**Produtividade
da compacidade enumerável
em grupos topológicos**

Danilo Dias da Silva

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE
EM
CIÊNCIAS

Programa: **Matemática**

Orientador: **Prof. Dr. Artur Hideyuki Tomita**

Durante a elaboração deste trabalho, o autor recebeu apoio financeiro do CNPq.

– São Paulo, 30 de junho de 2009 –

Produtividade da compacidade enumerável em grupos topológicos

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Danilo Dias da Silva e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 21 de julho de 2009.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Artur Hideyuki Tomita (orientador)

IME-USP

Profa. Dra. Ofelia Teresa Alas

IME-USP

Profa. Dra. Irene Castro

UFPA

Dedico esta dissertação aos meus pais.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço aos professores do IME-USP pela dedicação e pelo profissionalismo. Além do conhecimento matemático transmitido a mim durante os dois anos do mestrado, valorizo o exemplo de profissionais que levam o ensino público a sério, o que reforça minhas convicções.

Agradeço aos alunos de pós-graduação pelo ambiente de companheirismo que encontrei quando cheguei ao IME. Este ambiente foi determinante para a minha escolha de permanecer em São Paulo e fez com que a minha rotina de estudos fosse bem mais leve e divertida.

Agradeço aos meus amigos de Aracaju que dividiram comigo a experiência de morar em São Paulo nestes dois anos e que amenizaram a falta de casa. Infelizmente não poderei citar todos por serem muitos, mas agradeço em especial a Marco e Débora pelo interesse que demonstraram na minha vinda e por toda ajuda que deram para que isto se concretizasse.

Agradeço ao meu orientador Artur, a quem posso chamar de amigo. Obrigado por toda a boa vontade que sempre demonstrou ao me ensinar, pelas conversas e por toda a ajuda durante o mestrado.

Agradeço especialmente aos meus pais e irmãs. Palavras não são suficientes.

Agradeço, por fim, ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

O principal objetivo desta dissertação é estudar a produtividade da compacidade enumerável em grupos topológicos. Vários contra-exemplos foram descritos. Em 1980, E. van Douwen construiu com a ajuda do Axioma de Martin dois grupos topológicos enumeravelmente compactos cujo produto não era enumeravelmente compacto [2]. Em 1991, Hart e van Mill construíram com a ajuda de uma versão enumerável do Axioma de Martin um grupo enumeravelmente compacto, mas cujo quadrado não era [6]. Nesta dissertação, pode-se encontrar os dois exemplos. O conhecimento sobre a não-produtividade da compacidade enumerável foi bastante ampliado recentemente em trabalhos publicados por Tomita [9], [10] e [11]. Exemplos de não-produtividade para o caso quadrado foram encontrados baseados na existência de ultrafiltros seletivos sem o uso do Axioma de Martin [5] e, mais recentemente, exemplos ainda mais elaborados foram obtidos: dado um $k \in \omega$, existe um grupo enumeravelmente compacto G tal que G^k é enumeravelmente compacto, mas G^{k+1} não é [10]; existe um grupo enumeravelmente compacto G tal que G^α é enumeravelmente compacto para todo $\alpha < 2^c$, mas G^{2^c} não é [9]; e finalmente foi obtido um grupo G tal que, dado $\alpha < 2^c$, G^γ é enumeravelmente compacto para todo $\gamma \leq \alpha$, mas G^α não o é [9]. Todos estes contra-exemplos podem ser encontrados nesta dissertação.

Abstract

The main purpose of this work is to study the property of countable compactness in topological groups regarding its productivity. We shall present many counter-examples. In 1980, E. van Douwen produced two countably compact groups whose product is not countably compact from MA [2]. In 1991, Hart e van Mill showed that there exists a countably compact topological group whose square is not countably compact under $\text{MA}_{\text{countable}}$ [6]. One can find both constructions in this work. The knowledge about the non-productivity of countable compactness in topological groups has been increased in published papers by Tomita [9], [10] e [11]. Examples of non-productivity of countable compactness regarding the square of topological groups were found based on selective ultrafilters without the use of MA [5] and, more recently, even more intricate examples were found: given $k \in \omega$, there exists a countably compact group G such that G^k is countably compact, but G^{k+1} is not [10]; there exists a countably compact group G such that G^α is countably compact for all $\alpha < 2^{\mathfrak{c}}$, but $G^{2^{\mathfrak{c}}}$ is not [9]; and finally there exists a countably compact group G such that, given $\alpha < 2^{\mathfrak{c}}$, G^γ is countably compact for all $\gamma \leq \alpha$, but G^α is not [9]. All these counter-examples can be found in this work.

Sumário

Introdução	1
1 Notações, definições e resultados preliminares	4
1.1 Grupos topológicos enumeravelmente compactos	5
1.2 Ultrafiltros seletivos	12
1.3 Ultraprodutos	13
1.4 Famílias independentes e subgrupos ω -limitados.	15
1.5 Axioma de Martin para ordens parciais enumeráveis (MA_e)	17
2 Primeiros contra-exemplos para a produtividade da compacidade enumerável.	19
2.1 Exemplo de van Douwen	19
2.2 Primeiro exemplo de Hart e van Mill	21
2.3 Segundo exemplo de Hart e van Mill	26
3 Grupo enumeravelmente compacto cujo quadrado não é a partir de um grupo de van Douwen.	35
3.1 Preliminares	35
3.2 Construção do grupo de van Douwen	40

3.3	Grupo enumeravelmente compacto cujo quadrado não é enumeravelmente compacto a partir de um grupo de van Douwen de ordem p	45
3.4	Grupo enumeravelmente compacto cujo quadrado não é enumeravelmente compacto a partir de um grupo de van Douwen livre.	53
3.5	Grupo enumeravelmente compacto cujo quadrado não é enumeravelmente compacto a partir de um ultrafiltro seletivo.	56
4	Produto finito de grupos enumeravelmente compactos.	59
5	Produto infinito de grupos enumeravelmente compactos.	68
5.1	Preliminares.	69
5.2	H^γ é enumeravelmente compacto para todo $\gamma < 2^c$, mas H^{2^c} não é.	73
5.3	H^γ é enumeravelmente compacto para todo $\gamma < \alpha$, mas H^α não é ($\omega \leq \alpha < 2^c$).	77
6	Considerações finais	82

Introdução

O estudo da não-produtividade da compacidade enumerável em espaços topológicos começou na década de 1950, quando Terasaka e Novák mostraram que existe um espaço enumeravelmente compacto cujo quadrado não é pseudocompacto. Os casos finito e enumerável foram estudados por Frolík na década de 1960 e o caso não-enumerável por Saks na década de 1970.

Scarbourough e Stone mostraram em 1966 que se $\{X_i : i \in I\}$ é uma família de espaços topológicos, então $\prod_{i \in I} X_i$ é enumeravelmente compacto se, e somente se, $\prod_{j \in J} X_j$ é enumeravelmente compacto para todo $J \subseteq I$ com $|J| \leq 2^c$.

Ginsburg e Saks melhoraram o teorema acima em 1975. Eles mostraram que $\prod_{i \in I} X_i$ é enumeravelmente compacto se, e somente se, $\prod_{j \in J} X_j$ é enumeravelmente compacto para todo $J \subseteq I$ com $|J| \leq 2^c$. Uma questão natural seria se 2^c poderia ser substituído por um cardinal menor.

Saks mostrou em 1979 que 2^c era consistentemente o melhor possível. Ele mostrou que se existem 2^c ultrafiltros seletivos, então existe um espaço enumeravelmente compacto X tal que X^α é enumeravelmente compacto para todo $\alpha < 2^c$, mas X^{2^c} não é.

Comfort e Ross mostraram em 1966 que o produto de grupos pseudocompactos é pseudocompacto. Isto motivou Comfort a perguntar se a compacidade enumerável é produtiva na classe dos grupos topológicos.

O objetivo deste trabalho é apresentar os principais contra-exemplos que foram encontrados para a produtividade da compacidade enumerável em grupos topológicos desde a questão de Comfort.

E. van Douwen respondeu negativamente essa questão no ano de 1980. Ele construiu dois grupos topológicos enumeravelmente compactos cujo produto não era a partir do Axioma de Martin. Essa construção é dividida em duas partes:

(1) (MA) Existe um grupo infinito enumeravelmente compacto sem sequências não-triviais convergentes (grupo de van Douwen) como subgrupo do grupo compacto $2^{\mathfrak{c}}$.

(2) (ZFC) Um grupo enumeravelmente compacto de ordem 2 sem sequências não-triviais convergentes contém dois subgrupos enumeravelmente compactos cujo produto não é enumeravelmente compacto.

Em 1991, também usando o Axioma de Martin Hart e van Mill construíram um grupo topológico enumeravelmente compacto, mas cujo quadrado não era. Este exemplo pode ser encontrado no capítulo 2 desta dissertação. Em 2004, Tomita, Garcia-Ferreira e Watson construíram um grupo de van Douwen a partir de um ultrafiltro seletivo [5]. Em 2005, Tomita obteve a partir de um grupo de van Douwen, um exemplo de grupo enumeravelmente compacto cujo quadrado não era [11]. A construção do grupo de van Douwen e o exemplo podem ser encontrados no capítulo 3. No mesmo ano, usando ultraproductos, Tomita obteve um grupo enumeravelmente compacto G tal que G^k é enumeravelmente compacto, mas G^{k+1} não é. Este resultado foi descrito nesta dissertação com uma demonstração um pouco diferente das encontradas em [10] e [9]. Na secção 5.2 do capítulo 5 foi construído um grupo enumeravelmente compacto G tal que G^α é enumeravelmente compacto para todo $\alpha < 2^{\mathfrak{c}}$, mas $G^{2^{\mathfrak{c}}}$ não é; e finalmente na secção 5.3 foi obtido um grupo G tal que, dado $\alpha < 2^{\mathfrak{c}}$, G^γ é enumeravelmente compacto para todo $\gamma \leq \alpha$, mas G^α não o é. Estes dois últimos exemplos foram obtidos neste trabalho com demonstrações diferentes das encontradas em [9].

As demonstrações dos capítulos 4 e 5 comentadas acima foram obtidas a partir de idéias

do meu orientador Artur Hideyuki Tomita e foram redigidas pelo autor desta dissertação.

Capítulo 1

Notações, definições e resultados preliminares

Neste capítulo, descreveremos as notações, definições e os resultados preliminares que serão utilizados por todo o texto. Notações mais específicas e particulares de um determinado capítulo serão discutidas no início do próprio capítulo para a comodidade do leitor. Estamos assumindo familiariedade do leitor com os conceitos básicos de Topologia Geral como os axiomas de separação, teoria básica de filtros e ultrafiltros e resultados básicos envolvendo compacidade e compacidade enumerável [3] e [12]. Da Teoria dos Conjuntos é assumida familiariedade com a teoria básica de ordinais e cardinais envolvendo conceitos como cofinalidade, cardinais regulares e singulares [7]. Também assumimos conhecimento do leitor sobre a teoria básica da Álgebra Linear e sobre a teoria básica de Grupos Algébricos, como o grupo quociente e o primeiro teorema do isomorfismo [4].

1.1 Grupos topológicos enumeravelmente compactos

Começamos por definir os principais conceitos usados nesta dissertação referentes a grupos topológicos enumeravelmente compactos. A maioria das definições e demonstrações podem ser encontradas em qualquer livro de topologia geral como, por exemplo, em [3] e [12]. Reproduzimos aqui alguns desses conceitos com o objetivo de fixá-los na mente do leitor. Os resultados que puderem ser encontrados facilmente em [3] e [12] não serão demonstrados.

Indicaremos por $\mathcal{P}(X)$ a coleção de todos os subconjuntos de um conjunto X . A união, intersecção e diferença de dois conjuntos serão denotadas, respectivamente, por $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \setminus B$. Definimos então $A \triangle B = A \setminus B \cup B \setminus A$.

Se X é um conjunto e λ é um cardinal, definimos $[X]^\lambda = \{A \in \mathcal{P}(X) : |A| = \lambda\}$, $[X]^{<\lambda} = \{A \in \mathcal{P}(X) : |A| < \lambda\}$ e $[X]^{\leq \lambda} = \{A \in \mathcal{P}(X) : |A| \leq \lambda\}$.

Definição 1.1.1: Um espaço topológico X é enumeravelmente compacto se para toda cobertura enumerável formada por conjuntos abertos do espaço X existe uma subcobertura finita de X .

Analogamente ao caso compacto, a definição de compacidade enumerável é equivalente a afirmação de que toda família enumerável de fechados que possui a propriedade da intersecção finita tem intersecção não-vazia.

Lema 1.1.1: Um espaço topológico X é enumeravelmente compacto se, e somente se, toda sequência em X possui ponto de acumulação.

Definição 1.1.2: Dado um ultrafiltro livre $p \in \omega^*$ e um espaço topológico X , dizemos

que $x \in X$ é o p -limite de $\{x_n : n \in \omega\} \subseteq X$ se para toda vizinhança U de x o conjunto $\{n \in \omega : x_n \in U\}$ é um elemento de p .

Lema 1.1.2: Um espaço topológico X é enumeravelmente compacto se, e somente se, toda sequência em X possui p -limite para algum $p \in \omega^*$.

Demonstração: Suponha que toda sequência em X possui p -limite para algum $p \in \omega^*$ e considere $A \subseteq X$ infinito. Existe $\{x_n : n \in A\} \subseteq A$ com $x_m \neq x_n$, se $n \neq m$. Por hipótese, existe $x \in X$ tal que $x = p - \lim\{x_n : n \in \omega\}$. Se U é vizinhança aberta de x , então $\{n \in \omega : x_n \in U\} \in p$; logo, é infinito. Temos então que $A \cap U$ é infinito e x é ponto de acumulação de A . Por outro lado, seja $\{x_n : n \in \omega\}$ sequência em X . Se existe $a \in X$ tal que $x_n = a$, $\forall n \in A$ conjunto infinito de ω , então tome p ultrafiltro contendo $\{A\} \cup \{\omega \setminus F : F \text{ é finito}\}$. Assim, $p - \lim\{x_n : n \in \omega\} = a$. Seja $B \subseteq \omega$ infinito tal que $x_m \neq x_n$, se $n, m \in B$, $n \neq m$. Temos que $\{\overline{\{x_n : n \in B \setminus F\}} : F \subseteq B \text{ finito}\}$ é família enumerável de fechados que atende a propriedade da intersecção finita. Assim, $\bigcap_{F \in [B]^{<\omega}} \overline{\{x_n : n \in B \setminus F\}} \neq \emptyset$. Seja $x \in \bigcap_{F \in [B]^{<\omega}} \overline{\{x_n : n \in B \setminus F\}}$. Para toda vizinhança aberta V de x e para todo $F \in [B]^{<\omega}$ tem-se $V \cap \{x_n : n \in B \setminus F\} \neq \emptyset$, o que implica em $\{n \in B \setminus F : x_n \in V\} \neq \emptyset$. Temos que $\{\{n \in B \setminus F : x_n \in V\} : F \in [B]^{<\omega} \text{ e } V \text{ vizinhança aberta de } x\}$ atende a propriedade da intersecção finita. Logo, existe ultrafiltro p que contém a família acima e, portanto, $x = p - \lim\{x_n : n \in \omega\}$.

Definição 1.1.3: Um espaço topológico X é p -compacto se toda sequência em X tem p -limite.

Definição 1.1.4: Um grupo é um conjunto G munido de uma operação binária $\cdot : G \times G \longrightarrow G$ tal que:

- i) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, $\forall x, y, z \in G$;
- ii) $\exists e \in G$ (elemento identidade) tal que $x \cdot e = e \cdot x = x$, $\forall x \in G$;

ii) $\forall x \in G$, existe um único x^{-1} tal que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$.

Nesta dissertação denotaremos frequentemente $x \cdot y$ por xy . Dizemos que o grupo G é abeliano quando $xy = yx$, $\forall x, y \in G$. Neste caso, podemos denotar $x \cdot y$ também por $x + y$ e o elemento identidade do grupo por 0 . Como todos os grupos topológicos que aparecem nesta dissertação são abelianos, frequentemente usaremos $+$ como sinal para a operação binária de grupo.

Definição 1.1.5: Dizemos que o grupo abeliano G é abeliano livre quando este possui uma base, ou seja, quando possui um subconjunto gerador que é independente. Neste caso, consideramos que $\{x_\xi : \xi \in \kappa\}$ é independente quando dado $F \in [\kappa]^{<\omega}$ qualquer e $\{n_\xi : \xi \in F\} \subseteq \mathbb{Z}$, temos que $\sum_{\xi \in F} n_\xi x_\xi = 0 \implies n_\xi x_\xi = 0, \forall \xi \in F$.

Definição 1.1.6: Um grupo topológico é um grupo G acompanhado de uma topologia em G tal que a operação binária de grupo $G \times G \longrightarrow G : (x, y) \longmapsto xy$ e a função inversa $G \longrightarrow G : x \longmapsto x^{-1}$ são funções contínuas.

Se X é um conjunto e G é um grupo topológico abeliano, dada uma função $f : X \longrightarrow G$, definimos $\text{supp}(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$. Denotamos $\text{dom}(f)$ pelo domínio da função f . Se $\{x_\xi : \xi < \kappa\}$ é sequência em G e $f \in ([\kappa]^{<\omega})^\omega = \{h : \omega \longmapsto [\kappa]^{<\omega} : h \text{ é função}\}$, então definimos $x_{f(n)} = \sum_{\xi \in f(n)} x_\xi, \forall n \in \omega$. Podemos então considerar a sequência $\{x_{f(n)} : n \in \omega\} \subseteq G$.

O ordinal $2 = \{0, 1\}$ é um grupo topológico abeliano com $0 + 0 = 1 + 1 = 0$ e $0 + 1 = 1 + 0 = 1$, acrescido da topologia discreta. Se X é qualquer conjunto, então 2^X (o conjunto de todas as funções de X em 2) é um grupo topológico compacto quando dada a estrutura de produto de grupos e a topologia de Tychonoff. O elemento identidade deste grupo será a função nula. Esta será representada por 0 , quando não houver perigo

de confusão. Este tipo de grupo topológico booleano aparecerá com frequência nesta dissertação.

Lema 1.1.3: Em um grupo topológico G , se p é ultrafiltro e $\{x_n : n \in \omega\}$, $\{y_n : n \in \omega\}$ são duas seqüências em G tais que $x = p - \lim\{x_n : n \in \omega\}$ e $y = p - \lim\{y_n : n \in \omega\}$, então $x + y = p - \lim\{x_n + y_n : n \in \omega\}$.

Demonstração: Seja V vizinhança qualquer de $x + y$. Como $+$: $G \times G \rightarrow G$ é função contínua temos que $+^{-1}(V)$ é um aberto em $G \times G$. Portanto, existem abertos V_x e V_y de G tais que $x \in V_x$, $y \in V_y$ e $V_x \times V_y \subseteq +^{-1}(V)$ e, portanto, $V_x + V_y \subseteq V$. Como $x = p - \lim\{x_n : n \in \omega\}$ e $y = p - \lim\{y_n : n \in \omega\}$ temos que $A_x = \{n \in \omega : x_n \in V_x\}$ e $A_y = \{n \in \omega : y_n \in V_y\}$ são elementos de p . Daí, $\{n \in \omega : x_n + y_n \in V\} \supseteq \{n \in \omega : x_n + y_n \in V_x + V_y\} \supseteq A_x \cap A_y$ e, portanto, $x + y = p - \lim\{x_n + y_n : n \in \omega\}$.

Lema 1.1.4: Em um grupo topológico G , se p é ultrafiltro e $\{x_n : n \in \omega\}$, $\{y_n : n \in \omega\}$ são duas seqüências em G tais que $x = p - \lim\{x_n : n \in \omega\}$ e $\{n \in \omega : x_n = y_n\} = \Omega \in p$, então $x = p - \lim\{y_n : n \in \omega\}$.

Demonstração: Seja V vizinhança aberta de x . Como $x = p - \lim\{x_n : n \in \omega\}$ temos que existe $A \in p$ tal que $A = \{n \in \omega : x_n \in V\}$. Daí, podemos afirmar que $\{n \in \omega : y_n \in V\} \supseteq A \cap \Omega$, elemento de p . Logo, $x = p - \lim\{y_n : n \in \omega\}$.

Lema 1.1.5: Seja $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ produto infinito de espaços topológicos e p um ultrafiltro qualquer. Se $\{x_n : n \in \omega\}$ é seqüência em $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, então vale $p - \lim\{x_n : n \in \omega\} = x$ se, e somente se, $p - \lim\{\pi_\alpha(x_n) : n \in \omega\} = \pi_\alpha(x)$, $\forall \alpha \in I$, sendo $\pi_\alpha : \prod_{\beta \in I} X_\beta \rightarrow X_\alpha$ a projeção canônica.

Demonstração: Usando o fato de que cada projeção $\pi_\alpha : \prod_{\beta \in I} X_\beta \rightarrow X_\alpha$ é contínua

obtemos a implicação direta. Para obter a implicação inversa usamos o fato de que a intersecção finita de elementos do ultrafiltro ainda é elemento do ultrafiltro. Seja $\{x_n : n \in \omega\}$ sequência em $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ tal que $p - \lim\{\pi_\alpha(x_n) : n \in \omega\} = \pi_\alpha(x), \forall \alpha \in I$. Se V é aberto básico na topologia de Tychonoff em $\prod_{\beta \in I} X_\beta$ tal que $x = (x_\alpha)_{\alpha \in I} \in V$, então existe $F \in [I]^{<\omega}$ tal que $V = \prod_{\beta \in F} V_\beta \times \prod_{\beta \in I \setminus F} X_\beta$, com V_β vizinhança aberta de $x_\beta, \forall \beta \in F$. Como $p - \lim\{\pi_\alpha(x_n) : n \in \omega\} = \pi_\alpha(x) = x_\alpha, \forall \alpha \in I$, temos que $A_\beta = \{n \in \omega : \pi_\beta(x_n) \in V_\beta\} \in p$ para todo β em F . Daí, $\bigcap_{\beta \in F} A_\beta \in p$ e $\{n \in \omega : x_n \in V\} \supseteq \bigcap_{\beta \in F} A_\beta$. Logo, $p - \lim\{x_n : n \in \omega\} = x$.

Provaremos agora um lema que será importante mais adiante na discussão sobre grupos ω -limitados gerado por famílias ω -independentes.

Lema 1.1.6: Em um grupo topológico G , se E é subgrupo de G , então $\overline{E}$ é subgrupo de G .

Demonstração: Dado $x \in \overline{E}$, vamos provar que $x^{-1} \in \overline{E}$. Para isso, considere V vizinhança aberta de x^{-1} . Como a função inversa $G \ni x \mapsto x^{-1}$ é função contínua temos que a imagem inversa dessa vizinhança que chamaremos de V^{-1} é vizinhança aberta de x . Como E é subgrupo temos que $V^{-1} \cap E \neq \emptyset \implies V \cap E \neq \emptyset$ e, portanto, $x^{-1} \in \overline{E}$. Considere agora $x, y \in \overline{E}$ e V vizinhança aberta de $x + y$. Como $+: G \times G \rightarrow G$ é função contínua temos que $+^{-1}(V)$ é um aberto no produto $G \times G$. Podemos tomar V_x, V_y vizinhanças abertas de x e y respectivamente tais que $V_x \times V_y$ está contido em $+^{-1}(V)$. Temos que existem $a, b \in E$ tais que $a \in V_x$ e $b \in V_y$ e como E é grupo temos que $a + b \in (V_x + V_y) \cap E \subseteq V \cap E$. Logo, $x + y \in \overline{E}$.

A partir da definição 1.1.6, se G é grupo topológico e g um elemento fixo de G , então a função constante $x \mapsto g$ e a função identidade $x \mapsto x$ são funções contínuas de G em G . Dessa forma, elas induzem uma função contínua $x \mapsto (g, x)$ de G em $G \times G$. Compondo

esta função com a operação binária de grupo obtemos uma função contínua $l_g : x \mapsto gx$ de G em G , chamada multiplicação pela esquerda (ou translação pela esquerda) por g . Esta função tem inversa $l_{g^{-1}}$, a qual é contínua. Dessa forma, l_g é um homeomorfismo em G . Similarmente, as translações pela direita $r_g : x \mapsto xg$ são homeomorfismos em G . Como consequência, temos que G deve ser um espaço homogêneo, isto é, dados $a, b \in G$ existe um homeomorfismo em G que manda a em b . Com isso, temos que G parece ser topologicamente o mesmo em todos os pontos. Como consequência temos o:

Lema 1.1.7: Seja G um grupo topológico e $x \in G$ um ponto isolado. Então, G é discreto.

Vamos agora a um lema que usaremos frequentemente no capítulo 2 para provar que um determinado grupo não é enumeravelmente compacto. Geralmente este grupo é construído para ser enumerável, gerando uma contradição ao supormos enumeravelmente compacto. O lema é posto aqui na sua forma geral, para espaços topológicos, pois não faz uso das propriedades de grupo topológico.

Lema 1.1.8: Seja X um espaço topológico infinito, regular, enumeravelmente compacto. Então X tem cardinalidade $\geq 2^\omega$.

Demonstração: Como X é infinito e regular podemos tomar dois pontos x_0 e x_1 em X separados por abertos disjuntos A_0 e A_1 cujos fechos F_0 e F_1 sejam ainda disjuntos. Em cada aberto devemos ter pelo menos dois pontos, pois caso contrário, teríamos um ponto isolado no grupo topológico X . Pelo lema anterior, teríamos que o grupo X seria discreto, o que contradiz o fato de X ser enumeravelmente compacto, uma vez que X é infinito. Considere, sem perda de generalidade, o caso A_0 . Teremos, então, dois pontos x_{00} e x_{01} em A_0 , e como X é regular, podemos obter dois abertos disjuntos A_{00} e A_{01} cujos fechos F_{00} e F_{01} sejam ainda disjuntos, com $x_{00} \in A_{00}$, $x_{01} \in A_{01}$ e $F_{00} \cup F_{01} \subseteq F_0$. Novamente, podemos

em cada aberto obtido tomar dois pontos distintos e continuar o processo por indução até encontrarmos 2^ω cadeias de fechados da forma $F_{y_1} \supseteq F_{y_2} \supseteq F_{y_3} \supseteq \dots \supseteq F_{y_n} \supseteq \dots$, com $y_n : n \mapsto 2$, $\forall n \geq 1$, e $y_n = y_m \upharpoonright n$, se $n \leq m$. Como X é enumeravelmente compacto, teremos que cada cadeia enumerável de fechados tem intersecção não vazia e tomando um ponto em cada intersecção temos que esses pontos deverão ser dois a dois distintos. Logo, existem pelo menos 2^ω pontos distintos em X e segue-se o lema.

Definição 1.1.7: Um grupo topológico G é grupo de van Douwen se, e somente se, é abeliano, infinito, enumeravelmente compacto e sem sequências não-triviais convergentes.

Lema 1.1.9: Seja G um grupo de van Douwen regular. Então, toda sequência em G tem pelo menos $\mathfrak{c}$ pontos de acumulação.

Demonstração: Seja $\{x_n : n \in \omega\}$ sequência 1-1 em G . Como G é enumeravelmente compacto e não possui sequências não triviais convergentes temos que a sequência $X = \{x_n : n \in \omega\}$ possui dois pontos de acumulação x_0 e x_1 em G que podem ser separados por abertos disjuntos A_0 e A_1 cujos fechos F_0 e F_1 sejam ainda disjuntos. Cada aberto determina uma subsequência de $\{x_n : n \in \omega\}$. Para cada subsequência $X \cap A_i$, podemos aplicar mesmo argumento usado anteriormente. Se $s \in \omega^\omega$, então definimos $X_{s \upharpoonright n} = X \cap A_{s \upharpoonright 0} \cap \dots \cap A_{s \upharpoonright n}$. Como G é enumeravelmente compacto temos que $\bigcap_{n \in \omega} \overline{X_{s \upharpoonright n}} \neq \emptyset$. Tomamos então $x_s \in \bigcap_{n \in \omega} \overline{X_{s \upharpoonright n}}$, ponto de acumulação de $\{x_n : n \in \omega\}$. Basta mostrar agora que se $s \neq r$, então $x_s \neq x_r$. Se $s \neq r$, então existe $m \in \omega$ tal que $s(m) \neq r(m)$. Pela construção, sabemos que $A_{s \upharpoonright m+1} \cap A_{r \upharpoonright m+1} = \emptyset$ e que os fechos de $A_{s \upharpoonright m+1}$ e $A_{r \upharpoonright m+1}$ são ainda disjuntos. Daí, temos que $x_s \neq x_r$ pois, caso contrário, teríamos o mesmo ponto sendo ponto de acumulação de $A_{s \upharpoonright m+1}$ e $A_{r \upharpoonright m+1}$.

1.2 Ultrafiltros seletivos

Aqui, relembramos algumas propriedades de ultrafiltros seletivos incomparáveis que serão necessários para provar o lema 3.1.1, o qual será usado na construção de um grupo de van Douwen na secção 3.2.

Definição 1.2.1: Dados $p, q \in \omega^*$, dizemos que $p \leq_{RK} q$ se existe uma função $f : \omega \rightarrow \omega$ tal que $\beta f(q) = p$, onde βf é a extensão de Stone-Cech de f . A pré-ordem $\leq_{RK}$ em ω^* é chamada ordem de Rudin-Keisler.

Lema 1.2.1: Os ultrafiltros p e q são equivalentes na ordem de Rudin-Keisler se existe uma bijeção $f : \omega \rightarrow \omega$ tal que $\beta f(p) = q$.

Ultrafiltros seletivos são os ultrafiltros minimais na ordem de Rudin-Keisler. Listamos abaixo propriedades equivalentes que usaremos nesta dissertação. As demonstrações dessas equivalências podem ser encontradas em [1].

Lema 1.2.2: As propriedades seguintes são equivalentes para $p \in \omega^*$:

- i) p é minimal na ordem de Rudin-Keisler;
- ii) p é seletivo, ou seja, para cada $f : \omega \rightarrow \omega$ existe $A \in p$ tal que $f \upharpoonright A$ é constante ou 1-1;
- iii) se $\{P_n : n \in \omega\}$ é partição de ω , então existe $m \in \omega$ tal que $P_m \in p$ ou existe $B \in p$ tal que $|B \cap P_n| = 1$ para cada $n \in \omega$;
- iv) para cada partição $P_0 \cup P_1 = [\omega]^2$ existem $D \in p$ e $j \in \{0, 1\}$ tais que $[D]^2 \subseteq P_j$.

Lema 1.2.3: Todo ultrafiltro seletivo é um P -ponto, isto é, se $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq p$, então existe $A \in p$ tal que $A \setminus A_n$ é finito, $\forall n \in \omega$.

Demonstração: Faça $B_0 = \omega$ e $B_n = \bigcap_{i \leq n} A_i$, $\forall n \in \omega$. Temos então que $B_0 \supseteq B_1 \supseteq \dots \supseteq B_n \supseteq \dots$ e que $B_n \in p$, $\forall n \in \omega$. Isto induz uma partição em ω : $C_n = B_n \setminus B_{n+1}$, $\forall n \in \omega$. Como B_{n+1} pertence ao ultrafiltro, temos que C_n não pertence ao ultrafiltro, $\forall n \in \omega$. Logo, pelo item iii) do lema anterior, existe $A \in p$ tal que $|A \cap C_n| = 1$ para cada $n \in \omega$. Daí, $A \setminus A_n \subseteq \bigcup_{m < n} A \cap C_m$ é finito, $\forall n \in \omega$.

A existência de ultrafiltros seletivos é independente dos axiomas usuais da teoria dos conjuntos: existem 2^c ultrafiltros seletivos com o uso da hipótese do contínuo ou do axioma de Martin e Shelah demonstrou com o uso de forcing que existem modelos sem P-pontos - em particular, sem ultrafiltros seletivos.

1.3 Ultraprodutos

Ultraprodutos foram definidos por Łoś em 1955. Nesta dissertação, obteremos um grupo de van Douwen G usando um ultrafiltro seletivo e relacionando as sequências em G aos elementos do ultraproduto $([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega / p$. O ultraproduto será usado como espaço vetorial sobre o corpo $\{0, 1\}$ e com a operação Δ , diferença simétrica de conjuntos. Por $\vec{F}$, denotaremos a função em $([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega$ que é constante igual a $F \in [\mathfrak{c}]^{<\omega}$. Se α é ordinal, usaremos $\vec{\alpha}$ no lugar de $\{\vec{\alpha}\}$. Definiremos agora o ultraproduto que necessitamos para essa dissertação.

Primeiramente, observe que dadas duas funções $f, g \in ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega$ e $p \in \omega^*$, $f \sim g \iff \{n \in \omega : f(n) = g(n)\} \in p$ define uma relação de equivalência. Temos então:

Definição 1.3.1: Seja $p \in \omega^*$:

a) Dadas duas funções $f, g \in ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega$, dizemos que f e g são p -equivalentes se, e somente se, o conjunto $\{n \in \omega : f(n) = g(n)\} \in p$;

b) A classe p-equivalente de f , $[f]_p$, é o conjunto de todos os elementos p-equivalentes de f ;

c) Denote por $([c]^{<\omega})^\omega / p$ o conjunto de todas as classes p-equivalentes. Se $f, g \in ([c]^{<\omega})^\omega$, defina $[f]_p \triangle [g]_p$ como a classe $[f \triangle g]_p$, em que $(f \triangle g)(n) = f(n) \triangle g(n)$, $\forall n \in \omega$.

