Álgebras com Composição
e
Álgebras com Pseudo-Composição

Walquiria de Freitas Torezani

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: Álgebra
Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Peresi

*Durante a elaboração deste trabalho,
a autora recebeu apoio financeiro da CAPES.*

São Paulo, junho de 1998

Álgebras com Composição
e
Álgebras com Pseudo-Composição

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação
apresentada por **Walquiria de Freitas Torezani**,
aprovada pela Banca Examinadora.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Luiz Antonio Peresi (orientador)	IME-USP
Prof. Dr. Orlando Stanley Juriaans	IME-USP
Prof. Dr. Antonio Paques	IMECC-UNICAMP

A Darci, Marcus e Marcelo.

Agradecimentos

Acima de todos, a Deus que nunca me desamparou.

A minha família, pelo apoio constante.

Ao meu orientador, o Professor Dr. Luiz Antonio Peresi, por toda a atenção, dedicação e pelo incentivo desde o início do curso de mestrado.

A todos os meus colegas do IME que muito me ajudaram nas dificuldades e alegraram-me nos momentos tristes.

Agradeço especialmente ao Daniel Vendrúsculo pelos conselhos e pela força, ao Fernando Martins Antoneli Júnior por todo o carinho e tranquilidade que me transmitiu, ao Samuel Gomes da Silva por me fazer sorrir nas horas em que um sorriso era algo quase impossível, ao Sidnei Azevedo de Souza por toda a paciência que teve comigo e as colegas Adriana Pádua Lovatte e Elvira Pádua Lovatte pela ajuda na digitação e correção deste trabalho.

Agradeço também àqueles que direta ou indiretamente, desde os tempos da graduação, contribuíram para a realização deste trabalho.

Finalmente, agradeço ao Programa PET do qual fui bolsista desde a graduação e ao Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo pelo apoio técnico durante a elaboração deste trabalho.

sumário

1	Álgebras com Composição	1
1.1	Introdução	1
1.2	Definição e propriedades simples das álgebras com composição	3
1.3	O processo de Cayley-Dickson	11
1.4	Exemplos de álgebras com composição	16
1.4.1	Tipo I - Corpos de característica diferente de 2.	16
1.4.2	Tipo II - Álgebra dos números complexos generalizados.	17
1.4.3	Tipo III - Álgebra dos quatérnios generalizados.	20
1.4.4	Tipo IV - Álgebra de Cayley-Dickson.	20
1.5	Classificação das álgebras com composição	20
2	Álgebras com Pseudo-Composição	35
2.1	Introdução	35
2.2	Decomposição de Peirce	36
2.3	O caso quadrático	55
2.4	Decomposição de Peirce no caso não quadrático	62

Introdução

O presente trabalho tem por finalidade classificar as álgebras com composição e as álgebras com pseudo-composição.

No primeiro capítulo, descrevemos o processo de Cayley-Dickson para extensão de uma álgebra e partindo de um corpo F de característica diferente de 2 e de uma forma quadrática estritamente não-degenerada, construímos as álgebras dos complexos generalizados, dos quatérnios generalizados e de Cayley-Dickson que têm dimensão 2, 4 e 8 respectivamente. Provamos que qualquer álgebra com composição é isomorfa ao corpo F ou a uma das álgebras citadas acima. Provamos também que as únicas álgebras com composição que são associativas e comutativas são os corpos de característica diferente de 2 e as álgebras dos complexos generalizados, que as álgebras dos quatérnios generalizados são comutativas mas não são associativas e que as álgebras de Cayley-Dickson não são nem comutativas nem associativas.

No segundo capítulo estudamos as álgebras com pseudo-composição sobre um corpo algebricamente fechado de característica diferente de 2 e 3. Tais álgebras necessariamente têm um idempotente e . O objetivo principal é a classificação das álgebras com pseudo-composição que não são do tipo quadrático. Mostraremos que essas álgebras podem ser construídas a partir das álgebras alternativas quadráticas com composição. Especificamente mostraremos o seguinte teorema:

Seja A uma álgebra com pseudo-composição com idempotente e sobre um corpo algebricamente fechado F de característica diferente de 2 e 3. Então $\text{Rad } \varphi$ é um ideal nilpotente de A , e um dos seguintes casos acontece:

- (a) A é do tipo quadrático,
- (b) $A/\text{Rad } \varphi$ é do tipo quadrático,
- (c) A pode ser construída a partir de uma álgebra alternativa quadrática com composição.

Capítulo 1

Álgebras com Composição

1.1 Introdução

Uma das mais importantes propriedades dos números complexos é expressada pela identidade

$$|zz'| = |z| |z'|.$$

Se $z = a_1 + a_2i$, $z' = b_1 + b_2i$, então essa identidade é reescrita na forma

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1b_1 - a_2b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2.$$

Essa fórmula pode ser interpretada como: *o produto da soma de dois quadrados pela soma de dois quadrados é ainda a soma de dois quadrados.*

A pergunta que naturalmente surge é: existem identidades análogas para números maiores de quadrados? Como são descritas tais identidades?

Exemplos de identidades para a soma de quatro quadrados foram exibidos por Euler e Lagrange. Em 1818 Degen encontrou o primeiro exemplo de uma identidade para a soma de oito quadrados que, naquela época, infelizmente, passou despercebido. Em 1843 Hamilton notou que a existência de uma identidade para a soma de n quadrados é

1.2 Definição e propriedades simples das álgebras com composição

Seja F um corpo arbitrário e A um espaço vetorial de dimensão diferente de zero sobre F . Uma aplicação $f : A \times A \rightarrow F$ é chamada uma *forma bilinear* se para todo $x, x', y, y' \in A$ e $\alpha \in F$ valem:

$$(i) \ f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y),$$

$$(ii) \ f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y'),$$

$$(iii) \ f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y).$$

Dizemos que uma forma bilinear f é *simétrica* se $f(x, y) = f(y, x)$ para todo $x, y \in A$. Dizemos que f é *não-degenerada* se:

$$f(a, x) = 0, \quad \forall x \in A \Rightarrow a = 0.$$

Uma aplicação $n : A \rightarrow F$ é dita uma *forma quadrática* se:

$$(i) \ n(\lambda x) = \lambda^2 n(x) \text{ onde } x \in A, \lambda \in F,$$

$$(ii) \text{ A função } f(x, y) = n(x + y) - n(x) - n(y) \text{ é uma forma bilinear em } A.$$

Dizemos que uma forma quadrática $n(x)$ é *estritamente não-degenerada* se a forma bilinear simétrica $f(x, y)$ associada a $n(x)$ é não degenerada, e dizemos que $n(x)$ é *não-degenerada* se:

$$n(a) = 0, \ f(a, x) = 0, \quad \forall x \in A \Rightarrow a = 0.$$

Lema 1.1. *Toda forma quadrática estritamente não-degenerada é não-degenerada e a recíproca é verdadeira se $\text{car } F \neq 2$.*

Prova. Seja $n(x)$ uma forma estritamente não-degenerada. Por definição a forma bilinear associada $f(x, y)$ é não-degenerada. Logo se $f(a, x) = 0$ para todo $x \in A$ então

com composição se:

- (i) $n(xy) = n(x)n(y)$, para todo $x, y \in A$,
- (ii) a forma $n(x)$ é estritamente não-degenerada,
- (iii) existe um elemento identidade 1 em A .

Proposição 1.1. *Seja $n(x)$ uma forma quadrática estritamente não-degenerada em um espaço vetorial de dimensão finita A . Então se $n(x)$ admite algum tipo de composição em A , $n(x)$ admite uma composição $x.y$ com respeito a qual A é uma álgebra com composição.*

Prova. Por hipótese a álgebra A com a multiplicação xy e a forma $n(x)$ satisfaz as condições (i) e (ii). Por (ii) existe $a \in A$ com $n(a) \neq 0$. Seja $u = \frac{a^2}{n(a)}$, então

$$n(u) = n\left(\frac{a^2}{n(a)}\right) = \frac{1}{n^2(a)} n(a^2) = \frac{n^2(a)}{n^2(a)} = 1.$$

Conseqüentemente $n(xu) = n(ux) = n(x)$ e daí,

$$f(xu, yu) = f(ux, uy) = f(x, y).$$

Consideremos agora as aplicações lineares $R_u : x \mapsto xu$ e $L_u : x \mapsto ux$. Se $R_u(x) = 0$, então $xu = 0$ e daí segue que $f(x, y) = f(xu, yu) = 0$, donde concluímos que $x = 0$. Analogamente se $L_u(x) = 0$, então $x = 0$. Portanto R_u e L_u são não-singulares e como $\dim A < \infty$ essas aplicações são invertíveis.

Vamos definir agora uma nova multiplicação em A dada por:

$$x.y = R_u^{-1}(x) L_u^{-1}(y).$$

Temos que

$$u^2.x = R_u^{-1}(u^2) L_u^{-1}(x) = u L_u^{-1}(x) = x$$

e

$$x.u^2 = R_u^{-1}(x) L_u^{-1}(u^2) = R_u^{-1}(x) u = x.$$

Isto é,

$$n(x) f(y, w) = f(xy, xw). \quad (1.2)$$

Analogamente, substituindo x por $x + z$ em (1.1) obtemos

$$n(y) f(x, z) = f(xy, zy).$$

Daí segue que

$$\begin{aligned} f(x, z) f(y, w) &= f(x, z) (n(y + w) - n(y) - n(w)) \\ &= f(x, z) n(y + w) - f(x, z) n(y) - f(x, z) n(w) \\ &= f(x(y + w), z(y + w)) - f(xy, zy) - f(xw, zw) \\ &= f(xy, zw) + f(xw, zy). \end{aligned}$$

Isto é,

$$f(x, z) f(y, w) = f(xy, zw) + f(xw, zy). \quad (1.3)$$

Fazendo $z = 1$ e $y = xu$ em (1.3) temos

$$f(x, 1) f(xu, w) = f(x(xu), w) + f(xw, xu). \quad (1.4)$$

Substituindo (1.2) em (1.4) obtemos

$$f(x(xu), w) + n(x) f(w, u) - f(x, 1) f(xu, w) = 0$$

o que é equivalente a

$$f(x(xu) + n(x)u - f(x, 1)xu, w) = 0.$$

E sendo a forma $f(x, y)$ não-degenerada e w arbitrário segue disto que

$$x(xu) + n(x)u - f(x, 1)xu = 0, \quad \forall x, y, u \in A. \quad (1.5)$$

a) $\overline{a+b} = f(1, a+b) - (a+b) = \bar{a} + \bar{b}.$

b) Dado $\lambda \in F$, $\overline{\lambda a} = f(1, \lambda a) - \lambda a = \lambda \bar{a}.$

c) $\bar{\bar{a}} = f(1, \bar{a}) - \bar{a} = f(1, f(1, a) - a) - f(1, a) + a = a.$

d) Sabemos que $\bar{a}\bar{b} = (f(1, a) - a)(f(1, b) - b)$. Mas da equação (1.6) temos que

$$(a+b)^2 + n(a+b) - f(a+b, 1)(a+b) = 0,$$

$$a^2 + n(a) - f(a, 1)a = 0,$$

$$b^2 + n(b) - f(b, 1)b = 0.$$

Subtraindo da primeira equação obtida as outras duas obtemos

$$ab + ba - f(1, a)b - f(1, b)a + f(a, b) = 0. \quad (1.7)$$

Fazendo $x = y = 1$, $z = a$, $w = b$ em (1.3) segue que

$$f(a, b) = f(1, a)f(1, b) - f(1, ab). \quad (1.8)$$

Assim,

$$ab + ba - f(1, a)b - f(1, b)a + f(1, a)f(1, b) - f(1, ab) = 0. \quad (1.9)$$

Isto é,

$$(f(1, a) - a)(f(1, b) - b) + ba - f(1, ab) = 0.$$

Logo $\bar{a}\bar{b} = f(1, ab) - ba$. Fazendo $x = y = 1$, $z = b$, $w = a$ em (1.3) segue que

$$f(a, b) = f(1, a)f(1, b) - f(1, ba).$$

Comparando com a equação (1.8) temos que $f(1, ab) = f(1, ba)$. Conseqüentemente $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$.

Se $\lambda \in F$, então $\bar{\lambda} = f(1, \lambda) - \lambda = \lambda f(1, 1) - \lambda = 2\lambda - \lambda = \lambda$. Finalmente, $t(a) = a + \bar{a} = f(1, a) \in F$ e por (1.6) $n(a) = a\bar{a} = f(1, a)a - a^2 \in F$. Também por (1.6) temos que

$$a^2 - t(a)a + n(a) = 0$$

Observemos que $\bar{t}s, t\bar{s} \in T \cap \bar{T}$ e, portanto, $T\bar{T} \subset T \cap \bar{T}$. De onde segue que

$$\lambda s = (t + \bar{t})s = ts$$

e

$$\mu t = t(s + \bar{s}) = ts.$$

Conseqüentemente $\lambda s = \mu t$ e $s = (\lambda^{-1}\mu)t$, isto é, o ideal T tem dimensão 1. Portanto T é isomorfo a F e daí temos que $A = F \oplus F$. ■

1.3 O processo de Cayley-Dickson

Seja A uma álgebra sobre um corpo F com elemento identidade 1 e com uma involução $a \mapsto \bar{a}$, onde para cada $a \in A$ os elementos $a + \bar{a}$ e $a\bar{a}$ pertencem a F . Vamos construir uma nova álgebra com involução que contém a álgebra A como uma subálgebra. Em adição, se a dimensão de A é m , então a dimensão da nova álgebra será $2m$.

