NELSON ONUCHIC

ESTRUTURAS UNIFORMES SÔBRE P-ESPAÇOS E APLICAÇÕES DA TEORIA DÊSTES ESPAÇOS EM TOPOLOGIA GERAL

Tese apresentada à Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, para doutoramento em Ciências (Matemática).

São Paulo - 1957

INTRODUÇÃO (*)

Na presente tese expomos os resultados que obtivemos no estudo da teoria dos P-espaços. Por P-espaço entendemos um espaço completamente regular em que a intersecção enumerável de conjuntos abertos é um conjunto aberto. Essa definição é equivalente à de L. Gillman e M. Henriksen [Gillman- Definição 5.1] (**):

Um P-espaço é um espaço completamente regular em que, no anel das funções numéricas contínuas, tôdo ideal primo fixo é maximal.

No capítulo I fazemos um resumo dos resultados da teoria dos P-espaços que interessam aos nossos estudos e que foram obtidos pelos referidos autores.

As propriedades de que goza um P-espaço permitem muni-lo de uma estrutura uniforme compatível com a sua topologia e de fácil caracterização, chamada estrutura uniforme natural (Definição 2). A apresentação dessa estrutura completa o capítulo I.

No capítulo II apresentamos os resultados que obtivemos, relativamente ao problema de se estabelecer condições em que podemos assegurar que um P-espaço é completo quando munido de sua estrutura uniforme natural. Verificamos que:

Todo P-espaço $\aleph_1$-Lindelöf é completo (Proposição 1).

Sendo $(E_i)_{i \in I}$ uma família de P-espaços completos, com potência de I não superior à do contínuo, então, a soma dês -

---

(*) - Tôda vez que usarmos uma notação sem referência anterior, fica entendido que fazemos uso de notação empregada nos "Éléments de Mathématique" do grupo Bourbaki. Supomos conhecido o conteúdo de sua "Topologie Générale", principalmente ao que se referem os capítulos I, II e IX.

(**) - As indicações entre colchetes referem-se à bibliografia no fim dêste trabalho: as que estiverem entre parênteses remetem o leitor ao ponto conveniente desta tese.

ses espaços topológicos é um P-espaço completo (Proposição 2).

Se E é um P-espaço tal que todo recobrimento aberto possua um sub-recobrimento $(O_i)_{i \in I}$, com potência de I não superior à do contínuo, e em que, para todo $i \in I$, o conjunto $I_i = \{ j \in I : O_i \cap O_j \neq \emptyset \}$ é enumerável, então E é completo (Proposição 3).

Na primeira parte do capítulo III estabelecemos relações existentes entre as estruturas uniformes: universal, de Nachbin (Definição 4) e natural. Achamos os resultados seguintes:

Se E é um P-espaço $\aleph_1$-Lindelöf, então a estrutura uniforme natural é igual à universal (Proposição 5).

Uma condição necessária e suficiente para que em um P-espaço a estrutura uniforme natural seja igual à de Nachbin é que tôda partição aberta seja enumerável (Teorema 2).

Sendo E um P-espaço $\aleph_1$-Lindelöf, uma condição necessária e suficiente para que a estrutura uniforme de Nachbin seja igual à universal é que E seja um espaço de Lindelöf (Proposição 6). Queremos observar que a igualdade entre as estruturas uniformes natural e de Nachbin é equivalente à existência de uma única estrutura uniforme que torna uniformemente contínuas tôdas as funções numéricas contínuas.

Na segunda parte do capítulo III abordamos o seguinte problema:

Em um produto finito de P-espaços, estabelecer relações entre a estrutura uniforme natural do produto e a estrutura produto das estruturas uniformes naturais dos fatôres. Neste sentido, conseguimos mostrar que:

A estrutura uniforme natural de um produto finito de P-espaços é mais fina que a estrutura produto das naturais dos fatôres (Proposição 7); se o espaço produto for de Lindelöf, podemos garantir que elas coincidem (Proposição 8). Há casos em que elas são distintas, tendo em vista que uma condição necessária para que a estrutura uniforme produto das naturais em ExE seja idêntica à natural do produto é que, em E, as estruturas uniformes natural e universal coincidam (Teorema 3) e lembrando que existem P-espaços em que a estrutura uniforme natural é diferente da universal (por exemplo, um espaço discreto com potência superior à do contínuo).

No capítulo IV mostramos as aplicações que fizemos em Topologia Geral, usando a teoria dos P-espaços. Como primeira aplicação temos que, se E é um espaço completamente regular no qual tôda função numérica separadamente contínua é contínua, então E é discreto (Teorema 4).

Sabemos que, em um espaço topológico, nem sempre as sequências simplesmente convergentes de funções numéricas contínuas têm limite contínuo. Um problema natural é, então, procurar caracterizar a classe dos espaços topológicos em que isso sempre aconteça . Chegamos ao teorema seguinte:

Em E, espaço completamente regular, uma condição necessária e suficiente para que tôda sequência simplesmente convergente de funções numéricas contínuas, tenha por limite uma função numérica contínua, é que E seja um P-espaço (Teorema 5). Fizemos, em seguida, a extensão dêsse resultado a espaços topológicos quaisquer (Proposição 9).

No capítulo V nos afastamos da teoria dos P-espaços. Damos aí uma nota sôbre o compactificado de Stone - Čech . Sendo $(E_i)_{i \in I}$ uma família de espaços completamente regulares, um problema natural que se apresenta é o de saber se o compactificado de Stone - Čech do produto é canônicamente homeomorfo ao produto dos compactificados de Stone - Čech dos fatôres . Edwin Hewitt estabeleceu relativamente à questão um teorema afirmando serem êsses espaços homeomorfos [Hewitt - Teorema 14] . Foi observado por Dieudonné que êsse teorema é falso [Dieudonné] e no trabalho de Pierre Samuel [Samuel- Observações sôbre a estrutura uniforme de Čech - Página 127], encontramos contra exemplos. A respeito verificamos que, sendo E um espaço completamente regular, temos:

Uma condição necessária para que o compactificado de Stone - Čech de ExE seja canônicamente homeomorfo ao produto dos compactificados de Stone - Cech dos fatôres, é que E seja pseudo compacto (Teorema 6).

O espaço E sendo não compacto, uma condição necessária para que o compactificado de Stone - Cech de ExE seja canônicamente homeomorfo ao produto dos compactificados de Stone - Cech dos fatôres, é que E, munido da estrutura uniforme universal, não seja completo (Teorema 8).

Sendo E paracompacto, ou Q-espaço ou P-espaço, então, uma condição necessária (e suficiente) para que o compactificado de Stone - Cech de ExE seja canônicamente homeomorfo ao produto dos compactificados de Stone - Cech dos fatôres, é que E seja compacto (Teoremas 7 e 9).

Finalizando esta introdução queremos manifestar nosso reconhecimento ao professor Chaim Samuel Hönig, pela constante assistência que nos prestou durante todo o desenvolvimento de nosso trabalho.

Agradecemos ao professor Edison Farah pela acolhida que nos deu quando quisemos elaborar nossa tese ligados à Cadeira de Análise Superior e, aos professores Francisco Antonio Lacaz Netto e Flávio Botelho Reis pelo apoio que sempre nos deram.

CAPÍTULO I

P-ESPAÇOS - ESTRUTURA UNIFORME NATURAL

I-1- P-ESPAÇOS

Definição 1 - Um espaço completamente regular E é chamado um P-espaço se a intersecção enumerável de conjuntos abertos de E é um conjunto aberto de E.

Teorema 1 - Seja E um espaço completamente regular. As propriedades seguintes são equivalentes.

-a- E é um P-espaço.

-b- Para tôda função numérica contínua de E a imagem recíproca de zero é um conjunto aberto. Gillman - Teorema 5.3

Como se nota fàcilmente, afirmar a propriedade -b- é equivalente a afirmar que tôda função numérica contínua que assume um dado valor em um ponto, assume o mesmo valor numa vizinhança dêsse ponto.

Decorrem imediatamente dêsse teorema, os corolários que seguem.

Corolário 1 - Todo sub-espaço de um P-espaço é um P-espaço.

Corolário 2 - Tôda soma topológica de P-espaços é um P-espaço.

Corolário 3 - Todo produto de um número finito de P-espaços é um P-espaço.

Da definição de P-espaço verificamos fàcilmente que todo sub-conjunto enumerável de um P-espaço é fechado e discreto. De onde concluimos o

Corolário 4 - Todo P-espaço compacto é finito e todo P-espaço localmente compacto é discreto.