Lema 1.3.1: Seja p um elemento de ω^* :

a) O conjunto $([c]^{<\omega})^\omega / p$ com a operação $\triangle$ é um espaço vetorial sobre 2;

b) Uma família $\{[g_\alpha]_p : \alpha \in I\}$ de classes p-equivalentes de $([c]^{<\omega})^\omega / p$

i) é linearmente independente se, e somente se, para todo $F \in [I]^{<\omega}$ existe $A \in p$ tal que $\triangle(\{g_\alpha(n) : \alpha \in F\}) \neq \emptyset$, $\forall n \in A$;

ii) gera o espaço vetorial $([c]^{<\omega})^\omega / p$ se, e somente, se para todo $g \in ([c]^{<\omega})^\omega$ existe $A \in p$ e $F \in [I]^{<\omega}$ tais que $g(n) = \triangle(\{g_\alpha(n) : \alpha \in F\})$, $\forall n \in A$.

Demonstração: a) Defina o elemento neutro da adição como a função $\vec{0} : \omega \mapsto [c]^{<\omega}$ tal que $\vec{0}(n) = \emptyset$, $\forall n \in \omega$, e a multiplicação por escalar $0 \cdot [f]_p = \vec{0}$ e $1 \cdot [f]_p = [f]_p$. O elemento inverso da adição de $[f]_p$ será $[f]_p$.

b) - i) Se $\{[g_\alpha]_p : \alpha \in I\}$ é l.i., então dado $F \in [I]^{<\omega}$ devemos ter $\triangle_{\alpha \in F}([g_\alpha]_p) \neq [\vec{0}]_p$, ou seja, $\{n \in \omega : \triangle_{\alpha \in F}(g_\alpha(n)) = \emptyset\} \notin p$. Como p é ultrafiltro, temos que $A = \{n \in \omega : \triangle_{\alpha \in F}(g_\alpha(n)) \neq \emptyset\} \in p$.

Por outro lado, suponha, por contradição que existe $F \in [I]^{<\omega}$ tal que $\triangle_{\alpha \in F}([g_\alpha]_p) = [\vec{0}]_p$. Logo, existe $B \in p$ tal que $B = \{n \in \omega : \triangle_{\alpha \in F}(g_\alpha(n)) = \emptyset\}$.

Mas por hipótese, temos que $A = \{n \in \omega : \triangle_{\alpha \in F}(g_\alpha(n)) \neq \emptyset\} \in p$. Assim, $A \cap B = \emptyset \in p$, o que é absurdo.

ii) Basta notar que $\{n \in \omega : g(n) = \triangle(\{g_\alpha(n) : \alpha \in F\})\} \in p$ se, e somente se, $[g]_p = \triangle(\{[g_\alpha]_p : \alpha \in F\})$.

Agora consideremos um resultado que será importante na construção do grupo de van

Douwen usado nesta dissertação.

Lema 1.3.2: Seja $p \in \omega^*$ ultrafiltro seletivo. Então,

$$([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega / p = \{[f]_p : f \in ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega \text{ é injetora}\} \cup \{[\vec{F}]_p : F \in [\mathfrak{c}]^{<\omega}\}.$$

Demonstração: Se $g \in ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega$, então como a imagem de g é enumerável, com o uso de uma bijeção entre a imagem de g e ω podemos pelo item ii) do Lema 1.2.2 encontrar $A \in p$ tal que $g \restriction A$ é constante ou injetora.

1.4 Famílias independentes e subgrupos ω -limitados.

No capítulo 2, precisaremos de uma família ω -independente de tamanho $\mathfrak{c}$ em $\mathfrak{c}$.

Definição 1.4.1: $\mathcal{A}$ é uma família ω -independente de tamanho $\mathfrak{c}$ em $\mathfrak{c}$ se $\mathcal{A}$ é uma família de subconjuntos de $\mathfrak{c}$ satisfazendo: se $\mathcal{A}', \mathcal{A}'' \in [\mathcal{A}]^{\leq \omega}$ são disjuntos, então $|\bigcap \mathcal{A}' \setminus \bigcup \mathcal{A}''| = \mathfrak{c}$.

Tais famílias existem e um fácil exemplo pode ser obtido como se segue:

Exemplo 1.4.1: Para $\alpha \in \mathfrak{c}$, considere o conjunto $A_\alpha = \{F \in [\mathfrak{c} \times \mathfrak{c}]^{\leq \omega} : F \cap (\{\alpha\} \times \mathfrak{c}) \neq \emptyset\}$. Então, fazemos $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\} \subseteq [\mathfrak{c} \times \mathfrak{c}]^{\leq \omega}$, conjunto de cardinalidade $\mathfrak{c}$. Temos que $\mathcal{A}$ satisfaz

$$\text{se } K \in [\mathfrak{c}]^{\leq \omega}, \text{ então } \left| \bigcap_{\alpha \in K} A_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{c} \setminus K} A_\alpha \right| = \mathfrak{c}.$$

Vê-se facilmente que $\mathcal{A}$ satisfaz a definição, já que dados $\mathcal{A}', \mathcal{A}'' \in [\mathcal{A}]^{\leq \omega}$ disjuntos, podemos fazer $K = \{\alpha \in \mathfrak{c} : A_\alpha \in \mathcal{A}'\}$ que teremos $\{\alpha \in \mathfrak{c} : A_\alpha \in \mathcal{A}''\} \subseteq \mathfrak{c} \setminus K$. Também é claro que $\mathcal{A}$ não foi construído em $\mathfrak{c}$, mas em $[\mathfrak{c} \times \mathfrak{c}]^{\leq \omega}$, conjunto de cardinalidade $\mathfrak{c}$.

Considere agora $\mathcal{B}$, família ω -independente de tamanho $\mathfrak{c}$ em um conjunto X qualquer. Podemos indentificar $\mathcal{B}$ com o seu conjunto de funções características $\mathcal{X}_B : X \mapsto 2$, com $B \in \mathcal{B}$. Assim, podemos pensar em $\mathcal{B}$ como contido no grupo 2^X . Seja $G = \langle \mathcal{B} \rangle$, o grupo gerado por $\mathcal{B}$. Considere

$$\begin{aligned} G^+ &= \bigcup \{ \overline{E} : E \in [G]^{\leq \omega} \} \\ &= \bigcup \{ \overline{E} : E \in [G]^{\leq \omega} \text{ e } E \text{ é subgrupo de } G \}. \end{aligned}$$

Vale a igualdade acima, pois se $E \in [G]^{\leq \omega}$, então $\langle E \rangle$, subgrupo gerado por E , ainda será enumerável e é claro que $\overline{E} \subseteq \overline{\langle E \rangle}$. Dessa forma, G^+ é subgrupo de 2^X e temos que se $E \subseteq G^+$ é enumerável, então $\overline{E} \subseteq G^+$. Segue-se que G^+ é ω -limitado, ou seja, G^+ é espaço topológico tal que se $E \subseteq G^+$ é enumerável, então $\overline{E}$ é compacto em G^+ . É fácil provar que G^+ é o menor subgrupo ω -limitado de 2^X que contém $\mathcal{B}$. Isto leva à definição abaixo.

Definição 1.4.2: Seja $\mathcal{B}$ família ω -independente de tamanho $\mathfrak{c}$ em um conjunto X qualquer e $G = \langle \mathcal{B} \rangle$, o grupo gerado por $\mathcal{B}$ em 2^X . Definimos $G^+ = \bigcup \{ \overline{E} : E \in [G]^{\leq \omega} \}$ como o subgrupo ω -limitado gerado por $\mathcal{B}$.

Nas secções 2 e 3 do capítulo 2, precisaremos de dois resultados sobre famílias ω -independentes que colocaremos sob a forma de dois lemas.

Lema 1.4.1: Seja G^+ é o subgrupo ω -limitado gerado pela família ω -independente $\mathcal{B}$ e $x \in G^+ \setminus \{0\}$. Então, podemos obter $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in [\mathcal{B}]^{\leq \omega}$ tais que $\bigcap \mathcal{B}_0 \setminus \bigcup \mathcal{B}_1 \subseteq \text{supp}(x) \subseteq \bigcup \mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_0 \cap \mathcal{B}_1 = \emptyset$.

Demonstração: Seja $E \subseteq G = \langle \mathcal{B} \rangle$ enumerável tal que $x \in \overline{E}$. Para cada $e \in E$, existe um subconjunto finito $F_e \subseteq \mathcal{B}$ tal que $e = \sum_{B \in F_e} B$. Faça $\mathcal{B}_2 = \{F_e : e \in E\}$. Agora, se

$\alpha \notin \bigcup \mathcal{B}_2$, então $e(\alpha) = 0$, $\forall e \in E$. Como $x \in \overline{E}$, temos que $x(\alpha) = 0$. Portanto, $\text{supp}(x) \subseteq \bigcup \mathcal{B}_2$. Por outro lado, escolha $\alpha \in \text{supp}(x)$. O conjunto $U = \{y \in 2^X : y(\alpha) = 1\}$ é uma vizinhança de x em 2^X e, portanto, $x \in \overline{U \cap E}$. Para $e \in U \cap E$, faça $F_e^+ = \{B \in F_e : \alpha \in B\}$ e $F_e^- = F_e \setminus F_e^+$. Temos então que se $\mathcal{B}_0 = \bigcup \{F_e^+ : e \in U \cap E\}$ e $\mathcal{B}_1 = \bigcup \{F_e^- : e \in U \cap E\}$, então $\alpha \in \bigcap \mathcal{B}_0 \setminus \bigcup \mathcal{B}_1$. Agora, seja $\gamma \in \bigcap \mathcal{B}_0 \setminus \bigcup \mathcal{B}_1$ e $e \in U \cap E$. Então, $B \in F_e^+$ implica em $\gamma \in B$ e $B \in F_e^-$ implica em $\gamma \notin B$. Segue-se que $e(\gamma) = e(\alpha) = 1$. Como $x \in \overline{U \cap E}$, temos também que $x(\gamma) = 1$. Logo, $\bigcap \mathcal{B}_0 \setminus \bigcup \mathcal{B}_1 \subseteq \text{supp}(x)$.

Lema 1.4.2: Seja $\mathcal{B}$ uma família ω -independente em $\mathfrak{c}$. Para cada $B \in \mathcal{B}$, seja X_B subconjunto de $\mathfrak{c}$ tal que $|X_B \triangle B| < \mathfrak{c}$. Então, $\{X_B : B \in \mathcal{B}\}$ é ω -independente.

Demonstração: Se $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}'' \subseteq \mathcal{B}$ são famílias enumeráveis e disjuntas, faça $I = \bigcup_{B \in \mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''} X_B \triangle B$. Então, como a cofinalidade de $\mathfrak{c}$ é maior do que ω e $|\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''| = \omega$ temos que $|I| < \mathfrak{c}$. Logo, $(\bigcap_{B \in \mathcal{B}'} X_B \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{B}''} X_B) \setminus I = (\bigcap \mathcal{B}' \setminus \bigcup \mathcal{B}'') \setminus I$ tem cardinalidade $\mathfrak{c}$.

1.5 Axioma de Martin para ordens parciais enumeráveis ($\mathbf{MA}_e$)

Nesta dissertação, usaremos uma forma enumerável do Axioma de Martin - que denotaremos por $\mathbf{MA}_e$, na construção de um subgrupo de $2^{\mathfrak{c}}$ que provará ser útil na obtenção de dois subgrupos enumeravelmente compactos cujo produto não é enumeravelmente compacto. Ainda, poderemos com a ajuda do $\mathbf{MA}_e$ construir um subgrupo de $2^{\mathfrak{c}} \times 2^{\mathfrak{c}}$ que será útil na construção de um grupo topológico enumeravelmente compacto H cujo quadrado não é enumeravelmente compacto. Estes exemplos podem ser encontrados no capítulo 2. O leitor que se interessar pela versão geral do Axioma de Martin ($\mathbf{MA}$) pode consultar [7]. Vamos ao enunciado de $\mathbf{MA}_e$:

Definição 1.5.1 ($\mathbf{MA}_e$): Se P é uma ordem parcial enumerável e se $\mathcal{D}$ é uma coleção de cardinalidade menor que $\mathfrak{c}$ de conjuntos densos em P , então existe um filtro G em P que intersecta todo elemento de $\mathcal{D}$.

Aqui, um conjunto $D \subseteq P$ é denso se, e somente se, para todo $p \in P$, existe $q \in D$ tal que $q \leq p$. Um conjunto $G \subseteq P$ é filtro se, e somente se, para todo $p \in G$ e $q \in P$, $p \leq q \implies q \in G$ e se para todo $p, q \in G$, existe $r \in G$ tal que $r \leq p$ e $r \leq q$.

Nesta dissertação, devemos usar $\mathbf{MA}_e$ com ordens parciais que são subconjuntos de $Fn(I, x)$, com I enumerável e x finito. Aqui,

$$Fn(I, x) = \{p : \text{dom}(p) \in [I]^{<\omega} \text{ e } \text{Im}(p) \subseteq x\},$$

ordenada por inclusão inversa: $p \leq q \iff p \supseteq q$. Neste caso, um conjunto D é denso se cada p tem uma extensão $q \in D$, e um conjunto G é um filtro se é fechado com relação a tomar restrições e se para dois elementos quaisquer $p, q \in G$, existe uma função $r \in G$ que estende p e q . Se G é filtro, então $\bigcup G$ é uma função. Temos que $D_i = \{p : i \in \text{dom}(p)\}$ é denso, $\forall i \in I$. Neste caso, se $G \cap D_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$, então $\text{dom}(\bigcup G) = I$.

Capítulo 2

Primeiros contra-exemplos para a produtividade da compacidade enumerável.

Neste capítulo podem ser encontrados os primeiros contra-exemplos mais importantes para a produtividade da compacidade enumerável em grupos topológicos. Todos os exemplos neste capítulo dependem de alguma versão do Axioma de Martin (**MA**).

2.1 Exemplo de van Douwen

Na secção 3.1 do próximo capítulo construiremos um grupo de van Douwen booleano. Vamos utilizar este grupo nesta secção antes de construí-lo por uma questão histórica: o exemplo de dois grupos enumeravelmente compactos H_0 e H_1 cujo produto $H_0 \times H_1$ não é enumeravelmente compacto obtido por van Douwen em [2] usava como hipótese a existência

do grupo de van Douwen, que foi obtido em [2] com a ajuda do Axioma de Martin. A construção do grupo de van Douwen booleano que aparece na secção 3.1 do próximo capítulo foi obtida posteriormente em [5] usando como hipótese apenas a existência de um ultrafiltro seletivo. Optamos por não apresentar a construção do grupo de van Douwen usando o Axioma de Martin, mas por outro lado apresentamos a construção do exemplo para efeito comparativo com as técnicas mais elaboradas que se seguiram.

Lema 2.1.1: Seja H um grupo de van Douwen booleano. Então, existem subgrupos enumeravelmente compactos H_0 e H_1 de H tais que $|H_0 \cap H_1| = \omega$.

Demonstração: Defina uma coleção de ordinais $\{\sigma_\alpha : \alpha \leq \mathfrak{c}\}$ tais que $\sigma_0 = \omega$, $\sigma_{\alpha+1} = \sigma_\alpha + |\sigma_\alpha|$, $\forall \alpha < \mathfrak{c}$, e $\sigma_\lambda = \sup_{\alpha < \lambda} \sigma_\alpha$, quando $\lambda \leq \mathfrak{c}$ é ordinal limite. Note que $\sigma_\alpha < \mathfrak{c}$, $\forall \alpha < \mathfrak{c}$, uma vez que $\sigma_\alpha < \kappa$ para $\alpha < \kappa$, se $\kappa \leq \mathfrak{c}$ é regular. Note também que $\sigma_\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$. Enumere $[\mathfrak{c}]^\omega$ como $\{I_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ de tal forma que $I_\alpha \subseteq \sigma_\alpha$, $\forall \alpha < \mathfrak{c}$.

Construiremos duas sequências estritamente crescentes $\{H_{i,\alpha} : \alpha \leq \mathfrak{c}\}$, $\forall i \in 2$, de subgrupos de H . Nossos H_0 e H_1 serão ao final $H_{0,\mathfrak{c}}$ e $H_{1,\mathfrak{c}}$. Cada $H_{i,\alpha}$ será indexado por $H_{i,\alpha} = \{y_{i,\xi} : \xi \in \sigma_\alpha\}$. Estas sequências deverão satisfazer as seguintes condições:

- (1) se $\xi < \eta < \sigma_\alpha$, então $y_{i,\xi} \neq y_{i,\eta}$, $\forall i \in 2$, $\forall \alpha \leq \mathfrak{c}$;
- (2) $H_{0,\alpha} \cap H_{1,\alpha} = H_{0,0}$, $\forall \alpha \leq \mathfrak{c}$ (Isto assegura que $|H_0 \cap H_1| = \omega$);
- (3) $\{y_{i,\xi} : \xi \in I_\alpha\}$ tem ponto de acumulação em $H_{i,\alpha+1}$, $\forall \alpha < \mathfrak{c}$ (Isto assegura que H_0 e H_1 serão enumeravelmente compactos).

A construção e o indexamento de $H_{0,\lambda}$ e $H_{1,\lambda}$ para o caso λ ordinal limite $\leq \mathfrak{c}$, incluindo $\lambda = 0$, é direta. Pois, se $\alpha < \lambda$, então σ_α é conhecido e daí temos definidos $\sigma_\lambda = \sup_{\alpha < \lambda} \sigma_\alpha$ e $H_{i,\lambda} = \{y_{i,\xi} : \xi \in \sigma_\lambda\}$.

Agora, seja $\alpha < \mathfrak{c}$ e assumamos conhecido $H_{i,\alpha}$. Para todo $i < 2$, tome um ponto de acumulação c_i de $\{y_{i,\xi} : \xi \in I_\alpha\}$ tal que $c_0 \notin H_{0,\alpha} + H_{1,\alpha}$ e $c_1 \notin \{0, c_0\} + H_{0,\alpha} + H_{1,\alpha}$, onde $\{0, c_0\}$ é subgrupo do grupo booleano H . Isto é possível, uma vez que $|\sigma_\alpha| < \mathfrak{c}$ e

$\{y_{i,\xi} : \xi \in I_\alpha\}$ é infinito pelo item (1) e, portanto, tem pelo menos $\mathfrak{c}$ pontos de acumulação, de acordo com o lema 1.1.8.

Defina $H_{i,\alpha+1} = \{0, c_i\} + H_{i,\alpha}$, $\forall i < 2$.

Uma vez que $|H_{i,\alpha}| = |\sigma_\alpha|$ e $c_i \notin H_{i,\alpha}$, teremos $|H_{i,\alpha+1} - H_{i,\alpha}| = |c_i + H_{i,\alpha}| = |\sigma_\alpha|$, $\forall i < 2$. Portanto, $H_{i,\alpha+1} - H_{i,\alpha}$ pode ser indexado, sem repetições, por $\{y_{i,\alpha} : \sigma_\alpha \leq \xi \leq \sigma_{\alpha+1}\}$. Isto cuida do item (1).

Para o item (2), observe que $(c_0 + H_{0,\alpha}) \cap H_{1,\alpha} = \emptyset$, já que $c_0 \notin H_{0,\alpha} + H_{1,\alpha}$ e $H_{0,\alpha+1} \cap (c_1 + H_{1,\alpha}) = \emptyset$, pois $c_1 \notin H_{0,\alpha+1} + H_{1,\alpha}$. Portanto, $H_{0,\alpha+1} \cap H_{1,\alpha+1} = H_{0,\alpha+1} \cap H_{1,\alpha} = H_{0,\alpha} \cap H_{1,\alpha} = H_{0,0}$.

Finalmente, está claro que vale (3). Isto completa a construção.

Exemplo 2.1.1: Seja H um grupo de van Douwen booleano. Então, existem subgrupos enumeravelmente compactos H_0 e H_1 de H tais que $H_0 \times H_1$ não é enumeravelmente compacto.

Demonstração: Suponha, por contradição, que $H_0 \times H_1$ é enumeravelmente compacto. Sabemos que $H_0 \times H_1$ possui um subgrupo fechado infinito enumerável, chamado "diagonal": $\Delta = \{(x, y) \in H_0 \times H_1 : x = y\} = \{(x, x) : x \in H_0 \cap H_1\}$. Este é fechado, pois H é Hausdorff. Teremos então que Δ será enumeravelmente compacto. Mas de acordo com o lema 1.1.8 não existe grupo topológico infinito enumerável que seja enumeravelmente compacto. Logo, $H_0 \times H_1$ não pode ser enumeravelmente compacto.

2.2 Primeiro exemplo de Hart e van Mill

Este exemplo encontra-se originalmente em [6]. Usando a versão enumerável do Axioma de Martin ($\mathbf{MA}_e$) descrita no capítulo 1 são construídos dois subgrupos enumeravelmente

compactos H_0 e H_1 de $2^{\mathfrak{c}}$ tais que $H_0 \times H_1$ não é enumeravelmente compacto. Para esta secção, denotaremos por $\underline{0}$ a função nula $\underline{0} : \mathfrak{c} \longrightarrow 2$ que leva todo ordinal $\xi \in \mathfrak{c}$ no zero. O próximo lema é responsável por construir 3 subgrupos D , G_0 e G_1 de $2^{\mathfrak{c}}$ tais que $H_0 = D + G_0$ e $H_1 = D + G_1$.

Lema 2.2.1: ($\mathbf{MA}_e$) Existem 3 subgrupos D , G_0 e G_1 de $2^{\mathfrak{c}}$ que satisfazem:

- (i) D é enumerável;
- (ii) G_0 e G_1 são ω -limitados;
- (iii) $G_0 \cap G_1 = \{\underline{0}\} = D \cap (G_0 + G_1)$;
- (iv) se $E \subseteq D$ é infinito então E possui pontos de acumulação em G_0 e G_1 .

(Na verdade, $\mathbf{MA}_e$ é usado somente na construção de D).

Demonstração: Do exemplo 1.4.1 das preliminares tomamos nossa família $\mathcal{A}$ ω -independente em $\mathfrak{c}$ e a particionamos em duas famílias disjuntas $\mathcal{A}_0$ e $\mathcal{A}_1$ de tamanho $\mathfrak{c}$. Enumeramos essas famílias como $\{A_\alpha^0 : \omega \leq \alpha < \mathfrak{c}\}$ e $\{A_\alpha^1 : \omega \leq \alpha < \mathfrak{c}\}$ respectivamente, sem repetições.

Enquanto construimos D devemos modificar um pouco os conjuntos A_α^0 e A_α^1 a fim de obter conjuntos B_α^0 e B_α^1 tais que $|B_\alpha^i \triangle A_\alpha^i| < \mathfrak{c}$ para todo α e i . Faremos $\mathcal{B}_i = \{B_\alpha^i : \omega \leq \alpha < \mathfrak{c}\}$ ($i \in 2$) e $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1$. Pelo lema 1.4.1, $\mathcal{B}$ ainda será ω -independente. Finalmente, faremos G_0 e G_1 subgrupos ω -limitados de $2^{\mathfrak{c}}$ gerados por $\mathcal{B}_0$ e $\mathcal{B}_1$, respectivamente.

Vejam como cuidamos do item (iii). Tome $x \in G_0 \setminus \{\underline{0}\}$ e $y \in G_1 \setminus \{\underline{0}\}$. Pelo lema 1.4.2, existem K , L e M subconjuntos enumeráveis de $[\omega, \mathfrak{c})$ tais que $\bigcap_{\alpha \in K} B_\alpha^0 \setminus \bigcup_{\alpha \in L} B_\alpha^0 \subseteq \text{supp}(x)$ e $\text{supp}(y) \subseteq \bigcup_{\alpha \in M} B_\alpha^1$. Mas então, $\bigcap_{\alpha \in K} B_\alpha^0 \setminus (\bigcup_{\alpha \in L} B_\alpha^0 \cup \bigcup_{\alpha \in M} B_\alpha^1)$ tem cardinalidade $\mathfrak{c}$ - já que $\mathcal{B}$ é ω -independente e $L \cup M$ é enumerável, e está contido em $\text{supp}(x) \setminus \text{supp}(y)$. Segue-se que $G_0 \cap G_1 = \{\underline{0}\}$.

Agora, veremos do que necessitamos para fazer $D \cap (G_0 + G_1) = \{\underline{0}\}$. Primeiramente,

observe que $G_0 + G_1$ é o subgrupo ω -limitado de $2^{\mathfrak{c}}$ gerado por $\mathcal{B}$. De fato, se G é o menor subgrupo ω -limitado que contém $\mathcal{B}$ então G deve conter $G_0 + G_1$: se $g_0 + g_1 \in G_0 + G_1$, considere E_0 e E_1 pertencentes a $[\langle \mathcal{B}_0 \rangle]^{\leq \omega}$ e $[\langle \mathcal{B}_1 \rangle]^{\leq \omega}$ respectivamente, com $g_0 \in \overline{E_0}$ e $g_1 \in \overline{E_1}$. Como $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}$, temos que E_0 e E_1 pertencem a $[\langle \mathcal{B} \rangle]^{\leq \omega}$ de forma que g_0 e g_1 pertencem ao subgrupo G , donde $g_0 + g_1 \in G$. Logo, como $G_0 + G_1$ é subgrupo ω -limitado temos que $G = G_0 + G_1$. Agora, se $x \in (G_0 + G_1) \setminus \{0\}$ então pelo lema 1.4.2, existe uma subfamília enumerável $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ com $\text{supp}(x) \subseteq \mathcal{B}'$. Assim, uma condição suficiente para $D \cap (G_0 + G_1) = \{0\}$ seria que para todo $d \in D \setminus \{0\}$ e para todo $\mathcal{B}' \in [\mathcal{B}]^{\leq \omega}$ tenhamos $\text{supp}(d) \setminus \bigcup \mathcal{B}' \neq \emptyset$. Entretanto, nós saberemos somente quem é $\mathcal{B}$ no final da construção do subgrupo D , de forma que precisaremos de uma outra condição suficiente envolvendo $\mathcal{A}$. Considere a condição:

(v) para todo $d \in D \setminus \{0\}$ e para todo $\mathcal{A}' \in [\mathcal{A}]^{\leq \omega}$ temos $|\text{supp}(d) \setminus \bigcup \mathcal{A}'| = \mathfrak{c}$.

Pois, se $\mathcal{A}'$ é subfamília enumerável de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}'$ a subfamília de $\mathcal{B}$ correspondente, faça $I = \bigcup_{A \in \mathcal{A}'} A \triangle B_A$, onde B_A é tal que $B_A \in \mathcal{B}'$ e $|A \triangle B_A| < \mathfrak{c}$. Então, como a cofinalidade de $\mathfrak{c}$ é maior do que ω e $|\mathcal{A}'| = \omega$ temos que $|I| < \mathfrak{c}$. Logo, $|\text{supp}(d) \setminus \bigcup \mathcal{A}'| = \mathfrak{c}$ implica em $|\text{supp}(d) \setminus \bigcup \mathcal{A}'| \setminus I| = \mathfrak{c}$ e, portanto, $\text{supp}(d) \setminus \bigcup \mathcal{B}' \neq \emptyset$.

Finalmente, descreveremos como será o subconjunto D . Primeiramente, definimos o subconjunto $I = \{x \in 2^\omega : \text{supp}(x) \text{ é finito}\} \subseteq 2^\omega$ que indexará o subgrupo D . Assim, faremos na construção abaixo $D = \{d_x : x \in I\}$ de tal forma que para todo $x \in I$, $d_x \restriction \omega = x$ e para todo $x, y \in I$, $d_x + d_y = d_{x+y}$, o que garante que D será subgrupo. Dessa forma, já temos os itens (i) e (ii) e já indicamos como chegaremos ao item (iii) através de (v).

Para o item (iv), enumeraremos $[I]^\omega$ como $\{E_\alpha : \omega \leq \alpha < \mathfrak{c}\}$. Durante a nossa construção do subgrupo D tomaremos no passo α um ponto de acumulação y_α de $\{d_x \restriction \alpha : x \in E_\alpha\}$ e faremos $B_\alpha^i = y_\alpha \cup A_\alpha^i \restriction [\alpha, \mathfrak{c})$, $\forall i \in 2$. Durante o resto da construção de D asseguraremos que B_α^0 e B_α^1 serão pontos de acumulação de $\{d_x : x \in E_\alpha\}$. Além disso, temos que cuidar do

item (v). Neste caso, considere $\{(x_\alpha, \mathfrak{C}_\alpha) : \omega \leq \alpha < \mathfrak{c}\}$, enumeração de $\{(x, \mathfrak{C}) : x \in I \setminus \{0\}, \mathfrak{C} \in [\mathcal{A}]^{<\omega}\}$ tal que para cada $(x, \mathfrak{C})$, o conjunto $\{\alpha : (x_\alpha, \mathfrak{C}_\alpha) = (x, \mathfrak{C}) \text{ e } \alpha \notin \bigcup \mathfrak{C}\}$ tem cardinalidade $\mathfrak{c}$. O item (v) será satisfeito se fizermos $d_{x_\alpha}(\alpha) = 1$ para todo $\alpha \in [\omega, \mathfrak{c})$.

A construção de D . Construiremos $D \restriction \alpha = \{d_x \restriction \alpha : x \in I\}$ por indução em $\alpha \in [\omega, \mathfrak{c})$. Ao final, faremos $d_x = d_x \restriction \mathfrak{c}$ e $D = \{d_x : x \in I\}$. Em cada estágio, uma vez que $D \restriction \alpha$ é determinado tomaremos $y_\alpha \in 2^\alpha$, ponto de acumulação de $\{d_x \restriction \alpha : x \in E_\alpha\}$ e faremos, como prometido, $B_\alpha^i = y_\alpha \cup A_\alpha^i \restriction [\alpha, \mathfrak{c})$, $\forall i \in 2$.

Nossas hipóteses de indução são:

- (0) $\forall x \in I, d_x \restriction \omega = x$;
- (1) $\forall x, y \in I, d_x \restriction \alpha + d_y \restriction \alpha = d_{x+y} \restriction \alpha$ e $\forall x \in I, d_x \restriction \beta \subseteq d_x \restriction \alpha$;
- (2) se $\omega \leq \beta < \alpha$, então $d_{x_\beta}(\beta) = 1$;
- (3) se $\omega \leq \beta < \alpha$, então $B_\beta^0 \restriction \alpha$ e $B_\beta^1 \restriction \alpha$ são pontos de acumulação de $\{d_x \restriction \alpha : x \in E_\beta\}$.

Se $\alpha = \omega$, então $d_x \restriction \omega = x$ ($x \in I$) e $D \restriction \omega = \{d_x \restriction \omega : x \in I\}$. Se $\alpha > \omega$ é ordinal limite, então faremos $d_x \restriction \alpha = \bigcup_{\omega \leq \beta < \alpha} d_x \restriction \beta$ para todo $x \in I$. Verifica-se facilmente que valem os itens (1) e (2) para este caso. Para o item (3), tome $F \in [\alpha]^{<\omega}$ e $\beta \in \alpha$ quaisquer e $\gamma \in \mathfrak{c}$ tal que $F \subseteq \gamma$ e $\beta < \gamma$. Pelo item (3) aplicado a γ , existe $x_i \in E_\beta$ tal que $d_{x_i} \restriction F = B_\beta^i \restriction F$ e $d_{x_i} \restriction \gamma \neq B_\beta^i \restriction \gamma$, $\forall i \in 2$. Logo, $d_{x_i} \restriction F = B_\beta^i \restriction F$ e $d_{x_i} \restriction \alpha \neq B_\beta^i \restriction \alpha$, $\forall i \in 2$, e está provado o item (3).

Considere agora o caso $\alpha \implies \alpha + 1$. Temos que definir $d_x(\alpha)$ para todo $x \in I$. O item (1) diz que a função $\phi : x \mapsto d_x(\alpha)$ deve ser um homomorfismo de I em 2. O item (2) diz que devemos ter $\phi(x_\alpha) = 1$. Para o item (3) necessitamos que $\forall \beta \in [\omega, \alpha], F \in [\alpha + 1]^{<\omega}$ e $i \in 2$, o conjunto $\{x \in E_\beta : d_x \restriction F = B_\beta^i \restriction F\}$ seja infinito. Se $\alpha \notin F$ isto é satisfeito, pois $B_\beta^i \restriction F$ é ponto de acumulação de $\{d_x \restriction \alpha : x \in E_\beta\}$, por hipótese de indução. Dessa forma, seja $F \in [\alpha]^{<\omega}$ e considere $F \cup \{\alpha\}$. Então, $d_x \restriction (F \cup \{\alpha\}) = B_\beta^i \restriction (F \cup \{\alpha\})$ é equivalente a $d_x \restriction F = B_\beta^i \restriction F$ e $\phi(x) = B_\beta^i(\alpha)$ de forma que a seguinte expressão deve ser satisfeita na

construção de D :

(*) se $\beta \in [\omega, \alpha]$, $F \in [\alpha + 1]^{<\omega}$ e $i \in 2$, então o conjunto $\{x \in E_\beta : d_x \upharpoonright F = B_\beta^i \upharpoonright F \text{ e } \phi(x) = B_\beta^i(\alpha)\}$ é infinito.

