{w(\psi^{-1}(x_\alpha))} \rightarrow \frac{g(z)}{w(z)} = h(x_0).$$

Isso contradiz o fato de $(h(x_\alpha))_{\alpha \in D}$ não convergir para $h(x_0)$. Assim h é contínua em cada $x_0 \in X \setminus \overline{F}$. Portanto $h \in C(X)$. Pelo fato de

$$Tf(x) = w(x)f(\psi(x)), \text{ para todos } x \in X, f \in C(X),$$

fica claro que $Th = g$. Mostramos que para $g \in C(X)$, que se anula em $\overline{F}$, existe $h \in C(X)$ tal que $Th = g$. Notemos que $h \in C(X)$ e h se anula em $\overline{F}$, daí pelo mesmo raciocínio existe $\hat{h} \in C(X)$ que se anula em $\overline{F}$ de maneira que $T\hat{h} = h$, donde concluímos que $h \in \text{Im}T$ e $g \in \text{Im}T^2$. Fazendo este raciocínio indutivamente, concluímos que

$$g \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Im}T^n.$$

Segue que g é a função nula, uma contradição. A contradição veio do fato de $\overline{F} \neq X$. $\square$

Do teorema 25 decorrem, diretamente, os dois corolários a seguir.

Corolário 12. *Se X é um espaço topológico compacto, Hausdorff e $C(X)$ admite um deslocamento isométrico do tipo II, então X é separável.*

Corolário 13. *Se X é um espaço topológico compacto, Hausdorff, sem pontos isolados e $C(X)$ admite um deslocamento isométrico, então X é separável.*

Vimos que se X é um espaço topológico compacto, Hausdorff e $C(X)$ admite um deslocamento isométrico do tipo I, então X é homeomorfo a $X \setminus \{p\}$, sendo p um ponto isolado em X e ψ o homeomorfismo. O próximo teorema mostra que se $C(X)$ admite um **deslocamento isométrico do tipo II**, então X é **homeomorfo** a um **espaço quociente** obtido por uma relação de equivalência que identifica dois pontos de X .

Teorema 26. *Seja X um espaço topológico compacto, Hausdorff e suponhamos que $C(X)$ admite um deslocamento isométrico tipo II. Então existem pontos distintos $a, b \in X$ tais que X é homeomorfo ao espaço quociente $Q = X / \sim$, uma vez que a relação $\sim$ é dada por*

$$x \sim y \text{ se, e somente se, } x = y \text{ ou } \{x, y\} = \{a, b\}, \text{ para cada } x, y \in X.$$

Demonstração. Pelos lemas 9 e 10, existem pontos distintos $a, b \in X$ tais que $\psi(a) = \psi(b)$. Além disso, para cada $x, y \in X$, $\psi(x) \neq \psi(y)$ desde que $\{x, y\} \neq \{a, b\}$. Obviamente a relação $\sim$, descrita no enunciado, define uma relação de equivalência para esses pontos a e b . Daí podemos falar em $Q = X / \sim$, o conjunto quociente. A aplicação quociente é dada por

$$\begin{aligned} q : X &\longrightarrow Q \\ x &\longmapsto [x]. \end{aligned}$$

Consideremos o espaço topológico quociente Q , munido com a topologia

$$\tau_q = \{U \in \mathcal{P}(Q) : q^{-1}(U) \text{ é aberto em } X\}.$$

Através da definição de $\sim$ e do fato de X ser compacto e Hausdorff, provamos facilmente que Q é compacto e Hausdorff. Vamos definir ainda, a função

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} : Q &\longrightarrow X \\ [x] &\longmapsto \psi(x). \end{aligned}$$

Pela definição de $\sim$, concluímos que $\tilde{\psi}$ está bem definida e é injetora. Como ψ é sobrejetora, segue que $\tilde{\psi}$ é sobrejetora. Já sabemos que Q e X são compactos e Hausdorff, logo para mostrar que $\tilde{\psi}$ é homeomorfismo basta provar que $\tilde{\psi}$ é contínua.

