PROPRIEDADE H1 GENERICA

PARA SISTEMAS HAMILTONIANOS

MARIA STELLA AMORIM COUTINHO CASTILLA

DISSERTAÇÃO APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

EM

MATEMÁTICA

ORIENTADOR:

PROF.DR. WALDYR MUNIZ OLIVA

- SÃO PAULO, DEZEMBRO DE 1977 -

A meus pais,

Maísa e José

A meu esposo

Carlos

A meu filho

ANDRÉ

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que, direta ou indiretamente, me auxiliaram na realização do presente trabalho.

Em especial, os meus sinceros agradecimentos ao Professor Doutor Waldyr Muniz Oliva, meu orientador, cujo incentivo, desde os cursos de Pós-graduação, foi decisivo à concretização deste trabalho.

Ao colega Gregório Maranguape da Cunha, agradeço a leitura da primeira versão deste trabalho.

À colega Élvia Mureb Sallum, os meus agradecimentos pelo apôio dado durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ao meu marido, sinceros agradecimentos pelas explicações que me deu sobre Mecânica Clássica, tema importante deste trabalho.

À Srta. Marli César, os meus agradecimentos pelo excelente trabalho datilográfico.

INTRODUÇÃO

O presente trabalho teve como base o estudo das notas do Curso de Mecânica Conservativa ministrado pelo Orientador, Prof. Dr. Waldyr Muniz Oliva, em Recife, e leituras paralelas por ele sugeridas.

No primeiro capítulo é feito um resumo sobre Álgebra e Geometria Simpléticas. Este estudo é fundamental uma vez que os campos de vetores hamiltonianos, objeto central do trabalho, são definidos em variedades simpléticas.

O segundo capítulo é voltado para as propriedades básicas de campos e vetores hamiltonianos e à apresentação de exemplos. Desses exemplos, dois merecem especial destaque. Um deles fornece hamiltonianos genericamente em superfícies compactas, de dimensão dois, sem bordo; esse exemplo foi objeto de palestra proferida pelo Orientador no 2º Simpósio Internacional de Mecânica Celeste realizado em São Paulo. O segundo trata de um clássico problema de Mecânica, o pêndulo esférico. Nele é descrita a geometria dos níveis de energia desse sistema descrita sucintamente nas notas de aulas do Professor E. C. Zeeman dadas no Curso de Verão (1969) na Universidade de Warwick.

O capítulo três desenvolveu-se por sugestão do Orientador e nele ficou demonstrado que a propriedade H1 é genê

rica para campos associados a hamiltonianas da forma energia cinética mais energia potencial, fixando-se a primeira e variando-se a segunda.

O capítulo quatro baseia-se num artigo de M. Buchner publicado Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. XIV. Neste último capítulo demonstra-se a genericidade da propriedade H1 para a totalidade dos campos de vetores hamiltonianos de uma dada variedade.

- o -

ÍNDICE

Cap.I - FUNDAMENTOS ALGÉBRICOS E GEOMÉTRICOS 1

I.1 Álgebra Simplética 1

I.2 Geometria Simplética 5

Cap.II - SISTEMAS HAMILTONIANOS EM VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS 17

II.1 Equações Diferenciais de Segunda Ordem 20

II.2 Estrutura Simplética do Espaço Fibrado Tangente a uma Variedade Diferenciável 23

Cap.III- NATUREZA GENÉRICA DA PROPRIEDADE H1 PARA CAMPOS DE VETORES HAMILTONIANOS X_H COM H=T+V 48

Cap.IV - NATUREZA GENÉRICA DA PROPRIEDADE H1 PARA CAMPOS DE VETORES HAMILTONIANOS 63

BIBLIOGRAFIA 73

I - FUNDAMENTOS ALGÉBRICOS E GEOMÉTRICOS

Os sistemas Hamiltonianos encontram-se definidos em variedades simpléticas. Neste capítulo será então desenvolvido o caso linear bem como pré-requisitos para os capítulos que se seguem.

I.1 - ÁLGEBRA SIMPLÉTICA

Para o caso linear o ponto de partida é um par (V^{2n},w) onde V^{2n} é um espaço vetorial real de dimensão par e w é uma forma bilinear alternada em V. O par (V^{2n},w) é chamado *espaço simplético*. A forma w induz uma aplicação não degenerada $\bar{w}$

$$\bar{w}: V \longrightarrow V^*$$

(onde V^* é o espaço dual de V) definida da seguinte forma:

$$\bar{w}(v)(u) = w(v,u)$$

$\bar{w}$ é não degenerada pois se $\bar{w}(v) = 0$ segue que

$$\bar{w}(v)(u) = w(v,u) = 0$$

para qualquer u em V, e neste caso $v = 0$ já que w é não degenerada.

Dada uma base $\{u_1,\ldots,u_{2n}\}$ de V seja a matriz $A=a_{ij}$

associada a w e definida por:

$$a_{ij} = w(u_i, u_j).$$

Então, $w(x,y) = x^t Ay$ onde x^t é a transposta de x.

$a_{ij} = w(u_i, u_j) = -w(u_j, u_i) = -a_{ji}$ ou seja A é anti-simétrica. A matriz J

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$$

é antisimétrica. Uma base para a qual A=J é chamada *base simplética*.

LEMA 1 - Dado um espaço simplético (V^{2n}, w) existe uma base simplética.

DEMONSTRAÇÃO - Seja u_1 um vetor qualquer de V. Como w é não degenerada existe v_0 tal que

$$w(u_1, v_0) = c \neq 0.$$

Sejam $u_{n+1} = v_0/c$ e $[u_1, u_{n+1}]$ o subespaço gerado por esses vetores.

A seguir considere V_2, o subespaço de V definido da seguinte maneira:

$$V_2 = \{v \in V | w(v, u_1) = 0 = w(v, u_{n+1})\} = [u_1, u_{n+1}]^{\perp}$$

$V = [u_1, u_{n+1}] \oplus V_2$ desde que w é não degenerada em V. Por indução sobre a dimensão existe uma base simplética de V_2, $u_2, \ldots, u_n, u_{n+2}, \ldots, u_{2n}$. Segue que $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{2n}\}$ é uma base de V. ∎

Pode-se associar a (V,w) um subconjunto das aplicações lineares formado pelas aplicações que preservam w, denotado Sp(V). Assim se $A \in Sp(V)$ vale o seguinte:

$$(A^*w)(u,v) = w(Au,Av) = w(u,v) \qquad (1)$$

A é chamada *aplicação simplética*.

Se $\mathcal{B}$ denotar a base simplética de V e $A_{\mathcal{B}}$ a matriz de A nesta base:

$$A_{\mathcal{B}}^t J A_{\mathcal{B}} = J \qquad (2)$$

(2) segue de (1) usando a representação matricial de w em coordenadas simpléticas.

Considere $\gamma[-\varepsilon,\varepsilon] \longrightarrow Sp(V)$ uma curva diferenciável tal que $A_0 = \gamma(0) = I$ e $B = \frac{d}{ds}(\gamma(s))\Big|_{s=0}$

$$0 = \frac{dJ}{ds} = \frac{d}{ds}[\gamma(s)^t J\gamma(s)] = B^t J + JB$$

$$\Longrightarrow w(Bu,v) + w(u,Bv) = 0 \qquad (3)$$

A aplicação linear B satisfazendo a igualdade (3) é chamada *aplicação infinitesimalmente simplética*. O conjunto das aplicações infinitesimalmente simpléticas é denotado por sp(V).

<u>LEMA 2</u> - Se $A \in Sp(\mathbb{R}^{2n})$ então det A = 1.

DEMONSTRAÇÃO - Se $A \in Sp(\mathbb{R}^{2n})$ vale:

$$A^t J A = J$$

$$\det(A^t J A) = \det J$$

$$\det A^t \det J \det A = \det J$$

$$(\det A)^2 = 1 \Longrightarrow \det A = \pm 1.$$

Defina-se o volume Ω em V por: $\Omega(v_1,\ldots,v_{2n}) = \det(w(v_i,v_j))$

$$(A^*\Omega)(v_1,\ldots,v_{2n}) = \Omega(Av_1,\ldots,Av_{2n}) = \det(w(Av_i,Av_j)) =$$

$$= \det(w(v_i,v_j)) = \Omega(v_1,\ldots,v_{2n})$$

Mas $A^*\Omega = (\det A)\Omega$, pela definição de determinante. Portanto $\det A = 1$. ∎

<u>PROPOSIÇÃO 3</u> - Sejam $A \in Sp(V)$ e λ um valor próprio de A. Então $1/\lambda$, $1/\bar{\lambda}$ e $\bar{\lambda}$ são também valores próprios de A com a mesma multiplicidade de λ.

DEMONSTRAÇÃO - Se $\mathcal{B}$ for uma base simplética de V e $A_{\mathcal{B}}$ denotar a matriz de A nessa base

$$A_{\mathcal{B}}^t \, J \, A_{\mathcal{B}} = J$$

$$J \, A_{\mathcal{B}} J^{-1} = (A_{\mathcal{B}}^t)^{-1} = (A_{\mathcal{B}}^{-1})^t = B$$

$P(\lambda) = \det(A_{\mathcal{B}} - \lambda I)$, λ-variável complexa. Tendo em conta que $J^{-1} = J$

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(A_{\mathcal{B}} - \lambda I) \\ &= \det[J(A_{\mathcal{B}} - \lambda I)J] \\ &= \det(B - \lambda I) \\ &= \det(A_{\mathcal{B}}^{-1} - \lambda I) \\ &= \det[A_{\mathcal{B}}^{-1}(I - \lambda A_{\mathcal{B}})] \\ &= \det(I - \lambda A_{\mathcal{B}}) \\ &= \det[\lambda(\tfrac{1}{\lambda} I - A_{\mathcal{B}})] \\ &= \lambda^n \det(\tfrac{1}{\lambda} I - A) \\ &= (-\lambda)^n P(\tfrac{1}{\lambda}) \end{aligned}$$

Portanto $P(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow P(1/\lambda) = 0$.

Por outro lado como V é espaço vetorial real, e sendo λ complexo temos:

$$Av_0 = \lambda v_0$$

$$\overline{Av_0} = \overline{\lambda v_0} \Longrightarrow Av_0 = \bar{\lambda} v_0$$

Do que foi dito acima fica claro que $\lambda, \bar{\lambda}, 1/\lambda, 1/\bar{\lambda}$ tem a mesma multiplicidade. ∎

PROPOSIÇÃO 4 - Se λ é um valor próprio de $C \in sp(V)$, então $-\lambda$, $-\bar{\lambda}$, $\bar{\lambda}$ são também autovalores com a mesma multiplicidade. Em particular se 0 é um valor próprio então tem multiplicidade par.

DEMONSTRAÇÃO - $C_{\mathcal{B}}$ denota a matriz de C em relação à base simplética $\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(C_{\mathcal{B}} - \lambda I) \\ &= \det[J(C_{\mathcal{B}} - \lambda I)J] \\ &= \det(JC_{\mathcal{B}}J - \lambda I) \\ &= \det(-C_{\mathcal{B}}^t - \lambda I) \\ &= \det(-C_{\mathcal{B}} - \lambda I) \\ &= (-1)^{2n} \det(C_{\mathcal{B}} + \lambda I) \\ &= P(-\lambda) \end{aligned}$$

$$P(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow P(-\lambda) = 0.$$

Analogamente ao que foi feito na Proposição 4 tem-se que: se λ é valor próprio complexo, $\bar{\lambda}$ também é. ∎

I.2 - GEOMETRIA SIMPLÉTICA

DEFINIÇÃO 5 - Uma estrutura simplética numa variedade M é uma 2-forma alternada w, não degenerada e fechada, isto é $dw=0$.

Na verdade não ficou provado, mas para que uma 2-forma alternada seja não degenerada, é preciso que o espaço tenha dimensão par.

Convenciona-se chamar o par (M^{2n},w) de variedade simplética.

TEOREMA 6 - Seja W uma variedade e $M = T^*W$ seu fibrado cotangente. Então existe uma 2-forma canônica w em T^*W tal que (M,w) é uma variedade simplética. De fato $w=-d\theta$ onde θ é uma 1-forma.

DEMONSTRAÇÃO - Seja o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & T(T^*W) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "T\pi^*"] \arrow[d, phantom, "\rho"] & \\
T^*W \arrow[dr, "\pi^*"'] & & TW \arrow[dl, "\pi"] \\
 & W &
\end{tikzcd}$$

$\pi: T(T^*W) \longrightarrow T^*W$ é a projeção natural do espaço tangente

$\pi^*: T^*W \longrightarrow W$ é a projeção natural do espaço cotangente.

Fixado $x \in W$ T^*_xW é um espaço vetorial, segue que $T(T^*_xW) \simeq T^*_xW$.

Existe uma projeção natural

$$\rho_x: T(T^*_xW) \longrightarrow T^*_xW.$$

Pode-se extendê-la a uma projeção

$$\rho: TT^*W \longrightarrow T^*W$$

Assim se $(x,p,u,v) \in TT^*W$:

$$\pi(x,p,u,v) = (x,p)$$

$$\rho(x,p,u,v) = (x,v)$$

$$T\pi^*(x,p,u,v) = (x,u)$$

Sejam $< \, , \, >_x : T_xW \times T_x^*W \longrightarrow \mathbb{R}$ a aplicação que associa a cada $<v,w>_x \longrightarrow w(x)(v(x))$ e θ a 1-forma em T^*W definida por:

$$\theta(U) = <T\pi^*U, \pi U>$$

Se w for a 2-forma definida por

$$w(U_1,U_2) = <T\pi^*U_1, \rho U_2> - <T\pi^*U_2, \rho U_1>$$

é fácil verificar que $w = -d\theta$ já que

$$\theta(x,p,u,v) = <u,p>_x$$

$$w((x,p,u_1,v_1),(x,p,u_2,v_2)) = <u_1,v_2> - <u_2,v_1>$$

que é alternada e não degenerada. ∎

<u>Expressão de w em coordenadas locais</u>

Seja $x^1,\ldots,x^n$ um sistema de coordenadas locais em W.

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(x) \in T_xW \text{ é uma base } i=1,\ldots,n.$$

Essas coordenadas induzem coordenadas $v^1,\ldots,v^n$ nas fibras de TW por

$$(v^j, \frac{\partial}{\partial x^i}) = \delta_{ij}$$

As coordenadas $(x^1,\ldots,x^n,v^1,\ldots,v^n)$ em TW por sua vez induzem coordenadas $(x^1,\ldots,x^n,p^1,\ldots,p^n)$ em T*W da seguinte maneira: se $p_x \in T_x^*W$ e $v_x \in T_xW$

$$\langle p_x, v_x\rangle = \sum_{j=1}^{n} p^j(p_x)v^j(v_x).$$

Nessas coordenadas $\theta = \sum_{j=1}^{n} p^j dx^j$

$$w = \sum_{j=1}^{n} dx^j \wedge dp^j \qquad (1)$$

Um próximo passo agora vai ser o enunciado e demonstração do Teorema de Darboux que garante a existência de de sistemas coordenadas locais em variedades simpléticas tais que a expressão da forma bilinear alternada não degenerada é da forma (1) acima. É necessário relembrar o enunciado do seguinte teorema usado na demonstração do teorema mencionado.