Obteremos esta expressão através de $\mathbf{MA}_e$ aplicado ao conjunto enumerável parcialmente ordenado $\mathbf{P} = \{p \in Fn(I, 2) : \text{dom}(p) \text{ é subgrupo finito de } I, p \text{ é homomorfismo, } x_\alpha \in \text{dom}(p) \text{ e } p(x_\alpha) = 1\}$, ordenado pela inclusão inversa. Para todo $x \in I$, $A_x = \{p : x \in \text{dom}(p)\}$ é denso em $\mathbf{P}$: se $x \notin \text{dom}(p)$, então podemos tomar $p' \leq p$ tal que $\text{dom}(p') = \langle \text{dom}(p) \cup \{x\} \rangle$ e $p'(x) = 0$. Assim, se $\mathcal{G}$ é filtro em $\mathbf{P}$ que intersecta todo A_x , então $\phi = \bigcup \mathcal{G}$ é um homomorfismo em I que satisfaz $\phi(x_\alpha) = 1$. Para termos (*), precisaremos de mais conjuntos densos: $\forall \beta \in [\omega, \alpha]$, $F \in [\alpha]^{<\omega}$, $i \in 2$ e $n \in \omega$ faça $A(\beta, F, i, n) = \{p : |\{x \in \text{dom}(p) : x \in E_\beta; d_x \upharpoonright F = B_\beta^i \upharpoonright F \text{ e } p(x) = B_\beta^i(\alpha)\}| \geq n\}$. Temos que $A(\beta, F, i, 0) = \mathbf{P}$ e que se $p \in A(\beta, F, i, n)$, então existe $p' \leq p$ tal que $p' \in A(\beta, F, i, n+1)$. De fato, se $p \in A(\beta, F, i, n)$ então como $\{x \in E_\beta; d_x \upharpoonright F = B_\beta^i \upharpoonright F\}$ é infinito, podemos tomar x neste conjunto com $x \notin \text{dom}(p)$ e $p' \leq p$ tal que $\text{dom}(p') = \langle \text{dom}(p) \cup \{x\} \rangle$. Mas daí, $p' \in A(\beta, F, i, n+1) \subseteq A(\beta, F, i, n)$ e teremos que cada $A(\beta, F, i, n)$ é denso, como queríamos. Como a cardinalidade dos conjuntos densos é $|\alpha| < \mathfrak{c}$, podemos aplicar $\mathbf{MA}_e$ a $\mathbf{P}$, obtendo um filtro $\mathcal{G}$ em $\mathbf{P}$ que intersecta cada A_x e cada $A(\beta, F, i, n)$. Então, $\phi = \bigcup \mathcal{G}$ é um homomorfismo e satisfaz (*). Isto completa a construção de D .

Exemplo 2.2.1: Existem dois subgrupos enumeravelmente compactos H_0 e H_1 de $2^\mathfrak{c}$ tais que $H_0 \times H_1$ não é enumeravelmente compacto.

Demonstração: Se tivermos D , G_0 e G_1 como descrito pelos itens acima então faremos $H_0 = D + G_0$ e $H_1 = D + G_1$.

(a) H_0 e H_1 são enumeravelmente compactos. Seja $i \in \{0, 1\}$ e seja $I = \{d_n + g_n : n \in \omega\} \subseteq H_i$ infinito. Se $\{d_n : n \in \omega\}$ é finito, então do fato de que G_i

é ω -limitado segue-se que $Cl_{H_i}I$ é compacto, de forma que I possui ponto de acumulação em H_i . Se $\{d_n : n \in \omega\}$ é infinito, seja $g \in G_i$ ponto de acumulação. Tome $p \in \omega^*$ tal que $g = p - \lim\{d_n : n \in \omega\}$. Então como G_i é ω -limitado temos que $\overline{\{g_n : n \in \omega\}}$ é compacto em G_i e, portanto, $\{g_n : n \in \omega\}$ possui p-limite $h \in G_i$. Como o p-limite da soma termo a termo de seqüências é igual a soma dos p-limites temos que $g + h \in G_i$ é ponto de acumulação de I em H_i .

(b) $H_0 \times H_1$ não é enumeravelmente compacto. Pelo item (iii), temos que $D \cap (G_0 + G_1) = \{0\}$ e $G_0 \cap G_1 = \{0\}$ de forma que $H_0 \cap H_1 = D + G_0 \cap D + G_1 = D$. Com efeito, se $d_0 + g_0 = d_1 + g_1 \in D + G_0 \cap D + G_1$, então $d_0 - d_1 = g_1 - g_0 \in D \cap (G_0 + G_1) = \{0\}$. Daí, $g_1 = g_0 \in G_0 \cap G_1 = \{0\}$ donde $d_0 + g_0 = d_0 \in D$. Assim, a diagonal $\{(x, x) : x \in 2^c\}$ restrita ao subespaço $H_0 \times H_1$ é fechada neste subespaço e é igual a $\{(d, d) : d \in D\}$, conjunto enumerável. Supondo, por contradição, que $H_0 \times H_1$ seja enumeravelmente compacto teremos que $\{(d, d) : d \in D\}$ será enumeravelmente compacto, o que entraria em contradição com o lema 1.1.8.

2.3 Segundo exemplo de Hart e van Mill

O próximo exemplo encontra-se originalmente também em [6]. Aqui construiremos um grupo enumeravelmente compacto H tal que H^2 não é enumeravelmente compacto. A construção é basicamente a mesma da secção anterior, mas com uma notação mais "carregada". Descreveremos agora como deverá ser esse grupo.

Para um conjunto de ordinais x façamos $\bar{x} = x \times 2$ e considere a função $\bar{\rho} : \bar{\tau} \mapsto \bar{\tau}$ definida por $\bar{\rho}(\alpha, i) = (\alpha, 1 - i)$. Esta induz um automorfismo ρ de $2^{\bar{\tau}}$. Veremos que H pode ser considerado um subgrupo de $2^c \times 2^c$ contendo $H_0 \times \{0\}$ e $\{0\} \times H_1$, em que H_0 e H_1 são

parecidos com os da construção anterior. A notação ficará mais "enxuta" se trabalharmos em $2^{\bar{c}}$ em vez de $2^c \times 2^c$. Desta vez H será $D + G_0 + G_1 + G_2$ e H_i será $D + G_i$, $\forall i \in 2$, com D subgrupo de $2^{\bar{c}}$ enumerável e G_0, G_1 e G_2 subgrupos ω -limitados de $2^{\bar{c}}$. Para $i \in 2$, faça $K_i = \{x \in 2^{\bar{c}} : \text{supp}(x) \subseteq c \times \{i\}\}$. Chame $D_i = D \cap K_i$, $\forall i \in 2$. Faremos $D = D_0 + D_1$ e $D_1 = \rho(D_0)$. Além disso, teremos $G_i \subseteq K_i$ e $H_i \subseteq K_i$, $\forall i \in 2$. Da mesma forma que na construção anterior, cada $E \subseteq D$ infinito terá ponto de acumulação em $G_0 + G_1 + G_2$ fazendo com que $H = D + G_0 + G_1 + G_2$ seja enumeravelmente compacto. Teremos também $G_1 \cap \rho(G_0) = \{0\}$ e $D \cap (G_0 + G_1) = \{0\}$ e isso, como veremos adiante, implicará que $H_0 \times H_1$ não é enumeravelmente compacto. Como H_0 e H_1 são fechados em H , teremos que $H_0 \times H_1$ será fechado em H^2 e, portanto, H^2 não poderá ser enumeravelmente compacto. Usaremos G_i para conter os pontos de acumulação de D_i , $\forall i \in 2$, e G_2 para conter os pontos de acumulação dos conjuntos infinitos de $D \setminus (D_0 \cup D_1)$.

Lema 2.3.1 (MA_e): Existem 4 subgrupos D, G_0, G_1 e G_2 de $2^{\bar{c}}$ que satisfazem:

- (i) D é enumerável e $D_1 = \rho(D_0)$;
- (ii) G_0, G_1 e G_2 são ω -limitados, com $G_i \subseteq K_i$, $\forall i \in 2$;
- (iii) $G_1 \cap \rho(G_0) = \{0\} = D \cap (G_0 + G_1 + G_2)$;
- (iv) se $E \subseteq D$ é infinito, então E possui pontos de acumulação em $D + G_0 + G_1 + G_2$.

MA_e é usado novamente somente na construção de D .

Demonstração: Seja $\mathcal{A}$ família ω -independente em c . Partiremos $\mathcal{A}$ em 4 famílias ω -independentes disjuntas de tamanho c , $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3$. Definimos $\mathcal{A}_0^+ = \{A \times \{0\} : A \in \mathcal{A}_0\}$, $\mathcal{A}_1^+ = \{A \times \{1\} : A \in \mathcal{A}_1\}$ e $\mathcal{A}_i^+ = \{A \times 2 : A \in \mathcal{A}_i\}$, $i = 2, 3$. Como na construção anterior, indentificamos cada $A \in \mathcal{A}_0^+ \cup \mathcal{A}_1^+ \cup \mathcal{A}_2^+ \cup \mathcal{A}_3^+$ com sua função característica em $2^{\bar{c}}$.

Seja $I = \{x \in 2^{\bar{c}} : \text{supp}(x) \text{ é finito}\}$ e $\forall i \in 2$ seja $I_i = \{x \in I : \text{supp}(x) \subseteq \omega \times \{i\}\}$. Vê-se que $I = I_0 + I_1$ e que cada $x \in I$ é escrito de forma única como $x_0 + x_1$, com $x_0 \in I_0$

e $x_1 \in I_1$. Assim, faremos $D = \{d_x : x \in I\}$ e $D_i = \{d_x : x \in I_i\}$, $\forall i \in 2$, na construção abaixo.

Para ver para quais subconjuntos infinitos $E \subseteq D$ nós teremos que prover pontos de acumulação, considere $E \subseteq I$ infinito. Poderemos ter 3 opções mais simples: (i) $E \cap I_0$ é infinito, o que fará com que $\{d_x : x \in E \cap I_0\}$ tenha ponto de acumulação em G_0 , na construção abaixo; (ii) $E \cap I_1$ é infinito, o que fará com que $\{d_x : x \in E \cap I_1\}$ tenha ponto de acumulação em G_1 ; (iii) para um número infinito de $x \in E$, x é simétrico ($x = \rho(x)$), e neste caso G_2 conterá o ponto de acumulação. Se nenhum dos casos acima acontecer, então sem perda de generalidade $\forall x \in E$, $x_0, x_1, x + \rho(x) \neq 0$. Ainda neste caso, poderemos ter um subconjunto infinito $E' \subseteq E$ e um $a \in I$ tal que (iv) $\forall x \in E'$, $x_0 = a$; (v) $\forall x \in E'$, $x_1 = a$ ou (vi) $\forall x \in E'$, $x + \rho(x) = a$. Nos casos (iv) ou (v), $d_a + g$ será ponto de acumulação de $\{d_x : x \in E'\}$, onde g é ponto de acumulação de $\{d_x + d_a : x \in E'\}$. De fato, tome como exemplo o caso $x_0 = a$, $\forall x \in E'$. Temos que $\forall x \in E'$ $d_x = d_{x_0} + d_{x_1} = d_a + d_{x_1}$. Somando d_a a ambos os lados da equação temos que $d_x + d_a = d_{x_1}$, $\forall x \in E'$. Pelo caso (ii) acima, $\exists g \in G_1$ ponto de acumulação de $\{d_x + d_a : x \in E'\}$. Segue-se $d_a + g$ será ponto de acumulação de $\{d_x : x \in E'\}$. No caso (vi), tome $E'' \subseteq E'$ infinito e $b \in I$ tal que $\forall x \in E''$, $x \cap (x + \rho(x)) = b$. Então, $x = b + (x \cap \rho(x))$, $\forall x \in E''$, e $d_b + g$ é ponto de acumulação de $\{d_x : x \in E''\}$ onde $g \in G_2$ é ponto de acumulação de $\{x \cap \rho(x) : x \in E''\}$ (do caso (iii)).

Finalmente, se (iv), (v) e (vi) não ocorrerem obteremos um subconjunto infinito $E' \subseteq E$ tal que

$$(*) \quad \forall x, y \in E' \quad x \neq y \implies x_0 \neq y_0, x_1 \neq y_1 \text{ e } x + \rho(x) \neq y + \rho(y).$$

Concluimos que será suficiente prover pontos de acumulação para $\{d_x : x \in E\}$ nos casos $E \subseteq I_0$, $E \subseteq I_1$, cada $x \in E$ é simétrico e E satisfaz (*). Enumeraremos todos os conjuntos importantes para a construção de D :

$$-\{A_\alpha^i : \omega \leq \alpha < \mathfrak{c}\}, \text{ enumeração de } \mathcal{A}_i^+ \text{ sem repetições } (i \in 4),$$

- $\{E_\alpha^i : \omega \leq \alpha < \mathfrak{c}\}$, enumeração de $[I_i]^\omega (i \in 2)$,
 - $\{E_\alpha^2 : \omega \leq \alpha < \mathfrak{c}\}$, enumeração de $\{E \in [I]^\omega : E \text{ é simétrico}\}$,
 - $\{E_\alpha^3 : \omega \leq \alpha < \mathfrak{c}\}$, enumeração de $\{E \in [I]^\omega : E \text{ satisfaz } (*)\}$,
 - $\{(x_\alpha, \mathfrak{C}_\alpha) : \omega \leq \alpha < \mathfrak{c}\}$, enumeração de $(I \setminus \{0\}) \times [\mathcal{A}]^{\leq \omega}$ de forma que para cada $(x, \mathfrak{C})$ o conjunto $\{\alpha : (x_\alpha, \mathfrak{C}_\alpha) = (x, \mathfrak{C}) \text{ e } \alpha \notin \bigcup \mathfrak{C}\}$ tem cardinalidade $\mathfrak{c}$ ($D \cap (G_0 + G_1 + G_2) = \{0\}$).

Vamos agora à construção de D . Por indução em $\alpha \in [\omega, \mathfrak{c}]$, construímos $D \restriction \bar{\alpha} = \{d_x \restriction \bar{\alpha} : x \in I\}$ satisfazendo:

(0) $\forall x \in I, d_x \restriction \bar{\omega} = x$; se $\omega \leq \beta < \alpha$, então $d_x \restriction \bar{\beta} \subseteq d_x \restriction \bar{\alpha}$; e $\forall x, y \in I, d_x \restriction \bar{\alpha} + d_y \restriction \bar{\alpha} = d_{x+y} \restriction \bar{\alpha}$;

(1) $\forall x \in I_i, \text{supp}(d_x) \cap \bar{\alpha} \subseteq \alpha \times \{i\}, \forall i \in 2$;

(2) $\forall x \in I, d_{\rho(x)} \restriction \bar{\alpha} = \rho(d_x \restriction \bar{\alpha})$;

(3) se $\omega \leq \beta < \alpha$, então $d_{x_\beta}(\beta, 0) = 1$ se $x_\beta \notin I_1$ ou $d_{x_\beta}(\beta, 1) = 1$ se $x_\beta \notin I_0$.

O item (1) será responsável por garantir que $D_i = \{d_x : x \in I_i\}, \forall i \in 2$, e o item (0) que D seja subgrupo de $2^{\bar{\mathfrak{c}}}$. O item (2) será responsável por fazer $\rho(D_0) = D_1$. Já o item (3), como na construção anterior, será responsável por cuidar que $D \cap (G_0 + G_1 + G_2) = \{0\}$. Uma vez que tenhamos $D \restriction \bar{\alpha}$, podemos tomar para $i = 0, 1, 2, 3$ um ponto de acumulação x_α^i para $\{d_x \restriction \bar{\alpha} : x \in E_\alpha^i\}$ em $2^{\bar{\mathfrak{c}}}$. Daí, para $i \in 4$ podemos fazer $B_\alpha^i = x_\alpha^i \cup A_\alpha^i \restriction [\alpha, \mathfrak{c}]$. Note que $B_\alpha^i \in K_i, \forall i \in 2$, uma vez que x_α^i é ponto de acumulação de uma sequência em K_i e $A_\alpha^i \in \mathcal{A}_i^+ = \{A \times \{i\} : A \in \mathcal{A}_i\} \subseteq K_i$. Queremos também que para $i = 0, 1, 2, 3$ tenhamos :

(4) se $\omega \leq \beta < \alpha$, então $B_\beta^i \restriction \bar{\alpha}$ é ponto de acumulação de $\{d_x \restriction \bar{\alpha} : x \in E_\beta^i\}, \forall i \in 4$.

Vamos à construção por indução propriamente dita:

Para o caso $\alpha = \omega$, faça $d_x \restriction \bar{\omega} = x, x \in I$, e $D \restriction \bar{\omega} = I$. Temos que os itens (3) e (4) valem de forma vazia e os itens (0), (1) e (2) são prontamente verificados com

x no lugar de d_x . Se α é ordinal limite, faça $d_x \upharpoonright \bar{\alpha} = \bigcup_{\omega \leq \beta < \alpha} d_x \upharpoonright \bar{\beta}$, $\forall x \in I$. Para a igualdade $d_x \upharpoonright \bar{\alpha} + d_y \upharpoonright \bar{\alpha} = d_{x+y} \upharpoonright \bar{\alpha}$ do item (0), por exemplo, tome $\gamma < \alpha$. Teremos que $d_x(\gamma, i) + d_y(\gamma, i) = d_{x+y}(\gamma, i)$, pois o item (0) vale para $d_x \upharpoonright \bar{\beta}$ com $\gamma < \beta < \alpha$. Daí, $\forall \gamma < \alpha$ e $i \in 2$ temos que vale a igualdade anterior e, portanto, $d_x \upharpoonright \bar{\alpha} + d_y \upharpoonright \bar{\alpha} = d_{x+y} \upharpoonright \bar{\alpha}$. Para os outros itens vale raciocínio semelhante.

Agora, considere o passo sucessor $\alpha \implies \alpha + 1$. Como na construção anterior, faremos uso de um homomorfismo ϕ para definir $d_x(\alpha, 0)$ e $d_x(\alpha, 1)$ para todo $x \in I$. Dessa vez o homomorfismo terá a forma $\phi : I \longmapsto 2^2$. Queremos que

$$\phi(\rho(x))(0) = \phi(x)(1) \text{ e } \phi(\rho(x))(1) = \phi(x)(0) \text{ para que valha o item (2),}$$

$$\phi(x)(1) = 0 (x \in I_0) \text{ e } \phi(x)(0) = 0 (x \in I_1) \text{ para o item (1),}$$

$$\phi(x_\alpha)(0) = 1 \text{ se } x_\alpha \notin I_1 \text{ e } \phi(x_\alpha)(1) = 1 \text{ se } x_\alpha \notin I_0 \text{ para o item (3).}$$

Usamos então o conjunto parcialmente ordenado enumerável:

$\mathbf{P} = \{p \in Fn(I, 2^2) : \text{dom}(p) \text{ é subgrupo finito de } I, p \text{ é homomorfismo, se } x \in \text{dom}(p), \text{ então } x_0, x_1, \rho(x) \in \text{dom}(p), p(x_0)(1) = p(x_1)(0) = 0 \text{ e } p(\rho(x))(i) = p(x)(1 - i) (i \in 2); x_\alpha \in \text{dom}(p) \text{ e } x_\alpha \notin I_0 \implies p(x_\alpha)(1) = 1, x_\alpha \notin I_1 \implies p(x_\alpha)(0) = 1\}$, ordenado pela inclusão inversa.

Seja $x \in I$ e $\mathcal{A}_x = \{p \in \mathbf{P} : x \in \text{dom}(p)\}$. Para mostrar que $\mathcal{A}_x$ é denso, considere o grupo F_x gerado por $\{x_0, x_1, \rho(x_0), \rho(x_1)\}$. Temos que encontrar $p' \leq p$ com $\text{dom}(p') = \text{dom}(p) + F_x$, pois na definição de $\mathbf{P}$ exigimos que $(**)$ se $x \in \text{dom}(p)$, então $x_0, x_1, \rho(x) \in \text{dom}(p)$. Considerando que $x \notin \text{dom}(p)$, as exigências sobre o $\text{dom}(p)$ feitas na definição de $\mathbf{P}$ implicam em 4 possibilidades - (I), (II), (III) e (IV) abaixo, para $F_x \cap \text{dom}(p)$.

(I) Podemos ter que $F_x \cap \text{dom}(p) = \{0\}$, e neste caso podemos fazer $p'(x_i)(0) = p'(x_i)(1) = 0, \forall i \in 2$, que $p'(x) = p'(x_0) + p'(x_1)$ e $p'(\rho(x)) = \rho(p'(x))$ estarão também

determinados.

Se considerarmos a possibilidade $x_0 \in F_x \cap \text{dom}(p)$, então teremos que $\rho(x_0) \in F_x \cap \text{dom}(p)$ e $x_0 + \rho(x_0) \in F_x \cap \text{dom}(p)$, por (**). Perceba que $\{\underline{0}, x_0, \rho(x_0), x_0 + \rho(x_0)\}$ forma um subgrupo. Perceba também que $x_1 \notin F_x \cap \text{dom}(p)$, pois caso contrário $x_0 + x_1 = x$ estaria em $F_x \cap \text{dom}(p)$. Também não podemos ter $\rho(x_1) \in F_x \cap \text{dom}(p)$, pois do contrário teríamos $\rho(\rho(x_1)) = x_1 \in F_x \cap \text{dom}(p)$. Temos também que $x_1 + \rho(x_1) \in F_x \cap \text{dom}(p) \implies x_0 + x_1 + \rho(x_1) \in F_x \cap \text{dom}(p) \implies x + \rho(x_1) \in F_x \cap \text{dom}(p) \implies x_1 \in F_x \cap \text{dom}(p)$, por (**). Usando raciocínio semelhante podemos excluir todas as outras possibilidades de elementos de F_x que possam estar também em $\text{dom}(p)$, quando $x_0 \in \text{dom}(p)$ e $x \notin \text{dom}(p)$. Daí, se $x_0 \in F_x \cap \text{dom}(p)$ teremos obrigatoriamente que:

(II) $F_x \cap \text{dom}(p) = \{\underline{0}, x_0, \rho(x_0), x_0 + \rho(x_0)\}$, e neste caso podemos fazer $p'(x_1)(0) = p'(x_1)(1) = 0$, que $p'(x) = p'(x_0) + p'(x_1)$ e $p'(\rho(x)) = \rho(p'(x))$ estarão também determinados.

Com um raciocínio análogo ao anterior temos o

(III) $F_x \cap \text{dom}(p) = \{\underline{0}, x_1, \rho(x_1), x_1 + \rho(x_1)\}$, e neste caso podemos fazer $p'(x_0)(0) = p'(x_0)(1) = 0$.

Finalmente, se $x_0 + \rho(x_1) \in F_x \cap \text{dom}(p)$, então $\rho(x_0 + \rho(x_1)) = \rho(x_0) + x_1 \in F_x \cap \text{dom}(p)$ e $x_0 + \rho(x_1) + \rho(x_0) + x_1 = x + \rho(x) \in F_x \cap \text{dom}(p)$. Vemos facilmente que $\{\underline{0}, x_0 + \rho(x_1), x_1 + \rho(x_0), x + \rho(x)\}$ forma um subgrupo. Usando dos mesmos raciocínios para o caso (ii) vemos que estes são os únicos elementos de F_x que podem estar em $\text{dom}(p)$, uma vez que $x_0 + \rho(x_1)$ pertença a $F_x \cap \text{dom}(p)$ e $x \notin \text{dom}(p)$. Daí,

(IV) $F_x \cap \text{dom}(p) = \{\underline{0}, x_0 + \rho(x_1), x_1 + \rho(x_0), x + \rho(x)\}$, e neste caso $\varepsilon = p(x + \rho(x))$ é simétrico, já que vale $p(\rho(x))(i) = p(x)(1-i)$, $\forall i \in 2$. Temos que $\varepsilon(0) = \varepsilon(1) = j$. Podemos fazer $p'(x_0)(0) = j$, $p'(x_0)(1) = 0$ e $p'(x_1)(0) = 0$. Temos que $p'(x_1)(1) = p'(\rho(x_1))(0) =$

$$p'(x_0 + \rho(x_1))(0) + p'(x_0)(0).$$

Assim, se $\mathcal{G}$ é filtro em $\mathbf{P}$ que intersecta todos os $\mathcal{A}_x$, então $\phi = \bigcup \mathcal{G}$ é homomorfismo que satisfaz os itens (0), (1), (2) e (3). Para o item (4), devemos atender à condição:

se $\beta \in [\omega, \alpha]$, $F \in [\overline{\alpha+1}]^{<\omega}$ e $i \in 4$, então o conjunto $\{x \in E_\beta^i : d_x \restriction F = B_\beta^i \restriction F\}$ é infinito.

Se $(\alpha, 0) \notin F$ e $(\alpha, 1) \notin F$, isto é satisfeito, pois $B_\beta^i \restriction F$ é ponto de acumulação de $\{d_x \restriction \alpha : x \in E_\beta\}$, por hipótese de indução. Dessa forma, seja $F \in [\overline{\alpha}]^{<\omega}$ e considere $F \cup \{\overline{\alpha}\}$. Então, $d_x \restriction (F \cup \{\overline{\alpha}\}) = B_\beta^i \restriction (F \cup \{\overline{\alpha}\})$ é equivalente a $d_x \restriction F = B_\beta^i \restriction F$ e $\phi(x)(j) = B_\beta^i(\alpha, j)$, $\forall j \in 2$. Considere os seguintes conjuntos: se $\beta \in [\omega, \alpha]$, $F \in [\overline{\alpha}]^{<\omega}$, $i \in 4$ e $n \in \omega$ seja $A(\beta, F, i, n)$ o conjunto

$$\{p : |\{x \in \text{dom}(p) : x \in E_\beta^i, d_x \restriction F = B_\beta^i \restriction F, \phi(x)(j) = B_\beta^i(\alpha, j), \forall j \in 2\}| \geq n\}.$$

Então, $A(\beta, F, i, 0) = \mathbf{P}$ e se $p \in A(\beta, F, i, n)$, então existe $p' \leq p$ com $p' \in A(\beta, F, i, n+1)$:

$i = 0, 1$: Tome $x \in E_\beta^i$ com $d_x \restriction F = B_\beta^i \restriction F$ e $x \notin \text{dom}(p)$. Isto é possível, pois o conjunto $\{x \in E_\beta : d_x \restriction F = B_\beta^i \restriction F\}$ é infinito e $\text{dom}(p)$ é finito. Então, $F_x = \langle \{x_0, x_1, \rho(x_0), \rho(x_1)\} \rangle = \{0, x, \rho(x), x + \rho(x)\}$ e $F_x \cap \text{dom}(p) = \{0\}$. Defina $p' \leq p$ por $\text{dom}(p') = \text{dom}(p) + F_x$ e $p'(x)(j) = B_\beta^i(\alpha, j)$, $\forall j \in 2$. Note que $p'(\rho(x))$ e $p'(x + \rho(x))$ estarão definidos a partir de $p'(x)$ e que $B_\beta^i(\alpha, 1-i) = 0$, de forma que a definição está de acordo.

$i = 2$: Tome $x \in E_\beta^2$ com $d_x \restriction F = B_\beta^2 \restriction F$ e $x \notin \text{dom}(p)$. Então, $F_x = \langle \{x_0, x_1, \rho(x_0), \rho(x_1)\} \rangle = \{0, x_0, x_1, x\}$ e $F_x \cap \text{dom}(p) = \{0\}$. Note que $B_\beta^2(\alpha, 0) = B_\beta^2(\alpha, 1)$ uma vez que $\alpha \geq \beta$ e $B_\beta^2 = x_\beta^2 \cup A_\beta^2 \restriction [\overline{\beta}, \mathfrak{c})$, com $A_\beta^2 \in \mathcal{A}_2^+ = \{A \times 2 : A \in \mathcal{A}_2\}$. Assim, podemos definir $p' \leq p$ com $\text{dom}(p') = \text{dom}(p) + F_x$, $p'(x_0)(0) = p'(x_1)(1) = B_\beta^2(\alpha, 0)$ e $p'(x_0)(1) = p'(x_1)(0) = 0$.

$i = 3$: Tome $x \in E_\beta^3$ com $d_x \restriction F = B_\beta^3 \restriction F$ e $x_0, x_1, x_0 + \rho(x_1) \notin \text{dom}(p)$. Novamente $F_x \cap \text{dom}(p) = \{0\}$. Como $B_\beta^3(\alpha, 0) = B_\beta^3(\alpha, 1)$, podemos novamente definir $p' \leq p$ tal que $\text{dom}(p') = \text{dom}(p) + F_x$ e $p'(x_0)(0) = p'(x_1)(1) = B_\beta^3(\alpha, 0)$ e $p'(x_0)(1) = p'(x_1)(0) = 0$.

Ao final da indução teremos $d_x = d_x \restriction \bar{c}, \forall x \in I$, e $D = D \restriction \bar{c}$. Faremos G_0 o subgrupo ω -limitado gerado por $\mathcal{B}_0$ e similarmente G_1 gerado por $\mathcal{B}_1$ e G_2 gerado por $\mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$. Faremos $H_0 = D_0 + G_0$, $H_1 = D_1 + G_1$ e $H = D + G_0 + G_1 + G_2$. Pelo item (3), sabemos que para cada família enumerável $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ e para todo $d \in D$ teremos que $|\text{supp}(d) \setminus \bigcup(\mathcal{A}' \times 2)| = \mathfrak{c}$. Da mesma forma que na construção anterior, isto implica em $D \cap (G_0 + G_1 + G_2) = \{0\}$. O item (4) assegura que todo subconjunto infinito de D terá ponto de acumulação em H .

Exemplo 2.3.1: Existe um subgrupo enumeravelmente compacto H de $2^{\mathfrak{c}} \times 2^{\mathfrak{c}}$ tal que H^2 não é enumeravelmente compacto.

Considere $D, G_0, G_1, G_2, H_0, H_1$ e H como descrito pelos itens acima.

(a) H é enumeravelmente compacto. Seja $I = \{d_n + g_n : n \in \omega\} \subseteq H$ infinito, com $d_n \in D$ e $g_n \in G_0 + G_1 + G_2$. Se $\{d_n : n \in \omega\}$ é finito, então como $G_0 + G_1 + G_2$ é ω -limitado temos que $Cl_H I$ é compacto em $G_0 + G_1 + G_2$, de forma que I possui ponto de acumulação em H . Se $\{d_n : n \in \omega\}$ é infinito, seja $h \in G_0 + G_1 + G_2$ ponto de acumulação. Tome $p \in \omega^*$ tal que $h = p - \lim\{d_n : n \in \omega\}$. Então, como $G_0 + G_1 + G_2$ é ω -limitado temos que $\overline{\{g_n : n \in \omega\}}$ é compacto em $G_0 + G_1 + G_2$ e, portanto, $\{g_n : n \in \omega\}$ possui p-limite $g \in G_0 + G_1 + G_2$. Como o p-limite da soma termo a termo de sequências é igual a soma dos p-limites temos que $g + h \in G_0 + G_1 + G_2$ é ponto de acumulação de I em H .

(b) H^2 não é enumeravelmente compacto. Primeiramente, temos que $H_0 \times H_1$ é fechado em H^2 . De fato, sabemos que H_0 e H_1 são fechados em H , já que se $x \in H \setminus H_i$, teremos que $\text{supp}(x) \cap (\mathfrak{c} \times \{1 - i\}) \neq \emptyset$ e daí, podemos tomar um aberto na topologia de Tychonoff em $H \setminus H_i$ que contém x , $\forall i \in 2$. Logo, supondo por contradição que H^2 é

enumeravelmente compacto teremos que $H_0 \times H_1$ será também enumeravelmente compacto. Provaremos, então, que $\{(d, \rho(d)) : d \in D_0\} = \{(h, \rho(h)) : h \in H\} \cap H_0 \times H_1$. Como a diagonal $\{(h, \rho(h)) : h \in H\}$ é também fechada, teremos que o conjunto enumerável $\{(d, \rho(d)) : d \in D_0\}$ será fechado de H^2 e, portanto, enumeravelmente compacto, o que é contradição pelo lema 1.1.8. Basta provar então a inclusão $H_0 \times H_1 \subseteq \{(d, \rho(d)) : d \in D_0\}$. Tome $(h, \rho(h)) \in H_0 \times H_1$. Podemos representar esse elemento por $(d_0 + g_0, \rho(d_0) + \rho(g_0))$. Está claro que podemos obter a inclusão provando que $g_0 = \underline{0}$. Por um lado, temos que $\rho(g_0) \in \rho(H_0) = D_1 + \rho(G_0) \subseteq D + \rho(G_0)$. Por outro lado, temos também que $\rho(g_0) \in H_1 = D_1 + G_1 \subseteq D + G_1$. Daí, $\rho(g_0) \in (D + \rho(G_0)) \cap (D + G_1) \subseteq D$. Logo, $g_0 \in D$, donde $g_0 \in D \cap G_0 = \{\underline{0}\}$ e obtemos o resultado.

Capítulo 3

Grupo enumeravelmente compacto cujo quadrado não é a partir de um grupo de van Douwen.