Seja $\alpha \in F$ com $\alpha \neq 0$ e seja

$$(A, \alpha) = \{(a_1, a_2) \mid a_i \in A\}$$

munido das operações de adição componente a componente, multiplicação por escalar e a multiplicação dada por

$$(a_1, a_2)(a_3, a_4) = (a_1a_3 + \alpha a_4\bar{a}_2, \bar{a}_1a_4 + a_3a_2).$$

Como é fácil ver (A, α) é uma álgebra sobre F e o elemento $(1, 0)$ é o elemento identidade para a álgebra (A, α) . O conjunto

$$A' = \{(a, 0) \mid a \in A\}$$

corresponde à forma quadrática $n(x) = x\bar{x}$. Se $x = a_1 + va_2$ e $y = b_1 + vb_2$, então

$$f(x, y) = (a_1\bar{b}_1 + b_1\bar{a}_1) - \alpha(a_2\bar{b}_2 + b_2\bar{a}_2).$$

Suponhamos que $f(x, y) = 0$ para todo $y \in (A, \alpha)$. Tomando $y = b_1 \in A$, obtemos

$$f(a_1, b_1) = a_1\bar{b}_1 + b_1\bar{a}_1 = 0$$

para todo $b_1 \in A$. Como $n(a)$ é estritamente não-degenerada segue que $a_1 = 0$. Da mesma forma, tomando $y = vb_2$, como $\alpha \neq 0$ segue que $a_2 = 0$. Portanto $x = 0$ e isso significa que a forma $n(x)$ é estritamente não-degenerada em (A, α) . ■

Agora seja A uma álgebra com composição com forma quadrática $n(a)$. Pelo Lema 1.3, existe uma involução $a \mapsto \bar{a}$ em A tal que $n(a) = a\bar{a}$ e $t(a) = a + \bar{a}$ pertencem ao corpo F para todo elemento a em A . Isto significa que podemos aplicar o processo de Cayley-Dickson em A . Vamos então encontrar condições sob as quais a álgebra (A, α) obtida juntamente com a forma $n(x)$ é também uma álgebra com composição.

Lema 1.6. *Seja A é uma álgebra com composição. Então (A, α) é uma álgebra com composição se, e somente se, A é associativa.*

Prova. Como já foi visto acima a álgebra (A, α) tem um elemento identidade, $(1, 0)$. Pelo Lema 1.5 a forma quadrática $n(x)$ é estritamente não-degenerada em (A, α) . Então a álgebra (A, α) é uma álgebra com composição se, e somente se, a forma $n(x)$ admite composição. Dado $x = a_1 + va_2$ temos que

$$n(x) = n(a_1 + va_2) = n(a_1) - \alpha n(a_2).$$

Se $y = a_3 + va_4$, então

$$\begin{aligned} n(xy) - n(x)n(y) &= n(a_1a_3 + \alpha a_4\bar{a}_2) - \alpha n(\bar{a}_1a_4 + a_3a_2) \\ &\quad - [n(a_1) - \alpha n(a_2)][n(a_3) - \alpha n(a_4)] \\ &= \alpha f(a_1a_3, a_4\bar{a}_2) - \alpha f(\bar{a}_1a_4, a_3a_2) \end{aligned}$$

e o associador de X, U, Z é dado por

$$\begin{aligned}
 (II) \quad (U, X, Z) &= (UX)Z - U(XZ) \\
 &= (u, x, z) - \alpha [u(s\bar{y}) + (\bar{x}s)\bar{t} + (zy)\bar{t} - s(\bar{y}u) - s(\bar{t}\bar{x}) - (y\bar{t})z] \\
 &\quad - v[\bar{u}(\bar{x}s) + \bar{u}(zy) + (xz)t - (\bar{x}\bar{u})s - z(\bar{u}y) - z(xt) + \alpha[(s\bar{y})t - (t\bar{y})s]].
 \end{aligned}$$

Parte 1. Suponhamos que (A, α) é associativa. Como A é uma subálgebra de (A, α) , A é associativa. Tomando $t = x = z = 0$ e $s = 1$ em (II) segue que

$$0 = (U, X, Z) = \alpha(u\bar{y} - \bar{y}u).$$

Como $\alpha \neq 0$ temos que $u\bar{y} = \bar{y}u$ para todo $y, u \in A$. Isto é, A é comutativa. Se além disso (A, α) é comutativa, fazendo $u = x = 0$ e $t = 1$ em (I) temos

$$0 = [U, X] = \alpha(y - \bar{y}).$$

Como $\alpha \neq 0$ temos $y = \bar{y}$ para todo $y \in A$.

Parte 2. Suponhamos que A é associativa e comutativa. Nestas condições

$$(U, X, Z) = 0.$$

Logo (A, α) é associativa. Se além disso $y = \bar{y}$ para todo $y \in A$, então

$$[U, X] = 0,$$

o que nos diz que (A, α) é comutativa.

Das partes 1 e 2 segue que valem (i) e (ii). Para provarmos (iii) basta observar que

$$\overline{(U, X, Z)} = -(\bar{Z}, \bar{X}, \bar{U}).$$

Assim se provarmos que $(U, X, Z) = 0$ teremos que $\overline{(U, X, Z)} = 0$. Portanto nosso trabalho se reduz a provar apenas uma das leis alternativas. É claro que $(X, 1, Z) = 0$ para todo $X, Z \in (A, \alpha)$. Logo $(X, t(x)1, Z) = 0$ para todo $X, Z \in (A, \alpha)$. Assim

$$0 = (X, X + \bar{X}, Z) = (X, X, Z) + (X, \bar{X}, Z).$$

1.4.2 Tipo II - Álgebra dos números complexos generalizados.

Seja F um corpo arbitrário e seja $\mu \in F$ tal que $4\mu + 1 \neq 0$. Seja $K(\mu) = F + Fv_1$, onde $v_1^2 = v_1 + \mu$. Dado $a = \alpha + \beta v_1 \in K(\mu)$, $\overline{\alpha + \beta v_1} = (\alpha + \beta) - \beta v_1$ define uma involução e $n(a) = a\bar{a}$ define uma forma quadrática em $K(\mu)$.

Dados $x, y \in K(\mu)$ temos que

$$n(xy) = xy\overline{xy} = n(x)n(y).$$

Suponhamos que $x = \alpha + \beta v_1$. Seja $f(x, y)$ a forma bilinear associada a $n(x)$. Suponhamos que $f(x, y) = 0$ para todo $y \in K(\mu)$. Em particular se $y = 1$ temos

$$0 = f(x, 1) = x + \bar{x} = 2\alpha + \beta.$$

Se $\text{car } F = 2$ então $\beta = 0$ e logo $x = \alpha \in F$. Para $y = \alpha - \alpha v_1$ temos que

$$\begin{aligned} 0 &= f(\alpha, \alpha - \alpha v_1) = n(\alpha + \alpha - \alpha v_1) - n(\alpha) - n(\alpha - \alpha v_1) \\ &= n(-\alpha v_1) - n(\alpha) - n(\alpha - \alpha v_1). \end{aligned}$$

Donde segue que

$$-\alpha^2 - \alpha^2 v_1 = 0.$$

Assim $\alpha = 0$ e isso nos mostra que $x = 0$. Logo, neste caso, $n(x)$ é estritamente não-degenerada. Se $\text{car } F \neq 2$ então $x = \alpha - 2\alpha v_1$ e

$$0 = f(x, x) = 2n(x) = -2\alpha^2(4\mu + 1).$$

Como por hipótese $4\mu + 1 \neq 0$ temos que $\alpha = 0$. Logo, também neste caso, $n(x)$ é estritamente não-degenerada. Claramente $1 \in F$ é o elemento identidade de $K(\mu)$.

Portanto $K(\mu)$ é uma álgebra com composição.

Observemos que se o polinômio $x^2 - x - \mu$ é irredutível em $F[x]$ então a álgebra $K(\mu)$ é um corpo (uma extensão quadrática do corpo F), caso contrário $K(\mu) = F \oplus F$.

Logo, $n(\delta n - 1) = 0$ e $\alpha = m^2 + n^2\gamma - m$. Se $\delta = 0$ então $n = 0$ e $\alpha = m^2 - m$. Se $\delta \neq 0$ então $n = \delta^{-1}$ e $\alpha = m^2 + \delta^{-2}\gamma - m$. Em qualquer caso, $4\alpha + 1 = 1 \neq 0$.

Proposição 1.3. *Se a característica do corpo F não é 2, então o elemento $v = v_1 - \frac{1}{2}$ satisfaz $v^2 = \alpha$ onde $\alpha = \frac{1}{4}(4\mu + 1) \neq 0$ e neste caso $K(\mu) = (F, \alpha)$. Reciprocamente, se F é um corpo de característica diferente de 2, então a álgebra (F, α) é uma álgebra do tipo II.*

Prova. Se $\text{car } F \neq 2$, então

$$v^2 = v_1^2 - v_1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(4\mu + 1) \neq 0.$$

Tomando $\alpha = \frac{1}{4}(4\mu + 1)$ temos que, dados $a_1 + a_2v$ e $a_3 + a_4v \in K(\mu)$,

$$(a_1 + a_2v)(a_3 + a_4v) = a_1a_3 + a_2a_3v + a_1a_4v + a_2a_4v^2 = (a_1, a_2)(a_3, a_4).$$

Logo $K(\mu) = (F, \alpha)$ para $\alpha = \frac{1}{4}(4\mu + 1)$. Reciprocamente, tomando $v_1 = v + \frac{1}{2}$ temos que

$$v_1^2 = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \left(\frac{1}{2}, 1\right) = v_1 + \alpha - \frac{1}{4}.$$

Assim, se fizermos $\mu = \alpha - \frac{1}{4}$, então $4\mu + 1 = 4\alpha \neq 0$ e $v_1^2 = v_1 + \mu$. Além disso

$$\overline{\alpha + \beta v_1} = (\alpha + \beta) - \beta v_1.$$

Portanto (F, α) é uma álgebra do tipo II. ■

Seja $\bar{} : K(\mu) \rightarrow K(\mu)$ uma involução em $K(\mu)$. Como v_1 é raiz de $x^2 - x - \mu$, então $\overline{v_1}$ também é raiz desse polinômio e daí

$$x^2 - x - \mu = (x - v_1)(x - \overline{v_1})$$

donde segue que $v_1 + \overline{v_1} = 1$. Assim

$$\overline{\overline{v_1}} = 1 - v_1.$$

Isto é, a única involução diferente da identidade em $K(\mu)$ é dada por $\begin{cases} \bar{1} = 1 \\ \overline{v_1} = 1 - v_1 \end{cases}$.

B com respeito à forma $f(x, y)$. Isto é,

$$B^\perp = \{a \in A \mid f(a, b) = 0, \forall b \in B\}.$$

Lema 1.7. *Seja A uma álgebra com composição e seja B uma subálgebra de A que contém o elemento 1. Então $B^\perp B + B B^\perp \subseteq B^\perp$ e, além disso, para todo $a, b \in B$ e para todo $v \in B^\perp$ são válidas as seguintes identidades:*

$$\begin{cases} \bar{v} = -v, \\ av = v\bar{a}, \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\begin{cases} a(vb) = v(\bar{a}b), \\ (vb)a = v(ab), \end{cases} \quad (1.11)$$

$$(va)(vb) = -n(v)b\bar{a}. \quad (1.12)$$

Prova. Como $v \in B^\perp$ temos que

$$0 = f(v, 1) = v\bar{1} + 1\bar{v} = v + \bar{v}$$

e daí $\bar{v} = -v$. Pelo mesmo motivo

$$0 = f(v, a) = v\bar{a} + a\bar{v}$$

e portanto $v\bar{a} = -a\bar{v} = -a(-v) = av$ donde segue (1.10). Pela equação (1.3) temos que

$$f(a, vb) = f(a1, vb) = -f(ab, v) + f(a, v)f(1, b) = 0$$

e analogamente que $f(a, bv) = 0$. Mas por outro lado,

$$f(a, vb) = a\overline{vb} + v\bar{b}\bar{a}$$

e

$$f(a, bv) = a\overline{bv} + b\bar{v}\bar{a}.$$

Assim,

$$(va)(vb) = -v((\bar{a}v)b) - n(v)f(a,1)b.$$

Usando novamente (1.10),

$$(va)(vb) = -v((va)b) - n(v)f(a,1)b$$

ou ainda,

$$(va)(vb) = v(\bar{v}(ba)) - n(v)f(a,1)b.$$

Mas por (1.13) temos que

$$v(\bar{v}(ba)) = n(v)(ba).$$

Donde segue que

$$(va)(vb) = -n(v)\bar{ba}.$$

Completando a prova desse lema. ■

Lema 1.8. *Seja A uma álgebra sobre um corpo F de característica diferente de 2. Seja $f : A \times A \rightarrow F$ uma forma bilinear simétrica. Seja B uma subálgebra de dimensão finita da álgebra A na qual a restrição da forma bilinear f é não-degenerada. Então B possui uma base $\beta = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ tal que*

$$\begin{cases} f(b_i, b_i) \neq 0, \\ f(b_i, b_j) = 0, \forall i \neq j. \end{cases}$$

Prova. Vamos provar por indução sobre a dimensão de B .

