**Álgebras m -quase inclinadas e
 m -quase hereditárias**

Tanise Carnieri Pierin

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Edson Ribeiro Alvares

Co-orientador: Prof. Dr. Patrick Le Meur

Durante o desenvolvimento deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro da CAPES/CNPq

São Paulo, junho de 2015

Álgebras m -quase inclinadas e m -quase hereditárias

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 06/07/2015. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Edson Ribeiro Alvares (orientador) - UFPR
- Prof. Dr. Flávio Ulhoa Coelho - IME-USP
- Prof^a. Dr^a. Diane Castonguay - UFG
- Prof. Dr. Viktor Bekkert - UFMG
- Prof. Dr. Clezio Aparecido Braga - UNIOESTE

Un passo dopo l'altro imparerai
Nelle gocce di tempo, tra ora e mai

Chiara Civello

RESUMO

PIERIN, T. C. **Álgebras m -quase inclinadas e m -quase hereditárias**. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

Com base em [HRS96b], apresentamos uma generalização para as classes das álgebras quase inclinadas e quase hereditárias, que chamamos de álgebras m -quase inclinadas e m -quase hereditárias, em que $m \geq 1$. Para estas últimas, pode-se obter uma trisseção de suas categorias de módulos determinada pelas subcategorias $\mathcal{L}^m = \{X \text{ indecomponível; } dp Y \leq m, \text{ para cada antecessor } Y \text{ de } X\}$ e $\mathcal{R} = \{X \text{ indecomponível; } di Y \leq 1, \text{ para cada sucessor } Y \text{ de } X\}$, além de ser possível mostrar que se existe um módulo E_m de forma a obtermos a igualdade de conjuntos $\{X \text{ módulo; } \text{Hom}(E_m, \tau X) = 0\} = \{X \text{ módulo; } dp X \leq m\}$, então $E_m \in add \mathcal{R}$ e todo caminho de indecomponíveis com início em $E \in add E_m$ e final em um módulo projetivo pode ser refinado a um caminho de morfismos irreduzíveis, que é ainda seccional. Como consequência desse resultado obtém-se que as álgebras m -quase hereditárias são caracterizadas pelo fato de que todos seus módulos projetivos pertencem a $\mathcal{L}^m$. É possível verificar que toda álgebra m -quase inclinada de dimensão global $m + 1$ é m -quase hereditária e, consequentemente, que toda álgebra hereditária por partes de tipo $mod H$, para alguma álgebra hereditária H , com dimensão global $m + 1$ é m -quase hereditária. Apresentamos ainda um exemplo de uma álgebra 2-quase hereditária que não é 2-quase inclinada, não sendo válida, portanto, a recíproca do resultado acima. Buscamos, dessa forma, estabelecer condições que quando assumidas sobre uma álgebra 2-quase hereditária possam garantir que esta é 2-quase inclinada e, em particular, hereditária por partes. Recorremos, para isso, à aplicação Φ^{-1} , obtida por meio de uma adaptação de resultados de Happel, Reiten e Smalø, que sob certas hipóteses permite concluir que uma álgebra é álgebra de endomorfismos de um objeto inclinante. Como resultado, mostra-se que uma álgebra 2-quase hereditária com certas outras propriedades e que satisfaz (H1), (H2) e (H3) é 2-quase inclinada.

Palavras-chave: álgebras hereditárias por partes, m -quase inclinadas, m -quase hereditárias, categorias trianguladas, t-estruturas.

ABSTRACT

PIERIN, T. C. ***m*-Quasitilted and *m*-almost hereditary algebras**. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

Based on [HRS96b] we present a generalization of the classes of quasitilted and almost hereditary algebras, which we call *m*-quasitilted and *m*-almost hereditary algebras, where $m \geq 1$. For the latter one, we can obtain a trisection of their module categories determined by the following subcategories $\mathcal{L}^m = \{X \text{ indecomposable; } dp \ Y \leq m, \text{ for each predecessor } Y \text{ of } X\}$ and $\mathcal{R} = \{X \text{ indecomposable; } di \ Y \leq 1 \text{ for each successor } Y \text{ of } X\}$. Moreover, if there exists a module E_m such that $\{X; \text{Hom}(E_m, \tau X) = 0\} = \{X; dp \ X \leq m\}$ then $E_m \in add \ \mathcal{R}$ and any path of indecomposable modules starting in a module $E \in add \ E_m$ and ending in a projective module can be refined to a path of irreducible morphisms, which is also sectional. This result on paths allow us to obtain a characterization for *m*-almost hereditary algebras in terms of their projective modules. It is also possible to prove that any *m*-quasitilted algebra with global dimension $m + 1$ is a *m*-almost hereditary algebra and as a consequence we can obtain that any piecewise hereditary algebra of type *mod H*, for some hereditary algebra *H*, and with global dimension $m + 1$ is *m*-almost hereditary. We present an example of a 2-almost hereditary which is not 2-quasitilted, which entails that the converse of the above mentioned result does not hold true. Thus we seek for conditions which can ensure that a given 2-almost hereditary is 2-quasitilted and, in particular, a piecewise hereditary algebra. For this, we use the Φ^{-1} correspondence, obtained as an adaptation of results of Happel, Reiten and Smalø, which under certain assumptions shows that an algebra is an endomorphism algebra of a tilting object. It is shown that a 2-almost hereditary algebra with some other properties and satisfying (H1), (H2), (H3) is 2-quasitilted.

Keywords: piecewise hereditary algebras, *m*-quasitilted algebras, *m*-almost hereditary algebras, triangulated categories, t-structures.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	1
1 PRELIMINARES	7
1.1 Teoria Inclinante	7
1.2 Categorias Trianguladas	8
1.2.1 A Categoria dos Complexos	11
1.2.2 A Categoria de Homotopia	11
1.2.3 A Categoria Derivada	12
1.3 Álgebras Hereditárias por Partes	13
1.4 t-Estruturas em Categorias Trianguladas	14
2 A APLICAÇÃO Φ^{-1}	17
2.1 A t-Estrutura induzida por um Par de Torção	17
2.2 Objetos Inclinantes e o Teorema Principal	24
3 ÁLGEBRAS m-QUASE HEREDITÁRIAS E m-QUASE INCLINADAS	29
3.1 Álgebras m -Quase Hereditárias	29
3.1.1 Alguns problemas a serem investigados	35
3.2 Álgebras m -Quase Inclinadas	38
3.2.1 Propriedades homológicas de álgebras 2-quase inclinadas	41
3.2.2 Compatibilidade entre t-estruturas	45
3.2.3 Sobre a funtorialidade das subcategorias $\mathcal{A}_1$, $(\mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3)[-1]$ e $\mathcal{A}_4[-2]$	51
4 ÁLGEBRAS 2-QUASE HEREDITÁRIAS E 2-QUASE INCLINADAS	53
4.1 Propriedades Homológicas de Categorias obtidas a partir de Álgebras por Partes	55
4.2 A Escolha do Par de Torção Cindido	60
4.3 Propriedades Homológicas do Par de Torção $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$	68
REFERÊNCIAS	73

INTRODUÇÃO

Nos últimos quarenta anos, muitas ferramentas foram desenvolvidas para descrever a categoria de módulos de uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado, principal objeto de estudo da teoria de representações de álgebras de artin. Destaca-se a teoria inclinante, essencialmente baseada na ideia de estabelecer uma descrição para uma determinada classe de álgebras a partir de outra já conhecida. Essa teoria pode ser vista como uma generalização da teoria de Morita, que nos dá condições para que as categorias de módulos de duas álgebras A e B sejam equivalentes. Quando isso acontece dizemos que as álgebras são Morita-equivalentes e, neste caso, B é a álgebra de endomorfismos de um A -módulo P projetivo e gerador de $\text{mod } A$ e a equivalência é dada pelo funtor $\text{Hom}_A(P, _) : \text{mod } A \rightarrow \text{mod } B$. A teoria inclinante compara as categorias de módulos de uma álgebra A e da álgebra B obtida através de um *processo de inclinação*, ou seja, B é a álgebra de endomorfismos de um A -módulo T que satisfaz boas propriedades homológicas, chamado inclinante (ver seção 1.1). Essa comparação é possível graças ao teorema de Brenner-Butler [BB80], que garante a existência de equivalências entre certas subcategorias $\mathcal{T}(T)$ e $\mathcal{Y}(T)$, e $\mathcal{F}(T)$ e $\mathcal{X}(T)$, de $\text{mod } A$ e $\text{mod } B$, respectivamente. Dessa forma, embora possa não haver uma equivalência entre $\text{mod } A$ e $\text{mod } B$, ainda é possível obter, a partir do conhecimento de uma dessas categorias, a descrição completa de duas subcategorias plenas da outra, que, mais ainda, formam um par de torção (ver seção 1.1). Em particular, cada um de seus módulos pode ser obtido como termo do meio de uma sequência exata cujos extremos pertencem às subcategorias mencionadas.

Uma outra ferramenta para o estudo dos módulos sobre uma álgebra de dimensão finita sobre $k = \bar{k}$, utilizada por Happel em [Hap87] e [Hap88], é o conceito de categoria derivada de uma categoria abeliana (ver seção 1.2.3). Essas duas ferramentas se relacionam, por exemplo, através do trabalho de Rickard, [Ric89], que mostra que as categorias derivadas de $\text{mod } A$ e $\text{mod } B$ são equivalentes se, e somente se, existe um objeto inclinante T em $\mathcal{D}^b(A)$ tal que $B = \text{End } T$. Recordamos que para um A -módulo inclinante T e $B = \text{End}_A T$, o funtor $\text{Hom}_A(T, _) : \text{mod } A \rightarrow \text{mod } B$ induz uma equivalência triangular $R\text{Hom}_A(T, _) : \mathcal{D}^b(A) \rightarrow \mathcal{D}^b(B)$, cujas restrições às subcategorias $\mathcal{T}(T)$ e $\mathcal{F}(T)$, definem, respectivamente, equivalências (1) $\mathcal{T}(T) \rightarrow \mathcal{Y}(T)$ e (2) $\mathcal{F}(T)[1] \rightarrow \mathcal{X}(T)$. Motivados por esta conexão entre a teoria inclinante e categorias derivadas, Happel, Reiten e Smalø propuseram em [HRS96b] uma generalização para o processo de inclinação clássico, agora baseado em pares de torção definidos em categorias abelianas. Em resumo, para uma categoria abeliana $\mathcal{A}$ munida de um par de torção $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$, os autores buscaram determinar uma categoria abeliana $\mathcal{B}$ e um par de torção $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ de forma que $\mathcal{T}$ e $\mathcal{Y}$ bem como $\mathcal{F}$ e $\mathcal{X}$ fossem equivalentes. Tendo as equivalências (1) e (2) em vista, limitaram o problema a encontrar uma subcategoria abeliana $\mathcal{B}$ de $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ que admitisse $(\mathcal{F}[1], \mathcal{T})$ como par de torção. Para essa construção, destaca-se a importância do conceito de t-estruturas (seção 1.4), definido por [BBD82], sendo possível verificar que o coração da t-estrutura determinada a partir do par de torção $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ cumpre as condições procuradas para $\mathcal{B}$. Dessa forma, fica definida uma aplicação Φ , a saber, $\Phi(\mathcal{A}; (\mathcal{T}, \mathcal{F})) = (\mathcal{B}; (\mathcal{X}, \mathcal{Y}))$, para a qual se pode obter uma série de resultados. Destacamos que ao as-

sumir que $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ é dado por um objeto inclinante, a categoria abeliana $\mathcal{B}$ mostra-se simplesmente uma categoria de módulos, e reciprocamente, se $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ for inclinante e $\mathcal{B}$ for uma categoria de módulos, então $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ será dado por um objeto inclinante (Teorema 4.3 [HRS96b], pg. 22). Nos interessa, neste trabalho, a construção inversa da aplicação Φ , uma vez que desejamos conhecer informações sobre uma categoria abeliana $\mathcal{A}$ e um par de torção $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ obtidos por meio de uma categoria abeliana $\mathcal{B}$ munida de um par de torção dado por um objeto *coinclinante*. As demonstrações dadas para os resultados referentes a Φ , em [HRS96b], podem ser adaptadas a fim de obtê-las para Φ^{-1} , conforme feito no Capítulo 2. É também possível generalizar alguns desses resultados para categorias trianguladas quaisquer. Merecem ênfase os seguintes teoremas, dada a importância para as etapas seguintes. Nesses resultados, denotaremos por $H^i(X^\cdot)$ a i -ésima cohomologia usual de um complexo $X^\cdot$ (ver também seção 1.2.1).

Teorema A [Teorema 2.6, pg. 23]. Sejam $\mathcal{B}$ uma categoria abeliana, $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ um par de torção em $\mathcal{B}$ e $\Phi^{-1}(\mathcal{B}; (\mathcal{X}, \mathcal{Y})) = (\mathcal{A}; (\mathcal{T}, \mathcal{F}))$, em que $\mathcal{A} = \{X^\cdot \in \mathcal{D}^b(\mathcal{B}); H^1(X^\cdot) \in \mathcal{X}, H^0(X^\cdot) \in \mathcal{Y} \text{ e } H^i(X^\cdot) = 0, \text{ para todo } i \neq 0, 1\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{Y}$ e $\mathcal{F} = \mathcal{X}[-1]$. Assuma que $\mathcal{B}$ contém suficientes injetivos e que $\mathcal{Y}$ é uma classe livre de torção coinclinante.

- (i) Se $\mathcal{A}$ contiver suficientes injetivos, então existirá uma equivalência triangular $G : \mathcal{D}^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{B})$ cuja restrição a $\mathcal{A}$ corresponde ao funtor identidade de $\mathcal{A}$.
- (ii) Se $\mathcal{B}$ contiver suficientes projetivos, então existirá uma equivalência triangular $F : \mathcal{D}^b(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ cuja restrição a $\mathcal{A}$ corresponde ao funtor identidade de $\mathcal{A}$.

Teorema B [Teorema 2.10, pg. 25]. Sejam $\mathcal{B}$ uma categoria abeliana com suficientes injetivos, $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ um par de torção coinclinante em $\mathcal{B}$ e

$$\Phi^{-1}(\mathcal{B}, (\mathcal{X}, \mathcal{Y})) = (\mathcal{A}, (\mathcal{T}, \mathcal{F})),$$

em que $\mathcal{A} = \{X^\cdot \in \mathcal{D}^b(\mathcal{B}); H^1(X^\cdot) \in \mathcal{X}, H^0(X^\cdot) \in \mathcal{Y} \text{ e } H^i(X^\cdot) = 0, \text{ para todo } i \neq 0, 1\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{Y}$ e $\mathcal{F} = \mathcal{X}[-1]$. Então:

- (a) (i) Se $\mathcal{T}$ for dada por um objeto inclinante T , então $\mathcal{B} \simeq \text{mod End } T$.
- (ii) Se $\mathcal{B} \simeq \text{mod } \Lambda$, para alguma k -álgebra Λ , então $\mathcal{T}$ será dada por um objeto inclinante T e, mais ainda, Λ e $\text{End } T$ serão Morita-equivalentes.
- (b) (i) Se $\mathcal{Y}$ for dada por um objeto coinclinante T , então $\mathcal{A} \simeq \text{mod End } T$.
- (ii) Se $\mathcal{A} \simeq \text{mod } \Lambda$, para alguma k -álgebra Λ , então $\mathcal{Y}$ será dada por um objeto coinclinante T e, mais ainda, Λ e $\text{End } T$ serão Morita-equivalentes.

Por meio desse processo de inclinação mais geral, foram definidas em [HRS96b] as álgebras quase inclinadas, obtidas como álgebras de endomorfismos de objetos inclinantes sobre categorias abelianas hereditárias, visando novamente transferir as informações já bem conhecidas sobre estas últimas categorias. Essa classe de álgebras desempenha um papel importante na teoria de representações e em geometria. As álgebras canônicas, por exemplo, têm sido úteis para a compreensão de variedades modulares e singularidades. Recorrendo à aplicação Φ , Happel, Reiten e Smalø mostraram que a classe das álgebras quase inclinadas coincide com a classe das álgebras, chamadas quase hereditárias, que satisfazem as seguintes propriedades homológicas: (i) dimensão global no máximo 2 e (ii) cada módulo indecomponível tem dimensão projetiva ou injetiva no máximo 1. Neste trabalho, propomos uma generalização para os

conceitos de álgebras quase inclinadas e quase hereditárias, que chamamos álgebras m -quase inclinadas e m -quase hereditárias. Uma álgebra será dita m -quase inclinada se puder ser obtida por m sucessivas aplicações do processo de inclinação a partir de um objeto inclinante sobre uma categoria hereditária. Já as álgebras m -quase hereditárias serão aquelas com as propriedades: (i) dimensão global igual a $m + 1$, se $m > 1$, e dimensão global menor ou igual a $m + 1$, se $m = 1$, e (ii) cada módulo indecomponível tem dimensão projetiva menor ou igual a m ou dimensão injetiva menor ou igual a 1. Para estas últimas, é possível obter uma trissecação de suas categorias de módulos (conforme [AAC⁺10]), determinada por $\mathcal{L}_A^m$ e $\mathcal{R}_A$, em que, para uma álgebra A fixada, $\mathcal{L}_A^m$ e $\mathcal{R}_A$ são as subcategorias plenas de $\text{ind } A$ definidas respectivamente por $\{X \in \text{ind } A; dp_A Y \leq m, \text{ para cada antecessor } Y \text{ de } X\}$ e $\{X \in \text{ind } A; di_A Y \leq 1, \text{ para cada sucessor } Y \text{ de } X\}$, como enunciado a seguir.

Teorema C [Corolário 3.11, pg. 34]. Seja A uma álgebra m -quase hereditária. Então a tripla $(\mathcal{L}_A^m \setminus \mathcal{R}_A, \mathcal{L}_A^m \cap \mathcal{R}_A, \mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A^m)$ é uma trissecação de $\text{ind } A$.

É também possível verificar que se $\mathcal{L}_A^m$ contém todos os A -módulos projetivos, então A satisfaz (i) $\dim.gl A \leq m + 1$ e (ii) $dp_A X \leq m$ ou $di_A X \leq 1$, para cada A -módulo indecomponível X . Em particular, se A tiver dimensão global igual a $m + 1$, A é m -quase hereditária. Outros resultados poderão ser garantidos para álgebras m -quase hereditárias ao assumirmos hipóteses adicionais, e que são generalizações das propriedades obtidas em [HRS96b] para álgebras quase hereditárias, como enunciado no seguinte teorema.

Teorema D [pg. 35-37]. Seja A uma álgebra m -quase hereditária. Se existe um A -módulo E_m tal que

$$\{X \in \text{mod } A; \text{Hom}_A(E_m, \tau X) = 0\} = \{X \in \text{mod } A; dp_A X \leq m\},$$

então $E_m \in \text{add } \mathcal{R}_A$, $A_A \in \text{add } \mathcal{L}_A^m$ e todo caminho em $\text{ind } A$ da forma $E \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \rightarrow X_r \xrightarrow{f_r} P$, em que $E \in \text{add } E_m$ e P é projetivo, admite um refinamento a um caminho de morfismos irredutíveis, e todo tal refinamento é seccional.

Em acordo com o resultado obtido em [HRS96b] que garante que toda álgebra quase inclinada é quase hereditária, confirma-se que também toda álgebra m -quase inclinada de dimensão global $m + 1$ seja m -quase hereditária (Teorema 3.19). No entanto, a recíproca pode não ser verdadeira se $m > 1$. Um contraexemplo é dado pela álgebra de caminhos associada ao *quiver* $\mathbb{A}_{12}$ orientado linearmente, com uma relação a cada sete flechas, que define uma álgebra 2-quase hereditária que não é 2-quase inclinada (pg. 39-40). Tendo esse exemplo em vista, torna-se natural perguntar-nos sob quais hipóteses o resultado é então obtido. Um problema de mesma natureza foi discutido por Happel e Zacharia, em [HZ10], ao buscarem uma caracterização para as álgebras hereditárias por partes. Lembramos que uma álgebra A de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado é dita hereditária por partes se existirem uma categoria abeliana e hereditária $\mathcal{H}$ e uma equivalência triangular $F : \mathcal{D}^b(A) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{H})$. Destacamos novamente a naturalidade da busca de informações referentes a essas álgebras, baseada no amplo conhecimento já obtido para categorias hereditárias. Através da equivalência F , definem-se em $\text{mod } A$ certas subcategorias, que quando reunidas resultam novamente em $\text{mod } A$, as chamadas *pieces* de $\text{mod } A$. Ainda em [HZ10], os autores apresentaram uma lista de resultados obtidos para as *pieces* (vide Teorema 2.1 [HZ10]) e também mostraram por meio de um contraexemplo que esses resultados quando

assumidos sobre uma álgebra A arbitrária (de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado) não são suficientes para garantir que A é hereditária por partes. Esse problema em aberto vem de encontro com a pergunta que propusemos, uma vez que toda álgebra 2-quase inclinada é hereditária por partes. Buscamos, portanto, hipóteses que devam ser acrescentadas a uma álgebra 2-quase hereditária para que esta seja 2-quase inclinada e, em particular, hereditária por partes.

Embora tenhamos obtido alguns avanços para um caso mais geral, uma resposta completa para esta pergunta somente foi possível graças ao conceito de compatibilidade entre t-estruturas, definido por Keller e Vossieck, em [KV88a]. Essa hipótese assumida para t-estruturas convenientes permitiu estabelecer condições sobre uma álgebra 2-quase hereditária essenciais para a demonstração desejada. Como primeiro passo desta demonstração (ainda independente das condições mencionadas provenientes de compatibilidade), construímos, através dos Teoremas A e B aplicados a uma álgebra B 2-quase hereditária com certas propriedades, uma álgebra A e um A -módulo inclinante T tais que $B = \text{End}_A T$ (Proposição 4.7). O passo seguinte foi garantir que a álgebra A é quase inclinada, bastando para isso verificar que (i) $\dim_{gl} A \leq 2$ e (ii) $dp_A X \leq 1$ ou $di_A X \leq 1$, para cada A -módulo indecomponível X . O item (i) mostra-se consequência das boas propriedades homológicas assumidas para B . Já para o item (ii), buscamos determinar um par de torção cindido $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ em $\text{mod } A$ satisfazendo $di_A \mathcal{X} \leq 1$ e $dp_A \mathcal{Y} \leq 1$. A escolha de $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ torna-se clara a partir de uma das condições estabelecidas via compatibilidade (hipótese (H1), apresentada na pg. 61), e a verificação de que de fato este é um par de torção fica por conta das hipóteses (H2) e (H3) (pg. 62), que dizem respeito à compatibilidade e à propriedade de certas subcategorias de $\mathcal{D}^b(B)$ serem funtorialmente finitas em relação umas as outras. Dessa forma, para uma álgebra B como descrita acima, ou seja, que é 2-quase hereditária e satisfaz certas propriedades homológicas, chamada de álgebra por partes (Definição 4.2), mostramos o seguinte teorema.

Teorema E [Teorema 4.23, pg. 72]. Sejam B uma álgebra por partes de tipo $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4)$ e

$$\Phi^{-1}(\text{mod } B; (\text{add}(\mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4), \text{add}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2))) = (\mathcal{A}; (\mathcal{T}', \mathcal{F}')),$$

em que $\mathcal{T}' = \text{add}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$ e $\mathcal{F}' = \text{add}(\mathcal{A}_3[-1] \cup \mathcal{A}_4[-1])$. Então:

- (i) $\mathcal{A}$ é uma categoria de módulos sobre uma álgebra A e $(\mathcal{T}', \mathcal{F}')$ é um par de torção dado por um A -módulo inclinante.
- (ii) Existem equivalências triangulares $\mathcal{D}^b(B) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ e $\mathcal{D}^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}^b(B)$ cujas restrições a $\mathcal{A}$ correspondem ao funtor identidade.
- (iii) Se, mais ainda, B satisfizer as hipóteses (H1), (H2) e (H3)(i), então será possível determinar um par de torção $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ cindido em $\text{mod } A$.
- (iv) Se B satisfizer as hipóteses (H1), (H2) e (H3), então será possível determinar um par de torção $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ cindido em $\text{mod } A$ tal que $di_A \mathcal{X} \leq 1$ e $dp_A \mathcal{Y} \leq 1$.

É consequência imediata desse teorema que toda álgebra por partes que satisfaz as hipóteses (H1), (H2) e (H3) é uma álgebra 2-quase inclinada, estando estabelecidas, dessa forma, condições suficientes para que uma álgebra 2-quase hereditária seja 2-quase inclinada.

Corolário F [Corolário 4.24, pg. 72]. Seja B uma álgebra por partes de tipo $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4)$ satisfazendo as hipóteses (H1), (H2) e (H3). Então B é 2-quase inclinada e, em particular, B é hereditária por

partes.

Organização do Trabalho

Os temas deste trabalho estão dispostos da seguinte maneira: no primeiro capítulo são brevemente apresentadas a teoria inclinante, as categorias trianguladas, uma construção da categoria derivada de uma categoria abeliana e sua estrutura de categoria triangulada, além do conceito de t-estruturas. Aproveitamos a definição das categorias derivadas para também introduzir as chamadas álgebras hereditárias por partes e enunciar alguns de seus resultados, em acordo com nosso principal objetivo de determinar condições suficientes para que uma álgebra seja hereditária por partes.

O segundo capítulo é dedicado à aplicação Φ^{-1} . São apresentadas as construções da importante t-estrutura determinada por um par de torção e, portanto, de uma nova categoria abeliana - obtida como o coração dessa t-estrutura - munida de um par de torção, o que nos permite definir Φ^{-1} . São também discutidas as propriedades obtidas ao assumirmos sobre o par de torção inicial a hipótese *inclinante* ou *coinclinante*, e demonstrados os Teoremas A e B enunciados anteriormente.

No terceiro capítulo, são definidas as álgebras m -quase hereditárias e discutidos, entre outros resultados, os Teoremas C, D e E. É também introduzido o conceito de álgebras m -quase inclinadas e verificado que toda álgebra m -quase inclinada de dimensão global $m + 1$ é m -quase hereditária (Teorema 3.19). Segue imediatamente que uma álgebra hereditária por partes A de tipo $\text{mod } H$ e dimensão global $m + 1$, com H uma álgebra hereditária, é m -quase hereditária, e que, em particular, vale o Teorema C (Corolário 3.21). Ainda neste capítulo, é ilustrado com um exemplo que a recíproca do Teorema 3.19 não se verifica para $m > 1$. A partir da seção 3.2.1, com o intuito de determinar condições para que esta recíproca seja obtida para $m = 2$, são estabelecidas algumas propriedades homológicas das álgebras 2-quase inclinadas. Por meio da Proposição 3.22, verifica-se que, para uma álgebra B 2-quase inclinada, é possível encontrar 4 subcategorias plenas de $\text{ind } B$, a saber $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ e $\mathcal{A}_4$, cuja união é $\text{ind } B$, tais que as possíveis restrições de $\text{Ext}_B^n(_, _)$ se anulam, para determinados índices n . Além disso, assumindo a hipótese de compatibilidade entre certas t-estruturas, mostra-se no Corolário 3.30 que $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(B)}(A_4[-1], A_1[1]) = 0$ ou $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(B)}(A_4[-1], A_2[1]) = 0$, em que cada $A_i \in \text{add } \mathcal{A}_i$ e $A_4[-1]$ é indecomponível. Este resultado corresponde à hipótese (H1) assumida sobre uma álgebra 2-quase hereditária para a recíproca. Novamente através da condição de compatibilidade, verifica-se a Proposição 3.31, que nos garante que para um morfismo $g : N \rightarrow N'$ em $\text{mod } B$ e a t-estrutura natural $\mathcal{W}$ de $\mathcal{D}^b(\mathcal{H})$ - em que a categoria abeliana e hereditária $\mathcal{H}$ é determinada pela definição de B -, se $N \in \mathcal{W}^{\leq n}$ e $N' \in \mathcal{W}^{\leq n-1}$, então o mesmo deve ocorrer para $\text{Ker } g$ e $\text{Coker } g$, isto é, $\text{Ker } g \in \mathcal{W}^{\leq n}$ e $\text{Coker } g \in \mathcal{W}^{\leq n-1}$. A partir desse resultado é estabelecida a hipótese (H2). Finalmente, na seção 3.2.3, são trabalhadas questões de funtorialidade das subcategorias $\mathcal{A}_1$, $(\mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3)[-1]$ e $\mathcal{A}_4[-2]$ de $\mathcal{H}$, permitindo estabelecer a última hipótese a ser assumida sobre uma álgebra 2-quase hereditária, (H3).

O quarto e último capítulo é destinado à demonstração de que toda álgebra 2-quase hereditária com algumas hipóteses, entre elas (H1), (H2) e (H3), é 2-quase inclinada e, em particular, hereditária por partes. Como mencionado anteriormente, a partir de uma álgebra B 2-quase hereditária com outras certas propriedades obtêm-se, via a aplicação Φ^{-1} , uma álgebra A e um A -módulo inclinante T tais que $B = \text{End}_A T$, de forma a reduzir nosso problema a mostrar que A é quase inclinada, ou ainda, determinar um par de torção $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ cindido e tal que $di_A \mathcal{X} \leq 1$ e $dp_A \mathcal{Y} \leq 1$. A escolha de $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ é discutida na seção 4.2, e permitida graças à hipótese (H1). A seção seguinte é dedicada à verificação de que

$(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ é um par de torção, essencialmente apresentada na Proposição 4.18, que por sua vez depende dos lemas 4.15, 4.16 e 4.17. Por fim, a seção 4.4 apresenta as demonstrações das propriedades homológicas esperadas para $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, o Teorema E e o Corolário F.

Capítulo 1

PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentaremos de forma bastante concisa conceitos básicos e resultados que serão necessários para compreensão dos capítulos seguintes. Em resumo, serão discutidas a teoria inclinante, a construção da categoria derivada de uma categoria abeliana e sua estrutura de categoria triangulada, ferramenta essencial para solução dos problemas propostos, além da definição e alguns resultados referentes às chamadas álgebras hereditárias por partes e às *pieces* de suas categorias de módulos. Finalmente, introduziremos o conceito de t-estrutura de uma categoria triangulada. Para mais detalhes sobre os temas abordados, sugerimos [ASS06], [Hap88], [Kra15], [RS07], [Mil], [HZ10], [BBD82].

Ao longo do texto, embora alguns resultados possam ser enunciados de forma mais geral, consideraremos somente álgebras de dimensão finita definidas sobre um corpo k algebricamente fechado, a menos de menção contrária. Como usualmente, fixada uma álgebra A , denotaremos por $\text{mod } A$ a categoria dos módulos à direita finitamente gerados sobre A e por $\text{ind } A$ a subcategoria de $\text{mod } A$ que consiste de um representante para cada classe de isomorfismo de A -módulos indecomponíveis. Para uma subcategoria $\mathcal{C}$ de $\text{mod } A$, denotaremos por $\text{add } \mathcal{C}$ a subcategoria plena de $\text{mod } A$ cujos objetos são obtidos como soma de somandos de módulos em $\mathcal{C}$.

1.1 Teoria Inclinante

A ideia principal da teoria inclinante é comparar as categorias de módulos de álgebras A e B , em que B é a álgebra de endomorfismos de um A -módulo T inclinante, ou seja, que satisfaz as seguintes condições: (i) $dp_A T \leq 1$, (ii) $\text{Ext}_A^1(T, T) = 0$ e (iii) existe uma sequência exata curta de A -módulos $0 \rightarrow A \rightarrow T' \rightarrow T'' \rightarrow 0$, com $T', T'' \in \text{add } T$. Tais categorias são razoavelmente próximas, sendo possível obter, a partir do conhecimento de uma delas, informações sobre duas subcategorias plenas da outra que formam um par de torção e, portanto, que determinam toda a categoria a menos de extensões. Neste processo, merece especial atenção o par de torção determinado pelo A -módulo inclinante T , que corresponde a $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$, em que $\mathcal{T}(T) = \{M \in \text{mod } A; \text{Ext}_A^1(T, M) = 0\}$ e $\mathcal{F}(T) = \{M \in \text{mod } A; \text{Hom}_A(T, M) = 0\}$. É possível mostrar que $\mathcal{T}(T)$ é fechada para extensões, imagens e somas diretas e $\mathcal{F}(T)$ é fechada para extensões, submódulos e produtos diretos. Pode-se também verificar que T induz um par de torção $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ em $\text{mod } B$, com $\mathcal{X}(T) = \{X \in \text{mod } B; X \otimes_B T = 0\}$ e $\mathcal{Y}(T) = \{Y \in \text{mod } B; \text{Tor}_1^B(Y, T) = 0\}$.

A relação entre as categorias $\text{mod } A$ e $\text{mod } B$ citada acima é então estabelecida através do teorema de Brenner-Butler, que garante a existência de equivalências entre as subcategorias $\mathcal{T}(T)$ e $\mathcal{Y}(T)$, dada

pela restrição do funtor $\text{Hom}_A(T, _) : \text{mod } A \rightarrow \text{mod } B$, e $\mathcal{F}(T)$ e $\mathcal{X}(T)$, dada pela restrição do funtor $\text{Ext}_A^1(T, _) : \text{mod } A \rightarrow \text{mod } B$.

Reuniremos, a seguir, alguns resultados que podem ser obtidos como consequências do teorema de Brenner-Butler e que serão essenciais para os capítulos seguintes.

Proposição 1.1 ([ASS06] pg. 215). Sejam A uma álgebra, T um A -módulo inclinante e $B = \text{End}_A T$. Então $|\dim.gl A - \dim.gl B| \leq 1$. $\square$

Recordamos que um par de torção $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ em $\text{mod } A$ é dito cindido se para cada A -módulo indecomponível X tivermos $X \in \mathcal{T}$ ou $X \in \mathcal{F}$. Também, se para algum A -módulo inclinante T o par de torção $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$, induzido por T em $\text{mod } \text{End}_A T$, for cindido, então T é chamado de módulo inclinante cindido.

Proposição 1.2 ([ASS06] pg. 188). Seja $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ um par de torção em $\text{mod } A$. Então $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ cinde se, e somente se, $\text{Ext}_A^1(\mathcal{F}, \mathcal{T}) = 0$. $\square$

Proposição 1.3 ([ASS06] pg. 230). Sejam A uma álgebra, T um A -módulo inclinante e $B = \text{End}_A T$. Então;

(i) $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ cinde se, e somente se, $di_A \mathcal{F}(T) \leq 1$.

(ii) $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$ cinde se, e somente se, $dp_B \mathcal{X}(T) \leq 1$. $\square$

Dualmente à definição de módulo inclinante, pode-se definir módulo coinclinante. Dada uma álgebra A , um A -módulo U é coinclinante se satisfaz (i) $di_A U \leq 1$, (ii) $\text{Ext}_A^1(U, U) = 0$ e (iii) existe uma sequência exata curta de A -módulos $0 \rightarrow U' \rightarrow U'' \rightarrow D({}_A A) \rightarrow 0$, em que $U', U'' \in \text{add } U$. Além disso, é também possível definir o par de torção dado por um A -módulo coinclinante U da seguinte forma: $\mathcal{T}(U) = \{X \in \text{mod } A; \text{Hom}_A(X, U) = 0\}$ e $\mathcal{F}(U) = \{X \in \text{mod } A; \text{Ext}_A^1(X, U) = 0\}$.

Proposição 1.4 ([ASS06] pg. 235). Sejam A uma álgebra e $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ um par de torção em $\text{mod } A$. Então $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ é dado por um A -módulo coinclinante U se, e somente se, $\mathcal{F} = \text{Cogen } V$, para algum A -módulo V , e $\mathcal{F}$ contém todos os A -módulos projetivos. $\square$

1.2 Categorias Trianguladas

Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva e $_{-}[1] : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ um automorfismo, chamado de funtor suspensão. Diremos que (X, Y, Z, u, v, w) ou $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ é uma sêxtupla em $\mathcal{C}$ se X, Y e Z forem objetos de $\mathcal{C}$ e $u : X \rightarrow Y$, $v : Y \rightarrow Z$ e $w : Z \rightarrow X[1]$ forem morfismos de $\mathcal{C}$. Um morfismo entre duas sêxtuplas (X, Y, Z, u, v, w) e (X', Y', Z', u', v', w') é uma tripla (f, g, h) de morfismos em $\mathcal{C}$ tal que o diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow f[1] \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1] \end{array}$$

é comutativo.

Uma coleção $\mathcal{F}$ de sêxtuplas de $\mathcal{C}$ será chamada de triangulação de $\mathcal{C}$ se as seguintes condições forem satisfeitas para os elementos de $\mathcal{F}$, chamados triângulos:

- (TR1) Toda sêxtupla que for isomorfa a um triângulo será um triângulo. Todo morfismo $u : X \rightarrow Y$ em $\mathcal{C}$ pode ser completado a um triângulo (X, Y, Z, u, v, w) . Para cada objeto X de $\mathcal{C}$, a sêxtupla $(X, X, 0, 1_X, 0, 0)$ é um triângulo.
- (TR2) Se (X, Y, Z, u, v, w) for um triângulo, então $(Y, Z, X[1], v, w, -u[1])$ será um triângulo.
- (TR3) Dados dois triângulos (X, Y, Z, u, v, w) e (X', Y', Z', u', v', w') e morfismos $f : X \rightarrow X'$ e $g : Y \rightarrow Y'$ tais que $u'f = gu$, existe um morfismo (f, g, h) do primeiro triângulo para o segundo.
- (TR4) (Axioma do octaedro) Considere triângulos (X, Y, Z', u, i, i') , (Y, Z, X', v, j, j') e (X, Z, Y', vu, k, k') . Então existem morfismos $f : Z' \rightarrow Y'$ e $g : Y' \rightarrow X'$ tais que o seguinte diagrama comuta e a terceira linha é um triângulo.

$$\begin{array}{ccccccc}
 Y'[-1] & \xrightarrow{k'[-1]} & X & \xrightarrow{1_X} & X & & \\
 \downarrow g[-1] & & \downarrow u & & \downarrow vu & & \\
 X'[-1] & \xrightarrow{j'[-1]} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{j} & X' \xrightarrow{j'} Y[1] \\
 & & \downarrow i & & \downarrow k & & \downarrow 1_{X'} \downarrow i[1] \\
 & & Z' & \xrightarrow{f} & Y' & \xrightarrow{g} & X' \xrightarrow{i[1] \circ j'} Z'[1] \\
 & & \downarrow i' & & \downarrow k' & & \\
 & & X[1] & \xrightarrow{1_{X[1]}} & X[1] & &
 \end{array}$$

A categoria aditiva $\mathcal{C}$ junto ao funtor translação $_{[1]}$ e à triangulação $\mathcal{F}$ é uma categoria triangulada.

Sejam $(\mathcal{C}, T, \mathcal{F})$ e $(\mathcal{C}', T', \mathcal{F}')$ categorias trianguladas. Um funtor aditivo $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ será dito exato se existir uma transformação natural invertível $\alpha : FT \rightarrow T'F$ tal que $FX \xrightarrow{Fu} FY \xrightarrow{Fv} FZ \xrightarrow{\alpha_X Fw} T'FX$ pertence a $\mathcal{F}'$ sempre que $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ pertencer a $\mathcal{F}$. Se, além disso, F for uma equivalência de categorias, então F será chamado de equivalência triangular.

Recordamos que uma categoria $\mathcal{A}$ é dita abeliana se é aditiva, admite núcleos e conúcleos, cada monomorfismo é o núcleo de algum morfismo em $\mathcal{A}$, cada epimorfismo é conúcleo de um morfismo em $\mathcal{A}$ e todo morfismo $\alpha : A \rightarrow B$ em $\mathcal{A}$ pode ser escrito como uma composta $A \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} B$, em que f é um epimorfismo e g é um monomorfismo.

Fixemos $\mathcal{C}$ e $\mathcal{A}$ categorias triangulada e abeliana, respectivamente. Um funtor covariante aditivo $H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ é chamado funtor cohomológico covariante se para cada triângulo $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ em $\mathcal{C}$, a sequência

$$\cdots \rightarrow H(X[i]) \xrightarrow{H(u[i])} H(Y[i]) \xrightarrow{H(v[i])} H(Z[i]) \xrightarrow{H(w[i])} H(X[i+1]) \rightarrow \cdots$$

for exata em $\mathcal{A}$. De forma análoga, define-se funtor cohomológico contravariante.

Lema 1.5 ([Hap88] pg. 4). Seja $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ um triângulo em $\mathcal{C}$. Então:

- (i) as compostas vu , wv e $u[1]w$ são nulas.

- (ii) para um objeto U em $\mathcal{C}$, os funtores $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, _)$ e $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(_, U)$ são cohomológicos covariante e contravariante, respectivamente. $\square$

Corolário 1.6 ([Hap88] pg. 4). Sejam $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ um triângulo e $f : U \rightarrow Z$ um morfismo em $\mathcal{C}$. Então $wf = 0$ se, e somente se, existe um morfismo $f' : U \rightarrow Y$ tal que $vf' = f$. $\square$

Corolário 1.7 ([Hap88] pg. 4). Sejam $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ e $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} X'[1]$ dois triângulos em $\mathcal{C}$ e (f, g, h) um morfismo do primeiro para o segundo. Se dois entre os morfismos f , g e h forem isomorfismos, então o terceiro também será. $\square$

Como consequência do corolário acima, dado um morfismo $u : X \rightarrow Y$ em $\mathcal{C}$, se $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ e $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} X[1]$ são completamentos de u a triângulos, garantidos pelo axioma (TR1), então $Z \simeq Z'$. O objeto Z é chamado cone de u e denotado por $\text{cone}(u)$.

Corolário 1.8 ([Hap88] pg. 9). Seja $u : X \rightarrow Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$. Então u é um isomorfismo se, e somente se, $\text{cone}(u) = 0$. $\square$

Lema 1.9 ([Hap88] pg. 7). Seja $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ um triângulo em $\mathcal{C}$. São equivalentes:

- (a) u é um monomorfismo que cinde.
- (b) v é um epimorfismo que cinde.
- (c) $w = 0$. $\square$

Lema 1.10. Seja $X \xrightarrow{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}} Y_1 \oplus Y_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}} Z \rightarrow X[1]$ um triângulo em $\mathcal{C}$. Então:

- (i) Se $u_1 = 0$ (resp., $u_2 = 0$), então v_1 será um monomorfismo que cinde (resp., v_2 será um monomorfismo que cinde).
- (ii) Se $v_1 = 0$ (resp., $v_2 = 0$), então u_1 será um epimorfismo que cinde (resp., u_2 será um epimorfismo que cinde). $\square$

Lema 1.11 ([Hap88] pg. 8). Sejam $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$, $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} X'[1]$ triângulos e $g : Y \rightarrow Y'$ um morfismo em $\mathcal{C}$. São equivalentes:

- (a) a composta $v'gu$ se anula.
- (b) existe um morfismo (f, g, h) do primeiro triângulo para o segundo.

Se, mais ainda, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z'[-1]) = 0$, então f e h serão unicamente determinados. $\square$

Lema 1.12 ([Mil] pg. 63). Se $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ e $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} X'[1]$ forem triângulos em $\mathcal{C}$, então $X \oplus X' \xrightarrow{\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u' \end{pmatrix}} Y \oplus Y' \xrightarrow{\begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v' \end{pmatrix}} Z \oplus Z' \xrightarrow{\begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w' \end{pmatrix}} X[1] \oplus X'[1]$ será um triângulo em $\mathcal{C}$. $\square$

1.2.1 A Categoria dos Complexos

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria aditiva. Um complexo $X^\cdot$ em $\mathcal{A}$ é uma família $(X^n, d^n)_{n \in \mathbb{Z}}$, em que cada X^n é um objeto em $\mathcal{A}$ e $d_X^n : X^n \rightarrow X^{n+1}$ é um morfismo em $\mathcal{A}$ satisfazendo $d_X^{n+1} d_X^n = 0$. Podemos representar $X^\cdot$ através do seguinte diagrama $X^\cdot : \cdots \rightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \rightarrow \cdots$. Dados $X^\cdot = (X^n, d_X^n)$ e $Y^\cdot = (Y^n, d_Y^n)$ complexos em $\mathcal{A}$, um morfismo $f^\cdot : X^\cdot \rightarrow Y^\cdot$ é uma família $(f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$, em que cada $f^n : X^n \rightarrow Y^n$ é um morfismo em $\mathcal{A}$ satisfazendo $f^n d_X^{n-1} = d_Y^{n-1} f^{n-1}$. Está definida, dessa forma, a categoria dos complexos em $\mathcal{A}$, denotada por $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, cujos objetos são os complexos em $\mathcal{A}$ e os morfismos são os morfismos de complexos.

Denotaremos por $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$ a subcategoria plena de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ cujos objetos são os complexos em $\mathcal{A}$ limitados, isto é, objetos $X^\cdot$ em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ para os quais existem inteiros positivos $n = n(X^\cdot)$ tais que $X^i = 0$, para $|i| > n$.

Para o caso em que $\mathcal{A}$ é uma categoria abeliana e $n \in \mathbb{Z}$, define-se o funtor cohomologia $H^n : \mathcal{C}^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ por: $H^n(X^\cdot) = \text{Ker } d_X^n / \text{Im } d_X^{n-1}$, se $X^\cdot = (X^n, d_X^n)$ for um objeto de $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$, e $H^n(f^\cdot) = \overline{f^n}$, se $f^\cdot = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ for um morfismo em $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$.