3.1 Preliminares

Primeiramente, vamos discutir um pouco a notação usada neste capítulo.

Dado um grupo abeliano G e $g \in G$, a ordem de g é o menor $n \in \omega$ tal que $ng = 0$ e é denotada por $o(g)$. Para todo $n \in \omega$, denotamos por $\mathbb{Z}_n$ o grupo cíclico de ordem n $\{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}$. Dado um conjunto de ordinais I e $h \in \mathbb{Z}_n^I$, definimos o suporte de h , $\text{supp}(h)$, por $\{\alpha \in I : h(\alpha) \neq 0\}$. Denotaremos por $\mathbb{Z}_n^{(I)}$ o conjunto de todas as funções $h \in \mathbb{Z}_n^I$ que têm suporte finito.

Sejam F e I conjuntos de ordinais, $n \in \omega$ e κ um cardinal qualquer. Dada uma família $\{x_\xi : \xi \in F\} \subseteq \mathbb{Z}_n^\kappa$ e $f \in (\mathbb{Z}_n^{(I)})^\omega$ com $\text{supp}(f(n)) \subseteq F$, $\forall n \in \omega$, definimos

$$x_{f(n)} = \sum_{\lambda \in \text{supp}(f(n))} f(n)(\lambda) x_\lambda, \forall n \in \omega.$$

Demonstraremos agora alguns lemas técnicos que permitirão a construção do grupo de van Douwen (grupo abeliano, infinito, enumeravelmente compacto, sem sequências não-triviais convergentes) na seção 3.2 e serão usados também no capítulo 4. Usaremos as propriedades de ultrafiltros seletivos incomparáveis discutidas na seção 1.2.

Lema 3.1.1: Seja p um ultrafiltro seletivo e $\{a_k : k \in \omega\} \in p$ uma sequência estritamente crescente tal que $k < a_k$ para cada $k \in \omega$. Então, existe $I \subseteq \omega$ tal que

- i) $\{a_k : k \in I\} \in p$;
- ii) $\{[k, a_k] : k \in I\}$ são intervalos disjuntos de ω .

Demonstração: Seja $A = \{a_i : i \in \omega\} \in p$ e defina uma partição $\{P_0, P_1\}$ de $[\omega]^2$ como segue: para cada $\{b, c\} \in [\omega]^2$, $\{b, c\}$ é elemento de P_0 se, e somente se, existem $i, k \in \omega$ com $i < k$ tal que $\{b, c\} = \{a_i, a_k\}$ e $a_i < k$. Pela propriedade de Ramsey para p , existe $B \in p$ tal que $B \subseteq A$ e ou $[B]^2 \subseteq P_0$ ou $[B]^2 \subseteq P_1$. Afirmamos que $[B]^2 \not\subseteq P_1$. De fato, seja $\{t_n : n \in \omega\}$ sequência crescente tal que $B = \{a_{t_n} : n \in \omega\}$. Então, $\{a_{t_0}, a_{t_n}\} \in P_1$ implica em $a_{t_0} \geq t_n, \forall n > 0$, o que é contradição. Portanto, $[B]^2 \subseteq P_0$. Assim, se $\{a_i, a_k\} \in [B]^2$ com $a_i < a_k$, então $i < a_i < k < a_k$. Seja $I \subseteq \omega$ tal que $B = \{a_k : k \in I\}$. Então, as condições i) e ii) são satisfeitas.

Lema 3.1.2: Sejam p_0 e p_1 ultrafiltros seletivos incomparáveis. Seja $\{a_k^j : k \in \omega\} \in p_j, j < 2$, uma sequência crescente tal que $k < a_k^j$, para todo $k \in \omega$ e $j < 2$. Então, existem I_0 e I_1 , subconjuntos de ω , tais que:

- i) $\{a_k^j : k \in I_j\} \in p_j, \forall j < 2$;
- ii) $\{[k, a_k^j] : j < 2 \text{ e } k \in I_j\}$ são intervalos 2 a 2 disjuntos de ω .

Demonstração: Usando o lema anterior, obtemos subconjuntos J_0 e J_1 de ω que satisfazem:

- 1) $B_j = \{a_k^j : k \in J_j\} \in p_j, \forall j < 2$;
- 2) $\{[k, a_k^j] : k \in J_j\}$ são intervalos 2 a 2 disjuntos de $\omega, \forall j < 2$.

Uma vez que p_0 e p_1 são ultrafiltros distintos, podemos assumir que 3) $B_0 \cap B_1 = \emptyset$. De fato, se tomarmos $C \in p_0 \setminus p_1$, digamos, podemos trabalhar com os conjuntos $B_0 \cap C \in p_0$ e $B_1 \cap (\omega \setminus C) \in p_1$.

Refinaremos, então, J_0 e J_1 para I_0 e I_1 de forma que os itens i) e ii) sejam satisfeitos. Por causa da propriedade 2), o item ii) será satisfeito se vale a seguinte propriedade:

- 4) $[i, a_i^0] \cap [k, a_k^1] = \emptyset, \forall i \in I_0, k \in I_1$.

Usando a sequência estritamente crescente $B_0 = \{a_k^0 : k \in I_0\}$ e o item 2), obtemos uma partição de ω : $\{[0, a_1^0], [a_k^0, a_{k+1}^0) : k \in I_0\}$. Como cada intervalo da partição é finito, pela seletividade de p_1 , existe $C \in p_1$ tal que C intercepta cada intervalo em somente um ponto. Podemos tomar $C_1 = C \cap B_1 \in p_1$. Do item 3), temos que as extremidades dos intervalos da partição não podem estar em C_1 . Assim, temos que 5) existe $C_1 \in p_1$ tal que $C_1 \subseteq B_1$ e se a, b são elementos consecutivos de B_0 , então $|[a, b] \cap C_1| \leq 1$.

Seja T o conjunto $\bigcup\{[i, a_i^0] : a_i^0 \in B_0 \text{ e } [i, a_i^0] \cap B_1 \neq \emptyset\}$. Defina $f_0 : \omega \mapsto \omega$ como se segue:

- 6a) $f_0 \upharpoonright \omega \setminus T$ é arbitrário;
- 6b) se $n \in T$, então existem um único $t \in \omega$ tal que $n \in [t, a_t^0]$ e um único $m \in \omega$ tal que $\{m\} = [t, a_t^0] \cap C_1$.

Defina $f_0(n) = m$.

Uma vez que $\beta f_0(p_0) \neq p_1$ (p_0 e p_1 são ultrafiltros incomparáveis), existe D_1 tal que

- 7) $D_1 \in p_1, D_1 \subseteq C_1$ e $f_0^{-1}(D_1) \notin p_0$.

Seja $C_0 = B_0 \setminus f_0^{-1}(D_1) \in p_0$. Afirmamos que

- 8) se $a_i^0 \in C_0$, então $[i, a_i^0] \cap D_1 = \emptyset$. De fato, se $a_t^1 \in [i, a_i^0] \cap D_1$, então

$\{a_t^1\} = [i, a_i^0] \cap D_1 = [i, a_i^0] \cap C_1$. Portanto, $f_0(a_i^0) = a_t^1 \in D_1$, pelo item 6b). Entretanto, $a_i^0 \in f_0^{-1}(D_1)$ contradiz a definição de C_0 . Usando a seletividade de p_0 , podemos encontrar D_0 tal que

9) $D_0 \subseteq C_0$, $D_0 \in p_0$ e se $a, b \in D_1$ são elementos consecutivos de D_1 , então $|[a, b] \cap D_0| \leq 1$.

A partir de um argumento similar ao já usado, existem E_0, E_1 tais que 10) $E_j \subseteq D_j$ e $E_j \in p_j, \forall j \in 2$, e 11) se $a_t^1 \in E_1$, então $[t, a_t^1] \cap E_0 = \emptyset$.

Do item 8) e do fato que $E_0 \subseteq C_0$ e $E_1 \subseteq D_0$, concluímos que

12) se $a_i^0 \in E_0$, então $[i, a_i^0] \cap E_1 = \emptyset$.

Seja $I_j \subseteq \omega$ tal que $E_j = \{a_k^j : k \in I_j\}, \forall j < 2$.

Do item 10), segue-se que I_0 e I_1 satisfazem o item i).

Como observado anteriormente, para mostrar que vale o item ii) é suficiente mostrar que vale o item 4). Para prová-lo, suponha por contradição que existam $i \in I_0$ e $t \in I_1$ tais que $[i, a_i^0] \cap [t, a_t^1] \neq \emptyset$. Então, ou $a_i^0 \in [t, a_t^1]$ ou $a_t^1 \in [i, a_i^0]$. Mas isso iria de encontro aos itens 11) ou 12). Logo, I_0 e I_1 satisfazem o item ii).

Lema 3.1.3: Seja $\{p_j : j \in \omega\}$ uma família de ultrafiltros seletivos incomparáveis. Seja $\{a_k^j : k \in \omega\} \in p_j$ uma sequência crescente tal que $k < a_k^j, \forall k, j \in \omega$. Então, existe uma família $\{I_j : j \in \omega\}$ de subconjuntos de ω tal que:

- i) $\{a_k^j : k \in I_j\} \in p_j, \forall j \in \omega$;
- ii) $\{[k, a_k^j] : j \in \omega \text{ e } k \in I_j\}$ são intervalos 2 a 2 disjuntos de ω .

Demonstração: Por indução, podemos construir um subconjunto $I_{j,t}$ de $\omega, \forall j, t \in \omega$ tal que:

- a) $I_{j,t+1} \subseteq I_{j,t}, \forall t \in \omega$;
- b) $\{[k, a_k^j] : j \leq t \text{ e } k \in I_{j,t}\}$ são intervalos 2 a 2 disjuntos de $\omega, \forall t \in \omega$;

c) $\{a_k^j : k \in I_{j,t}\} \in p_j, \forall j, t \in \omega$.

Do lema anterior, existe $I_{0,0} \subseteq \omega$ tal que $\{a_k^0 : k \in I_{0,0}\} \in p_0$ e $\{[k, a_k^j] : k \in I_{0,0}\}$ são 2 a 2 disjuntos. Assim, as condições a)-c) são satisfeitas para $j, t \leq 0$. Suponha que o conjunto $I_{j,t}$ tenha sido definido para todo $j, t \leq s$, satisfazendo as condições a)-c). Seja $I_{s+1,0} = \omega$ e aplicando o lema anterior s vezes, defina por indução $I_{s+1,t+1}$ e $I_{t,s+1}$ para cada $t \leq s$ de tal forma que:

- 1) $I_{t,s+1} \subseteq I_{t,s}$ e $I_{s+1,t+1} \subseteq I_{s+1,t}, \forall t \leq s$;
- 2) $\{[k, a_k^t] : k \in I_{t,s+1}\} \cup \{[k, a_k^{s+1}] : k \in I_{s+1,t+1}\}$ são intervalos 2 a 2 disjuntos de ω ;
- 3) $\{a_k^t : k \in I_{t,s+1}\} \in p_t$ e $\{a_k^{s+1} : k \in I_{s+1,t+1}\} \in p_{s+1}, \forall t \leq s$.

Temos que a)-c) são satisfeitos para cada $j, t \leq s+1$. Assim, $I_{j,t}$ pode ser definido para cada $j, t \in \omega$.

Para todo $j \in \omega$, p_j é P-ponto. Pelo item c), existe $K_j \subseteq \omega$ tal que:

- d) $K_j \subseteq I_{j,j}$ e $K_j \setminus I_{j,t}$ é finito para cada $t \in \omega$;
- e) $\{a_k^j : k \in K_j\} \in p_j$.

Pelo item d), existe $M_j \in \omega$ tal que:

- f) $K_l \subseteq I_{l,j} \cup M_j, \forall l \leq j$;

Defina g) $I_j = K_j \setminus \max\{a_k^l + 1 : l < j \wedge k < M_j\}$. O conjunto $K_j \setminus I_j$ é finito. Pelo item e), o conjunto I_j satisfaz i) para cada $j \in \omega$.

Afirmamos que os I_j 's também satisfazem o item ii). Sejam $j, j', k, k' \in \omega$ com $k \in I_j$ e $k' \in I_{j'}$. Se $j = j'$, então dos itens d) e g) segue-se que $k, k' \in I_j \subseteq I_{j,j}$. Pelos itens a) e b), temos que $[k, a_k^j] \cap [k', a_{k'}^j] = \emptyset$. Se $k' \notin I_{j',j}$, então, pelo item f), $k' \in M_j$. Do item g), segue-se que $k > a_{k'}^{j'}$. Portanto, $[k, a_k^j] \cap [k', a_{k'}^{j'}] = \emptyset$ e vale o item ii).

3.2 Construção do grupo de van Douwen

Nesta secção, construiremos um grupo de van Douwen, isto é, um grupo abeliano, infinito, enumeravelmente compacto e sem sequências não-triviais convergentes a partir de um ultrafiltro seletivo. Esta construção pode ser encontrada em [5]. O nosso grupo de van Douwen G será gerado por um subconjunto linearmente independente de $\{0, 1\}^{\mathfrak{c}}$. Vamos primeiramente a um lema auxiliar:

Lema 3.2.1: Seja $p \in \omega^*$ um ultrafiltro seletivo. Então, existe uma família de funções injetoras $\{f_\xi : \xi < \mathfrak{c}\} \subseteq ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega$ tais que:

- 1) $\bigcup_{n < \omega} f_\xi(n) \subseteq \max\{\omega, \xi\}$, $\forall \xi < \mathfrak{c}$;
- 2) $\{[f_\xi]_p : \xi < \mathfrak{c}\} \cup \{[\vec{\beta}]_p : \beta < \mathfrak{c}\}$ é base para $([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega / p$;
- 3) para cada função injetora $g \in ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega$, existem $\varsigma_0, \varsigma_1 < \mathfrak{c}$ distintos e duas sequências crescentes de inteiros positivos $(n_k^0)_{k < \omega}$ e $(n_k^1)_{k < \omega}$ tais que $f_{\varsigma_i}(k) = g(n_k^i)$, $\forall k < \omega$ e $i \in \{0, 1\}$.

Demonstração: Seja $\{g_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ uma enumeração de todas as funções injetoras de $([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega$ de tal forma que cada função é listada duas vezes e $\bigcup_{n < \omega} g_\xi(n) \subseteq \max\{\omega, \xi\}$, $\forall \xi < \mathfrak{c}$. Cuidemos primeiramente desta enumeração: Sabemos que $|([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega| = \mathfrak{c}$. Considere então $A = \{h \in ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega : h \text{ é injetora}\}$ e $\{h_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ uma enumeração dos elementos de A de tal forma que dada $h \in A$, $|\{\xi : h_\xi = h\}| = \mathfrak{c}$. Seja agora $I : \omega \mapsto [\mathfrak{c}]^{<\omega}$ tal que $I(n) = \{n\}$, $\forall n \in \omega$. Considere $\xi < \mathfrak{c}$. Se $\bigcup_{n \in \omega} \text{supp}(h_\xi(n)) \subseteq \max\{\omega, \xi\}$, defina $g_\xi = h_\xi$. Se $\bigcup_{n \in \omega} \text{supp}(h_\xi(n)) \not\subseteq \xi$, então defina $g_\xi = I$ de forma que $\bigcup_{n \in \omega} \text{supp}(g_\xi(n)) \subseteq \max\{\omega, \xi\}$, $\forall \xi < \mathfrak{c}$. Vamos garantir agora que $A \subseteq \{g_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$. Se $h \in A$, então $\exists \gamma < \mathfrak{c}$ tal que $\bigcup_{n \in \omega} \text{supp}(h(n)) \subseteq \gamma$. Como $|\{\xi : h_\xi = h\}| = \mathfrak{c}$, existe $\xi > \gamma$ tal que $h_\xi = h$, logo $\bigcup_{n \in \omega} \text{supp}(h_\xi(n)) \subseteq \gamma \subseteq \xi$. Assim, $h = h_\xi = g_\xi$ está na enumeração.

Usaremos indução transfinita para provar o lema. Considere $\alpha < \mathfrak{c}$ e suponha que, para cada $\xi < \alpha$, nós tenhamos definido uma função injetora $f_\xi : \omega \mapsto [\mathfrak{c}]^{<\omega}$ tal que:

- i) Para cada $m < \omega$, existe $n < \omega$ tal que $f_\xi(m) = g_\xi(n)$, $\forall \xi < \alpha$;

- ii) $\{[f_\varsigma]_p : \varsigma < \xi\} \cup \{[\vec{\beta}]_p : \beta < \mathfrak{c}\}$ é linearmente independente, $\forall \xi < \alpha$;
 iii) se $\{[f_\varsigma]_p : \varsigma < \xi\} \cup \{[g_\xi]_p\} \cup \{[\vec{\beta}]_p : \beta < \mathfrak{c}\}$ é linearmente independente, então $f_\xi = g_\xi$, $\forall \xi < \alpha$.

Se $\{[f_\xi]_p : \xi < \alpha\} \cup \{[g_\alpha]_p\} \cup \{[\vec{\beta}]_p : \beta < \mathfrak{c}\}$ é linearmente independente, então definimos $f_\alpha = g_\alpha$. Vamos assumir que $\{[f_\xi]_p : \xi < \alpha\} \cup \{[g_\alpha]_p\} \cup \{[\vec{\beta}]_p : \beta < \mathfrak{c}\}$ não seja linearmente independente. Seja $\{A_\mu : \mu < \mathfrak{c}\}$ uma família quase-disjunta de subconjuntos infinitos de ω . Para cada $\mu < \mathfrak{c}$, seja $h_\mu : \omega \mapsto A_\mu$ uma bijeção. Então, definimos $h_{\alpha,\mu} : \omega \mapsto [\mathfrak{c}]^{<\omega}$ por $h_{\alpha,\mu}(n) = g_\alpha(h_\mu(n))$, $\forall n < \omega$. É evidente que $\{n \in \omega : h_{\alpha,\mu}(n) = h_{\alpha,v}(n)\}$ é finito para $\mu < v < \mathfrak{c}$. Portanto, $\{[h_{\alpha,\mu}]_p : \mu < \mathfrak{c}\}$ é família de funções 2 a 2 distintas. Logo, podemos encontrar $\mu_\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $[h_{\alpha,\mu_\alpha}]_p \notin \langle \{[f_\varsigma]_p : \varsigma < \xi\} \cup \{[\vec{\beta}]_p : \beta < \max\{\omega, \alpha\}\} \rangle$, por argumento de cardinalidade. Faça $f_\alpha = h_{\alpha,\mu_\alpha}$. Claramente os itens i) e iii) são satisfeitos também para α . Sabemos que $\{[f_\xi]_p : \xi \leq \alpha\} \cup \{[\vec{\beta}]_p : \beta < \max\{\omega, \alpha\}\}$ é linearmente independente. Uma vez que $\bigcup_{n < \omega} f_\xi(n) \subseteq \max\{\omega, \xi\}$, $\forall \xi \leq \alpha$, temos também que $\{[f_\xi]_p : \xi \leq \alpha\} \cup \{[\vec{\beta}]_p : \beta < \mathfrak{c}\}$ é linearmente independente. Isto mostra o item ii). Afirmamos que a família $\{f_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ satisfaz todas as condições. De fato, pela construção acima, $\{[f_\xi]_p : \xi < \mathfrak{c}\} \cup \{[\vec{\beta}]_p : \beta < \mathfrak{c}\}$ é base para $([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega / p$, pois é l.i. e no processo de indução verificamos todas as funções injetoras $\{g_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ que poderiam entrar em nossa enumeração (lema 1.3.2). Vamos provar que vale o item 3). Tome $\varsigma_0, \varsigma_1 < \mathfrak{c}$ distintos tais que $\varsigma_0 < \varsigma_1$ e $g = g_{\varsigma_0} = g_{\varsigma_1}$. Do item i), podemos tomar duas sequências crescentes de inteiros positivos $(n_k^0)_{k < \omega}$ e $(n_k^1)_{k < \omega}$ tais que $f_{\varsigma_i}(k) = g(n_k^i)$, $\forall k < \omega$ e $i \in \{0, 1\}$.

Para o restante do capítulo 3, considere uma família $\{f_\xi : \xi < \mathfrak{c}\} \subseteq ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega$ que satisfaça as 3 propriedades listadas no lema anterior e uma enumeração $\{F_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ de $[\mathfrak{c}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$.

Lema 3.2.2: Seja $p \in \omega^*$ um ultrafiltro seletivo. Suponha que para cada $\alpha < \mathfrak{c}$ tenhamos um homomorfismo não-trivial $\phi_\alpha : [\mathfrak{c}]^{<\omega} \mapsto \{0, 1\}$ tal que

i) $\phi_\alpha(\{\xi\}) = p - \lim\{\phi_\alpha(f_\xi(n)) : n \in \omega\}, \forall \xi < \mathfrak{c};$

ii) $\phi_\alpha(F_\alpha) = 1.$

Para $\xi < \mathfrak{c}$, definimos $x_\xi \in \{0, 1\}^\mathfrak{c}$ por $x_\xi(\alpha) = \phi_\alpha(\{\xi\}), \forall \alpha < \mathfrak{c}$. Então, o conjunto $X = \{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ é linearmente independente em $\{0, 1\}^\mathfrak{c}$ e $G = \langle X \rangle$ é grupo p-compacto sem sequências não-triviais convergentes, ou seja, é grupo de van Douwen.

Demonstração: Seja $\{\xi_0, \dots, \xi_k\} \in [\mathfrak{c}]^{<\omega}$. Tome $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $F_\alpha = \{\xi_0, \dots, \xi_k\}$. Então, pelo item ii),

$$(x_{\xi_0} + \dots + x_{\xi_k})(\alpha) = \phi_\alpha(\{\xi_0\}) + \dots + \phi_\alpha(\{\xi_k\}) = \phi_\alpha(F_\alpha) = 1.$$

Isto mostra que $\{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ é linearmente independente em $\{0, 1\}^\mathfrak{c}$. Agora mostraremos que G é p-compacto. Antes disso, note que devido ao item i) temos que $x_\xi = p - \lim\{\sum_{\mu \in f_\xi(n)} x_\mu : n \in \omega\} = p - \lim\{x_{f_\xi(n)} : n \in \omega\}, \forall \xi < \mathfrak{c}$. Seja $(a_n)_{n < \omega}$ uma sequência 1-1 qualquer em G . Tome $h \in ([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega$ injetora tal que $a_n = x_{h(n)}, \forall n \in \omega$. Como $\{[f_\xi]_p : \xi < \mathfrak{c}\} \cup \{[\vec{\beta}]_p : \beta < \mathfrak{c}\}$ é base para $([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega / p$, existem $\xi_0, \dots, \xi_k \in \mathfrak{c}$ e $E \in [\mathfrak{c}]^{<\omega}$ tais que $[h]_p = (\Delta_{i \leq k} [f_{\xi_i}]_p) \Delta (\Delta_{\mu \in E} [\vec{\mu}]_p)$. Portanto, podemos encontrar $B \in p$ tal que $B \subseteq A$ e $h(n) = (\Delta_{i \leq k} f_{\xi_i}(n)) \Delta E, \forall n \in B$. Segue-se, então, que $x_{h(n)} = \sum_{i \leq k} x_{f_{\xi_i}(n)} + x_E, \forall n \in B$. Assim, $\sum_{i \leq k} x_{\xi_i} + x_E = p - \lim\{x_{h(n)} : n \in \omega\}$ e isto mostra que G é p-compacto.

Vamos provar agora que nenhuma sequência não-trivial em G converge. Seja $(y_n)_{n < \omega}$ uma sequência não-trivial em G e tome uma função injetora em $([\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega$ tal que $y_n = x_{g(n)}$. Pelo item 3) do lema anterior, existem $\varsigma_0, \varsigma_1 < \mathfrak{c}$ distintos e duas sequências crescentes de inteiros positivos $(n_k^0)_{k < \omega}$ e $(n_k^1)_{k < \omega}$ tais que $f_{\varsigma_i}(k) = g(n_k^i), \forall k < \omega$ e $i \in \{0, 1\}$. Uma vez que $x_{\varsigma_i} = p - \lim\{x_{f_{\varsigma_i}(k)} : k \in \omega\} = p - \lim\{x_{g(n_k^i)} : k \in \omega\} = p - \lim\{y_{n_k^i} : k \in \omega\}, \forall i \in 2$, teremos que x_{ς_0} e x_{ς_1} são ambos pontos de acumulação de $\{y_n : n \in \omega\}$.

Para finalizar a construção do grupo de van Douwen basta provar a existência do

homomorfismo $\phi_\alpha : [\mathfrak{c}]^{<\omega} \mapsto \{0, 1\}$, $\forall \alpha < \mathfrak{c}$, satisfazendo os itens i) e ii) do lema anterior. Para isso, precisaremos de dois lemas; o segundo, responsável pela construção do homomorfismo propriamente dito.

Lema 3.2.3: Seja $p \in \omega^*$ um ultrafiltro seletivo. Para cada $E_0 \in [\mathfrak{c}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$, existem $\{b_i : i \in \omega\} \in p$ e $\{E_i : 0 < i < \omega\} \subseteq [\mathfrak{c}]^{<\omega}$ tais que

- 1) $\omega \subseteq \bigcup_{i < \omega} E_i$;
- 2) $E_i \cup \bigcup_{\xi \in E_i} f_\xi(b_i) \subseteq E_{i+1}$, $\forall i \in \omega$;
- 3) $\{f_\xi(b_i) : \xi \in E_i\} \cup \{\{\mu\} : \mu \in E_i\}$ é linearmente independente, $\forall i \in \omega$.

Demonstração: Faça $F_0 = E_0$ e seja $F_{n+1} = n \cup F_n \cup \bigcup_{\xi \in F_n} \bigcup_{m \leq n} f_\xi(m)$, para todo $1 \leq n \leq \omega$. Como $\{[f_\xi]_p : \xi < \mathfrak{c}\} \cup \{[\vec{\beta}]_p : \beta < \mathfrak{c}\}$ é linearmente independente, temos que $A_n = \{k \in \omega : \{f_\xi(k) : \xi \in F_n\} \cup \{\{\mu\} : \mu \in F_n\} \text{ é linearmente independente}\} \in p$, $\forall n < \omega$.

Ultrafiltros seletivos são P-pontos, logo existe $A \in p$ tal que $A \setminus A_n$ é finito, $\forall n \in \omega$.

Seja $h_j : \omega \mapsto \omega$ função crescente tal que

- 4) $A \setminus A_n \subseteq h(n)$.

Temos que h define uma partição em ω : $[0, h(1)]$, $\{[h(n) + 1, h(n + 1)] : n \geq 1\}$. Pela seletividade de p , existe $C \in p$ tal que $|[0, h_j(1)] \cap C| = 1$ e $|[h(n) + 1, h(n + 1)] \cap C| = 1$, $\forall n \geq 1$. Tome $B = (C \cap A) \setminus ([0, h(1)] \cap C)$. Então,

- 5) $B \cap h(1) = \emptyset$, $B \subseteq A$, $B \in p$ e $|[h(n) + 1, h(n + 1)] \cap B| \leq 1$, $\forall n \in \omega$.

Seja $\{a_n : n \in \omega\}$ enumeração crescente de B . De (5), segue-se que $a_n > h(n)$, $\forall n \in \omega$.

Assim, de (4) temos:

- 6) $n < a_n$ e $a_n \in A_n$, $\forall n \in \omega$.

O item 6) afirma que a sequência $\{a_n : n \in \omega\}$ satisfaz as hipóteses do lema 3.1.1. Logo, existe $I \subseteq \omega$ tal que $\{a_k : k \in I\} \in p$ e $\{[k, a_k] : k \in I\}$ são intervalos 2 a 2 disjuntos de ω .

Seja $\{i_k : k \in \omega\}$ enumeração crescente de I . Temos que $i_k < a_{i_k} < i_{k+1}$, $\forall k < \omega$. Usando isto, obtemos

$$F_{i_k} \cup \bigcup_{\xi \in F_{i_k}} f_\xi(a_{i_k}) \subseteq F_{i_{k+1}} \cup \bigcup_{\xi \in F_{i_k}} \bigcup_{m < i_{k+1}} f_\xi(m) \subseteq F_{i_{k+1}}, \forall k < \omega.$$

Note que para cada $k < \omega$, $\{f_\xi(a_{i_k}) : \xi \in F_{i_k}\} \cup \{\{\mu\} : \mu \in F_{i_k}\}$ é linearmente independente, uma vez que $a_{i_k} \in A_{i_k}$. Então, para $k \in [1, \omega)$ definimos $E_k = F_{i_k}$ e, para cada $k < \omega$, fazemos $b_k = a_{i_k}$. É evidente agora que os itens 2) e 3) são satisfeitos. Lembramos que $E_0 \subseteq F_{i_0}$, $\omega \subseteq \bigcup_{n \in \omega} F_n \subseteq \bigcup_{k \in \omega} F_{i_k} \subseteq \bigcup_{k \in \omega} E_k$ e $B = \{b_k : k \in \omega\} \in p$.

Lema 3.2.4: Seja $p \in \omega^*$ um ultrafiltro seletivo. Para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, existe um homomorfismo não-trivial $\phi_\alpha : [\mathfrak{c}]^{<\omega} \mapsto \{0, 1\}$ tal que

- i) $\phi_\alpha(\{\xi\}) = p - \lim\{\phi_\alpha(f_\xi(n)) : n \in \omega\}$, $\forall \xi < \mathfrak{c}$;
- ii) $\phi_\alpha(F_\alpha) = 1$.

Demonstração: Tome $\alpha < c$. Aplicando o lema anterior a $E_0 = F_\alpha$, obtemos uma sequência $\{b_i : i \in \omega\} \in p$ e uma sequência $\{E_i : 0 < i < \omega\} \subseteq [c]^{<\omega}$ tais que valem os itens 1), 2) e 3) do lema anterior. Agora, suponha que para cada $i < \omega$, nós já tenhamos definido ϕ_α em $[E_i]^{<\omega}$ de tal forma que $\phi_\alpha(F_\alpha) = 1$ e $\phi_\alpha(f_\xi(b_i)) = \phi_\alpha(\{\xi\})$, $\forall \xi \in E_i$. Como $\{f_\xi(b_{i+1}) : \xi \in E_{i+1}\} \cup \{\{\mu\} : \mu \in E_{i+1}\}$ é linearmente independente e $E_i \cup \bigcup_{\xi \in E_i} f_\xi(b_i) \subseteq E_{i+1}$, podemos estender $\phi_\alpha : [E_i]^{<\omega} \mapsto \{0, 1\}$ a um homomorfismo de $[E_{i+1}]^{<\omega}$ a $\{0, 1\}$ de tal forma que $\phi_\alpha(f_\xi(b_{i+1})) = \phi_\alpha(\{\xi\})$, $\forall \xi \in E_{i+1}$. Assim, definimos ϕ_α em $[E]^{<\omega}$. Observe que $\phi_\alpha(f_\xi(b_i)) = \phi_\alpha(\{\xi\})$, para cada $\xi \in E_i$ e $i \in \omega$. Portanto, $\{n \in \omega : \phi_\alpha(f_\xi(n)) = \phi_\alpha(\{\xi\})\} \in p$, $\forall \xi \in E$. Nosso próximo objetivo é estender ϕ_α a $[c]^{<\omega}$. Faremos isto por indução transfinita em $c \setminus E$. Seja $\gamma \in c \setminus E$ o menor ordinal para o qual ϕ_α ainda não está definido. Temos que ϕ_α está definido em $[E \cup \gamma]^{<\omega}$. Como $f_\gamma(n) \subseteq \gamma$, $\forall n \in \omega$, $\phi_\alpha(\{\mu\})$ já foi definido para todo $\mu < \gamma$ e $\{\{\gamma\}\} \cup \{\{\mu\} : \mu < \gamma\}$ é linearmente independente, temos que ϕ_α pode ser estendido a $[E \cup (\gamma + 1)]^{<\omega}$ de forma que

$\phi_\alpha(\{\gamma\}) = p - \lim\{\phi_\alpha(f_\gamma(n)) : n \in \omega\}$. Segue-se o lema.

3.3 Grupo enumeravelmente compacto cujo quadrado não é enumeravelmente compacto a partir de um grupo de van Douwen de ordem p .

Mostraremos em ZFC que a existência de um grupo de van Douwen de ordem p implica na existência de um grupo enumeravelmente compacto cujo quadrado não é enumeravelmente compacto. Na próxima secção obteremos o mesmo resultado a partir de um grupo de van Douwen livre. Finalmente, mostraremos que se existe um grupo abeliano enumeravelmente compacto sem sequências não-triviais convergentes, então existe um grupo do mesmo tipo que, em adição, é espaço vetorial sobre $\mathbb{Z}_p$ para algum primo p ou é livre. Dessa forma, obtemos o resultado principal deste capítulo: a existência de um grupo de van Douwen implica em ZFC na existência de um grupo enumeravelmente compacto cujo quadrado não é enumeravelmente compacto. Todos os resultados desta secção podem ser encontrados em [11].

