**Uma Caracterização das
C*-álgebras Nucleares**

Ayumi Kato

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: Álgebra de Operadores
Orientador: Prof. Dr. Ruy Exel Filho

Durante a elaboração deste trabalho a autora recebeu apoio financeiro do CNPq

Uma Caracterização das C^* -álgebras Nucleares

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente
corrigida e defendida por Ayumi Kato
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 19 de dezembro de 1996.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Ruy Exel Filho (orientador) - IME-USP
- Profa. Dra. Cristina Cerri - IME-USP
- Prof. Dr. Frank Michael Forger - IME-USP

*Ao Professor Francis,
que descobriu em mim
o gosto pela Matemática.*

Agradecimentos

Em primeiro lugar, a Deus, que nunca me desamparou.

A minha família, pelo apoio constante.

A meus padrinhos Maria e Akira Kinoshita, que me possibilitaram chegar à conclusão deste trabalho.

A Lucia Ikemoto, Jair Donadelli, Vitor Ferreira, Juaci P. da Silva, Marcela Merklen, Marcelo Passos (Major), Fábio Skilnik, Paul Krause e Antônio de Pádua, grandes companheiros que muito me ajudaram, desde as primeiras disciplinas do curso de mestrado.

A Cristiano Campagnoli, Edson Álvares (Rolo), Francisco Zampirolli, Jorge Groisman, Marcelo Lanzilotta, Marcelo Lauretto e Marco Aurélio Stefanés, pela paciência que sempre tiveram comigo e por tornarem alegres muitos momentos tristes desta fase de minha vida.

A Claus Akira Matsushigue e Fábio Henrique Martinez, por inúmeras dicas, fundamentais na digitação deste trabalho. Ao Claus, também, por seu imenso interesse no progresso de seu próximo, através do qual muito aprendi.

À Professora Maria Lúcia Sobral Singer e ao Professor Roberto Costa, pela atenção e pelo carinho, desde a fase da graduação.

A Fernando Abadie, por sua sensibilidade, seu bom-humor e sua eterna disposição em me ajudar, inclusive, em muitos problemas relacionados com a matemática envolvida nesta dissertação.

Especialmente, a meu orientador, o Professor Ruy Exel, pela atenção e pela paciência, mesmo quando me via perguntar, pela n -ésima vez, sobre o mesmo assunto. A este, em cujo entusiasmo encontrei ânimo e perseverança para chegar até aqui.

A todos estes e a muitos outros, que conhecem a impossibilidade de terem seus nomes escritos nesta página, mas que sabem do lugar que ocupam em meu coração, meu agradecimento sincero.

Resumo

Dadas duas C^* -álgebras, A e B , o produto tensorial algébrico, $A \otimes B$, de A e B possui estrutura de $*$ -álgebra e existem várias possíveis C^* -normas em $A \otimes B$, dentre as quais, uma mínima e outra máxima. Para algumas C^* -álgebras A , qualquer que seja a C^* -álgebra B , as normas mínima e máxima coincidem em $A \otimes B$. Tais C^* -álgebras são chamadas nucleares. Neste trabalho, veremos que uma C^* -álgebra A é nuclear se e somente se a função identidade no dual de A pode ser aproximada, na topologia fraca* simples, por funções completamente positivas de posto finito e norma 1.

Abstract

Given two C^* -algebras, A and B , the algebraic tensor product, $A \otimes B$, of A and B has a $*$ -algebra structure and there are many possible C^* -norms on $A \otimes B$, among which, a minimal and a maximal one. For some C^* -algebras A , whenever B is a C^* -algebra, the least and the maximal norms coincide on $A \otimes B$. Such C^* -algebras are called nuclear. In this work, we shall see that a C^* -algebra A is nuclear if and only if the identity map on the dual of A can be approximated, in the pointwise weak* topology, by completely positive maps of finite rank and norm 1.

Índice

Introdução	iii
Capítulo 1. Preliminares	1
1.1. C^* -álgebras	1
1.2. Representação GNS	3
1.3. Bidual de uma C^* -álgebra	13
1.4. C^* -álgebra envolvente	16
Capítulo 2. Produto tensorial de C^* -álgebras	19
2.1. Definição e principais normas	19
2.2. C^* -álgebras nucleares	26
2.3. Minimalidade da norma espacial	27
Capítulo 3. Funções completamente positivas	33
3.1. Definição e observações	33
3.2. Relação entre $S(A \otimes_{\max} B)$ e $\mathcal{L}(A, B^*)$	38
3.3. Propriedades de aproximação	39
Capítulo 4. Uma caracterização das C^* -álgebras nucleares	41
4.1. CPAP implica nuclearidade	41
4.2. Nuclearidade implica CPAP	43
4.3. Sub- C^* -álgebras e soma direta de C^* -álgebras nucleares	47
4.4. $C(X)$ possui SCPAP	52
Índice Remissivo	55
Referências Bibliográficas	57

Introdução

Dadas duas álgebras A e B , o produto tensorial, $A \otimes B$, de A e B continua tendo estrutura de álgebra e constitui um objeto cujo estudo é muito importante. No caso em que A e B são C^* -álgebras, $A \otimes B$ possui estrutura de $*$ -álgebra. Porém, existem várias possíveis C^* -normas em $A \otimes B$, de modo que é necessário fazer-se uma escolha para que se possa trabalhar com uma C^* -álgebra proveniente do produto tensorial de A e B . Dentre as C^* -normas possíveis, existem uma máxima e outra mínima, o que já facilita a escolha citada. Além deste, outro importante fato é o de que existem certas C^* -álgebras A , tais que, qualquer que seja a C^* -álgebra B , o produto tensorial $A \otimes B$ possui uma única C^* -norma. São chamadas C^* -álgebras nucleares. Está provada, por Lance (em [Lan73]) e Kirchberg (em [Kir77]), a equivalência entre o fato de uma C^* -álgebra ser nuclear e o de satisfazer uma certa propriedade de aproximação (CPAP). Kirchberg também prova que, para C^* -álgebras com unidade, ser nuclear equivale a possuir a propriedade SCPAP. Nosso trabalho procurou reunir, num texto elementar, os principais pré-requisitos para a compreensão dessas equivalências.

No Capítulo 1, citamos, rapidamente, definições e teoremas básicos da teoria das C^* -álgebras. Nele, construímos a representação de Gelfand-Naimark-Segal (GNS) para $*$ -álgebras de Banach que possuem unidade aproximada. Trata-se de uma pequena generalização do caso em que temos uma C^* -álgebra, a qual será utilizada para concluirmos que existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos estados de uma $*$ -álgebra de Banach e o conjunto dos estados de sua C^* -álgebra envolvente. Ainda nesse capítulo, exibimos a estrutura de C^* -álgebra que o bidual de uma C^* -álgebra possui. Este fato, o qual já é muito interessante, permitirá concluirmos, no final do Capítulo 4, que, se a unitização $\tilde{A}$ de uma C^* -álgebra A satisfaz a propriedade CPAP, então A também a satisfaz.

No segundo capítulo, mostramos que, dadas duas C^* -álgebras A e B , o espaço vetorial $A \otimes B$ possui estrutura de $*$ -álgebra. Definimos as principais normas em $A \otimes B$ e exibimos definições alternativas para as normas mínima e máxima. Também trabalhamos com a norma projetiva, a qual não necessariamente é uma C^* -norma, mas que faz de $A \otimes B$ uma $*$ -álgebra de Banach com unidade aproximada. Temos o importante resultado de que a C^* -álgebra envolvente de $A \otimes_{\text{proj}} B$ é $*$ -isomorfa à C^* -álgebra $A \otimes_{\text{max}} B$, onde $A \otimes_{\text{proj}} B$ e $A \otimes_{\text{max}} B$ denotam os completamentos de $A \otimes B$ com relação às normas projetiva e máxima, respectivamente.

Os conceitos de função positiva e de função completamente positiva vêm introduzidos no Capítulo 3, o qual ainda traz as definições das propriedades CPAP e SCPAP de uma C^* -álgebra, e as relações entre elas. Com relação às funções completamente positivas, tratamos apenas de fatos estritamente necessários para o entendimento do trabalho deixando sem mencionar, por exemplo, o importante Teorema de Stinespring ([Pau86]).

O quarto e último é o capítulo central do trabalho. O primeiro resultado que nele veremos é o fato de uma C^* -álgebra possuir a propriedade CPAP implicar o de ser nuclear. Já a recíproca, será demonstrada, inicialmente, para C^* -álgebras com unidade e os passos para a conclusão de tal fato no caso em que a C^* -álgebra é não necessariamente unitária ocupam o restante do capítulo, a menos da última seção. Esta, traz um exemplo de verificação da nuclearidade de uma C^* -álgebra ($C(X)$), através da propriedade SCPAP.

Encerrando esta pequena introdução, citamos, ainda, o trabalho de Wassermann ([Was94]), onde encontramos uma extensão natural do estudo envolvido neste trabalho.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Não temos a intenção de que este capítulo seja auto-suficiente. Pretendemos apenas citar algumas definições e propriedades básicas, sem nos aprofundarmos. Alguns resultados necessários para a compreensão deste trabalho virão enunciados sem demonstração, geralmente, por envolverem técnicas ou assuntos que fogem um pouco do objetivo central do trabalho. Se o leitor tiver interesse, poderá consultar, por exemplo, [Dix64], [Mur90] e [Rud91], onde os assuntos deste capítulo estão desenvolvidos com todos os detalhes.

1.1. C^* -álgebras

O objetivo desta seção é relembrar alguns conceitos básicos da teoria das C^* -álgebras, e mostrar alguns exemplos. Uma *álgebra* A é um espaço vetorial onde está definida uma multiplicação, ou seja, uma operação

$$A^2 \rightarrow A, (a, b) \mapsto ab$$

que é bilinear e associativa. (Consideraremos sempre o corpo dos escalares como sendo o dos números complexos). Uma *sub-álgebra de* A é um sub-espaço vetorial de A que é fechado para a multiplicação. Um *ideal lateral à esquerda* (respectivamente, *à direita*) I de A é uma sub-álgebra tal que é válida a implicação

$$a \in A \text{ e } b \in I \Rightarrow ab \in I \text{ (respectivamente, } ba \in I).$$

Se A é uma álgebra e $\|\cdot\|$ é uma norma em A com $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$, quaisquer que sejam a e b em A , então $(A, \|\cdot\|)$ é chamada uma *álgebra normada*. Se $(A, \|\cdot\|)$ possui uma unidade (elemento neutro para a multiplicação) $\mathbb{1}$, com $\|\mathbb{1}\| = 1$, dizemos que A é uma *álgebra normada unitária*. Uma *álgebra de Banach* é uma álgebra normada $(A, \|\cdot\|)$ completa com relação a $\|\cdot\|$.

Uma *involução* em uma álgebra A é uma aplicação $*$: $A \rightarrow A$, a qual satisfaz $(a + \lambda b)^* = a^* + \bar{\lambda}b^*$, $(ab)^* = b^*a^*$ e $a^{**} = a$, quaisquer que sejam a e b em A e λ em $\mathbb{C}$. Nesse caso, A será chamada **-álgebra*. Se a *-álgebra A for normada e valer $\|a^*\| = \|a\|$, para todo $a \in A$, então A é dita uma **-álgebra normada*. Uma *C^* -álgebra* é uma *-álgebra de Banach onde vale

$$\|a^*a\| = \|a\|^2, \text{ para todo } a \in A.$$

Se $(A, \|\cdot\|)$ satisfaz todos os axiomas de C^* -álgebra, exceto, possivelmente, o fato de ser completa, $\|\cdot\|$ é chamada uma *C^* -norma* em A . Observe-se que, se $\|\cdot\|$ é uma C^* -norma em A e A tem unidade $\mathbb{1}$, então, automaticamente, vale $\|\mathbb{1}\| = 1$, por $\|\mathbb{1}\| = \|\mathbb{1}^*\| = \|\mathbb{1}^*\mathbb{1}\| = \|\mathbb{1}\|^2$.

Dadas duas $*$ -álgebras, A e B , e uma função linear $f : A \rightarrow B$, diremos que f é um $*$ -homomorfismo, se tivermos

- $f(ab) = f(a)f(b)$, quaisquer que sejam $a, b \in A$;
- $f(a^*) = (f(a))^*$, para todo $a \in A$.

Seja A uma $*$ -álgebra. Um elemento a de A é dito *auto-adjunto* se tivermos $a^* = a$, e um subconjunto $S \subseteq A$ será *auto-adjunto* se a^* pertencer a S , para todo $a \in S$. Se A tem $\mathbb{1}$, o elemento $u \in A$ será chamado *unitário* se valer $u^* = u^{-1}$.

Se A é uma $*$ -álgebra unitária e a é um elemento de A , o *espectro* de a é o subconjunto de $\mathbb{C}$

$$\sigma(a) = \sigma_A(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \cdot \mathbb{1} - a \text{ é não inversível em } A\}.$$

Se A não tem unidade, define-se o espectro de um elemento $a \in A$ como sendo $\sigma_{\tilde{A}}(a)$, onde $\tilde{A}$ é uma $*$ -álgebra unitária, que virá definida após os próximos exemplos.

Um elemento a de uma C^* -álgebra será dito *positivo*, se for auto-adjunto e $\sigma(a)$ estiver contido em $\mathbb{R}^+$. É bem conhecido o fato de que um elemento a de uma C^* -álgebra A é positivo se e somente se a é da forma b^*b , para algum $b \in A$. Ainda uma definição que é necessário relembrarmos: Seja A uma $*$ -álgebra normada. Diremos que um net $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, indexado num conjunto dirigido Λ , é uma *aproximação da unidade* ou uma *unidade aproximada* para A , se tivermos

- $u_\lambda^* = u_\lambda$ e $\|u_\lambda\| \leq 1$, qualquer que seja $\lambda \in \Lambda$;
- $\lim_\lambda \|u_\lambda a - a\| = 0$ e $\lim_\lambda \|a u_\lambda - a\| = 0$, para todo $a \in A$.

Se A é uma C^* -álgebra, então A possui como unidade aproximada um net $(u_\lambda)_\lambda$, o qual podemos supor que seja crescente, formado por elementos positivos (Teorema 3.1.1 de [Mur90]), onde a ordem no conjunto dos elementos auto-adjuntos é aquela naturalmente induzida pela positividade.

Exemplos de C^* -álgebras:

1) O corpo dos números complexos com a norma do módulo e a involução dada pela conjugação é uma C^* -álgebra.

2) Seja Ω um espaço topológico localmente compacto Hausdorff. Seja $C_0(\Omega)$ o conjunto das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tais que f é contínua e, para todo $\varepsilon > 0$, existe um compacto $K \subseteq \Omega$ tal que $|f(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in (\Omega - K)$.

Então, $C_0(\Omega)$ com as operações pontuais, com a involução dada por $f^*(x) = \overline{f(x)}$, para todo x em Ω , e com a norma $\|\cdot\|_\infty$ é uma C^* -álgebra comutativa.

3) Seja H um espaço de Hilbert e $\mathcal{L}(H)$ a álgebra de Banach dos operadores contínuos de H . Temos que, para todo operador $T \in \mathcal{L}(H)$, existe $S \in \mathcal{L}(H)$ tal que vale

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, S(y) \rangle, \text{ quaisquer que sejam } x \text{ e } y \text{ em } H.$$

Se denotamos S por T^* , temos que $*$ é uma involução em $\mathcal{L}(H)$ que faz de $\mathcal{L}(H)$ uma C^* -álgebra.

4) Uma sub-álgebra fechada e auto-adjunta de uma C^* -álgebra é, também, uma C^* -álgebra e será chamada *sub- C^* -álgebra*.

5) Dada uma família de C^* -álgebras, $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, sejam $\Pi_\Lambda A_\Lambda$ o produto cartesiano das álgebras e $\oplus_\Lambda A_\Lambda$ o subconjunto de $\Pi_\Lambda A_\Lambda$ dado por

$$\oplus_\Lambda A_\Lambda = \{(a_\lambda)_\lambda \in \Pi_\Lambda A_\Lambda : \|(a_\lambda)_\lambda\| = \sup_\lambda \|a_\lambda\| < \infty\}.$$

Então, $\oplus_\Lambda A_\Lambda$ é uma C^* -álgebra com as operações pontuais.

A *soma restrita* $B = \oplus_\Lambda^{\text{co}} A_\Lambda$ é o sub-conjunto de $\oplus_\Lambda A_\Lambda$ formado pelos elementos $(a_\lambda)_\lambda$ tais que, para todo $\varepsilon > 0$, existe um conjunto finito, F , tal que $\|a_\lambda\| < \varepsilon$, se λ pertence a $\Lambda - F$. Temos que B é um ideal fechado e auto-adjunto de $\oplus_\Lambda A_\Lambda$ e, portanto, pelo exemplo anterior, é também uma C^* -álgebra.

Dada uma $*$ -álgebra A (não necessariamente com unidade), seja $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$, a soma como espaços vetoriais. Sob a multiplicação e a involução dadas por

$$(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu) \text{ e } (a, \lambda)^* = (a^*, \bar{\lambda}),$$

temos que $\tilde{A}$ é uma álgebra com involução que tem o elemento $(0, 1)$ como unidade. $\tilde{A}$ é chamada *unitização* de A .

Se A é de Banach, temos que $\tilde{A}$ com a norma $\|(a, \lambda)\| = \max\{\|a\|, |\lambda|\}$ é também de Banach. Porém, mesmo que A seja C^* -álgebra, essa norma não faz de $\tilde{A}$ uma C^* -álgebra. Por exemplo, no caso $A = \mathbb{C}$ e $(a, \lambda) = (-2, 1)$, temos

$$\|(a, \lambda)\|^2 = 9 \text{ mas } \|(a, \lambda)^*(a, \lambda)\| = 1.$$

Aqui, consideraremos conhecido o fato (está na Seção 2.1 de [Mur90]) de que

$$\tilde{A} \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ dada por } (a, \lambda) \mapsto \sup\{\|ab + \lambda b\| : b \in A \text{ com } \|b\| \leq 1\}$$

é uma norma em $\tilde{A}$ que faz desta uma C^* -álgebra e que estende a norma de A . Sempre que trabalharmos com $\tilde{A}$, estaremos supondo que é C^* -álgebra com essa norma.

Ainda assumiremos conhecidos resultados da teoria espectral para $*$ -álgebras de Banach. Dentre eles, o importante Teorema de Gelfand, que relaciona $*$ -álgebras de Banach comutativas com $C_0(\Omega)$, para algum espaço topológico Ω .

1.2. Representação GNS

Nesta seção veremos a construção da representação GNS para $*$ -álgebras de Banach com unidade aproximada. Será feita com detalhe por não se tratar de um assunto freqüente na literatura, apesar de ser muito semelhante à construção no caso de C^* -álgebras, que é bastante conhecido.

DEFINIÇÃO 1.2.1. *Seja f um funcional linear de uma $*$ -álgebra de Banach A . Diremos que f é positivo, se valer $f(a^*a) \geq 0$, para todo $a \in A$. Se o funcional positivo f for contínuo, de norma 1, diremos que é um estado de A .*

Denotaremos por $S(A)$ o conjunto de todos os estados de A .

OBSERVAÇÃO 1.2.2. Se f é um funcional positivo numa $*$ -álgebra de Banach, então é fácil ver que a função

$$A \times A \rightarrow \mathbb{C} \text{ dada por } (a, b) \mapsto f(b^*a)$$

é uma forma sesqui-linear positiva. Portanto, pela Fórmula de Polarização, temos

$$f(b^*a) = \overline{f(a^*b)}, \text{ quaisquer que sejam } a, b \in A, \quad (1.2.1)$$

e, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, podemos concluir que vale

$$|f(b^*a)|^2 \leq f(a^*a)f(b^*b), \text{ quaisquer que sejam } a, b \in A. \quad (1.2.2)$$

Os dois fatos acima serão referenciados muitas vezes no que segue.

PROPOSIÇÃO 1.2.3. Se f é um funcional positivo contínuo numa $*$ -álgebra de Banach A com aproximação da unidade, então temos

- i. $f(a^*) = \overline{f(a)}$, para todo $a \in A$.
- ii. $|f(a)|^2 \leq \|f\|f(a^*a)$, para todo $a \in A$.
- iii. $|f(a)|^2 \leq f(\mathbb{1})f(a^*a)$, para todo $a \in A$, no caso de A ser unitária.

Demonstração:

Seja $(u_\lambda)_\lambda$ unidade aproximada de A . Para $a \in A$, qualquer, pela Equação (1.2.1) da observação anterior, temos

$$f(u_\lambda a) = \overline{f(a^*u_\lambda^*)} = \overline{f(a^*u_\lambda)}, \text{ já que temos } u_\lambda^* = u_\lambda, \text{ para todo } \lambda.$$

Tomando o limite em λ , temos $f(a) = \overline{f(a^*)}$.

O item (iii) segue imediatamente da Inequação (1.2.2) da observação, com $\mathbb{1}$ em lugar de b . Para provarmos (ii), sejam $(u_\lambda)_\lambda$ unidade aproximada de A e $a \in A$. Novamente por (1.2.2), temos

$$|f(u_\lambda a)|^2 \leq f(u_\lambda^2)f(a^*a),$$

de onde (ii) segue, claramente. □

LEMA 1.2.4. Sejam A uma $*$ -álgebra de Banach unitária e $a \in A$, auto-adjunto, com $\|a\| < 1$. Então existe $b \in A$, também auto-adjunto, tal que vale $\mathbb{1} + a = b^2$.

Demonstração:

Como a é auto-adjunto e $\|a\|$ é menor que 1, temos que $\sigma(\mathbb{1} + a)$ está contido em $\mathbb{R}^{++}$. Assim, temos que $\sigma(\mathbb{1} + a)$ não separa 0 de ∞ . Logo, pelo Teorema 10.30 de [Rud91], temos que existe um elemento auto-adjunto b tal que $b^2 = \mathbb{1} + a$ e o lema está demonstrado. □

TEOREMA 1.2.5. Seja A uma $*$ -álgebra de Banach unitária e f um funcional positivo em A . Então f é contínuo e vale $\|f\| = f(\mathbb{1})$.

