**Bases Multiplicativas para
Álgebras Schurian Triangulares**

Marcia Aguiar

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: Álgebra
Orientador: **Prof. Dr. Flávio Ulhoa Coelho**

São Paulo, agosto de 2005

Aos meus pais, com muito amor e carinho.

Agradecimentos

Aos meus alunos do Centro Universitário UNIFIEO, por indiretamente me incentivarem a estudar e, com isso, aprendi muito sobre a vida, além de conquistar grandes amigos.

Aos professores do IME, por tudo o que me ensinaram.

Aos meus amigos pelo apoio, em especial ao *Antônio Neri e Eliza H. Miyazaki* pelo companheirismo.

Em especial:

- Ao Professor *Flávio Ulhoa Coelho*, pela sua dedicação e por sempre confiar no nosso trabalho.

- Aos meus pais e a toda a minha família pela ajuda, compreensão e paciência que tiveram durante este período.

Resumo

Nos meados da década de 70, Gabriel conjecturou o seguinte fato:

Para cada número natural d , existe somente um número finito de classes de isomorfismo de álgebras de tipo finito de dimensão d .

No contexto que estamos trabalhando, álgebra significa uma álgebra básica de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado. Em 1979, Bongartz, em [B], mostra que as álgebras triangulares de tipo finito possuem uma base multiplicativa, com isso ele prova a Conjectura de Gabriel para este tipo de álgebra. Roiter [R], em 1981, faz uma generalização do trabalho de Bongartz para álgebras de tipo finito.

Na tentativa de esclarecer este último trabalho, em 1985, Bautista, Gabriel, Roiter e Salmerón provaram em [BGRS] que toda álgebra de tipo finito possui base multiplicativa, estabelecendo de forma definitiva a conjectura acima no caso geral.

O principal objetivo desta dissertação é aproveitar a idéia da demonstração usada por Bongartz (citada acima), e demonstrar um teorema generalizando um pouco mais a álgebra mencionada, provando que:

Seja $A \cong \frac{kQ_A}{I}$ uma álgebra schurian, triangular e sem coroas próprias. Então A tem base multiplicativa.

Como consequência deste fato, poderemos dizer que existe um número finito de classes de isomorfismo de álgebras, nessas condições, para uma dimensão dada.

Com isso, conseguimos elaborar uma demonstração com conceitos menos sofisticados e com uma maior generalização da classe algébrica. A nossa meta é aproximar-se, ao máximo, da classe de álgebra trabalhada por Assem, Castonguay, Marcos e Trepode (em [ACMT]) sem modificar a idéia da demonstração. Após a demonstração proposta, estudamos o mesmo resultado para as álgebras biseriais especiais.

Abstract

In the middle 70's, Gabriel conjectured the following fact:

For each natural number d , there is only a finite number of non-isomorphic representation-finite algebras of dimension d .

Within the context we have been working, algebra means a finite dimension basic algebra over an algebraically closed field. In 1979, Bongartz, in [B], shows that a triangular algebra of finite type, has a multiplicative basis, based on that he proves Gabriel's Conjecture for that kind of algebra. Roiter [R], in 1981, proved a generalization for Bongartz's work for representation-finite algebras.

Trying to clarify the latter work, in 1985, Bautista, Gabriel, Roiter, and Salmerón proved in [BGRS] that all finite type algebras have multiplicative bases, definitely establishing the above conjecture, in general terms.

The main aim for this dissertation is to use the idea of Bongartz's proof (above cited) and show a theorem generalizing a little bit more the algebra that was mentioned, proving that:

Let $A \cong \frac{kQ_A}{I}$ be a schurian algebra, triangular and without proper crowns. Then, A has a multiplicative basis.

As a consequence of this fact, we can state that there is a finite number of isomorphism classes of algebras, under these conditions, for a given dimension.

Based on that, we were able to elaborate a proof with less sophisticated concepts and with a broader generalization of the algebraic class. Our target is to get the closest to the class of algebras worked out by Assem, Castonguay, Marcos, and Trepode (in [ACMT]), without modifying the overall idea. After the proposed proof, we studied the same results for the special biserial algebras.

Sumário

Introdução	ii
1 Preliminares	1
1.1 Álgebras e Módulos	1
1.2 Álgebra de Caminhos	4
1.3 Tipo de Representação de uma Álgebra	15
2 Bases Multiplicativas	22
2.1 Definições Básicas	22
2.2 Um critério	27
2.3 Constantes Estruturais	30
3 Resultados Principais	36
3.1 Teorema Principal	36
3.2 Álgebras Biseriais Especiais	47
Referências Bibliográficas	50

Introdução

Entre os vários problemas da Teoria de Representações existentes o que nos motivou durante este trabalho foi estudar as relações entre algumas classes de álgebras e as bases multiplicativas. Entre várias questões temos a Conjectura de Gabriel que é assim enunciada:

Para cada número $d \in \mathbb{N}$, existe um número finito de classes de isomorfismo de k -álgebras de tipo finito de dimensão d .

Em 1979, Bongartz (em [B]) provou a conjectura para k -álgebras triangulares de tipo finito. Roiter em 1981 (ver [R]) publica uma generalização do Teorema de Bongartz para álgebras de tipo finito.

Depois desta publicação surgiram casos particulares como os estudados por Bretscher e Gabriel (ver [BG]), Martinez e de la Peña (ver [MP]) e o trabalho de Skowroński e Waschbüsch (ver [SW]), que será estudado por nós mais detalhadamente.

Na tentativa de tornar o trabalho de Roiter mais acessível para todos os estudiosos da área, em 1985, Bautista, Gabriel, Roiter e Salmerón publicaram um artigo (ver [BGRS]) explicando o trabalho de Roiter e a demonstração da existência de bases multiplicativas em álgebras de tipo finito. Cabe aqui mencionar que embora houvesse uma tentativa de tornar esta demonstração mais acessível, ela ainda continua com técnicas bem sofisticadas.

Recentemente Assem, Castonguay, Marcos e Trepode, explorando as relações entre algumas classes de álgebras schurian e bases multiplicativas, provaram (em [ACMT]) que a ausência de uma quase-coroa em uma álgebra schurian triangular implica a existência

de bases multiplicativas.

O objetivo desta dissertação é, primeiramente, estudar o Teorema de Bongartz e introduzir as terminologias e conceitos mais modernos como: álgebra schurian, álgebra triangular, coroa e a idéia de poço em um quiver, entre outros e, a partir deste estudo, generalizar um pouco mais a classe algébrica usada por Bongartz.

Na verdade, o que pretendemos é manter a idéia da demonstração do Bongartz e trabalhar com uma classe algébrica mais abrangente, no caso uma álgebra $A \cong \frac{kQ_A}{I}$ schurian, triangular e sem coroas próprias. Mostraremos que uma álgebra nessas condições possui uma base multiplicativa.

Como consequência desse teorema, teremos que para cada número $d \in \mathbb{N}$, existe somente um número finito de classes de isomorfismo de álgebras, nestas condições, com dimensão d . Assim, conseguimos chegar o mais próximo possível da classe algébrica estudada por Assem, Castonguay, Marcos e Trepode em [ACMT], trabalhando com uma demonstração menos sofisticada e com conceitos mais simples dos por eles considerados.

A nossa proposta, neste trabalho, é traçar um caminho de definições e resultados que facilitem a compreensão do teorema principal.

Assim, o Capítulo 1 inicia-se com as definições e resultados básicos sobre álgebras, módulos e álgebras de caminhos. Neste, vamos, através do Teorema de Gabriel (ver também [CLS]), determinar unicamente um quiver ordinário de A e pelo menos um epimorfismo entre as álgebras kQ_A e A . Neste caso, definiremos um epimorfismo φ que será utilizado no nosso estudo. Desta maneira, vamos conseguir definir e discutir alguns exemplos sobre os tipos de representação de uma álgebra, dos quais nos interessará somente a divisão entre finito e infinito. Definiremos um quiver que resultará numa álgebra de tipo infinito, importante para o nosso estudo que é a coroa, usada em [ACMT].

No Capítulo 2, começaremos definindo o que são bases multiplicativas e relacionaremos essas bases à escolha de um epimorfismo que denotaremos por φ_λ entre kQ_A e A , pelo Teorema de Gabriel. Como estaremos considerando uma álgebra A básica e de dimensão finita, teremos que se $rad^2 A = 0$ então A tem base multiplicativa.

Um outro resultado importante neste capítulo é que para cada $d \in \mathbb{N}$, só existe um número finito de álgebras de dimensão d com bases multiplicativas, e isto se deve ao estudo das constantes estruturais de uma álgebra a partir de uma base dada.

Depois deste caminho construído, temos condições para no Capítulo 3 demonstrarmos o seguinte teorema:

Seja $A \cong \frac{kQ_A}{I}$ uma álgebra schurian, triangular e sem coroas próprias. Então A tem uma base multiplicativa.

Em seguida, estudaremos o mesmo resultado para as álgebras biseriais especiais. Assim, pretendemos concluir a nossa dissertação.

Capítulo 1

Preliminares

Como vimos na introdução desta dissertação, vamos trabalhar com terminologias e definições mais recentes do que as usadas em [B], para isso vamos fazer um apanhado de algumas noções sobre a Teoria de Representações de Álgebras que serão utilizadas.

1.1 Álgebras e Módulos

Ao longo deste, k denotará um corpo qualquer. Em alguns momentos iremos assumir que k é algebricamente fechado.

Uma k -álgebra (ou simplesmente álgebra) é um anel com unidade A que possui também uma estrutura de k -espaço vetorial, tal que $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$, $\forall \alpha \in k$, e $\forall a, b \in A$.

A dimensão de uma k -álgebra é sua dimensão como espaço vetorial. Consideremos a partir deste momento que A será uma k -álgebra de dimensão finita.

Entende-se que um A -módulo à esquerda é um k -espaço vetorial M com uma ação à esquerda de A sobre M , isto é, a cada par $(a, m) \in A \times M$ é associado um elemento $am \in M$, tal que para todos $a, b \in A$ e para todos $m, m' \in M$, teremos:

i) $a(m + m') = am + am'$

ii) $(a + b)m = am + bm$

iii) $(ab)m = a(bm)$

iv) $1m = m$

De maneira dual define-se A -módulos à direita.

Via de regra, sempre que falarmos em *módulos*, neste trabalho, estaremos nos referindo aos A -módulos à esquerda, caso contrário, deixaremos explícito tal mudança. Um A -módulo M será um A -módulo *finitamente gerado* quando possuir um conjunto gerador finito. No contexto que estamos trabalhando, isto equivale dizer que a dimensão de M é finita.

Neste texto, trabalharemos com os A -módulos *finitamente gerados*. Denotaremos por $\text{mod}A$ a categoria dos A -módulos finitamente gerados.

Definição 1.1.1. Um A -módulo M diz-se soma direta de uma família $\{M_i\}_{i \in I}$ de submódulos, com I um conjunto finito, se estiverem verificadas as seguintes condições:

- i) Todo elemento $m \in M$ se escreve de um único modo na forma $m = \sum_{i \in I} m_i$, onde $m_i \in M_i$, $\forall i \in I$.
- ii) $M = \sum_{i \in I} M_i$ e $M_j \cap (\sum_{i \neq j} M_i) = 0$, $\forall j \in I$.

Para indicar que M é soma direta dos submódulos $\{M_i\}_{i \in I}$ usaremos o símbolo $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ e, se $I = \{1, 2, \dots, n\}$ escrevemos $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$.

Diremos que um A -módulo M não nulo é *indecomponível* se não tiver somandos diretos não triviais.

Estudando os A -módulos finitamente gerados temos como resultado importante na teoria o **Teorema de Krull-Schmidt** que é assim enunciado:

Teorema 1.1.2. Todo A -módulo finitamente gerado é a soma direta finita de A -módulos indecomponíveis finitamente gerados. Tal decomposição é essencialmente única.

Sendo A um A -módulo finitamente gerado, então podemos considerar a decomposição de A em A -módulos indecomponíveis, ou seja, $A \cong P_1 \oplus \dots \oplus P_n$. Teremos que uma k -álgebra A é *básica* se $P_i \cong P_j$ se e só se $i = j$.

O Teorema de Morita (ver [DK]) nos garante que dada uma álgebra A , existe uma álgebra B tal que as categorias de módulos $\text{mod}A$ sobre A e $\text{mod}B$ sobre B são equivalentes. Por isso, do ponto de vista da Teoria de Representações, impormos que as álgebras são básicas não é muito restritivo. Desta maneira, a álgebra A que já era de dimensão finita a partir deste momento será, também, básica sobre um corpo algebricamente fechado k .

Proposição 1.1.3. *Seja A uma álgebra básica de dimensão finita e considere $A \cong P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$ a decomposição de A em A -módulos projetivos indecomponíveis. Se escrevemos $1 = \sum_{i=1}^n e_i$, onde $e_i \in P_i$ para cada i , então $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um sistema*

completo ($1 = \sum_{i=1}^n e_i$) de

idempotentes ($e_i^2 = e_i$)

ortogonais ($e_i e_j = 0$ se $i \neq j$) e

primitivos (se $e_i = e' + e''$, para cada $i = 1, \dots, n$, onde e' e e'' são idempotentes ortogonais então ou $e' = 0$ ou $e'' = 0$).

Além disto, para cada $i = 1, \dots, n$, $P_i = Ae_i$.

Demonstração. Observe que

$$e_i = e_i 1 = e_i e_1 + e_i e_2 + \dots + e_i e_n$$

Por definição, $e_i \in P_i$ e como para cada $j = 1, \dots, n$, P_j é um A -módulo, temos que $e_i e_j \in P_j$. Logo, $e_i e_j = 0$ se $i \neq j$ e $e_i e_i = e_i$.

Para $x \in P_i$, temos que $x = x1 = xe_1 + xe_2 + \dots + xe_n$ e como $Ae_i \subseteq P_i$ esta é uma decomposição de x em $A \cong P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$. Então, $xe_j = 0$ se $j \neq i$ e $x = xe_i \in Ae_i$, ou seja, $P_i \subseteq Ae_i$.

