VARIEDADES DE CAUCHY-RIEMANN
DE DIMENSÃO TRÊS

Elisha Falbel

DISSERTAÇÃO APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

EM

MATEMÁTICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: GEOMETRIA

ORIENTADOR:

Prof. Dr. JOSÉ MIGUEL M. VELOSO

SÃO PAULO, outubro de 1984.

A Ruth

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Prof. José Veloso, cujas idéias estão em cada milímetro deste trabalho.

Ao Prof. Walter F. Wreszinski pela minha conturbada Iniciação Científica em outros tempos e outra área.

Ao Prof. Alexandre Rodrigues pela minha iniciação na matemática.

Aos meus colegas da matemática e da física, em especial, ao Manê, Marcelo, Mingo e Roberto com quem aprendi muito.

A Tamico pelo capricho na datilografia.

RESUMO

São estudadas as variedades de Cauchy-Riemann fortemente pseudoconvexas de dimensão três. Usando-se a teoria geométrica das equações diferenciais parciais obtemos: 1) um paralelismo nas variedades CR não-umbílicas, 2) a equivalência local entre todas as variedades CR umbílicas. Isto nos permite finalmente classificar todas as variedades CR fortemente pseudoconvexas homogêneas e simplesmente conexas.

ABSTRACT

The strongly pseudoconvex Cauchy-Riemann manifolds of dimension three are studied. Using the geometric theory of partial differential equations we obtained: 1) a parallelism on the non-umbilic CR manifolds, 2) a local equivalence between all the umbilic CR manifolds. This finally makes possible the classification of the strongly pseudoconvex CR manifolds which are homogeneous and simply connected.

ÍNDICE

pág.

INTRODUÇÃO

CAPÍTULO I - VARIEDADE DE CAUCHY-RIEMANN	1
§1. Estruturas complexas em espaços vetoriais	1
§2. Complexificação de um espaço vetorial	2
§3. Estruturas de Cauchy-Riemann	5
§4. Morfismos	6
§5. Variedades quase complexas	7
§6. Variedades de Cauchy-Riemann	8
§7. Morfismos diferenciáveis	9
 CAPÍTULO II - A FORMA DE LEVI E CONVEXIDADE HOLOMORFA	 13
§1. A forma de Levi	13
§2. Domínios de holomorfia e a forma de Levi	17
 CAPÍTULO III - VARIEDADES DE CAUCHY-RIEMANN HOMOGÊNEAS	 26
§1. A quádrlica em C^n	26
§2. A quádrlica em CP^n	28
§3. Bases adaptadas a uma estrutura de Cauchy-Riemann	33
§4. Coordenadas sobre $J(M,N)$	34
§5. A equação do difeomorfismo de Cauchy-Riemann	38

	<u>pág.</u>
§6. As equações prolongadas	39
§7. Paralelismo nas variedades de Cauchy-Riemann não umbílicas	47
§8. Variedades de Cauchy-Riemann homogêneas não umbílicas	47
§9. Variedades de Cauchy-Riemann umbílicas	50
§10. O grupo de automorfismos da quãdrlica projetiva	67
§11. Variedades de Cauchy-Riemann homogêneas umbílicas	70
§12. Uma aplicação	90
Bibliografia	92

INTRODUÇÃO:

A análise em domínios de $\mathbb{C}$ é muito simplificada pelo teorema de Riemann: todo domínio simplesmente conexo contido propriamente em $\mathbb{C}$ é equivalente ao interior do disco unitário. Por equivalência entendemos uma transformação biholomorfa entre os dois domínios.

Em 1907 Poincaré [17] considerou o problema da equivalência para domínios de $\mathbb{C}^2$. Observando que os bordos de domínios em $\mathbb{C}^2$ são hipersuperfícies de dimensão 3, Poincaré naturalmente formulou também o problema local de equivalência; sejam M e M' são duas hipersuperfícies analíticas definidas nos abertos U e U' em $\mathbb{C}^2$. Dados $p \in M$ e $p' \in M'$, quando existem vizinhança $V \ni p$ e $V' \ni p'$ e uma transformação biholomorfa $f: V \rightarrow V'$ tal que $f(M \cap V) = V' \cap M'$?

Poincaré observou que o problema da equivalência local, ao contrário do mesmo problema para curvas analíticas em $\mathbb{C}$, tinha em geral uma resposta negativa. Isto é devido ao fato de que uma função biholomorfa que faz uma equivalência local deve satisfazer um sistema de equações a derivadas parciais que em geral não tem soluções (V. cap. III, §5).

Domínios em $\mathbb{C}^2$ simplesmente conexos em geral não serão equivalentes, de fato, $D \times D \subset \mathbb{C}^2$ e o domínio cu-

jo bordo $\bar{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$ não são equivalentes [14]. Decidir se dois domínios são equivalentes é em geral difícil. Uma possibilidade é decidir se os bordos destes domínios são equivalentes, isto às vezes pode simplificar o problema.

Uma hipersuperfície em $\mathbb{C}^2$ dá origem a um conceito intrínseco, isto é, uma variedade cujo espaço tangente tem um subespaço complexo (V. cap. I §6). Estas variedades de Cauchy-Riemann foram estudadas por Cartan [4] em 1932.

Uma observação importante é que o problema da equivalência local de Poincaré é o mesmo que o problema de equivalência entre as hipersuperfícies consideradas como variedades de Cauchy-Riemann. Isto é, por um resultado de Tanaka [19], se existir um difeomorfismo local de Cauchy-Riemann [V. cap. I] entre hipersuperfícies analíticas de $\mathbb{C}^n$ então este se estende a uma equivalência local no sentido de Poincaré.

O problema da equivalência local de variedades de Cauchy-Riemann dimensão 3 foi solucionado por Cartan [4]. O problema em dimensão maior foi resolvido por Tanaka [19] e Chern [5], este último em 1974. As variedades de Cauchy-Riemann estudadas nestes trabalhos satisfazem ainda uma condição de convexidade, a forma de Levi é definida [v. cap. II §1], sendo chamadas de fortemente pseudoconvexas.

Fefferman em 1974 [6] deu maior sentido ao estudo das variedades de Cauchy-Riemann mostrando a regularidade na fronteira de transformações biholomorfas de domínios fortemente pseudoconvexos.

Neste trabalho fizemos uma classificação das variedades de Cauchy-Riemann fortemente pseudoconvexas de dimensão 3 homogêneas simplesmente conexas. Esta classificação já tinha sido obtida por Cartan [4], ...

Nevertheless, I must admit that I found the book, like most of Cartan's papers, hard reading ...

Hermann Weyl

Bulletin, Amer. Math.

Soc. 44(1938).

No primeiro capítulo definimos os conceitos fundamentais sobre variedades complexas e de Cauchy-Riemann. No capítulo II introduzimos a forma de Levi e mostramos que ela é a primeira obstrução para a equivalência entre variedades CR. Estabelecemos também a relação entre a convexidade holomorda e a forma de Levi. O terceiro capítulo trata do problema da equivalência de variedades CR e faz a classificação das variedades CR fortemente pseudoconvexas simplesmente conexas. A técnica utilizada foi a de analisar diretamente o sistema de equações diferenciais que uma equivalência deve satisfazer. As idéias essenciais se devem a José Veloso e a J.

A. Verderesi. Por meio de prolongamentos obtemos uma simplificação do sistema o que nos permite no caso não-umbílico (V. cap. III §7) obter um paralelismo. O caso umbílico, cujo exemplo mais importante é a esfera S^3 , se reduz a um problema algébrico tratado no §11. Finalmente uma vista no Índice dará uma idéia da trajetória seguida.

CAPÍTULO I

VARIEDADES DE CAUCHY-RIEMANN

§1. Estruturas complexas em espaços vetoriais

Definição: Seja V um espaço vetorial real. Uma estrutura complexa em V é um operador linear $J:V \rightarrow V$ tal que $J^2 = -I$ onde I é o operador identidade.

Observe que se V tem estrutura complexa então V também é um espaço vetorial complexo. Definimos a multiplicação por um escalar complexo como

$$(a+bi)v = av + bJv$$

Sendo a dimensão complexa n , a dimensão real deve ser $2n$. Dada uma base $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ de V considerado como espaço complexo, uma base de V considerado como espaço vetorial real será $\{Z_1, \dots, Z_n, JZ_1, \dots, JZ_n\}$. Isto demonstra o:

Teorema 1: Seja V um espaço vetorial real com estrutura complexa. Então a dimensão de V é par. Além disso, existe uma base de V da forma $\{Z_1, \dots, Z_n, JZ_1, \dots, JZ_n\}$ onde $\dim V = 2n$.

Exemplo: Considere $\mathbb{R}^{2n} = \{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n); x_i, y_i \in \mathbb{R}\}$

com a estrutura de espaço vetorial definimos

$$J_0: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \text{ por } J_0((x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)) = \\ = (y_1, \dots, y_n, -x_1, \dots, -x_n).$$

Obviamente $J_0^2 = -I$. J_0 é chamada de estrutura complexa canônica em $\mathbb{R}^{2n}$. Ela pode ser representada pela matriz:

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Uma estrutura complexa em V induz uma estrutura complexa em V^* , o dual do operador J , que denotaremos com o mesmo símbolo J .

§2. Complexificação de um espaço vetorial

Definição 2: Seja V um espaço vetorial real. Definimos $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ o espaço vetorial complexificado de V .

Se V tem dimensão n então $V_{\mathbb{C}}$ tem dimensão $2n$.

Observemos que $V_{\mathbb{C}}$ tem estrutura complexa dada por

$$J: V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}, J(v \otimes \alpha) = v \otimes i\alpha,$$

portanto $V_{\mathbb{C}}$ é também um espaço vetorial complexo.

Denotaremos o elemento $v \otimes (a+bi)$ por $av+ibv$.

Suponhamos que V^{2n} tenha estrutura complexa J .

$$V \xrightarrow{J} V$$

$$V_C \xrightarrow{\hat{J}} V_C$$

Estendemos J a V_C da seguinte forma:

$$\hat{J}(v \otimes \alpha) = Jv \otimes \alpha$$

Assim temos uma estrutura complexa em V_C que em princípio difere da estrutura anterior. Perguntamos agora até que ponto as duas estruturas complexa em V_C coincidem.

Teorema 2: Existe uma decomposição $V_C = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$ em soma direta de espaços vetoriais complexos onde:

- 1) $V^{1,0} = \{Z - iJZ, Z \in V\}$ e $V^{0,1} = \{Z + iJZ, Z \in V\}$
- 2) $V^{1,0}$ e $V^{0,1}$ são isomorfos como espaços vetoriais reais pela conjugação complexa.
- 3) $V^{1,0} = \{Z \in V_C ; JZ = iZ\}$ e $V^{0,1} = \{Z \in V_C ; JZ = -iZ\}$

Demonstração: Basta notar que $\{Z_k - iJZ_k, Z_k + iJZ_k\}$ forma uma base de V_C e que $\overline{Z_k - iJZ_k} = Z_k + iJZ_k$. $\square$

De 3) vemos que $V^{1,0}$ é o subespaço de V_C onde as estruturas coincidem e $V^{0,1}$ é o subespaço onde elas "anticoincidem". Chamamos $V^{1,0}$ de espaço dos vetores holomorfos e $V^{0,1}$ de espaço dos vetores antiholomorfos.

Da mesma forma no dual de V complexificado temos a decomposição:

$$V_C^* = V_{1,0} \oplus V_{0,1} \quad \text{onde} \quad V_{0,1} = \{Z^* \in V_C^*; Z^*(Z) = 0 \quad \forall Z \in V^{0,1}\}$$

$$V_{0,1} = \{Z^* \in V_C^*; Z^*(Z) = 0 \quad \forall Z \in V^{1,0}\}$$

Reciprocamente provamos o

Teorema 3: Seja V um espaço vetorial real e V_C seu complexificado. Suponha que $V_C = H \oplus A$ soma direta de subespaços complexos, com $\bar{H} = A$. Então existe um operador linear canônico $J: V \rightarrow V$ tal que $J^2 = -I$ e com respeito ao qual $V^{1,0} = H$ e $V^{0,1} = A$.

Demonstração: definimos $J_C : V_C \rightarrow V_C$ tal que

$$J_C(Z) = iZ \quad \text{se } Z \in H$$

$$\text{e } J_C(Z) = -iZ \quad \text{se } Z \in A.$$

é claro então que $J_C^2 = -I$. Se $X \in V$ então

$X = X^{0,1} + X^{1,0}$ onde $X^{1,0} \in H$ e $X^{0,1} \in A$, por hipótese, mas $X^{0,1} = \overline{X^{1,0}}$ pois " X é real".

$$\begin{aligned} \text{então } J_C X &= J_C X^{1,0} + J_C X^{0,1} = iX^{1,0} - iX^{0,1} = iX^{1,0} - i\overline{X^{1,0}} = \\ &= iX^{1,0} + i\overline{X^{1,0}} \end{aligned}$$

portanto $J_C X \in V$. Basta definir então $J: V \rightarrow V$ como a restrição $J_C|_V$. □

§3. Estruturas de Cauchy-Riemann

Subespaços reais de espaços complexos herdam uma estrutura complexa, que geralmente está bem definida apenas num subespaço, possivelmente nulo.

Seja W um espaço vetorial complexo (de dimensão complexa n) e $V \subset W$ um subespaço real (de dimensão real k).

Definição 3: definimos $m(V)$ como o maior subespaço complexo de W contido em V .

Claramente $m(V) = \{X \in V \mid iX \in V\}$.

Observemos que $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ está contido em $W \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Definimos então

$$H(V) = H(W) \quad (V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$$

$$A(V) = A(W) \quad (V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$$

$H(V) \oplus A(V)$ é um espaço que está nas condições do teorema anterior, portanto $H(V) \oplus A(V) = T \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ onde $T = m(V)$.

Teorema 4: $\max(0, k-n) \leq \dim_{\mathbb{C}} m(V) \leq \frac{k}{2}$

Demonstração: É claro que $\dim_{\mathbb{C}} m(V) \leq \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} V = \frac{k}{2}$. Por outro lado $\dim_{\mathbb{R}} W \geq \dim_{\mathbb{R}} V + \dim_{\mathbb{R}} iV - \dim_{\mathbb{R}} V \cap iV$, daí: $\dim_{\mathbb{R}} (V \cap iV) \geq 2k - 2n$ ou $\dim_{\mathbb{C}} (m(V)) \geq k-n$

Observação: Se V tem codimensão 1, isto é, $\dim V = 2n-1$
então $\dim_{\mathbb{C}} m(V) = n-1$

Definição 4: Uma estrutura de Cauchy-Riemann consiste num espaço vetorial V e um subespaço $W \subset V$ munido de uma estrutura complexa, isto é, $J: W \rightarrow W$, $J^2 = -I_W$.

Exemplo: Tome V um subespaço vetorial real de dimensão $2n-1$ de um espaço vetorial complexo de dimensão complexa n e $W = m(V) \subset V$ com estrutura complexa induzida pelo espaço complexo.

§4. Morfismos

O próximo teorema é um fato elementar das estruturas complexas que não necessita demonstração.

Teorema 5: Sejam J e J' estruturas complexas nos espaços vetoriais reais V e V' . Se considerarmos V e V' como espaços complexos, então uma aplicação linear $f: V \rightarrow V'$ é linear complexa se e somente se $J' \circ f = f \circ J$.

Este teorema torna natural a próxima definição:

Definição: Um morfismo entre estruturas de Cauchy-Riemann é uma aplicação linear $f: V \rightarrow V'$ tal que

$$f(W) \subset W' \text{ e } J' \circ f|_W = f \circ J|_W$$

§5. Variedades quase complexas

Definição 6: Uma estrutura quase complexa numa variedade M é um campo tensorial de tipo $(1,1)$ que a cada ponto $x \in M$ associa uma estrutura de Cauchy-Riemann em $T_x M$.

Observe que J pode estar definido apenas em W .

Uma variedade M munida de uma estrutura quase complexa é chamada de variedade quase complexa. Prova-se facilmente que uma variedade quase complexa tem dimensão par e é orientável.

Exemplo: Considere $C^n = \mathbb{R}^{2n} = \{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)\}$

$$\text{em } T\mathbb{R}^{2n} \text{ defina } J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial y_j}$$

$$\text{e } J\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$\begin{cases} J: \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M) \\ J_x: T_x M \rightarrow T_x M \\ J^2 = -I, \\ (\text{aqui } W = T_x M). \end{cases}$$

Portanto C^n é uma variedade quase complexa.

Definição 7: A torção de J é o tensor ^N de tipo $(1,2)$

definido em campos X e Y de TM por

$$N(X,Y) = 2([JX, JY] - [X, Y] - J([X, JY] - [JX, Y]))$$

Escreveremos como $T_X^{1,0}$ o espaço dos vetores holomorfos em $T_x M$.

Teorema 6: A torção é nula se e somente se a distribuição $T^{1,0}M$ é involutiva, isto é,
 $[T^{1,0}M, T^{1,0}M] \subset T^{1,0}M$.

Demonstração: Se Z é um campo de $T^{1,0}M$ então $Z = X - iJX$.

onde X é um campo de TM . Observamos então que:

$$[X - iJX, Y - iJY] = [X, Y] - [JX, JY] - i([X, JY] + [JX, Y])$$

em $T_x^{1,0}$, $JZ = iZ$

o teorema segue então imediatamente $\square$

A torção N de uma variedade quase complexa decide se a variedade é complexa ou não:

Teorema 7: Uma variedade quase complexa é uma variedade complexa se e somente se $N \equiv 0$.

No caso analítico a demonstração segue do teorema de Frobenius. O caso C^∞ foi demonstrado em [15].

Um exemplo de variedade quase complexa com torção não nula pode ser visto em [10].

§6. Variedades de Cauchy-Riemann

Nossos modelos de variedades de Cauchy-Riemann são as subvariedades de C^n . Isto explica a segunda restrição na definição seguinte.

Definição 8: M é uma variedade de Cauchy-Riemann se existe um subfibrado Δ de TM satisfazendo as duas condições:

- 1) Existe $J: \Delta \rightarrow \Delta$ aplicação tensorial tal que $J^2 = -I$

2) $\Delta^{1,0}$ é involutiva, isto é, $[\Delta^{1,0}, \Delta^{1,0}] \subset \Delta^{1,0}$

Escreveremos que M é uma variedade CR.

Observação: poderíamos tentar definir um tensor de torção que agisse em campos de Δ .