Demonstração:

Se $a \in A$ é auto-adjunto com $\|a\| < 1$, então, pelo lema, existe $b \in A$ tal que $\mathbb{1} - a = b^*b$, pois b é auto-adjunto. Logo, temos $f(\mathbb{1} - a) \geq 0$, ou seja, $f(\mathbb{1}) \geq f(a)$. Para $a' \in A$, qualquer, com $\|a'\| < 1$, temos $\|a'^*a'\| < 1$ e, pelo caso já analisado, temos $f(a'^*a') \leq f(\mathbb{1})$. Agora, usando o item (iii) da Proposição 1.2.3, temos

$$|f(a')|^2 \leq f(\mathbb{1})f(a'^*a') \leq f(\mathbb{1})^2.$$

Tomando o supremo em a' com $\|a'\| < 1$, temos $\|f\|^2 \leq f(\mathbb{1})^2$, ou seja, $\|f\| \leq f(\mathbb{1})$. Isto implica $\|f\| = f(\mathbb{1})$, já que é claro $f(\mathbb{1}) \leq \|f\|$. $\square$

TEOREMA 1.2.6. *Seja f um funcional positivo contínuo numa $*$ -álgebra de Banach A com aproximação da unidade. Então existe um único funcional positivo $\tilde{f}$ em $\tilde{A}$ que estende f e satisfaz $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.*

Demonstração:

Provemos, primeiro, a existência, supondo $\|f\| \neq 0$. Seja

$$\tilde{f} : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ o funcional definido por } (a, \lambda) \mapsto f(a) + \lambda\|f\|.$$

Quaisquer que sejam $a \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos

$$\tilde{f}((a, \lambda)^*(a, \lambda)) = f(a^*a) + \lambda f(a^*) + \bar{\lambda}f(a) + |\lambda|^2\|f\|.$$

Note-se que o termo do lado direito da igualdade acima é real, pois vale $f(a^*) = \overline{f(a)}$, pelo item (i) da Proposição 1.2.3. O item (ii) substituído na equação acima, produz

$$\tilde{f}((a, \lambda)^*(a, \lambda)) \geq \frac{|f(a)|^2}{\|f\|} + \lambda f(a^*) + \bar{\lambda}f(a) + |\lambda|^2\|f\|,$$

que, por sua vez, é equivalente a

$$\tilde{f}((a, \lambda)^*(a, \lambda)) \geq \left(\frac{f(a)}{\sqrt{\|f\|}} + \lambda\sqrt{\|f\|} \right) \overline{\left(\frac{f(a)}{\sqrt{\|f\|}} + \lambda\sqrt{\|f\|} \right)},$$

usando, novamente, o item (i) da proposição. Portanto, $\tilde{f}$ é positivo. Pelo teorema anterior, temos $\|\tilde{f}\| = f(\mathbb{1}) = f(0, 1) = \|f\|$. Concluímos, assim, a existência. A unicidade é clara, já que o valor da função está determinado nos vetores do tipo $(a, 0)$ e em $(0, 1)$. $\square$

Estudemos, agora, o conceito de representação de uma $*$ -álgebra. Em seguida, veremos como funcionais positivos se relacionam com representações.

DEFINIÇÃO 1.2.7. *Dada uma $*$ -álgebra A , uma representação de A é um par (H, π) , onde H é um espaço de Hilbert e $\pi : A \rightarrow \mathcal{L}(H)$ é um $*$ -homomorfismo. Diremos que (H, π) é fiel se π for injetora.*

Com relação à definição acima, muitas vezes nos referiremos à representação (H, π) simplesmente por π . Cometeremos tal abuso quando a especificação do espaço de Hilbert H não for relevante ou estiver subentendida.

OBSERVAÇÃO 1.2.8. Dados (H, π) representação de uma $*$ -álgebra de Banach A , temos que π é contínua (Proposição 1.3.7 de [Dix64]). Assim, dado $\xi \in H$, é fácil ver que a função

$$f : A \rightarrow \mathbb{C} \text{ dada por } f(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$$

é um funcional positivo contínuo, chamado *funcional associado ao vetor ξ e à representação (H, π)* . Se A é uma sub- C^* -álgebra de $\mathcal{L}(H)$, então o funcional ω_ξ dado por

$$\omega_\xi(a) = \langle a\xi, \xi \rangle$$

é positivo e será chamado *funcional vetorial* de A dado pelo vetor ξ . Estes funcionais serão mencionados várias vezes neste trabalho.

O que faremos a seguir é, dado um funcional positivo contínuo f na $*$ -álgebra de Banach A , exibir uma representação de A associada a f .

LEMA 1.2.9. *Seja f um funcional positivo contínuo numa $*$ -álgebra de Banach com aproximação da unidade, A . Então valem as seguintes afirmações.*

- i. *Para cada $a \in A$, $f(a^*a)$ é igual a 0, se e só se $f(ba)$ é igual a 0, para todo $b \in A$.*
- ii. *A desigualdade*

$$f(b^*a^*ab) \leq \|a^*a\|f(b^*b)$$

vale, quaisquer que sejam $a, b \in A$.

Demonstração:

Pela Inequação (1.2.2) da Observação 1.2.2, temos

$$|f(b^*a)|^2 \leq f(b^*b)f(a^*a), \text{ quaisquer que sejam } a, b \in A.$$

Disso, decorre facilmente (i).

Para provarmos (ii), consideremos $\tilde{f}$ a extensão de f a $\tilde{A}$, como no Teorema 1.2.6. Para $b \in A$, qualquer, seja

$$g_b : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ o funcional dado por } a \mapsto \tilde{f}(b^*ab),$$

que é, claramente, positivo e, pelo Teorema 1.2.5, tem norma igual a $f(b^*b)$. Assim, para cada $a \in A$, temos

$$g_b(a^*a) \leq \|g_b\| \|a^*a\| = \|a^*a\|f(b^*b),$$

com o que encerramos a prova do lema. □

Dado f funcional positivo contínuo na $*$ -álgebra de Banach com unidade aproximada, A , pelas contas feitas no lema, é fácil ver que

$$N_f = \{a \in A : f(a^*a) = 0\}$$

é um ideal lateral à esquerda fechado de A e que a função

$$(A/N_f)^2 \rightarrow \mathbb{C}, \text{ dada por } (a + N_f, b + N_f) \mapsto f(b^*a),$$

está bem definida e é um produto interno em A/N_f . Seja H_f o completamento de A/N_f , com relação a esse produto interno. Para cada $a \in A$, definamos

$$\pi(a) : A/N_f \rightarrow A/N_f \text{ tal que } \pi(a)(b + N_f) = ab + N_f.$$

Temos que $\pi(a)$ é contínuo, pois temos

$$\|\pi(a)(b + N_f)\|^2 = f(b^* a^* ab) \leq \|a\|^2 f(b^* b) = \|a\|^2 \|b + N_f\|^2,$$

o que vale pelo lema. Assim, $\pi(a)$ se estende a $\pi_f(a)$ em H_f e a função

$$\pi_f : A \rightarrow \mathcal{L}(H_f) \text{ dada por } a \mapsto \pi_f(a)$$

é um $*$ -homomorfismo.

DEFINIÇÃO 1.2.10. *A representação (H_f, π_f) , como acima, da $*$ -álgebra de Banach A com aproximação da unidade, é chamada representação de Gelfand-Naimark-Segal (GNS) associada ao funcional positivo contínuo f .*

Aproveitamos para citar a definição de *representação universal* de uma C^* -álgebra não nula, A , que é a soma direta das representações GNS, (H_f, π_f) , de A , onde f percorre o conjunto dos estados de A . Usaremos, freqüentemente, o fato de que a representação universal é fiel.

O que segue visa relembrar o conceito de representação não degenerada, que é muito útil.

DEFINIÇÃO 1.2.11. *Sejam H um espaço de Hilbert, B uma sub- $*$ -álgebra de $\mathcal{L}(H)$ e S um subconjunto de H . Denotaremos por $[BS]$ o conjunto*

$$[BS] = \text{span}\{b(x) \in H : b \in B \text{ e } x \in S\},$$

onde span de um conjunto $K \subseteq H$ significa o sub-espaço vetorial de H formado por todas as combinações lineares finitas dos elementos de K .

Diremos, ainda, que B atua não degeneradamente em H , se $[BH]$ for denso em H .

OBSERVAÇÃO 1.2.12. Temos que o fato de B atuar não degeneradamente em H é equivalente ao fato de, dado $x \in H$ não nulo qualquer, existir $u \in B$ tal que $u(x)$ é não nulo. Isto é facilmente verificado olhando-se para o complemento ortogonal de $[BH]$ em H . Sob esta versão da não degenerabilidade, é fácil concluirmos que, se id_H pertence a B , então B atua não degeneradamente em H .

PROPOSIÇÃO 1.2.13. *Sejam H um espaço de Hilbert e B atuando não degeneradamente em H . Então, se $(u_\lambda)_\lambda$ é unidade aproximada para B , então $(u_\lambda)_\lambda$ converge fortemente para id_H .*

Demonstração:

Sejam $(u_\lambda)_\lambda$ uma unidade aproximada de B , v um elemento de B e x um vetor de H . Como $\lim_\lambda u_\lambda v$ é igual a v , temos $\lim_\lambda u_\lambda v(x) = v(x)$. Logo, qualquer que seja $y \in [BH]$, temos $\lim_\lambda u_\lambda(y) = y$. Como H é igual a $[BH]$, vale $\lim_\lambda u_\lambda(y) = y = \text{id}_H(y)$, qualquer que seja $y \in H$. $\square$

DEFINIÇÃO 1.2.14. Dada uma $*$ -álgebra A , diremos que a representação (H, π) de A é não degenerada, se a sub- $*$ -álgebra de $\mathcal{L}(H)$, $\pi(A)$, atuar não degeneradamente em H .

Pela maneira por que foi construída, temos que a representação GNS de uma $*$ -álgebra de Banach com aproximação da unidade, associada a um funcional positivo contínuo, é não degenerada. Assim, a representação universal de uma C^* -álgebra, sendo soma direta de representações não degeneradas, também é não degenerada. (Este fato pode ser verificado usando-se a Observação 1.2.12).

OBSERVAÇÃO 1.2.15. Seja (H, π) representação arbitrária de uma $*$ -álgebra de Banach A com unidade aproximada. Sejam K um sub-espaço fechado de H invariante por $\pi(A)$, ι a inclusão de K em H , e ι^* a adjunta de ι . Se $p : H \rightarrow H$ é a projeção ortogonal em K , temos as seguintes igualdades:

$$\iota^* \iota = \text{id}_K \quad \text{e} \quad \iota \iota^* = p.$$

Assim, temos que a função

$$\pi_K : A \rightarrow \mathcal{L}(K) \quad \text{dada por} \quad a \mapsto \iota^* \circ \pi(a) \circ \iota$$

é um $*$ -homomorfismo e, portanto, (K, π_K) é também representação de A .

No caso $K = \overline{[\pi(A)H]}$, temos que K é invariante por $\pi(A)$, e (K, π_K) é não degenerada, já que vale $[\pi(A)K] = [\pi(A)H]$ (esta igualdade é verificada pois A possui aproximação da unidade). Além disso, temos

$$\|\pi(a)\| = \|\pi_K(a)\|, \quad \text{para todo } a \in A.$$

Usaremos esse artifício algumas vezes para reduzirmos demonstrações ao caso não degenerado.

A seguir, relembremos a definição de equivalência unitária entre representações, segundo a qual temos que toda representação não degenerada de uma $*$ -álgebra de Banach com aproximação da unidade é equivalente a uma soma direta de representações do tipo (H_f, π_f) .

DEFINIÇÃO 1.2.16. Sejam (H_1, π_1) e (H_2, π_2) representações de uma $*$ -álgebra de Banach A . Diremos que (H_1, π_1) é unitariamente equivalente a (H_2, π_2) , se existir um operador unitário

$$u : H_1 \rightarrow H_2 \quad \text{tal que} \quad \pi_2(a) = u \pi_1(a) u^*, \quad \text{qualquer que seja } a \in A.$$

Voltemos a falar um pouco sobre a representação GNS.

DEFINIÇÃO 1.2.17. Seja (H, π) uma representação da $*$ -álgebra A . Diremos que $x \in H$ é um vetor cíclico para (H, π) , se $[\pi(A)x]$ é denso em H . Nesse caso, (H, π) será chamada representação cíclica.

TEOREMA 1.2.18. *Sejam A uma $*$ -álgebra de Banach com aproximação da unidade e f um funcional positivo contínuo em A . Então existe um único vetor $x_f \in H_f$ tal que vale*

$$f(a) = \langle \pi_f(a)x_f, x_f \rangle, \text{ para todo } a \in A.$$

Além disso, $\|x_f\|^2$ é igual a $\|f\|$ e x_f é um vetor cíclico para (H_f, π_f) .

Demonstração:

Consideremos o funcional

$$g: A/N_f \rightarrow \mathbb{C}, \text{ dado por } g(a + N_f) = f(a),$$

que está bem definido e é limitado, pelo item (ii) da Proposição 1.2.3. Assim, g se estende a $\tilde{g}$ funcional de H_f tal que $\|\tilde{g}\| = \|g\|$ e, pelo teorema de Riesz, existe um único $x_f \in H_f$ tal que

$$f(a) = \tilde{g}(a + N_f) = \langle a + N_f, x_f \rangle, \text{ para todo } a \in A. \quad (1.2.3)$$

Para $a, b \in A$, temos

$$\begin{aligned} \langle b + N_f, \pi_f(a)x_f \rangle &= \langle \pi_f(a^*)(b + N_f), x_f \rangle = \langle a^*b + N_f, x_f \rangle = \\ &= f(a^*b) = \langle b + N_f, a + N_f \rangle. \end{aligned}$$

Como isso é válido para todo $b \in A$, temos

$$\pi_f(a)x_f = a + N_f, \text{ para todo } a \in A,$$

de onde concluímos que $[\pi_f(A)x_f]$ é denso em H_f , e que vale

$$f(a) = \langle \pi_f(a)x_f, x_f \rangle, \text{ para todo } a \in A, \quad (1.2.4)$$

juntando com a Equação (1.2.3). Portanto, resta apenas provar que vale $\|x_f\|^2 = \|f\|$.

Pela densidade de $[\pi_f(A)x_f]$ em H_f , concluímos que $\pi_f(A)$ atua não degeneradamente em H_f . Também temos que, se $(u_\lambda)_\lambda$ é uma unidade aproximada de A , então $(\pi_f(u_\lambda))_\lambda$ é unidade aproximada de $\pi_f(A)$. Portanto, pela Proposição 1.2.13, temos que $(\pi_f(u_\lambda))_\lambda$ converge fortemente para id_{H_f} . Assim, temos

$$\|x_f\|^2 = \langle x_f, x_f \rangle = \lim_{\lambda} \langle \pi_f(u_\lambda)x_f, x_f \rangle.$$

Deste fato e da Equação (1.2.4) acima, temos

$$\|x_f\|^2 = \lim_{\lambda} f(u_\lambda) \leq \|f\|. \quad (1.2.5)$$

Mas, novamente por (1.2.4), para todo $a \in A$, vale

$$|f(a)| = |\langle \pi_f(a)x_f, x_f \rangle| \leq \|\pi_f(a)\| \|x_f\|^2.$$

Como π_f é contrativa, tomando o supremo em a com $\|a\| \leq 1$, temos $\|f\| \leq \|x_f\|^2$.

Assim, está provado tudo o que se afirmou sobre x_f . $\square$

O vetor x_f , como acima, é chamado vetor cíclico *canônico* da representação (H_f, π_f) e, freqüentemente, aparecerá explícito na notação (H_f, π_f, x_f) .

Na demonstração acima, ficou provado um fato que enunciaremos como uma proposição.

PROPOSIÇÃO 1.2.19. *Sejam A uma $*$ -álgebra de Banach e $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma aproximação da unidade para A . Se f é funcional positivo contínuo em A , então temos $\|f\| = \lim_\lambda f(u_\lambda)$.*

Demonstração:

Isto pode ser visto na seqüência de desigualdades (1.2.5) da prova acima, já que foi provada a igualdade entre $\|x_f\|^2$ e $\|f\|$. $\square$

COROLÁRIO 1.2.20. *Sejam A uma $*$ -álgebra de Banach e $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma aproximação da unidade para A . Sejam f e g funcionais positivos contínuos em A . Então temos*

$$\|f + g\| = \|f\| + \|g\|.$$

Demonstração:

Basta observarmos que vale

$$\lim_\lambda (f + g)(u_\lambda) = \lim_\lambda f(u_\lambda) + \lim_\lambda g(u_\lambda). \quad \square$$

OBSERVAÇÃO 1.2.21. Ainda sob a proposição anterior, podemos concluir que, se A é sub- C^* -álgebra de $\mathcal{L}(H)$ para algum espaço de Hilbert H , então os funcionais vetoriais dados por vetores de norma 1 são estados de A , desde que A atue não degeneradamente em H . (Isso decorre de combinarmos as Proposições 1.2.13 e 1.2.19). Também temos que, se (H, π) é uma representação fiel de uma C^* -álgebra A , então não é difícil verificar que valem as seguintes afirmações.

- Se f é estado de $\pi(A)$, então $f \circ \pi$ é estado de A .
- Todo estado de A é da forma $f \circ \pi$ para algum f , estado de $\pi(A)$.

Vemos a importância dos estados de uma C^* -álgebra A através da representação universal. A próxima proposição mostra que todo estado pode ser aproximado por estados vetoriais, o que justifica o estudo destes.

PROPOSIÇÃO 1.2.22. *Sejam H um espaço de Hilbert e A uma sub- C^* -álgebra de $\mathcal{L}(H)$ que atua não degeneradamente em H . Então $S(A)$ é o fecho convexo do conjunto*

$$VS(A) = \{\omega_\xi : \xi \in H \text{ e } \|\xi\| = 1\},$$

sob a topologia fraca.*

Demonstração:

A inclusão $VS(A) \subseteq S(A)$ é clara e, pelo corolário acima, temos que $S(A)$ é um conjunto convexo e fechado com relação à topologia fraca*. Portanto, temos que o fecho

convexo de $VS(A)$ está contido em $S(A)$. Para provarmos a inclusão oposta, consideremos, primeiro, o caso em que $\mathbb{1} = \text{id}_H$ pertence a A .

Sabemos, por uma consequência do Teorema 3.21 de [Rud91], que o fecho convexo de $VS(A)$ em A^* , na topologia fraca*, é a intersecção de semi-espacos da forma

$$\Sigma_{(a,\alpha)}, \text{ com } a \in A \text{ e } \alpha \in \mathbb{R},$$

que contêm $VS(A)$, onde $\Sigma_{(a,\alpha)} = \{f \in A^* : \text{Re}(f(a)) \geq \alpha\}$. Portanto, é suficiente mostrarmos que, se o semi-espaco $\Sigma_{(a,\alpha)}$ contém $VS(A)$, então também contém $S(A)$. Como tanto $VS(A)$ quanto $S(A)$ têm como elementos somente funcionais positivos, podemos trabalhar apenas com uma parte de $\Sigma_{(a,\alpha)}$, a saber,

$$\Sigma'_{(a,\alpha)} = \{f \in A^* : f \text{ é positivo e } \text{Re}(f(a)) \geq \alpha\}.$$

Agora, dado um elemento $a \in A$, sabemos que existem u e v auto-adjuntos, tais que $a = u + iv$. Assim, como a imagem de elementos auto-adjuntos por funcionais positivos é real, podemos, ainda, considerar somente os $\Sigma'_{(a,\alpha)}$'s com $a^* = a$.

Antes de continuarmos, observemos que, se $a \in A$ é auto-adjunto e vale $\omega_\xi(a) \geq 0$, qualquer que seja $\xi \in H$ de norma 1, então a é um operador positivo em $\mathcal{L}(H)$ e, portanto, pode ser escrito na forma $a = b^*b$, para algum $b \in A$.

Tomemos, agora, $a \in A$, auto-adjunto e $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $VS(A)$ está contido em $\Sigma'_{(a,\alpha)}$, temos

$$\omega_\xi(a) \geq \alpha, \text{ para todo } \xi \in H, \|\xi\| = 1,$$

ou seja,

$$\omega_\xi(a - \alpha \cdot \mathbb{1}) \geq 0, \text{ para todo } \xi \in H, \|\xi\| = 1,$$

pois, $\omega_\xi(\mathbb{1})$ é 1. Conforme foi observado, concluimos que $a - \alpha \cdot \mathbb{1}$ é positivo e, portanto, que $f(a - \alpha \cdot \mathbb{1})$ é positivo, para todo $f \in S(A)$. Como, pelo Teorema 1.2.5, $f(\mathbb{1})$ é a norma de f , temos $f(a) \geq \alpha$, qualquer que seja $f \in S(A)$, ou seja, f pertence a $\Sigma'_{(a,\alpha)}$. Como já observamos, temos que $S(A)$ está contido no fecho convexo de $VS(A)$, com relação à topologia fraca*.

Para o caso em que A não tem unidade, consideremos a C^* -álgebra $B = A \oplus \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$, que sabemos ser $*$ -isomorfa a $\tilde{A}$. Suponhamos que sejam dados $f \in S(A)$, $a_1, \dots, a_n \in A$ e $\varepsilon > 0$, e provemos que existem $\xi_1, \dots, \xi_m \in H$, de norma 1, tais que vale

$$|f(a_i) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \omega_{\xi_j}(a_i)| < \varepsilon, \text{ para } i = 1, \dots, n, \quad (1.2.6)$$

com os λ_j 's, coeficientes de uma combinação convexa. Estendamos f a um estado de B por

$$\tilde{f}(a + \mu \cdot \mathbb{1}) = f(a) + \mu \|f\|,$$

pelo Teorema 1.2.6. Como $\mathbb{1}$ pertence a B , pelo caso já analisado, $\tilde{f}$ pode ser aproximado por estados vetoriais. Logo, existem $\xi_1, \dots, \xi_m \in H$, de norma 1, tais que vale

$$|\tilde{f}(a_i + 0 \cdot \mathbb{1}) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \omega_{\xi_j}(a_i + 0 \cdot \mathbb{1})| < \varepsilon, \text{ para } i = 1, \dots, n,$$

com os λ_j 's, coeficientes de uma combinação convexa, de onde (1.2.6) segue, obviamente.

Assim, concluímos a prova da proposição. $\square$

O próximo teorema, muito relacionado com a representação GNS de uma $*$ -álgebra de Banach com aproximação da unidade, também será usado no último capítulo. Antes, uma definição.

DEFINIÇÃO 1.2.23. *Sejam H um espaço de Hilbert e B um subconjunto de $\mathcal{L}(H)$. O comutante de B , denotado por B' , será o conjunto*

$$B' = \{c \in \mathcal{L}(H) : cb = bc, \text{ para todo } b \in B\}.$$

TEOREMA 1.2.24. *Sejam f estado e g funcional positivo em uma $*$ -álgebra de Banach com aproximação da unidade, A , tais que $g \leq f$, ou seja, que $f - g$ é positivo. Então existe um único operador $v \in \pi_f(A)' \subseteq \mathcal{L}(H_f)$ tal que*

$$g(a) = \langle \pi_f(a)v x_f, x_f \rangle, \text{ para todo } a \in A.$$

Além disso, $0 \leq v \leq 1$.

Demonstração:

Definamos uma forma sesqui-linear σ em $(A/N_f)^2$ por

$$\sigma(a + N_f, b + N_f) = g(b^*a),$$

que está bem definida, devido à Desigualdade de Cauchy-Schwarz (que está destacada na Observação 1.2.2) e ao fato $g \leq f$. É fácil ver que vale $\|\sigma\| \leq 1$ e, portanto, σ se estende a $\tilde{\sigma}$ forma sesqui-linear em H_f^2 de norma não maior que 1. Logo, existe um operador $v \in \mathcal{L}(H_f)$ tal que valem $\langle v(x), y \rangle = \sigma(x, y)$, quaisquer que sejam $x, y \in H_f$, e $\|v\| \leq 1$. Temos

$$\langle v(a + N_f), a + N_f \rangle = \sigma(a + N_f, a + N_f) = g(a^*a).$$

Como A/N_f é denso em H_f , concluímos que v é positivo.

Provemos, agora, que v pertence a $\pi_f(A)'$. Sejam $a, b, c \in A$, quaisquer e temos

$$\begin{aligned} \langle \pi_f(a)v(b + N_f), c + N_f \rangle &= \langle v(b + N_f), a^*c + N_f \rangle = g(c^*ab) \\ &= \langle v(ab + N_f), c + N_f \rangle = \langle v\pi_f(a)(b + N_f), c + N_f \rangle. \end{aligned}$$

Pela arbitrariedade de a, b e c , podemos concluir que v pertence a $\pi_f(A)'$. Além disso, se $(u_\lambda)_\lambda$ é unidade aproximada de A , então, temos

$$\langle v\pi_f(a)x_f, \pi_f(u_\lambda)x_f \rangle = \langle v(a + N_f), u_\lambda + N_f \rangle = g(u_\lambda a),$$

para todo λ . Assim, tomando o limite em λ , temos

$$\langle v\pi_f(a)x_f, x_f \rangle = g(a), \text{ para todo } a \in A,$$

já que $(\pi_f(u_\lambda))_\lambda$ converge para id_{H_f} na topologia forte de operadores.