Corolário 5 - Se um P-espaço E é pseudo compacto , isto é, se tôda função numérica contínua de E é limitada, então E é finito. [Gillman - Corolários do Teorema 5.3]

Exemplos - Consideremos o produto $E = \prod_{i \in I} R_i$, onde $R_i = R$ é munido da topologia discreta, com a seguinte topologia :

Para todo $(x_i)_{i \in I}$, um sistema fundamental de vizinhan - ças é formado dos produtos $\prod_{i \in I} V_i$, onde $V_i = \{x_i\}$ para todo $i \in J$ e $V_i = R_i$ para todo $i \notin J$, com potência de $J \subset I$ não superior a $\aleph_c$. Verifica-se fàcilmente que E é um P-espaço. Então, pelo corolário 1, todo sub-espaço de E é um P-espaço. A importância dêsse exemplo é que todo P-espaço é homeomorfo a um sub-espaço de $\prod_{i \in I} R_i$ para algum I. [Hònig]

I-2- ESTRUTURA UNIFORME NATURAL

Sendo E um P-espaço, ponhamos, para tôda função numérica contínua f, $U_f = \bigcup_{r \in R} f^{-1}(r) x f^{-1}(r)$. A classe de conjun - tos $(U_f)_{f \in C(E,R)}$ constitue uma base de filtro de entornos de uma estrutura uniforme compatível com a topologia de E. De fato, para tôda função numérica contínua f, a diagonal de ExE está contida em U_f. Sendo f e g funções numéricas contínuas, a família dos conjuntos não vazios de $\{f^{-1}(r) \cap g^{-1}(r')\}_{(r,r') \in RxR}$ forma uma partição de E por conjuntos abertos e portanto fechados. Isso porque para tôda função numérica f, os conjuntos não vazios de $\{f^{-1}(r)\}_{r \in R}$ formam uma partição de E e no caso de f contínua êsses conjuntos são abertos, devido à propriedade -b- do teorema 1. Como a potência de RxR é igual à potência do contínuo, pode-se definir em E uma função numérica contínua h tal que h seja constante em todo $f^{-1}(r) \cap g^{-1}(r')$ não vazio e h(x) diferente de h(y) se x e y pertencem a sub-conjuntos distintos da partição. Como para a função numérica contínua h assim definida temos U_h contido em $U_f \cap U_g$, resulta que

$(U_f)_{f \in C(E,R)}$ é base de um filtro $\mathcal{F}_P$. Sendo os U_f simétricos e $U_f^2 = U_f$, o filtro $\mathcal{F}_P$ é um filtro de entornos de uma estrutura uniforme. Como para todo ponto x_o de E, os conjuntos $f^{-1}(r)$, onde $f(x_o) = r$ e f função numérica contínua, constituem, devido ao teorema 1, um sistema fundamental de vizinhanças de x_o, decorre que a estrutura uniforme obtida é compatível com a topologia de E.

Definição 2 - Estrutura uniforme natural sôbre um P-espaço, é a estrutura uniforme definida pelo filtro $\mathcal{F}_P$. É indicada por $\mathcal{U}_P$. [Hönig]

C A P Í T U L O II

P-ESPAÇOS COMPLETOS

Definição 3 - Diz-se que um espaço topológico goza da propriedade de Lindelöf de ordem $\aleph$, ou simplesmente, é um espaço $\aleph$-Lindelöf, onde $\aleph$ é um número cardinal transfinito, se todo recobrimento aberto de E contém um sub-recobrimento de número cardinal menor ou igual a $\aleph$. Um espaço $\aleph_0$-Lindelöf é dito também um espaço de Lindelöf.

Supomos os P-espaços a que se referem as proposições 1, 2 e 3, munidos da estrutura uniforme natural.

Proposição 1 - Todo P-espaço $\aleph_1$-Lindelöf é completo.

Demonstração - Seja $\mathfrak{F}$ filtro de Cauchy em E. Suponhamos que $\mathfrak{F}$ não convirja em E. Então para todo $x \in E$, existe uma vizinhança aberta e fechada A_x tal que nenhum $M \in \mathfrak{F}$, esteja contido em A_x. A família $(A_x)_{x \in E}$ forma um recobrimento de E por conjuntos abertos e fechados que admite um sub-recobrimento $(A_{x_i})_{i \in I}$ com potência de I não superior a $\aleph_1$. Bem ordenamos I de modo que para todo $i \in I$, o conjunto dos índices menores que i seja enumerável. Definimos: $O_1 = A_{x_1}$ e para todo $i > 1$, $O_i = A_{x_i} \cap \complement \bigcup_{j < i} A_{x_j}$. Seja J o sub-conjunto de I constituido de todos os índices i tais que O_i seja não vazio. A família $(O_i)_{i \in J}$ forma assim uma partição de E por conjuntos abertos. Estando O_i contido em A_{x_i}, temos para todo $M \in \mathfrak{F}$, M não contido em O_i, qualquer que seja $i \in J$. Definindo uma função numérica contínua f de modo que $f(x) = r_i$ para $x \in O_i$, com $r_i \neq r_j$ se $i \neq j$, temos $U_f = \bigcup_{i \in J} O_i x O_i$. Então para todo $M \in \mathfrak{F}$, MxM não está contido em U_f, pois se para algum $M \in \mathfrak{F}$ tivéssemos MxM contido em U_f, existiria um índice $i \in J$ tal que MxM contido em $O_i x O_i$ porque $(O_i)_{i \in J}$ é uma partição de E. Resultaria pois M contido em O_i, o que é absurdo. Existe então um entôrno U_f de modo que para todo $M \in \mathcal{F}$, $M\times M$ não está contido em U_f. Isso significa que $\mathcal{F}$ não é filtro de Cauchy, contrário ao suposto. Logo $\mathcal{F}$ converge para algum ponto de E.

Essa proposição nos permite observar que, se a hipótese do contínuo for verdadeira, todo P-espaço com potência igual à do contínuo é completo.

<u>Proposição 2</u> - Seja $(E_i)_{i\in I}$ uma família de P-espaços completos, com potência de I não superior à do contínuo. Então a soma dêsses espaços topológicos é um P-espaço completo.

<u>Demonstração</u> - Seja $\mathcal{F}$ filtro de Cauchy no espaço soma. Já podemos supor, sem perda de generalidade, $E_i \cap E_j$ igual ao conjunto vazio sempre que $i \neq j$. Existe $M \in \mathcal{F}$ com M contido em E_i para algum $i \in I$. De fato, definindo uma função numérica contínua f no espaço soma de modo que $f(x) = r_i$ se $x \in E_i$, com $r_i \neq r_j$ se $i \neq j$, temos $U_f = \bigcup_{i\in I} E_i \times E_i$. Como $\mathcal{F}$ é filtro de Cauchy, existe $M \in \mathcal{F}$ de modo que $M\times M$ esteja contido em U_f. Isso acarreta a existência de um E_{i_o} tal que M esteja contido em E_{i_o}. Então $\mathcal{F}$ possue uma base $\mathcal{B}$ em E_{i_o}. $\mathcal{B}$ é base de um filtro de Cauchy $\mathcal{F}_{i_o}$ em E_{i_o}, munido da estrutura uniforme natural que indicamos por $\mathcal{U}_P^{i_o}$. Com efeito, seja $U_f^{i_o} = \bigcup_{r\in R} f^{-1}(r)\times f^{-1}(r)$ um entôrno de $\mathcal{U}_P^{i_o}$. Logo, temos que $V = U_f^{i_o} \cup (\complement E_{i_o}) \times (\complement E_{i_o})$ é um entôrno da estrutura uniforme natural do espaço soma. Existe pois $M \in \mathcal{F}$ de modo que $M\times M$ esteja contido em V e por conseguinte $M\times M$ contido em $U_f^{i_o}$. Como E_{i_o} é completo, resulta que $\mathcal{F}_{i_o}$ converge em E_{i_o} para um ponto x e, portanto, que $\mathcal{F}$ converge para o mesmo ponto x no espaço soma dos espaços topológicos.

<u>Proposição 3</u> - Seja E um P-espaço tal que todo recobrimento aberto contenha um sub-recobrimento

$(O_i)_{i \in I}$, com potência de I não superior à do contínuo, e de modo que para tôdo $i \in I$ o conjunto $I_i = \{ j \in I \mid O_i \cap O_j \neq \phi \}$ seja enumerável. Então E é completo.