Chamaremos de funtor translação o funtor $_{-}[1] : \mathcal{C}^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{C}^b(\mathcal{A})$ que associa cada complexo $X^\cdot = (X^n, d_X^n)$ em $\mathcal{A}$ ao complexo $X^\cdot[1]$ definido por $X^\cdot[1]^n = X^{n+1}$ e $d_{X^\cdot[1]}^n = -d_X^{n+1}$, e cada morfismo $f^\cdot = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ao morfismo $(f^{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$. É possível mostrar que $_{-}[1]$ assim definido é um funtor fiel, pleno e denso.

Definição 1.13 (Quase isomorfismo). Seja $f^\cdot : X^\cdot \rightarrow Y^\cdot$ um morfismo em $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$. Diremos que $f^\cdot$ é um quase isomorfismo se, para cada $n \in \mathbb{Z}$, o morfismo induzido $H^n(f^\cdot) : H^n(X^\cdot) \rightarrow H^n(Y^\cdot)$ for um isomorfismo.

Definição 1.14 (Relação de homotopia). Dados morfismos $f^\cdot, g^\cdot \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^b(\mathcal{A})}(X^\cdot, Y^\cdot)$, diremos que $f^\cdot$ é homotópico a $g^\cdot$ ($f^\cdot \sim g^\cdot$) se existir um morfismo de complexos $s^\cdot = (s^n)_{n \in \mathbb{Z}}$, com $s^n : X^n \rightarrow Y^{n-1}$, tal que $f^n - g^n = d_Y^{n-1} s^n + s^{n+1} d_X^n$.

Definição 1.15 (Cone de um morfismo). Seja $f^\cdot : X^\cdot \rightarrow Y^\cdot$ um morfismo em $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$. Chamaremos de cone de $f^\cdot$ o objeto $C_{f^\cdot}$ definido por: $(C_{f^\cdot})^n = Y^n \oplus X[1]^n = Y^n \oplus X^{n+1}$ e $d_{C_{f^\cdot}}^n = \begin{pmatrix} d_Y^n & f^{n+1} \\ 0 & -d_X^{n+1} \end{pmatrix}$.

Seja $f^\cdot : X^\cdot \rightarrow Y^\cdot$ um morfismo em $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$. Podemos então construir a sêxtupla $X^\cdot \xrightarrow{f^\cdot} Y^\cdot \xrightarrow{q_Y^\cdot} C_{f^\cdot} \xrightarrow{p_{X^\cdot[1]}^\cdot} X^\cdot[1]$, em que $q_Y^\cdot$ e $p_{X^\cdot[1]}^\cdot$ são a inclusão e projeção canônicas.

1.2.2 A Categoria de Homotopia

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria aditiva. A categoria limitada de homotopia de $\mathcal{A}$, denotada por $\mathcal{K}^b(\mathcal{A})$, tem como objetos os objetos de $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$ e, para complexos limitados $X^\cdot$ e $Y^\cdot$ em $\mathcal{A}$, $\text{Hom}_{\mathcal{K}^b(\mathcal{A})}(X^\cdot, Y^\cdot) = \text{Hom}_{\mathcal{C}^b(\mathcal{A})}(X^\cdot, Y^\cdot) / \text{Ht}(X^\cdot, Y^\cdot)$, em que $\text{Ht}(X^\cdot, Y^\cdot)$ corresponde ao conjunto dos morfismos de $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$ que são homotópicos a zero.

Chamaremos de funtor translação o funtor $_{-}[1] : \mathcal{K}^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{K}^b(\mathcal{A})$ definido por: dado $X^\cdot \in \mathcal{K}^b(\mathcal{A})$, $X^\cdot[1] = X^\cdot[1]$, em que este último é o funtor translação definido em $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$, e $\overline{f^\cdot}[1] = \overline{f^\cdot}[1]$, se $\overline{f^\cdot}$ for

um morfismo em $\mathcal{K}^b(\mathcal{A})$. De forma natural, podemos também definir o funtor $h : \mathcal{C}^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{K}^b(\mathcal{A})$ por: $h(X^\cdot) = X^\cdot$, se $X^\cdot$ for um objeto em $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$, e $h(f^\cdot) = \overline{f^\cdot}$, se $f^\cdot$ for um morfismo em $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$. É fácil verificar que $h \circ _[-1] = _[-1] \circ h$.

Como citado no final da seção anterior, dado um morfismo $f^\cdot \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^b(\mathcal{A})}(X^\cdot, Y^\cdot)$, podemos construir uma sêxtupla $(\star) X^\cdot \xrightarrow{f^\cdot} Y^\cdot \xrightarrow{\overline{q_Y}} C_{f^\cdot} \xrightarrow{\overline{p_{X^\cdot[1]}}} X^\cdot[1]$, em que $\overline{q_Y}$ e $\overline{p_{X^\cdot[1]}}$ são a inclusão e projeção canônicas. Ao aplicarmos o funtor h a $(\star)$, obtemos a sêxtupla $X^\cdot \xrightarrow{\overline{f^\cdot}} Y^\cdot \xrightarrow{\overline{q_Y}} C_{f^\cdot} \xrightarrow{\overline{p_{X^\cdot[1]}}} X^\cdot[1]$, que será chamada triângulo estândar associado ao morfismo $f^\cdot$.

Teorema 1.16 ([Kra15] pg. 11). A categoria de homotopia admite uma estrutura triangulada dada por $(\mathcal{K}^b(\mathcal{A}), _[-1], \mathcal{F})$, em que $\mathcal{F}$ é a coleção das sêxtuplas que são isomorfas a algum triângulo estândar. $\square$

Se $\mathcal{A}$ for uma categoria abeliana e n um inteiro, definimos o funtor cohomologia $H^n : \mathcal{K}^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ por: dado $X^\cdot \in \mathcal{K}^b(\mathcal{A})$, $H^n(X^\cdot) = H^n(X^\cdot)$, em que este último é o funtor cohomologia definido anteriormente para $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$, e $H^n(\overline{f^\cdot}) = H^n(f^\cdot)$, para um morfismo $\overline{f^\cdot}$ em $\mathcal{K}^b(\mathcal{A})$. Novamente, H^n é um funtor cohomológico covariante.

Observamos que um morfismo $\overline{f^\cdot} \in \text{Hom}_{\mathcal{K}^b(\mathcal{A})}(X^\cdot, Y^\cdot)$ será um quase isomorfismo se, e somente se, algum representante de $\overline{f^\cdot}$ for um quase isomorfismo em $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$.

1.2.3 A Categoria Derivada

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. A categoria derivada da categoria dos complexos limitados sobre $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$, é a categoria obtida de $\mathcal{K}^b(\mathcal{A})$ via localização com respeito ao conjunto de seus quase isomorfismos. Em particular, os objetos de $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ coincidem com os objetos de $\mathcal{K}^b(\mathcal{A})$ e um morfismo de um complexo $X^\cdot$ para um complexo $Y^\cdot$ em $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ é da forma $X^\cdot \xleftarrow{s^\cdot} Z^\cdot \xrightarrow{f^\cdot} Y^\cdot$, em que $s^\cdot$ é um quase isomorfismo e $f^\cdot \in \text{Hom}_{\mathcal{K}^b(\mathcal{A})}(Z^\cdot, Y^\cdot)$. Além disso, existe um funtor exato $Q : \mathcal{K}^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ tal que $Q(f^\cdot)$ é um isomorfismo, sempre que $f^\cdot$ for um quase isomorfismo em $\mathcal{K}^b(\mathcal{A})$, e com a seguinte propriedade universal: se $G : \mathcal{K}^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{C}$ for um funtor exato tal que $G(f^\cdot)$ é isomorfismo para cada quase isomorfismo $f^\cdot$, então G se fatora através de Q . Uma vez que $H^n : \mathcal{K}^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ associa quase isomorfismos a isomorfismos, deve existir um funtor $F : \mathcal{D}^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ satisfazendo $FQ = H^n$, para cada $n \in \mathbb{Z}$, chamado de funtor cohomologia de $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$, que também será denotado por H^n e novamente é um funtor cohomológico covariante. Da mesma forma, desde que a composta $Q \circ _[-1] : \mathcal{K}^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ associa quase isomorfismos a isomorfismos, existe um funtor (que novamente denotaremos por $_[-1]$) $_[-1] : \mathcal{D}^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ tal que $_[-1] \circ Q = Q \circ _[-1]$.

Teorema 1.17 ([Kra15] pg. 13). $(\mathcal{D}^b(\mathcal{A}), _[-1], \mathcal{F})$ é uma categoria triangulada, em que $\mathcal{F}$ é o conjunto das sêxtuplas isomorfas à imagem via Q de um triângulo estândar em $\mathcal{K}^b(\mathcal{A})$. Em outras palavras, uma sêxtupla $A^\cdot \xrightarrow{u} B^\cdot \xrightarrow{v} C^\cdot \xrightarrow{w} A^\cdot[1]$ será um triângulo em $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ se existirem um triângulo estândar, ou seja, da forma $X^\cdot \xrightarrow{\overline{f^\cdot}} Y^\cdot \xrightarrow{\overline{q_Y}} C_{f^\cdot} \xrightarrow{\overline{p_{X^\cdot[1]}}} X^\cdot[1]$ em $\mathcal{K}^b(\mathcal{A})$ e um isomorfismo de sêxtuplas em $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$

$$\begin{array}{ccccccc} A^\cdot & \xrightarrow{u} & B^\cdot & \xrightarrow{v} & C^\cdot & \xrightarrow{w} & A^\cdot[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X^\cdot & \xrightarrow{Q(\overline{f^\cdot})} & Y^\cdot & \xrightarrow{Q(\overline{q_Y})} & C_{f^\cdot} & \xrightarrow{Q(\overline{p_{X^\cdot[1]}})} & X^\cdot[1]. \end{array}$$

Observação 1.18. O funtor $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ que associa cada objeto X em $\mathcal{A}$ ao complexo

$$X^\cdot : \cdots \rightarrow 0 \rightarrow X \rightarrow 0 \rightarrow \cdots,$$

concentrado na posição zero, e cada morfismo $f : X \rightarrow Y$ em $\mathcal{A}$ a $X^\cdot \xleftarrow{1} X^\cdot \xrightarrow{f} Y^\cdot$, em que

$$f^\cdot : \begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{0} & X & \xrightarrow{0} & 0 \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow f & & \downarrow 0 \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{0} & Y & \xrightarrow{0} & 0 \longrightarrow \cdots \end{array}$$

é fiel e pleno.

Lema 1.19 ([Kra15] pg. 13). Seja $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ uma sequência exata em $\mathcal{A}$. Então $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ é um triângulo em $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$, para algum $h \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{A})}(Z, X[1])$. $\square$

Lema 1.20 ([RS07] pg. 14). Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana e $n \in \mathbb{Z}$. Se X e Y forem objetos de $\mathcal{A}$, então $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^n(X, Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{A})}(X, Y[n])$. Além disso, se $n < 0$, então $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{A})}(X, Y[n]) = 0$. $\square$

Observação 1.21. Para o caso em que $n = 1$, o isomorfismo $\psi : \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{A})}(X, Y[1])$ mencionado no lema anterior é da forma: para uma sequência exata $\alpha : 0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y \rightarrow 0$, considere o triângulo $X \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} X[1]$ em $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$, cuja existência é garantida pelo lema 1.19. Definimos, portanto, $\psi([\alpha]) = h$.

1.3 Álgebras Hereditárias por Partes

Seja k um corpo algebricamente fechado e considere $\mathcal{H}$ uma k -categoria abeliana, hereditária e Ext-finita, isto é, tal que $\text{Ext}_{\mathcal{H}}^2(_, _) = 0$ e os k -espaços $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(X, Y)$ e $\text{Ext}_{\mathcal{H}}^1(X, Y)$ têm dimensão finita, para todos objetos X e Y em $\mathcal{H}$. Neste caso, a categoria derivada $\mathcal{D}^b(\mathcal{H})$ é bastante conhecida, podendo ser descrita em termos de $\mathcal{H}$, uma vez que $\mathcal{D}^b(\mathcal{H})$ é o fecho aditivo da união $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}[i]$, em que $\mathcal{H}[i]$ denota a subcategoria plena de $\mathcal{D}^b(\mathcal{H})$ cujos objetos são da forma $X[i]$, para $X \in \mathcal{H}$, e os morfismos são determinados por $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{H})}(X[m], Y[n]) = \text{Ext}_{\mathcal{H}}^{m-n}(X, Y)$. Dessa forma, torna-se natural estudar álgebras cujas categorias derivadas estejam próximas a categorias derivadas de categorias hereditárias, a fim de transferir as informações já obtidas para estas últimas. Definem-se então as álgebras hereditárias por partes:

Definição 1.22. Uma k -álgebra A de dimensão finita é dita hereditária por partes se existem uma categoria abeliana hereditária $\mathcal{H}$ e uma equivalência triangular $F : \mathcal{D}^b(A) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{H})$. Equivalentemente, segundo [Ric89], A é hereditária por partes se existem uma k -categoria abeliana hereditária e Ext-finita $\mathcal{H}$ e um complexo inclinante $T^\cdot$ em $\mathcal{H}$ tais que $A \simeq \text{End}_{\mathcal{H}} T^\cdot$.

De acordo com [Hap01], uma k -categoria $\mathcal{H}$ abeliana, hereditária, Ext-finita e com objeto inclinante é, a menos de equivalência derivada, $\text{mod } H$, em que H é uma k -álgebra hereditária de dimensão finita, ou $\text{coh } \mathbb{X}$, com $\mathbb{X}$ uma reta projetiva com peso. Neste caso, as álgebras hereditárias por partes são somente

de dois tipos: *mod H*, se existir uma equivalência triangular $\mathcal{D}^b(A) \rightarrow \mathcal{D}^b(H)$, ou *coh X*, se existir uma equivalência triangular $\mathcal{D}^b(A) \rightarrow \mathcal{D}^b(\text{coh } \mathbb{X})$.

Teorema 1.23. [HRS88] Seja A uma álgebra hereditária por partes. Então:

- (i) se A for de tipo *mod H* para alguma k -álgebra hereditária H de dimensão finita, então deverá existir uma sequência de triplas $(A_i, T_i, A_{i+1} = \text{End}_{A_i} T_i)_{0 \leq i \leq m}$ tal que $H = A_0$, cada T_i é um A_i -módulo inclinante cindido e $A = A_m$.
- (ii) se A for de tipo *coh X* para alguma reta projetiva com peso $\mathbb{X}$, então deverá existir uma sequência de triplas $(A_i, T_i, A_{i+1} = \text{End}_{A_i} T_i)_{0 \leq i \leq m}$ tal que A_0 é uma álgebra quase inclinada (definida em 3.18), cada T_i é um A_i -módulo inclinante ou coinclinante cindido e $A = A_m$. $\square$

Podemos assumir que a equivalência triangular F da definição 1.22 é normalizada, ou seja, que existe um inteiro positivo r tal que $F(X) \in \bigcup_{t=0}^r \mathcal{H}[t]$, para cada A -módulo indecomponível X , e existem A -módulos indecomponíveis X e Y tais que $F(X) \in \mathcal{H}[0]$ e $F(Y) \in \mathcal{H}[r]$. Para cada índice t que cumprir $0 \leq t \leq r$, denotamos por $\mathcal{U}_t$ a subcategoria plena de *mod A* que consiste dos A -módulos indecomponíveis X tais que $F(X) \in \mathcal{H}[t]$, e por $\tilde{\mathcal{U}}_t$ o fecho aditivo de $\mathcal{U}_t$ em *mod A*. As subcategorias $\tilde{\mathcal{U}}_t$ são chamadas *F-pieces* de *mod A*. Destacamos que a quantidade de *pieces* depende das escolhas da equivalência normalizada F e da categoria hereditária $\mathcal{H}$, que não são únicas, mas por abuso de linguagem, diremos que A admite $r+1$ *pieces*. Várias propriedades já foram obtidas para estas subcategorias, conforme [HZ10].

Ainda nas condições da definição 1.22, considere $T^\cdot = F(A_A) = \bigoplus_{t=0}^{r-1} T_t[t]$, que é um complexo inclinante em $\mathcal{D}^b(\mathcal{H})$. Para um objeto X em $\mathcal{H}$, recordamos que $\mathcal{T}(X) = \{Y \in \mathcal{H}; \text{Ext}_{\mathcal{H}}^1(X, Y) = 0\}$, $\mathcal{F}(X) = \{Y \in \mathcal{H}; \text{Hom}_{\mathcal{H}}(X, Y) = 0\}$ e $X^\perp = \mathcal{T}(X) \cap \mathcal{F}(X)$. Dado $0 \leq t \leq r$, definimos $\tilde{\mathcal{V}}_t$ a subcategoria de $\mathcal{H}$ dada pela interseção $\bigcap_{i \neq t, t-1} T_i^\perp \cap \mathcal{T}(T_t) \cap \mathcal{F}(T_{t-1})$.

Lema 1.24 ([HZ10]). Sejam A uma álgebra hereditária por partes, $T^\cdot$ o complexo inclinante e F a equivalência normalizada dados acima. Então a restrição de F a cada $\tilde{\mathcal{U}}_t$ induz uma equivalência entre $\tilde{\mathcal{U}}_t$ e $\tilde{\mathcal{V}}_t[t]$. $\square$

Teorema 1.25 ([HZ10]). Seja $\mathcal{H}$ uma categoria abeliana hereditária tal que $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(X, Y)$ e $\text{Ext}_{\mathcal{H}}^1(X, Y)$ são k -espaços vetoriais de dimensão finita, para todos X, Y objetos de $\mathcal{H}$. Seja $T^\cdot = \bigoplus_{t=0}^{r-1} T_t[t]$ um complexo inclinante, em que $r \geq 1$. Então, para cada $0 \leq t \leq r$, a subcategoria $\tilde{\mathcal{V}}_t$ é funtorialmente finita em $\mathcal{H}$. $\square$

1.4 t-Estruturas em Categorias Trianguladas

Dada uma categoria triangulada $\mathcal{C}$, uma t -estrutura em $\mathcal{C}$ é um par $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ de subcategorias plenas de $\mathcal{C}$ tal que, denotando $\mathcal{D}^{\leq n} = \mathcal{D}^{\leq 0}[-n]$ e $\mathcal{D}^{\geq n} = \mathcal{D}^{\geq 0}[-n]$ ($n \in \mathbb{Z}$), as seguintes condições são satisfeitas:

- (t1) $\mathcal{D}^{\leq 0} \subseteq \mathcal{D}^{\leq 1}$ e $\mathcal{D}^{\geq 1} \subseteq \mathcal{D}^{\geq 0}$.
- (t2) $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = 0$, se $X \in \mathcal{D}^{\leq 0}$ e $Y \in \mathcal{D}^{\geq 1}$.

(t3) Para cada $X \in \mathcal{C}$, existe um triângulo $A \rightarrow X \rightarrow B \rightarrow A[1]$ em $\mathcal{C}$, com $A \in \mathcal{D}^{\leq 0}$ e $B \in \mathcal{D}^{\geq 1}$.

Esse conceito foi introduzido por Beilinson, Bernstein e Deligne, em [BBD82], e para uma categoria abeliana $\mathcal{A}$ e sua categoria derivada (limitada), permite determinar subcategorias plenas abelianas de $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ não necessariamente equivalentes a $\mathcal{A}$, mas tais que suas categorias derivadas sejam equivalentes a $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ como categorias trianguladas.

Exemplo 1.26. Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana e $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ a categoria derivada limitada de $\mathcal{A}$. Considere $\mathcal{D}^{\leq 0} = \{X^\cdot \in \mathcal{D}^b(\mathcal{A}); H^i(X^\cdot) = 0, \text{ para cada } i > 0\}$ e $\mathcal{D}^{\geq 0} = \{X^\cdot \in \mathcal{D}^b(\mathcal{A}); H^i(X^\cdot) = 0, \text{ para cada } i < 0\}$. Então $\mathcal{D} = (\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ define uma t-estrutura em $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$, usualmente chamada de t-estrutura natural de $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$. A fim de verificarmos a condição (t3), consideremos, para cada objeto $X^\cdot = (X^i, d_X^i)$ em $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$, o complexo $\tau^{\leq 0}X^\cdot = (Y^i, d_Y^i)$ dado por $Y^i = X^i$, se $i \leq -1$, $Y^0 = \text{Ker } d_X^0$ e $Y^i = 0$, para $i > 0$, e de diferencial $d_Y^i = d_X^i$, se $i \leq -1$, e $d_Y^i = 0$, caso contrário. Consideremos ainda $\tau^{\geq 1}X^\cdot = X^\cdot / \tau^{\leq 0}X^\cdot$. Claramente, $\tau^{\leq 0}X^\cdot \in \mathcal{D}^{\leq 0}$ e $\tau^{\geq 1}X^\cdot \in \mathcal{D}^{\geq 1}$ e, portanto, a sequência exata $0 \rightarrow \tau^{\leq 0}X^\cdot \rightarrow X^\cdot \rightarrow \tau^{\geq 1}X^\cdot \rightarrow 0$ nos garante a existência de um triângulo $\tau^{\leq 0}X^\cdot \rightarrow X^\cdot \rightarrow \tau^{\geq 1}X^\cdot \rightarrow (\tau^{\leq 0}X^\cdot)[1]$ em $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ como desejado.

Fixada uma t-estrutura $\mathcal{D} = (\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ em uma categoria triangulada $\mathcal{C}$, chamaremos de coração de $\mathcal{D}$ a subcategoria plena $\mathcal{D}^{\leq 0} \cap \mathcal{D}^{\geq 0}$ de $\mathcal{C}$, que será denotada por $ht(\mathcal{D})$. Por exemplo, se $\mathcal{D}$ for a t-estrutura natural de $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$, em que $\mathcal{A}$ é uma categoria abeliana, então $ht(\mathcal{D}) = \mathcal{A}$. Segundo [BBD82], o coração de qualquer t-estrutura é uma categoria abeliana.

Na proposição a seguir, estão reunidas algumas propriedades das subcategorias $\mathcal{D}^{\leq n}$ e $\mathcal{D}^{\geq n}$ que compõem uma t-estrutura.

Proposição 1.27 ([BBD82], [TLS03]). Sejam $\mathcal{D} = (\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ uma t-estrutura em $\mathcal{C}$ e $n \in \mathbb{Z}$. Então:

- (i) As subcategorias $\mathcal{D}^{\leq n}$ e $\mathcal{D}^{\geq n}$ são fechadas para extensões.
- (ii) $\mathcal{D}^{\leq n}[t] \subseteq \mathcal{D}^{\leq n}$, para $t \geq 0$, e $\mathcal{D}^{\geq n}[t] \subseteq \mathcal{D}^{\geq n}$, para $t \leq 0$.
- (iii) A inclusão canônica $\mathcal{D}^{\leq n} \rightarrow \mathcal{C}$ admite um funtor adjunto à direita, denotado por $\tau_{\mathcal{D}}^{\leq n}$ (ou por $\tau^{\leq n}$ quando não houver dúvidas quanto à t-estrutura em questão), e $\mathcal{D}^{\geq n} \rightarrow \mathcal{C}$ admite um funtor adjunto à esquerda, denotado por $\tau_{\mathcal{D}}^{\geq n}$ (ou por $\tau^{\geq n}$).
- (iv) Para cada C em $\mathcal{C}$, existe um triângulo $\tau_{\mathcal{D}}^{\leq 0}C \rightarrow C \rightarrow \tau_{\mathcal{D}}^{\geq 1}C \rightarrow \tau_{\mathcal{D}}^{\leq 0}C[1]$. □

Para o caso em que $\mathcal{D}$ é a t-estrutura natural de $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$, os funtores $\tau_{\mathcal{D}}^{\leq 0}$ e $\tau_{\mathcal{D}}^{\geq 0}$ são como definidos no exemplo 1.26. Basta, para isso, verificarmos que, dados $X^\cdot \in \mathcal{D}^{\leq 0}$ e $Y^\cdot \in \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$, existe um isomorfismo $\psi : \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{A})}(X^\cdot, Y^\cdot) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}^{\leq 0}}(X^\cdot, \tau^{\leq 0}Y^\cdot)$. Em $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$, considere um morfismo $f : X^\cdot \rightarrow Y^\cdot$ e o triângulo $\tau^{\leq 0}Y^\cdot \xrightarrow{\alpha} Y^\cdot \xrightarrow{\beta} \tau^{\geq 1}Y^\cdot \rightarrow (\tau^{\leq 0}Y^\cdot)[1]$. De acordo com (t2), a composta βf se anula e, portanto, deve existir um morfismo $\bar{f} : X^\cdot \rightarrow \tau^{\leq 0}Y^\cdot$ fazendo o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} X^\cdot & \xrightarrow{1} & X^\cdot & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X^\cdot[1] \\ \downarrow \bar{f} & & \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow \\ \tau^{\leq 0}Y^\cdot & \xrightarrow{\alpha} & Y^\cdot & \xrightarrow{\beta} & \tau^{\geq 1}Y^\cdot & \longrightarrow & (\tau^{\leq 0}Y^\cdot)[1] \end{array}$$

comutar. Definimos então $\psi(f) = \bar{f}$. Segundo o lema 1.11, ψ está bem definida, uma vez que $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{A})}(X^\cdot, (\tau^{\geq 1}Y^\cdot)[-1]) = 0$. Além disso, ψ é um isomorfismo.

Definição 1.28. Dada uma t-estrutura $\mathcal{D}$ em $\mathcal{C}$, definimos o funtor $H_{\mathcal{D}}^0 : \mathcal{C} \rightarrow ht(\mathcal{D})$ por $H_{\mathcal{D}}^0 = \tau_{\mathcal{D}}^{\leq 0} \tau_{\mathcal{D}}^{\geq 0}$ e, se $n \in \mathbb{Z}$, $H_{\mathcal{D}}^n = H_{\mathcal{D}}^0 \circ _{-}[n]$.

É possível mostrar que, para cada $n \in \mathbb{Z}$, $H_{\mathcal{D}}^n$ é um funtor cohomológico. Além disso, se $\mathcal{D}$ for a t-estrutura apresentada no exemplo 1.26, então $H_{\mathcal{D}}^n$ é o funtor cohomologia de $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$. De fato, seja $X^\cdot : \dots \rightarrow X^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} X^0 \xrightarrow{d^0} X^1 \rightarrow \dots$ um complexo em $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$. Então $\tau^{\geq 0} X^\cdot : \dots \rightarrow 0 \rightarrow X^0 / \text{Im } d^{-1} \xrightarrow{\bar{d}^0} X^1 \xrightarrow{d^1} X^2 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$, em que $\bar{d}^0$ é o morfismo induzido por d^0 . Neste caso, $\tau^{\leq 0} \tau^{\geq 0} X^\cdot$ é o complexo $\dots \rightarrow 0 \rightarrow \text{Ker } d^0 / \text{Im } d^{-1} \rightarrow 0 \rightarrow \dots$, concentrado na posição 0, que corresponde a $H^0(X^\cdot)$.

Para este trabalho, interessam especialmente as t-estruturas $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ tais que $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}^{\leq n} = \{0\}$ e $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}^{\geq n} = \{0\}$ ou, equivalentemente, tais que a condição $H_{\mathcal{D}}^i(X) = 0$, para $X \in \mathcal{C}$ e todo $i \in \mathbb{Z}$, implica em $X = 0$, chamadas de não-degeneradas. Como exemplo, citamos novamente a t-estrutura do exemplo 1.26.

As subcategorias que compõem uma t-estrutura $\mathcal{D}$ não-degenerada têm a propriedade de poderem ser descritas completamente através dos funtores de cohomologia relativos a $\mathcal{D}$, como mostra a proposição a seguir.

Proposição 1.29 ([BBD82]). Seja $\mathcal{D} = (\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ uma t-estrutura não-degenerada em uma categoria triangulada $\mathcal{C}$. Então:

- (i) $\mathcal{D}^{\leq n} = \{X \in \mathcal{C}; H_{\mathcal{D}}^i(X) = 0, \text{ para todo } i > n\}$, para cada $n \in \mathbb{Z}$.
- (ii) $\mathcal{D}^{\geq n} = \{X \in \mathcal{C}; H_{\mathcal{D}}^i(X) = 0, \text{ para todo } i < n\}$, para cada $n \in \mathbb{Z}$.
- (iii) se $X \in \mathcal{C}$ for tal que $H_{\mathcal{D}}^i(X) = 0$, para todo $i \in \mathbb{Z}$, então $X = 0$. □

Capítulo 2

A APLICAÇÃO Φ^{-1}

Baseados em [HRS96b], apresentaremos neste capítulo uma técnica para construção de uma categoria abeliana a partir do coração de uma t-estrutura em uma categoria triangulada $\mathcal{C}$, munido de um par de torção. Dessa forma, ficará definida uma aplicação, chamada Φ^{-1} , que a cada par $(\mathcal{B}; (\mathcal{X}, \mathcal{Y}))$, com $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ um par de torção na categoria abeliana $\mathcal{B}$, associa o par $(\mathcal{A}; (\mathcal{T}, \mathcal{F}))$, em que $\mathcal{A}$ é o coração da t-estrutura em $\mathcal{C}$ induzida por $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\mathcal{T} = \mathcal{Y}$ e $\mathcal{F} = \mathcal{X}[-1]$. Os resultados obtidos por Happel, Reiten e Smalø para a aplicação Φ ganharão uma adaptação para Φ^{-1} e uma eventual generalização para t-estruturas quaisquer em categorias trianguladas, que não necessariamente a categoria derivada de uma categoria abeliana, como em [HRS96b]. Entre esses resultados, destaca-se o teorema 2.10, que nos fornece condições necessárias e suficientes para que a imagem via Φ^{-1} de uma categoria abeliana munida de um par de torção seja uma categoria de módulos.

2.1 A t-Estrutura induzida por um Par de Torção

A partir de uma t-estrutura não-degenerada $\mathcal{D}$ em $\mathcal{C}$ e de um par de torção em $ht(\mathcal{D})$, é possível definir uma nova t-estrutura em $\mathcal{C}$, que será ferramenta essencial para o capítulo seguinte. Sua definição apresentaremos no lema a seguir.

Proposição 2.1. Seja $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ um par de torção em $ht(\mathcal{D})$, em que $\mathcal{D} = (\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ é uma t-estrutura não-degenerada em $\mathcal{C}$. Considere $\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}^{\leq 0} = \{C \in \mathcal{C}; H_{\mathcal{D}}^1(C) \in \mathcal{X} \text{ e } H_{\mathcal{D}}^i(C) = 0, \text{ para todo } i > 1\}$ e $\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}^{\geq 0} = \{C \in \mathcal{C}; H_{\mathcal{D}}^0(C) \in \mathcal{Y} \text{ e } H_{\mathcal{D}}^i(C) = 0, \text{ para todo } i < 0\}$. Então $\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} = (\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}^{\leq 0}, \mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}^{\geq 0})$ é uma t-estrutura em $\mathcal{C}$. Mais ainda, $\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}$ é não-degenerada.

Demonstração. Para (t1), considere $C \in \mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}^{\leq 0}$ e escreva $C = C[1][-1]$. Desde que $\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}^{\leq 1} = \mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}^{\leq 0}[-1]$, basta verificarmos que $C[1] \in \mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}^{\leq 0}$. Observe que $H_{\mathcal{D}}^i(C[1]) = H_{\mathcal{D}}^{i+1}(C) = 0$, para cada $i \geq 1$ e, portanto, $C[1] \in \mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}^{\leq 0}$.

Quanto à condição (t2), sejam $Z \in \mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}^{\leq 0}$, $U \in \mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}^{\geq 1}$ e $f : Z \rightarrow U$ um morfismo não nulo. Uma vez que $\mathcal{D}$ é uma t-estrutura em $\mathcal{C}$, para Z e U podemos construir em $\mathcal{C}$ os triângulos $\tau^{\leq 1}Z \xrightarrow{\mu} Z \rightarrow \tau^{\geq 2}Z \rightarrow (\tau^{\leq 1}Z)[1]$ e $(\tau^{\leq 1}Z)[1] \rightarrow \tau^{\leq 1}U \rightarrow U \xrightarrow{\nu} \tau^{\geq 2}U \rightarrow (\tau^{\leq 1}U)[1]$, em que $\tau = \tau_{\mathcal{D}}$. Além disso, a composta $\nu f \mu$ é nula, o que nos permite construir o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \tau^{\leq 1}Z & \xrightarrow{\mu} & Z & \longrightarrow & \tau^{\geq 2}Z & \longrightarrow & (\tau^{\leq 1}Z)[1] \\ \downarrow \tau^{\leq 1}f & & \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow \\ \tau^{\leq 1}U & \longrightarrow & U & \xrightarrow{\nu} & \tau^{\geq 2}U & \longrightarrow & (\tau^{\leq 1}U)[1], \end{array}$$

segundo o lema 1.11. Observe que $H_{\mathcal{D}}^i(\tau^{\geq 2}Z) = 0$, se $i \leq 1$, e $H_{\mathcal{D}}^i(\tau^{\geq 2}Z) = H_{\mathcal{D}}^i(Z) = 0$, para $i \geq 2$, já que $Z \in \mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}^{\leq 0}$. Devido à proposição 1.29, $\tau^{\geq 2}Z = 0$ e, portanto, μ é um isomorfismo. A comutatividade do primeiro quadrado do diagrama acima então nos assegura que $\tau^{\leq 1}f$ é um morfismo não nulo.

Como anteriormente, é possível obter o diagrama comutativo em que as linhas são triângulos em $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccccccc} \tau^{\leq 0}\tau^{\leq 1}Z & \longrightarrow & \tau^{\leq 1}Z & \longrightarrow & H_{\mathcal{D}}^1(Z)[-1] & \longrightarrow & (\tau^{\leq 0}Z)[1] \\ \downarrow & & \downarrow \tau^{\leq 1}f & & \downarrow h[-1] & & \downarrow \\ \tau^{\leq 0}\tau^{\leq 1}U & \longrightarrow & \tau^{\leq 1}U & \xrightarrow{\rho} & H_{\mathcal{D}}^1(U)[-1] & \longrightarrow & (\tau^{\leq 0}U)[1]. \end{array}$$

Novamente, observe que $H_{\mathcal{D}}^i(\tau^{\leq 0}U) = 0$, para cada $i \geq 1$, e $H_{\mathcal{D}}^i(\tau^{\leq 0}U) = H_{\mathcal{D}}^i(U) = 0$, para cada $i \leq 0$, pois $U \in \mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}^{\geq 1}$. Logo, $\tau^{\leq 0}U = 0$ e, portanto, ρ é um isomorfismo. Além disso, $h = 0$, já que $H_{\mathcal{D}}^1(Z) \in \mathcal{X}$ e $H_{\mathcal{D}}^1(U) \in \mathcal{Y}$. Dessa forma, segue da comutatividade do segundo quadrado acima que $\tau^{\leq 1}f = 0$, o que é uma contradição.

Para (t3), considere $C \in \mathcal{C}$. Desde que $\mathcal{D}$ é uma t-estrutura em $\mathcal{C}$, é possível construir o seguinte diagrama comutativo em que as linhas são triângulos em $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccccccc} (\tau^{\geq 1}C)[-1] & \longrightarrow & \tau^{\leq 0}C & \longrightarrow & C & \longrightarrow & \tau^{\geq 1}C \\ \downarrow 1 & & \downarrow u & & \downarrow & & \downarrow 1 \\ (\tau^{\geq 1}C)[-1] & \xrightarrow{\gamma} & H_{\mathcal{D}}^0(C) & \longrightarrow & \tau^{\geq 0}C & \longrightarrow & \tau^{\geq 1}C. \end{array}$$

Considere $0 \rightarrow X \xrightarrow{\alpha} H_{\mathcal{D}}^0(C) \xrightarrow{\beta} Y \rightarrow 0$, com $X \in \mathcal{X}$ e $Y \in \mathcal{Y}$, a sequência exata canônica para $H_{\mathcal{D}}^0(C)$. Seja $f = \beta\gamma$, então deve existir um morfismo $\tau^{\geq 0}C \rightarrow \text{cone}(f)$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} (\tau^{\geq 1}C)[-1] & \xrightarrow{\gamma} & H_{\mathcal{D}}^0(C) & \longrightarrow & \tau^{\geq 0}C & \longrightarrow & \tau^{\geq 1}C \\ \downarrow 1 & & \downarrow \beta & & \downarrow & & \downarrow 1 \\ (\tau^{\geq 1}C)[-1] & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & \text{cone}(f) & \longrightarrow & \tau^{\geq 1}C \end{array}$$

comuta em $\mathcal{C}$. Compondo os dois diagramas construídos acima e através do axioma do octaedro, obtemos:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{cone}(g)[-1] & \xrightarrow{1} & \text{cone}(g)[-1] & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ (\tau^{\geq 1}C)[-1] & \longrightarrow & \tau^{\leq 0}C & \longrightarrow & C & \longrightarrow & \tau^{\geq 1}C \\ \downarrow 1 & & \downarrow \beta u & & \downarrow g & & \downarrow 1 \\ (\tau^{\geq 1}C)[-1] & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & \text{cone}(f) & \longrightarrow & \tau^{\geq 1}C \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \text{cone}(g) & \xrightarrow{1} & \text{cone}(g). & & \end{array}$$

Agora, note que $\text{cone}(f) \in \mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}^{\geq 0}$, pois se $i < 0$, então a sequência exata $H_{\mathcal{D}}^i(Y) \rightarrow H_{\mathcal{D}}^i(\text{cone}(f)) \rightarrow H_{\mathcal{D}}^i(\tau^{\geq 1}C)$, obtida por meio do triângulo $Y \rightarrow \text{cone}(f) \rightarrow \tau^{\geq 1}C \rightarrow Y[1]$, nos garante que $H_{\mathcal{D}}^i(\text{cone}(f)) = 0$, já que $H_{\mathcal{D}}^i(Y) = 0$, para todo $i \neq 0$, e $H_{\mathcal{D}}^i(\tau^{\geq 1}C) = 0$, para todo $i \leq 0$, e, de forma análoga, a sequência exata $H_{\mathcal{D}}^{-1}(\tau^{\geq 1}C) \rightarrow H_{\mathcal{D}}^0(Y) \rightarrow H_{\mathcal{D}}^0(\text{cone}(f)) \rightarrow H_{\mathcal{D}}^0(\tau^{\geq 1}C)$ nos permite concluir que $H_{\mathcal{D}}^0(\text{cone}(f)) \simeq Y \in \mathcal{Y}$, uma vez que $H_{\mathcal{D}}^{-1}(\tau^{\geq 1}C) = 0 = H_{\mathcal{D}}^0(\tau^{\geq 1}C)$ e $H_{\mathcal{D}}^0(Y) = Y$.

Em seguida, vamos mostrar que $\text{cone}(g)[-1] \in \mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}^{\leq -1}$. Através do triângulo $\text{cone}(g)[-1] \rightarrow \tau^{\leq 0}C \rightarrow Y \rightarrow \text{cone}(g)$, construímos a sequência exata $H_{\mathcal{D}}^i(Y) \rightarrow H_{\mathcal{D}}^{i+1}(\text{cone}(g)[-1]) \rightarrow H_{\mathcal{D}}^{i+1}(\tau^{\leq 0}C)$ e, portanto, $H_{\mathcal{D}}^{i+1}(\text{cone}(g)[-1]) = 0$, para $i > 0$, já que neste caso $H_{\mathcal{D}}^i(Y) = 0$ e $H_{\mathcal{D}}^{i+1}(\tau^{\leq 0}C) = 0$. Observe que $H_{\mathcal{D}}^0(u)$ é um isomorfismo e, além disso, $H_{\mathcal{D}}^0(\beta u)H_{\mathcal{D}}^0(u)^{-1} = \beta$. Dessa forma, deve existir um morfismo $\delta : X \rightarrow H_{\mathcal{D}}^0(\text{cone}(g)[-1])$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & H_{\mathcal{D}}^0(C) & \xrightarrow{\beta} & Y & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \delta & & \downarrow H_{\mathcal{D}}^0(u)^{-1} & & \downarrow 1 & & \\ 0 & \longrightarrow & H_{\mathcal{D}}^0(\text{cone}(g)[-1]) & \longrightarrow & H_{\mathcal{D}}^0(\tau^{\leq 0}C) & \xrightarrow{H_{\mathcal{D}}^0(\beta u)} & Y & \longrightarrow & H_{\mathcal{D}}^1(\text{cone}(g)[-1]) \longrightarrow 0 \end{array}$$

é comutativo em $ht(\mathcal{D})$. De acordo com o Lema da Serpente, δ é um isomorfismo e, consequentemente, $H_{\mathcal{D}}^0(\text{cone}(g)[-1]) \simeq X \in \mathcal{X}$. Também, $H_{\mathcal{D}}^0(\beta u)$ é um epimorfismo, o que nos garante que $H_{\mathcal{D}}^1(\text{cone}(g)[-1]) = 0$, como desejado.

Resta mostrarmos que $\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}$ é não-degenerada. Para isso, consideremos $X \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}^{\leq n}$. Neste caso, $H_{\mathcal{D}}^i(X) = 0$, para cada $i \in \mathbb{Z}$, uma vez que $X \in \mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}^{\leq i-1}$. Desde que $\mathcal{D}$ é uma t-estrutura em $\mathcal{C}$, podemos construir o triângulo $\tau^{\leq -1}X \rightarrow \tau^{\leq 0}X \rightarrow H_{\mathcal{D}}^0(X) \rightarrow (\tau^{\leq -1}X)[1]$ e, portanto, $\tau^{\leq 0}X \simeq \tau^{\leq -1}X$, conforme o corolário 1.8. Em particular, $\tau^{\leq 0}X \in \mathcal{D}^{\leq -1}$. Prosseguindo com esse argumento, é possível concluir que $\tau^{\leq 0}X \in \mathcal{D}^{\leq n}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, e, sendo $\mathcal{D}$ não-degenerada, obtemos $\tau^{\leq 0}X = 0$. De maneira similar, pode-se concluir que $\tau^{\geq 1}X = 0$, o que nos garante que $X = 0$, finalizando a demonstração. $\square$

Nas condições da proposição acima, definamos $\mathcal{T} = \mathcal{Y}$ e $\mathcal{F} = \mathcal{X}[-1]$, que são subcategorias plenas de $ht(\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})})$, já que cada $T \in \mathcal{T}$ satisfaz $H_{\mathcal{D}}^i(T) = 0$, para $i \neq 0$, e $H_{\mathcal{D}}^0(T) = T \in \mathcal{Y}$ e, de maneira similar, cada $F \in \mathcal{F}$ pode ser escrito como $X[-1]$, com $X \in \mathcal{X}$, e, portanto, satisfaz $H_{\mathcal{D}}^i(F) = 0$, para $i \neq 1$, e $H_{\mathcal{D}}^1(F) = X \in \mathcal{X}$. Além disso:

- (PT 1) $\text{Hom}_{ht(\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})})}(\mathcal{T}, \mathcal{F}) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{T}, \mathcal{F}) = 0$, pois $\mathcal{T} = \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{D}^{\leq 0}$ e $\mathcal{F} = \mathcal{X}[-1] \subseteq \mathcal{D}^{\geq 0}[-1] = \mathcal{D}^{\geq 1}$;
- (PT 2) dado $Z \in ht(\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})})$, para cada i tal que $i > 1$ ou $i < 0$, obtém-se que $H_{\mathcal{D}}^i(Z) = 0$ e, portanto, $Z \in \mathcal{D}^{\leq 1} \cap \mathcal{D}^{\geq 0}$. Neste caso, $\tau^{\leq 0}(Z[1]) = Z[1]$ e $\tau^{\geq 0}Z = Z$, donde $H_{\mathcal{D}}^0(Z) = \tau^{\leq 0}\tau^{\geq 0}Z = \tau^{\leq 0}Z$ e $H_{\mathcal{D}}^1(Z)[-1] = H_{\mathcal{D}}^0(Z[1])[-1] = (\tau^{\geq 0}\tau^{\leq 0}(Z[1]))[-1] = (\tau^{\geq 0}(Z[1]))[-1] = \tau^{\geq 1}(Z[1][-1]) = \tau^{\geq 1}Z$.

Agora, sendo $\mathcal{D}$ uma t-estrutura em $\mathcal{C}$, para Z deve existir o triângulo

$$\tau^{\leq 0}Z \rightarrow Z \rightarrow \tau^{\geq 1}Z \rightarrow (\tau^{\leq 0}Z)[1],$$

que, devido às considerações feitas acima, é da forma

$$(*) \quad H_{\mathcal{D}}^0(Z) \rightarrow Z \rightarrow H_{\mathcal{D}}^1(Z)[-1] \rightarrow H_{\mathcal{D}}^0(Z)[1],$$

com $T = H_{\mathcal{D}}^0(Z) \in \mathcal{Y} = \mathcal{T}$ e $F = H_{\mathcal{D}}^1(Z)[-1] \in \mathcal{X}[-1] = \mathcal{F}$. Além disso, o triângulo $(*)$ induz em $ht(\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})})$ a sequência exata longa

$$H_{\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}}^{-1}(F) \rightarrow H_{\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}}^0(T) \rightarrow H_{\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}}^0(Z) \rightarrow H_{\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}}^0(F) \rightarrow H_{\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}}^1(T),$$

em que cada $H_{\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}}^n$ corresponde ao funtor cohomologia referente à t-estrutura $\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}$. Desde que T e F são objetos de $ht(\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})})$, segue que $H_{\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}}^{-1}(F) = 0 = H_{\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}}^1(T)$, $H_{\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}}^0(T) =$

T , $H_{\mathcal{D}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}^0(Z) = Z$ e $H_{\mathcal{D}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}^0(F) = F$. Logo, $0 \rightarrow T \rightarrow Z \rightarrow F \rightarrow 0$ é uma sequência exata em $ht(\mathcal{D}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}))$.