A unicidade de tal v decorre do fato de $\pi_f(A)x_f$ ser denso em H_f . $\square$

Sabemos que, numa C^* -álgebra, todo funcional positivo é limitado. Como toda C^* -álgebra possui aproximação da unidade, temos que os resultados desta seção generalizam os que são válidos para C^* -álgebras quaisquer. Porém, para C^* -álgebras temos um resultado muito importante: o de que todo funcional pode ser escrito como combinação linear de 4 funcionais positivos. Usaremos, várias vezes, esse fato.

1.3. Bidual de uma C^* -álgebra

Neste trabalho, será muito importante conhecermos a estrutura de C^* -álgebra que o bidual de uma C^* -álgebra possui. Esta seção trata, com detalhe, deste assunto.

Seja A uma C^* -álgebra não nula e consideremos (H_u, π_u) a representação universal de A . Seja $\mathcal{F}(A) = \overline{\pi_u(A)}^\sigma$ o fecho fraco de $\pi_u(A)$ em $\mathcal{L}(H_u)$. Provemos que existe um homeomorfismo entre $\mathcal{F}(A)$, com a topologia fraca de operadores, e A^{**} , com a topologia fraca*.

Dado um elemento T de $\mathcal{F}(A)$, vamos definir um modo de T atuar nos elementos de A^* . Se f pertence a $S(A)$, então seja $x^f = (x_g)_{g \in S(A)}$ o vetor de H_u dado por

$$x_g = \begin{cases} 0, & \text{se } g \neq f \\ x_f, & \text{se } g = f \end{cases}$$

e temos que x^f satisfaz

$$\langle \pi_u(a)x^f, x^f \rangle = f(a), \text{ para todo } a \in A. \quad (1.3.1)$$

Também temos que, se g é um funcional qualquer de A , é combinação linear de estados. Assim, a função

$$\pi_u(A) \rightarrow \mathbb{C} \text{ dada por } \pi_u(a) \mapsto g(a)$$

é contínua em $\pi_u(A)$ com relação à topologia fraca de operadores, pela Equação (1.3.1). Logo, admite extensão única a $\mathcal{F}(A)$, a qual denotaremos por $\tilde{g}$. Portanto, definamos

$$\Psi : \mathcal{F}(A) \rightarrow A^{**} \text{ por } \Psi(T)(g) = \tilde{g}(T).$$

Temos que, se f é estado de A , então, pela unicidade de $\tilde{f}$, e pela Equação (1.3.1), temos que vale $\tilde{f}(T) = \langle Tx^f, x^f \rangle$ e, portanto, que Ψ é contínua e que a função

$$g \in A^* \mapsto \tilde{g} \in (\mathcal{F}(A))^* \text{ é positiva,} \quad (1.3.2)$$

isto é, leva funcionais positivos em positivos. Vejamos qual a imagem de um elemento da forma $\pi_u(a)$ por Ψ . Se f é estado de A , então temos

$$\tilde{f}(\pi_u(a)) = \langle \pi_u(a)x^f, x^f \rangle = f(a).$$

Logo, concluímos que $\Psi(\pi_u(a))$ é igual a Λ_a , onde $\Lambda : A \rightarrow A^{**}$ é a inclusão natural.

Provemos, agora, que Ψ é injetora. Seja $T \in \mathcal{F}(A)$ tal que $\Psi(T)$ é igual a 0, ou seja, que $\tilde{f}(T)$ é 0, para todo $f \in S(A)$. Seja $\xi \in H_u$, vetor de norma 1, e consideremos f o estado em A dado por $f(a) = \langle \pi_u(a)\xi, \xi \rangle$. Conforme observamos, temos $\tilde{f}(T) = \langle T\xi, \xi \rangle$.

Como $\tilde{f}(T)$ é igual a 0, temos, pela arbitrariedade de ξ e pela Fórmula de Polarização, que T é o operador nulo. Logo, Ψ é injetora.

Para provarmos a sobrejetividade, usaremos o seguinte lema.

LEMA 1.3.1. *Sejam A uma C^* -álgebra e A^{**} o bidual de A . Sejam B^{**} a bola unitária de A^{**} e Λ a inclusão de A em A^{**} . Então, o subconjunto de B^{**} ,*

$$B = \{\Lambda_a : a \in A \text{ e } \|a\| \leq 1\},$$

é denso em B^{**} com a topologia fraca de A^{**} .*

Demonstração:

Suponhamos, por contradição, que exista φ pertencente a $B^{**} - \overline{B}$, onde $\overline{B}$ é o fecho de B com relação à topologia fraca*. Como B é convexo, temos que $\overline{B}$ é um conjunto convexo fechado em A^{**} . Assim, existem $\alpha \in \mathbb{R}$ e F no dual de A^{**} com a topologia fraca*, tal que

$$\operatorname{Re}(F(\varphi)) > \alpha \text{ e } \operatorname{Re}(F(\Lambda_a)) \leq \alpha, \text{ para todo } a \in A \text{ com } \|a\| \leq 1. \quad (1.3.3)$$

Como estamos considerando a topologia fraca* em A^{**} , temos que existe $f \in A^*$ tal que $F(\phi) = \phi(f)$, qualquer que seja $\phi \in A^{**}$. Logo, (1.3.3) acima pode ser substituída por

$$\operatorname{Re}(\varphi(f)) > \alpha \text{ e } \operatorname{Re}(f(a)) \leq \alpha, \text{ para todo } a \in A \text{ com } \|a\| \leq 1,$$

e, a menos de multiplicarmos a por um escalar de módulo 1, podemos concluir que valem $|\varphi(f)| > \alpha$ e $\|f\| \leq \alpha$, o que contraria o fato $\varphi \in B^{**}$.

Temos, portanto, que B é denso em B^{**} com a topologia fraca*. $\square$

Provemos, então, que Ψ é sobrejetora. Sejam $V \in A^{**}$ e $(\Lambda_{a_i})_i \subseteq \Lambda(A)$ um net convergindo para V , pela densidade de $\Lambda(A)$ em A^{**} . Assim, dado $\xi \in H_u$, temos

$$\lim_i \langle \pi_u(a_i)\xi, \xi \rangle = \lim_i \omega_\xi \circ \pi_u(a_i) = \lim_i \Lambda_{a_i}(\omega_\xi \circ \pi_u) = V(\omega_\xi \circ \pi_u).$$

Portanto, usando a Fórmula de Polarização, concluímos que está definida a forma sesquilinear em H_u^2 dada por

$$\beta(\xi, \eta) = \lim_i \langle \pi_u(a_i)\xi, \eta \rangle \text{ para } \xi, \eta \in H_u.$$

A partir do lema, podemos supor o net $(\Lambda_{a_i})_i$ tal que $(a_i)_i$ é um net uniformemente limitado por $\|V\|$. Logo, β é contínua e, assim, existe um único operador $T \in \mathcal{L}(H_u)$ tal que

$$\beta(\xi, \eta) = \langle T\xi, \eta \rangle, \text{ para } \xi, \eta \in H_u.$$

É claro que $(\pi_u(a_i))_i$ converge para T na topologia fraca de operadores. Como Ψ é contínua e $\Psi(\pi_u(a))$ é $\Lambda(a)$, para todo $a \in A$, é fácil ver que $\Psi(T)$ é igual a V . Pela construção acima da inversa de Ψ , não é difícil verificarmos que também se trata de uma função contínua, com o que concluímos que A^{**} e $\overline{\pi_u(A)}^\sigma$ são homeomorfos.

Provemos, agora, que $\mathcal{F}(A)$ é uma sub- C^* -álgebra de $\mathcal{L}(H_u)$ e, assim, consideraremos a estrutura de C^* -álgebra em A^{**} que faz com que Ψ seja $*$ -isomorfismo. Como

$\mathcal{F}(A)$ é fechado na norma, para concluir que é sub- C^* -álgebra, é suficiente provar que é sub- $*$ -álgebra.

Que $\mathcal{F}(A)$ é sub-espço vetorial, é claro. Com relação ao produto, temos, primeiro, a seguinte observação: Seja B uma álgebra de operadores em algum espaço de Hilbert. Então, é fácil ver que, se a é elemento de B e $(b_i)_i$ é um net em B convergindo para $b \in B$ na topologia fraca de operadores, então $(ab_n)_n$ converge para ab nessa topologia.

Suponhamos, portanto, os nets $(a_i)_i$ e $(b_j)_j$ de elementos de $\pi_u(A)$ convergindo para a e b de $\mathcal{F}(A)$, respectivamente. Então, segundo o que foi observado, temos

$$ab = a \lim_j b_j = \lim_j ab_j = \lim_j \lim_i a_i b_j, \quad (1.3.4)$$

a partir do que concluímos que ab é um elemento de $\mathcal{F}(A)$. Portanto, $\mathcal{F}(A)$ é fechado também para o produto. Assim, $\mathcal{F}(A)$ é C^* -álgebra. Logo, o homeomorfismo Ψ acima induz uma estrutura de C^* -álgebra em A^{**} . É muito importante observarmos que essa estrutura faz da inclusão de A em A^{**} um $*$ -homomorfismo.

OBSERVAÇÃO 1.3.2. Sob o que vimos, temos duas noções de positividade no bidual de uma C^* -álgebra A . A primeira, como dual de A^* , ou seja, $\varphi \in A^{**}$ é positivo se e somente se vale $\varphi(f) \geq 0$, para todo funcional positivo $f \in A^*$. A segunda, como C^* -álgebra. Vejamos que tais noções coincidem.

Dado um funcional $g \in A^*$, seja $\tilde{g}$ como na Afirmação (1.3.2). Se $\hat{g}$ é o funcional de A^{**} correspondente a $\tilde{g}$, segundo o $*$ -isomorfismo Ψ , acima, é fácil ver que $\hat{g}$ é igual a Λ_g , onde Λ denota a inclusão canônica de A^* no dual de A^{**} com a topologia fraca*. O importante é observarmos que Λ é sobrejetora e respeita a positividade. Além disso, para cada elemento φ de A^{**} , temos

$$\varphi(f) = \Lambda_f(\varphi), \text{ qualquer que seja } f \in A^*.$$

Assim, para que tenhamos a equivalência das definições, é suficiente lembrarmos que um elemento numa C^* -álgebra B é positivo, se e somente se sua imagem, por qualquer funcional positivo de B , pertence a $\mathbb{R}^+$.

Ainda sobre A^{**} , notemos apenas mais um fato. Temos que, se $(u_\lambda)_\lambda$ é aproximação da unidade para A , então, pela Proposição 1.2.13, $(\pi_u(u_\lambda))_\lambda$ converge fortemente para id_{H_u} . Assim, temos que id_{H_u} pertence a $\mathcal{F}(A)$. Vejamos qual o elemento de A^{**} correspondente a id_{H_u} . Como Ψ é homeomorfismo, temos

$$\Psi(\text{id}_{H_u}) = \lim_\lambda \Psi(\pi_u(u_\lambda))_\lambda = \lim_\lambda \Lambda_{u_\lambda}.$$

Assim, para cada $f \in A^*$, $f \geq 0$, temos

$$\Psi(\text{id}_{H_u})(f) = \lim_\lambda \Lambda_{u_\lambda}(f) = \lim_\lambda f(u_\lambda) = \|f\|,$$

onde a última igualdade vale pela Proposição 1.2.19. Portanto, temos que a imagem de $\text{id}_{H_u} \in \mathcal{F}(A)$ é um elemento F de A^{**} tal que $F(f) = \|f\| = 1$, para todo $f \in S(A)$.

Com isso, encerramos os comentários sobre o bidual de uma C^* -álgebra.

1.4. C^* -álgebra envolvente

Dada A uma $*$ -álgebra de Banach, são contas simples provar que

$\gamma : A \rightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $a \mapsto \sup\{\|\pi(a)\| : \pi \text{ é representação de } A\}$,

é uma C^* -seminorma em A . Assim, γ induz uma C^* -norma, digamos $\tilde{\gamma}$, em A/J , onde J é conjunto dos elementos $a \in A$ tais que $\gamma(a) = 0$.

DEFINIÇÃO 1.4.1. A C^* -álgebra envolvente de uma $*$ -álgebra de Banach A é, sob as notações acima, o completamento de A/J com relação a $\tilde{\gamma}$, e será denotada por $C^*(A)$.

Se φ é a função canônica de A em $C^*(A)$, é rotineiro verificar que φ é $*$ -homomorfismo e, portanto, contrativo.

OBSERVAÇÃO 1.4.2. A C^* -álgebra envolvente de uma $*$ -álgebra de Banach A satisfaz a seguinte propriedade universal. Seja (H, ψ) uma representação de A . Então existe uma (única) representação $(H, \tilde{\psi})$ de $C^*(A)$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{L}(H) \\ \varphi \downarrow & \nearrow \tilde{\psi} & \\ C^*(A) & & \end{array}$$

comuta. De fato, sob as notações acima, é óbvio que ψ se anula em J . Seja, portanto,

$$\bar{\psi} : A/J \rightarrow \mathcal{L}(H) \text{ dada por } (a + J) \mapsto \psi(a),$$

que é, claramente, $*$ -homomorfismo contínuo. Assim, se $\tilde{\psi}$ é a única extensão contínua de $\bar{\psi}$ a $C^*(A)$, é simples ver que $\tilde{\psi}$ é um $*$ -homomorfismo.

Dada uma $*$ -álgebra de Banach A , vejamos como se relacionam os funcionais positivos de A e de $C^*(A)$.

TEOREMA 1.4.3. Sejam A uma $*$ -álgebra de Banach com aproximação da unidade e $C^*(A)$ sua C^* -álgebra envolvente. Então existe uma bijeção que preserva a norma entre o conjunto dos funcionais positivos contínuos de A e o conjunto dos funcionais positivos de $C^*(A)$.

Em particular, há uma correspondência biunívoca entre $S(A)$ e $S(C^*(A))$.

Demonstração:

Seja $\varphi : A \rightarrow C^*(A)$ o $*$ -homomorfismo canônico e denotemos por A_+^* o conjunto dos funcionais positivos contínuos de A e por $C^*(A)_+^*$ o conjunto dos funcionais positivos de $C^*(A)$. Dado $f \in C^*(A)_+^*$, claramente, $f \circ \varphi$ pertence a A_+^* . Assim, está definida a função

$$C^*(A)_+^* \rightarrow A_+^* \text{ dada por } f \mapsto f \circ \varphi,$$

que é contrativa.

Agora, seja $g \in A_+^*$. Queremos saber se existe $\tilde{g}$ positivo em $C^*(A)$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \\ \varphi \downarrow & \nearrow \tilde{g} & \\ C^*(A) & & \end{array}$$

comuta. Para isso, precisamos ver, sob as notações acima, se $g(c)$ é igual a 0, qualquer que seja $c \in J$. Seja (H_g, π_g, x_g) a representação GNS de A associada a g . Pelo Teorema 1.2.18, temos

$$g(a) = \langle \pi_g(a)x_g, x_g \rangle, \text{ para todo } a \in A.$$

Assim, se c pertence a J , temos $\pi_g(c) = 0$ e, portanto, $g(c) = 0$. Logo, está bem definido o funcional

$$\bar{g} : A/J \rightarrow \mathbb{C} \text{ dado por } \bar{g}(a + J) = g(a).$$

Pela equação acima, temos

$$|\bar{g}(a + J)| = |g(a)| \leq \|\pi_g(a)\| \|x_g\|^2.$$

Portanto, sob as notações do começo desta seção, temos

$$|\bar{g}(a + J)| \leq \|x_g\|^2 \cdot \gamma(a) = \|x_g\|^2 \cdot \tilde{\gamma}(a + J).$$

Logo, $\bar{g}$ é contínuo e, assim, se estende a $\tilde{g}$ em $C^*(A)$. Temos que $\tilde{g}$ é positivo pois $\bar{g}$ o é. Além disso, $\|\tilde{g}\|$ é igual a $\|\bar{g}\|$, e a inequação acima, junto com o Teorema 1.2.18, mostra que vale $\|\tilde{g}\| \leq \|g\|$. Assim, o processo acima define uma função, também contrativa, de A_+^* em $C^*(A)_+^*$. Portanto, para concluir o teorema, é suficiente provar que as compostas nos dois sentidos são as respectivas identidades.

Para não carregar demais a notação, representaremos os processos por: compor com φ , e colocar um $\sim$. Dado $f \in C^*(A)_+^*$, vamos verificar se $\widetilde{f \circ \varphi}$ é igual a f . Mas isso equivale a ver se o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f \circ \varphi} & \mathbb{C} \\ \varphi \downarrow & \nearrow f & \\ C^*(A) & & \end{array}$$

comuta, o que é óbvio. No outro sentido, dado $g \in A_+^*$, por construção, temos $\tilde{g} \circ \varphi = g$. Logo, existe a bijeção. Como ambos os processos contraem norma, temos que a bijeção preserva a norma. $\square$

CAPÍTULO 2

Produto tensorial de C^* -álgebras

Neste capítulo, veremos que o produto tensorial algébrico de C^* -álgebras possui estrutura de $*$ -álgebra e que existem várias possíveis C^* -normas em $A \otimes B$ relacionadas com as normas das C^* -álgebras A e B . Estudaremos as principais delas e veremos que, para algumas C^* -álgebras A , todas as C^* -normas em $A \otimes B$ são iguais, qualquer que seja a C^* -álgebra B .

2.1. Definição e principais normas

Começamos estudando o produto tensorial de álgebras. Assumiremos conhecida a definição do produto tensorial $M \otimes N$ dos espaços vetoriais M e N sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$, e também a propriedade universal que $M \otimes N$ satisfaz, que diz:

“Dada uma função bilinear φ de $M \times N$ em um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial P , existe uma única função linear

$$\varphi' : M \otimes N \rightarrow P \text{ tal que } \varphi'(m \otimes n) = \varphi(m, n),$$

quaisquer que sejam $m \in M$ e $n \in N$.”

No que segue, veremos que, dadas duas $*$ -álgebras A e B , o espaço vetorial $A \otimes B$ possui estrutura de $*$ -álgebra. Primeiro, mostremos que existe uma única multiplicação no produto tensorial de duas álgebras A e B satisfazendo

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb' \text{ para } a, a' \in A \text{ e } b, b' \in B.$$

Isto é demonstrado sob duas observações. A primeira é a de que a função $L_a : A \rightarrow A$ dada por $L_a(b) = ab$, sendo linear, implica que

$$L_a \times L_b : A \times B \rightarrow A \otimes B, \text{ dada por } (c, d) \mapsto ac \otimes bd,$$

é bilinear. Assim, seja $L_a \otimes L_b$ a induzida de $L_a \times L_b$ a $A \otimes B$, que é linear. A segunda observação é a de que se X é o espaço vetorial dos operadores lineares de $A \otimes B$, então a função

$$(a, b) \in A \times B \mapsto L_a \otimes L_b \in X$$

também é bilinear. Assim, se M é a induzida da função acima a $A \otimes B$, então temos $M(a \otimes b) = L_a \otimes L_b$ e é simples ver que a função

$$(A \otimes B)^2 \rightarrow A \otimes B \text{ dada por } (c, d) \mapsto M(c)(d)$$

é a multiplicação procurada.

Se A e B são $*$ -álgebras, provemos que $(a \otimes b) \mapsto a^* \otimes b^*$ define uma involução na álgebra $A \otimes B$ com o produto acima. O único fato não trivial é o de que está bem definida, ou seja, que, se vale $\sum_1^n a_j \otimes b_j = 0$, então temos $\sum_1^n a_j^* \otimes b_j^* = 0$.

Suponhamos $\sum_1^n a_j \otimes b_j = 0$ e $\{c_1, \dots, c_m\} \subseteq B$ um conjunto linearmente independente em B que gera o sub-espaço gerado por $\{b_1, \dots, b_n\}$. Temos, para $j = 1, \dots, n$,

$$b_j = \sum_{i=1}^m \lambda_{ij} c_i \text{ e, portanto, } \sum_{i,j} \lambda_{ij} a_j \otimes c_i = 0.$$

Provemos que $\sum_j \lambda_{ij} a_j$ é igual a 0, para $1 \leq i \leq m$. Sejam $\rho_k : B \rightarrow \mathbb{C}$ funcionais lineares tais que

$$\rho_k(c_i) = \delta_{ki} \text{ para } 1 \leq i, k \leq m,$$

e $\tau : A \rightarrow \mathbb{C}$, funcional linear qualquer. Para cada k , temos

$$0 = (\tau \otimes \rho_k) \left(\sum_{i,j} \lambda_{ij} a_j \otimes c_i \right) = \tau \left(\sum_j \lambda_{kj} a_j \right).$$

Pela arbitrariedade de τ , concluímos que vale $\sum_j \lambda_{ij} a_j = 0$, qualquer que seja i . Assim, para todo i , temos $\sum_j \overline{\lambda_{ij}} a_j^* = 0$ e, portanto,

$$\sum_j a_j^* \otimes b_j^* = \sum_j \sum_i a_j^* \otimes \overline{\lambda_{ij}} c_i^* = \sum_i \sum_j \overline{\lambda_{ij}} a_j^* \otimes c_i^* = \sum_i 0 \otimes c_i^* = 0.$$

Concluímos, assim, que $A \otimes B$, com a multiplicação e a involução acima, é uma $*$ -álgebra. Agora, estaremos interessados em estudar as possíveis C^* -normas de $A \otimes B$.

O que segue visa definir, dadas duas C^* -álgebras A e B , um espaço de Hilbert H de maneira que A e B serão representadas em $\mathcal{L}(H)$ e $A \otimes B$ será sub- $*$ -álgebra de $\mathcal{L}(H)$.

TEOREMA 2.1.1. *Sejam H e K espaços de Hilbert. Então existe um único produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $H \otimes K$ tal que*

$$\langle x \otimes y, x' \otimes y' \rangle = \langle x, x' \rangle \langle y, y' \rangle, \text{ para } x, x' \in H \text{ e } y, y' \in K.$$

Demonstração:

Observemos que, se x é um elemento de um espaço de Hilbert, temos que τ_x dado por $\tau_x(y) = \langle x, y \rangle$ é um funcional conjugado-linear e que a função $x \mapsto \tau_x$ é linear. Também vale que, dados τ e ρ funcionais conjugado-lineares de H e K , respectivamente, então existe um único funcional conjugado-linear $\tau \otimes \rho$ em $H \otimes K$ tal que

$$(\tau \otimes \rho)(x \otimes y) = \tau(x)\rho(y), \text{ para } x \in H \text{ e } y \in K.$$

(Para verificar esta última afirmação, basta tomar $\tau \otimes \rho = \overline{(\bar{\tau} \otimes \bar{\rho})}$).

Seja X o espaço vetorial das funções conjugado-lineares em $H \otimes K$. Então, como a função

$$H \times K \rightarrow X, \text{ dada por } (x, y) \mapsto \tau_x \otimes \tau_y$$

é bilinear, seja $M : H \otimes K \rightarrow X$, linear, tal que $M(x \otimes y) = \tau_x \otimes \tau_y$, para $x \in H$ e $y \in K$. Assim,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (H \otimes K)^2 \rightarrow \mathbb{C}, \text{ dada por } (z, z') \mapsto M(z)(z'),$$

é uma forma sesqui-linear em $H \otimes K$ tal que

$$\langle x \otimes y, x' \otimes y' \rangle = \langle x, x' \rangle \langle y, y' \rangle, \text{ para } x, x' \in H \text{ e } y, y' \in K.$$

A unicidade de tal forma sesqui-linear é clara. Provemos que é um produto interno.