Portanto, $Ae_i = P_i$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Falta mostrarmos que cada e_i é primitivo.

Suponha $e_i = e' + e''$ onde e' e e'' são idempotentes ortogonais. É fácil ver que $Ae_i = Ae' \oplus Ae''$, e como $Ae_i = P_i$ é indecomponível, segue então que $Ae' = 0$ ou $Ae'' = 0$. Logo, $e' = 0$ ou $e'' = 0$.

Portanto, $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um sistema completo de idempotentes ortogonais e primitivos. $\square$

Sendo $\{e_1, \dots, e_n\}$ como definido acima, teremos que $A \cong Ae_1 \oplus \dots \oplus Ae_n$ e n indicará o número de projetivos indecomponíveis (mais detalhes ver em [CLS]).

Vejamos um exemplo de uma álgebra nestas condições.

Exemplo 1.1.4. *Seja uma álgebra de matrizes $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ k & k \end{pmatrix}$ e como a $\dim_k A = 3$ temos que esta é de dimensão finita.*

Por outro lado, A é básica, já que os elementos $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, formam um sistema completo de idempotentes ortogonais e primitivos, pela proposição acima temos que $A \cong Ae_1 \oplus Ae_2$ e Ae_1 não isomorfo a Ae_2 .

A vantagem de se trabalhar com uma álgebra com as condições acima é que ela pode ser realizada como sendo um quociente de uma álgebra de caminhos. Para especificarmos isso melhor, vamos recordar mais alguns conceitos.

1.2 Álgebra de Caminhos

Nesta seção, definiremos o que são álgebras de caminhos e quais as condições necessárias para que uma álgebra seja isomorfa ao quociente de uma álgebra de caminhos. Para isso, precisamos primeiro relembrar o conceito de quiver.

Definição 1.2.1. *Um quiver Q é um grafo orientado, isto é, consiste de dois conjuntos Q_0 e Q_1 e um par de funções $s, e: Q_1 \rightarrow Q_0$. Os elementos de Q_0 são chamados de vértices de Q enquanto que os elementos de Q_1 são chamados de flechas de Q . Dada uma flecha $\alpha \in Q_1$, o vértice $s(\alpha)$ é o vértice inicial da flecha α enquanto que $e(\alpha)$ é o vértice final de α .*

Pode-se representar uma flecha $i \xrightarrow{\alpha} j$ da seguinte maneira $(j|\alpha|i)$.

Sejam Q um quiver e $a, b \in Q_0$. Um caminho ω de a a b é uma concatenação de flechas $\alpha_n \cdots \alpha_1$ onde, para cada i , $1 \leq i \leq n-1$, $e(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$, $s(\alpha_1) = a$ e $e(\alpha_n) = b$.

Um tal caminho será indicado por $\omega = (b|\alpha_n \cdots \alpha_1|a)$ e definiremos $s(\omega) = s(\alpha_1) = a$ e $e(\omega) = e(\alpha_n) = b$. O *comprimento* deste caminho ω é o número de flechas n . Por convenção, um *caminho trivial* (ou *caminho de comprimento zero*) é um caminho sem flechas associado a um vértice $a \in Q_0$ e será denotado também por $(a||a)$. Dizemos que ω é um *ciclo orientado* quando ω não é um caminho trivial e $s(\omega) = e(\omega)$.

Representamos um quiver da seguinte maneira:

Exemplo 1.2.2.

Para o quiver acima temos $Q_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta, \eta, \theta\}$ e $s(\alpha) = s(\beta) = 1$, $e(\beta) = s(\gamma) = s(\zeta) = 2$, $e(\gamma) = e(\alpha) = s(\delta) = s(\eta) = 3$, $e(\delta) = 4$, $e(\zeta) = e(\eta) = 5$, $s(\theta) = 6$ e $e(\theta) = 7$.

Um conceito relacionado ao de quiver é o de grafo (não orientado). Informalmente, um grafo é um quiver onde as flechas são substituídas por arestas. Mais formalmente, um *grafo* G é dado por dois conjuntos G_0 e G_1 . Os elementos de G_0 são chamados de *vértices*. O conjunto G_1 é dado por pares ordenados $(a, b) \in G_0 \times G_0$ e tem a propriedade de que se $(a, b) \in G_1$, então $(b, a) \in G_1$. Seus elementos são chamados de *arestas*.

Um grafo será representado da seguinte maneira:

Exemplo 1.2.3.

Nesse grafo temos que $G_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $G_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta, \eta, \theta\}$.

Definição 1.2.4. A álgebra de caminhos kQ de Q é definida da seguinte maneira:

Sejam Q um quiver e k um corpo. Para definirmos uma k -álgebra, em primeiro lugar, consideremos o conjunto $\mathcal{C}$ formado por todos os caminhos de Q , incluídos os caminhos triviais. Considere agora o k -espaço vetorial kQ com base $\mathcal{C}$ (que será chamada de base usual de kQ). Para transformarmos kQ em uma álgebra, precisamos definir uma multiplicação nos elementos de $\mathcal{C}$. Dados dois caminhos $\omega_1 = (b|\alpha_m \cdots \alpha_1|a)$ e $\omega_2 = (d|\beta_n \cdots \beta_1|c)$ de Q (sem excluir a possibilidade de serem caminhos triviais), definimos

$$\omega_1 \omega_2 = \begin{cases} (b|\alpha_m \cdots \alpha_1 \beta_n \cdots \beta_1|c) & \text{se } a = d \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Estendendo por linearidade tal multiplicação a todos os elementos de kQ , define-se neste conjunto uma estrutura de k -álgebra.

É fácil ver que kQ é de dimensão finita se e só se Q for um quiver finito sem ciclos orientados. De agora em diante vamos assumir que todos os quivers são finitos, isto é, com um número finito de vértices e de flechas.

Seja A uma álgebra, como já dissemos, básica de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k , o **Teorema de Gabriel** a seguir estabelece que A pode ser representada através de um quiver.

Antes, lembraremos a seguinte definição:

Definição 1.2.5. Um ideal I de uma álgebra de caminhos kQ é admissível se existir um $n \in \mathbb{N}$ tal que $J^n \subset I \subset J^2$, onde J é o ideal de kQ gerado pelas flechas de Q .

Teorema 1.2.6. Seja A uma álgebra básica de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k . Então existe um quiver Q_A e um epimorfismo $\varphi: kQ_A \rightarrow A$ tal que $\ker \varphi$ é um ideal admissível de kQ_A .

Não iremos apresentar todos os detalhes da demonstração deste resultado aqui e referimos o leitor a [CLS, C] para tal. No entanto, iremos indicar como são as construções de Q_A e do epimorfismo φ pois estas serão importantes no desenvolvimento do trabalho.

O quiver Q_A mencionado no teorema é chamado de *quiver ordinário de A* e é construído da seguinte forma. Fixe um sistema completo de idempotentes primitivos e ortogonais $\{e_1, \dots, e_n\}$ de A . Os vértices de Q_A , que denotaremos por $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$, estão, por definição, em correspondência biunívoca com este sistema.

Observação 1.2.7. *Podemos dizer então que $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ também é um sistema completo de idempotentes ortogonais e primitivos.*

De fato, pela multiplicação usada entre dois caminhos, no caso os triviais, temos que:

$$\epsilon_i \epsilon_j = \begin{cases} \epsilon_i & \text{se } i = j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Não é difícil checar que $\sum_{i \in Q_0} \epsilon_i$ é a unidade de kQ e que, como o único idempotente não nulo de $\epsilon_i kQ \epsilon_i$ é ϵ_i , então ϵ_i é primitivo, para cada $i = 1, \dots, n$.

Para determinarmos o quiver Q_A , precisaremos determinar o número de flechas entre dois vértices ϵ_i e ϵ_j em $(Q_A)_0$. Por definição, o número de flechas de Q_A de ϵ_i a ϵ_j será igual à dimensão

$$\dim_k e_j \left(\frac{\text{rad} A}{\text{rad}^2 A} \right) e_i$$

Observemos que o quiver Q_A do Teorema 1.2.6 é único (ver [CLS, C]) enquanto que podem haver mais do que um epimorfismo, o que pode implicar em diferentes *apresentações* da álgebra A como quocientes de álgebras de caminhos. Desta forma, podemos olhar as álgebras acima também como k -categorias, onde os objetos são os vértices e os morfismos são as flechas.

Veremos mais adiante que a existência de um tal epimorfismo com certas condições nos garantirá a existência de bases multiplicativas. Por ora, vamos definir um epimorfismo.

Observação 1.2.8. *Definiremos aqui um morfismo φ entre as álgebras kQ_A e A .*

Fixe um sistema completo de idempotentes ortogonais e primitivos $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de A . Como vimos, o quiver Q_A é definido com n vértices $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n\}$ enumerados em correspondência biunívoca com $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Vamos definir uma k -base de A . Por definição, o número de flechas de ϵ_i a ϵ_j é igual à $\dim_k e_j \left(\frac{\text{rad} A}{\text{rad}^2 A} \right) e_i$. Então considere o conjunto $\mathcal{C} = \left\{ y_\alpha \in \frac{\text{rad} A}{\text{rad}^2 A} \mid \alpha \in (Q_A)_1 \right\}$, escolhido

de tal forma que para cada par i, j tenhamos $\mathcal{C}_{i,j} = \left\{ y_\alpha \in \mathcal{C} \mid i \xrightarrow{\alpha} j \right\}$ uma k -base de $e_j \left(\frac{\text{rad} A}{\text{rad}^2 A} \right) e_i$.

Por fim, escolhemos para cada $\alpha \in (Q_A)_1$, $x_\alpha \in e_j(\text{rad} A) e_i$ tal que $\overline{x_\alpha} = y_\alpha$. Para um caminho $\omega = (j | \alpha_r \dots \alpha_1 | i)$, defino $x_\omega = x_{\alpha_r} x_{\alpha_{r-1}} \dots x_{\alpha_1} \in e_j(\text{rad}^r A) e_i$, para algum $r \in \mathbb{N}$. Desta forma, $\overline{x_\omega} = y_{\alpha_r} y_{\alpha_{r-1}} \dots y_{\alpha_1}$.

Considere agora uma k -base $\mathcal{B}$ de A sendo a união entre o sistema de idempotentes fixado, os elementos x_α , $\forall \alpha \in (Q_A)_1$ e com os elementos x_ω .

Assim definiremos:

$$\begin{aligned} \varphi : kQ_A &\longrightarrow A \\ \epsilon_i &\longmapsto e_i \\ \alpha &\longmapsto x_\alpha \\ \omega &\longmapsto x_\omega \end{aligned}$$

Nestas condições, φ é um morfismo de k -álgebras sobrejetor e com núcleo sendo um ideal admissível (ver mais detalhes em [CLS, C]).

Agora mostraremos algumas álgebras para exemplificarmos a construção acima.

Exemplo 1.2.9. Seja o quiver Q : $\begin{array}{ccc} & \alpha & \\ i & \xrightarrow{\quad} & j \end{array}$

Como espaço vetorial kQ tem base $\mathcal{B} = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \alpha\}$ e portanto $\dim_k kQ = 3$. A tabela de multiplicação dos elementos em $\mathcal{B}$ é $\epsilon_1 \epsilon_2 = 0$, $\epsilon_i \epsilon_i = \epsilon_i$ para $i = 1, 2$, $\alpha \epsilon_1 = \epsilon_2 \alpha = \alpha$ e $\alpha \alpha = \epsilon_1 \alpha = \alpha \epsilon_2 = 0$. Neste caso, podemos verificar que kQ é isomorfa à álgebra de matrizes $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ k & k \end{pmatrix}$, do Exemplo 1.1.4, onde podemos ter como base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Desta maneira, definiremos o epimorfismo φ assim:

$$\begin{aligned}\varphi : kQ &\longrightarrow A \\ \epsilon_1 &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \epsilon_2 &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \alpha &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

É fácil verificar que $kQ \cong A$.

No exemplo acima temos que $\text{Ker}\varphi = 0$. Estudaremos uma álgebra onde isso não acontece.

Exemplo 1.2.10. Considere o seguinte quiver Q :

$$1 \begin{array}{c} \circlearrowright \end{array} \alpha \quad e \quad I = \langle \alpha^3 \rangle$$

Seja a base de kQ igual à $\mathcal{B} = \{\epsilon_1, \alpha, \alpha^2\}$ portanto a $\dim_k kQ = 3$.

Considere a álgebra $A = \frac{k[x]}{(x^3)}$

Se considerarmos $\mathcal{B}' = \{1, x, x^2\}$ como sendo a base de A , teremos um φ definido da seguinte maneira:

$$\varphi(\epsilon_1) = 1, \quad \varphi(\alpha) = x \quad e \quad \varphi(\alpha^2) = x^2$$

Ao verificarmos os cálculos teremos que $\frac{kQ}{I} \cong A$.

Necessitaremos de mais algumas definições.

Definição 1.2.11. Um vértice de um quiver Q é um poço se não existe nenhuma flecha começando nele, bem como um vértice é chamado fonte se não existe nenhuma flecha terminando nele.

Definição 1.2.12. Uma álgebra de caminhos kQ é triangular se, e somente se, Q não tiver ciclos orientados.

Analisando as álgebras triangulares podemos dizer que:

Observação 1.2.13. *Em uma álgebra triangular existe pelo menos um vértice que é um poço e um outro que é uma fonte.*

Vejamos alguns quivers para exemplificar a observação acima.

Exemplo 1.2.14. *No Exemplo 1.2.2 temos o seguinte quiver Q*

Neste, podemos analisar que os vértices 4, 5 e 7 são poços e os vértices 1 e 6, fontes e pela definição acima o quiver Q é triangular.

Exemplo 1.2.15. *Considere o quiver*

Temos que este não é triangular e também não possui vértices que sejam poços, ou fontes.

Uma outra classe de álgebras que será importante em nosso estudo é a das álgebras schurian.