Como consequência das afirmações (PT 1) e (PT 2), obtemos o seguinte corolário.

Corolário 2.2. Sejam $\mathcal{D}$ uma t-estrutura não-degenerada em uma categoria triangulada $\mathcal{C}$, $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ um par de torção em $ht(\mathcal{D})$ e $\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}$ a t-estrutura induzida por $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Então $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$, em que $\mathcal{T} = \mathcal{Y}$ e $\mathcal{F} = \mathcal{X}[-1]$, define um par de torção em $ht(\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})})$. $\square$

Em resumo, a partir do coração $ht(\mathcal{D})$ de uma t-estrutura $\mathcal{D}$ em uma categoria triangulada e de um par de torção $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ em $ht(\mathcal{D})$, foi possível construir uma nova t-estrutura, denotada por $\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}$, e o par de torção $(\mathcal{T} = \mathcal{Y}, \mathcal{F} = \mathcal{X}[-1])$ no coração $ht(\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})})$ de $\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}$. Nessas condições, define-se $\Phi_{(\mathcal{C}, \mathcal{D})}^{-1}(ht(\mathcal{D}), (\mathcal{X}, \mathcal{Y})) = (ht(\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}), (\mathcal{T}, \mathcal{F}))$. Para o caso em que a categoria triangulada $\mathcal{C}$ considerada é a categoria derivada $\mathcal{D}^b(\mathcal{B})$ de uma categoria abeliana $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ é a t-estrutura natural, Φ^{-1} corresponde ao processo inverso daquele definido por Happel, Reiten e Smalø, em [HRS96b], cuja aplicação Φ associa uma categoria abeliana $\mathcal{A}$, munida de um par de torção $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$, à categoria abeliana $\mathcal{B} = \{X \in \mathcal{D}^b(\mathcal{A}); H^{-1}(X) \in \mathcal{F}, H^0(X) \in \mathcal{T}, \text{ e } H^i(X) = 0, \text{ para cada } i \neq 0, -1\}$, munida do par de torção $(\mathcal{X} = \mathcal{F}[1], \mathcal{Y} = \mathcal{T})$.

Em busca de informações sobre a categoria $ht(\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})})$ e o par de torção $(\mathcal{Y}, \mathcal{X}[-1])$, obtidos por meio da aplicação Φ^{-1} , restringiremos o estudo a pares de torção $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ inclinantes ou coinclinantes, como definidos a seguir.

Definição 2.3. Sejam $\mathcal{B}$ uma categoria abeliana e $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ um par de torção em $\mathcal{B}$.

- (i) $\mathcal{X}$ será dita uma classe de torção inclinante se $\mathcal{B}$ for cogerada por $\mathcal{X}$, isto é, se para cada objeto $Z \in \mathcal{B}$ existirem $X_Z \in \mathcal{X}$ e um monomorfismo $Z \rightarrow X_Z$ em $\mathcal{B}$.
- (ii) $\mathcal{Y}$ será dita uma classe livre de torção coinclinante se $\mathcal{B}$ for gerada por $\mathcal{Y}$, isto é, se para cada objeto $Z \in \mathcal{B}$ existirem $Y_Z \in \mathcal{Y}$ e um epimorfismo $Y_Z \rightarrow Z$ em $\mathcal{B}$.

Em particular, se a categoria abeliana $\mathcal{B}$ for uma categoria de módulos finitamente gerados definidos sobre uma álgebra (de artin) B , as definições acima poderão ser substituídas simplesmente por:

- (i) $\mathcal{X}$ será uma classe de torção inclinante se contiver todos os B -módulos injetivos;
- (ii) $\mathcal{Y}$ será uma classe livre de torção coinclinante se contiver todos os B -módulos projetivos.

De fato, se a classe de torção $\mathcal{X}$ for inclinante, para cada B -módulo injetivo I deverão existir um B -módulo $X_I \in \mathcal{X}$ e um monomorfismo $I \rightarrow X_I$ em $\text{mod } B$ e, portanto, $I \in \mathcal{X}$, uma vez que todo monomorfismo partindo de módulo injetivo cinde e que $\mathcal{X}$ é fechada para somandos diretos.

A recíproca é assegurada pelo fato de que todo B -módulo admite envolvente injetiva.

Exemplo 2.4. (a) Seja A a álgebra associada ao quiver

cujo quiver de Auslander-

Reiten é

Observe que $\mathcal{T} = \text{add}\{P(4), M, I(1), I(2), I(3), I(4)\}$ e $\mathcal{F} = \text{add}\{P(1), P(2), P(3), S(2), N\}$ definem um par de torção em $\text{mod } A$, dado pelo A -módulo inclinante $T = P(4) \oplus I(1) \oplus M \oplus I(4)$. Uma vez que $\mathcal{T}$ contém todos os A -módulos injetivos, $\mathcal{T}$ é uma classe de torção inclinante.

Mais geralmente, dados uma álgebra A e um A -módulo inclinante T , a classe de torção $\mathcal{T}(T)$ é inclinante, uma vez que $\mathcal{T}(T) = \{Z \in \text{mod } A; \text{Ext}_A^1(T, Z) = 0\}$ e, portanto, contém todos os A -módulos injetivos.

- (b) Nas condições do item anterior, considere a álgebra $B = \text{End}_A T$, cujo quiver de Auslander-Reiten é

O A -módulo T induz em $\text{mod } B$ o par de torção $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$, em que $\mathcal{X}(T) = \{S(3'), M', I(2'), I(3'), I(4')\}$ e $\mathcal{Y}(T) = \{P(1'), P(2'), P(3'), P(4'), S(2'), N'\}$. Claramente, $\mathcal{Y}(T)$ é uma classe livre de torção coinclinante.

Mais geralmente, dados uma álgebra A e um A -módulo inclinante T , a classe livre de torção $\mathcal{Y}(T)$ obtida em $\text{mod } B = \text{End}_A T$ através do processo de inclinação de A por T é coinclinante, já que é da forma $\{Z \in \text{mod } B; \text{Tor}_1^B(Z, T) = 0\}$.

- (c) Nem toda classe de torção inclinante forma um par de torção dado por um módulo inclinante. Considere, por exemplo, a álgebra A associada ao quiver $2 \rightrightarrows 1$. O quiver de Auslander-Reiten de A é:

Sejam $\mathcal{F}$ a componente pós-projetiva e $\mathcal{T}$ a subcategoria plena de $\text{mod } A$ determinada pelos demais módulos. Neste caso, $\mathcal{T}$ é uma classe de torção inclinante, pois contém todos os A -módulos injetivos. No entanto, $\mathcal{T}$ não é dada por um módulo inclinante, já que não é possível construir um A -módulo inclinante com somandos nos tubos e não se pode obter um epimorfismo dos demais módulos em $\mathcal{T}$ para um módulo tubular.

Para o caso em que a categoria triangulada considerada é a categoria derivada $\mathcal{D}^b(\mathcal{B})$ de uma categoria abeliana $\mathcal{B}$ e a t -estrutura inicial é a natural em $\mathcal{D}^b(\mathcal{B})$, é possível estabelecer um comportamento das classes de torção inclinantes e livres de torção coinclinantes quando submetidas à aplicação Φ^{-1} , como nos mostra o lema a seguir.

Proposição 2.5. Seja $\Phi_{(\mathcal{D}^b(\mathcal{B}), \mathcal{D})}^{-1}(\mathcal{B}, (\mathcal{X}, \mathcal{Y})) = (\mathcal{A}, (\mathcal{T}, \mathcal{F}))$, em que $\mathcal{D}$ é a t-estrutura natural em $\mathcal{D}^b(\mathcal{B})$, $\mathcal{A} = \text{ht}(\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})})$, $\mathcal{T} = \mathcal{Y}$ e $\mathcal{F} = \mathcal{X}[-1]$. Então:

(a) se $\mathcal{X}$ for uma classe de torção inclinante, então $\mathcal{F}$ será uma classe livre de torção coinclinante.

(b) $\mathcal{Y}$ for uma classe livre de torção coinclinante, então $\mathcal{T}$ será uma classe de torção inclinante.

Demonstração. Uma vez que a demonstração do item (b) pode ser obtida de maneira dual, provaremos apenas o item (a). Suponhamos que $\mathcal{X}$ é uma classe de torção inclinante e consideremos em $\mathcal{A}$ o complexo $X^\cdot = (X^i, d^i)$. Mostraremos, inicialmente, que $X^\cdot$ é isomorfo a um complexo $\tilde{X}^\cdot$, com $\tilde{X}^i = 0$, para $i \neq 0, 1$. Em $\mathcal{K}^b(\mathcal{B})$, podemos construir o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccccc} X^\cdot : \dots & \longrightarrow & X^{-1} & \xrightarrow{d^{-1}} & X^0 & \xrightarrow{d^0} & X^1 & \xrightarrow{d^1} & X^2 & \longrightarrow & \dots \\ \uparrow s^\cdot & & \uparrow 1 & & \uparrow 1 & & \uparrow i & & \uparrow & & \\ \tau^{\leq 1} X^\cdot : \dots & \longrightarrow & X^{-1} & \xrightarrow{d^{-1}} & X^0 & \xrightarrow{d^0} & \text{Ker } d^1 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow t^\cdot & & \downarrow 0 & & \downarrow \pi & & \downarrow 1 & & \downarrow & & \\ \tilde{X}^\cdot : \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X^0 / \text{Im } d^{-1} & \xrightarrow{\bar{d}^0} & \text{Ker } d^1 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots, \end{array}$$

em que $\bar{d}^0$ corresponde ao morfismo induzido por d^0 e π é a projeção canônica. Note que os morfismos $s^\cdot$ e $t^\cdot$ são quase isomorfismos, o que nos garante que $X^\cdot$ é isomorfo a $\tilde{X}^\cdot$ em $\mathcal{D}^b(\mathcal{B})$. Assumiremos, portanto, que $X^i = 0$, para cada $i \neq 0, 1$.

Desde que $\mathcal{X}$ é cogrador de $\mathcal{B}$, para $X^0 \in \mathcal{B}$ existe um monomorfismo $X^0 \rightarrow T_0$, com $T_0 \in \mathcal{X}$. Neste caso, construímos em $\mathcal{B}$ a sequência exata curta

$$(*) \quad 0 \rightarrow X^0 \xrightarrow{w} T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow 0,$$

em que $T_0, T_1 \in \mathcal{X}$, já que $\mathcal{X}$ é fechada para quocientes. A sequência em $(*)$ induz em $\mathcal{D}^b(\mathcal{B})$ o triângulo

$$X^0 \xrightarrow{w} T_0 \rightarrow T_1 \xrightarrow{f} X^0[1].$$

Observe que $d^0[1]f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{B})}(T_1, X^1[1]) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{B}}^1(T_1, X^1)$ e, portanto, ao morfismo $d^0[1]f$ está associada (via o isomorfismo mencionado) uma sequência exata curta

$$0 \rightarrow X^1 \xrightarrow{\mu} E \xrightarrow{\pi} T_1 \rightarrow 0$$

em $\mathcal{B}$, obtida como resultado do *pushout* de $X^1 \xleftarrow{d^0} X^0 \xrightarrow{w} T_0$. Em $\mathcal{D}^b(\mathcal{B})$, obtemos o diagrama comutativo

$$(*) \quad \begin{array}{ccccccc} T_1[-2] & \xrightarrow{d^0[-1]f[-2]} & X^1[-1] & \xrightarrow{\mu[-1]} & E[-1] & \xrightarrow{\pi[-1]} & T_1[-1] \\ \downarrow f[-2] & & \downarrow 1 & & \downarrow g & & \downarrow f[-1] \\ X^0[-1] & \xrightarrow{d^0[-1]} & X^1[-1] & \xrightarrow{u} & X^\cdot & \xrightarrow{v} & X^0, \end{array}$$

em que a existência do morfismo $g : E[-1] \rightarrow X^\cdot$ é assegurada pelo terceiro axioma de categorias trianguladas, tendo em vista a comutatividade do primeiro quadrado. Uma vez determinado o morfismo g , basta-nos mostrar que:

(1) $E[-1] \in \mathcal{F}$ e que

(2) g é um epimorfismo em $\mathcal{A}$.

A fim de verificar (1), recordemos que para E é possível construir o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X^0 & \xrightarrow{w} & T_0 & \longrightarrow & T_1 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d^0 & & \downarrow e & & \downarrow 1_{T_1} \\ 0 & \longrightarrow & X^1 & \xrightarrow{\mu} & E & \xrightarrow{\pi} & T_1 \longrightarrow 0. \end{array}$$

Como $T_0 \in \mathcal{X}$ e $\mathcal{X}$ é fechada para quocientes, podemos concluir que $\text{Im } e \in \mathcal{X}$. Agora, de acordo com o Lema da Serpente, $\text{Coker } e \simeq \text{Coker } d^0$ e este último corresponde a $H^1(X^\cdot)$, que pertence a $\mathcal{X}$. Logo, $E \in \mathcal{X}$, donde $E[-1] \in \mathcal{F}$, como desejado.

Quanto à afirmação (2), seja $h : X^\cdot \rightarrow Z^\cdot$ um morfismo em $\mathcal{A}$ tal que $hg = 0$. Devido ao diagrama $(\star)$, $hu = hg\mu[-1] = 0$. Neste caso, h deve se fatorar através de v , ou seja, existe um morfismo $h' : X^0 \rightarrow Z^\cdot$ em $\mathcal{D}^b(\mathcal{B})$ tal que $h'v = h$. Dessa forma, $0 = hg = (h'v)g = h'(vg) = h'(f[-1]\pi[-1])$, segundo $(\star)$. Agora, desde que π é um epimorfismo em $\mathcal{B}$, o morfismo $\pi[-1]$ é um epimorfismo em $\mathcal{A}$ e, portanto, $h'f[-1] = 0$. Consideremos em $\mathcal{A}$ a sequência exata curta canônica

$$0 \rightarrow t(Z^\cdot) \xrightarrow{\alpha} Z^\cdot \xrightarrow{\beta} Z^\cdot / t(Z^\cdot) \rightarrow 0,$$

em que $t(Z^\cdot) \in \mathcal{T}$ e $Z^\cdot / t(Z^\cdot) \in \mathcal{F}$. Observe que $\beta h' \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{B})}(X^0, Z^\cdot / t(Z^\cdot)) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{B}}^{-1}(X^0, Z^\cdot / t(Z^\cdot)[1]) = 0$, donde h' se fatora através de α , isto é, existe em $\mathcal{D}^b(\mathcal{B})$ um morfismo $h'' : X^0 \rightarrow t(Z^\cdot)$ tal que $\alpha h'' = h'$. Assim, $(\alpha h'')f[-1] = h'f[-1] = 0$ e, portanto, $h''f[-1] = 0$, já que α é um monomorfismo em $\mathcal{A}$. Neste caso, sendo $T_0[-1] \rightarrow T_1[-1] \xrightarrow{-f[-1]} X^0 \xrightarrow{w} T_0$ um triângulo em $\mathcal{D}^b(\mathcal{B})$, existe um morfismo $h''' : T_0 \rightarrow t(Z^\cdot)$ tal que $h'''w = h''$. Agora, $h''' = 0$, uma vez que $T_0 \in \mathcal{X}$ e $t(Z^\cdot) \in \mathcal{Y}$. Logo, $h = 0$, o que nos mostra que g é um epimorfismo em $\mathcal{A}$. Consequentemente, $\mathcal{F}$ gera $\mathcal{A}$. $\square$

As recíprocas dos itens (a) e (b) da proposição acima podem ser obtidas ao assumirmos que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{A}$ admitem suficientes injetivos, uma vez que, nessas condições, tendo em vista o teorema 2.6 enunciado a seguir, pode-se verificar que Φ (como definida em [HRS96b]) e Φ^{-1} são, de fato, aplicações inversas e, portanto, a demonstração segue como consequência da Proposição 3.2 (ii) de [HRS96b].

Teorema 2.6. Sejam $\mathcal{B}$ uma categoria abeliana, $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ um par de torção em $\mathcal{B}$ e $\Phi_{(\mathcal{D}^b(\mathcal{B}), \mathcal{D})}^{-1}(\mathcal{B}; (\mathcal{X}, \mathcal{Y})) = (\mathcal{A}; (\mathcal{T}, \mathcal{F}))$, em que $\mathcal{D}$ é a t-estrutura natural em $\mathcal{D}^b(\mathcal{B})$ e $\mathcal{A} = \text{ht}(\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})})$. Assuma que $\mathcal{B}$ contém suficientes injetivos e que $\mathcal{Y}$ é uma classe livre de torção coinclinante.

- (i) Se $\mathcal{A}$ contiver suficientes injetivos, então deverá existir uma equivalência triangular $G : \mathcal{D}^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{B})$ cuja restrição a $\mathcal{A}$ corresponde ao funtor identidade de $\mathcal{A}$.
- (ii) Se $\mathcal{B}$ contiver suficientes projetivos, então deverá existir uma equivalência triangular $F : \mathcal{D}^b(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ cuja restrição a $\mathcal{A}$ corresponde ao funtor identidade de $\mathcal{A}$.

Demonstração. É consequência do Teorema 3.3 de [HRS96b] e dos resultados obtidos em [BBD82] (pg. 79-84). $\square$

2.2 Objetos Inclinantes e o Teorema Principal

Apresentaremos a seguir a definição de objeto inclinante, que, segundo [HRS96b], generaliza o conceito de módulo inclinante. Para que a definição seja possível, deveremos considerar uma categoria abeliana que seja adicionalmente Krull-Schmidt. Ficará claro que cada objeto inclinante determina um par de torção, no qual estamos principalmente interessados.

Definição 2.7. Seja $\mathcal{B}$ uma categoria abeliana Krull-Schmidt. Um objeto T em $\mathcal{B}$ será dito inclinante se existir um par de torção $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ em $\mathcal{B}$ satisfazendo as seguintes condições:

(OI 1) $\mathcal{X}$ é uma classe de torção inclinante;

(OI 2) $\mathcal{X} = \text{Gen } T$;

(OI 3) $\text{Ext}_{\mathcal{B}}^i(T, X) = 0$, para cada $X \in \mathcal{X}$ e cada $i > 0$;

(OI 4) Se $Z \in \mathcal{X}$ for tal que $\text{Ext}_{\mathcal{B}}^i(Z, X) = 0$, para cada $X \in \mathcal{X}$ e cada $i > 0$, então $Z \in \text{add } T$;

(OI 5) Se $\text{Ext}_{\mathcal{B}}^i(T, Z) = 0$, para cada $i \geq 0$ e $Z \in \mathcal{B}$, então $Z = 0$.

Nessas condições, diremos que a classe de torção $\mathcal{X}$ é dada pelo objeto inclinante T . Torna-se claro, portanto, que se $\mathcal{X}$ for uma classe de torção dada por um objeto inclinante, então $\mathcal{X}$ será inclinante.

Dualmente, define-se objeto coinclinante e classe livre de torção dada por um objeto coinclinante.

Algumas propriedades satisfeitas pelos módulos inclinantes podem também ser obtidas para objetos inclinantes. É o que nos garantem os lemas a seguir.

Lema 2.8. Sejam $\mathcal{B}$ uma R -categoria abeliana (R um anel comutativo) e $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ um par de torção em $\mathcal{B}$.

(a) Se $\mathcal{X}$ for dada por um objeto inclinante T , então $dp_{\mathcal{B}} T \leq 1$.

(b) Se $\mathcal{Y}$ for dada por um objeto coinclinante T , então $di_{\mathcal{B}} T \leq 1$. □

Lema 2.9. Sejam $\mathcal{B}$ uma R -categoria abeliana (em que R é um anel comutativo) e $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ um par de torção em $\mathcal{B}$.

(a) Se $\mathcal{X}$ for dada por um objeto inclinante T e $Z \in \mathcal{B}$ satisfizer $\text{Ext}_{\mathcal{B}}^i(T, Z) = 0$, para cada $i > 0$, então $Z \in \mathcal{X}$.

(b) Se $\mathcal{Y}$ for dada por um objeto coinclinante T e $Z \in \mathcal{B}$ satisfizer $\text{Ext}_{\mathcal{B}}^i(Z, T) = 0$, para cada $i > 0$, então $Z \in \mathcal{Y}$. □

Em outras palavras, os lemas 2.8 e 2.9 nos garantem que uma classe de torção $\mathcal{X}$ em $\mathcal{B}$ dada por um objeto inclinante T é da forma $\{Z \in \mathcal{B}; \text{Ext}_{\mathcal{B}}^1(T, Z) = 0\}$, como tínhamos para uma classe de torção dada por um módulo inclinante.

A seguir, apresentaremos o principal resultado deste capítulo. A partir dele, sendo $\Phi_{(\mathcal{D}^b(\mathcal{B}), \mathcal{D})}^{-1}(\mathcal{B}; (\mathcal{X}, \mathcal{Y})) = (ht(\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}); (\mathcal{T}, \mathcal{F}))$, em que $\mathcal{D}$ é a t -estrutura natural em $\mathcal{D}^b(\mathcal{B})$, será possível obter condições (necessárias e suficientes) para que as categorias abelianas $\mathcal{B}$ e $ht(\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})})$ sejam categorias de módulos sobre uma álgebra de artin e, também, para que os pares de torção $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ e $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ sejam dados por um objeto inclinante ou coinclinante.

Teorema 2.10. Sejam $\mathcal{B}$ uma categoria abeliana com suficientes injetivos, $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ um par de torção coinclinante em $\mathcal{B}$ e

$$\Phi_{(\mathcal{D}^b(\mathcal{B}), \mathcal{D})}^{-1}(\mathcal{B}, (\mathcal{X}, \mathcal{Y})) = (\mathcal{A}, (\mathcal{T}, \mathcal{F})),$$

em que $\mathcal{D}$ corresponde à t-estrutura natural em $\mathcal{D}^b(\mathcal{B})$ e $\mathcal{A} = ht(\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})})$. Então:

- (a) (i) Se $\mathcal{T}$ for dada por um objeto inclinante T , então $\mathcal{B} \simeq mod \text{End } T$.
- (ii) Se $\mathcal{B} \simeq mod \Lambda$, para alguma k -álgebra Λ , então $\mathcal{T}$ será dada por um objeto inclinante T e, mais ainda, Λ e $\text{End } T$ serão Morita-equivalentes.
- (b) (i) Se $\mathcal{Y}$ for dada por um objeto coinclinante T , então $\mathcal{A} \simeq mod \text{End } T$.
- (ii) Se $\mathcal{A} \simeq mod \Lambda$, para alguma k -álgebra Λ , então $\mathcal{Y}$ será dada por um objeto coinclinante T e, mais ainda, Λ e $\text{End } T$ serão Morita-equivalentes.

A fim de demonstrar o teorema 2.10, enunciaremos (e provaremos) a seguir um resultado necessário, que nos garante que, sobre algumas hipóteses adicionais, Φ^{-1} associa sequências exatas à sequências exatas.

Lema 2.11. Sejam $\Phi_{(\mathcal{C}, \mathcal{D})}^{-1}(ht(\mathcal{D}), (\mathcal{X}, \mathcal{Y})) = (ht(\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}), (\mathcal{T}, \mathcal{F}))$ e $(*) \ 0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$ em $ht(\mathcal{D})$. Então:

- (a) A sequência em $(*)$ será exata em $ht(\mathcal{D})$, com termos em $\mathcal{Y}$, se, e somente se, $(*)$ for exata em $ht(\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})})$, com termos em $\mathcal{T}$.
- (b) A sequência em $(*)$ será exata em $ht(\mathcal{D})$, com termos em $\mathcal{X}$, se, e somente se, a sequência $0 \rightarrow A[-1] \xrightarrow{\alpha[-1]} B[-1] \xrightarrow{\beta[-1]} C[-1] \rightarrow 0$ for exata em $ht(\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})})$, com termos em $\mathcal{F}$.

Demonstração: Mostraremos apenas o item (a), já que a demonstração de (b) pode ser obtida de forma análoga. Suponhamos que a sequência em $(*)$ é exata em $ht(\mathcal{D})$, com todos os termos em $\mathcal{Y}$. A fim de provarmos que β é um epimorfismo em $ht(\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})})$, consideremos $g : C \rightarrow X$ um morfismo em $ht(\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})})$ satisfazendo $g\beta = 0$. Como $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ é um par de torção em $ht(\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})})$, existe uma sequência exata curta

$$0 \rightarrow t(X) \xrightarrow{u} X \xrightarrow{v} X/t(X) \rightarrow 0,$$

com $t(X) \in \mathcal{T}$ e $X/t(X) \in \mathcal{F}$. Observe que não há morfismo não nulo de C para $X/t(X)$ e, portanto, g deve se fatorar através de u , isto é, deve existir em $ht(\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})})$ um morfismo $h : C \rightarrow t(X)$ tal que $uh = g$. Neste caso, $uh\beta = g\beta = 0$, donde $h\beta = 0$, já que u é um monomorfismo em $ht(\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})})$. Uma vez que h é um morfismo em $ht(\mathcal{D})$ e que β é, por hipótese, um epimorfismo em $ht(\mathcal{D})$, podemos concluir que $h = 0$ e, consequentemente, $g = 0$, como desejado.

Em seguida, verificaremos que (C, β) corresponde ao conúcleo do morfismo α em $ht(\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})})$. Para isso, considere em $ht(\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})})$ um morfismo $h : B \rightarrow X$ tal que $h\alpha = 0$. Como anteriormente, seja

$$0 \rightarrow t(X) \xrightarrow{u} X \xrightarrow{v} X/t(X) \rightarrow 0$$

a sequência exata canônica em $ht(\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})})$ para X relativa ao par de torção $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$. Observe que não há morfismo não nulo de B para $X/t(X)$ e, portanto, existe em $ht(\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})})$ um morfismo $h' : B \rightarrow t(X)$ satisfazendo $uh' = h$. Assim, $uh'\alpha = h\alpha = 0$ e, sendo u um monomorfismo em $ht(\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})})$, segue que

$h'\alpha = 0$. Uma vez que (C, β) é o conúcleo de α em $ht(\mathcal{D})$ e que h' é um morfismo em $ht(\mathcal{D})$ (tal que a composição $h'\alpha$ se anula), existe $h'' : C \rightarrow t(X)$ tal que $h''\beta = h'$, donde $uh''\beta = h$, ou seja, h se fatora através de β , o que finaliza a demonstração da afirmação feita.

As considerações acima nos permitem construir em $ht(\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})})$ o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \gamma & & \downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker } \beta & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\beta} & C \longrightarrow 0, \end{array}$$

em que $i : \text{Ker } \beta \rightarrow B$ é a inclusão canônica e a existência do morfismo γ é garantida pela comutatividade do segundo quadrado. De acordo com o Lema da Serpente, γ é um epimorfismo e, portanto, $\text{Ker } \beta \in \mathcal{T}$, já que $\mathcal{T}$ é fechada para quocientes. Em particular, $\text{Ker } \beta \in ht(\mathcal{D})$. Provaremos a seguir que a sequência $0 \rightarrow \text{Ker } \beta \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$ é também exata em $ht(\mathcal{D})$. Por hipótese, β é um epimorfismo em $ht(\mathcal{D})$. A fim de concluir que $(\text{Ker } \beta, i)$ é o núcleo de β em $ht(\mathcal{D})$, consideremos um morfismo $g : Z \rightarrow B$ em $ht(\mathcal{D})$ satisfazendo $\beta g = 0$. Seja

$$0 \rightarrow t(Z) \xrightarrow{u} Z \xrightarrow{v} Z/t(Z) \rightarrow 0$$

a sequência exata canônica para Z relativa ao par de torção $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ de $ht(\mathcal{D})$. Observe que não há morfismo não nulo de $t(Z)$ para B e, portanto, deve existir em $ht(\mathcal{D})$ um morfismo $h : Z/t(Z) \rightarrow B$ tal que $hv = g$. Dessa forma, $\beta hv = 0$, desde que $\beta g = 0$. Além disso, sendo v um epimorfismo em $ht(\mathcal{D})$, podemos concluir que $\beta h = 0$. Agora, como h é um morfismo em $ht(\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})})$ e $(\text{Ker } \beta, i)$ é o núcleo de β , existe um morfismo $h' : Z/t(Z) \rightarrow \text{Ker } \beta$ tal que $ih' = h$, donde $g = ih'v$, como desejado.

Nos resta mostrar que i é um monomorfismo em $ht(\mathcal{D})$. Para isso, consideremos um morfismo $g : Y \rightarrow \text{Ker } \beta$ em $ht(\mathcal{D})$ tal que $ig = 0$. Para Y , seja $0 \rightarrow t(Y) \xrightarrow{u'} Y \xrightarrow{v'} Y/t(Y) \rightarrow 0$ a sequência exata canônica em $ht(\mathcal{D})$ relativa ao par de torção $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Uma vez que a composição gu' se anula, existe em $\mathcal{B}$ um morfismo $h : Y/t(Y) \rightarrow \text{Ker } \beta$ satisfazendo $hv' = g$. Neste caso, $i(hv') = ig = 0$ e, portanto, $ih = 0$, pois v' é um epimorfismo em $ht(\mathcal{D})$. Logo, $h = 0$, já que i é um monomorfismo em $ht(\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})})$ e, consequentemente, $g = 0$.

Podemos então construir em $ht(\mathcal{D})$ o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \gamma & & \downarrow 1 & & \downarrow 1 \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker } \beta & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\beta} & C \longrightarrow 0, \end{array}$$

donde segue que γ é um isomorfismo. Logo, $\alpha = i\gamma$ é um monomorfismo em $ht(\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})})$.

A recíproca tem demonstração bastante similar e pode ser obtida seguindo as seguintes etapas:

- Verificar que α é um monomorfismo em $ht(\mathcal{D})$, considerando para isso um morfismo $h : Z \rightarrow A$ em $ht(\mathcal{D})$ satisfazendo $\alpha h = 0$ e a sequência exata canônica para Z relativa ao par de torção $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$;
- Mostrar que o par (A, α) é o núcleo do morfismo β em $ht(\mathcal{D})$, novamente levando em conta a existência da sequência exata canônica relativa ao par de torção $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ para um objeto Z tal que há um morfismo $\delta : Z \rightarrow B$ satisfazendo $\beta \delta = 0$;
- Garantir a existência de um morfismo $\gamma : \text{Coker } \alpha \rightarrow C$ em $\mathcal{B}$ tal que $\gamma\pi = \beta$, em que $\pi : B \rightarrow \text{Coker } \alpha$ é a projeção canônica em $ht(\mathcal{D})$;

- Verificar que a sequência $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\pi} \text{Coker } \alpha \rightarrow 0$ é também exata em $ht(\mathcal{D}_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})})$ e, portanto, concluir que γ é um isomorfismo em $ht(\mathcal{D})$, assegurando que β é um epimorfismo em $ht(\mathcal{D})$. $\square$

Tendo os lemas anteriores em vista, podemos demonstrar o teorema 2.10.

Demonstração do teorema 2.10: (a)(i) Suponha que $\mathcal{T}$ é dada por um objeto inclinante T . Para concluirmos que $\mathcal{B}$ e $\text{mod End } T$ são categorias equivalentes, basta mostrarmos que T é projetivo e gerador para $\mathcal{B}$, devido ao Teorema de Morita. Por hipótese, $\mathcal{Y}$ é uma classe livre de torção coinclinante e, portanto, $\mathcal{Y}$ gera $\mathcal{B}$. Neste caso, é suficiente verificarmos que T gera $\mathcal{Y}$. Consideremos para isso $Y \in \mathcal{Y} = \mathcal{T}$. Uma vez que $\mathcal{T} = \text{Gen } T$, existe um epimorfismo $g : T^m \rightarrow Y$ em $\mathcal{A}$, para algum inteiro positivo m . Seja $\pi : T^n \rightarrow Y$ uma $\text{add } T$ -aproximação à direita de Y . Observe que π é um epimorfismo em $\mathcal{A}$, pois g deve se fatorar através de π e g é um epimorfismo, donde podemos construir a sequência exata

$$0 \rightarrow \text{Ker } \pi \rightarrow T^n \xrightarrow{\pi} Y \rightarrow 0 \quad (*)$$

em $\mathcal{A}$. Agora, dado $i > 1$, $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(T, \text{Ker } \pi) = 0$, já que

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{i-1}(T, Y) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(T, \text{Ker } \pi) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(T, T^n)$$

é uma sequência exata com termos das pontas nulos, por T ser um objeto inclinante em $\mathcal{A}$. Mais ainda, $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(T, \text{Ker } \pi) = 0$, pois a sequência

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(T, T^n) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{A}}(T, \pi)} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(T, Y) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(T, \text{Ker } \pi) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(T, T^n) = 0$$

é exata e o morfismo $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(T, \pi)$ é um epimorfismo. Com isso, $\text{Ker } \pi \in \mathcal{T}$, o que nos garante que a sequência exata $(*)$ tem todos os termos em $\mathcal{T}$. Segue do lema 2.11(a) que $(*)$ é também uma sequência exata em $\mathcal{B}$, com termos em $\mathcal{Y}$. Em particular, T gera Y , ou ainda, T gera $\mathcal{Y}$.

Por fim, vejamos que T é projetivo em $\mathcal{B}$. Sejam $Z \in \mathcal{B}$ e

$$0 \rightarrow t(Z) \rightarrow Z \rightarrow Z/t(Z) \rightarrow 0 \quad (\star)$$

a sequência exata canônica para Z relativa ao par de torção $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Para $i > 0$, observe que:

- (1) $\text{Ext}_{\mathcal{B}}^i(T, t(Z)) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{B})}(T, t(Z)[i]) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{A})}(T, t(Z)[-1][i+1]) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{i+1}(T, t(Z)[-1]) = 0$, já que $dp_{\mathcal{A}} T \leq 1$, segundo o lema 2.8;
- (2) $\text{Ext}_{\mathcal{B}}^i(T, Z/t(Z)) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{B})}(T, Z/t(Z)[i]) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{A})}(T, Z/t(Z)[i]) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(T, Z/t(Z)) = 0$, pois T é inclinante e $Z/t(Z) \in \mathcal{T}$.

A existência da sequência exata em $(\star)$ e as afirmações (1) e (2) nos asseguram que $\text{Ext}_{\mathcal{B}}^i(T, Z) = 0$, para cada $i > 0$ e, portanto, T é projetivo. Consequentemente, $\mathcal{B}$ e $\text{mod End } T$ são equivalentes.

(ii) Assuma que $\mathcal{B} \simeq \text{mod } \Lambda$, para alguma k -álgebra Λ . Sendo $\mathcal{Y}$ uma classe livre de torção coinclinante, dado um Λ -módulo indecomponível projetivo P , existem $Y \in \mathcal{Y}$ e um epimorfismo $Y \rightarrow P$ em $\text{mod } \Lambda$, o que nos permite concluir que $P \in \mathcal{Y}$ e, portanto, $\Lambda_{\Lambda} \in \mathcal{Y}$. Seja $T = \Lambda_{\Lambda}$ e vejamos que T é um objeto inclinante em $\mathcal{A}$. A condição (OI 1) estabelecida na definição de objeto inclinante é satisfeita por T , pois $\mathcal{T}$ é uma classe de torção inclinante, conforme garante a proposição 2.5(b). A fim de mostrarmos

(OI 2), ou seja, que $\mathcal{T} = \text{Gen } T$, consideremos $Z \in \mathcal{T} = \mathcal{Y}$. Em particular, Z pode ser visto como um Λ -módulo e, portanto, podemos construir uma sequência exata

$$0 \rightarrow \text{Ker } \pi \rightarrow (\Lambda_\Lambda)^n \xrightarrow{\pi} Z \rightarrow 0$$

em $\text{mod } \Lambda$, para algum inteiro positivo n , com todos os termos em $\mathcal{Y}$, já que $\mathcal{Y}$ é fechada para submódulos. De acordo com o lema 2.11(a), essa é também uma sequência exata em $\mathcal{A}$, com termos em $\mathcal{T}$. Logo, $Z \in \text{Gen } T$, ou ainda, $\mathcal{T} = \text{Gen } T$.

Consideremos, agora, $Z \in \mathcal{T}$ e um inteiro positivo i . Observe que $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(T, Z) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{A})}(T, Z[i]) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T, Z[i]) \simeq \text{Ext}_{\Lambda}^i(T, Z) = 0$, já que $T = \Lambda_\Lambda$. Com isso, T é Ext-projetivo em $\mathcal{T}$ e está verificada a condição (OI 3).

Em seguida, seja $Z \in \mathcal{T}$ satisfazendo $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(Z, M) = 0$, para cada $M \in \mathcal{T}$ e cada índice $i > 0$. A fim de mostrarmos que $Z \in \text{add } T$, verificaremos que Z , visto como Λ -módulo, é projetivo. Seja $B \in \mathcal{B}$. Uma vez que $\mathcal{Y}$ é uma classe livre de torção coincidente, existe uma sequência exata

$$0 \rightarrow Y_1 \rightarrow Y_0 \rightarrow B \rightarrow 0,$$

em $\text{mod } \Lambda$, com $Y_0, Y_1 \in \mathcal{Y}$. Neste caso, a sequência

$$\text{Ext}_{\Lambda}^i(Z, Y_0) \rightarrow \text{Ext}_{\Lambda}^i(Z, B) \rightarrow \text{Ext}_{\Lambda}^{i+1}(Z, Y_1)$$

é exata, para cada inteiro i . Além disso, se $i > 0$,

- (1) $\text{Ext}_{\Lambda}^i(Z, Y_0) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(Z, Y_0[i]) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{A})}(Z, Y_0[i]) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(Z, Y_0) = 0$, por hipótese, e
- (2) $\text{Ext}_{\Lambda}^{i+1}(Z, Y_1) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(Z, Y_1[i+1]) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{A})}(Z, Y_1[i+1]) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{i+1}(Z, Y_1) = 0$, novamente por hipótese.

Logo, $\text{Ext}_{\Lambda}^i(Z, B) = 0$, sempre que tivermos $i > 0$ e, portanto, Z é projetivo em $\text{mod } \Lambda$. Como consequência, segue que $Z \in \text{add } T$.

Finalmente, consideremos $Z \in \mathcal{A}$ tal que $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(T, Z) = 0$, para todo $i \geq 0$. Em particular, para $i = 0$, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(T, Z) = 0$ e então $Z \in \mathcal{F}$. Nesse caso, $0 = \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(T, Z) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{A})}(T, Z[1]) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T, Z[1]) \simeq \text{Hom}_{\Lambda}(T, Z[1])$, o que nos permite concluir que $Z[1] = 0$, já que todo Λ -módulo não nulo deve admitir cobertura projetiva. Consequentemente, $Z = 0$.

As considerações acima nos garantem que T é de fato um objeto inclinante em $\mathcal{A}$ e que $\mathcal{T}$ é dada por T , como desejado. $\square$

Capítulo 3

ÁLGEBRAS m -QUASE HEREDITÁRIAS E m -QUASE INCLINADAS

Em [HRS96b], Happel, Reiten e Smalø apresentaram uma generalização para as classes das álgebras inclinadas e canônicas, as chamadas álgebras quase inclinadas, que correspondem às álgebras da forma $\text{End } T$, em que T é um objeto inclinante em uma categoria hereditária. Ainda em [HRS96b], verificaram que estas são precisamente aquelas álgebras A que satisfazem as condições (i) $\dim.gl A \leq 2$ e (ii) para cada A -módulo indecomponível X , $dp_A X \leq 1$ ou $di_A X \leq 1$, chamadas de quase hereditárias. Neste capítulo, proporemos generalizações para os conceitos de álgebras quase inclinadas e quase hereditárias, as álgebras m -quase inclinadas e m -quase hereditárias ($m \geq 1$), e mostraremos que toda álgebra m -quase inclinada de dimensão global $m + 1$ é m -quase hereditária. Em busca de condições para que também seja obtida a recíproca, que ilustraremos não ser necessariamente verdadeira, serão discutidas algumas propriedades homológicas das álgebras m -quase inclinadas.

3.1 Álgebras m -Quase Hereditárias

Esta seção será destinada ao estudo das álgebras m -quase hereditárias, cuja definição apresentaremos a seguir.

Definição 3.1. Uma álgebra A será dita (m, n) -quase hereditária ($m \geq 0, n \geq 0$) se satisfizer as seguintes condições:

- (i) $\dim.gl A = m + n$ e
- (ii) para cada A -módulo indecomponível X , $dp_A X \leq m$ ou $di_A X \leq n$.

Concentraremos nosso estudo ao caso em que $n = 1$, ou seja, às álgebras $(m, 1)$ -quase hereditárias, que, por simplicidade, chamaremos de m -quase hereditárias. Destacamos que cada uma das condições acima não pode ser obtida a partir da outra e que, portanto, não pode ser omitida da definição. Considere, por exemplo, A a k -álgebra de caminhos associada ao *quiver*

$$1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_{m+1}} m+2 \xrightarrow{\alpha_{m+2}} m+3,$$

com a relação $\alpha_i \alpha_{i+1} = 0$, para cada $1 \leq i \leq m+2$, em que $m > 1$. O *quiver* de Auslander-Reiten de A é da forma

e, portanto, $\dim.gl A = m + 2$, $di_A S_2 \leq 1$ e $dp_A S_i \leq m + 3 - i$, para cada $3 \leq i \leq m + 2$. Logo, está verificada a condição (ii), mas (i) não é obtida, embora A seja $(m + 1)$ -quase hereditária. Na verdade, é sempre possível mostrar que uma álgebra que satisfaz somente a condição (ii), com dimensão global maior que m , é $(m + 1)$ -quase hereditária, afirmação garantida pelo lema a seguir.

Lema 3.2. Sejam m um inteiro positivo e A uma álgebra tal que $dp_A X \leq m$ ou $di_A X \leq 1$, para cada A -módulo indecomponível X . Então $\dim.gl A \leq m + 2$. Em particular, se $\dim.gl A > m$, então A é m -quase hereditária ou $(m + 1)$ -quase hereditária.

Demonstração. Sejam $X \in ind A$ e $0 \rightarrow \Omega^2(X) \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow X \rightarrow 0$ o início de uma resolução projetiva minimal de X . Observe que, para cada somando indecomponível K de $\Omega^2(X)$, devemos ter $\text{Ext}_A^2(X, K) \neq 0$ e, portanto, $di_A K \geq 2$. Neste caso, por hipótese, todo somando indecomponível K de $\Omega^2(X)$ satisfaz $dp_A K \leq m$, ou ainda, $dp_A \Omega^2(X) \leq m$. Como consequência, $dp_A X \leq m + 2$, o que nos permite concluir que $\dim.gl A \leq m + 2$.

Claramente, se $\dim.gl A = m + 1$, então A é m -quase hereditária e se $\dim.gl A = m + 2$, então A é $(m + 1)$ -quase hereditária. $\square$

Reuniremos, em seguida, alguns lemas básicos que serão úteis para a demonstração de resultados referentes às álgebras m -quase hereditárias.

Lema 3.3. Seja A uma álgebra tal que $\dim.gl A \leq m + 1$. Então:

- (i) A subcategoria de $mod A$ que consiste dos A -módulos com dimensão projetiva no máximo m é fechada para submódulos e extensões.
- (ii) A subcategoria de $mod A$ que consiste dos A -módulos com dimensão injetiva no máximo m é fechada para quocientes e extensões.

Demonstração. Vamos mostrar somente o item (i). Considere a sequência exata $(\star) 0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ em $mod A$, em que X e Z têm dimensões projetiva no máximo m . Ao aplicarmos o funtor $\text{Hom}_A(_, -)$ à $(\star)$, obtemos a também sequência exata $0 = \text{Ext}_A^{m+1}(Z, -) \rightarrow \text{Ext}_A^{m+1}(Y, -) \rightarrow \text{Ext}_A^{m+1}(X, -) = 0$ e, portanto, $\text{Ext}_A^{m+1}(Y, -) = 0$. Como consequência, $dp_A Y \leq m$.

Agora, sejam X e Y A -módulos tais que $dp_A Y \leq m$ e existe um monomorfismo $f : X \rightarrow Y$. Neste caso, construímos uma sequência exata $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \rightarrow \text{Coker } f \rightarrow 0$ em $mod A$ e, portanto, $dp_A X \leq \max\{dp_A Y, dp_A \text{Coker } f - 1\}$. Uma vez que $\dim.gl A \leq m + 1$, devemos ter $dp_A \text{Coker } f - 1 \leq m$, o que nos garante que $dp_A X \leq m$, como desejado. $\square$

Lema 3.4. Sejam A uma k -álgebra e $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ uma sequência exata em $mod A$ que não cinde.

- (a) Se X for indecomponível, então para cada somando indecomponível Y' de Y , a componente $Y' \rightarrow Z$ de g será não nula.
- (b) Se Z for indecomponível, então para cada somando indecomponível Y' de Y , a componente $X \rightarrow Y'$ de f será não nula.