Lema 3.3.1: Seja p um número primo e G um grupo de van Douwen de ordem p . Seja $\{f_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$ uma enumeração de todas as funções injetoras $f : \omega \mapsto \mathbb{Z}_p^{(\mathfrak{c})}$ com $\bigcup_{n \in \omega} \text{supp}(f_\xi(n)) \subseteq \xi$ para cada $\xi \in [\omega, \mathfrak{c})$. Então, existem $\{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\} \subseteq G$ e $\{p_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\} \subseteq \omega^*$ tais que:

- a) $\{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ é l.i.;

b) x_ξ é o p_ξ -limite de $\{x_{f_\xi(n)} : n \in \omega\}$, $\forall \xi \in [\omega, \mathfrak{c})$. $(x_{f_\xi(n)} = \sum_{\lambda \in \text{supp} f_\xi(n)} f_\xi(n)(\lambda) \cdot x_\lambda, \text{supp} f_\xi(n) \subseteq \xi, \forall n \in \xi)$.

Demonstração: Primeiramente, cuidemos da enumeração $\{f_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$. Sabemos que $|(\mathbb{Z}_p^{(\mathfrak{c})})^\omega| = \mathfrak{c}$. Considere então $A = \{f \in (\mathbb{Z}_p^{(\mathfrak{c})})^\omega : f \text{ é injetora}\}$ e $\{g_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ uma enumeração dos elementos de A de tal forma que dada $f \in A$, $|\{\xi : g_\xi = f\}| = \mathfrak{c}$. Seja agora $h : \omega \longrightarrow \mathbb{Z}_p^{(\mathfrak{c})}$ tal que $h(n) = \mathcal{X}_{\{n\}} : \mathfrak{c} \longrightarrow \mathbb{Z}_p$. Considere ξ tal que $\omega \leq \xi < \mathfrak{c}$. Se $\bigcup_{n \in \omega} \text{supp}(g_\xi(n)) \subseteq \xi$, defina $f_\xi = g_\xi$. Se $\bigcup_{n \in \omega} \text{supp}(g_\xi(n)) \not\subseteq \xi$, então defina $f_\xi = h$ de forma que $\bigcup_{n \in \omega} \text{supp}(f_\xi(n)) \subseteq \xi, \forall \xi < \mathfrak{c}$. Vamos garantir agora que $A \subseteq \{f_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$. Se $f \in A$, então $\exists \gamma < \mathfrak{c}$ tal que $\bigcup_{n \in \omega} \text{supp}(f(n)) \subseteq \gamma$. Como $|\{\xi : g_\xi = f\}| = \mathfrak{c}$, existe $\xi > \gamma$ tal que $g_\xi = f$, logo $\bigcup_{n \in \omega} \text{supp}(g_\xi(n)) \subseteq \gamma \subseteq \xi$. Assim, $f_\xi = g_\xi = f$ está na enumeração.

O grupo G é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Z}_p$. Assim, existe um subconjunto linearmente independente $\{x_n : n \in \omega\}$ contido em G . As condições a) e b) são satisfeitas com ω no lugar de $\mathfrak{c}$ - condição b) de forma vazia. Suponha que $\{x_\xi : \xi < \mu\}$ e $\{p_\xi : \omega \leq \xi < \mu\}$ estão definidos para algum $\mu < \mathfrak{c}$ de tal forma que as hipóteses de indução a) e b) são satisfeitas com μ no lugar de $\mathfrak{c}$.

Pelo fato de que $\bigcup_{n \in \omega} \text{supp}(f_\mu(n)) \subseteq \mu$, temos que a sequência $\{x_{f_\mu(n)} : n \in \omega\}$ já está definida e é injetora. Como G é enumeravelmente compacto e não possui sequências não-triviais convergentes, a sequência $\{x_{f_\mu(n)} : n \in \omega\}$ tem pelo menos $\mathfrak{c}$ pontos de acumulação (lema 1.1.9). O grupo gerado por $\{x_\xi : \xi < \mu\}$ tem cardinalidade menor que $\mathfrak{c}$. Assim, existe um ponto de acumulação x_μ de $\{x_{f_\mu(n)} : n \in \omega\}$ que não pertence ao subgrupo gerado por $\{x_\xi : \xi < \mu\}$. O conjunto $\{x_\xi : \xi \leq \mu\}$ será então linearmente independente e podemos obter p_μ ultrafiltro livre tal que x_μ é p_μ -limite de $\{x_{f_\mu(n)} : n \in \omega\}$. Assim, finalizamos a construção de $\{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\} \subseteq G$ e $\{p_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\} \subseteq \omega^*$ satisfazendo os itens a) e b).

Lema 3.3.2: Sejam G , $\{f_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$, $\{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ e $\{p_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$ como no lema anterior. Então, existe uma família $\{z_\xi : \xi < \mathfrak{c}\} \subseteq G \times (\mathbb{Z}_p)^\mathfrak{c}$ tal que:

- (I) $\{z_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ é conjunto l.i.;
- (II) z_ξ é o p_ξ -limite de $\{z_{f_\xi(n)} : n \in \omega\}$, $\forall \xi \in [\omega, \mathfrak{c})$;
- (III) $\forall A \subseteq \omega$, $\exists \alpha \in \mathfrak{c}$ tal que $\{n \in \omega : z_n(\alpha) = 1\} = A$ e $\{n \in \omega : z_n(\alpha) = 0\} = \omega \setminus A$;
- (IV) Se $p, q \in \omega^*$ e $p \neq q$, então para quaisquer $k_0, k_1, l_0, l_1 \in \mathbb{Z}_p$ com $(k_0, k_1, l_0, l_1) \neq (0, 0, 0, 0)$ teremos que $p - \lim\{\sum_{j < 2} k_j z_{2n+j} : n \in \omega\}$ é diferente de $q - \lim\{\sum_{j < 2} l_j z_{2n+j} : n \in \omega\}$.

Demonstração: Por hipótese, $\{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\} \subseteq G$ satisfaz:

- a) $\{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ é linearmente independente;
- b) $x_\xi = p_\xi - \lim\{x_{f_\xi(n)} : n \in \omega\}$, $\forall \xi \in [\omega, \mathfrak{c})$.

Para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, defina G_α como o grupo gerado por $\{x_\xi : \xi < \alpha\}$. Sabemos que $\{x_n : n \in \omega\}$ é linearmente independente. Daí,

- c) para cada $A \subseteq \omega$ existe um homomorfismo $\phi_A \upharpoonright G_\omega : G_\omega \rightarrow \mathbb{Z}_p$ tal que $\phi_A(x_n) = 1$, $\forall n \in A$, e $\phi_A(x_n) = 0$, se $n \in \omega \setminus A$.

Estendemos ϕ_A de G_ω até $G_\mathfrak{c}$ de modo que satisfaça:

- d) $\phi_A(x_\xi) = p_\xi - \lim\{\phi_A(x_{f_\xi(n)}) : n \in \omega\}$.

Suponha que $\phi_A \upharpoonright G_\alpha$ já esteja definido e satisfaça a condição d) para todo $\alpha < \xi$. O homomorfismo ϕ_A é definido em $\bigcup_{\alpha < \xi} G_\alpha$. Seja ξ ordinal limite. Se $x \in G_\xi$, então $x = \sum_{\lambda \in F} c_\lambda x_\lambda$, $F \in [\xi]^{<\omega}$. Seja η ordinal tal que $F \subseteq \eta \subseteq \xi$. Como $\phi_A \upharpoonright G_\eta$ já está definido temos que $\phi_A(x) = (\phi_A \upharpoonright G_\eta)(x)$. Daí, obtemos que ϕ_A está definido em G_ξ . Provaremos agora que vale d). Sabemos que $\bigcup_{n \in \omega} \text{supp}(f_\xi(n)) \subseteq \xi$, logo a sequência $\{\phi_A(x_{f_\xi(n)}) : n \in \omega\}$ já está definida, já que $x_{f_\xi(n)} \in G_\xi$, $\forall n \in \omega$. Como $\mathbb{Z}_p$ é finito e discreto temos que é p_ξ -compacto e, portanto, podemos fazer $\phi_A(x_\xi) = p_\xi - \lim\{\phi_A(x_{f_\xi(n)}) : n \in \omega\}$. Desta forma,

ϕ_A está definida em G_ξ e d) é satisfeito. Para o caso de $\xi = \beta + 1$ ordinal sucessor, temos que G_β já está definido e basta, então, repetir o raciocínio anterior para fazer valer o item d).

Defina $z_\xi = (x_\xi, \{\phi_A(x_\xi) : A \in P(\omega)\}) \in G \times (\mathbb{Z}_p)^{P(\omega)} \simeq G \times (\mathbb{Z}_p)^\mathfrak{c}$ (associe cada $\alpha \in \mathfrak{c}$ a um único $A \in P(\omega)$). Provaremos agora que valem os itens (I), (II), (III) e (IV) do enunciado do lema.

(I) A família $\{z_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ é l.i., pois suponha $\sum_{\lambda \in F} n_\lambda z_\lambda = 0$, com $F \in [\mathfrak{c}]^{<\omega}$ e $n_\lambda \in \mathbb{Z}_p$, $\forall \lambda \in F$. Temos que $\sum_{\lambda \in F} n_\lambda z_\lambda = 0 \implies \sum_{\lambda \in F} n_\lambda x_\lambda = 0 \implies n_\lambda x_\lambda = 0 \implies n_\lambda = 0, \forall \lambda \in F$, já que $\{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ é linearmente independente e G é grupo de ordem p . Logo, $n_\lambda z_\lambda = 0$, $\forall \lambda \in F$ e $\{z_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ é linearmente independente.

(II) Tomando z_ξ qualquer, considere uma vizinhança aberta V de z_ξ tal que $V = U \times \prod_{\alpha \in F} V_\alpha \times \prod_{\alpha \in \mathfrak{c} \setminus F} \mathbb{Z}_p$, sendo U vizinhança aberta de x_ξ , V_α de $\phi_\alpha(x_\xi)$ e $F \in [\mathfrak{c}]^{<\omega}$. Se chamarmos $A = \{n \in \omega : x_{f_\xi(n)} \in U\}$ e $A_\alpha = \{n \in \omega : \phi_A(x_{f_\xi(n)}) \in V_\alpha\}$, teremos da definição de p_ξ -limite que $A \in p_\xi$ e $A_\alpha \in p_\xi, \forall \alpha \in F$, pois $x_\xi = p_\xi\text{-}\lim\{x_{f_\xi(n)} : n \in \omega\}$ e vale d). Como F é finito e p_ξ é filtro temos que $A \cap \bigcap_{\alpha \in F} A_\alpha \in p_\xi$, ou seja, $\{n \in \omega : z_{f_\xi(n)} \in V\} \in p_\xi$ e vale o item (II). Como $\{f_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$ contém todas as $f \in (\mathbb{Z}_p^{(\mathfrak{c})})^\omega$ injetoras teremos que $\langle \{z_\xi : \xi < \mathfrak{c}\} \rangle$ será enumeravelmente compacto.

(III) Segue-se diretamente da definição de z_ξ e do item c).

(IV) Se $p, q \in \omega^*$ são distintos, então existe, digamos, $A_p \in p \setminus q$ e existe algum $A_q \in q$ tal que $A_p \cap A_q = \emptyset$. Suponha, sem perda de generalidade, que $k_0 \neq 0$. Considere $B_0 = \{2n : n \in A_p\}$. Pelo item c), $\phi_{B_0}(x_{2n}) = 1$ e $\phi_{B_0}(x_{2n+1}) = 0, \forall n \in A_p$, e $\phi_{B_0}(x_{2n}) = \phi_{B_0}(x_{2n+1}) = 0, \forall n \in A_q$. Portanto, o p -limite da sequência

$$\{\phi_{B_0}(k_0 x_{2n} + k_1 x_{2n+1}) : n \in \omega\}$$

é k_0 - uma vez que $\{n \in \omega : \phi_{B_0}(k_0x_{2n} + k_1x_{2n+1}) = k_0\} \supseteq A_p$; e o q-limite da sequência $\{\phi_{B_0}(l_0x_{2n} + l_1x_{2n+1}) : n \in \omega\}$ é 0. Logo, os limites em (IV) são distintos.

Lema 3.3.3: Seja $\mathcal{F} = \{f_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$ uma enumeração de todas as funções injetoras $f : \omega \mapsto \mathbb{Z}_p^{(\mathfrak{c})}$ tal que $\bigcup_{n \in \omega} \text{supp}(f_\xi(n)) \subseteq \xi$ para cada $\xi \in [\omega, \mathfrak{c})$ e cada $f : \omega \mapsto \mathbb{Z}_p^{(\mathfrak{c})}$ injetora aparece $\mathfrak{c}$ vezes na enumeração. Sejam $\{z_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ e $\{p_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$ como no lema anterior para $\mathcal{F}$ acima. Então, existem famílias $\{I_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$, $\{\alpha_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$, $\{S_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ e $\{P_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ que satisfazem:

- i) $I_\xi = \omega \cup \{\alpha_\eta : \eta < \xi\}$, $\forall \xi < \mathfrak{c}$, com $\alpha_\eta \in \mathfrak{c}$, $\forall \eta < \mathfrak{c}$;
- ii) $S_\xi \subseteq \mathfrak{c}$, $\forall \xi < \mathfrak{c}$;
- iii) $(I_\xi \cup \{\alpha_\xi\}) \cap S_\xi = \emptyset$, $\forall \xi < \mathfrak{c}$;
- iv) $f_{\alpha_\xi} = f_{\beta_\xi}$, sendo β_ξ o menor ordinal β em $[\omega, \mathfrak{c})$ para o qual $\bigcup_{n \in \omega} \text{supp}(f_\beta(n)) \subseteq I_\xi$ e $f_\beta \neq f_{\alpha_\eta}$, $\forall \eta < \xi$;
- (v) para cada $p \in \omega^*$, temos que $p \in P_\xi$ se, e somente se, $p - \lim\{z_{2n+j} : n \in \omega\} \in \langle \{z_\eta : \eta < \mathfrak{c}\} \rangle$, $\forall j < 2$, e $\exists k_0, k_1 \in \mathbb{Z}_p$ com $(k_0, k_1) \neq (0, 0)$ tal que $p - \lim\{k_0z_{2n} + k_1z_{2n+1} : n \in \omega\} \in \langle \{z_\eta : \eta \in I_\xi\} \rangle$;
- (vi) se $p \in P_\xi$, então existe $j < 2$ tal que $p - \lim\{z_{2n+j} : n \in \omega\} \notin \langle \{z_\eta : \eta \in \mathfrak{c} \setminus S_\xi\} \rangle$;
- (vii) $|P_\xi| \leq |\xi| + \omega$, $\forall \xi < \mathfrak{c}$;
- (viii) $|S_\xi| \leq |\xi| + \omega$, $\forall \xi < \mathfrak{c}$;
- (ix) se $\gamma < \xi < \mathfrak{c}$, então $P_\gamma \subseteq P_\xi$ e se ξ é limite, então $P_\xi = \bigcup_{\gamma < \xi} P_\gamma$;
- (x) se $\gamma < \xi < \mathfrak{c}$, então $S_\gamma \subseteq S_\xi$ e se ξ é limite, então $S_\xi = \bigcup_{\gamma < \xi} S_\gamma$.

Demonstração: Durante a construção por indução, denote H_ξ o grupo gerado por $\{z_\eta : \eta \in I_\xi\}$. Note que $H_\xi = \{z_h : h \in \mathbb{Z}_p^{(I_\xi)}\}$.

Estágio 0. Defina $I_0 = \omega$. Então i) é satisfeito. Vamos provar que com esta definição teremos $P_0 = \emptyset$. Para isso, provaremos que a sequência $\{k_0z_{2n} + k_1z_{2n+1} : n \in \omega\}$ não possui

ponto de acumulação em $H_0 = \{z_\eta : \eta \in I_0\}$. Sejam $(k_0, k_1) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ com $(k_0, k_1) \neq (0, 0)$ e assumamos, sem perda de generalidade, $k_0 \neq 0$. Considere $z_h \in H_0$ ($h \in \mathbb{Z}_p^{(\omega)}$) e $k \in \omega$ tais que $\text{supp}(h) \subseteq 2k$. Pelo item (III) do lema anterior, existe $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $\{n \in \omega : z_n(\alpha) = 1\}$ é igual a $\{2n : n \in \omega\} \setminus 2k$ e $\{n \in \omega : z_n(\alpha) = 0\} = \{2n + 1 : n \in \omega\} \cup 2k$. Dessa forma, $z_h(\alpha) = 0$, $z_{2n}(\alpha) = 1$ e $z_{2n+1}(\alpha) = 0$, $\forall n \geq k$. Assim, $k_0 z_{2n}(\alpha) + k_1 z_{2n+1}(\alpha) = k_0 \neq 0$, $\forall n \geq k$. Portanto, z_h não é ponto de acumulação de $\{k_0 z_{2n} + k_1 z_{2n+1} : n \in \omega\}$ e como foi tomado qualquer em H_0 temos que a sequência $\{k_0 z_{2n} + k_1 z_{2n+1} : n \in \omega\}$ não possui ponto de acumulação em H_0 . Logo, $P_0 = \emptyset$ e, portanto, os itens (vi), (vii) e (ix) são trivialmente satisfeitos. Defina agora $S_0 = \emptyset$ e faça $\alpha_0 = \omega$. Os itens (ii), (iii), (iv), (viii) e (x) são claramente satisfeitos.

Caso $\xi = \gamma + 1$. Por hipótese, α_η já está definido para todo $\eta \leq \gamma$. Portanto, $I_\xi = \omega \cup \{\alpha_\eta : \eta < \xi\}$ satisfaz o item i). Seja P_ξ definido de acordo com o item v). Para cada $p \in P_\xi$, existem $k_p, l_p \in \mathbb{Z}_p$, com pelo menos um deles diferente de zero, tais que $a_p = p - \lim\{k_p z_{2n} + l_p z_{2n+1} : n \in \omega\} \in H_\xi$. Segue-se do item (IV) do lema anterior que $\{a_p : p \in P_\xi\}$ são dois a dois distintos. Logo, $|P_\xi| \leq |H_\xi| = |\xi| + \omega$ e o item vii) é satisfeito. O item ix) para o caso sucessor sai da definição de P_ξ em v).

Definiremos agora S_ξ . Seja $q \in P_\xi \setminus P_\gamma$. Segue-se de v) que $q - \lim\{z_{2n+j} : n \in \omega\} \in \langle\{z_v : v < \mathfrak{c}\}\rangle$, $\forall j < 2$, e para todo $(m_0, m_1) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ com $(m_0, m_1) \neq (0, 0)$ teremos $q - \lim\{m_0 z_{2n} + m_1 z_{2n+1} : n \in \omega\} \notin H_\gamma$ - caso contrário, teríamos $q \in P_\gamma$. Em particular,

$$(*) \quad q - \lim\{z_{2n+j} : n \in \omega\} \notin H_\gamma, \quad \forall j < 2.$$

Afirmamos que existe $j < 2$ tal que $q - \lim\{z_{2n+j} : n \in \omega\} \notin H_\xi$. De fato, suponhamos por contradição que a afirmação seja falsa. Por (*), $z(j) = q - \lim\{z_{2n+j} : n \in \omega\} \in H_\xi \setminus H_\gamma$, $\forall j < 2$. Então, existe $h_j \in \mathbb{Z}_p^{(\mathfrak{c})}$ com $\alpha_\gamma \in \text{supp}(h_j) \subseteq I_\gamma \cup \{\alpha_\gamma\}$ tal que $z(j) = z_{h_j}$. Seja $s_j = h_j(\alpha_\gamma)$. Então, $s_j \neq 0$ e $\text{supp}(s_1 h_0 - s_0 h_1) \subseteq I_\gamma$. Daí,

$$q - \lim\{s_1 z_{2n} + (-s_0) z_{2n+1} : n \in \omega\} = s_1 z(0) + (-s_0) z(1) = z_{s_1 h_0 + (-s_0) h_1} \in H_\gamma.$$

Logo, pela condição v) temos que $q \in P_\gamma$, o que é contradição.

A afirmação do parágrafo anterior diz que para cada $q \in P_\xi \setminus P_\gamma$ existem $j_q < 2$, $h_q \in \mathbb{Z}_p^{(c)}$ com $\text{supp}(h_q) \setminus I_\xi \neq \emptyset$ tal que o $q - \lim\{z_{2n+j_q} : n \in \omega\}$ é igual a z_{h_q} . Fixe $\mu_q \in \text{supp}(h_q) \setminus I_\xi$, $\forall q \in P_\xi \setminus P_\gamma$, e faça $S_\xi = S_\gamma \cup \{\mu_q : q \in P_\xi \setminus P_\gamma\}$. Os itens ii), vi), viii) e x) são satisfeitos.

Seja β_ξ como no item iv). Pela escolha de $\{f_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$, existe uma quantidade não-enumerável de f_μ 's que são iguais a f_{β_ξ} . Podemos tomar α_ξ tal que $f_{\alpha_\xi} = f_{\beta_\xi}$ e $\alpha_\xi \in \mathfrak{c} \setminus (I_\xi \cup S_\xi)$. Valem os itens iii) e iv).

Daí, os itens i) - x) são satisfeitos para o caso sucessor.

Caso ξ ordinal limite. Defina $P_\xi = \bigcup_{\eta < \xi} P_\eta$ como em ix), $S_\xi = \bigcup_{\eta < \xi} S_\eta$ como em x) e $I_\xi = \bigcup_{\eta < \xi} I_\eta = \omega \cup \{\alpha_\eta : \eta < \xi\}$ como em i). Os itens ii), vii) e viii) são claramente satisfeitos.

Veremos se a definição de P_ξ dada no item v) é equivalente a $P_\xi = \bigcup_{\eta < \xi} P_\eta$. Seja $p \in P_\xi$. Existe $\mu < \xi$ tal que $p \in P_\mu$. Pelo item v) para μ , existem $k_0, k_1 \in \mathbb{Z}_p$ com $(k_0, k_1) \neq (0, 0)$ tais que $p - \lim\{k_0 z_{2n} + k_1 z_{2n+1} : n \in \omega\} \in \langle \{z_\eta : \eta < I_\mu\} \rangle \subseteq \langle \{z_\eta : \eta < I_\xi\} \rangle$. Pelo outro lado, suponha que existam $k_0, k_1 \in \mathbb{Z}_p$ com $(k_0, k_1) \neq (0, 0)$ tais que

$$p - \lim\{k_0 z_{2n} + k_1 z_{2n+1} : n \in \omega\} \in \langle \{z_\eta : \eta < I_\mu\} \rangle \subseteq \langle \{z_\eta : \eta < I_\xi\} \rangle.$$

Então, existe $\lambda < \xi$ tal que o p-limite de $\{k_0 z_{2n} + k_1 z_{2n+1} : n \in \omega\}$ está em $\langle \{z_\eta : \eta < I_\lambda\} \rangle$. Pelo item v) para λ , segue-se que $p \in P_\lambda \subseteq P_\xi$. Logo, as duas definições são equivalentes.

Vale o item vi). De fato, se $p \in P_\xi$, então existe $\beta < \xi$ tal que $p \in P_\beta$. Pelo item vi) para β , existe $j < 2$ tal que $p - \lim\{z_{2n+j} : n \in \omega\} \notin \langle \{z_\eta : \eta < \mathfrak{c} \setminus S_\beta\} \rangle$. Pelo item x), $S_\beta \subseteq S_\xi$. Portanto, $p - \lim\{z_{2n+j} : n \in \omega\} \notin \langle \{z_\eta : \eta < \mathfrak{c} \setminus S_\xi\} \rangle$ e vale o item vi) para ξ .

Seja β_ξ como no item iv). Pela escolha de $\{f_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$, existe uma quantidade não-enumerável de f_μ 's que são iguais a f_{β_ξ} . Podemos tomar α_ξ tal que $f_{\alpha_\xi} = f_{\beta_\xi}$ e $\alpha_\xi \in \mathfrak{c} \setminus (I_\xi \cup S_\xi)$. Valem os itens iii) e iv).

Isto finaliza a nossa construção por indução.

Lema 3.3.4: Seja p um número primo. Suponha que exista um grupo de van Douwen G de ordem p . Então, existe um grupo enumeravelmente compacto cujo quadrado não o é.

Demonstração: Sejam $\{f_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$, $\{z_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$, $\{p_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$, $\{I_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$, $\{\alpha_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$, $\{S_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ e $\{P_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ como no lema anterior, de forma que i) - x) são satisfeitos. Seja $I = \bigcup_{\xi < \mathfrak{c}} I_\xi$ e seja $H = \langle \{z_\xi : \xi \in I\} \rangle = \{z_h : h \in \mathbb{Z}_p^{(I)}\}$.

Temos que H é enumeravelmente compacto. De fato, seja $\{t_n : n \in \omega\}$ sequência 1-1 em H . Então, existe $h_n \in \mathbb{Z}_p^{(I)}$ tal que $t_n = z_{h_n}$, $\forall n \in \omega$. Seja $\mu < \mathfrak{c}$ tal que $\bigcup_{n \in \omega} \text{supp}(h_n) \subseteq I_\mu$ e seja $\xi < \mathfrak{c}$ o menor ordinal tal que $f_\xi(n) = h_n$, $\forall n \in \omega$. Pelo item iv), existe $\lambda < \mathfrak{c}$ tal que $\beta_\lambda = \xi$. Pelo item vi), $f_{\alpha_\lambda} = f_\xi$. Então, a sequência pode ser vista como $\{z_{f_{\alpha_\lambda}(n)} : n \in \omega\}$ e $z_{\alpha_\lambda} \in H$ será ponto de acumulação desta sequência, pelo item (II) do lema 3.3.2.

Provaremos agora que H^2 não é enumeravelmente compacto. Considere a sequência $\{(z_{2n}, z_{2n+1}) : n \in \omega\}$. Mostraremos que esta sequência não tem p-limite para nenhum ultrafiltro $p \in \omega^*$.

Caso A. $p \in \omega^* \setminus P_\mathfrak{c}$.

Pelo item v), existe $j < 2$ tal que $\{z_{2n+j} : n \in \omega\}$ não possui p-limite no grupo gerado por $\{z_\beta : \beta < \mathfrak{c}\}$ ou para cada $j < 2$ a sequência $\{z_{2n+j} : n \in \omega\}$ não possui p-limite em H_α , $\forall \alpha < \mathfrak{c}$. Em ambos os casos, existe $j < 2$ tal que a sequência $\{z_{2n+j} : n \in \omega\}$ não possui p-limite em H . Logo, $\{(z_{2n}, z_{2n+1}) : n \in \omega\}$ não possui p-limite em $H \times H$.

Caso B. $p \in P_\mathfrak{c}$.

Pela definição de $P_\mathfrak{c}$, existe $\beta < \mathfrak{c}$ tal que $p \in P_\beta$. Existe $j < 2$ tal que $\{z_{2n+j} : n \in \omega\}$ não tem p-limite em H pelo item vi), uma vez que $H = \langle \{z_\eta : \eta \in I\} \rangle$ e $I \cap S_{\beta+1} = \emptyset$. Portanto, a sequência $\{(z_{2n}, z_{2n+1}) : n \in \omega\}$ não possui p-limite em $H \times H$.

3.4 Grupo enumeravelmente compacto cujo quadrado não é enumeravelmente compacto a partir de um grupo de van Douwen livre.

Obteremos nesta secção resultados análogos aos da secção anterior para grupos abelianos livres. Primeiramente, vamos ao lema que obtém um resultado análogo ao lema 3.3.1 da secção anterior, mas a partir de um grupo livre de van Douwen G .

Lema 3.4.1: Seja G um grupo livre de van Douwen. Seja $\{f_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$ uma enumeração de todas as funções injetoras $f : \omega \mapsto \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})}$ com $\bigcup_{n \in \omega} \text{supp}(f_\xi(n)) \subseteq \xi$ para cada $\xi \in [\omega, \mathfrak{c})$. Então, existem duas famílias $\{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\} \subseteq G$ e $\{p_\xi : \xi < \mathfrak{c}\} \subseteq \omega^*$ tais que

- a) $\{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ é um conjunto independente;
- b) x_ξ é o p_ξ -limite de $\{x_{f_\xi(n)} : n \in \omega\}$, $\forall \xi \in [\omega, \mathfrak{c})$.

Demonstração: Existe um conjunto independente $Y = \{y_\alpha : \alpha < \theta\}$ para algum cardinal θ maior ou igual a $\mathfrak{c}$ tal que Y gera G , uma vez que a cardinalidade do grupo de van Douwen é maior ou igual a $\mathfrak{c}$. Assim, podemos tomar um conjunto independente $\{x_n : n \in \omega\}$ contido em G . As condições a) e b) são claramente satisfeitas para ω no lugar de $\mathfrak{c}$.

Suponha que $\{x_\xi : \xi < \mu\}$ foi obtido para algum $\mu < \mathfrak{c}$, satisfazendo a) e b) com μ no lugar de $\mathfrak{c}$. Do fato de que $\bigcup_{n \in \omega} \text{supp}(f_\mu(n)) \subseteq \mu$, temos que a sequência $\{x_{f_\mu(n)} : n \in \omega\}$ já está definida e é 1-1. Temos também que o grupo G é enumeravelmente compacto e não possui sequências não-triviais convergentes. Assim, a sequência $\{x_{f_\mu(n)} : n \in \omega\}$ tem pelo menos $\mathfrak{c}$ pontos de acumulação.

Para cada $\xi < \mu$, seja F_ξ um subconjunto finito de θ tal que x_ξ é gerado por $\{y_\eta : \eta \in F_\xi\}$.

Faça $F = \bigcup_{\xi < \mu} F_\xi$. Como o grupo gerado por $\{y_\eta : \eta \in F\}$ tem tamanho menor do que $\mathfrak{c}$, existe um ponto de acumulação x_μ de $\{x_{f_\mu(n)} : n \in \omega\}$ que não está no grupo $\langle \{y_\eta : \eta \in F\} \rangle$. Seja p_μ um ultrafiltro livre tal que x_μ é p_μ -limite de $\{x_{f_\mu(n)} : n \in \omega\}$. O item b) é claramente satisfeito.

Basta provar agora que vale o item a) para μ , ou seja, $\{x_\xi : \xi \leq \mu\}$ é independente. Sejam $n_0, \dots, n_k$ inteiros diferentes de zero e $\xi_0, \dots, \xi_k$ ordinais dois a dois distintos no máximo iguais a μ . Por contradição, assuma que $n_0x_{\xi_0} + \dots + n_kx_{\xi_k} = 0$. Sem perda de generalidade, assuma que $\xi_0 = \mu$. Então,

$$(*) \quad n_0x_{\xi_0} = -n_1x_{\xi_1} - \dots - n_kx_{\xi_k} \text{ é elemento de } \langle \{y_\eta : \eta \in F\} \rangle.$$

Como $x_{\xi_0} \notin \langle \{y_\eta : \eta \in F\} \rangle$, existe um elemento diferente de zero $z_0 \in \langle \{y_\eta : \eta \in \theta \setminus F\} \rangle$ tal que

$$(**) \quad x_{\xi_0} - z_0 \in \langle \{y_\eta : \eta \in F\} \rangle.$$

$$\text{Por } (*) \text{ e } (**) \text{ temos que } n_0z_0 = n(z_0 - x_{\xi_0}) + n_0x_{\xi_0} \in \langle \{y_\eta : \eta \in F\} \rangle.$$

Portanto, $n_0z_0 \in \langle \{y_\eta : \eta \in F\} \rangle \cap \langle \{y_\eta : \eta \in \theta \setminus F\} \rangle$. Como $\{y_\eta : \eta \in \theta\}$ é independente, segue-se que $n_0z_0 = 0$. Mas o grupo G não possui elementos de ordem finita. Logo, $z_0 = 0$. Contradição.

Uma vez construído $\{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ satisfazendo os itens a) e b) do lema anterior temos que para construir um grupo enumeravelmente compacto cujo quadrado não é enumeravelmente compacto para o caso de G grupo livre requer apenas pequenas modificações nas demonstrações dos lemas análogos da secção anterior, trocando apenas " $\mathbb{Z}_p$ " por " $\mathbb{Z}$ " e "linearmente independente" por "independente". Não demonstraremos os lemas novamente, apenas daremos os seus enunciados com as modificações necessárias.

Lema 3.4.2: Sejam G , $\{f_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$, $\{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ e $\{p_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$ como no lema anterior. Então existe uma família $\{z_\xi : \xi < \mathfrak{c}\} \subseteq G \times \mathbb{Z}^\mathfrak{c}$ tal que:

- (I) $\{z_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ é conjunto independente;
- (II) z_ξ é o p_ξ -limite de $\{z_{f_\xi(n)} : n \in \omega\}$, $\forall \xi \in [\omega, \mathfrak{c})$;
- (III) $\forall A \subseteq \omega$, $\exists \alpha \in \mathfrak{c}$ tal que $\{n \in \omega : z_n(\alpha) = 1\} = A$ e $\{n \in \omega : z_n(\alpha) = 0\} = \omega \setminus A$;
- (IV) Se $p, q \in \omega^*$ e $p \neq q$, então para quaisquer $k_0, k_1, l_0, l_1 \in \mathbb{Z}_p$ com (k_0, k_1, l_0, l_1) diferente de $(0, 0, 0, 0)$ teremos $p - \lim\{\sum_{j<2} k_j z_{2n+j} : n \in \omega\} \neq q - \lim\{\sum_{j<2} l_j z_{2n+j} : n \in \omega\}$.