Definição 1.2.16. *Uma k -álgebra de dimensão finita A é dita schurian se para cada par de idempotentes primitivos e, f de A , temos que $\dim_k(eAf) \leq 1$.*

Vamos exemplificar este conceito.

Exemplo 1.2.17. *Seja kQ a álgebra dada pelo quiver Q abaixo:*

Observando esse quiver, temos dois caminhos distintos $\gamma\alpha$ e $\delta\beta$ que começam em ϵ_1 e terminam em ϵ_4 . Logo, $\dim_k (\epsilon_4 kQ \epsilon_1) = 2$. Portanto, kQ não é schurian.

Mas se considerarmos a álgebra $A = \frac{kQ}{I}$, onde Q é o quiver dado acima e $I = \langle \gamma\alpha - \delta\beta \rangle$, teremos que $B = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \gamma\alpha\}$ é uma base de A . Como podemos perceber a $\dim_k (\epsilon_4 kQ \epsilon_1) = 1$ e neste caso, a álgebra A é schurian.

Terminamos esta seção com um exemplo que será útil mais adiante. Para tanto, precisamos do seguinte lema.

Lema 1.2.18. Sejam $A \cong \frac{kQ_A}{I_A}$ e $B \cong \frac{kQ_B}{I_B}$. Se $\phi : A \rightarrow B$ e $\phi' : \frac{kQ_A}{I_A} \rightarrow \frac{kQ_B}{I_B}$ são isomorfismos de álgebras, temos:

- i) Se $e \in A$ é idempotente, então $\phi(e)$ é idempotente em B .
- ii) Se $i \in (Q_A)_0$, então $\phi'(\epsilon_i) \in (Q_B)_0$.
- iii) Se $\alpha : i \rightarrow j \in (Q_A)_1$, então $\phi'(\alpha)$ é um múltiplo da flecha $\phi'(\epsilon_j)\phi'(\alpha)\phi'(\epsilon_i) \in (Q_B)_1$.

Demonstração. i) Sendo $e = e^2 \in A$ temos que $\phi(e^2) = \phi(e)\phi(e) = (\phi(e))^2$, por outro lado, $\phi(e^2) = \phi(e)$. Portanto, $(\phi(e))^2 = \phi(e)$.

ii) Como todo $i \in (Q_A)_0$, então ϵ_i é um idempotente em $\frac{kQ_A}{I_A}$ e como $A \cong \frac{kQ_A}{I_A}$, então sabemos que existe uma correspondência entre os idempotentes e os vértices, o mesmo acontece com a álgebra B . Logo, por i) temos que $\phi'(\epsilon_i) \in (Q_B)_0$.

iii) Sendo $\alpha : i \rightarrow j \in (Q_A)_1$ podemos dizer que $\alpha = \epsilon_j \alpha \epsilon_i$. Assim, $\phi'(\epsilon_j \alpha \epsilon_i) = \phi'(\epsilon_j)\phi'(\alpha)\phi'(\epsilon_i) \in \frac{kQ_B}{I_B}$. Com isto, $\phi'(\alpha)$ é um caminho de $\phi'(\epsilon_i)$ a $\phi'(\epsilon_j)$.

Não é difícil ver que, por ser ϕ' um isomorfismo, $\phi'(\alpha)$ não pode estar em $\text{rad}^2(\frac{kQ_B}{I_B})$. Logo, $\phi'(\alpha)$ é de fato um múltiplo de uma flecha como queríamos.

□

Exemplo 1.2.19. Seja $A_x \cong \frac{kQ}{I_x + \text{rad}^3 kQ}$, onde o quiver Q é

$$e \quad I_x = \langle \delta\alpha - \zeta\beta, \gamma\alpha - \varepsilon\beta, \theta\delta - \eta\gamma, \eta\varepsilon - x\theta\zeta \rangle, \text{ para } x \in k^*.$$

$$\text{Então } A_x \cong A_y \iff x = y \text{ ou } x = y^{-1}.$$

De fato, considere $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_6\}$ o conjunto de vértices em A_x e como já vimos, ele também é um sistema completo de idempotentes ortogonais e primitivos.

Para provarmos uma implicação, consideremos que se $A_x \cong A_y$ então existe um isomorfismo $\phi : A_x \rightarrow A_y$, onde valem todas as condições do lema anterior assim:

$$\begin{aligned} \phi(\epsilon_1) &= \epsilon_1, & \phi(\epsilon_6) &= \epsilon_6, \\ \phi(\epsilon_2) &= \epsilon_2 \text{ ou } \epsilon_3, & \phi(\epsilon_3) &= \epsilon_3 \text{ ou } \epsilon_2, \\ \phi(\epsilon_4) &= \epsilon_4 \text{ ou } \epsilon_5 & \text{ e } \phi(\epsilon_5) &= \epsilon_5 \text{ ou } \epsilon_4, \end{aligned}$$

Desta maneira, teremos as seguintes possibilidades:

1º) ϕ é a identidade nos vértices e nas flechas.

Assim, teremos que

$$\phi(\eta\varepsilon) = \phi(x\theta\zeta) = x\phi(\theta\zeta) = x\theta\zeta$$

Por outro lado,

$$\phi(\eta\varepsilon) = \eta\varepsilon = y\theta\zeta$$

Logo, $x\theta\zeta = y\theta\zeta$, o que significa que $xy^{-1} = 1$.

Portanto, $x = y$ ou $x = y^{-1}$.

2^o) Teremos a seguinte relação entre os vértices e as flechas.

$$\begin{array}{ll} \phi(\epsilon_1) = \epsilon_1, & \phi(\alpha) = \beta \\ \phi(\epsilon_2) = \epsilon_3 & \phi(\beta) = \alpha \\ \phi(\epsilon_3) = \epsilon_2 & \phi(\gamma) = \zeta \\ \phi(\epsilon_4) = \epsilon_5, & \phi(\delta) = \varepsilon \\ \phi(\epsilon_5) = \epsilon_4 & \phi(\eta) = \theta \\ \phi(\epsilon_6) = \epsilon_6 & \phi(\theta) = \eta \\ & \phi(\zeta) = \gamma \\ & \phi(\varepsilon) = \delta \end{array}$$

Então teremos que

$$\phi(\eta\varepsilon) = x\phi(\theta\zeta) = x\eta\gamma$$

Por outro lado,

$$\phi(\eta\varepsilon) = \theta\delta = \eta\gamma$$

Logo, $x = 1$.

Da mesma maneira, temos que

$$\phi(\theta\delta) = \phi(\eta\gamma) = \theta\zeta$$

Por outro lado,

$$\phi(\theta\delta) = \eta\varepsilon = y\theta\zeta$$

Logo, $y = 1$.

3^o) Outra relação entre os vértices e as flechas é dada por:

$$\begin{aligned}
 \phi(\epsilon_1) &= \epsilon_1, & \phi(\alpha) &= \beta \\
 \phi(\epsilon_2) &= \epsilon_3 & \phi(\beta) &= \alpha \\
 \phi(\epsilon_3) &= \epsilon_2 & \phi(\gamma) &= \epsilon \\
 \phi(\epsilon_4) &= \epsilon_4, & \phi(\delta) &= \zeta \\
 \phi(\epsilon_5) &= \epsilon_5 & \phi(\zeta) &= \delta \\
 \phi(\epsilon_6) &= \epsilon_6 & \phi(\epsilon) &= \gamma \\
 & & \phi(\eta) &= \eta \\
 & & \phi(\theta) &= \theta
 \end{aligned}$$

Como fizemos na possibilidade anterior:

$$\phi(\eta\epsilon) = x\phi(\theta\zeta) = x\theta\delta \text{ e } \phi(\eta\epsilon) = \eta\gamma = \theta\delta.$$

Logo, $x = 1$.

Continuando, teremos que $\phi(\theta\delta) = \phi(\eta\gamma) = \eta\epsilon = y\theta\zeta$ e $\phi(\theta\delta) = \theta\zeta$.

Logo, $y = 1$.

4^o) A última relação entre os vértices e as flechas é dada por:

$$\begin{aligned}
 \phi(\epsilon_1) &= \epsilon_1, & \phi(\alpha) &= \alpha \\
 \phi(\epsilon_2) &= \epsilon_2 & \phi(\beta) &= \beta \\
 \phi(\epsilon_3) &= \epsilon_3 & \phi(\gamma) &= \delta \\
 \phi(\epsilon_4) &= \epsilon_5, & \phi(\delta) &= \gamma \\
 \phi(\epsilon_5) &= \epsilon_4 & \phi(\eta) &= \theta \\
 \phi(\epsilon_6) &= \epsilon_6 & \phi(\theta) &= \eta \\
 & & \phi(\zeta) &= \epsilon \\
 & & \phi(\epsilon) &= \zeta
 \end{aligned}$$

Onde $\phi(\eta\epsilon) = x\phi(\theta\zeta) = x\eta\epsilon = xy\theta\zeta$ e $\phi(\eta\epsilon) = \theta\zeta$.

Logo, $xy = 1$. Portanto, $x = y^{-1}$.

Assim provamos que se $A_x \cong A_y$, então $x = y$ ou $x = y^{-1}$.

Para a outra implicação basta mostrarmos que existe um isomorfismo entre A_x e A_y com $x = y$ ou $x = y^{-1}$.

No caso em que $x = y$ temos como morfismo a identidade que é um isomorfismo.

Agora considerando $x = y^{-1}$ definiremos $\phi : A_x \rightarrow A_{x^{-1}}$, dado por $\phi(\epsilon_i) = \epsilon_i$, para todo $i = 1, \dots, 6$ e

$$\begin{aligned} \phi(\alpha) &= \alpha & \phi(\delta\alpha) &= \delta\alpha \\ \phi(\beta) &= \beta & \phi(\zeta\beta) &= \zeta\beta \\ \phi(\gamma) &= \gamma & \phi(\gamma\alpha) &= \gamma\alpha \\ \phi(\delta) &= \delta & \phi(\epsilon\beta) &= \epsilon\beta \\ \phi(\eta) &= \eta & \phi(\theta\delta) &= \theta\delta \\ \phi(\theta) &= \theta & \phi(\eta\gamma) &= \eta\gamma \\ \phi(\zeta) &= \zeta & \phi(\eta\epsilon) &= \eta\epsilon \\ \phi(\epsilon) &= \epsilon & \phi(x\theta\zeta) &= x^{-1}\theta\zeta \end{aligned}$$

Onde $\mathcal{B}_x = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5, \epsilon_6, \alpha, \beta, \delta, \zeta, \gamma, \epsilon, \theta, \eta, \delta\alpha, \gamma\alpha, \theta\delta, x\theta\zeta\}$ é a base de A_x e que denotamos respectivamente por $\{w_1, \dots, w_{18}\}$ e $\mathcal{B}_{x^{-1}} = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5, \epsilon_6, \alpha, \beta, \delta, \zeta, \gamma, \epsilon, \theta, \eta, \delta\alpha, \gamma\alpha, \theta\delta, x^{-1}\theta\zeta\}$ é a base de $A_{x^{-1}}$ e que denotamos respectivamente por $\{v_1, \dots, v_{18}\}$.

Temos que ϕ é um morfismo de álgebras.

De fato,

$$\phi(w_i + w_j) = v_i + v_j = \phi(w_i) + \phi(w_j),$$

$$\phi(cw_i) = cv_i = c\phi(w_i), \quad c \in k,$$

$$\phi(w_i w_j) = \phi\left(\sum_{l=1}^d \gamma_{ij}^l w_l\right) = \sum_{l=1}^d \gamma_{ij}^l \phi(w_l) = \sum_{l=1}^d \gamma_{ij}^l v_l = v_i v_j = \phi(w_i) \phi(w_j).$$

Como ϕ é um morfismo de k -álgebras que leva base em base, então ϕ é um isomorfismo e o resultado está provado.

1.3 Tipo de Representação de uma Álgebra

Para estudarmos melhor as álgebras, é conveniente classificá-las a partir do seu tipo de representação, isto é, queremos classificar as álgebras a partir de certos dados que nos diferenciem o grau de dificuldade deste estudo. Para tanto, dividimos as álgebras em dois

casos: finito e infinito

Definição 1.3.1. Dizemos que uma álgebra é de tipo de representação finito (ou tipo finito) se existirem apenas um número finito de A -módulos indecomponíveis a menos de isomorfismos.

Caso contrário à definição acima, as álgebras serão de tipo infinito. Nos dois casos, temos algumas subdivisões que não cabem dentro da proposta deste estudo.

Gabriel mostrou que uma álgebra de caminhos é de tipo finito se e só se o grafo associado a ela é um diagrama de Dynkin (mais detalhes em [ARS]) ou [C]. Um caso especial de álgebras de caminhos de tipo infinito é dado pelos Diagramas Euclidianos que correspondem às chamadas álgebras mansas (ver [ARS]).

Definiremos agora, uma possibilidade de representação do diagrama Euclidiano $\tilde{A}_n$, com $n \geq 1$ chamado de coroa (ver [ACMT]).

Para esta definição usaremos a seguinte notação:

Notação 1.3.2. Dado $\varphi : kQ_A \rightarrow A$ e sejam $x, y \in (Q_A)_0$. Denotamos por $[x, y]$ o conjunto formado por todos os vértices $i \in (Q_A)_0$ tais que estes vértices estejam no final ou no início de uma das flechas que, concatenadas, formam algum caminho ω de x a y , com $\varphi(\omega) \neq 0$.

Definição 1.3.3. Seja $A \cong \frac{kQ_A}{I}$ schurian, Γ um subquiver de Q_A formado por:

- $2n$ vértices $\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$ com x_i, y_i em $(Q_A)_0$, para $i = 1, \dots, n$.
- $2n$ caminhos $\{\mu_1, \dots, \mu_n, \nu_1, \dots, \nu_n\}$ em kQ_A tais que $\varphi(\mu_i) \neq 0$ e $\varphi(\nu_i) \neq 0$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Γ é uma coroa em A se:

a) $[x_i, y_i] \cap [x_h, y_h] \neq \emptyset$ se e somente se

$$j = i \text{ e } (h, l) \in \{(i, i), (i-1, i), (i, i+1)\}$$

ou

$$j = i+1 \text{ e } (h, l) \in \{(i, i+1), (i, i), (i+1, i+1)\};$$

b) A intersecção de três conjuntos distintos $[x_j, y_l]$ é vazia;

c) Para cada i , $[x_i, y_i] \cap [x_i, y_{i+1}] = \{x_i\}$

$$e \quad [x_i, y_i] \cap [x_{i-1}, y_i] = \{y_i\}.$$

Convencionamos $x_0 = x_n$, $x_{n+1} = x_1$, $y_0 = y_n$, $y_{n+1} = y_1$.