Suponhamos que $\dim B = 1$. Se para todo $x \in B$ temos $f(x, x) = 0$, então $f(x, y) = 0$ para todo $x, y \in B$, e segue que f é degenerada. Logo existe $b_1 \in B$ tal que $f(b_1, b_1) \neq 0$ e como $\dim B = 1$, $\beta = \{b_1\}$ é uma base de B satisfazendo as condições do lema.

Como f é não-degenerada em B temos $x = 0$.

Portanto podemos aplicar a hipótese de indução em $\langle b_1 \rangle^\perp$. Logo existe uma base $\beta = \{b_2, b_3, \dots, b_n\}$ de $\langle b_1 \rangle^\perp$ tal que

$$\begin{cases} f(b_i, b_i) \neq 0, \\ f(b_i, b_j) = 0, \forall i \neq j. \end{cases}$$

Segue então que $\gamma = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ é uma base de B tal que

$$\begin{cases} f(b_i, b_i) \neq 0, \\ f(b_i, b_j) = 0, \forall i \neq j. \end{cases}$$

Concluindo este lema. ■

Lema 1.9. *Seja A uma álgebra com unidade e com forma quadrática admitindo composição e seja B uma subálgebra de dimensão finita da álgebra A na qual a restrição da forma bilinear f é não-degenerada. Então $A = B \oplus B^\perp$.*

Prova. Como B tem dimensão finita e $f|_B$ é não-degenerada, existe uma base $\beta = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ de B tal que

$$\begin{cases} f(b_i, b_i) \neq 0, \\ f(b_i, b_j) = 0, \forall i \neq j. \end{cases}$$

Se $x \in B \cap B^\perp$ então

$$f(x, y) = 0, \forall y \in B.$$

Mas isto acontece se, e somente se, $x = 0$ pois $f|_B$ é não-degenerada. Portanto

$$B \cap B^\perp = \{0\}.$$

Dado $a \in A$ podemos escrever

$$a = \sum_{i=1}^k \frac{f(a, b_i)}{f(b_i, b_i)} b_i + \left(a - \sum_{i=1}^k \frac{f(a, b_i)}{f(b_i, b_i)} b_i \right)$$

equação acima que f é não-degenerada em vB . Seja $B_1 = B \oplus vB$ e seja $x + vy \in B_1$ tal que $f(x + vy, a + vb) = 0$ para todo $a + vb \in B_1$. Em particular, $f(x + vy, a) = 0$ para todo $a \in B$, mas $f(x + vy, a) = f(x, a) + f(vy, a)$ e como $vB \subset B^\perp$ temos que $f(vy, a) = 0$ para todo $a \in B$. Assim $f(x, a) = 0$ para todo $a \in B$ e daí segue que $x = 0$. Portanto $x + vy = vy$. Temos também que $f(x + vy, vb) = f(vy, vb) = 0$ para todo $vb \in vB \subset B^\perp$ e com um raciocínio análogo ao caso anterior concluímos que $vy = 0$. Conseqüentemente $f|_{B_1}$ é não-degenerada. As relações (1.11) e (1.12) mostram que B_1 é a subálgebra de A obtida de B pelo processo de Cayley-Dickson, pois estas relações mostram que os produtos nessas duas álgebras coincidem. Isto é, $B_1 = (B, \alpha)$. Como $\bar{v} = -v$ e $\overline{a + vb} = \bar{a} - vb$, a involução induzida em B_1 pela involução de A coincide com a involução obtida pelo processo de Cayley-Dickson. Observemos que $\dim B_1 = 2 \dim B$. Portanto B_1 é uma subálgebra de A que satisfaz as mesmas condições de B e então podemos repetir o mesmo processo com a álgebra B_1 .

Vamos agora retornar a álgebra A e considerarmos dois casos separadamente.

1º caso. Suponhamos que F seja um corpo de característica diferente de 2. Neste caso a subálgebra F é não-degenerada com respeito a forma f e portanto podemos tomar $B = F$. Se $F \neq A$, então existe uma subálgebra B_1 do tipo II contida em A e pelo que já vimos B_1 é associativa e comutativa. Se $B_1 \neq A$, então existe uma subálgebra B_2 do tipo III contida em A que é associativa e alternativa. Finalmente, se $B_2 \neq A$, então A contém uma subálgebra B_3 do tipo IV que é alternativa e não é associativa. Com isso este processo deve terminar pois, caso contrário, existiria em A uma subálgebra B_4 que não é uma álgebra com composição, e isso é impossível. Conseqüentemente $A = B_3$.

2º caso. Suponhamos que F seja um corpo de característica 2. Neste caso, como já vimos, $A \neq F$. Suponhamos que $t(x) = f(1, x) = 0$ para todo $x \in A \setminus F$. Como $t(\alpha) = 2\alpha = 0$ para todo $\alpha \in F$, então $t(x) = f(1, x) = 0$ para todo $x \in A$, o que contradiz o fato da forma f ser não-degenerada. Logo existe $a \in A \setminus F$ tal

Prova. Já vimos que se n admite composição, então V é uma álgebra com composição e então pelo teorema anterior V é de um dos tipos I, II, III, IV. Vamos analisar cada caso.

(i) Se V é do tipo I, então V é um corpo e $\dim_F V = 1$. Além disso, $n(x) = x\bar{x} = x^2$ pois $\bar{x} = x$ para todo $x \in F$.

(ii) Se V é do tipo II, então $V = K(\mu)$. Portanto $\dim_F V = 2$ e $\{1, v_1\}$ é uma base para V onde $v_1^2 = v_1 + \mu$ e $4\mu + 1 \neq 0$. Além disso,

$$n(x) = x\bar{x} = (x_1 + x_2v_1)\overline{(x_1 + x_2v_1)},$$

e efetuando esse produto temos que

$$n(x) = x_1^2 + x_1x_2 - \mu x_2^2.$$

Se $\text{car } F \neq 2$, então consideremos a base $\{e_0, e_1\}$ de V onde $e_0 = 1$ e $e_1 = v_1 - \frac{1}{2}$. Temos que

$$e_1^2 = v_1^2 - v_1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(4\mu + 1) \neq 0.$$

Chamando $\alpha = \frac{1}{4}(4\mu + 1)$, temos

$$n(x) = x\bar{x} = (x_1 + x_2e_1)\overline{(x_1 + x_2e_1)},$$

donde segue que

$$n(x) = x_1^2 - \alpha x_2^2.$$

(iii) Se V é do tipo III, então $V = Q(\mu, \beta) = (K(\mu), \beta)$. Portanto $\dim_F V = 2 \dim_F K(\mu) = 4$. Se $x \in V$, então $x = a + v_2b$ onde $a = x_1 + x_2v_1 \in K(\mu)$ e $b = x_3 + x_4v_1 \in K(\mu)$. Assim $\{1, v_1, v_2, v_1v_2\}$ é uma base de V onde $v_2^2 = \beta$ com $\beta \neq 0$ (do processo de Cayley-Dickson). Como vimos anteriormente $n(x) = n(a) - \beta n(b)$. Portanto

$$n(x) = x_1^2 + x_1x_2 - \mu x_2^2 - \beta x_3^2 - \beta x_3x_4 + \beta \mu x_4^2.$$

que $e_1^2 = \mu \in F$. Vamos construir a tábua de multiplicação de V segundo esta base.

•	1	e_1
1	1	e_1
e_1	e_1	μ

Essa tábua coincide com a tábua de multiplicação da álgebra do tipo II na base para a qual $n(x) = x_1^2 + x_1x_2 - \mu x_2^2$. Portanto $n(x)$ admite composição em V .

(iii) Se $\dim_F V = 4$ e $n(x) = x_1^2 + x_1x_2 - \mu x_2^2 - \beta x_3^2 - \beta x_3x_4 + \beta\mu x_4^2$, então seja $\{1, e_1, e_2, e_3\}$ com a seguinte tábua de multiplicação:

•	e_1	e_2	e_3
e_1	μ	e_3	μe_2
e_2	$-e_3$	β	$-\beta e_1$
e_3	$-\mu e_2$	βe_1	$-\beta\mu$

Assim a tábua de multiplicação de V nesta base coincide com a tábua de multiplicação da álgebra do tipo II na qual $n(x) = x_1^2 + x_1x_2 - \mu x_2^2 - \beta x_3^2 - \beta x_3x_4 + \beta\mu x_4^2$. Portanto n admite composição em V .

(iv) Se $\dim_F V = 8$ e $n(x) = x_1^2 + x_1x_2 - \mu x_2^2 - \beta x_3^2 - \beta x_3x_4 + \beta\mu x_4^2$, então seja $\{1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ com a seguinte tábua de multiplicação:

•	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	μ	e_3	μe_2	e_5	μe_4	$-e_7$	$-\mu e_6$
e_2	$-e_3$	β	$-\beta e_1$	e_6	e_7	βe_4	βe_5
e_3	$-\mu e_2$	βe_1	$-\mu\beta$	e_7	μe_6	$-\beta e_5$	$-\beta\mu e_4$
e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	γ	$-\gamma e_1$	$-\gamma e_2$	$-\gamma e_3$
e_5	$-\mu e_4$	$-e_7$	$-\mu e_6$	γe_1	$-\mu\gamma$	γe_3	$\mu\gamma e_2$
e_6	e_7	$-\beta e_4$	βe_4	γe_2	$-\gamma e_3$	$-\beta\gamma$	$-\beta\gamma e_1$
e_7	μe_6	$-\beta e_5$	$\mu\beta e_4$	γe_3	$-\mu\gamma e_2$	$\beta\gamma e_1$	$\mu\beta\gamma$

e como $n(y) \neq 0$ segue que $n(1) = 1$.

Vamos mostrar que $n : A \rightarrow F$ é um monomorfismo de anéis. De fato, dados $x, y \in A$,

$$n(xy) = n(x)n(y)$$

e

$$n(x+y) - n(x) - n(y) = f(x, y) = 0,$$

o que nos mostra que n é um homomorfismo de anéis. Suponhamos que $x \in \ker n$. Então $n(x) = 0$ e, como $f(x, A) = 0$, temos que $x = 0$ e podemos concluir que n é injetora.

Logo, A é um anel associativo (A é isomorfo a um subanel de F) e também é um anel de integridade. De fato, se $xy = 0$ então $n(x)n(y) = n(xy) = 0$. Logo $n(x) = 0$ ou $n(y) = 0$ e, como n é injetora, $x = 0$ ou $y = 0$. Mais ainda, vamos mostrar em seguida que A é um corpo.

Se $\alpha \in F$ então $n(\alpha) = n(\alpha 1) = \alpha^2 n(1) = \alpha^2$. Se $x \in A$ então $n(x^2) = n(x)^2$ e $n(n(x)) = n(x)^2$. Como n é injetora temos que $n(x) = x^2$. Logo, se $x \in A$ e $x \neq 0$, temos $x(n(x)^{-1}x) = 1$ e então $n(x)^{-1}x$ é o inverso de x .

Portanto, A é um corpo. Como $x^2 = n(x) \in F$ para todo $x \in A$ e $\text{car } F = 2$, temos que A é uma extensão puramente inseparável de F . A dimensão de A sobre F é 2^t ou infinito. ■

Capítulo 2

Álgebras com Pseudo-Composição

2.1 Introdução

Seja F um corpo de característica diferente de 2 e 3 e seja A uma álgebra comutativa sobre F . Dizemos que A é uma *álgebra com pseudo-composição* se existe uma forma bilinear simétrica $\varphi \neq 0$ tal que

$$x^3 = \varphi(x, x)x, \forall x \in A. \quad (2.1)$$

A forma bilinear φ é obviamente única e a chamaremos de *norma* de A .

O objetivo deste capítulo é estudar álgebras com pseudo-composição sobre um corpo algebricamente fechado de característica diferente de 2 e 3. Tais álgebras necessariamente têm um idempotente e . O objetivo principal é a classificação das álgebras com pseudo-composição que não são do tipo quadrático. Mostraremos que essas álgebras podem ser construídas a partir das álgebras alternativas quadráticas com composição. Especificamente mostraremos:

Teorema 2.1. *Seja A uma álgebra com pseudo-composição com idempotente e sobre um corpo algebricamente fechado F de característica diferente de 2 e 3. Então $\text{Rad } \varphi$ é um ideal de A , e um dos seguintes casos acontece:*

Assim

$$2[(yz)x + (xz)y + (xy)z] = 2[\varphi(y, z)x + \varphi(x, z)y + \varphi(x, y)z],$$

isto é,

$$(yz)x + (xz)y + (xy)z = \varphi(y, z)x + \varphi(x, z)y + \varphi(x, y)z. \quad (2.2)$$

Em particular, fazendo $y = x$, $z = x$ e $x = y$ obtemos

$$x^2y + 2x(xy) = \varphi(x, x)y + 2\varphi(x, y)x. \quad (2.3)$$

Definimos o *radical de φ* pelo conjunto

$$\text{Rad } \varphi = \{x \in A \mid \varphi(x, y) = 0, \forall y \in A\}.$$

Proposição 2.1. *Qualquer ideal próprio de uma álgebra com pseudo-composição A está contido no radical de sua forma bilinear.*

Prova. Seja B um ideal próprio de A . Suponhamos que existe $y \in B$ tal que $y \notin \text{Rad } \varphi$.