Observamos que os P-espaços satisfazendo às hipóteses das proposições expostas neste capítulo, são Q-espaços [Hewitt - Definição 12], devido ao seguinte teorema:

Uma condição necessária e suficiente para que um P-espaço seja um Q-espaço, é que êle seja completo quando munido da estrutura uniforme natural. [Hönig]

C A P Í T U L O III

RELAÇÕES ENTRE ESTRUTURAS UNIFORMES SÔBRE UM P-ESPAÇO

III-1- RELAÇÕES ENTRE AS ESTRUTURAS UNIFORMES UNIVERSAL, NATURAL E DE NACHBIN

Em um espaço uniformizável E, existe a mais fina das estruturas uniformes compatíveis com a topologia de E. Essa estrutura, que se indica por $\mathcal{U}_o$, é chamada estrutura uniforme universal. Como todo afastamento(*) sôbre E é equivalente a um afastamento limitado resulta a

Proposição 4 - Se $\mathcal{U}$ é uma estrutura uniforme sôbre E, tal que todo afastamento contínuo e limitado sôbre E seja uniformemente contínuo em ExE, munido da estrutura uniforme produto $\mathcal{U}x\mathcal{U}$, então $\mathcal{U} = \mathcal{U}_o$.
[Bourbaki 3- § 1- Exercício 5]

Definição 4 - Seja E um espaço topológico uniformizável. A menos fina das estruturas uniformes compatíveis com a topologia de E que tornam uniformemente contínuas tôdas as aplicações numéricas contínuas de E, é chamada estrutura uniforme de Nachbin. Indicamos por $\mathcal{U}_N$.

É fácil verificar que em um P-espaço, tôda função numérica contínua é uniformemente contínua quando o munimos da estrutura uniforme natural. Segue-se portanto que $\mathcal{U}_o \geq \mathcal{U}_P \geq \mathcal{U}_N$. As proposições 5 e 6 e o teorema 2 es-

---

(*) - Usamos "afastamento" com o mesmo significado do "écart" do Bourbaki.

tabelecem condições em que podemos garantir a igualdade entre essas estruturas uniformes.

Proposição 5 - Se E é um P-espaço $\aleph_1$-Lindelöf, então a estrutura uniforme natural é igual à universal.

Demonstração - Seja $\mathcal{U}$ uma estrutura uniforme qualquer, compatível com a topologia de E. Vamos mostrar que ela é menos fina que a natural. Seja V um entôrno simétrico qualquer pertencente ao filtro de entornos de $\mathcal{U}$. Temos $\bigcup_{y \in E} V(y) x V(y)$ contido em $\overset{2}{V}$. Para todo $x \in E$ existe uma vizinhança aberta e fechada A_x tal que A_x esteja contido em $V(x)$. A família $(A_x)_{x \in E}$ forma um recobrimento de E por conjuntos abertos e fechados que admite um sub-recobrimento $(A_{x_i})_{i \in I}$ com potência de I não superior a $\aleph_1$. Bem ordenamos I de modo que para todo $i \in I$, o conjunto dos índices menores que i seja enumerável. Definimos $O_1 = A_{x_1}$ e para todo $i > 1$, $O_i = A_{x_i} \cap \complement(\bigcup_{j<i} A_{x_j})$. Seja J o sub-conjunto de I constituido de todos os índices i tais que O_i seja não vazio. A família $(O_i)_{i \in J}$ forma uma partição de E por conjuntos abertos. Definindo uma função numérica contínua f de modo que $f(x) = r_i$ para $x \in O_i$, com $r_i \neq r_j$ se $i \neq j$, temos $U_f = \bigcup_{i \in J} O_i x O_i$. Como para todo $i \in J$ temos

$O_i x O_i \subset A_{x_i} x A_{x_i} \subset V(x_i) x V(x_i) \subset \overset{2}{V}$, resulta U_f contido em $\overset{2}{V}$. O nosso teorema fica assim demonstrado.

Essa proposição nos permite observar que, se a hipótese do contínuo for verdadeira, então, em todo P-espaço com potência igual à do contínuo, as estruturas uniformes universal e natural coincidem.

Teorema 2 - Uma condição necessária e suficiente para que em um P-espaço a estrutura uniforme natural seja igual à de Nachbin, é que tôda partição aberta seja enumerável.

Condição necessária - Para tôda função numérica contínua f e todo ε positivo, indiquemos por $V_{f,\varepsilon}$ o conjunto de todos os $(x,y) \in E \times E$ para os quais temos $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Suponhamos que exista uma partição aberta não enumerável. Isso acarreta a existência de uma partição aberta de número cardinal igual a $\aleph_1$. Seja pois $(O_i)_{i \in I}$, com potência de I igual a $\aleph_1$, uma partição aberta de E. O conjunto $W = \bigcup_{i \in I} O_i x O_i$ é um conjunto do filtro de entornos da estrutura uniforme natural. Vamos mostrar que, para todo conjunto finito de funções numéricas contínuas $f_1, \ldots, f_n$ de E e todo ε positivo, temos $\bigcap_{p=1}^{n} V_{f_p,\varepsilon}$ não contido em W. Isso feito, teremos demonstrado a condição necessária.

Sejam $f_1, \ldots, f_n$ n quaisquer funções numéricas contínuas de E. Tomemos em cada O_i um ponto x_i. Existe um sub-conjunto I_1 de I, com potência igual a $\aleph_1$ e tal que $|f_1(x_i) - f_1(x_j)| < \varepsilon$ para todo $(i,j) \in I_1 x I_1$. De fato, tomemos na reta numérica o recobrimento $(] m \frac{\varepsilon}{2}, (m+1)\frac{\varepsilon}{2} [)_{m \in Z}$, Z sendo o conjunto de todos os racionais inteiros. Ao menos para um $m \in Z$, deve existir um sub-conjunto I_1 de I, com potência igual a $\aleph_1$, de modo que para todo $i \in I_1$ se tenha $m \frac{\varepsilon}{2} < f_1(x_i) < (m+1) \frac{\varepsilon}{2}$. Isso é verdade pois, indicando-se por J_m o conjunto de todos os índices $i \in I$ para os quais $m \frac{\varepsilon}{2} < f_1(x_i) < (m+1) \frac{\varepsilon}{2}$, como $I = \bigcup_{m \in Z} J_m$, I seria enumerável se todos os J_m o fossem. Basta tomar para I_1 um J_m de potência igual a $\aleph_1$. Assim, por indução, encontramos os sub-conjuntos $I_m \subset I_{m-1} \subset \ldots \subset I_1 \subset I$ com potências iguais a $\aleph_1$ e satisfazendo a $|f_p(x_i) - f_p(x_j)| < \varepsilon$ para todo $(i,j) \in I_p x I_p$ e $p = 1, \ldots, n$. Resulta pois que para todo $(i,j) \in I_n x I_n$ e $i \neq j$ temos (x_i, x_j) pertencente a $\bigcap_{p=1}^{n} V_{f_p,\varepsilon}$ e (x_i, x_j) não pertencente a qualquer $O_k x O_k$, e, por conseguinte, não pertencente a W, como queríamos mostrar.

Condição suficiente - Como a estrutura uniforme de Nachbin é sempre menos fina que a natural, basta mostrar que, em nosso caso, a estrutura uniforme de Nachbin é mais fina que a natural. Seja f uma função numérica contínua qualquer de E. Indiquemos por $(O_n)_{n \in N}$, N sendo o conjunto de todos os racionais inteiros e positivos, a família constituida dos conjuntos não vazios de $(f^{-1}(r))_{r \in R}$. A escolha de N como conjunto de índices é possível em vista de tôda partição aberta ser, por hipótese, enumerável. É claro que $U_f = \bigcup_{n \in N} O_n x O_n$. Definimos agora a seguinte função numérica contínua g: $g(x) = n$ se $x \in O_n$. Temos que $V_{g,1} = \bigcup_{n \in N} O_n x O_n = U_f$. De fato, se $(x,y) \in \bigcup_{n \in N} O_n x O_n$, vem $(x,y) \in O_n x O_n$ para algum $n \in N$, o que acarreta $g(x) = g(y)$ e , por conseguinte, $(x,y) \in V_{g,1}$; se $(x,y) \in V_{g,1}$, vem $(x,y) \in O_n x O_n$ para algum $n \in N$, pois $(x,y) \in O_n x O_m$ com $n \neq m$ acarreta $|g(x) - g(y)| = |n - m| \geq 1$ e, portanto, (x,y) não pertencente a $V_{g,1}$. Lembrando que o conjunto $V_{g,1}$ pertence ao filtro de entornos da estrutura uniforme de Nachbin, a igualdade $V_{g,1} = U_f$ mostra a condição suficiente.

Proposição 6 - Sendo E um P-espaço $\aleph_1$-Lindelöf, uma condição necessária e suficiente para que a estrutura uniforme de Nachbin seja igual à universal, é que E seja um espaço de Lindelöf.