Lema 3.4.3: Seja $\mathcal{F} = \{f_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$ uma enumeração de todas as funções injetoras $f : \omega \mapsto \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})}$ tal que $\bigcup_{n \in \omega} \text{supp}(f_\xi(n)) \subseteq \xi$ para cada $\xi \in [\omega, \mathfrak{c})$ e cada $f : \omega \mapsto \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})}$ injetora aparece $\mathfrak{c}$ vezes na enumeração. Sejam $\{z_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ e $\{p_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$ que satisfazem os itens (I)-(IV) do lema anterior para $\mathcal{F}$ acima. Então existem famílias $\{I_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$, $\{\alpha_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$, $\{S_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ e $\{P_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ que satisfazem:

- i) $I_\xi = \omega \cup \{\alpha_\eta : \eta < \xi\}$, $\forall \xi < \mathfrak{c}$, com $\alpha_\eta \in \mathfrak{c}$, $\forall \eta < \mathfrak{c}$;
- ii) $S_\xi \subseteq \mathfrak{c}$, $\forall \xi < \mathfrak{c}$;
- iii) $(I_\xi \cup \{\alpha_\xi\}) \cap S_\xi = \emptyset$, $\forall \xi < \mathfrak{c}$;
- iv) $f_{\alpha_\xi} = f_{\beta_\xi}$, sendo β_ξ o menor ordinal β em $[\omega, \mathfrak{c})$ para o qual $\bigcup_{n \in \omega} \text{supp}(f_\beta(n)) \subseteq I_\xi$ e $f_\beta \neq f_{\alpha_\eta}$, $\forall \eta < \xi$;
- (v) para cada $p \in \omega^*$, temos que $p \in P_\xi$ se, e somente se, $p - \lim\{z_{2n+j} : n \in \omega\} \in \langle \{z_\eta : \eta < \mathfrak{c}\} \rangle$, $\forall j < 2$, e $\exists k_0, k_1 \in \mathbb{Z}$ com $(k_0, k_1) \neq (0, 0)$ tais que $p - \lim\{k_0 z_{2n} + k_1 z_{2n+1} : n \in \omega\} \in \langle \{z_\eta : \eta < I_\xi\} \rangle$.
- (vi) se $p \in P_\xi$, então existe $j < 2$ tal que $p - \lim\{z_{2n+j} : n \in \omega\} \notin \langle \{z_\eta : \eta < \mathfrak{c} \setminus S_\xi\} \rangle$;
- (vii) $|P_\xi| \leq |\xi| + \omega$, $\forall \xi < \mathfrak{c}$;
- (viii) $|S_\xi| \leq |\xi| + \omega$, $\forall \xi < \mathfrak{c}$;
- (ix) se $\gamma < \xi < \mathfrak{c}$, então $P_\gamma \subseteq P_\xi$ e se ξ é limite, então $P_\xi = \bigcup_{\gamma < \xi} P_\gamma$;
- (x) se $\gamma < \xi < \mathfrak{c}$, então $S_\gamma \subseteq S_\xi$ e se ξ é limite, então $S_\xi = \bigcup_{\gamma < \xi} S_\gamma$.

3.5 Grupo enumeravelmente compacto cujo quadrado não é enumeravelmente compacto a partir de um ultrafiltro seletivo.

O lema seguinte mostra que se existe um grupo abeliano enumeravelmente compacto sem sequências não-triviais convergentes, então existe um grupo do mesmo tipo que, em adição, é espaço vetorial sobre $\mathbb{Z}_p$ para algum primo p ou é livre. Com os resultados obtidos nas secções anteriores deste capítulo teremos que a existência de um ultrafiltro seletivo implica, em ZFC, na existência de um grupo enumeravelmente compacto, mas cujo quadrado não o é.

Lema 3.5.1: Seja G um grupo de van Douwen. Então, G contém um subgrupo de van Douwen de ordem p para algum número primo p ou contém um subgrupo abeliano de van Douwen livre.

Demonstração: Dado um inteiro positivo n , denote por $G[n]$ o conjunto $\{g \in G : ng = 0\}$. Denote por $t(G)$ o subgrupo de torção de G . Se $|t(G)| \geq \mathfrak{c}$, então existe um número positivo n tal que $|G[n]| \geq \mathfrak{c}$, já que $\mathfrak{c}$ tem cofinalidade não-enumerável e $t(G) = \bigcup_{n \in \omega} G[n]$. Seja N o menor inteiro para o qual $|G[N]| \geq \mathfrak{c}$. $G[N]$ é subgrupo fechado, pois é imagem inversa por função contínua do fechado $\{0\}$ e, portanto, um subgrupo de van Douwen. Seja P um divisor primo de N . Afirmamos que $N = P$. De fato, se N não é primo, então existe $M < N$ tal que $N = MP$. Sabemos que todo subgrupo fechado infinito de um grupo de van Douwen deve ter cardinalidade $\geq \mathfrak{c}$. Daí, pela minimalidade de N , devemos ter $|G[M]| < \omega$. Considere o homomorfismo $\phi : G[N] \rightarrow G[P]$ tal que $\phi(g) = Mg$. É claro que o kernel de ϕ é $G[M]$ e pelo primeiro teorema do isomorfismo teremos que o grupo quociente $G[N]/G[M]$ será isomorfo a um subgrupo de $G[P]$. Como

$G[M]$ é subgrupo finito e $|G[N]| \geq \mathfrak{c}$ obtemos que $|G[N]/G[M]| \geq \mathfrak{c}$ fazendo com que $|G[P]| \geq \mathfrak{c}$, contrariando a minimalidade de N . Logo, $N = P$ é primo.

Agora, suponha que $|t(G)| < \mathfrak{c}$. Seja $\{f_\xi : 0 < \xi < \mathfrak{c}\}$ uma enumeração de todas as funções injetoras $f : \omega \mapsto \mathbb{Z}^{(\mathfrak{c})}$ tais que $\bigcup_{n \in \omega} \text{supp}(f_\xi(n)) \subseteq \xi$, $\forall \xi < \mathfrak{c}$. Encontraremos uma família independente $\{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\} \subseteq G$ que gera um grupo abeliano livre. Começemos com um x_0 arbitrário tal que $x_0 \in G \setminus t(G)$. Suponha que $\{x_\beta : \beta < \xi\}$ já esteja definido e que

- a) $X_\xi = \{x_\beta : \beta < \xi\}$ é uma base para um grupo livre;
- b) x_β é ponto de acumulação de $\{x_{f_\beta(n)} : n \in \omega\}$, $\forall \beta \in (0, \xi)$.

Definiremos x_ξ . Seja $\mathcal{A}$ o conjunto de todos os pontos de acumulação de $\{x_{f_\xi(n)} : n \in \omega\}$ distintos do elemento neutro do grupo. Suponhamos que exista $t \in \mathcal{A}$ tal que $\langle \{t\} \rangle \cap \langle X_\xi \cup t(G) \rangle = \{0\}$. Então, $X_\xi \cup \{t\}$ é base para um grupo abeliano livre. De fato, suponhamos que $n_0, \dots, n_l \in \mathbb{Z}$ e $\mu_1, \dots, \mu_l$ são ordinais dois a dois distintos $\leq \xi$ tais que $n_0 t + n_1 x_{\mu_1} + \dots + n_l x_{\mu_l} = 0$. Sem perda de generalidade, podemos considerar que $n_0 \neq 0$. Então, $n_0 t \in \langle \{t\} \rangle \cap \langle X_\xi \rangle$. Logo, temos que $n_0 t = 0 \implies t \in \langle \{t\} \rangle \cap \langle X_\xi \cup t(G) \rangle \implies t = 0$, o que é contradição. Portanto, para finalizar o lema basta provarmos que existe $t \in \mathcal{A}$ tal que $\langle \{t\} \rangle \cap \langle X_\xi \cup t(G) \rangle = \{0\}$.

Suponhamos por contradição que tal elemento $t \in \mathcal{A}$ não exista. Então, para cada $t \in \mathcal{A}$ existe um inteiro positivo n_t tal que $n_t t \in H := \langle X_\xi \cup t(G) \rangle$. Seja $\mathcal{A}_n = \{t \in \mathcal{A} : n_t = n\}$. Como $|\mathcal{A}| \geq \mathfrak{c}$ e $\mathfrak{c}$ tem cofinalidade não-enumerável, existe um inteiro positivo n para o qual $|\mathcal{A}_n| \geq \mathfrak{c}$. Para cada $h \in H$, seja $\mathcal{A}_{n,h} = \{t \in \mathcal{A}_n : nt = h\}$. Como $|H| < \mathfrak{c}$, existe $h \in H$ tal que $|\mathcal{A}_{n,h}| \geq |t(G)|^+$. Tome $z \in \mathcal{A}_{n,h}$. Então, para cada $t \in \mathcal{A}_{n,h}$, $n(t - z) = nt - nz = h - h = 0$. Assim, $t - z \in t(G)$ para todo $t \in \mathcal{A}_{n,h}$. Uma vez que $|\mathcal{A}_{n,h}| \geq |t(G)|^+$, temos que existem $t_0, t_1 \in \mathcal{A}_{n,h}$ distintos tais que $t_0 - z = t_1 - z$. Portanto, $t_0 = t_1$, o que é contradição.

Isto finaliza a construção de $X = \{x_\beta : \beta < \mathfrak{c}\}$ satisfazendo os itens a) e b) com $\mathfrak{c}$ no

lugar de ξ . O grupo gerado por X é um subgrupo livre e enumeravelmente compacto de G e, portanto, um grupo de van Douwen livre.

Lema 3.5.2 Suponha que exista um grupo abeliano livre de van Douwen G . Então, existe um grupo enumeravelmente compacto cujo quadrado não é enumeravelmente compacto.

Capítulo 4

Produto finito de grupos enumeravelmente compactos.

Neste capítulo obteremos um exemplo de grupo topológico enumeravelmente compacto G tal que dado $k \in \omega$ qualquer G^k é enumeravelmente compacto, mas G^{k+1} não é enumeravelmente compacto. Este exemplo é obtido em [10], mas de forma diferente da aqui apresentada. Foi feito um esforço nesta dissertação no sentido de uniformizar a notação e as demonstrações relacionadas aos contra-exemplos obtidos neste capítulo e nos capítulos seguintes, daí o porquê deste exemplo ser diferente do obtido em [10]. Começamos com um lema muito parecido com o lema 3.1.3, que será utilizado nas construções deste capítulo e dos capítulos posteriores. Para o lema abaixo, considere κ e α cardinais quaisquer.

Lema 4.1: Sejam $\{p_j : j < \omega\}$ uma família de ultrafiltros seletivos incomparáveis, F um subconjunto finito de $\kappa \times \alpha$, E um subconjunto enumerável de $\kappa \times \alpha$ contendo F e $\{g_\xi : \xi \in E\}$ uma família enumerável de funções de ω em $[\kappa \times \alpha]^{<\omega}$. Se $\{S_j : j < \omega\}$ é uma família enumerável de subconjuntos de $\kappa \times \alpha$ tal que $\{[g_\xi]_{p_j} : \xi \in S_j\} \cup \{[\vec{\mu}]_{p_j} : \mu \in \kappa \times \alpha\}$ é linearmente independente em $([\kappa \times \alpha]^{<\omega})^\omega / p_j$ para cada $j \in \omega$, então existem uma

sequência crescente $\{b_i : i \in \omega\} \subseteq \omega$, uma função r de ω em ω e uma sequência $\{E_i : i \in \omega\}$ de subconjuntos finitos de E tais que:

- (a) $F \subseteq E_0$;
 - (b) $E = \bigcup_{i \in \omega} E_i$;
 - (c) $E_{i+1} \supseteq E_i \cup \bigcup \{g_\xi(b_i) : \xi \in E_i\}$ para cada $i \in \omega$;
 - (d) $\{g_\xi(b_i) : \xi \in E_i \cap S_{r(i)}\} \cup \{\{\mu\} : \mu \in E_i\}$ é linearmente independente para cada $i \in \omega$;
 - (e) $\{b_k : k \in r^{-1}(j)\} \in p_j$ para todo $j \in \omega$.
- Além disso, se $\alpha \in \omega$ e $k \in \omega$, E_i pode ser tomado para todo $i \in \omega$ de tal forma que:
- (f) $\omega \times \alpha \subseteq E$ e $\omega \times \alpha \cap E_i = (k+1)N \times \alpha$, para algum $N \in \omega$.

Demonstração: Definiremos primeiramente uma família $\{F_n : n \in \omega\}$ de subconjuntos finitos de E . Defina:

- (0) $F_0 := F$, e por indução em ω , tome um subconjunto finito F_{n+1} de E tal que:
- (1) $F_{n+1} \supseteq F_n \cup \bigcup \{g_\beta(m) : m \leq n, \beta \in F_n\}$;
- (2) $E = \bigcup_{n \in \omega} F_n$.

Seja $A_n^j = \{k \in \omega : \{g_\xi(k) : \xi \in F_n \cap S_j\} \cup \{\{\mu\} : \mu \in F_n\} \text{ é l.i.}\}$, $\forall j, n \in \omega$. Por hipótese, sabemos que $\{[g_\xi]_{p_j} : \xi \in S_j\} \cup \{[\vec{\mu}]_{p_j} : \mu \in E\}$ é linearmente independente. Como F_n é finito, temos que $\Delta(\{[g_\xi]_{p_j} : \xi \in F_n \cap S_j\} \cup \{[\vec{\mu}]_{p_j} : \mu \in F_n\}) \neq [0]_{p_j}$, ou seja, existe $C_j \in p_j$ tal que $k \in C_j \implies \Delta(\{g_\xi(k) : \xi \in F_n \cap S_j\} \cup \{\mu : \mu \in F_n\}) \neq \emptyset$. Daí, $\{g_\xi(k) : \xi \in F_n \cap S_j\} \cup \{\mu : \mu \in F_n\}$ é linearmente independente. Logo, $C_j \subseteq A_n^j$ e, portanto, $A_n^j \in p_j, \forall j, n \in \omega$.

Ultrafiltros seletivos são P-pontos, logo existe A_j tal que:

- (3) $A_j \in p_j$ e $A_j \setminus A_n^j$ é finito, $\forall j \in \omega$ e $\forall n \in \omega$.

Seja $h_j : \omega \longrightarrow \omega$ função crescente tal que

- (4) $A_j \setminus A_n^j \subseteq h_j(n), \forall j \in \omega$.

Para todo $j \in \omega$, h_j define uma partição em ω :

$[0, h_j(1)], \{[h_j(n) + 1, h_j(n + 1)] : n \geq 1\}$. Pela seletividade de p_j , existe $C_j \in p_j$ tal que $|[0, h_j(1)] \cap C_j| = 1$ e $|[h_j(n) + 1, h_j(n + 1)] \cap C_j| = 1, \forall n \geq 1$. Tome $B_j = (C_j \cap A_j) \setminus ([0, h_j(1)] \cap C_j)$. Então,

(5) $B_j \cap h_j(1) = \emptyset$, $B_j \subseteq A_j$, $B_j \in p_j$ e $|[h_j(n) + 1, h_j(n + 1)] \cap B_j| \leq 1, \forall j \in \omega$ e $\forall n \in \omega$.

Seja $\{a_n^j : n \in \omega\}$ enumeração crescente de B_j , $\forall j \in \omega$. De (5), segue-se que $a_n^j > h_j(n)$, $\forall j \in \omega$ e $\forall n \in \omega$. Assim, de (4) temos:

(6) $n < a_n^j$ e $a_n^j \in A_n^j$, $\forall j \in \omega$ e $\forall n \in \omega$.

Portanto, as sequências $\{a_n^j : n \in \omega\}$, $\forall j \in \omega$, satisfazem as condições do lema 1.2.6. Por esse lema, existe uma família $\{I_j : j \in \omega\}$ de subconjuntos de ω satisfazendo:

(7) $\{a_k^j : k \in I_j\} \in p_j$, $\forall j \in \omega$;

(8) $\{[k, a_k^j] : j \in \omega, k \in I_j\}$ são 2 a 2 disjuntos.

A propriedade (8) implica que $\{I_j : j \in \omega\}$ são 2 a 2 disjuntos. Seja $\{i_m : m \in \omega\}$ enumeração crescente de $\bigcup_{j < \omega} I_j$ e seja $r : \omega \rightarrow \omega$ tal que $r(m) = j$ se, e somente se, $i_m \in I_j$. A função r está bem definida porque os I_j 's são 2 a 2 disjuntos.

Defina $b_m := a_{i_m}^{r(m)}$ e $E_m := F_{i_m}$, para todo $m \in \omega$.

As propriedades (0) e (2) implicam que valem os itens (a) e (b), respectivamente. O item (e) segue da definição de r e de (7). O item (d) também é satisfeito. De fato, temos que $b_m = a_{i_m}^{r(m)} \in A_{i_m}^{r(m)}$ para cada $m \in \omega$, pelo item (6). Pela definição de $A_{i_m}^{r(m)}$, a família $\{g_\xi(b_m) : \xi \in E_m \cap S_{r(m)}\} \cup \{\{\mu\} : \mu \in E_m\} = \{g_\xi(b_m) : \xi \in F_{i_m} \cap S_{r(m)}\} \cup \{\{\mu\} : \mu \in F_{i_m}\}$ é linearmente independente para cada $m \in \omega$.

Finalmente, checamos a condição (c). Por (8), $b_m = a_{i_m}^{r(m)} \leq i_{m+1} - 1$ e $E_m = F_{i_m} \subseteq F_{i_{m+1}-1}$, para todo $m \in \omega$. Assim, temos que $E_m \cup \{g_\xi(b_m) : \xi \in E_m\}$ está contido em $F_{i_{m+1}-1} \cup \bigcup \{g_\xi(k) : k \leq i_{m+1} - 1, \xi \in F_{i_{m+1}-1}\} \subseteq F_{i_{m+1}} = E_{m+1}$, para cada $m \in \omega$. Logo, a condição (c) é também satisfeita e a prova está completa para os itens (a)-(e).

Para o item (f), é suficiente na construção de $\{F_i : i \in \omega\}$ garantir que para cada $i \in \omega$, $\omega \times \alpha \cap F_i = (k+1)N \times \alpha$, já que α é finito, para algum $N \in \omega$. Isto é possível pois cada F_i é finito. Os E_i 's claramente satisfazem a condição (f).

Lema 4.2: Seja $\{p_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ coleção de ultrafiltros seletivos incomparáveis. Sejam $F_0, F_1, \dots, F_k$, $k+1$ subconjuntos finitos de $\mathfrak{c} \times k$ e $\{g_{\xi,i} : \xi < \mathfrak{c} \text{ e } i < k\} \subseteq ([\mathfrak{c} \times k]^{<\omega})^\omega$ tal que $\bigcup_{n \in \omega}^{i < k} g_{\xi,i}(n) \subseteq \xi \times k$, se $\xi > \omega$, ou $\bigcup_{n \in \omega}^{i < k} g_{\xi,i}(n) \subseteq \omega \times k$, caso contrário. Tome $g_{\xi,i}$ injetora $\forall \xi < \mathfrak{c}$ e $i < k$. Considere ainda a família $\{A_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ de subconjuntos de k tal que dado $\xi \in \mathfrak{c}$, $\{[g_{\xi,i}]_{p_\xi} : i \in A_\xi\} \cup \{[\vec{\mu}]_{p_\xi} : \mu \in \mathfrak{c}\}$ é linearmente independente. Então, existe um homomorfismo $\phi : [\mathfrak{c} \times k]^{<\omega} \longrightarrow \{0, 1\}$ tal que:

- (i) $\phi(F_j) = 1$, se $j < k+1$ e $F_j \neq \emptyset$;
- (ii) $\{n \in \omega : \phi(g_{\xi,i}(n)) = \phi(\{\xi\} \times \{i\})\} \in p_\xi, \forall i \in A_\xi \subseteq k, \forall \xi < \mathfrak{c}$;
- (iii) $\{n \in \omega : (\phi(\{(k+1)n\} \times \{0\}), \phi(\{(k+1)n+1\} \times \{0\}), \dots, \phi(\{(k+1)n+k\} \times \{0\})) = (\phi(F_0), \phi(F_1), \dots, \phi(F_k))\}$ é finito.

Demonstração: Seja $F = F_0 \cup F_1 \cup \dots \cup F_k$. Existe um subconjunto enumerável E de $\mathfrak{c} \times k$ tal que $F \cup (\omega \times k) \subseteq E$ e $g_{\xi,i}(n) \subseteq E, \forall (\xi, i) \in E$ e $n \in \omega$. Isto pode ser feito por indução: faça $S(\omega) = (\omega \times k)$ e supondo conhecido $S(\mu), \forall \mu < \xi$, seja $S(\xi) = (\{\xi\} \times k) \cup \bigcup_{(\{\mu\} \times k) \cap (\bigcup_{n \in \omega}^{i < k} g_{\xi,i}(n)) \neq \emptyset} S(\mu)$. Ao final, faça $E = \bigcup_{(\mu, i) \in F} S(\mu)$. Perceba que E é construído de tal forma que $E = E' \times k$, ou seja, se $(\xi, i) \in E$ então $(\xi, j) \in E, \forall j \in k$. Use o lema anterior para $\{p_\xi : \xi < E'\}, F, E, \{g_{\xi,i} : (\xi, i) \in E\}$ e $\{S_\xi = \{(\xi, i) : i \in A_\xi\} : \xi \in E'\}$ para obter $\{b_i : i \in \omega\}, r : \omega \longmapsto E'$ e $\{E_i : i \in \omega\}$ satisfazendo:

- (0) $\forall i \in \omega, E_i \cap (\omega \times k) = (k+1)N \times k$, para algum $N \in \omega$;
- (1) $F \subseteq E_0$;
- (2) $E = \bigcup_{i \in \omega} E_i$;

- (3) $E_{i+1} \supseteq \bigcup \{g_{\xi,j}(b_i) : (\xi, j) \in E_i\} \cup E_i, \forall i \in \omega;$
- (4) $\{g_{r(i),j}(b_i) : \forall j \in A_{r(i)}\} \cup \{(\mu, t) : (\mu, t) \in E_i\}$ é linearmente independente;
- (5) $\{b_i : i \in r^{-1}(\xi)\} \in p_\xi, \forall \xi \in E'.$

Definiremos primeiramente ϕ em $[E]^{<\omega}$. Isto é feito por indução no comprimento ω . Para todo $j < k + 1$ seja $\phi(F_j) = 1$ se $F_j \neq \emptyset$ e estenda ϕ a um homomorfismo em $[E_0]^{<\omega}$. Propriedade (i) será satisfeita independentemente da forma que escolhermos estender o homomorfismo ϕ . Queremos definir ϕ no subgrupo $[E_n]^{<\omega}, \forall n \in \omega$, de tal forma que:

- (6) $\phi(g_{r(m),j}(b_m)) = \phi(\{r(m)\} \times \{j\}), \forall m < n$ e $j \in A_{r(m)}$, com $A_{r(m)} \subseteq k$, se $r(m) \in E'_m$;
- (7) $(\phi(\{(k+1)t\} \times \{0\}), \phi(\{(k+1)t+1\} \times \{0\}), \dots, \phi(\{(k+1)t+k\} \times \{0\})) \neq (\phi(F_0), \phi(F_1), \dots, \phi(F_k)), \forall m < n$ e $(k+1)t \in (E'_{m+1} \setminus E'_m) \cap \omega$.

Condições (6) e (7) são trivialmente satisfeitas para $n = 0$. Suponha que são satisfeitas para n . Provaremos que o homomorfismo ϕ pode ser estendido a $[E_{n+1}]^{<\omega}$ de forma que (6) e (7) valem para $n + 1$.

Pelo item (4), $V = \{g_{r(n),j}(b_n) : j \in A_{r(n)}\} \cup \{(\mu, q) : (\mu, q) \in E_n\}$ é conjunto linearmente independente. Chamemos $C = \{(\mu, q) : (\mu, q) \in E_n\}$ e $W_t = \{(\{(k+1)t\} \times \{0\}), \{(k+1)t+1\} \times \{0\}, \dots, \{(k+1)t+k\} \times \{0\}\}$. Afirmamos que para todo $t \in B_n = \{m \in \omega : (k+1)m \in E'_{n+1} \setminus E'_n\}$, podemos tomar $s_t \in k$ tal que $\{g_{r(n),j}(b_n) : j \in A_{r(n)}\} \cup \{(\{(k+1)t+s_t\} \times \{0\}) : t \in B_n\} \cup C$ é linearmente independente. Primeiramente, temos que se $t \in B_n$, então $W_t \subseteq E_{n+1} \setminus E_n$, pois $E'_m \cap \omega = (k+1)N, \forall m \in \omega$ ($N \in \omega$). Assim, obtemos o conjunto $\{(\{(k+1)t\} \times \{0\}), \{(k+1)t+1\} \times \{0\}, \dots, \{(k+1)t+k\} \times \{0\} : t \in B_n\} \cup C$ que é linearmente independente. Se $B_n = \{t_0, t_1, \dots, t_j\}$, como a dimensão de W_{t_0} é maior do que $|A_{r(n)}|$, existe $s_{t_0} \in k+1$ tal que $V_{t_0} = \{g_{r(n),j}(b_n) : j \in A_{r(n)}\} \cup \{(\{(k+1)t+s_{t_0}\} \times \{0\})\} \cup C$ é linearmente independente. Para o próximo passo, considere o conjunto l.i. $W_{t_1} \cup \{(\{(k+1)t+s_{t_0}\} \times \{0\})\} \cup C$.

Novamente, como a dimensão de W_{t_1} é maior do que $|A_{r(n)}|$, existe $s_{t_1} \in k+1$ tal que $V_{t_1} = \{g_{r(n),j}(b_n) : j \in A_{r(n)}\} \cup \{(k+1)t + s_{t_1} \times \{0\}\} \cup \{(k+1)t + s_{t_0} \times \{0\}\} \cup C$ é linearmente independente. Após um número finito de passos, encontramos V_{t_j} , o conjunto da afirmação.

Pelo item (3), podemos estender $\phi|_{[E_n]^{<\omega}}$ a $[E_{n+1}]^{<\omega}$ tal que $\phi(g_{r(n),j}(b_n)) = \phi(\{r(n)\} \times \{j\})$, $\forall j \in A_{r(n)}$ - caso $r(n) \in E'_n$, e $\phi(\{(k+1)t + s_t\} \times \{0\}) = 1 - \phi(F_{s_t})$. Portanto, (6) e (7) são satisfeitas para $n+1$.

A propriedade (2) e a definição de E implicam que se $t \in \omega \setminus E'_0$, então existe $n \in \omega$ tal que $(k+1)t \in E'_{n+1} \setminus E'_n$. A propriedade (7) implica então em

$\{t \in \omega : (\phi(\{(k+1)t\} \times \{0\}), \phi(\{(k+1)t+1\} \times \{0\}), \dots, \phi(\{(k+1)t+k\} \times \{0\})) = (\phi(F_0), \phi(F_1), \dots, \phi(F_k))\} \subseteq E'_0$, que é finito. Assim, qualquer extensão do homomorfismo ϕ a $[\mathbf{c} \times k]^{<\omega}$ satisfaz (iii).

Afirmamos que ϕ satisfaz a condição (ii) para todo $(\xi, j) \in E$. De fato, por (2), dado $(\xi, j) \in E$, $\exists n \in \omega$ tal que $(\xi, j) \in E_{n+1} \setminus E_n$. Considere inicialmente $j \in A_\xi$. Por (6), $\phi(\{\xi\} \times \{j\}) = \phi(g_{\xi,j}(b_m))$, $\forall m \in r^{-1}(\xi) \setminus n+1$, pois $\xi \in E'_{n+1}$. Como $r^{-1}(\xi) \setminus n+1 \in p_\xi$ temos que (ξ, j) satisfaz a condição (ii). Caso $j \notin A_\xi$, como $g_{\xi,j}(b_n)$ é combinação linear finita de elementos em $\{g_{\xi,i}(b_n) : i \in A_\xi\} \cup \{(\mu, q) : (\mu, q) \in E_n\}$, temos que $\{g_{\xi,j}(b_n) : n \in \omega\}$ possui p_ξ -limite: se $g_{\xi,j}(b_n) = \Delta(\{g_{\xi,i}(b_n) : i \in L_1\} \cup \{(\mu, q) : (\mu, q) \in L_2\})$, L_1 e L_2 subconjuntos finitos de A_ξ e E_n , respectivamente, então

$$\phi(g_{\xi,j}(b_n)) = \sum(\{\phi(g_{\xi,i}(b_n)) : i \in L_1\} + \{\phi(\{(\mu, q)\}) : (\mu, q) \in L_2\}).$$

Daí,

$\{n \in \omega : \phi(g_{\xi,j}(b_n)) = (\sum(\{\phi(\{\xi\} \times \{i\}) : i \in L_1\}) + \sum(\{\phi(\{(\mu, q)\}) : (\mu, q) \in L_2\}))\}$ contém o conjunto $\bigcap \{n \in \omega : \phi(g_{\xi,i}(b_n)) = \phi(\{\xi\} \times \{i\}), \forall i \in L_1\}$. Como a última intersecção de elementos de p_ξ é finita e p_ξ é filtro, temos que o primeiro conjunto pertence a p_ξ e segue-se que $\{g_{\xi,j}(b_n) : n \in \omega\}$ possui p_ξ -limite.

A construção estará terminada se estendermos $\phi|_{[E]^{<\omega}}$ a $[\mathbf{c} \times k]^{<\omega}$ tal que (ii) é satisfeita

para cada $(\xi, t) \in (\mathfrak{c} \times k) \setminus E$, com $t \in A_\xi$. Por indução em $\mathfrak{c} \setminus E'$, definiremos ϕ em $[E \cup (\xi, t)]^{<\omega}$ tal que (ii) é satisfeita para cada $(\xi, t) \in (\mathfrak{c} \times k) \setminus E$, $t \in A_\xi$. Seja $\gamma < \mathfrak{c}$ o menor ordinal para o qual $\phi(\{(\gamma, t)\})$, com $t \in k$, ainda não foi definido. Temos então que $\forall t \in A_\gamma$, $\phi(\{(\gamma, t)\})$ não está definido e, por outro lado, $\phi|_{[E \cup (\gamma, t)]^{<\omega}}$ está determinado e pela definição de $g_{\gamma, t}$, a sequência $\{\phi(g_{\gamma, t}(k)) : k \in \omega\}$ já está também determinada. O conjunto $\{(\gamma, t) : t \in A_\gamma\} \cup \{(\xi, s) : \xi \in \gamma\}$ é linearmente independente, logo usando a p_γ -compacidade de $\{0, 1\}$, podemos fazer $\phi(\{(\gamma, t)\}) = p_\gamma - \lim \{\phi(g_{\gamma, t}(k)) : k \in \omega\}$, $\forall t \in A_\gamma$. O homomorfismo ϕ satisfaz (ii) para cada (ξ, t) , com $\xi \in \gamma + 1$ e $t \in A_\xi$.

Estamos prontos para construir um grupo G enumeravelmente compacto tal que G^k é enumeravelmente compacto, mas G^{k+1} não é:

Exemplo 4.1: Suponha que existe uma família $\{p_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ de ultrafiltros seletivos incomparáveis. Então existe um grupo G enumeravelmente compacto tal que G^k é enumeravelmente compacto, mas G^{k+1} não é.

Demonstração: Seja $\{g_{\xi, i} : \xi < \mathfrak{c} \text{ e } i < k\} \subseteq ([\mathfrak{c} \times k]^{<\omega})^\omega$ tal que:

- (1) $\bigcup_{n \in \omega}^{i < k} g_{\xi, i}(n) \subseteq \xi \times k$, se $\xi > \omega$, ou $\bigcup_{n \in \omega}^{i < k} g_{\xi, i}(n) \subseteq \omega \times k$, caso contrário;
- (2) $g_{\xi, i}$ é injetora $\forall \xi < \mathfrak{c}$ e $i < k$, e para todo $g \in ([\mathfrak{c} \times k]^{<\omega})^\omega$ função injetora, existe $(\mu, t) \in \mathfrak{c} \times k$ tal que $g = g_{\mu, t}$.

Seja $\mathcal{C} = ([\mathfrak{c} \times k]^{<\omega})^{k+1}$. O conjunto $\mathcal{C}$ indexará a família de homomorfismos que precisaremos. Use o lema anterior para a sequência $\{g_{\xi, i} : \xi < \mathfrak{c} \text{ e } i < k\}$ e para cada $k+1$ -upla $(F_0, F_1, \dots, F_k)$ de forma a obter um homomorfismo $\phi_{(F_0, F_1, \dots, F_k)} : [\mathfrak{c} \times k]^{<\omega} \rightarrow 2$ satisfazendo:

- (3) $\phi_{(F_0, F_1, \dots, F_k)}(F_0) = 1$ se $F_0 \neq \emptyset$;
- (4) $\{n \in \omega : \phi_{(F_0, F_1, \dots, F_k)}(g_{\xi, i}(n)) = \phi_{(F_0, F_1, \dots, F_k)}(\{\xi\} \times \{i\})\} \in p_\xi, \forall i \in A_\xi \subseteq k, \forall \xi < \mathfrak{c}$;

(5) $\{n \in \omega : (\phi_{(F_0, F_1, \dots, F_k)}(\{(k+1)n\} \times \{0\}), \phi_{(F_0, F_1, \dots, F_k)}(\{(k+1)n+1\} \times \{0\}), \dots, \phi_{(F_0, F_1, \dots, F_k)}(\{(k+1)n+k\} \times \{0\})) = (\phi_{(F_0, F_1, \dots, F_k)}(F_0), \phi_{(F_0, F_1, \dots, F_k)}(F_1), \dots, \phi_{(F_0, F_1, \dots, F_k)}(F_k))\}$ é finito.