Para todo $x, z \in A$ temos de (2.2) e (2.3) que

$$\varphi(x, y)x = \frac{1}{2} [x^2y + 2x(xy) - \varphi(x, x)y] \in B$$

e

$$\varphi(y, z)x + \varphi(x, y)z = (yz)x + (xz)y + (xy)z - \varphi(x, z)y \in B.$$

Se $\varphi(x, y) \neq 0$, então segue da primeira igualdade que $x \in B$. Se $\varphi(x, y) = 0$, como $y \notin \text{Rad } \varphi$ existe $z \in A$ tal que $\varphi(y, z) \neq 0$ e neste caso segue da segunda igualdade

Portanto, podemos escrever (#) como

$$\varphi(x^2, x^2)x^2 + 2\varphi(x, x^2)\varphi(x, x)x - \varphi(x, x)^2x^2 - 2\varphi(x, x^2)\varphi(x, x)x = 0,$$

isto é,

$$[\varphi(x^2, x^2) - \varphi(x, x)^2]x^2 = 0.$$

Suponhamos que $x \neq 0$. Se $x^2 \neq 0$, então $\varphi(x^2, x^2) = \varphi(x, x)^2$. Se $x^2 = 0$, então

$$0 = xx^2 = x^3 = \varphi(x, x)x.$$

Logo $\varphi(x, x) = 0$ e então $\varphi(x^2, x^2) = \varphi(x, x)$ pois $\varphi(x^2, x^2) = 0$. ■

Vamos linearizar a equação (2.4). Por um lado, temos

$$\begin{aligned} & \varphi((2x + y + z)^2, (2x + y + z)^2) - 2\varphi((x + y + z)^2, (x + y + z)^2) \\ & - \varphi((2x + y)^2, (2x + y)^2) - \varphi((2x + z)^2, (2x + z)^2) + \varphi((y + z)^2, (y + z)^2) \\ & - 2\varphi((x + z)^2, (x + z)^2) + 2\varphi((x + y)^2, (x + y)^2) + \varphi((2x)^2, (2x)^2) - 2\varphi(x^2, x^2) \\ & - \varphi(y^2, y^2) - \varphi(z^2, z^2) = 8[\varphi(x^2, yz) + 2\varphi(xy, xz)] \end{aligned}$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned} & \varphi(2x + y + z, 2x + y + z)^2 - 2\varphi(x + y + z, x + y + z)^2 - \varphi(2x + y, 2x + y)^2 \\ & - \varphi(2x + z, 2x + z)^2 + \varphi(y + z, y + z)^2 + 2\varphi(x + z, x + z)^2 + 2\varphi(x + y, x + y)^2 \\ & + \varphi(2x, 2x)^2 - 2\varphi(x, x)^2 - \varphi(y, y)^2 - \varphi(z, z)^2 = \\ & 8[\varphi(x, x)\varphi(y, z) + 2\varphi(x, y)\varphi(x, z)]. \end{aligned}$$

Assim

$$8[\varphi(x^2, yz) + 2\varphi(xy, xz)] = 8[\varphi(x, x)\varphi(y, z) + 2\varphi(x, y)\varphi(x, z)],$$

isto é,

$$\varphi(x^2, yz) + 2\varphi(xy, xz) = \varphi(x, x)\varphi(y, z) + 2\varphi(x, y)\varphi(x, z). \quad (2.5)$$

então

$$0 \neq \varphi(y, y)^2 = \varphi(y^2, y^2)$$

por (2.4) e logo $y^2 \neq 0$ pois φ é bilinear. Mas vimos na prova do Lema 2.1 que

$$y^2 y^2 + \varphi(y, y) y^2 = 2\varphi(y, y^2) y = 0.$$

Logo

$$y^2 y^2 = -\varphi(y, y) y^2 \neq 0$$

e isto significa que $y^2 y^2 \neq 0$ é um múltiplo escalar de y^2 . Seja

$$e = -\varphi(y, y)^{-1} y^2.$$

Temos então que

$$e^2 = \varphi(y, y)^{-2} y^2 y^2 = -\varphi(y, y)^{-1} y^2 = e,$$

isto é, e é um idempotente.

Se $\varphi(x, x^2) = 0$ implica que $\varphi(x, x) = 0$, então todo divisor primo de $\varphi(x, x^2)$ também divide $\varphi(x, x)$, mas como $\partial(\varphi(x, x)) \leq 2$ e $\partial(\varphi(x, x^2)) \leq 3$, temos que as únicas possibilidades são:

$$(I) \quad \begin{cases} \varphi(x, x) = \lambda(x) \mu(x) \\ \varphi(x, x^2) = \alpha \lambda(x) \mu(x)^2 \end{cases}$$

onde λ e μ são formas lineares primas entre si e $\alpha \in \overline{F}$, ou

$$(II) \quad \begin{cases} \varphi(x, x) = \lambda(x)^2 \\ \varphi(x, x^2) = \alpha \lambda(x)^3 \end{cases}$$

onde λ é uma forma linear e $\alpha \in \overline{F}$.

isto é,

$$(\gamma - 2\alpha) \lambda(x) \mu(x)^2 = -\beta \lambda(x)^2 \mu(x).$$

Se $\gamma - 2\alpha = 0$, então

$$\lambda(x)^2 \mu(x) = 0.$$

Logo

$$\lambda(x) = 0 \text{ ou } \mu(x) = 0$$

e então

$$\varphi(x, x) = 0, \quad \forall x \in A,$$

o que é um absurdo, pois $\varphi \neq 0$. Se $\gamma - 2\alpha \neq 0$, então $\mu(x) = k\lambda(x)$. Absurdo! Pois λ e μ são primos entre si.

$$(ii) \quad \gamma \lambda(x)^2 \mu(x) + \beta \lambda(x) \mu(x)^2 = 2\alpha \lambda(x) \mu(x)^2,$$

isto é,

$$(\beta - 2\alpha) \lambda(x) \mu(x)^2 = -\gamma \lambda(x)^2 \mu(x),$$

que como no caso (i), gera um absurdo.

$$(iii) \quad \gamma \lambda(x)^3 \mu(x) + \beta \lambda(x) \mu(x)^3 = 2\alpha \lambda(x) \mu(x)^2,$$

isto é,

$$\mu(x)^2 (\beta \mu(x) - 2\alpha \lambda(x)) = -\gamma \lambda(x)^3.$$

Segue daí que

$$\mu(x) = r\lambda(x) \text{ e } \mu(x) (\beta \mu(x) - 2\alpha \lambda(x)) = s\lambda(x)^2 \text{ (absurdo!)}$$

$$\text{ou } \mu(x)^2 = r\lambda(x)^2 \text{ e } \beta \mu(x) - 2\alpha \lambda(x) = s\lambda(x).$$

Seja $e \in \overline{F} \otimes A$ tal que $\lambda(e) = 1$. Observemos que $\lambda(e^2) = \lambda(e)\lambda(e) = 1$ e, além disso,

$$e^2 = e + y \text{ para algum } y \in N.$$

Mas de (2.1)

$$e^3 = \varphi(e, e)e = e$$

e, por outro lado,

$$e^3 = ee^2 = e(e + y) = e^2 + ey = e + y + ey.$$

Logo

$$e = e + y + ey$$

e segue que

$$ey = -y.$$

Seja

$$e_1 = e + \frac{1}{3}y.$$

Temos

$$\lambda(e_1) = \lambda\left(e + \frac{1}{3}y\right) = \lambda(e) + \frac{1}{3}\lambda(y) = \lambda(e) = 1$$

e

$$e_1^2 = e^2 + \frac{2}{3}ey + \frac{1}{9}y^2 = e + y - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}y^2 = e + \frac{1}{3}y + \frac{1}{9}y^2 = e_1 + \frac{1}{9}y^2.$$

Usando novamente (2.1) obtemos

$$e_1^3 = \varphi(e_1, e_1)e_1 = e_1.$$

Afirmção 2: $A = Fe \oplus S$.

É claro que $Fe \oplus S \subset A$. Basta mostrar então que $A \subset Fe \oplus S$. Se $a \in A$ então

$$a = \varphi(e, a)e + a - \varphi(e, a)e.$$

Como

$$\begin{aligned}\varphi(e, a - \varphi(e, a)e) &= \varphi(e, a) - \varphi(e, \varphi(e, a)e) = \\ \varphi(e, a) - \varphi(e, a)\varphi(e, e) &= \varphi(e, a) - \varphi(e, a) = 0,\end{aligned}$$

temos que $a = \alpha e + s$, onde $\alpha = \varphi(e, a) \in F$ e $s = a - \varphi(e, a)e \in S$. Portanto $A \subset Fe \oplus S$, o que prova a afirmação.

Fazendo $x = e$ em (2.6) temos

$$\varphi(e, ey) = \varphi(e, y).$$

Isto mostra que S é invariante por L_e .

Se $a \in A_\alpha$, então $ea = \alpha a$. Logo

$$\varphi(e, a) = \varphi(e, ea) = \varphi(e, \alpha a) = \alpha \varphi(e, a),$$

isto é,

$$(1 - \alpha) \varphi(e, a) = 0.$$

Se $\alpha \neq 1$, então $\varphi(e, a) = 0$ e segue que $a \in S$. Portanto

$$A_\alpha = \{z \in S \mid ez = \alpha z\} \quad (\alpha \neq 1)$$

e conseqüentemente $\varphi(e, A_\alpha) = 0$.

Parte 3: Vamos mostrar que $A = Fe \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_{-1}$.

Portanto, dado $x \in A$, podemos escrever

$$x = [a]_1 + [a]_{\frac{1}{2}} + [a]_{-1}$$

onde $[a]_\alpha$ é a componente de x em relação a A_α .

Parte 4: Sejam $\alpha, \beta \in \{\frac{1}{2}, -1\}$. Fazendo $x = e$, $y \in A_\alpha$ e $z \in A_\beta$ em (2.5) obtemos

$$\varphi(e^2, yz) + 2\varphi(ey, ez) = \varphi(e, e)\varphi(y, z) + \varphi(e, y)\varphi(e, z),$$

isto é,

$$\varphi(e, yz) = (1 - 2\alpha\beta)\varphi(y, z).$$

Mais ainda,

$$\varphi(yz - \varphi(e, yz)e, e) = \varphi(yz, e) - \varphi(\varphi(e, yz)e, e) = \varphi(yz, e) - \varphi(e, yz)\varphi(e, e) = 0$$

e logo

$$yz - \varphi(e, yz)e \in S. \quad (2.7)$$

Se $y, z \in A_{\frac{1}{2}}$ então

$$\begin{aligned} \varphi\left(yz - \frac{1}{2}\varphi(y, z)e, e\right) &= \varphi(yz, e) - \frac{1}{2}\varphi(y, z)\varphi(e, e) = \\ \left(1 - 2\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)\varphi(y, z) - \frac{1}{2}\varphi(y, z) &= \frac{1}{2}\varphi(y, z) - \frac{1}{2}\varphi(y, z) = 0. \end{aligned}$$

Logo

$$yz - \frac{1}{2}\varphi(y, z)e \in S, \quad \forall y, z \in A_{\frac{1}{2}}. \quad (2.8)$$

Se $y \in A_{\frac{1}{2}}$ e $z \in A_{-1}$, então

$$\begin{aligned} \varphi(yz - 2\varphi(y, z)e, e) &= \varphi(yz, e) - 2\varphi(y, z)\varphi(e, e) = \\ \left(1 - 2\frac{1}{2}(-1)\right)\varphi(y, z) - 2\varphi(y, z) &= 2\varphi(y, z) - 2\varphi(y, z) = 0. \end{aligned}$$

Portanto $v_{\frac{1}{2}} = 0$, $yz = [yz]_1 + v_{-1}$ e conseqüentemente

$$A_{\frac{1}{2}}^2 \subset eF \oplus A_{-1}.$$

Em particular,

$$yz - \frac{1}{2}\varphi(y, z)e = v_{-1} \in A_{-1}.$$

Se $y \in A_{\frac{1}{2}}$ e $z \in A_{-1}$, então de (2.9) segue que

$$yz = 2\varphi(y, z)e + v_{\frac{1}{2}} + v_{-1}$$

onde $v_{\frac{1}{2}} \in A_{\frac{1}{2}}$ e $v_{-1} \in A_{-1}$.