<u>TEOREMA 7</u> (Fluxo tubular curto) - Sejam X um campo de vetores em uma variedade M e p um ponto não crítico, $X(p) \neq 0$. Existe um sistema de coordenadas locais $(U,x^1,\ldots,x^n)$ nas vizinhanças de p tal que p vai em $0 \in \mathbb{R}^n$ e

$$X = \frac{\partial}{\partial x^1} \text{ em } U.$$

(Para a demonstração, ver [1]).

<u>TEOREMA 8</u> - <u>Teorema de Darboux</u> - Seja w uma 2-forma não degenerada sobre M^{2n}. Então $dw = 0$ (w é fechada) se e somente se existe um sistema de coordenadas $(U,x^1,\ldots,x^n,y^1,\ldots,y^n)$ nas vizinhanças de cada $p \in M$ tal que leva p em $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ e

$$w\Big|_U = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dy^i$$

Na demonstração do Teorema de Darboux serão usados os seguintes lemas:

LEMA 9 - Sejam θ uma 1-forma diferencial numa variedade M^{2n} tal que $\theta(p) \neq 0$, $p \in M$, e $w = d\theta$ não degenerada nas vizinhanças de p. Então existe um sistema de coordenadas $(U, x^1, \ldots, x^{2n-1}, t)$ nas vizinhanças de p levando p em $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ tal que

$$\theta = (t+1)\theta^0$$

onde $\theta^0 = \sum_{i=1}^{2n-1} \theta_i^0 dx^i$ e $\frac{\partial \theta_i^0}{\partial t} = 0$ (ou seja as funções θ_i^0 independem de t).

PROVA - Seja X o campo de vetores correspondentes à θ através da 2-forma w

$$\bar{w}(X(M)) = X^*(M)$$

$$X \longrightarrow X \rfloor w = \theta$$

onde $\theta(Y) = w(X,Y)$.

Portanto $X \rfloor d\theta = \theta$.

Como $\theta(p) \neq 0$ isto implica que $X(p) \neq 0$. Aplicando o Teorema de Fluxo Tubular Curto tem-se localmente $X = \frac{\partial}{\partial s}$ num sistema $(U, x^1, \ldots, x^{2n-1}, s)$ que leva p em $0 \in \mathbb{R}^{2n}$. Mas

$$\theta = \sum_{i=1}^{2n-1} \theta_i dx^i + A ds$$

$$\theta(X) = (X \rfloor d\theta)(X) = d\theta(X,X) = 0.$$

Vem que $\theta\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = A = 0$ donde $\theta = \sum_{i=1}^{2n-1} \theta_i dx^i$.

Por outro lado $X \rfloor d\theta = \theta$ e

$$d\theta = \sum_{j=1}^{2n-1} d\theta_i \wedge dx^i$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \rfloor \left(\sum_{i=1}^{2n-1} d\theta_i \wedge dx^i \right) = \sum_{i=1}^{2n-1} \theta_i dx^i$$

Aplicando ambos os membros a $\frac{\partial}{\partial x^j}$, $j=1,2,\ldots,2n-1$

$$\theta_j = \sum_{i=1}^{2n-1} d\theta_i \wedge dx^i \left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = d\theta_j \left(\frac{\partial}{\partial s} \right) = \frac{\partial \theta_j}{\partial s}$$

$$\theta_j = \frac{\partial \theta_j}{\partial s} \Longrightarrow \theta_j = \theta_j^0 e^s$$

onde

$$\theta_j^0 = \theta_j^0(x^1,\ldots,x^{2n-1}) = \theta_j(x^1,\ldots,x^{2n-1},0)$$

$$\theta = \sum_{i=1}^{2n-1} e^s \theta_i^0 dx^i$$

Chamando $e^s = t+1$, tem-se a mudança de coordenadas

$$(x^1,\ldots,x^{2n-1},s) \longrightarrow (x^1,\ldots,x^{2n-1},t)$$

com $t = e^s - 1$, que leva 0 em 0 e portanto é uma mudança de coordenadas conveniente. Tem-se então:

$$\theta = \sum_{i=1}^{2n-1} (t+1)\theta_i^0 dx^i \qquad \blacksquare$$

LEMA 10 (Poincaré) - Seja w uma forma exterior de grau k em M tal que $dw = 0$ (w é fechada). Então para cada $p \in M$ existe uma vizinhança de p tal que nessa vizinhança w é exata, isto é $w = d\theta$, onde θ é de grau k-1.

PROVA - ver em [1], pág. 67.

LEMA 11 - Se M^{2n-1} é uma variedade, θ uma 1-forma tal que $w = d\theta$ tem posto (2n-2) nas vizinhanças de um ponto $p \in M$, então existe um sistema de coordenadas locais $(U, x^1, \ldots, x^{2n-2}, s)$ $p \in U$ tal que em U tem-se

$$\theta = df + \theta^0$$

f sendo uma função definida em U e θ^0 uma 1-forma dada por

$$\theta^0 = \sum_{i=1}^{2n-2} \theta_i^0 dx^i$$

$$\frac{\partial \theta_i^0}{\partial s} = 0$$

DEMONSTRAÇÃO - Se o posto de $w = d\theta$ é 2n-2 nas vizinhanças de p o núcleo da aplicação

$$\bar{w}: T(M) \longrightarrow T^*(M)$$

$$X \longrightarrow X \lrcorner w$$

define um campo de vetores local X_0 não nulo nas vizinhanças de p, e pelo Teorema do Fluxo Tubular Curto temos

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial s}$$

onde $(U, x^1, \ldots, x^{2n-2}, s)$ é um conveniente sistema de coordenadas. Neste sistema temos

$$\theta = \sum_{i=1}^{2n-2} \theta_i(x,s)\,dx^i + \theta_{2n-1}\,ds$$

e seja θ^0 a forma $\theta^0 = \sum_{i=1}^{2n-2} \theta_i(x,0)\,dx^i$.

O campo X_0 é tal que $X_0 \rfloor d\theta = 0$ ou

$$\frac{\partial}{\partial s} \rfloor d\theta = 0 \qquad (*)$$

Mas, $$d\theta = \sum_{i=1}^{2n-2} d\theta_i \wedge dx^i + d\theta_{2n-1} \wedge ds = \sum_{i=1}^{2n-2} \left(\sum_{j=1}^{2n-2} \frac{\partial \theta_i}{\partial x^j} + \frac{\partial \theta_i}{\partial s} \right) \wedge dx^i +$$

$$+ \left(\sum_{j=1}^{2n-2} \frac{\partial \theta_{2n-1}}{\partial x^j}\, dx^j \right) \wedge ds$$

$$d\theta = \sum_{i,j=1}^{2n-2} \frac{\partial \theta_i}{\partial x_j}\, dx^j \wedge dx^i + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial s} - \frac{\partial \theta_{2n-1}}{\partial x^i} \right) ds \wedge dx^i$$

Considerando-se a relação (*) acima segue que

$$d\theta\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = 0, \qquad i=1,2,\ldots,(2n-2)$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial s} - \frac{\partial \theta_{2n-1}}{\partial x^i} \right) = 0, \qquad i=1,2,\ldots,2n-2$$

$$\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial s \partial x^j} = \frac{\partial^2 \theta_{2n-1}}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 \theta_{2n-1}}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial s \partial x^i}$$

Donde resulta

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial x^j} - \frac{\partial\theta_j}{\partial x^i}\right) = 0$$

isto significa que os coeficientes de $d\theta$ independem de s.

$$d\theta^0 = \sum_{i<j=1}^{2n-2}\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial x^j}(x,0) - \frac{\partial\theta_j}{\partial x^i}(x,0)\right)dx^i\wedge dx^j$$

Tem-se $d\theta = d\theta^0 \Longrightarrow d(\theta-\theta^0) = 0$

e pelo Lema de Poincaré $\theta = df + \theta^0$. ∎

LEMA 12 - Seja a 1-forma diferencial numa variedade M^{2n} tal que $\theta(p) \neq 0$ e $w = d\theta$ é não degenerada nas vizinhanças de p. Então existe um sistema de coordenadas levando p em $0\in\mathbb{R}^{2n}$, $(U,x^1,\ldots,x^{2n-2},s,t)$ tal que em U tem-se $\theta = (t+1)(ds+\bar{\theta}^0)$ onde $\bar{\theta}^0 = \sum_{i=1}^{2n-2}\bar{\theta}_i^0 dx^i$ e $\frac{\partial\bar{\theta}_i^0}{\partial t} = \frac{\partial\bar{\theta}_i^0}{\partial s} = 0$ e além disso $\bar{\theta}^0(p) \neq 0$.

DEMONSTRAÇÃO - Aplicando o Lema 9 temos coordenadas $(U,x^1,\ldots,x^{2n-1},t)$ de modo que $\theta = (t+1)\theta^0$

$$\theta^0 = \sum_{i=1}^{2n-1}\theta_i^0 dx^i \quad \text{e} \quad \frac{\partial\theta_i^0}{\partial t} = 0.$$

Tem sentido, portanto, considerar a forma θ^0 no hiperplano de dimensão (2n-1) e neste caso $d\theta^0$ tem posto 2n-2 (já que é uma 2-forma alternada de posto máximo).

Pelo Lema 11 temos $\theta^0 = df+\bar{\theta}^0$ um aberto coordenado $(V,x^1,\ldots,x^{2n-2},s',t)$ onde

$$\bar{\theta}^0 = \sum_{i=1}^{2n-2}\bar{\theta}_i^0 dx^i,$$

com $\dfrac{\partial \bar{\theta}_i^0}{\partial s'} = 0$ e $\dfrac{\partial \bar{\theta}_i^0}{\partial t} = 0$.

Então, $\theta = (t+1)(df+\bar{\theta}^0)$, mas

$$d\theta\left(\frac{\partial}{\partial s'}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \left[dt\wedge df + dt\wedge\bar{\theta}^0 + (t+1)d\bar{\theta}^0\right]\left(\frac{\partial}{\partial s'}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = dt\wedge df\left(\frac{\partial}{\partial s'}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = -\frac{\partial f}{\partial s'}$$

e como $d\theta$ é não degenerada $\dfrac{\partial f}{\partial s'} \neq 0$.

Seja a correspondência $s' \longrightarrow s = f-f(p)$.

Finalmente se $\bar{\theta}^0(p) = 0$, $d\theta(p)$ seria degenerada já que sendo $d\theta(p) = dt\wedge ds + (t+1)d\bar{\theta}^0(p)$ teríamos

$d\theta(p)\left(\dfrac{\partial}{\partial s}, \dfrac{\partial}{\partial x^i}\right) = 0$ contrariando o fato de que $d\theta$ é não degenerada. ∎

<u>LEMA 13</u> - Seja θ uma 1-forma em M^{2n} tal que $\theta(p) \neq 0$ e $d\theta$ é não degenerada. Então existe um sistema de coordenadas nas vizinhanças de p $(U,x^1,\ldots,x^n,y^1,\ldots,y^n)$ levando p em $0\in\mathbb{R}^{2n}$ tal que em U tem-se:

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} (x^i+1)dy^i$$

DEMONSTRAÇÃO - Por indução sobre a dim. de M; para n = 1 segue do Lema 9 pois tem-se em M^2

$$\theta = (x^1+1)\theta^0 \qquad \theta^0 = f(x^2)dx^2.$$

Sendo $y^1 = \int f(x^2)dx^2$

$$\frac{dy^1}{dx^2} = f(x^2) \neq 0, \text{ pois } \theta(p) \neq 0$$

então $\theta = (x^1+1)dy^1$

Mas aplicando-se o Lema 12 tem-se num sistema de coordenadas $(U,x^1,\ldots,x^{2n-2},s,t)$

$$\theta = (t+1)(ds+\bar{\theta}^0)$$

onde $\bar{\theta}^0 = \sum_{i=1}^{2n-2} \bar{\theta}^0_i dx^i$ e $\frac{\partial\bar{\theta}^0_i}{\partial t} = \frac{\partial\bar{\theta}^0_i}{\partial s} = 0.$

Aplicando-se a hipótese de indução para $\bar{\theta}^0$ considerada no subespaço $s=t=0$ de dimensão $(2n-2)$ onde $d\bar{\theta}^0$ é não degenerada teremos em novas coordenadas $(U',y^1,\ldots,y^{2n-1},t,s)$

$$\theta^0 = \sum_{i=1}^{n-1} (y^i+1)dy^{i+(n-1)}$$

As coordenadas z^i, $i=1,2,\ldots,n-1$ são definidas por $(t+1)(y^i+1) = z^i+1$ donde $z^i = [(t+1)(y^i+1)]-1$.

$\Longrightarrow \theta=(t+1)ds + \sum_{i=1}^{n-1}(z^i+1)dy^{i+(n-1)}$ (note que o jacobiano de $(y^1,\ldots,y^{2n-2},t,s)$ para $(z^1,\ldots,z^{n-1},y^n,\ldots,y^{2n-2},s,t)$ terá det 1 em 0).

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE DARBOUX

w é uma 2-forma não degenerada em M^{2n}. Se para cada ponto existe um sistema de coordenadas tal que:

$$w = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dy^i$$

então $dw = 0$.

Reciprocamente se $dw = 0$ para cada ponto $p \in M^{2n}$ existe uma vizinhança onde $w = d\theta$, θ uma forma que pode-se supor não se anular em $p \in M^{2n}$, já que pode-se somar a θ uma df conveniente, f sendo uma função. A tese segue agora do Lema 13. ∎

- □ -

II - SISTEMAS HAMILTONIANOS EM VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

Seja (M^{2n},w) uma variedade simplética.