Seja $z \in H \otimes K$, $z = \sum_1^n x_j \otimes y_j$ para $x_1, \dots, x_n \in H$ e $y_1, \dots, y_n \in K$. Seja $\{e_1, \dots, e_m\}$ base ortonormal de algum sub-espaço de K que contenha o gerado por $\{y_1, \dots, y_n\}$. Então existem $x'_1, \dots, x'_m \in K$ tais que $z = \sum_1^m x'_j \otimes e_j$. Assim, temos

$$\langle z, z \rangle = \sum_{i,j=1}^m \langle x'_i \otimes e_i, x'_j \otimes e_j \rangle = \sum_{i,j} \langle x'_i, x'_j \rangle \langle e_i, e_j \rangle = \sum_1^m \|x'_j\|^2.$$

Portanto, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é positiva e, se $\langle z, z \rangle = 0$, então temos $x'_j = 0$, para $j = 1, \dots, m$, ou seja, $z = 0$. Logo, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno. $\square$

Denotaremos por $H \hat{\otimes} K$ o completamento de $H \otimes K$ com relação a esse produto interno.

Vejamos, agora, um lema a partir do qual veremos $\mathcal{L}(H)$ e $\mathcal{L}(K)$ como sub- C^* -álgebras de $\mathcal{L}(H \hat{\otimes} K)$, para H e K espaços de Hilbert.

LEMA 2.1.2. *Sejam H e K espaços de Hilbert e suponhamos u em $\mathcal{L}(H)$ e v em $\mathcal{L}(K)$. Então existe um único operador $u \hat{\otimes} v \in \mathcal{L}(H \hat{\otimes} K)$ tal que*

$$(u \hat{\otimes} v)(x \otimes y) = u(x) \otimes v(y), \text{ para } x \in H \text{ e } y \in K.$$

Além disso, vale $\|u \hat{\otimes} v\| = \|u\| \|v\|$.

Demonstração:

Seja $u \otimes v : H \otimes K \rightarrow H \otimes K$ a única função linear tal que $(u \otimes v)(x \otimes y) = u(x) \otimes v(y)$, para $x \in H$ e $y \in K$. Provemos que é contínua supondo, sem perda de generalidade, que u e v são unitários, já que os unitários geram, linearmente, as C^* -álgebras.

Se z é um elemento de $H \otimes K$, podemos supor $z = \sum_1^n x_j \otimes y_j$ com $\{y_1, \dots, y_n\}$ ortonormal (como no teorema anterior). Então, como v é unitário, temos que $\{v(y_1), \dots, v(y_n)\}$ também é ortonormal. Assim, temos

$$\|(u \otimes v)(z)\|^2 = \left\| \sum_1^n u(x_j) \otimes v(y_j) \right\|^2 = \sum_1^n \|u(x_j)\|^2 \|v(y_j)\|^2.$$

Usando novamente o fato de u e v serem unitários, temos que $\sum_1^n \|u(x_j)\|^2 \|v(y_j)\|^2$ é igual a $\sum_1^n \|x_j\|^2 \|y_j\|^2$ que, por sua vez, é igual a $\|z\|^2$. Logo, $u \otimes v$ é contínua. Seja $u \hat{\otimes} v$ a extensão contínua de $u \otimes v$ a $H \hat{\otimes} K$. É simples vermos que valem

$$(u \hat{\otimes} v)(u' \hat{\otimes} v') = uu' \hat{\otimes} vv' \text{ e } (u \hat{\otimes} v)^* = u^* \hat{\otimes} v^*,$$

quaisquer que sejam $u, u' \in \mathcal{L}(H)$ e $v, v' \in \mathcal{L}(K)$. Também é fácil verificarmos que as funções

$$u \in \mathcal{L}(H) \mapsto u \hat{\otimes} \text{id}_K \in \mathcal{L}(H \hat{\otimes} K) \quad \text{e} \quad v \in \mathcal{L}(K) \mapsto \text{id}_H \hat{\otimes} v \in \mathcal{L}(H \hat{\otimes} K)$$

são $*$ -homomorfismos injetores e, portanto, isometrias. Logo, temos $\|u \hat{\otimes} \text{id}\| = \|u\|$ e $\|\text{id} \hat{\otimes} v\| = \|v\|$. Assim, temos

$$\|u \hat{\otimes} v\| = \|(u \hat{\otimes} \text{id})(\text{id} \hat{\otimes} v)\| \leq \|u\| \|v\|.$$

Para provar a desigualdade contrária, suponhamos u e v não nulos e ε positivo, $\varepsilon < \min\{\|u\|, \|v\|\}$. Sejam $x \in H$ e $y \in K$, ambos com norma 1, tais que

$$\|u(x)\| > \|u\| - \varepsilon \quad \text{e} \quad \|v(y)\| > \|v\| - \varepsilon.$$

Assim, temos

$$\|(u \hat{\otimes} v)(x \otimes y)\| = \|u(x) \otimes v(y)\| = \|u(x)\| \|v(y)\| > (\|u\| - \varepsilon)(\|v\| - \varepsilon),$$

para ε positivo, tão pequeno quanto se queira, ou seja, $\|u \hat{\otimes} v\| \geq \|u\| \|v\|$. $\square$

O próximo teorema será usado para exibirmos uma C^* -norma em $A \otimes B$. Na demonstração usaremos um lema e o seguinte fato que tem prova simples. Dadas $*$ -álgebras A, B e C , e $*$ -homomorfismos $\varphi : A \rightarrow C$ e $\psi : B \rightarrow C$, então, se os elementos de $\varphi(A)$ comutam com os de $\psi(B)$, então existe um único $*$ -homomorfismo

$$\pi : A \otimes B \rightarrow C \quad \text{tal que} \quad \pi(a \otimes b) = \varphi(a)\psi(b) \quad \text{para} \quad a \in A \quad \text{e} \quad b \in B.$$

LEMA 2.1.3. *Sejam H e K espaços de Hilbert e suponhamos $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{L}(H)$ e $b_1, \dots, b_n \in \mathcal{L}(K)$ tais que vale $\sum_i a_i \hat{\otimes} b_i = 0$, com $\{b_1, \dots, b_n\}$ linearmente independente. Então, temos $a_1 = \dots = a_n = 0$.*

Demonstração:

Dado $x \in H$, seja $\{e_1, \dots, e_m\}$ uma base ortonormal de algum sub-espaço não nulo de H , que contenha o gerado por $\{a_1(x), \dots, a_n(x)\}$. Então temos que existem λ_{ij} com $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$ tais que

$$a_i(x) = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} e_j, \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.1.1)$$

Qualquer que seja $y \in K$, temos

$$0 = \sum_{i=1}^n a_i \hat{\otimes} b_i(x \otimes y) = \sum_{i,j} \lambda_{ij} e_j \otimes b_i(y) = \sum_j \left(e_j \otimes \left(\sum_i \lambda_{ij} b_i(y) \right) \right).$$

Como na página 20, concluímos que, para cada j , $1 \leq j \leq m$, o vetor $\sum_i \lambda_{ij} b_i(y)$ é o vetor nulo. Pela arbitrariedade de y e pela independência linear de $\{b_i : i = 1, \dots, n\}$, temos que, para cada i e cada j , λ_{ij} é zero. Assim, na Equação (2.1.1), temos $a_i(x) = 0$, para $1 \leq i \leq n$. Como x foi tomado qualquer, temos que os operadores a_i são nulos, para cada i , conforme queríamos demonstrar. $\square$

TEOREMA 2.1.4. Suponhamos (H, φ) e (K, ψ) representações das C^* -álgebras A e B , respectivamente. Então existe um único $*$ -homomorfismo $\pi : A \otimes B \rightarrow \mathcal{L}(H \hat{\otimes} K)$ tal que

$$\pi(a \otimes b) = \varphi(a) \hat{\otimes} \psi(b) \text{ para } a \in A \text{ e } b \in B.$$

Além disso, se φ e ψ são injetoras, também o é π .

Demonstração:

As funções

$$\varphi' : A \rightarrow \mathcal{L}(H \hat{\otimes} K), \quad a \mapsto \varphi(a) \hat{\otimes} \text{id}$$

e

$$\psi' : B \rightarrow \mathcal{L}(H \hat{\otimes} K), \quad b \mapsto \text{id} \hat{\otimes} \psi(b)$$

são $*$ -homomorfismos e os elementos de $\varphi'(A)$ e $\psi'(B)$ comutam entre si. Portanto, conforme foi observado, temos que existe um único $*$ -homomorfismo $\pi : A \otimes B \rightarrow \mathcal{L}(H \hat{\otimes} K)$ tal que

$$\pi(a \otimes b) = \varphi(a) \hat{\otimes} \psi(b) \text{ para } a \in A \text{ e } b \in B.$$

Suponhamos, agora, que φ e ψ sejam injetoras e provemos que π também o é. Seja c pertencente a $\ker(\pi)$. Temos que c pode ser escrito na forma $\sum_1^n a_j \otimes b_j$, onde $\{b_1, \dots, b_n\}$ é linearmente independente. Por ψ ser injetora, também é linearmente independente o conjunto $\{\psi(b_1), \dots, \psi(b_n)\}$. Como temos

$$0 = \pi(c) = \sum_1^n \varphi(a_i) \hat{\otimes} \psi(b_i),$$

pelo lema, concluímos que $\varphi(a_i)$ é nulo, para todo i . Agora, pela injetividade de φ , temos que a_i é igual a 0, para cada i . Logo, temos que c é nulo e, assim, que π é injetora. $\square$

Denotaremos π por $\varphi \hat{\otimes} \psi$.

Sejam A e B duas C^* -álgebras não nulas com representações universais (H, φ) e (K, ψ) , respectivamente. Então $\pi = \varphi \hat{\otimes} \psi$ é um $*$ -homomorfismo injetor de $A \otimes B$ em $\mathcal{L}(H \hat{\otimes} K)$ e, portanto, a função

$$\|\cdot\|_* : A \otimes B \rightarrow \mathbb{R}^+, \text{ dada por } c \mapsto \|\pi(c)\|,$$

é uma C^* -norma em $A \otimes B$, a qual chamaremos *norma espacial*. O completamento de $A \otimes B$ com relação a $\|\cdot\|_*$ é chamado *produto tensorial espacial* de A e B , e denotado por $A \otimes_* B$.

Neste ponto, gostaríamos de chamar a atenção do leitor para a notação. Encontramos, com frequência, na literatura, o símbolo $A \odot B$ para representar o produto tensorial algébrico e $A \otimes B$ para o produto tensorial espacial, o que não ocorre neste trabalho.

DEFINIÇÃO 2.1.5. Sejam A e B duas C^* -álgebras e γ uma seminorma em $A \otimes B$. Diremos que γ é tensorial se vale

$$\gamma(a \otimes b) = \|a\| \|b\| \text{ quaisquer que sejam } a \in A \text{ e } b \in B.$$

Se valer apenas $\gamma(a \otimes b) \leq \|a\| \|b\|$, diremos que γ é sub-tensorial.

OBSERVAÇÃO 2.1.6. Devido ao fato de as representações universais serem isométricas e ao Lema 2.1.2, temos que a norma espacial é tensorial. Na verdade, vale que toda C^* -seminorma é sub-tensorial. Aqui, assumiremos verdadeira tal afirmação, que é simples de ser verificada no caso de uma C^* -norma, quando as álgebras têm unidade. Uma prova para o outro caso pode ser encontrada em [Mur90], na página 192.

Pelo fato observado acima, podemos definir a função

$$A \otimes B \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ dada por } c \mapsto \{\sup \gamma(c) : \gamma \text{ é } C^*\text{-seminorma em } A \otimes B\},$$

que é claramente uma C^* -norma em $A \otimes B$, a qual será denotada por $\|\cdot\|_{\max}$ e chamada *norma máxima* de $A \otimes B$. $A \otimes_{\max} B$ é o completamento de $A \otimes B$ com relação a $\|\cdot\|_{\max}$. Dada uma C^* -norma γ em $A \otimes B$, denotaremos por $A \otimes_{\gamma} B$ o completamento de $A \otimes B$ com relação a γ . Da maneira como $\|\cdot\|_{\max}$ foi definida, é fácil ver que, qualquer que seja a C^* -norma γ em $A \otimes B$, existe um $*$ -homomorfismo canônico de $A \otimes_{\max} B$ em $A \otimes_{\gamma} B$ que, restrito a $A \otimes B$, é a identidade.

Também segue da observação que, se definirmos a função

$$\|\cdot\|_{\text{proj}} : A \otimes B \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ por } \|c\|_{\text{proj}} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|a_i\| \|b_i\| : c = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \right\},$$

teremos $\|c\|_{\max} \leq \|c\|_{\text{proj}}$, qualquer que seja $c \in A \otimes B$. Não é difícil ver que $\|\cdot\|_{\text{proj}}$ faz de $A \otimes B$ uma $*$ -álgebra normada, porém não há motivos para que $A \otimes_{\text{proj}} B$ seja uma C^* -álgebra. $\|\cdot\|_{\text{proj}}$ é dita a *norma projetiva* de $A \otimes B$.

OBSERVAÇÃO 2.1.7. O *produto tensorial projetivo*, $A \otimes_{\text{proj}} B$ satisfaz a seguinte propriedade. Sejam A, B e C três C^* -álgebras e $\beta : A \times B \rightarrow C$ uma função bilinear tal que existe $M > 0$, com

$$\|\beta(a, b)\| \leq M \|a\| \|b\|, \text{ quaisquer que sejam } a \in A \text{ e } b \in B.$$

Então, se f é a induzida de β a $A \otimes B$, então f é contínua com relação à norma projetiva e vale $\|f\| \leq M$. De fato, seja $x \in A \otimes B$ tal que $x = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i$. Temos

$$\|f(x)\| = \left\| \sum_i \beta(a_i, b_i) \right\| \leq M \cdot \sum_i \|a_i\| \|b_i\|.$$

Portanto, temos

$$\|f(x)\| \leq M \cdot \inf \left\{ \sum_i \|a_i\| \|b_i\| : x = \sum_i a_i \otimes b_i \right\} = M \|x\|_{\text{proj}},$$

e, assim, f se estende a $A \otimes_{\text{proj}} B$. Se $\tilde{f}$ é essa extensão, temos que vale $\|f\| = \|\tilde{f}\| \leq M$.

O próximo teorema faz uso dessa observação.

TEOREMA 2.1.8. A função $\varphi : (A \otimes_{\text{proj}} B)^* \rightarrow \mathcal{L}(A, B^*)$, dada por

$$\varphi(f) = T_f, \text{ onde } T_f(a)(b) = f(a \otimes b), \text{ para } a \text{ em } A \text{ e } b \text{ em } B,$$

é um isomorfismo isométrico.

Demonstração:

Dado f funcional em $A \otimes_{\text{proj}} B$, provemos que T_f pertence a $\mathcal{L}(A, B^*)$, ou seja, que φ está bem definida. Temos

$$\begin{aligned} \|T_f\| &= \sup_{\|a\| \leq 1} \|T_f(a)\| = \sup_{\|a\| \leq 1} \left\{ \sup_{\|b\| \leq 1} |T_f(a)(b)| \right\} = \\ &= \sup_{\|a\| \leq 1, \|b\| \leq 1} |f(a \otimes b)| \leq \sup_{\|a\| \leq 1, \|b\| \leq 1} \|f\| \|a \otimes b\|_{\text{proj}}. \end{aligned}$$

Como $\|\cdot\|_{\text{proj}}$ é sub-tensorial, temos $\|a \otimes b\|_{\text{proj}} \leq \|a\| \|b\|$ e, portanto, temos $\|T_f\| \leq \|f\|$. Concluimos, assim, que φ está bem definida e é contrativa. Claramente, φ é linear. Provemos que é injetora.

Se vale $T_f = T_g$, para f, g em $(A \otimes_{\text{proj}} B)^*$, temos $f = g$ em $A \otimes B$. Logo, f é igual a g em $A \otimes_{\text{proj}} B$, pois $A \otimes B$ é denso em $A \otimes_{\text{proj}} B$, e f e g são contínuas.

Para provar que φ é sobrejetora, seja $T \in \mathcal{L}(A, B^*)$. Temos que a função

$$\beta : A \times B \rightarrow \mathbb{C} \text{ dada por } \beta(a, b) = T(a)(b)$$

é bilinear tal que

$$|\beta(a, b)| \leq \|T\| \|a\| \|b\|, \text{ quaisquer que sejam } a \in A \text{ e } b \in B.$$

Portanto, pela observação anterior, temos que existe $f \in (A \otimes_{\text{proj}} B)^*$ tal que $\|f\| \leq \|T\|$.

Assim, temos que φ é inversível e sua inversa também é contrativa. Logo, φ é isométrica. $\square$

O teorema seguinte relaciona a C^* -álgebra envolvente de $A \otimes_{\text{proj}} B$ e a C^* -álgebra $A \otimes_{\text{max}} B$, de onde tiraremos uma conclusão fundamental para o próximo capítulo.

TEOREMA 2.1.9. *Sejam A e B duas C^* -álgebras. Então a C^* -álgebra envolvente de $A \otimes_{\text{proj}} B$ é $*$ -isomorfa a $A \otimes_{\text{max}} B$.*

Demonstração:

Seja $\psi : A \otimes_{\text{proj}} B \rightarrow A \otimes_{\text{max}} B$ o $*$ -homomorfismo canônico, ou seja, aquele que restrito a $A \otimes B$ é a identidade, e seja φ a aplicação de $A \otimes_{\text{proj}} B$ em $C^*(A \otimes_{\text{proj}} B)$. Como $A \otimes_{\text{proj}} B$ é uma $*$ -álgebra de Banach, temos que a função

$$\gamma : A \otimes_{\text{proj}} B \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ dada por } c \mapsto \sup\{\|\pi(c)\| : \pi \text{ é representação de } A \otimes_{\text{proj}} B\}$$

é uma C^* -seminorma em $A \otimes_{\text{proj}} B$. Assim, se J é dado por

$$J = \{c \in A \otimes_{\text{proj}} B : \gamma(c) = 0\},$$

temos que γ induz uma C^* -norma em $Q = A \otimes_{\text{proj}} B / J$, digamos, $\tilde{\gamma}$. A C^* -álgebra envolvente de $A \otimes_{\text{proj}} B$ é o completamento de Q com relação a $\tilde{\gamma}$.

Se (H, π) é a representação universal de $A \otimes_{\text{max}} B$, então $\pi \circ \psi$ é uma representação de $A \otimes_{\text{proj}} B$ e, portanto, anula-se em J . Como π é fiel, temos que ψ se anula em J . Assim, concluimos que ψ induz $\tilde{\psi} : C^*(A \otimes_{\text{proj}} B) \rightarrow A \otimes_{\text{max}} B$ tal que $\tilde{\psi}(\dot{c}) = \psi(c)$, onde $\dot{c}$ representa a classe de c em Q , para todo $c \in A \otimes_{\text{proj}} B$. Assim, temos o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
A \otimes_{\text{proj}} B & \xrightarrow{\psi} & A \otimes_{\text{max}} B \\
\downarrow \varphi & \nearrow \tilde{\psi} & \\
C^*(A \otimes_{\text{proj}} B) & &
\end{array}$$

que é comutativo. Como $\psi|_{A \otimes B}$ é a identidade, temos que $\varphi|_{A \otimes B}$ é injetora. Logo, podemos identificar $A \otimes B$ com sua imagem por φ . Temos, assim, que $C^*(A \otimes_{\text{proj}} B)$ é igual ao completamento de $A \otimes B$ com relação à C^* -norma $\tilde{\gamma}$, já que $\varphi(A \otimes B)$ é denso em $C^*(A \otimes_{\text{proj}} B)$. Pela propriedade universal de $A \otimes_{\text{max}} B$, existe η um $*$ -homomorfismo de $A \otimes_{\text{max}} B$ em $C^*(A \otimes_{\text{proj}} B)$ estendendo a identidade em $A \otimes B$. Portanto, $\tilde{\psi} \circ \eta$ e $\eta \circ \tilde{\psi}$ coincidem com as respectivas identidades em conjuntos densos, o que implica $\tilde{\psi}$ bijetora e, assim, $A \otimes_{\text{max}} B$ isomorfo a $C^*(A \otimes_{\text{proj}} B)$. $\square$

Conforme será provado no Lema 2.3.6, teremos que $A \otimes_{\text{proj}} B$ possui aproximação da unidade. Assim, pelo teorema anterior e pelo Teorema 1.4.3, temos uma bijeção entre $S(A \otimes_{\text{proj}} B)$ e $S(A \otimes_{\text{max}} B)$.

COROLÁRIO 2.1.10. *Sejam A e B C^* -álgebras e seja c um elemento de $A \otimes B$. Então temos*

$$\|c\|_{\text{max}} = \sup\{\|\pi(c)\| : \pi \text{ é representação de } A \otimes B\}.$$

Demonstração:

Sob as mesmas notações do teorema anterior, podemos concluir que vale

$$\|c\|_{\text{max}} = \tilde{\gamma}(c) = \sup\{\|\pi(c)\| : \pi \text{ é representação de } A \otimes_{\text{proj}} B\}.$$

Agora, como toda representação de $A \otimes B$ se estende a uma representação de $A \otimes_{\text{proj}} B$, temos

$$\begin{aligned}
& \sup\{\|\pi(c)\| : \pi \text{ é representação de } A \otimes B\} = \\
& = \sup\{\|\pi(c)\| : \pi \text{ é representação de } A \otimes_{\text{proj}} B\},
\end{aligned}$$

o que prova a igualdade do enunciado. $\square$

2.2. C^* -álgebras nucleares

DEFINIÇÃO 2.2.1. *Uma C^* -álgebra A é dita nuclear se, para cada C^* -álgebra B , existe uma única C^* -norma em $A \otimes B$.*

Como podemos ver, a definição de nuclearidade de uma C^* -álgebra A não é dada em função somente de A . No Capítulo 3, veremos uma propriedade (dependendo somente de A) que A satisfará se e somente se for nuclear. A prova desta equivalência é o objetivo central deste trabalho.

Existem vários exemplos de C^* -álgebras nucleares. Dentre elas, as de dimensão finita e as AF-álgebras (Seção 6.3 de [Mur90]), as abelianas (Teorema 6.4.15 de [Mur90]), a C^* -álgebra de um grupo discreto amenable ([Lan73]) e as álgebras de Cuntz ([Cun77]).

No último capítulo, veremos uma demonstração alternativa (isto é, diferente da que está na referência citada) para a nuclearidade das C^* -álgebras comutativas com unidade.

2.3. Minimalidade da norma espacial

A existência de uma norma mínima é muito importante, especialmente, para estudarmos nuclearidade, já que, para verificarmos se a C^* -norma é única, é suficiente vermos se a norma mínima coincide com a máxima. Aqui, veremos uma outra maneira de se definir a norma espacial, maneira esta, que será usada na prova da minimalidade. Parte significativa desta, entretanto, será omitida, podendo ser encontrada cuidadosamente escrita na Seção 6.4 de [Mur90] ou em [Tak64].

O que vem a seguir visa explicitar maneiras alternativas para se definir a norma espacial. A primeira delas nos permitirá concluir, por exemplo, que dados estados τ e ρ nas C^* -álgebras A e B , respectivamente, $\tau \otimes \rho$ é contínuo em $A \otimes B$ com relação a essa norma.