Fazendo $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = -1$ em (2.11) temos

$$\begin{aligned} 0 &= e(yz) - \frac{1}{2}yz - \varphi(y, z)e \\ &= e\left(2\varphi(y, z)e + v_{\frac{1}{2}} + v_{-1}\right) - \frac{1}{2}\left(2\varphi(y, z)e + v_{\frac{1}{2}} + v_{-1}\right) - \varphi(y, z)e \\ &= \frac{3}{2}v_{-1}. \end{aligned}$$

Portanto $v_{-1} = 0$ e logo

$$yz - 2\varphi(y, z)e = v_{\frac{1}{2}} \in A_{\frac{1}{2}}.$$

Observemos que

$$2z(z y) = 2z\left(2\varphi(y, z)e + v_{\frac{1}{2}}\right) = 4\varphi(y, z)ez + 2zv_{\frac{1}{2}}.$$

Mas, como $z \in A_{-1}$,

$$zv_{\frac{1}{2}} = 2\varphi\left(z, v_{\frac{1}{2}}\right)e + \frac{1}{2}w_{\frac{1}{2}}$$

onde $w_{\frac{1}{2}} \in A_{\frac{1}{2}}$. Logo

$$2z(z y) = -4\varphi(y, z)z + 4\varphi\left(z, v_{\frac{1}{2}}\right)e + w_{\frac{1}{2}}.$$

onde $v_{\frac{1}{2}} \in A_{\frac{1}{2}}$ e $v_{-1} \in A_{-1}$. Fazendo $\alpha = \beta = -1$ em (2.11) temos

$$\begin{aligned}
0 &= e(yz) - 2yz - \varphi(y, z)e \\
&= e\left(-\varphi(y, z)e + v_{\frac{1}{2}} + v_{-1}\right) - 2\left(-\varphi(y, z)e + v_{\frac{1}{2}} + v_{-1}\right) - \varphi(y, z)e \\
&= -\varphi(y, z)e + \frac{1}{2}v_{\frac{1}{2}} - v_{-1} + 2\varphi(y, z)e - 2v_{\frac{1}{2}} - 2v_{-1} - \varphi(y, z)e \\
&= \frac{3}{2}v_{\frac{1}{2}} - 3v_{-1} = \frac{1}{2}v_{\frac{1}{2}} - v_{-1}
\end{aligned}$$

Portanto $v_{\frac{1}{2}} = 0$, $v_{-1} = 0$ e logo

$$yz = -\varphi(y, z)e.$$

Segue então que

$$A_{-1}^2 \subset Fe.$$

o que conclui a prova desta proposição. ■

Suponhamos que e, f são idempotentes não nulos. Digamos que

$$f = \alpha e + a + b$$

onde $a \in A_{\frac{1}{2}}$ e $b \in A_{-1}$. Se $ef = 0$ então

$$ef = \alpha e + \frac{1}{2}a - b = 0$$

e logo $\alpha = 0$, $a = 0$, $b = 0$. Conseqüentemente $f = 0$ o que é um absurdo! Portanto $ef \neq 0$.

Suponhamos $\alpha = 0$, isto é, que $f = a + b$, isto é $[f]_1 = 0$. Então

$$f^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a_{-1} + \frac{1}{2}\varphi(a, a)e + 2ab - \varphi(b, b)e$$

Mas $f^2 = f = a + b$. Logo

$$\frac{1}{2}\varphi(a, a) = \varphi(b, b),$$

$$a_{-1} = b,$$

$$2ab = a.$$

Prova. Se $x \in A_{\frac{1}{2}}$ então $x^2 \in A_{-1} \oplus Fe$.

Se $[x^2]_{-1} = 0$, então $x^2 \in Fe$ e pela Proposição 2.2 (c) temos

$$x^2 = \frac{1}{2}\varphi(x, x)e.$$

Logo

$$x^3 = \frac{1}{2}\varphi(x, x)ex = \frac{1}{4}\varphi(x, x)x = \frac{1}{4}x^3$$

o que é um absurdo, se $x \neq 0$. Portanto

$$x^2 \neq 0 \Leftrightarrow [x^2]_{-1} \neq 0.$$

o que conclui a prova deste lema. ■

2.3 O caso quadrático

Seja A uma álgebra sobre um corpo F de dimensão maior que 1 e $e \neq 0$ um idempotente em A . Dizemos que A é do tipo *e-quadrático* se existem uma forma linear β e uma forma bilinear simétrica γ em A satisfazendo:

$$x^2 + \beta(x)x + \gamma(x, x)e = 0, \quad \forall x \in A. \quad (2.12)$$

As formas β e γ são necessariamente únicas e as chamamos de *e-traço* e *e-norma* de x em A respectivamente.

Proposição 2.3. *São equivalentes:*

(i) A é uma álgebra com pseudo-composição satisfazendo $A_{-1}(e) = 0$ (respectivamente $A_{\frac{1}{2}}(e) = 0$).

(ii) A é uma álgebra do tipo *e-quadrático*. cujo *e-traço* β e a *e-norma* γ satisfazem: $\gamma = 0, \beta \neq 0$ (respectivamente $\gamma(e, e) = -3, \beta(x) = -\frac{2}{3}\gamma(e, x)$).

isto é,

$$-\varphi(u, u)e = (\varphi(x, e)^2 - \varphi(x, x))e.$$

Então

$$\begin{aligned} x^2 + 2\varphi(x, e)x + (\varphi(x, x) - 4\varphi(x, e)^2)e = \\ \varphi(x, e)^2 e^2 + 2\varphi(x, e)eu + u^2 + 2\varphi(x, e)x + \varphi(x, x)e - 4\varphi(x, e)^2 e = \\ \varphi(x, e)^2 e - 2\varphi(x, e)u + \varphi(x, e)^2 e - \varphi(x, x)e + 2\varphi(x, e)^2 e + 2\varphi(x, e)u \\ + \varphi(x, x)e - 4\varphi(x, e)^2 e = 0. \end{aligned}$$

Logo A é do tipo e -quadrático e

$$\gamma(x, x) = \varphi(x, x) - 4\varphi(x, e)^2, \quad \beta(x) = 2\varphi(x, e)$$

e então,

$$\varphi(x, x) = \beta(x)^2 + \frac{1}{2}\beta(e)\gamma(x, x).$$

Linearizando $\gamma(x, x) = \varphi(x, x) - 4\varphi(x, e)^2$ temos

$$2\gamma(x, y) = 2\varphi(x, y) - 8\varphi(x, e)\varphi(y, e).$$

Em particular,

$$\gamma(e, e) = -3 \text{ e } \beta(x) = -\frac{2}{3}\gamma(e, x).$$

Vamos mostrar agora que $(ii) \Rightarrow (i)$.

1º caso: Se $x^2 = -\beta(x)x$ para todo $x \in A$ e $\beta \neq 0$, então tomando

$$\varphi(x, x) = \beta(x)^2$$

temos

$$x^3 = -\beta(x)x^2 = \beta(x)\beta(x)x = \beta(x)^2x = \varphi(x, x)x.$$

e logo

$$x = -\frac{4}{9}\gamma(e, x)e.$$

Neste caso, $x \in Fe \cap A_{\frac{1}{2}}$ e segue então que $x = 0$. Portanto $A_{\frac{1}{2}} = 0$.

De (2.12) segue que dado $x \in A$

$$\begin{aligned} x^3 &= -\beta(x)x^2 - \gamma(x, x)xe \\ &= -\beta(x)(-\beta(x)x - \gamma(x, x)e) - \gamma(x, x)xe \\ &= \beta(x)^2x + \beta(x)\gamma(x, x)e - \gamma(x, x)xe \\ &= \frac{4}{9}\gamma(e, x)^2x - \frac{2}{3}\gamma(e, x)\gamma(x, x)e - \gamma(x, x)ex \\ &= \frac{4}{9}\gamma(e, x)^2x - \gamma(x, x)\left(\frac{2}{3}\gamma(e, x)e + ex\right) \\ &= \frac{4}{9}\gamma(e, x)^2x - \gamma(x, x)\left(\frac{2}{3}\gamma(e, x)e - \frac{2}{3}\gamma(e, x)e - x\right) \\ &= \left(\frac{4}{9}\gamma(e, x)^2 + \gamma(x, x)\right)x. \end{aligned}$$

Portanto basta tomar

$$\varphi(x, x) = \frac{4}{9}\gamma(e, x)^2 + \gamma(x, x) = \beta(x)^2 + \frac{1}{2}\beta(e)\gamma(x, x)$$

que obviamente φ é bilinear simétrica e $x^3 = \varphi(x, x)x$.

Suponhamos agora que A é uma álgebra com pseudo-composição do tipo e -quadrático com forma bilinear

$$\varphi(x, x) = \beta(x)^2 + \frac{1}{2}\beta(e)\gamma(x, x).$$

Temos então que

$$\left(\beta(x)^2 + \frac{1}{2}\beta(e)\gamma(x, x)\right)x = \varphi(x, x)x = x^3 = x^2x = (-\beta(x)^2x - \gamma(x, x)e)x.$$

Logo, por (2.14)

$$\begin{aligned} \beta(x)^2x + \frac{1}{2}\beta(e)\gamma(x, x)x &= -\beta(x)(-\beta(x)x - \gamma(x, x)e) - \gamma(x, x)xe \\ &= \beta(x)^2x + \beta(x)\gamma(x, x)e - \gamma(x, x)\left(-\frac{2}{3}\gamma(e, x)e - x\right), \end{aligned}$$

Usando a caracterização dada pela Proposição 2.3, vamos mostrar que $\text{Rad } \varphi$ é um ideal das álgebras com pseudo-composição do tipo e -quadrático. Se $x, y \in \text{Rad } \varphi$, então $x + y \in \text{Rad } \varphi$ pois

$$\varphi(x + y, z) = \varphi(x, z) + \varphi(y, z) = 0, \quad \forall z \in A.$$

Sejam $a \in A$ e $y \in \text{Rad } \varphi$. Quero mostrar que para todo $x \in A$, vale $\varphi(ay, x) = 0$. Aplicando φ em (2.14) segue que

$$-2\varphi(ay, x) = \beta(y)\varphi(a, x) + \beta(a)\varphi(y, x) + 2\gamma(y, a)\varphi(e, x).$$

Mas da Proposição 2.3, $\gamma = 0$ ou $\gamma(x, y) = \varphi(y, x) - 4\varphi(x, e)\varphi(y, e) = 0$. Assim

$$0 = \varphi(y, y) = \beta(y)^2 + \frac{1}{2}\beta(e)\gamma(y, y),$$

isto é, $\beta(y) = 0$. Logo $\varphi(ay, x) = 0$.

Afirmamos também que $\text{Rad } \varphi$ é nilpotente. Mais precisamente, vamos mostrar que $(\text{Rad } \varphi)^2 = 0$. Linearizando (2.13) obtemos

$$2\varphi(x, y) = 2\beta(x)\beta(y) + \beta(e)\gamma(x, y).$$

Se $y \in \text{Rad } \varphi$ então

$$2\beta(x)\beta(y) + \beta(e)\gamma(x, y) = 0.$$

Se $\gamma = 0$ e $\beta \neq 0$ então $\beta(x)\beta(y) = 0$ para todo $x \in A$ e temos que $\beta(y) = 0$. Logo, por (2.12), $y^2 = 0$. Se $\gamma(e, e) = -3$ e $\beta(x) = -\frac{2}{3}\gamma(e, x)$ temos

$$2\beta(e)\beta(y) + \beta(e)\gamma(e, y) = 0$$

e segue que $\gamma(e, y) = 0$ e $\beta(y) = 0$. Logo, $\gamma(y, y) = 0$ e por (2.12) $y^2 = 0$. Portanto, em qualquer caso, se $y \in \text{Rad } \varphi$ temos que $y^2 = 0$ e isto implica que $(\text{Rad } \varphi)^2 = 0$.

e logo

$$v_{\frac{1}{2}} + v_{-1} \in \text{Rad } \varphi.$$

Portanto $x = \alpha e + v$ onde $\alpha \in F$ e $v \in \text{Rad } \varphi$. Logo $A \subset Fe \oplus \text{Rad } \varphi$. Mas, por definição, $Fe \oplus \text{Rad } \varphi \subset A$. Conseqüentemente

$$A = Fe \oplus \text{Rad } \varphi.$$

Se $x \in \text{Rad } \varphi$, então $\varphi(x, x) = 0$ e daí

$$x^3 = \varphi(x, x)x = 0.$$

Vamos mostrar agora que $\text{Rad } \varphi$ é um ideal de A . Seja $y \in \text{Rad } \varphi$, suponhamos que $y = \alpha e + y_{\frac{1}{2}} + y_{-1}$. Temos então que

$$0 = \varphi(y, e) = \varphi(\alpha e + y_{\frac{1}{2}} + y_{-1}, e) = \alpha \varphi(e, e) + \varphi(y_{\frac{1}{2}}, e) + \varphi(y_{-1}, e) = \alpha$$

e logo

$$y = y_{\frac{1}{2}} + y_{-1}.$$

Dado $x = \alpha e + x_{\frac{1}{2}} + x_{-1} \in A$

$$\begin{aligned} xy &= (\alpha e + x_{\frac{1}{2}} + x_{-1})(y_{\frac{1}{2}} + y_{-1}) \\ &= \alpha y_{\frac{1}{2}}e + \alpha y_{-1}e + x_{\frac{1}{2}}y_{\frac{1}{2}} + x_{\frac{1}{2}}y_{-1} + x_{-1}y_{\frac{1}{2}} + x_{-1}y_{-1}. \end{aligned}$$

Mas da Proposição 2.2 segue que

$$x_{\frac{1}{2}}y_{\frac{1}{2}} = v_{-1} + \frac{1}{2}\varphi(x_{\frac{1}{2}}, y_{\frac{1}{2}})e = v_{-1},$$

$$x_{\frac{1}{2}}y_{-1} = v_{\frac{1}{2}},$$

$$x_{-1}y_{\frac{1}{2}} = u_{\frac{1}{2}},$$

$$x_{-1}y_{-1} = -\varphi(x_{-1}, y_{-1})e = 0,$$

Mas

$$\begin{aligned}c\left(\frac{x+cx}{2}\right) &= \frac{cx+c(cx)}{2} = \frac{cx+x}{2}, \\c\left(\frac{x-cx}{2}\right) &= \frac{cx-c(cx)}{2} = \frac{cx-x}{2} = -\left(\frac{x-cx}{2}\right).\end{aligned}$$