$N(x,y) = 2\{[Jx, Jy] - [x, y] - J([x, Jy] + [Jx, y])\} \quad \forall x, y$ campos em Δ .

Mas isto só é possível se $[x, Jy] + [Jx, y] \subset \Delta$.
Sendo esta condição verdadeira $\Delta^{1,0}$ é involutiva se e somente se $N(x,y) = 0 \quad \forall x, y$ campos em Δ .

§7. Morfismos diferenciáveis

As aplicações entre variedades que possuem alguma estrutura complexa são morfismos diferenciáveis quando infinitesimalmente respeitam as estruturas complexas.

Uma justificação intuitiva das próximas definições advém do:

Teorema 8: Seja $f: U \rightarrow C^m$ onde $U \subset C^n$ é um aberto. São equivalentes:

- 1) $f_* \circ J = J \circ f_*$
- 2) f é holomorfa.

Demonstração: Seja $(\omega_1, \dots, \omega_m)$ com $\omega_k = u_k + iv_k$ coordenadas naturais de C^m e $(z_1, \dots, z_n)$ com $z_k = x_k + iy_k$ coordenadas naturais de C^n

então f é holomorfa se valem as equações de Cauchy - Riemann

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial v_k}{\partial y_j} = 0 \quad 1 \leq j \leq n$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial y_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = 0 \quad 1 \leq k \leq m$$

por outro lado $f_*\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial u_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial v_k} \right)$

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u_k}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial u_k} + \frac{\partial v_k}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial v_k} \right)$$

daí vemos que $f_* \circ J = J \circ f_*$ se e somente se f satisfaz as equações de Cauchy-Riemann.

Definição 9: Uma aplicação diferenciável $f: M \rightarrow M'$ entre duas variedades quase complexas é quase complexa se $J' \circ f_* = f_* \circ J$

Teorema 9: São equivalentes:

- 1) f é quase complexa
- 2) se $Z \in T^{1,0} M$ então $f_*(Z) \in T^{1,0} M'$
- 3) se $Z \in T^{0,1} M$ então $f_*(Z) \in T^{0,1} M'$

Demonstração: que (2) é equivalente a (3) é imediata.

Demonstraremos apenas a primeira equivalência. Suponha que f é quase complexa,

e tomemos $Z=X-iJX$, Então

$$f_*(Z)=f_*(X-iJX)=f_*(X)-if_*J(X)=f_*(X)-iJ'f_*(X) \in T^{1,0}M'.$$

Reciprocamente se $f_*(X-iJX)=f_*(X)-if_*J(X) \in T^{1,0}M'$ então $J'of_*(X) = f_*oJ(X) \forall X \in TM$ portanto $J'of_* = f_*oJ$ []

Definição 10: Sejam M e M' duas variedades de Cauchy-Riemann e $f:M \rightarrow M'$ uma aplicação diferenciável. f é uma função de Cauchy-Riemann se:

- 1) $f_*(\Delta) \subset \Delta'$
- 2) $J'of_*|_{\Delta} = f_*oJ$

Como para as variedades quase-complexas, temos a seguinte caracterização das funções de Cauchy-Riemann:

Teorema 10: São equivalentes:

- 1) f é uma função de Cauchy-Riemann
- 2) $f_*(\Delta^{1,0}) \subset \Delta'^{1,0}$
- 3) $f_*(\Delta^{0,1}) \subset \Delta'^{0,1}$

a demonstração é análoga a do teorema anterior.

Escreveremos que f é um difeomorfismo CR.

Consideraremos daqui em diante apenas variedades de Cauchy-Riemann tais que a codimensão de Δ_p em T_pM é um para todo $p \in M$, o que corresponde exatamente

ao modelo das hipersuperfícies reais do C^n .

Kuranishi [12] provou que toda variedade de Cauchy-Riemann fortemente pseudoconvexa de dimensão maior que q (v. capítulo II) pode ser localmente mergulhada em C^n com codimensão 1.

Boutet de Monvel [2] mostrou que toda variedade de Cauchy-Riemann fortemente pseudo-convexa de dimensão maior que S *compacta* pode ser localmente mergulhada em C^n com codimensão 1.

Jacobowitz e Treves [9] demonstraram que toda variedade CR de dimensão 3 fortemente pseudoconvexa realizável como hipersuperfície em C^2 tem uma deformação que não é realizável.

CAPÍTULO II

A FORMA DE LEVI E CONVEXIDADE HOLOMORFA

§1. A forma de Levi

Seja M uma variedade de Cauchy-Riemann, onde a distribuição Δ_p tem codimensão 1 em todo ponto. O quociente $\frac{T_p^C}{\Delta_p^C}$ é isomorfo a C escolhendo-se um elemento de

T_p^C / Δ_p^C . Denotaremos por $\pi_p: T_p^C \rightarrow C$ uma projeção no quociente. Estamos escrevendo V^C para o complexificado de um espaço vetorial V .

Definimos uma aplicação bilinear nos vetores de $\Delta_p^{1,0}$:

$$L_p^1: \Delta_p^{1,0} \times \Delta_p^{1,0} \rightarrow C$$

$$L_p^1(\alpha, \beta) = i\pi([\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]) \text{ onde } \tilde{\alpha} \text{ e } \tilde{\beta} \text{ são extensões diferenciáveis de } \alpha \text{ e } \beta.$$

L_p^1 esta bem definida pois:

$$\begin{aligned} \pi_p([f\tilde{\alpha}, g\tilde{\beta}]) &= \pi_p(-g\tilde{\beta}(f)\tilde{\alpha} + f\tilde{\alpha}(y)\tilde{\beta} + fg[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]) \\ &= \pi_p(f.g. [\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]) \\ &= (f.g)(p) \pi_p([\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]) \text{ para } f \text{ e } g \text{ funções quaisquer.} \end{aligned}$$

Observamos ainda que

$$\begin{aligned} L_p^1(\beta, \alpha) &= i\pi([\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}]) = i\pi(-[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]) = -i\pi([\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]) \\ &= \overline{i\pi([\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}])} = \overline{L_p^1(\alpha, \beta)} \end{aligned}$$

Definição 1: A forma $L_p^1: \Delta_p^{1,0} \times \Delta_p^{1,0} \rightarrow \mathbb{C}$ é chamado de forma de Levi de M em p.

No caso de hipersuperfícies de $\mathbb{C}^n$ a forma de Levi tem outras caracterizações.

Definição 2: a) Seja η uma forma imaginária pura anulando Δ_c e $\eta_p \neq 0$. Definimos $L_p^2(\alpha, \beta) = d\eta_p(\alpha, \bar{\beta})$.

b) Seja $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e 0 um valor regular de f tal que $M = f^{-1}(0)$. Definimos

$$L_p^3(\alpha, \beta) = \alpha(CHf)_p \bar{\beta}$$

onde $(CHf)_p = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right)_p$ é o hessiano complexo

em p.

Teorema 1: Seja M uma hipersuperfície de $\mathbb{C}^n$. As seguintes formas são equivalentes (possuem o mesmo número de autovalores não nulos e mesma assinatura)

$$1) L_p^1 : \Delta^{1,0} \times \Delta^{1,0} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$2) L_p^2 : \Delta^{1,0} \times \Delta^{1,0} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$3) L_p^3 : \Delta^{1,0} \times \Delta^{1,0} \rightarrow \mathbb{C}$$

Demonstração: A equivalência entre (1) e (2) é consequência da fórmula

$$2d\eta(\alpha, \bar{\beta}) = \alpha\eta(\tilde{\beta}) - \bar{\beta}\eta(\tilde{\alpha}) - \eta([\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]). \text{ Como } \eta \text{ é uma forma que anula } \Delta_C \text{ temos:}$$

$$2d\eta(\alpha, \bar{\beta}) = -\eta([\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}])$$

e claramente uma forma imaginária que anula Δ_p^C é uma projeção $i\pi_p : T_p^C / \Delta_p^C \rightarrow \mathbb{C}$.

para demonstrar a equivalência com 3) construímos uma forma imaginária pura que anula Δ^C .

$$\text{Seja } \eta = \partial f = \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i. \text{ Observamos que } \eta \text{ é ima-}$$

ginária pura pois $df|_{TM} = 0 = \partial f + \bar{\partial} f$.

∂f anula claramente $\Delta^{0,1}$ e como $\bar{\partial} f$ anula $\Delta^{1,0}$ e $\partial f = -\bar{\partial} f$ concluímos que ∂f anula Δ^C .

A forma de Levi associada de η é:

$$L(\alpha, \bar{\beta}) = d\eta(\alpha, \bar{\beta}) = (\partial + \bar{\partial})(\partial f)(\alpha, \bar{\beta}) = \bar{\partial}\partial f(\alpha, \bar{\beta}) = \alpha(CHf)_p \bar{\beta}$$

Definição 3: 1) Dizemos que M (variedade de Cauchy - Riemann) é pseudoconvexa se todos os seus autovalores tiverem o mesmo sinal.

2) M é fortemente pseudoconvexa se for pseudoconvexa e não degenerada.

Teorema 2: Um difeomorfismo CR deixa invariante a forma de Levi no sentido que se $f: M \rightarrow N$ for um difeomorfismo CR, $p \in M$, $f(p) \in N$ a forma de Levi em p tem o mesmo número de autovalores não nulos e mesma assinatura que a forma de Levi em $f(p)$.

Demonstração: Seja $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ uma base de $\Delta^{1,0}$ e $Z_0 \in T^C / \Delta^C$ e consideramos a base

$$E_1 = f_*(Z_1), \dots, E_n = f_*(Z_n) \text{ em } \Delta_{f(p)}^{1,0} \text{ e } E_0 = f_*(Z_0).$$

Então:

$$\begin{aligned} \pi([E_i, \bar{E}_j]) &= \pi([f_*(Z_i), f_*(\bar{Z}_j)]) = \pi(f_*[Z_i, \bar{Z}_j]) = \\ &= \pi([Z_i, \bar{Z}_j]) \end{aligned}$$

Este teorema mostra que a forma de Levi é uma primeira obstrução para a equivalência entre duas estruturas CR. Como ilustração deste fato consideremos o seguinte problema: Estabelecer se existe ou não uma equivalência local entre as superfícies:

$$1) M_1 = \{z \in \mathbb{C}^2 : y_2 = 0\} \text{ onde } z = (x_1 + iy_1) \text{ e } x_1 + iy_1 \in \mathbb{C}$$

$$x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$$

um hiperplano.

$$2) M_2 = \{Z \in \mathbb{C}^2 : y_2 = |Z_1|^2\} \text{ uma quádrica.}$$

Examinaremos as formas de Levi de M_1 e M_2 . Usaremos a caracterização 3 do teorema

Observe que M_1 é definida pela função $i(z_2 - \bar{z}_2) = 0$ e

$$M_2 \text{ é definida pela função } \frac{i}{2}(z_2 - \bar{z}_2) - z_1 \bar{z}_1 = 0$$

Um cálculo simples de $\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}$ mostra então que

$$L_{M_1} = 0$$

$$L_{M_2} \neq 0$$

Como as formas não são equivalentes as variedades M_1 e M_2 não são equivalentes por difeomorfismo CR.

§2. Domínios de holomorfia e a forma de Levi

Seja M uma superfície compacta no $\mathbb{R}^n$ dada como imagem inversa de um valor regular de uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Sabemos que a convexidade do interior da região limitada por M esta intimamente ligada ao Hessiano de f .

Neste capítulo vamos obter um resultado que relaciona a forma de Levi que pelo teorema 1 é dado pelo hessiano complexo com uma "convexidade holomorfa".

Notação: D é aberto conexo de $\mathbb{C}^n$ ao qual chamaremos de domínio.

$\mathcal{H}(D)$ é o conjunto das funções holomorfas em D .

∂D é fronteira de D .

1 domínio de holomorfia.

Definição 4: Seja $f \in \mathcal{H}(D)$ e $z_0 \in \partial D$. dizemos que f é completamente singular em z_0 se para toda vizinhança U de z_0 não existir uma função $\tilde{f} \in \mathcal{H}(U)$ tal que $\tilde{f}|_{U \cap D} = f|_{U \cap D}$.

Definição 5: D é um domínio de holomorfia se existir uma função $f \in \mathcal{H}(D)$ que é completamente singular em todos os pontos da fronteira de D . Isto é, D é um domínio de holomorfia se existir uma função holomorfa em D que não pode ser estendida analiticamente.

Exemplos:

- 1) O disco unitário $D \subset \mathbb{C}$ é um domínio de holomorfia. [18]
- 2) pelo teorema de Riemann concluímos então que todo aberto simplesmente conexo de $\mathbb{C}$ é um domínio de holomorfia.

- 3) O dicilindro $D' \times D' \subset \mathbb{C}^2$ é um domínio de holomorfia. Tome como função completamente singular $g: D' \times D' \rightarrow \mathbb{C}$ onde $g(z_1, z_2) = f(z_1) + f(z_2)$ e $f: D' \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função completamente singular em ∂D_1 .
- 4) Seja $P = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \max\{|z_1|, |z_2|\} < 1\} = D' \times D'$ e $H = \{(z_1, z_2) \in P \mid |z_1| > q \text{ ou } |z_2| < p\}$

(P, H) é chamada de figura de Hartogs. Um teorema elementar de funções de várias variáveis complexas mostra que qualquer função holomorfa em H se estende analiticamente até P . Portanto H não é um domínio de holomorfia.

Observe que este fenômeno não ocorre com a teoria em uma variável complexa.

Lembremos que o conceito de convexidade geométrica pode ser colocado nos seguintes termos:

Definição 6: Seja $M \subset \mathbb{R}^2$. M é geometricamente convexo se para todo $x \in \mathbb{R}^2 - M$ existe uma reta pas-

sando por x tal que M esta contido em algum semiplano determinado por ela.

Mudaremos esta definição para uma definição em termos do conceito de "envelope convexo" que se prestará a uma generalização imediata para a definição de convexidade holomorfa.

Definição 7: Seja $M \subset \mathbb{R}^2$ definimos $\hat{M} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid L(x) \leq \sup L(M)\}$ para todo $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ função afim} como sendo o envelope geométrico de M .

As seguintes propriedades podem ser demonstradas:

- 1) $M \subset \hat{M}$
- 2) $\hat{M}$ é fechado e convexo
- 3) $\hat{\hat{M}} = \hat{M}$
- 4) se $\hat{M}_1 \subset \hat{M}_2$
- 5) se M é fechado e geometricamente convexo então $M = \hat{M}$
- 6) se M é limitado $\hat{M}$ é também limitado
- 7) Seja $M \subset \subset \mathbb{R}^2$ aberto. M é convexo se e somente se $K \subset \subset M$ implica $\hat{K} \subset \subset M$

onde por $K \subset \subset M$ entendemos que K tem fecho compacto contido em M .

Generalizamos estas noções para conjuntos em $\mathbb{C}^n$ substituindo as funções lineares pelas funções holomorfas. Assim:

Definição 8: Seja $D \subset \mathbb{C}^n$ um aberto, $M \subset D$ um subconjunto qualquer. Definimos

$$\hat{M}_D = \{z \in D \mid |f(z)| \leq \sup |f(M)|\} \text{ como o envelope}$$

$$\{ \text{para todo } f \in \mathcal{H}(D) \}$$

de holomorfia de M em D .

As seguintes propriedades são de fácil verificação:

- 1) $M \subset \hat{M}$
- 2) $\hat{M}$ é fechado em D
- 3) $\hat{\hat{M}} = \hat{M}$
- 4) Se $M_1 \subset M_2 \subset D$ então $\hat{M}_1 \subset \hat{M}_2$
- 5) Se M é limitado, $\hat{M}$ também o é.

definimos agora a convexidade holomorfa observando a propriedade 7 do envelope geométrico.

Definição 9: Seja $D \subset \mathbb{C}^n$ um aberto. D é holomorfo convexo se $M \subset D$ implica $\hat{M} \subset D$

Teorema 3: Todo domínio $D \subset \mathbb{C}^n$ é holomorfo convexo.

Caso contrário existiria um $M \subset D$ t.q.

$$\hat{M} \not\subset D$$

Isto é, existiria $\gamma_0 \in \partial D \cap \partial \hat{M}$. Mas tomando

$$f(Z) = \frac{1}{Z - Z_0} \in H(D) \quad f \text{ deveria ser limitada sobre } \hat{M} \text{ o}$$

que é absurdo.

É interessante observar que a existência de uma função $f \in H(D)$ holomorfa no domínio D que não pode ser estendida e o fato deste domínio ser holomorfo convexo estão inteiramente ligados. Na verdade as duas propriedades são equivalentes.

Teorema 4: Seja $D \subset \mathbb{C}^n$ aberto. Então D é holomorfo convexo se e somente se D é domínio de holomorfia.

Perguntamos então qual a relação entre a forma de Levi do bordo de um domínio e sua convexidade.

Exigiremos claramente dos domínios em questão pelo menos que esteja definida a forma de Levi de seu bordo.

Ou seja, exigiremos que o bordo seja de classe C^2 .

Teorema 5: Seja D um domínio com bordo C^2 . Então D é holomorfo convexo se e somente se ∂D é pseudoconvexo.

Provaremos apenas que se D é holomorfo convexo então ∂D é pseudoconvexo. A outra parte é mais complexa [8].

Suponhamos por absurdo que em $z_0 \in \partial D$ a forma de Levi não tem todos os autovalores de mesmo sinal. Podemos supor que $z_0 = 0$. Então existe na vizinhança W em torno de 0 e uma função $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $df|_0 \neq 0$ e $D \cap W = \{z \in V \mid f(z) < 0\}$.

O problema se reduz a mostrar que não existe $t \in T_0^{1,0} \partial D$ tal que $t \left(\frac{\partial f}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right)_0 \bar{t} < 0$.

Tomemos uma parametrização de C^n na vizinhança de 0 tal que:

$$df|_0 = dx_1|_0 \quad \text{e} \quad t = \frac{\partial}{\partial z_2}(0).$$

$$\text{Então} \quad f(0) = \frac{\partial f}{\partial z_1}(0) = \frac{1}{2}$$

$$\text{e suponha que } t(CH)_0 \bar{t} = \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}_2 \partial z_2}(0) = f_{22}(0) < 0$$

Definimos agora a variedade V :

$$V = \{z_1 = -2f_{22}(0) z_2^2, z_3=0, \dots, z_n=0\}$$

Mostraremos que $(V - \{0\}) \cap W \subset D$ para W suficientemente pequena.