DEFINIÇÃO 1 - Uma Hamiltoniana é uma função de classe C^{r+1} definida em M a valores reais

$$H: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

A derivada exterior de H, dH, é a seção de classe C^r do espaço fibrado cotangente T*M isto é, $dH \in \Gamma^r(T^*M)$. Em correspondência a dH obtem-se um campo de vetores $X_H \in \Gamma^r(TM)$ dado pelo isomorfismo $\bar{w}$ induzido por w. A seguinte notação é frequentemente usada:

$$X_H \rfloor w = dH.$$

Pelo Teorema de Darboux (Teorema 8, cap.I) sabe-se que para $m \in M$, existem um aberto U em M, $m \in U$, e um sistema de coordenadas $(x^1,\ldots,x^n,y^1,\ldots,y^n)$ tal que em U w é expressa na forma

$$w = \sum_{j=1}^{n} dx^j \wedge dy^j$$

Neste sistema de coordenadas tem-se as seguintes expressões para dH e X_H respectivamente:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x^1}dx^1 + \ldots + \frac{\partial H}{\partial x^n}dx^n + \frac{\partial H}{\partial y^1}dy^1 + \ldots + \frac{\partial H}{\partial y^n}dy^n$$

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial y^1}\frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + \frac{\partial H}{\partial y^n}\frac{\partial}{\partial x^n} - \frac{\partial H}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial y^1} - \dots - \frac{\partial H}{\partial x^n}\frac{\partial}{\partial y^n}$$

Seja $(x^1(t),\dots,x^n(t),y^1(t),\dots,y^n(t))$ uma órbita de X_H, neste caso:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y^i} \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i} \qquad i=1,\dots,n$$

Estas são as clássicas *equações de Hamilton.*

$X_H(M)$ vai denotar o subconjunto de $X(M)$ constituído pelos *campos de vetores Hamiltonianos.*

EXEMPLO 1 - Considere duas partículas em $\mathbb{R}^3$. A posição de cada partícula é descrita por $(x^{3i+1},x^{3i+2},x^{3i+3})$, $i=0,1$; com velocidades $(v^{3i+1},v^{3i+2},v^{3i+3})$, $i=0,1$ e massas m_1 e m_2 respectivamente. Sejam $(F^{3i+1},F^{3i+2},F^{3i+3})$, $i=0,1$, respectivamente as correspondentes forças totais sobre as partículas e $p_i = m_1 v^i$, $i=1,2,3$; $p_j = m_2 v^j$, $j=4,5,6$, os momentos lineares. De acordo com a equação de Newton

$$\begin{cases} (F_1,F_2,F_3) = m_1(\ddot{x}_1,\ddot{x}_2,\ddot{x}_3) \\ (F_4,F_5,F_6) = m_2(\ddot{x}_4,\ddot{x}_5,\ddot{x}_6) \end{cases}$$

As equações acima nos fornecem:

$$(1) \begin{cases} \dfrac{dp^k}{dt} = F_k(x^1,\dots,x^6) & k=1,\dots,6 \\ \dfrac{dx^i}{dt} = p_i/m_1, & i=1,2,3 \\ \dfrac{dx^j}{dt} = p_j/m_2, & j=4,5,6. \end{cases}$$

Admitindo que o sistema é conservativo tem-se que a energia potencial $V(x^1,\ldots,x^6)$ será dada por:

$$F_j = -\frac{\partial V}{\partial x^j}$$

A energia cinética será

$$T(p^1,\ldots,p^6) = \frac{(p^1)^2+(p^2)^2+(p^3)^2}{2m_1} + \frac{(p^4)^2+(p^5)^2+(p^6)^2}{2m_2}$$

sendo $w = \sum_{j=1}^{6} dx^j \wedge dp^j$, o campo de vetores Hamiltonianos correspondente à função H

$$H(x^1,\ldots,x^6,p^1,\ldots,p^6) = T(p^1,\ldots,p^6) + V(x^1,\ldots,x^6)$$

é dado pelas equações (1).

Os campos de vetores Hamiltonianos gozam de duas importantes propriedades. A primeira delas é a de H se manter constante sobre as órbitas. A segunda diz respeito à forma w que é preservada pelo fluxo do campo.

<u>PROPOSIÇÃO 2</u> - Seja $X_H \in \mathcal{X}_H(M)$ e seja $\phi(t,m) = \phi_t(m)$ o fluxo definido por X_H. Então $H(\phi(t,m)) = H(m)$ e $\phi_t^* w = w$. Esta última é equivalente ao fato da aplicação $D_2\phi(t,m): T_mM \longrightarrow T_mM$ ser simplética.

DEMONSTRAÇÃO - Fixado $m \in M$ seja $k(t) = H(\phi(t,m))$. Neste caso, para todo t, $k'(t)$ é dado por

$$k'(t) = DH(\phi(t,m))\cdot X_H(\phi(t,m))$$

$$= w(X_H(\phi(t,m)), X_H(\phi(t,m))) = 0$$

já que w é uma forma alternada. Tem-se então $k(t) = k(0)$ para todo t, ou seja

$$H(\phi(t,m)) = k(t) = k(0) = H(\phi(0,m)) = H(m).$$

Supondo M munida de coordenadas simpléticas:

$$DX_H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D' \end{bmatrix}$$

onde

$$A = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^j \partial x^{i+n}}\right) \qquad B = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^{j+n} \partial x^{i+n}}\right)$$

$$C = \left(-\frac{\partial^2 H}{\partial x^j \partial x^i}\right) \qquad D' = \left(-\frac{\partial^2 H}{\partial x^{j+n} \partial x^i}\right)$$

e $-A^t = D'$; $B = B^t$; $C = C^t$.

Um cálculo direto mostra que $(DX_H)^t J + J(DX_H) = 0$ ou seja $w(DX_H\cdot,\cdot) + w(\cdot,DX_H\cdot) = 0$ (DX_H é uma transformação infinitesimalmente simplética).

Seja: $g(t)(u,v) = (\phi_t^* w)(m)(u,v)$

$$= w(\phi_t(m))(D\phi_t(m)u, D\phi_t(m)v)$$

$$g'(t) = w(\phi_t(m))(\frac{d}{dt} D\phi_t(m)u, D\phi_t(m)v) +$$

$$+ w(\phi_t(m))(D\phi_t(m)u, \frac{d}{dt} D\phi_t(m)v),$$

lembrando que w *é constante nessas coordenadas*.

As relações $w(DX_H\cdot,\cdot) + w(\cdot,DX_H\cdot) = 0$

e $\frac{d}{dt} D\phi_t(m)u = DX_H(\phi_t(m)u$ garantem que $g'(t)(u,v) = 0$. Is-

to implica em $\phi_t^* w = \phi_0^* w = w$.

Já que

$$w(D\phi_t(m)u,\ D\phi_t(m)v) = w(D\phi_0(m)u,\ D\phi_0(m)v) = w(u,v) \qquad (2)$$

pode-se concluir que $D_2\phi(t,m)$ onde $D_2\phi(t,m) = D\phi_t(m)$ é uma transformação simplética, para qualquer t. Reciprocamente se $D_2\phi(t,m)$ for uma transformação simplética para todo t, vale (2) que permite concluir que $g(t)(u,v)$ é constante para todo t, o que implica que

$$\phi_t^* w = \phi_0^* w = w.$$

<u>DEFINIÇÃO 3</u> - Sejam M uma variedade diferenciável, X um campo de vetores definido em M e $\phi_t(m)$ o fluxo definido por X. Diz-se que a função $F: M \longrightarrow \mathbb{R}$ é integral primeira de X, se para cada $m \in M$

$$F(\phi_t(m)) = F(m) \qquad \forall t \in I_m$$

De acordo com a Proposição 2, a Hamiltoniana H é uma integral primeira do campo de vetores Hamiltonianos X_H por ela definido.

II.1 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM

Pode-se estudar um tipo de campos de vetores Hamiltonianos definidos em uma classe particular de variedades simpléticas M, onde $M = T^*W$ (espaço fibrado cotangente de uma variedade W de classe C^{r+1}, $r \geq 1$). Muitos exemplos da mecânica clássica são deste tipo, daí a importância desse estudo. É preciso no entanto lembrar que T^*W possui estrutura

de variedade simplética (Teorema 6, Capítulo I).

Sejam $\pi_W: T(W) \longrightarrow W$ a projeção canônica e o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & T(T(W)) \arrow[dl, "d\pi_W"'] \arrow[dr, "\pi_{T(W)}"] & \\
T(W) \arrow[dr, "\pi_W"'] & & T(W) \arrow[dl, "\pi_W"] \\
 & W &
\end{tikzcd}$$

<u>DEFINIÇÃO 4</u> - Uma equação diferencial de 2ª ordem numa variedade W é um campo de vetores X em T(W) tal que

$$d\pi_W \circ X = id_{T(W)}$$

<u>PROPOSIÇÃO 5</u> - Sejam $X \in \mathcal{X}(T(W))$ e (U,ϕ) uma carta em W com

$$\phi(U) = U' \subset E.$$

Suponhamos que um representante local de X, X_ϕ, tenha a forma

$$X_\phi : U' \times E \longrightarrow U' \times E \times E \times E$$

$$(u',e) \longrightarrow (u',e,X_1(u,e),X_2(u,e))$$

X é uma equação de 2ª ordem se e somente se para toda carta $X_1(u,e) = e$ para todo $e \in E$.

DEMONSTRAÇÃO - $\pi_{W\phi}$ é definida de tal forma que o diagrama abaixo seja comutativo

$$\begin{tikzcd} TW \arrow[r, "\pi_W"] \arrow[d, "T\phi"'] & W \arrow[d, "\phi"] \\ U'\times E \arrow[r, "\pi_{W\phi}"] & U' \end{tikzcd}$$

Então

$$\pi_{W\phi}: U'\times E \longrightarrow U'$$

$$(u',e) \longrightarrow u'$$

Tendo em vista que $D(\pi_{W\phi}) = (D\pi_W)_\phi$

$$(D\pi_W)_\phi: U'\times E\times E\times E \longrightarrow U'\times E$$

$$(u',e,e_1,e_2) \longrightarrow (u',e_1)$$

Segue que $(D\pi_W)_\phi \circ X_\phi$ = identidade em $U'\times E$ se e somente se $D\pi_W \circ X$ = identidade em TW. O que implica que $X_1(u,e) = e$ se e somente se X é uma equação diferencial de 2ª ordem em TW. ∎

<u>NOTA</u> - o clássico exemplo de equação de segunda ordem,

$$\ddot{x} = f(x,\dot{x}) \qquad x\in I\subset\mathbb{R}$$

corresponde à definição dada. De fato, $(x,\dot{x})\in TI\subset\mathbb{R}^2$ e a equação acima é equivalente ao seguinte sistema:

$$X_1 = \dot{x}$$

$$X_2 = f(x,\dot{x})$$

que é na verdade um campo de vetores em TI.

<u>PROPOSIÇÃO 6</u> - Um campo de vetores X é uma equação de 2ª or

dem se e somente se para toda curva integral c(t) tem-se

$$c(t) = \frac{d}{dt}(\pi_W(c(t)))$$

DEMONSTRAÇÃO - Se X é uma equação de 2ª ordem

$$d\pi_W \circ X = id_{TW}$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}(\pi_W(c(t))) = d\pi_W(c(t)) \circ c'(t)$$

$$= d\pi_W(c(t)) \circ X(c(t))$$

$$= c(t).$$

Por outro lado se vale $c(t) = \frac{d}{dt}(\pi_W(c(t)))$, para toda curva integral c(t) então

$$d\pi_W \circ X = id_{TW} \qquad \blacksquare$$

II.2 - ESTRUTURA SIMPLÉTICA DO ESPAÇO FIBRADO TANGENTE A UMA VARIÁVEL DIFERENCIÁVEL

DEFINIÇÃO 7 - Uma *Lagrangeana* é uma função

$$L: TM \longrightarrow \mathbb{R}$$

TM - espaço fibrado tangente à variedade diferenciável M.

Toda Lagrangeana L define uma aplicação

$$FL: TM \longrightarrow T^*M$$

$$(x,v) \longrightarrow dL_x(x,v)$$

$$L_x = L\Big|_{T_xM}$$

DEFINIÇÃO 8 - Uma lagrangeana chama-se *regular* se FL for regular em coordenadas admissíveis, isto é,

$$\det\left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}\right] \neq 0.$$

Se L é regular de classe C^{r+1} então FL é difeomorfismo local de classe C^r, e se w é a 2-forma não degenerada canônica de T*M, $w_L = (FL^*)w$ é uma 2-forma não degenerada de TM.

Além disso sendo L regular $(x^1,\ldots,x^n,p^1,\ldots,p^n)$ com $p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$ é um sistema de coordenadas locais de TM.

PROPOSIÇÃO 9 - A toda lagrangeana regular L corresponde uma estrutura simplética w_L de TM.

DEMONSTRAÇÃO - Se $(x^1,\ldots,x^n,y^1,\ldots,y^n)$ são as coordenadas em T*M induzidos pelas coordenadas $(x^1,\ldots,x^n)$ de M a forma canônica w se escreve:

$$w = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dy^i$$

$$\begin{aligned} w_L &= (FL^*)w \\ &= (FL^*)\sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dy^i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (FL^*)dx^i \wedge (FL^*)dy^i \\ &= \sum_{i=1}^{n} d(x^i \circ FL) \wedge d(y^i \circ FL) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge d\left(y^i\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j}(dx^j)\right)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)$$

Portanto as coordenadas $(x^1,\ldots,x^n,\ p^1,\ldots,p^n)$ $p^i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$ são coordenadas locais simpléticas em TM. ∎

Um tipo importante de lagrangeana regular é definido por:

$$L = T - V\circ\pi$$

em que π: TM $\longrightarrow$ M é a projeção canônica; T é a *energia cinética*, dada pela metade da forma quadrática associada a uma métrica riemanniana $[(g_{ij})]$ da variedade onde se dá o movimento e V a *energia potencial*, isto é, uma função definida em M, dependendo somente da posição. Sendo $(x^1,\ldots,x^n,\ \dot{x}^1,\ldots,\dot{x}^n)$ as coordenadas admissíveis e $[g_{ij}(x)]$ a matriz da métrica riemanniana no ponto x, nessas coordenadas a transformação

$$FL:\ TM \longrightarrow T^*M$$

se escreve localmente

$$FL = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^1},\ldots,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^n}\right) \text{ onde } p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x)\dot{x}^j$$

e
$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j - V\circ\pi(x,\dot{x})$$

Chama-se *energia total* à soma $E = T + V\circ\pi$.

Em termos de coordenadas admissíveis a energia é expressa por:

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j + V(x)$$

e em termos de coordenadas simpléticas

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)p^ip^j + V(x)$$

onde $[a_{ij}(x)] = [g_{ij}(x)]^{-1}$.

Desta forma é possível definir um campo de vetores hamiltonianos X_E correspondente à energia E, que nas coordenadas simpléticas $(x^1,\ldots,x^n,\ p^1,\ldots,p^n)$ se escreve:

$$X_E \begin{cases} X_1 \begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial p^1} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1j}p^j \\ \vdots \\ \dfrac{\partial E}{\partial p^n} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{nj}p^j \end{cases} \\ X_2 \begin{cases} -\dfrac{\partial E}{\partial x^1} = -\dfrac{\partial V}{\partial x^1} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x^1}(x)p^ip^j \\ \vdots \\ -\dfrac{\partial E}{\partial x^n} = -\dfrac{\partial V}{\partial x^n} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x^n}(x)p^ip^j \end{cases} \end{cases}$$

É interessante constatar que X_E é uma equação de segunda ordem. De fato como:

$$\dot{x}^i = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} p^j$$

$$X_1(x,\dot{x}) = \dot{x} \text{ (Proposição 5).}$$

É importante chamar atenção para o seguinte se $\gamma(t) = (x(t),p(t))$ é uma curva integral de X_E, as expressões locais que satisfazem γ em coordenadas admissíveis são as clássicas equações de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0, \qquad i=1,2,\ldots,n.$$

De fato, sendo $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$$

Por outro lado $\dot{p}_i = \dfrac{-\partial V}{\partial x^i} - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^i} p^i p^j$

$$= \frac{-\partial V}{\partial x^i} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^i} \dot{x}^i \dot{x}^j$$

$$= \frac{\partial L}{\partial x^i} \qquad \blacksquare$$

<u>EXEMPLO 2</u> - Oscilador harmônico dado pela equação de segunda ordem definida em $\mathbb{R}$, $\ddot{x} + x = 0$. Em coordenadas admissíveis o campo de vetores equivalente à equação de segunda ordem é:

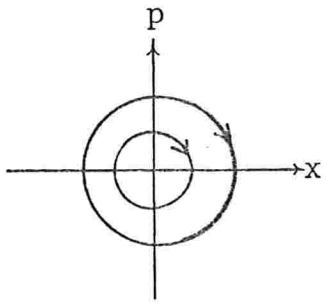
$$X \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

e em coordenadas simpléticas (assumindo a massa unitária)

$$X_H \begin{cases} \dot{x} = p \\ \dot{p} = -x \end{cases}$$

onde a função hamiltoniana $H: TW \longrightarrow \mathbb{R}$ e $H(x,p) = \frac{x^2+p^2}{2}$.