Consideremos $[x] \in Q$, $[x] \neq [a]$ arbitrário e seja θ um aberto em X contendo $\tilde{\psi}([x]) = \psi(x)$. Como $\psi : X \longrightarrow X$ é contínua, existe V_1 aberto em X , contendo x de maneira que $\psi(V_1) \subseteq \theta$. Como $x \neq a$, $x \neq b$ e X é Hausdorff, existe V_2 aberto em X , contendo x e satisfazendo $a \notin V_2$ e $b \notin V_2$. Daí, o conjunto $V = q(V_1 \cap V_2)$ é um aberto em Q , contendo o ponto $[x]$ e que satisfaz $\tilde{\psi}(V) \subseteq \theta$. Segue que $\tilde{\psi}$ é contínua em todo $[x] \in Q$, diferente de $[a]$.

Seja θ um aberto em X , contendo o ponto $\psi(a) = \psi(b)$. Pela continuidade de ψ no ponto a , existe um aberto U_1 em X , contendo o ponto a , de modo que $\psi(U_1) \subseteq \theta$. Pela continuidade de ψ no ponto b , existe um aberto U_2 em X , contendo o ponto b e que satisfaz $\psi(U_2) \subseteq \theta$. Notemos que $U = q(U_1 \cup U_2)$ é um aberto em Q , contendo o ponto $[a]$ e que satisfaz $\tilde{\psi}(U) \subseteq \theta$. Segue que $\tilde{\psi}$ é contínua em Q e, pelo que foi comentado, é um homeomorfismo. $\square$

O próximo resultado segue do teorema 26. Temos ainda que comparar a **homologia** de grupos dos espaços com seus respectivos espaços quociente e concluir que X não é homeomorfo a nenhum de seus espaços quociente - exclusivamente com a relação de equivalência que identifica dois pontos distintos. Os conceitos de **grupo fundamental** e **homologia de grupos** são da área de **topologia algébrica** e se distanciam do foco deste trabalho. Para conhecer mais, esses conceitos podem ser vistos em [14], nos dois primeiros capítulos.

Corolário 14. *O espaço $C(X)$ não admite deslocamento isométrico, quando X é*

1. a n -esfera S^n ;
2. o n -cubo $[a, b]^n$

Referências Bibliográficas

- [1] R. E. Megginson. An Introduction to Banach Space Theory. Springer, 1998.
- [2] R. Engelking. General Topology. Heldermann Verlag Berlin - Sigma Series in Pure Mathematics. Vol 6, 1989.
- [3] S. P. Moshokoa, M. Rajagopalan e K. Sundaresan (2011): Shifts on Products of Banach spaces, Quaestiones Mathematicae, 34:3, 327-333.
- [4] L. Pontryagin, Topological Groups, Second Edition, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1966.
- [5] Pei-Kee Lin (2011): Isometric Shifts on $(c \oplus X)_\infty$. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 384, 198-203.
- [6] M. Rajagopalan, K. Sundaresan (2009): Generalised shifts on Cartesian products, Indian J. Pure Appl. Math 40; 183-190.
- [7] Themistocles, M. Rassias e K. Sundaresan (2001) : Generalized backward shifts on Banach Spaces, J. Math Anal. Appl., 260; 36-45.
- [8] W. Holsztynski (1966): Continuous mappings induced by isometries of spaces of continuous functions, Studia Math 26; 133-136.
- [9] A. Gutek, D. Hart, J. Jamison, M. Rajagopalan (1991): Shift operators on Banach Spaces, J. Funct. Anal., 101; 97-119.
- [10] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri. Classical Banach Spaces - sequence spaces. Springer-Verlag. Vol 1, New York, 1977.
- [11] John L. Kelley. General Topology. Springer-Verlag, 1955.
- [12] J. A. Clarkson, Uniformly convex spaces, Trans. of the Amer. Math Soc. 40(1936), p. 396-414.
- [13] J.R. Holub (1988), On shift operators, Canad. Math. Bull. 31; 85-94.
- [14] A. Hatcher, Algebraic topology. Cambridge University Press, 2002.