Condição necessária - Suponhamos que E não seja espaço de Lindelöf. Existe pois um recobrimento aberto $(A_i)_{i \in I}$ com potência de I igual a $\aleph_1$ e que não contém um sub-recobrimento enumerável. A todo $x \in E$ associemos um A_i tal que $x \in A_i$. Seja B_x uma vizinhança aberta e fechada de x, com $B_x \subset A_i$. $(B_x)_{x \in E}$ forma um recobrimento de E por conjuntos abertos e fechados que admite um sub-recobrimento $(B_{x_i})_{i \in I'}$, em que a potência de I' é igual a $\aleph_1$. Não pode $(B_{x_i})_{i \in I'}$ admitir um sub-recobrimento enumerável porque neste caso também a família $(A_i)_{i \in I}$ admitiria um sub-recobrimento enumerável. Bem ordenamos I' de modo que para todo $i \in I'$, o conjunto dos ín dices menores que i seja enumerável. Definimos $O_1 = B_{x_1}$ e para todo $i > 1$, $O_i = B_{x_i} \cap \complement \bigcup_{j<i} B_{x_j}$. Seja J o sub-conjunto de I' constituido de todos os índices i tais que O_i seja não vazio. A família $(O_i)_{i \in J}$ forma assim uma partição de E por conjuntos abertos. O conjunto J não é enumerável pois, se o fosse, como para todo $i \in J$ O_i está contido em B_{x_i}, a família $(B_{x_i})_{i \in J}$ seria um sub-recobrimento enumerável de $(B_{x_i})_{i \in I'}$, o que nos leva a uma contradição. Temos assim $(O_i)_{i \in J}$ constituindo uma partição de E por conjuntos abertos e com potência de J igual a $\aleph_1$. Raciocinando de maneira análoga ao feito na demonstração da condição necessária do teorema 2, concluiremos que a estrutura uniforme natural é estritamente mais fina que a de Nachbin e, portanto, que a estrutura uniforme universal é estritamente mais fina que a de Nachbin. Isso mostra, devido à hipótese da condição necessária, que é insustentável a suposição de que E não seja espaço de Lindelöf.

<u>Condição suficiente</u> - O espaço sendo de Lindelöf, temos pelo teorema 2 a igualdade entre as estruturas uniformes de Nachbin e natural e, pela proposição 1, a igualdade entre as estruturas uniformes natural e universal. Segue-se, pois, a igualdade entre as estruturas uniformes de Nachbin e universal.

Essa proposição pode ser também enunciada da seguinte maneira:

Sendo E um P-espaço $\aleph_1$-Lindelöf, uma condição necessária e suficiente para que seja única a estrutura uniforme sôbre E que torna uniformemente contínuas tôdas as funções numéricas contínuas, é que E seja um espaço de Lindelöf.

III-2- ESTRUTURAS UNIFORMES SÔBRE UM PRODUTO FINITO DE P-ESPAÇOS

Proposição 7 - Sejam $E_1, \dots, E_n$, P-espaços. A estrutura uniforme natural de $\prod_{i=1}^{n} E_i$ é mais fina que a estrutura uniforme produto das naturais dos E_i.

Demonstração - Os conjuntos da forma

$$\left(\bigcup_{r\in R} f_1^{-1}(r)\times f_1^{-1}(r), \dots, \bigcup_{r\in R} f_n^{-1}(r)\times f_n^{-1}(r)\right) =$$

$$= \left\{\left((x_1,\dots,x_n), (y_1,\dots,y_n)\right) \mid (x_i,y_i)\in \bigcup_{r\in R} f_i^{-1}(r)\times f_i^{-1}(r),\right.$$

$\left. i = 1, 2, \dots, n\right\}$, onde os f_i são funções numéricas contínuas definidas nos E_i, formam um sistema fundamental de entornos da estrutura uniforme produto das naturais dos fatôres. Temos que $\left(\bigcup_{r\in R} f_1^{-1}(r)\times f_1^{-1}(r), \dots, \bigcup_{r\in R} f_n^{-1}(r)\times f_n^{-1}(r)\right) =$

$$= \bigcup_{(r_1,\dots,r_n)\in R^n} \left(f_1^{-1}(r_1)\times\dots\times f_n^{-1}(r_n)\right)\times\left(f_1^{-1}(r_1)\times\dots\times f_n^{-1}(r_n)\right)$$

porque $\left((x_1,\dots,x_n), (y_1,\dots,y_n)\right)$ pertence ao primeiro membro da igualdade acima $\iff (x_i,y_i)\in \bigcup_{r\in R} f_i^{-1}(r)\times f_i^{-1}(r)$ para todo $i \iff$ para todo i existe um número real r_i tal que $(x_i,y_i)\in f_i^{-1}(r_i)\times f_i^{-1}(r_i) \iff$ para todo i $x_i\in f_i^{-1}(r_i)$ e

$$y_i\in f_i^{-1}(r_i) \iff \begin{matrix} (x_1,\dots,x_n)\in f_1^{-1}(r_1)\times\dots\times f_n^{-1}(r_n), \\ (y_1,\dots,y_n)\in f_1^{-1}(r_1)\times\dots\times f_n^{-1}(r_n), \end{matrix} \iff$$

$\left((x_1,\dots,x_n), (y_1,\dots,y_n)\right)$ pertence ao segundo membro da igualdade acima. Como

$$\bigcup_{(r_1,\dots,r_n)\in R^n} \left(f_1^{-1}(r_1)\times\dots\times f_n^{-1}(r_n)\right)\times\left(f_1^{-1}(r_1)\times\dots\times f_n^{-1}(r_n)\right)$$

é um conjunto do filtro de entornos da estrutura uniforme natural de $\prod_{i=1}^{n} E_i$, porque os conjuntos não vazios de $\left\{f_1^{-1}(r_1)\times\dots\times f_n^{-1}(r_n)\right\}_{(r_1,\dots,r_n)\in R^n}$ formam uma partição de $\prod_{i=1}^{n} E_i$ por conjuntos abertos, a proposição fica demonstrada

<u>Corolário</u> - Se os E_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, são P-espaços completos quando munidos da estrutura uni-forme natural, então o produto também é um P-espaço completo quando munido da estrutura uniforme natural.

<u>Demonstração</u> - Os E_i sendo completos, também $\prod_{i=1}^{n} E_i$ é completo quando munido da estrutura uniforme produto. Como um espaço uniformizável completo com uma dada estrutura uniforme é também completo com qualquer outra estrutura uniforme mais fina compatível com a sua topologia, a conclusão é imediatamente obtida da proposição anterior.

<u>Proposição 8</u> - Sejam $E_1, \ldots, E_n$ P-espaços de modo que $E = \prod_{p=1}^{n} E_p$ seja espaço de Lindelöf. A estrutura uniforme natural de E é igual à estrutura uniforme produto das naturais dos fatôres.

<u>Demonstração</u> - Os conjuntos $\bigcup_{q\in N} B_q x B_q$, para tôdas as partições $(B_q)_{q\in N}$ de E por conjuntos abertos, formam um sistema fundamental do filtro de entornos da estrutura uniforme natural de E. Para tôda partição $(B_q)_{q\in N}$ por conjuntos abertos, mostremos que existe um conjunto do filtro de entornos da estrutura uniforme produto das naturais que está contido em $\bigcup_{q\in N} B_q x B_q$. Isso provará que a estrutura uniforme produto das naturais é mais fina que a natural do produto e, portanto, ficará demonstrada a nossa proposição devido à proposição 7.