As órbitas deste campo de vetores são esboçadas na figura abaixo:



Como os exemplos dados provêm da Mecânica Clássica é bom estabelecer uma definição matemática de alguns conceitos físicos.

A *posição* w do sistema é um ponto da *variedade de configurações* W.

A *velocidade* $\dot{w}$ do sistema é uma tangente de W, pertence portanto ao plano tangente T_wW de W em W.

O *estado* $(w,\dot{w})$ é um ponto do espaço fibrado tangente TW que é chamado *espaço de estados*.

A *energia* é uma aplicação $E: T(W) \longrightarrow \mathbb{R}$.

O *momento* p do sistema no ponto $w \in W$ é um elemento de T_w^*W. Na verdade p é uma aplicação linear $p: T_wW \longrightarrow \mathbb{R}$ que leva a velocidade, que lhe corresponde pelo isomorfismo, no dobro da energia cinética em (w,v)

$$p(\bar{v}) = g_w(v,\bar{v})$$

$$\Longrightarrow p(v) = 2T(w,v).$$

A *fase* (w,p) do sistema é um ponto do espaço cotangente T^*W que é chamado *espaço de fases*.

EXEMPLO 3 - Chama-se sistema conservativo com um grau de liberdade o sistema descrito por uma equação diferencial de segunda ordem

$$\ddot{x} = f(x), \qquad x \in I \subset \mathbb{R}.$$

A *energia cinética* é a forma quadrática

$$T = \frac{1}{2}\dot{x}^2$$

A *energia potencial* é a função

$$V(x) = -\int_{x_0}^{x} f(s)ds, \qquad x_0, x \in I$$

Pode-se considerar o sistema de primeira ordem em $T(I) = I \times \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x) \end{cases}$$

Neste caso a energia cinética é a forma quadrática associada à métrica riemanniana

$$g(y_1, y_2) = y_1 y_2$$

A função $E = T+V$ definida em $T(I)$ a valores reais dá a *energia total* do sistema. Assumindo m, a massa da partícula, igual a um, o momento p é definido por:

$$p: T(I) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$y \longrightarrow y^2$$

isto é $p \in T^*(I)$. Pode-se então definir um campo de vetores em $T^*(I) = I \times \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = p \\ \dot{p} = f(x) \end{cases}$$

Este campo de vetores é um campo de vetores Hamiltoniano correspondente à seguinte Hamiltoniana

$$H: T^*W \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,p) \longrightarrow \frac{1}{2} p^2 - \int_{x_0}^{x} f(s)ds$$

isto é

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

Um caso particular deste é o oscilador harmônico, já mencionado, onde $f(x) = -x$.

Outro caso particular é o *pêndulo simples*

$$\ddot{x} + \operatorname{sen} x = 0$$

cujo sistema de equações de primeira ordem equivalente em $T(\mathbb{R})$ é

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\operatorname{sen} x \end{cases}$$

supondo m (massa) igual a um, tem-se:

$$X_H \begin{cases} \dot{x} = p \\ \dot{p} = -\text{sen } x \end{cases}$$

$$V(x) = -\cos x + c' \qquad c' - \text{constante}$$

$$T(x,p) = \frac{1}{2} p^2$$

$$H(x,p) = \frac{1}{2} p^2 - \cos x + c'$$

Os pontos críticos de X_H são os pontos da forma $(n\pi, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$

$$DX_H(x,p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & 0 \end{bmatrix}$$

Olhando para a parte linear do sistema nos pontos críticos

i) n é impar

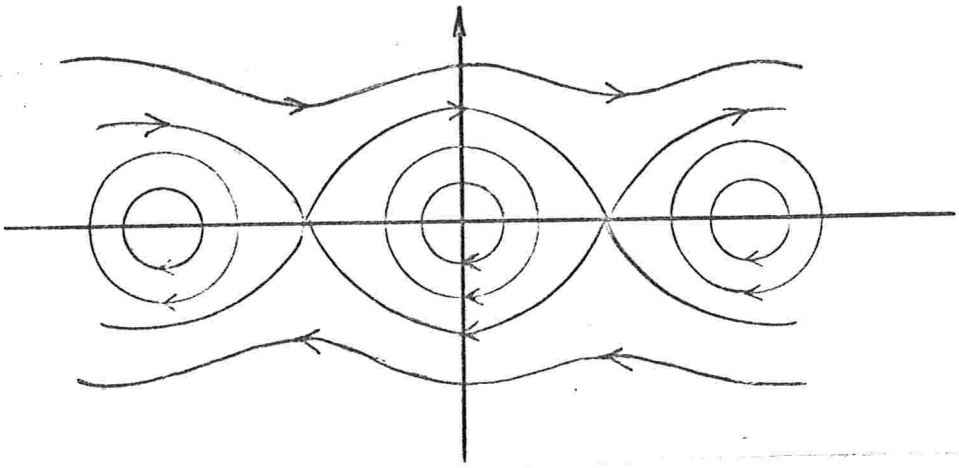
$$DX_H(n\pi, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

raízes características 1, -1, o ponto crítico é uma sela.

ii) n é par

$$DX_H(n\pi, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

raízes características i, -i, o ponto crítico é um centro.



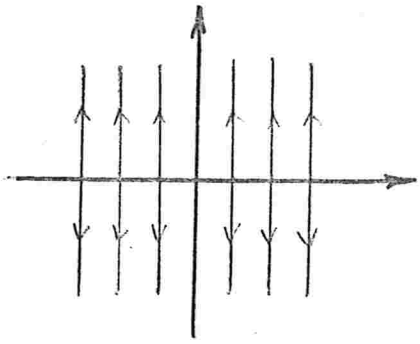
EXEMPLO 4 - Seja $\mathbb{R}^2$ com a métrica usual e com a forma simplética $w = dx \wedge dy$. Se $H(x,y) = x^2$, o campo de vetores hamiltoniano X_H correspondente a essa função H é:

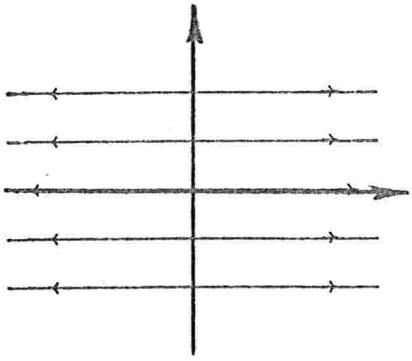
$$X_H \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = -2x \end{cases}$$

Por outro lado o campo gradiente gradH correspondente a essa mesma função é dado por:

$$\text{gradH} \begin{cases} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

Em ambos os casos, o conjunto dos pontos críticos é o eixo y





EXEMPLO 5 - Hamiltonianos genericamente em superfícies de dimensão dois, compactas, sem bordo orientáveis. As variedades desta forma são k-toros k=0,1,... (k = 0 é a esfera S^2)

PROPOSIÇÃO [3] - Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n. As afirmações abaixo são equivalentes:

a) M é orientável

b) Existe uma n-forma não degenerada em M.

Tem-se no caso n = 2 a equivalência entre orientabilidade e existência de estrutura simplética.

Seja M uma tal variedade e H uma função real de classe C^{r+1} ($r \geq 1$). Dado $p \in M$, existem uma vizinhança U de p e um sistema de coordenadas (x,y) tal que a 2-forma não degenerada w é representada por $w = dx \wedge dy$. É bom recordar a definição de campo de vetores gradiente associado a H, gradH em M:

$$dH(\cdot) = \langle \text{grad}H, \cdot \rangle$$

onde < , > denota o produto escalar da métrica riemanniana considerada em M. Então tem-se

$$\langle \mathrm{grad}H, X_H \rangle = dH(X_H) = w(X_H, X_H) = 0$$

Conclusão - Em cada ponto os campos gradiente e hamiltoniano são ortogonais. Um ponto $p \in M$ é um *ponto crítico* da função H se e somente se

$$\frac{\partial H}{\partial x}(p) = \frac{\partial H}{\partial y}(p) = 0.$$

(U,x,y) sendo um sistema de coordenadas locais.

Um ponto crítico e não degenerado se e somente se a matriz hessiana de H, H_s

$$H_s = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} \\ \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

tem determinante não nulo. Uma tal função H é uma *função de Morse* se todos os pontos singulares de H são não degenerados.

<u>PROPOSIÇÃO</u> - Seja M uma variedade diferenciável; o conjunto das funções de Morse e injetoras nos pontos críticos é residual em $C^r(M)$ (ver [4] para demonstração).

$\mathcal{X}_H^m(M^2)$ é o conjunto dos campos Hamiltonianos determinados por uma função de Morse

($\mathcal{X}_G(M^2)$, $\mathcal{X}_G^m(M^2)$ análogo para os campos gradientes).

$\mathcal{X}_G^m(M^2)$ é genérico em $\mathcal{X}_G(M^2)$ e

$\mathcal{X}_H^m(M^2)$ é genérico em $\mathcal{X}_H(M^2)$.

O seguinte teorema fornece informações qualitativas para um conjunto "genérico" de campos de vetores hamiltonianos em variedades compactas de dimensão 2.

TEOREMA - Dada uma variedade compacta de dimensão 2, M^2 existe um subconjunto aberto A^r do espaço de Banach $C^r(M^2)$ $r \geq 2$, tal que:

i) A restrição de $H \in A^r$ ao conjunto dos seus pontos críticos é biunívoca.

ii) Fora dos níveis críticos todas as órbitas do campo de vetores hamiltonianos X_H, $H \in A^r$ são órbitas periódicas

iii) Todo $H \in A^r$ tem pelo menos dois centros.

iv) No nível de um centro a imagem inversa de $H \in A^r$ é um ponto (o centro) mais eventualmente um número finito de órbitas periódicas, e no nível de uma sela, a imagem inversa de H é um "oito" mais, eventualmente, um número finito de órbitas periódicas.

DEMONSTRAÇÃO - i) Segue da Proposição anterior. ii) Como H é integral primeira de X_H e a imagem inversa de um valor regular é uma variedade compacta de dimensão 1 tem-se nesse nível um número finito de órbitas periódicas. iii) Fontes e poços para gradH correspondem a centros para X_H e selas correspondem a selas.

$$X_H = J\, dH \text{ (em coordenadas simpléticas)}$$

Sendo p um ponto crítico

$$dX_H(p) = J\, H_s(p)$$

onde $H_s(p)$ é dado por:

$$H_s(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(p) \\ \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x}(p) & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(p) \end{bmatrix}$$

é a matriz hessiana de H no ponto p. Como o traço de $DX_H(p)$ é zero então seus valores próprios são dados por:

$$\lambda^2 + \det(DX_H(p)) = 0$$

A matriz d(gradH)(p) é dada por

$$d(\text{grad}H)(p) = B(p)H_s(p)$$

onde B é a inversa da matriz $G = (g_{ij})$, matriz da métrica.

Os valores próprios de gradH no ponto crítico considerado são dados pelas raízes da equação:

$$\det(B\ H_s - I) \quad \text{ou} \quad \det(H_s - \lambda G) = 0$$

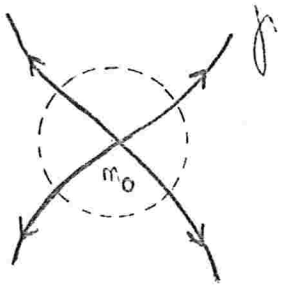
isto é $(\det G)\lambda^2 + \alpha\lambda + \det H_s = 0$ onde $\det G > 0$.

Temos $\lambda_1\lambda_2 = \frac{\det H_s}{\det G}$.

Portanto no caso de *fonte* ou *poço* para o campo gradiente $\lambda_1\lambda_2 > 0$ e $\det(DX_H(p)) = \det H_s > 0$, portanto a equação $\lambda^2 + \det(DX_H(p)) = 0$ tem duas raízes $\lambda = \pm i\beta$ $(\beta \neq 0)$ e neste caso o ponto é um centro. No outro caso, onde $\lambda_1\lambda_2 < 0$, o ponto é uma sela para o campo gradiente, neste caso $\det(DX_H(p)) < 0$ e os valores próprios para o campo X_H nesse ponto crítico serão $\lambda = \pm a$, o que caracteriza uma sela.

A condição iii) segue do fato que gradH tem sempre pelo menos um poço e uma fonte que correspondem ao mínimo absoluto

e ao máximo absoluto de H em M^2.



iv) Supondo que num nível crítico se tenha uma sela para X_H, considere o α-limite para a solução maximal γ, esse α-limite dever ser constituido de um só ponto m_0. De fato o α-limite é não vazio (M é compacta), portanto se não é um ponto é um número infinito de pontos (porque é conexo), mas sendo invariante precisa conter uma variedade de dimensão um no mesmo nível. Mas excluindo-se m_0 tem-se uma variedade não mergulhada, absurdo pois esse nível não é crítico para $M^2 - \{m_0\}$ e neste caso caso a variedade mencionada acima seria imagem inversa de valor regular e portanto mergulhada. Assim fica provado (iv). ∎

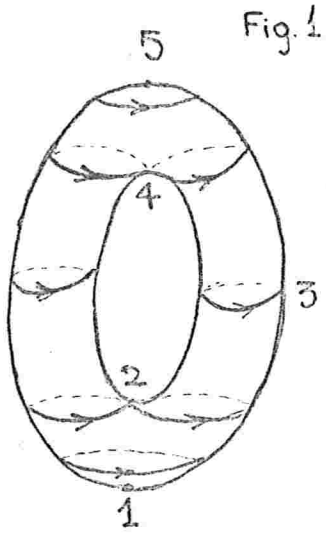


Fig. 1

Pode-se tirar uma série de exemplos. Para as superfícies que se seguem H vai ser a função altura.

Na figura 1 tem-se quatro pontos críticos para X_H: dois centros 1 e 5; duas selas 2 e 4. Em qualquer outro nível de energia (intersecção com plano horizontal) tem-se um número finito de órbitas periódicas.

Nas selas, o nível crítico será um "oito". (Figura 2).

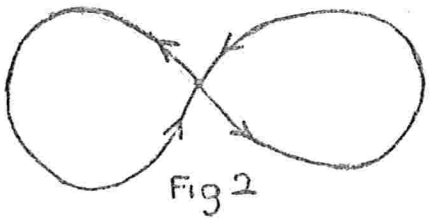


Fig 2

No caso da Figura 3, tem-se oito pontos críticos 1,3,7,8 são centros 2,4,5,6 são selas (no nível quatro tem-se um "oito" e dois círculos.