Portanto $x = u + v$ onde

$$u = \frac{x+cx}{2} \in U \text{ e } v = \frac{x-cx}{2} \in V,$$

e temos que

$$A_{\frac{1}{2}} \subset U \oplus V.$$

Mas, por definição, $U \oplus V \subset A_{\frac{1}{2}}$. Logo

$$A_{\frac{1}{2}} = U \oplus V.$$

Se

$$e' = -\frac{1}{2}e + \frac{3}{4}c$$

e

$$e'' = -\frac{1}{2}e - \frac{3}{4}c$$

então

$$\begin{aligned}(e')^2 &= \left(-\frac{1}{2}e + \frac{3}{4}c\right)^2 = \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4}ce + \frac{9}{16}c^2 = \frac{1}{4}e + \frac{3}{4}c - \frac{3}{4}e \\&= -\frac{1}{2}e + \frac{3}{4}c = e'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(e'')^2 &= \left(-\frac{1}{2}e - \frac{3}{4}c\right)^2 = \frac{1}{4}e^2 + \frac{3}{4}ce + \frac{9}{16}c^2 = \frac{1}{4}e - \frac{3}{4}c - \frac{3}{4}e \\&= -\frac{1}{2}e - \frac{3}{4}c = e''\end{aligned}$$

(c) Para $u \in U$, $v \in V$ e $z \in Z$,

$$\begin{aligned} u(uv) &= \frac{3}{4}\varphi(u, u)v, \\ v(vu) &= \frac{3}{4}\varphi(v, v)u, \\ u(uz) &= \frac{3}{4}\varphi(u, u)z, \\ v(vz) &= \frac{3}{4}\varphi(v, v)z. \end{aligned}$$

Prova. Pela Proposição 2.2 (b) temos que

$$\varphi\left(A_{\frac{1}{2}}(e'), A_{-1}(e')\right) = 0, \quad \varphi\left(A_{\frac{1}{2}}(e''), A_{-1}(e'')\right) = 0.$$

Logo pelo que vimos acima $\varphi(U, V) = 0$, $\varphi(V, Z) = 0$, $\varphi(U, Z) = 0$.

Se $x \in A_{-1}$, então

$$x = \frac{3}{4}\varphi(x, c)c - \frac{3}{4}\varphi(x, c)c + x.$$

Observemos que

$$\varphi\left(-\frac{3}{4}\varphi(x, c)c + x, c\right) = -\frac{3}{4}\varphi(x, c)\varphi(c, c) + \varphi(x, c) = -\varphi(x, c) + \varphi(x, c) = 0.$$

Logo

$$-\frac{3}{4}\varphi(x, c)c + x \in Z$$

e então

$$x \in Fc \oplus Z.$$

Conseqüentemente

$$A_{-1} = Fc \oplus Z.$$

Também da Proposição 2.2 (a) temos que $A = Fe \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_{-1}$. Logo

$$A = Fe \oplus Fc \oplus U \oplus V \oplus Z$$

e pela Proposição 2.2 (d)

$$z(zu) = \frac{3}{4}\varphi(z, z)u.$$

Linearizando esta equação temos

$$z(cu) + c(zu) = \frac{3}{2}\varphi(z, c)u = 0$$

e então

$$-z(cu) = c(zu).$$

Como $cu = u$ segue que $c(zu) = -zu$, isto é, $zu \in V$. Logo

$$UZ \subset V.$$

Da mesma forma, se $v \in V$ e $z \in Z$, então

$$vz \in A_{-1}(e') A_{\frac{1}{2}}(e') \subset A_{\frac{1}{2}}(e')$$

e temos que

$$-z(cv) = c(zv).$$

Mas $cv = -v$. Logo $c(zv) = zv$, isto é $zv \in U$. Portanto

$$VZ \subset U.$$

Vamos agora provar o item (c). Como $u \in U \subset A_{\frac{1}{2}}(e')$ e $v \in V \subset A_{-1}(e')$, segue da Proposição 2.2 (d) que

$$v(vu) = \frac{3}{4}\varphi(v, v)u.$$

Também $u \in U \subset A_{-1}(e'')$ e $v \in V \subset A_{\frac{1}{2}}(e'')$ implica que

$$u(uv) = \frac{3}{4}\varphi(u, u)v.$$

Mas de (2.6) segue que

$$\varphi(u^2, ze') + \varphi(ue', uz) = \varphi(u, u) \varphi(e', z) + 2\varphi(u, e') \varphi(u, z).$$

Logo

$$\frac{1}{2}\varphi(u^2, z) + \frac{1}{2}\varphi(u, uz) = 0,$$

isto é,

$$\varphi(u^2, z) = -\varphi(u, uz).$$

Do ítem anterior, $uz \in V \subset A_{-1}(e')$ e, pela Proposição 2.2 (c),

$$\varphi(u, uz) = 0.$$

Portanto

$$u(uz) = \frac{3}{4}\varphi(u, u)z.$$

Analogamente, fazendo $x = v \in V$ temos $\varphi(v^2, z) = 0$. Portanto

$$v(vz) = \frac{3}{4}\varphi(v, v)z.$$

Completando a prova desta proposição. ■

Como U, V, Z estão contidos em um (-1) -espaço de e'', e', e respectivamente, temos pela Proposição 2.2 (d) a seguinte regra de multiplicação:

$$\begin{cases} uu' = \varphi(u, u')\left(\frac{1}{2}e + \frac{3}{4}c\right) \\ vv' = \varphi(v, v')\left(\frac{1}{2}e - \frac{3}{4}c\right) \\ zz' = -\varphi(z, z')e \end{cases} \quad (2.16)$$

para $u, u' \in U, v, v' \in V, z, z' \in Z$.

Vamos também precisar de algumas propriedades de φ derivada da fórmula de pseudo-composição (2.6).

ou ainda

$$\varphi(v, v) \varphi(u, u) \varphi\left(\frac{1}{2}e + \frac{3}{4}c, \frac{1}{2}e + \frac{3}{4}c\right) + 2\varphi(uv, uv) = \varphi(v, v) \varphi(u, u).$$

Logo

$$\varphi(uv, uv) = \frac{3}{4}\varphi(v, v) \varphi(u, u). \quad (2.19)$$

2.5 Quando φ é zero em $A_{\frac{1}{2}}$ ou em Z

Para nosso principal resultado precisaremos de elementos em U e Z com norma não nula. Se não existir tais elementos, φ é zero em $A_{\frac{1}{2}}$ ou em Z . Nestes casos, vamos ver nesta seção que $N := \text{Rad } \varphi$ é um ideal de A e que A/N é do tipo quadrático.

Proposição 2.5. *Seja A uma álgebra com pseudo-composição com forma bilinear φ . São válidas as seguintes afirmações:*

(a) $N = \text{Rad } \varphi$ é sempre uma subálgebra de A e contém as $(\frac{1}{2})$ -componentes e as (-1) -componentes de todos os seus elementos.

(b) Se $\varphi(A_{\frac{1}{2}}, A_{\frac{1}{2}}) = 0$ ou $\varphi(Z, Z) = 0$, então N é um ideal de A e A/N é do tipo e-quadrático.

Prova. Vamos provar (a).

Como para todo $n \in N$, $\varphi(n, e) = 0$, temos que $N \subset A_{\frac{1}{2}} \oplus A_{-1}$.

Escrevendo

$$n = n_{\frac{1}{2}} + n_{-1}$$

obtemos da Proposição 2.2 (b) que se

$$x = x_{\frac{1}{2}} + x_{-1} + \alpha e \in A$$

então

$$0 = \varphi(n, x_{\frac{1}{2}}) = \varphi(n_{\frac{1}{2}} + n_{-1}, x_{\frac{1}{2}}) = \varphi(n_{\frac{1}{2}}, x_{\frac{1}{2}}) + \varphi(n_{-1}, x_{\frac{1}{2}}),$$

Vamos agora provar o ítem (b).

Afirmção 1: $A_{\frac{1}{2}}(e') = U \oplus Z$ e $A_{\frac{1}{2}}(e'') = V \oplus Z$.

De fato, dado $a \in A_{\frac{1}{2}}(e')$ podemos escrever a na forma

$$a = \alpha e + \beta c + u + v + z,$$

onde $\alpha, \beta \in F, u \in U, v \in V, z \in Z$, e temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a &= e'a = \alpha ee' + \beta ce' + ue' + ve' + ze' \\ &= -\frac{1}{2}\alpha e - \frac{3}{4}\alpha c + \frac{1}{2}\beta c - \beta e + \frac{1}{2}u - v + \frac{1}{2}z \\ &= \left(-\frac{1}{2}\alpha - \beta\right)e + \left(-\frac{3}{4}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right)c + \frac{1}{2}u - v + \frac{1}{2}z. \end{aligned}$$

Segue daí que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\alpha - \beta &= \frac{1}{2}\alpha, \\ -\frac{3}{4}\alpha + \frac{1}{2}\beta &= \frac{1}{2}\beta, \\ \frac{1}{2}u &= \frac{1}{2}u, \\ -v &= \frac{1}{2}v, \\ \frac{1}{2}z &= \frac{1}{2}z. \end{aligned}$$

Logo, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $v = 0$ e então $a = u + z$. Portanto

$$A_{\frac{1}{2}}(e') \subset U \oplus Z.$$

Mas $U \oplus Z \subset A_{\frac{1}{2}}(e')$ por definição. Logo

$$A_{\frac{1}{2}}(e') = U \oplus Z.$$

Dado $a \in A_{\frac{1}{2}}(e'')$ podemos escrever a na forma

$$a = \alpha e + \beta c + u + v + z,$$

Da Afirmação 1 temos que

$$\begin{aligned}\varphi\left(A_{\frac{1}{2}}(e'), A_{\frac{1}{2}}(e')\right) &= 0, \\ \varphi\left(A_{\frac{1}{2}}(e''), A_{\frac{1}{2}}(e'')\right) &= 0.\end{aligned}$$

Logo o caso $\varphi(Z, Z) = 0$ se reduz ao caso $\varphi\left(A_{\frac{1}{2}}, A_{\frac{1}{2}}\right) = 0$ depois de trocado por outro idempotente.

É suficiente mostrar então que N é um ideal quando $\varphi\left(A_{\frac{1}{2}}, A_{\frac{1}{2}}\right) = 0$.

Definimos

$$\begin{aligned}N_\lambda &= \{y \in A_\lambda \mid \varphi(y, x) = 0, \forall x \in A\} \\ &= \{y \in A_\lambda \mid \varphi(y, x) = 0, \forall x \in A_\lambda\}.\end{aligned}$$

Afirmação 2: $\text{Rad } \varphi = N_{\frac{1}{2}} \oplus N_{-1}$

De fato, $N_{\frac{1}{2}}, N_{-1} \subset \text{Rad } \varphi$ por definição. Portanto, basta mostrar que $\text{Rad } \varphi \subset N_{\frac{1}{2}} \oplus N_{-1}$. Mas isto é óbvio, pois, dado $x \in \text{Rad } \varphi$,

$$x = x_{\frac{1}{2}} + x_{-1},$$

onde $x_{\frac{1}{2}} \in A_{\frac{1}{2}}$ e $x_{-1} \in A_{-1}$, e temos pelo item (a) que $x_{\frac{1}{2}}, x_{-1} \in \text{Rad } \varphi$. Logo, $x_{\frac{1}{2}} \in N_{\frac{1}{2}}$, $x_{-1} \in N_{-1}$ e então $x \in N_{\frac{1}{2}} \oplus N_{-1}$, o que completa a prova da afirmação.

Se $\varphi\left(A_{\frac{1}{2}}, A_{\frac{1}{2}}\right) = 0$ então

$$A_{\frac{1}{2}} = N_{\frac{1}{2}} \subset N.$$

Da Proposição 2.2 (c) temos que

$$\begin{aligned}A_{-1}N_{\frac{1}{2}} &\subset A_{\frac{1}{2}} \subset N, \\ A_{-1}N_{-1} &\subset \varphi(A_{-1}, N_{-1})e = 0.\end{aligned}$$

Logo, $A_{-1}N \subset N$. Além disso,

$$A_{\frac{1}{2}}N_{-1} \subset A_{\frac{1}{2}} \subset N.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} ea &= e\left(a_{\frac{1}{2}} + a_{-1} + N\right) \\ &= \frac{1}{2}a_{\frac{1}{2}} - a_{-1} + N. \end{aligned}$$

Logo

$$ea - \frac{1}{2}a + a_{-1} \in N$$

e então $a_{-1} \in N$. Mas $a_{\frac{1}{2}} \in N$, por hipótese, logo $a \in N$. Conseqüentemente A/N não tem $(\frac{1}{2})$ -espaços.

Afirmção 3: A/N é uma álgebra com pseudo-composição, se considerarmos a aplicação

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} : A/N \times A/N &\rightarrow F \\ (x + N, x + N) &\mapsto \varphi(x, x) \end{aligned}$$

A aplicação $\bar{\varphi}$ está bem definida pois se $y + N = x + N$ então $x - y \in N$. Daí

$$0 = \varphi(x - y, x + y) = \varphi(x, x) - \varphi(y, y),$$

isto é,

$$\varphi(x, x) = \varphi(y, y).$$

Logo

$$\bar{\varphi}(x + N, x + N) = \bar{\varphi}(y + N, y + N).$$

Dado $x + N \in A/N$

$$\begin{aligned} (x + N)^3 &= x^3 + N \\ &= \varphi(x, x)x + N \\ &= \varphi(x, x)(x + N) \\ &= \bar{\varphi}(x + N, x + N)(x + N). \end{aligned}$$

Para ver que $L_a : V \rightarrow Z$ é um isomorfismo, basta notar que estas funções são inversas uma da outra. ■

Em particular, $\dim V = \dim Z$, $Z = aV$ e $V = aZ$.