Para todo $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$, existe um único $q \in N$ tal que $x \in B_q$. Determinemos em E_p uma vizinhança aberta e fechada D_x^p de x_p tal que $(D_x^1) x \ldots x (D_x^n)$ esteja contido em B_q. A família $(\prod_{p=1}^{n} D_x^p)_{x\in E}$ forma um recobrimento de E por conjuntos abertos e fechados. Por ser E um espaço de Lindelöf, existe um sub-recobrimento enumerável $(\prod_{p=1}^{n} D_{x^i}^p)_{i\in N}$ de E, extraido de $(\prod_{p=1}^{n} D_x^p)_{x\in E}$. Definimos, para todo

$x_p \in E_p$, o conjunto aberto e fechado $O_{x_p} = \bigcap_{i \in I_p} D^p_{xi}$, onde I_p é o sub-conjunto de N constituido de todos os índices i tais que $x_p \in D^p_{xi}$. A família $(O_{x_p})_{x_p \in E_p}$ forma um recobrimento de E_p por conjuntos abertos e fechados. Para todo $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$, existe sempre um índice $i_o \in N$ de modo que $O_{x_1} x \ldots x O_{x_n}$ esteja contido em $D^1_{xio} x \ldots x D^n_{xio}$. De fato, sabemos que se $x_p \in D^p_{xi}$, temos O_{x_p} contido em D^p_{xi}. Agora, como existe $i_o \in N$ de modo que $(x_1, \ldots, x_n) \in D^1_{xio} x \ldots x D^n_{xio}$, para qualquer $(x_1, \ldots, x_n) \in E$, resulta $O_{x_1} x \ldots x O_{x_n}$ contido em $D^1_{xio} x \ldots x D^n_{xio}$. Sendo E espaço de Lindelöf, também o é E_p para todo p e, por conseguinte, $(O_{x_p})_{x_p \in E_p}$ contém um sub-recobrimento enumerável $(O_{x_{p_k}})_{k \in N}$ de E_p. Definimos $A^p_1 = O_{x_{p_1}}$ e para $k > 1$, $A^p_k = O_{x_{p_k}} \cap \complement [\bigcup_{j<k} O_{x_{p_j}}]$. Os conjuntos não vazios de $(A^p_k)_{k \in N}$ formam uma partição aberta de E_p e temos $A^1_{k_1} x \ldots x A^n_{k_n}$ contido em $O_{x_{p_{k_1}}} x \ldots x O_{x_{p_{k_n}}}$ para todo $(k_1, \ldots, k_n) \in N^n$. Qualquer que seja $(k_1, \ldots, k_n) \in N^n$ existe sempre $q \in N$ tal que $A^1_{k_1} x \ldots x A^n_{k_n}$ esteja contido em B_q. Resulta pois

$$\bigcup_{(k_1, \ldots, k_n) \in N^n} (A^1_{k_1} x \ldots x A^n_{k_n}) \, x \, (A^1_{k_1} x \ldots x A^n_{k_n}) \quad \text{contido em}$$

$\bigcup_{q \in N} B_q x B_q$. Como

$$\bigcup_{(k_1, \ldots, k_n) \in N^n} (A^1_{k_1} x \ldots x A^n_{k_n}) \, x \, (A^1_{k_1} x \ldots x A^n_{k_n}) \quad \text{é igual a}$$

$\mathcal{J}\left(\bigcup_{k \in N} A^1_k x A^1_k, \ \ldots \ , \bigcup_{k \in N} A^n_k x A^n_k\right)$, que é um conjunto do filtro de entornos da estrutura uniforme produto das naturais, a proposição está demonstrada.

Observamos que na proposição precedente não basta em geral supor que os espaços fatôres sejam de Lindelöf. Se é verdade que sendo um produto de espaços topológicos um espa ço de Lindelöf, os fatôres também o são, a recíproca não é necessàriamente verdadeira. [Kelley - Capítulo 1 - Problema L Nota]

Nem sempre podemos assegurar que em um produto finito de P-espaços, as estruturas uniformes natural e produto das naturais coincidem. É o que nos mostra o corolário do teorema seguinte.

<u>Teorema 3</u> - Seja E um P-espaço. Uma condição necessária para que sôbre ExE, as estruturas uniformes natural e produto das naturais coincidam, é que as estruturas uniformes natural e universal de E coincidam.

<u>Demonstração</u> - Todo afastamento contínuo e limitado sôbre E é uniformemente contínuo em ExE, quando munido da estrutura uniforme natural e, portanto, quando munido da produto das naturais, devido à hipótese da igualdade entre essas estruturas uniformes. Em virtude da proposição 4 concluimos, pois, a igualdade entre as estruturas uniformes natural e universal de E.

<u>Corolário</u> - Existem P-espaços em que a estrutura uniforme produto das naturais é estritamente menos fina que a estrutura uniforme natural do produto.

<u>Demonstração</u> - Seja E um espaço topológico discreto em que a potência de E é maior que a do contínuo. Como, para tôda função numérica contínua f de E, U_f é diferente da diagonal de ExE porque a potência de E é maior que a do contínuo, temos sôbre E, a estrutura uniforme universal estritamente mais fina que a natural. Resulta, pelo teorema anterior, que a estrutura uniforme natural de ExE é estritamente mais fina que a estrutura uniforme produto das naturais.

CAPÍTULO IV

APLICAÇÕES DA TEORIA DOS P-ESPAÇOS EM TOPOLOGIA GERAL

Seja f uma aplicação do espaço $E_1 x E_2$, em um espaço F. Para todo $x \in E_1$, indica-se por f_x a aplicação de E_2 em F assim definida: $f_x(y) = f(x,y)$ para todo $y \in E_2$. Anàlogamente, introduz-se, para todo $y \in E_2$, a aplicação f_y de E_1 em F.

Definição 5 - Sejam E_1, E_2, F espaços topológicos e f uma aplicação de $E_1 x E_2$ em F. A aplicação f é dita separadamente contínua, se para todo $(x,y) \in E_1 x E_2$ as aplicações f_x e f_y forem contínuas.

Lema 1 - Seja E um espaço completamente regular. Uma condição necessária para que tôda aplicação separadamente contínua de ExE em R seja contínua, é que E seja um P-espaço.

Demonstração - Suponhamos que E, completamente regular, não seja um P-espaço. Existe então, pelo teorema 1, uma função numérica contínua f de E, tal que, $f^{-1}(0)$ não seja aberto em E. Existe pois $x_o \in f^{-1}(0)$ de modo que tôda vizinhança de x_o tenha intersecção não vazia com o complementar de $f^{-1}(0)$. Definimos a seguinte aplicação de ExE em R:

$$g(x,y) = 0 \text{ se } f(x) = f(y) = 0 \text{ e}$$

$$g(x,y) = \frac{2f(x).f(y)}{f^2(x) + f^2(y)} \quad \text{para os demais pontos.}$$

Verifica-se, fàcilmente, que a aplicação g é separadamente contínua; mas, não contínua, porque $g(x_o, x_o) = 0$ e tôda vizinhança de (x_o, x_o) possue um ponto (z,z) para o qual z pertence ao complementar de $f^{-1}(0)$, o que acarreta $g(z,z) = 1$.

Lema 2 - Seja E um espaço topológico separado em que todo ponto possue um sistema fundamental de vizinhanças abertas e fechadas. Uma condição necessária para que tôda aplicação separadamente contínua de $E \times E$ em R seja contínua, é que E seja discreto.

Demonstração - Suponhamos E um espaço topológico não discreto satisfazendo às hipóteses do lema. Vamos construir uma aplicação de $E \times E$ em R que seja separadamente contínua e não contínua. Isso feito, o nosso lema ficará demonstrado.

Como existe em E um ponto a não isolado, (a,a) é um ponto não isolado de $E \times E$. Seja $(O_i)_{i \in I}$ um sistema fundamental de vizinhanças abertas de (a,a). A cada $i \in I$, associemos um conjunto A_i não vazio, aberto e fechado em E, com $A_i \times A_i$ contido em O_i e (a,a) não pertencente a $A_i \times A_i$. Isso é possível porque, tomando-se em O_i um ponto $(x_i, x_i) \neq (a,a)$, que existe porque (a,a) não é isolado, podemos , por ser o espaço E separado, encontrar uma vizinhança $A_i \times A_i$ de (x_i, x_i) com (a,a) não pertencente a $A_i \times A_i$; A_i aberto e fechado em E, e $A_i \times A_i$ contido em O_i Observamos que, pelo fato de todo ponto de E admitir um sistema fundamental de vizinhanças abertas e fechadas nos foi possível tomar A_i aberto e fechado com $A_i \times A_i$ contido em O_i. Bem ordenamos I Definimos por indução uma aplicação H de I no conjunto das partes de E, que indicamos por [illegible] da seguinte maneira: $H(1) = A_1$; suposto H definido para todo $j < i$, pomos

$$H(i) = \emptyset \quad \text{se } O_i \cap \Big[\bigcup_{j<i} H(j) \times H(j)\Big] \neq \emptyset \quad \text{ou}$$

$$H(i) = A_i \quad \text{se } O_i \cap \Big[\bigcup_{j<i} H(j) \times H(j)\Big] = \emptyset .$$

O conjunto $A = \bigcup_{i \in I} H(i) \times H(i)$ não é fechado porque (a,a) não pertence a A e (a,a) pertence a $\overline{A}$. De fato, como (a,a) não pertence a $A_i \times A_i$ para todo $i \in I$, temos (a,a) não pertencente a A. Agora, $A \cap O_i \neq \emptyset$ para todo i porque, se $H(i) = \emptyset$, $O_i \cap \Big[\bigcup_{j<i} H(j) \times H(j)\Big] \neq \emptyset$ e, por conseguinte, $A \cap O_i \neq \emptyset$; e se $H(i) = A_i$, vem $A_i \times A_i$ contido em O_i, de onde resulta $A \cap O_i \neq \emptyset$.