Demonstração. Uma vez que (b) pode ser obtido de forma análoga, mostraremos apenas o item (a). Suponha que X é indecomponível e que existe um somando indecomponível Y_1 de Y tal que $Y_1 \hookrightarrow Y \xrightarrow{g} Z$ é o morfismo nulo. Escrevamos $(\star) \ 0 \rightarrow X \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}} Y_1 \oplus Y_2 \xrightarrow{(0 \ g_2)} Z \rightarrow 0$. Neste caso, conforme o lema 1.10, f_1 é um epimorfismo que cinde e, portanto, a sequência exata $0 \rightarrow \text{Ker } f_1 \rightarrow X \xrightarrow{f_1} Y_1 \rightarrow 0$ cinde. Dessa forma, $X \simeq \text{Ker } f_1 \oplus Y_1$, o que nos permite concluir que $\text{Ker } f_1 = 0$, já que X e Y_1 são indecomponíveis. Consequentemente, f_1 é um isomorfismo, com inversa denotada por h_1 . Observe que $(h_1 \ 0) \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = h_1 f_1 = 1_X$, donde $(\star)$ cinde, o que é uma contradição. $\square$

Lema 3.5 ([HRS96b]). Sejam A uma álgebra e $f : X \rightarrow Y$ um morfismo de A -módulos que não é monomorfismo nem epimorfismo. Sejam ainda $\bar{f} : X \rightarrow \text{Im } f$ a correstricção de f e $i : \text{Im } f \rightarrow Y$ a inclusão. Então existem um A -módulo Z e morfismos $f' : X \rightarrow Z$ e $g' : Z \rightarrow Y$ tais que $0 \rightarrow X \xrightarrow{\begin{pmatrix} \bar{f} \\ f' \end{pmatrix}} \text{Im } f \oplus Z \xrightarrow{(i \ g')} Y \rightarrow 0$ é uma sequência exata se, e somente se, $0 \rightarrow \text{Ker } f \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \rightarrow \text{Coker } f \rightarrow 0$ é o elemento nulo em $\text{Ext}_A^2(\text{Coker } f, \text{Ker } f)$. $\square$

Observação 3.6. Como no lema 3.5, sejam $f : X \rightarrow Y$ um morfismo não nulo de A -módulos que não é monomorfismo nem epimorfismo, $\bar{f} : X \rightarrow \text{Im } f$ a correstricção de f e $i : \text{Im } f \rightarrow Y$ a inclusão. Suponha que X e Y são indecomponíveis e que $0 \rightarrow \text{Ker } f \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \rightarrow \text{Coker } f \rightarrow 0$ é o elemento nulo em $\text{Ext}_A^2(\text{Coker } f, \text{Ker } f)$. Podemos então construir em $\text{mod } A$ o seguinte diagrama comutativo com linhas e colunas exatas

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \text{Ker } f & \xrightarrow{1} & \text{Ker } f & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow u & & \\
 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f'} & Z & \xrightarrow{v} & \text{Coker } f \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow g' & & \downarrow 1 \\
 0 & \longrightarrow & \text{Im } f & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{w} & \text{Coker } f \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0, & &
 \end{array}$$

que é tal que a sequência exata $(\star) \ 0 \rightarrow X \xrightarrow{f'} Z \xrightarrow{v} \text{Coker } f \rightarrow 0$ não cinde. De fato, se esse não for o caso, deve existir um morfismo $v' : \text{Coker } f \rightarrow Z$ satisfazendo $vv' = 1_{\text{Coker } f}$. Assim, $(*) \ wg'v' = vv' = 1$, o que nos permite concluir que w é um epimorfismo que cinde e, portanto, $\text{Im } f \oplus \text{Im } (g'v') = Y$. Sendo Y indecomponível, $\text{Im } f = 0$ ou $\text{Im } (g'v') = 0$, e, uma vez que f é não nulo, devemos ter $\text{Im } (g'v') = 0$. Dessa forma, segue de $(*)$ que $\text{Coker } f = 0$, ou ainda, f é um epimorfismo, o que é uma contradição. Nessas condições, de acordo com o lema 3.4, se $\text{Coker } f$ for indecomponível, então, para cada somando indecomponível Z' de Z , a componente $X \rightarrow Z'$ do morfismo f' será não nula.

Analogamente, conclui-se que a sequência exata $0 \rightarrow \text{Ker } f \xrightarrow{u} Z \xrightarrow{g'} Y \rightarrow 0$ não cinde e, portanto, para cada somando indecomponível Z' de Z , a componente $Z' \rightarrow Y$ do morfismo g' será não nula se $\text{Ker } f$ for indecomponível.

Em seguida, apresentaremos o primeiro resultado sobre as álgebras m -quase hereditárias, que garante que não há morfismo não nulo de um módulo indecomponível de dimensão projetiva $m + 1$ para um indecomponível de dimensão injetiva maior ou igual a 2.

Lema 3.7. Sejam A uma álgebra m -quase hereditária e X e Y A -módulos indecomponíveis tais que $dp_A X = m + 1$ e $di_A Y \geq 2$. Então $\text{Hom}_A(X, Y) = 0$.

Demonstração. Suponhamos que existe um morfismo não nulo $f : X \rightarrow Y$, em que X e Y são A -módulos indecomponíveis tais que $dp_A X = m + 1$ e $di_A Y \geq 2$. Entre todas as triplas $(X, Y, f : X \rightarrow Y)$ que cumprem as três condições estabelecidas acima, escolhamos aquela $(X, Y, f : X \rightarrow Y)$ tal que $\ell(X) + \ell(Y)$ é mínimo. Desde que A é m -quase hereditária, $dp_A Y \leq m$ e, portanto, $dp_A \text{Im } f \leq m$, segundo o lema 3.3. Dessa forma, f não é um monomorfismo, já que, caso contrário, $\text{Im } f \simeq X$, mas $dp_A X = m + 1$. Por absurdo, assumamos que f é um epimorfismo. Neste caso, construímos a sequência exata $(*) \text{Ext}_A^{m+1}(Y, -) \rightarrow \text{Ext}_A^{m+1}(X, -) \rightarrow \text{Ext}_A^{m+1}(\text{Ker } f, -) \rightarrow \text{Ext}_A^{m+2}(Y, -) = 0$, obtida ao aplicarmos o funtor $\text{Hom}_A(-, -)$ à sequência exata $0 \rightarrow \text{Ker } f \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \rightarrow 0$. Uma vez que $dp_A Y \leq m$, o primeiro termo de $(*)$ se anula e, portanto, $\text{Ext}_A^{m+1}(\text{Ker } f, -) \neq 0$, ou ainda, $dp_A \text{Ker } f = m + 1$. Sejam K um somando indecomponível de $\text{Ker } f$, com $dp_A K = m + 1$, e $\pi : \text{Ker } f \rightarrow K$ a projeção canônica. Consideremos o *pushout* de $K \xleftarrow{\pi} \text{Ker } f \xrightarrow{i} X$, dado pelo seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker } f & \xrightarrow{i} & X & \longrightarrow & Y \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \pi & & \downarrow & & \downarrow 1 \\ 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{j} & X' & \xrightarrow{g} & Y \longrightarrow 0. \end{array}$$

Observe que $\text{Ext}_A^{m+1}(X', -) \neq 0$, pois $\text{Ext}_A^{m+1}(K, -) \neq 0$ e a sequência

$$0 = \text{Ext}_A^{m+1}(Y, -) \xrightarrow{\text{Ext}_A^{m+1}(g, -)} \text{Ext}_A^{m+1}(X', -) \xrightarrow{\text{Ext}_A^{m+1}(j, -)} \text{Ext}_A^{m+1}(K, -) \rightarrow 0$$

é exata. Neste caso, deve existir um somando indecomponível X'' de X' com $dp_A X'' = m + 1$. Além disso, a sequência exata $0 \rightarrow K \xrightarrow{j} X' \xrightarrow{g} Y \rightarrow 0$ não cinde, pois, caso contrário, existiria um epimorfismo que cinde $X \rightarrow K$ e, sendo X indecomponível, $X = K$, uma contradição. Dessa forma, desde que K é indecomponível, é consequência do lema 3.4 que para cada somando indecomponível M de X' , a componente $M \rightarrow Y$ do morfismo $g : X' \rightarrow Y$ é não nula e, em particular, há um morfismo não nulo $X'' \rightarrow Y$. Devido à escolha de X e Y , $\ell(X) + \ell(Y) \leq \ell(X'') + \ell(Y)$. Agora, $\ell(X'') + \ell(Y) \leq \ell(X') + \ell(Y) \leq \ell(X) + \ell(Y)$ e, portanto, $\ell(X') = \ell(X)$, ou ainda, $\text{Ker } f = K$, o que nos mostra que $\text{Ker } f$ é indecomponível. Logo, $di_A \text{Ker } f \leq 1$ e, uma vez que $di_A Y \leq \max\{di_A X, di_A \text{Ker } f - 1\}$, devemos ter $di_A Y \leq 1$, o que é um absurdo. Isso finaliza a verificação de que f também não é um epimorfismo. Nessas condições, construímos a sequência exata

$$0 \rightarrow \text{Ker } f \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \rightarrow \text{Coker } f \rightarrow 0$$

em $\text{Ext}_A^2(\text{Coker } f, \text{Ker } f)$. Como anteriormente, é possível mostrar que $\text{Ker } f$ é um A -módulo indecomponível, com $dp_A \text{Ker } f = m + 1$, já que os mesmos argumentos podem ser aplicados quando substituímos Y por $\text{Im } f$ (recordamos que $dp_A \text{Im } f \leq m$). Sendo A m -quase hereditária, $di_A \text{Ker } f \leq 1$, ou ainda, $\text{Ext}_A^2(\text{Coker } f, \text{Ker } f) = 0$. Em virtude do lema 3.5, devem existir um A -módulo Z e morfismos

$f' : X \rightarrow Z$ e $g' : Z \rightarrow Y$ tais que a sequência $0 \rightarrow X \xrightarrow{\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}} \text{Im } f \oplus Z \xrightarrow{(i \ g')} Y \rightarrow 0$ é exata em $\text{mod } A$, em

que $\bar{f}$ corresponde à correstrrição de f e i à inclusão. Assim, também são exatas as sequências

$$\begin{aligned} \text{Ext}_A^{m+1}(\text{Im } f \oplus Z, _) &\rightarrow \text{Ext}_A^{m+1}(X, _) \rightarrow \text{Ext}_A^{m+2}(Y, _) = 0 \\ \text{e } \text{Ext}_A^2(_, \text{Im } f \oplus Z) &\rightarrow \text{Ext}_A^2(_, Y) \rightarrow \text{Ext}_A^3(_, X) = 0 \end{aligned}$$

e, portanto, $dp_A Z = m + 1$, pois $dp_A \text{Im } f \leq m$, e $di_A(\text{Im } f \oplus Z) \geq 2$. Agora, $di_A \text{Im } f \leq 1$, já que $di_A \text{Im } f \leq \max\{di_A X, di_A \text{Ker } f - 1\} \leq 1$, donde $di_A Z \geq 2$. Dessa forma, existem somandos indecomponíveis Z' e Z'' de Z tais que $dp_A Z' = m + 1$ e $di_A Z'' \geq 2$. Além disso, conforme a observação 3.6, as componentes $Z' \rightarrow Y$ de g' e $X \rightarrow Z''$ de f' são não nulas e, desde que $\ell(Z') + \ell(Z'') < \ell(X) + \ell(Y)$, devemos ter $\ell(Z') < \ell(X)$ ou $\ell(Z'') < \ell(Y)$, isto é, $\ell(Z') + \ell(Y) < \ell(X) + \ell(Y)$ ou $\ell(X) + \ell(Z'') < \ell(X) + \ell(Y)$. Ambos os casos contradizem a minimalidade da soma dos comprimentos $\ell(X) + \ell(Y)$, finalizando a demonstração. $\square$

Para uma álgebra A e $m \in \mathbb{N}$, definamos $\mathcal{L}_A^m = \{X \in \text{ind } A; dp_A Y \leq m, \text{ para cada antecessor } Y \text{ de } X\}$ e $\mathcal{R}_A = \{X \in \text{ind } A; di_A Y \leq 1, \text{ para cada sucessor } Y \text{ de } X\}$. Quando $m = 1$, tais subcategorias plenas de $\text{ind } A$ correspondem, respectivamente, às partes esquerda e direita de $\text{mod } A$, definidas por Happel, Reiten e Smalø, em [HRS96b], ferramentas importantes para classificação de diversas classes de álgebras. Em seguida, mostraremos que se A for m -quase hereditária, então todo A -módulo indecomponível X com $di_A X \geq 2$ deverá pertencer a $\mathcal{L}_A^m$, o que nos permitirá concluir que $\text{ind } A = \mathcal{L}_A^m \cup \mathcal{R}_A$.

Lema 3.8. Seja A uma álgebra m -quase hereditária. Então:

- (i) Se $X \in \text{ind } A$ for tal que $di_A X \geq 2$, então $X \in \mathcal{L}_A^m$.
- (ii) Se, para $Y \in \text{ind } A$, existir $X \in \text{mod } A$ tal que $di_A X \geq 2$ e $Y \rightsquigarrow X$, então deverá existir $Z \in \text{ind } A$, com $di_A Z \geq 2$ e tal que $\text{Hom}_A(Y, Z) \neq 0$.

Demonstração. (i) Assumamos por ora que já tenhamos demonstrado o item (ii). Sejam $X \in \text{ind } A$, com $di_A X \geq 2$, e $Y \in \text{ind } A$ tal que existe um caminho $Y \rightsquigarrow X$. Neste caso, em virtude de (ii), deve existir $Z \in \text{ind } A$, com $di_A Z \geq 2$ e $\text{Hom}_A(Y, Z) \neq 0$. De acordo com o lema 3.7, $dp_A Y \leq m$ e, portanto, $X \in \mathcal{L}_A^m$.

(ii) Mostraremos, inicialmente, que se $Y \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_0} X$ for um caminho em $\text{ind } A$, com $di_A X \geq 2$, então existirá $Z \in \text{ind } A$, com $di_A Z \geq 2$, tal que $\text{Hom}_A(Y, Z) \neq 0$. Para isso, suponhamos que existem $Y \in \text{ind } A$ e um caminho $Y \xrightarrow{f'_1} X'_1 \xrightarrow{f'_0} X'$ em $\text{ind } A$, com $di_A X' \geq 2$ e $\text{Hom}_A(Y, Z) = 0$, para todo $Z \in \text{ind } A$ com $di_A Z \geq 2$. Entre todos os caminhos em $\text{ind } A$ que cumprem as condições acima, escolhamos aquele $Y \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_0} X$ em que $\ell(X_1)$ é mínimo. Observe que, em particular, $di_A X_1 \leq 1$ e $f_0 f_1 = 0$ e, portanto, f_0 não é um monomorfismo. Suponhamos, por absurdo, que f_0 é um epimorfismo. Neste caso, construímos a sequência exata $0 \rightarrow \text{Ker } f_0 \xrightarrow{i} X_1 \xrightarrow{f_0} X \rightarrow 0$ e, desde que $f_0 f_1 = 0$, deve existir um morfismo $\theta : Y \rightarrow \text{Ker } f_0$ satisfazendo $i\theta = f_1$, donde $\theta \neq 0$. Sejam K um somando indecomponível de $\text{Ker } f_0$ tal que $\text{Hom}_A(Y, K) \neq 0$ e $\pi : \text{Ker } f_0 \rightarrow K$ a projecção canônica. Considere

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker } f_0 & \xrightarrow{i} & X_1 & \xrightarrow{f_0} & X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \pi & & \downarrow & & \downarrow 1 \\ 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{u} & X'_1 & \xrightarrow{v} & X \longrightarrow 0 \end{array}$$

o *pushout* de $K \xleftarrow{\pi} \text{Ker } f_0 \xrightarrow{i} X_1$. Sendo $h \in \text{Hom}_A(Y, K)$ não nulo, a composta uh é não nula, pois u é um monomorfismo. Dessa forma, existe um somando indecomponível X'_1 de X'_1 tal que

$\text{Hom}_A(Y, X_1'') \neq 0$. Além disso, como no lema 3.7, a sequência exata $0 \rightarrow K \xrightarrow{u} X_1' \xrightarrow{v} X \rightarrow 0$ não cinde e, portanto, para cada somando indecomponível M de X_1' , a componente $M \rightarrow X$ de v é não nula, em particular, $X_1'' \hookrightarrow X_1' \rightarrow X$ é não nula. Nessas condições, obtemos o caminho $Y \rightarrow X_1'' \rightarrow X$ em $\text{ind } A$, o que nos permite concluir que $\ell(X_1) \leq \ell(X_1'')$, devido à escolha do caminho $Y \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_0} X$. Agora, $\ell(X_1'') \leq \ell(X_1') \leq \ell(X_1)$ e, portanto, $\ell(X_1') = \ell(X_1)$, ou ainda, $\text{Ker } f_0 = K$ é indecomponível. Logo, $\text{di}_A \text{Ker } f_0 \leq 1$ e, consequentemente, $\text{di}_A X \leq \max\{\text{di}_A X_1, \text{di}_A \text{Ker } f_0 - 1\} \leq 1$. Esta contradição finaliza a demonstração de que f_0 não é um epimorfismo. Consideremos, então, a sequência exata $0 \rightarrow \text{Ker } f_0 \rightarrow X_1 \xrightarrow{f_0} X \rightarrow \text{Coker } f_0 \rightarrow 0$ em $\text{Ext}_A^2(\text{Coker } f_0, \text{Ker } f_0)$. Como acima, pode-se verificar que $\text{Hom}_A(Y, \text{Ker } f_0) \neq 0$ e que $\text{Ker } f_0$ é indecomponível, o que nos garante que $\text{di}_A \text{Ker } f_0 \leq 1$ e, portanto, $\text{Ext}_A^2(\text{Coker } f_0, \text{Ker } f_0) = 0$. De acordo com o lema 3.5, existem um A -módulo Z e morfismos

$f' : X_1 \rightarrow Z$ e $g' : Z \rightarrow X$ tais que $0 \rightarrow X_1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} \bar{f}_0 \\ f' \end{pmatrix}} \text{Im } f_0 \oplus Z \xrightarrow{(i \ g')} X \rightarrow 0$ é uma sequência exata, em que $\bar{f}_0$ é a correstricção de f_0 e i é a inclusão. Uma vez que X é indecomponível, segue da observação 3.6 que, para cada somando indecomponível Z' de Z , a componente $\text{Ker } f_0 \rightarrow Z'$ de $\text{Ker } f_0 \rightarrow Z$ é não nula, ou seja, $\text{Hom}_A(\text{Ker } f_0, Z') \neq 0$. Além disso, $\text{di}_A(\text{Im } f_0 \oplus Z) \geq 2$, já que a sequência $\text{Ext}_A^2(_, \text{Im } f_0 \oplus Z) \rightarrow \text{Ext}_A^2(_, X) \rightarrow \text{Ext}_A^3(_, X_1) = 0$ é exata. Agora, $\text{di}_A \text{Im } f_0 \leq \max\{\text{di}_A X_1, \text{di}_A \text{Ker } f_0 - 1\} \leq 1$ e, portanto, $\text{di}_A Z \geq 2$. Neste caso, existe um somando indecomponível Z' de Z com $\text{di}_A Z' \geq 2$. Construímos então um caminho $Y \rightarrow \text{Ker } f_0 \rightarrow Z'$ em $\text{ind } A$, que satisfaz $\text{di}_A Z' \geq 2$. Logo, $\ell(X_1) \leq \ell(\text{Ker } f_0)$, isto é, $\text{Im } f_0 = 0$, o que é uma contradição.

O resultado então segue por indução no comprimento de um caminho com início em Y e final em X , com $\text{di}_A X \geq 2$. $\square$

Como consequência dos lemas 3.7 e 3.8 obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.9. Seja A uma álgebra m -quase hereditária. Então $\text{ind } A = \mathcal{L}_A^m \cup \mathcal{R}_A$.

Demonstração. Sejam $Z \in \text{ind } A \setminus \mathcal{L}_A^m$ e $Y \in \text{ind } A$ tal que há um caminho $Z \rightsquigarrow Y$ em $\text{ind } A$. Se $\text{di}_A Y \geq 2$, então $Y \in \mathcal{L}_A^m$, devido ao lema 3.8. Agora, uma vez que $\mathcal{L}_A^m$ é fechada para antecessores, $Z \in \mathcal{L}_A^m$, o que é uma contradição. Logo, $\text{di}_A Y \leq 1$ e, portanto, $Z \in \mathcal{R}_A$. $\square$

Em virtude do teorema acima, é também possível mostrar um resultado similar ao item (i) do lema 3.8, enunciado a seguir.

Lema 3.10. Seja A uma álgebra m -quase hereditária. Se $X \in \text{ind } A$ for tal que $\text{dp}_A X = m + 1$, então $X \in \mathcal{R}_A$. $\square$

Recordamos que, dada uma álgebra A , uma trisseccção de $\text{ind } A$ é um tripla $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ de subcategorias plenas de $\text{ind } A$, duas a duas disjuntas, tais que $\text{ind } A = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ e $\text{Hom}_A(\mathcal{B}, \mathcal{A}) = \text{Hom}_A(\mathcal{C}, \mathcal{B}) = \text{Hom}_A(\mathcal{C}, \mathcal{A}) = 0$. Se A for m -quase hereditária, o teorema 3.9, somado ao fato de que $\mathcal{L}_A^m$ e $\mathcal{R}_A$ são fechadas para antecessores e sucessores, respectivamente, nos permite construir a trisseccção $(\mathcal{L}_A^m \setminus \mathcal{R}_A, \mathcal{L}_A^m \cap \mathcal{R}_A, \mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A^m)$ em $\text{ind } A$, já que $\text{Hom}_A(\mathcal{L}_A^m \cap \mathcal{R}_A, \mathcal{L}_A^m \setminus \mathcal{R}_A) = \text{Hom}_A(\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A^m, \mathcal{L}_A^m \cap \mathcal{R}_A) = \text{Hom}_A(\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A^m, \mathcal{L}_A^m \setminus \mathcal{R}_A) = 0$.

Corolário 3.11. Seja A uma álgebra m -quase hereditária. Então $(\mathcal{L}_A^m \setminus \mathcal{R}_A, \mathcal{L}_A^m \cap \mathcal{R}_A, \mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A^m)$ é uma trisseccção de $\text{ind } A$. $\square$

3.1.1 Alguns problemas a serem investigados

Introduzindo alguns conceitos básicos. Seja A uma k -álgebra. Um caminho $(\star) X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{r-1}} X_r$ em $\text{ind } A$ será dito um ciclo se existirem $i, j \in \{0, \dots, r\}$, com $i \neq j$, tais que $X_i \simeq X_j$. Também, $(\star)$ será dito refinável se existir um caminho da forma $(*) X_0 \rightarrow X_{0,1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_{0,r_0} \rightarrow X_1 \rightarrow X_{1,1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_{1,r_1} \rightarrow X_2 \rightarrow \cdots \rightarrow X_r$ em $\text{ind } A$. Se, mais ainda, todos os morfismos deste caminho forem irredutíveis, diremos que $(*)$ é um refinamento de morfismos irredutíveis, e que $(\star)$ pode ser refinado a um caminho de morfismos irredutíveis. Por fim, um caminho $X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{r-1}} X_r$ em $\text{ind } A$ de morfismos irredutíveis é dito seccional se $X_j \not\simeq \tau X_{j+2}$, para todo $j \in \{0, \dots, r-2\}$, e $X_0 \not\simeq \tau X_r$.

Sobre tais caminhos, são resultados conhecidos:

- (1) se $X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{r-1}} X_r$ for um caminho seccional em $\text{ind } A$, então a composta $f_{r-1} \cdots f_0$ será não nula;
- (2) não existem ciclos seccionais;
- (3) de acordo com o Lema 2 de [Sko94], para uma álgebra A e A -módulos $M_1, \dots, M_r$, dois a dois não isomorfos, tais que $\text{Hom}_A(M_i, \tau_A M_j) = 0$ para todos $1 \leq i, j \leq r$, tem-se $r \leq \text{rk } K_0(A)$.

Fixado um inteiro positivo m , a fim de determinarmos um módulo satisfazendo a propriedade dos módulos injetivos com respeito à igualdade $\{X \in \text{mod } A; dp_A X \leq 1\} = \{X \in \text{mod } A; \text{Hom}_A(D(AA), \tau X) = 0\}$, consideramos E_m de forma a termos $\{X \in \text{mod } A; dp_A X \leq m\} = \{X \in \text{mod } A; \text{Hom}_A(E_m, \tau X) = 0\}$. Ainda não foi possível garantirmos que E_m existe e é um módulo. Se esse for o caso, poderemos obter os seguintes resultados.

Lema 3.12 ([HRS96b]). Sejam A uma álgebra e $X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{r-1}} X_r$ um caminho em $\text{ind } A$. Se $f_i \in \text{rad}^\infty(X_i, X_{i+1})$, para algum $0 \leq i \leq r-1$, então para cada par de números s e t existem caminhos de morfismos irredutíveis $X_0 \rightarrow X_{0,1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_{0,s}$ e $X_{r,t} \rightarrow X_{r,t-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_r$ e um caminho $X_{0,s} \rightarrow \cdots \rightarrow X_{r,t}$ em $\text{ind } A$. $\square$

Lema 3.13. Seja A uma álgebra m -quase hereditária que admite um A -módulo E_m como descrito acima. Se $E \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{r-1}} X_r \xrightarrow{f_r} P$ for um caminho em $\text{ind } A$, em que $E \in \text{add } E_m$ e P é projetivo, então $f_i \notin \text{rad}^\infty(X_i, X_{i+1})$, para todo $0 \leq i \leq r$.

Demonstração. Suponhamos que existem $E \in \text{add } E_m$, um A -módulo projetivo P e um caminho $E \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{r-1}} X_r \xrightarrow{f_r} P$ em $\text{ind } A$ com algum $f_i \in \text{rad}^\infty(X_i, X_{i+1})$, em que $0 \leq i \leq r$. Seja n o posto do grupo de Grothendieck de A , usualmente denotado por $K_0(A)$. De acordo com o lema 3.12, existem caminhos $(*) E = N_0 \rightarrow N_1 \rightarrow \cdots \rightarrow N_n$ e $(**) M_n \rightarrow M_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow M_1 \rightarrow M_0 = P$ de morfismos irredutíveis em $\text{ind } A$, e um caminho $N_n \rightarrow \cdots \rightarrow M_n$.

Em seguida, mostraremos que existem $i, j \in \{0, \dots, n\}$ tais que $\tau^- M_i \simeq M_j$. Para isso, assumamos ao contrário que $\tau^- M_i \not\simeq M_j$, para todos $i, j \in \{0, \dots, n\}$. Dessa forma, o caminho em $(**)$ é seccional e, portanto, $M_i \not\simeq M_j$, para $i \neq j$, uma vez que não existem ciclos seccionais, como recordamos acima em

(2). Então $\bigoplus_{i=0}^n M_i$ tem $n+1$ somandos indecomponíveis não isomorfos, donde $\text{Hom}_A\left(\bigoplus_{i=0}^n M_i, \bigoplus_{i=0}^n \tau M_i\right) \neq 0$, segundo (3). Além disso, devido à (1), obtemos que $\text{Hom}_A(M_i, P) \neq 0$, para cada $0 \leq i \leq r$, e, portanto, $di_A \tau M_i \geq 2$, sempre que $\tau M_i \neq 0$. Agora, como $n+1 > \text{rk } K_0(A)$, deve existir $j \in \{0, \dots, r\}$ com $\tau M_j \neq$

0, já que $rk K_0(A)$ coincide com o número de A -módulos projetivos indecomponíveis não isomorfos. Consideremos $i \in \{0, \dots, r\}$ tal que $M_i \rightarrow \tau M_j$ é não nulo, cuja existência está assegurada por (3). Para cada $p \in \{0, \dots, n\}$, podemos construir o caminho $N_p \rightsquigarrow M_i \rightarrow \tau M_j$ em $ind A$ e, desde que $di_A \tau M_j \geq 2$, existe $Z \in ind A$, com $di_A Z \geq 2$ e $Hom_A(N_p, Z) \neq 0$, conforme o lema 3.8. É então consequência do lema 3.7 que $dp_A N_p \leq m$, para cada p . Mostraremos, a seguir, que $\tau^- N_p \not\simeq N_q$, para todos $p, q \in \{0, \dots, n\}$ e concluir, portanto, que $(*)$ também é seccional. Suponhamos que $\tau^- N_p \simeq N_q$, para algum p e algum q , e consideremos o menor p tal que $\tau^- N_p \simeq N_q$, para algum q . Em particular, o caminho $E = N_0 \rightarrow N_1 \rightarrow \dots \rightarrow N_p$ é seccional e, novamente por (1), $Hom_A(E, N_p) \neq 0$, o que nos permite concluir que $dp_A \tau^- N_p = m + 1$, uma contradição, finalizando a verificação de que $(*)$ é seccional. Nessas condições, como anteriormente, obtemos que $\bigoplus_{p=0}^n N_p$ tem $n + 1$ somandos indecomponíveis não isomorfos e que $\tau^- N_k \neq 0$, para algum $k \in \{0, \dots, n\}$, já que $n + 1 > rk K_0(A)$. Além disso, para cada $p \in \{0, \dots, r\}$, pode-se verificar que $Hom_A(E, N_p) \neq 0$, ou ainda, $dp_A \tau^- N_p = m + 1$, sempre que $\tau^- N_p \neq 0$. Em particular, $dp_A \tau^- N_k = m + 1$. Também, segundo (3), $Hom_A\left(\bigoplus_{p=0}^n \tau^- N_p, \bigoplus_{p=0}^n N_p\right) \neq 0$ e, portanto, deve existir $\ell \in \{0, \dots, n\}$ tal que $Hom_A(\tau^- N_k, N_\ell) \neq 0$. Logo, construímos em $ind A$ o caminho $\tau^- N_k \rightarrow N_\ell \rightsquigarrow M_i \rightarrow \tau M_j$, com $dp_A \tau^- N_k = m + 1$ e $di_A \tau M_j \geq 2$. Neste caso, em virtude do lema 3.8, existe $Z \in ind A$, com $di_A Z \geq 2$ e $Hom_A(\tau^- N_k, Z) \neq 0$, o que contradiz o lema 3.7. Isso finaliza a demonstração de que $\tau^- M_i \simeq M_j$, para algum i e algum j em $\{0, \dots, n\}$.

De maneira análoga, existem $p, q \in \{0, \dots, n\}$ tais que $\tau N_p \simeq N_q$. Sejam p o menor número em $\{0, \dots, n\}$ tal que $N_p \simeq \tau N_q$, para algum $q \in \{0, \dots, n\}$, e i o menor número em $\{0, \dots, n\}$ tal que $M_i \simeq \tau^- M_j$, para algum $j \in \{0, \dots, n\}$. Então $Hom_A(E, N_p) \neq 0$ e $Hom_A(M_i, P) \neq 0$, o que nos garante que $dp_A \tau^- N_p = dp_A N_q = m + 1$ e $di_A \tau M_i = di_A M_j \geq 2$. Agora, construímos o caminho $N_q \rightsquigarrow M_j$ em $ind A$ e, segundo o lema 3.8, existe $Z \in ind A$, com $di_A Z \geq 2$ e $Hom_A(N_q, Z) \neq 0$, o que novamente contradiz o lema 3.7. Como consequência segue que cada $f_i \notin rad^\infty(X_i, X_{i+1})$, como desejado. $\square$

Tendo em vista o lema 3.13, se A for uma álgebra m -quase hereditária para a qual existe um A -módulo E_m , então um caminho $E \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_r \rightarrow P$ em $ind A$, com $E \in add E_m$ e P um A -módulo projetivo, poderá ser refinado a um caminho de morfismos irreduzíveis. A seguir, mostraremos que todos tais caminhos são, adicionalmente, seccionais.

Proposição 3.14. Seja A uma álgebra m -quase hereditária e assumamos que existe um A -módulo E_m como descrito acima. Considere ainda $(*)$ $E \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \rightarrow \dots \rightarrow X_r \xrightarrow{f_r} P$ um caminho de morfismos irreduzíveis em $ind A$, em que $E \in add E_m$ e P é projetivo. Então $(*)$ é seccional.

Demonstração. Por absurdo, suponhamos que existem $E \in add E_m$, um A -módulo projetivo P e um caminho de morfismos irreduzíveis $(*)$ $E \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \rightarrow \dots \rightarrow X_r \xrightarrow{f_r} P$ em $ind A$ não seccional. Seja n o maior número em $\{0, \dots, r - 2\}$ tal que $X_n = \tau X_{n+2}$. Sem perda de generalidade, assumamos que cada X_i , com $i \in \{n + 2, \dots, r\}$, não é projetivo. Neste caso, e desde que cada f_i é irreduzível, construímos em $ind A$ o caminho $(*)$ $\tau X_{n+2} \rightarrow \dots \rightarrow \tau X_r \rightarrow X_{r-1} \rightarrow X_r \rightarrow P$ de morfismos irreduzíveis, ou ainda,

$$E \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \rightarrow \dots \rightarrow X_n = \tau X_{n+2} \rightarrow \dots \rightarrow \tau X_r \rightarrow X_{r-1} \xrightarrow{f_{r-1}} X_r \xrightarrow{f_r} P,$$

obtido ao agregarmos ao caminho $(*)$ a parte inicial de $(*)$. Agora, observe que $f_r : X_r \rightarrow P$ é um monomorfismo, pois é irreduzível e X_r não é projetivo. Dessa forma, de acordo o lema 3.3, $dp_A X_r \leq m$

e, portanto, $\text{Hom}_A(E, \tau X_r) = 0$, o que nos garante que o caminho

$$E \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n = \tau X_{n+2} \xrightarrow{\tau f_{n+2}} \dots \xrightarrow{\tau f_{r-1}} \tau X_r$$

não é seccional. Reescrevamos este último por $E = Z_0 \xrightarrow{f_0} Z_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} Z_n \xrightarrow{\tau f_{n+2}} \dots \xrightarrow{\tau f_{r-1}} Z_\ell = \tau X_r$. Seja j o menor número em $\{0, \dots, \ell - 2\}$ tal que $Z_j = \tau Z_{j+2}$, em particular, $E = Z_0 \rightarrow Z_1 \rightarrow \dots \rightarrow Z_j \rightarrow Z_{j+1}$ é seccional. Logo, $\text{Hom}_A(E, \tau Z_{j+2}) = \text{Hom}_A(E, Z_j) \neq 0$, ou ainda, $dp_A Z_{j+2} = m + 1$. Além disso, $di_A \tau X_r \geq 2$, uma vez que $\text{Hom}_A(X_r, P) \neq 0$. Nessas condições, segue do lema 3.8 que existe $U \in \text{ind } A$, com $di_A U \geq 2$, tal que $\text{Hom}_A(Z_{j+2}, U) \neq 0$, o que é uma contradição, segundo o lema 3.7. $\square$

Como consequência do lema 3.13 e da proposição 3.14, para uma álgebra m -quase hereditária A , obtém-se que todo A -módulo projetivo deve pertencer a $\text{add } \mathcal{L}_A^m$ e $E_m \in \text{add } \mathcal{R}_A$, como mostraremos nas proposições a seguir.

Proposição 3.15. Seja A uma álgebra m -quase hereditária que admite um A -módulo E_m como descrito acima. Então $A_A \in \text{add } \mathcal{L}_A^m$.

Demonstração. Seja P um A -módulo projetivo indecomponível e suponha, por absurdo, que $P \notin \mathcal{L}_A^m$. Neste caso, deve existir $X \in \text{ind } A$ com $X \rightsquigarrow P$ e $dp_A X = m + 1$. Logo, $\text{Hom}_A(E, \tau X) \neq 0$, para algum $E \in \text{add } E_m$, o que nos permite construir o caminho $E \rightarrow \tau X \xrightarrow{f} U \xrightarrow{g} X \rightsquigarrow P$, em que f e g são morfismos quase cindidos à esquerda e à direita, respectivamente. Escolhamos U' um somando indecomponível de U e $f' : \tau X \rightarrow U'$ e $g' : U' \rightarrow X$ componentes de f e de g , que são morfismos irredutíveis. Dessa forma, temos o caminho $E \rightarrow \tau X \xrightarrow{f'} U' \xrightarrow{g'} X \rightsquigarrow P$ em $\text{ind } A$, que, segundo o lema 3.13, pode ser refinado a um caminho de morfismos irredutíveis $(\star) E \rightsquigarrow \tau X \xrightarrow{f'} U' \xrightarrow{g'} X \rightsquigarrow P$. Agora, de acordo com a proposição 3.14, $(\star)$ é seccional, o que é uma contradição. Consequentemente, $P \in \mathcal{L}_A^m$. $\square$

Proposição 3.16. Seja A uma álgebra m -quase hereditária que admite um A -módulo E_m como descrito acima. Então $E_m \in \text{add } \mathcal{R}_A$.

Demonstração. Como na demonstração da proposição anterior, basta supormos que existe um somando indecomponível E de E_m que não pertence a $\mathcal{R}_A$ e, a partir do A -módulo indecomponível Z tal que $E \rightsquigarrow Z$ e $di_A Z \geq 2$, construímos um caminho de morfismos de irredutíveis seccional. $\square$

Em resumo, os resultados mostrados acima nos garantem que se A for uma álgebra m -quase hereditária, então (1) $\text{ind } A = \mathcal{L}_A^m \cup \mathcal{R}_A$ e se, mais ainda, A admitir um A -módulo E_m com a propriedade descrita acima, então (2) $A_A \in \text{add } \mathcal{L}_A^m$, (3) $E_m \in \text{add } \mathcal{R}_A$ e (4) todo caminho da forma $E \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_r \rightarrow P$ em $\text{ind } A$, em que $E \in \text{add } E_m$ e P é projetivo, pode ser refinado a um caminho de morfismos irredutíveis e todo tal caminho é seccional. Além disso, a afirmação (2) quando assumida sobre uma álgebra A com $\dim.gl A = m + 1$ permite concluir que A é m -quase hereditária. É o que nos mostra o teorema a seguir.

Teorema 3.17. As seguintes afirmações são equivalentes para uma álgebra A com $\dim.gl A = m + 1$ e que admite um A -módulo E_m como descrito anteriormente:

- (i) A é m -quase hereditária.
- (ii) $\mathcal{L}_A^m$ contém todos os A -módulos indecomponíveis projetivos.

Demonstração. A proposição 3.15 nos garante que (i) implica (ii). Vejamos que (ii) implica (i). Para isso, consideremos um A -módulo indecomponível X tal que $X \notin \mathcal{L}_A^m$. Neste caso, não existe um caminho da forma $X \rightsquigarrow P$, para cada A -módulo projetivo P e, portanto, $\text{Hom}_A(\tau^- X, A_A) = 0$, ou ainda, $di_A X \leq 1$. Consequentemente, cada A -módulo indecomponível X satisfaz $dp_A X \leq m$ ou $di_A X \leq 1$, o que nos garante que A é m -quase hereditária. Observe que a hipótese referente à existência do A -módulo E_m não foi necessária nesta implicação. $\square$

3.2 Álgebras m -Quase Inclínadas

Definição 3.18. Uma álgebra A será dita m -quase inclinada ($m \geq 1$) se existirem triplas $(A_i, T_i, A_{i+1} = \text{End}_{A_i} T_i)$, com $0 \leq i \leq m-1$, tais que A_0 é uma categoria hereditária, T_0 é um objeto inclinante em A_0 , cada T_i , com $i \neq 0$, é um A_i -módulo inclinante cindido e $A = A_m$.

Nas condições da definição acima e em termos da aplicação Φ apresentada em [HRS96b], podemos assumir sem prejuízos para o que faremos em seguida que

$$\Phi(\text{mod } A_i; (\mathcal{T}(T_i), \mathcal{F}(T_i))) = (\text{mod } A_{i+1}; (\mathcal{X}(T_i), \mathcal{Y}(T_i))),$$

para cada $0 \leq i \leq m-1$. De fato, seja $\Phi(\text{mod } A_i; (\mathcal{T}(T_i), \mathcal{F}(T_i))) = (\mathcal{E}; (\mathcal{U}, \mathcal{V}))$. De acordo com o Teorema 3.3 de [HRS96b], que corresponde ao teorema 2.6 para Φ , existe uma equivalência triangular $G: \mathcal{D}^b(A_i) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{E})$ cuja restrição à subcategoria $\mathcal{E}$ de $\mathcal{D}^b(A_i)$ corresponde ao funtor identidade. É também conhecido que o funtor $F = L(- \otimes T_i)$ é uma equivalência triangular de $\mathcal{D}^b(A_{i+1})$ para $\mathcal{D}^b(A_i)$ cujas restrições às subcategorias $\mathcal{Y}(T_i)$ e $\mathcal{X}(T_i)[-1]$ de $\mathcal{D}^b(A_{i+1})$ definem equivalências $\mathcal{Y}(T_i) \rightarrow \mathcal{T}(T_i)$ e $\mathcal{X}(T_i)[-1] \rightarrow \mathcal{F}(T_i)$. Dessa forma, a composta $G \circ F$ determina uma equivalência entre $\text{mod } A_{i+1}$ e $\mathcal{E}$ que associa a subcategoria $\mathcal{Y}(T_i)$ de $\text{mod } A_{i+1}$ à subcategoria $\mathcal{V}$ de $\mathcal{E}$ e $\mathcal{X}(T_i)$ à $\mathcal{U}$.

Uma vez que estamos identificando $\text{mod } A_{i+1}$ e $\mathcal{E}$, está determinada uma equivalência triangular $\mathcal{D}^b(A_i) \rightarrow \mathcal{D}^b(A_{i+1})$ cuja restrição a $\text{mod } A_{i+1}$ é o funtor identidade.

Conforme a proposição 1.1, a dimensão global de uma álgebra m -quase inclinada não deve ultrapassar $m+1$. Mostraremos no teorema a seguir que se a dimensão global for exatamente $m+1$, então a álgebra será m -quase hereditária.

Teorema 3.19. Se A for m -quase inclinada com $\dim.gl A = m+1$, então A será m -quase hereditária.

Demonstração. Considere A uma álgebra m -quase inclinada com $\dim.gl A = m+1$. Segundo a definição 3.18, devem existir triplas $(A_i, T_i, A_{i+1} = \text{End}_{A_i} T_i)_{1 \leq i \leq m-1}$, com A_1 quase inclinada, $A = A_m$ e cada T_i um A_i -módulo inclinante cindido. Como observado acima, podemos assumir que

$$\Phi(\text{mod } A_{m-1}; (\mathcal{T}(T_{m-1}), \mathcal{F}(T_{m-1}))) = (\text{mod } A; (\mathcal{X}(T_{m-1}), \mathcal{Y}(T_{m-1}))),$$

o que nos garante a existência de uma equivalência triangular $\mathcal{D}^b(A_{m-1}) \rightarrow \mathcal{D}^b(A)$ cuja restrição à subcategoria $\text{mod } A$ de $\mathcal{D}^b(A_{m-1})$ é o funtor identidade. Vejamos que $di_A \mathcal{X}(T_{m-1}) \leq 1$ e que $dp_A \mathcal{Y}(T_{m-1}) \leq m$. Para isso, sejam $Z \in \mathcal{X}(T_{m-1})$ e U um A -módulo. Neste caso, $Z[-1] \in \mathcal{F}(T_{m-1})$ e, portanto, $di_{A_{m-1}} Z[-1] \leq 1$, desde que $(\mathcal{X}(T_{m-1}), \mathcal{Y}(T_{m-1}))$ cinde em $\text{mod } A$ (proposição 1.3). Dessa forma,

- se $U \in \mathcal{X}(T_{m-1})$, então $\text{Ext}_A^2(U, Z) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(U, Z[2]) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A_{m-1})}(U, Z[2]) \simeq \text{Ext}_{A_{m-1}}^2(U[-1], Z[-1]) = 0$, pois $di_{A_{m-1}} Z[-1] \leq 1$, e

- se $U \in \mathcal{Y}(T_{m-1})$, então $\text{Ext}_A^2(U, Z) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(U, Z[2]) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A_{m-1})}(U, Z[2]) \simeq \text{Ext}_{A_{m-1}}^3(U, Z[-1]) = 0$, novamente pois $\text{di}_{A_{m-1}} Z[-1] \leq 1$.

Como consequência, $\text{di}_A Z \leq 1$.

Agora, seja $Z \in \mathcal{Y}(T_{m-1})$. Se $U \in \mathcal{X}(T_{m-1})$, então $\text{Ext}_A^{m+1}(Z, U) \simeq \text{Ext}_{A_{m-1}}^{m+2}(Z, U[-1]) = 0$, já que $\dim.gl A_{m-1} \leq m$, e se $U \in \mathcal{Y}(T_{m-1})$, então $\text{Ext}_A^{m+1}(Z, U) \simeq \text{Ext}_{A_{m-1}}^{m+1}(Z, U) = 0$, pois $\dim.gl A_{m-1} \leq m$. Logo, $dp_A \mathcal{Y}(T_{m-1}) \leq m$. Desde que $(\mathcal{X}(T_{m-1}), \mathcal{Y}(T_{m-1}))$ cinde, está verificado o item (ii) da definição 3.1 e, portanto, A é m -quase hereditária. $\square$

Corolário 3.20. Seja A uma álgebra m -quase inclinada com $\dim.gl A = m + 1$. Então $\text{ind } A = \mathcal{L}_A^m \cup \mathcal{R}_A$ e $(\mathcal{L}_A^m \setminus \mathcal{R}_A, \mathcal{R}_A \cap \mathcal{L}_A^m, \mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A^m)$ é uma trisseção de $\text{ind } A$. $\square$

Recordamos do capítulo 1 que uma álgebra A é dita hereditária por partes se existir uma equivalência triangular $\mathcal{D}^b(A) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{H})$, em que $\mathcal{H}$ é uma categoria hereditária. De acordo com o teorema 1.23, se A for de tipo $\text{mod } H$, com H uma álgebra hereditária, então deverá existir uma sequência de triplas $(A_i, T_i, A_{i+1} = \text{End}_{A_i} T_i)_{0 \leq i \leq m}$, em que $A_0 = H$, cada T_i é um A_i -módulo inclinante cindido e $A = A_m$.