Pela fórmula de Taylor podemos escrever para ξ_z entre 0 e z

$$f(z) = \sum_j (f_j(0) z_j + \bar{f}_j(0) \bar{z}_j) + \sum_{i,j} (f_{ij}(\xi_z) z_i \bar{z}_j + \bar{f}_{i\bar{j}}(\xi_z) \bar{z}_i z_j + f_{i\bar{j}}(\xi_z) z_i \bar{z}_j)$$

que sobre a variedade V se reduz a:

$$f(z) = \frac{1}{2}(-2f_{22}(0)z_2^2) + \frac{1}{2}(-2\bar{f}_{22}(0)\bar{z}_2^2) + f_{22}(\xi_z)z_2^2 + \bar{f}_{22}(\xi_z)\bar{z}_2^2 + f_{22}(\xi_z)|z_2|^2 +$$

$$+ O(|z_2|^2) \quad \text{como } f_1 = \bar{f}_1 = \frac{1}{2} \text{ e } \bar{f}_{22}(0) = f_{\bar{2}\bar{2}}(0) \text{ ficamos com:}$$

$$f(z) = f_{22}(\xi_z)|z_2|^2 + \operatorname{Re}(f_{22}(\xi_z) - f_{22}(0)z_2^2) + O(|z_2|^2)$$

Como $f \in C^2$ o primeiro termo domina a soma e como ele é negativo, existe W tal que

$$(V - \{0\}) \cap W \subset D \quad \text{como mostra a figura.}$$

Fazemos então uma deformação de V definindo:

$$V_t = \{z_1 = -2f_{22}(0) z_2^2 - t, z_3 = 0, \dots, z_n = 0\}$$

Por continuidade existe $\epsilon > 0$ tal que $V_t \cap \{|z_2| \leq \epsilon\} \subset D$ se $0 < t \leq \epsilon$ e $(V - \{0\}) \cap \{|z_2| \leq \epsilon\} \subset D$

Se f é holomorfo em D então pelo princípio do máximo $f(-t, 0, \dots, 0) \leq \sup \{|f(x)| ; x \in V_t \cap \{|z_2| \leq \epsilon\}\}$ para $0 < t < \epsilon$.

Como $K = \bigcup_{0 \leq t \leq \epsilon} V_t \cap \{|z_2| = \epsilon\}$ é compacto, deveríamos ter $\hat{K}$

com fecho compacto em D . Mas $\{(-t, 0, \dots, 0) \in \hat{K} \mid t > 0\}$ não tem fecho compacto em D .

CAPÍTULO III

VARIEDADES DE CAUCHY-RIEMANN HOMOGÊNEAS

§1. A Quádrica em $\mathbb{C}^n$

Definimos a quádrica em $\mathbb{C}^2$ como:

$$\tilde{Q} = \{(z_1, \omega) \in \mathbb{C}^2 \mid \operatorname{Im} \omega = |z_1|^2\}$$

Podemos escrever a equação da quádrica como:

$$F(z_1, \omega) = z_1 \bar{z}_1 + \frac{i}{2} (\omega - \bar{\omega}) = 0$$

Escolheremos agora dois campos em $T^{\mathbb{C}} \tilde{Q}$ tais que:

$$Z_1 \in \Delta^{1,0}$$

$$\bar{Z}_1 \in \Delta^{1,0}$$

Tomando a diferencial de F obtemos a equação do espaço tangente a $\tilde{Q}$:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}_1} d\bar{z}_1 + \frac{\partial F}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial F}{\partial \bar{\omega}} d\bar{\omega} = 0$$

ou seja

$$\bar{z}_1 dz_1 + z_1 d\bar{z}_1 + \frac{i}{2} d\omega - \frac{i}{2} d\bar{\omega} = 0$$

Observamos então que $Z_1 = \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial z_1} - \bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial \omega} \in \Delta^{1,0}$

e portanto $\bar{Z}_1 = -\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} - z_1 \frac{\partial}{\partial \bar{\omega}} \in \Delta^{0,1}$

Lema 1: A quádrica $\bar{e}$ uma variedade CR fortemente pseudoconvexa.

Calculamos a fórmula de Levi

$$L'_{(z_1, \omega)}(Z_1, Z_1) = i\pi_{(z_1, \omega)}([Z_1, Z_1])$$

mas $[Z_1, Z_1] = -\frac{i}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\omega}} + \frac{\partial}{\partial \omega} \right) \notin \Delta^C$. Portanto $L'_{(z_1, \omega)}(Z_1, Z_1) \neq 0$

Poderíamos escolher $Z = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\omega}} + \frac{\partial}{\partial \omega} \right)$ e tomar

$\pi_p: T^C \rightarrow C$ como a componente de um vetor $V \in T^C$ em Z_0 .

Definição 1: De forma geral definimos a quádrica em C^{n+1} através da equação:

$$\tilde{Q} = \{ (z_1, \dots, z_n, z, \omega) \in C^{n+1} \mid \sum_{\alpha, \beta=1}^n g_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta + \frac{i}{2} (\omega - \bar{\omega}) = 0 \}$$

onde $g_{\alpha\beta}$ é uma matriz hermitiana não degenerada de tipo $(k, n-k)$.

Novamente obtemos imediatamente o:

Lema 2: A quádrica no C^{n+1} é uma variedade CR com forma de Levi não degenerada e tipo $(k, n-k)$.

Suponhamos que $(g_{\alpha\beta})$ seja diagonal, podemos sempre fazer uma transformação linear de modo que isto aconteça.

Escolhemos então n vetores linearmente independentes de $\Delta^{1,0}$:

$$Z_i = -g_{ii} \bar{z}_i \frac{\partial}{\partial \omega} + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial z_i}$$

Os vetores em $\Delta^{0,1}$ serão obviamente:

$$Z_{\bar{i}} = -g_{i\bar{i}} z_i \frac{\partial}{\partial \bar{\omega}} - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}$$

Calculamos agora $[Z_i, Z_{\bar{i}}] = -\frac{i}{2} g_{i\bar{i}} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\omega}} + \frac{\partial}{\partial \omega} \right)$. Esco-

lhendo então $Z = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\omega}} + \frac{\partial}{\partial \omega} \right)$ e $\pi_p: T^C \rightarrow C$ como a componente de Z_0 o lema evidente.

No caso particular em que $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ a quádrica é uma variedade CR fortemente pseudoconvexa.

Estamos interessados no grupo de automorfismos de variedades CR. Mostraremos mais tarde que a esfera S^3 tem o maior grupo de automorfismos possível. Como calcular este grupo? Verificamos que a quádrica em CP^n facilita a questão. 1) Em primeiro lugar a equação da quádrica é dada por uma forma bilinear, o que nos permite encontrar facilmente o grupo que deixa a forma invariante.

2) Em segundo lugar a quádrica em CP^2 é difeomorfa CR a esfera S^3 , portanto possuem o mesmo grupo de automorfismos. 3) Além disso a quádrica em CP^n contém a quádrica do C^n sendo topologicamente a quádrica do C^n compactificada. Portanto achando a isotropia H do ponto no infinito da quádrica no CP^n acharemos o grupo de automorfismos da quádrica em C^n .

§2. A Quádrica em CP^n

Seja P^{n+1} o espaço projetivo complexo com coordenadas homogêneas $(s, z_1, \dots, z_n, \omega)$.

Definição 2: Definimos a quádrica Q pela equação

$$(*) \sum_{\alpha, \beta=1}^n g_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta + \frac{i}{2} (\omega \bar{s} - \bar{\omega} s) = 0 \quad \text{onde } (g_{\alpha\beta}) \text{ é}$$

uma matriz hermitiana não degenerada de tipo $(k, n-k)$

que em notação matricial será

$$(s, z^\alpha, \omega) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{i}{2} \\ 0 & g_{\alpha\beta} & 0 \\ \frac{i}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{s} \\ \bar{z}^\alpha \\ \bar{\omega} \end{pmatrix} = 0$$

observamos que $(*)$ pode ser formulada através da forma

bilinear hermitiana $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{i}{2} \\ 0 & g_{\alpha\beta} & 0 \\ \frac{i}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ como $F(X, X) = 0$

O grupo que deixa F invariante é isomorfo a $U(k+1, n-k+1)$

seja $C = \{\text{centro de } SU(k+1, n-k+1) = \{\xi I; \xi^{n+2} = 1\}\}$

Definição 3: $G = SU(k+1, n-k+1) / C$

Claramente G é um grupo de transformações holomorfas de P^{n+1} que age transitivamente e efetivamente em Q .

A ação de G em Q é definida por:

$$\Theta(g(s, z^\alpha, \omega)) = (s, z^\alpha, \omega) g^{-1}$$

Seja H o grupo de isotropia da ação no ponto $(s, 0, 0)$. Q então é o espaço homogêneo G/H .

OBSERVAÇÃO: No caso $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ a hiperquádrica é dada por:

$$\sum_{\alpha=1}^n |z^\alpha|^2 + \frac{i}{2}(\omega s - \bar{\omega} \bar{s}) = 0$$

que pela transformação de Cayley inversa:

$$\eta = -i \frac{\omega - i s}{\omega + i s} \quad \zeta^\alpha = 2 \frac{z^\alpha}{\omega + i s}$$

transforma Q biholomorficamente na esfera em $\mathbb{C}^{n+1}$

$$\sum_{\alpha=1}^n |\zeta^\alpha|^2 + |\eta|^2 = 1$$

G se transforma então no grupo das transformações lineares fracionária da bola unitária em $\mathbb{C}^{n+1}$ e H é o grupo de isotropia em $(\zeta, \eta) = (0, i)$.

álgebra de Lie de G :

$A \in \mathfrak{g}$ se e somente se $A \in \mathfrak{sl}(n+2, \mathbb{C})$ e

$$AB + B\bar{A}^+ = 0$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} a_0^0 & a_0^\alpha & a_0^{n+1} \\ a_\beta^0 & a_\beta^\alpha & a_\beta^{n+1} \\ a_{n+1}^0 & a_{n+1}^\alpha & a_{n+1}^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$e \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{i}{2} \\ 0 & g_{\alpha\beta} & 0 \\ \frac{i}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

daí tiramos as seguintes relações:

$$a_0^0 + \bar{a}_{n+1}^{n+1} = 0 \quad a_\beta^\gamma g_{\gamma\alpha} + g_{\beta\gamma} \bar{a}_\alpha^\gamma = 0$$

$$a_0^0 + \text{tra}_\beta^\alpha a_{n+1}^{n+1} = 0 \quad a_{n+1}^0 = \bar{a}_{n+1}^0$$

$$a_0^{n+1} = \bar{a}_0^{n+1} \quad a_\beta^0 = -2ig_{\beta\gamma} \bar{a}_{n+1}^\gamma$$

$$a^{n+1} = 2ig_{\beta\gamma} \bar{a}_0^\gamma$$

No caso de $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$

$G = \text{SU}(n+1,1)/\text{centro}$ e $g = \text{SU}(n+1,1)$ as relações acima se simplificam. A matriz geral que pertence a g é da forma

$$\begin{pmatrix} a^0 & b^\alpha & b \\ -2ia^{*\alpha} & a_\beta^\alpha & 2ib^{*\alpha} \\ a & a^\alpha & -\bar{a}_0^0 \end{pmatrix} \quad \text{onde } a_\beta^\alpha \in U(n) \text{ e}$$

$$a_0^0 - \bar{a}_0^0 = -\text{tr } a_\beta^\alpha$$

com $a, b \in \mathbb{R}$.

A álgebra g é uma álgebra de Lie quadrada:

$$g = g^{-2} \oplus g^{-1} \oplus g^0 \oplus g^1 \oplus g^2 \quad \text{onde:}$$

$$A \in \mathfrak{g}^{-2} \iff A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathfrak{g}^{-1} \iff A = \begin{pmatrix} 0 & b^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2ib^{*\alpha} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathfrak{g}^0 \iff A = \begin{pmatrix} a_0^0 & 0 & 0 \\ 0 & a_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{a}_0^0 \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathfrak{g}^1 \iff A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2ia^{*\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & a^\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathfrak{g}^2 \iff A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

observemos que a álgebra de Lie de H a isotropia em $(s,0,0)$ é: $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2$.

Consideremos a representação da isotropia:

$$\tau: H \rightarrow A_0|(T_p Q) \quad \text{dada por} \quad (a) = dQ_a|_p$$

e a representação da álgebra de Lie da isotropia:

$$d\tau: \mathfrak{h} \rightarrow \text{End}(T_p(Q))$$

Podemos identificar $T_p(Q)$ com g/h . Nesta identificação g^{-2} é a linha real transversa a Δ e $g^{-1} = \Delta$.

Verificamos então que $d\tau(g^2)=0$

Isto é: o grupo a um parâmetro de transformação $(s, \tau^2 \omega) \rightarrow (s+r\omega, \tau^2, \omega)$ é agindo em Q a identidade até primeira ordem em p .

Este fato nos mostra que vamos precisar examinar a estrutura de ordem superior de uma variedade de Cauchy-Riemann. O mesmo fato ocorre em geometria conforme onde é necessária informação do referencial de ordem 2.

Trabalharemos daqui em diante com variedades fortemente pseudoconvexas de dimensão 3.

§3. Bases adaptadas a uma estrutura de Cauchy-Riemann.

Seja $U \subset M$ um aberto de uma variedade de Cauchy-Riemann tal que existe um campo $Z_1 \in \Delta^{1,0}|_U$ não nulo em todo ponto de U .

Naturalmente definimos $Z_{\bar{1}} = \bar{Z}_1 \in \Delta^{0,1}|_U$ e

$$Z_0 = -i [Z_1, Z_{\bar{1}}]$$

Observe que 1) Z_0 é não nulo para todo ponto em U e é linearmente independente de Z_1 e $Z_{\bar{1}}$. Isto é uma consequência imediata da pseudoconvexidade forte, isto é, $\frac{T^c_p}{\Delta_p} \ni L'_p(Z_1(p), Z_1(p)) \neq 0$.

$$2) Z_0 \text{ é real pois } \bar{Z}_0 = \overline{-i[Z_1, Z_{\bar{1}}]} = -i[Z_1, Z_{\bar{1}}] = Z_0$$

Portanto em cada ponto $Z_1(p)$, $Z_{\bar{1}}(p)$, $Z_0(p)$ formam uma base do espaço complexo $T_p^{\mathbb{C}}M$.

Chamamos Z_0 , Z_1 , $Z_{\bar{1}}$ de base adaptada sobre M em U .

O colchete de Lie entre os campos será:

$$[Z_1, Z_{\bar{1}}] = iZ_0$$

$$[Z_1, Z_0] = AZ_1 + \bar{B}Z_{\bar{1}} + CZ_0$$

onde $A, \bar{B}$ e C são funções complexas definidas em U .

Das identidades de Jacobi:

$$[Z_1, [Z_1, Z_0]] = -[Z_0, [Z_1, Z_{\bar{1}}]] - [Z_1, [Z_0, Z_1]]$$

obtemos as seguintes relações:

$$B_1 + A\bar{C} - (A_{\bar{1}} + BC) = 0$$

$$\bar{C}_1 - C_{\bar{1}} + i(\bar{A} + A) = 0$$

onde definimos para $f: U \rightarrow \mathbb{C}$

$$Z_1(f) = f_1: U \rightarrow \mathbb{C}$$

$$Z_{\bar{1}}(f) = f_{\bar{1}}: U \rightarrow \mathbb{C}$$

$$Z_0(f) = f_0: U \rightarrow \mathbb{C}$$

§4. Coordenadas sobre $J(M, N)$

Consideremos duas estruturas de Cauchy-Riemann M e N de dimensão 3 com bases adaptadas escolhidas como

acima:

$Z_1, Z_{\bar{1}}, Z_0$ num aberto U de M com $[Z_1, Z_{\bar{1}}] = iZ_0$

$$\text{e } [Z_1, Z_0] = AZ_1 + \bar{B}Z_{\bar{1}} + CZ_0$$

$E_1, E_{\bar{1}}, E_0$ num aberto V de N com $[E_1, E_{\bar{1}}] = iZ_0$

$$[E_1, E_0] = aE_1 + \bar{b}E_{\bar{1}} + cE_0$$

Seja $f: U \rightarrow V$ um difeomorfismo e $f_{*x}^C: T_x^C M \rightarrow T_x^C N$

o complexificado do diferencial de f em x (denotaremos f_{*x}^C pelo mesmo símbolo f_{*x}).

Como $E_1(q), E_{\bar{1}}(q), E_0(q)$ formam uma base de $T_q^C N$, para cada ponto $x \in U$ teremos:

$$f_{*x}(Z_1(x)) = p_1^1(x) E_1(f(x)) + p_{\bar{1}}^1(x) E_{\bar{1}}(f(x)) + p_1^0(x) E_0(f(x))$$

que vamos, sem prejuízo da interpretação, escrever como:

$$f_{*}(Z_1) = p_1^1 E_1 + p_{\bar{1}}^1 E_{\bar{1}} + p_1^0 E_0 \quad \text{Analogamente:}$$

$$f_{*}(Z_{\bar{1}}) = p_{\bar{1}}^1 E_1 + p_1^1 E_{\bar{1}} + p_{\bar{1}}^0 E_0$$

$$f_*(Z_0) = p_0^{\bar{1}} E_1 + p_0^1 E_{\bar{1}} + p_0^0 E_0$$

Observemos que: 1) $\bar{p}_j^i = p_j^{\bar{i}}$ $i, j=1, \bar{1}, 0$ pois f_* é real

2) p_j^i são funções definidas em U a valores em $\mathbb{C}$, para f fixada. Claramente elas dependem apenas do primeiro jato de f . Portanto podemos considerá-las como funções num subconjunto de $J'(M, N)$. Isto é,

$$f_{*X}(Z_1(x)) = p_1^1(j_X^1 f) E_1(f(x)) + p_1^{\bar{1}}(j_X^1 f) E_{\bar{1}}(f(x)) + p_1^0(j_X^1 f) E_0(f(x))$$

Introduziremos um sistema de coordenadas no aberto

$$J'(U, v) = \alpha^{-1}(U) \cap \beta^{-1}(V) \text{ de } J'(M, N),$$

onde por $J'(M, N)$ denotaremos a variedade dos jatos de funções de M em N , $\alpha: J'(M, N) \rightarrow M$ é a função fonte e $\beta: J'(M, N) \rightarrow N$ a função alvo.