Outro exemplo envolvendo o diagrama Euclidiano $\tilde{A}_n$, com $n \geq 1$ que usaremos no nosso trabalho é o quiver de Kronecker $(\cdot \rightrightarrows \cdot)$, que faz com que a álgebra de caminhos desse quiver seja de tipo infinito.

Estudando as álgebras A de tipo finito temos os seguintes resultados:

Lema 1.3.4. *Seja e um idempotente em A . Se A é de tipo finito então eAe também é.*

Demonstração. Considere o funtor $R : \text{mod} A \rightarrow \text{mod} eAe$ e o funtor adjunto $L : \text{mod} eAe \rightarrow \text{mod} A$, ou seja,

$$\begin{array}{ll} R : \text{mod} A \rightarrow \text{mod} eAe & \text{e } L : \text{mod} eAe \rightarrow \text{mod} A \\ M \mapsto eM = \text{Hom}_A(Ae, M) & N \mapsto Ae \otimes_{eAe} N \end{array}$$

Dessa maneira, tem-se o isomorfismo $1 \xrightarrow{\cong} RL$, onde

$$RL(N) = R(Ae \otimes_{eAe} N) = e(Ae \otimes_{eAe} N) = \text{Hom}_A(Ae, Ae \otimes_{eAe} N)$$

Logo, $N \cong \text{Hom}_A(Ae, Ae \otimes_{eAe} N)$

Sendo assim, considere os módulos indecomponíveis, não isomorfos, $N_1, N_2 \in \text{mod} Ae$, pelo funtor $L : \text{mod} Ae \rightarrow \text{mod} A$, teremos $Ae \otimes_{eAe} N_1$ e $Ae \otimes_{eAe} N_2$ módulos indecomponíveis pertencentes à $\text{mod} A$.

Suponha que $Ae \otimes_{eAe} N_1 \cong Ae \otimes_{eAe} N_2$, então o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} N_1 & \longrightarrow & Ae \otimes_{eAe} N_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ N_2 & \longrightarrow & Ae \otimes_{eAe} N_2 \end{array}$$

Logo, $N_1 \cong N_2$ o que é uma contradição. Portanto, $Ae \otimes_{eAe} N_1$ e $Ae \otimes_{eAe} N_2$ são não isomorfos.

Então eAe também terá um número finito de módulos indecomponíveis.

Portanto, eAe é de tipo de representação finito.

□

Como consequência do lema acima, temos que qualquer álgebra que tenha uma coroa como subquiver é de tipo infinito.

Usaremos no próximo lema a seguinte notação:

Notação 1.3.5. *Seja Q um quiver e dados $i, j \in (Q)_0$ a notação ${}_jW_i$ indicará o conjunto de todos os caminhos que começam em i e terminam em j em Q .*

Lema 1.3.6. *Seja A uma k -álgebra de dimensão finita. Se A é triangular e de tipo finito, então A é schurian.*

Demonstração. Sejam f_1 e f_2 dois idempotentes primitivos e ortogonais de A . Queremos mostrar que $\dim_k(f_1Af_2) \leq 1$.

Considere então $e = f_1 + f_2$.

Temos que $eAe = (f_1 + f_2)A(f_1 + f_2) = f_1Af_1 + f_1Af_2 + f_2Af_1 + f_2Af_2$, como k -espaços vetoriais.

Mostraremos que esta soma é direta. Para tanto, seja $x \in eAe$ então

$$x \in (f_iAf_j) \cap \left(\left(\sum_{l,m=1, m \neq i}^2 f_mAf_l \right) + \left(\sum_{l=1, l \neq j}^2 f_iAf_l \right) \right), i, j = 1, 2$$

Calculando f_ixf_j teremos:

Como $x \in (f_iAf_j)$, então $x = f_iaf_j$, para algum $a \in A$. Portanto, $f_ixf_j = x$.

Por outro lado, como $x \in \left(\left(\sum_{l,m=1, m \neq i}^2 f_mAf_l \right) + \left(\sum_{l=1, l \neq j}^2 f_iAf_l \right) \right)$, $i, j = 1, 2$, então $x = f_mb f_1 + f_m c f_2 + f_id f_l$, para $b, c, d \in A$, onde $m \neq i$ e $l \neq j$. Com isto, $f_ixf_j = 0$.

Logo,

$$(f_iAf_j) \cap \left(\left(\sum_{l,m=1, m \neq i}^2 f_mAf_l \right) + \left(\sum_{l=1, l \neq j}^2 f_iAf_l \right) \right) = 0, i, j = 1, 2$$

Portanto, $eAe = f_1Af_1 \oplus f_1Af_2 \oplus f_2Af_1 \oplus f_2Af_2$, como k -espaços vetoriais.

Como a álgebra é triangular, então o único caminho de i a i é o trivial, logo $\dim_k f_iAf_i = 1$, para $i = 1, 2$.

Sendo A uma álgebra de tipo finito, pelo lema anterior temos que eAe é de tipo finito. Como f_iAf_j , para $i, j = 1, 2$ é um somando direto de eAe , então f_iAf_j também será de tipo finito.

Como a álgebra A é triangular, no máximo um dos conjuntos f_1Af_2 ou f_2Af_1 é não nulo.

De fato, considerando $f_1Af_2 \neq 0$ então $\exists \omega \in {}_1W_2$ tal que $\varphi(\omega) \neq 0$, definida na Observação 1.2.8. Logo, não existe um caminho $\omega' \in {}_2W_1$ tal que $\varphi(\omega') \neq 0$, pois a álgebra é triangular, ou seja, o quiver não tem ciclos orientados. Portanto, $f_2Af_1 = 0$.

Agora podemos considerar que $\dim_k f_1Af_2 \neq 0$, se admitirmos que existem duas flechas

$\alpha : 2 \rightarrow 1$ e $\gamma : 2 \rightarrow 1$ representaremos este quiver com o quiver de Kronecker $(\cdot \rightrightarrows \cdot)$, e este não é de tipo finito, então haverá apenas uma flecha do vértice 2 para o 1. Logo, $\dim_k f_i A f_j \leq 1$ para $i, j = 1, 2$.

Portanto, a álgebra é schurian. □

Para terminarmos analisaremos algumas álgebras de caminhos para entendermos melhor todas as definições aqui citadas.

Exemplo 1.3.7. Observe que a álgebra $A = \frac{kQ}{I}$ é triangular e de tipo finito, onde Q é o quiver

Logo, a álgebra A é schurian.

Observe que se considerarmos a álgebra como sendo $A = kQ$, onde Q é o quiver acima, teremos uma álgebra triangular de tipo infinito e não schurian.

Exemplo 1.3.8. Seja a álgebra $A = \frac{kQ}{I}$, onde o quiver Q é :

Temos que A é triangular e de tipo finito. Portanto, schurian.

Exemplo 1.3.9. Seja a álgebra kQ , onde o quiver Q é o quiver de Kronecker $\left(1 \cdot \begin{smallmatrix} \alpha \\ \rightrightarrows \\ \beta \end{smallmatrix} \cdot 2\right)$. Sabemos que esta é de tipo infinito e triangular, mas podemos observar que não é schurian.

Exemplo 1.3.10. Seja $A_x \cong \frac{kQ}{I_x + \text{rad}^3 kQ}$ a álgebra do Exemplo 1.2.19 onde o quiver Q é

$$e \quad I_x = \langle \delta\alpha - \zeta\beta, \gamma\alpha - \varepsilon\beta, \theta\delta - \eta\gamma, \eta\varepsilon - x\theta\zeta \rangle, \text{ para } x \in k^*$$

Como um subquiver de Q é uma coroa, então A é de tipo infinito e triangular. Como podemos observar, neste caso, A_x é schurian.

Mas se considerarmos apenas a álgebra kQ e não olharmos para as relações, teremos uma álgebra triangular de tipo infinito só que não schurian.

Exemplo 1.3.11. Considerando a álgebra $A = \frac{kQ}{I}$, onde o quiver Q é dado por

$$e \quad I = \langle \alpha\gamma\beta\alpha\gamma\beta \rangle$$

Temos que A não é triangular, é de tipo finito mas, não é schurian pois $\dim_k e_1 A e_2 = 2$.

Capítulo 2

Bases Multiplicativas

Nosso objetivo neste capítulo é estudar alguns conceitos e resultados que serão utilizados no teorema principal deste trabalho, a ser desenvolvido no próximo capítulo.

Com este propósito, a primeira seção será dedicada à definição de bases multiplicativas em uma álgebra, mostraremos alguns resultados sobre álgebras que possuem uma base multiplicativa, bem como alguns exemplos. Na segunda seção, mostraremos que definir um epimorfismo φ_λ entre as álgebras kQ_A e A será equivalente a dizer que uma álgebra A , sob determinadas condições, possui base multiplicativa. Na última seção, lembraremos o conceito das constantes estruturais de uma álgebra e veremos como estas se comportam em álgebras com bases multiplicativas. Isso será importante para mostrarmos, também, que para cada $d \in \mathbb{N}$ só existe um número finito de álgebras com bases multiplicativas de dimensão d .

Primeiramente, veremos o que é uma base multiplicativa.

2.1 Definições Básicas

Definição 2.1.1. *Seja A uma k -álgebra de dimensão finita. Uma k -base $\mathcal{B}$ de A é dita multiplicativa se existir um sistema completo de idempotentes ortogonais e primitivos denotado por $\{e_1, \dots, e_n\}$ tal que*

- (i) $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq \mathcal{B}$.
- (ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada par i, j , $\mathcal{B} \cap e_j(\text{rad}^n A)e_i$ é uma base de $e_j(\text{rad}^n A)e_i$.
- (iii) Se $b, c \in \mathcal{B}$, então $bc = 0$ ou $bc \in \mathcal{B}$.

Observe que toda álgebra de caminhos kQ tem uma base multiplicativa, como nos mostra o seguinte lema.

Lema 2.1.2. *Seja kQ a álgebra de caminhos de um quiver Q finito e sem ciclos orientados. Então a base usual $\mathcal{C}$ de kQ é multiplicativa.*

Demonstração. Como $\mathcal{C}$ é formada por todos os caminhos de Q , teremos que o sistema completo de idempotentes ortogonais e primitivos de kQ formado pelos caminhos triviais $\{\epsilon_i\}_{i \in Q_0}$ (ver Observação 1.2.7) pertence a $\mathcal{C}$.

Com isto, o item (i) da definição acima está satisfeito.

Se $\mathcal{C} \cap \epsilon_j(\text{rad}^t kQ)\epsilon_i = \emptyset$, sejam $i, j \in Q_0$ e $t \in \mathbb{N}$, teremos, então, que não existe elemento do tipo $\epsilon_j \gamma \epsilon_i$, onde $\gamma \in (\text{rad}^t kQ)$, ou seja, $\epsilon_j(\text{rad}^t kQ)\epsilon_i = \emptyset$, o que nos garante, neste caso, o item (ii).

Por outro lado, se $\mathcal{C} \cap \epsilon_j(\text{rad}^t kQ)\epsilon_i \neq \emptyset$, então os elementos serão do tipo $\epsilon_j \gamma \epsilon_i$, onde γ é um caminho de comprimento maior ou igual a t , começando no vértice ϵ_i e terminando no vértice ϵ_j (onde identificamos vértices e caminhos triviais). Neste caso, a intersecção será formada por todos os caminhos do tipo $\epsilon_j \gamma \epsilon_i$, estando γ nas condições descritas acima. Desta maneira, este conjunto será gerador de $\epsilon_j(\text{rad}^t kQ)\epsilon_i$ e, como este conjunto é um subconjunto da base $\mathcal{C}$, logo o conjunto correspondente a $\mathcal{C} \cap \epsilon_j(\text{rad}^t kQ)\epsilon_i$ será uma base de $\epsilon_j(\text{rad}^t kQ)\epsilon_i$ para cada par (ϵ_i, ϵ_j) de vértices e cada $t \in \mathbb{N}$, o que prova (ii).

Por fim, dados dois caminhos $\omega = (a|\alpha_m \cdots \alpha_1|b)$ e $\omega' = (c|\beta_n \cdots \beta_1|d)$ pertencentes à base $\mathcal{C}$, teremos pela regra de multiplicação dada na Definição 1.2.4 que

$$\omega\omega' = \begin{cases} (a|\alpha_m \cdots \alpha_1\beta_n \cdots \beta_1|d) & \text{se } b = c \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

o que nos garante a validade do item (iii) da Definição 2.1.1, provando assim o lema. $\square$

Observemos que uma álgebra de grupo tem, obviamente, uma base que satisfaz o item (iii) da Definição 2.1.1 mas não se sabe se terá necessariamente uma base multiplicativa (ver [BGRS]).

Analisaremos alguns exemplos com ou sem bases multiplicativas.

Exemplo 2.1.3. Seja $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ k & k & 0 \\ k & k & k \end{pmatrix}$ uma álgebra de matrizes. Podemos construir

várias bases para esta álgebra, considerando-a como um k -espaço vetorial. Uma dessas bases pode ser a base canônica. Verifica-se claramente que ela é multiplicativa.

Outra base multiplicativa é a base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

onde podemos denotar respectivamente por $\{v_1, \dots, v_6\}$.

De fato, podemos verificar que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é um sistema completo de idempotentes ortogonais e primitivos e que os outros elementos são nilpotentes de índice 2.