OBSERVAÇÃO 2.3.1. Sejam A e B C^* -álgebras e $(H_\lambda, \varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ e $(K_\mu, \psi_\mu)_{\mu \in M}$ famílias de representações de A e B , respectivamente. Consideremos $(H, \varphi) = \oplus_\lambda (H_\lambda, \varphi_\lambda)$ e $(K, \psi) = \oplus_\mu (K_\mu, \psi_\mu)$. São contas rotineiras provar que existe um único unitário

$$u : H \hat{\otimes} K \rightarrow \bigoplus_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \mu \in M}} H_\lambda \hat{\otimes} K_\mu,$$

tal que, para $x = (x_\lambda)_\lambda$ e $y = (y_\mu)_\mu$, tenhamos $u(x \otimes y) = (x_\lambda \otimes y_\mu)_{\lambda, \mu}$.

Para cada $c \in A \otimes B$, vale

$$(\varphi \hat{\otimes} \psi)(c) = u^* \left(\bigoplus_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \mu \in M}} (\varphi_\lambda \hat{\otimes} \psi_\mu)(c) \right) u.$$

(Isso pode ser verificado, tomando-se, primeiro, c do tipo $a \otimes b$). Concluimos que vale

$$\|(\varphi \hat{\otimes} \psi)(c)\| = \sup_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \mu \in M}} \|(\varphi_\lambda \hat{\otimes} \psi_\mu)(c)\|.$$

TEOREMA 2.3.2. Sejam A e B C^* -álgebras não nulas e $c \in A \otimes B$. Então

$$\|c\|_* = \sup_{\substack{\tau \in S(A) \\ \rho \in S(B)}} \|(\pi_\tau \hat{\otimes} \pi_\rho)(c)\|.$$

Demonstração:

Sejam (H, φ) e (K, ψ) as representações universais de A e B , respectivamente. Pela definição de norma espacial, temos $\|c\|_* = \|(\varphi \hat{\otimes} \psi)(c)\|$. Como valem

$$(H, \varphi) = \bigoplus_{\tau \in S(A)} (H_\tau, \pi_\tau) \text{ e } (K, \psi) = \bigoplus_{\rho \in S(B)} (H_\rho, \pi_\rho),$$

temos que o teorema segue da observação anterior. $\square$

OBSERVAÇÃO 2.3.3. Suponhamos que (H, φ) e (K, ψ) sejam representações das C^* -álgebras A e B unitariamente equivalentes a (H', φ') e (K', ψ') , respectivamente. Então é simples verificar que existe um unitário

$$u : H \hat{\otimes} K \rightarrow H' \hat{\otimes} K', \text{ tal que } (\varphi' \hat{\otimes} \psi')(c) = u((\varphi \hat{\otimes} \psi)(c))u^*,$$

para todo $c \in A \otimes B$.

TEOREMA 2.3.4. *Sejam A e B C^* -álgebras não nulas e (H, φ) e (K, ψ) representações de A e B , respectivamente. Então, para $c \in A \otimes B$, temos*

$$\|(\varphi \hat{\otimes} \psi)(c)\| \leq \|c\|_*.$$

Demonstração:

Provemos, primeiro, que podemos supor (H, φ) e (K, ψ) não degeneradas. Sob as notações da página 7, sejam $H' = \overline{[\varphi(A)H]}$ e $K' = \overline{[\psi(B)K]}$. Então temos

$$H' \hat{\otimes} K' = \overline{[(\varphi \hat{\otimes} \psi)(A \otimes B)(H \hat{\otimes} K)]},$$

e uma conta rotineira mostra que, para todo $c \in A \otimes B$, vale

$$(\varphi \hat{\otimes} \psi)_{H' \hat{\otimes} K'}(c) = (\varphi_{H'} \hat{\otimes} \psi_{K'})(c).$$

Pela Observação 1.2.15, sabemos que vale $\|(\varphi \hat{\otimes} \psi)(c)\| = \|(\varphi \hat{\otimes} \psi)_{H' \hat{\otimes} K'}(c)\|$. Portanto, pela equação acima, temos

$$\|(\varphi \hat{\otimes} \psi)(c)\| = \|(\varphi_{H'} \hat{\otimes} \psi_{K'})(c)\|,$$

de onde concluímos que podemos supor a não degenerabilidade das representações.

Assim, supondo que (H, φ) e (K, ψ) são não degeneradas, temos que existem conjuntos Λ e M tais que (H, φ) e (K, ψ) são unitariamente equivalentes a $\oplus_{\lambda \in \Lambda} (H_{\tau_\lambda}, \pi_{\tau_\lambda})$ e $\oplus_{\mu \in M} (H_{\rho_\mu}, \pi_{\rho_\mu})$, respectivamente, onde τ_λ pertence a $S(A)$, para todo $\lambda \in \Lambda$, e ρ_μ pertence a $S(B)$, para todo $\mu \in M$. Pelas Observações 2.3.1 e 2.3.3 acima, para todo $c \in A \otimes B$, temos

$$\|(\varphi \hat{\otimes} \psi)(c)\| = \sup_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \mu \in M}} \|\pi_{\tau_\lambda} \hat{\otimes} \pi_{\rho_\mu}(c)\|,$$

e, portanto,

$$\|(\varphi \hat{\otimes} \psi)(c)\| \leq \sup_{\substack{\tau \in S(A) \\ \rho \in S(B)}} \|(\pi_\tau \hat{\otimes} \pi_\rho)(c)\| = \|c\|_*.$$

Assim, o teorema está demonstrado. □

COROLÁRIO 2.3.5. *Sejam A e B duas C^* -álgebras não nulas e τ e ρ estados em A e B , respectivamente. Então $\tau \otimes \rho$ é um funcional positivo e contínuo em $A \otimes B$ com relação à norma espacial.*

Demonstração:

Verificando, primeiro, para elementos de $A \otimes B$ da forma $a \otimes b$, teremos que, para todo $c \in A \otimes B$, vale

$$(\tau \otimes \rho)(c) = \langle (\pi_\tau \hat{\otimes} \pi_\rho)(c)(x_\tau \otimes x_\rho), x_\tau \otimes x_\rho \rangle,$$

onde x_τ e x_ρ são os vetores cíclicos de norma 1, das representações GNS de A e B associadas aos estados τ e ρ , respectivamente.

Portanto, temos que $\tau \otimes \rho$ é positivo e que vale

$$|(\tau \otimes \rho)(c)| \leq \|(\pi_\tau \hat{\otimes} \pi_\rho)(c)\| \|x_\tau \otimes x_\rho\|^2 \leq \sup_{\substack{\tau \in S(A) \\ \rho \in S(B)}} \|(\pi_\tau \hat{\otimes} \pi_\rho)(c)\| = \|c\|_*.$$

Logo, o corolário está demonstrado. $\square$

Estudemos, agora, condições para que $\tau \otimes \rho$ possa se estender a um estado, dados os estados τ e ρ em A e B , respectivamente.

LEMA 2.3.6. *Sejam A e B C^* -álgebras e γ uma norma sub-tensorial em $A \otimes B$, que faz de $A \otimes B$ uma $*$ -álgebra normada. Então $A \otimes_\gamma B$ admite uma aproximação da unidade da forma $(u_i \otimes v_i)_{i \in I}$, onde $(u_i)_i$ e $(v_i)_i$ são aproximações da unidade para A e B , respectivamente.*

Demonstração:

Sejam $(u_i)_{i \in I}$ e $(v_j)_{j \in J}$ aproximações da unidade para A e B , respectivamente. Definamos, em $I \times J$, a relação $(i, j) \leq (i', j')$, se $i \leq i'$ e $j \leq j'$. Temos que $\leq$ é reflexiva, transitiva e que faz de $I \times J$ um conjunto dirigido. Se tomarmos $u'_{(i,j)} = u_i$ e $v'_{(i,j)} = v_j$, teremos, sob contas rotineiras, que $(u'_{(i,j)} \otimes v'_{(i,j)})_{(i,j) \in I \times J}$ é uma unidade aproximada para $A \otimes_\gamma B$ do tipo descrito no enunciado. $\square$

TEOREMA 2.3.7. *Sejam A e B C^* -álgebras não nulas e γ uma C^* -norma em $A \otimes B$. Sejam, ainda, τ e ρ estados em A e B , respectivamente, tais que $\tau \otimes \rho$ seja contínuo em $A \otimes B$ com relação a γ . Então $\tau \otimes \rho$ se estende unicamente a um estado em $A \otimes_\gamma B$.*

Demonstração:

Como $A \otimes B$ é denso em $A \otimes_\gamma B$ e $\tau \otimes \rho$ é contínuo com relação a γ , claramente, $\tau \otimes \rho$ se estende a um funcional linear contínuo em $A \otimes_\gamma B$, digamos ω . Resta provar que é positivo e que tem norma 1.

Sejam c em $A \otimes_\gamma B$ e $(c_n)_n \subseteq A \otimes B$ seqüência convergindo para c . Temos que c^*c é igual a $\lim_n c_n^*c_n$ e, portanto, temos

$$\omega(c^*c) = \lim_n \omega(c_n^*c_n) = \lim_n (\tau \otimes \rho)(c_n^*c_n),$$

e este último termo é positivo pelo teorema anterior. Logo, ω é positivo.

Para provar que $\|\omega\|$ é igual a 1, seja $(u_i \otimes v_i)_{i \in I}$ unidade aproximada de $A \otimes_\gamma B$ tal que $(u_i)_i$ e $(v_i)_i$ são aproximações da unidade para A e B , respectivamente. Isso é possível pelo lema anterior, lembrando que estamos assumindo que toda C^* -norma é sub-tensorial. Usando a Proposição 1.2.19, temos

$$\|\omega\| = \lim_i \omega(u_i \otimes v_i) = \lim_i \tau(u_i) \rho(v_i) = \|\tau\| \|\rho\| = 1.$$

Portanto, ω é um estado de $A \otimes_\gamma B$. □

Denotaremos ω por $\tau \otimes_\gamma \rho$.

TEOREMA 2.3.8. *Sob as mesmas hipóteses do teorema anterior, temos que existe um operador unitário*

$$u : H_\tau \hat{\otimes} H_\rho \rightarrow H_{\tau \otimes_\gamma \rho} \text{ tal que } \pi_{\tau \otimes_\gamma \rho}(c) = u(\pi_\tau \hat{\otimes} \pi_\rho)(c)u^*,$$

para todo $c \in A \otimes B$.

Demonstração:

Sejam $\varphi = \pi_\tau \hat{\otimes} \pi_\rho$, $\omega = \tau \otimes_\gamma \rho$ e $y = x_\tau \otimes x_\rho$, que tem norma 1. Provemos, primeiro, que vale

$$\omega(c) = \langle \varphi(c)y, y \rangle, \text{ para todo } c \in A \otimes B.$$

Temos, para $c = a \otimes b$,

$$\begin{aligned} \langle \varphi(c)y, y \rangle &= \langle (\pi_\tau \hat{\otimes} \pi_\rho)(a \otimes b)(x_\tau \otimes x_\rho), x_\tau \otimes x_\rho \rangle = \\ &= \langle \pi_\tau(a)x_\tau, x_\tau \rangle \langle \pi_\rho(b)x_\rho, x_\rho \rangle = \tau(a)\rho(b) = \omega(a \otimes b), \end{aligned}$$

donde concluímos que é verdadeira a afirmação.

Sejam $H_0 = \varphi(A \otimes B)y$ e $K_0 = \pi_\omega(A \otimes B)x_\omega$. Definindo

$$u_0 : H_0 \rightarrow K_0 \text{ por } \varphi(c)y \mapsto \pi_\omega(c)x_\omega,$$

temos, pela equação acima, que u_0 está bem definida e é isometria. Pela densidade de H_0 em $H_\tau \hat{\otimes} H_\rho$ e de K_0 em H_ω , temos que u_0 se estende a uma isometria, u , de $H_\tau \hat{\otimes} H_\rho$ em H_ω . Como u preserva a norma, preserva o produto interno. Assim, é fácil ver que $u^*u = \text{id}$. Como u é inversível, temos que é unitário. Verificar que vale $\pi_\omega(c) = u(\varphi(c))u^*$, para todo $c \in A \otimes B$, é simples. Logo, concluímos a demonstração. □

Vejamos, enfim, a outra caracterização para a norma espacial e, em seguida, a demonstração de sua minimalidade.

TEOREMA 2.3.9. *Sejam A e B C^* -álgebras não nulas e $c \in A \otimes B$. Então temos*

$$\|c\|_*^2 = \sup_{\substack{\tau \in S(A) \\ \rho \in S(B)}} \sup_{\substack{d \in A \otimes B \\ (\tau \otimes \rho)(d^*d) > 0}} \frac{(\tau \otimes \rho)(d^*c^*cd)}{(\tau \otimes \rho)(d^*d)}.$$

Demonstração:

Se ω é um estado em $A \otimes_* B$, então seja $(H_\omega, \pi_\omega, x_\omega)$ a representação GNS de $A \otimes_* B$ associada a ω . Sob as notações e o que foi feito no Teorema 1.2.18, temos que, para $c, d \in A \otimes B$, valem

$$\pi_\omega(c)(d + N_\omega) = cd + N_\omega \quad \text{e} \quad \|d + N_\omega\|^2 = \omega(d^*d),$$

e que A/N_ω é denso em H_ω . Assim, temos

$$\|\pi_\omega(c)\|^2 = \sup_{\substack{d \in A \otimes B \\ \|d + N_\omega\| > 0}} \frac{\|\pi_\omega(c)(d + N_\omega)\|^2}{\|d + N_\omega\|^2} = \sup_{\substack{d \in A \otimes B \\ \|d + N_\omega\| > 0}} \frac{\|cd + N_\omega\|^2}{\|d + N_\omega\|^2} = \sup_{\substack{d \in A \otimes B \\ \omega(d^*d) > 0}} \frac{\omega(d^*c^*cd)}{\omega(d^*d)}.$$

Pelo Teorema 2.3.2, temos

$$\|c\|_*^2 = \sup_{\substack{\tau \in S(A) \\ \rho \in S(B)}} \|(\pi_\tau \hat{\otimes} \pi_\rho)(c)\|^2.$$

Dados estados $\tau \in S(A)$ e $\rho \in S(B)$, pelo Corolário 2.3.5, $\tau \otimes \rho$ é contínuo com relação à norma $\|\cdot\|_*$. Assim, pelo Teorema 2.3.7, estende-se a $A \otimes_* B$ e, pelo teorema anterior, vale

$$\|\pi_{\tau \otimes \rho}(d)\| = \|(\pi_\tau \hat{\otimes} \pi_\rho)(d)\|,$$

para todo $d \in A \otimes B$.

Juntando essas equações, temos que

$$\|c\|_*^2 = \sup_{\substack{\tau \in S(A) \\ \rho \in S(B)}} \|\pi_{\tau \otimes \rho}(c)\|^2 = \sup_{\substack{\tau \in S(A) \\ \rho \in S(B)}} \sup_{\substack{d \in A \otimes B \\ (\tau \otimes \rho)(d^*d) > 0}} \frac{(\tau \otimes \rho)(d^*c^*cd)}{(\tau \otimes \rho)(d^*d)},$$

e o teorema está demonstrado. $\square$

TEOREMA 2.3.10. *Sejam A e B C^* -álgebras não nulas. Então a norma espacial é mínima entre as C^* -normas de $A \otimes B$.*

Demonstração:

Conforme foi dito no início desta seção, omitiremos uma parte desta prova. O fato que não será justificado é o de que, dada uma C^* -norma em $A \otimes B$ e dados τ e ρ estados em A e B , respectivamente, temos $\tau \otimes \rho$ contínuo em $A \otimes B$ com relação a γ . A demonstração disso é bastante complicada, englobando, entre outros, o fato da nuclearidade das C^* -álgebras abelianas. Demonstrações podem ser encontradas em [Tak64] ou em [Mur90], como já havíamos observado.

Assim, dados τ e ρ estados em A e B , respectivamente, e γ uma C^* -norma em $A \otimes B$, assumamos que $\tau \otimes \rho$ é contínuo com relação a γ . Pelo Teorema 2.3.7, $\tau \otimes_\gamma \rho$ é estado em $A \otimes_\gamma B$. Seja D a unitização de $A \otimes_\gamma B$ e ω o único estado de D que estende $\tau \otimes_\gamma \rho$. Se d pertence a D , temos que o funcional

$$\omega^d : D \rightarrow \mathbb{C}, \quad \text{dado por} \quad \omega^d(c) = \omega(d^*cd),$$

é claramente positivo. Como $\gamma(c^*c) \cdot \mathbb{1} - c^*c$ é positivo, temos

$$\omega^d(\gamma(c^*c) \cdot \mathbb{1} - c^*c) \geq 0,$$

ou seja,

$$\gamma(c^*c) \cdot \omega(d^*d) \geq \omega(d^*c^*cd).$$

Assim, se $\omega(d^*d) > 0$, temos

$$\gamma(c)^2 \geq \omega(d^*c^*cd)/\omega(d^*d).$$

Pelo teorema anterior, temos $\|c\|_*^2 \leq \gamma(c)^2$, para todo $c \in A \otimes B$. Logo, a norma espacial é mínima entre as C^* -normas. $\square$

COROLÁRIO 2.3.11. *Sejam A e B duas C^* -álgebras não nulas e γ uma C^* -norma em $A \otimes B$. Então $\gamma(a \otimes b) = \|a\| \|b\|$, quaisquer que sejam $a \in A$ e $b \in B$.*

Demonstração:

Dados $a \in A$ e $b \in B$, já estávamos supondo a desigualdade $\gamma(a \otimes b) \leq \|a\| \|b\|$, conforme a Observação 2.1.6. Nessa mesma observação, vimos que vale $\|a \otimes b\|_* = \|a\| \|b\|$. Pelo teorema anterior, temos $\|a \otimes b\|_* \leq \gamma(a \otimes b)$. Assim, as três desigualdades citadas provam o corolário. $\square$

COROLÁRIO 2.3.12. *Se (H, φ) e (K, ψ) são representações fiéis das C^* -álgebras não nulas A e B , respectivamente, então, para todo $c \in A \otimes B$, vale*

$$\|(\varphi \hat{\otimes} \psi)(c)\| = \|c\|_*.$$

Demonstração:

Temos que $\varphi \hat{\otimes} \psi$ é injetora, pelo Teorema 2.1.4. Assim, a função

$$A \otimes B \rightarrow \mathbb{R}^+, \text{ dada por } c \mapsto \|(\varphi \hat{\otimes} \psi)(c)\|$$

é uma C^* -norma em $A \otimes B$. Logo, pela minimalidade da norma espacial, temos

$$\|c\|_* \leq \|(\varphi \hat{\otimes} \psi)(c)\|, \text{ para todo } c \in A \otimes B.$$

A desigualdade oposta é válida pelo Teorema 2.3.4, e, assim, vale a igualdade. $\square$

CAPÍTULO 3

Funções completamente positivas

3.1. Definição e observações

Nesta seção, introduziremos o conceito de função completamente positiva que será fundamental neste trabalho.

DEFINIÇÃO 3.1.1. *Sejam A e B duas C^* -álgebras e f em $\mathcal{L}(A, B)$, linear. Diremos que f é positiva se tivermos $f(A^+) \subseteq B^+$, onde A^+ e B^+ simbolizam os conjuntos dos elementos positivos de A e B , respectivamente.*

Observe-se que podemos ter f função positiva entre as C^* -álgebras A e B com

$$f_n : M_n(A) \rightarrow M_n(B) \text{ dada por } f_n((a_{ij})_{ij}) = (f(a_{ij}))_{ij}$$

não positiva para algum n natural, como no seguinte exemplo, para $A = M_2 = B$ e $n = 2$.

Seja $f : M_2 \rightarrow M_2$ a função transposição. Se P e Q são elementos quaisquer de M_2 , temos $f(P^*) = f(P)^*$ e $f(PQ) = f(Q)f(P)$. Assim, temos $f(P^*P) = f(P)f(P)^*$ e, portanto, f é positiva. Porém, vejamos que $f_2 : M_2(M_2) \rightarrow M_2(M_2)$ não o é, sob a identificação de $M_2(M_2)$ com M_4 . De fato, temos que a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ é positiva,}$$

pois é auto-adjunta e possui o conjunto $\{0, 2\}$ como espectro, já que, em M_n , o espectro coincide com o conjunto dos autovalores. No entanto,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ não é positiva,}$$

pois o conjunto de seus autovalores é igual a $\{1, -1\}$.

DEFINIÇÃO 3.1.2. *Sejam A e B C^* -álgebras. Diremos que a função $f \in \mathcal{L}(A, B)$ é completamente positiva, se*

$$f_n : M_n(A) \rightarrow M_n(B), \text{ dada por } f_n((a_{ij})_{ij}) = (f(a_{ij}))_{ij}$$

é positiva, para todo $n \in \mathbb{N}^$.*

Exemplo.

Se f é $*$ -homomorfismo de A em B , então f é uma função completamente positiva.

De fato:

$$\begin{aligned} f_n\left((a_{ij})_{ij}^*(a_{kl})_{kl}\right) &= f_n\left((a_{ji}^*)_{ij}(a_{kl})_{kl}\right) = f_n\left(\left(\sum_j a_{ji}^* a_{jl}\right)_{il}\right) = \\ &= \left(\sum_j f(a_{ji}^* a_{jl})\right)_{il} = \left(\sum_j f(a_{ji})^* f(a_{jl})\right)_{il} = \left(f(a_{ij})\right)_{ij}^* \left(f(a_{kl})\right)_{kl} \geq 0. \end{aligned}$$

Funções completamente positivas possuem uma importante propriedade que vem expressa na próxima proposição. Antes, porém, um lema.

LEMA 3.1.3. *Sejam H um espaço de Hilbert e a, b e c , elementos de $\mathcal{L}(H)$, com a e b positivos e identifiquemos $M_2(\mathcal{L}(H))$ com $\mathcal{L}(H^2)$ por*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 h + a_2 k \\ a_3 h + a_4 k \end{pmatrix}, \text{ para } a_1, \dots, a_4 \text{ em } \mathcal{L}(H) \text{ e } h, k \text{ em } H.$$

Dessa forma, temos

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c^* & b \end{pmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow |\langle ck, h \rangle|^2 \leq \langle ah, h \rangle \langle bk, k \rangle,$$

quaisquer que sejam $h, k \in H$.