Corolário 3.21. Seja A uma álgebra hereditária por partes do tipo $\text{mod } H$ com $\dim.gl A = m + 1$. Então A é m -quase hereditária. Em particular, $\text{ind } A = \mathcal{L}_A^m \cup \mathcal{R}_A$ e $(\mathcal{L}_A^m \setminus \mathcal{R}_A, \mathcal{R}_A \cap \mathcal{L}_A^m, \mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A^m)$ é uma trisseção de $\text{ind } A$. $\square$

A recíproca do teorema 3.19 não é necessariamente obtida, embora seja verdadeira para $m = 1$, conforme demonstrado em [HRS96b]. Considere, por exemplo, A a k -álgebra de caminhos associada ao *quiver* $1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_{10}} 11 \xrightarrow{\alpha_{11}} 12$, com relações $\alpha_i \cdots \alpha_{i+6} = 0$, em que $1 \leq i \leq 5$. De acordo com [Sei03], A não é hereditária por partes e, em particular, não é 2-quase inclinada. No entanto, pode-se verificar que A é 2-quase hereditária. De fato, no *quiver* de Auslander-Reiten de A apresentado a seguir, os A -módulos indecomponíveis não-projetivos e antecessores do simples S_6 têm dimensão projetiva um, aqueles não-projetivos que são simultaneamente sucessores de $\begin{smallmatrix} 10 \\ \vdots \\ 5 \end{smallmatrix}$ e antecessores de $\begin{smallmatrix} 5 \\ \vdots \\ 2 \end{smallmatrix}$, bem como S_4 , têm dimensão projetiva dois e os módulos indecomponíveis sucessores de $\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}$, embora tenham dimensão projetiva três, têm dimensão injetiva um. Dessa forma, A cumpre os itens (i) e (ii) da definição de 2-quase hereditária.

3.2.1 Propriedades homológicas de álgebras 2-quase inclinadas

Vimos acima que se uma álgebra A for m -quase inclinada tal que (i) $\dim_{gl} A = m + 1$, então deverá satisfazer (ii) $dp_A X \leq m$ ou $di_A X \leq 1$, para cada A -módulo indecomponível X . No entanto, além de (i) e (ii), outras propriedades homológicas podem ser obtidas para A se explorarmos devidamente as informações contidas nos pares de torção $(\mathcal{T}(T_i), \mathcal{F}(T_i))$ e $(\mathcal{X}(T_{i-1}), \mathcal{Y}(T_{i-1}))$, construídos em cada etapa i . Detalharemos, em seguida, tais propriedades para o caso em que $m = 2$. Esse resultado bem como os demais apresentados nessa seção e nas duas seguintes serão motivadores para as condições que devem ser assumidas sobre uma álgebra 2-quase hereditária a fim de que seja 2-quase inclinada, ou, em outras palavras, para que seja possível obtermos a recíproca do teorema 3.19. Vale lembrar que, uma vez determinadas condições que estabeleçam a validade dessa recíproca para $m = 2$, estarão listadas propriedades que nos permitem garantir que uma dada álgebra é hereditária por partes, cumprindo dessa forma o objetivo proposto.

Nessa direção, seja B uma álgebra 2-quase inclinada, então devem existir uma categoria hereditária $\mathcal{H}$, um objeto inclinante T_0 em $\mathcal{H}$ e um A -módulo inclinante cindido T_1 , com $A = \text{End}_{\mathcal{H}} T_0$, tais que $B = \text{End}_A T_1$. Em $\text{mod } A$, considere os pares de torção $(\mathcal{T}(T_1), \mathcal{F}(T_1))$ e $(\mathcal{X}(T_0), \mathcal{Y}(T_0))$, em que, a menos de equivalência e sem prejuízos para o que faremos a seguir, $\Phi(\mathcal{H}; (\mathcal{T}(T_0), \mathcal{F}(T_0))) = (\text{mod } A; (\mathcal{X}(T_0), \mathcal{Y}(T_0)))$. Denotemos $\mathcal{A}_1 = \text{ind } \mathcal{T}(T_1) \cap \mathcal{Y}(T_0)$, $\mathcal{A}_2 = \text{ind } \mathcal{T}(T_1) \cap \mathcal{X}(T_0)$, $\mathcal{A}_3 = \text{ind } \mathcal{F}(T_1)[1] \cap \mathcal{Y}(T_0)[1]$ e $\mathcal{A}_4 = \text{ind } \mathcal{F}(T_1)[1] \cap \mathcal{X}(T_0)[1]$, que são subcategorias de $\text{ind } B$.

Obs.: As notações estabelecidas nesse parágrafo serão seguidas ao longo de toda esta seção.

Proposição 3.22. Sejam B uma álgebra 2-quase inclinada e as subcategorias $\mathcal{A}_i$, com $1 \leq i \leq 4$, como definidas acima. Então $\text{ind } B = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4$ e podem ser obtidos os dados da seguinte tabela:

$\text{Ext}_B^\#(_, _) = 0$	$\mathcal{A}_1$	$\mathcal{A}_2$	$\mathcal{A}_3$	$\mathcal{A}_4$
$\mathcal{A}_1$	≥ 2	≥ 1	≥ 1	≥ 0
$\mathcal{A}_2$	$0, \geq 3$	≥ 2	≥ 1	≥ 1
$\mathcal{A}_3$	$0, \geq 3$	$0, \geq 2$	≥ 2	≥ 1
$\mathcal{A}_4$	$0, 1, \geq 4$	$0, \geq 3$	$0, \geq 2$	≥ 2

Além disso, para cada A -módulo Z , a sequência exata canônica relativa ao par de torção $(\mathcal{T}(T_1), \mathcal{F}(T_1))$ é de uma das formas, em que $A_i, B_i \in \text{add } \mathcal{A}_i$:

- (a) $0 \rightarrow A_1 \oplus A_2 \rightarrow Z \rightarrow A_4[-1] \rightarrow 0$, se $Z \in \mathcal{X}(T_0)$,
- (b) $0 \rightarrow B_1 \rightarrow Z \rightarrow B_3[-1] \oplus B_4[-1] \rightarrow 0$, se $Z \in \mathcal{Y}(T_0)$.

Demonstração. Como acima, consideremos em $\text{mod } A$ os pares de torção $(\mathcal{T}(T_1), \mathcal{F}(T_1))$ e $(\mathcal{X}(T_0), \mathcal{Y}(T_0))$. Observe que $\text{mod } B = \mathcal{Y}(T_1) \cup \mathcal{X}(T_1) = \mathcal{T}(T_1) \cup \mathcal{F}(T_1)[1] = (\mathcal{T}(T_1) \cap \mathcal{Y}(T_0)) \cup (\mathcal{T}(T_1) \cap \mathcal{X}(T_0)) \cup (\mathcal{F}(T_1)[1] \cap \mathcal{Y}(T_0)[1]) \cup (\mathcal{F}(T_1)[1] \cap \mathcal{X}(T_0)[1]) = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4$, pois podemos assumir que

$$(\star) \quad \Phi(\text{mod } A; (\mathcal{T}(T_1), \mathcal{F}(T_1))) = (\text{mod } B; (\mathcal{X}(T_1), \mathcal{Y}(T_1))),$$

T_1 é um A -módulo inclinante cindido e $(\mathcal{X}(T_0), \mathcal{Y}(T_0))$ cinde em $\text{mod } A$.

De acordo com a demonstração do teorema 3.19, este último satisfaz $di_A \mathcal{X}(T_0) \leq 1$ e $dp_A \mathcal{Y}(T_0) \leq 1$. Também, desde que $(\mathcal{X}(T_1), \mathcal{Y}(T_1))$ é um par de torção cindido em $\text{mod } B$, $di_A \mathcal{F}(T_1) \leq 1$. Por fim,

a igualdade em $(\star)$ nos garante a existência de uma equivalência triangular $F : \mathcal{D}^b(B) \rightarrow \mathcal{D}^b(A)$, cuja restrição à subcategoria $\text{mod } B$ é o funtor identidade, segundo [HRS96b]. Neste caso, podemos obter:

- (1) se $i \geq 2$, então $\text{Ext}_B^i(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(B)}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1[i]) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1[i]) \simeq \text{Ext}_A^i(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1) = 0$, uma vez que $dp_A \mathcal{Y}(T_0) \leq 1$;
- (2) da mesma forma, $\text{Ext}_B^i(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 0$, para $i \geq 2$, e $\text{Ext}_B^1(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \simeq \text{Ext}_A^1(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 0$, pois $(\mathcal{X}(T_0), \mathcal{Y}(T_0))$ cinde (proposição 1.2);
- (3) se $i \geq 1$, então $\text{Ext}_B^i(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3) \simeq \text{Ext}_A^{i+1}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3[-1]) = 0$, pois $dp_A \mathcal{Y}(T_0) \leq 1$;
- (4) se $i \geq 1$, então $\text{Ext}_B^i(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_4) \simeq \text{Ext}_A^{i+1}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_4[-1]) = 0$, já que $dp_A \mathcal{Y}(T_0) \leq 1$, e $\text{Ext}_B^0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_4) \simeq \text{Ext}_A^{-1}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_4[-1]) = 0$;
- (5) se $i \geq 3$, então $\text{Ext}_B^i(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) \simeq \text{Ext}_A^i(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) = 0$, pois $\dim.gl A \leq 2$, e $\text{Ext}_B^0(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) \simeq \text{Ext}_A^0(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) = 0$, uma vez que $(\mathcal{X}(T_0), \mathcal{Y}(T_0))$ é um par de torção;
- (6) $\text{Ext}_B^{\geq 2}(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_2) \simeq \text{Ext}_A^{\geq 2}(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_2) = 0$, pois $di_A \mathcal{X}(T_0) \leq 1$;
- (7) se $i \geq 1$, então $\text{Ext}_B^i(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3) \simeq \text{Ext}_A^{i+1}(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3[-1]) = 0$, já que $di_A \mathcal{F}(T_1) \leq 1$;
- (8) se $i \geq 1$, então $\text{Ext}_B^i(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_4) \simeq \text{Ext}_A^{i+1}(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_4[-1]) = 0$, uma vez que $di_A \mathcal{X}(T_0) \leq 1$;
- (9) se $i \geq 3$, então $\text{Ext}_B^i(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_1) \simeq \text{Ext}_A^{i-1}(\mathcal{A}_3[-1], \mathcal{A}_1) = 0$, pois $dp_A \mathcal{Y}(T_0) \leq 1$, e $\text{Ext}_B^0(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_1) \simeq \text{Ext}_A^{-1}(\mathcal{A}_3[-1], \mathcal{A}_1) = 0$;
- (10) se $i \geq 3$, então $\text{Ext}_B^i(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_2) \simeq \text{Ext}_A^{i-1}(\mathcal{A}_3[-1], \mathcal{A}_2) = 0$, uma vez que $di_A \mathcal{X}(T_0) \leq 1$, $\text{Ext}_B^2(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_2) \simeq \text{Ext}_A^1(\mathcal{A}_3[-1], \mathcal{A}_2) = 0$, pois $(\mathcal{X}(T_0), \mathcal{Y}(T_0))$ cinde, e $\text{Ext}_B^0(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_2) \simeq \text{Ext}_A^{-1}(\mathcal{A}_3[-1], \mathcal{A}_2) = 0$;
- (11) $\text{Ext}_B^{\geq 2}(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_3) \simeq \text{Ext}_A^{\geq 2}(\mathcal{A}_3[-1], \mathcal{A}_3[-1]) = 0$, já que $dp_A \mathcal{Y}(T_0) \leq 1$;
- (12) $\text{Ext}_B^{\geq 2}(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4) \simeq \text{Ext}_A^{\geq 2}(\mathcal{A}_3[-1], \mathcal{A}_4[-1]) = 0$, novamente pois $dp_A \mathcal{Y}(T_0) \leq 1$, e $\text{Ext}_B^1(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4) \simeq \text{Ext}_A^1(\mathcal{A}_3[-1], \mathcal{A}_4[-1]) = 0$, já que $(\mathcal{X}(T_0), \mathcal{Y}(T_0))$ cinde.
- (13) se $i \geq 4$, então $\text{Ext}_B^i(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_1) \simeq \text{Ext}_A^{i-1}(\mathcal{A}_4[-1], \mathcal{A}_1) = 0$, pois $\dim.gl A \leq 2$, $\text{Ext}_B^1(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_1) \simeq \text{Ext}_A^0(\mathcal{A}_4[-1], \mathcal{A}_1) = 0$, já que $(\mathcal{X}(T_0), \mathcal{Y}(T_0))$ é um par de torção, e $\text{Ext}_B^0(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_1) \simeq \text{Ext}_A^{-1}(\mathcal{A}_4[-1], \mathcal{A}_1) = 0$;
- (14) se $i \geq 3$, então $\text{Ext}_B^i(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_2) \simeq \text{Ext}_A^{i-1}(\mathcal{A}_4[-1], \mathcal{A}_2) = 0$, pois $di_A \mathcal{X}(T_0) \leq 1$, e $\text{Ext}_B^0(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_2) \simeq \text{Ext}_A^{-1}(\mathcal{A}_4[-1], \mathcal{A}_2) = 0$;
- (15) $\text{Ext}_B^{\geq 2}(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_3) \simeq \text{Ext}_A^{\geq 2}(\mathcal{A}_4[-1], \mathcal{A}_3[-1]) = 0$, já que $di_A \mathcal{F}(T_1) \leq 1$, e $\text{Ext}_B^0(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_3) \simeq \text{Ext}_A^{-1}(\mathcal{A}_4[-1], \mathcal{A}_3[-1]) = 0$, pois $(\mathcal{X}(T_0), \mathcal{Y}(T_0))$ é um par de torção;
- (16) $\text{Ext}_B^{\geq 2}(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_4) \simeq \text{Ext}_A^{\geq 2}(\mathcal{A}_4[-1], \mathcal{A}_4[-1]) = 0$, uma vez que $di_A \mathcal{X}(T_0) \leq 1$.

Agora, observe que para cada A -módulo Z deve existir uma sequência exata da forma $0 \rightarrow A_1 \oplus A_2 \rightarrow Z \rightarrow A_3[-1] \oplus A_4[-1] \rightarrow 0$, com $A_i \in \text{add } \mathcal{A}_i$, já que $(\mathcal{T}(T_1) = \text{add}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2), \mathcal{F}(T_1) = \text{add}(\mathcal{A}_3[-1] \cup \mathcal{A}_4[-1]))$ define um par de torção em $\text{mod } A$. Se, em particular, $Z \in \mathcal{Y}(T_0)$, então $A_2 = 0$, desde que $A_2 \in \mathcal{X}(T_0)$, e se $Z \in \mathcal{X}(T_0)$, então $A_3[-1] = 0$, pois $A_3[-1] \in \mathcal{Y}(T_0)$. $\square$

Em seguida, nas condições da proposição 3.22, mostraremos que, com alguma hipótese adicional, se tem também $A_1 = 0$ para $Z \in \mathcal{X}(T_0)$. Tendo esse objetivo em vista, consideremos a seguinte proposição.

Proposição 3.23. Seja $\mathcal{U}$ a t-estrutura não-degenerada dada por $\mathcal{U}^{\leq 0} = \{Z \in \mathcal{D}^b(\mathcal{H}); H^0(Z) \in \mathcal{T}(T_0) \text{ e } H^i(Z) = 0, \text{ para } i > 0\}$ e $\mathcal{U}^{\geq 0} = \{Z \in \mathcal{D}^b(\mathcal{H}); H^{-1}(Z) \in \mathcal{F}(T_0) \text{ e } H^i(Z) = 0, \text{ para } i < -1\}$, em que $(\mathcal{T}(T_0), \mathcal{F}(T_0))$ é um par de torção em $\mathcal{H}$. Então o par $(\mathcal{V}^{\leq 0}, \mathcal{V}^{\geq 0})$, em que $\mathcal{V}^{\leq 0} = \{Z \in \mathcal{D}^b(\mathcal{H}); H_{\mathcal{U}}^0(Z) \in \mathcal{T}(T_1) \text{ e } H_{\mathcal{U}}^i(Z) = 0, \text{ para } i > 0\}$ e $\mathcal{V}^{\geq 0} = \{Z \in \mathcal{D}^b(\mathcal{H}); H_{\mathcal{U}}^{-1}(Z) \in \mathcal{F}(T_1) \text{ e } H_{\mathcal{U}}^i(Z) = 0, \text{ para } i < -1\}$, define uma t-estrutura não-degenerada em $\mathcal{D}^b(\mathcal{H})$, cujo coração é *mod B*.

Demonstração. (t1) Seja $X \in \mathcal{V}^{\leq 0}$. Neste caso, $H_{\mathcal{U}}^0(X) \in \mathcal{T}(T_1)$ e $H_{\mathcal{U}}^i(X) = 0$ e, em particular, $H_{\mathcal{U}}^1(X) \in \mathcal{T}(T_1)$, o que nos permite concluir que $X \in \mathcal{V}^{\leq 1}$.

(t2) Considere $X \in \mathcal{V}^{\leq 0}$ e $Y \in \mathcal{V}^{\geq 1}$. Suponha, por absurdo, que existe um morfismo não nulo $f: X \rightarrow Y$. Uma vez que $\mathcal{U}$ é uma t-estrutura em $\mathcal{D}^b(\mathcal{H})$, devem existir triângulos $\tau_{\mathcal{U}}^{\leq 0} X \xrightarrow{\mu} X \rightarrow \tau_{\mathcal{U}}^{\geq 1} X \rightarrow (\tau_{\mathcal{U}}^{\leq 0} X)[1]$ e $\tau_{\mathcal{U}}^{\geq 1} X \rightarrow (\tau_{\mathcal{U}}^{\leq 0} X)[1] \rightarrow \tau_{\mathcal{U}}^{\leq 0} Y \rightarrow Y \rightarrow \tau_{\mathcal{U}}^{\geq 1} Y \rightarrow (\tau_{\mathcal{U}}^{\leq 0} Y)[1]$ e, desde que $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{H})}(\tau_{\mathcal{U}}^{\leq 0} X, \tau_{\mathcal{U}}^{\geq 1} Y) = 0$, obtemos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \tau_{\mathcal{U}}^{\leq 0} X & \xrightarrow{\mu} & X & \longrightarrow & \tau_{\mathcal{U}}^{\geq 1} X & \longrightarrow & (\tau_{\mathcal{U}}^{\leq 0} X)[1] \\ \downarrow \tau^{\leq 0} f & & \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow \\ \tau_{\mathcal{U}}^{\leq 0} Y & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & \tau_{\mathcal{U}}^{\geq 1} Y & \longrightarrow & (\tau_{\mathcal{U}}^{\leq 0} Y)[1] \end{array}$$

em $\mathcal{D}^b(\mathcal{H})$. Observe que, para $i < 1$, $H_{\mathcal{U}}^i(\tau_{\mathcal{U}}^{\geq 1} X) = 0$ e, se $i \geq 1$, então $H_{\mathcal{U}}^i(\tau_{\mathcal{U}}^{\geq 1} X) = H_{\mathcal{U}}^i(X) = 0$, já que $X \in \mathcal{V}^{\leq 0}$. Dessa forma, μ é um isomorfismo e, portanto, $\tau^{\leq 0} f \neq 0$. Novamente, como $\mathcal{U}$ é uma t-estrutura em $\mathcal{D}^b(\mathcal{H})$, podemos construir o seguinte diagrama comutativo, em que as linhas são triângulos

$$\begin{array}{ccccccc} \tau_{\mathcal{U}}^{\leq -1} X & \longrightarrow & \tau_{\mathcal{U}}^{\leq 0} X & \longrightarrow & H_{\mathcal{U}}^0(X) & \longrightarrow & (\tau_{\mathcal{U}}^{\leq -1} X)[1] \\ \downarrow & & \downarrow \tau^{\leq 0} f & & \downarrow g & & \downarrow \\ \tau_{\mathcal{U}}^{\leq -1} Y & \longrightarrow & \tau_{\mathcal{U}}^{\leq 0} Y & \xrightarrow{\pi} & H_{\mathcal{U}}^0(Y) & \longrightarrow & (\tau_{\mathcal{U}}^{\leq -1} Y)[1] \end{array}$$

em $\mathcal{D}^b(\mathcal{H})$. Note que $H_{\mathcal{U}}^{\geq 0}(\tau_{\mathcal{U}}^{\leq -1} Y) = 0$ e $H_{\mathcal{U}}^{\leq -1}(\tau_{\mathcal{U}}^{\leq -1} Y) = H_{\mathcal{U}}^{\leq -1}(Y) = 0$, pois $Y \in \mathcal{V}^{\geq 1}$. Logo, π é um isomorfismo. Além disso, $g = 0$, já que $H_{\mathcal{U}}^0(X) \in \mathcal{T}(T_1)$ e que $H_{\mathcal{U}}^0(Y) \in \mathcal{F}(T_1)$. Neste caso, $\pi \tau^{\leq 0} f = 0$ e, portanto, $\tau^{\leq 0} f = 0$, o que é uma contradição.

(t3) Considere $C \in \mathcal{D}^b(\mathcal{H})$ e $0 \rightarrow T \xrightarrow{\alpha} H_{\mathcal{U}}^0(C) \xrightarrow{\beta} F \rightarrow 0$ a sequência exata canônica para $H_{\mathcal{U}}^0(C)$ relativa ao par de torção $(\mathcal{T}(T_1), \mathcal{F}(T_1))$. Sendo $\mathcal{U}$ uma t-estrutura em $\mathcal{D}^b(\mathcal{H})$, podemos construir o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \tau_{\mathcal{U}}^{\leq -1} C & \longrightarrow & \tau_{\mathcal{U}}^{\leq 0} C & \longrightarrow & H_{\mathcal{U}}^0(C) & \xrightarrow{v} & (\tau_{\mathcal{U}}^{\leq -1} C)[1] \\ \downarrow 1 & & \downarrow & & \downarrow u & & \downarrow 1 \\ \tau_{\mathcal{U}}^{\leq -1} C & \longrightarrow & C & \longrightarrow & \tau_{\mathcal{U}}^{\geq 0} C & \longrightarrow & (\tau_{\mathcal{U}}^{\leq -1} C)[1] \end{array}$$

em que as linhas são triângulos em $\mathcal{D}^b(\mathcal{H})$. Seja $g = v\alpha$, então deve existir um morfismo $\text{cone}(g)[-1] \rightarrow \tau_{\mathcal{U}}^{\leq 0} C$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \tau_{\mathcal{U}}^{\leq -1} C & \longrightarrow & \text{cone}(g)[-1] & \longrightarrow & T & \xrightarrow{g} & (\tau_{\mathcal{U}}^{\leq -1} C)[1] \\ \downarrow 1 & & \vdots & & \downarrow \alpha & & \downarrow 1 \\ \tau_{\mathcal{U}}^{\leq -1} C & \longrightarrow & \tau_{\mathcal{U}}^{\leq 0} C & \longrightarrow & H_{\mathcal{U}}^0(C) & \xrightarrow{v} & (\tau_{\mathcal{U}}^{\leq -1} C)[1] \end{array}$$

comuta. Dessa forma, ao compor os diagramas construídos e através do axioma do octaedro, obtemos

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \text{cone}(f)[-1] & \xrightarrow{1} & \text{cone}(f)[-1] & & \\
& & \downarrow & & \downarrow h & & \\
\tau_{\mathcal{U}}^{\leq -1} C^{\cdot} & \longrightarrow & \text{cone}(g)[-1] & \xrightarrow{w} & T & \xrightarrow{g} & (\tau_{\mathcal{U}}^{\leq -1} C^{\cdot})[1] \\
\downarrow 1 & & \downarrow f & & \downarrow u\alpha & & \downarrow 1 \\
\tau_{\mathcal{U}}^{\leq -1} C^{\cdot} & \longrightarrow & C^{\cdot} & \longrightarrow & \tau_{\mathcal{U}}^{\geq 0} C^{\cdot} & \xrightarrow{v} & (\tau_{\mathcal{U}}^{\leq -1} C^{\cdot})[1] \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & \text{cone}(f) & \xrightarrow{1} & \text{cone}(f) & &
\end{array}$$

Em seguida, mostraremos que $\text{cone}(g)[-1] \in \mathcal{V}^{\leq 0}$ e que $\text{cone}(f) \in \mathcal{V}^{\geq 1}$. Para $i > 0$, por meio do triângulo $\tau_{\mathcal{U}}^{\leq -1} C^{\cdot} \rightarrow \text{cone}(g)[-1] \xrightarrow{w} T \xrightarrow{g} (\tau_{\mathcal{U}}^{\leq -1} C^{\cdot})[1]$, garantimos a existência da sequência exata $0 = H_{\mathcal{U}}^i(\tau_{\mathcal{U}}^{\leq -1} C^{\cdot}) \rightarrow H_{\mathcal{U}}^i(\text{cone}(g)[-1]) \rightarrow H_{\mathcal{U}}^i(T) = 0$ e, portanto, $H_{\mathcal{U}}^i(\text{cone}(g)[-1]) = 0$. Agora, se $i = 0$, então a sequência exata $0 = H_{\mathcal{U}}^0(\tau_{\mathcal{U}}^{\leq -1} C^{\cdot}) \rightarrow H_{\mathcal{U}}^0(\text{cone}(g)[-1]) \rightarrow H_{\mathcal{U}}^0(T) = T \rightarrow H_{\mathcal{U}}^1(\tau_{\mathcal{U}}^{\leq -1} C^{\cdot}) = 0$ nos permite concluir que $H_{\mathcal{U}}^0(\text{cone}(g)[-1]) \simeq T \in \mathcal{T}(T_1)$, o que finaliza a demonstração de que $\text{cone}(g)[-1] \in \mathcal{V}^{\leq 0}$.

Para $i < -1$, a sequência exata $0 = H_{\mathcal{U}}^i(\tau_{\mathcal{U}}^{\geq 0} C^{\cdot}) \rightarrow H_{\mathcal{U}}^i(\text{cone}(f)) \rightarrow H_{\mathcal{U}}^{i+1}(T) = 0$, obtida através do triângulo $T \rightarrow \tau_{\mathcal{U}}^{\geq 0} C^{\cdot} \rightarrow \text{cone}(f) \rightarrow T[1]$, nos garante que $H_{\mathcal{U}}^i(\text{cone}(f)) = 0$. Quanto a $i = -1$ e $i = 0$, observe anteriormente que o morfismo $H_{\mathcal{U}}^0(u)$ é um isomorfismo, já que $0 = H_{\mathcal{U}}^0(\tau_{\mathcal{U}}^{\geq 1} C^{\cdot}[-1]) \rightarrow H_{\mathcal{U}}^0(C^{\cdot}) \xrightarrow{H_{\mathcal{U}}^0(u)} H_{\mathcal{U}}^0(\tau_{\mathcal{U}}^{\geq 0} C^{\cdot}) \rightarrow H_{\mathcal{U}}^0(\tau_{\mathcal{U}}^{\geq 1} C^{\cdot}) = 0$. Neste caso, uma vez que $H_{\mathcal{U}}^0(u)^{-1}H_{\mathcal{U}}^0(u\alpha) = \alpha$, deve existir um morfismo $\gamma: H_{\mathcal{U}}^0(\text{cone}(f)) \rightarrow F$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 = H_{\mathcal{U}}^{-1}(\tau_{\mathcal{U}}^{\geq 0} C^{\cdot}) & \longrightarrow & H_{\mathcal{U}}^{-1}(\text{cone}(f)) & \xrightarrow{H_{\mathcal{U}}^0(h)} & H_{\mathcal{U}}^0(T) & \xrightarrow{H_{\mathcal{U}}^0(u\alpha)} & H_{\mathcal{U}}^0(\tau_{\mathcal{U}}^{\geq 0} C^{\cdot}) & \longrightarrow & H_{\mathcal{U}}^0(\text{cone}(f)) & \longrightarrow & 0 \\
& & & & \downarrow 1 & & \downarrow H_{\mathcal{U}}^0(u)^{-1} & & \downarrow \gamma & & \\
0 & \longrightarrow & T & \xrightarrow{\alpha} & H_{\mathcal{U}}^0(C^{\cdot}) & \xrightarrow{\beta} & F & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

comuta em $\text{mod } A$. Sendo α um monomorfismo, devemos ter $H_{\mathcal{U}}^0(u\alpha)$ um monomorfismo e, portanto, $H_{\mathcal{U}}^0(h) = 0$, ou ainda, $H_{\mathcal{U}}^{-1}(\text{cone}(f)) = 0$. Também, γ é um isomorfismo, donde $H_{\mathcal{U}}^0(\text{cone}(f)) \simeq F \in \mathcal{F}(T_1)$. Consequentemente, $\text{cone}(f) \in \mathcal{V}^{\geq 1}$, como desejado.

Vejamos, agora, que $(\mathcal{V}^{\leq 0}, \mathcal{V}^{\geq 0})$ é não-degenerada. Considere $X^{\cdot} \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{V}^{\leq n}$. Neste caso, para cada $i \in \mathbb{Z}$, devemos ter $H_{\mathcal{U}}^i(X^{\cdot}) = 0$ e, portanto, $\tau_{\mathcal{U}}^{\leq 0} X^{\cdot} \simeq \tau_{\mathcal{U}}^{\leq -1} X^{\cdot}$, tendo em vista o corolário 1.8 e o triângulo $\tau_{\mathcal{U}}^{\leq -1} X^{\cdot} \rightarrow \tau_{\mathcal{U}}^{\leq 0} X^{\cdot} \rightarrow H_{\mathcal{U}}^0(X^{\cdot}) \rightarrow (\tau_{\mathcal{U}}^{\leq -1} X^{\cdot})[1]$ em $\mathcal{D}^b(\mathcal{H})$. Em particular, $\tau_{\mathcal{U}}^{\leq 0} X^{\cdot} \in \mathcal{U}^{\leq -1}$. Da mesma forma, é possível concluir que $\tau_{\mathcal{U}}^{\leq 0} X^{\cdot} \in \mathcal{U}^{\leq n}$, para cada $n \in \mathbb{Z}$, nos permitindo garantir que $\tau_{\mathcal{U}}^{\leq 0} X^{\cdot} = 0$, pois $\mathcal{U}$ é não-degenerada. Analogamente, obtém-se que $\tau_{\mathcal{U}}^{\geq 1} X^{\cdot} = 0$, donde $X^{\cdot} = 0$, o que finaliza a demonstração. $\square$

De acordo com a proposição 3.22, se B for uma álgebra 2-quase inclinada, em que $\Phi(\mathcal{H}; (\mathcal{T}(T_0), \mathcal{F}(T_0))) = (\text{mod } A; (\mathcal{X}(T_0), \mathcal{Y}(T_0)))$ e $\Phi(\text{mod } A; (\mathcal{T}(T_1), \mathcal{F}(T_1))) = (\text{mod } B; (\mathcal{X}(T_1), \mathcal{Y}(T_1)))$ - ainda seguindo as notações fixadas no início da seção -, então, para cada A -módulo $Z \in \mathcal{X}(T_0)$, a sequência canônica relativa ao par de torção $(\mathcal{T}(T_1), \mathcal{F}(T_1))$ será da forma $0 \rightarrow A_1 \oplus A_2 \rightarrow Z \rightarrow A_4[-1] \rightarrow 0$, para $A_i \in \text{add } \mathcal{A}_i$. Na seção seguinte, veremos que ao submetermos as t-estruturas natural e $\mathcal{V} = (\mathcal{V}^{\leq 0}, \mathcal{V}^{\geq 0})$ de $\mathcal{D}^b(\mathcal{H})$, definida na proposição 3.23, à hipótese de *compatibilidade*, poderemos garantir que $A_1 = 0$.

3.2.2 Compatibilidade entre t-estruturas

A fim de obter possíveis relações entre duas categorias abelianas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ derivadamente equivalentes, ou seja, para as quais existe uma equivalência triangular $F : \mathcal{D}^b(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$, Keller e Vossieck introduziram, em [KV88b], o conceito de compatibilidade entre t-estruturas. Pode-se verificar que $\mathcal{D}^b(\mathcal{A}) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}^{\leq n}$, em que $\mathcal{D}$ é a t-estrutura natural de $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$, e ainda $\mathcal{D}^b(\mathcal{A}) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{E}^{\leq n}$, em que $\mathcal{E}$ corresponde à imagem da t-estrutura natural de $\mathcal{D}^b(\mathcal{B})$ via F . A busca pelas relações desejadas é então resumida à comparação entre as duas t-estruturas construídas, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$, que ao serem assumidas compatíveis, permitem a construção de uma equivalência entre certas subcategorias plenas de categorias obtidas como filtrações de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ (para maiores detalhes, veja [HHK07] pg. 90). É ainda possível verificar, nessas condições, que a sequência espectral de termos $E^{pq} = H_D^p H_{\mathcal{E}}^q(X)$, com $X \in \mathcal{D}^{\leq 0}$, se anula para $p + q > 0$, o que nos permitirá mostrar a afirmação deixada em aberto no final da seção anterior.

Apresentaremos, antes disso, a definição e alguns resultados que nos serão úteis de t-estruturas compatíveis.

Definição 3.24. Sejam $\mathcal{U} = (\mathcal{U}^{\leq 0}, \mathcal{U}^{\geq 0})$ e $\mathcal{V} = (\mathcal{V}^{\leq 0}, \mathcal{V}^{\geq 0})$ t-estruturas em uma categoria triangulada $\mathcal{C}$. Diremos que $\mathcal{U}^{\leq 0}$ é compatível com $\mathcal{V}^{\geq 1}$ se $\mathcal{U}^{\leq 0}$ for estável em relação aos funtores $\tau_{\mathcal{V}}^{\leq n}$, $n \in \mathbb{Z}$, ou seja, se $\tau_{\mathcal{V}}^{\leq n} \mathcal{U}^{\leq 0} \subseteq \mathcal{U}^{\leq 0}$, para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 3.25. As t-estruturas $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ da proposição 3.23 são tais que $\mathcal{U}^{\leq 0}$ é compatível com $\mathcal{V}^{\geq 1}$. De fato, de forma análoga àquela feita na demonstração dessa proposição, para $n \in \mathbb{Z}$ e $C^\bullet \in \mathcal{D}^b(\mathcal{H})$, podemos construir o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{cone}(f)[-1] & \xrightarrow{1} & \text{cone}(f)[-1] & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \tau_{\mathcal{U}}^{\leq n-1} C^\bullet & \longrightarrow & \text{cone}(g)[-1] & \longrightarrow & T[-n] & \longrightarrow & (\tau_{\mathcal{U}}^{\leq n-1} C^\bullet)[1] \\
 \downarrow 1 & & \downarrow f & & \downarrow u\alpha[-n] & & \downarrow 1 \\
 \tau_{\mathcal{U}}^{\leq n-1} C^\bullet & \longrightarrow & C^\bullet & \longrightarrow & \tau_{\mathcal{U}}^{\geq n} C^\bullet & \longrightarrow & (\tau_{\mathcal{U}}^{\leq n-1} C^\bullet)[1] \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \text{cone}(f) & \xrightarrow{1} & \text{cone}(f), & &
 \end{array}$$

em que $0 \rightarrow T \xrightarrow{\alpha} H_{\mathcal{U}}^n(C^\bullet) \xrightarrow{\beta} F \rightarrow 0$ é a sequência exata canônica para $H_{\mathcal{U}}^n(C^\bullet)$ relativa ao par de torção $(\mathcal{T}(T_1), \mathcal{F}(T_1))$, o morfismo $u : H_{\mathcal{U}}^n(C^\bullet)[-n] \rightarrow \tau_{\mathcal{U}}^{\geq n} C^\bullet$ é tal que $H_{\mathcal{U}}^n(u)$ é um isomorfismo e, mais ainda, $\text{cone}(g)[-1] \in \mathcal{V}^{\leq n}$ e $\text{cone}(f) \in \mathcal{V}^{\geq n+1}$. Em particular, $\tau_{\mathcal{V}}^{\leq n} C^\bullet = \text{cone}(g)[-1]$. Observe que:

- (1) se $n \leq 0$, então $\text{cone}(g)[-1] \in \mathcal{U}^{\leq 0}$, já que a sequência $0 = H_{\mathcal{U}}^{\geq 0}(\tau_{\mathcal{U}}^{\leq n-1} C^\bullet) \rightarrow H_{\mathcal{U}}^{\geq 0}(\text{cone}(g)[-1]) \rightarrow H_{\mathcal{U}}^{\geq 0}(T[-n]) = 0$ é exata em $ht(\mathcal{U})$.
- (2) se $n > 0$ e $C^\bullet \in \mathcal{U}^{\leq 0}$, então $\tau_{\mathcal{U}}^{\geq n} C^\bullet = 0$ e, portanto, $C^\bullet \simeq \tau_{\mathcal{U}}^{\leq n-1} C^\bullet$. Além disso, $H_{\mathcal{U}}^n(C^\bullet) = 0$, desde que $H_{\mathcal{U}}^n(u) : H_{\mathcal{U}}^n(C^\bullet) \rightarrow H_{\mathcal{U}}^n(\tau_{\mathcal{U}}^{\geq n} C^\bullet)$ é um isomorfismo. Como consequência, $T = 0$, ou ainda, $\tau_{\mathcal{U}}^{\leq n-1} C^\bullet \simeq \text{cone}(g)[-1]$. Nessas condições, $\tau_{\mathcal{V}}^{\leq n} C^\bullet = \text{cone}(g)[-1] \simeq \tau_{\mathcal{U}}^{\leq n-1} C^\bullet \simeq C^\bullet \in \mathcal{U}^{\leq 0}$.

Segue dos itens (1) e (2) que $\tau_{\mathcal{V}}^{\leq n} \mathcal{U}^{\leq 0} \subseteq \mathcal{U}^{\leq 0}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, como desejado.

Similarmente, sendo $\mathcal{W}$ a t-estrutura natural de $\mathcal{D}^b(\mathcal{H})$, verifica-se que $\mathcal{W}^{\leq 0}$ é compatível com $\mathcal{U}^{\geq 1}$.

□

Observação 3.26 (Uma condição para que $\mathcal{W}^{\leq 0}$ seja compatível com $\mathcal{V}^{\geq 1}$). Para uma categoria abeliana e hereditária $\mathcal{H}$, sejam $\mathcal{W}$ a t-estrutura natural de $\mathcal{D}^b(\mathcal{H})$ e $\mathcal{V}$ a t-estrutura obtida na proposição 3.23. Como no exemplo 3.25, para cada complexo $C^\bullet \in \mathcal{D}^b(\mathcal{H})$, pode-se construir o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{cone}(f)[-1] & \xrightarrow{1} & \text{cone}(f)[-1] & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \tau_{\mathcal{U}}^{\leq n-1} C^\bullet & \longrightarrow & \text{cone}(g)[-1] & \longrightarrow & T[-n] & \longrightarrow & (\tau_{\mathcal{U}}^{\leq n-1} C^\bullet)[1] \\
 \downarrow 1 & & \downarrow f & & \downarrow u\alpha[-n] & & \downarrow 1 \\
 \tau_{\mathcal{U}}^{\leq n-1} C^\bullet & \longrightarrow & C^\bullet & \longrightarrow & \tau_{\mathcal{U}}^{\geq n} C^\bullet & \longrightarrow & (\tau_{\mathcal{U}}^{\leq n-1} C^\bullet)[1] \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \text{cone}(f) & \xrightarrow{1} & \text{cone}(f), & &
 \end{array}$$

em que $0 \rightarrow T \xrightarrow{\alpha} H_{\mathcal{U}}^n(C^\bullet) \xrightarrow{\beta} F \rightarrow 0$ é a sequência exata canônica para $H_{\mathcal{U}}^n(C^\bullet)$ relativa ao par de torção $(\mathcal{T}(T_1), \mathcal{F}(T_1))$, o morfismo $u : H_{\mathcal{U}}^n(C^\bullet)[-n] \rightarrow \tau_{\mathcal{U}}^{\geq n} C^\bullet$ é tal que $H_{\mathcal{U}}^n(u)$ é um isomorfismo e, mais ainda, $\text{cone}(g)[-1] \in \mathcal{V}^{\leq n}$ e $\text{cone}(f) \in \mathcal{V}^{\geq n+1}$. Em particular, $\tau_{\mathcal{V}}^{\leq n} C^\bullet = \text{cone}(g)[-1]$.

Se $n \leq 0$, então a sequência exata $H_{\mathcal{W}}^{\geq 0}(\tau_{\mathcal{U}}^{\leq n-1} C^\bullet) \rightarrow H_{\mathcal{W}}^{\geq 0}(\text{cone}(g)[-1]) \rightarrow H_{\mathcal{W}}^{\geq 0}(T[-n])$ tem termos das pontas nulos, uma vez que $\tau_{\mathcal{U}}^{\leq n-1} C^\bullet \in \mathcal{U}^{\leq n-1} \subseteq \mathcal{U}^{\leq -1} \subseteq \mathcal{W}^{\leq 0}$ e que $T[-n] \in \mathcal{U}^{\leq 0}[-n] = \mathcal{U}^{\leq n} \subseteq \mathcal{U}^{\leq 0} \subseteq \mathcal{W}^{\leq 0}$. Como consequência segue que $\text{cone}(g)[-1] \in \mathcal{W}^{\leq 0}$, ou ainda, que $\tau_{\mathcal{V}}^{\leq n} C^\bullet \in \mathcal{W}^{\leq 0}$.

Se $n \geq 2$ e $C^\bullet \in \mathcal{W}^{\leq 0}$, então $\tau_{\mathcal{U}}^{\geq 2} C^\bullet = 0$, já que $C^\bullet \in \mathcal{U}^{\leq 1}$. Neste caso, $H_{\mathcal{U}}^2(C^\bullet) = 0$ e, portanto, $T = 0$. O triângulo $\tau_{\mathcal{U}}^{\leq n-1} C^\bullet \rightarrow \text{cone}(g)[-1] \rightarrow T[-n] \rightarrow (\tau_{\mathcal{U}}^{\leq n-1} C^\bullet)[1]$ junto ao corolário 1.8 então nos garante que $\tau_{\mathcal{U}}^{\leq n-1} C^\bullet \simeq \text{cone}(g)[-1]$. Dessa forma, $\tau_{\mathcal{V}}^{\leq n} C^\bullet = \text{cone}(g)[-1] \simeq \tau_{\mathcal{U}}^{\leq n-1} C^\bullet = C^\bullet$, pois $C^\bullet \in \mathcal{U}^{\leq n-1}$. Em particular, $\tau_{\mathcal{V}}^{\leq n} C^\bullet \in \mathcal{W}^{\leq 0}$.

Finalmente, para $n = 1$, a sequência exata $H_{\mathcal{W}}^{\geq 1}(\tau_{\mathcal{U}}^{\leq 0} C^\bullet) \rightarrow H_{\mathcal{W}}^{\geq 1}(\text{cone}(g)[-1]) \rightarrow H_{\mathcal{W}}^{\geq 1}(T[-1])$ é tal que os termos das pontas se anulam, desde que $\tau_{\mathcal{U}}^{\leq 0} C^\bullet \in \mathcal{U}^{\leq 0} \subseteq \mathcal{W}^{\leq 0}$ e $T[-1] \in \mathcal{U}^{\leq 1} \subseteq \mathcal{W}^{\leq 1}$. Agora, é também exata a sequência $0 = H_{\mathcal{W}}^1(\tau_{\mathcal{U}}^{\leq 0} C^\bullet) \rightarrow H_{\mathcal{W}}^1(\text{cone}(g)[-1]) \rightarrow H_{\mathcal{W}}^1(T[-1]) \rightarrow H_{\mathcal{W}}^2(\tau_{\mathcal{U}}^{\leq 0} C^\bullet) = 0$ e, portanto, $H_{\mathcal{W}}^1(\text{cone}(g)[-1]) \simeq H_{\mathcal{W}}^1(T[-1])$, ou ainda, $H_{\mathcal{W}}^1(\text{cone}(g)[-1]) = 0$ se, e somente se, $H_{\mathcal{W}}^1(T[-1]) = H_{\mathcal{W}}^0(T) = 0$.

Nessas condições, $\mathcal{W}^{\leq 0}$ será compatível com $\mathcal{V}^{\geq 1}$ se, e somente se, para cada $C^\bullet \in \mathcal{W}^{\leq 0}$, tivermos que $H_{\mathcal{W}}^0(T) = 0$, em que $0 \rightarrow T \rightarrow H_{\mathcal{U}}^1(C^\bullet) \rightarrow F \rightarrow 0$ corresponde à sequência exata canônica para $H_{\mathcal{U}}^1(C^\bullet)$ relativa ao par de torção $(\mathcal{T}(T_1), \mathcal{F}(T_1))$. $\square$

Com base na observação acima, apresentaremos a seguir um exemplo em que as t-estruturas $\mathcal{W}$ e $\mathcal{V}$ de $\mathcal{D}^b(\mathcal{H})$ são tais que $\mathcal{W}^{\leq 0}$ é compatível com $\mathcal{V}^{\geq 1}$.