Uma carta local será:

$$\phi: J'(U, v) \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^9$$

onde (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) é uma carta de U

(ϕ_4, ϕ_5, ϕ_6) é uma carta de V e as restantes 9 coordenadas serão $\text{Re } p_1^1, \text{Im } p_1^1, \text{Re } p_1^0, \text{Im } p_1^0, \text{Re } p_0^1, \text{Im } p_0^1, \text{Re } p_1^{\bar{1}}, \text{Im } p_1^{\bar{1}}, p_0^0$.

É fácil verificar que a aplicação ϕ realmente define uma carta local sobre $J'(M, N)$.

Introduzimos as coordenadas de 2a. ordem de $J^2(M, N)$ pela seguinte definição:

$$p_{ki}^j(j_x^2 f) = Z_k(p_i^j(j' f))(x)$$

É fácil ver que as seguintes 18 coordenadas são independentes:

As partes reais e imaginárias de p_{11}^1 , $p_{1\bar{1}}^1$, p_{01}^1 , $p_{1\bar{1}}^1$, $p_{0\bar{1}}^1$, p_{01}^0 , p_{11}^0 , p_{00}^1 , somente a parte real de p_{11}^0 e mais a coordenada real p_{00}^0 .

Vamos usar as vezes outras coordenadas p_{jk}^i que não são independentes destas, portanto necessitamos estabelecer todas as relações entre elas. Isto pode ser derivado das condições:

$$p_{[i,k]}^j E_j = f_*([Z_i, Z_k]) = [f_* Z_i, f_* Z_k] = [p_i^r E_r, p_k^s E_s] = p_i^r E (p_k^s) E_s - p_k^s E_s (p_i^r) E_r$$

$$+ p_i^r p_k^s [E_r, E_s] = p_{ik}^s E_s - p_{ki}^r E_r + p_i^r p_k^s a_{rs}^\ell E_\ell \quad \text{onde } [E_r, E_s] = a_{rs}^\ell E_\ell$$

$$\text{então } p_{[i,k]}^j = p_{ik}^j - p_{ki}^j + p_i^r p_k^s a_{rs}^j$$

daí seguem as seguintes relações:

$$ip_0^1 = p_{1\bar{1}}^1 - p_{\bar{1}1}^1 + p_1^1 p_{\bar{1}}^0 a + p_{\bar{1}}^1 p_1^0 b - p_1^0 p_{\bar{1}}^1 b$$

$$Ap_1^1 + \bar{B}p_{\bar{1}}^1 + Cp_0^1 = p_{10}^1 - p_{01}^1 + p_1^1 p_0^0 a - p_0^0 p_1^1 a + p_{\bar{1}}^1 p_0^0 b - p_0^0 p_{\bar{1}}^1 b$$

$$Ap_1^{\bar{1}} + \bar{B}p_1^{\bar{1}} + Cp_0^{\bar{1}} = p_{10}^{\bar{1}} - p_{01}^{\bar{1}} + p_1^1 p_0^0 \bar{b} - p_1^0 p_0^1 \bar{b} + p_1^{\bar{1}} p_0^0 \bar{a} - p_1^0 p_0^{\bar{1}} \bar{a}$$

$$ip_0^0 = p_{11}^0 - p_{11}^0 + p_1^1 p_1^1 i - p_1^1 p_1^1 i + p_1^1 p_1^0 c - p_1^0 p_1^1 c + p_1^{\bar{1}} p_1^0 \bar{c} - p_1^0 p_1^{\bar{1}} \bar{c} \quad (a)$$

$$Ap_1^0 + \bar{B}p_1^0 + Cp_0^0 = p_{10}^0 - p_{01}^0 + p_1^1 p_0^{\bar{1}} i - p_1^{\bar{1}} p_0^1 i + p_1^1 p_0^0 c - p_1^0 p_0^1 c + p_1^{\bar{1}} p_0^0 \bar{c} - p_1^0 p_0^{\bar{1}} \bar{c}$$

As coordenadas em $J^3(M, N)$ podem ser introduzidas de forma análoga, definindo-se

$$p_{\ell ki}^j(j_x^3 f) = Z_{\ell}(p_{ki}^j(j_x^2 f)) (x) \quad j, \ell, k, i = 1, \bar{1}, 0$$

Aqui novamente $\bar{s}_0$ uma parte destas coordenadas é independente.

§5. A equação de difeomorfismo de Cauchy-Riemann.

Do teorema I-10 podemos caracterizar um difeomorfismo de Cauchy-Riemann da seguinte forma:

Se M e N são duas variedades de Cauchy-Riemann e $f: U \rightarrow N$ um difeomorfismo, $U \subset M$ um aberto, f é um difeomorfismo Cauchy-Riemann se:

$$f_{*}(\Delta^{1,0}) = \Delta^{1,0}$$

Observamos que na nossa base de campos adaptados esta condição é equivalente a que

$$f_{*x}(Z_1(x)) = p_1^1(j_x^1 f) E_1(f(x))$$

Isto é $p_1^1(j_x^1 f) = p_1^0(j_x^1 f) = 0$

A equação dos difeomorfismos de Cauchy-Riemann será:

$$S^1 = \{X^1 \in J^1(U, V) \mid J^1(M, N) \mid X = j_x^1 f \text{ onde } f \text{ é um difeomorfismo local}$$

$$\text{e } p_1^1(j_x^1 f) = p_1^0(j_x^1 f) = 0\}$$

Observações: 1) Escreveremos as condições $p_1^1(j_x^1 f) = p_1^0(j_x^1 f) = 0$

apenas como $p_1^1 = p_1^0 = 0$. Fica subentendido o espaço em que as coordenadas estão definidas, isto se aplicará também às próximas equações.

2) As condições $p_1^1 = p_1^0 = 0$ na realidade são 4 equações reais e é claro que definem uma subvariedade de $J^1(U, V)$.

Prolongaremos a equação S^1 algumas vezes na próxima secção até conseguirmos uma simplificação substancial na indeterminação da equação. Em particular conseguiremos reduzir a dimensão da equação (como subvariedade de $J^1(U, V)$ ou $J^2(U, V)$) a um ponto que nos permitirá resolvê-la no caso homogêneo.

§6. As equações prolongadas

Obteremos novas equações derivando a equação S^1 . O novo sistema de equações definirá uma subvariedade de $J^2(U, V)$, $S^2 = \{X^2 \in J^2(U, V) \mid X = j_x^2 f \text{ onde } f \text{ é um difeo-}$

morfismo local

$$p_1^{\bar{1}}(j_x^2 f) = p_1^0(j_x^2 f) = 0, \quad Z_i(p_1^{\bar{1}}(j^1 f))(x) = Z_i(p_1^0(j^1 f))(x) = 0 \}$$

S^2 é chamado de prolongado de S^1 e é indicado por $S^2 = pS^1$.

Observação: 1) No caso geral se um sistema de equações diferenciais parciais R^n é dado pelas equações $F^\ell = 0$ definidas num aberto de $J^n(M, N)$, então seu prolongado $R^{n+1} = pR^n$ é gerado pelas equações $F^\ell = 0$ definidas agora num aberto de $J^{n+1}(M, N)$ que se projeta no aberto de $J^n(M, N)$ mais as equações $\partial_{Z_i} F^\ell = 0$ onde $\partial_{Z_i} F^\ell(j_x^{n+1} f) = Z_i(F^\ell(j^n f))(x)$ e os Z_i são campos tais que $Z_i(x)$ formam uma base de $T_x M$. Usaremos esta definição nos próximos prolongamentos que fizermos sem explicitarmos mais detalhadamente.

2) É claro que uma função é solução de S^1 se e somente se for solução de pS^1 . No caso geral R^n e $R^{n+1} = pR^n$ tem as mesmas soluções.

Segundo nossa definição $Z_i(p_j^k(j^2 f))(x) = p_{ij}^k(j_x^2 f)$.

Podemos reescrever o sistema S^2 de forma mais liberal co

mo:

$$S^2 = \{X^2 \in J^2(U,v) \mid X = j_X^2 f \text{ onde } f \text{ é um difeomorfismo local},$$

$$p_{\bar{1}}^{\bar{1}} = p_1^0 = 0, \quad p_{11}^{\bar{1}} = p_{\bar{1}\bar{1}}^{\bar{1}} = p_{01}^{\bar{1}} = p_{11}^0 = p_{\bar{1}\bar{1}}^0 = p_{01}^0 = 0\}$$

Todas estas equações determinam certas coordenadas em $J^2(U,v)$, salvo a equação $p_{\bar{1}\bar{1}}^0 = 0$. Lembremos que apenas

Re $p_{\bar{1}\bar{1}}^0$ é uma coordenada. O fato que $\text{Im} p_{\bar{1}\bar{1}}^0 = 0$ em termos das coordenadas independentes significa que $p_0^0 - p_1^1 p_{\bar{1}}^{\bar{1}} = 0$.

Isto pode ser visto usando-se a relação (a) da página 35.

Portanto:

$$S^2 = \{X^2 \in J^2(U,N) \mid X = j_X^2 f \text{ onde } f \text{ é um difeomorfismo local},$$

$$p_{\bar{1}}^{\bar{1}} = p_1^0 = p_0^0 - p_1^1 p_{\bar{1}}^{\bar{1}} = 0$$

$$p_{11}^{\bar{1}} = p_{\bar{1}\bar{1}}^{\bar{1}} = p_{01}^{\bar{1}} = p_{11}^0 = p_{01}^0 = \text{Re } p_{\bar{1}\bar{1}}^0 = 0$$

Para facilitar a notação escreveremos simplifi-
cadamente

$$S^2 = \left\{ \begin{array}{l} p_{\bar{1}}^1 = p_1^0 = p_0^0 - p_1^1 p_{\bar{1}}^{\bar{1}} = 0 \\ p_{1\bar{1}}^1 = p_{\bar{1}\bar{1}}^1 = p_{0\bar{1}}^1 = p_{11}^0 = p_{01}^0 = \text{Re } p_{\bar{1}\bar{1}}^0 = 0 \end{array} \right.$$

Observamos que o sistema S^2 introduz uma nova equação de primeira ordem em $J^1(U,v)$. Usando a projeção natural $\rho_k^{k+1} : J^{k+1}(U,v) \rightarrow J^k(U,v)$ definida por $\rho_k^{k+1}(j_X^{k+1} f) = j_X^k f$

podemos formar um novo sistema de 1a. ordem:

$$\tilde{S}^1 = \{ p_{\bar{1}}^1 = p_1^0 = p_0^0 - p_1^1 p_{\bar{1}}^{\bar{1}} = 0 \}$$

Prolongamos agora $\tilde{S}^1$ obtendo $\tilde{S}^2 = p\tilde{S}^1$

$$\tilde{S}^2 = \left\{ \begin{array}{l} p_{\bar{1}}^{\bar{1}} = p_1^0 = p_0^0 - p_1^1 p_{\bar{1}}^{\bar{1}} = 0 \\ p_{\bar{1}\bar{1}}^1 = p_{\bar{1}\bar{1}}^1 = p_{0\bar{1}}^1 = p_{11}^0 = p_{1\bar{1}}^0 = p_{01}^0 = 0 \\ p_{00}^0 - p_{01}^1 p_{\bar{1}}^{\bar{1}} - p_1^1 p_{0\bar{1}}^{\bar{1}} = 0 \\ p_{\bar{1}\bar{1}}^{\bar{1}} = \frac{2i p_{\bar{1}}^{\bar{1}} p_0^1}{p_1^1} + (\bar{C} - \bar{c} p_{\bar{1}}^{\bar{1}}) p_{\bar{1}}^{\bar{1}} \text{ lembrando que} \end{array} \right.$$

$p_1^1 \neq 0$ nos jatos de difeomorfismos.

Em $\tilde{S}^2$ não aparece nenhuma equação nova de primeira ordem, isto é, a projeção $p_{\tilde{1}}^2: \tilde{S}^2 \rightarrow \tilde{S}^1$ é sobrejetora. Prolongamos novamente, obtendo $\tilde{S}^3 = p\tilde{S}^2$. Verifica-

mos que $\tilde{S}^3$ contém uma nova equação de segunda ordem. Definiremos $\tilde{\tilde{S}}^2 = \rho_2^3(\tilde{S}^3)$

$$\tilde{\tilde{S}}^2 = \left\{ \begin{array}{l} p_1^{\bar{1}} = p_1^0 = p_0^0 - p_1^1 p_1^{\bar{1}} = 0 \\ p_{1\bar{1}}^1 = p_{\bar{1}\bar{1}}^1 = p_{0\bar{1}}^1 = p_{11}^0 = p_{01}^0 = \text{Re } p_{1\bar{1}}^0 = 0 \\ p_{00}^0 - p_{01}^1 p_1^{\bar{1}} - p_1^1 p_{0\bar{1}}^{\bar{1}} = 0 \\ p_{1\bar{1}\bar{1}}^{\bar{1}} = 2i \frac{p_{1\bar{1}}^{\bar{1}} p_0^1}{p_1^1} + (\bar{C} - \bar{c} p_{1\bar{1}}^{\bar{1}}) p_1^{\bar{1}} \\ \frac{p_{0\bar{1}}^{\bar{1}}}{p_1^{\bar{1}}} = \frac{p_{00}^0 + 2i p_0^1 p_0^{\bar{1}}}{2p_0^0} - \frac{i}{2} (\Delta \delta p_0^0) + \frac{1}{2} (c p_0^1 - \bar{c} p_0^{\bar{1}}) \end{array} \right.$$

onde $\Delta = \frac{C_{\bar{1}} + iA - 2i\bar{A}}{2}$

$$\delta = \frac{c_{\bar{1}} + ia - 2i\bar{a}}{2}$$

Prolongando-se $\tilde{\tilde{S}}^2$ obtemos um sistema de ordem três $\tilde{\tilde{S}}^3 = p \tilde{\tilde{S}}^2$ que novamente não se projeta sobre $\tilde{\tilde{S}}^2$. Ficamos então com

uma nova equação de 2a. ordem. Seja $\hat{S}^2 = \rho_2^3 (\tilde{S}^3)$:

$$\hat{S}^2 = \left\{ \begin{array}{l} p_1^{\bar{1}} = p_1^0 = p_0^0 - p_1^1 p_1^{\bar{1}} = 0 \\ p_{1\bar{1}}^1 = p_{11}^1 = p_{0\bar{1}}^1 = p_{11}^0 = p_{01}^0 = \text{Re } p_{1\bar{1}}^0 = 0 \\ p_{00}^0 - p_{01}^1 p_1^{\bar{1}} - p_1^1 p_{0\bar{1}}^{\bar{1}} = 0 \\ p_{1\bar{1}}^{\bar{1}} = \frac{2i p_1^{\bar{1}} p_0^1}{p_1^1} + (\bar{C} - \bar{c} p_1^{\bar{1}}) p_1^{\bar{1}} \\ \frac{p_{0\bar{1}}^{\bar{1}}}{p_1^{\bar{1}}} = \frac{p_{00}^0 + 2ip_{00}^1 p_0^{\bar{1}}}{2p_0^0} - \frac{i}{2} (\Delta - \delta p_0^0) + \frac{1}{2} (cp_0^1 - \bar{c} p_0^{\bar{1}}) \\ \frac{p_{00}^{\bar{1}}}{p_1^{\bar{1}}} = \frac{p_0^1}{p_1^1} \frac{p_{00}^0}{p_0^0} + (K-k p_1^1 p_0^0) + \frac{i p_0^1 p_0^{\bar{1}} p_1^{\bar{1}}}{p_0^0 p_1^{\bar{1}}} + \frac{cp_0^1 p_1^{\bar{1}}}{p_0^0} - bp_1^1 p_0^1 + Sp_0^{\bar{1}} p_1^1 \end{array} \right.$$

onde $K = -\frac{i}{3} (A C - \bar{B} \bar{C} + C_3 + i \Delta C - i \Delta_1)$

$k = -\frac{i}{3} (a c - \bar{b} \bar{c} + c_3 + i \delta c - i \delta_1)$

$s = \frac{ic_1 - a}{2}$

Finalmente prolongamos $\hat{S}^2 : \hat{S}^3 = p\hat{S}^2$ e verificamos que em geral $\hat{S}^3$ não é sobre $\hat{S}^2$. Na realidade verificamos que $\rho_1^3 : \hat{S}^3 \rightarrow \tilde{S}^1$ em geral não é sobrejetor. isto é, ganhamos mais uma equação de primeira ordem se R ou r abaixo sejam não nulos. Portanto $\rho_2^3 : \hat{S}^3 \rightarrow J^2(U,v)$ é sobre $\hat{S}^2$ se e somente se $R \equiv 0$

$$S = \begin{cases} p_1^{\bar{1}} = p_1^0 = 0 \\ p_0^0 - p_1^1 p_1^{\bar{1}} = 0 \\ p_1^{\bar{1}} R - p_1^1 p_0^0 p_0^0 r = 0 \end{cases}$$

onde $R = K_1 - \bar{B}_3 + i\Delta\bar{B} - 2CK - A\bar{B} - \bar{B}\bar{A}$

e $r = k_1 - \bar{b}_3 + i\delta\bar{b} - 2ck - a\bar{b} - \bar{b}\bar{a}$

resumindo a sucessão de prolongamentos e projeções:

Observemos que se R é nulo num sistema de coordenadas, então será nulo em qualquer outro. Isto é fácil de ver se notarmos que a identidade é um difeomorfismo CR.

Definição 4: Seja M uma variedade de Cauchy-Riemann.

- 1) M é umbílica se $R(x)=0 \ \forall x \in M$, R calculado em algum sistema de coordenadas em torno de x .
- 2) M é não umbílica se $R(x) \neq 0 \ \forall x \in M$, R calculado em algum sistema de coordenadas em torno de x .

Exemplo: As quádricas projetiva e real são umbílicas.

Basta provar que a quádrica real é umbílica, pois o grupo $G = \frac{SU(2,1)}{\text{Centro}}$ é transitivo sobre a quádrica projetiva e a quádrica real está contida na quádrica projetiva.

Lembramos do §1 que a quádrica real $\tilde{Q}$ em C^2 era definida por $\tilde{Q} = \{(z_1, \omega) \in C^2 \mid \text{Im}\omega = |z_1|^2\}$. Tínhamos es-

colhido os campos $Z_1 = \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial z_1} - \bar{z}_1 \frac{\partial}{\partial \omega} \in \Delta^{1,0}$

$$Z_{\bar{1}} = \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{\omega}} \in \Delta^{0,1}$$

$$\text{e } Z_0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\omega}} + \frac{\partial}{\partial \omega} \right) \text{ globalmente de-}$$

finidos tais que $[Z_1, Z_{\bar{1}}] = iZ_0$

e $[Z_1, Z_0] = 0$. Portanto as funções $A, \bar{B}, C$

são todas nulas e daí $R \equiv 0$ sobre $\tilde{Q}$.