Como caso particular, vale

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c^* & b \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow c^* c \leq \|a\|b.$$

Demonstração:

Suponhamos $\begin{pmatrix} a & c \\ c^* & b \end{pmatrix}$ positivo. Equivalentemente, quaisquer que sejam $h, k \in H$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & c \\ c^* & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda h \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle \geq 0,$$

ou seja,

$$\lambda^2 \langle ah, h \rangle + \lambda \langle ck, h \rangle + \lambda \langle c^* h, k \rangle + \langle bk, k \rangle \geq 0.$$

Podemos supor que $\langle ck, h \rangle$ é igual a $|\langle ck, h \rangle|$, a menos de multiplicarmos k por um escalar complexo de módulo 1. Portanto, a inequação acima equivale a

$$\lambda^2 \langle ah, h \rangle + 2\lambda |\langle ck, h \rangle| + \langle bk, k \rangle \geq 0.$$

Como isso é válido para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, essa inequação ainda equivale a

$$|\langle ck, h \rangle|^2 \leq \langle ah, h \rangle \langle bk, k \rangle, \text{ quaisquer que sejam } h, k \in H.$$

Provemos, agora, a última afirmação do enunciado. Tomemos $h = ck$ e temos

$$\|ck\|^4 = \langle ck, ck \rangle^2 \leq \langle ack, ck \rangle \langle bk, k \rangle \leq \|a\| \|ck\|^2 \langle bk, k \rangle.$$

Assim, vale $\langle c^* ck, k \rangle \leq \|a\| \langle bk, k \rangle$, para todo $k \in K$, ou seja, $c^* c \leq \|a\|b$. $\square$

PROPOSIÇÃO 3.1.4. *Sejam A e B duas C^* -álgebras e $f : A \rightarrow B$ completamente positiva. Então, se $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é aproximação da unidade para A , temos*

$$\|f\| = \lim_{\lambda} \|f(u_\lambda)\|.$$

Demonstração:

Provemos, primeiro, que f é limitada, supondo, por contradição, que não o é, ou seja, que exista uma seqüência

$$(a_n)_n, \text{ com } \|a_n\| \leq 1, \text{ tal que } \|f(a_n)\| > n^3, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Podemos supor que os elementos a_n acima são positivos, já que, numa C^* -álgebra, todo elemento é combinação linear de 4 positivos. Temos que, $a = \sum_n a_n/n^2$, é um elemento de A , pois a soma converge. Além disso, a é positivo, pois A^+ é um cone fechado em A . Assim, como a norma é uma função crescente no conjunto dos elementos positivos de uma C^* -álgebra, temos

$$\|f(a)\| \geq \|f(a_n/n^2)\| > n, \text{ para cada } n \in \mathbb{N},$$

o que é um absurdo. Concluimos, portanto, que f deve ser limitada.

No que segue, suporemos A e B álgebras de operadores em espaços de Hilbert, representando-as fielmente, se necessário. Para $a \in A$ e $\lambda \in \Lambda$, temos

$$\begin{pmatrix} u_\lambda^2 & u_\lambda a \\ a^* u_\lambda & a^* a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\lambda & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} u_\lambda & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0.$$

Como f_2 é positiva, temos

$$\begin{pmatrix} f(u_\lambda^2) & f(u_\lambda a) \\ f(a^* u_\lambda) & f(a^* a) \end{pmatrix} \geq 0$$

e, pelo lema,

$$f(a^* u_\lambda) f(u_\lambda a) \leq \|f(u_\lambda^2)\| f(a^* a),$$

já que, para f positiva, vale $f(b^*) = f(b)^*$, para todo $b \in A$. (Isto segue dos dois seguintes fatos: numa C^* -álgebra, todo elemento é combinação linear de positivos; todo elemento positivo é auto-adjunto). Pelo Teorema de Gelfand, temos que $(u_\lambda^2)_\lambda$ também é um net crescente. Assim, tomando o limite em λ , temos

$$f(a)^* f(a) \leq \lim_{\lambda} \|f(u_\lambda^2)\| f(a^* a).$$

Novamente por Gelfand, temos $u_\lambda^2 \leq u_\lambda$ e, portanto, $f(u_\lambda^2) \leq f(u_\lambda)$. Assim, temos

$$\|f(a)\|^2 \leq \lim_{\lambda} \|f(u_\lambda)\| \|f\| \|a\|^2.$$

Agota, tomando o supremo em a com $\|a\| \leq 1$, temos $\|f\|^2 \leq \lim_{\lambda} \|f(u_\lambda)\| \|f\|$, ou seja, $\|f\| \leq \lim_{\lambda} \|f(u_\lambda)\|$. Como a outra desigualdade é clara, temos o que queríamos. $\square$

Haveria muito para se falar sobre funções completamente positivas. Entretanto, não nos estenderemos, citando apenas fatos que serão necessários para o entendimento deste trabalho.

Nosso objetivo, agora, é definir a positividade completa de f quando A ou B sejam, não C^* -álgebras, mas duais de C^* -álgebras. No que segue, dada A uma C^* -álgebra ou dual de uma C^* -álgebra, veremos um modo de identificar $A^* \otimes M_n$, com $(A \otimes M_n)^*$ e, assim, poderemos falar em elementos positivos de $A^* \otimes M_n$ e de $A^{**} \otimes M_n$.

O espaço M_n pode ser identificado com seu dual pelo isomorfismo linear

$$a \mapsto f_a \text{ dado por } f_a(x) = \text{tr}(ax), \quad x \in M_n.$$

Denotaremos por f_{ij} o funcional $f_{e_{ji}}$, que “seleciona” a entrada da posição ij da matriz. Dados A uma C^* -álgebra ou dual de uma C^* -álgebra e g no dual de $A \otimes M_n$, definamos

$$g_{ij} : A \rightarrow \mathbb{C} \text{ por } g_{ij}(a) = g(a \otimes e_{ij}).$$

É fácil ver que g_{ij} pertence a A^* e que vale $g = \sum_{i,j} g_{ij} \otimes f_{ij}$, e, através desta última igualdade, identificaremos $A^* \otimes M_n$ com $(A \otimes M_n)^*$.

DEFINIÇÃO 3.1.5. *Sejam A e B C^* -álgebras ou duais de C^* -álgebras e $f : A \rightarrow B$ linear. Diremos que f é completamente positiva se $f \otimes \mathbb{1} : A \otimes M_n \rightarrow B \otimes M_n$ é positiva, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, onde $\mathbb{1}$ é a identidade ou a identificação citada entre M_n e seu dual.*

Observemos que a definição acima coincide com a anterior no caso de A e B serem C^* -álgebras, pois temos um $*$ -isomorfismo canônico entre $A \otimes M_n$ e $M_n(A)$.

As próximas proposições fornecem maneiras de se trabalhar, na prática, com funções completamente positivas e com elementos positivos de $A \otimes M_n$, onde A é uma C^* -álgebra ou dual de uma C^* -álgebra.

PROPOSIÇÃO 3.1.6. *Seja A uma C^* -álgebra. Um elemento de $A \otimes M_n$ é positivo se e somente se é soma de elementos da forma $\sum_{i,j=1}^n x_i^* x_j \otimes e_{ij}$ para $x_1, \dots, x_n \in A$.*

Demonstração:

Observemos, em primeiro lugar, que vale

$$\sum_{i,j} x_i^* x_j \otimes e_{ij} = \left(\sum_i x_i \otimes e_{1i} \right)^* \left(\sum_j x_j \otimes e_{1j} \right),$$

donde concluímos que os elementos de tal forma são, de fato, positivos.

Reciprocamente, seja y um elemento positivo de $A \otimes M_n$, digamos

$$y = x^* x, \text{ com } x = \sum_{i,j} x_{ij} \otimes e_{ij}.$$

Então, temos

$$y = x^* x = \left(\sum_{i,j} x_{ij} \otimes e_{ij} \right)^* \left(\sum_{k,l} x_{kl} \otimes e_{kl} \right) =$$

$$= \left(\sum_{i,j} x_{ij}^* \otimes e_{ji} \right) \left(\sum_{k,l} x_{kl} \otimes e_{kl} \right) = \sum_i \left(\sum_{j,l} (x_{ij}^* x_{il}) \otimes e_{jl} \right).$$

Portanto, y tem a forma requerida. $\square$

PROPOSIÇÃO 3.1.7. *Sejam A uma C^* -álgebra e $g = \sum_{i,j} g_{ij} \otimes f_{ij}$ no dual de $A \otimes M_n$. Então, g é positivo se e somente se vale $\sum_{i,j} g_{ij} (x_i^* x_j) \geq 0$, quaisquer que sejam $x_1, \dots, x_n \in A$.*

Demonstração:

Pela proposição anterior, g será positivo se e só se tivermos

$$g \left(\sum_{i,j} x_i^* x_j \otimes e_{ij} \right) \geq 0, \text{ quaisquer que sejam } x_1, \dots, x_n \in A.$$

Mas, pela definição de g_{ij} , temos

$$g \left(\sum_{i,j} x_i^* x_j \otimes e_{ij} \right) = \sum g_{ij} (x_i^* x_j)$$

e, assim, está provada a proposição. $\square$

PROPOSIÇÃO 3.1.8. *Sejam A e B duas C^* -álgebras e $T \in \mathcal{L}(A, B^*)$. Então, T é completamente positiva se e somente se*

$$\sum_{i,j=1}^n T(x_i^* x_j)(y_i^* y_j) \geq 0,$$

quaisquer que sejam $x_1, \dots, x_n \in A$, $y_1, \dots, y_n \in B$, $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

Pela Proposição 3.1.6, temos que T é completamente positiva se e só se vale

$$\left((T \otimes \mathbb{1}) \left(\sum_{i,j} x_i^* x_j \otimes e_{ij} \right) \right) \left(\sum_{k,l} y_k^* y_l \otimes e_{kl} \right) \geq 0$$

quaisquer que sejam $x_1, \dots, x_n \in A$, $y_1, \dots, y_n \in B$, $n = 1, 2, \dots$ e, pela proposição anterior, isso é equivalente à condição do enunciado. $\square$

PROPOSIÇÃO 3.1.9. *Sejam A e B duas C^* -álgebras ou dois duais de C^* -álgebras. Então temos que a função $T : A \rightarrow B$ é positiva, se e somente se $T^* : B^* \rightarrow A^*$ o é.*

Demonstração:

Seja $a \in A$ um elemento positivo. Temos que $T(a) \in B$ é positivo, se e só se vale

$$f(T(a)) = T^*(f)(a) \geq 0, \text{ para todo funcional positivo } f \in B^*,$$

e esta é a condição para que T^* seja positiva. (No caso em que A e B são duais de C^* -álgebras, usamos a Observação 1.3.2). $\square$

COROLÁRIO 3.1.10. *Sejam A e B duas C^* -álgebras ou dois duais de C^* -álgebras. Então temos que a função $T : A \rightarrow B$ é completamente positiva, se e somente se $T^* : B^* \rightarrow A^*$ o é.*

Demonstração:

Dado $n \in \mathbb{N}$, basta aplicarmos a proposição para $T \otimes \mathbb{1}$, observando que a função $(T \otimes \mathbb{1})^* : (B \otimes M_n)^* \rightarrow (A \otimes M_n)^*$ é identificada com $T^* \otimes \mathbb{1} : B^* \otimes M_n \rightarrow A^* \otimes M_n$. $\square$

3.2. Relação entre $S(A \otimes_{\max} B)$ e $\mathcal{L}(A, B^*)$

Nesta seção, veremos uma identificação entre o conjunto dos estados de $A \otimes_{\max} B$ e o subconjunto de $\mathcal{L}(A, B^*)$ formado pelas funções completamente positivas de norma 1, que denotaremos por Ω . No próximo capítulo veremos que a nuclearidade de uma C^* -álgebra A está relacionada com o fato de haver uma certa bijeção entre $S(A \otimes_{\max} B)$ e $S(A \otimes_* B)$, para toda C^* -álgebra B . Assim, depois do que será visto nesta seção, poderemos verificar a nuclearidade de A estudando a existência de uma bijeção entre $S(A \otimes_* B)$ e Ω .

Relembremos, aqui, a isometria entre o dual de $A \otimes_{\text{proj}} B$ e $\mathcal{L}(A, B^*)$ denotada por

$$f \mapsto T_f \text{ e dada por } T_f(a)(b) = f(a \otimes b),$$

vista no capítulo anterior.

PROPOSIÇÃO 3.2.1. *Na correspondência acima, f é positiva se e somente se T_f é completamente positiva.*

Demonstração:

Para f no dual de $A \otimes_{\text{proj}} B$, temos que f é positiva se e só se temos

$$f\left(\left(\sum_i a_i \otimes b_i\right)^* \left(\sum_j a_j \otimes b_j\right)\right) \geq 0,$$

quaisquer que sejam $a_1, \dots, a_n \in A$, $b_1, \dots, b_n \in B$ e $n \in \mathbb{N}$. Temos as igualdades

$$f\left(\left(\sum_i a_i \otimes b_i\right)^* \left(\sum_j a_j \otimes b_j\right)\right) = \sum_{i,j} f(a_i^* a_j \otimes b_i^* b_j) = \sum_{i,j} T_f(a_i^* a_j)(b_i^* b_j).$$

Portanto, a partir da Proposição 3.1.8, concluímos a equivalência afirmada. $\square$

Pela proposição anterior e pela identificação entre os estados de $A \otimes_{\max} B$ e de $C^*(A \otimes_{\text{proj}} B)$ vista no capítulo anterior, temos uma isometria entre $S(A \otimes_{\max} B)$ e $\Omega \subseteq \mathcal{L}(A, B^*)$, o conjunto formado pelas funções completamente positivas de norma 1. Continuaremos denotando por $f \mapsto T_f$ tal isometria.

PROPOSIÇÃO 3.2.2. *O isomorfismo $f \mapsto T_f$ é homeomorfismo de $S(A \otimes_{\max} B)$ em $\Omega = \{T \in \mathcal{L}(A, B^*) : T \text{ é completamente positiva e } \|T\| = 1\}$, se $S(A \otimes_{\max} B)$ tem a topologia fraca* e Ω tem a topologia da convergência fraca* simples.*

Demonstração:

Seja $\{\rho_i\}_{i \in I}$ um net em $S(A \otimes_{\max} B)$. Provemos que $\rho \in S(A \otimes_{\max} B)$ é limite de $\{\rho_i\}_i$ se e só se $T_\rho \in \Omega$ é limite de $\{T_{\rho_i}\}_i$. Sejam $a \in A$ e $b \in B$, quaisquer, e temos

$$\rho_i(a \otimes b) \rightarrow \rho(a \otimes b) \iff T_{\rho_i}(a)(b) \rightarrow T_\rho(a)(b).$$

Considerando as topologias do enunciado e sabendo que $A \otimes B$ é denso em $A \otimes_{\text{proj}} B$, temos a equivalência desejada, já que $\{\rho_i\}_i$ e $\{T_i\}_i$ são nets uniformemente limitados por 1. $\square$

3.3. Propriedades de aproximação

Esta seção se refere a propriedades que serão, como veremos no próximo capítulo, equivalentes à condição de uma C^* -álgebra ser nuclear.

DEFINIÇÃO 3.3.1. Diremos que uma C^* -álgebra A tem CPAP (completely positive approximation property) se id_{A^*} for limite, na topologia da convergência fraca* simples, de funções completamente positivas $V : A^* \rightarrow A^*$ de posto finito com $\|V\| = 1$.

DEFINIÇÃO 3.3.2. Diremos que uma C^* -álgebra A tem SCPAP (strong completely positive approximation property) se id_A for limite, na topologia forte, de funções completamente positivas $V : A \rightarrow A$ de posto finito e norma 1.

Aqui, fazemos uma pequena generalização ao definir a propriedade SCPAP. Em [Kir77], era pedido que a C^* -álgebra tivesse unidade $\mathbb{1}$ e que as funções V satisfizessem $V(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. A Observação 3.3.5 prova que realmente se trata de uma generalização.

PROPOSIÇÃO 3.3.3. Se a C^* -álgebra A tem SCPAP, então A tem CPAP.

Demonstração:

Seja $\{V_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{L}(A)$ um net de funções completamente positivas de posto finito e norma 1 tal que $\lim_i V_i(a) = a$, para todo $a \in A$. Provemos que $\{V_i^*\}_{i \in I}$ é um net que nos permite concluir que A tem CPAP. Sabemos que, para todo $i \in I$, temos $\|V_i^*\| = \|V_i\|$ e $\text{posto}(V_i^*) = \text{posto}(V_i)$. Pelo Corolário 3.1.10, V_i^* é completamente positiva para todo i . Assim, resta apenas verificar se $\lim_i V_i^*$ é igual a id_{A^*} , na topologia fraca* simples. Dados $f \in A^*$ e $a \in A$, temos

$$\lim_i V_i^*(f)(a) = \lim_i f(V_i(a)) = f(\lim_i V_i(a)) = f(a) = \text{id}_{A^*}(f)(a),$$

já que V_i converge fortemente para id_A . Assim, demonstramos a proposição. $\square$

Encerramos este capítulo com duas observações bastante úteis.

OBSERVAÇÃO 3.3.4. Na Definição 3.3.1, a condição $\|V\| = 1$ pode ser substituída por $\|V\| \leq 1$.

De fato, seja $\{V_i\}_{i \in I}$ um net satisfazendo as condições da Definição 3.3.1, exceto o fato $\|V_i\| = 1$, para todo $i \in I$. Suponhamos $\|V_i\| \leq 1$ e provemos $\lim_i \|V_i\| = 1$, a partir do que concluiremos que vale $V_i/\|V_i\| \rightarrow \text{id}_{A^*}$. Assim, o net $\{V_i/\|V_i\|\}_i$ satisfará todas as condições da definição.

Tomemos $b \in A$ com $\|b\| = 1$ e $g \in S(A)$ tal que $|g(b)| = \|b\| = 1$. Sabemos que a função

$$V \in \mathcal{L}(A^*) \mapsto |V(g)(b)| \in \mathbb{R}$$

é contínua na topologia fraca* simples de $\mathcal{L}(A^*)$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, seja $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{L}(A^*)$ vizinhança aberta de id_{A^*} tal que vale

$$V \in \mathcal{V} \Rightarrow |V(g)(b)| > |\text{id}_{A^*}(g)(b)| - \varepsilon = 1 - \varepsilon.$$

Assim, seja i_0 tal que, para todo $j \geq i_0$, V_j pertence a $\mathcal{V}$ e, pela equação acima, temos

$$|V_j(g)(b)| > 1 - \varepsilon.$$

Como g e b possuem norma 1, temos, para $j \geq i_0$,

$$\|V_j\| = \sup_{\|f\| \leq 1, \|a\| \leq 1} |V_j(f)(a)| > 1 - \varepsilon.$$

Com a hipótese $\|V_j\| \leq 1$, concluímos que vale $\lim_i \|V_i\| = 1$ e, conforme foi observado, se tomarmos $W_i = V_i/\|V_i\|$, então $\{W_i\}_i$ é um net satisfazendo todas as condições da definição.

OBSERVAÇÃO 3.3.5. Sejam A uma C^* -álgebra com unidade $\mathbb{1}$ e $\{V_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{L}(A)$ um net de funções completamente positivas de posto finito que converge para id_A , com relação à topologia forte de operadores. Então existe um net $\{W_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{L}(A)$, também fortemente convergente para id_A , de funções completamente positivas de posto finito e norma 1 (em outras palavras, A tem SCPAP), as quais ainda satisfazem $W_i(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$, para todo $i \in I$.

De fato, por $\lim_i V_i(\mathbb{1}) = \text{id}(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$, podemos supor que vale $\|V_i(\mathbb{1}) - \mathbb{1}\| < 1$, para todo $i \in I$ e, podemos, assim, concluir que $V_i(\mathbb{1})$ é inversível, para todo $i \in I$, pois, como $\mathbb{1}$ e V_i são positivos, 0 não pertence a $\sigma(V_i(\mathbb{1}) - \mathbb{1} + \mathbb{1})$. Assim, existe ε positivo $t_i = (V_i(\mathbb{1}))^{-\frac{1}{2}}$, para todo $i \in I$. Definamos um net $\{W_i\}_i$ por

$$W_i(a) = t_i V_i(a) t_i \quad \text{para } a \in A.$$

Temos que W_i tem posto finito e, como t_i^* é igual a t_i , é fácil ver que W_i é, também, completamente positiva. Por construção, temos $W_i(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ e, pela Proposição 3.1.4, temos $\|W_i\| = 1$, para todo $i \in I$. Portanto, sobre $\{W_i\}_i$, resta apenas provar que converge fortemente para id_A .

Como $\{V_i\}_i$ converge para id_A na topologia forte, temos $\lim_i V_i(a) = a$, para todo $a \in A$ e, portanto, temos

$$\lim_i t_i = \lim_i V_i(\mathbb{1})^{-\frac{1}{2}} = (\lim_i V_i(\mathbb{1}))^{-\frac{1}{2}} = \mathbb{1}.$$

Assim, para todo $a \in A$, vale

$$\lim_i W_i(a) = \lim_i t_i V_i(a) t_i = \lim_i V_i(a) = a.$$

Logo, $\{W_i\}_i$ é um net de funções que satisfaz $W_i(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ e que nos permite concluir que A tem SCPAP.

CAPÍTULO 4

Uma caracterização das C^* -álgebras nucleares

Este é o capítulo central deste trabalho. Nele, serão demonstrados teoremas importantes que, juntos, darão uma caracterização das C^* -álgebras nucleares. Trataremos também da nuclearidade de sub- C^* -álgebras e do fato de a classe das C^* -álgebras ser fechada por extensões. Este capítulo está baseado em [Lan73] e em [Kir77].

4.1. CPAP implica nuclearidade

Com os dois teoremas que seguem, demonstraremos o fato de que toda C^* -álgebra com CPAP é nuclear. O primeiro deles está completamente baseado no homeomorfismo entre os estados de $A \otimes_{\max} B$ e as funções completamente positivas de norma 1 em $\mathcal{L}(A, B^*)$, visto no capítulo anterior. Aqui, porém, faremos uso da versão para $\mathcal{L}(B, A^*)$ do homeomorfismo, observando a simetria entre $A \otimes_{\max} B$ e $B \otimes_{\max} A$.

LEMA 4.1.1. *Sejam A e B C^* -álgebras e ψ o $*$ -homomorfismo canônico de $A \otimes_{\max} B$ em $A \otimes_* B$. Então, as normas espacial e máxima são iguais em $A \otimes B$ se e somente se todo estado de $A \otimes_{\max} B$ se anula em $\psi^{-1}(0)$.*

Demonstração:

Sabemos que as normas espacial e máxima são iguais se e somente se ψ é um $*$ -isomorfismo. Então, provar o lema equivale a provar que todo estado de $A \otimes_{\max} B$ se anula em $\psi^{-1}(0)$ se e só se ψ é injetora (já que é $*$ -homomorfismo sobrejetor).

É claro que ψ ser injetora implica que todo estado em $A \otimes_{\max} B$ se anula em $\psi^{-1}(0)$. Provemos, então, a recíproca. Por contradição, suponhamos que ψ não seja injetora, isto é, que exista $c \in A \otimes_{\max} B$, não nulo, com $\psi(c) = 0$. Assim, existe g , estado em $A \otimes_{\max} B$ tal que vale $g(c) = \|c\| \neq 0$. Mas isto contraria o fato de que todo estado em $A \otimes_{\max} B$ se anula em $\psi^{-1}(0)$.

Logo, o lema está demonstrado. $\square$

TEOREMA 4.1.2. *Uma C^* -álgebra A é nuclear se e só se, para toda C^* -álgebra B , toda função completamente positiva de norma 1 de $\mathcal{L}(B, A^*)$ pode ser aproximada por funções completamente positivas de posto finito e norma 1.*

Demonstração:

A prova será feita para o caso de A e B não nulas.