Exemplo 3.27. Seja H a álgebra de caminhos associada ao quiver

$$\begin{array}{c}
 & & 3 & & \\
 & & \swarrow & & \\
 1 & \longleftarrow & 2 & \longleftarrow & 4,
 \end{array}$$

cuja categoria

de módulos tem como quiver de Auslander-Reiten

Considere o H -módulo inclinado $T_0 = \frac{4}{2} \oplus \frac{3}{2} \oplus \frac{4}{2} \oplus 4$, que induz o par de torção $(\mathcal{T}(T_0), \mathcal{F}(T_0))$ em $\text{mod } H$ dado por $\mathcal{T}(T_0) = \text{add} \left\{ \frac{4}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{3}{2}, 3, 4 \right\}$ e $\mathcal{F}(T_0) = \text{add} \left\{ 1, \frac{2}{1}, 2, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\}$. Seja $A = \text{End}_H T_0$. Neste caso, o quiver de Auslander-Reiten de sua categoria de módulos é da forma

em que $\mathcal{X}(T_0) = \text{add} \left\{ 3', \frac{4'}{2'}, \frac{4'}{2'}, \frac{4'}{2'}, 4' \right\}$ e $\mathcal{Y}(T_0) = \text{add} \left\{ 1', \frac{2'}{1'}, \frac{3'}{1'}, \frac{3'}{1'}, \frac{4'}{1'}, \frac{3'}{1'}, 2' \right\}$. Finalmente, considere o A -módulo inclinado $T_1 = 1' \oplus \frac{2'}{1'} \oplus \frac{4'}{1'} \oplus \frac{4'}{2'}$, que determina em $\text{mod } A$ o par de torção $(\mathcal{T}(T_1), \mathcal{F}(T_1))$, com $\mathcal{T}(T_1) = \text{add} \left\{ 1', \frac{2'}{1'}, \frac{4'}{1'}, \frac{4'}{2'}, \frac{4'}{2'}, \frac{4'}{2'}, \frac{4'}{2'}, 4' \right\}$ e $\mathcal{F}(T_1) = \text{add} \{ 3' \}$. Conforme a proposição 1.3, se $B = \text{End}_A T_1$, então o par de torção $(\mathcal{X}(T_1), \mathcal{Y}(T_1))$ induzido por T_1 em $\text{mod } B$ é cindido, uma vez que $\text{di}_A \mathcal{F}(T_1) \leq 1$. Dessa forma, B é uma álgebra 2-quase inclinada.

Como anteriormente, considere $\mathcal{A}_1 = \text{ind } \mathcal{Y}(T_0) \cap \mathcal{T}(T_1)$, $\mathcal{A}_2 = \text{ind } \mathcal{X}(T_0) \cap \mathcal{T}(T_1)$, $\mathcal{A}_3[-1] = \text{ind } \mathcal{Y}(T_0) \cap \mathcal{F}(T_1)$ e $\mathcal{A}_4[-1] = \text{ind } \mathcal{X}(T_0) \cap \mathcal{F}(T_1)$. Sejam ainda $\mathcal{W}$ a t-estrutura natural de $\mathcal{D}^b(H)$, $\mathcal{U}$ a t-estrutura em $\mathcal{D}^b(H)$ induzida pelo par de torção $(\mathcal{T}(T_0), \mathcal{F}(T_0))$ e $\mathcal{V}$ como definida na proposição 3.23. Por meio da observação 3.26, vejamos que $\mathcal{W}^{\leq 0}$ é compatível com $\mathcal{V}^{\geq 1}$. Observe, inicialmente, que $\mathcal{W}^{\leq 0} = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{H}[i]$. Para $C \in \mathcal{F}(T_0)$, obtemos que:

- (1) se $C = \frac{3}{2}$, então $H_{\mathcal{U}}^1(\frac{3}{2}) = H_{\mathcal{U}}^1(4'[-1]) = 4' \in \mathcal{A}_2$;
- (2) se $C = \frac{2}{1}$, então $H_{\mathcal{U}}^1(\frac{2}{1}) = H_{\mathcal{U}}^1(\frac{4'}{3'2'}[-1]) = \frac{4'}{3'2'} \in \mathcal{A}_2$;
- (3) se $C = 2$, então $H_{\mathcal{U}}^1(2) = H_{\mathcal{U}}^1(\frac{4'}{2'}[-1]) = \frac{4'}{2'} \in \mathcal{A}_2$;
- (4) se $C = \frac{3}{2}$, então $H_{\mathcal{U}}^1(\frac{3}{2}) = H_{\mathcal{U}}^1(\frac{4'}{3'}[-1]) = \frac{4'}{3'} \in \mathcal{A}_2$;
- (5) se $C = 1$, então $H_{\mathcal{U}}^1(1) = H_{\mathcal{U}}^1(3'[-1]) = 3' \in \mathcal{A}_4[-1]$.

Assim, a sequência exata canônica para $H_{\mathcal{U}}^1(C)$ relativa ao par de torção $(\mathcal{T}(T_1), \mathcal{F}(T_1))$ é de uma das formas $0 \rightarrow \mathcal{A}_2 \rightarrow H_{\mathcal{U}}^1(C) \rightarrow 0 \rightarrow 0$, com $\mathcal{A}_2 \in \mathcal{A}_2$, ou $0 \rightarrow 0 \rightarrow H_{\mathcal{U}}^1(C) \rightarrow \mathcal{A}_4[-1] \rightarrow 0$, com $\mathcal{A}_4[-1] \in$

$\mathcal{A}_4[-1]$, o que nos permite concluir que $T \in \mathcal{A}_2$ ou $T = 0$ (seguindo a notação da observação 3.26, a sequência exata canônica para $H_{\mathcal{U}}^1(C)$, com $C \in \mathcal{W}^{\leq 0}$, é denotada por $0 \rightarrow T \rightarrow H_{\mathcal{U}}^1(C) \rightarrow F \rightarrow 0$). Em ambas as situações, $H_{\mathcal{W}}^0(T) = 0$, pois $\mathcal{A}_2[-1] \subseteq ht(\mathcal{W}) = mod H$. Além disso, ainda para $C \in \mathcal{F}(T_0)$ e $i > 0$, $H_{\mathcal{U}}^1(C[i]) = H_{\mathcal{U}}^1(C[1]) = 0$, uma vez que $C[1] \in \mathcal{X}(T_0) \subseteq mod A = ht(\mathcal{U})$. Neste caso, $H_{\mathcal{W}}^0(T) = 0$.

Quanto aos objetos em $\mathcal{T}(T_0)[i]$, para $i \geq 0$, observe que $H_{\mathcal{U}}^1(\mathcal{T}(T_0)[i]) = H_{\mathcal{U}}^1(\mathcal{Y}(T_0)[i]) = H_{\mathcal{U}}^{i+1}(\mathcal{Y}(T_0)) = 0$, pois $\mathcal{Y}(T_0) \subseteq mod A = ht(\mathcal{U})$. Dessa forma, novamente concluímos que $T = 0$ e, portanto, $H_{\mathcal{W}}^0(T) = 0$.

Resta analisarmos o objeto $\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \\ 1 \end{smallmatrix}[i]$, para cada $i \geq 0$. Assuma, inicialmente, que $i = 0$. Uma vez que $\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}[1]$ é um triângulo em $\mathcal{D}^b(H)$, com $\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix} \in \mathcal{U}^{\leq 0}$ e $\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \in \mathcal{U}^{\geq 1}$, obtemos que $\tau_{\mathcal{U}}^{\geq 1} \begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \\ 1 \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}$. Logo, $H_{\mathcal{U}}^1\left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)[-1] = \tau_{\mathcal{U}}^{\geq 1} \tau_{\mathcal{U}}^{\leq -1} \begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \\ 1 \end{smallmatrix} = \tau_{\mathcal{U}}^{\geq 1} \begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \\ 1 \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}$, ou ainda, $H_{\mathcal{U}}^1\left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}[1] = 4'[-1][1] = 4' \in \mathcal{A}_2$. Como consequência, $T \in \mathcal{A}_2$, o que nos permite garantir que $H_{\mathcal{W}}^0(T) = 0$. Por fim, para $i > 0$, $H_{\mathcal{U}}^1\left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \\ 1 \end{smallmatrix}[i]\right)[-1] = \tau_{\mathcal{U}}^{\geq 1} \tau_{\mathcal{U}}^{\leq -1} \left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \\ 1 \end{smallmatrix}[i]\right) = \tau_{\mathcal{U}}^{\geq 1} \left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \\ 1 \end{smallmatrix}[i]\right)$, pois $\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \\ 1 \end{smallmatrix}[i] \in \mathcal{U}^{\leq 1}[i] = \mathcal{U}^{\leq 1-i} \subseteq \mathcal{U}^{\leq 0} \subseteq \mathcal{U}^{\leq 1}$. Também, $\tau_{\mathcal{U}}^{\geq 1} \left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \\ 1 \end{smallmatrix}[i]\right) = 0$, já que $\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \\ 1 \end{smallmatrix}[i] \in \mathcal{U}^{\leq 0}$. Assim, $H_{\mathcal{U}}^1\left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \\ 1 \end{smallmatrix}[i]\right) = 0$ e, portanto, $H_{\mathcal{W}}^0(T) = 0$.

De acordo com a observação 3.26, $\mathcal{W}^{\leq 0}$ é compatível com $\mathcal{V}^{\geq 1}$. $\square$

Em virtude da proposição 1.27, se duas t-estruturas arbitrárias $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ forem tais que $\mathcal{U}^{\leq 0}$ é compatível com $\mathcal{V}^{\geq 1}$, então $\mathcal{U}^{\leq 0}$ será também estável em relação aos funtores $\tau_{\mathcal{V}}^{\geq n}$, uma vez que $\mathcal{U}^{\leq 0}$ é fechada para extensões e suspensões. Além disso, $H_{\mathcal{V}}^n(\mathcal{U}^{\leq 0}) \subseteq \mathcal{U}^{\leq -n}$, pois se $X \in \mathcal{U}^{\leq 0}$, então $H_{\mathcal{V}}^q(X) = (\tau_{\mathcal{V}}^{\leq q} \tau_{\mathcal{V}}^{\geq q}(X))[q] \in \mathcal{U}^{\leq 0}[q] = \mathcal{U}^{\leq -q}$. Dessa forma, $H_{\mathcal{U}}^p H_{\mathcal{V}}^q(X) = 0$, se $p + q > 0$. Este resultado será enunciado na proposição abaixo, além de uma propriedade satisfeita pelos morfismos em $ht(\mathcal{V})$.

Proposição 3.28 ([KV88b]). Sejam $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ t-estruturas em uma categoria triangulada $\mathcal{C}$ tais que $\mathcal{U}^{\leq 0}$ é compatível com $\mathcal{V}^{\geq 1}$. Então:

- (i) $H_{\mathcal{U}}^p H_{\mathcal{V}}^q|_{\mathcal{U}^{\leq 0}} = 0$, para todos p, q com $p + q > 0$.
- (ii) se, mais ainda, $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ forem não-degeneradas, então para cada morfismo $g : N \rightarrow N'$ em $ht(\mathcal{V})$, com $N \in \mathcal{U}^{\leq n}$ e $N' \in \mathcal{U}^{\leq n-1}$, devemos ter $\text{Ker } g \in \mathcal{U}^{\leq n}$ e $\text{Coker } g \in \mathcal{U}^{\leq n-1}$.

Demonstração. O item (i) foi demonstrado acima. Seja $g : N \rightarrow N'$ um morfismo em $ht(\mathcal{V})$, com $N \in \mathcal{U}^{\leq n}$ e $N' \in \mathcal{U}^{\leq n-1}$. Em $\mathcal{C}$, podemos construir o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{Ker } g & \xrightarrow{1} & \text{Ker } g & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 N'[-1] & \longrightarrow & N''[-1] & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N' \\
 \downarrow 1 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow 1 \\
 N'[-1] & \longrightarrow & (\text{Coker } g)[-1] & \longrightarrow & \text{Im } g & \longrightarrow & N' \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & (\text{Ker } g)[1] & \xrightarrow{1} & (\text{Ker } g)[1] & &
 \end{array}$$

em que as linhas e colunas são triângulos. Por meio da sequência exata

$$H_{\mathcal{V}}^{-1}((\text{Coker } g)[-1]) \rightarrow H_{\mathcal{V}}^0(\text{Ker } g) \rightarrow H_{\mathcal{V}}^0(N''[-1]) \rightarrow H_{\mathcal{V}}^0((\text{Coker } g)[-1])$$

em $ht(\mathcal{V})$, podemos concluir que $\text{Ker } g \simeq H_{\mathcal{V}}^{-1}(N'')$, uma vez que $\text{Ker } g, \text{Coker } g \in ht(\mathcal{V})$, ou seja, $H_{\mathcal{V}}^0(\text{Ker } g) = \text{Ker } g$, $H_{\mathcal{V}}^{-2}(\text{Coker } g) = 0$ e também $H_{\mathcal{V}}^{-1}(\text{Coker } g) = 0$. Da mesma forma, através da

sequência também exata $H_{\mathcal{V}}^1(\text{Ker } g) \rightarrow H_{\mathcal{V}}^1(N''[-1]) \rightarrow H_{\mathcal{V}}^1((\text{Coker } g)[-1]) \rightarrow H_{\mathcal{V}}^2(\text{Ker } g)$, obtemos que $\text{Coker } g \simeq H_{\mathcal{V}}^0(N'')$.

Dado $p > n - 1$, construímos a sequência exata $0 = H_{\mathcal{U}}^p(N') \rightarrow H_{\mathcal{U}}^p(N'') \rightarrow H_{\mathcal{U}}^{p+1}(N) = 0$ e, portanto, $N'' \in \mathcal{U}^{\leq n-1}$, ou ainda, $N'' = U[-(n-1)]$, para algum $U \in \mathcal{U}^{\leq 0}$.

Nessas condições, fixado $p > n$, $H_{\mathcal{U}}^p(\text{Ker } g) = H_{\mathcal{U}}^p H_{\mathcal{V}}^{-1}(N'') = H_{\mathcal{U}}^p H_{\mathcal{V}}^{-1}(U[-(n-1)]) = H_{\mathcal{U}}^p H_{\mathcal{V}}^{-n}(U)$. Sendo $\mathcal{U}^{\leq 0}$ compatível com $\mathcal{V}^{\geq 1}$, devemos ter $H_{\mathcal{V}}^{-n}(U) \in \mathcal{U}^{\leq n}$, o que nos permite concluir que $H_{\mathcal{U}}^p H_{\mathcal{V}}^{-n}(U) = 0$. Logo, $\text{Ker } g \in \mathcal{U}^{\leq n}$. Analogamente, pode-se verificar que $\text{Coker } g \in \mathcal{U}^{\leq n-1}$. $\square$

Em $\mathcal{D}^b(\mathcal{H})$, considere $\mathcal{W}$ a t-estrutura natural e $\mathcal{V} = (\mathcal{V}^{\leq 0}, \mathcal{V}^{\geq 0})$ a t-estrutura definida na proposição 3.23.

Proposição 3.29. Sejam B uma álgebra 2-quase inclinada, $X \in \mathcal{X}(T_0)$ e $0 \rightarrow A_1 \oplus A_2 \rightarrow X \rightarrow A_4[-1] \rightarrow 0$ a sequência exata canônica para X relativa ao par de torção $(\mathcal{T}(T_1), \mathcal{F}(T_1))$. Se $\mathcal{W}^{\leq 0}$ for compatível com $\mathcal{V}^{\geq 1}$, então $A_1 = 0$.

Demonstração. Sejam $X \in \mathcal{X}(T_0)$ e $0 \rightarrow A_1 \oplus A_2 \rightarrow X \rightarrow A_4[-1] \rightarrow 0$ sua sequência exata canônica relativa ao par de torção $(\mathcal{T}(T_1), \mathcal{F}(T_1))$. Em $\mathcal{D}^b(A)$, podemos construir o triângulo $(\star) A_1 \oplus A_2 \rightarrow X \rightarrow A_4[-1] \rightarrow A_1[1] \oplus A_2[1]$, que é também um triângulo em $\mathcal{D}^b(\mathcal{H})$, uma vez que existe uma equivalência triangular $\mathcal{D}^b(A) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{H})$ cuja restrição a $\text{mod } A$ é o funtor identidade. Neste caso, obtemos a sequência exata longa

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_{\mathcal{V}}^{-1}(A_1 \oplus A_2) \rightarrow H_{\mathcal{V}}^{-1}(X) \rightarrow H_{\mathcal{V}}^{-1}(A_4[-1]) \rightarrow H_{\mathcal{V}}^0(A_1 \oplus A_2) \rightarrow H_{\mathcal{V}}^0(X) \rightarrow H_{\mathcal{V}}^0(A_4[-1]) \rightarrow H_{\mathcal{V}}^1(A_1 \oplus A_2) \\ \rightarrow H_{\mathcal{V}}^1(X) \rightarrow H_{\mathcal{V}}^1(A_4[-1]) \rightarrow H_{\mathcal{V}}^2(A_1 \oplus A_2) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

em $ht(\mathcal{V}) = \text{mod } B$, em que $H_{\mathcal{V}}^q$ denota a cohomologia com respeito à t-estrutura $\mathcal{V}$. Observe que, para $q \neq 0, 1$, $H_{\mathcal{V}}^q(A_1 \oplus A_2) = 0 = H_{\mathcal{V}}^q(A_4[-1])$ e, portanto, $H_{\mathcal{V}}^q(X) = 0$, para $q \neq 0, 1$. Agora, para $q = 0$, $H_{\mathcal{V}}^0(A_1 \oplus A_2) = A_1 \oplus A_2$ e $H_{\mathcal{V}}^0(A_4[-1]) = 0$, donde $H_{\mathcal{V}}^0(X) = A_1 \oplus A_2$. Por fim, para $q = 1$, $H_{\mathcal{V}}^1(A_1 \oplus A_2) = 0$ e $H_{\mathcal{V}}^1(A_4[-1]) = A_4$, o que implica em $H_{\mathcal{V}}^1(X) = A_4$. Em resumo,

$$H_{\mathcal{V}}^q(X) = \begin{cases} A_1 \oplus A_2, & \text{se } q = 0, \\ A_4, & \text{se } q = 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Denotemos por $H_{\mathcal{W}}^p$ a cohomologia com respeito à t-estrutura $\mathcal{W}$. Note que $A_1 \in \mathcal{Y}(T_0) = \mathcal{T}(T_0)$ e que, portanto, A_1 é um objeto de $\mathcal{H}$. Assim, desde que $ht(\mathcal{W}) = \mathcal{H}$, obtemos $H_{\mathcal{W}}^0(A_1) = A_1$ e $H_{\mathcal{W}}^p(A_1) = 0$, se $p \neq 0$. Também, $A_2 \in \mathcal{X}(T_0)$, ou ainda, $A_2[-1] \in \mathcal{F}(T_0) \subseteq \mathcal{H}$. Logo, $H_{\mathcal{W}}^{-1}(A_2) = H_{\mathcal{W}}^0(A_2[-1]) = A_2[-1]$ e $H_{\mathcal{W}}^p(A_2) = 0$, se $p \neq -1$. Finalmente, $A_4 \in \mathcal{X}(T_0)[1]$, ou seja, $A_4[-2] \in \mathcal{F}(T_0) \subseteq \mathcal{H}$ e, portanto, $H_{\mathcal{W}}^{-2}(A_4) = H_{\mathcal{W}}^0(A_4[-2]) = A_4[-2]$ e $H_{\mathcal{W}}^p(A_4) = 0$, para $p \neq -2$. Dessa forma,

$$H_{\mathcal{W}}^p H_{\mathcal{V}}^{q+1}(X[-1]) = H_{\mathcal{W}}^p H_{\mathcal{V}}^q(X) = \begin{cases} A_1, & \text{se } q = 0 \text{ e } p = 0, \\ A_2[-1], & \text{se } q = 0 \text{ e } p = -1, \\ A_4[-2], & \text{se } q = 1 \text{ e } p = -2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Uma vez que $\mathcal{W}^{\leq 0}$ é compatível com $\mathcal{V}^{\geq 1}$, a proposição 3.28 nos garante que $H_{\mathcal{W}}^p H_{\mathcal{V}}^q(Z) = 0$, para cada $Z \in ht(\mathcal{W}) = \mathcal{H}$ e inteiros p e q tais que $p + q > 0$. Logo, $A_1 = 0$, desde que $X[-1] \in \mathcal{X}(T_0)[-1] =$

$\mathcal{F}(T_0) \subseteq \mathcal{H}$, como desejado. $\square$

Como consequência da proposição 3.29, podemos escrever $\mathcal{X}(T_0) = \{Z \in \text{mod } A; \text{ existe uma sequência exata } 0 \rightarrow A_2 \rightarrow Z \rightarrow A_4[-1] \rightarrow 0, \text{ com } A_i \in \text{add } \mathcal{A}_i\}$ e $\mathcal{Y}(T_0) = \{Z \in \text{mod } A; \text{ existe uma sequência exata } 0 \rightarrow A_1 \rightarrow Z \rightarrow A_3[-1] \oplus A_4[-1] \rightarrow 0, \text{ com } A_i \in \text{add } \mathcal{A}_i, \text{ e } Z \text{ não tem somandos indecomponíveis em } \mathcal{A}_4[-1]\}$.

Corolário 3.30. Sejam B uma álgebra 2-quase inclinada, $A_4[-1] \in \mathcal{A}_4[-1]$ indecomponível, $A_1 \in \text{add } \mathcal{A}_1$ e $A_2 \in \text{add } \mathcal{A}_2$. Sejam ainda $\mathcal{W}$ e $\mathcal{V}$ t-estruturas em $\mathcal{D}^b(\mathcal{H})$ como definidas anteriormente. Se $\mathcal{W}^{\leq 0}$ for compatível com $\mathcal{V}^{\geq 1}$, então $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(B)}(A_4[-1], A_1[1]) = 0$ ou $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(B)}(A_4[-1], A_2[1]) = 0$.

Demonstração. Sejam $A_4[-1] \in \mathcal{A}_4[-1]$ indecomponível, $A_1 \in \text{add } \mathcal{A}_1$ e $A_2 \in \text{add } \mathcal{A}_2$ tais que existem morfismos não nulos $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A_4[-1], A_1[1])$ e $\beta \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A_4[-1], A_2[1])$. Considere a sequência exata $(\star) \quad 0 \rightarrow A_1 \oplus A_2 \xrightarrow{(u_1 \ u_2)} Z \xrightarrow{v} A_4[-1] \rightarrow 0$ associada ao morfismo $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ via o isomorfismo $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A_4[-1], A_1[1] \oplus A_2[1]) \simeq \text{Ext}_A^1(A_4[-1], A_1 \oplus A_2)$. Em particular, $A_1 \oplus A_2 \xrightarrow{(u_1 \ u_2)} Z \xrightarrow{v} A_4[-1] \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}} A_1[1] \oplus A_2[1]$ é um triângulo em $\mathcal{D}^b(A)$. Escrevamos $Z = Y \oplus X$, em que $Y \in \mathcal{Y}(T_0)$ e $X \in \mathcal{X}(T_0)$. Uma vez que $(\star)$ é a sequência exata canônica para Z relativa ao par de torção $(\mathcal{T}(T_1), \mathcal{F}(T_1))$, esta pode ser obtida ao somarmos as sequências exatas canônicas de Y e X e, portanto, devemos ter $0 \rightarrow A_1 \rightarrow Y \rightarrow A'_4[-1] \rightarrow 0$ e $0 \rightarrow A_2 \rightarrow X \rightarrow A''_4[-1] \rightarrow 0$ (segundo a proposição 3.29), com $A_4[-1] = A'_4[-1] \oplus A''_4[-1]$, ou ainda, triângulos $A_1 \rightarrow Y \rightarrow A'_4[-1] \xrightarrow{t_1} A_1[1]$ e $A_2 \rightarrow X \rightarrow A''_4[-1] \xrightarrow{t_2} A_2[1]$ em $\mathcal{D}^b(A)$. Agora, desde que $A_4[-1]$ é indecomponível, $A'_4[-1] = 0$ ou $A''_4[-1] = 0$. No primeiro caso, construímos o triângulo $A_1 \oplus A_2 \rightarrow A_1 \oplus X \rightarrow A_4[-1] \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ t_2 \end{pmatrix}} A_1[1] \oplus A_2[1]$ e, desde que o primeiro quadrado abaixo comuta, em que ϕ_1 e ϕ_2 são isomorfismos dados pela unicidade da sequência exata canônica, deve existir um isomorfismo $\psi : A_4[-1] \rightarrow A_4[-1]$ tornando o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 \oplus A_2 & \longrightarrow & A_1 \oplus X & \longrightarrow & A_4[-1] & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ t_2 \end{pmatrix}} & A_1[1] \oplus A_2[1] \\ \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \psi & & \downarrow 1 \\ A_1 \oplus A_2 & \longrightarrow & Y \oplus X & \longrightarrow & A_4[-1] & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}} & A_1[1] \oplus A_2[1] \end{array}$$

comutativo. Dessa forma, $\alpha\psi = 0$ e, portanto, $\alpha = 0$, uma contradição. Similarmente, no segundo caso, construímos o triângulo $A_1 \oplus A_2 \rightarrow Y \oplus A_2 \rightarrow A_4[-1] \xrightarrow{\begin{pmatrix} t_1 \\ 0 \end{pmatrix}} A_1[1] \oplus A_2[1]$, o que nos permite concluir que $\beta = 0$, novamente uma contradição. Logo, $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A_4[-1], A_1[1]) = 0$ ou $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A_4[-1], A_2[1]) = 0$. O resultado desejado é então garantido por meio da equivalência derivada $\mathcal{D}^b(B) \rightarrow \mathcal{D}^b(A)$, cuja restrição a $\text{mod } B$ é o funtor identidade. $\square$

Ainda de acordo com a proposição 3.28, a hipótese de compatibilidade entre $\mathcal{W}^{\leq 0}$ e $\mathcal{V}^{\geq 1}$ nos garante que um morfismo $g : N \rightarrow N'$ em $ht(\mathcal{V})$, com $N \in \mathcal{W}^{\leq n}$ e $N' \in \mathcal{W}^{\leq n-1}$, para algum inteiro n , também satisfaz $\text{Ker } g \in \mathcal{W}^{\leq n}$ e $\text{Coker } g \in \mathcal{W}^{\leq n-1}$. Neste caso, podemos obter:

Proposição 3.31. Sejam B uma álgebra 2-quase inclinada, $\mathcal{W}$ e $\mathcal{V}$ t-estruturas em $\mathcal{D}^b(\mathcal{H})$ como definidas anteriormente. Se $\mathcal{W}^{\leq 0}$ for compatível com $\mathcal{V}^{\geq 1}$, então:

- (i) um morfismo $g : A_2 \rightarrow A_4$ em $\text{mod } B$, com $A_2 \in \text{add } \mathcal{A}_2$ e $A_4 \in \text{add } \mathcal{A}_4$, será tal que nenhum somando indecomponível de $\text{Ker } g$ pertence a $\mathcal{A}_1$.

- (ii) um morfismo $h : A_3 \oplus A_4 \rightarrow C_4$ em $\text{mod } B$, com $A_3 \in \text{add } \mathcal{A}_3$ e $A_4, C_4 \in \text{add } \mathcal{A}_4$, será tal que nenhum somando indecomponível de $\text{Ker } h$ pertence a $\mathcal{A}_1$.

Demonstração. Mostraremos somente o item (i). Considere $\mathcal{W}$ e $\mathcal{V}$ as t-estruturas em $\mathcal{D}^b(\mathcal{H})$ como definidas anteriormente. Seja $g : A_2 \rightarrow A_4$ um morfismo em $\text{mod } B$, com $A_2 \in \text{add } \mathcal{A}_2$ e $A_4 \in \text{add } \mathcal{A}_4$. Observe que $A_2 \in \mathcal{W}^{\leq -1}$ e $A_4 \in \mathcal{W}^{\leq -2}$ e, portanto, $\text{Ker } g \in \mathcal{W}^{\leq -1}$, em virtude da proposição 3.28. Consequentemente, nenhum somando indecomponível de $\text{Ker } g$ deve pertencer a $\mathcal{A}_1$. $\square$

3.2.3 Sobre a funtorialidade das subcategorias $\mathcal{A}_1$, $(\mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3)[-1]$ e $\mathcal{A}_4[-2]$

Seja $\mathcal{C}$ uma subcategoria aditiva e plena de uma categoria aditiva $\mathcal{D}$. Recordamos que, para um objeto X em $\mathcal{D}$, um morfismo $f : X \rightarrow F_X$ é chamado de $\mathcal{C}$ -aproximação à esquerda de X se $F_X \in \mathcal{C}$ e se, para todo $g : X \rightarrow C$, com $C \in \mathcal{C}$, existir um morfismo $h : F_X \rightarrow C$ tal que $g = hf$. Além disso, f é uma $\mathcal{C}$ -aproximação minimal à esquerda se cada endomorfismo ϕ de F_X satisfazendo $\phi f = f$ for um isomorfismo. Se todo objeto X em $\mathcal{D}$ admitir uma $\mathcal{C}$ -aproximação à esquerda, então $\mathcal{C}$ é chamada de covariantemente finita. Analogamente, podem-se definir aproximação minimal à direita e subcategoria contravariantemente finita. Uma subcategoria $\mathcal{C}$ de $\mathcal{D}$ simultaneamente covariante e contravariantemente finita é chamada funtorialmente finita.

Consideremos novamente B uma álgebra 2-quase inclinada, $F : \mathcal{D}^b(B) \rightarrow \mathcal{D}^b(A)$ e $G : \mathcal{D}^b(A) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{H})$ equivalências triangulares que quando restritas, respectivamente, às subcategorias $\text{mod } B$ e $\text{mod } A$ correspondem ao funtor identidade. Dessa forma,

$$\mathcal{D}^b(B) \xrightarrow{F} \mathcal{D}^b(A) \xrightarrow{G} \mathcal{D}^b(\mathcal{H})$$

$$\mathcal{A}_1 \xrightarrow{\quad} \mathcal{A}_1 \xrightarrow{\quad} \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{H}$$

$$\mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 \xrightarrow{\quad} \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 \xrightarrow{\quad} (\mathcal{A}_2[-1] \cup \mathcal{A}_3[-1])[1] \subseteq \mathcal{H}[1]$$

$$\mathcal{A}_4 \xrightarrow{\quad} \mathcal{A}_4 \xrightarrow{\quad} \mathcal{A}_4[-2][2] \subseteq \mathcal{H}[2]$$

e, portanto, os fechos aditivos de $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$ e $\mathcal{A}_4$ são as *pieces* de $\text{mod } B$ associadas à equivalência normalizada $G \circ F$. Além disso, neste caso, os fechos aditivos de $\mathcal{A}_1$, $(\mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3)[-1]$ e $\mathcal{A}_4[-2]$ em $\mathcal{H}$ são subcategorias funtorialmente finitas em $\mathcal{H}$, conforme o teorema 1.25. Em particular, cada objeto A_1 em $\text{add } \mathcal{A}_1$ admite uma $\text{add } \mathcal{A}_4[-2]$ -aproximação à direita e cada objeto $A_4[-2]$ em $\text{add } \mathcal{A}_4[-2]$ deve admitir uma $\text{add } \mathcal{A}_1$ -aproximação à esquerda. Como consequência, dados $A_1[1] \in \text{add } \mathcal{A}_1[1]$ e $A_4[-1] \in \text{add } \mathcal{A}_4[-1]$, devem existir $w : A'_4[-1] \rightarrow A_1[1]$ uma $\text{add } \mathcal{A}_4[-1]$ -aproximação à direita de $A_1[1]$ e $w' : A_4[-1] \rightarrow A'_1[1]$ uma $\text{add } \mathcal{A}_1[1]$ -aproximação à esquerda de $A_4[-1]$. Mostraremos, em seguida, que se tivermos um morfismo $\gamma : B_4[-1] \rightarrow A_1[1]$, com $B_4[-1] \in \text{add } \mathcal{A}_4[-1]$ e $\text{cone}(\gamma)[-1] \in \mathcal{Y}(T_0)$, então $\delta : B_4[-1] \rightarrow A'_4[-1]$ que satisfaz $w\delta = \gamma$ será tal que $\text{Hom}(_, \delta)$ é injetor em $\mathcal{A}_4[-1]$. Analogamente, poderá ser verificado que dado $\gamma' : A_4[-1] \rightarrow B_1[1]$, com $B_1 \in \text{add } \mathcal{A}_1$ e $\text{cone}(\gamma')[-1] \in \mathcal{Y}(T_0)$, o morfismo $\delta' : A'_1[1] \rightarrow B_1[1]$ satisfazendo $\delta'w' = \gamma'$ será tal que $\text{Hom}(\delta', _)$ é sobrejetor em $\mathcal{A}_1[2]$.

Lema 3.32. Sejam B uma álgebra 2-quase inclinada, $w : A'_4[-1] \rightarrow A_1[1]$ uma $\text{add } \mathcal{A}_4[-1]$ -aproximação minimal à direita de $A_1[1] \in \text{add } \mathcal{A}_1[1]$ e $w' : A_4[-1] \rightarrow A'_1[1]$ uma $\text{add } \mathcal{A}_1[1]$ -aproximação minimal à esquerda de $A_4[-1] \in \text{add } \mathcal{A}_4[-1]$.

- (i) Se $\gamma : B_4[-1] \rightarrow A_1[1]$, com $B_4[-1] \in \text{add } \mathcal{A}_4[-1]$, for um morfismo tal que $\text{cone}(\gamma)[-1] \in \mathcal{Y}(T_0)$, então um morfismo $\delta : B_4[-1] \rightarrow A'_4[-1]$ satisfazendo $w\delta = \gamma$ será tal que $\text{Hom}(_, \delta)$ é injetor em $\mathcal{A}_4[-1]$.
- (ii) Se $\gamma' : A_4[-1] \rightarrow B_1[1]$, com $B_1 \in \text{add } \mathcal{A}_1$, for um morfismo tal que $\text{cone}(\gamma')[-1] \in \mathcal{Y}(T_0)$, então um morfismo $\delta' : A'_1[1] \rightarrow B_1[1]$ satisfazendo $\delta'w' = \gamma'$ será tal que $\text{Hom}(\delta', _)$ é sobrejetor em $\mathcal{A}_1[2]$.

Demonstração. Mostraremos somente o item (i). Seja $\gamma : B_4[-1] \rightarrow A_1[1]$ um morfismo em $\mathcal{D}^b(A)$, com $B_4[-1] \in \text{add } \mathcal{A}_4[-1]$ e $\text{cone}(\gamma)[-1] \in \mathcal{Y}(T_0)$. Considere $0 \rightarrow A_1 \rightarrow Z \rightarrow B_4[-1] \rightarrow 0$ a sequência exata em $\text{mod } A$ associada a γ via o isomorfismo $\text{Ext}_A^1(B_4[-1], A_1) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(B_4[-1], A_1[1])$. Neste caso, em particular, $(\star) \ A_1 \rightarrow Z \rightarrow B_4[-1] \xrightarrow{\gamma} A_1[1]$ é um triângulo em $\mathcal{D}^b(A)$, e, desde que o quadrado à direita no diagrama abaixo comuta,

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & B_4[-1] & \xrightarrow{\gamma} & A_1[1] \\ \downarrow 1 & & \downarrow & & \downarrow 1 & & \downarrow 1 \\ A_1 & \longrightarrow & \text{cone}(\gamma)[-1] & \longrightarrow & B_4[-1] & \xrightarrow{\gamma} & A_1[1] \end{array}$$

deve existir um isomorfismo $\psi : Z \rightarrow \text{cone}(\gamma)[-1]$ de forma a tornar o diagrama comutativo. Logo, $Z \in \mathcal{Y}(T_0)$. Fixado $C_4[-1] \in \text{add } \mathcal{A}_4[-1]$, aplicando o funtor $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(C_4[-1], _)$ a $(\star)$, obtemos a sequência exata

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(C_4[-1], A_1) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(C_4[-1], Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(C_4[-1], B_4[-1]) &\xrightarrow{\text{Hom}(C_4[-1], \gamma)} \\ &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(C_4[-1], A_1[1]), \end{aligned}$$

com $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(C_4[-1], Z) \simeq \text{Hom}_A(C_4[-1], Z) = 0$, uma vez que $Z \in \mathcal{Y}(T_0)$. Como consequência, o morfismo $\text{Hom}(C_4[-1], \gamma)$ é injetor.

Seja $\delta : B_4[-1] \rightarrow A'_4[-1]$ um morfismo satisfazendo $w\delta = \gamma$. Dessa forma, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(_, B_4[-1]) & \xrightarrow{\text{Hom}(_, \gamma)} & \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(_, A_1[1]) \\ \downarrow \text{Hom}(_, \delta) & & \downarrow 1 \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(_, A'_4[-1]) & \xrightarrow{\text{Hom}(_, w)} & \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(_, A_1[1]) \end{array}$$

comuta e, portanto, $\text{Hom}(_, \delta)$ é um morfismo injetor em $\mathcal{A}_4[-1]$, já que o mesmo ocorre com $\text{Hom}(_, \gamma)$. $\square$

Capítulo 4

ÁLGEBRAS 2-QUASE HEREDITÁRIAS E 2-QUASE INCLINADAS

Apresentaremos, neste capítulo, condições para que uma álgebra 2-quase hereditária seja 2-quase inclinada e, portanto, hereditária por partes, o que corresponde à recíproca do teorema 3.19 para $m = 2$. O caso em que $m = 1$ foi tratado em [HRS96b] e obtido sem hipóteses adicionais, como discutiremos brevemente a seguir. Considere A uma álgebra 1-quase hereditária. A demonstração de que A é uma álgebra 1-quase inclinada dada por Happel, Reiten e Smalø ([HRS96b](Teorema 2.3)) recorre à aplicação Φ definida anteriormente. Em resumo, verificaram que a união das seguintes subcategorias plenas de $\text{ind } A$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_A &= \{X \in \text{ind } A; dp_A Y \leq 1, \text{ para cada antecessor } Y \text{ de } X\} \text{ e} \\ \mathcal{R}_A &= \{X \in \text{ind } A; di_A Y \leq 1, \text{ para cada sucessor } Y \text{ de } X\},\end{aligned}$$

contém todos os módulos indecomponíveis definidos sobre A , ou seja, $\text{ind } A = \mathcal{L}_A \cup \mathcal{R}_A$, e que $\mathcal{L}_A$ admite todos os A -módulos indecomponíveis projetivos, determinando portanto o par de torção $(\text{add}(\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A), \text{add } \mathcal{L}_A)$ coinclinante em $\text{mod } A$, já que claramente não há morfismo não nulo de $\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A$ para $\mathcal{L}_A$. Como resultado da aplicação de Φ à categoria $\text{mod } A$ munida do par de torção mencionado acima, obtiveram uma categoria abeliana $\mathcal{H}$ e o par de torção $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ em $\mathcal{H}$, com $\mathcal{X} = (\text{add } \mathcal{L}_A)[1]$ e $\mathcal{Y} = \text{add}(\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A)$, o que permitiu concluir que $\mathcal{H}$ é hereditária. De fato,

- $\text{Ext}_{\mathcal{H}}^2(\mathcal{X}, \mathcal{X}) \simeq \text{Hom}_{D^b(\mathcal{H})}(\mathcal{X}, \mathcal{X}[2]) \simeq \text{Hom}_{D^b(A)}((\text{add } \mathcal{L}_A)[1], (\text{add } \mathcal{L}_A)[1][2])$
 $\simeq \text{Ext}_A^2(\text{add } \mathcal{L}_A, \text{add } \mathcal{L}_A) = 0$, pois $dp \mathcal{L}_A \leq 1$,
- $\text{Ext}_{\mathcal{H}}^2(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \simeq \text{Hom}_{D^b(\mathcal{H})}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}[2]) \simeq \text{Hom}_{D^b(A)}((\text{add } \mathcal{L}_A)[1], (\text{add}(\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A))[2])$
 $\simeq \text{Ext}_A^1(\text{add } \mathcal{L}_A, \text{add}(\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A)) = 0$, desde que $\text{ind } A = \mathcal{L}_A \cup \mathcal{R}_A$,
- $\text{Ext}_{\mathcal{H}}^2(\mathcal{Y}, \mathcal{X}) \simeq \text{Hom}_{D^b(\mathcal{H})}(\mathcal{Y}, \mathcal{X}[2]) \simeq \text{Hom}_{D^b(A)}(\text{add}(\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A), (\text{add } \mathcal{L}_A)[1][2])$
 $\simeq \text{Ext}_A^3(\text{add}(\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A), \text{add } \mathcal{L}_A) = 0$, pois $\dim.gl A \leq 2$,
- $\text{Ext}_{\mathcal{H}}^2(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}) \simeq \text{Hom}_{D^b(\mathcal{H})}(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}[2]) \simeq \text{Hom}_{D^b(A)}(\text{add}(\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A), (\text{add}(\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A))[2])$
 $\simeq \text{Ext}_A^2(\text{add}(\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A), \text{add}(\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A)) = 0$, já que $di \mathcal{R}_A \leq 1$,

condições suficientes para garantir que $\text{Ext}_{\mathcal{H}}^2(_, _) = 0$. Também, verificaram que $T = (A_A)[1]$ é um objeto inclinante em $\mathcal{H}$ tal que a classe de torção $\mathcal{X}$ é dada por T :

(OI 1): $\mathcal{X}$ é inclinante, devido ao fato de que $\text{add } \mathcal{L}_A$ é uma classe livre de torção coinclinante;

(OI 2): $\mathcal{X} = \text{Gen } T$, já que para cada objeto $X \in \mathcal{X}$, tem-se que $X[-1] \in \mathcal{X}[-1]$ admite estrutura de A -módulo por também pertencer a $\text{add } \mathcal{L}_A$ e, portanto, tem cobertura projetiva. O epimorfismo assim

construído em $\text{mod } A$ com termos em $\text{add } \mathcal{L}_A$ - e, consequentemente, com núcleo em $\text{add } \mathcal{L}_A$ -, induz um epimorfismo partindo de cópias de T para X em $\mathcal{H}$;

(OI 3): T é um objeto Ext-projetivo em $\mathcal{X}$, pois, dado $U \in \mathcal{X} = (\text{add } \mathcal{L}_A)[1]$, $\text{Ext}_{\mathcal{H}}^1(T, U) = \text{Ext}_A^1(A, U[-1]) = 0$;

(OI 4): cada objeto U Ext-projetivo em $\mathcal{X}$ é uma soma de somandos de T , bastando para isso verificar que $U[-1]$, visto como A -módulo, é projetivo. Com efeito, dado um A -módulo V , se $V \in \text{add } \mathcal{L}_A$, então $\text{Ext}_A^1(U[-1], V) = \text{Ext}_{\mathcal{H}}^1(U, V[1]) = 0$, já que U é Ext-projetivo em $\mathcal{X}$, e se, caso contrário, $V \in \text{add}(\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A)$, então $\text{Ext}_A^1(U[-1], V) = \text{Ext}_{\mathcal{H}}^2(U, V) = 0$, pois $\mathcal{H}$ é hereditária;

(OI 5): se $U \in \mathcal{H}$ for tal que $\text{Ext}_{\mathcal{H}}^i(T, U) = 0$, para $i = 0, 1$, então $U \in \text{add}(\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A)$, já que em particular $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(T, U) = 0$. Neste caso, $0 = \text{Ext}_{\mathcal{H}}^1(T, U) = \text{Hom}_A(A, U)$ e, portanto, $U = 0$, desde que todo A -módulo não nulo admite cobertura projetiva.

A conclusão desejada seguiu do fato de que $\text{End}_{\mathcal{H}} T \simeq A$.

De forma alternativa, em termos da aplicação Φ^{-1} definida no capítulo 2, é possível demonstrar que A (como apresentada acima) é 1-quase inclinada. É o que nos mostra a proposição a seguir.

Proposição 4.1. Sejam A uma álgebra 1-quase hereditária e $\Phi^{-1}(\text{mod } A; (\text{add}(\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A), \text{add } \mathcal{L}_A)) = (\mathcal{H}; (\mathcal{T}, \mathcal{F}))$. Então $\mathcal{H}$ é uma categoria hereditária e existe um objeto inclinante T em $\mathcal{H}$ tal que A e $\text{End } T$ são Morita-equivalentes. Em particular, A é 1-quase inclinada.

Demonstração. Seja $\Phi^{-1}(\text{mod } A; (\text{add}(\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A), \text{add } \mathcal{L}_A)) = (\mathcal{H}; (\mathcal{T}, \mathcal{F}))$, em que $\mathcal{T} = \text{add } \mathcal{L}_A$ e $\mathcal{F} = \text{add}(\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A)[-1]$. Como anteriormente, observe que

- $\text{Ext}_{\mathcal{H}}^2(\mathcal{T}, \mathcal{T}) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{H})}(\mathcal{T}, \mathcal{T}[2]) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(\text{add } \mathcal{L}_A, \text{add } \mathcal{L}_A[2]) \simeq \text{Ext}_A^2(\text{add } \mathcal{L}_A, \text{add } \mathcal{L}_A) = 0$,
- $\text{Ext}_{\mathcal{H}}^2(\mathcal{T}, \mathcal{F}) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{H})}(\mathcal{T}, \mathcal{F}[2]) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(\text{add } \mathcal{L}_A, (\text{add}(\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A))[-1][2]) \simeq \text{Ext}_A^1(\text{add } \mathcal{L}_A, \text{add}(\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A)) = 0$,
- $\text{Ext}_{\mathcal{H}}^2(\mathcal{F}, \mathcal{T}) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{H})}(\mathcal{F}, \mathcal{T}[2]) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}((\text{add}(\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A))[-1], (\text{add } \mathcal{L}_A)[2]) \simeq \text{Ext}_A^3(\text{add}(\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A), \text{add } \mathcal{L}_A) = 0$,
- $\text{Ext}_{\mathcal{H}}^2(\mathcal{F}, \mathcal{F}) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{H})}(\mathcal{F}, \mathcal{F}[2]) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(\text{add}(\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A), (\text{add}(\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A))[2]) \simeq \text{Ext}_A^2(\text{add}(\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A), \text{add}(\mathcal{R}_A \setminus \mathcal{L}_A)) = 0$,

em que os isomorfismos são garantidos pelo teorema 2.6. Dessa forma, $\mathcal{H}$ é uma categoria hereditária. Além disso, de acordo com o teorema 2.10(a)(ii), o par de torção $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ é dado por um objeto inclinante T e, mais ainda, A e $\text{End}_{\mathcal{H}} T$ são Morita-equivalentes, nos permitindo concluir que A é 1-quase inclinada, como desejado. $\square$

Essencialmente, a partir de uma álgebra com boas propriedades homológicas, foi possível, via a aplicação Φ^{-1} , construir uma categoria hereditária $\mathcal{H}$ e, mais ainda, verificar que a álgebra dada originalmente é uma álgebra de endomorfismos de um objeto inclinante sobre $\mathcal{H}$, a menos de Morita-equivalência. Nesse caso, torna-se natural perguntar-nos sob quais condições homológicas uma álgebra poderá ser obtida como uma álgebra de endomorfismos de um módulo inclinante definido sobre uma álgebra quase inclinada. Em outras palavras, menos precisas, buscamos condições sobre uma álgebra para que duas sucessivas aplicações de Φ^{-1} a sua categoria de módulos, munida de um par de torção conveniente, resulte em uma categoria hereditária.