Ainda temos que $v_2(\text{rad}A)v_1 = v_4$, $v_3(\text{rad}A)v_2 = v_6$ e $v_3(\text{rad}A)v_1 = v_5$ e para todos os outros, diferentes desses, temos que $v_i(\text{rad}A)v_j = 0$ com $i, j = 1, \dots, 6$ e que $v_i v_j \in \mathcal{B}$, ou $v_i v_j = 0$, para $i, j = 1, \dots, 6$.

O que não implica que todas as bases desta álgebra serão multiplicativas.

Para exemplificarmos isso, consideremos a seguinte base

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

Podemos verificar que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ são os únicos elementos idempotentes em $\mathcal{B}'$, mas não formam um sistema completo de idempotentes ortogonais e primitivos. Logo, nesta base, não vale o item (i) da Definição 2.1.1.

Portanto, esta base não é multiplicativa.

Considerando uma outra base

$$B'' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

Teremos que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, denotados respectivamente por $\{e_1, e_2, e_3\}$, será um sistema completo de idempotentes ortogonais e primitivos. Mas, analisando o elemento $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, temos que este é nilpotente, o que significa que $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in e_3(\text{rad}A)e_2$ mas, ele não é base de $e_3(\text{rad}A)e_2$.

De fato,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ k & k & 0 \\ k & k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k & k & 0 \end{pmatrix}$$

Então, a base de $e_3 \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ k & k & 0 \\ k & k & k \end{pmatrix} e_2$ tem de ser gerada por $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -a & a & 0 \end{pmatrix}$, para $a \neq 0$.

Logo, não vale o item (ii) da Definição 2.1.1 e esta base não é multiplicativa.

Observe também que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \notin B''$$

Não valendo assim, o item (iii) da Definição 2.1.1.

Veremos mais adiante um exemplo de álgebra que não possui base multiplicativa (Exemplo 2.2.3).

Proposição 2.1.4. *Seja A uma álgebra básica e de dimensão finita. Se $\text{rad}^2 A = 0$ então A tem base multiplicativa.*

Demonstração. Se a álgebra A é básica e de dimensão finita, então pelo Teorema de Gabriel temos que existe um epimorfismo $\varphi : kQ_A \rightarrow A$, o que implica que $A \cong \frac{kQ_A}{\text{Ker}\varphi}$, onde $\text{Ker}\varphi = I$ é um ideal admissível. Como $\text{rad}^2 A = 0$ temos que $\text{rad}^2(\frac{kQ_A}{I}) = 0$.

Seja $\mathcal{B}$ uma base de $\frac{kQ_A}{I}$ formada por todas as classes de equivalência não nulas dos caminhos de Q_A . Temos então que dados α e $\beta \in (Q_A)_1$ e $\alpha\beta \neq 0$ então $\alpha\beta \in I$, o que significa $\overline{\alpha\beta} = \bar{0}$ em $\frac{kQ_A}{I}$.

Logo, $\mathcal{B}$ será formada por todos os caminhos de comprimento zero e um, que correspondem aos vértices e as flechas. Esta base $\mathcal{B}$ de $\frac{kQ_A}{I}$ será obviamente multiplicativa e, pelo isomorfismo entre A e $\frac{kQ_A}{I}$, A também terá base multiplicativa.

□

Vejamos alguns exemplos de álgebras nas condições acima:

Exemplo 2.1.5. *Considere a álgebra do Exemplo 1.3.7, onde Q é o quiver*

Essa álgebra tem $\text{rad}^2 A = 0$ e a base $\mathcal{B} = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \alpha, \beta, \gamma\}$, como podemos perceber, é multiplicativa.

Exemplo 2.1.6. *Seja $A = kQ$ uma álgebra, onde Q é a coroa:*

Como nesta coroa não existe caminho de comprimento maior ou igual a 2, então $\text{rad}^2 A = 0$ e a base será formada por todos os caminhos, ou seja, $\mathcal{B} = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Logo, $\mathcal{B}$ é multiplicativa.

Exemplo 2.1.7. A álgebra de Kronecker, isto é a álgebra dada pelo quiver Q é o quiver de Kronecker $\left(1 \begin{matrix} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{matrix} 2\right)$ tem radical ao quadrado zero. Observe que a base $\mathcal{B} = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \alpha, \beta\}$ é multiplicativa.

2.2 Um critério

No lema a seguir, conseguiremos mostrar que em uma álgebra $A \cong \frac{kQ_A}{I}$ existe uma equivalência entre ter uma base multiplicativa e um determinado epimorfismo φ entre as álgebras kQ_A e A .

No capítulo anterior, na Observação 1.2.8, definimos através do Teorema de Gabriel, um epimorfismo $\varphi : kQ_A \rightarrow A$, no qual foi fixado um sistema completo de idempotentes ortogonais e primitivos $\{e_1, \dots, e_n\}$ em A , em correspondência com os n vértices $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ em Q_A . Além disso, escolhemos elementos $x_\alpha \in e_j(\text{rad} A)e_i$ em correspondência com cada flecha $\alpha : i \rightarrow j$ em Q_A .

Por fim, definimos, $\varphi(\epsilon_i) = e_i$ e $\varphi(\alpha) = x_\alpha$, $\forall \alpha \in (Q_A)_1$.

Vamos agora, a partir dos elementos acima descritos, definir outras possibilidades de epimorfismos existentes entre as mesmas álgebras.

Observação 2.2.1. Manteremos fixados $\{e_1, \dots, e_n\}$ e todos os elementos x_α para cada $\alpha \in (Q_A)_1$, como acima.

Sejam $r = |(Q_A)_1|$ e $(Q_A)_1 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$. Para cada escolha de uma r -upla $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, onde $\lambda_i \in k^*$, para cada i , vamos definir um epimorfismo chamado $\varphi_\lambda : kQ_A \rightarrow A$, dado por $\varphi_\lambda(\epsilon_i) = e_i$ e $\varphi_\lambda(\alpha_i) = \lambda_{\alpha_i} x_{\alpha_i}$ que irá induzir ao menos uma

base em A contendo o conjunto $\mathcal{C} = \{e_1, \dots, e_n, \lambda_{\alpha_1} x_{\alpha_1}, \dots, \lambda_{\alpha_r} x_{\alpha_r}\}$. Deixamos ao leitor verificar que φ_λ é também um epimorfismo.

Se existir um caminho $\omega = \alpha_h \dots \alpha_1$, com $\alpha_j \in (Q_A)_1$ para $j = 1, \dots, h$, em Q_A , teremos, desta maneira, que $\varphi_\lambda(\omega) = \varphi_\lambda(\alpha_h \dots \alpha_1) = \lambda_{\alpha_h} x_{\alpha_h} \dots \lambda_{\alpha_1} x_{\alpha_1} = \lambda_\omega x_\omega$.

Considere $\mathcal{B}' = \{\lambda_\omega x_\omega : \omega \text{ é caminho em } Q_A\}$.

Então, existe uma base $\mathcal{B}$ de A contendo $\mathcal{C}$ e contida em $\mathcal{B}'$.

Essa base pode ou não ser multiplicativa. Veremos, mais abaixo, condições para que ela seja, de fato, multiplicativa.

Neste estudo, trabalhamos com as álgebras schurian. Se $A \cong \frac{kQ_A}{I}$ for schurian teremos que para cada par de vértices $i, j \in (Q_A)_0$ a $\dim_k e_j(\text{rad}A)e_i = 1$. Logo, se existir em dois caminhos ω e $\omega' \in {}_jW_i$ (ver Notação 1.3.5) tais que $\varphi_\lambda(\omega) \neq 0$ e $\varphi_\lambda(\omega') \neq 0$, então existirá um $\mu = \mu(\omega, \omega') \in k^*$ tal que $\varphi_\lambda(\omega) = \mu \varphi_\lambda(\omega')$.

No próximo lema, analisaremos o possível valor de μ para que a base desta álgebra, referente ao φ_λ , seja multiplicativa.

Lema 2.2.2. *Seja $A \cong \frac{kQ_A}{I}$ schurian e triangular. São equivalentes:*

- i) *A tem base multiplicativa;*
- ii) *Existe uma r -upla $\lambda = (\lambda_{\alpha_1}, \dots, \lambda_{\alpha_r})$, onde $\lambda_{\alpha_i} \in k^*$ e $\alpha_i \in (Q_A)_1$ para todo $i = 1, \dots, r$, tal que o epimorfismo φ_λ como foi definido acima é tal que $\varphi_\lambda(\omega) = \varphi_\lambda(\omega')$ para todos os caminhos $\omega, \omega' \in {}_jW_i$ onde $\varphi_\lambda(\omega) \neq 0$ e $\varphi_\lambda(\omega') \neq 0$.*

Demonstração. $i) \Rightarrow ii)$

Por hipótese, A tem uma base multiplicativa $\mathcal{B}$. Podemos supor que o sistema de idempotentes contido em $\mathcal{B}$ seja $\{e_1, \dots, e_n\}$. Queremos mostrar que existe uma r -upla λ como descrita em ii).

Seja $\alpha: i \rightarrow j$ uma flecha de $(Q_A)_1$. Como A é schurian, $\{x_\alpha\}$ será uma base de $e_j(\text{rad}A)e_i$. Por outro lado, como $\mathcal{B}$ é multiplicativa, o elemento de $\mathcal{B} \cap e_j(\text{rad}A)e_i$ tem que ser um múltiplo de x_α , digamos $\lambda_\alpha x_\alpha$.

Logo, para cada flecha $\alpha \in (Q_A)_1$ existirá um escalar $\lambda_\alpha \in k^*$ como acima, o que nos dá uma r -upla λ . Vamos mostrar que esta escolha de λ satisfaz a propriedade que

queríamos. Sejam $i, j \in (Q_A)_0$ e $\omega, \omega' \in {}_jW_i$. Escrevamos $\omega = \alpha_1 \dots \alpha_r$ e $\omega' = \beta_1 \dots \beta_s$, onde α_i 's e β_j 's são flechas de Q_A tais que $\varphi_\lambda(\omega) \neq 0$ e $\varphi_\lambda(\omega') \neq 0$.

Logo,

$$\varphi_\lambda(\omega) = \varphi_\lambda(\alpha_1) \dots \varphi_\lambda(\alpha_r) = \lambda_{\alpha_1} \dots \lambda_{\alpha_r} x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_r} \quad \text{e}$$

$$\varphi_\lambda(\omega') = \varphi_\lambda(\beta_1) \dots \varphi_\lambda(\beta_s) = \lambda_{\beta_1} \dots \lambda_{\beta_s} x_{\beta_1} \dots x_{\beta_s}.$$

Como $\mathcal{B}$ é multiplicativa, tanto $\varphi_\lambda(\omega)$ quanto $\varphi_\lambda(\omega')$ são elementos de $\mathcal{B}$. Por outro lado, $\dim_k e_j(\text{rad} A)e_i = 1$ pois A é schurian. Concluimos então que $\varphi_\lambda(\omega) = \varphi_\lambda(\omega')$ como queríamos.

ii) $\Rightarrow$ i)

Por hipótese, existe o epimorfismo $\varphi_\lambda: kQ_A \longrightarrow A$ dado por $\varphi_\lambda(\epsilon_i) = e_i$, $\forall \epsilon_i \in (Q_A)_0$ e $\varphi_\lambda(\alpha) = \lambda_\alpha x_\alpha$, $\forall \alpha \in (Q_A)_1$.

Como visto acima, dado um caminho $\omega \in {}_jW_i$ tal que $\varphi_\lambda(\omega) = \lambda_\omega x_\omega$.

Sejam $\mathcal{B}' = \{\lambda_\omega x_\omega : \omega \text{ caminho de } Q_A\}$ e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$ formado a partir de $\mathcal{B}'$ retirando-se eventualmente o elemento 0 e as possíveis repetições.

Vamos mostrar que $\mathcal{B}$ é uma base multiplicativa.

Em primeiro lugar, observe que o sistema de idempotentes $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq \mathcal{B}$.

Por outro lado, para cada par i, j sabemos que a $\dim_k e_j(\text{rad} A)e_i \leq 1$ pois A é schurian.

Seja $t \geq 1$. Se $e_j(\text{rad}^t A)e_i = \{0\}$, então obviamente $\mathcal{B} \cap e_j(\text{rad}^t A)e_i = \emptyset$ e é uma base para $e_j(\text{rad}^t A)e_i$.

Suponha que $e_j(\text{rad}^t A)e_i \neq \{0\}$ e seja z um elemento não nulo neste espaço vetorial. Observe que z é a imagem pelo φ_λ de uma combinação linear de caminhos de ϵ_i a ϵ_j . Mas por hipótese, todos os caminhos de ${}_jW_i$ têm a mesma imagem $z' \in e_j(\text{rad}^t A)e_i$ pelo φ_λ .

Logo, z é um múltiplo de z' e portanto $\mathcal{B} \cap e_j(\text{rad}^t A)e_i$ é uma base para $e_j(\text{rad}^t A)e_i$.

Por fim, não é difícil ver que, por construção, o produto de dois elementos de $\mathcal{B}$ ou está em $\mathcal{B}$ ou é 0. Isto mostra que $\mathcal{B}$ é multiplicativa.

□

Observaremos, de novo, o Exemplo 1.2.19 pois esta álgebra não possui uma base multiplicativa. Este exemplo foi construído por Bongartz em [B].

Exemplo 2.2.3. Seja $A_x \cong \frac{kQ}{I_x + \text{rad}^3 kQ}$, do Exemplo 1.2.19, onde o quiver Q é

$$e \quad I_x = \langle \delta\alpha - \zeta\beta, \gamma\alpha - \epsilon\beta, \theta\delta - \eta\gamma, \eta\epsilon - x\theta\zeta \rangle, \text{ para } x \in k.$$

Neste caso, o conjunto $\mathcal{B} = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5, \epsilon_6, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \delta\alpha, \gamma\alpha, \theta\delta, x\theta\zeta\}$ é uma base em $\frac{kQ}{I_x + \text{rad}^3 kQ}$.

Observe que se $x = 0$ ou $x = 1$, então a base acima será multiplicativa.