Da mesma forma, $\varphi(Z, Z) \neq 0$ implica na existência de $z \in Z$ tal que $\varphi(z, z) = \frac{4}{3}$ e $L_z : U \rightarrow V$ gera um isomorfismo entre U e V .

Para $u, u' \in U$ definimos a operação " $\star$ " por

$$u' \star u = [u'(a(zu))]z. \quad (2.21)$$

Usando a Proposição 2.4 (b) é imediato que $U \star U \subset U$ pois

$$zu \in V \Rightarrow a(zu) \in Z \Rightarrow u'(a(zu)) \in V \Rightarrow [u'(a(zu))]z \in U.$$

Uma boa propriedade de $(U, \star)$ é dada no lema abaixo.

Lema 2.4. Se $\lambda = \frac{3}{4}\varphi$, então $\lambda(u' \star u, u' \star u) = \lambda(u', u')\lambda(u, u)$.

Prova. De (2.18) e (2.19) segue que

$$\begin{aligned} \lambda(u' \star u, u' \star u) &= \frac{3}{4}\varphi([u'(a(zu))]z, [u'(a(zu))]z) \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^2 \varphi(u'(a(zu)), u'(a(zu)))\varphi(z, z) \\ &= \frac{3}{4}\varphi(u'(a(zu)), u'(a(zu))) \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^2 \varphi(a(zu), a(zu))\varphi(u', u') \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^3 \varphi(u', u')[\varphi(a, a)\varphi(zu, zu)] \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^2 \varphi(u', u')\varphi(zu, zu) \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^3 \varphi(u', u')[\varphi(z, z)\varphi(u, u)] \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^2 \varphi(u', u')\varphi(u, u) \\ &= \lambda(u', u')\lambda(u, u). \end{aligned}$$

o que diz que $(U, \star)$ é uma álgebra quadrática.

Afirmção: $u \mapsto \bar{u} = 2\lambda(u, a)a - u$ é uma conjugação em U .

De fato, dados $u, u' \in U$ e $\alpha \in F$ temos:

$$\begin{aligned}\overline{u + u'} &= 2\lambda(u + u', a)a - (u + u') \\ &= 2\lambda(u, a)a + 2\lambda(u', a)a - u - u' \\ &= 2\lambda(u, a)a - u + 2\lambda(u', a)a - u' \\ &= \bar{u} + \bar{u'},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\alpha u} &= 2\lambda(\alpha u, a)a - \alpha u \\ &= 2\alpha\lambda(u, a)a - \alpha u \\ &= \alpha(2\lambda(u, a)a - u) \\ &= \alpha\bar{u},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\bar{u}} &= \overline{2\lambda(u, a)a - u} \\ &= 2\lambda(u, a)\bar{a} - \bar{u} \\ &= 2\lambda(u, a)a - 2\lambda(u, a)a + u = u.\end{aligned}$$

Resta então mostrarmos que esta função é um anti-isomorfismo.

Linearizando u' no Lema 2.4 e tomando a como a nova variável temos

$$2\lambda(a \star u, u' \star u) = 2\lambda(a, u')\lambda(u, u)$$

e logo

$$\lambda(u, u' \star u) = \lambda(a, u')\lambda(u, u).$$

E fazendo a mesma coisa com u nesta última identidade temos

$$\lambda(u' \star u, a) + \lambda(u', u) = 2\lambda(a, u')\lambda(a, u).$$

Usando estas duas últimas identidades e (2.22) temos

$$\begin{aligned}
u \star (u \star u') &= u \star [u(a(zu'))]z \\
&= [u(a(z[u(a(zu'))]z))]z \\
&= [u(a[u(a(zu'))])]z \\
&= -[u(a[a(u(zu'))])]z + \frac{3}{2}\varphi(u, a)[u(a(zu'))]z \\
&= -[u(u(zu'))]z + \frac{3}{2}\varphi(u, a)(u \star u') \\
&= -\frac{3}{4}\varphi(u, u)(zu')z + \frac{3}{2}\varphi(u, a)(u \star u') \\
&= -\frac{3}{4}\varphi(u, u)u' + \frac{3}{2}\varphi(u, a)(u \star u') \\
&= \left[-\frac{3}{4}\varphi(u, u)a + \frac{3}{2}\varphi(u, a)u\right] \star u' \\
&= (u \star u) \star u'.
\end{aligned}$$

Para provarmos a lei alternativa à direita, basta lembrar que a conjugação é anti-comutativa e usar a lei alternativa à esquerda. De fato,

$$(u' \star u) \star u = \overline{\overline{u} \star (u' \star u)} = \overline{(\overline{u} \star \overline{u}) \star \overline{u'}} = \overline{\overline{u'}} \star \overline{(\overline{u} \star \overline{u})} = u' \star (u \star u).$$

Portanto $(U, \star)$ é uma álgebra alternativa quadrática. ■

Lema 2.6. *Dado $u \in U$ qualquer*

$$\varphi(a(zu), z) = \varphi(a, u).$$

Prova. Fazendo $y = e$ em (2.5) temos

$$\varphi(x^2, ez) + 2\varphi(xe, xz) = \varphi(x, x)\varphi(e, z) + 2\varphi(x, e)\varphi(x, z),$$

isto é,

$$-\varphi(x^2, z) + 2\varphi(xe, xz) = 2\varphi(x, e)\varphi(x, z).$$

Lema 2.7. *Se A é uma álgebra alternativa quadrática com unidade sobre um corpo F com traço $t(x)$ e norma $n(x)$ tais que*

$$t(\alpha) = 2\alpha,$$

$$n(\alpha) = \alpha^2,$$

para todo $\alpha \in F$, então n admite composição.

Prova. Por hipótese, dado $x \in A$

$$(\#) \quad x^2 - t(x)x + n(x) = 0.$$

Definimos

$$\begin{aligned} f(x, y) &= n(x + y) - n(x) - n(y) \\ &= -xy - yx + t(x)y + t(y)x. \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Artin (Shafer [Sch66], p. 29) a subálgebra gerada pelos elementos x, y é associativa. Logo

$$f(x, y)xy = t(x)yxy + t(y)x^2y - (xy)^2 - yx^2y.$$

Mas

$$\begin{aligned} yx^2y &= y(t(x)x - n(x))y \\ &= t(x)yxy - n(x)y^2 \\ &= t(x)yxy - n(x)(t(y)y - n(y)) \\ &= t(x)yxy - n(x)t(y)y + n(x)n(y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} t(y)x^2y &= t(y)(t(x)x - n(x))y \\ &= t(y)t(x)xy - t(y)n(x)y. \end{aligned}$$

Como $y \notin F$ segue que

$$n(y) = \frac{\alpha^2}{n(x)}.$$

Logo

$$n(x)n(y) = \alpha^2 = n(xy).$$

Portanto para todo $x, y \in A$

$$n(xy) = n(x)n(y),$$

isto é, n admite composição. ■

Voltando à nossa álgebra Q observemos que

$$a = a^2 = 2\lambda(a, a)a - \lambda(a, a)a = \lambda(a, a)a.$$

Logo

$$\lambda(a, a) = 1.$$

Mais ainda, para todo $\alpha \in F$,

$$\lambda(\alpha, \alpha) = \lambda(\alpha a, \alpha a) = \alpha^2 \lambda(a, a) = \alpha^2$$

e

$$2\lambda(a, \alpha) = 2\alpha \lambda(a, a) = 2\alpha.$$

Logo Q é uma álgebra que satisfaz as condições do lema anterior. Segue então que

$$\lambda(xy, xy) = \lambda(x, x)\lambda(y, y).$$

Seja $P(Q)$ a álgebra consistindo de todas as 5-uplas

$$(\epsilon, \epsilon', x_1, x_2, x_3)$$

Como, por hipótese, n admite composição, para todo $x, y \in A$,

$$n(xy) = n(x)n(y).$$

Linearizando esta equação em x temos

$$\lambda(xy, x'y) = \lambda(x, x')n(y).$$

Fazendo o mesmo em relação a y temos

$$\lambda(xy, xy') = \lambda(y, y')n(x).$$

Linearizando esta equação em relação a x temos

$$(\#) \quad \lambda(xy, x'y') + \lambda(x'y, xy') = 2\lambda(x, x')\lambda(y, y').$$

Sabemos que existe $x \in A$ tal que $n(x) \neq 0$. Logo

$$n(x) = n(ax) = n(a)n(x)$$

e temos que

$$n(a) = 1.$$

Consideremos a subálgebra Fa e observemos que $\dim Fa$ é finita sobre F . Suponhamos que $\lambda(\alpha a, \beta a) = 0$ para todo $\beta a \in Fa$. Temos

$$0 = \lambda(\alpha a, \beta a) = \alpha\beta\lambda(a, a) = \alpha\beta n(a) = \alpha\beta$$

e então $\alpha = 0$. Consequentemente $\lambda|_{Fa}$ é não-degenerada. Logo pelo Lema 1.9 temos que

$$A = Fa \oplus Fa^\perp.$$

Fazendo $x' = a$ e $x \in Fa^\perp$ em $(\#)$ temos

$$\lambda(xy, y') + \lambda(y, xy') = 2\lambda(x, a)\lambda(y, y') = 0.$$

Mas

$$\begin{aligned}
(x\bar{x})y &= [(\alpha a + z)(\alpha a - z)]y \\
&= (\alpha^2 a - z^2)y \\
&= \alpha^2 y - z^2 y.
\end{aligned}$$

Portanto

$$x(\bar{x}y) = (x\bar{x})y = n(x)y.$$

Completando a prova deste lema. ■

Proposição 2.6. *A álgebra $P(Q)$ é uma álgebra com pseudo-composição.*

Prova. Obviamente $P(Q)$ é comutativa. Se $x = (\epsilon, \epsilon', x_1, x_2, x_3) \in P(Q)$ então

$$x^2 = (\eta, \eta', y_1, y_2, y_3)$$

onde

$$\begin{aligned}
\eta &= \epsilon^2 - \frac{4}{3}(\epsilon')^2 + \frac{2}{3}\lambda(x_1, x_1) + \frac{2}{3}\lambda(x_2, x_2) - \frac{4}{3}\lambda(x_3, x_3), \\
\eta' &= -2\epsilon\epsilon' + \lambda(x_1, x_1) - \lambda(x_2, x_2), \\
y_1 &= (\epsilon + 2\epsilon')x_1 + 2x_2\bar{x}_3, \\
y_2 &= (\epsilon - 2\epsilon')x_2 + 2x_1x_3, \\
y_3 &= -2\epsilon x_3 + 2\bar{x}_1x_2.
\end{aligned}$$

Definimos

$$\varphi(x, x) = \epsilon^2 + \frac{4}{3}(\epsilon')^2 + \frac{4}{3}\lambda(x_1, x_1) + \frac{4}{3}\lambda(x_2, x_2) + \frac{4}{3}\lambda(x_3, x_3).$$