Logo, temos $(a,a) \in \overline{A}$. Para todo $i \neq j$, $H(i) \cap H(j) = \emptyset$. Com efeito. Suponhamos $j < i$. Se $H(i) = \emptyset$ o fato é trivial; se $H(i) = A_i$, vem $O_i \cap \left[\bigcup_{k<i} H(k)xH(k)\right] = \emptyset$ e, portanto,

$O_i \cap H(j)xH(j) = \emptyset$. Segue-se daí, lembrando que $H(i)xH(i)$ está contido em O_i, que $H(i)xH(i) \cap H(j)xH(j) = \emptyset$, o que acarreta $H(i) \cap H(j) = \emptyset$. Definimos agora a seguinte aplicação de ExE em R: $f(x,y) = 1$ se $(x,y) \in A$ e $f(x,y) = 0$ se $(x,y) \notin A$. Essa aplicação não é contínua porque A é diferente de sua aderência $\overline{A}$. Ela é, porém, separadamente contínua. Com razão, para todo $(x,y) \in ExE$, os conjuntos $\{x\} \times E$ e $E \times \{y\}$ têm intersecção não vazia com, no máximo, um conjunto da forma $H(i)xH(i)$, porque $H(i) \cap H(j) = \emptyset$ sempre que $i \neq j$. Lembrando que para todo i, $H(i)$ é um conjunto aberto e fechado, resulta que f é separadamente contínua. O lema fica completamente demonstrado.

<u>Teorema 4</u> - Uma condição necessária (e suficiente) para que em um espaço completamente regular, tôda aplicação separadamente contínua de ExE em R seja contínua, é que E seja discreto.

<u>Demonstração</u> - Pelo lema 1 o espaço completamente regular E é um P-espaço. Como um P-espaço satisfaz às hipóteses do lema 2, por causa da propriedade -b- do teorema 1, o nosso teorema está demonstrado.

<u>Teorema 5</u> - Seja E um espaço completamente regular. Uma condição necessária e suficiente para que em E, tôda sequência simplesmente convergente de funções numéricas contínuas tenha por limite uma função numérica contínua, é que E seja um P-espaço.

<u>Condição necessária</u> - Seja x_o um ponto qualquer de E e $(V_n)_{n \in N}$ um conjunto enumerável de vizinhanças de x_o. Como E é completamente regular, existe, para todo $n \in N$, uma apli

cação contínua f_n de E em $[0,1]$, com $f_n(x_o) = 0$ e $f_n(x) = 1$ para $x \notin V_n$. Para todo $n \in N$, definimos a seguinte função numérica contínua g_n: $g_n(x) = \sup\limits_{1 \leq i \leq n} f_i(x)$. Para todo $x \in E$, $(g_n(x))_{n \in N}$ é uma sequência monotônica não decrescente, limitada, e, portanto, convergente para um limite $g(x)$ com $0 \leq g(x) \leq 1$. A função numérica g, assim definida, é, devido à hipótese de nosso teorema, uma função numérica contínua. Agora, $g^{-1}(-1,1)$ está contido em $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n$. De fato, se $x \in g^{-1}(-1,1)$, vem $g(x) < 1$, de onde se segue que para todo $n \in N$, $g_n(x) < 1$, o que acarreta $f_n(x) < 1$, e, portanto, $x \in V_n$ para todo n, ou seja $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n$. Como $g(x_o) = 0$, o conjunto $g^{-1}(-1,1)$ é uma vizinhança aberta de x_o e, por conseguinte, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n$ é uma vizinhança de x_o, o que demonstra ser E um P-espaço.

Condição suficiente - Seja $(f_n)_{n \in N}$ uma sequência qualquer de funções numéricas contínuas de E, simplesmente convergente para uma função numérica f. Mostremos que f é contínua em qualquer ponto x_o de E. Para tanto, bastará mostrar que existe uma vizinhança de x_o em que a convergência da sequência considerada é uniforme.

Para todo número natural p, existe um número natural N_p, tal que $|f_n(x_o) - f_m(x_o)| < \frac{1}{p}$ para todo par (n,m) satisfazendo $n > N_p$ e $m > N_p$. Como a função numérica $f_n - f_m$ é contínua, existe, para todo par (n,m) satisfazendo a condição acima, uma vizinhança $V_{p,n,m}$ de x_o de modo que $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{p}$ para todo $x \in V_{p,n,m}$. Pondo $V_p = \bigcap\limits_{\substack{n > N_p \\ m > N_p}} V_{p,n,m}$, que é uma vizinhança de x_o porque E é um P-espaço, podemos escrever $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{p}$ para todo $x \in V_p$ e $n > N_p$, $m > N_p$. Chamando

$V = \bigcap_{p=1}^{\infty} V_p$, que é também uma vizinhança de x_o, temos a convergência uniforme de $(f_n)_{n\in N}$ em V, como queríamos mostrar.

Vamos fazer, em seguida, a extensão do teorema acima, para espaços topológicos quaisquer. A extensão é feita seguindo uma técnica já bem conhecida em topologia.

Seja E um espaço topológico com topologia $\mathcal{T}$, que indicamos por $E_{\mathcal{T}}$. Seja $\mathcal{T}_c$ a menos fina das topologias que tornam contínuas as funções numéricas contínuas de $E_{\mathcal{T}}$. $E_{\mathcal{T}_c}$ é um espaço topológico uniformizável.

Definição 6 - Sendo E um espaço topológico, com topologia $\mathcal{T}$, o espaço uniformizável $E_{\mathcal{T}_c}$ é chamado o espaço uniformizável associado ao espaço $E_{\mathcal{T}}$.

Vamos lembrar aqui alguns resultados contidos na "Topologie générale" do grupo Bourbaki.

Seja $\mathcal{U}$ uma estrutura uniforme compatível com a topologia de um espaço topológico uniformizável E e C a intersecção dos conjuntos do filtro que define a estrutura $\mathcal{U}$. O conjunto C depende apenas da topologia de E e não da estrutura uniforme compatível com a sua topologia. Essa observação permite a seguinte caracterização de C:

$$C = \{(x,y) \in E \times E \mid f(x) = f(y) \text{ para tôda função numérica contínua}\}.$$

A relação $(x,y) \in C$, é uma relação de equivalência que designamos por T. A estrutura uniforme separada associada a $\mathcal{U}$ definida sôbre E/T é compatível com a topologia do espaço quociente. [Bourbaki 2 - Capítulo 2 - § 2, Observações]

Definição 7 - Seja E um espaço topológico uniformizável. O espaço topológico E/T é chamado o espaço completamente regular associado a E.

Definição 8 - Seja E um espaço topológico munido da topologia $\mathcal{T}$. O espaço completamente regular as sociado ao espaço uniformizável $E_{\mathcal{U}_c}$ é chamado o espaço completamente regular associado ao espaço $E_{\mathcal{U}}$.

<u>Propriedade A</u> - Em E, espaço topológico, tôda sequência simplesmente convergente de funções numéricas contínuas, tem por limite uma função numérica contínua.

<u>Lema 1</u> - A propriedade A é verdadeira em $E_{\mathcal{U}}$ se e sòmente se ela for verdadeira em $E_{\mathcal{U}_c}$.

<u>Demonstração</u> - O lema decorre imediatamente do fato de $E_{\mathcal{U}}$ e $E_{\mathcal{U}_c}$ terem o mesmo anel de funções numéricas contínuas.

<u>Lema 2</u> - Seja E um espaço topológico uniformizável. A propriedade A é verdadeira em E se e sòmente se ela for verdadeira em E/T.

<u>Demonstração</u> - A demonstração dêsse fato, que faremos em seguida, é bastante simples.

Seja h a aplicação canônica de E sôbre E/T. Se f é uma função numérica contínua de E/T, então $g = f \circ h$ é uma função numérica contínua de E e tôda função numérica contínua g de E pode ser decomposta nessa forma para uma única função numérica contínua f de E/T. Há, assim, lembrando a caracterização que demos a C, uma correspondência biunívoca canônica entre as aplicações numéricas contínuas de E e as numéricas contínuas de E/T. Sejam $(f_n)_{n \in N}$ e $(g_n)_{n \in N}$, onde $g_n = f_n \circ h$, duas sequências de funções numéricas contínuas de E/T e E, respectivamente. Se $(f_n)_{n \in N}$ convergir simplesmente para uma função numérica f, então $(g_n)_{n \in N}$ convergirá simplesmente para a função numérica $g = f \circ h$. Inversamente, se $(g_n)_{n \in N}$ convergir simplesmente para uma função numérica g, g será constante ao longo das classes de equivalência porque o mesmo acontece com os g_n. Poderá, portanto, ser decomposta de maneira única na forma $g = f \circ h$ e $(f_n)_{n \in N}$ convergirá simplesmente para f. Resulta, pois, que $(f_n)_{n \in N}$ converge simplesmente para uma função numérica contínua f se e sòmente se $(g_n)_{n \in N}$ convergir simplesmente para a função numérica contínua $g = f \circ h$.