§7. Paralelismo nas variedades de Cauchy-Riemann não umbílicas

Vamos primeiramente reescrever a nova equação de primeira ordem numa forma mais conveniente. A nova equação era:

$$R - (p_1^1)^3 p_1^{\bar{1}} r = 0 \quad (1)$$

multiplicando pela conjugada obtemos:

$$R\bar{R} = (p_0^0)^4 r\bar{r} \quad \text{ou} \quad p_0^0 = \sqrt[4]{\frac{R\bar{R}}{r\bar{r}}} \quad \text{considerando apenas variedades não umbílicas.}$$

Substituindo em (1) ficamos com

$$\frac{R}{\sqrt[4]{R\bar{R}}} - (p_1^1)^2 \frac{r}{\sqrt[4]{r\bar{r}}} = 0$$

$$\text{daí: } \Lambda - \varepsilon \lambda p_1^1 = 0 \quad \text{onde} \quad \Lambda = \sqrt{\frac{R}{\sqrt[4]{R\bar{R}}}} \quad , \quad \lambda = \sqrt{\frac{r}{\sqrt[4]{r\bar{r}}}}$$

e $\varepsilon = \pm 1$

Lema 3: Existem apenas duas bases de campos adaptados num aberto conexo em torno de cada ponto de uma variedade de Cauchy-Riemann tal que $R=1$ neste aberto.

Demonstração: tomando a função identidade $i:M \rightarrow M$, i sendo um difeomorfismo de Cauchy-Riemann $\bar{i}$ é solução do sistema S . Sejam Z_1, Z_1^-, Z_0 e E_1, E_1^-, E_0 duas bases de campos adaptados num aberto conexo U em torno de um ponto qualquer, tal que $E = \epsilon \Lambda^{-1} Z_1$ $\epsilon = \pm 1$. A identidade satisfaz portanto a equação

$$S = \{X^1 \in J^1(U, U) \mid \Lambda - \epsilon \lambda p_1^1(j_X^1 f) = 0 \text{ se } X^1 = j_X^1 f\}.$$

Mas $p_1^1(j_X^1 i) = \Lambda \epsilon$ para $x \in U$ portanto $\lambda = 1$.

Reciprocamente se $\Lambda - \epsilon \lambda p_1^1(j_X^1 i) = \Lambda \epsilon$ e portanto $E_1 = \epsilon \Lambda^{-1} Z_1$. $\square$

Portanto existem bases adaptadas em torno de $U \subset M$ e $V \subset N$ tal que o sistema de equações S para os difeomorfismos de Cauchy-Riemann $\bar{i}$ é escrito:

$$S = \{X \in J(U, V) \mid X = j_X^1 f \text{ onde } f \text{ é difeomorfismo local e}$$

$$p_1^1 = p_1^0 = p_0^0 - 1 = p_1^1 - \epsilon = 0\}$$

Nestas bases um difeomorfismo de Cauchy-Riemann satisfaz:

$$f_*(Z_1) = \epsilon E_1$$

$$f_*(Z_1^-) = \epsilon E_1^-$$

$$f_*(Z_0) = -i f_*([Z_1, Z_1^-]) = -i[f_*Z_1, f_*Z_1^-] = -i[\epsilon E_1, \epsilon E_1^-] = E_3$$

Isto é podemos acrescentar uma nova equação a S , $p_0^1 = 0$.

Definiremos então o novo sistema

$$Q = \{X \in J^1(U, V) \mid X = j_X^1 f \text{ onde } f \text{ é um difeomorfismo local}\}$$

$$p_1^1 = p_1^0 = p_0^1 = p_0^0 - 1 = p_1^1 - \epsilon = 0\}$$

Este sistema claramente define uma Z_2 -estrutura, que pode ser reduzido a um paralelismo. Uma consequência natural do Z_2 -estrutura é o seguinte teorema:

Sejam $U \subset M$ e $V \subset N$ abertos de duas variedades de Cauchy-Riemann onde estão definidas bases adaptadas $\{Z_1, Z_{\bar{1}}, Z_0\}$ e $\{E_1, E_{\bar{1}}, E_0\}$ que satisfazem a condição do lema 3. Sejam ainda as funções A, B, C definidas em U a valores em $\mathbb{C}$ e as funções a, b, c definidas em V a valores em $\mathbb{C}$ pelo colchetes $[Z_1, Z_0] = AZ_1 + \bar{B}Z_{\bar{1}} + CZ_0$ e

$$[E_1, E_0] = aE_1 + \bar{b}E_{\bar{1}} + cE_0$$

Teorema 1: Uma condição necessária para que um difeomorfismo local $f: U \rightarrow V$ seja um difeomorfismo de Cauchy-Riemann é que $A(x) = a(f(x))$

$$B(x) = b(f(x))$$

$$C(x) = \epsilon c(f(x)) \quad \forall x \in U$$

Demonstração: Basta observar que $A\epsilon E_1 + B\epsilon E_{\bar{1}} + CE_0 =$

$$\begin{aligned} f_*(AZ_1 + \bar{B}Z_{\bar{1}} + CZ_0) &= f_*([Z_1, Z_0]) = [f_*Z_1, f_*Z_0] = \\ &= [\epsilon E_1, \epsilon E_0] = aE_1 + \bar{b}E_{\bar{1}} + cE_0. \end{aligned}$$

As funções A, B, C podem então ser consideradas curvaturas da variedade de Cauchy-Riemann não umbílica.

Perguntamos agora qual é a dimensão do grupo de automorfismos de uma variedade de Cauchy-Riemann não umbílica. Observe que em geral este grupo é trivial e tem dimensão máxima nas variedades homogêneas.

Teorema 2: O grupo de automorfismos de uma variedade de Cauchy-Riemann M tem dimensão menor ou igual a três.

O símbolo do sistema S em cada jato integral $X=j_x$ é nulo. Isto é $g_x = \{v \in T_x V(J(U,v)) \mid vF=0 \text{ para todo } F \text{ que define } S\} = 0$

onde $T_x V(J(U,v)) = (\rho_0^1)^{-1}(\rho_0^1(j_x^f))$, $U, V \subset M$. Portanto [16],[13] temos unicidade das soluções por cada um dos jatos integrais.

Fixando-se um ponto $x \in U \subset M$, a dimensão da α -fibra sobre x é maior ou igual a dimensão do grupo de automorfismos. Mas $\dim \{\alpha^{-1}(x) \cap S\} = 3$, isto termina a demonstração. $\square$

§8. Variedades de Cauchy-Riemann homogêneas não umbílicas

Seja M uma variedade de Cauchy-Riemann homogêneas não umbílica. Sabemos do lema 3 que existe uma ba-

se de campos adaptada num aberto em torno de cada ponto tal que $R=1$. Do teorema 1 concluímos que as funções curvaturas são tais que

$$A(x) = A(y)$$

$$B(x) = B(y)$$

$$C(x) = \epsilon C(y) \quad \forall x, y \in M \quad \epsilon = \pm 1$$

pois, de homogeneidade, dados dois pontos $x, y \in M$ existe um automorfismo que leva x em y . Vamos supor que podemos escolher $\epsilon=1$, o que é equivalente à existência de uma secção de Δ globalmente definida. Isto claramente é possível para uma variedade homogênea simplesmente conexa.

As constantes A, B e C satisfazem então as relações de Jacobi e são tais que $R=1$:

$$A\bar{C} - BC = 0$$

$$A + \bar{A} = 0$$

$$-3 \frac{A\bar{B}}{2} + i \frac{AC^2}{3} = 1$$

Destas relações obtemos as seguintes álgebras de Lie:

$$(1) \quad [Z_1, Z_{\bar{1}}] = iZ_0$$

$$[Z_1, Z_0] = i\lambda Z_1 + \frac{2i}{3\lambda} Z_{\bar{1}} \quad \lambda \in \mathbb{R}^*$$

$$(2) \quad [Z_1, Z_0] = iZ_0$$

$$[Z_1, Z_0] = i\lambda Z_1 - i\lambda Z_{\bar{1}} + \sqrt{-\frac{9\lambda}{2} - \frac{3}{\lambda}} Z_0 \quad \lambda < 0$$

$$(3) \quad [Z_1, Z_1] = iZ_0$$

$$[Z_1, Z_0] = i\lambda Z_1 + i\lambda Z_{\bar{1}} + i \sqrt{\frac{3}{\lambda} - \frac{9\lambda}{2}} Z_0 \quad \lambda < -\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{ou} \\ 0 < \lambda < \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Obtemos então o:

Teorema 3: a) As variedades de Cauchy-Riemann homogêneas simplesmente conexas são os grupos de Lie simplesmente conexos cujas álgebras de Lie complexificadas são (1), (2) e (3).

b) O grupo de automorfismos de cada uma dessas variedades tem álgebras de Lie complexificadas (1), (2) e (3) respectivamente.

Resta verificar a parte b). Seja $\Theta: L \times M \rightarrow M$ a ação transitiva do grupo de automorfismos L na variedade de Cauchy-Riemann M . Fixamos um ponto $x \in M$ e definimos as aplicações $\Theta_x: L \rightarrow M$; $\Theta_x(g) = gx$ e $\Theta_g: M \rightarrow M$; $\Theta_g(x) = gx$. Como a dimensão de L é três o núcleo de Θ_x é discreto, logo existe um aberto $U \subset L$, $c \in U$ tal que $\Theta_x: U \rightarrow \Theta_x(U)$, é um difeomorfismo.

Se A é um campo invariante a esquerda de L em U , definimos

$$\bar{A} = (\Theta_x)_*(A) \quad \text{um campo em } \Theta_x(U).$$

Observemos que os campos $\bar{A}$ são invariantes pelos automorfismos, isto é $(\Theta_g)_*\bar{A} = \bar{A}$. Esta afirmação decorre de que $\Theta_g \circ \Theta_p = \Theta_p \circ L_g$, daí $(\Theta_{g*})\bar{A} = \Theta_{g*} \Theta_{x*}(A) = \Theta_{x*} L_{g*}(A) = \Theta_{x*}(A) = \bar{A}$.

Portanto podemos escolher $A_1, A_{\bar{1}}$ e A_0 pertencen-

tes ao complexificado de ℓ (álgebra de Lie de L) tais que:

$$\bar{A}_1 = Z_1$$

$$\bar{A}_{\bar{1}} = Z_{\bar{1}}$$

$$\bar{A}_0 = Z_0$$

Como A_1 , $A_{\bar{1}}$ e A_0 estão Θ_X -relacionados com Z_1 , $Z_{\bar{1}}$ e Z_0 segue que o complexificado da álgebra de Lie ℓ é isomorfa a uma das álgebras (1), (2) e (3).

Integração das álgebras de Lie.

Obteremos as variedades CR homogênea como imersões em $\mathbb{C}^2$ ou $\mathbb{CP}^2$.

Primeiramente achamos as álgebras reais associadas às álgebras complexificadas acima. Fazemos

$$A_1 = Z_1 + Z_{\bar{1}}$$

$$A_2 = i(Z_1 - Z_{\bar{1}})$$

$$A_3 = Z_0$$

As álgebras reais são:

$$(1) \quad [A_1, A_2] = 2A_3$$

$$[A_1, A_3] = \left(\lambda - \frac{2}{3\lambda}\right) A_2$$

$$[A_2, A_3] = \left(-\lambda - \frac{2}{3\lambda}\right) A_1$$

Fizemos $A_3 = 2Z_0$ nas próximas álgebras por conveniência.

$$(2) \quad [A_1, A_2] = A_3 \quad k = \sqrt{\frac{-9\lambda}{2} - \frac{3}{\lambda}} \quad \lambda < 0$$

$$[A_1, A_3] = 0$$

$$[A_2, A_3] = -4\lambda A_1 - 2kA_3$$

$$(3) \quad [A_1, A_2] = A_3 \quad k = \sqrt{\frac{3}{\lambda} - \frac{9\lambda}{2}} \quad \lambda < -\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ ou}$$

$$[A_1, A_3] = 4\lambda A_2 + 2kA_3 \quad 0 < \lambda < \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$[A_2, A_3] = 0$$

A técnica utilizada para a integração será a de achar uma representação destas álgebras de Lie como campos holomorfos em $T_C^{C^3}$, o complexificado do espaço tangente de C^3 . Estes campos, por sua vez, geram grupos a 1-parâmetro de transformações biholomorfas. No caso em que a representação é linear as transformações estão globalmente definidas. Portanto uma órbita de dimensão três do grupo de transformações é uma variedade de Cauchy-Riemann homogênea. Mas uma órbita de dimensão três é uma variedade integral maximal da distribuição gerada pelos campos acima tal que a distribuição tem posto três real sobre todos os pontos da variedade integral.

Definimos primeiramente uma aplicação linear ϕ de uma álgebra de Lie g de dimensão 3 em $X^C(C^3)$, os campos no complexificado do espaço tangente.

$\phi: g \rightarrow X(C^3)$ é tal que

$$\phi(A_k) = \frac{\partial}{\partial u_k} \quad \text{onde } A_k \text{ é uma base de } g \text{ e } (u_1, u_2, u_3) \text{ são coordenadas canônicas sobre } C^3.$$

Observamos que ϕ , apesar de ser linear, não é um homomorfismo de álgebras de Lie. A próxima definição introduz um homomorfismo de álgebras de Lie $i: \mathfrak{g} \rightarrow X^C(C^3)$.

$$i(A_k)(u_1, u_2, u_3) = \phi(\text{ad}_{A_k}(u_1 A_1 + u_2 A_2 + u_3 A_3))$$

Para mostrar que a aplicação linear i é um homomorfismo de Lie, basta mostrar que $i([A_k, A_\ell]) = [i(A_k), i(A_\ell)]$.

$$\begin{aligned} \text{Mas } i([A_k, A_\ell]) &= \phi(\text{ad}_{[A_k, A_\ell]}(\sum_j u_j A_j)) \\ &= \phi(\sum_j u_j [[A_k, A_\ell], A_j]) \\ &= \phi(\sum_{m,j} u_j c_{k\ell}^s c_{sj}^m A_m) \\ &= \sum_{m,j} c_{k\ell}^s c_{sj}^m u_j \frac{\partial}{\partial u_m} \end{aligned}$$

por outro lado

$$\begin{aligned} [i(A_k), i(A_\ell)] &= [\phi(\text{ad}_{A_k}(\sum_j u_j A_j)), \phi(\text{ad}_{A_\ell}(\sum_s u_s A_s))] \\ &= [\phi(\sum_{j,p} c_{kj}^p u_j A_p), \phi(\sum_{s,m} c_{\ell s}^m u_s A_m)] \\ &= [\sum_{j,p} c_{kj}^p u_j \frac{\partial}{\partial u_p}, \sum_{s,m} c_{\ell s}^m u_s \frac{\partial}{\partial u_m}] \\ &= \sum_{j,p} c_{kj}^p u_j c_{\ell s}^m \delta_{ps} \frac{\partial}{\partial u_m} - \sum_{s,m} c_{\ell s}^m u_s c_{kj}^p \delta_{mj} \frac{\partial}{\partial u_p} \\ &= \sum_{j,p} c_{kj}^p u_j c_{\ell p}^m \frac{\partial}{\partial u_m} - \sum_{s,m} c_{\ell s}^m u_s c_{km}^p \frac{\partial}{\partial u_p} \end{aligned}$$

que por uma mudança dos índices mudos fica

$$= U_j (c_{kj}^s c_{ls}^m - c_{lj}^s c_{ks}^m) \frac{\partial}{\partial u_m},$$

usando-se agora a identidade de Jacobi $c_{kl}^s c_{sj}^m = c_{kj}^s c_{ls}^m - c_{lj}^s c_{ks}^m$ concluimos que, de fato, $i: g \rightarrow X^C(C^3)$ é um homomorfismo de álgebras de Lie.

Observamos ainda que os campos $i(A_1)$, $i(A_2)$, $i(A_3)$ são campos holomorfos, isto é, em cada ponto $i(A_j) \in T_C^{1,0}(C^3)$ e as funções de C em C , coeficientes da expansão de $i(A_j)(u)$ na base canônica $\{\frac{\partial}{\partial u_j}\}$ são holomorfas. Por um resultado conhecido [10], as transformações do grupo a um parâmetro gerado por cada um dos campos são biholomorfas.