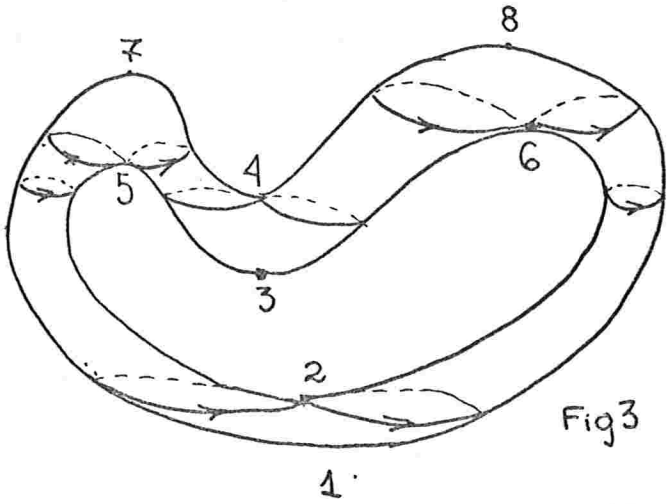


Fig 3

Para a Figura 4 a função altura fornece três centros: (1,3,4) e uma sela 2.

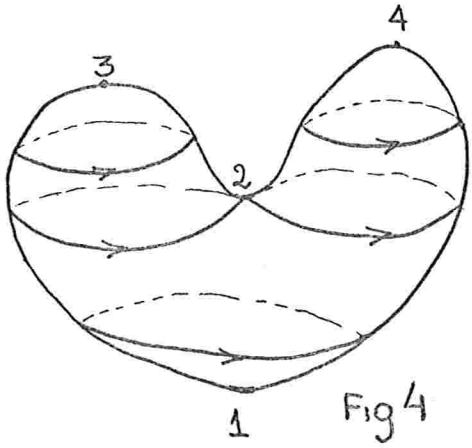


Fig 4

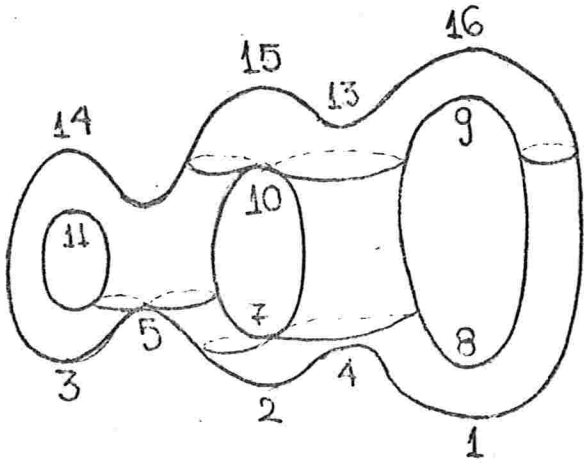


Fig 5

Na figura 5 tem-se os centros 1,2,3,14,15,16 e as selas 4,5,6,7,8,9,10,11,12,13.

<u>EXEMPLO 6</u> - Pêndulo esférico

Uma partícula de massa unitária movimenta-se sobre a esfera S^2 sujeita somente à ação da aceleração da gravidade. O espaço de estados é TS^2. A função hamiltoniana consi-

derada é a função que associa a cada ponto do espaço de estados a energia total:

$$H: TS^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, v_x) \longrightarrow \frac{1}{2} \|v_x\|^2 + gh(x)$$

$h(x)$ altura do ponto $x \in S^2$

$v_x \in T_x S^2$.

Considerando coordenadas locais *simpléticas* (q_1, q_2, p_1, p_2)

$$H(x, v_x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(q_1, q_2) p_i p_j + gh(q_1, q_2)$$

$$[a_{ij}(q_1, q_2)] = [g_{ij}(q_1, q_2)]^{-1}$$

$[g_{ij}(q_1, q_2)]$ - métrica riemanniana.

Com essas coordenadas o campo de vetores hamiltoniano X_H associado a H expressa-se por:

$$X_H \begin{cases} \dot{q}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial p_1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{2} a_{i1}(q_1, q_2) p_i \\[2ex] \dot{q}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial p_2} = \displaystyle\sum_{i=1}^{2} a_{i2}(q_1, q_2) p_i \\[2ex] \dot{p}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_1} = -g \dfrac{\partial h}{\partial q_1}(q_1, q_2) - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \dfrac{\partial a_{ij}}{q_1}(q_1, q_2) p_i p_j \\[2ex] \dot{p}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_2} = -g \dfrac{\partial h}{\partial q_2}(q_1, q_2) - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \dfrac{\partial a_{ij}}{\partial q_2}(q_1, q_2) p_i p_j \end{cases}$$

Todo ponto crítico de X_H é da forma $(x_0, 0)$, onde x_0 é ponto crítico de h. O sistema apresenta dois pontos críticos $(x_s, 0)$

e $(x_N,0)$ onde x_s e x_N denotam polo sul e polo norte, respectivamente.

$$DX_H(x_0,0) = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & a_{11}(x_0) & a_{12}(x_0) \\ 0 & 0 & a_{21}(x_0) & a_{22}(x_0) \\ \hline -g\dfrac{\partial^2 h(x_0)}{\partial q_1^2} & -g\dfrac{\partial^2 h(x_0)}{\partial q_1 \partial q_2} & 0 & 0 \\ -g\dfrac{\partial^2 h(x_0)}{\partial q_2 \partial q_1} & -g\dfrac{\partial^2 h(x_0)}{\partial q_2^2} & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Pode-se supor que $[a_{ij}(x_0)] = \delta_{ij}$, e neste caso os valores próprios de $DX_H(p_0,0)$ são dados por $\pm g\sqrt{-\lambda}$ onde λ é valor próprio de

$$\left[\frac{\partial^2 h(x_0)}{\partial q_i \partial q_j}\right]$$

No caso do polo sul, sendo um ponto de mínimo para a função altura,

$$\left[\frac{\partial^2 h(x_s)}{\partial q_i \partial q_j}\right]$$

possui dois autovalores positivos λ_1 λ_2 e portanto $DX_H(x_s,0)$ tem quatro valores próprios imaginários puros: $\pm ig\sqrt{\lambda_1}$ e $\pm ig\sqrt{\lambda_2}$.

O polo norte sendo um ponto de máximo para a função altura,

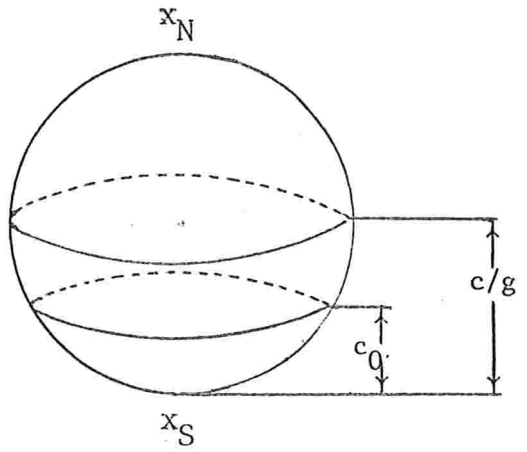
$$\left[\frac{\partial^2 h(x_N)}{\partial q_i \partial q_j}\right]$$

possui dois autovalores negativos β_1 e β_2, sendo assim $DX_H(x_N,0)$ tem dois valores próprios positivos e dois valores próprios negativos, sendo portanto uma sela.

O nível crítico correspondendo ao valor zero é constituído de um só ponto $(x_s,0)$.

Seja agora o nível de energia $H^{-1}(c)$, com $0 < c < 2g$.

$$H^{-1}(c) = \left\{(x,v_x)\in TS^2 \middle| \tfrac{1}{2}\|v_x\|^2 + gh(x) = c\right\}.$$



Se x é tal que $h(x) = c/g$, $\frac{1}{2}\|v_x\|^2 = 0$ portanto corresponde apenas o vetor nulo. Se x é tal que $h(x) < c/g$ isto é $h(x) = k$ tem-se $\frac{1}{2}\|v_x\|^2 = c-gk$ ou seja um conjunto de vetores em T_xS^2 de norma constante e igual a $\sqrt{2(c-gk)}$. Fixado c_0, $0 < c_0 < c$ definem-se os seguintes conjuntos:

$$A_0 = \{(x,v_x)\in H^{-1}(c) \,|\, h(x)\leq c_0\}$$

$$B_0 = \{(x,v_x)\in H^{-1}(c) \,\big|\, h(x)\geq c_0\} = H^{-1}(c)-A_0\cup\partial A_0$$

1º) A_0 *é difeomorfo a um toro sólido cujo bordo é constituído por* $(x,v_x)\in A_0$ *Tal que* $h(x_0) = c_0$.

De fato, sendo $h(x_0) = c_0$:

$$F: A_0 \longrightarrow R^2\times R^2$$

$$(x,v_x) \longrightarrow \left(\frac{\phi(x)}{\|\phi(x_0)\|}, \frac{D\phi(x)v_x}{\|D\phi(x)v_x\|}\right)$$

ϕ - projeção estereográfica com centro no polo norte.
F é um homeomorfismo sobre a imagem, e um difeomorfismo local e portanto um difeomorfismo sobre a imagem, $F(A_0)=D^2\times S^1$. O bordo de A_0, ∂A_0 tem imagem T^2 que é o bordo do toro sólido $D^2\times S^1$, e corresponde aos pontos de S^2 cuja altura é c_0.

2º) B_0 *é difeomorfo a um toro sólido cujo bordo é* ∂A_0.

Com efeito, seja:

$$G: B_0 \longrightarrow R^2\times R^2$$

$$(x,v_x) \longrightarrow \left(\frac{v_x}{\sqrt{2(c-gc_0)}}, \frac{x_1}{\sqrt{1-(1-h(x))^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{1-(1-h(x))^2}}\right)$$

Dados $x\in S$, $x_1^2 + x_2^2 + [1-h(x)]^2 = 1$.

$G(B_0)\subset D^2\times S^1$. É preciso mostrar a igualdade desses conjuntos. Sejam $(a,b)\in D^2\times S^1$:

$$|a| = \frac{\|v_x\|}{\sqrt{2(c-gc_0)}} = \frac{\sqrt{2(c-gh)}}{\sqrt{2(c-gc_0)}}$$

$$c - |a|^2(c-gc_0) = gh$$

Com h e b determina-se x já que $a = x_2/x_1$ (o conjunto dos pontos de altura h é difeomorfo a S^1).

Por outro lado determinado o ponto x, os vetores $v_x \in T_x S^2$ que lhe correspondem são *todos* com norma igual a $\sqrt{2(c-gh)}$ e portanto é possível determinar v_x tal que:

$$v_x = \sqrt{2(c-gc_0)}\,a.$$

Esta aplicação é um homeomorfismo sobre $D^2 \times S^1$ e um difeomorfismo local e portanto um difeomorfismo global sobre $\overline{D^2 \times S^1}$. A fronteira do conjunto B_0 corresponde aos pontos (x,v_x) tal que $\|v_x\| = \sqrt{2(c-gc_0)}$, isto é corresponde aos pontos (x,v_x) tais que $h(x) = c_0$, o que é o conjunto ∂A_0.

$$A_0 \cup B_0 = H^{-1}(c)$$

$H^{-1}(c)$ é a reunião de dois toros sólidos reunidos pelo seu bordo, que é uma condição necessária e suficiente para que $H^{-1}(c) \approx S^3$.

Seja agora o nível crítico de energia correspondente a sela $(p_N, 0)$.

$$H(p_N, 0) = 2g.$$

Quando $h(x) = 2$ tem-se $\|v_x\| = 0$ e portanto ao polo norte corresponde um único vetor, o *vetor nulo*.

Se $h(x) = k < 2$ tem-se $\|v_x\| = \sqrt{2g(2-k)}$.

Fixado c_0, $0 < c_0 < 2$ sejam:

$$A_0 = \{(x,v_x) \in H^{-1}(2g) \mid h(x) \leq c_0\}$$

$$B_0 = \{(x,v_x) \in H^{-1}(2g) \mid h(x) \geq c_0\} = H^{-1}(2g) - A_0 \cup \partial A_0.$$

1º) A_0 é difeomorfo a um toro sólido cujo bordo é cons-

tuído por $(x,v_x)\in A_0$ tal que $h(x) = c_0$.

A demonstração é a mesma feita no caso anterior.

2º) B_0 é homeomorfo ao *cone do toro* CT^2, e o bordo de B_0 ∂A_0.

Em primeiro lugar é preciso definir o cone do toro T^2, denotado por CT^2. Seja $I = [0,1]$

$$CT^2 = T^2\times I/\sim$$

onde $\sim$ é a relação de equivalência:

$$(x,1)\sim(x',1) \iff x,x'\in T^2.$$

Para cada $t\in I$, $t<1$

$$T^2\times\{t\}/\sim \;\approx\; T^2\times\{t\} \approx T^2$$

Para $t<1$

$$T^2\times\{t\} \longrightarrow (S(p),S^1_p)$$

$$S(p) = \{x\in S^2 \mid h(x)=p\}$$

$$S^1_p = \{v_x\in T_xS^2 \mid x\in S(p) \quad e \quad \|v_x\| = \sqrt{2(2g-gp)}\}$$

Por argumento análogo ao visto anteriormente

$$(S(p),S^1_p) \approx T^2 \quad e \quad p = 2 - (1-t)^2(2-c_0) \quad (*).$$

Para $t=1$, $T^2\times\{1\}/\sim$ é um ponto. Usando a fórmula (*) para p, $p(1) = 2$ e na verdade temos um único ponto de altura 2 ao qual corresponde o vetor nulo, isto é,

$$S(2) = \{p_N\}$$

$$S^1_2 = \{0\}.$$

Portanto, a aplicação está bem definida. O bordo de cone corresponde a $p(0) = c_0$ que é na verdade ∂A_0.

Chega-se assim à descrição dada em [9] que diz – "o nível de energia ao qual pertence o equilíbrio instável $V(=(p_N,0))$ é homeomorfo a um toro sólido unido com um cone pelo seu bordo".

Seja agora o nível de energia $H^{-1}(c)$ com $c > 2g$

$$H^{-1}(c) = \{(x,v_x)\in TS^2 \,\big|\, \tfrac{1}{2}\|v_x\|^2 + gh(x)=c\}$$

Tendo em vista que $h(x) \leq 2$ para qualquer $x\in S^2$ o conjunto

$$T_x^c S^2 = \{v_x \in T_x S^2 \,\big|\, \|v_x\| = \sqrt{2(c-gh(x))}\}$$

é difeomorfo a S^1.

$H^{-1}(c)$ é difeomorfo a T_1S^2,

$$T_1S^2 = \{(x,v_x)\in TS^2 \,\big|\, \|v_x\| = 1\}$$

T_1S^2 *é homeomorfo a* P^3 (espaço projetivo de dimensão 3).

A demonstração vai ser feita em duas etapas:

1) $SO(3) \approx P^3$

2) $T_1S^2 \approx SO(3)$.

Na primeira parte sendo $[1,\vec{i},\vec{j},\vec{k}]$ o grupo dos quatérnios, $\mathbb{R}^4$ vai ser identificado com o espaço vetorial real gerado por $1,\vec{i},\vec{j},\vec{k}$:

$$(t,x,y,z) \longrightarrow t + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Dado $w = t+x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, $\bar{w}$ é definido como:

$$\bar{w} = t - x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$$

$$w\bar{w} = |w|^2 \quad e \quad w^{-1} = w/|w|^2$$

$S^3 \subset \mathbb{R}^4$, S^3 é o conjunto dos quartérnios de módulo 1.