Considere agora $x \neq 0, 1$. Suponha que exista um φ_λ como no enunciado do lema acima. Sem perda de generalidade (trocando-se as bases envolvidas se necessário) podemos assumir que $\lambda_\alpha, \dots, \lambda_\theta$ são todos iguais a 1. Com isto, teremos que $\varphi_\lambda(\theta\zeta) = \theta\zeta$ e por outro lado $\phi_\lambda(\eta\epsilon) = x\theta\zeta$, o que contradiz nossa hipótese em φ_λ .

Concluimos então que não pode haver uma base multiplicativa para A_x com $x \neq 0, 1$.

2.3 Constantes Estruturais

Sejam A uma k -álgebra de dimensão finita d e $\{v_1, \dots, v_d\}$ uma k -base de A , logo, dados $a, b \in A$, podemos escrevê-los, da seguinte maneira, $a = \sum_{i=1}^d \sigma_i v_i$ e $b = \sum_{j=1}^d \tau_j v_j$, com $\sigma_i, \tau_j \in k$, para todo $i = 1, \dots, d$ e $j = 1, \dots, d$.

O produto destes elementos será escrito como

$$ab = \left(\sum_{i=1}^d \sigma_i v_i \right) \left(\sum_{j=1}^d \tau_j v_j \right) = \sum_{i,j=1}^d \sigma_i \tau_j (v_i v_j)$$

Como podemos perceber, o produto de dois elementos da álgebra está inteiramente relacionado com o produto dos elementos da base.

Temos então que o produto de dois elementos da base é definido por

$$v_i v_j = \sum_{l=1}^d \gamma_{ij}^l v_l,$$

onde $\gamma_{ij}^l \in k$ com $i, j, l \in \{1, \dots, d\}$.

Desta maneira, teremos que

$$\left(\sum_{i=1}^d \sigma_i v_i \right) \left(\sum_{j=1}^d \tau_j v_j \right) = \sum_{i,j,l=1}^d \sigma_i \tau_j (\gamma_{ij}^l v_l)$$

Definição 2.3.1. Os elementos $\gamma_{ij}^l \in k$ com $i, j, l \in \{1, \dots, d\}$, resultantes do produto entre os elementos de uma base dada em uma álgebra A são chamados de constantes estruturais (de A com relação a esta base).

Calculemos as constantes estruturais referentes a uma base dada na álgebra abaixo.

Exemplo 2.3.2. Seja a álgebra $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ k & k \end{pmatrix}$ de matrizes do Exemplo 1.2.9 e considere a base

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

É fácil verificar que esta base não é multiplicativa.

Calculemos as constantes estruturais relacionadas a esta base. Para isso, chamaremos os elementos da base de

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como vimos anteriormente, o produto dos elementos da base é dado por:

$$v_i v_j = \sum_{l=1}^3 \gamma_{ij}^l v_l$$

Substituindo, teremos

$$v_1 v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1v_1 + 0v_2 + 0v_3$$

Neste produto, teremos as seguintes constantes: $\gamma_{11}^1 = -1$, $\gamma_{11}^2 = 0$ e $\gamma_{11}^3 = 0$.

O cálculo segue, desta maneira, para todos os outros produtos entre os elementos da base. Teremos, então

$$v_1 v_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo, $\gamma_{12}^1 = 0$, $\gamma_{12}^2 = 0$ e $\gamma_{12}^3 = 0$.

Assim sucessivamente, calcularemos as outras constantes estruturais e teremos o seguinte quadro:

Produto		$l=1$	$l=2$	$l=3$
$v_1 v_1 = -1v_1$	γ_{11}^l	-1	0	0
$v_1 v_2 = 0$	γ_{12}^l	0	0	0
$v_1 v_3 = 0$	γ_{13}^l	0	0	0
$v_2 v_1 = 0$	γ_{21}^l	0	0	0
$v_2 v_2 = 1v_2$	γ_{22}^l	0	1	0
$v_2 v_3 = 1v_3$	γ_{23}^l	0	0	1
$v_3 v_1 = 1v_2 - 1v_3$	γ_{31}^l	0	1	-1
$v_3 v_2 = 0$	γ_{32}^l	0	0	0
$v_3 v_3 = 1v_3$	γ_{33}^l	0	0	1

Estas são as constantes estruturais da álgebra acima relacionadas com a base $\mathcal{B}''$.

Observação 2.3.3. *Seja uma álgebra de dimensão d , então o número de constantes estruturais é igual à d^3 .*

Se A tiver uma base multiplicativa, isso irá refletir nos valores das constantes estruturais, como veremos a seguir:

Observação 2.3.4. *Seja A uma k -álgebra de dimensão finita d e contendo uma base multiplicativa $\{v_1, \dots, v_d\}$.*

As constantes estruturais $\gamma_{ij}^l \in k$ desta base satisfazem o seguinte:

- i) Para cada par i, j existe no máximo um l tal que $\gamma_{ij}^l \neq 0$.*
- ii) Se $\gamma_{ij}^l \neq 0$ para valores i, j, l , então $\gamma_{ij}^l = 1$.*

Para explicitarmos esses fatos, vamos mostrar um exemplo.

Exemplo 2.3.5. *Considere a mesma álgebra de matrizes do exemplo anterior, ou seja, $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ k & k \end{pmatrix}$ e a base multiplicativa*

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Denotando os elementos da base por $\{v_1, v_2, v_3\}$, respectivamente.

Vamos calcular as constantes estruturais da mesma maneira que foi feita no exemplo anterior. Assim, teremos o seguinte quadro:

<i>Produto</i>		$l=1$	$l=2$	$l=3$
$v_1v_1 = 1v_1$	γ_{11}^l	1	0	0
$v_1v_2 = 0$	γ_{12}^l	0	0	0
$v_1v_3 = 0$	γ_{13}^l	0	0	0
$v_2v_1 = 0$	γ_{21}^l	0	0	0
$v_2v_2 = 1v_2$	γ_{22}^l	0	1	0
$v_2v_3 = 1v_3$	γ_{23}^l	0	0	1
$v_3v_1 = 1v_3$	γ_{31}^l	0	0	1
$v_3v_2 = 0$	γ_{32}^l	0	0	0
$v_3v_3 = 0$	γ_{33}^l	0	0	0

Proposição 2.3.6. *Sejam duas álgebras A e B de mesma dimensão d . Então $A \cong B$ se, e somente se, existem bases $\{v_1, \dots, v_d\}$ de A e $\{u_1, \dots, u_d\}$ de B com as mesmas constantes estruturais.*

Demonstração. Suponha inicialmente que $A \cong B$, ou seja, existe um isomorfismo $\phi : A \rightarrow B$.

Seja $\{v_1, \dots, v_d\}$ base de A com constantes estruturais γ_{ij}^l com $i, j, l \in \{1, \dots, d\}$. Como ϕ é um isomorfismo teremos então que $\{\phi(v_1), \dots, \phi(v_d)\}$ é base de B e

$$\phi(v_i)\phi(v_j) = \phi(v_iv_j) = \phi\left(\sum_{l=1}^d \gamma_{ij}^l v_l\right) = \sum_{l=1}^d \gamma_{ij}^l \phi(v_l)$$

Portanto, esta base de B possuirá as mesmas constantes estruturais.

Para a outra implicação, considere a base $\{v_1, \dots, v_d\}$ de A com constantes estruturais γ_{ij}^l e $\{u_1, \dots, u_d\}$ base de B com as mesmas constantes estruturais γ_{ij}^l . Vamos definir um morfismo $\phi : A \rightarrow B$, dado por $\phi(v_i) = u_i$, para todo $i = 1, \dots, d$.

Temos que ϕ é um morfismo de álgebras.

De fato,

$$\phi(v_i + v_j) = u_i + u_j = \phi(v_i) + \phi(v_j),$$

$$\phi(cv_i) = cu_i = c\phi(v_i), \quad c \in k,$$

$$\phi(v_i v_j) = \phi\left(\sum_{l=1}^d \gamma_{ij}^l v_l\right) = \sum_{l=1}^d \gamma_{ij}^l \phi(v_l) = \sum_{l=1}^d \gamma_{ij}^l u_l = u_i u_j = \phi(v_i) \phi(v_j).$$

Como ϕ é um morfismo de k -álgebras que leva base em base, então ϕ é um isomorfismo e o resultado está provado. □

Proposição 2.3.7. *Para cada $d \in \mathbb{N}$ só existe, a menos de isomorfismo, um número finito de álgebras de dimensão d com bases multiplicativas.*

Demonstração. Seja A uma álgebra de dimensão d e tendo uma base multiplicativa. Então existe uma base $\{v_1, \dots, v_d\}$ e as suas constantes estruturais γ_{ij}^l , são tais que para cada par i, j existe no máximo um l tal que $\gamma_{ij}^l \neq 0$ e, neste caso, $\gamma_{ij}^l = 1$ (ver Observação 2.3.4).

Com isto, só existe um número finito de possibilidades para constantes estruturais correspondentes a bases multiplicativas.

Seja $\{X_1, \dots, X_r\}$ o conjunto de todas as possíveis combinações de constantes estruturais que definem álgebras de dimensão d com bases multiplicativas.

Seja $j, 1 \leq j \leq r$. Segue da Proposição 2.3.6 que todas as álgebras com constantes estruturais X_j são isomorfas e, portanto, existe um número finito (no caso é r) de álgebras de dimensão d com bases multiplicativas. □

Capítulo 3

Resultados Principais

Neste capítulo demonstraremos o Teorema das bases multiplicativas para álgebras schurian triangulares e sem coroas próprias. Esta demonstração é baseada na demonstração do Bongartz [B], para álgebras de tipo finito. Com isso, tentamos construir uma demonstração com conceitos mais acessíveis. Em cima desta idéia trabalharemos com as álgebras biseriais especiais.

A partir do Teorema das bases multiplicativas, podemos então dizer que para um certo $d \in \mathbb{N}$ podemos ter um número finito, a menos de isomorfismo, de álgebras nas condições acima e com dimensão d .

3.1 Teorema Principal

Iniciaremos trabalhando com um tipo de álgebra schurian triangular que está descrita na hipótese do teorema abaixo.

Teorema 3.1.1. *Seja $A \cong \frac{kQ_A}{I}$ uma álgebra schurian, triangular e sem coroas próprias. Então A tem base multiplicativa.*

Demonstração. Vamos demonstrar este resultado fazendo indução no número de vértices de Q_A .

Supor inicialmente que $|(Q_A)_0| = 1$. Neste caso, como A é triangular e Q_A possui

só um vértice, teremos então que $(Q_A)_1 = \emptyset$ e Q_A é o quiver formado por um vértice. Portanto, $A \cong k$ e, obviamente, possui uma base multiplicativa.

Considere agora $|(Q_A)_0| = t + 1$, sendo $t \geq 1$ e assuma que todas as álgebras schurian triangulares e sem coroas próprias cujos quivers ordinários têm no máximo t vértices têm bases multiplicativas. Provaremos que A também tem uma base multiplicativa.

Seja $\{e_0, e_1, \dots, e_t\}$ um sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos de A relacionados com os vértices $\{0, \dots, t\}$ por $i \leftrightarrow e_i$. Denote por g o número de flechas de Q_A .

Nosso objetivo é provar que existe uma escolha de uma g -upla $\lambda = (\lambda_\alpha)$ indexada pelas flechas α em $(Q_A)_1$, $\lambda_\alpha \in k^*$, tal que dados dois caminhos $\omega, \omega' \in {}_i W_j$ com $i, j \in (Q_A)_0$ e $\varphi_\lambda(\omega) \neq 0$ e $\varphi_\lambda(\omega') \neq 0$ teremos $\varphi_\lambda(\omega) = \varphi_\lambda(\omega')$, onde φ_λ é um epimorfismo definido a partir de φ como na Observação 2.2.1. Pelo Lema 2.2.2 temos que esta condição nos garante que A tem base multiplicativa.

Como A é triangular, pela Observação 1.2.13, sabemos que existe pelo menos um vértice que é um poço. Sem perda de generalidade, consideremos esse vértice como sendo o associado ao idempotente e_0 , isto é, o vértice 0. Além disso, assumiremos que os vértices $1, \dots, m$ são os vértices iniciais de todas as flechas terminando em 0. Denote-as por $\alpha_i : i \rightarrow 0$, com $i = 1, \dots, m$.

Considere o idempotente $e = e_1 + e_2 + \dots + e_t$ e observe que o quiver Q_{eAe} é o quiver obtido de Q_A retirando-se o vértice 0 e as flechas $\alpha_1, \dots, \alpha_m$.

Considere o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 kQ_A = (1 - \epsilon_0) kQ_A \oplus \epsilon_0 kQ_A & \xrightarrow{\varphi_\lambda = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{bmatrix}} & eA \oplus e_0A = A \\
 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 kQ_{eAe} = (1 - \epsilon_0) kQ_A & \xrightarrow{\varphi_1} & eA = eAe
 \end{array}$$

Pela hipótese de indução, temos que a álgebra eAe tem base multiplicativa. Logo, pelo Lema 2.2.2 existe uma $(g-m)$ -upla $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_\beta)$, indexada pelas flechas $\beta \in (Q_{eAe})_1$, tal que o epimorfismo correspondente $(\varphi_1)_{\bar{\lambda}} : kQ_{eAe} \rightarrow eAe$, (construído como em 2.2.1 a partir de $\bar{\lambda}$) satisfaz: $(\varphi_1)_{\bar{\lambda}}(\omega) = (\varphi_1)_{\bar{\lambda}}(\omega')$ para todos os caminhos $\omega, \omega' \in {}_iW_j$, com $i, j \in (Q_{eAe})_0$ quando $(\varphi_1)_{\bar{\lambda}}(\omega) \neq 0$ e $(\varphi_1)_{\bar{\lambda}}(\omega') \neq 0$. Sem perda de generalidade, podemos considerar que a própria φ_1 satisfaz a propriedade acima (isto é, que $\lambda_\beta = 1$ para cada $\beta \in (Q_{eAe})_1$).