4.1 Propriedades Homológicas de Categorias obtidas a partir de Álgebras por Partes

Tendo em vista a questão proposta acima, considere B uma k -álgebra e $\mathcal{B}$ a categoria de módulos definidos sobre B . Assuma que $\text{ind } B = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4$, em que cada $\mathcal{A}_i$ é uma subcategoria plena de $\text{ind } B$ satisfazendo as condições da seguinte tabela:

Tabela (B)

$\text{Ext}_B^\#(-, -) = 0$	$\mathcal{A}_1$	$\mathcal{A}_2$	$\mathcal{A}_3$	$\mathcal{A}_4$
$\mathcal{A}_1$	≥ 2	≥ 1	≥ 1	≥ 0
$\mathcal{A}_2$	$0, \geq 3$	≥ 2	≥ 1	≥ 1
$\mathcal{A}_3$	$0, \geq 3$	$0, \geq 2$	≥ 2	≥ 1
$\mathcal{A}_4$	$0, 1, \geq 4$	$0, \geq 3$	$0, \geq 2$	≥ 2

Neste caso, são imediatas as afirmações:

- (a) se $\mathcal{X}' = \text{add}(\mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4)$ e $\mathcal{Y}' = \text{add}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$, então $(\mathcal{X}', \mathcal{Y}')$ define um par de torção cindido em $\mathcal{B}$.
- (b) $\text{Pred}(\mathcal{A}_2) = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ e $\text{Succ}(\mathcal{A}_3) = \mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4$.
- (c) $\mathcal{A}_i$ é um subcategoria convexa em $\text{ind } B$, para cada $1 \leq i \leq 4$.
- (d) $\mathcal{A}_1$ é fechada para antecessores e $\mathcal{A}_4$ é fechada para sucessores.
- (e) se, adicionalmente, $\text{add}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) = \text{Cogen } V$, em que V é um B -módulo fiel, então $\mathcal{Y}'$ é uma classe livre de torção coinclinante e, mais ainda, é dada por um B -módulo coinclinante.

Definição 4.2. Uma álgebra B como descrita acima, ou seja, com a propriedade de que existem quatro subcategorias plenas $\mathcal{A}_i$ de $\text{ind } B$, duas a duas disjuntas, satisfazendo as condições da tabela (B) e tais que $\text{ind } B = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4$, com $\text{add}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) = \text{Cogen } V$, para algum B -módulo V fiel, será chamada de álgebra por partes de tipo $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4)$.

Ainda nessas condições, seja $\Phi^{-1}(\mathcal{B}, (\mathcal{X}', \mathcal{Y}')) = (\mathcal{A}, (\mathcal{T}', \mathcal{F}'))$, em que $\mathcal{A} = \{X \in \mathcal{D}^b(\mathcal{B}); H^1(X) \in \mathcal{X}', H^0(X) \in \mathcal{Y}' \text{ e } H^i(X) = 0, \text{ para cada } i \neq 0, 1\}$, $\mathcal{T}' = \text{add}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$ e $\mathcal{F}' = \text{add}(\mathcal{A}_3[-1] \cup \mathcal{A}_4[-1])$. Listaremos a seguir propriedades homológicas que podem ser obtidas para $\mathcal{A}$ e para os objetos em $\mathcal{T}'$ e em $\mathcal{F}'$, apenas por meio dos dados estabelecidos na tabela (B).

Lema 4.3. Sejam B uma álgebra por partes de tipo $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4)$ e

$$\Phi^{-1}(\text{mod } B; (\text{add}(\mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4), \text{add}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2))) = (\mathcal{A}, (\mathcal{T}', \mathcal{F}')).$$

Então:

- (a) existe uma equivalência triangular $\mathcal{D}^b(B) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ cuja restrição à subcategoria $\mathcal{A}$ corresponde ao funtor identidade;
- (b) é possível obter a seguinte tabela:

Tabela (A)

$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^{\#}(_, _) = 0$	$\mathcal{A}_1$	$\mathcal{A}_2$	$\mathcal{A}_3[-1]$	$\mathcal{A}_4[-1]$
$\mathcal{A}_1$	≥ 2	≥ 1	$0, \geq 2$	≥ 0
$\mathcal{A}_2$	$0, \geq 3$	≥ 2	$0, \geq 2$	$0, \geq 2$
$\mathcal{A}_3[-1]$	≥ 2	$0, \geq 1$	≥ 2	≥ 1
$\mathcal{A}_4[-1]$	$0, \geq 3$	≥ 2	$0, \geq 2$	≥ 2

Demonstração. O item (a) é precisamente o teorema 2.6 e o item (b) segue diretamente da tabela (B) e do item (a). $\square$

Lema 4.4. Sejam B uma álgebra por partes de tipo $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4)$ e

$$\Phi^{-1}(\text{mod } B; (\text{add}(\mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4), \text{add}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2))) = (\mathcal{A}; (\mathcal{T}', \mathcal{F}')),$$

em que $\mathcal{T}' = \text{add}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$ e $\mathcal{F}' = \text{add}(\mathcal{A}_3[-1] \cup \mathcal{A}_4[-1])$. Então:

- (1) As subcategorias $\text{add } \mathcal{A}_1$, $\text{add } \mathcal{A}_2$, $\text{add } \mathcal{A}_3[-1]$ e $\text{add } \mathcal{A}_4[-1]$ de $\mathcal{A}$ são fechadas para extensões.
- (2) $\text{add } \mathcal{A}_3[-1]$ é fechada para subobjetos e $\text{add } \mathcal{A}_2$ é fechada para quocientes.

Demonstração. (1) $\text{add } \mathcal{A}_1$ é fechada para extensões: sejam $A_1, C_1 \in \text{add } \mathcal{A}_1$ e $0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{a} Z \xrightarrow{b} C_1 \rightarrow 0$ uma sequência exata em $\mathcal{A}$. Como anteriormente, considere $(\star) \ 0 \rightarrow Z_1 \oplus Z_2 \xrightarrow{(\alpha_1 \ \alpha_2)} Z \xrightarrow{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}} Z_3[-1] \oplus Z_4[-1] \rightarrow 0$ a sequência exata canônica para Z relativa ao par de torção $(\mathcal{T}', \mathcal{F}')$. De acordo com a tabela (A), a composta $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} a$ é nula e, portanto, deve existir um morfismo $\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} : C_1 \rightarrow Z_3[-1] \oplus Z_4[-1]$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{a} & Z & \xrightarrow{b} & C_1 \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} & \nearrow \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} & \\ & & & & Z_3[-1] \oplus Z_4[-1] & & \end{array}$$

comuta. Novamente devido à tabela (A), $\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, o que nos permite concluir que $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ou ainda, $Z \simeq Z_1 \oplus Z_2$. Agora, $b\alpha_2 = 0$ e, portanto, existe um morfismo $c : Z_2 \rightarrow A_1$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & Z_2 & & \\ & & & & \downarrow \alpha_2 & & \\ 0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{a} & Z & \xrightarrow{b} & C_1 \longrightarrow 0 \\ & & \nwarrow c & & & & \end{array}$$

é comutativo. Segundo a tabela (A), $c = 0$ e, então, o monomorfismo α_2 é nulo, nos garantindo que $Z_2 = 0$. Consequentemente, $Z \simeq Z_1$, ou ainda, $Z \in \text{add } \mathcal{A}_1$.

Os demais casos podem ser obtidos de forma similar e, portanto, serão omitidos.

(2) $\text{add } \mathcal{A}_3[-1]$ é fechada para subobjetos: sejam $A_3[-1] \in \text{add } \mathcal{A}_3[-1]$ e $f : Z \rightarrow A_3[-1]$ um monomorfismo em $\mathcal{A}$. Sendo $(\mathcal{T}', \mathcal{F}')$ um par de torção em $\mathcal{A}$, devemos ter $Z \in \text{add}(\mathcal{A}_3[-1] \cup \mathcal{A}_4[-1])$.

Agora, se algum somando direto indecomponível Z' de Z for um objeto em $\mathcal{A}_4[-1]$, então o monomorfismo $Z' \hookrightarrow Z \xrightarrow{f} A_3[-1]$ será nulo, devido à tabela (A) e, portanto, $Z' = 0$, uma contradição. Consequentemente, $Z \in \text{add } \mathcal{A}_3[-1]$.

Em seguida, mostraremos que $\text{add } \mathcal{A}_2$ é fechada para quocientes. Sejam $A_2 \in \text{add } \mathcal{A}_2$ e $g : A_2 \rightarrow U$ um epimorfismo em $\mathcal{A}$. Como anteriormente, desde que $(\mathcal{T}', \mathcal{F}')$ é um par de torção em $\mathcal{A}$, $U \in \text{add}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$. Se algum somando direto indecomponível U' de U for um objeto de $\mathcal{A}_1$, então o epimorfismo $A_2 \xrightarrow{g} U \rightarrow U'$ deverá se anular, donde $U' = 0$, um absurdo. Logo, $U \in \text{add } \mathcal{A}_2$. $\square$

Lema 4.5. Sejam B uma álgebra por partes de tipo $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4)$ e

$$\Phi^{-1}(\text{mod } B; (\text{add}(\mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4), \text{add}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2))) = (\mathcal{A}; (\mathcal{T}', \mathcal{F}')).$$

Então $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^3(., .) = 0$.

Demonstração: Considere um objeto Z em $\mathcal{A}$. Uma vez que $(\mathcal{T}', \mathcal{F}')$ é um par de torção em $\mathcal{A}$, podemos construir uma sequência exata

$$0 \rightarrow A_1 \oplus A_2 \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} A_3[-1] \oplus A_4[-1] \rightarrow 0,$$

em que $A_i \in \text{add } \mathcal{A}_i$, para cada $i = 1, 2, 3, 4$ e, portanto, a sequência

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^3(A_3[-1] \oplus A_4[-1], .) \xrightarrow{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^3(\beta, .)} \text{Ext}_{\mathcal{A}}^3(Z, .) \xrightarrow{\text{Ext}_{\mathcal{A}}^3(\alpha, .)} \text{Ext}_{\mathcal{A}}^3(A_1 \oplus A_2, .)$$

é também exata. Nessas condições, para mostrarmos que $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^3(Z, .) = 0$, basta verificarmos que $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^3(A_1 \oplus A_2, .) = 0$ e que $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^3(A_3[-1] \oplus A_4[-1], .) = 0$. Com esse propósito, consideremos um objeto U em $\mathcal{A}$ e

$$0 \rightarrow A'_1 \oplus A'_2 \rightarrow U \rightarrow A'_3[-1] \oplus A'_4[-1] \rightarrow 0 \quad (*)$$

sua sequência exata canônica relativa ao par de torção $(\mathcal{T}', \mathcal{F}')$. Ao aplicarmos os funtores $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A_1 \oplus A_2, .)$ e $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A_3[-1] \oplus A_4[-1], .)$ à sequência em $(*)$, obtemos as seguintes duas sequências exatas

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^3(A_1 \oplus A_2, A'_1 \oplus A'_2) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^3(A_1 \oplus A_2, U) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^3(A_1 \oplus A_2, A'_3[-1] \oplus A'_4[-1])$$

$$\text{e } \text{Ext}_{\mathcal{A}}^3((A_3 \oplus A_4)[-1], A'_1 \oplus A'_2) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^3((A_3 \oplus A_4)[-1], U) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^3((A_3 \oplus A_4)[-1], (A'_3 \oplus A'_4)[-1]).$$

De acordo com a tabela (A), os termos das pontas da primeira e da segunda sequências exatas se anulam e, dessa forma, podemos concluir que $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^3(A_1 \oplus A_2, U) = 0$ e que $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^3(A_3[-1] \oplus A_4[-1], U) = 0$. Como consequência, $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^3(., .) = 0$. $\square$

Lema 4.6. Para as subcategorias $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3[-1]$ e $\mathcal{A}_4[-1]$ de $\mathcal{A}$, as seguintes afirmações são válidas:

- (1) $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^2(\mathcal{A}_1, .) = 0$.
- (2) $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^2(., \mathcal{A}_2) = 0$.
- (3) $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^2(\mathcal{A}_3[-1], .) = 0$ e $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^2(., \mathcal{A}_3[-1]) = 0$.
- (4) $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^2(., \mathcal{A}_4[-1]) = 0$.

Demonstração: Para um objeto Z em $\mathcal{A}$, considere a sequência exata

$$0 \rightarrow Z_{\mathcal{T}'} \rightarrow Z \rightarrow Z_{\mathcal{F}'} \rightarrow 0,$$

em que $Z_{\mathcal{T}'} \in \mathcal{T}'$ e $Z_{\mathcal{F}'} \in \mathcal{F}'$, cuja existência é garantida por $(\mathcal{T}', \mathcal{F}')$ definir um par de torção em $\mathcal{A}$. Neste caso, são também exatas as sequências

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^2(., Z_{\mathcal{T}'}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^2(., Z) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^2(., Z_{\mathcal{F}'}) \text{ e } \text{Ext}_{\mathcal{A}}^2(Z_{\mathcal{F}'}, .) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^2(Z, .) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}}^2(Z_{\mathcal{T}'}, .)$$

e, portanto, a demonstração de cada um dos itens (1), (2), (3) ou (4) depende somente das respectivas restrições às subcategorias $\mathcal{T}'$ e $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{A}$ se anularem. Desde que $\mathcal{T}' = \text{add}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$ e $\mathcal{F}' = \text{add}(\mathcal{A}_3[-1] \cup \mathcal{A}_4[-1])$, os resultados desejados são consequências imediatas da tabela (A). $\square$

Nas condições propostas anteriormente, isto é, se $\Phi^{-1}(\mathcal{B}; (\mathcal{X}', \mathcal{Y}')) = (\mathcal{A}; (\mathcal{T}', \mathcal{F}'))$, em que $\mathcal{B}$ é a categoria de módulos sobre uma álgebra B por partes, é possível concluir que $\mathcal{A}$ é uma categoria de módulos e, além disso, $\mathcal{B}$ é equivalente a $\text{mod End } T'$, em que T' é um módulo inclinante em $\mathcal{A}$, como mostraremos na proposição a seguir.

Proposição 4.7. Sejam B uma álgebra por partes de tipo $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4)$ e

$$\Phi^{-1}(\mathcal{B}; (\text{add}(\mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4), \text{add}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2))) = (\mathcal{A}; (\mathcal{T}', \mathcal{F}')),$$

em que $\mathcal{T}' = \text{add}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$ e $\mathcal{F}' = \text{add}(\mathcal{A}_3[-1] \cup \mathcal{A}_4[-1])$. Então:

- (i) $\mathcal{A}$ é uma categoria de módulos sobre uma álgebra A .
- (ii) o par de torção $(\mathcal{T}', \mathcal{F}')$ é dado por um módulo inclinante T' e B e $\text{End } T'$ são Morita-equivalentes.
- (iii) existe uma equivalência triangular $G : \mathcal{D}^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}^b(B)$ cuja restrição a $\mathcal{A}$ é o funtor identidade.

Demonstração. De acordo com a proposição 1.4, o par de torção $(\mathcal{X}', \mathcal{Y}')$ é dado por um B -módulo coinclinante, uma vez que $\mathcal{Y}' = \text{Cogen } V$, para V fiel. Neste caso, $\mathcal{A}$ é equivalente a $\text{mod End } V$, segundo o teorema 2.10. Ainda em virtude do teorema 2.10, o par de torção $(\mathcal{T}', \mathcal{F}')$ em $\mathcal{A}$ é dado por um módulo inclinante T' e, além disso, B e $\text{End } T'$ são Morita-equivalentes, como desejado.

O item (iii) é consequência do teorema 2.6, já que $\mathcal{A}$ admite suficientes injetivos. $\square$

Como consequência dos lemas 4.5 e 4.6 e da proposição acima, são obtidos:

Corolário 4.8. Seja A a álgebra obtida na proposição 4.7. Então $\dim.gl A \leq 2$. $\square$

Corolário 4.9. Sejam A a álgebra obtida na proposição 4.7 e X um A -módulo em $\mathcal{T}' \cup \mathcal{F}'$.

- (a) Se $X \in \mathcal{A}_1$, então $dp_A X \leq 1$, e se $X \in \mathcal{A}_2$, então $di_A X \leq 1$.
- (b) Se $X \in \mathcal{A}_3[-1]$, então $dp_A X \leq 1$ e $di_A X \leq 1$, e se $X \in \mathcal{A}_4[-1]$, então $di_A X \leq 1$. $\square$

As notações estabelecidas na proposição 4.7 serão seguidas ao longo de todo o capítulo. Dessa forma, sempre que nos referirmos às álgebras B e A , estaremos assumindo que B é uma álgebra por partes de tipo $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4)$ e que A é obtida por meio de Φ^{-1} , ou seja, $\Phi^{-1}(\mathcal{B}; (\text{add}(\mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4), \text{add}(\mathcal{A}_1 \cup$

$\mathcal{A}_2))) = (\text{mod } A; (\mathcal{T}', \mathcal{F}'))$, em que $(\mathcal{T}', \mathcal{F}')$ é o par de torção em $\text{mod } A$ dado por $\mathcal{T}' = \text{add}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$ e $\mathcal{F}' = \text{add}(\mathcal{A}_3[-1] \cup \mathcal{A}_4[-1])$.

Fixando a nomenclatura. Observe que, sendo $(\mathcal{T}', \mathcal{F}')$ um par de torção em $\mathcal{A}$, para cada A -módulo Z deve existir uma sequência exata da forma $(\star) \quad 0 \rightarrow A_1 \oplus A_2 \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} A_3[-1] \oplus A_4[-1] \rightarrow 0$, com $A_i \in \text{add } \mathcal{A}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, única a menos de isomorfismo. Neste caso, se $0 \rightarrow B_1 \oplus B_2 \rightarrow Z \rightarrow B_3[-1] \oplus B_4[-1] \rightarrow 0$, com cada $B_i \in \text{add } \mathcal{A}_i$, então existem isomorfismos $\psi : A_1 \oplus A_2 \rightarrow B_1 \oplus B_2$ e $\theta : A_3[-1] \oplus A_4[-1] \rightarrow B_3[-1] \oplus B_4[-1]$. Em particular, B_1 é isomorfo a um somando direto de $A_1 \oplus A_2$ e, uma vez que $\text{add } \mathcal{A}_1$ e $\text{add } \mathcal{A}_2$ são fechadas para somandos diretos, B_1 é isomorfo a um somando direto de A_1 . Analogamente, A_1 é isomorfo a um somando direto de B_1 e, portanto, $A_1 \simeq B_1$. Da mesma forma, pode-se concluir que $A_2 \simeq B_2$, $A_3[-1] \simeq B_3[-1]$ e $A_4[-1] \simeq B_4[-1]$.

Definição 4.10. Sejam Z um A -módulo e $0 \rightarrow A_1 \oplus A_2 \rightarrow Z \rightarrow A_3[-1] \oplus A_4[-1] \rightarrow 0$, com $A_i \in \text{add } \mathcal{A}_i$, a sequência exata canônica para Z relativa ao par de torção $(\mathcal{T}', \mathcal{F}')$. Cada A_i será chamado de termo $\mathcal{A}_i$ de Z e será denotado por A_i^Z , ou simplesmente por A_i , quando estiver claro a qual módulo Z nos referimos.

Ainda em relação à sequência exata $(\star)$, os morfismos α e β são, respectivamente, $\text{add}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$ -aproximação minimal à direita de Z e $\text{add}(\mathcal{A}_3[-1] \cup \mathcal{A}_4[-1])$ -aproximação minimal à esquerda de Z . De fato, qualquer morfismo $\alpha' : A'_1 \oplus A'_2 \rightarrow Z$, com $A'_i \in \text{add } \mathcal{A}_i$, se fatora através de α , uma vez que $\beta\alpha' \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A'_1 \oplus A'_2, A_3[-1] \oplus A_4[-1]) = 0$, segundo a tabela (A). Quanto à minimalidade, seja $u \in \text{End}(A_1 \oplus A_2)$ tal que $\alpha u = \alpha$. Podemos então construir o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_1 \oplus A_2 & \xrightarrow{\alpha} & Z & \xrightarrow{\beta} & A_3[-1] \oplus A_4[-1] \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow 1 & & \downarrow 1 \\ 0 & \longrightarrow & A_1 \oplus A_2 & \xrightarrow{\alpha} & Z & \xrightarrow{\beta} & A_3[-1] \oplus A_4[-1] \longrightarrow 0 \end{array}$$

em $\text{mod } A$ que, de acordo com o Lema da Serpente, nos garante que $\text{Ker } u = 0$ e $\text{Coker } u = 0$, ou ainda, que u é um isomorfismo, como desejado. De forma análoga, mostra-se a afirmação feita para β .

Observação 4.11. Um A -módulo Z terá termo $\mathcal{A}_i$ (ou $\mathcal{A}_i[-1]$) não nulo se, e somente se, algum entre seus somandos indecomponíveis tiver termo $\mathcal{A}_i$ (ou $\mathcal{A}_i[-1]$) não nulo: apenas por simplicidade, assumamos que $i = 1$. Suponhamos que cada somando indecomponível Z' de Z tem termo $\mathcal{A}_1$ nulo. Neste caso, a sequência exata canônica para Z' relativa ao par de torção $(\mathcal{T}', \mathcal{F}')$ é da forma $0 \rightarrow A_2^{Z'} \rightarrow Z' \rightarrow A_3^{Z'}[-1] \oplus A_4^{Z'}[-1] \rightarrow 0$. Além disso, a soma $0 \rightarrow \bigoplus_{Z'|Z} A_2^{Z'} \rightarrow \bigoplus_{Z'|Z} Z' = Z \rightarrow \bigoplus_{Z'|Z} (A_3^{Z'}[-1] \oplus A_4^{Z'}[-1]) \rightarrow 0$ é uma sequência exata canônica para Z e, segundo o lema 4.4, $\bigoplus_{Z'|Z} A_2^{Z'} \in \text{add } \mathcal{A}_2$. Consequentemente, $A_1^Z = 0$, ou seja, Z tem termo $\mathcal{A}_1$ nulo.

Por outro lado, se existir um somando indecomponível Z' de Z com termo $\mathcal{A}_1$ não nulo, então, desde que a sequência exata canônica para Z pode ser obtida ao somarmos as sequências exatas canônicas de todos seus somandos diretos, Z deve ter termo $\mathcal{A}_1$ não nulo.

Lema 4.12. Sejam Z um A -módulo e $(\star) \quad 0 \rightarrow A_1 \oplus A_2 \xrightarrow{(\alpha_1 \ \alpha_2)} Z \xrightarrow{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}} A_3[-1] \oplus A_4[-1] \rightarrow 0$, com $A_i \in \text{add } \mathcal{A}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, sua sequência exata canônica relativa ao par de torção $(\mathcal{T}', \mathcal{F}')$.

(a) Z tem termo $\mathcal{A}_2$ nulo se, e somente se, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(Z, \mathcal{A}_2) = 0$.

(b) Z tem termo $\mathcal{A}_3[-1]$ nulo se, e somente se, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(Z, -)|_{\mathcal{A}_3[-1]} = 0$.

(c) Se $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Z)|_{\mathcal{A}_1} = 0$, então Z tem termo $\mathcal{A}_1$ nulo.

(d) Se $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(Z, -)|_{\mathcal{A}_4[-1]} = 0$, então Z tem termo $\mathcal{A}_4[-1]$ nulo.

Demonstração. (a) Suponha, inicialmente, que $A_2 = 0$ e considere um morfismo $f : C_2 \rightarrow Z$, com $C_2 \in \mathcal{A}_2$. Desde que α_1 é uma $\text{add}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$ -aproximação minimal à direita de Z , f deve se fatorar através de α_1 , ou seja, deve existir um morfismo $g : C_2 \rightarrow A_1$ satisfazendo $\alpha_1 g = f$.

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & Z \\ \swarrow \scriptstyle r & & \uparrow \scriptstyle f \\ & g & C_2 \end{array}$$

Agora, de acordo com a tabela (A), $g = 0$ e, portanto, $f = 0$. Inversamente, uma vez que $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Z)|_{\mathcal{A}_2} = 0$, o monomorfismo α_2 é nulo. Consequentemente, $A_2 = 0$.

Em relação ao item (b), assuma que $A_3[-1] = 0$ e considere um morfismo $f : Z \rightarrow C_3[-1]$, com $C_3[-1] \in \mathcal{A}_3[-1]$. Observe que f deve se fatorar através de β_2 , já que esta é uma $\text{add}(\mathcal{A}_3[-1] \cup \mathcal{A}_4[-1])$ -aproximação minimal à esquerda de Z . Neste caso, deve existir um morfismo $g : A_4[-1] \rightarrow C_3[-1]$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\beta_2} & A_4[-1] \\ \downarrow \scriptstyle f & & \swarrow \scriptstyle g \\ C_3[-1] & & \end{array}$$

comuta. Novamente segundo a tabela (A), $g = 0$ e, consequentemente, $f = 0$, como desejado. Reciprocamente, o epimorfismo β_1 é nulo, o que nos permite concluir que $A_3[-1] = 0$.

Da mesma forma, verificam-se os itens (c) e (d), já que α_1 e β_2 são um monomorfismo e um epimorfismo, respectivamente. $\square$

Segundo o corolário 4.8, para que a álgebra A apresentada acima seja quase inclinada, cada A -módulo indecomponível X deverá satisfazer $dp_A X \leq 1$ ou $di_A X \leq 1$. Basta-nos portanto determinar um par de torção cindido em $\text{mod } A$ de forma que todo módulo na classe de torção tenha dimensão injetiva no máximo um e todo módulo na classe livre de torção tenha dimensão projetiva no máximo um.

4.2 A Escolha do Par de Torção Cindido

Recordamos que sobre a álgebra B estamos assumindo:

- $\text{ind } B = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4$;
- a tabela (B);
- $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \text{Cogen } V$, em que V é um B -módulo fiel.

Como anteriormente, consideremos a álgebra A obtida por $\Phi^{-1}(\text{mod } B; (\text{add}(\mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4), \text{add}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2))) = (\text{mod } A; (\mathcal{T}', \mathcal{F}'))$. Assumamos ainda que:

(H1) para $A_1 \in \text{add } \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \text{add } \mathcal{A}_2$ e $A_4[-1] \in \text{add } \mathcal{A}_4[-1]$ indecomponíveis,

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(B)}(A_4[-1], A_1[1]) = 0 \text{ ou } \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(B)}(A_4[-1], A_2[1]) = 0.$$

Nessas condições, é possível mostrar que cada A -módulo indecomponível não admite, simultaneamente, termos $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3[-1]$ não nulos. Também, todo A -módulo indecomponível com termo $\mathcal{A}_2$ não nulo tem termo $\mathcal{A}_1$ nulo. É o que verifica o lema a seguir, essencial para a escolha do par de torção que buscamos determinar.

Lema 4.13. Sejam Z um A -módulo indecomponível e A_1, A_2 e $A_3[-1]$ os termos $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3[-1]$ de Z , respectivamente. Se $A_2 \neq 0$, então $A_1 = 0$ e $A_3[-1] = 0$.

Demonstração. Considere um A -módulo indecomponível Z e

$$0 \rightarrow A_1 \oplus A_2 \rightarrow Z \rightarrow A_3[-1] \oplus A_4[-1] \rightarrow 0$$

sua sequência exata canônica relativa ao par de torção $(\mathcal{T}', \mathcal{F}')$ (e, portanto, A_1, A_2 e $A_3[-1]$ são os termos $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3[-1]$ de Z , respectivamente). Neste caso,

$$(\star) \quad A_1 \oplus A_2 \longrightarrow Z \longrightarrow A_3[-1] \oplus A_4[-1] \longrightarrow A_1[1] \oplus A_2[1]$$

é um triângulo em $\mathcal{D}^b(A)$. De acordo com a hipótese (H1), para cada somando indecomponível $B_4[-1]$ de $A_4[-1]$ tal que há morfismo não nulo para $A_1[1]$, deve-se ter $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(B_4[-1], A_2[1]) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(B)}(B_4[-1], A_2[1]) = 0$. Escrevamos, portanto, $A_4[-1] = A'_4[-1] \oplus A''_4[-1]$, em que $A'_4[-1]$ corresponde à soma direta dos somandos indecomponíveis de $A_4[-1]$ dos quais há morfismo não nulo para $A_1[1]$ e $A''_4[-1]$ corresponde à soma dos demais somandos indecomponíveis de $A_4[-1]$. Dessa forma, reescrevemos o triângulo $(\star)$ por

$$A_1 \oplus A_2 \longrightarrow Z \longrightarrow (A_3[-1] \oplus A'_4[-1]) \oplus A''_4[-1] \xrightarrow{\begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix}} A_1[1] \oplus A_2[1],$$

que, segundo o lema 1.12, pode ser obtido como soma direta dos seguintes dois triângulos:

$$A_1 \longrightarrow Z' \longrightarrow (A_3[-1] \oplus A'_4[-1]) \xrightarrow{\phi} A_1[1] \quad \text{e}$$

$$A_2 \longrightarrow Z'' \longrightarrow A''_4[-1] \xrightarrow{\psi} A_2[1].$$

Uma vez que Z é indecomponível, $Z' = 0$ ou $Z'' = 0$. No primeiro caso, devido ao corolário 1.8, concluímos que o morfismo $\phi : A_3[-1] \oplus A'_4[-1] \rightarrow A_1[1]$ é um isomorfismo. Agora, desde que $\phi^{-1} \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A_1[1], A_3[-1] \oplus A'_4[-1]) \simeq \text{Ext}_A^{-1}(A_1, A_3[-1] \oplus A'_4[-1]) = 0$, segue que $A_3[-1] = A'_4[-1] = 0$ e $A_1 = 0$. No segundo caso, novamente conforme o corolário 1.8, $\psi : A''_4[-1] \rightarrow A_2[1]$ é um isomorfismo, e $\psi^{-1} \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A_2[1], A''_4[-1]) \simeq \text{Ext}_A^{-1}(A_2, A''_4[-1]) = 0$, o que nos garante que $A_2 = 0$ e $A''_4[-1] = 0$. $\square$

De acordo com o lema anterior, se Z for um A -módulo indecomponível, então sua sequência exata canônica relativa ao par de torção $(\mathcal{T}', \mathcal{F}')$ será de uma das seguintes formas:

$$(1) \quad 0 \rightarrow A_2 \rightarrow Z \rightarrow A_4[-1] \rightarrow 0 \quad \text{ou} \quad (2) \quad 0 \rightarrow A_1 \rightarrow Z \rightarrow A_3[-1] \oplus A_4[-1] \rightarrow 0,$$

em que cada $A_i \in \text{add } \mathcal{A}_i$. Tendo essa afirmação e a observação 4.11 em vista, definamos

- $\mathcal{X} = \{Z \in \text{mod } A; A_1^Z = 0 \text{ e } A_3^Z[-1] = 0\}$ e
- $\mathcal{Y} = \{Z \in \text{mod } A; A_2^Z = 0 \text{ e } Z \text{ não tem somando direto em } \mathcal{A}_4[-1]\}$.

Assim, todo A -módulo indecomponível pertence a $\mathcal{X}$ ou a $\mathcal{Y}$. De fato, seja Z um A -módulo indecomponível. Se para Z existir uma sequência exata do tipo (1), então $Z \in \mathcal{X}$. Por outro lado, se para Z existir uma sequência exata do tipo (2), então Z deverá pertencer a $\mathcal{Y}$, caso não pertença a $\mathcal{A}_4[-1]$, e a $\mathcal{X}$, caso contrário, já que claramente $\mathcal{A}_4[-1] \subseteq \mathcal{X}$. Podemos portanto enunciar o seguinte corolário:

Corolário 4.14. Seja Z um A -módulo indecomponível. Então $Z \in \mathcal{X}$ ou $Z \in \mathcal{Y}$. □

Devido ao corolário acima, para mostrarmos que $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ define um par de torção em $\text{mod } A$, é suficiente verificarmos que não há morfismo não nulo de módulos em $\mathcal{X}$ para módulos em $\mathcal{Y}$. Consideremos portanto $X \in \mathcal{X}$ e $Y \in \mathcal{Y}$. Neste caso, em $\text{mod } A$ existe uma sequência exata

$$(*) \quad 0 \rightarrow A_2 \rightarrow X \rightarrow A_4[-1] \rightarrow 0,$$

com $A_2 \in \text{add } \mathcal{A}_2$ e $A_4[-1] \in \text{add } \mathcal{A}_4[-1]$. Aplicando o funtor $\text{Hom}_A(_, Y)$ a $(*)$, obtemos a também sequência exata $0 \rightarrow \text{Hom}_A(A_4[-1], Y) \rightarrow \text{Hom}_A(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_A(A_2, Y)$, que tem este último termo nulo, devido ao lema 4.12. Neste caso, $\text{Hom}_A(X, Y) = 0$ se, e somente se, $\text{Hom}_A(A_4[-1], Y) = 0$. O problema se reduz, portanto, à verificação de que não há morfismo não nulo de módulos em $\text{add } \mathcal{A}_4[-1]$ para módulos em $\mathcal{Y}$. Para que esta seja possível, acrescentaremos a (H1) as seguintes hipóteses:

(H2) (i) Se $g : A_2 \rightarrow A_4$ for um morfismo em $\mathcal{B}$, com $A_2 \in \text{add } \mathcal{A}_2$ e $A_4 \in \text{add } \mathcal{A}_4$, então nenhum somando indecomponível de $\text{Ker } g$ deverá pertencer a $\mathcal{A}_1$.

(ii) Se $h : A_3 \oplus A_4 \rightarrow C_4$ for um morfismo em $\mathcal{B}$, com $A_3 \in \text{add } \mathcal{A}_3$ e $A_4, C_4 \in \text{add } \mathcal{A}_4$, então nenhum somando indecomponível de $\text{Ker } h$ deverá pertencer a $\mathcal{A}_1$.

(H3) (i) $\mathcal{A}_1[1]$ é funtorialmente finita em $\mathcal{A}_4[-1]$. Além disso, se $w : A'_4[-1] \rightarrow A_1[1]$ for uma $\text{add } \mathcal{A}_4[-1]$ -aproximação minimal à direita de $A_1[1]$ e $\gamma : A_4[-1] \rightarrow A_1[1]$ for um morfismo tal que o A -módulo Z obtido como termo do meio da sequência exata $0 \rightarrow A_1 \rightarrow Z \rightarrow A_4[-1] \rightarrow 0$ associada a γ não admite somandos em $\mathcal{A}_4[-1]$, então um morfismo $\delta : A_4[-1] \rightarrow A'_4[-1]$ que satisfizer $w\delta = \gamma$ será tal que $\text{Hom}(_, \delta)$ é um morfismo injetor em $\mathcal{A}_4[-1]$.

(ii) $\mathcal{A}_4[-1]$ é funtorialmente finita em $\mathcal{A}_1[1]$. Além disso, se $w : A_4[-1] \rightarrow A'_1[1]$ for uma $\text{add } \mathcal{A}_1[1]$ -aproximação minimal à esquerda de $A_4[-1]$ e $\gamma : A_4[-1] \rightarrow A_1[1]$ for um morfismo tal que o A -módulo Z obtido como termo do meio da sequência exata $0 \rightarrow A_1 \rightarrow Z \rightarrow A_4[-1] \rightarrow 0$ associada a γ não admite somandos em $\mathcal{A}_4[-1]$, então um morfismo $\delta : A'_1[1] \rightarrow A_1[1]$ que satisfizer $\delta w = \gamma$ será tal que $\text{Hom}(\delta, _)$ é um morfismo sobrejetor em $\mathcal{A}_1[2]$.

Claramente, para mostrarmos que $\text{Hom}_A(\text{add } \mathcal{A}_4[-1], \mathcal{Y}) = 0$ (★), basta considerarmos módulos indecomponíveis em $\text{add } \mathcal{A}_4[-1]$ e em $\mathcal{Y}$. Além disso, podemos considerar somente módulos indecomponíveis em $\mathcal{Y} \setminus \mathcal{A}_3[-1]$, uma vez que $\text{Hom}_A(\mathcal{A}_4[-1], \mathcal{A}_3[-1]) = 0$, de acordo com a tabela (A). Dessa forma, nos interessam os morfismos de módulos em $\mathcal{A}_4[-1]$ para módulos indecomponíveis com termo

$\mathcal{A}_1$ não nulo, já que um A -módulo indecomponível Z pertence a $\mathcal{Y} \setminus \mathcal{A}_3[-1]$ se, e somente se, admite termo $\mathcal{A}_1$ não nulo.

A demonstração da afirmação (★) será então dividida em etapas: dados um A -módulo $A_1 \in \text{add } \mathcal{A}_1$ e $w : A'_4[-1] \rightarrow A_1[1]$ uma $\text{add } \mathcal{A}_4[-1]$ -aproximação minimal à direita de $A_1[1]$, provaremos inicialmente que não há *monomorfismo* de um módulo em $\mathcal{A}_4[-1]$ para o A -módulo Z' obtido como termo do meio da sequência exata $0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{u} Z' \xrightarrow{v} A'_4[-1] \rightarrow 0$ associada ao morfismo $w \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A'_4[-1], A_1[1])$; em seguida, mostraremos que não há *epimorfismo* não nulo de um módulo em $\mathcal{A}_4[-1]$ para qualquer A -módulo; por fim, como consequência das anteriores, mostraremos que não há morfismo não nulo de módulos em $\mathcal{A}_4[-1]$ para Z' como descrito acima.

Lema 4.15. Sejam $A_1 \in \text{add } \mathcal{A}_1$, $w : A'_4[-1] \rightarrow A_1[1]$ uma $\text{add } \mathcal{A}_4[-1]$ -aproximação minimal à direita de $A_1[1]$ e Z' o A -módulo obtido como termo do meio da sequência exata $0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{u} Z' \xrightarrow{v} A'_4[-1] \rightarrow 0$ associada ao morfismo $w \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A'_4[-1], A_1[1])$. Então não há monomorfismo de módulos em $\mathcal{A}_4[-1]$ para Z' .

Demonstração. Sejam Z' um A -módulo como descrito acima e $\phi : B_4[-1] \rightarrow Z'$ um monomorfismo, em que $B_4[-1] \in \text{add } \mathcal{A}_4[-1]$ é indecomponível. Desde que $B_4[-1] \xrightarrow{\phi} Z' \rightarrow \text{Coker } \phi \rightarrow B_4$ define um triângulo em $\mathcal{D}^b(A)$, construímos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & B_4[-1] & & & & \\
 & & \downarrow \phi & & & & \\
 A_1 & \xrightarrow{u} & Z' & \xrightarrow{v} & A'_4[-1] & \xrightarrow{w} & A_1[1] \\
 \vdots \downarrow \begin{smallmatrix} (h_1) \\ (h_2) \end{smallmatrix} & & \downarrow & & \vdots \downarrow & & \vdots \downarrow \\
 C_1 \oplus C_2 & \xrightarrow{(\alpha_1 \ \alpha_2)} & \text{Coker } \phi & \longrightarrow & C_3[-1] \oplus C_4[-1] & \longrightarrow & C_1[1] \oplus C_2[1] \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & B_4 & & & &
 \end{array}$$

em que $(*) \ C_1 \oplus C_2 \xrightarrow{(\alpha_1 \ \alpha_2)} \text{Coker } \phi \rightarrow C_3[-1] \oplus C_4[-1] \rightarrow C_1[1] \oplus C_2[1]$ é o triângulo em $\mathcal{D}^b(A)$ determinado pela sequência exata canônica para $\text{Coker } \phi$ relativa ao par de torção $(\mathcal{T}', \mathcal{F}')$ e a existência dos morfismos tracejados está garantida por $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A_1, C_3[-1] \oplus C_4[-1]) = 0$.

Considere $G : \mathcal{D}^b(A) \rightarrow \mathcal{D}^b(B)$ a equivalência triangular cuja restrição a $\text{mod } A$ é o funtor identidade, conforme descrita na proposição 4.7. Neste caso, a aplicação do funtor G ao diagrama acima nos fornece o mesmo diagrama em $\mathcal{D}^b(B)$. O triângulo em $(*)$ induz a sequência exata longa em $\text{mod } B$

$$\begin{aligned}
 H^{-1}(C_3[-1] \oplus C_4[-1]) &\rightarrow H^0(C_1 \oplus C_2) \rightarrow H^0(\text{Coker } \phi) \rightarrow H^0(C_3[-1] \oplus C_4[-1]) \rightarrow H^1(C_1 \oplus C_2) \rightarrow \\
 &\rightarrow H^1(\text{Coker } \phi) \rightarrow H^1(C_3[-1] \oplus C_4[-1]) \rightarrow H^2(C_1 \oplus C_2) \rightarrow H^2(\text{Coker } \phi),
 \end{aligned}$$

em que $H^i : \mathcal{D}^b(B) \rightarrow \text{mod } B$ denota a cohomologia com respeito à t -estrutura natural de $\mathcal{D}^b(B)$. Observe que $H^0(C_1 \oplus C_2) = C_1 \oplus C_2$ e $H^i(C_1 \oplus C_2) = 0$, para todo $i \neq 0$, e $H^1(C_3[-1] \oplus C_4[-1]) = C_3 \oplus C_4$ e $H^i(C_3[-1] \oplus C_4[-1]) = 0$, para todo $i \neq 1$. Como consequência, $H^0(\text{Coker } \phi) \simeq C_1 \oplus C_2$, $H^1(\text{Coker } \phi) \simeq C_3 \oplus C_4$ e $H^i(\text{Coker } \phi) = 0$, para cada $i \neq 0, 1$.

Da mesma forma, o triângulo $A_1 \xrightarrow{u} Z' \xrightarrow{v} A'_4[-1] \xrightarrow{w} A_1[1]$ induz a sequência exata longa em $\text{mod } B$

$$H^{-1}(A'_4[-1]) \rightarrow H^0(A_1) \rightarrow H^0(Z') \rightarrow H^0(A'_4[-1]) \rightarrow H^1(A_1) \rightarrow H^1(Z') \rightarrow H^1(A'_4[-1]) \rightarrow H^2(A_1) \rightarrow$$

$$\rightarrow H^2(Z') \rightarrow H^2(A'_4[-1]).$$

Como anteriormente, pode-se verificar que $H^0(A_1) = A_1$ e $H^i(A_1) = 0$, para todo $i \neq 0$, e $H^1(A'_4[-1]) = A'_4$ e $H^i(A'_4[-1]) = 0$, para todo $i \neq 1$. Assim, conclui-se que $H^0(Z') \simeq A_1$, $H^1(Z') \simeq A'_4$ e $H^i(Z') = 0$, para todo $i \neq 0, 1$.

Finalmente, o triângulo $B_4[-1] \xrightarrow{\phi} Z' \rightarrow \text{Coker } \phi \rightarrow B_4$ induz a sequência exata longa em $\text{mod } B$

$$0 = H^0(B_4[-1]) \rightarrow H^0(Z') \rightarrow H^0(\text{Coker } \phi) \rightarrow H^1(B_4[-1]) \rightarrow H^1(Z') \rightarrow H^1(\text{Coker } \phi) \rightarrow H^2(B_4[-1]),$$

que, em virtude das considerações acima, pode ser reescrita por

$$0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}} C_1 \oplus C_2 \xrightarrow{(0 \ h)} B_4 \rightarrow A'_4 \xrightarrow{\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}} C_3 \oplus C_4 \rightarrow 0.$$

Uma vez que a composta $A'_4 \xrightarrow{\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}} C_3 \oplus C_4 \xrightarrow{(1 \ 0)} C_3$ é um epimorfismo em $\text{mod } B$, devemos ter $C_3 = 0$, pois, segundo a tabela (B), não há morfismo não nulo de $\mathcal{A}_4$ para $\mathcal{A}_3$. Além disso, $A_1 = C_1 \oplus \text{Ker } h$ e, portanto, $\text{Ker } h \in \text{add } \mathcal{A}_1$. Segue da hipótese (H2)(i) que $\text{Ker } h = 0$, ou ainda, $h_2 = 0$. Logo, h_1 é um isomorfismo.