<u>PROPOSIÇÃO</u> - Existe um homomorfismo contínuo sobrejetivo

$$\phi: S^3 \longrightarrow SO(3)$$

cujo núcleo é $\{1,-1\}$.

DEMONSTRAÇÃO - a cada $u \in S^3$ é associada a transformação linear ϕ_u.

$$\phi_u: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$w \longrightarrow uwu^{-1}$$

Definida inicialmente em $\mathbb{R}^4$, ϕ_u é linear e como

$$|uwu^{-1}| = |w|, \quad \phi_u: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

é ortogonal. Além disso $\phi_u(1) = 1$, isto é, ϕ_u deixa invariante o subespaço $\mathbb{R}$ dos reais, logo deixa invariante seu complemento ortogonal. Se w é um imaginário puro $(w = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$, uwu^{-1} também é, portanto $\phi_u: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ está bem definida. ϕ_u é uma matriz com colunas: $u\vec{i}u^{-1}$, $u\vec{j}u^{-1}$, $u\vec{k}u^{-1}$ que dependem continuamente de $u \in S^3$.

$$\det(\phi_u) = \pm 1 \quad \forall u \in S^3$$

S^3 é conexa e para $u = 1$ $\det(\phi_u) = 1$. Logo $\phi_u \in SO(3)$, $\forall u \in S^3$ isto implica que

$$\phi: S^3 \longrightarrow SO(3)$$

$$u \longrightarrow \phi_u \text{ é contínua}$$
$$\phi_{uv} = \phi_u \circ \phi_v$$

$\Longrightarrow \phi$ é homomorfismo de grupos.

É fácil ver que $\mathrm{Ker}\phi = \{-1,1\}$

Resta mostrar que é sobrejetora. Como S^3 é compacta e $SO(3)$ é conexo, basta mostrar que ϕ é aberta. Para cada $u \in S^3$, os elementos ϕ_u são C^∞. Como ϕ é homomorfismo de grupos, e portanto tem posto constante, e sendo localmente injetivo o posto de ϕ é 3 e portanto é submersão o que prova que ϕ é aberta. ∎

$\phi(w) = \phi(w') \Longleftrightarrow w' = \pm w$, portanto induz $\overline{\phi}: P^3 \longrightarrow SO(3)$ por passagem ao quociente. $\overline{\phi}$ é bijeção contínua e como P^3 é compacto e $SO(3)$ de Hausdorff tem-se que $\overline{\phi}$ é homeomorfismo.

Na segunda parte usa-se o fato de que S^2 está imersa em $\mathbb{R}^3$ e define-se a seguinte aplicação:

$$\psi: T_1S^2 \longrightarrow SO(3)$$
$$(u,v) \longrightarrow [u,v,u\wedge v]$$

$[u,v,u\wedge v]$ - matriz com colunas $u,v,u\wedge v$.

ψ é o homeomorfismo desejado. Portanto $T_1S^2 \approx P^3$. ∎

- □ -

III - NATUREZA GENÉRICA DA PROPRIEDADE H1 PARA CAMPOS DE VETORES HAMILTONIANOS X_H COM $H=T+V$

DEFINIÇÃO 1 - Seja N uma variedade simplética de classe $C^r (r \geq 2)$ de dimensão finita satisfazendo o segundo axioma de enumerabilidade, Hausdorff. Dada $H \in C^r(N)$, seja X_H o campo de vetores Hamiltoniano associado a H. Um ponto crítico p de X_H é dito H-*elementar* se as seguintes condições estão satisfeitas:

(i) p é um ponto crítico não degenerado

(ii) qualquer autovalor de $DX_H(p)$ imaginário puro tem multiplicidade um

(iii) se λ e μ são autovalores de $DX_H(p)$ puros imaginários com parte imaginária positiva, então λ e μ são linearmente independentes sobre os inteiros, isto é, $m\lambda + M\mu \neq 0$ quaisquer m, M em $\mathbb{Z}$ diferentes de zero.

DEFINIÇÃO 2 - Uma função Hamiltoniana H satisfaz a *propriedade* H1 se todo ponto crítico de X_H é H-elementar.

Dada uma variedade M de Hausdorff, de classe $C^{r+1}(r\geq 2)$ de dimensão finita, satisfazendo ao segundo axioma de enumerabilidade, seu espaço fibrado tangente TM é uma variedade de Hausdorff de classe C^r, de dimensão par, satisfazendo ao segundo axioma de enumerabilidade.

Seja G uma métrica riemanniana associada a M. G permite transportar a estrutura canônica simplética de T*M, fibrado co-tangente para TM (de acordo com o Cap. II). Seja T a metade da forma quadrática associada a G. T será mantida fixa no que se segue. Dada $V\in C^r(M)$, seja $H:TM \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $H = T+V$.

O propósito deste capítulo é a demonstração do seguinte resultado:

- *O conjunto das funções* $V\in C^r(M)$ *tal que* $H = T+V$ *satisfaz a propriedade* H1 *é residual em* $C^r(M)$ *(e portanto denso).*

$C^r(M)$ vai ser munido da topologia de Whitney e nessas condições é um espaço de Baire (para quaisquer referências às topologias no espaço das funções definidas na variedade ver [6]).

$$H^r(M) = \{V\in C^r(M) \mid H=T+V, \ H \text{ satisfaz a propriedade H1}\}$$

Na verdade demonstra-se que $H^r(M)$ é residual no conjunto das funções de Morse.

$M^r(M) = \{f\in C^r(M) \mid f$ é uma função de Morse e injetora quando restrita aos pontos críticos$\}$

Como já observamos $M^r(M)$ é residual em $C^r(M)$.

Seja $[g_{ij}(x)]$ a matriz da métrica riemanniana G num sistema de coordenadas admissíveis $(x^1,\ldots,x^n,\dot{x}^1,\ldots,\dot{x}^n)$ válida na vizinhança $\pi^{-1}(U)$ em TM, U vizinhança de p_o. Não há perda de generalidade supor que $g_{ij}(p_o)=\delta_{ij}$. Tomando coordenadas simpléticas $(x^1,\ldots,x^n,y^1,\ldots,y^n)$ em TM, a matriz $DX_H(p_o)$ é expressa a seguir:

$$DX_H(p_o)=\left[\begin{array}{c|c} 0 & \left[a_{ij}(p_o)\right] \\ \hline \left[-\dfrac{\partial^2 V(p_o)}{\partial x^i \partial x^j}\right] & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline \left[-\dfrac{\partial^2 V(p_o)}{\partial x^i \partial x^j}\right] & 0 \end{array}\right]$$

I - identidade $n\times n$

$$\left[a_{ij}(p_o)\right] = \left[g_{ij}(p_o)\right]^{-1} = I$$

Seja $p(\lambda)$ o polinômio característico de $DX_H(p_o)$

$$p(\lambda)= \det \left[\begin{array}{c|c} \lambda I & -I \\ \hline \begin{matrix} b_{11}\cdots b_{1n} \\ \vdots \\ b_{n1}\cdots b_{nn} \end{matrix} & \lambda I \end{array}\right] \qquad \text{com} \quad b_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^j}(p_o)$$

$$p(\lambda) = \lambda^n \begin{vmatrix} \frac{\lambda^2+b_{11}}{\lambda} & \frac{b_{12}}{\lambda} & \cdots \\ \vdots & & \\ \frac{b_{n1}}{\lambda} & & \frac{\lambda^2+b_{nn}}{\lambda} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

$$= \det\left[\lambda^2 I + A\right]$$

Portanto se β é autovalor de $\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^j}(p_o)\right]$, $\lambda = \pm\sqrt{-\beta}$ é autovalor de $DX_H(p_o)$ (2)

A condição (i) da propriedade H1 é imediatamente satisfeita por H desde que V seja uma função de Morse. Outra consequência imediata de (2) é: a todo autovalor positivo de $\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^j}(p_o)\right]$ correspondem duas raízes imaginárias puras de $DX_H(p_o)$, isto é, $\pm i\sqrt{\beta_1}$; analogamente a todo autovalor negativo correspondem duas raízes características reais de $DX_H(p_o)$ a saber $\pm\sqrt{-\beta_2}$. (Cumpre lembrar que a matriz $\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^j}(p_o)\right]$ só possui autovalores reais).

Considere-se agora o seguinte subconjunto de $M^r(M)$:

$M_o^r(M) = \{V \in M^r(M) \mid$ se p é ponto crítico de V, a matriz hessiana de V em p só tem autovalores simples$\}$

Se $V \in M_o^r(M)$ e p for ponto crítico de X_H, $H=T+V$, então $DX_H(p)$ satisfaz à condição (ii) de ponto H-elementar.

LEMA 3 - $M_o^r(M)$ é aberto e denso em $M^r(M)$

DEMONSTRAÇÃO - Seja $h \in M^r(M)$, h é uma função de Morse, portanto só tem pontos críticos isolados. Como M satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade os pontos críticos são em quantidade enumerável, a saber $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Fixado p_k existem uma vizinhança U_k de p_k, com $\overline{U}_k$ compacto, e um sistema de coordenadas $(u_k^1, \ldots, u_k^n)$ tais que:

$$h|_{U_k} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_k^i \, (u_k^i)^2$$

onde λ_k^i, $i=1,\ldots,n$, são autovalores de $\left[\dfrac{\partial^2 h}{\partial u_k^i \partial u_k^j}(p_k)\right]$

Pode-se restringir U_k, se necessário, de forma que exista ε_o^k tal que toda função g satisfazendo $\|g-h\|_r < \varepsilon_o^k$ em U_k tenha um único ponto crítico nesta vizinhança. Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura de M, localmente finita por cartas relativamente compactas, de forma que $U_k \in \mathcal{U}$, $k \in \mathbb{N}$, e tal que $\alpha \neq k \Rightarrow p_k \notin \overline{U}_\alpha$. Seja:

$$a_\alpha = \frac{1}{2}\left[\min_{p \in \overline{U}_\alpha} \|h(p)\|_r\right], \alpha \notin \mathbb{N} \; .$$

É possível encontrar $\varepsilon : M \longrightarrow \mathbb{R}$, uma função contínua, tal que: $\varepsilon|_{U_\alpha} < a_\alpha \qquad \alpha \notin \mathbb{N}$

$\varepsilon|_{U_k} < \varepsilon_o^k \qquad k \in \mathbb{N}$

(ver [6]). Portanto na vizinhança $W^r(h,\varepsilon)$ de h, na topologia de Whitney,

$$W^r(h,\varepsilon) = \{g \in M^r(M) \mid \|h(p) - g(p)\|_r < \varepsilon(p)\}$$

toda função possui pontos críticos isolados, um em cada vizinhança U_k de p_k e mais nenhum. Como, cada $\overline{U}_k$ intercepta um número finito de $\overline{U}_\alpha$'s existe W_k tal que W_k é vizinhança de p_k e $W_k \cap U_\alpha = \emptyset$, $\alpha \neq k$. Sejam W_k^o uma vizinhança de p_k tal que $\overline{W}_k^o \subset W_k$ e ρ_k a seguinte função auxiliar:

$$\rho_k \begin{cases} \equiv 1 & \text{em} \quad \overline{W}_k^o \\ \equiv 0 & \text{em} \quad M - W_k \end{cases}$$

Para provar a *densidade* de $M_o^r(M)$ basta mostrar que em qualquer vizinhança V de h na topologia de Whitney existe $g \in M_o^r(M)$.

$$V = \{f \in M^r(M) \mid \|g(p) - h(p)\|_r < \varepsilon_1(p)\}$$

$$\varepsilon_1^\alpha = \inf_{p \in \overline{U}_\alpha} \varepsilon_1(p) \qquad U_\alpha \in \mathcal{U}$$

Seja $V' = V \cap W^r(h,\varepsilon) \subset V$. δ_k é o mínimo entre os valores absolutos das diferenças não nulas entre os autovalores de $\left[\dfrac{\partial^2 h}{\partial u_k^i \partial u_k^j}(p_k)\right]$. Tomando $\varepsilon_k = \min(\delta_k, \varepsilon_o^k, \varepsilon_1^k)$, a função g definida por:

$$g = h + \sum_k \rho_k \left[\sum_{j=1}^n j \frac{\varepsilon_k}{n} (u_k^j)^2\right]$$

pertence a V.

$$g\big|_{U_k} = \sum_{j=1}^{n} (\lambda_k^i + j\frac{\varepsilon_k}{n})\ (u_k^j)^2$$

λ_k^i é o j-ésimo autovalor da matriz $\left[\frac{\partial^2 h}{\partial u_k^i \partial u_k^j}(p_k)\right]$.

Fora de $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $g\equiv h$. Da maneira como foi construída a matriz hessiana de g em cada ponto crítico tem autovalores distintos. Para mostrar a *abertura* de $M_o^r(M)$ é suficiente mostrar que dada $h_o \in M_o^r(M)$ existe uma vizinhança de h_o, na topologia de Whitney, contida em $M_o^r(M)$. Fixado p_k, ponto crítico de h_o, seja (U_k,ϕ_k) um sistema de coordenadas $\phi_k = (u_k^1,\ldots,u_k^n)$. Por facilidade de notação $A_k = \left[\frac{\partial^2 h_o}{\partial u_k^i \partial u_k^j}(p_k)\right]$. A cada matriz simétrica A_k, pode-se associar $(\lambda_k^1,\lambda_k^2,\ldots,\lambda_k^n)\in\mathbb{R}^n$ onde $\lambda_k^1,\ldots,\lambda_k^n$ são autovalores de A_k; a aplicação está bem definida porque matrizes simétricas só tem autovalores reais. Se $\lambda_k^i \neq \lambda_k^j$ para $i\neq j$ $(\lambda_i\neq 0,\ \forall i)$ pode-se achar $\delta_k>0$ tal que sempre que $\|A'-A_k\| < \delta_k$, A' só tem autovalores distintos e não nulos. Por outro lado como $\frac{\partial^2 h_o}{\partial u_k^i \partial u_k^j}$ é contínua em $\overline{U}_k$ (U_k é relativamente compacto) pode-se restringir U_k mais ainda de forma que para todo $p\in\overline{U}_k$

$$\left\| \frac{\partial^2 h_o}{\partial u_k^i \partial u_k^j}(p) - \frac{\partial^2 h_o}{\partial u_k^i \partial u_k^j}(p_k) \right\| < \delta_k/3$$

Sendo $\mathcal{U}$ uma cobertura localmente finita com cartas relativamente compactas de forma que $U_k \in \mathcal{U}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, e U_α, $\alpha \notin \mathbb{N}$, seja tal que $p_k \notin \overline{U}_\alpha$. Considerando a família de números a_α subordinada à cobertura $\mathcal{U}$ constituída como se segue:

$$a_k = \inf \{\delta_k/3,\ \varepsilon_o^k\} \qquad k \in \mathbb{N}$$

$$a_\alpha = \frac{1}{2} \inf_{p \in \overline{U}_\alpha} \|Dh(p)\| \qquad \alpha \notin \mathbb{N}$$

($a_\alpha > 0$ já que nenhum ponto crítico pertence a $\overline{U}_\alpha$, $\alpha \notin \mathbb{N}$) é possível determinar uma função contínua ε

$$\varepsilon : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que $0 < \varepsilon(p) < a_\alpha$, $p \in U_\alpha$.

$$W^r(h_o, \varepsilon) = \{h \in M_o^r(M) \mid \|h(p) - h_o(p)\|_r < \varepsilon(p)\}$$

Se h pertence a $W^r(h_o, \varepsilon)$, h tem um ponto crítico p_k' em cada vizinhança U_k, $k \in \mathbb{N}$ e a matriz hessiana de h calculada nesse ponto crítico tem n autovalores distintos já que:

$$\left\| \frac{\partial^2 h}{\partial u_k^i \partial u_k^j}(p_k') - \frac{\partial^2 h_o}{\partial u_k^i \partial u_k^j}(p_k) \right\| \leq$$

$$\left\| \frac{\partial^2 h}{\partial u_k^i \partial u_k^j}(p_k') - \frac{\partial^2 h_o}{\partial u_k^i \partial u_k^j}(p_k') \right\| + \left\| \frac{\partial^2 h_o}{\partial u_k^i \partial u_k^j}(p_k') - \frac{\partial^2 h_o}{\partial u_k^i \partial u_k^j}(p_k) \right\| \leqslant$$

$$\delta_{k/3} + \delta_{k/3} < \delta_k \quad \blacksquare$$

Falta agora mostrar que o conjunto das funções $V \in M_o^r(M)$ tais que os autovalores de $DX_H(p_o)$ (X_H campo de vetores associado a $H=T+V$) são linearmente independentes sobre os inteiros, para todo ponto crítico p_o, é residual em $M_o^r(M)$. Isto vai ser inicialmente provado para partes compactas de M e em seguida globalizado.