Suponhamos A nuclear e seja B uma C^* -álgebra. Podemos supor A atuando não degeneradamente em H , B em K e $A \otimes_* B$ em $H \hat{\otimes} K$. Isto é possível pois, se (H, φ) e

(K, ψ) são as representações universais de A e B , respectivamente, então são fiéis, não degeneradas e, além disso, $\varphi \hat{\otimes} \psi$ é isometria (pelo Corolário 2.3.12) que atua não degeneradamente em $H \hat{\otimes} K$. Pela Proposição 1.2.22, temos que $S(A \otimes_* B)$ é o fecho convexo, na topologia fraca*, do conjunto dos estados vetoriais dados pelos vetores unitários da forma $\sum_i \xi_i \otimes \eta_i$ com $\xi_1, \dots, \xi_n \in H$, $\eta_1, \dots, \eta_n \in K$. Mas, se ρ é dado por

$$\rho\left(\sum_i a_i \otimes b_i\right) = \left\langle \sum_i a_i \otimes b_i \left(\sum_j \xi_j \otimes \eta_j \right), \sum_k \xi_k \otimes \eta_k \right\rangle,$$

então,

$$T_\rho(b)(a) = \sum_{j,k} \langle a\xi_j \otimes b\eta_j, \xi_k \otimes \eta_k \rangle = \sum_{j,k} \langle a\xi_j, \xi_k \rangle \langle b\eta_j, \eta_k \rangle = {}^1 \sum_{j,k} \omega_{\eta_j, \eta_k}(b) \omega_{\xi_j, \xi_k}(a).$$

Assim, temos $T_\rho(b) = \sum_{j,k} \omega_{\eta_j, \eta_k}(b) \omega_{\xi_j, \xi_k}$, ou seja, T_ρ tem posto finito.

Portanto, temos que todo elemento de $S(A \otimes_* B)$ pode ser aproximado por estados ρ tais que T_ρ tem posto finito. Pelo homeomorfismo entre $S(A \otimes_{\max} B) = S(A \otimes_* B)$ e o conjunto Ω das funções completamente positivas com norma 1 de $\mathcal{L}(B, A^*)$, visto no capítulo anterior, concluímos que todo elemento de Ω pode ser aproximado por elementos de Ω que têm posto finito.

Para provar a recíproca, provemos que, para toda C^* -álgebra B , todo estado de $A \otimes_{\max} B$ se anula em $\psi^{-1}(0)$, onde ψ é o $*$ -homomorfismo canônico de $A \otimes_{\max} B$ em $A \otimes_* B$. Pelo lema anterior, teremos que A é nuclear.

Seja $\rho \in S(A \otimes_{\max} B)$ tal que T_ρ é de posto finito. Portanto, existem $f_1, \dots, f_n \in A^*$ e $g_1, \dots, g_n \in B^*$, tais que, para cada $b \in B$, temos $T_\rho(b) = \sum_{i=1}^n g_i(b) f_i$. Assim, temos $\rho = \sum_{i=1}^n f_i \otimes g_i$ em $A \otimes B$. Sabemos, pelo Corolário 2.3.5, que se τ e σ são estados em A e B , respectivamente, então $\tau \otimes \sigma$ é contínuo com relação à norma $\|\cdot\|_*$ em $A \otimes B$. Como todo funcional linear é combinação de estados, concluímos que ρ é contínuo com relação à norma espacial em $A \otimes B$. Assim, se $\tilde{\rho}$ é o estado de $A \otimes_* B$ que coincide com ρ em $A \otimes B$, então temos que $\tilde{\rho} \circ \psi$ é igual a ρ e, portanto, ρ se anula em $\psi^{-1}(0) \subseteq A \otimes_{\max} B$. Logo, está provado que, se T_ρ tem posto finito, então ρ se anula em $\psi^{-1}(0)$. Como estamos supondo que todo elemento de Ω pode ser aproximado por elementos de posto finito, temos, pelo homeomorfismo entre $S(A \otimes_{\max} B)$ e Ω , que todo estado de $A \otimes_{\max} B$ se anulará em $\psi^{-1}(0)$. Do lema anterior, segue que A é nuclear. $\square$

TEOREMA 4.1.3. *Toda C^* -álgebra com CPAP é nuclear.*

Demonstração:

Vamos provar que, se A tem CPAP, então, para toda C^* -álgebra B , $\mathcal{L}(B, A^*)$ possui a propriedade de aproximação descrita no teorema anterior e, portanto, A será nuclear.

Seja $\{V_i\}_{i \in I}$ um net de funções completamente positivas de posto finito e norma 1 em $\mathcal{L}(A^*)$ que tem como limite, na topologia fraca* simples, o operador id_{A^*} . Seja,

¹A notação $\langle a\xi, \eta \rangle = \omega_{\xi, \eta}(a)$, que é análoga ao caso de estado vetorial, deve estar clara.

também, $T \in \Omega$, qualquer, onde Ω , como na prova acima, é o conjunto das funções completamente positivas de norma 1 de $\mathcal{L}(B, A^*)$. Temos que $\{V_i T\}_i$ é um net de funções de posto finito que são completamente positivas, já que são compostas de funções completamente positivas. Para todo $a \in A$ e todo $b \in B$, temos

$$\lim_i V_i \circ T(b)(a) = \lim_i V_i(T(b))(a) = \text{id}_{A^*}(T(b))(a).$$

Logo, $V_i T$ converge para T na topologia fraca* simples. Sob raciocínio similar ao feito na Observação 3.3.4, teremos que $\lim_i \|V_i T\| = 1$. Assim, para todo $i \in I$, $T_i = V_i T / \|V_i T\|$ é função completamente positiva de posto finito e norma 1 e $\{T_i\}_i$ converge para T . Portanto, pelo teorema anterior, A é nuclear. $\square$

4.2. Nuclearidade implica CPAP

Nesta seção, estudaremos o fato de que uma C^* -álgebra A ser nuclear implica A possuir a propriedade CPAP. Na verdade, provaremos que id_A está no fecho fraco (provaremos que coincide com o forte) do cone convexo das funções completamente positivas de posto finito. Assim, pela Observação 3.3.5, concluiremos que uma C^* -álgebra unitária A tem SCPAP. Logo, pela Proposição 3.3.3, A terá a propriedade CPAP. O caso geral, para C^* -álgebras não necessariamente unitárias, será tratado no final da próxima seção.

A função id_A estará no fecho fraco do cone das funções completamente positivas de $\mathcal{L}(A)$ com posto finito se, dados $a_1, \dots, a_n \in A$, $f_1, \dots, f_n \in A^*$ e $\varepsilon > 0$, encontrarmos V completamente positiva de posto finito tal que

$$|f_i(V(a_i)) - f_i(\text{id}_A(a_i))| = |f_i(V(a_i)) - f_i(a_i)| < \varepsilon, \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que os funcionais f_i 's da sequência acima são positivos e que $f = \sum_{i=1}^n f_i$ é um estado de A . Seja (H_f, π_f, x_f) a representação GNS de A associada a f , e denotemos por M_f o comutador de $\pi_f(A)$ em $\mathcal{L}(H_f)$. Pelo Teorema 1.2.24, temos que existirão T_i 's $\in M_f$ tais que

$$f_i(a) = \langle \pi_f(a)x_f, T_i^* x_f \rangle, \text{ para } i = 1, \dots, n$$

pois $0 \leq f_i \leq f$. Assim, basta encontrarmos V completamente positiva de posto finito tal que

$$|\langle \pi_f(V(a_i))x_f, T_i^* x_f \rangle - \langle \pi_f(a_i)x_f, T_i^* x_f \rangle| < \varepsilon, \text{ para } i = 1, \dots, n,$$

e isso será feito no lema seguinte.

LEMA 4.2.1. *Sejam A uma C^* -álgebra nuclear, f um estado de A , e sejam dados $a_1, \dots, a_n \in A$, $T_1, \dots, T_n \in M_f = \pi_f(A)'$ e $\varepsilon > 0$. Então existe uma função $V \in \mathcal{L}(A)$ completamente positiva de posto finito tal que vale a seguinte desigualdade*

$$|\langle \pi_f(V(a_i))x_f, T_i^* x_f \rangle - \langle \pi_f(a_i)x_f, T_i^* x_f \rangle| < \varepsilon, \text{ para } i = 1, \dots, n. \quad (4.2.1)$$

Demonstração:

Supondo A não nula, seja (H, π) a representação universal de A . Então, pelo Teorema 2.1.4, temos que existe uma única representação, injetora,

$$\pi' : A \otimes M_f \rightarrow \mathcal{L}(H \hat{\otimes} H_f) \text{ tal que } \pi'(a \otimes T) = \pi(a) \otimes T \text{ } (a \in A, T \in M_f).$$

Pelo Corolário 2.3.12, temos que π' é uma isometria com relação à norma espacial e, portanto, estende-se a uma representação injetora de $A \otimes_* M_f$, a qual continuaremos denotando π' . Notemos que π' é não degenerada, pois π_f o é e $\mathbb{1} = \text{id}_{H_f}$ pertence a M_f . Seja F o funcional cíclico positivo de $A \otimes M_f$, associado à representação $\pi_f \otimes \iota$ e ao vetor $x_f \in H_f$, onde ι é a inclusão de M_f em $\mathcal{L}(H_f)$. Temos

$$F(a \otimes T) = \langle \pi_f(a)x_f, T^*x_f \rangle, \text{ quaisquer que sejam } a \in A \text{ e } T \in M_f.$$

É claro que F é contínuo com relação à norma máxima. Como estamos supondo A nuclear, temos que F se estende a um funcional positivo $\tilde{F}$ em $A \otimes_* M_f$. Uma vez que $H \otimes \pi_f(A)x_f$ é denso em $H \hat{\otimes} H_f$, e como π' é uma representação fiel e não degenerada de $A \otimes_* M_f$, temos pela Proposição 1.2.22 e pela Observação 1.2.21, que $\tilde{F}$ pode ser aproximado por funcionais vetoriais com os vetores em $H \otimes \pi_f(A)x_f$, ou seja, existem $y_1, \dots, y_k \in H \otimes \pi_f(A)x_f$ satisfazendo

$$|\tilde{F}(a_i \otimes T_i) - \sum_{j=1}^k \langle \pi'(a_i \otimes T_i)y_j, y_j \rangle| < \varepsilon, \text{ para } i = 1, \dots, n. \quad (4.2.2)$$

Fixemos representações para os y_j 's :

$$y_j = \sum_{p=1}^{m_j} x_p^{(j)} \otimes \pi_f(a_p^{(j)})x_f.$$

Definamos, agora, funções $V^{(j)} : A \rightarrow A$ de posto finito por

$$V^{(j)}(a) = \sum_{p,q=1}^{m_j} \langle \pi(a)x_p^{(j)}, x_q^{(j)} \rangle a_q^{(j)*} a_p^{(j)} \text{ } (a \in A)$$

e seja $V = \sum_j V^{(j)}$, que também tem posto finito. Provemos que vale

$$\langle \pi_f(V(a))x_f, T^*x_f \rangle = \sum_{j=1}^k \langle \pi'(a \otimes T)y_j, y_j \rangle, \text{ para } a \in A \text{ e } T \in M_f,$$

pois, como já temos

$$\langle \pi_f(a)x_f, T^*x_f \rangle = \tilde{F}(a \otimes T),$$

teremos, pela Desigualdade (4.2.2), que V satisfaz a Desigualdade (4.2.1), restando, para concluir a demonstração, provar que V é completamente positiva. De fato, temos

$$\langle \pi_f(V(a))x_f, T^*x_f \rangle = \sum_{j=1}^k \langle \pi_f(V^{(j)}(a))x_f, T^*x_f \rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j,p,q} \langle \pi(a)x_p^{(j)}, x_q^{(j)} \rangle \langle \pi_f(a_q^{(j)*} a_p^{(j)})x_f, T^*x_f \rangle = \\
&= \sum_{j,p,q} \langle \pi(a)x_p^{(j)}, x_q^{(j)} \rangle \langle T\pi_f(a_p^{(j)})x_f, \pi_f(a_q^{(j)})x_f \rangle = \\
&= \sum_{j,p,q} \langle \pi(a) \otimes T(x_p^{(j)} \otimes \pi_f(a_p^{(j)})x_f), x_q^{(j)} \otimes \pi_f(a_q^{(j)})x_f \rangle = \\
&= \sum_j \langle \pi(a) \otimes T y_j, y_j \rangle = \sum_j \langle \pi'(a \otimes T) y_j, y_j \rangle.
\end{aligned}$$

Assim, temos que V satisfaz a Desigualdade (4.2.1). Para provarmos que é completamente positiva, provemos que cada $V^{(j)}$ o é. A partir de agora, como trabalharemos com uma única função $V^{(j)}$, omitiremos os índices j .

Temos que provar que, para cada $m \in \mathbb{N}^*$, $V_m : M_m(A) \rightarrow M_m(A)$ é positiva. Para tanto, basta ver que a matriz $V_m((b_k^* b_l)_{kl})$ é positiva, qualquer que seja a sequência $b_1, \dots, b_n$ de elementos de A , sob o que foi visto na Proposição 3.1.6. Seja $\pi_m : M_m(A) \rightarrow \mathcal{L}(H^m)$ dada por $\pi_m((b_{kl})_{kl}) = (\pi(b_{kl}))_{kl}$ onde π é a representação universal de A , como no início da demonstração. Como π é injetora, temos que π_m também o é e, portanto, para ver que V_m é positiva, basta ver que

$$\pi_m \circ V_m : M_m(A) \rightarrow \mathcal{L}(H^m) \text{ é positiva.}$$

Isto ainda é equivalente a verificar que, dados $b_1, \dots, b_m \in A$ e $z \in H^m$, temos

$$\langle \pi_m \circ V_m((b_k^* b_l)_{kl}) z, z \rangle \geq 0,$$

ou seja,

$$\sum_{k,l} \langle \pi(V(b_k^* b_l)) z_l, z_k \rangle \geq 0, \text{ se } z = (z_1, \dots, z_m).$$

Vejamos que, de fato, a desigualdade acima é válida.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k,l} \langle \pi(V(b_k^* b_l)) z_l, z_k \rangle = \\
&= \sum_{k,l,p,q} \langle \pi(b_k^* b_l) x_p, x_q \rangle \langle \pi(a_q^* a_p) z_l, z_k \rangle = \\
&= \sum_{k,l,p,q} \langle \pi(b_l) x_p, \pi(b_k) x_q \rangle \langle \pi(a_p) z_l, \pi(a_q) z_k \rangle = \\
&= \sum_{k,l,p,q} \langle \pi(b_l) x_p \otimes \pi(a_p) z_l, \pi(b_k) x_q \otimes \pi(a_q) z_k \rangle = \\
&= \left\| \sum_{p,l} \pi(b_l) x_p \otimes \pi(a_p) z_l \right\|^2, \text{ que é positivo.}
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que cada $V^{(j)}$, e portanto V , é completamente positiva, e isto era o que faltava para encerrarmos a demonstração do lema. $\square$

TEOREMA 4.2.2. *Seja A uma C^* -álgebra nuclear. Então id_A está no fecho fraco das funções completamente positivas de posto finito.*

Demonstração:

Sejam $a_1, \dots, a_n \in A$ e $f_1, \dots, f_n \in A^*$, supondo, sem perda de generalidade, que os funcionais f_i 's são positivos e que $f = \sum_i f_i$ tem norma 1. Então, pelo Teorema 1.2.24, temos que existem $T_1, \dots, T_n \in \pi_f(A)'$, tais que

$$f_i(a) = \langle \pi_f(a)x_f, T_i^* x_f \rangle, \text{ para todo } a \in A.$$

Pelo lema, dado $\varepsilon > 0$, existe $V \in \mathcal{L}(A)$ completamente positiva de posto finito tal que

$$|\langle \pi_f(V(a_i))x_f, T_i^* x_f \rangle - \langle \pi_f(a_i)x_f, T_i^* x_f \rangle| < \varepsilon, \text{ para } i = 1, \dots, n,$$

ou seja,

$$|f_i(V(a_i)) - f_i(\text{id}_A(a_i))| = |f_i(V(a_i)) - f_i(a_i)| < \varepsilon, \text{ para } i = 1, \dots, n,$$

o que significa, pela arbitrariedade dos f_i 's e dos a_i 's, que id_A está no fecho fraco do conjunto das funções completamente positivas. $\square$

A próxima proposição nos permitirá concluir que coincidem os fechos forte e fraco do conjunto convexo das funções completamente positivas de posto finito de $\mathcal{L}(A)$.

PROPOSIÇÃO 4.2.3. *Sejam A uma C^* -álgebra e $\varphi : \mathcal{L}(A) \rightarrow \mathbb{C}$, um funcional linear. Então são equivalentes:*

- i. φ é fortemente contínuo;
- ii. φ é fracamente contínuo;
- iii. Existem $f_1, \dots, f_n \in A^*$ e $a_1, \dots, a_n \in A$, tais que

$$\varphi(V) = \sum_{i=1}^n f_i(V(a_i)), \text{ qualquer que seja } V \in \mathcal{L}(A).$$

Demonstração:

As implicações (iii) $\Rightarrow$ (ii) e (ii) $\Rightarrow$ (i) são claras. Provemos que (i) implica (iii), e teremos a equivalência desejada.

Suponhamos $\varphi : \mathcal{L}(A) \rightarrow \mathbb{C}$ um funcional linear contínuo com relação à topologia forte de operadores. Seja $\Omega \subseteq \mathcal{L}(A)$ uma vizinhança aberta de 0, tal que

$$\varphi(\Omega) \subseteq B,$$

onde $B \subseteq \mathbb{C}$ denotará a bola de centro 0 e raio $\varepsilon > 0$, fixado. Podemos supor (a menos de tomarmos uma vizinhança menor) que Ω é da forma

$$\Omega = \{V \in \mathcal{L}(A) : \|V(a_i)\| < \eta, \text{ para } i = 1, \dots, n\},$$

com $a_1, \dots, a_n \in A$ e $\eta > 0$. Assim, dado $V \in \mathcal{L}(A)$, para $M = \sup_i 2\|V(a_i)\|/\eta$, temos

$$\left\| \frac{V}{M}(a_i) \right\| \leq \frac{\eta}{2} < \eta, \text{ para cada } i = 1, \dots, n$$

e, portanto, V/M pertence a Ω , de onde temos que $|\varphi(V/M)| < \varepsilon$, ou seja,

$$|\varphi(V)| < \frac{\eta\varepsilon}{2} \cdot \sup_i \|V(a_i)\|, \text{ qualquer que seja } V \in \mathcal{L}(A). \quad (4.2.3)$$

Sejam A^n a soma direta de n cópias de A , e W o sub-espço de A^n dado por

$$W = \{(V(a_1), \dots, V(a_n)) : V \in \mathcal{L}(A)\}.$$

Pela Inequação (4.2.3), temos que o funcional linear

$$\tilde{\varphi} : W \rightarrow \mathbb{C} \text{ dado por } \tilde{\varphi}(V(a_1), \dots, V(a_n)) = \varphi(V)$$

é contínuo em W com relação à norma ∞ (e, portanto, com relação a qualquer outra norma), induzida de A^n . Agora, pelo Teorema de Hahn-Banach, temos que $\tilde{\varphi}$ se estende a um funcional contínuo ψ em A^n e, assim, existem $f_1, \dots, f_n \in A^*$, tais que

$$\psi(b_1, \dots, b_n) = f_1(b_1) + \dots + f_n(b_n), \text{ quaisquer que sejam } b_1, \dots, b_n \in A.$$

Finalmente, concluímos que, para todo $V \in \mathcal{L}(A)$, vale

$$\varphi(V) = \tilde{\varphi}(V(a_1), \dots, V(a_n)) = f_1(V(a_1)) + \dots + f_n(V(a_n)),$$

que prova (i) $\Rightarrow$ (iii) e, assim, demonstra a proposição. $\square$

COROLÁRIO 4.2.4. *Toda C^* -álgebra nuclear, unitária, tem a propriedade SCPAP (e, portanto, a propriedade CPAP).*

Demonstração:

A proposição anterior garante que os convexos fechados de $\mathcal{L}(A)$ são os mesmos, tanto na topologia fraca de operadores quanto na forte, já que os duais coincidem. Assim, a partir do último teorema, podemos concluir que, se A é nuclear, então existe um net de funções completamente positivas de posto finito que converge fortemente para id_A . Agora, pela Observação 3.3.5, temos que A tem SCPAP e, pela Proposição 3.3.3, concluímos que A possui CPAP. $\square$

4.3. Sub- C^* -álgebras e soma direta de C^* -álgebras nucleares

É natural nos perguntarmos sobre a nuclearidade de sub- C^* -álgebras e da soma direta de C^* -álgebras nucleares. Daremos uma condição suficiente para que uma sub- C^* -álgebra seja nuclear e veremos que a classe das C^* -álgebras nucleares é fechada por extensão. Como caso particular deste último fato, concluiremos que se a C^* -álgebra A é nuclear, então também o será sua unitização $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$ e isso será importante na extensão de teoremas da seção anterior para o caso em que A não tem unidade.

Os seguintes lema e teorema são sobre sub- C^* -álgebras.

LEMA 4.3.1. *Sejam $f : A \rightarrow A'$ e $g : B \rightarrow B'$ $*$ -homomorfismos entre C^* -álgebras. Então, existe um único $*$ -homomorfismo*

$$h : A \otimes_* B \rightarrow A' \otimes_* B' \text{ tal que } h(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b) \text{ para } a \in A \text{ e } b \in B.$$

Além disso, se f e g são injetoras, também o é h .

Demonstração:

Precisamos, primeiro, provar que $f \otimes g$ é contínua considerando as normas espaciais em $A \otimes B$ e em $A' \otimes B'$. Para isso, consideremos (H, φ) e (K, ψ) , representações fiéis de A' e B' , respectivamente. Então temos que $\varphi \hat{\otimes} \psi$ é isométrica em $A' \otimes B'$ com a norma $\|\cdot\|_*$, pelo Corolário 2.3.12, e que $(\varphi \hat{\otimes} \psi)(f \otimes g) = \varphi f \otimes \psi g$ é contínua em $A \otimes B$ com relação à norma $\|\cdot\|_*$, pelo Teorema 2.3.4. Logo, para c em $A \otimes B$, temos

$$\|(f \otimes g)(c)\|_* = \|(\varphi \hat{\otimes} \psi)(f \otimes g)(c)\| \leq \|c\|_*$$

e está provado que $f \otimes g$ é contínua. Assim, tomemos h a extensão de $f \otimes g$ a $A \otimes_* B$.

Suponhamos, agora, que f e g sejam injetoras. Dessa forma, φf e ψg também são injetoras e, portanto, $(\varphi f \hat{\otimes} \psi g) = (\varphi \hat{\otimes} \psi)h|_{A \otimes B}$ é uma isometria para $A \otimes B$ com a norma espacial. Logo, h é isométrica e, portanto, injetora. $\square$

Esse resultado garante que, se A e B são sub- C^* -álgebras de A' e B' , respectivamente, então $A \otimes_* B$ pode ser vista como sub- C^* -álgebra de $A' \otimes_* B'$.

TEOREMA 4.3.2. *Seja C uma sub- C^* -álgebra de uma C^* -álgebra nuclear A tal que, para toda C^* -álgebra B , a função $\iota \otimes_{\max} \text{id}_B : C \otimes_{\max} B \rightarrow A \otimes_{\max} B$ é injetora, onde ι é a inclusão. Então, C também é nuclear.*

Demonstração:

Pelo lema anterior, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} C \otimes_{\max} B & \xrightarrow{f_1} & A \otimes_{\max} B \\ g_1 \downarrow & & \downarrow g_2 \\ C \otimes_* B & \xrightarrow{f_2} & A \otimes_* B \end{array}$$

onde f_1, f_2, g_1, g_2 são as funções canônicas.

Pela hipótese, f_1 é injetora, e o fato de A ser nuclear implica que g_2 é injetora. Portanto, g_1 não pode deixar de ser injetora e, assim, C é nuclear. $\square$

Para falarmos em extensões de álgebras, precisamos da noção de seqüência exata.