Analisemos primeiramente o caso (2):

$$i(A_1) = 4\lambda u_3 \frac{\partial}{\partial u_2} + (2ku_3 + u_2) \frac{\partial}{\partial u_3}$$

$$i(A_2) = -u_1 \frac{\partial}{\partial u_3}$$

$$i(A_3) = -4\lambda u_1 \frac{\partial}{\partial u_2} - 2ku_1 \frac{\partial}{\partial u_3}$$

Integramos a distribuição gerada por estes três campos:

$$ai(A_1) + bi(A_2) + ci(A_3) = (a4\lambda u_3 - 4\lambda cu_1) \frac{\partial}{\partial u_2} + (au_2 + 2kau_3 - (b+2kc)u_1) \frac{\partial}{\partial u_3} + 0 \frac{\partial}{\partial u_1}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Obteremos a variedade integral que contém o ponto $(1, i, 0)$. Como u_1 é constante e igual a 1, basta resolver as equações características:

$$u_2' = au_3 4\lambda - 4\lambda c$$

$$u_3' = au_2 + 2kau_3 - b - ack$$

Fazendo $a=1$ ficamos com

$$u_2' = 4\lambda u_3 - 4\lambda c$$

$$u_3' = u_2 + 2ku_3 - b - 2ck$$

Derivamos a segunda equação e usamos a primeira obtendo:

$$u_3'' - 2ku_3' - 4\lambda u_3 = -4\lambda c$$

encontramos então a solução geral

$$u_3 = c_1 e^{\tau_1 t} + c_2 e^{\tau_2 t} + c \quad \text{onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ e}$$

$$\tau_1 = k + \sqrt{-\frac{\lambda}{2} - \frac{3}{\lambda}}$$

$$\tau_2 = k - \sqrt{-\frac{\lambda}{2} - \frac{3}{\lambda}}$$

$$\begin{aligned} \text{e } u_2 &= u_3' - 2ku_3 + b + 2ck = c_1 \bar{c}_1 e^{\tau_1 t} + c_2 \bar{c}_2 e^{\tau_2 t} - \\ &- ak(c_1 e^{\tau_1 t} + c_2 e^{\tau_2 t}) + b \end{aligned}$$

impondo que a variedade contém o ponto $(1, i, 0)$ podemos

supor que $u_3(0) = 0$

$$u_2(0) = i \quad \text{daí vem:}$$

$$\text{Im}c_1 = -\text{Im}c_2 = \frac{1}{2\sqrt{-\frac{\lambda}{2} - \frac{3}{\lambda}}}$$

$$\text{então } \frac{u_3 - \bar{u}_3}{2i} = \frac{1}{2\sqrt{-\frac{\lambda}{2} - \frac{3}{\lambda}}} (e^{\tau_1 t} - e^{\tau_2 t})$$

$$\frac{u_2 - \bar{u}_2}{2i} = \frac{1}{2\sqrt{-\frac{\lambda}{2} - \frac{3}{\lambda}}} (\tau_1 e^{\tau_1 t} - \tau_2 e^{\tau_2 t} - 2k(e^{\tau_1 t} - e^{\tau_2 t}))$$

eliminando-se t destas equações obtemos finalmente a equação:

$$(1) \quad (k - \sqrt{-\frac{\lambda}{2} - \frac{3}{\lambda}}) \frac{u_3 - \bar{u}_3}{2i} + \frac{u_2 - \bar{u}_2}{2i} =$$

$$= ((k + \sqrt{-\frac{\lambda}{2} - \frac{3}{\lambda}}) \frac{u_3 - \bar{u}_3}{2i} + \frac{u_2 - \bar{u}_2}{2i}) \frac{k - \sqrt{-\frac{\lambda}{2} - \frac{3}{\lambda}}}{k + \sqrt{-\frac{\lambda}{2} - \frac{3}{\lambda}}}$$

$$\text{com } (k + \sqrt{-\frac{\lambda}{2} - \frac{3}{\lambda}}) \frac{u_3 - \bar{u}_3}{2i} + \frac{u_2 - \bar{u}_2}{2i} > 0$$

Mas fazendo a transformação biholomorfa:

$$y = (k - \sqrt{-\frac{\lambda}{2} - \frac{3}{\lambda}}) u_3 + u_2$$

$$x = (k + \sqrt{-\frac{\lambda}{2} - \frac{3}{\lambda}}) u_3 + u_2$$

Obtemos as hipersuperfícies:

$$\frac{y - \bar{y}}{2i} = \left(\frac{x - \bar{x}}{2i} \right)^m \quad \frac{x - \bar{x}}{2i} > 0 \quad \text{e} \quad 2 < m < \infty$$

$$m = \frac{k + \sqrt{-\frac{\lambda}{2} - \frac{3}{\lambda}}}{k - \sqrt{-\frac{\lambda}{2} - \frac{3}{\lambda}}}$$

Resta determinar o posto da distribuição sobre a hipersuperfície. Devemos então analisar o posto da matriz abaixo para $u_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 4\lambda \operatorname{Re} u_3 & 4\lambda \operatorname{Im} u_3 & 2k \operatorname{Re} u_3 + \operatorname{Re} u_2 & 2k \operatorname{Im} u_3 + \operatorname{Im} u_2 \\ 0 & 0 & -\operatorname{Re} u_1 & \operatorname{Im} u_1 \\ -4\lambda \operatorname{Re} u_1 & -4\lambda \operatorname{Im} u_1 & -2k \operatorname{Re} u_1 & -2k \operatorname{Im} u_1 \end{pmatrix}$$

Verificamos facilmente que o posto é maior que três nos pontos onde $\operatorname{Im} u_3 = 0$ pontos estes que claramente não pertencem à hipersuperfície (1).

Podemos fazer os mesmos cálculos acima para o caso (3). Neste caso: obtemos:

$$i(A_1) = 4\lambda u_3 \frac{\partial}{\partial u_2} + (2k u_3 + u_2) \frac{\partial}{\partial u_3}$$

$$i(A_2) = -u_1 \frac{\partial}{\partial u_3}$$

$$i(A_3) = 4\lambda u_1 \frac{\partial}{\partial u_2} + 2k u_1 \frac{\partial}{\partial u_3}$$

e integrando pelo mesmo processo descrito acima encontramos as duas hipersuperfícies seguintes:

$$\frac{y-\bar{y}}{2i} = \left(\frac{x-\bar{x}}{2i} \right)^m \quad \frac{x-\bar{x}}{2i} > 0 \quad 1 < m < 2 \quad \text{ou} \quad m < -1$$

$$\text{onde } m = \frac{k - \sqrt{\frac{3}{\lambda} - \frac{\lambda}{2}}}{k + \sqrt{\frac{3}{\lambda} - \frac{\lambda}{2}}}$$

$$e \quad (x-\bar{x}) + (y-\bar{y}) + 4 e^{2m \arctg \frac{x-\bar{x}}{y-\bar{y}}} = 0 \quad m > 0$$

O caso (1) se subdivide em dois:

(a) $\lambda - \frac{2}{3\lambda} = 0$ então a álgebra será:

$$[A_1, A_2] = 2A_3$$

$$[A_1, A_3] = 0$$

$$[A_2, A_3] = 2\sqrt{\frac{2}{3}} A_1$$

obtemos $i(A_1) = 2u_2 \frac{\partial}{\partial u_3}$

$$i(A_2) = 2\sqrt{\frac{2}{3}} u_3 \frac{\partial}{\partial u_1} - 2u_1 \frac{\partial}{\partial u_3}$$

$$i(A_3) = -2\sqrt{\frac{2}{3}} u_2 \frac{\partial}{\partial u_1}$$

A distribuição é gerada pelos campos

$$(2b\sqrt{\frac{2}{3}} u_3 - ci2\sqrt{\frac{2}{3}}) \frac{\partial}{\partial u_1} + (2ai - 2bu_1) \frac{\partial}{\partial u_3} \text{ com } a, b \text{ e}$$

c reais.

resolvemos então as equações:

$$\begin{cases} u_1' = b2\sqrt{\frac{2}{3}} u - c2\sqrt{\frac{2}{3}} i \\ u_3' = -2bu_1 + 2ai \end{cases}$$

obtendo finalmente uma hipersuperfície equivalente a

$$(x-\bar{x})^2 + (y-y)^2 = -4$$

Observe que esta superfície não é simplesmente convexa.

(b) $(\lambda - \frac{2}{3\lambda}) \neq 0$

Neste caso os campos em C^3 serão:

$$i(A_1) = u_3 \left(\lambda - \frac{2}{3\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial u_2} + 2u_2 \frac{\partial}{\partial u_3}$$

$$i(A_2) = u_3 \left(-\lambda - \frac{2}{3\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial u_1} - 2u_1 \frac{\partial}{\partial u_3}$$

$$i(A_3) = u_2 \left(\lambda + \frac{2}{3\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial u_1} - u_1 \left(\lambda - \frac{2}{3\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial u_2}$$

Os campos que geram a variedade serão:

$$\begin{aligned} a \left(u_3 \left(\lambda - \frac{2}{3\lambda} \right) + 2u_2 \frac{\partial}{\partial u_3} \right) + b \left(u_3 \left(-\lambda - \frac{2}{3\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial u_1} - 2u_1 \frac{\partial}{\partial u_3} \right) + \\ + c \left(u_2 \left(\lambda + \frac{2}{3\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial u_1} - u_1 \left(\lambda - \frac{2}{3\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial u_2} \right) \end{aligned}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Os campos deixam invariante a forma quadrática.

$$F(u_1, u_2, u_3) = \frac{u_1^2}{-\lambda - \frac{2}{3\lambda}} + \frac{u_2^2}{-(\lambda - \frac{2}{3\lambda})} + \frac{u_3^2}{2}$$

Os grupos a 1-parâmetro que deixa F invariante, deixam $\bar{F}$ invariante também, portanto a forma

$$H(u_1, u_2, u_3) = \frac{u_1 u_1}{-\lambda - \frac{2}{3\lambda}} + \frac{u_2 u_2}{-(\lambda - \frac{2}{3\lambda})} + \frac{u_3 \bar{u}_3}{2} \text{ é invariante.}$$

Se a órbita contém o ponto $(1, i, 0)$, ela é uma variedade de Cauchy-Riemann homogênea já que neste ponto o posto da distribuição gerada por $i(A_1)$, $i(A_2)$ e $i(A_3)$ é três.

Temos que

$$F(1, i, 0) = \frac{4/3\lambda}{\lambda^2 - \left(\frac{2}{3\lambda}\right)^2}$$

$$H(1, i, 0) = \frac{-2\lambda}{\lambda^2 - \left(\frac{2}{3\lambda}\right)^2}$$

Mostraremos que a variedade CR é a intersecção de

$$F(u_1, u_2, u_3) = \frac{4/3\lambda}{\lambda^2 - \left(\frac{2}{3\lambda}\right)^2}$$

$$\text{e } H(u_1, u_2, u_3) = \frac{-2\lambda}{\lambda^2 - \left(\frac{2}{3\lambda}\right)^2}$$

É claro que a variedade CR está contida na intersecção. Resta verificar se o ponto da distribuição é três em todos os pontos da intersecção. A matriz envolvida é:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \operatorname{Re} u_3 \left(\lambda - \frac{2}{3\lambda} \right) & \operatorname{Im} u_3 \left(\lambda - \frac{2}{3\lambda} \right) & 2\operatorname{Re} u_2 & 2\operatorname{Im} u_2 \\ -\operatorname{Re} u_3 \left(\lambda + \frac{2}{3\lambda} \right) & -\operatorname{Im} u_3 \left(\lambda + \frac{2}{3\lambda} \right) & 0 & 0 & -2\operatorname{Re} u_1 & -2\operatorname{Im} u_1 \\ \operatorname{Re} u_2 \left(\lambda + \frac{2}{3\lambda} \right) & \operatorname{Im} u_2 \left(\lambda + \frac{2}{3\lambda} \right) & -\operatorname{Re} u_1 \left(\lambda - \frac{2}{3\lambda} \right) & -\operatorname{Im} u_1 \left(\lambda - \frac{2}{3\lambda} \right) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Procuramos os pontos da intersecção onde o posto é menor que três, temos dois casos). Se $u_3=0$ então é fácil ver

que $u_2 = \alpha u_1$ $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $(u_1, u_2, u_3) = (u_1, \alpha u_1, 0)$ pertence $\bar{a}$ intersecção então:

$$\frac{\alpha^2 u_1^2}{-(\lambda - \frac{2}{3\lambda})} + \frac{u_1^2}{-(\lambda + \frac{2}{3\lambda})} = \frac{4/3\lambda}{\lambda^2 - (\frac{2}{3\lambda})^2}$$

$$\frac{\alpha^2 u_1 \bar{u}_1}{-(\lambda - \frac{2}{3\lambda})} + \frac{u_1 \bar{u}_1}{-(\lambda + \frac{2}{3\lambda})} = \frac{-2\lambda}{\lambda^2 - (\frac{2}{3\lambda})^2}$$

daí $\frac{u_1}{\bar{u}_1} = -\frac{2}{3\lambda^2}$ então $\lambda^2 = \frac{2}{3}$ absurdo

2) Se $u_3 \neq 0$ concluímos facilmente que $u_2 = \alpha u_3$ $\alpha \in \mathbb{R}$
 $u_1 = \beta u_3$

Se $(u_1, u_2, u_3) = (\alpha u_3, \beta u_3, u_3)$ pertence $\bar{a}$ intersecção então segue-se analogamente que $\lambda^2 = \frac{2}{3}$ absurdo.

Portanto a intersecção é uma variedade de Cauchy-Riemann homogênea.

Mostraremos agora que esta variedade é um recobrimento de uma variedade de Cauchy-Riemann em $\mathbb{CP}^2$.

Observamos que na órbita do ponto $(1, i, 0)$

$$H(u_1, u_2, u_3) = H(1, i, 0) = \mu F(1, i, 0) = \mu F(u_1, u_2, u_3) \text{ onde } \mu = \frac{-3\lambda^2}{2}.$$

Definimos então uma hipersuperfície em $\mathbb{CP}^2$ cuja equação em coordenadas homogêneas é dada por:

$$* \quad H(u_1, u_2, u_3) = \varepsilon \mu |F(u_1, u_2, u_3)| \quad \varepsilon = \frac{(\lambda^2 - (\frac{2}{3\lambda})^2)\lambda}{|\lambda^2 - (\frac{2}{3\lambda})^2| \cdot |\lambda|}$$

$$F(u_1, u_2, u_3) \neq 0$$

A projeção de C^3 em CP^2 é uma aplicação CR. É fácil ver que a imagem da variedade CR em C^3 pela projeção está contida na hipersuperfície de CP^2 definida acima. Seja $u=(u_1, u_2, u_3)$ e observamos que $F(\alpha u) = \alpha^2 F(u)$ $\forall \alpha \in C$.

$$\text{A equação } \alpha^2 F(u) = \frac{4/3\lambda}{\lambda^2 - (\frac{2}{3\lambda})^2} \text{ tem exatamente}$$

duas soluções para α . Concluimos então que para cada linha complexa da hipersuperfície de CP^2 , correspondem 2 pontos da variedade CR de C^3 . Portanto a variedade em C^3 é um recobrimento CR da hipersuperfície em CP^2 .

§9. Variedades de Cauchy-Riemann umbílicas.

Vimos no final da seção 6 que a quádrlica Q é uma variedade umbílica. Mostraremos nesta seção que todas as variedades de Cauchy-Riemann umbílicas, não necessariamente homogêneas, são localmente equivalentes a quádrlica.

Teorema 4: Seja M uma variedade de Cauchy-Riemann umbílica. Então para todo $p \in M$ existe um aberto U p e um difeomorfismo de Cauchy-Riemann $f: V \rightarrow V, V$ contido na quádrlica projetiva.

Utilizaremos os seguintes resultados da teoria dos sistemas de equações diferenciais parciais.

Seja $R^k \quad J^k(U, v)$ um sistema de equações diferenciais parciais de ordem k e $(g^k)_x$ o símbolo em $X \in R^k$.

Se:

1) $\rho_k^{k+1}: pR^k \rightarrow J^k(U, v)$ é sobre R^k onde pR^k é o prolongamento de R^k .

2) $(g^k)_x$ é 2-acíclico para todo $X \in R^k$

Então R^k é formalmente integrável. [7]

Se, além disto, tivermos satisfeita a seguinte condição:

3) $(g^{k+1})_y = 0 \quad \forall y \in pR^k$

Então R^k é completamente integrável. [11]

Estabelecemos a equação de equivalência S^1 entre uma vizinhança U de M que contém p e uma vizinhança V de Q . Sabemos que (ver pg. 45) $\rho_2^3: \hat{S}^3 \rightarrow J^2(u, v)$ é sobre $\hat{S}^2$ se e somente se $R \equiv 0$. Verifica-se facilmente que $\hat{g}^3=0$. Resta mostrar que $\hat{g}^2$ é 2-acíclico.

Como $\hat{g}^2 = \{v \in T\hat{S}^2 \mid \rho_{1*}^2(v)=0 \text{ e } v(F)=0 \text{ para todo } F \text{ que pertence ao ideal que define a equação}\}$

então $\hat{g}^2$ tem dimensão 1 e é gerado por

$$v = \frac{p_1^1}{2p_0^0} \frac{\partial}{\partial p_{01}^1} + \frac{p_1^1}{2p_0^0} \frac{\partial}{\partial p_{01}^1} + \frac{p_0^1}{p_0^0} \frac{\partial}{\partial p_{00}^1} + \frac{p_0^1}{p_0^0} \frac{\partial}{\partial p_{00}^1} + \frac{\partial}{\partial p_{00}^0}$$

que, usando a identificação fundamental, podemos escrever

como:

$$v = \frac{p_1^1}{2p_0^0} Z^0 \otimes Z \otimes E_1 + \frac{p_1^{\bar{1}}}{2p_0^0} Z^0 Z^1 \otimes E_{\bar{1}} + \frac{p_0^1}{p_0^0} Z^0 Z^0 \otimes E_1 + \frac{p_0^{\bar{1}}}{p_0^0} Z^0 Z^0 \otimes E_{\bar{1}} \\ + Z^0 Z^0 \otimes E_0.$$

Para provar que $\hat{g}^2$ é 2-acíclico, devemos verificar que a

a seqüência $T^* \hat{g}^{k+1} \xrightarrow{\delta} \Lambda^2 T^* \hat{g}^k \xrightarrow{\delta} \Lambda^3 T^* \hat{g}^{k-1}$ é exata
para $k \geq 2$,

isto é, $H^{2,k}(\hat{g}^2) = 0 \quad \forall k > 2$.

Se $k \geq 3$, como $g^3 \equiv 0$ a seqüência fica

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \Lambda^3 T^* \hat{g}^2 \text{ que obviamente é exata.}$$

Se $k=2$ temos

$$0 \longrightarrow \Lambda^2 T^* \hat{g}^2 \xrightarrow{\delta} \Lambda^3 T^* \hat{g}^1 \quad *$$

e então devemos mostrar que δ é injetora.

Seja $\alpha \in \Lambda^2(T^*M)$, $\alpha = aZ^1 \wedge Z^1 + bZ^0 \wedge Z^1 + cZ^0 \wedge Z^{\bar{1}}$

Como α é real $c = \bar{b}$ e temos que:

$$\delta(\alpha \otimes v) = \alpha \wedge \delta v = \alpha \wedge \left[\frac{p_1^1}{2p_0^0} (Z^0 \otimes Z^1 + Z^1 \otimes Z^0) \otimes E_1 + \frac{p_1^{\bar{1}}}{2p_0^0} (Z^0 \otimes Z^{\bar{1}} + Z^{\bar{1}} \otimes Z^0) \otimes E_{\bar{1}} \right. \\ \left. + \frac{p_0^1}{p_0^0} 2 Z^0 \otimes Z^0 \otimes E_1 + \frac{2p_0^{\bar{1}}}{p_0^0} Z^0 \otimes Z^0 \otimes E_{\bar{1}} + 2 Z^0 \otimes Z^0 \otimes E_0 \right]$$

$$\begin{aligned}
&= Z^0 \wedge Z^1 \wedge Z^{\bar{1}} \otimes \left[\left(a \frac{p_1^1}{2p_0^0} Z^1 - \frac{cp_1^1}{2p_0^0} Z^0 \right) \otimes E_1 + \left(a \frac{p_1^{\bar{1}}}{2p_0^0} Z^{\bar{1}} + b \frac{p_1^{\bar{1}}}{2p_0^0} Z^0 \right) \otimes E_{\bar{1}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2p_0^1 a}{p_0^0} Z^0 \otimes E_1 + \frac{2p_0^1 a}{p_0^0} Z^0 \otimes E_{\bar{1}} + 2a Z^0 \otimes E_0 \right]
\end{aligned}$$

portanto daí vem que $\delta(\alpha \otimes v) = 0$ se e somente se $a=b=c=0$, isto é, a sequência $*$ é exata.