Seguindo este esquema seja $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$, um atlas de M com cartas relativamente compactas, localmente finito. Seja (V_i, ϕ_i) um sistema de coordenadas em que ϕ_i extende-se a uma aplicação de classe C^r em $\overline{V}_i$. Defina-se a seguinte aplicação π_i:

$$\pi_i : C^r(M) \longrightarrow C^r(\overline{V}_i)$$

$$f \longrightarrow f\big|_{\overline{V}_i}$$

Em particular pode-se olhar para a restrição de π_i a $M_o^r(M)$. A topologia considerada em $M_o^r(M)$ é a topologia de Whitney de classe C^r. Olhar para $C^r(\overline{V}_i)$ com a topologia de Whitney é equivalente a olhar para $C^r(\overline{V}_i)$ com a topologia da convergência compacta. Com esta topologia, $C^r(\overline{V}_i)$ é um es

paço metrizável.

PROPOSIÇÃO 4 - $\pi_i : C^r(M) \longrightarrow C^r(\overline{V}_i)$ é uma aplicação aberta.

(A demonstração desta proposição é imediata usando um Lema do Cap. 10 de [6].)

Demonstra-se que, para cada $i \in \mathbb{N}$, o conjunto das aplicações de $M_o^r(\overline{V}_i)$ satisfazendo a condição (iii) da propriedade H1 é residual em $M_o^r(\overline{V}_i)$. Para cada par (m,M), $m,M \neq 0$, define-se o conjunto:

$A_{m,M} = \{g \in M_o^r(\overline{V}_i) \mid$ se p é ponto crítico de g a matriz hessiana de g no ponto crítico p tem autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ satisfazendo $\lambda_i m + \lambda_j M \neq 0 \ \forall i,j\}$

LEMA 5 - $A_{m,M}$ é aberto e denso em $M_o^r(\overline{V}_i)$

DEMONSTRAÇÃO - (i) $A_{m,M}$ é aberto.

Sejam $f_o \in A_{m,M}$ e $p_1, \ldots, p_k$ os pontos críticos de f_o. Fixado p_ℓ, seja $(U_\ell, u_\ell^1, \ldots, u_\ell^n)$ um sistema de coordenadas em redor de p_ℓ, com $\overline{U}_\ell$ compacto. Por facilidade de notação seja:

$$A_\ell^o(p) = \left[\frac{\partial^2 f_o}{\partial u_\ell^i \partial u_\ell^j}(p)\right]$$

Restringindo U_ℓ, se necessário, existe ε_ℓ tal que

$\|f-g\| < \varepsilon_\ell$ então g tem um só ponto crítico em U_ℓ. (*).

Seja $K: L^2_s(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação (definida anteriormente) que associa a cada matriz simétrica seus n autovalores. Define-se a seguinte aplicação:

$$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \text{ (matrizes } n\times n)$$

$$(x_1,\ldots,x_n) \longrightarrow \left[mx_i + Mx_j\right]$$

K e F são aplicações contínuas e $F\circ K(A^o_\ell(p_\ell)) \neq 0$, portanto, existe δ_ℓ tal que se $\|A'-A^o_\ell(p_\ell)\| < \delta_\ell$ então $F\circ K(A')\neq 0$. Restringe-se U_ℓ mais uma vez, se necessário, de forma que se $p\in U_\ell$ então:

$$\|A^o_\ell(p) - A^o_\ell(p_\ell)\| < \delta_{\ell/3}$$

Seja $V^c_i = \overline{V}_i - (U_1 \cup \ldots \cup U_k)$, V^c_i é compacto. $Df_o(p)\neq 0$ para $p\in V^c_i$, neste caso

$$\delta_o = \inf_{p\in V^c_i} \|Df_o(p)\| > 0$$

Escolhendo $\delta = \min\{\delta_1,\ldots,\delta_k,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k,\delta_o\}$, seja a vizinhança $V(f_o)$ de f_o construída como se segue:

$$V(f_o) = \{f\in M^r_o(M) \mid \|f-f_o\|_r < \delta/3\}$$

Dada uma qualquer $f\in V(f_o)$, f só tem pontos críticos em $U_1 \cup \ldots \cup U_k$, todos não degenerados. Seja p'_ℓ o ponto crí

tico de f em U_ℓ, vale a seguinte relação:

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial u_\ell^i \partial u_\ell^j}(p'_\ell) - \frac{\partial^2 f_o}{\partial u_\ell^i \partial u_\ell^j}(p_\ell) \right\| \leqslant$$

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial u_\ell^i \partial u_\ell^j}(p'_\ell) - \frac{\partial^2 f_o}{\partial u_\ell^i \partial u_\ell^j}(p'_\ell) \right\| + \left\| \frac{\partial^2 f_o}{\partial u_\ell^i \partial u_\ell^j}(p'_\ell) - \frac{\partial^2 f_o}{\partial u_\ell^i \partial u_\ell^j}(p_\ell) \right\| \leqslant$$

$$\delta_\ell/3 + \delta_\ell/3 < \delta_\ell$$

Portanto $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u_\ell^i \partial u_\ell^j}(p'_\ell) \right]$ tem autovalores linearmente independentes sobre m, M.

(ii) $A_{m,M}$ é denso.

Seja $f \in M_o^r(M)$, f tem $p_1, \ldots, p_k$ pontos críticos. É preciso mostrar que em qualquer vizinhança de f existe f_o pertencente a $A_{m,M}$. Fixado p_ℓ, sejam U_ℓ tomado como em (*) e $(u_\ell^1, \ldots, u_\ell^n)$ coordenadas definidas em U_ℓ. Pode-se restringir os U_ℓ, se necessário, de forma que:

$$f\big|_{U_\ell} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_\ell^k (u_\ell^k)^2$$

Admita-se que $\lambda_{i_1}^\ell, \ldots, \lambda_{i_\ell}^\ell$ sejam tais que:

$$(**)\quad \begin{cases} m\,\lambda^{\ell}_{i_j} + M\,\lambda^{\ell}_{i_k} = 0 \\ \text{ou} \\ m\,\lambda^{\ell}_{i_k} + M\,\lambda^{\ell}_{i_j} = 0 \end{cases} \qquad i_k \neq i_j$$

$V_i^c = \overline{V}_i - (U_1 \cup \ldots \cup U_k)$, V_i^c é compacto e $Df(p) \neq 0$ $\forall\, p \in V_i^c$.

$$\delta_1 = \inf_{p \in V_i^c} \|Df(p)\|$$

Dada $V(f) = \{g \in M_o^r(\overline{V}_i) \mid \|g-f\|_r < \varepsilon\}$

Sejam $\varepsilon_o = \min\limits_{1 \leq j \leq k} \varepsilon_j$ e $\delta_o = \min(\varepsilon_o, \varepsilon, \delta_1, 1)$

Fixados os números reais $\lambda^{\ell}_{i_1}, \ldots, \lambda^{\ell}_{i_\ell}$ $(1 \leq \ell \leq k)$. Lembrando que os reais podem ser considerados como espaço vetorial sobre os racionais, qualquer base vai ter a potência do contínuo (Base de Hammel). Pode-se portanto sempre achar um real R_ℓ linearmente independente com $\lambda^{\ell}_{i_1}, \ldots, \lambda^{\ell}_{i_\ell}$. Sejam n_o e m_ℓ inteiros tais que $1/n_o < \delta_o/2$ e $r_\ell < m_\ell$. Neste caso $r_\ell = R_\ell / n_o m_\ell$ é linearmente independente sobre os inteiros com $\lambda^{\ell}_{i_1}, \ldots, \lambda^{\ell}_{i_\ell}$ (desde que R_ℓ é multiplo de r_ℓ).

Sejam as seguintes funções auxiliares ρ_ℓ, $1 \leq \ell \leq k$

$$\rho_\ell \begin{cases} \equiv 1 & \text{em } \overline{W}_\ell \\ \equiv 0 & \text{em } \overline{V}_i - W'_\ell \end{cases}$$

W_ℓ e W'_ℓ vizinhanças de p_ℓ, com $\overline{W}_\ell \subset W'_\ell$ e $\overline{W}'_\ell \subset U_\ell$

$$h = f + \sum_{\ell=1}^{k} \rho_\ell \left[r_\ell (u_\ell^{i_1})^2 + \ldots + r_\ell (u_\ell^{i_\ell})^2 \right]$$

$$h\Big|_{W_\ell} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_1, \ldots, i_\ell}}^{n} \lambda_\ell^j \, (u_\ell^j)^2 + (r_\ell + \lambda_\ell^{i_1})(u_\ell^{i_1})^2 + \ldots + (r_\ell + \lambda_\ell^{i_\ell})(u_\ell^{i_\ell})^2$$

Isto completa a prova da densidade de $A_{m,M}$ ∎

$A_i = \bigcap_{(m,M)} A_{m,M}$ é residual em $M_o^r(\overline{V}_i)$.

A_i é o conjunto das funções de $M_o^r(\overline{V}_i)$ satisfazendo à propriedade H1.

$$\pi_i^{-1}(A_i) = \pi_i^{-1}(\cap A_{m,M}) = \cap \pi_i^{-1}(A_{m,M})$$

π_i é contínua, portanto $B_{m,M} = \pi_i^{-1}(A_{m,M})$ é aberto em $M_o^r(M)$.

$$\overline{A_{m,M}} = M_o^r(\overline{V}_i)$$

Se $\overline{B_{m,M}} \neq M_o^r(M)$, existe $C_{m,M}$, $C_{m,M}$ aberto em $M_o^r(M)$,

tal que $C_{m,M}=M_o^r(M)-\overline{B_{m,M}}$. Como π_i é aberta, $\pi_i(C_{m,M})\cap A_{m,M} =$ $= K_{m,M} \neq \emptyset$. Desde que $K_{m,M} \subset \text{im}\ \pi_i$, $\pi_i^{-1}(K_{m,M})\neq\emptyset$ mas $\pi_i^{-1}(K_{m,M}) = \pi_i^{-1}(\pi_i\ (C_{m,M})\ ) \cap \pi_i^{-1}(A_{m,M}) = C_{m,M}\cap B_{m,M}$. Absurdo, portanto $\overline{B_{m,M}} = M_o^r\ (M)$.

$B = \bigcap_i \pi_i^{-1}(A_i)$ é residual em $M_o^r(M)$

$B = \{f\in M_o^r(M) |$ se $H=f+T$, X_H satisfaz à propriedade H1$\}$

Com isso fica completa a prova do resultado principal deste capítulo.

- □ -

IV - NATUREZA GENÉRICA DA PROPRIEDADE H1 PARA CAMPOS DE VETORES HAMILTONIANOS

Quando o objeto de estudos é o conjunto dos campos de vetores hamiltonianos $\mathfrak{X}_H^r(M)$ definidos numa variedade simplética M, pode-se verificar que a propriedade H1 é de natureza genérica. Da mesma maneira que anteriormente, M satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade e a propriedade de Hausdorff.

TEOREMA 1 - A propriedade H1 é C^r-genérica em $C^r(M)$, para todo $r \geq 2$.

PROVA DO TEOREMA - a prova do teorema vai ser feita em etapas. Primeiro é considerado o caso local onde $M=U$, $U \subset \mathbb{R}^{2m}$, aberto. Sejam:

$$J^2(U,\mathbb{R}) = U \times \mathbb{R} \times L\,(\mathbb{R}^{2m}, \mathbb{R}) \times L_s^2(\mathbb{R}^{2m}, \mathbb{R})$$

e $$j^2H(p) = (p,\ H(p),\ DH(p),\ D^2H(p)) \in J^2(U,\mathbb{R})$$

É claro que p é um ponto crítico de H se, e somente se,

$j^2H(p) \in U\times\mathbb{R}\times\{0\}\times L^2_s(\mathbb{R}^{2m},\mathbb{R})$. O próximo passo é considerar um subconjunto W_1 de $L^2_s(\mathbb{R}^{2m},\mathbb{R})$ tal que se $j^2H(p) \in U\times\mathbb{R}\times\{0\}\times W_1$ pelo menos uma das três condições que definem um ponto H-elementar não é satisfeita. Lembrando que sendo p um ponto crítico de X_H, $DX_H(p)$ é uma transformação infinitesimalmente simplética, isto é, $DX_H(p) \in sp(T_pM, w(p))$ (Prop. 2 Cap. II), vê-se que no caso local é suficiente achar um subconjunto W_1 de $sp(\mathbb{R}^{2m},w)$ e traze-lo para $L^2_s(\mathbb{R}^{2m},\mathbb{R})$ pela forma simplética.