O problema agora se resume a escolher escalares $\lambda_{\alpha_1}, \dots, \lambda_{\alpha_m} \in k^*$ correspondentes às flechas $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ de tal sorte que o epimorfismo φ_λ , onde $\lambda = (\lambda_\alpha), \alpha \in (Q_A)_1$ é tal que

$$\lambda_\alpha = \begin{cases} \lambda_i & \text{se } \alpha = \alpha_i \\ 1 & \text{se } \alpha \in (Q_{eAe})_1 \end{cases},$$

satisfaz a propriedade de que $\varphi_\lambda(\omega) = \varphi_\lambda(\omega')$ para todos os caminhos $\omega, \omega' \in {}_iW_j$, e $i, j \in (Q_A)_0$, com $\varphi_\lambda(\omega) \neq 0$ e $\varphi_\lambda(\omega') \neq 0$.

Observe que a escolha dos λ_i 's, $i = 1, \dots, m$ não afeta a correspondente propriedade para caminhos em Q_{eAe} e o epimorfismo φ_1 .

Agora veremos algumas definições e resultados necessários para a continuação da demonstração.

Observação 3.1.2. Se existir $\zeta \in {}_pW_q$, onde $p, q = \{1, \dots, m\}$, com $p \neq q$, e sendo a álgebra schurian, então $\varphi_\lambda(\alpha_p\zeta) = 0$.

De fato, se existir um caminho $\zeta \in {}_pW_q$, onde $p, q \in \{1, \dots, m\}$, com $p \neq q$, teremos então dois caminhos $\alpha_q, \alpha_p\zeta \in {}_0W_q$.

Se $\varphi_\lambda(\alpha_q) = \varphi_\lambda(\alpha_p\zeta)$, teremos como consequência $\varphi_\lambda(\alpha_q - \alpha_p\zeta) = 0$.

Desta maneira, $(\alpha_q - \alpha_p\zeta) \in \text{Ker}\varphi_\lambda$, o que é uma contradição, pois sendo o $\text{Ker}\varphi_\lambda$ um ideal admissível temos que $\text{Ker}\varphi_\lambda \subset \text{rad}^2 kQ_A$ e $(\alpha_q - \alpha_p\zeta) \notin \text{rad}^2 kQ_A$.

Definição 3.1.3. *Sejam dois vértices distintos p e q pertencentes a $\{1, \dots, m\}$.*

Definimos o conjunto

$$R(p, q) = \left\{ (l, \omega_p, \omega_q) \left| \begin{array}{l} l \in (Q_A)_0, \\ \omega_p \in {}_p W_l, \omega_q \in {}_q W_l, \text{ tais que} \\ \varphi_\lambda(\alpha_p \omega_p) \neq 0 \neq \varphi_\lambda(\alpha_q \omega_q) \end{array} \right. \right\}$$

Definição 3.1.4. *Sejam p e q vértices distintos tais que $p, q \in \{1, \dots, m\}$. No conjunto $R(p, q)$ definimos a seguinte relação de pré-ordem:*

$$(l, \omega_p, \omega_q) \leq (l', \omega'_p, \omega'_q) \iff \left\{ \begin{array}{l} \exists \xi \in {}_l W_{l'} \text{ tal que} \\ \varphi_\lambda(\omega_p \xi) = \varphi_\lambda(\omega'_p) \\ \text{e } \varphi_\lambda(\omega_q \xi) = \varphi_\lambda(\omega'_q) \end{array} \right.$$

Lema 3.1.5. *Se (l, ω_p, ω_q) e $(l', \omega'_p, \omega'_q)$ são dois elementos minimais em $R(p, q)$ então $l = l'$.*

Demonstração. Suponha que $l \neq l'$.

Pela Definição 3.1.3 temos que $\varphi_\lambda(\alpha_p \omega_p) \neq 0$, $\varphi_\lambda(\alpha_q \omega_q) \neq 0$, $\varphi_\lambda(\alpha_p \omega'_p) \neq 0$ e $\varphi_\lambda(\alpha_q \omega'_q) \neq 0$.

Logo, o subquiver pleno contendo os vértices $\{l, l', p, q\}$ contém uma coroa, o que contraria a hipótese do Teorema 3.1.1. Portanto, $l = l'$.

□

Sejam $p, q \in \{1, \dots, m\}$ com $R(p, q) \neq \emptyset$. Dada a unicidade estabelecida pelo lema acima, vamos chamar de *vértice minimal de $R(p, q)$* ao vértice l de um elemento minimal (l, ω_p, ω_q) de $R(p, q)$ e vamos denotá-lo por $l(p, q)$.

Faremos a escolha dos λ_i 's levando-se em conta os caminhos começando nos vértices minimais dos $R(p, q)$'s. Depois veremos que isto basta.

A partir de agora, usaremos a representação de um grafo $G = (G_0, G_1)$ que será definido da seguinte maneira:

- i) O conjunto de vértices de G_0 de G está em correspondência com os vértices $1, \dots, m$ de $(Q_A)_0$. Por conveniência, iremos chamá-los também de $1, \dots, m$.
- ii) O conjunto de arestas G_1 de G é definido por: para cada par de vértices $i, j \in G_0$, existe uma aresta $i \text{ --- } j$ se, e somente se $R(i, j) \neq \emptyset$.

Pelo comentado acima, a cada aresta $i \text{ --- } j$ está associado o vértice minimal $l(i, j)$.

O grafo G não tem porque ser conexo. Decomponha-o então em componentes conexas $G = G_1 \dot{\cup} G_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} G_r$.

Observe que a escolha dos escalares λ_i 's para os vértices de uma componente conexa de G é independente da escolha dos escalares para os vértices de uma outra componente conexa. Sem perda de generalidade, assumiremos então que os vértices $\{1, \dots, n\}$ fazem parte da componente G_1 de G .

Caso 1: Assuma $n = 1$, isto é, $R(1, q) = \emptyset, \forall q \in \{2, \dots, m\}$.

Sejam dois caminhos $\omega_1, \omega_2 \in {}_0W_j$, onde $j \in (Q_A)_0$, sendo $\omega_1 = \alpha_1 \omega'_1$ e $\omega_2 = \alpha_1 \omega'_2$. Observe que $\omega'_1, \omega'_2 \in {}_1W_j$ e portanto são caminhos em Q_{eAe} . Pela nossa escolha de φ_1 , teremos então que $\varphi_1(\omega'_1) = \varphi_1(\omega'_2)$.

Agora, para qualquer escolha do escalar λ_1 , teremos que

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda(\omega_1) &= \varphi_\lambda(\alpha_1 \omega'_1) = \varphi_\lambda(\alpha_1) \varphi_\lambda(\omega'_1) = \varphi_\lambda(\alpha_1) \varphi_1(\omega'_1) = \\ &= \varphi_\lambda(\alpha_1) \varphi_1(\omega'_2) = \varphi_\lambda(\alpha_1) \varphi_\lambda(\omega'_2) = \varphi_\lambda(\alpha_1 \omega'_2) = \varphi_\lambda(\omega_2)\end{aligned}$$

Logo, $\varphi_\lambda(\omega_1) = \varphi_\lambda(\omega_2)$. Daí segue que a escolha de λ_1 nos garante que $\varphi_\lambda(\omega_1) = \varphi_\lambda(\omega_2)$, para todos os caminhos $\omega_1, \omega_2 \in {}_0W_j$ passando por α_1 .

Caso 2: Assuma $n > 1$, isto é, dado um $p \in \{1, \dots, n\}$ existe pelo menos um vértice $q \in \{1, \dots, n\}$ tal que $R(p, q) \neq \emptyset$.

Neste caso, precisamos da seguinte afirmação para continuarmos a demonstração, para as álgebras em questão.

Afirmção 3.1.6. *Se existir um ciclo (*) $a_1 \text{---} a_2 \text{---} \dots \text{---} a_h = a_1$, ($h \geq 4$) então $l(a_i, a_{i+1}) = l(a_{i+1}, a_{i+2})$ para $i = 1, \dots, h-2$.*

Demonstração. Vamos supor que no ciclo (*) existe $i \in \{1, \dots, h-2\}$ tal que $l(a_i, a_{i+1}) \neq l(a_{i+1}, a_{i+2})$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que duas arestas consecutivas de (*) estejam associadas a vértices minimais distintos.

De fato, se $a_j \text{---} a_{j+1} \text{---} a_{j+2}$ for um subgrafo de (*) tal que $l(a_j, a_{j+1}) = l(a_{j+1}, a_{j+2})$ então $R(a_j, a_{j+2}) \neq \emptyset$ e $l(a_j, a_{j+2}) = l(a_j, a_{j+1})$ e assim, poderemos substituir o ciclo (*) por um outro trocando as arestas $a_j \text{---} a_{j+1} \text{---} a_{j+2}$ por uma aresta $a_j \text{---} a_{j+2}$.

Se existir um $j \in \{3, \dots, h-1\}$ tal que $l(a_1, a_2) = l(a_j, a_{j+1})$, por exemplo, fecharemos um ciclo, conforme o subquiver abaixo:

onde para cada $i \in \{1, \dots, h-1\}$, teremos que $(l(a_i, a_{i+1}), \omega_{a_i}, \overline{\omega_{a_{i+1}}})$ é o elemento minimal de $R(a_i, a_{i+1})$, sendo $\omega_{a_i} : l(a_i, a_{i+1}) \rightsquigarrow a_i$ e $\overline{\omega_{a_{i+1}}} : l(a_i, a_{i+1}) \rightsquigarrow a_{i+1}$.

Assim teremos uma coroa, o que contraria a nossa hipótese.

Então nestas condições, poderemos ter todos os vértices minimais distintos e como $a_h = a_1$, teremos o seguinte subquiver:

o que também é uma coroa, contrariando a hipótese.

Portanto, todos os vértices minimais deste ciclo coincidem em um único vértice e está provada a nossa afirmação.

□

Com isto, se existir um ciclo $a_1 \text{---} a_2 \text{---} \dots \text{---} a_h = a_1$ no grafo G , então em Q_A existe um subquiver como segue:

onde γ_i 's são caminhos de l a a_i , para $i = \{1, \dots, h-1\}$.

Observe que $l = l(a_i, a_{i+1})$, $\forall i = 1, \dots, h-1$ e que, como A é schurian $\rho_i \alpha_i \gamma_i = \rho_j \alpha_j \gamma_j$ para $i, j = 1, \dots, h$ e $\rho_i, \rho_j \in k^*$.

Continuando, ao observarmos o grafo, como 1^o passo escolheremos um vértice qualquer que denotaremos por a_1 .

Para este vértice, assim como para qualquer outro, temos duas possibilidades.

Primeira, a_1 não pertence a um ciclo, então escolheremos, para iniciar, $\lambda_{a_1} = 1$.

Na outra possibilidade, teremos que o vértice a_1 pertence a um ciclo. Então, considere $a_2, \dots, a_v$ todos os vértices que estão em ciclos passando por a_1 .

Pela afirmação acima temos que todos os vértices minimais dos conjuntos $R(p, q) \neq \emptyset$ existentes neste ciclo, sendo $p, q \in \{a_1, \dots, a_v\}$ são coincidentes, digamos l . Sejam agora, os caminhos $\omega_{a_i} \in {}_{a_i}W_l$. Com essa condição, escolheremos os escalares $\lambda_{a_1}, \dots, \lambda_{a_v}$ tais que $\varphi_\lambda(\alpha_{a_1}\omega_{a_1}) = \dots = \varphi_\lambda(\alpha_{a_v}\omega_{a_v})$, já que pela afirmação acima podemos dizer que $\rho_i \alpha_{a_i}\omega_{a_i} = \rho_j \alpha_{a_j}\omega_{a_j}$ para $i, j = 1, \dots, v$ e $\rho_i, \rho_j \in k^*$. Dada a hipótese sobre φ_1 , a escolha dos λ_{a_i} 's independe da escolha dos ω_{a_i} 's.

Após esta escolha, passaremos para o 2^o passo.

Sejam $b_1, \dots, b_u$ os vértices adjacentes aos analisados no 1^o passo. Para cada b_j , com $j = 1, \dots, u$, existe um a do passo anterior tal que existe uma aresta $a \text{---} b_j$ e, neste caso, $R(a, b_j) \neq \emptyset$. Analisaremos cada b_j com $j = 1, \dots, u$ considerando para cada conjunto $R(a, b_j)$ o elemento minimal $(l(a, b_j), \omega_a, \overline{\omega_{b_j}})$ e para cada um temos as mesmas possibilidades do passo anterior.

Primeira possibilidade, b_j não pertence a um ciclo.

Escolheremos λ_{b_j} a partir de λ_a tal que a igualdade $\varphi_\lambda(\alpha_a\omega_a) = \varphi_\lambda(\alpha_{b_j}\overline{\omega_{b_j}})$ seja válida.

Na segunda possibilidade, temos que b_j pertence a um ciclo, mesmo assim, escolheremos λ_{b_j} a partir de λ_{a_i} tal que $\varphi_\lambda(\alpha_a\omega_a) = \varphi_\lambda(\alpha_{b_j}\overline{\omega_{b_j}})$.

Consideremos $c_1, \dots, c_s$ todos os vértices que estão em um ciclo passando por b_j . Escolheremos os valores de λ_{c_i} para $i = 1, \dots, s$, a partir da escolha de λ_{b_j} e considerando a afirmação acima que diz que $\rho_j \alpha_{b_j}\omega_{b_j} = \rho_i \alpha_{c_i}\omega_{c_i}$ tais que

$$\varphi_\lambda(\alpha_{b_j}\omega_{b_j}) = \varphi_\lambda(\alpha_{c_1}\omega_{c_1}) = \dots = \varphi_\lambda(\alpha_{c_s}\omega_{c_s}).$$

Este processo continua sucessivamente até escolhermos todos os escalares λ_i para

$i = 1, \dots, n$ da componente conexa G_1 . Por enquanto, esta escolha está funcionando somente para os elementos minimais de todos $R(p, q) \neq \emptyset$, com $p, q \in \{1, \dots, n\}$.