Claramente φ tem as mesmas propriedades de λ e, além disso,

$$x^3 = xx^2 = (\zeta, \zeta', z_1, z_2, z_3)$$

$$\begin{aligned}
z_1 &= \left(\frac{1}{2}\epsilon + \epsilon' \right) ((\epsilon + 2\epsilon')x_1 + 2x_2\overline{x_3}) \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\epsilon^2 - \frac{2}{3}(\epsilon')^2 + \frac{1}{3}\lambda(x_1, x_1) + \frac{1}{3}\lambda(x_2, x_2) - \frac{2}{3}\lambda(x_3, x_3) \right) x_1 \\
&\quad + (-2\epsilon\epsilon' + \lambda(x_1, x_1) - \lambda(x_2, x_2))x_1 + x_2(-2\epsilon\overline{x_3} + 2x_1\overline{x_2}) \\
&\quad + ((\epsilon - 2\epsilon')x_2 + 2x_1x_3)\overline{x_3} \\
&= \frac{1}{2}\epsilon^2x_1 + 2\epsilon\epsilon'x_1 + \epsilon x_2\overline{x_3} + 2(\epsilon')^2x_1 + 2\epsilon'x_2\overline{x_3} + \frac{1}{2}\epsilon^2x_1 - \frac{2}{3}(\epsilon')^2x_1 \\
&\quad + \frac{1}{3}\lambda(x_1, x_1)x_1 + \frac{1}{3}\lambda(x_2, x_2)x_1 - \frac{2}{3}\lambda(x_3, x_3)x_1 - 2\epsilon\epsilon'x_1 + \lambda(x_1, x_1)x_1 \\
&\quad - \lambda(x_2, x_2)x_1 - 2\epsilon x_2\overline{x_3} + 2x_2(\overline{x_2}x_1) + \epsilon x_2\overline{x_3} - 2\epsilon'x_2\overline{x_3} + 2(x_1x_3)\overline{x_3} \\
&= \epsilon^2x_1 + \frac{4}{3}(\epsilon')^2x_1 + \frac{4}{3}\lambda(x_1, x_1)x_1 + \frac{4}{3}\lambda(x_2, x_2)x_1 + \frac{4}{3}\lambda(x_3, x_3)x_1 \\
&= \varphi(x, x)x_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_2 &= \left(\frac{1}{2}\epsilon - \epsilon' \right) ((\epsilon - 2\epsilon')x_2 + 2x_1x_3) + x_1(-2\epsilon x_3 + 2\overline{x_1}x_2) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\epsilon^2 - \frac{4}{3}(\epsilon')^2 + \frac{2}{3}\lambda(x_1, x_1) + \frac{2}{3}\lambda(x_2, x_2) - \frac{4}{3}\lambda(x_3, x_3) \right) x_2 \\
&\quad - (-2\epsilon\epsilon' + \lambda(x_1, x_1) - \lambda(x_2, x_2))x_2 + ((\epsilon + 2\epsilon')x_1 + 2x_2\overline{x_3})x_3 \\
&= \frac{1}{2}\epsilon^2x_2 - 2\epsilon\epsilon'x_2 + \epsilon x_1x_3 + 2(\epsilon')^2x_2 - 2\epsilon'x_1x_3 - 2\epsilon x_1x_3 + 2x_1(\overline{x_1}x_2) \\
&\quad + \frac{1}{2}\epsilon^2x_2 - \frac{2}{3}(\epsilon')^2x_2 - \frac{2}{3}\lambda(x_1, x_1)x_2 + \frac{4}{3}\lambda(x_2, x_2)x_2 - \frac{2}{3}\lambda(x_3, x_3)x_2 \\
&\quad + 2\epsilon\epsilon'x_2 + \epsilon x_1x_3 + 2\epsilon'x_1x_3 + 2(x_2\overline{x_3})x_3 \\
&= \epsilon^2x_2 + \frac{4}{3}(\epsilon')^2x_2 + \frac{4}{3}\lambda(x_1, x_1)x_2 + \frac{4}{3}\lambda(x_2, x_2)x_2 + \frac{4}{3}\lambda(x_3, x_3)x_2 \\
&= \varphi(x, x)x_2,
\end{aligned}$$

e portanto

$$A_{-1} = Fc \oplus \text{Rad } \varphi_{-1}.$$

Segue então que $\text{codim}_{A_{-1}} \text{Rad } \varphi_{-1} = 1$ o que é um absurdo! Logo $\varphi(Z, Z) \neq 0$.

Além disso, como $\varphi_{\frac{1}{2}} \neq 0$, $\varphi(U, U) \neq 0$ ou $\varphi(V, V) \neq 0$. Podemos supor sem perda de generalidade que $\varphi(U, U) \neq 0$.

Sejam $z \in Z$ e $a \in U$ tais que $\varphi(z, z) = \varphi(a, a) = \frac{4}{3}$.

Afirmção 1: $V = zU$ e $Z = a(zU)$

De fato, pela Proposição 2.4, $ZU \subset V$ e para todo $v \in V$, $zv \in U$. Logo basta mostrar que $V \subset zU$. Dado $v \in V$ segue da Proposição 2.2 (d) que

$$z(zv) = \frac{3}{4}\varphi(z, z)v = v.$$

Portanto existe $u \in U$ tal que $v = zu$, o que nos mostra que $V \subset zU$.

Da Proposição 2.4, $a(zU) \subset Z$, logo basta mostrar que $Z \subset a(zU)$.

Seja $z \in Z$ qualquer. Pela Proposição 2.4,

$$a(za) = \frac{3}{4}\varphi(a, a)z = z.$$

Portanto existe $u \in U$ tal que $z = a(zu)$, o que completa a prova desta afirmação.

Podemos então dizer que

$$A = Fe \oplus Fc \oplus U \oplus zU \oplus a(zU).$$

Seja

$$\Phi : A \rightarrow P(Q)$$

$$\alpha e + \beta c + u_1 + zu_2 + a(zu_3) \mapsto (\alpha, \beta, u_1, u_2, u_3)$$

Vamos mostrar que Φ é um isomorfismo.

Se $y, y' \in V$, então de (2.16)

$$yy' = \varphi(y, y') \left(\frac{1}{2}e - \frac{3}{4}c \right)$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \Phi(yy') &= \Phi \left(\varphi(y, y') \left(\frac{1}{2}e - \frac{3}{4}c \right) \right) = \varphi(y, y') \Phi \left(\frac{1}{2}e - \frac{3}{4}c \right) \\ &= \varphi(y, y') \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, 0, 0, 0 \right) = \left(\frac{1}{2}\varphi(y, y'), -\frac{3}{4}\varphi(y, y'), 0, 0, 0 \right) \\ &= \left(\frac{2}{3}\lambda(y, y'), -\lambda(y, y'), 0, 0, 0 \right) = (0, 0, 0, y, 0) (0, 0, 0, y', 0) \\ &= \Phi(y) \Phi(y'). \end{aligned}$$

Se $y, y' \in Z$, então de (2.16)

$$yy' = -\varphi(y, y') e$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \Phi(yy') &= \Phi(-\varphi(y, y') e) = -\varphi(y, y') \Phi(e) = -\varphi(y, y') (1, 0, 0, 0, 0) \\ &= (-\varphi(y, y'), 0, 0, 0, 0) = \left(-\frac{4}{3}\lambda(y, y'), 0, 0, 0, 0 \right) = (0, 0, 0, 0, y) (0, 0, 0, 0, y') \\ &= \Phi(y) \Phi(y'). \end{aligned}$$

Vamos mostrar agora que a propriedade do homomorfismo vale para produtos mistos.

Dado $z' = a(zu_3) \in Z$, segue da proposição 2.4 (d) que se $u_1 \in U$ então

$$u_1 z' = u_1 [a(zu_3)] = z \{u_1 [a(zu_3)] z\} = z(u_1 \star u_3).$$

Daí

$$\begin{aligned} \Phi(u_1 z') &= \Phi(z(u_1 \star u_3)) = (0, 0, 0, u_1 \star u_3, 0) \\ &= (0, 0, u_1, 0, 0) (0, 0, 0, 0, u_3) = \Phi(u_1) \Phi(z'). \end{aligned}$$

Logo

$$u_3 = -(u_1(a(zu_2)))z + 2\lambda(a, u_1)u_2$$

e temos

$$u_3 = -u_1 \star u_2 + 2\lambda(a, u_1)u_2 = \overline{u_1} \star u_2.$$

Então

$$\begin{aligned}\Phi(u_1(zu_2)) &= \Phi(a(zu_3)) = (0, 0, 0, 0, \overline{u_1} \star u_2) \\ &= (0, 0, u_1, 0, 0)(0, 0, 0, u_2, 0) \\ &= \Phi(u_1)\Phi(zu_2).\end{aligned}$$

Finalmente vamos analisar produtos da forma $VZ = (zU)[a(zU)]$. Da Proposição 2.2 (d), segue que dados $x \in A_{\frac{1}{2}}$ e $z \in A_{-1}$ temos então que

$$z(zx) = \frac{3}{4}\varphi(z, z)x.$$

Linearizando esta equação temos

$$z(z_1x) + z_1(zx) = \frac{3}{2}\varphi(z, z_1)x.$$

Fazendo $z_1 = a(zu_3)$, $x = u_2$ e usando o Lema 2.6

$$\begin{aligned}(a(zu_3))(zu_2) &= -[u_2(a(zu_3))]z + \frac{3}{2}\varphi(z, a(zu_3))u_2 \\ &= -u_2 \star u_3 + 2\lambda(z, a(zu_3))u_2 \\ &= -u_2 \star u_3 + 2\lambda(a, u_3)u_2 \\ &= u_2 \star \overline{u_3}.\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}\Phi((a(zu_3))(zu_2)) &= (0, 0, u_2 \star \overline{u_3}, 0, 0) \\ &= (0, 0, 0, u_2, 0)(0, 0, 0, 0, u_3) \\ &= \Phi(a(zu_3))\Phi(zu_2)\end{aligned}$$

isto é,

$$a_{-1} - \alpha c \in \text{Rad } \varphi_{-1}.$$

Logo, existe $z \in \text{Rad } \varphi_{-1}$ tal que $z = a_{-1} - \alpha c$ e portanto $A_{-1} = Fc \oplus \text{Rad } \varphi_{-1}$. Como A é do tipo não-quadrático segue da prova da Proposição 2.4 que $A_{-1} = Fc \oplus Z$. Logo $Z = \text{Rad } \varphi_{-1}$. Lembrando que $UV \subset Z$ segue de (2.19) que

$$0 = \varphi(uv, uv) = \frac{4}{3} \varphi(u, u) \varphi(v, v)$$

e logo

$$\varphi(u, u) = 0 \text{ ou } \varphi(v, v) = 0,$$

para todo $u \in U$, $v \in V$. Da demonstração da Proposição 2.5, sabemos que

$$A_{\frac{1}{2}}(e') = U \oplus Z \text{ e } A_{\frac{1}{2}}(e'') = V \oplus Z.$$

Logo

$$\varphi(A_{\frac{1}{2}}(e'), A_{\frac{1}{2}}(e')) = 0 \text{ ou } \varphi(A_{\frac{1}{2}}(e''), A_{\frac{1}{2}}(e'')) = 0$$

e em ambos os casos temos um absurdo! Assim $\text{codim}_{A_{-1}} \text{Rad } \varphi_{-1} > 1$.

Portanto A é uma álgebra com pseudo-composição sobre um corpo F com idempotente $e \neq 0$ e tal que $\varphi_{\frac{1}{2}} \neq 0$ e $\text{codim}_{A_{-1}} \text{Rad } \varphi_{-1} > 1$. Então pelo Teorema 2.2 $A \cong P(Q)$ onde Q é a álgebra $(U, \star, \lambda)$.

Dos Lemas 2.4 e 2.5 segue que $(U, \star, \lambda)$ é uma álgebra alternativa com unidade, com forma $\lambda = \frac{3}{4}\varphi$ admitindo composição e como por hipótese φ é não-degenerada, $(U, \star, \lambda)$ é uma álgebra com composição. ■

Seja K o radical de λ em Q . Definimos o conjunto $N \subset P(Q)$ por:

$$N = \{(0, 0, x_1, x_2, x_3) \in P(Q) \mid x_1, x_2, x_3 \in K\}.$$

Segue que $\lambda(x_1, y_1) = 0$ e logo $x_1 \in K$.

Se $y = (0, 0, 0, y_2, 0) \in P(Q)$, então

$$0 = \varphi(x, y) = \frac{4}{3}\lambda(x_2, y_2).$$

Temos então que $\lambda(x_2, y_2) = 0$ e logo $x_2 \in K$.

Se $y = (0, 0, 0, 0, y_3) \in P(Q)$, então

$$0 = \varphi(x, y) = \frac{4}{3}\lambda(x_3, y_3).$$

Portanto $\lambda(x_3, y_3) = 0$ e logo $x_3 \in K$.

Logo $x = (0, 0, x_1, x_2, x_3)$ com $x_1, x_2, x_3 \in K$, isto é, $x \in N$. Conseqüentemente $N = \text{Rad } \varphi$.

Vamos mostrar agora que $\text{Rad } \varphi$ é nilpotente quando Q é uma álgebra com composição.

Observemos primeiro que $\text{Rad } \varphi$ é uma nil-álgebra pois se $x \in \text{Rad } \varphi$ então

$$x^3 = \varphi(x, x)x = 0.$$

De (2.2) temos que para todo $x, y \in \text{Rad } \varphi$

$$(\#) \quad x^2y + 2x(xy) = 0.$$

Logo

$$x(x^2y) + 2x(x(xy)) = 0.$$

Fazendo $y = yx$ em $(\#)$ temos

$$x^2(yx) + 2x(x(yx)) = 0.$$

Segue então que

$$x^2(yx) - x(x^2y) = 0.$$

Provamos nas Seções 2.3, 2.5 e nesta seção que $\text{Rad } \varphi$ é um ideal de A .

Provamos a nilpotência do $\text{Rad } \varphi$ nos casos (a) e (c) no final da Seção 2.3 e acima, respectivamente. Quando a dimensão de $\text{Rad } \varphi$ é finita, a nilpotência no caso (b) segue como no caso (c). Fica a pergunta se, no caso (b), $\text{Rad } \varphi$ é nilpotente mesmo quando a dimensão é infinita.

Referências Bibliográficas

- [MO93] MEYBERG, K. and OSBORN, J. M., Pseudo-composition algebras, Math. Z., 214:67-77, 1993.
- [Jac58] JACOBSON, N., Composition algebras and their automorphisms, Rend. Circ. Mat. Palermo, 7(2):55-80, 1958.
- [RW88] RÖHRL, H., WALCHER, S., Algebras of complexity one, Algebras, Groups and Geometries, 5:61-107, 1988.
- [HK76] HOFFMANN, K, and KUNZE, R., Álgebra Linear, Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., primeira edição 1976.
- [Jac80] JACOBSON, N., Basic Algebra II, W. H. Freeman an Company, first edition, 1980.
- [Sch66] SCHAFER, R. D., An Introduction to Nonassociative Algebras, Academic Press Inc., first edition, 1966.
- [ZS82] ZHEVLAKOV, K. A., SLIN 'KO, A. M., SHESTAKOV, I. P. and SHIRSHOV, A. I., Rings That Are Nearly Associative, Academic Press Inc., first edition, 1982.