Proposição 9 - Em um espaço topológico E é verdadeira a propriedade A se, e sòmente se, o espaço completamente regular associado for um P-espaço.

Demonstração - Essa proposição é uma consequência imediata das definições 6, 7, e 8, dos lemas 1 e 2, e do teorema 5.

A proposição seguinte e seus corolários, de verificação bastante simples, mostram a possibilidade de se obter topologias de P-espaço com determinadas propriedades.

Proposição 10 - Seja $E_{\mathcal{C}}$ completamente regular. Existe a menos fina das topologias de P-espaço mais finas que $\mathcal{C}$.

Demonstração - Seja $\mathcal{U}$ uma estrutura uniforme compatível com a topologia $\mathcal{C}$ de E e $(V_i)_{i \in I}$ uma base do filtro de entornos de $\mathcal{U}$, com os V_i simétricos. A classe dos conjuntos $\bigcap_{i \in J} V_i$, para todos os $J \subset I$ enumeráveis, forma um sistema fundamental de entornos de uma estrutura uniforme $\mathcal{U}'$. De fato,

a) A diagonal de $E \times E$ está contida em $\bigcap_{i \in J} V_i$, para todo $J \subset I$ enumerável, porque ela está contida em V_i qualquer que seja $i \in I$;

b) $\overset{-1}{\bigcap_{i \in J} V_i} = \bigcap_{i \in J} \overset{-1}{V_i} = \bigcap_{i \in J} V_i$;

c) Para todo V_{i_n}, $i_n \in I$, existe V_{j_n}, $j_n \in I$, tal que $\overset{2}{V}_{j_n} \subset V_{i_n}$. De onde se segue $\overset{2}{\bigcap_{n=1}^{\infty} V_{j_n}} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \overset{2}{V}_{j_n} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} V_{i_n}$.

A topologia $\mathcal{C}'$ deduzida de $\mathcal{U}'$ é mais fina que $\mathcal{C}$.

Sendo $E_{\mathcal{T}'}$ separado e uniformizável, resulta $E_{\mathcal{T}'}$ completamente regular. Como $\bigcap_{i\in J} V_i(x) = \bigcap_{i\in J} V_i'(x)$, a topologia $\mathcal{T}'$ é de P-espaço. Além disso, $\mathcal{T}'$ é a menos fina das topologias de P-espaço que são mais finas que $\mathcal{T}$, como se verifica fàcilmente.

<u>Corolário 1</u> - Seja $E_{\mathcal{T}}$ completamente regular. Uma condição necessária e suficiente para que todo ponto x de $E_{\mathcal{T}}$ tenha um conjunto enumerável de vizinhanças, cuja intersecção seja x, é que a menos fina das topologias de P-espaço que são mais finas que $\mathcal{T}$, seja a discreta.

<u>Corolário 2</u> - Seja $(f_i)_{i\in I}$ uma família de aplicações de E em E_i(para todo i, f_i é aplicação de E em E_i); os E_i sendo espaços completamente regulares. Suponhamos que para todo $(x,y)\in E\times E$, com $x \neq y$, exista índice i tal que $f_i(x) \neq f_i(y)$. Então, existe em E a menos fina das topologias de P-espaço que tornam as aplicações f_i contínuas.

<u>Demonstração</u> - O espaço $E_{\mathcal{T}}$, onde $\mathcal{T}$ é a menos fina das topologias de E que tornam as f_i contínuas, é completamente regular. Tomemos a $\mathcal{T}'$ associada a $\mathcal{T}$ no sentido da proposição 10. Para $\mathcal{T}'$ as f_i são contínuas. Se $\mathcal{T}''$ é uma topologia de P-espaço sôbre E, com a propriedade de tornar as f_i contínuas, $\mathcal{T}''$ é mais fina que $\mathcal{T}$ e, por conseguinte, mais fina que $\mathcal{T}'$, devido à proposição 10. Logo $\mathcal{T}'$ é a topologia que responde ao nosso problema.

<u>Corolário 3</u> - Seja $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ uma família de topologias sôbre um espaço E; os $E_{\mathcal{T}_i}$ sendo espaços completamente regulares. Existe a menos fina das topologias de P-espaço que são mais finas que as $\mathcal{T}_i$

<u>Corolário 4</u> - Seja $(E_i)_{i\in I}$ uma família de espaços completamente regulares. Existe a menos fina das topologias de P-espaço, que tornam as projeções de $\prod_{i\in I} E_i$ sôbre os E_i contínuas.

Terminando êste capítulo, vamos apresentar mais duas caracterizações dos P-espaços.

<u>Proposição 11</u> - Uma condição necessária e suficiente para que um espaço completamente regular E seja um P-espaço é que, para tôda função numérica contínua f, exista uma função numérica contínua g, tal que fg seja a função constante zero com $f(x) = 0$ se e sòmente se $g(x) \neq 0$.

<u>Condição necessária</u> - Se $f(x)$ é diferente de zero para todo ponto x de E, tomamos para g a função constante zero. No caso contrário, basta definir g assim: $g(x) = 1$ para todo $x \in f^{-1}(0)$ e $g(x) = 0$ para todo $x \notin f^{-1}(0)$.

<u>Condição suficiente</u> - Basta notar que $f^{-1}(0) = g^{-1}(R^*)$, R^* sendo o conjunto aberto constituido dos números reais diferentes de zero.

<u>Proposição 12</u> - Uma condição necessária e suficiente para que um espaço completamente regular E seja um P-espaço é que todo sub-conjunto enumerável de funções numéricas contínuas de E seja um conjunto equicontínuo. [Bourbaki 4 - §3]

<u>Condição necessária</u> - Seja $x_o \in E$ e $(f_n)_{n\in N}$ um conjunto enumerável qualquer de funções numéricas contínuas de E. Para todo n seja O_n uma vizinhança aberta de x_o tal que $x \in O_n$ implique $|f_n(x) - f_n(x_o)| < \varepsilon$, ε positivo e arbitrário. Sendo E um P-espaço, o conjunto $O = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ é aberto e, para todo $x \in O$, n qualquer, vem $|f_n(x) - f_n(x_o)| < \varepsilon$.

<u>Condição suficiente</u> - Seja $(O_n)_{n\in N}$ uma família enumerável de conjuntos abertos de E e $O = \bigcap_{n=1} O_n$. Tomemos um ponto qualquer $x_o \in O$. Para cada n existe uma aplicação contínua de E em $[0,1]$ tal que $f_n(x_o) = 0$ e $f_n(x) = 1$ para $x \notin O_n$. Sendo essa família de funções equicontínua em x_o, existe uma vizinhança aberta A de x_o tal que $x \in A$ implique $f_n(x) < 1$ para todo n. Isso significa que A está contido em O e, por conseguinte, que O é aberto.

C A P Í T U L O V

COMPACTIFICADO DE STONE - ČECH

Seja E um espaço completamente regular. Consideremos sôbre E a menos fina das estruturas uniformes que tornam uniformemente contínuas tôdas as funções numéricas contínuas e limitadas de E. Indicamo-la por $\mathcal{U}_0^*(E)$ ou simplesmente $\mathcal{U}_0^*$, quando não houver qualquer dúvida quanto ao espaço sôbre o qual ela está definida. Essa estrutura uniforme é compatível com a topologia $\mathcal{T}$ de E. Com efeito, a topologia, que dela se deduz, é a menos fina das topologias que tornam contínuas as funções numéricas contínuas e limitadas de $E_{\mathcal{T}}$. Como $E_{\mathcal{T}}$ é completamente regular, a topologia deduzida é igual a $\mathcal{T}$. Munido da estrutura uniforme $\mathcal{U}_0^*$ e da topologia $\mathcal{T}$, E é um espaço uniforme precompacto. [Bourbaki 3 - § 1 Exercício 7 e Bourbaki 2 - § 5 do Capítulo II - Proposição 5]

<u>Definição 9</u> - A estrutura uniforme $\mathcal{U}_0^*$, sôbre um espaço E completamente regular, é chamada estrutura uniforme de Stone - Čech. O completado de E, munido dessa estrutura uniforme, é denominado o compactificado de Stone - Čech. É indicado por $\beta(E)$.