O diagrama apresentado inicialmente é agora da forma

$$\begin{array}{ccccccc} & & B_4[-1] & \longrightarrow & \text{cone}(j)[-1] & & \\ & & \downarrow \phi & & \downarrow k & & \\ A_1 & \xrightarrow{u} & Z' & \xrightarrow{v} & A'_4[-1] & \xrightarrow{w} & A_1[1] \\ \downarrow \begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix} & & \downarrow & & \downarrow \delta & & \downarrow \begin{pmatrix} h_1[1] \\ 0 \end{pmatrix} \\ C_1 \oplus C_2 & \xrightarrow{(\alpha_1 \ \alpha_2)} & \text{Coker } \phi & \xrightarrow{\beta} & C_4[-1] & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}} & C_1[1] \oplus C_2[1] \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & B_4 & \longrightarrow & \text{cone}(j) & & \end{array}$$

Sendo w uma $\text{add } \mathcal{A}_4[-1]$ -aproximação minimal à direita de $A_1[1]$, deve existir um morfismo $\delta : C_4[-1] \rightarrow A'_4[-1]$ tal que $w\delta = (h_1^{-1}[1] \ 0) \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = h_1^{-1}[1]\gamma_1$. Nessas condições, $w\delta j = h_1^{-1}[1]\gamma_1 j$ e, portanto, $w\delta j = w$. A minimalidade de w nos garante que δj é um isomorfismo, donde $k : \text{cone}(j)[-1] \rightarrow A'_4[-1]$ é nulo. Consequentemente, $v\phi = 0$, ou seja, existe um morfismo $u' : B_4[-1] \rightarrow A_1$ satisfazendo $uu' = \phi$. De acordo com a tabela (B), $u' = 0$, o que nos permite concluir que $\phi = 0$, uma contradição, pois $B_4[-1]$ é indecomponível. $\square$

Lema 4.16. Seja $Z \notin \text{add } \mathcal{A}_4[-1]$ um A -módulo com termo $\mathcal{A}_2$ nulo. Então não existe um epimorfismo não nulo $C_4[-1] \rightarrow Z$, para qualquer $C_4[-1] \in \mathcal{A}_4[-1]$.

Demonstração. Sejam Z como descrito no enunciado e $0 \rightarrow A_1 \rightarrow Z \rightarrow A_3[-1] \oplus A_4[-1] \rightarrow 0$ sua sequência exata canônica relativa ao par de torção $(\mathcal{T}', \mathcal{F}')$, em que $A_1 \in \text{add } \mathcal{A}_1$, $A_3[-1] \in \text{add } \mathcal{A}_3[-1]$ e $A_4[-1] \in \text{add } \mathcal{A}_4[-1]$. Suponha que existe um epimorfismo não nulo $\phi : C_4[-1] \rightarrow Z$, para algum $C_4[-1] \in \mathcal{A}_4[-1]$. Podemos construir o triângulo

$$(*) \quad A_1 \rightarrow Z \rightarrow A_3[-1] \oplus A_4[-1] \rightarrow A_1[1]$$

em $\mathcal{D}^b(A)$. A equivalência triangular $G : \mathcal{D}^b(A) \rightarrow \mathcal{D}^b(B)$ obtida através da proposição 4.7 nos garante que $(*)$ é também um triângulo em $\mathcal{D}^b(B)$.

Também, sendo ϕ um epimorfismo, existe a sequência exata $0 \rightarrow \text{Ker } \phi \rightarrow C_4[-1] \xrightarrow{\phi} Z \rightarrow 0$ em $\text{mod } A$, que nos permite construir o triângulo $\text{Ker } \phi \rightarrow C_4[-1] \xrightarrow{\phi} Z \rightarrow \text{Ker } \phi[1]$ em $\mathcal{D}^b(A)$. Uma vez que $\text{add}(\mathcal{A}_3[-1] \cup \mathcal{A}_4[-1])$ é fechada para submódulos, $\text{Ker } \phi \in \text{add}(\mathcal{A}_3[-1] \cup \mathcal{A}_4[-1])$, ou seja, $\text{Ker } \phi$ pode ser escrito como uma soma direta $D_3[-1] \oplus D_4[-1]$, com $D_3[-1] \in \text{add } \mathcal{A}_3[-1]$ e $D_4[-1] \in \text{add } \mathcal{A}_4[-1]$. Novamente por meio da equivalência triangular G , obtemos em $\mathcal{D}^b(B)$

$$(**) \quad D_3[-1] \oplus D_4[-1] \rightarrow C_4[-1] \xrightarrow{\phi} Z \rightarrow D_3 \oplus D_4.$$

O triângulo $(*)$ induz em $\text{mod } B$ a seguinte sequência exata longa

$$\begin{aligned} H^{-1}(A_1) \rightarrow H^{-1}(Z) \rightarrow H^{-1}(A_3[-1] \oplus A_4[-1]) \rightarrow H^0(A_1) \rightarrow H^0(Z) \rightarrow H^0(A_3[-1] \oplus A_4[-1]) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(A_1) \rightarrow H^1(Z) \rightarrow H^1(A_3[-1] \oplus A_4[-1]) \rightarrow H^2(A_1) \rightarrow H^2(Z), \end{aligned}$$

em que $H^i : \mathcal{D}^b(B) \rightarrow \text{mod } B$ novamente denota a cohomologia com respeito à t-estrutura natural de $\mathcal{D}^b(B)$. Observe que $H^0(A_1) = A_1$ e $H^i(A_1) = 0$, para todo $i \neq 0$, e $H^1(A_3[-1] \oplus A_4[-1]) = A_3 \oplus A_4$ e $H^i(A_3[-1] \oplus A_4[-1]) = 0$, para todo $i \neq 1$. Assim, concluímos que $H^0(Z) \simeq A_1$, $H^1(Z) \simeq A_3 \oplus A_4$ e $H^i(Z) = 0$, para cada $i \neq 0, 1$.

Também, o triângulo $(**)$ induz em $\text{mod } B$ a sequência exata longa

$$\begin{aligned} H^0(D_3[-1] \oplus D_4[-1]) \rightarrow H^0(C_4[-1]) \rightarrow H^0(Z) \rightarrow H^1(D_3[-1] \oplus D_4[-1]) \rightarrow H^1(C_4[-1]) \rightarrow H^1(Z) \rightarrow \\ \rightarrow H^2(D_3[-1] \oplus D_4[-1]) \rightarrow H^2(B_4[-1]). \end{aligned}$$

Veja que $H^0(C_4[-1]) = 0$, $H^1(D_3[-1] \oplus D_4[-1]) = D_3 \oplus D_4$ e $H^2(D_3[-1] \oplus D_4[-1]) = 0$ e, portanto, esta última sequência exata pode ser reescrita por

$$0 \rightarrow A_1 \rightarrow D_3 \oplus D_4 \rightarrow C_4 \xrightarrow{\theta} A_3 \oplus A_4 \rightarrow 0.$$

De acordo com a hipótese (H2)(ii), $A_1 = 0$. Além disso, $A_3 = 0$, uma vez que a composta $C_4 \xrightarrow{\theta} A_3 \oplus A_4 \xrightarrow{(1 \ 0)} A_3$ é um epimorfismo em $\mathcal{B}$ e não há morfismo não nulo de módulos em $\mathcal{A}_4$ para módulos em $\mathcal{A}_3$. Logo, $Z \in \text{add } \mathcal{A}_4[-1]$, o que é uma contradição.

Dessa forma, não pode haver epimorfismo não nulo de qualquer módulo em $\mathcal{A}_4[-1]$ para Z , como desejado. $\square$

Como consequência do lema anterior segue que, em particular, não há epimorfismo não nulo de módulos em $\mathcal{A}_4[-1]$ para o A -módulo Z' descrito no lema 4.15.

Lema 4.17. Sejam $A_1 \in \text{add } \mathcal{A}_1$, $w : A'_4[-1] \rightarrow A_1[1]$ uma $\text{add } \mathcal{A}_4[-1]$ -aproximação minimal à direita de $A_1[1]$ e Z' o A -módulo obtido como termo do meio da sequência exata $0 \rightarrow A_1 \rightarrow Z' \rightarrow A'_4[-1] \rightarrow 0$ associada ao morfismo $w \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A'_4[-1], A_1[1])$. Então não há morfismo não nulo de módulos em $\mathcal{A}_4[-1]$ para Z' .

Demonstração. Suponha, por absurdo, que existe um morfismo não nulo $f : B_4[-1] \rightarrow Z'$, com $B_4[-1] \in \mathcal{A}_4[-1]$. Observe que:

- nenhum somando indecomponível de $\text{Im } f$ pertence a $\mathcal{A}_4[-1]$: de fato, se X for um somando

indecomponível de $\text{Im } f$ tal que $X \in \mathcal{A}_4[-1]$, então a inclusão $X \rightarrow Z'$ será um monomorfismo de um módulo em $\mathcal{A}_4[-1]$ para Z' , o que é um absurdo, segundo o lema 4.15;

- $\text{Im } f$ tem termo $\mathcal{A}_2$ nulo: se, caso contrário, $\text{Im } f$ tiver termo $\mathcal{A}_2$ não nulo, então deverá existir um morfismo não nulo $\alpha : A_2 \rightarrow \text{Im } f$, para algum $A_2 \in \mathcal{A}_2$, e uma vez que a inclusão $i : \text{Im } f \rightarrow Z'$ é um monomorfismo, a composta $i\alpha$ será não nula. Dessa forma, segundo a observação 4.12, Z' terá termo $\mathcal{A}_2$ não nulo, uma contradição;
- $\text{Im } f$ tem termo $\mathcal{A}_1$ nulo: se X for um somando indecomponível de $\text{Im } f$ com termo $\mathcal{A}_1$ não nulo, então a composta $B_4[-1] \xrightarrow{\bar{f}} \text{Im } f \xrightarrow{\pi} X$ será um epimorfismo, em que $\bar{f}$ é a correstrrição de f a sua imagem e π é a projeção canônica. Uma vez que $X \notin \mathcal{A}_4[-1]$ e que X tem termo $\mathcal{A}_2$ nulo, seguirá do lema 4.16 que $\pi\bar{f}$ é nulo e, portanto, $X = 0$, o que é novamente uma contradição.

Através das considerações acima obtemos que $\text{Im } f \in \mathcal{A}_3[-1]$ e, como não há morfismo não nulo de $\mathcal{A}_4[-1]$ para $\mathcal{A}_3[-1]$, f é nulo, o que é uma contradição. $\square$

Tendo em vista os lemas 4.15, 4.16 e 4.17, mostraremos em seguida a afirmação (★).

Proposição 4.18. Seja $\mathcal{Y}$ a subcategoria plena de $\text{mod } A$ cujos objetos são os A -módulos com termos $\mathcal{A}_2$ nulos e tais que não possuem somandos diretos em $\mathcal{A}_4[-1]$. Então $\text{Hom}_A(\mathcal{A}_4[-1], \mathcal{Y}) = 0$.

Demonstração. Seja $Z \in \mathcal{Y} \setminus \mathcal{A}_3[-1]$ indecomponível. Como observado acima, Z deve admitir, neste caso, termo $\mathcal{A}_1$ não nulo. Suponha, inicialmente, que Z tem termo $\mathcal{A}_3[-1]$ nulo. Nessas condições, a sequência exata canônica para Z relativa ao par de torção $(\mathcal{T}', \mathcal{F}')$ é da forma $0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} A_4[-1] \rightarrow 0$, em que $A_1 \in \text{add } \mathcal{A}_1$ e $A_4[-1] \in \text{add } \mathcal{A}_4[-1]$. Construimos, portanto, o triângulo

$$(\star) \quad A_1 \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} A_4[-1] \xrightarrow{\gamma} A_1[1].$$

Sejam $w : A'_4[-1] \rightarrow A_1[1]$ uma $\text{add } \mathcal{A}_4[-1]$ -aproximação minimal à direita de $A_1[1]$ e $A_1 \xrightarrow{u} Z' \xrightarrow{v} A'_4[-1] \xrightarrow{w} A_1[1]$ o triângulo induzido por w . De acordo com o lema 4.17, não existe morfismo não nulo de $\mathcal{A}_4[-1]$ para Z' , ou seja, o morfismo $\text{Hom}(_, w) : \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(_, A'_4[-1]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(_, A_1[1])$ é injetor em $\mathcal{A}_4[-1]$. Além disso, sendo w uma $\text{add } \mathcal{A}_4[-1]$ -aproximação à direita de $A_1[1]$, deve existir um morfismo $\delta : A_4[-1] \rightarrow A'_4[-1]$ tal que o quadrado abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} A_4[-1] & \xrightarrow{\gamma} & A_1[1] \\ \downarrow \delta & & \downarrow 1 \\ A'_4[-1] & \xrightarrow{w} & A_1[1]. \end{array}$$

Dessa forma, é também comutativo o quadrado

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(_, A_4[-1]) & \xrightarrow{\text{Hom}(_, \gamma)} & \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(_, A_1[1]) \\ \downarrow \text{Hom}(_, \delta) & & \downarrow 1 \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(_, A'_4[-1]) & \xrightarrow{\text{Hom}(_, w)} & \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(_, A_1[1]), \end{array}$$

ou seja, $\text{Hom}(_, w)\text{Hom}(_, \delta) = \text{Hom}(_, \gamma)$. Devido a (H3)(i), como $Z \notin \mathcal{A}_4[-1]$, $\text{Hom}(_, \delta)$ é um morfismo injetor em $\mathcal{A}_4[-1]$ e, portanto, $\text{Hom}(_, \gamma)$ é um morfismo injetor em $\mathcal{A}_4[-1]$, já que o mesmo

ocorre com $\text{Hom}(_, w)$. Logo, fixado $D_4[-1] \in \mathcal{A}_4[-1]$, aplicando o funtor $\text{Hom}(D_4[-1], _)$ ao triângulo $(\star)$, obtemos a sequência exata longa

$$0 = \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(D_4[-1], A_1) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(D_4[-1], Z) \xrightarrow{0} \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(D_4[-1], A_4[-1]) \xrightarrow{\text{Hom}(D_4[-1], \gamma)}$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(D_4[-1], A_1[1]),$$

donde $\text{Hom}_A(D_4[-1], Z) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(D_4[-1], Z) = 0$, ou ainda, não há morfismo não nulo de módulos em $\mathcal{A}_4[-1]$ para Z .

Assuma agora que Z admite termo $\mathcal{A}_3[-1]$ não nulo. Suponha, por absurdo, que existe um morfismo $f : B_4[-1] \rightarrow Z$ não nulo, com $B_4[-1] \in \mathcal{A}_4[-1]$. Considere $Z \xleftarrow{\phi} U \xrightarrow{v} A_4[-1]$ o *pullback* de $Z \xrightarrow{(\beta_1 \ \beta_2)^t} A_3[-1] \oplus A_4[-1] \xleftarrow{(0 \ 1)^t} A_4[-1]$. Neste caso, uma vez que $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \beta_1 f \\ \beta_2 f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_2 f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \beta_2 f$, podemos concluir que existe um morfismo $\bar{f} : B_4[-1] \rightarrow U$ tal que $\phi \bar{f} = f$.

$$\begin{array}{ccccccc} & & B_4[-1] & & & & \\ & & \searrow f & \nearrow \beta_2 f & & & \\ & & & U & \longrightarrow & A_4[-1] & \longrightarrow 0 \\ & 0 \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\quad} & U & \longrightarrow & A_4[-1] \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow \phi & & \downarrow (0 \ 1)^t \\ & 0 \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\alpha} & Z & \xrightarrow{(\beta_1 \ \beta_2)^t} & A_3[-1] \oplus A_4[-1] \longrightarrow 0 \end{array}$$

Desde que $f \neq 0$, devemos ter $\bar{f} \neq 0$ e, portanto, para algum somando indecomponível U' de U , a componente $B_4[-1] \rightarrow U'$ de $\bar{f}$ é não nula. Em seguida, mostraremos que todo somando indecomponível de U admite termo $\mathcal{A}_1$ não nulo. Suponha, ao contrário, que existe um somando indecomponível N de U com termo $\mathcal{A}_1$ nulo. Segundo o lema 4.12, N tem termos $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3[-1]$ nulos, já que se não fosse esse o caso, existiriam morfismos não nulos $A_2^N \rightarrow N \hookrightarrow U$ e $U \rightarrow N \rightarrow A_3^N[-1]$, mas U tem termos $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3[-1]$ nulos. Logo, $N \simeq C_4[-1]$, com $C_4[-1] \in \mathcal{A}_4[-1]$. Seja N' um A -módulo tal que $U = N' \oplus N$ e considere $0 \rightarrow A_1^{N'} \rightarrow N' \xrightarrow{\eta} A_4[-1]^{N'} \rightarrow 0$ a sequência exata canônica para N' relativa ao par de torção $(\mathcal{T}', \mathcal{F}')$. Observe que $0 \rightarrow A_1^{N'} \rightarrow N' \oplus N \rightarrow A_4[-1]^{N'} \oplus N \rightarrow 0$, obtida como resultado da soma direta das sequências exatas canônicas para N' e N , é uma sequência exata canônica para U e, portanto, há um isomorfismo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_1^{N'} & \longrightarrow & N' \oplus N & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} & A_4[-1]^{N'} \oplus N \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \psi_1 & & \downarrow (\psi_1^1 \ \psi_2^2) & & \downarrow (\psi_3^1 \ \psi_3^2) \\ 0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & U & \longrightarrow & A_4[-1] \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow \phi & & \downarrow (0 \ 1)^t \\ 0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{(\beta_1 \ \beta_2)^t} & A_3[-1] \oplus A_4[-1] \longrightarrow 0 \end{array}$$

que nos garante que N é um somando direto de Z . De fato, sendo $(\psi_3^1 \ \psi_3^2)$ um isomorfismo, deve existir um morfismo $\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} : A_4[-1] \rightarrow A_4[-1]^{N'} \oplus N$ satisfazendo $\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} (\psi_3^1 \ \psi_3^2) = 1$ e, em particular, $\theta_2 \psi_3^2 = 1$. Além disso, $\begin{pmatrix} \beta_1 \phi \\ \beta_2 \phi \end{pmatrix} (\psi_2^1 \ \psi_2^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (\psi_3^1 \ \psi_3^2) \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e, portanto, $\beta_2 \phi \psi_2^2 = \psi_3^2$. Logo, $(\theta_2 \beta_2)(\phi \psi_2^2) = \theta_2 \psi_3^2 = 1$, donde $\phi \psi_2^2 : N \rightarrow Z$ é um monomorfismo que cinde.

Dessa forma, uma vez que Z é indecomponível, segue que $Z = N \simeq C_4[-1]$, contradizendo a hipótese de que Z tem termo $\mathcal{A}_1$ não nulo. Consequentemente, o somando indecomponível U' de U admite

termo $\mathcal{A}_1$ não nulo, tem termos $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3[-1]$ nulos e é tal que $\text{Hom}_A(B_4[-1], U') \neq 0$, o que contradiz a primeira etapa dessa demonstração. $\square$

Como mencionamos anteriormente, por meio dos resultados acima podemos garantir que $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ define um par de torção cindido em $\text{mod } A$, já que todo A -módulo indecomponível pertence a $\mathcal{X}$ ou a $\mathcal{Y}$ e $\text{Hom}_A(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$. É o que enunciaremos na proposição a seguir.

Proposição 4.19. *Seja B uma álgebra por partes de tipo $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4)$ que satisfaz as hipóteses (H1), (H2) e (H3), e considere $\Phi^{-1}(\text{mod } B; (\text{add}(\mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4), \text{add}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2))) = (\mathcal{A}; (\mathcal{T}', \mathcal{F}'))$. Nessas condições, $\mathcal{A}$ é uma categoria de módulos sobre uma álgebra A . Defina $\mathcal{X} = \{Z \in \text{mod } A; A_1^Z = 0 \text{ e } A_3^Z[-1] = 0\}$ e $\mathcal{Y} = \{Z \in \text{mod } A; A_2^Z = 0 \text{ e } Z \text{ não tem somando direto em } \mathcal{A}_4[-1]\}$. Então $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ é um par de torção cindido em $\text{mod } A$. $\square$*

4.3 Propriedades Homológicas do Par de Torção $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$

Neste momento, para que cumpramos o objetivo de mostrar que A é quase inclinada, basta verificarmos que $di_A \mathcal{X} \leq 1$ e que $dp_A \mathcal{Y} \leq 1$. Os resultados a seguir serão destinados a esse propósito.

Lema 4.20. *Seja $\mathcal{X} = \{Z \in \text{mod } A; A_1^Z = 0 \text{ e } A_3^Z[-1] = 0\}$. Então $di_A \mathcal{X} \leq 1$.*

Demonstração. Sejam $Z \in \mathcal{X}$ e $(\star) \ 0 \rightarrow A_2 \rightarrow Z \rightarrow A_4[-1] \rightarrow 0$, com $A_2 \in \text{add } \mathcal{A}_2$ e $A_4[-1] \in \text{add } \mathcal{A}_4[-1]$, a sequência exata canônica para Z relativa ao par de torção $(\mathcal{T}', \mathcal{F}')$. Dados $C_1 \in \text{add } \mathcal{A}_1$ e $C_2 \in \text{add } \mathcal{A}_2$, aplicando o funtor $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(C_1[-2] \oplus C_2[-2], _)$ ao triângulo induzido por $(\star)$, obtemos a sequência exata

$$(*) \ \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}((C_1 \oplus C_2)[-2], A_2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}((C_1 \oplus C_2)[-2], Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}((C_1 \oplus C_2)[-2], A_4[-1]).$$

Devido à tabela (A),

- $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(C_1[-2] \oplus C_2[-2], A_2) \simeq \text{Ext}_A^2(C_1 \oplus C_2, A_2) = 0$ e
- $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(C_1[-2] \oplus C_2[-2], A_4[-1]) \simeq \text{Ext}_A^2(C_1 \oplus C_2, A_4[-1]) = 0$,

o que, junto à sequência em $(*)$, nos garante que $\text{Ext}_A^2(C_1 \oplus C_2, Z) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(C_1[-2] \oplus C_2[-2], Z) = 0$.

Agora, para $C_3[-1] \in \text{add } \mathcal{A}_3[-1]$ e $C_4[-1] \in \text{add } \mathcal{A}_4[-1]$, ao aplicarmos o funtor $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(C_3[-3] \oplus C_4[-3], _)$ ao triângulo induzido por $(\star)$, obtemos a sequência exata

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}((C_3 \oplus C_4)[-3], A_2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}((C_3 \oplus C_4)[-3], Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}((C_3 \oplus C_4)[-3], A_4[-1]).$$

Novamente de acordo com a tabela (A),

- $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(C_3[-3] \oplus C_4[-3], A_2) \simeq \text{Ext}_A^2(C_3[-1] \oplus C_4[-1], A_2) = 0$ e
- $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(C_3[-3] \oplus C_4[-3], A_4[-1]) \simeq \text{Ext}_A^2(C_3[-1] \oplus C_4[-1], A_4[-1]) = 0$

e, portanto, $\text{Ext}_A^2(C_3[-1] \oplus C_4[-1], Z) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(C_3[-3] \oplus C_4[-3], Z) = 0$.

Em resumo, verificamos que $\text{Ext}_A^2(_, Z)|_{\mathcal{T}'} = 0$ e que $\text{Ext}_A^2(_, Z)|_{\mathcal{F}'} = 0$, o que nos permite concluir que $\text{Ext}_A^2(_, Z)|_{\text{mod } A} = 0$, ou ainda, que $di_A Z \leq 1$. $\square$

A demonstração de que a dimensão projetiva de módulos em $\mathcal{Y}$ não excede um não pode ser obtida como consequência somente das informações dispostas na tabela (A), como vimos ocorrer para a dimensão injetiva de módulos em $\mathcal{X}$. Provaremos inicialmente que, dados $A_4[-1] \in \text{add } \mathcal{A}_4[-1]$ e $w : A_4[-1] \rightarrow A'_1[1]$ uma $\text{add } \mathcal{A}_1[1]$ -aproximação minimal à esquerda de $A_4[-1]$, a dimensão projetiva do A -módulo Z' obtido como termo do meio da sequência exata $0 \rightarrow A'_1 \xrightarrow{u} Z' \xrightarrow{v} A_4[-1] \rightarrow 0$, associada ao morfismo $w \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A_4[-1], A'_1[1])$, não ultrapassa um, se Z' não admitir somandos em $\text{add } \mathcal{A}_4[-1]$. Em seguida, mostraremos que se $Z \in \mathcal{Y}$ tiver termo $\mathcal{A}_3[-1]$ nulo, então também sua dimensão projetiva será menor ou igual a um, para por fim, concluirmos que esse é o caso para todos os módulos em $\mathcal{Y}$.

Lema 4.21. Sejam $A_4[-1] \in \text{add } \mathcal{A}_4[-1]$, $w : A_4[-1] \rightarrow A'_1[1]$ uma $\text{add } \mathcal{A}_1[1]$ -aproximação minimal à esquerda de $A_4[-1]$ e Z' o A -módulo obtido como termo do meio da sequência exata $0 \rightarrow A'_1 \xrightarrow{u} Z' \xrightarrow{v} A_4[-1] \rightarrow 0$ associada ao morfismo w . Se Z' não admitir somando indecomponível em $\mathcal{A}_4[-1]$, então $dp_A Z' \leq 1$.

Demonstração. Seja Z' um A -módulo como descrito acima. Dado $C_2 \in \text{add } \mathcal{A}_2$, ao aplicarmos o funtor $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(-, C_2[2])$ ao triângulo $(\star) A'_1 \xrightarrow{u} Z' \xrightarrow{v} A_4[-1] \xrightarrow{w} A'_1[1]$, obtemos a sequência exata

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A_4[-1], C_2[2]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(Z', C_2[2]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A'_1, C_2[2]).$$

Segundo a tabela (A),

- $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A_4[-1], C_2[2]) \simeq \text{Ext}_A^2(A_4[-1], C_2) = 0$ e
- $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A'_1, C_2[2]) \simeq \text{Ext}_A^2(A'_1, C_2) = 0$

e, portanto, $\text{Ext}_A^2(Z', C_2) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(Z', C_2[2]) = 0$. Da mesma forma, se $C_3[-1] \in \text{add } \mathcal{A}_3[-1]$ e $C_4[-1] \in \text{add } \mathcal{A}_4[-1]$, então aplicando o funtor $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(-, C_3[1] \oplus C_4[1])$ ao triângulo em $(\star)$, obtemos a sequência exata

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A_4[-1], C_3[1] \oplus C_4[1]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(Z', C_3[1] \oplus C_4[1]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A'_1, C_3[1] \oplus C_4[1]),$$

com termos das pontas nulos, pois

- $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A_4[-1], C_3[1] \oplus C_4[1]) \simeq \text{Ext}_A^2(A_4[-1], C_3[-1] \oplus C_4[-1]) = 0$ e
- $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A'_1, C_3[1] \oplus C_4[1]) \simeq \text{Ext}_A^2(A'_1, C_3[-1] \oplus C_4[-1]) = 0$,

o que nos permite concluir que $\text{Ext}_A^2(Z', C_3[-1] \oplus C_4[-1]) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(Z', C_3[1] \oplus C_4[1]) = 0$.

Agora, seja $C_1 \in \text{add } \mathcal{A}_1$. Aplicando o funtor $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(-, C_1[2])$ a $(\star)$, obtemos a sequência exata

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A'_1[1], C_1[2]) \xrightarrow{\phi} \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A_4[-1], C_1[2]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(Z', C_1[2]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A'_1, C_1[2]).$$

Observe que $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A'_1, C_1[2]) \simeq \text{Ext}_A^2(A'_1, C_1) = 0$, segundo a tabela (A). Nessas condições, $\text{Ext}_A^2(Z', C_1) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(Z', C_1[2]) = 0$ se, e somente se, $\phi = \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(w, C_1[2])$ é sobrejetor. A fim de verificar que este é o caso, considere $\theta \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A_4[-1], C_1[2])$, que corresponde a uma sequência exata em $\mathcal{B}$

$$\theta : 0 \rightarrow C_1 \xrightarrow{s} L \xrightarrow{t} M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} A_4 \rightarrow 0,$$

uma vez que $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A_4[-1], C_1[2]) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(B)}(A_4, C_1[3]) \simeq \text{Ext}_B^3(A_4, C_1)$. Note que $\theta = \mu\eta$, com $\mu : 0 \rightarrow C_1 \xrightarrow{s} L \xrightarrow{\bar{t}} \text{Im } t \rightarrow 0$ e $\eta : 0 \rightarrow \text{Im } t \xrightarrow{i} M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} A_4 \rightarrow 0$ sequências exatas em $\mathcal{B}$, em que $\bar{t}$ e i são a correstrrição de t e a inclusão, respectivamente. Em outros termos, o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A_4[-1] & \xrightarrow{\theta} & C_1[2] \\
 & \searrow \eta \quad \nearrow \mu & \\
 & (\text{Im } t)[1] &
 \end{array}$$

é comutativo. Sendo $\text{Im } t \in \mathcal{B}$, podemos escrever $\text{Im } t = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3 \oplus D_4$, em que $D_i \in \text{add } \mathcal{A}_i$, para cada $i = 1, 2, 3, 4$. Escrevamos também $\eta = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mu = \begin{pmatrix} c & d & e & 0 \end{pmatrix}$ e, então, $\theta = ca + db$. Dessa forma, podemos assumir que $D_3 = 0 = D_4$.

Seja $A'_4[-1]$ um somando direto indecomponível de $A_4[-1]$ e suponha, por absurdo, que a componente $A'_4[-1] \rightarrow A'_1[1]$ de $w : A_4[-1] \rightarrow A'_1[1]$ é nula. Assim, o morfismo $v' : Z' \rightarrow A'_4[-1]$ em

$$A'_1 \xrightarrow{u} Z' \xrightarrow{v = \begin{pmatrix} v' \\ v'' \end{pmatrix}} A_4[-1] = A'_4[-1] \oplus A''_4[-1] \xrightarrow{w = \begin{pmatrix} 0 & w' \end{pmatrix}} A'_1[1]$$

é um epimorfismo que cinde e, portanto, $A'_4[-1]$ é um somando direto de Z' , o que é uma contradição. Consequentemente, cada uma das componentes de w é não nula, ou ainda, para cada somando direto indecomponível $A'_4[-1]$ de $A_4[-1]$, a composta $A'_4[-1] \hookrightarrow A_4[-1] \xrightarrow{w} A'_1[1]$ é não nula. Segue de (H1) que $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A'_4[-1], -)|_{\text{add } \mathcal{A}_2[1]} = 0$, para todo somando indecomponível $A'_4[-1]$ de $A_4[-1]$, o que implica em $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A_4[-1], -)|_{\text{add } \mathcal{A}_2[1]} = 0$. Logo, podemos também assumir que $D_2 = 0$, ou seja, $(\text{Im } t)[1] = D_1[1]$. Sendo w uma $\text{add } \mathcal{A}_1[1]$ -aproximação minimal à esquerda de $A_4[-1]$, deve existir $h : A'_1[1] \rightarrow (\text{Im } t)[1]$ tal que $hw = \eta$, donde $\mu hw = \theta$, o que nos permite concluir que o morfismo $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(w, C_1[2])$ é sobrejetor, como desejado.

$$\begin{array}{ccc}
 A_4[-1] & \xrightarrow{\theta} & C_1[2] \\
 & \searrow \eta \quad \nearrow \mu & \\
 & (\text{Im } t)[1] & \\
 \downarrow w & \nearrow h & \\
 A'_1[1] & &
 \end{array}$$

Dessa forma, concluímos que $\text{Ext}_A^2(Z', -)|_{\mathcal{T}'} = 0 = \text{Ext}_A^2(Z', -)|_{\mathcal{F}'}$ e, portanto, $\text{Ext}_A^2(Z', -)|_{\text{mod } A} = 0$, ou ainda, $dp_A Z' \leq 1$. $\square$

Lema 4.22. Seja $\mathcal{Y} = \{Z \in \text{mod } A; A_2^Z = 0 \text{ e } Z \text{ não admite somando direto em } \mathcal{A}_4[-1]\}$. Então $dp_A \mathcal{Y} \leq 1$.

Demonstração. Seja $Z \in \mathcal{Y}$. Assuma, inicialmente, que Z admite termo $\mathcal{A}_3[-1]$ nulo, ou seja, que a sequência exata canônica para Z relativa ao par de torção $(\mathcal{T}', \mathcal{F}')$ é da forma $0 \rightarrow A_1 \rightarrow Z \rightarrow A_4[-1] \rightarrow 0$, em que $A_1 \in \text{add } \mathcal{A}_1$ e $A_4[-1] \in \text{add } \mathcal{A}_4[-1]$. Neste caso, podemos construir o triângulo $(\star) A_1 \rightarrow Z \rightarrow A_4[-1] \xrightarrow{\gamma} A_1[1]$ em $\mathcal{D}^b(A)$. Considere $w : A_4[-1] \rightarrow A'_1[1]$ uma $\text{add } \mathcal{A}_1[1]$ -aproximação minimal à esquerda de $A_4[-1]$ e $A'_1 \xrightarrow{u} Z' \xrightarrow{v} A_4[-1] \xrightarrow{w} A'_1[1]$ o triângulo induzido por w . Desde que w é uma $\text{add } \mathcal{A}_1[1]$ -aproximação minimal à esquerda de $A_4[-1]$, deve existir um morfismo $\delta : A'_1[1] \rightarrow A_1[1]$ tal que o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 A'_1 & \xrightarrow{u} & Z' & \xrightarrow{v} & A_4[-1] & \xrightarrow{w} & A'_1[1] \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow 1 & & \downarrow \delta \\
 A_1 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & A_4[-1] & \xrightarrow{\gamma} & A_1[1]
 \end{array}$$

é comutativo. Suponha, por absurdo, que Z' admite somando indecomponível em $\mathcal{A}_4[-1]$, digamos $Z' = Z'' \oplus A'_4[-1]$, com $A'_4[-1] \in \mathcal{A}_4[-1]$. Podemos então reescrever o diagrama acima por

$$\begin{array}{ccccccc} A'_1 & \xrightarrow{u=\begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix}} & Z'' \oplus A'_4[-1] & \xrightarrow{v=\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}} & A_4[-1] & \xrightarrow{w} & A'_1[1] \\ \downarrow & & \downarrow (\phi_1 \ \phi_2) & & \downarrow 1 & & \downarrow \delta \\ A_1 & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{\beta} & A_4[-1] & \xrightarrow{\gamma} & A_1[1]. \end{array}$$

Dessa forma, $v_2 : A'_4[-1] \rightarrow A_4[-1]$ é um monomorfismo que cinde, ou seja, deve existir um morfismo $v'_2 : A_4[-1] \rightarrow A'_4[-1]$ tal que $v'_2 v_2 = 1_{A'_4[-1]}$. Observe que $\beta \phi_2 = v_2$ e, portanto, ϕ_2 é um monomorfismo que cinde, o que nos permite concluir que $A'_4[-1]$ é um somando de Z , um absurdo, finalizando a demonstração da afirmação feita. Em virtude do lema 4.21, $dp_A Z' \leq 1$, ou ainda, o morfismo $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(w, -)$ é sobrejetor em $\mathcal{A}_1[2]$. Agora, também é comutativo o quadrado

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A_1[1], -) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(\gamma, -)} & \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A_4[-1], -) \\ \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(\delta, -) & & \downarrow 1 \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A'_1[1], -) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(w, -)} & \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A_4[-1], -), \end{array}$$

ou seja, $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(\gamma, -) = \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(w, -) \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(\delta, -)$. De acordo com a hipótese (H3)(ii), o morfismo $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(\delta, -)$ é sobrejetor em $\mathcal{A}_1[2]$ e, portanto, $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(\gamma, -)$ deve ser sobrejetor em $\mathcal{A}_1[2]$. Consequentemente, dado $C_1 \in \text{add } \mathcal{A}_1$, aplicando o funtor $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(-, C_1[2])$ ao triângulo $(\star)$, obtemos a sequência exata longa

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A_1[1], C_1[2]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A_4[-1], C_1[2]) \xrightarrow{0} \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(Z, C_1[2]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A_1, C_1[2]),$$

que nos permite concluir que $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(Z, C_1[2]) = 0$, já que

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(A_1, C_1[2]) \simeq \text{Ext}_A^2(A_1, C_1) = 0,$$

segundo a tabela (A). Além disso, como no lema 4.21, por meio da tabela (A) é possível concluir que $\text{Ext}_A^2(Z, -) = 0$ quando restrito às subcategorias $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3[-1]$ e $\mathcal{A}_4[-1]$ e, portanto, $dp_A Z \leq 1$.

Finalmente, sejam $Z \in \mathcal{Y}$ arbitrário e $0 \rightarrow A_1 \rightarrow Z \rightarrow A_3[-1] \oplus A_4[-1] \rightarrow 0$ sua sequência exata canônica relativa ao par de torção $(\mathcal{T}', \mathcal{F}')$. Considere

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & A_4[-1] \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & A_3[-1] \oplus A_4[-1] \longrightarrow 0 \end{array}$$

o *pullback* de $Z \longrightarrow A_3[-1] \oplus A_4[-1] \xleftarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} A_4[-1]$. De acordo com o Lema da Serpente, o diagrama a seguir é comutativo, com linhas e colunas exatas

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & A_4[-1] \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow 1 & & \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & A_3[-1] \oplus A_4[-1] \longrightarrow 0 \\
& & & & \downarrow & & \downarrow (1 \ 0) \\
& & & & A_3[-1] & \xrightarrow{1} & A_3[-1] \\
& & & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & & 0 & & 0
\end{array}$$

e, portanto, $dp_A Z \leq \max\{dp_A Z', dp_A A_3[-1]\}$. Agora, segundo o corolário 4.9(b), $dp_A A_3[-1] \leq 1$ e, conforme discussão feita acima, $dp_A Z' \leq 1$, pois $Z' \in \mathcal{Y}$. Consequentemente, $dp_A Z \leq 1$, o que finaliza a demonstração. $\square$

Reuniremos os resultados obtidos acima no seguinte teorema.

Teorema 4.23. Sejam B uma álgebra por partes de tipo $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4)$ e $\Phi^{-1}(\text{mod } B; (\text{add}(\mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4), \text{add}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2))) = (\mathcal{A}; (\mathcal{T}', \mathcal{F}'))$. Então:

- (i) $\mathcal{A}$ é categoria de módulos sobre uma álgebra A e $(\mathcal{T}', \mathcal{F}')$ é um par de torção dado por um A -módulo inclinante.
- (ii) Existem equivalências triangulares $\mathcal{D}^b(B) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ e $\mathcal{D}^b(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}^b(B)$ cujas restrições a $\mathcal{A}$ correspondem ao funtor identidade.
- (iii) Se, mais ainda, B satisfizer as hipóteses (H1), (H2) e (H3)(i), então será possível determinar um par de torção $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ cindido em $\text{mod } A$.
- (iv) Se B satisfizer as hipóteses (H1), (H2) e (H3), então será possível determinar um par de torção $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ cindido em $\text{mod } A$ tal que $di_A \mathcal{X} \leq 1$ e $dp_A \mathcal{Y} \leq 1$. $\square$

Corolário 4.24. Seja B uma álgebra por partes satisfazendo as hipóteses (H1), (H2) e (H3). Então B é 2-quase inclinada e, em particular, B é hereditária por partes. $\square$

Estão estabelecidas, dessa forma, condições sobre uma álgebra 2-quase hereditária para que seja 2-quase inclinada: segundo o corolário acima, uma álgebra B 2-quase hereditária será 2-quase inclinada se for possível determinar quatro subcategorias de $\text{ind } B$, digamos $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ e $\mathcal{A}_4$, duas a duas disjuntas e cuja união é $\text{ind } B$, satisfazendo a tabela B , tais que $\text{add}(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$ é cogerada por um B -módulo fiel e que cumpram, além disso, as hipóteses (H1), (H2) e (H3).

REFERÊNCIAS

- [AAC⁺10] E. R. Alvares, I. Assem, F. U. Coelho, M. I. Pe na, and S. Trepode, *From trisections in module categories to quasi-directed components*, J. Algebra and its Appl. **10** (2010), no. 3, 409–433. [3](#)
- [AC03] I. Assem and F. U. Coelho, *Two-sided gluings of tilted algebras*, J. Algebra **269**(2) (2003), 456–479.
- [ACPV08] I. Assem, J. A. Cappa, M. I. Platzeck, and M. Verdecchia, *Módulos inclinantes y Álgebras inclinadas*, Notas de Álgebra y Análisis, vol. 21, Universidad Nacional del Sur, Instituto de Matemática, 2008.
- [Alv15] E. R. Alvares, *A course on derived categories*, <http://clezio.net.br/Edson/DerCategory.html>, 2015.
- [ARS95] M. Auslander, I. Reiten, and S. O. Smalø, *Representation theory of artin algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 36, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [ASS06] I. Assem, D. Simson, and A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, London Math. Soc. Student Text, vol. 65, Cambridge Univ. Press, 2006. [7](#), [8](#)
- [Ass07] I. Assem, *Algèbres et modules*, Les Presses de l’Université d’Ottawa, 2007.
- [BB80] S. Brenner and M. C. R. Butler, *Generalization of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors*, Lecture Notes in Math. **832** (1980), 103–169. [1](#)
- [BBD82] A. A. Beilinson, J. Bernstein, and P. Deligne, *Faisceaux pervers*, Astérisque **100** (1982). [1](#), [7](#), [15](#), [16](#), [23](#)
- [Bon81] K. Bongartz, *Tilted algebras*, Proc. of Conference on Representations of Algebras **903** (1981), 26–38.
- [Bon83] ———, *On a result of Bautista and Smalø on cycles*, Comm. Algebra **11** (1983), no. 18, 2123–2124.
- [CH93] J. F. Carlson and D. Happel, *Contravariantly finite subcategories and irreducible maps*, Am. Math. Society **117** (1993), no. 1, 61–65.
- [GL87] W. Geigle and H. Lenzing, *A class of weighted projective curves arising in representation theory of finite dimensional algebras*, Lectures Notes in Math. **1273** (1987), 265–297.

- [Hap87] D. Happel, *On derived category of a finite dimensional algebra*, Comment. Math. Helvetica **62** (1987), 339–389. [1](#)
- [Hap88] ———, *Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras*, London Math. Soc. Lectures Notes Series, vol. 119, Cambridge Univ. Press, 1988. [1](#), [7](#), [9](#), [10](#)
- [Hap01] ———, *A characterization of hereditary categories with tilting object*, Invent. Math. **144** (2001), no. 2, 381–398. [13](#)
- [HHK07] D. Happel, L. A. Hugel, and H. Krause, *Handbook of tilting theory*, London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. 332, Cambridge University Press, 2007. [45](#)
- [Hos82] M. Hoshino, *Tilting modules and torsion theories*, Bull. London Math. Soc. **14** (1982), 334–336.
- [HR81] D. Happel and C. M. Ringel, *Construction of tilted algebras*, Lecture Notes in Math. **903** (1981), 125–144.
- [HR82] ———, *Tilted algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **274** (1982), 399–443.
- [HRS88] D. Happel, J. Rickard, and A. Schofield, *Piecewise hereditary algebras*, Bull. London Math. Soc. **20** (1988), no. 1, 23–28. [14](#)
- [HRS94] D. Happel, I. Reiten, and S. O. Smalø, *Quasitilted algebras*, NATO Advanced Sci. Inst. Ser. C. Math. and Phys. Sci. **424** (1994), 163–182.
- [HRS96a] ———, *Piecewise hereditary algebras*, Arch. Math. **66** (1996), 182–186.
- [HRS96b] ———, *Tilting in abelian categories and quasitilted algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. **575** (1996). [iii](#), [v](#), [1](#), [2](#), [3](#), [17](#), [20](#), [23](#), [24](#), [29](#), [31](#), [33](#), [35](#), [38](#), [39](#), [42](#), [53](#)
- [HS10] D. Happel and U. Seidel, *Piecewise hereditary Nakayama algebras*, Algebras and Representation Theory **13** (2010), no. 6, 693–704.
- [HZ08] D. Happel and D. Zacharia, *A homological characterization of piecewise hereditary algebras*, Math. Z. **260** (2008), no. 1, 177–185.
- [HZ10] ———, *Homological properties of piecewise hereditary algebras*, J. Algebra **323** (2010), 1139–1154. [3](#), [7](#), [14](#)
- [Kel07] B. Keller, *Derived categories and tilting*, Handbook of tilting theory (2007), 49–104.
- [Kra15] H. Krause, *Derived categories, resolutions and Brown representability*, arxiv.org/abs/math/0511047, 2015. [7](#), [12](#), [13](#)
- [KV88a] B. Keller and D. Vossieck, *Aisles in derived categories*, Bull. Soc. Math. Belg. **40** (1988), 239–253. [4](#)
- [KV88b] ———, *Grothendieck-Roos duality and tilting*, C. R. Acad. Sci. Paris **307** (1988), 543–546. [45](#), [48](#)

- [Len07] H. Lenzing, *Hereditary categories*, Handbook of Tilting Theory (2007), 105–146.
- [Mil] D. Milicic, *Lectures on derived categories*, <http://www.math.utah.edu/milicic/Eprints/dercat.pdf>. 7, 10
- [Mor15] O. A. Hernández Morales, *Uma introdução às t -estruturas e aplicações*, Master's thesis, Universidade Federal do Paraná, 2015.
- [Ric89] J. Rickard, *Morita theory for derived categories*, J. London Math. Soc. **39** (1989), no. 3, 436–456. 1, 13
- [RS07] M. J. Redondo and A. Solotar, *Derived categories and their applications*, Revista de la Unión Matemática Argentina **48** (2007), no. 3, 1–26. 7, 13
- [Sei03] U. Seidel, *On tilting complexes and piecewise hereditary algebras*, Master's thesis, Technische Universität Chemnitz, 2003. 39
- [Sko94] A. Skowroński, *The regular Auslander-Reiten components containing directing modules*, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), no. 1. 35
- [Sma84] S. O. Smalø, *Torsion theories and tilting modules*, Bull. London Math. Soc. **16** (1984), 518–522.
- [TLS03] L. A. Tarrío, A. J. López, and M. S. Salorio, *Construction of t -structures and equivalences of derived categories*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), no. 6, 2523–2543. 15