Agora pela Definição de pré-ordem 3.1.4, temos que para qualquer outro elemento $(l'(a, b_j), \omega'_a, \overline{\omega'_{b_j}}) \in R(a, b_j)$ existirá um caminho $\zeta_{ab_j} \in (l(a, b_j)W_{(l'(a, b_j))})$ tal que $\varphi_\lambda(\omega_a \zeta_{ab_j}) = \varphi_\lambda(\omega'_a)$ e $\varphi_\lambda(\overline{\omega_{b_j}} \zeta_{ab_j}) = \varphi_\lambda(\overline{\omega'_{b_j}})$

Teremos então

$$\varphi_\lambda(\alpha_a \omega_a \zeta_{ab_j}) = \varphi_\lambda(\alpha_a \omega_a) \varphi_\lambda(\zeta_{ab_j}) = \varphi_\lambda(\alpha_{b_j} \overline{\omega_{b_j}}) \varphi_\lambda(\zeta_{ab_j}) = \varphi_\lambda(\alpha_{b_j} \overline{\omega'_{b_j}} \zeta_{ab_j})$$

Logo,

$$\varphi_\lambda(\alpha_a \omega_a \zeta_{ab_j}) = \varphi_\lambda(\alpha_{b_j} \overline{\omega'_{b_j}} \zeta_{ab_j})$$

Por outro lado,

$$\varphi_\lambda(\alpha_a \omega_a \zeta_{ab_j}) = \varphi_\lambda(\alpha_a) \varphi_\lambda(\omega_a \zeta_{ab_j}) = \varphi_\lambda(\alpha_a) \varphi_\lambda(\omega'_a) = \varphi_\lambda(\alpha_a \omega'_a) \text{ e}$$

$$\varphi_\lambda(\alpha_{b_j} \overline{\omega_{b_j}} \zeta_{ab_j}) = \varphi_\lambda(\alpha_{b_j}) \varphi_\lambda(\overline{\omega_{b_j}} \zeta_{ab_j}) = \varphi_\lambda(\alpha_{b_j}) \varphi_\lambda(\overline{\omega'_{b_j}}) = \varphi_\lambda(\alpha_{b_j} \overline{\omega'_{b_j}})$$

Portanto, $\varphi_\lambda(\alpha_a \omega'_a) = \varphi_\lambda(\alpha_{b_j} \overline{\omega'_{b_j}})$ para todo elemento de $R(a, b_j)$ sendo $j = 1, \dots, u$.

Assim, após a análise feita da componente conexa G_1 o processo pode ser repetido para as demais.

Então, teremos que dada a escolha de uma m -upla $\lambda = (\lambda_i)$ para todo $i = 1, \dots, m$ teremos que para quaisquer dois caminhos ω e $\omega' \in {}_j W_i$, com $i, j \in (Q_A)_0$ tais que $\varphi_\lambda(\omega) \neq 0$ e $\varphi_\lambda(\omega') \neq 0$ teremos que $\varphi_\lambda(\omega) = \varphi_\lambda(\omega')$ e pelo Lema 2.2.2 teremos que A tem uma base multiplicativa.

Logo, o teorema é válido para $|(Q_A)_0| = t + 1$.

Portanto, a álgebra A , dentro das condições descritas, possui bases multiplicativas. □

Como consequência imediata deste teorema, conseguimos o resultado provado por Bongartz em [B].

Corolário 3.1.7. *Seja $A \cong \frac{kQ_A}{I}$ uma álgebra triangular de tipo finito então A tem base multiplicativa.*

Demonstração. Pelo Lema 1.3.6, temos que se A é triangular e de tipo finito então A é schurian. Por outro lado, A ser de tipo finito significa que em Q_A não existe um subquiver pleno que seja uma coroa.

Assim, estamos nas condições do teorema anterior, logo, A tem base multiplicativa. □

Observemos alguns exemplos para discutirmos as bases multiplicativas e o epimorfismo φ_λ . Para isso, vamos construir os exemplos segundo a demonstração.

Exemplo 3.1.8. *Seja a álgebra $\frac{kQ}{I}$, onde o quiver Q é :*

Seja $\{\epsilon_0, \dots, \epsilon_5\}$ um sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos em kQ e em correspondência biunívoca com o sistema $\{e_0, \dots, e_5\}$ nas mesmas condições em A , considere $e = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5$ um idempotente em A e o quiver Q_{eAe} obtido através do quiver Q sem o vértice 0 e as flechas α_1 e α_2 .

Sendo $B_e = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5, \theta_1, \theta_2, 2\beta_1, \beta_2, \beta_2\theta_2, \gamma\theta_1\}$ a base de $\frac{kQ_{eAe}}{I_e}$, onde $I_e = \langle \beta_2\theta_2 - 2\beta_1\theta_1 \rangle$. Como podemos perceber, a álgebra $\frac{kQ_{eAe}}{I_e}$ tem base multiplicativa e pelo isomorfismo, eAe também terá.

Considerando o quiver Q e partindo do que já foi construído, teremos a base $B = B_e \cup \{\epsilon_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_2\beta_1\}$ em $\frac{kQ}{I}$, onde $I = \langle \beta_2\theta_2 - 2\beta_1\theta_1, \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\gamma \rangle + \text{rad}^3 kQ$.

Escolheremos uma dupla $(\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2})$ para o epimorfismo φ_λ tal que A tenha uma base multiplicativa.

Consideremos $\lambda_{\alpha_1} = 2$ e $\lambda_{\alpha_2} = 1$, com essa escolha teremos que $\varphi_\lambda(\alpha_1\gamma) = 2\alpha_1\gamma$, enquanto que $\varphi_\lambda(\alpha_2\beta_1) = 2\alpha_2\beta_1$. Desta maneira, $\varphi_\lambda(\alpha_1\gamma) = \varphi_\lambda(\alpha_2\beta_1)$, como queríamos. Agora é fácil observar que $\frac{kQ}{I}$ tem base multiplicativa.

Analisaremos agora um caso onde nem sempre conseguimos construir um epimorfismo φ_λ , fazendo com que a álgebra tenha uma base multiplicativa.

Exemplo 3.1.9. Considere a álgebra de caminhos kQ dada pelo quiver abaixo

Considerando o subquiver Q' que forma a coroa sabemos que ela possui base multiplicativa, escolhendo uma, teremos $\mathcal{B}' = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5, \epsilon_6, w_1, w_2, v_2, 2v_3, u_1, u_3\}$ base de kQ' .

No quiver Q temos que a base de kQ será $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \{\epsilon_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1w_1, \alpha_3v_3, \alpha_1u_1\}$ e $I = \langle \alpha_1w_1 - \alpha_2w_2, \alpha_3v_3 - \alpha_2v_2, \alpha_1u_1 - \alpha_3u_3 \rangle$.

Queremos escolher $\lambda = (\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2}, \lambda_{\alpha_3})$ para que a álgebra $\frac{kQ}{I}$ tenha base multiplicativa.

Se escolhermos $\lambda_{\alpha_1} = 2$ e $\lambda_{\alpha_2} = 2$, teremos que $\varphi_\lambda(\alpha_1w_1) = \varphi_\lambda(\alpha_2w_2)$ e se a partir desta escolha $\lambda_{\alpha_3} = 1$, teremos também que $\varphi_\lambda(\alpha_2v_2) = \varphi_\lambda(\alpha_3v_3)$ mas, não conseguiremos, com esta escolha, que $\varphi_\lambda(\alpha_1u_1) = \varphi_\lambda(\alpha_3u_3)$.

De fato, $\varphi_\lambda(\alpha_1u_1) = 2\alpha_1u_1$ enquanto que $\varphi_\lambda(\alpha_3u_3) = \alpha_3u_3$. Portanto, a álgebra $\frac{kQ}{I}$ não tem base multiplicativa. Isto ocorre porque a álgebra não está de acordo com as condições

do Teorema 3.1.1.

Corolário 3.1.10. Para cada $d \in \mathbb{N}$, só existe um número finito de álgebras de dimensão d schurian, triangular e sem coroas próprias.

Demonstração. Pelo Teorema 3.1.1, observamos que as álgebras nestas condições possuem uma base multiplicativa. Pela Proposição 2.3.7, vimos que só existe um número finito de álgebras nas condições acima. Portanto, o corolário está provado. $\square$

Exemplo 3.1.11. Seja a álgebra $A_x \cong \frac{kQ}{I_x + \text{rad}^3 kQ}$, onde o quiver Q é

$$e \quad I_x = \langle \delta\alpha - \zeta\beta, \gamma\alpha - \varepsilon\beta, \theta\delta - \eta\gamma, \eta\varepsilon - x\theta\zeta \rangle, \text{ para } x \in k^*.$$

Como provamos no Exemplo 1.2.19, $A_x \cong A_y \iff x = y \text{ ou } x = y^{-1}$.

Desta maneira, como k é infinito isto implica dizer que existem infinitas álgebras não isomorfas nestas condições com a mesma dimensão.

3.2 Álgebras Biseriais Especiais

Trabalharemos com um tipo de álgebra que são as biseriais especiais e sendo ela, também, schurian e triangular teremos então uma base multiplicativa.

Definição 3.2.1. A álgebra A é biserial especial se for isomorfa a uma álgebra $\frac{kQ}{I}$, onde (Q, I) satisfaz:

- i) Qualquer vértice de Q é o começo de no máximo 2 flechas e o final de no máximo 2 flechas;
- ii) Para toda flecha $\alpha \in (Q_A)_1$, existe no máximo uma flecha β com $s(\alpha) = e(\beta)$ e $\alpha\beta \notin I$ e no máximo uma flecha γ com $s(\gamma) = e(\alpha)$ e $\gamma\alpha \notin I$.

Essa classe de álgebras engloba as chamadas álgebras string (ver [BR]) e gentle (ver [AS]).

A partir desta definição, vamos reobservar os nossos exemplos e classificá-los em álgebras biseriais especiais ou não.

Exemplo 3.2.2. Segundo a definição acima temos que a álgebra $A = \frac{kQ}{I}$ do Exemplo 1.3.7, onde o Q é:

É biserial especial.

Exemplo 3.2.3. Da mesma forma, toda coroa, também, é biserial especial.

Exemplo 3.2.4. Pode-se, também, observar que a álgebra de Kronecker, do Exemplo 1.3.9, também é biserial especial.

Exemplo 3.2.5. Considere a álgebra kQ , onde o quiver Q é:

Nessa álgebra podemos perceber que ela não é biserial especial.

Teorema 3.2.6. *Seja $A \cong \frac{kQ_A}{I}$ uma álgebra biserial especial, schurian e triangular. Então A tem base multiplicativa.*

Demonstração. Se o quiver Q_A for uma coroa, sabemos que $rad^2 A = 0$, então pela Proposição 2.1.4 temos que A tem base multiplicativa.

Se o quiver Q_A contiver uma coroa em algum subquiver, então a álgebra A não será biserial especial. Caso contrário, estaremos nas condições do Teorema 3.1.1 e, pelo mesmo A tem base multiplicativa.

Portanto, o teorema está provado. □

Como consequência deste teorema temos:

Corolário 3.2.7. *Para cada $d \in \mathbb{N}$, só existe um número finito de álgebras de dimensão d , biserial especial, schurian e triangular.*

Demonstração. Da mesma maneira, que o Corolário 3.1.10 temos pelo Teorema 3.2.6 que as álgebras, nessas condições, possuem uma base multiplicativa. Pela Proposição 2.3.7 vimos que só existe um número finito de álgebras nas condições acima. Portanto, esse corolário, também, está provado. □

Referências Bibliográficas

- [A] I. Assem, *Simple connectedness and homology of schurian algebras*, Université de Sherbrooke, Canada, 2004.
- [ACMT] I. Assem, D. Castonguay, E.N. Marcos, S. Trepode, *Strongly simply connected schurian algebras and multiplicative bases*, J. Algebra **283** (2005) 161-189.
- [ARS] M. Auslander, I. Reiten, S. Smalø, *Representation theory of artin algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **36**, Cambridge Univ. Press, 1995.
- [AS] I. Assem, A. Skowroński, *Iterated tilted algebras of type $\tilde{A}_n$* . Math. Z. **195** (1987), no. 2, 269–290.
- [B] K. Bongartz, *Zyklische Algebren sind nicht zügellos*, Proc. ICRA II, Ottawa 1979, Lectures Notes in Mathematics **832** (1980) 97-102 Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- [BG] O. Bretscher, P. Gabriel, *The standard form of a representation-finite algebra*, Bull. Soc. Math. Fr. **111** (1983) 21-40.
- [BGRS] R. Bautista, P. Gabriel, A.V. Roiter, e L. Salmerón, *Representation-finite algebras and multiplicative bases*, Invent. Math. **81** (1985) 2 217-285.
- [BR] M. C. R. Butler, C. M. Ringel, *Auslander-Reiten sequences with few middle terms and applications to string algebras*. Comm. Algebra **15** (1987), no. 1-2, 145–179.
- [C] F. U. Coelho, *Uma introdução à teoria de representações de álgebras* (minicurso), Atas da XII Escola de Álgebra, Diamantina (1992), 60p.
- [CLS] C. Cibils, F. Larrión, L. Salmerón, *Métodos diagramáticos en teoría de representaciones*, UNAM, México, 1982.
- [DK] Y. A. Drozd, V. V. Kirichenko, *Finite Dimensional Algebras*. Springer- Verlag, Berlin, 1994.

[JM] A. R. Jones, H. A. Merklen, *Representações de álgebras: métodos diagramáticos*, Publicações do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1984.

[MP] R. Martinez-Villa, J. A. De La Peña, *Multiplicative basis for algebras whose universal cover has no oriented cycle*, J. Algebra **87** (1984) 389-395.

[P] F. C. Polcino Milies, *Anéis e módulos*, Publicações do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1972.

[R] A. V. Roiter, *Generalization of Bongartz' theorem*, Preprint Math. Inst. Ukrainian Acad. of Sciences, pp. 1-32, Kiev (1981).

[SW] A. Skowroński, J. Waschbüsch, *Representation-finite biserial algebras*, J. Reine Angew. Math. **345** (1983) 172-181.