DEFINIÇÃO 4.3.3. *Sejam J, A e B três C^* -álgebras. Se $j : J \rightarrow A$ e $\pi : A \rightarrow B$ são $*$ -homomorfismos injetor e sobrejetor, respectivamente, diremos que*

$$0 \rightarrow J \xrightarrow{j} A \xrightarrow{\pi} B \rightarrow 0$$

é uma seqüência exata curta de C^ -álgebras, se tivermos $\text{im}(j) = \ker(\pi)$.*

Neste caso, diremos que A é uma extensão de B por J .

Se $\pi : A \rightarrow B$ é $*$ -homomorfismo sobrejetor entre C^* -álgebras, claramente,

$$0 \rightarrow \ker(\pi) \xrightarrow{j} A \xrightarrow{\pi} B \rightarrow 0$$

é uma seqüência exata curta de C^* -álgebras, onde j é a inclusão em A .

Nosso objetivo, agora, é provar que se J e B são nucleares, e $0 \rightarrow J \xrightarrow{j} A \xrightarrow{\pi} B \rightarrow 0$ é uma seqüência exata curta de C^* -álgebras, então A também é nuclear. Nessa direção, provemos o seguinte lema.

LEMA 4.3.4. *Seja $0 \rightarrow J \xrightarrow{j} A \xrightarrow{\pi} B \rightarrow 0$ uma seqüência exata curta de C^* -álgebras. Seja D uma C^* -álgebra e suponhamos que $B \otimes D$ possui uma única C^* -norma (é o caso, se B ou D é nuclear). Então,*

$$0 \rightarrow J \otimes_* D \xrightarrow{j \otimes_* \text{id}} A \otimes_* D \xrightarrow{\pi \otimes_* \text{id}} B \otimes_* D \rightarrow 0$$

também é exata.

Demonstração:

Sejam $\tilde{j} = j \otimes_* \text{id}_D$ e $\tilde{\pi} = \pi \otimes_* \text{id}_D$. Temos que $\tilde{j}$ é injetora pelo Lema 4.3.1, e que $\tilde{\pi}$ é sobrejetora, pois $\text{im}(\tilde{\pi})$ contém $\tilde{\pi}(A \otimes D) = \pi(A) \otimes D$ que é denso em $B \otimes_* D$. Assim, resta provar que vale $\text{im}(\tilde{j}) = \ker(\tilde{\pi})$. É claro o fato $\text{im}(\tilde{j}) \subseteq \ker(\tilde{\pi})$ e, portanto, temos que $\tilde{\pi}$ se fatora pelo quociente $Q = A \otimes_* D / \text{im}(\tilde{j})$, ou seja, existe π' tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_* D & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & B \otimes_* D \\ \psi \downarrow & \nearrow \pi' & \\ Q & & \end{array}$$

comuta, onde ψ é a projeção canônica. Note-se que o quociente Q é uma C^* -álgebra pois $\text{im}(\tilde{j})$ é um ideal fechado de $A \otimes_* D$. (Esta afirmação é verificada, pois $\tilde{j}$ é injetora e $\text{im}(\tilde{j}) = \ker(\tilde{\pi})$ é um ideal fechado de A .)

Provemos que π' é $*$ -isomorfismo e, assim, $\ker(\pi'\psi)$, que é $\ker(\tilde{\pi})$, será igual a $\text{im}(\tilde{j})$. O fato de que π' é sobrejetora, segue da sobrejetividade de $\tilde{\pi}$. Provemos, então, que é injetora, exibindo uma inversa à esquerda.

É simples verificar que a função

$$B \otimes D \rightarrow Q \text{ dada por } (\pi(a), d) \mapsto a \otimes d + \text{im}(\tilde{j}),$$

está bem definida e é bilinear. Portanto, seja φ sua induzida a $B \otimes D$. Também é fácil ver que φ é $*$ -homomorfismo. Assim, temos que a função

$$B \otimes D \rightarrow \mathbb{R}^+, \text{ dada por } c \mapsto \max\{\|\varphi(c)\|, \|c\|_*\}$$

é uma C^* -norma e, portanto, pela hipótese sobre $B \otimes D$, temos que $\max\{\|\varphi(c)\|, \|c\|_*\} = \|c\|_*$, ou seja,

$$\|\varphi(c)\| \leq \|c\|_* \text{ para todo } c \text{ em } B \otimes D.$$

Logo, φ admite extensão a $B \otimes_* D$, a qual continuaremos a chamar φ . Temos $\varphi\pi' = \text{id}_Q$, pois, para $a \in A$ e $d \in D$, temos

$$\varphi\pi'(a \otimes d + \text{im}(\tilde{j})) = \varphi\tilde{\pi}(a \otimes d) = \varphi(\pi(a) \otimes d) = a \otimes d + \text{im}(\tilde{j}).$$

Portanto, π' é injetora e o lema está demonstrado. $\square$

TEOREMA 4.3.5. *A extensão de uma C^* -álgebra nuclear por uma C^* -álgebra nuclear é, também, nuclear.*

Demonstração:

Suponhamos que a seqüência de C^* -álgebras

$$0 \rightarrow J \xrightarrow{j} A \xrightarrow{\pi} B \rightarrow 0$$

seja exata curta, com J e B nucleares. Então, qualquer que seja a C^* -álgebra D , a seqüência

$$0 \rightarrow J \otimes_* D \xrightarrow{\tilde{j}} A \otimes_* D \xrightarrow{\tilde{\pi}} B \otimes_* D \rightarrow 0$$

também é exata, sob as notações e a demonstração do lema anterior, já que B é nuclear.

O que segue nesta demonstração tem o objetivo de construir um diagrama que nos permitirá concluir que o $*$ -homomorfismo canônico de $A \otimes_{\max} D$ em $A \otimes_* D$, ψ , é injetor, e, portanto, que A é nuclear.

Seja j' o único $*$ -homomorfismo de $J \otimes D$ em $A \otimes_{\max} D$ tal que $j'(a \otimes d) = j(a) \otimes d$ para $a \in J$ e $d \in D$. Temos que a função

$$J \otimes D \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ tal que } c \mapsto \max\{\|j'(c)\|, \|c\|_*\}$$

é uma C^* -norma em $J \otimes D$ e, pela nuclearidade de J , temos que $\max\{\|j'(c)\|, \|c\|_*\} = \|c\|_*$. Portanto, j' se estende a um $*$ -homomorfismo de $J \otimes_* D$ em $A \otimes_{\max} D$, que continuaremos denotando por j' . Seja Q o quociente de $A \otimes_{\max} D$ por $\text{im}(j')$ que é um ideal fechado, pelo mesmo motivo por que o era $\text{im}(\tilde{j})$ no lema anterior. Seja η de $A \otimes_{\max} D$ em Q , a função quociente. Por uma construção semelhante à feita no lema, temos que existe um $*$ -homomorfismo

$$\varphi : B \otimes_* D \rightarrow Q \text{ tal que } \varphi(\pi(a) \otimes d) = a \otimes d + \text{im}(j'),$$

quaisquer que sejam $a \in A$ e $d \in D$.

Portanto, temos o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} J \otimes_* D & \xrightarrow{\tilde{j}} & A \otimes_* D & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & B \otimes_* D \\ & \searrow j' & \downarrow \psi & & \downarrow \varphi \\ & & A \otimes_{\max} D & \xrightarrow{\eta} & Q \end{array}$$

que é comutativo. Provemos, agora, que $\ker(\psi)$ é igual a 0.

Suponhamos c em $\ker(\psi)$. Então, temos $\varphi \circ \tilde{\pi} \circ \psi(c) = 0$ e, portanto, $\eta(c) = 0$. Isto, por sua vez, significa que existe $c_0 \in J \otimes_* D$ tal que $c = j'(c_0)$. Como o diagrama comuta, temos $\tilde{j}(c_0) = 0$. Agora, como $\tilde{j}$ é injetora, temos que c_0 é igual a 0. Assim, c também o é. Logo, ψ é injetora e está encerrada a demonstração. $\square$

O teorema acima nos permite concluir que a unitização $\tilde{A}$ de uma C^* -álgebra nuclear A é, também, nuclear. Assim, sob o que foi visto na seção anterior, temos que, se A é nuclear, então $\tilde{A}$ possui CPAP. O teorema seguinte diz que, se $\tilde{A}$ tem CPAP, então A tem

CPAP. Isso encerra nosso trabalho, pois, sob o que já foi feito, teremos que o fato de a C^* -álgebra A ser nuclear equivale a A possuir CPAP, mesmo que A não possua unidade.

LEMA 4.3.6. *Seja A uma C^* -álgebra. Então existe uma função linear φ de A^* em $(\tilde{A})^*$ tal que*

$$\varphi(f)(a, \lambda) = f(a) + \lambda\|f\|, \text{ se } f \geq 0.$$

Além disso, φ é completamente positiva.

Demonstração:

Para cada $f \in A^*$, f positivo, seja $\tilde{f}$ sua extensão a $\tilde{A}$ dada por $\tilde{f}(a, \lambda) = f(a) + \lambda\|f\|$, pelo Teorema 1.2.6. Se g é um elemento qualquer de A^* , sabemos que g se escreve como $g = \sum_{k=0}^3 i^k g_k$, com $g_k \geq 0$, para $k = 0, \dots, 3$. Definamos $\varphi(g)$ por

$$\varphi(g) = \sum_{k=0}^3 i^k \tilde{g}_k,$$

e provemos que está bem definida. Supondo $\sum_{k=0}^3 i^k g_k = \sum_{k=0}^3 i^k f_k$ com g_k, f_k positivos, para $k = 0, \dots, 3$, vamos provar que vale $\sum_{k=0}^3 i^k \tilde{g}_k = \sum_{k=0}^3 i^k \tilde{f}_k$.

Separando a parte real da imaginária, é suficiente provarmos que vale $\tilde{g}_0 - \tilde{g}_2 = \tilde{f}_0 - \tilde{f}_2$, pois a prova da igualdade $i(\tilde{g}_1 - \tilde{g}_3) = i(\tilde{f}_1 - \tilde{f}_3)$ é análoga. Por hipótese, temos $g_0 - g_2 = f_0 - f_2$, ou seja, $g_0 + f_2 = f_0 + g_2$. Assim, temos $g_0 + f_2 = f_0 + g_2$, que significa

$$(g_0 + f_2)(a) + \lambda\|g_0 + f_2\| = (f_0 + g_2)(a) + \lambda\|f_0 + g_2\|,$$

quaisquer que sejam $a \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Agora, pelo Corolário 1.2.20, temos, a partir dessa igualdade, que vale

$$(g_0 + f_2)(a) + \lambda(\|g_0\| + \|f_2\|) = (f_0 + g_2)(a) + \lambda(\|f_0\| + \|g_2\|),$$

quaisquer que sejam $a \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, ou seja, $\tilde{g}_0 + \tilde{f}_2 = \tilde{f}_0 + \tilde{g}_2$. Assim, temos $\tilde{g}_0 - \tilde{g}_2 = \tilde{f}_0 - \tilde{f}_2$, que, conforme foi observado, garante que φ está bem definida.

A linearidade de φ é clara. Para provarmos que φ é completamente positiva, provemos que $\varphi^* : (\tilde{A})^{**} \rightarrow A^{**}$ é um $*$ -homomorfismo entre C^* -álgebras. Assim, será completamente positiva, e a demonstração seguirá do Corolário 3.1.10.

Sob as notações da Seção 1.3, seja Ψ o $*$ -isomorfismo entre $\mathcal{F}(A)$ e A^{**} e denotemos por Λ tanto a inclusão de A em A^{**} , quanto a inclusão de $\tilde{A}$ em $(\tilde{A})^{**}$. Provemos, primeiro, que $\varphi^*|_{\Lambda(\tilde{A})}$ é $*$ -homomorfismo. Supondo, sem perda de generalidade, que $f \in A^*$ é positivo, temos a seguinte sequência de igualdades:

$$\varphi^*(\Lambda_{(a, \lambda)})(f) = \Lambda_{(a, \lambda)}(\varphi(f)) = f(a) + \lambda\|f\| = (\Lambda_a + \lambda\Psi(\text{id}_{H_u}))(f). \quad (4.3.1)$$

Como Λ e Ψ são $*$ -isomorfismos, temos, pela equação acima,

$$\varphi^*(\Lambda_{(a, \lambda)}\Lambda_{(b, \mu)}) = \varphi^*(\Lambda_{(ab + \lambda b + \mu a, \lambda \mu)}) = (\Lambda_a + \lambda\Psi(\text{id}_{H_u}))(\Lambda_b + \mu\Psi(\text{id}_{H_u})),$$

e este último termo é igual a

$$\varphi^*(\Lambda_{(a, \lambda)})\varphi^*(\Lambda_{(b, \mu)}),$$

novamente, pela Equação (4.3.1). Assim, concluímos que $\varphi^*|_{\Lambda(\tilde{A})}$ é $*$ -homomorfismo.

Agora, da maneira como foi definido o produto de elementos de $(\tilde{A})^{**}$, vista na sequência de igualdades (1.3.4) da página 15, é simples verificar que φ^* é $*$ -homomorfismo, já que é contínua com relação à topologia fraca*.

Assim, o lema está demonstrado. $\square$

TEOREMA 4.3.7. *Se a unitização $\tilde{A}$ de uma C^* -álgebra A tem CPAP, então A também tem CPAP.*

Demonstração:

Seja $\{V_i\}_{i \in I}$ net de operadores completamente positivos de posto finito em $(\tilde{A})^*$ que converge para $\text{id}_{(\tilde{A})^*}$ na topologia fraca* simples, com $\|V_i\| = 1$ para todo $i \in I$.

Consideremos, também, ψ de $(\tilde{A})^*$ em A^* como sendo a adjunta da inclusão canônica de A em $\tilde{A}$, e φ de A^* em $(\tilde{A})^*$, como a função do lema anterior. Temos que ψ e φ são completamente positivas, pelo Corolário 3.1.10, pois ψ é adjunta de $*$ -homomorfismo e φ tem como adjunta um $*$ -homomorfismo. Como a norma da transformação adjunta é igual à da original, temos que vale $\|\psi\|, \|\varphi\| \leq 1$. Temos que $\{\psi \circ V_i \circ \varphi\}_i$ é um net de funções completamente positivas de posto finito. Além disso, temos $\|\psi \circ V_i \circ \varphi\| \leq \|\psi\| \|V_i\| \|\varphi\| \leq 1$.

Provemos que vale $\lim_i \psi \circ V_i \circ \varphi(f)(a) = \text{id}_{A^*}(f)(a)$, para $f \in A^*$ e $a \in A$, supondo, sem perda de generalidade, que f é um funcional positivo. Temos

$$\begin{aligned} \lim_i \psi \circ V_i \circ \varphi(f)(a) &= \lim_i V_i \circ \varphi(f)(a, 0) = \varphi(f)(a, 0) = \\ &= f(a) + 0 \cdot \|f\| = f(a) = \text{id}_{A^*}(f)(a). \end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que A tem CPAP. $\square$

4.4. $C(X)$ possui SCPAP

Nesta seção, que encerra nosso trabalho, provaremos a nuclearidade da C^* -álgebra $C(X)$ (que é o exemplo geral das C^* -álgebras abelianas com unidade), mostrando que possui a propriedade SCPAP.

Sejam X um espaço topológico compacto Hausdorff, e $C(X)$ a C^* -álgebra das funções contínuas de X em $\mathbb{C}$, com as operações pontuais. Demonstramos que $C(X)$ possui SCPAP, provando que $\text{id}_{C(X)}$ está no fecho forte do conjunto das funções completamente positivas de posto finito. Pela Observação 3.3.5, teremos que $C(X)$ possui tal propriedade.

Dados $f_1, \dots, f_m \in C(X)$ e $\varepsilon > 0$, queremos encontrar $V \in \mathcal{L}(C(X))$, completamente positiva, de posto finito, tal que

$$\|V(f_k) - f_k\| \leq \varepsilon, \text{ para cada } k = 1, \dots, m. \quad (4.4.1)$$

Como as funções f_k são contínuas, para cada $x \in X$, seja $\mathcal{U}_x$ uma vizinhança aberta de x tal que, qualquer que seja $y \in \mathcal{U}_x$, vale

$$|f_k(x) - f_k(y)| \leq \varepsilon, \text{ para cada } k = 1, \dots, m. \quad (4.4.2)$$

Pela compacidade de X , sejam $\mathcal{U}_{x_1}, \dots, \mathcal{U}_{x_n}$ abertos do tipo acima, tais que X esteja contido em $\cup_j \mathcal{U}_{x_j}$. Consideremos, ainda, $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ uma partição da unidade para X , subordinada à cobertura $\{\mathcal{U}_{x_j}\}_{j=1}^n$, ou seja, $\{\varphi_j\}_j$ satisfazendo:

- i. $\varphi_j : X \rightarrow [0, 1]$, função contínua, para cada j ;
- ii. $\overline{\text{supp}} \varphi_j \subseteq \mathcal{U}_{x_j}$, para cada j , onde $\overline{\text{supp}} \varphi_j$ denota o fecho do suporte de φ_j ;
- iii. $\sum_{j=1}^n \varphi_j(y) = 1$, qualquer que seja $y \in X$.

Seja $V : C(X) \rightarrow C(X)$ a função dada por

$$V(f) = \sum_{j=1}^n f(x_j) \varphi_j,$$

a qual, claramente, tem posto finito. Vejamos que é completamente positiva, ou seja, que, dado $p \in \mathbb{N}$, a função $(V \otimes \mathbb{1}) : C(X) \otimes M_p \rightarrow C(X) \otimes M_p$ é positiva.

Pela Proposição 3.1.6, temos que os elementos positivos de $C(X) \otimes M_p$ são somas de elementos da forma $\sum_{r,s=1}^p g_r^* g_s \otimes e_{rs}$, com $g_1, \dots, g_p$ em $C(X)$. Assim, sejam $g_1, \dots, g_p \in C(X)$ e temos

$$(V \otimes \mathbb{1}) \left(\sum_{r,s=1}^p g_r^* g_s \otimes e_{rs} \right) = \sum_{r,s=1}^p V(g_r^* g_s) \otimes e_{rs} = \sum_{r,s=1}^p \left(\sum_{j=1}^n (g_r^* g_s)(x_j) \varphi_j \right) \otimes e_{rs},$$

e este último termo, pela positividade de cada φ_j , é igual a

$$\sum_{j=1}^n \sum_{r,s=1}^p \left((g_r(x_j) \sqrt{\varphi_j})^* (g_s(x_j) \sqrt{\varphi_j}) \otimes e_{rs} \right),$$

que é, novamente pela proposição citada, um elemento positivo de $C(X) \otimes M_p$. Portanto, resta-nos, apenas, provar que V satisfaz a Desigualdade (4.4.1). Aqui, como a prova será feita para cada f_k , omitiremos os sub-índices k . Temos

$$\begin{aligned} \|V(f) - f\| &= \sup_{y \in X} |V(f)(y) - f(y)| = \sup_{y \in X} \left| \sum_{j=1}^n f(x_j) \varphi_j(y) - f(y) \right| = \\ &= \sup_{y \in X} \left| \sum_{j=1}^n (f(x_j) - f(y)) \varphi_j(y) \right| \leq \sup_{y \in X} \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(y)| \cdot \varphi_j(y). \end{aligned}$$

Temos $\overline{\text{supp}} \varphi_j \subseteq \mathcal{U}_{x_j}$. Além disso, pela Inequação (4.4.2), vale $|f(x_j) - f(y)| \leq \varepsilon$, para todo $y \in \mathcal{U}_{x_j}$. Assim, concluímos, pela desigualdade acima, que vale

$$\|V(f) - f\| \leq \sup_{y \in X} \sum_{j=1}^n \varepsilon \cdot \varphi_j(y) = \varepsilon.$$

Portanto, temos que V satisfaz (4.4.1). Conforme observamos, temos, pela Observação 3.3.5, que $C(X)$ possui SCPAP.

Índice Remissivo

- (H_f, π_f) —representação GNS, 6
- (H_f, π_f, x_f) , 9
- $A \odot B$, 21
- $A \otimes B$, 17, 21
- $A \otimes_\gamma B$, 22
- $A^* \otimes M_n$, 34
- A^{**} —bidual de A , 12
- $C^*(A)$ —envolvente de A , 15
- $C_0(\Omega)$, 2
- $H \hat{\otimes} K$, 19
- $H \otimes K$, 18
- H_f —espaço de Hilbert da repr. GNS, 6
- T_ρ , 36, 40
- T_f , 36
- $A \otimes_{\text{proj}} B$, 22
- $A \otimes_* B$, 21
- $A \otimes_{\max} B$, 22
- $S(A)$, 3
- $\tilde{A}$ —unitização de A , 3
- $\varphi \hat{\otimes} \psi$, 21
- ω_ξ , 10
- π_f —*-homomorfismo da repr. GNS, 6
- π_u —*-homomorfismo da repr. universal, 12
- $\sigma(a)$, 2
- $\tau \otimes_\gamma \rho$, 27
- $f \otimes \mathbb{1}$, 34
- f_n , 31
- $f_{\varepsilon_j i}$, 34
- f_{ij} , 34
- g_{ij} , 34
- $u \hat{\otimes} v$, 19
- x_f —vetor cíclico canônico, 9
- $\mathcal{F}(A)$, 12
- $\overline{\pi_u(A)}^\sigma$, 12
- *-homomorfismo, 2
- álgebra, 1
 - *-álgebra, 1
 - de Banach, 1
 - normada, 1
- aproximação da unidade, 2, 27
- auto-adjunto, 2
- C^* -álgebra, 1
 - envolvente, 15
 - nuclear, 24
- C^* -norma, 1
- completamente positiva, 31
- comutante, 11
- CPAP, 37
- envolvente, 15
- espaço de Hilbert da repr. universal, 12
- espectro, 2
- estado, 3
 - vetorial, 10
- extensão, 46
- função positiva, 31
- funcional
 - associado a vetor e representação, 5
 - positivo, 3, 5, 9
 - vetorial, 5, 10
- involução, 1
- norma
 - espacial, 21, 25, 28
 - máxima, 22
 - projetiva, 22
 - sub-tensorial, 21
 - tensorial, 21
- nuclear, 24
- positivo, 2
- representação, 5
 - cíclica, 8
 - fiel, 5
 - GNS, 6
 - não degenerada, 7
 - universal, 7

SCPAP, 37
seqüência exata, 46
sub- C^* -álgebra, 2

unidade aproximada, 2, 27
unitário, 2
unitariamente equivalente, 8
unitização, 3

vetor cíclico, 8
 canônico, 9

Referências Bibliográficas

- [Cun77] Joachim Cuntz. Simple C^* -algebras generated by isometries. *Communications in Mathematical Physics*, 57:173–185, 1977.
- [Dix64] Jacques Dixmier. *Les C^* -algèbres et leurs représentations*. Gauthier-Villars, 1964.
- [Kir77] Eberhard Kirchberg. C^* -nuclearity implies CPAP. *Mathematische Nachrichten*, 76:203–212, 1977.
- [Lan73] Christopher Lance. On nuclear C^* -algebras. *Journal of Functional Analysis*, 12:157–176, 1973.
- [Mur90] G. J. Murphy. *C^* -algebras and Operator Theory*. Academic Press, Inc., 1990.
- [Pau86] Vern Paulsen. *Completely Positive Maps and Dilations*. Number 146 in Pitman Research Notes in Mathematics. Longman, second edition, 1986.
- [Rud91] Walter Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, second edition, 1991.
- [Tak64] Masamichi Takesaki. On the cross-norm of the direct product of C^* -algebras. *Tôhoku Mathematical Journal*, 15:111–122, 1964.
- [Was94] Simon Wassermann. *Exact C^* -algebras and related topics*. Number 19 in Lecture Notes Series. Seoul National University, 1994.