Seja $\mathcal{H} : [\mathfrak{c} \times k]^{<\omega} \longrightarrow 2^{\mathcal{C}}$ a função diagonal $\Delta_{(F_0, F_1, \dots, F_k) \in \mathcal{C}} \phi_{(F_0, F_1, \dots, F_k)}$ definida por $\pi_{(F_0, F_1, \dots, F_k)} \circ \mathcal{H} = \phi_{(F_0, F_1, \dots, F_k)}$ para cada $(F_0, F_1, \dots, F_k) \in \mathcal{C}$, onde $\pi_{(F_0, F_1, \dots, F_k)} : 2^{\mathcal{C}} \longrightarrow 2$ é a projeção na coordenada $(F_0, F_1, \dots, F_k)$.

Defina $G := \mathcal{H}([\mathfrak{c} \times k]^{<\omega})$ com a topologia de subespaço. Afirmamos que:

(6) O homomorfismo $\mathcal{H}$ é uma imersão.

De fato, para todo F subconjunto finito e não-vazio de $[\mathfrak{c} \times k]^{<\omega}$, a $k+1$ -upla $(F, F, \dots, F)$ está em $\mathcal{C}$. Pelo item (3), $\phi_{(F, F, \dots, F)}(F) \neq 0$. Portanto, $\mathcal{H}(F) \neq 0$.

(7) G^k é enumeravelmente compacto.

É suficiente demonstrar que cada sequência 1-1 em G^k tem ponto de acumulação. Seja $\{(a_0(n), a_1(n), \dots, a_{k-1}(n)) : n \in \omega\}$ sequência 1-1 em $G^k = (\mathcal{H}([\mathfrak{c} \times k]^{<\omega}))^k$ tal que $a_j(n) = \mathcal{H}(F_j^n)$, $\forall n \in \omega$, $j \in k$. Pela construção de $\{g_{\xi, i} : \xi < \mathfrak{c} \text{ e } i < k\} \subseteq ([\mathfrak{c} \times k]^{<\omega})^\omega$, existe $\xi < \mathfrak{c}$ tal que $g_{\xi, j}(n) = F_j^n$, $\forall n \in \omega$, $j \in k$. A sequência pode então ser vista como $\{(\mathcal{H}(g_{\xi, 0}(n)), \mathcal{H}(g_{\xi, 1}(n)), \dots, \mathcal{H}(g_{\xi, k-1}(n))) : n \in \omega\}$. Se $\xi \in \mathfrak{c}$ e $(F_0, F_1, \dots, F_k) \in \mathcal{C}$ então $\phi_{(F_0, F_1, \dots, F_k)}(\{\xi\} \times \{i\}) = p_\xi - \lim \{\phi_{(F_0, F_1, \dots, F_k)}(g_{\xi, i}(n)) : n \in \omega\} \forall i \in A_\xi$, pelo item (4). Logo, pelo lema 1.1.5, $\mathcal{H}(\{\xi\} \times \{i\}) = p_\xi - \lim \{\mathcal{H}(g_{\xi, i}(n)) : n \in \omega\}$, $\forall i \in A_\xi$. Se $l \notin A_\xi$, temos que existe Ω elemento de p_ξ tal que $g_{\xi, l}(n) = \Delta(\{g_{\xi, i}(n) : i \in A_{\xi, l}\}) \triangle F$, $\forall n \in \Omega$, com $F \in [\mathfrak{c} \times k]^{<\omega}$ e $A_{\xi, l} \subseteq A_\xi$. Se $(F_0, F_1, \dots, F_k) \in \mathcal{C}$, como $\phi_{(F_0, F_1, \dots, F_k)}$ é homomorfismo, $\phi_{(F_0, F_1, \dots, F_k)}(g_{\xi, l}(n)) = \sum(\{\phi_{(F_0, F_1, \dots, F_k)}(g_{\xi, i}(n)) : i \in A_{\xi, l}\}) + \phi_{(F_0, F_1, \dots, F_k)}(F)$, $\forall n \in \Omega$. Assim, $\mathcal{H}(g_{\xi, l}(n)) = \sum(\{\mathcal{H}(g_{\xi, i}(n)) : i \in A_{\xi, l}\}) + \mathcal{H}(F)$, $\forall n \in \Omega$. Daí, pelo lema 1.1.4 temos que se $\{\sum(\{\mathcal{H}(g_{\xi, i}(n)) : i \in A_{\xi, l}\}) + \mathcal{H}(F) : n \in \omega\}$ possui p_ξ -limite, então a sequência $\{\mathcal{H}(g_{\xi, l}(n)) : n \in \omega\}$ também possui e os p_ξ -limites coincidem. Como $A_{\xi, l}$ é finito,

temos que a soma dos p_ξ -limites de $\{\mathcal{H}(g_{\xi,i}(n)) : n \in \omega\}$, $i \in A_{\xi,l}$, e $\{\mathcal{H}(F) : n \in \omega\}$ é igual ao p_ξ -limite da soma $\{\sum(\{\mathcal{H}(g_{\xi,i}(n)) : i \in A_{\xi,l}\}) + \mathcal{H}(F) : n \in \omega\}$. Assim, $\sum(\{\mathcal{H}(\{\xi\} \times \{i\}) : i \in A_{\xi,l}\}) + \mathcal{H}(F)$ é p_ξ -limite para a sequência $\{\mathcal{H}(g_{\xi,l}(n)) : n \in \omega\}$, $l \notin A_\xi$. Logo, a sequência $\{\mathcal{H}(g_{\xi,0}(n)), \mathcal{H}(g_{\xi,1}(n)), \dots, \mathcal{H}(g_{\xi,k-1}(n))\} : n \in \omega\}$ possui ponto de acumulação e G^k é enumeravelmente compacto.

(8) G^{k+1} não é enumeravelmente compacto.

Afirmamos que a sequência

$\{(\mathcal{H}(\{(k+1)n\} \times \{0\}), \mathcal{H}(\{(k+1)n+1\} \times \{0\}), \dots, \mathcal{H}(\{(k+1)n+k\} \times \{0\})) : n \in \omega\}$ não possui ponto de acumulação em G^{k+1} . Seja $(a_0, a_1, \dots, a_k)$ um elemento arbitrário de G^{k+1} . Existe $(F_0, F_1, \dots, F_k) \in \mathcal{C}$ tal que $a_j = \mathcal{H}(F_j)$ para $j < k+1$. Segue-se do item (5) que $\{n \in \omega : \pi_{(F_0, F_1, \dots, F_k)} \circ \mathcal{H}(\{(\{(k+1)n+j\} \times \{0\}) = \pi_{(F_0, F_1, \dots, F_k)}(a_j), j < k+1\}$ pode ser visto como o conjunto de $n \in \omega$ tais que

$$\begin{aligned} & (\phi_{(F_0, F_1, \dots, F_k)}(\{(k+1)n\} \times \{0\}), \dots, \phi_{(F_0, F_1, \dots, F_k)}(\{(k+1)n+k\} \times \{0\})) = \\ & = (\phi_{(F_0, F_1, \dots, F_k)}(F_0), \phi_{(F_0, F_1, \dots, F_k)}(F_1), \dots, \phi_{(F_0, F_1, \dots, F_k)}(F_k)), \text{ que é finito.} \end{aligned}$$

Portanto, $(a_0, a_1, \dots, a_k)$ não é ponto de acumulação da sequência

$\{(\mathcal{H}(\{(k+1)n\} \times \{0\}), \mathcal{H}(\{(k+1)n+1\} \times \{0\}), \dots, \mathcal{H}(\{(k+1)n+k\} \times \{0\})) : n \in \omega\}$ em G^{k+1} .

Capítulo 5

Produto infinito de grupos enumeravelmente compactos.

Apresentaremos neste capítulo duas construções que servirão de contra-exemplos para a produtividade da compacidade enumerável em um produto infinito de um mesmo grupo topológico enumeravelmente compacto. Os primeiros contra-exemplos para o caso infinito foram obtidos por Tomita em [9]. Aqui, apresentaremos novas construções para esses contra-exemplos, em uma tentativa de fazer algo semelhante ao que foi feito para o caso quadrado no capítulo 3 e do caso finito feito no capítulo anterior. Na seção 5.2, construiremos um grupo topológico enumeravelmente compacto H tal que H^γ é enumeravelmente compacto para todo $\gamma < 2^{\mathfrak{c}}$, mas $H^{2^{\mathfrak{c}}}$ não é. Na seção 5.3, construiremos um grupo topológico enumeravelmente compacto H tal que H^γ é enumeravelmente compacto para todo $\gamma < \alpha$, mas H^α não é enumeravelmente compacto ($\omega \leq \alpha < 2^{\mathfrak{c}}$).

5.1 Preliminares.

Aqui, demonstraremos dois lemas que serão usados nas construções das secções seguintes.

Lema 5.1.1: Seja $\{p_\xi : \omega \leq \xi < 2^\epsilon\}$ uma coleção de ultrafiltros seletivos incomparáveis. Seja $\mathcal{F} = \{g_{\xi,\beta} : \omega \leq \xi < 2^\epsilon \wedge \beta \leq \gamma < \alpha\}$ uma enumeração de todas as funções injetoras em $([2^\epsilon \times \alpha]^{<\omega})^\omega$, com $\alpha \leq 2^\epsilon$, tais que $\bigcup_{n \in \omega}^{\beta \leq \gamma} g_{\xi,\beta}(n) \subseteq \xi \times \alpha$, para todo ordinal infinito $\xi < 2^\epsilon$. Considere ainda a família $\{A_\xi : \omega \leq \xi < 2^\epsilon\}$ de subconjuntos de α tal que dado $\xi \in 2^\epsilon \setminus \omega$, $\{[g_{\xi,\beta}]_{p_\xi} : \beta \in A_\xi\} \cup \{[\vec{\mu}]_{p_\xi} : \mu \in 2^\epsilon\}$ é linearmente independente. Então, dado $F \in [2^\epsilon \times \alpha]^{<\omega}$, existe um homomorfismo $\phi : [2^\epsilon \times \alpha]^{<\omega} \mapsto \{0, 1\}$ tal que:

- (i) $\phi(F) = 1$, se $F \in [2^\epsilon \times \alpha]^{<\omega} \setminus \emptyset$;
- (ii) $\{n \in \omega : \phi(g_{\xi,\beta}(n)) = \phi(\{\xi\} \times \{\beta\})\} \in p_\xi, \forall \beta \in A_\xi \subseteq \alpha$, com $\omega \leq \xi < 2^\epsilon$;

Demonstração: Pode-se demonstrar por indução que existe um subconjunto enumerável E de $2^\epsilon \times \alpha$ tal que $F \subseteq E$ e $g_{\xi,\beta}(n) \subseteq E$, $\forall (\xi, \beta) \in E$ e $n \in \omega$. De fato, começamos por definir $S(\omega, \beta) = \{(\omega, \beta)\} \cup \bigcup_{n \in \omega} g_{\omega,\beta}(n)$, $\forall \beta \in \alpha$. Supondo $S(\xi, \beta)$ definido $\forall \beta \in \alpha$, fazemos $S(\xi + 1, \beta) = \{(\xi + 1, \beta)\} \cup \bigcup_{\substack{(\mu, \gamma) \in \bigcup_{n \in \omega} g_{\xi+1, \beta}(n) \\ \mu \in \omega}} S(\mu, \gamma)$. Faça, então, $E = \bigcup_{(\mu, \gamma) \in F} S(\mu, \gamma)$.

Use o lema 4.1 para $\{p_\xi : \xi \in E'\}$, F , E , $\{g_{\xi,\beta} : (\xi, \beta) \in E\}$ e $\{S_\xi = \{(\xi, \beta) : \beta \in A_\xi\} : \xi \in E'\}$ para obter $\{b_i : i \in \omega\}$, $r : \omega \mapsto E'$ e $\{E_i : i \in \omega\}$ satisfazendo:

- (1) $F \subseteq E_0$;
- (2) $E = \bigcup_{i \in \omega} E_i$;
- (3) $E_{i+1} \supseteq \bigcup \{g_{\xi,\beta}(b_i) : (\xi, \beta) \in E_i\} \cup E_i, \forall i \in \omega$;

(4) $\{g_{r(i),\beta}(b_i), \forall \beta \in S_{r(i)} \cap E_i\} \cup \{(\mu, t) : (\mu, t) \in E_i\}$ é linearmente independente, $\forall i \in \omega$;

(5) $\{b_i : i \in r^{-1}(\xi)\} \in p_\xi, \forall \xi \in E'$.

Definiremos primeiramente ϕ em $[E]^{<\omega}$. Isto é feito por indução no comprimento ω . Comece por determinar $\phi(F) = 1$, se $F \neq \emptyset$, e estenda ϕ a um homomorfismo qualquer em $[E_0]^{<\omega}$. A propriedade (i) será satisfeita independentemente da forma que vamos estender o homomorfismo ϕ . Queremos definir ϕ no subgrupo $[E_n]^{<\omega}, \forall n \in \omega$, de tal forma que:

(6) $\phi(g_{r(m),\beta}(b_m)) = \phi(\{r(m)\} \times \{\beta\}), \forall m < n$ e $(r(m), \beta) \in S_{r(m)} \cap E_m$.

A condição (6) é trivialmente satisfeita para $n = 0$. Suponha que é satisfeita para n . Provaremos que o homomorfismo ϕ pode ser estendido a $[E_{n+1}]^{<\omega}$ de forma que (6) vale para $n + 1$.

Pelo item (4), se $r(n) \in E'_n$ temos que $\{g_{r(n),\beta}(b_n) : \beta \in S_{r(n)} \cap E_n\} \cup \{(\mu, q) : (\mu, q) \in E_n\}$ é linearmente independente. Por hipótese, $\phi(\{r(n)\} \times \{\beta\})$ já está definido $\forall (r(n), \beta) \in E_n$, logo pelo item (3) podemos estender ϕ a E_{n+1} de tal forma que $\phi(g_{r(n),\beta}(b_n)) = \phi(\{r(n)\} \times \{\beta\}), \forall \beta \in A_{r(n)}$. Assim, vale o item (6) também para $n + 1$. Pelo item (2), no estágio ω , ϕ estará definido em $[E]^{<\omega}$.

Afirmamos que ϕ satisfaz a condição (ii) para todo $(\xi, \beta) \in E$, com $\beta \in A_\xi$. De fato, por (2), dado $(\xi, \beta) \in E, \exists n \in \omega$ tal que $(\xi, \beta) \in E_{n+1} \setminus E_n$. Por (6), $\phi(\{\xi\} \times \{\beta\}) = \phi(g_{\xi,\beta}(b_m)), \forall m \in r^{-1}(\xi) \setminus n + 1$, pois $\xi = r(m) \in E'_{n+1}$. Como $r^{-1}(\xi) \setminus n + 1 \in p_\xi$ temos que (ξ, β) satisfaz a condição (ii).

A construção estará terminada se estendermos $\phi|_{[E]^{<\omega}}$ a $[2^\epsilon \times \alpha]^{<\omega}$ tal que (ii) é satisfeita para cada $(\xi, \beta) \in (2^\epsilon \times \alpha) \setminus E$, com $\beta \in A_\xi$. Por indução em $2^\epsilon \setminus E'$, definiremos ϕ em $[E \cup (\xi, \beta)]^{<\omega}$ de tal forma que (ii) esteja satisfeita para cada $(\xi, \beta) \in (2^\epsilon \times \alpha) \setminus E, \beta \in A_\xi$. Seja $\gamma < 2^\epsilon$ o menor ordinal para o qual existe algum $\beta \in \alpha$ tal que $\phi(\{(\gamma, \beta)\})$ ainda não

foi definido. Temos então que ϕ está determinado em $[E \cup \{(\eta, \lambda) : \eta < \gamma \wedge \lambda < \beta\}]^{<\omega}$ e pela definição de $g_{\gamma, \beta}$, a sequência $\{\phi(g_{\gamma, \beta}(k)) : k \in \omega\}$ estará então determinada. O conjunto $\{(\gamma, \beta) : \beta \in A_\gamma\} \cup \{(\xi, s) : \xi \in \gamma, s \in \alpha\}$ é linearmente independente, logo usando a p_γ -compacidade de $\{0, 1\}$, podemos fazer $\phi(\{(\gamma, \beta)\}) = p_\gamma - \lim\{\phi(g_{\gamma, \beta}(k)) : k \in \omega\}$, $\forall \beta \in A_\gamma$. Se $\beta \in \alpha \setminus A_\gamma$, então definimos $\phi(\{(\gamma, \beta)\})$ de forma arbitrária. O homomorfismo ϕ satisfaz (ii) para cada (ξ, β) , com $\xi \in \gamma + 1$ e $\beta \in A_\xi$.

Lema 5.1.2: Sejam $\{p_\xi : \omega \leq \xi < 2^c\}$, $\alpha \leq 2^c$, $\{g_{\xi, \beta} : \omega \leq \xi < 2^c \text{ e } \beta \leq \gamma < \alpha\}$ e $\{A_\xi : \omega \leq \xi < 2^c\}$ como no lema 5.1.1. Então, existe uma família $\{x_{\xi, \beta} : \xi < 2^c, \beta \in \alpha\} \subseteq 2^{2^c}$ satisfazendo:

- (I) $x_{\xi, \beta}$ é o p_ξ -limite de $\{x_{g_{\xi, \beta}(n)} : n \in \omega\}$ para todo $\xi \in [\omega, 2^c)$, com $\beta \in A_\xi$;
- (I-a) Se $\lambda \notin A_\xi$, a sequência $\{x_{g_{\xi, \lambda}(n)} : n \in \omega\}$ possui p_ξ -limite em $\langle \{x_{\eta, \theta} : (\eta, \theta) \in \bigcup_{n \in \omega}^{\beta \leq \gamma} g_{\xi, \beta}(n) \cup \{\xi\} \times A_\xi\} \rangle$.
- (II) para todo $A \subseteq \omega \times \alpha$, existe $(\eta, \beta) \in 2^c \times \alpha$ tal que $\{(n, \gamma) \in \omega \times \alpha : x_{n, \gamma}(\eta, \beta) = 1\} = A$;
- (III) se $p, q \in \omega^*$, $p \neq q$, então para todo $\beta_1, \gamma_1, \beta_2, \gamma_2 \in \alpha$, com $\beta_i \neq \gamma_i \forall i < 2$, temos $p - \lim\{x_{n, \beta_1} + x_{n, \gamma_1} : n \in \omega\} \neq q - \lim\{x_{n, \beta_2} + x_{n, \gamma_2} : n \in \omega\}$ e $p - \lim\{x_{n, \beta} : n \in \omega\} \neq p - \lim\{x_{n, \gamma} : n \in \omega\}$, se $\beta \neq \gamma$.

Demonstração: Começamos a demonstração provando que se $A \subseteq \omega \times \alpha$, então existe um homomorfismo $\psi_A : [2^c \times \alpha]^{<\omega} \mapsto \{0, 1\}$ tal que:

- (a) $\{(n, \gamma) \in \omega \times \alpha : \psi_A(\{n\} \times \{\gamma\}) = 1\} = A$;
- (b) $\{n \in \omega : \psi_A(g_{\xi, \beta}(n)) = \psi_A(\{\xi\} \times \{\beta\})\} \in p_\xi, \forall \beta \in A_\xi \subseteq \alpha, \omega \leq \xi < 2^c$.

Sabemos que o conjunto $\{(n, \gamma) : (n, \gamma) \in \omega \times \alpha\}$ é linearmente independente. Assim, dado $A \subseteq \omega \times \alpha$, podemos definir um homomorfismo $\psi_A : [2^c \times \alpha]^{<\omega} \mapsto \{0, 1\}$ tal que $\{(n, \gamma) \in \omega \times \alpha : \psi_A(\{n\} \times \{\gamma\}) = 1\} = A$. Seja $\mu < 2^c$ o menor ordinal para o

qual $\psi_A(\{(\mu, \beta)\})$, com $\beta \in \alpha$, ainda não foi definido. Temos então que $\mu \geq \omega$ e que $\forall \beta \in A_\mu$, $\psi_A(\{(\mu, \beta)\})$ não está definido. Por outro lado, $\psi_A|_{[E \cup (\mu, \beta)]^{<\omega}}$ está determinado e pela definição de $g_{\mu, \beta}$, a sequência $\{\psi_A(g_{\mu, \beta}(k)) : k \in \omega\}$ está também determinada. O conjunto $\{(\mu, \beta) : \beta \in \alpha\} \cup \{(\xi, s) : \xi \in \mu, s \in \alpha\}$ é linearmente independente, logo usando a p_μ -compacidade de $\{0, 1\}$, podemos fazer $\psi_A(\{(\mu, \beta)\}) = p_\mu - \lim\{\psi_A(g_{\mu, \beta}(k)) : k \in \omega\}$, $\forall \beta \in A_\mu$. Se $\beta \in \alpha \setminus A_\mu$, podemos definir $\psi_A(\{(\mu, \beta)\})$ de forma qualquer. O homomorfismo ϕ satisfaz $\{n \in \omega : \psi_A(g_{\xi, \beta}(n)) = \psi_A(\{\xi\} \times \{\beta\})\} \in p_\xi$ para cada (ξ, β) , com $\xi \in \mu + 1$ e $\beta \in A_\xi$. Logo, por indução, podemos estender este homomorfismo a $[2^\epsilon \times \alpha]^{<\omega}$ de tal forma que vale o item (b).

Para cada $\eta \in 2^\epsilon$, $\beta \in \alpha$, faça $x_{\eta, \beta} = \{\phi_F(\{\eta\} \times \{\beta\}) : F \in [2^\epsilon \times \alpha]^{<\omega} \setminus \emptyset\} \cup \{\psi_A(\{\eta\} \times \{\beta\}) : A \subseteq \omega \times \alpha\}$, com $\phi_F : [2^\epsilon \times \alpha]^{<\omega} \mapsto \{0, 1\}$ homomorfismo definido no lema anterior tal que $\phi_F(F) = 1$. Considere $\{x_{\xi, \beta} : \xi < 2^\epsilon, \beta \in \alpha\}$ enumeração do conjunto formado pelos elementos definidos acima. Dado $\{x_{g_{\xi, \beta}(n)} : n \in \omega\}$, com $\xi \in [\omega, 2^\epsilon)$ e $\beta \in A_\xi$, temos que $x_{g_{\xi, \beta}(n)} = \{\phi_F(g_{\xi, \beta}(n)) : F \in [2^\epsilon \times \alpha]^{<\omega} \setminus \emptyset\} \cup \{\psi_A(g_{\xi, \beta}(n)) : A \subseteq \omega\}$, $\forall n \in \omega$. Daí, pela construção dos homomorfismos ϕ_F e ψ_A temos que $x_{\xi, \beta}$ é o p_ξ -limite de $\{x_{g_{\xi, \beta}(n)} : n \in \omega\}$, $\forall \beta \in A_\xi$. Se $\lambda \notin A_\xi$, temos que $g_{\xi, \lambda}(n) = \Delta(\{g_{\xi, \eta}(n) : \eta \in A_{\xi, \lambda}\}) \Delta F_\lambda$, $\forall n \in \Omega$ elemento de p_ξ , com $F_\lambda \in [2^\epsilon \times \alpha]^{<\omega}$ e $A_{\xi, \lambda} \subseteq A_\xi$. Como ϕ_F é homomorfismo, $\forall F \in [2^\epsilon \times \alpha]^{<\omega}$ temos $\phi_F(g_{\xi, \lambda}(n)) = \sum(\{\phi_F(g_{\xi, \eta}(n)) : \eta \in A_{\xi, \lambda}\}) + \phi_F(F_\lambda)$, $\forall n \in \Omega$. Vale uma expressão semelhante também para todo homomorfismo ψ_A , com $A \subseteq \omega \times \alpha$. Assim, $x_{g_{\xi, \lambda}(n)} = \sum(\{x_{g_{\xi, \eta}(n)} : \eta \in A_{\xi, \lambda}\}) + x'$, $\forall n \in \Omega$. Seja $\Omega_\eta = \{n \in \omega : x_{g_{\xi, \eta}(n)} = x_{\xi, \eta}\} \in p_\xi, \forall \eta \in A_{\xi, \lambda}$. Como $A_{\xi, \lambda}$ é finito, temos que $\{n \in \omega : x_{g_{\xi, \lambda}(n)} = \sum(\{x_{\xi, \eta} : \eta \in A_{\xi, \lambda}\}) + x'\}$ é elemento de p_ξ , pois contém $\bigcap \{\Omega_\eta : \eta \in A_{\xi, \lambda}\} \cap \Omega$. Logo, $\sum(\{x_{\xi, \eta} : \eta \in A_{\xi, \lambda}\}) + x'$ é p_ξ -limite para a sequência $\{x_{g_{\xi, \lambda}(n)} : n \in \omega\}$, $\lambda \notin A_\xi$. Além disso, como $g_{\xi, \lambda}(n) \subseteq \bigcup_{\beta < \gamma}^{n \in \omega} g_{\xi, \beta}(n)$, $g_{\xi, \eta}(n) \subseteq \bigcup_{\beta < \gamma}^{n \in \omega} g_{\xi, \beta}(n) \forall \eta \in A_{\xi, \lambda}$ e $F_\lambda = \Delta(\{g_{\xi, \eta}(n) : \eta \in A_{\xi, \lambda}\}) \Delta g_{\xi, \lambda}(n)$ teremos que $F_\lambda \subseteq \bigcup_{\beta < \gamma}^{n \in \omega} g_{\xi, \beta}(n)$. Daí, $x' = \{\phi_F(F_\lambda) : F \in [2^\epsilon \times \alpha]^{<\omega} \setminus \emptyset\} \cup \{\psi_A(F_\lambda) : A \subseteq \omega \times \alpha\}$ pode

ser tomado como combinação linear de elementos do conjunto $\{x_{\eta,\theta} : (\eta, \theta) \in \bigcup_{\beta < \gamma}^{n \in \omega} g_{\xi,\beta}(n)\}$. Logo, $\sum(\{x_{\xi,\eta} : \eta \in A_{\xi,\lambda}\}) + x'$ está em $\langle \{x_{\eta,\theta} : (\eta, \theta) \in \bigcup_{\beta < \gamma}^{n \in \omega} g_{\xi,\beta}(n) \cup \{\xi\} \times A_{\xi}\} \rangle$ e vale (I-a).

O item (II) é obtido da construção dos homomorfismos ψ_A .

Para o item (III), se $p, q \in \omega^*$ são distintos, existem $B_p \in p$ e $B_q \in q$ tais que $B_p \cap B_q = \emptyset$: se $p \neq q$, então existe, digamos, $B_p \in p \setminus q$. Daí, como q é ultrafiltro, temos que $\omega \setminus B_p \in q$ e $(\omega \setminus B_p) \cap B_p = \emptyset$. Faça então $B_q = \omega \setminus B_p$. Pelo item (II), existe $(\eta, \beta) \in 2^c \times \alpha$ tal que $\{(n, \gamma) \in \omega \times \alpha : x_{n,\gamma}(\eta, \beta) = 1\} = B_p \times \{\beta_1\}$. Temos então que $x_{n,\gamma}(\eta, \beta) = 1$, $\forall (n, \gamma) \in B_p \times \{\beta_1\}$, e $x_{n,\gamma}(\eta, \beta) = 0 \forall (n, \gamma) \in B_p \times \{\gamma_1\} \cup B_q \times \{\beta_2\} \cup B_q \times \{\gamma_2\}$, pois $(B_p \times \{\beta_1\}) \cap (B_p \times \{\gamma_1\} \cup B_q \times \{\beta_2\} \cup B_q \times \{\gamma_2\}) = \emptyset$. Portanto, o p -limite da sequência $\{x_{n,\beta_1}(\eta, \beta) + x_{n,\gamma_1}(\eta, \beta) : n \in \omega\}$ é 1 e o q -limite de $\{x_{n,\beta_2}(\eta, \beta) + x_{n,\gamma_2}(\eta, \beta) : n \in \omega\}$ é 0. Logo, $p - \lim\{x_{n,\beta_1} + x_{n,\gamma_1} : n \in \omega\} \neq q - \lim\{x_{n,\beta_2} + x_{n,\gamma_2} : n \in \omega\}$. Se $\beta, \gamma \in \alpha$, com $\beta \neq \gamma$, então pelo item (II), existe $(\eta, \mu) \in 2^c \times \alpha$ tal que $\{(n, \xi) \in \omega \times \alpha : x_{n,\xi}(\eta, \mu) = 1\} = B_p \times \{\beta\}$. Como $B_p \times \{\beta\} \cap B_p \times \{\gamma\} = \emptyset$, temos que $x_{n,\xi}(\eta, \mu) = 0, \forall (n, \xi) \in B_p \times \{\gamma\}$. Daí, $p - \lim\{x_{n,\beta} : n \in \omega\} \neq p - \lim\{x_{n,\gamma} : n \in \omega\}$.

5.2 H^γ é enumeravelmente compacto para todo $\gamma < 2^c$, mas H^{2^c} não é.

Lema 5.2.1: Seja $\mathcal{F} = \{g_{\xi,\beta} : \omega \leq \xi < 2^c \wedge \beta < \gamma < 2^c\}$ uma enumeração de todas as funções injetoras em $([2^c \times 2^c]^{<\omega})^\omega$ tais que

- (a) $\bigcup_{n \in \omega}^{ \beta < \gamma } g_{\xi,\beta}(n) \subseteq \xi \times 2^c$, para todo ordinal infinito $\xi < 2^c$, com $\gamma < 2^c$;
- (b) cada g_ξ injetora em $([2^c \times 2^c]^{<\omega})^\omega$ aparece 2^c vezes na enumeração (Aqui denotamos g_ξ por $\{g_{\xi,\beta} : \beta \leq \gamma\}$);

(c) existe uma família $\{A_\xi : \omega \leq \xi < 2^\mathfrak{c}\}$ de subconjuntos de $2^\mathfrak{c}$, com $|A_\xi| \leq \gamma < 2^\mathfrak{c}$, tal que dado $\xi \in 2^\mathfrak{c} \setminus \omega$, $\{[g_{\xi,\beta}]_{p_\xi} : \beta \in A_\xi\} \cup \{[\vec{\mu}]_{p_\xi} : \mu \in 2^\mathfrak{c}\}$ é linearmente independente.

Além disso, sejam $\{x_{\xi,\beta} : \xi < 2^\mathfrak{c}, \beta \in 2^\mathfrak{c}\}$ família que satisfaz as condições (I)-(III) no Lema 5.1.2 para a família $\mathcal{F}$. Seja $\omega^* = \{q_\eta : \eta < 2^\mathfrak{c}\}$ enumeração de todos os ultrafiltros livres. Então, existem famílias $\{\mu_\xi : \xi < 2^\mathfrak{c}\}$, $\{\beta_\xi : \xi < 2^\mathfrak{c}\}$, $\{I_\xi : \xi < 2^\mathfrak{c}\}$ e $\{S_\xi : \xi < 2^\mathfrak{c}\}$ que satisfazem as seguintes condições:

- (i) $I_\xi = \omega \times \omega \cup \{\{\mu_\eta\} \times A_{\mu_\eta} : \eta < \xi\} \cup \{\{n\} \times \{\beta_\eta\} : n \in \omega \wedge \eta < \xi\}$, $\forall \xi < 2^\mathfrak{c}$ e $\mu_\eta, \beta_\eta \in [\omega, 2^\mathfrak{c})$ para cada $\eta < \xi$;
- (ii) se $\eta < \xi < 2^\mathfrak{c}$ então $S_\eta \subseteq S_\xi$, com $S_\xi \subseteq 2^\mathfrak{c} \times 2^\mathfrak{c}$, $\forall \xi < 2^\mathfrak{c}$;
- (iii) $I_\xi \cap S_\xi = \emptyset$ para cada $\xi < 2^\mathfrak{c}$;
- (iv) $g_{\mu_\xi} = g_{\delta_\xi}$, onde δ_ξ é o menor ordinal δ em $[\omega, 2^\mathfrak{c})$ para o qual $\bigcup_{n \in \omega}^{\beta < \gamma} \text{supp}(g_{\delta,\beta}(n)) \subseteq I_\xi$ e $g_\delta \neq g_{\mu_\eta}$, $\forall \eta < \xi$;
- (v) não existe q_ξ -limite para $\{x_{n,\beta_\xi} : n \in \omega\}$ ou $q_\xi - \lim\{x_{n,\beta_\xi} : n \in \omega\} \notin \langle \{x_{\eta,\theta} : (\eta, \theta) \in 2^\mathfrak{c} \times 2^\mathfrak{c} \setminus S_\xi\} \rangle$ para todo $\xi < 2^\mathfrak{c}$;
- (vi) S_ξ tem cardinalidade menor ou igual a $|\xi| + |\omega|$ para cada $\xi < 2^\mathfrak{c}$.