Como o sistema $\hat{S}^2$ é completamente integrável, ele admite uma solução que claramente será um difeomorfismo de Cauchy-Riemann local numa vizinhança de p sobre um aberto de Q .

§10. O grupo de automorfismos da quádrlica projetiva.

Já tínhamos visto (cf. §2) que o grupo de automorfismos de Cauchy-Riemann da quádrlica projetiva contém o grupo $G = \frac{SU(2,1)}{\text{Centro}}$ que tem dimensão 8. Mostraremos nesta seção que este é exatamente o grupo dos automorfismos por um argumento dimensional.

Considere a isotropia $(\hat{S}_0^2)_p$ da equação $\hat{S}^2$ de equivalência num aberto em torno de p da quádrlica. Isto é

$$(\hat{S}_0^2)_p = \{X \in \hat{S}_p^2 : \beta(X) = p\}.$$

Lema 4: A variedade $(\hat{S}_0^2)_p$ tem dimensão 5 e é um grupo de Lie conexo.

Observemos que a variedade $(\hat{S}_0^2)_p$ é o gráfico de uma função que depende de p_1^1 , p_0^1 e p_0^0 . Portanto $(\hat{S}_0^2)_p$ tem dimensão 5 e é difeomorfo a $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, logo é conexo. Como $\hat{S}^2$ é um grupóide, $(\hat{S}_0^2)_p$ é um grupo de Lie.

Lema 5: A isotropia $(\hat{S}_0^2)_p$ é difeomorfa a H , grupo de isotropia de G .

Já vimos que o grupo de isotropia H de G tem dimensão 5 (cf. §2) e é claro que $J_p^2 H \subset (\hat{S}_0^2)_p$, portanto como ambos tem mesma dimensão e $(\hat{S}_0^2)_p$ é conexo segue o lema. $\square$

Dos dois lemas acima concluimos que o grupo que deixa invariante um ponto da quádriga é justamente H , pois temos existência e unicidade de soluções para cada jato integral de $\hat{S}^2$. Seja agora $g \in \text{Aut}(Q)$ tal que $g(p) = q$. Como G é transitivo, existe $g' \in G$ tal que $g' \circ g(p) = p$ portanto $g' \circ g = h \in H$. Mas então $g' = hg^{-1} \in G$. Demonstramos assim o:

Teorema 5: O grupo de automorfismos de Q é G , isto é:

$$\text{Aut}(Q) = \frac{\text{SU}(2,1)}{\text{Centro}} = G$$

Recordaremos da seção 2 as álgebras de Lie de G , da isotropia H e a da isotropia de primeira ordem.

A álgebra de Lie de G é dada por:

$$g = g^{-2} \oplus g^{-1} \oplus g^0 \oplus g^1 \oplus g^2 \quad (\text{cf } \S 2)$$

Escolheremos uma base de cada um dos subespaços g^i .

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{gera } g^{-2}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{geram } g^{-1}$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \quad \text{geram } g^0$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{geram } g^1$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{gera } g^2$$

Os colchetes entre elementos desta base são dados abaixo e serão usados na próxima seção.

$$\begin{aligned} [R, T] &= -C_1 & [R, B_1] &= A_1 & [R, B_2] &= A_2 & [R, A_1] &= [R, A_2] &= 0 \\ [R, C_1] &= 2R & [R, C_2] &= 0 \end{aligned}$$

$$[T B_1] = [T B_2] = 0 \quad [T C_1] = -2 \quad [T C_2] = 0 \quad [T A_1] = B_1 [T A_2] = B_2$$

$$[B_1 B_2] = 4T \quad [B_1 C_1] = -B_1 \quad [B_1 C_2] = -3B_2 \quad [B_1 A_1] = -2C_2 \quad [B_1 A_2] = -C_1$$

$$[B_2 C_1] = -B_2 \quad [B_2 C_2] = 3B_1 \quad [B_2 A_1] = C_1 \quad [B_2 A_2] = -2C_2$$

$$[C_1, C_2] = 0 \quad [C_1 A_1] = -A_1 \quad [C_1 A_2] = -A_2$$

$$[C_2, A_1] = 3A_2 \quad [C_2 A_2] = -3A_1$$

$$[A_1 A_2] = -4R$$

A álgebra de Lie do grupo de isotropia $\bar{e}$:

$$h = g^0 \oplus g^1 \oplus g^2$$

e a álgebra de Lie da isotropia de primeira ordem $\bar{e}$:

$$h_1 = g^2$$

§11. Variedades de Cauchy-Riemann homogêneas umbílicas.

A falta de um paralelismo nas variedades umbílicas é compensada pelo teorema 4. A classificação das variedades homogêneas recairá na classificação das subálgebras transitivas da álgebra de Lie g da quádrlica.

Seja M uma variedade de Cauchy-Riemann umbílica homogênea com grupo de automorfismos L cuja álgebra de Lie é ℓ .

Lema 6: 1) $\ell \subset \mathfrak{g}$

2) $\ell_0 = \ell \cap \mathfrak{h}$ ℓ_0 é a álgebra de Lie da isotro-
pia.

3) $\ell_1 = \ell \cap \mathfrak{h}_1$ ℓ_1 é a álgebra de Lie da isotro-
pia de ordem 1.

O lema decorre imediatamente do teorema 4. Sendo M uma variedade umbílica, ela é localmente equivalente a quádrica. $\square$

Como L é transitiva deveremos ter que $\dim \ell / \ell_0 = 3$.

Chamaremos as subálgebras de Lie $\ell \subset \mathfrak{g}$ tais que $\dim \ell / \ell_0 = 3$ de subálgebras de Lie transitivas. Observemos que como $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{-2} \oplus \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2$ é uma álgebra de Lie graduada, a ela está associada uma filtração

$$\mathfrak{g} = \bar{\mathfrak{g}}^{-2} \supset \bar{\mathfrak{g}}^{-1} \supset \bar{\mathfrak{g}}^0 \supset \bar{\mathfrak{g}}^1 \supset \bar{\mathfrak{g}}^2 \quad \text{onde} \quad \bar{\mathfrak{g}}^i = \mathfrak{g}^i \oplus \mathfrak{g}^{i+1} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}^2$$

Claramente $\mathfrak{g}^i \simeq \frac{\bar{\mathfrak{g}}^i}{\bar{\mathfrak{g}}^{i+1}}$ e portanto definindo

$$\text{gr } \mathfrak{g} = \bigoplus_{i=-2}^2 \frac{\bar{\mathfrak{g}}^i}{\bar{\mathfrak{g}}^{i+1}} \quad \text{teremos} \quad \text{gr } \mathfrak{g} = \mathfrak{g}$$

Seja agora $\ell \subset \mathfrak{g}$ uma subálgebra de Lie. Obtemos a seguinte filtração natural de ℓ :

$$\ell = \bar{\ell}^{-2} \supset \bar{\ell}^{-1} \supset \bar{\ell}^0 \supset \bar{\ell}^1 \supset \bar{\ell}^2 \quad \text{onde} \quad \bar{\ell}^i = \ell \cap \bar{\mathfrak{g}}^i,$$

e a seguinte graduação:

$$\text{gr } \ell = \ell^{-2} \oplus \ell^{-1} \oplus \ell^0 \oplus \ell^1 \oplus \ell^2 \quad \text{onde} \quad \ell^i = \frac{\bar{\ell}^i}{\bar{\ell}^{i+1}}$$

É fácil ver que em $\text{gr}\ell$ está definido um colchete tal que $[\ell^i, \ell^j] \subset \ell^{i+j}$, induzido do colchete em g .

Lembremos a base de g definida em §10 $\{T, B_1, B_2, C_1, C_2, A_1, A_2, R\}$.

Lema 7: Se $R \in \ell$ então $\ell = g$

Demonstração: Como $\dim \ell/\ell_0 = 3$ podemos supor que T, B_1, B_2 pertencem a $\text{gr}\ell$. Também por hipótese se $R \in \text{gr}\ell$. Da estrutura de álgebra de Lie de $\text{gr}\ell$ segue que

$$C_1 = -[R, T]$$

$$A_1 = [R, B_1]$$

$$A_2 = [R, B_2] \quad \text{pertencem a } \text{gr} . \text{ E de}$$

$$C_2 = \frac{1}{2}[A_1, B_1] \quad \text{segue que } C \in \text{gr} . \text{ Logo}$$

$$\text{gr} = \text{gr}g = g \quad \text{de onde } \ell = g.$$

Lema 8: Se $a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 R \in \ell$ onde $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$. Então $\ell = g$.

Demonstração: Pelo lema anterior, basta provar que quando $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$, $R \in h$. Ora considerando $a_1 A_1 + a_2 A_2 \in \text{gr}\ell$, temos que $[B_1, a_1 A_1 + a_2 A_2] = -2a_1 C_2 - a_2 C_1$ e $[B_2, a_1 A_1 + a_2 A_2] = a_1 C_1 - 2a_2 C_2$

daí $C_1, C_2 \in \text{gr}$. De $[C_2, a_1 A_1 + a_2 A_2] = 3a_1 A_2 - 3a_2 A_1$, deduzimos que $A_1, A_2 \in \text{gr}\ell$ portanto $R = -\frac{1}{4}[A_1, A_2]$ pertence a $\text{gr}\ell$.

Portanto. $R \in \ell$ $\square$

Lema 9: Não existem variedades CR homogêneas umbílicas com grupo de automorfismo de dimensão 7 ou 6.

É imediato dos lemas 7 e 8.

Lema 10: Existe uma única subálgebra de Lie transitiva de dimensão 5 de g . É a álgebra de Lie $g^{-2} \oplus g^{-1} \oplus g^0$.

Demonstração: Supomos uma base da forma:

$$\begin{aligned}\tilde{T} &= T && + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 R \\ \tilde{B}_1 &= B_1 && + \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 R \\ \tilde{B}_2 &= B_2 && + \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \gamma_3 R \\ \tilde{C}_1 &= C_1 && + \delta_1 A_1 + \delta_2 A_2 + \delta_3 R \\ \tilde{C}_2 &= C_2 && + \epsilon_1 A_1 + \epsilon_2 A_2 + \epsilon_3 R\end{aligned}$$

e impomos que a álgebra gerada seja fechada por colchetes.

Do colchete $[\tilde{B}_1, \tilde{C}_2]$ deduzimos as seguintes relações:

$$(1) \quad \gamma_1 = -\frac{7}{2} \delta_2^2$$

$$(2) \quad \gamma_2 = \frac{7}{2} \delta_2 \delta_1 + \frac{\delta_3}{2}$$

$$(3) \quad \gamma_3 = -\delta_1 \delta_3 - 10\delta_2^3 - 10\delta_2 \delta_1^2$$

de $[\tilde{B}_2, \tilde{C}_1]$ vem

$$(4) \quad \gamma_1 = \frac{\delta_1^2 - 6\delta_2^2}{2}$$

$$(5) \quad \gamma_2 = \frac{7\delta_1\delta_2 + \delta_3}{2}$$

$$(6) \quad 3\gamma_3 = -\delta_1\delta_3 - 24(\delta_2^3 + \delta_1^2\delta_2)$$

de (1) e (4) vem $\delta_1 = \delta_2 = 0$ e então $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$

de $[\tilde{B}_1, \tilde{C}_1]$ vem

$$(7) \quad \beta_1 = \frac{\delta_3 - 7\delta_2\delta_1}{2}$$

$$(8) \quad \beta_2 = \frac{-\delta_2^2 + 6\delta_1^2}{2}$$

$$(9) \quad 3\beta_3 = \delta_2\delta_3 - 24\delta_1(\delta_2^2 + \delta_1^2) \quad \text{e então} \quad \beta_2 = \beta_3 = 0$$

de $[\tilde{C}_1, \tilde{C}_2]$ vem

$$(10) \quad \varepsilon_1 = 3\delta_2$$

$$(11) \quad \varepsilon_2 = -3\delta_1$$

$$(12) \quad \varepsilon_3 = 6(\delta_2^2 + \delta_1^2) \quad \text{daí} \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$$

de $[\tilde{T}, \tilde{C}_1]$ vem que $\delta_3 = 0$ usando as relações anteriores e de $[\tilde{B}_1, \tilde{B}_2]$ vem finalmente que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ usando as relações anteriores. Portanto a única possibilidade para uma subálgebra de Lie de dimensão 5 é a gerada por $\{\tilde{T}, \tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2\}$.

□

Consideremos agora as subálgebras de Lie de $\mathfrak{g}$ com dimensão quatro. $\mathfrak{g}$ é gerado então por 4 elementos $\tilde{T}, \tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \tilde{C} = x\tilde{C}_1 + y\tilde{C}_2$ onde $x^2 + y^2 \neq 0$ que denotaremos sem os tils ($\sim$) para facilitar.

Temos os seguintes colchetes:

$$[T, B_1] = a_1 T + a_2 B_1 + a_3 B_2 + a_4 C$$

$$[T, B_2] = b_1 T + b_2 B_1 + b_3 B_2 + b_4 C$$

$$[T, C] = -2xT + c_1 B_1 + c_2 B_2 + c_3 C$$

$$[B_1, B_2] = 4T + d_1 B_1 + d_2 B_2 + d_3 C$$

$$[B_1, C] = -xB_1 - 3yB_2 + eC$$

$$[B_2, C] = -xB_2 + 3yB_1 + fC$$

Observe que podemos fazer uma mudança de base de modo que $[B_1, C] = -xB_1 - 3yB_2$

$$[B_2, C] = -xB_2 + 3yB_1 \quad \text{pois}$$

$$\text{a equação } -x(B_1 + \alpha C) - 3y(B_2 + \beta C) = -xB_1 - 3yB_2 + eC$$

$$-x(B_2 + \beta C) + 3y(B_1 + \alpha C) = -xB_2 + 3yB_1 + fC$$

tem solução.

$$\text{Podemos fazer também a mudança } T' = T + \frac{d_1}{4} B_1 + \frac{d_2}{4} B_2 + \frac{d_3}{4} C,$$

Os colchetes ficam então:

$$[T, B_1] = a_1 T + a_2 B_1 + a_3 B_2 + a_4 C$$

$$[T, B_2] = b_1 T + b_2 B_1 + b_3 B_2 + b_4 C$$

$$[T, C] = -2xT + c_1 B_1 + c_2 B_2 + c_3 C$$

$$[B_1, B_2] = 4T$$

$$[B_1, C] = -xB_1 - 3yB_2$$

$$[B_2, C] = -xB_2 + 3yB_1$$

Impondo as identidades de Jacobi vamos determinar as possíveis álgebras de Lie. Definiremos $J(A_1, A_2, A_3) = [A_1, [A_2, A_3]] + [A_3, [A_1, A_2]] + [A_2, [A_3, A_1]]$.

De $J(C_1, B_1, B_2) = 0$ obtemos as relações $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Usaremos estas relações para obter as próximas:

De $J(T, C, B_1) = 0$ vem as relações:

$$xa_1 + 3yb_1 = 0 \quad (1)$$

$$xa_4 + yb_4 = 0 \quad (2)$$

$$2xa_2 + 3yb_2 + 3ya_3 = 0$$

$$2xa_3 + 3yb_3 - 3ya_2 = 0$$

De $J(T, C, B_2) = 0$ vem as relações:

$$xb_1 - 3ya_1 = 0 \quad (1')$$

$$xb_4 - ya_4 = 0 \quad (2')$$

$$2xb_2 - 3ya_2 + 3yb_3 = 0$$

$$2xb_3 - 3ya_3 - 3yb_2 = 0 \quad \text{e finalmente}$$

de $J(T, B_1, B_2) = 0$ obtemos

$$a_2 = -b_3$$

$$b_1a_4 - a_1b_4 = 0$$

$$-a_1b_2 + 3ya_4 + b_1a_2 + xb_4 = 0$$

$$-a_1b_3 - xa_4 + b_1a_3 + 3yb_4 = 0$$

De (1) e (1') obtemos que $b_1 = a_1 = 0$

de (2) e (2') obtemos que $b_4 = a_4 = 0$

Observe então que B_1, B_2, T geram um ideal de dimensão 3 de ℓ , qualquer que seja a subálgebra de Lie própria transitiva de g .

Obtemos ainda as seguintes relações:

$$2xa_2 + 3yb_2 + 3ya_3 = 0$$

$$2xa_3 - 6ya_2 = 0$$

$$2xb_2 - 6ya_2 = 0$$

Dividiremos a análise em três casos:

1) $y = 0$

$$\text{Daí } a_2 = a_3 = b_2 = 0$$

2) $x = 0$

Então $a_2 = 0$ e $b_2 = -a_3$. Portanto temos três casos um deles que denotaremos por b) $a_2 = 0 = b_2 = a_3$. Se

$b_2 \neq 0$, por uma mudança de base $B_1 := |b_2|^{-1} B_1$

$B_2 := |b_2|^{-1} B_2$ obtemos dois subcasos a) $a_2 = 0$,

$b_2 = -a_3 = 1$ e c) $a_2 = 0$, $b_2 = -a_3 = -1$.

3) $x \neq 0$, $y \neq 0$

Neste caso novamente $a_2 = b_2 = a_3 = 0$.

Resumiremos os resultados obtidos para as subálgebras de dimensão quatro no:

Lema 11: As possíveis subálgebras de Lie ℓ transitivas de dimensão 4 são tais que existe uma base $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \tilde{T}$ e $\tilde{C}$ (que denotaremos sem os tils) satisfazendo:

	(1)	(2)			(3)
		(a)	(b)	(c)	
$[B_1, B_2] =$	$4T$	$4T$	$4T$	$4T$	$4T$
$[T, B_1] =$	0	B_2	0	$-B_2$	0
$[T, B_2] =$	0	$-B_1$	0	B_1	0
$[T, C] =$	$-2T$	0	0	0	$-2T$
$[B_1, C] =$	$-B_1$	$-3B_2$	$-3B_2$	$-3B_2$	$-B_1 - 3yB_2$
$[B_2, C] =$	$-B_2$	$3B_1$	$3B_1$	$3B_1$	$-B_2 + 3yB_1$

Simplificaremos consideravelmente a análise com o próximo:

Lema 12: Seja M uma variedade homogênea com um grupo de Lie L cuja álgebra de Lie é ℓ . Seja $i < \ell$ um ideal transitivo de ℓ . Então o subgrupo de Lie K de L que tem álgebra de Lie i , é transitivo em M . Isto é, M é homogêneo por K .