<u>Construção de $\tilde{W}_1$</u>

Sendo $\mathbb{C}$ o corpo dos complexos, define-se

$\nu:\mathbb{C}^{2m} \longrightarrow \mathbb{C}^{2m}$ (denominada *aplicação de Newton*)

da seguinte forma: $\nu(c_1,\ldots,c_{2m}) = (a_1,\ldots,a_{2m})$ em que $z^{2m}+a_1z^{2m-1}+\ldots+a_{2m}$ é o *único* polinômio unitário ($a_o=1$) cujas raízes são $c_1,\ldots,c_{2m}$. Fixada uma base B para $\mathbb{R}^{2m}$, A_B vai denotar a matriz da aplicação linear A na base B. A aplicação $K:L(\mathbb{R}^{2m},\mathbb{R}^{2m}) \longrightarrow \mathbb{R}^{2m}$ é definida da seguinte forma: $K(A)= (a_1,\ldots,a_{2m})$ onde

$$x^{2m}+a_1x^{2m-1}+\ldots+a_{2m} = \det(A_B-Ix)$$

Com as aplicações K e ν assim definidas, se $(\lambda_1,\ldots,\lambda_{2m}) \in \mathbb{C}^{2m}$, $K^{-1}\circ\nu(\lambda_1,\ldots,\lambda_{2m})$ é o conjunto de todas as aplicações de $L(\mathbb{R}^{2m},\mathbb{R}^{2m})$ cujos autovalores são

$(\lambda_1,\ldots,\lambda_{2m})$. Fazendo a identificação canônica de $\mathbb{C}^{2m}$ com $\mathbb{R}^{4m}$, define-se o subconjunto $V_{n,N}\subset\mathbb{R}^{4m}$, $n,N\neq 0$; $v=x+iy\in V_{n,N}$ se uma das três condições abaixo está satisfeita:

(i) $x_i=y_i=0$ para algum $i\in\{1,2,\ldots,2m\}$

(ii) $x_i=x_j=0$ e $y_i=y_j$ para $i\neq j$

(iii) $x_i=x_j=0$ e $ny_i+Ny_j=0$ para $i\neq j$

Quando (n,N) varia no conjunto $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ fica determinada uma quantidade enumerável de conjuntos $V_{n,N}$ cada um deles definido por um número finito de polinômios. *Um subconjunto de $\mathbb{C}^q$ dado pela reunião finita de subconjuntos definidos por zeros de um número finito de polinômios ou por um número finito de desigualdades polinomiais é chamado de subconjunto semialgébrico.* $V_{n,N}$ é, portanto, um subconjunto semialgébrico

$\tilde{W}_1$ é definido por $\tilde{W}_1=V\cap sp(\mathbb{R}^{2m},w)$

com $V=\bigcup_{(n,N)} K^{-1}\circ\nu(V_{n,N})$

<u>PROPOSIÇÃO 2</u> - $\tilde{W}_1$ é uma reunião enumerável de subvariedades de $sp(\mathbb{R}^{2m},w)$.

Na demonstração desta proposição são necessários os seguintes lemas:

<u>LEMA 2A</u> - (Teorema de Tarski-Seidenberg) [5] - A imagem

por uma aplicação algébrica de um conjunto semialgébrico é um conjunto semialgébrico. (Uma aplicação $f:\mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{C}^q$ é algébrica se f tem a forma:

$f(x^1,\ldots,x^p) = (f_1(x^1,\ldots,x^p),\ldots, f_q(x^1,\ldots,x^p))$ onde f_i é uma função polinomial, $i=1,\ldots,q$ em $x^1,\ldots,x^p$).

LEMA 2B - (Teorema de Whitney) [5] - todo conjunto semialgébrico de $\mathbb{R}^p$ é uma união finita de subvariedades.

DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 2 - $V_{n,N}$ é um conjunto semialgébrico e K e ν são aplicações algébricas e pelo lema 2A, $K^{-1}(\nu(V_{n,N}))$ é um conjunto semialgébrico de $L(\mathbb{R}^{2m},\mathbb{R}^{2m})$. $\tilde{W}_1$, de acordo com o lema 2B, é união enumerável de subvariedades de $sp(\mathbb{R}^{2m},w)$ ∎

PROPOSIÇÃO 3 - $\tilde{W}_1$ tem interior vazio em $sp(\mathbb{R}^{2m},w)$

DEMONSTRAÇÃO - Lembrando que $\tilde{W}_1 = V \cap sp(\mathbb{R}^{2m},w)$ e que $V = \bigcup_{(n,N)} K^{-1}\nu(V_{n,N})$, $\tilde{W}_1$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$\tilde{W}_1 = \bigcup_{(n,N)} \left[K^{-1}(\nu(V_{n,N})) \cap sp(\mathbb{R}^{2m},w)\right]$$

$$= \bigcup_{(n,N)} \left[K|_{sp(\mathbb{R}^{2m},w)}\right]^{-1}(\nu(V_{n,N}))$$

Pelo Lema-2A $\nu(V_{n,N})$ é semialgébrico, é portanto definido por um número finito de polinômios e desilgualdades polino-

miais a saber: $f_1=0,\ldots,f_q=0$, $g_1>0,\ldots,g_n>0$, $h_1\geq 0,\ldots,h_m\geq 0$.

Sejam os seguintes polinômios obtidos das expressões anteriores definidos em $\mathbb{R}^{4m}\times(\mathbb{R}^2-\{t=0\})$

$$(1)\quad \begin{cases} \overline{f}_i(x_1,\ldots,x_{4m},s,t) = f_i(x_1,\ldots,x_{4m}) & 1\leq i\leq q \\ \overline{g}_j = t^2 g_j - 1 & 1\leq j\leq n \\ \overline{h}_k = h_k - s^2 & 1\leq k\leq m \end{cases}$$

O conjunto de zeros dos polinômios (1) define o conjunto $\nu(V_{n,N})\times(\mathbb{R}^2-\{t=0\})$. Seja $\overline{K}$ a seguinte aplicação:

$$\overline{K}: sp(\mathbb{R}^{2m},w)\times(\mathbb{R}^2-\{t=0\}) \longrightarrow \mathbb{R}^{4m}\times(\mathbb{R}^2-\{t=0\})$$

$$\overline{K} = \left(K\Big|_{sp(\mathbb{R}^{2m},w)},I\right)$$

$$\overline{K}^{-1}(\nu(V_{n,N})\times(\mathbb{R}^2-\{t=0\})) = \left[K\Big|_{sp(\mathbb{R}^{2m},w)}\right]^{-1}(\nu(V_{n,N}))\times(\mathbb{R}^2-\{t=0\})$$

tem interior vazio pois é definido pelos zeros dos polinômios

$$\overline{f}_i\circ\overline{K} = 0,\ 1\leq i\leq q,\ \overline{g}_j\circ\overline{K}=0\quad 1\leq j\leq n \qquad \text{e}$$

$$\overline{h}_k\circ\overline{K} = 0\quad 1\leq k\leq m\ .$$

Suponhamos que $\left[K\big|_{sp(\mathbb{R}^{2m},w)}\right]^{-1}(\nu(V_{n,N}))$ tenha interior não vazio, existe A aberto em $sp(\mathbb{R}^{2m},w)$ contido no conjunto acima. Portanto $A\times(\mathbb{R}^2-\{t=0\})$ é aberto contido em $\overline{K}^{-1}(\nu(V_{n,N})\times(\mathbb{R}^2-\{t=0\}))$, absurdo. Para mostrar que $\left[K\big|_{sp(\mathbb{R}^{2m},w)}\right]^{-1}(\nu(V_{n,N}))$ é fechado seja $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos desse conjunto cujo limite é y_o. A sequência $(y_n,1,1)$ é convergente em $\overline{K}^{-1}(\nu(V_{n,N})\times(\mathbb{R}^2-\{t=0\}))$, que é fechado. Converge portanto para um ponto $(\overline{y},1,1)$ pertencente ao conjunto e pela unicidade do limite $\overline{y}=y_o$, o que conclui a prova de que $\left[K\big|_{sp(\mathbb{R}^{2m},w)}\right]^{-1}(\nu(V_{n,N}))$ é fechado.

$\tilde{W}_1$ é reunião enumerável de conjuntos fechados com interior vazio. Como $sp(\mathbb{R}^{2m},w)$ é espaço de Baire, $\tilde{W}_1$ tem interior vazio. Lembrando que $\tilde{W}_1$ é uma reunião enumerável de subvariedades pode-se concluir que a codimensão dessas subvariedades é $\geqslant 1$.

<u>Construção de W_1</u>

Dada $B\in sp(\mathbb{R}^{2m},w)$, $w(Bu,v)=w(Bv,u)$, quaisquer que sejam u e v em $\mathbb{R}^{2m}$. Como consequência a aplicação

$$F: sp(\mathbb{R}^{2m},w) \longrightarrow L^2_s(\mathbb{R}^{2m},\mathbb{R})$$

$$B \longrightarrow w(B\cdot,\cdot)$$

está bem definida e é injetora, já que w é não degenerada. Como $\dim sp(\mathbb{R}^{2m},w) = \dim L^2_s(\mathbb{R}^{2m},\mathbb{R}) = m(2m+1)$, F é um isomorfismo.

Seja $W_1 = F(\tilde{W}_1)$, W_1 é a união enumerável de subvariedades C^∞ de condimensão $\geqslant 1$ em $L^2_s(\mathbb{R}^{2m},\mathbb{R})$

GLOBALIZAÇÃO

Para a globalização é necessário estabelecer um sistema de coordenadas na vizinhança de um ponto N pertencente a um jato de ordem dois pertencente a $J^2(M,\mathbb{R})$: Define-se carta fibrada do jato em redor de N como uma tripla (U,α_o,α) tal que $\alpha(N) \in \alpha_o(U)\times\mathbb{R}\times L(\mathbb{R}^{2m},\mathbb{R})\times L^2_s(\mathbb{R}^{2m},\mathbb{R})$, $\alpha_o(U)\subset\mathbb{R}^{2m}$. Neste caso sendo $N=(u,f(u),Df(u),D^2f(u))$,

$\alpha(N) = (\alpha_o(u),(f\circ\alpha_o^{-1})(\alpha_o(u)),D(f\circ\alpha_o^{-1})(\alpha_o(u)),D^2(f\circ\alpha_o^{-1})(\alpha_o(u)))$

Defina-se o seguinte conjunto $W \subset J^2(M,\mathbb{R})$

$$W = \{N\in J^2(M,\mathbb{R}) \mid \exists\,(U,\alpha_o,\alpha) \text{ em torno de } N \text{ tal que } \alpha(N) \in \alpha_o(u)\times\mathbb{R}\times\{0\}\times W_1\}$$

É facil verificar que W independe do particular sistema de coordenadas escolhido.

$J^2(M,\mathbb{R})$ pode ser recoberto por uma quantidade enumerável de cartas, W é portanto união enumerável de subvariedades M_i de classe C^∞ e codimensão $\geqslant 2m+1$ já que $\dim L(\mathbb{R}^{2m},\mathbb{R})=2m$.

Da construção feita fica claro que $p\in M$ é um ponto crítico H-elementar se e somente se:

(i) p é ponto crítico

(ii) $j^2H(p)\notin W$.

Portanto é suficiente mostrar que para cada $i \in \mathbb{N}$ o conjunto R_i, definido abaixo, é residual.

$R_i = \{H \in C^r(M) \mid$ para todos os pontos críticos p de X_H, $j^2H(p) \notin M_i\}$

Por simplicidade de notação passa-se a usar W para denotar M_i.

<u>PROPOSIÇÃO 4</u> - $j^2H(p) \notin W$ para todos os pontos críticos p de X_H se e somente se $j^2H \pitchfork W$

Demonstração - a demonstração é imediata lembrando que codim $W \geqslant 2m+1$ ∎

Seja um atlas $\{V_i, \phi_i\}$ localmente finito, enumerável com cartas localmente compactas e tais que ϕ_i pode ser extendido C^r a $\overline{V}_i$. A_i vai denotar o conjunto definido abaixo:

$$A_i = \{f \in C^r(\overline{V}_i) \mid j^2 f \pitchfork W\}$$

Sendo
$$\pi_i : C^r(M) \longrightarrow C^r(\overline{V}_i)$$
$$f \longrightarrow f|_{\overline{V}_i}$$

$\bigcap \pi_i^{-1}(A_i)$ é o conjunto de todas as funções de classe C^r satisfazendo à propriedade H1. Resta mostrar que A_i é residual em $C^r(\overline{V}_i)$.

Seja a seguinte aplicação ev_ρ, denominada avaliação:

$$ev_\rho : C^r(\overline{V}_i) \times \overline{V}_i \longrightarrow J^2(M, \mathbb{R})$$
$$(H, m) \longrightarrow (m, H(m), DH(m), D^2H(m))$$

Usa-se o teorema 12-4 de [5] e mais o fato de que dimM--codimW$\geq$1 para concluir que:

(i) ev_ρ é de classe C^{r-2}

(ii) ev_ρ é uma submersão e portanto $\pitchfork W$

A próxima definição é pré-requisito para a aplicação do Teorema de Densidade transversal, enunciado após a definição:

<u>DEFINIÇÃO 5</u> - Sejam A,X,Y variedades de classe C^r, $C^r(X,Y)$ o conjunto das aplicações de classe C^r definidas a valores em Y, e

$\rho : A \longrightarrow C^r(X,Y)$ uma aplicação. Para cada $a \in A$ vamos escrever ρ_a em vez de $\rho(a)$, isto é $\rho_a \in C^r(X,Y)$. Dizemos que ρ é uma *representação de classe* C^r se, e somente se, a aplicação

$$ev_\rho : A \times X \longrightarrow Y$$
$$(a,x) \longrightarrow \rho_a(x)$$

é uma aplicação de classe C^r de $A \times X$ em Y .

Nesse caso $\rho_i : C^r(\overline{V}_i) \longrightarrow C^{r-2}(\overline{V}_i, J^2(M,\mathbb{R}))$

$$H \longrightarrow j^2H$$

<u>TEOREMA 6</u> [5] (Teorema da Densidade Transversal) - sejam A,X,Y e ρ como na definição 5, e $W \subset Y$ uma subvariedade de Y.

e $ev_\rho : A \times X \longrightarrow Y$ a aplicação avaliação. Defina-se $A_W \subseteq A$ por:

$$A_W = \{a \in A \mid \rho_a \pitchfork W\}, \text{ sendo que:}$$

(1) X tem dimensão n e W tem codimensão q em Y (n,q finitos).

(2) A e X satisfazem o segundo axioma de enumerabilidade.

(3) $r > \max(0,n-q)$.

(4) $ev_\rho \pitchfork W$.

Nessas condições A_W é residual em A .

De acordo com esta proposição A_i é residual em $C^r(\overline{V}_i)$.

Analogamente ao que foi feito no fim do capítulo III prova-se que

$$B = \bigcap_i \pi_i^{-1}(A_i) \text{ é residual em } C^r(M) \quad \blacksquare$$

- □ -

BIBLIOGRAFIA

[1] - R.Abraham and J.Marsden - *Foundations of Mechanics*, Benjamin, N.Y., 1967.

[2] - W.M.Oliva - Exposições sobre Mecânica Conservativa, *Notas de Cursos nº 7*, Recife, 1972.

[3] - F.Warner - *Foundations of Differentiable Manifolds*, Scott, Foresman and Company Glenview, Illinois, 1971.

[4] - M.Guillemin and M.Golubitsky - *Stable Mappings and Their Singularities*, Springer-Verlag, N.Y., 1973.

[5] - R.Abraham and J.Robbin - *Transversal mappings and flows*, Benjamin, N.Y., 1967.

[6] - E.L.Lima - *Introdução às Variedades Diferenciáveis*, IMPA, Rio de Janeiro, GB.

[7] - M.A.Buchner - On the generic nature of property H1 for Hamiltonian vector fields - *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. XIV*, R.I., 1970.

[8] - C.Robinson - *Lectures on Hamiltonian Systems*, IMPA, Guanabara, 1971.

[9] - E.C.Zeeman - *Dynamical Systems*, Curso de Verão, Universidade de Warwick, 1969.