Observamos que $\beta(E)$ goza das seguintes propriedades, de fácil verificação:

a) $\beta(E)$ é compacto e contém E como sub-espaço denso.

b) Tôda função numérica contínua e limitada de E se prolonga por continuidade a $\beta(E)$.

Pode-se verificar também fàcilmente, que essas propriedades caracterizam o compactificado de Stone - Čech. Mais explìcitamente:

Se F é um espaço compacto contendo densamente E e, se tôda função numérica contínua e limitada de E se prolonga por continuidade a F, então F é homeomorfo a $\beta(E)$.

Lembramos aqui que, sendo $(E_i)_{i \in I}$ uma família de espaços completamente regulares, os espaços $\beta(\prod_{i \in I} E_i)$ e $\prod_{i \in I} \beta(E_i)$ são ditos canônicamente homeomorfos se existir um homeomorfismo entre êsses espaços cuja restrição a $\prod_{i \in I} E_i$ é a identidade.

<u>Lema</u> - Sendo E um espaço completamente regular, uma condição necessária para que em $E \times E$ se tenha a estrutura uniforme de Stone - Čech igual ao produto das estruturas uniformes de Stone - Čech dos fatôres é que E seja pseudo compacto.

<u>Demonstração</u> - Em $E \times E$, munido da estrutura uniforme de Stone - Čech, qualquer função numérica contínua e limitada é uniformemente contínua. Como $\mathcal{U}_0^*(E \times E) = \mathcal{U}_0^*(E) \times \mathcal{U}_0^*(E)$, por hipótese, então em particular qualquer afastamento contínuo e limitado de E é uniformemente contínuo em $E \times E$ munido da estrutura uniforme $\mathcal{U}_0^*(E) \times \mathcal{U}_0^*(E)$. Portanto, pela proposição 4, $\mathcal{U}_0^* = \mathcal{U}_0$, e, por conseguinte, o completado de E, munido da estrutura uniforme universal $\mathcal{U}_0$, é compacto. Isso diz que E é pseudo compacto, porque tôda função numérica contínua de E sendo uniformemente contínua em E, munido de $\mathcal{U}_0$, se prolonga ao seu completado e é, portanto, limitada.

<u>Teorema 6</u> - Uma condição necessária para que o compactificado de Stone - Cech de $E \times E$ seja canônicamente homeomorfo ao produto dos compactificados de Stone - Čech dos fatôres, é que E seja pseudo compacto.

<u>Demonstração</u> - Sendo os espaços homeomorfos compactos, o homeomorfismo canônico é também um isomorfismo entre as suas estruturas uniformes. A restrição a $E \times E$, que é a aplicação identidade, sendo um isomorfismo entre $E \times E$ com

$\mathcal{U}_0^*(E\times E)$ e $E\times E$ com $\mathcal{U}_0^*(E)\times \mathcal{U}_0^*(E)$, acarreta $\mathcal{U}_0^*(E\times E) = \mathcal{U}_0^*(E)\times \mathcal{U}_0^*(E)$. O lema anterior nos permite concluir que E é pseudo compacto.

<u>Teorema 7</u> - Seja E um Q-espaço ou um P-espaço. Uma condição necessária (e suficiente) para que o compactificado de Stone - Čech de ExE seja canônicamente homeomorfo ao produto dos compactificados de Stone - Čech dos fatôres é que E seja compacto.

<u>Demonstração</u> - O homeomorfismo canônico entre os dois espaços compactos acarreta, devido ao teorema 6, E pseudo compacto. Como todo espaço completamente regular e pseudo compacto é um Q-espaço se e sòmente se êle for compacto [Hewitt - teorema 54], o teorema fica demonstrado para o caso de E ser um Q-espaço. No caso de E ser um P-espaço, o teorema é uma consequência do corolário 5 do teorema 1.

<u>Lema</u> - Sendo E um espaço completamente regular não compacto, uma condição necessária para que sôbre ExE se tenha a estrutura uniforme de Stone - Čech igual ao produto das estruturas uniformes de Stone-- Čech dos fatôres, é que E, munido da estrutura uniforme universal, não seja completo.

<u>Demonstração</u> - Por um raciocínio análogo ao feito no início da demonstração do lema do teorema 6, temos $\mathcal{U}_0^* = \mathcal{U}_0$. Logo, E, munido da estrutura uniforme universal $\mathcal{U}_0$, é um espaço uniforme precompacto. Portanto, se E, com essa estrutura uniforme, fosse completo, E seria compacto, o que contraria a hipótese. Nosso lema fica assim verificado.

<u>Teorema 8</u> - Seja E um espaço completamente regular não compacto. Uma condição necessária para que o compactificado de Stone - Čech de ExE seja canônicamente homeomorfo ao produto dos com-

pactificados de Stone - Čech dos fatôres, é que E, munido da estrutura uniforme universal, não seja completo.

Demonstração - Com raciocínio análogo ao feito no início da demonstração do teorema 6, temos como conclusão $\mathcal{U}_0^*(E\times E) = \mathcal{U}_0^*(E)\times \mathcal{U}_0^*(E)$. Logo, pelo lema anterior, resulta que E, munido da estrutura uniforme universal, não é completo.

Teorema 9 - Seja E um espaço paracompacto. [Bourbaki 2 - Capítulo 1, § 10 - Definição 9] (*)
Uma condição necessária (e suficiente) para que o compactificado de Stone - Čech de ExE seja canônicamente homeomorfo ao produto dos compactificados dos fatôres, é que E seja compacto.

Demonstração - Suponhamos E não compacto. Então, devido ao teorema 8, E, munido da estrutura uniforme universal, é não completo. Mas, isso é falso, porque todo espaço paracompacto é completo quando munido da estrutura uniforme universal. [Kac]

Observação - Seja E um espaço completamente regular com a propriedade seguinte:

O sistema $(V_i)_{i\in I}$ de vizinhanças da diagonal Δ de ExE contém $(V_i)_{i\in J}$, $J\subset I$ enumerável, tal que $\bigcap_{i\in J} V_i = \Delta$. Nesse caso, E é completo com a estrutura uniforme universal. [Umegaki]

Então, no teorema 9, podemos substituir a hipótese de E paracompacto por E completamente regular gozando da propriedade de acima.

(*) - Ver [Kelley - Capítulo 5] , para propriedades dos espaços paracompactos.

<u>Corolário</u> - Seja E um espaço métrico. Uma condição necessária (e suficiente) para que o compactificado de Stone - Čech de ExE seja canônicamente homeomorfo ao produto dos compactificados de Stone - Čech dos fatôres, é que E seja compacto.

<u>Demonstração</u> - Êste corolário é obtido lembrando que todo espaço métrico é paracompacto.

Êste corolário pode também ser obtido como consequência da observação feita após o teorema 9.

BIBLIOGRAFIA

[BOURBAKI 1] N. BOURBAKI - Théorie des Ensembles (Fascicule des Résultats), Paris, Hermann, 1939.

[BOURBAKI 2] N. BOURBAKI - Topologie Générale - Chap. I et II Deuxième édition, Paris, Hermann, 1951.

[BOURBAKI 3] N. BOURBAKI - Topologie Générale - Chap. IX , Paris, Hermann, 1948.

[BOURBAKI 4] N. BOURBAKI - Topologie Générale - Chap. X , Paris, Hermann, 1949.

[DIEUDONNÉ] J. DIEUDONNÉ - Comentário do artigo de Hewitt abaixo mencionado - Mathematical Reviews, 1949.

[GILLMAN] L. GILLMAN e M HENRIKSEN - Concerning rings of continuous functions - Trans. Am. Math. Soc. vol. 77, 1954, pp. 340 - 362.

[HEWITT] E. HEWITT - Rings of real-valued continuous functions I - Trans. Am. Math. Soc., vol. 64, 1948, pp. 45 - 99.

[HÖNIG] C. S. HÖNIG - Sur quelques propriétés topologiques des P-espaces. (*)

[KAC] G. I. KAC - Topological spaces in which one may introduce a complete uniform structure - Dokl. Akad. Nauk SSSR (N S), 99, 1954. (**)

[SAMUEL] P. SAMUEL - Ultrafilters and compactification of uniform spaces - Trans. Am. Math. Soc., vol. 64, 1948, pp. 100 - 132.

[UMEGAKI] H. UMEGAKI - On the uniform space - Tôhoku Math. J. (2), 2, 57 - 63, 1950. (**)

(*) - Temos conhecimento dêste artigo por informação direta do autor, antes de sua publicação.

(**) - Temos conhecimento dêstes artigos, ùnicamente, através do Mathematical Reviews.

Í N D I C E