Demonstração: Durante a construção por indução, denote por H_ξ o grupo gerado por $\{x_{\eta,\beta} : (\eta, \beta) \in I_\xi\}$.

Caso 1. Estágio 0. Defina $I_0 = \omega \times \omega$.

Definiremos agora S_0 . Seja $q_0 \in \omega^*$. Do fato de que $|H_0| = |[I_0]^{<\omega}| < 2^\mathfrak{c}$ temos que existe $\beta_0 \in [\omega, 2^\mathfrak{c})$, tal que $q_0 - \lim x_{n,\beta_0} = x_{q_0} \notin H_0$. Neste caso, teremos $\text{supp } x_{q_0} \setminus I_0 \neq \emptyset$ e podemos fixar $\theta_0 \in \text{supp}(x_{q_0}) \setminus I_0$. Faremos $S_0 = \{\theta_0\}$.

Seja agora ξ_0 o menor ordinal tal que $\bigcup_{n \in \omega}^{\beta < \gamma} \text{supp}(g_{\xi_0,\beta}(n)) \subseteq I_0$. Como cada g injetora em $([2^\mathfrak{c} \times 2^\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega$ aparece $2^\mathfrak{c}$ vezes na enumeração, existe $\mu_0 \in [\omega, 2^\mathfrak{c})$ tal que $\{\{\mu_0\} \times A_{\mu_0}\} \cap [I_0 \cup S_0] = \emptyset$ e $g_{\mu_0} = g_{\xi_0}$. Dessa forma obtemos μ_0 .

Caso 2. Suponha por indução que $\{\mu_\xi : \xi < \lambda + 1\}$, $\{I_\xi : \xi < \lambda + 1\}$, e $\{S_\xi : \xi < \lambda + 1\}$ estejam definidos. Como μ_ξ, β_ξ já estão definidos para todo $\xi \leq \lambda$, temos que $I_{\lambda+1} = \omega \times \omega \cup \{\{\mu_\eta\} \times A_{\mu_\eta} : \eta < \lambda + 1\} \cup \{\{n\} \times \{\beta_\eta\} : n \in \omega \wedge \eta < \lambda + 1\}$ satisfaz a condição (i).

Seja $\eta = \lambda + 1$. Definiremos agora S_η . Seja $q_\eta \in \omega^*$. Afirmação: podemos tomar uma sequência $\{x_{n,\beta_\eta} : n \in \omega\}$ tal que

- (a) $\{x_{n,\beta_\eta} : n \in \omega\} \cap (H_\eta \cup S_\lambda) = \emptyset$ e
- (b) o q_η -limite de $\{x_{n,\beta_\eta} : n \in \omega\}$ não existe ou não está em H_η .

Do fato de que $|H_\eta| = |[I_\eta]^{<\omega}| < 2^\mathfrak{c}$ e $|S_\lambda| \leq \eta$ temos que a cardinalidade do conjunto formado pelos $\beta \in [\omega, 2^\mathfrak{c})$ tais que $\{x_{n,\beta} : n \in \omega\} \cap (H_\eta \cup S_\lambda) = \emptyset$ é igual a $2^\mathfrak{c}$. Em particular, vale (a). Suponha que $\exists q_\eta$ -limite para todo β do conjunto acima. Pelo item (III) do lema 5.1.2, se $\beta \neq \gamma$ então $q_\eta - \lim\{x_{n,\beta} : n \in \omega\} \neq q_\eta - \lim\{x_{n,\gamma} : n \in \omega\}$ de forma que a cardinalidade do conjunto de q_η -limites é $2^\mathfrak{c}$ enquanto que $|H_\eta| = |[I_\eta]^{<\omega}| < 2^\mathfrak{c}$. Logo podemos tomar $\beta_\eta < 2^\mathfrak{c}$ tal que $q_\eta - \lim x_{n,\beta_\eta} = x_{q_\eta} \notin H_\eta$. Segue-se a afirmação.

Neste caso, teremos $\text{supp}(x_{q_\eta}) \setminus I_\eta \neq \emptyset$ e podemos fixar $\theta_{q_\eta} \in \text{supp}(x_{q_\eta}) \setminus I_\eta$. Faremos $S_\eta = S_\lambda \cup \{\theta_{q_\eta}\}$. Vê-se facilmente que os itens (ii), (v) e (vi) são verificados a partir desta definição.

Seja agora δ_η o menor ordinal tal que $\bigcup_{n \in \omega}^{\beta < \alpha} \text{supp}(g_{\delta_\eta, \beta}(n)) \subseteq I_\eta$ e $g_{\delta_\eta} \neq g_{\mu_\beta}$, $\forall \beta < \eta$. Como cada g injetora em $([2^\mathfrak{c} \times 2^\mathfrak{c}]^{<\omega})^\omega$ aparece $2^\mathfrak{c}$ vezes na enumeração, existe $\mu_\eta \in [\omega, 2^\mathfrak{c})$ tal que $[\{\mu_\eta\} \times A_{\mu_\eta}] \cap [I_\eta \cup S_\eta] = \emptyset$ e $g_{\mu_\eta} = g_{\delta_\eta}$. Isto é possível, pois $|I_\eta \cup S_\eta| < 2^\mathfrak{c}$. Dessa forma obtemos μ_η e como no parágrafo anterior já havíamos determinado β_η , valem os itens (iii) e (iv).

Caso 3. Seja ξ ordinal limite menor que 2^c . Temos que $I_\xi = \bigcup_{\eta < \xi} I_\eta = \omega \times \omega \cup \{\{\mu_\eta\} \times A_{\mu_\eta} : \eta < \xi\} \cup \{\{n\} \times \{\beta_\eta\} : n \in \omega \wedge \eta < \xi\}$ como em (i). Defina $S = \bigcup_{\eta < \xi} S_\eta$. Definiremos agora S_ξ . Como no caso anterior, podemos tomar uma sequência $\{x_{n,\beta_\xi} : n \in \omega\}$ tal que $\{x_{n,\beta_\xi} : n \in \omega\} \cap (H_\xi \cup S) = \emptyset$ e o q_ξ -limite de $\{x_{n,\beta_\xi} : n \in \omega\}$ não existe ou não está em H_ξ . Caso o q_ξ -limite de $\{x_{n,\beta_\xi} : n \in \omega\}$ exista $\forall \beta$, tome β_ξ tal que $x_{q_\xi} = q_\xi - \lim \{x_{n,\beta_\xi} : n \in \omega\} \notin H_\xi$. Teremos $\text{supp}(x_{q_\xi}) \setminus I_\xi \neq \emptyset$ e podemos fixar $\theta_{q_\xi} \in \text{supp}(x_{q_\xi}) \setminus I_\xi$. Poremos $S_\xi = S \cup \{\theta_{q_\xi}\}$. Vê-se facilmente que os itens (ii), (iii), (v) e (vi) são verificados a partir desta definição.

Seja δ_ξ o menor ordinal δ em $[\omega, 2^c)$ para o qual $\bigcup_{n \in \omega}^{\beta < \gamma} \text{supp}(g_{\delta,\beta}(n)) \subseteq I_\xi$ e $g_\delta \neq g_{\mu_\eta}$, $\forall \eta < \xi$, e escolha $\mu_\xi \in [\omega, 2^c)$ de tal forma que $g_{\mu_\xi} = g_{\delta_\xi}$ e $[\{\mu_\xi\} \times A_{\mu_\xi}] \cap [I_\xi \cup S_\xi] = \emptyset$. Novamente isto é possível, pois $I_\xi \cup S_\xi$ tem cardinalidade menor que 2^c . Assim, a condição (iv) é também satisfeita.

Exemplo 5.2.1: Seja $I = \bigcup_{\xi < 2^c} I_\xi$ e $H = \langle \{x_{\xi,\beta} : (\xi, \beta) \in I\} \rangle$. Então H^γ é enumeravelmente compacto para todo $\gamma < 2^c$, mas H^{2^c} não é enumeravelmente compacto.

De fato, seja $\gamma < 2^c$ e considere $\{t_{n,\lambda} : n \in \omega \wedge \lambda \in \gamma + 1\}$ sequência 1-1 em H^γ . Então existe $h_{n,\lambda} \in \mathbb{Z}_2^{(I)}$ tal que $t_{n,\lambda} = x_{h_{n,\lambda}}$ para todo $n \in \omega$. Seja $\eta < 2^c$ tal que $\bigcup_{n \in \omega}^{\lambda \in \gamma+1} \text{supp}(h_{n,\lambda}) \subseteq I_\eta$ e seja θ o menor ordinal tal que $g_{\theta,\lambda}(n) = \text{supp}(h_{n,\lambda}) \forall n \in \omega$ e $\lambda \in \gamma + 1$. Daí, existe $\mu_\xi < 2^c$ tal que $g_{\mu_\xi} = g_\theta$ e a sequência $\{t_{n,\lambda} : n \in \omega \wedge \lambda \in \gamma + 1\}$ pode ser vista como $\{x_{g_{\mu_\xi,\lambda}(n)} : n \in \omega \wedge \lambda \in \gamma + 1\}$. Agora, para todo $\lambda \leq \gamma$, se $\lambda \in A_{\mu_\xi}$, temos pelo item (I) do lema anterior que $x_{\mu_\xi,\lambda}$ é o p_{μ_ξ} -limite de $\{x_{g_{\mu_\xi,\lambda}(n)} : n \in \omega\}$. Se $\lambda \notin A_{\mu_\xi}$, temos do item (I-a) do lema anterior que a sequência $\{x_{g_{\mu_\xi,\lambda}(n)} : n \in \omega\}$ possui p_{μ_ξ} -limite em $\langle \{x_{\eta,\theta} : (\eta, \theta) \in \bigcup_{n \in \omega}^{\beta \in \gamma} g_{\mu_\xi,\beta}(n)\} \cup \{\mu_\xi\} \times A_{\mu_\xi} \rangle \subseteq \langle \{x_{\xi,\beta} : (\xi, \beta) \in I_{\xi+1}\} \rangle$. Como $\langle \{x_{\xi,\beta} : (\xi, \beta) \in I_{\xi+1}\} \rangle \subseteq H$ para todo $\lambda \in \gamma + 1$, temos que H^γ é enumeravelmente compacto.

Por outro lado, H^{2^c} não é enumeravelmente compacto. De fato, a sequência $\{(x_{n,\beta_\xi})_{\xi \in 2^c} : n \in \omega\}$ não possui q -limite em H^{2^c} para todo $q \in \omega^*$, pois dado $q \in \omega^*$ temos que $q = q_\eta$ para algum $\eta \in 2^c$. Daí, pelo item (v) a sequência $\{x_{n,\beta_\eta} : n \in \omega\}$ não possui q_η -limite ou $q_\eta - \lim\{x_{n,\beta_\eta} : n \in \omega\} \notin \langle \{x_{\eta,\theta} : (\eta, \theta) \in 2^c \times 2^c \setminus S_\eta\} \rangle$. Do item (iii), temos que $I \cap S_\eta = \emptyset$ de forma que $H \subseteq \langle \{x_{\eta,\theta} : (\eta, \theta) \in 2^c \times 2^c \setminus S_\eta\} \rangle$. Assim, tanto no primeiro caso como no segundo vemos que a sequência $\{x_{n,\beta_\eta} : n \in \omega\}$ não possui q_η -limite em H . Logo, $\{(x_{n,\beta_\xi})_{\xi \in 2^c} : n \in \omega\}$ não possui ponto de acumulação.

Segue-se então que H^{2^c} não é enumeravelmente compacto.

5.3 H^γ é enumeravelmente compacto para todo $\gamma < \alpha$, mas H^α não é ($\omega \leq \alpha < 2^c$).

Lema 5.3.1: Seja $\mathcal{F} = \{g_{\xi,\beta} : \omega \leq \xi < 2^c \wedge \beta < \gamma < \alpha\}$ uma enumeração de todas as funções injetoras em $([2^c \times \alpha]^{<\omega})^\omega$, com $\alpha < 2^c$, tal que

- (a) $\bigcup_{n \in \omega}^{\beta < \gamma} g_{\xi,\beta}(n) \subseteq \xi \times \alpha$, para todo ordinal infinito $\xi < 2^c$, e
- (b) cada g_ξ injetora em $([2^c \times \alpha]^{<\omega})^\omega$ aparece 2^c vezes na enumeração (Aqui denotamos g_ξ por $\{g_{\xi,\beta} : \beta < \gamma\}$);
- (c) existe uma família $\{A_\xi : \omega \leq \xi < 2^c\}$ de subconjuntos de α , com $|A_\xi| \leq \gamma < \alpha$, tal que dado $\xi \in 2^c \setminus \omega$, $\{[g_{\xi,\beta}]_{p_\xi} : \beta \in A_\xi\} \cup \{[\vec{\mu}]_{p_\xi} : \mu \in 2^c\}$ é linearmente independente.

Sejam $\{x_{\xi,\beta} : \xi < 2^c, \beta \in \alpha\}$ e $\{p_\xi : \omega \leq \xi < 2^c\}$ famílias que satisfazem as condições (I)-(III) no lema 5.1.2 para a família $\mathcal{F}$. Então existem famílias $\{\mu_\xi : \xi < 2^c\}$, $\{I_\xi : \xi < 2^c\}$, $\{S_\xi : \xi < 2^c\}$ e $\{P_\xi : \xi < 2^c\}$ que satisfazem as seguintes condições:

- (i) $I_\xi = \omega \times \alpha \cup \{\{\mu_\eta\} \times A_{\mu_\eta} : \eta < \xi\}$, $\forall \xi < 2^c$ e $\mu_\eta < 2^c$ para cada $\eta < \xi$;
- (ii) $S_\xi \subseteq 2^c \times \alpha$, $\forall \xi < 2^c$;
- (iii) $(I_\xi \cup \{\mu_\xi\} \times A_{\mu_\xi}) \cap S_\xi = \emptyset$ para cada $\xi < 2^c$;
- (iv) $g_{\mu_\xi} = g_{\delta_\xi}$, onde δ_ξ é o menor ordinal δ em $[\omega, 2^c)$ para o qual $\bigcup_{\beta < \gamma}^{n \in \omega} \text{supp}(g_{\delta, \beta}(n)) \subseteq I_\xi$ e $g_\delta \neq g_{\mu_\eta}$, $\forall \eta < \xi$;
- (v) $P_\xi = \{p : p - \lim\{x_{n, \beta} : n \in \omega\} \in \langle x_{\eta, \mu} : (\eta, \mu) \in 2^c \times \alpha \rangle, \forall \beta < \alpha \text{ e } \exists \beta_1, \beta_2, \beta_1 \neq \beta_2, \text{ tais que } p - \lim\{x_{n, \beta_1} + x_{n, \beta_2} : n \in \omega\} \in H_\xi\}, \forall \xi < 2^c$;
- (vi) se $p \in P_\xi$ então existe $\beta < \alpha$ tal que $p - \lim\{x_{n, \beta} : n \in \omega\} \notin \langle \{x_{\eta, \theta} : (\eta, \theta) \in 2^c \times \alpha \setminus S_\xi\} \rangle$;
- (vii) P_ξ tem cardinalidade menor ou igual que $|\alpha| + |\xi|$ para cada $\xi < 2^c$;
- (viii) S_ξ tem cardinalidade menor ou igual que $|\alpha| + |\xi|$ para cada $\xi < 2^c$;
- (ix) se $\eta < \xi < 2^c$, então $P_\eta \subseteq P_\xi$ e se ξ é ordinal limite, então $P_\xi = \bigcup_{\eta < \xi} P_\eta$;
- (x) se $\eta < \xi < 2^c$, então $S_\eta \subseteq S_\xi$ e se ξ é ordinal limite, então $S_\xi = \bigcup_{\eta < \xi} S_\eta$.

Demonstração: Durante a construção por indução, denote por H_ξ o grupo gerado por $\{x_{\eta, \beta} : (\eta, \beta) \in I_\xi\}$.

Caso 1. Estágio 0. Defina $I_0 = \omega \times \alpha$. Temos que $\{p : p - \lim\{x_{n, \beta} : n \in \omega\} \in \langle x_{\eta, \mu} : (\eta, \mu) \in 2^c \times \alpha \rangle, \forall \beta < \alpha \text{ e } \exists \beta_1, \beta_2 \text{ tais que } p - \lim\{x_{n, \beta_1} + x_{n, \beta_2} : n \in \omega\} \in H_0\} = \emptyset$. De fato, se $x_F \in H_0$ com $F \in [\omega \times \alpha]^{<\omega} \setminus \emptyset$, então pelo item (II) do lema 5.1.2, existe $(\eta, \beta) \in 2^c \times \alpha$ tal que $\{(n, \gamma) \in \omega \times \alpha : x_{n, \gamma}(\eta, \beta) = 1\} = \{(m, \mu)\}$, com $(m, \mu) \in F$. Daí, temos que $x_F(\eta, \beta) = 1$ e $p - \lim\{x_{n, \beta_1}(\eta, \beta) + x_{n, \beta_2}(\eta, \beta) : n \in \omega\} = 0$, pois $\pi_1(F)$ é finito e, portanto, $\omega \setminus \pi_1(F) \in p$. Logo, $P_0 = \emptyset$ e as condições (vi), (vii) e (ix) são trivialmente satisfeitas. Defina $S_0 = \emptyset$ e faça $\mu_0 = \omega$. As condições (ii), (iii), (iv), (viii) e (x) são claramente satisfeitas.

Caso 2. Suponha por indução que $\{\mu_\xi : \xi < \lambda + 1\}$, $\{I_\xi : \xi < \lambda + 1\}$, $\{S_\xi : \xi < \lambda + 1\}$

e $\{P_\xi : \xi < \lambda + 1\}$ estejam definidos. Como μ_ξ já está definido para todo $\xi \leq \lambda$, temos que $I_{\lambda+1} = \omega \times \alpha \cup \{\{\mu_\eta\} \times A_{\mu_\eta} : \eta < \lambda + 1\}$ satisfaz a condição (i).

Esteja $P_{\lambda+1}$ definido como no item (v). Como $H_\lambda \subseteq H_{\lambda+1}$ temos que vale o item (ix). Temos também que para cada $p \in P_{\lambda+1}$, $\exists \beta_1, \beta_2 \in \alpha$, $\beta_1 \neq \beta_2$, tais que $x_p = p - \lim\{x_{n,\beta_1} + x_{n,\beta_2} : n \in \omega\} \in H_{\lambda+1}$. Pelo item (III) do lema 5.1.2, se $p \neq q$ em $P_{\lambda+1}$, então $x_p \neq x_q$. Dessa forma temos que $|P_{\lambda+1}| \leq |H_{\lambda+1}| = |\alpha| + |\lambda + 1|$ e vale (vii).

Definiremos agora $S_{\lambda+1}$. Seja $p \in P_{\lambda+1} \setminus P_\lambda$. Afirmamos que existe $\beta < \alpha$ tal que $p - \lim x_{n,\beta} = x_p \notin H_{\lambda+1}$. Caso contrário, teríamos que para todo $\mu < \alpha$, $p - \lim x_{n,\mu} = x_{F_\mu} + x_{O_\mu}$, com $x_{F_\mu} \in H_\gamma$ e $O_\mu \subseteq A_\lambda$. Mas como $|A_\lambda| < \alpha \implies |[A_\lambda]^{<\omega}| < \alpha$, temos que existe $\mu_1 \neq \mu_2$ tal que $O_{\mu_1} = O_{\mu_2}$. Daí, como $\{0, 1\}$ é corpo de característica 2 temos que $x_{F_{\mu_1}} + x_{O_{\mu_1}} + x_{F_{\mu_2}} + x_{O_{\mu_2}} = x_{F_{\mu_1}} + x_{F_{\mu_2}} \in H_\lambda$, ou seja, $p - \lim x_{n,\mu_1} + p - \lim x_{n,\mu_2} \in H_\lambda$. Chegamos então à uma contradição, pois $p \in P_{\lambda+1} \setminus P_\lambda$. Logo, sempre existe $\beta < \alpha$ tal que $p - \lim x_{n,\beta} = x_p \notin H_{\lambda+1}$. Neste caso, teremos $\text{supp } x_p \setminus I_{\lambda+1} \neq \emptyset$ e podemos fixar $\theta_p \in \text{supp}(x_p) \setminus I_{\lambda+1}$. Poremos $S_{\lambda+1} = S_\lambda \cup \{\theta_p : p \in P_{\lambda+1} \setminus P_\lambda\}$. Vê-se facilmente que os itens (ii), (vi), (viii) e (x) são verificados a partir desta definição.

Seja agora $\delta_{\lambda+1}$ o menor ordinal tal que $\bigcup_{n \in \omega}^{\beta \leq \gamma} g_{\delta_{\lambda+1}, \beta}(n) \subseteq \omega \times \alpha \cup \bigcup_{\beta < \lambda+1} \{\mu_\beta\} \times A_{\mu_\beta}$ e $g_{\delta_{\lambda+1}} \neq g_{\mu_\beta}$, $\forall \beta < \gamma + 1$. Como cada g injetora em $([2^c \times \alpha]^{<\omega})^\omega$ aparece 2^c vezes na enumeração, existe $\mu_{\lambda+1} \in [\omega, 2^c)$ tal que $[\{\mu_{\lambda+1}\} \times A_{\mu_{\lambda+1}}] \cap [(\omega \times \alpha) \cup (\bigcup_{\beta < \lambda+1} \{\mu_\beta\} \times A_{\mu_\beta}) \cup S_{\lambda+1}] = \emptyset$ e $g_{\mu_{\lambda+1}} = g_{\delta_{\lambda+1}}$. Isto é possível, pois fizemos com que $S_{\lambda+1}$ tivesse cardinalidade menor ou igual que $|\alpha| + |\lambda + 1|$. Dessa forma obtemos $\mu_{\lambda+1}$ e valem os itens (iii) e (iv).

Caso 3. Seja ξ ordinal limite. Defina $P_\xi = \bigcup_{\eta < \xi} P_\eta$ como em (ix), $S_\xi = \bigcup_{\eta < \xi} S_\eta$ como em (x) e $I_\xi = \bigcup_{\eta < \xi} I_\eta = \omega \times \alpha \cup \{\{\mu_\eta\} \times A_{\mu_\eta} : \eta < \xi\}$ como em (i). Os itens (ii), (vii) e (viii) são claramente satisfeitos.

(v) é satisfeito:

Seja $p \in P_\xi$. Então existe $\eta < \xi$ tal que $p \in P_\eta$. Pelo item (v) para η , $\exists \beta_1, \beta_2, \beta_1 \neq \beta_2$, tais que $p - \lim\{x_{n,\beta_1} + x_{n,\beta_2} : n \in \omega\} \in \langle\{x_{\lambda,\beta} : (\lambda, \beta) \in I_\eta\}\rangle \subseteq \langle\{x_{\lambda,\beta} : (\lambda, \beta) \in I_\xi\}\rangle$. Logo, $P_\xi \subseteq \{p : p - \lim\{x_{n,\beta} : n \in \omega\} \in \langle x_{\lambda,\mu} : (\lambda, \mu) \in 2^c \times \alpha \rangle, \forall \beta < \alpha \text{ e } \exists \beta_1, \beta_2, \beta_1 \neq \beta_2, \text{ tais que } p - \lim\{x_{n,\beta_1} + x_{n,\beta_2} : n \in \omega\} \in H_\xi\}$. Por outro lado, suponha que $\exists \beta_1, \beta_2, \beta_1 \neq \beta_2$, tais que $p - \lim\{x_{n,\beta_1} + x_{n,\beta_2} : n \in \omega\} \in \langle\{x_{\lambda,\beta} : (\lambda, \beta) \in I_\xi\}\rangle$. Então existe $\eta < \xi$ tal que $p - \lim\{x_{n,\beta_1} + x_{n,\beta_2} : n \in \omega\} \in \langle\{x_{\lambda,\beta} : (\lambda, \beta) \in I_\eta\}\rangle$. Pelo item (v) para η segue-se que $p \in P_\eta \subset P_\xi$ e vale a inclusão inversa.

(vi) é satisfeito:

Pelo item (ix), se $p \in P_\xi$ então existe $\eta < \xi$ tal que $p \in P_\eta$. Pelo item (vi) para η , existe $\beta \in \alpha$ tal que $p - \lim\{x_{n,\beta} : n \in \omega\} \notin \langle\{x_{\lambda,\theta} : (\lambda, \theta) \in 2^c \times \alpha \setminus S_\eta\}\rangle$. Mas como $S_\eta \subseteq S_\xi$ temos que $p - \lim\{x_{n,\beta} : n \in \omega\} \notin \langle\{x_{\lambda,\theta} : (\lambda, \theta) \in 2^c \times \alpha \setminus S_\xi\}\rangle$. Logo, segue-se que o item (vi) é satisfeito.

Seja δ_ξ como no item (iv) e escolha $\mu_\xi \in [\omega, 2^c)$ de tal forma que $g_{\mu_\xi} = g_{\delta_\xi}$ e $[\{\mu_\xi\} \times A_{\mu_\xi}] \cap [(\alpha \times \omega) \cup (\bigcup_{\eta < \xi} \{\mu_\eta\} \times A_{\mu_\eta}) \cup S_\xi] = \emptyset$. Novamente isto é possível, pois fizemos com que S_ξ tivesse cardinalidade menor ou igual que $|\alpha| + |\xi|$. Assim, as condições (iii) e (iv) são também satisfeitas.

Exemplo 5.3.1: Seja $I = \bigcup_{\xi < 2^c} I_\xi$ e seja $H = \langle\{x_{\xi,\beta} : (\xi, \beta) \in I\}\rangle$. Então H^γ é enumeravelmente compacto para todo $\gamma < \alpha$, mas H^α não é enumeravelmente compacto.

Demonstração: De fato, seja $\gamma < \alpha$ e considere $\{t_{n,\lambda} : n \in \omega \wedge \lambda \in \gamma + 1\}$ sequência 1-1 em H^γ . Então existe $h_{n,\lambda} \in \mathbb{Z}_2^{(I)}$ tal que $t_{n,\lambda} = x_{h_{n,\lambda}}$ para todo $n \in \omega$. Seja $\eta < 2^c$ tal que $\bigcup_{n \in \omega}^{\lambda \in \gamma+1} \text{supp}(h_{n,\lambda}) \subseteq I_\eta$ e seja θ o menor ordinal tal que $g_{\theta,\lambda}(n) = \text{supp}(h_{n,\lambda}) \forall n \in \omega$ e $\lambda \in \gamma + 1$. Daí, existe $\mu_\xi < 2^c$ tal que $g_{\mu_\xi} = g_\theta$ e a sequência $\{t_{n,\lambda} : n \in \omega \wedge \lambda \in \gamma + 1\}$

pode ser vista como $\{x_{g_{\mu_\xi, \lambda}(n)} : n \in \omega \wedge \lambda \in \gamma + 1\}$. Agora, para todo $\lambda \leq \gamma$, se $\lambda \in A_{\mu_\xi}$, temos pelo item (I) do lema 5.1.2 que $x_{\mu_\xi, \lambda}$ é o p_{μ_ξ} -limite de $\{x_{g_{\mu_\xi, \lambda}(n)} : n \in \omega\}$. Se $\lambda \notin A_{\mu_\xi}$, temos do item (I-a) do lema 5.1.2 que a sequência $\{x_{g_{\mu_\xi, \lambda}(n)} : n \in \omega\}$ possui p_{μ_ξ} -limite em $\langle \{x_{\eta, \theta} : (\eta, \theta) \in \bigcup_{\beta < \gamma}^{n \in \omega} g_{\mu_\xi, \beta}(n) \cup \{\mu_\xi\} \times A_{\mu_\xi}\} \rangle \subseteq \langle \{x_{\xi, \beta} : (\xi, \beta) \in I_{\xi+1}\} \rangle$. Como $\langle \{x_{\xi, \beta} : (\xi, \beta) \in I_{\xi+1}\} \rangle \subseteq H$ para todo $\lambda \in \gamma + 1$, temos que H^γ é enumeravelmente compacto.

Por outro lado, H^α não é enumeravelmente compacto. De fato, afirmamos que a sequência $\{(x_{n, \beta})_{\beta \in \alpha} : n \in \omega\}$ não possui ponto de acumulação.

Suponha por contradição que a sequência $\{(x_{n, \beta})_{\beta \in \alpha} : n \in \omega\}$ possui ponto de acumulação em H^α . Então $\forall \beta < \alpha, \{x_{n, \beta} : n \in \omega\}$ possui ponto de acumulação em $H = \bigcup_{\eta < 2^c} H_\eta$ e, portanto, existe $\xi < 2^c$ tal que todos os pontos de acumulação estão em H_ξ . Seja $p \in \omega^*$ tal que $(x_\beta)_{\beta \in \alpha} = p - \lim\{(x_{n, \beta})_{\beta \in \alpha} : n \in \omega\} \in (H_\xi)^\alpha \subseteq H^\alpha$. Pelo item (v), vemos facilmente que $p \in P_\xi$. Daí, pelo item (vi), existe $\beta < \alpha$ tal que $p - \lim\{x_{n, \beta} : n \in \omega\} \notin \langle \{x_{\eta, \theta} : (\eta, \theta) \in 2^c \times \alpha \setminus S_\xi\} \rangle$. Como $H = \langle \{x_{\xi, \beta} : (\xi, \beta) \in I\} \rangle$ e $I \cap S_\xi = \emptyset$, temos que $p - \lim\{x_{n, \beta} : n \in \omega\} \notin H$, o que é contradição.

Segue-se então que H^α não é enumeravelmente compacto.

Capítulo 6

Considerações finais

Neste capítulo discutiremos um pouco alguns resultados mais recentes relacionados ao tema da dissertação, muito deles sendo encontrados na presente data ainda sob a forma de preprint.

Recentemente foi contruído um grupo enumeravelmente compacto sem sequências não-triviais convergentes sem a necessidade da existência de um ultrafiltro seletivo como hipótese. Este resultado pode ser encontrado em um artigo publicado on-line no *Topology and its Applications* por Tomita e Szeptycki ¹. Assim, os exemplos do capítulo 3 obtidos a partir de um grupo de van Douwen podem ser obtidos de forma independente da existência de ultrafiltros seletivos.

Por outro lado, foi demonstrado recentemente em um preprint por Tomita e Sanchis que a existência de um ultrafiltro seletivo é suficiente para construir um exemplo de um grupo enumeravelmente compacto tal que dado $\alpha \leq \omega_1$ temos que G^γ é enumeravelmente compacto para todo $\gamma < \alpha$, mas G^α não é enumeravelmente compacto.

O primeiro exemplo de grupo abeliano livre enumeravelmente compacto é de Tkachenko

¹P.J. Szeptycki, A.H. Tomita, HFD groups in the Solovay model, *Topology and its Applications* (2009)

(Izvestia VUZ, 1990) sob CH, e o mais atual é de Madariaga Garcia e Tomita (Topology Appl.,2007) sob a existencia de $\mathfrak{c}$ ultrafiltros seletivos. Recentemente em um preprint Tomita e Boero usando $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ associaram uma topologia a um grupo abeliano livre de cardinalidade continuum cujo quadrado é enumeravelmente compacto. Em um artigo de 1998 (Comment. Math. Univ. Carol., 1998), Tomita mostra que uma topologia num grupo abeliano livre não tem ω -potencia enumeravelmente compacta. Uma continuação natural que ainda se encontra por fazer é o estudo da preservação da compacidade enumerável em produtos finitos de grupos abelianos livres que admitem uma topologia enumeravelmente compacta. Dikranjan e Tkachenko (Forum Math.,2003) classificaram usando MA todos os grupos abelianos de cardinalidade $\mathfrak{c}$ que admitem uma topologia enumeravelmente compacta. Uma continuação natural deste trabalho seria classificar os cardinais $\kappa \leq \mathfrak{c}$ e os grupos abelianos G que admitem uma topologia de grupo cujas potências menores que κ são enumeravelmente compactas, mas a κ -ésima potência não é.

Referências Bibliográficas

- [1] W.W. Comfort, S. Negrepontis, The Theory of Ultrafilters, Springer, Berlin, 1974.
- [2] E. K. van Douwen, The product of two countably topological groups, Trans. Amer. Math. Soc. 262 (1980) 417-427
- [3] R. Engelking, General Topology, Helderman Verlag (1989)
- [4] J. Fraleigh, A first course in abstract algebra, Addison Wesley (2003)
- [5] S. Garcia-Ferreira, A.H. Tomita, S. Watson, Countably Compact Groups From A Selective Ultrafilter, Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2004) 937-943
- [6] K.P. Hart, J. van Mill, A countably compact topological group H such that $H \times H$ is not countably compact, Trans. Amer. Math. Soc. 323 (1991) 811-821
- [7] T. Jech, Set Theory, Springer Monographs in Mathematics (2003)
- [8] A.H. Tomita, S. Watson, Ultraproducts, p-limits and antichains on the Comfort group order, Topology and its applications 143 (2004) 147-157
- [9] A.H. Tomita, Comfort's question on countable compactness, Fundamenta Mathematicae
- [10] A.H. Tomita, Countable compactness and finite powers of topological groups without convergent sequences, Topology and its applications 146-147 (2005) 527-538

- [11] A.H. Tomita, Square of countably compact groups without non-trivial convergent sequences, *Topology and its applications* 153 (2005) 107-117
- [12] S. Willard, *General Topology*, Dover (2004)