Demonstração: Seja $\Theta: L \times M \rightarrow M$ a ação de L em M . Definimos $\Theta_p: L \rightarrow M$ por $\Theta_p(g) = \Theta(g, p)$ e $\Theta_g(p) = \Theta(g, p)$. Considere a distribuição sobre M gerada pelos campos $A^*(p) = \Theta_{p*}(A)$.

É fácil ver que $\Theta_{g*}(A^*) = (\text{Ad}_g A)^*$. Como i é um ideal transitivo, $\text{Ad}_L i = i$, então $\Theta_{g*}(i^*) = i^*$ para todo $g \in L$ e concluimos que i^* tem posto constante em todo ponto de M . Resta mostrar que o grupo K gerado por i tem como órbita a variedade integral maximal de i^* . Fixemos $p \in M$ e seja $I(p)$ a órbita passando por p . Provaremos que $T_x I(p) = i^*(x)$, o que termina a demonstração. Observe que $T_x I(p) = (\Theta_h)_* T_p(I(p))$ onde $x = hp$

$$\begin{aligned}
 &= \Theta_{h*} \Theta_{p*}(i) \\
 &= \frac{d}{dt} (h \exp t i h^{-1})(hp) = (\text{Ad}_h i)^*(x) = i^*(x)
 \end{aligned}$$

□

Como consequência deste lema, se duas variedades simplesmente conexas CR homogêneas umbílicas tem ideais transitivos de dimensão três isomorfos CR então existe um difeomorfismo de Cauchy-Riemann entre elas.

Observamos então que alguns dos ideais transitivos das possíveis subálgebras de Lie de dimensão 4 já apareceram anteriormente. Em particular os ideais transitivos de tipos (1), (2) b, (3) são os mesmos que os ideais transitivos da quádrlica em C^2 .

O ideal da subálgebra de Lie (2) a é a álgebra de Lie compacta $SU(2)$, portanto o grupo de automorfismos correspondente é compacto e sua órbita em S^3 é compacta. Mas isto implica que a órbita coincide com S^3 . Portanto a álgebra (2) a gera S^3 .

A única subálgebra de Lie de dimensão 4 que é álgebra de Lie de grupo de automorfismos de uma variedade CR é a do caso (2) c. Ela pode ser realizada pela base

$$\tilde{T} = T - \frac{C_2}{4} - \frac{R}{16}$$

$$\tilde{B}_1 = B_1 - \frac{A_2}{4}$$

$$\tilde{B}_2 = B_2 + \frac{A_1}{4}$$

$$\tilde{C} = C_2$$

Portanto, existe uma única variedade CR homogênea umbílica, simplesmente conexa, que tem como grupo de automorfismos um grupo de Lie de dimensão 4.

Lema 13: A quádrlica projetiva menos sua intersecção com um plano complexo é uma variedade CR homogênea com grupo de automorfismos de dimensão 4.

Demonstração: Observamos que a álgebra de Lie de dimensão 4 tomada como subálgebra de Lie da álgebra de Lie do grupo de automorfismos da quádrlica gera uma distribuição através dos campos fundamentais $A^*(p) = \Theta_{p*}(A)$. Por um argumento contido no lema 12, a variedade

de homogênea gerada pela subálgebra de Lie $\tilde{e}$ justamente a variedade formada pelos pontos onde o posto da distribuição $\tilde{e}$ é três.

Tomamos então a base da subálgebra:

$$\tilde{T} = T - \frac{R}{16} - \frac{C_2}{4} = \begin{bmatrix} -\frac{i}{4} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{i}{2} & 0 \\ -\frac{1}{16} & 0 & -\frac{i}{4} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_1 = B_1 - \frac{A_2}{4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2i \\ 0 & -\frac{i}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_2 = B_2 + \frac{A_1}{4} = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ -\frac{i}{2} & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = C_2 = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ um elemento da}$$

subálgebra.

Sendo a ação $\Theta: G \times M \rightarrow M$ definida por

$$\Theta(g(s, z, w)) = (s, z, w)g^{-1} \text{ como no } \S 2.$$

Em coordenadas não homogêneas $(1, z_1, z_2)$ obtemos para os campos fundamentais:

$$\begin{aligned} A^*(z_1, z_2) &= [a_{12} + a_{22}z_1 + a_{32}z_2 - z_1(a_{11} + a_{21}z_1 + a_{31}z_2)] \frac{\partial}{\partial z_1} + \\ &+ [a_{13} + a_{23}z_1 + a_{33}z_2 - z_2(a_{11} + a_{21}z_1 + a_{31}z_2)] \frac{\partial}{\partial z_2}. \end{aligned}$$

Verificaremos o posto da distribuição gerada pelo ideal tridimensional transitivo.

$$\tilde{T}^* = \left(\frac{3}{4}iz_1 + \frac{z_1z_2}{16} \right) \frac{\partial}{\partial z_1} + \left(1 + \frac{z_2^2}{16} \right) \frac{\partial}{\partial z_2}$$

$$\tilde{B}_1^* = \left(1 - \frac{i}{4}z_2 - \frac{z_1^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial z_1} + \left(2iz_1 - \frac{z_1z_2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial z_2}$$

$$\tilde{B}_2^* = \left(i + \frac{z_2}{4} + \frac{iz_1^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial z_1} + \left(2z_1 + i \frac{z_1z_2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial z_2}$$

Um cálculo de determinantes mostra que o posto não é três apenas na intersecção da quádrlica real com o plano complexo $z_2 = 4i$. Isto é, na circunferência $|z_1| = 2$ $z_2 = 4i$ (Lembrando que em coordenadas não homogêneas $|z_1|^2 = \text{Im}z_2$).

Mostra-se por um cálculo análogo, tomando-se as coordenadas não homogêneas complementares que no "ponto do infinito" o posto é três.

□

Já temos as variedades CR homogêneas umbílicas com grupos de automorfismos de dimensão 8, 5 e 4. Resta

então achar as variedades com grupo de automorfismos de dimensão 3. Vamos utilizar um argumento semelhante ao do §8.

Admitimos que M tenha um grupo de automorfismos transitivo de dimensão 3. Usamos o argumento da parte b do teorema 3 para concluir que existe uma base de campos adaptada $\{Z_1, \bar{Z}_1, Z_0\}$ num aberto de M que são invariantes pelo grupo de automorfismos. Isto implica que

$$[Z_1, \bar{Z}_1] = iZ_0$$

e $Z_1, \bar{Z}_1, Z_0 = AZ_1 + \bar{B}\bar{Z}_1 + CZ_0$ com $A, \bar{B}$ e C constantes. Como $R \equiv 0$ devemos ter as relações:

$$\begin{cases} A\bar{C} - BC = 0 \\ A + \bar{A} = 0 \\ -3 \frac{A\bar{B}}{2} + i \frac{AC^2}{3} = 0 \end{cases} \quad (\text{cf. §8})$$

Destas relações e por meio de mudanças de base da forma

$$\tilde{Z}_1 = re^{i\theta} Z_1$$

$$\tilde{\bar{Z}}_1 = re^{-i\theta} \bar{Z}_1$$

$$\tilde{Z}_0 = r^2 Z_0 \quad \text{demonstramos o seguinte teorema:}$$

Teorema 6: Seja M uma variedade CR homogênea umbílica, então o seu grupo de automorfismos contém

um subgrupo de Lie de dimensão 3 transitivo
cuja álgebra de Lie complexificada é uma das
seguintes:

$$(1) \quad [Z_1, Z_{\bar{1}}] = iZ_0$$

$$[Z_1, Z_0] = -iZ_1$$

$$(2) \quad [Z_1, Z_{\bar{1}}] = iZ_0$$

$$[Z_1, Z_0] = 0$$

$$(3) \quad [Z_1, Z_{\bar{1}}] = iZ_0$$

$$[Z_1, Z_0] = iZ_1$$

$$(4) \quad [Z_1, Z_{\bar{1}}] = iZ_0$$

$$[Z_1, Z_0] = Z_0$$

$$(5) \quad [Z_1, Z_{\bar{1}}] = iZ_0$$

$$[Z_1, Z_0] = -\frac{2}{9} iZ_1 + \frac{2}{9} iZ_{\bar{1}} + Z_0$$

$$(6) \quad [Z_1, Z_{\bar{1}}] = iZ_0$$

$$[Z_1, Z_0] = Z_{\bar{1}}$$

Basta observar que já tínhamos demonstrado nos lemas anteriores que toda variedade CR homogênea cujo grupo de automorfismos é de dimensão 8, 5 ou 4 possui um subgrupo de Lie transitivo de dimensão três.

Observe que é possível ainda que duas álgebras

de Lie das acima, apesar de não serem isomorfas CR, gerem dois subgrupos transitivos distintos sobre uma mesma variedade CR. Portanto nossa análise não termina aqui.

Primeiramente obteremos as álgebras de Lie reais associadas as álgebras complexificadas do teorema 6 fazendo

$$A_1 = Z_1 + Z_{\bar{1}}$$

$$A_2 = i(Z_1 - Z_{\bar{1}})$$

$$A_3 = Z_0$$

$$(1) [A_1, A_2] = 2A_3$$

$$[A_1, A_3] = -A_2$$

$$[A_1, A_3] = A_1$$

$$(2) [A_1, A_2] = 2A_3$$

$$[A_1, A_3] = 0$$

$$[A_2, A_3] = 0$$

$$(3) [A_1, A_2] = 2A_3$$

$$[A_1, A_3] = A_2$$

$$[A_2, A_3] = -A_1$$

$$(4) [A_1, A_2] = 2A_3$$

$$[A_1, A_3] = 2A_3$$

$$[A_2, A_3] = 0$$

$$(5) \quad [A_1, A_2] = 2A_3$$

$$[A_1, A_3] = 2A_3 - \frac{4}{5} A_2$$

$$[A_1, A_3] = 0$$

$$(6) \quad [A_1, A_2] = 2A_3$$

$$[A_1, A_3] = A_1$$

$$[A_2, A_3] = -A_2$$

A álgebra de Lie do tipo (1) é a mesma álgebra de Lie compacta já obtida portanto a variedade CR homogênea simplesmente conexa associada é S^3 .

A álgebra de Lie (2) é a mesma que o ideal transitivo da quádrica em C^2 , portanto a variedade homogênea simplesmente conexa que tem um grupo transitivo com álgebra de Lie (2) é equivalente a quádrica.

A álgebra de Lie (3) é a mesma que o ideal transitivo da álgebra de Lie transitiva de dimensão 4. Portanto a variedade homogênea simplesmente conexa transitiva por (3) é equivalente ao recobrimento da variedade obtida no lema 13.

Verificaremos agora que a álgebra de Lie (4) é na realidade uma subálgebra de Lie transitiva da álgebra de Lie de dimensão 4.

Acharemos em primeiro lugar quais são as subálgebras de Lie transitivas da álgebra de dimensão 4.

Suporemos então $\tilde{T} = \tilde{T} + b_3 \tilde{C}$

$$\bar{B}_1 = \tilde{B}_1 + b_1 \tilde{C}$$

$$\bar{B}_2 = \tilde{B}_2 + b_2 \tilde{C}$$

então: $[\tilde{T}, \bar{B}_1] = [\tilde{T} + b_3 \tilde{C}, \tilde{B}_1 + b_1 \tilde{C}] = -\tilde{B}_2 + 3b_3 \tilde{B}_2 = -\bar{B}_2 + 3b_3 \bar{B}_2$

$$[\tilde{T}, \bar{B}_2] = [\tilde{T} + b_3 \tilde{C}, \tilde{B}_2 + b_2 \tilde{C}] = \tilde{B}_1 - 3b_3 \tilde{B}_1 = (1 - 3b_3) \bar{B}_1$$

$$[\bar{B}_1, \bar{B}_2] = [\tilde{B}_1 + b_1 \tilde{C}, \tilde{B}_2 + b_2 \tilde{C}] = 4\tilde{T} - 3b_2 \tilde{B}_2 - 3b_1 \tilde{B}_1 = 4\tilde{T} - 3b_2 \bar{B}_2 - 3b_1 \bar{B}_1$$

daí vem as seguintes relações:

$$(1 - 3b_3) b_2 = 0$$

$$(1 - 3b_3) b_1 = 0$$

$$4b_3 - 3b_2^2 - 3b_1^2 = 0$$

temos 2 casos:

a) $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ que corresponde ao ideal transitivo

b) $b_3 = \frac{1}{3}$, $b_2^2 + b_1^2 = \frac{4}{9}$

neste caso $[\bar{B}_1, \bar{B}_2] = 4\tilde{T} - 3b_2 \bar{B}_2 - 3b_1 \bar{B}_1$

$$[\tilde{T}, \bar{B}_1] = 0$$

$$[\tilde{T}, \bar{B}_2] = 0$$

que pela mudança de base $\bar{T} = \tilde{T} - \frac{3}{4} b_2 \bar{B}_2 - \frac{3}{4} b_1 \bar{B}_1$ fica:

$$[\bar{B}_1, \bar{B}_2] = 4\bar{T}$$

$$[\bar{T}, \bar{B}_1] = 3b_2 \bar{T}$$

$$[\bar{T}, \bar{B}_2] = -3b_1 \bar{T}$$

É fácil ver então que a álgebra de Lie de tipo (4) é uma subálgebra de Lie da álgebra de Lie de dimensão 4 (por uma mudança de base conveniente). Uma realização desta subálgebra é :

$$(*) \quad \begin{cases} \bar{T} = T - \frac{R}{16} + \frac{C_2}{12} \\ \bar{B}_1 = B_1 - \frac{A_2}{4} \\ \bar{B}_2 = B_2 + \frac{A}{4} + \frac{2}{3} C_2 \end{cases}$$

Lema 14: A subálgebra de Lie de tipo (4) gera um grupo transitivo sobre a mesma variedade CR homogênea do lema 13 (grupo de automorfismos de dimensão 4).

Demonstração: Tomemos a subálgebra de Lie (*) e usando a mesma técnica do lema 13, verificamos que a distribuição gerada pelos campos fundamentais tem posto menor que três nos mesmos pontos que a distribuição gerada pela álgebra quadridimensional

□

Verificamos também por um cálculo análogo ao feito antes do lema anterior que as álgebras de Lie de tipo (5) e (6) não são subálgebras de Lie transitivas da álgebra de Lie da quádrlica real. Resumiremos os resultados obtidos no próximo:

Teorema 7: Seja M uma variedade CR homogênea umbilica simplesmente conexa. Então M é uma das seguintes:

- (1) A esfera S^3 com grupo de automorfismos $G = \frac{SU(2,1)}{\text{Centro}}$ de dimensão 8.
- (2) A quádrlica em C^2 com grupo de automorfismos H de dimensão 5.
- (3) O recobrimento universal da esfera menos sua interseção com um plano complexo com grupo de automorfismos de dimensão 4 (lema 13).
- (4) O grupo cuja álgebra de Lie é (5) e Δ gerado por A_1 e A_2 com $JA_1 = A_2$ que é difeomorfo CR a hipersuperfície $\frac{y-\bar{y}}{2i} = \left(\frac{x-\bar{x}}{2i}\right)^2, \frac{x-\bar{x}}{2i} > 0$.

O seu grupo de automorfismos é dado pela mesma álgebra de Lie (5) de dimensão 3.

- (5) O grupo cuja álgebra de Lie é (6) e Δ gerado por A_1 e A_2 com $JA_1 = A_2$. O seu grupo de automorfismos é dado pela mesma álgebra de Lie (6) de dimensão 3.

A hipersuperfície (4) foi encontrada pela mesma técnica descrita na seção §8. Da álgebra

$$[A_1, A_2] = 2A_3$$

$$[A_1, A_3] = 2A_3 - \frac{4}{9} A_2$$

$$[A_2, A_3] = 0$$

$$\text{obtemos } i(A_1) = 2u_2 \frac{\partial}{\partial u_3} + 2u_3 \frac{\partial}{\partial u_3} - \frac{4}{9} u_3 \frac{\partial}{\partial u_2}$$

$$i(A_2) = -2u_1 \frac{\partial}{\partial u_3}$$

$$i(A_3) = -2u_1 \frac{\partial}{\partial u_3} + \frac{4}{9} u_1 \frac{\partial}{\partial u_2}$$

a distribuição é gerada por $(2(u_2+u_3)a-2bu_1-2cu_1) \cdot \frac{\partial}{\partial u_3} + (-\frac{4}{9} au_3 + c \frac{4}{9} u_1) \frac{\partial}{\partial u_2}$. Obtemos então fazendo $a=1$ e impondo que $(1,i,0)$ pertença à órbita:

$$u_3' = 2(u_2 + u_3) - 2(b+c)$$

$$u_2' = -\frac{4}{9} u_3 + c \frac{4}{9}$$

resolvendo o sistema obtemos a hipersuperfície

$$-u_2 + \bar{u}_2 - \frac{u_3 + \bar{u}_3}{3} = (u_2 + \bar{u}_2 + \frac{2}{3}(u_3 + \bar{u}_3))^{1/2} \quad u_2 + \bar{u}_2 + \frac{2}{3}(u_3 + \bar{u}_3) > 0$$

que é biholomorfa a

$$\frac{y - \bar{y}}{2i} = \left(\frac{x - \bar{x}}{2i} \right)^2, \quad \frac{x - \bar{x}}{2i} > 0$$

§12. Uma aplicação

Nesta seção calculamos o grupo das transformações biholomorfas do interior da esfera S^3 em $\mathbb{C}^2$.

Enunciaremos então os dois teoremas fundamentais que nos permitirão transformar o problema de procurar os automorfismos do domínio no problema de procurar os auto-

morfismos CR do seu bordo, problema que já foi resolvido na seção §10.

Teorema da extensão de Bochner [1]: Sejam D e D' domínios em $\mathbb{C}^n$ com bordos suaves ∂D e $\partial D'$ respectivamente. Se $f: \partial D \rightarrow \partial D'$ é um difeomorfismo CR então f se estende a uma transformação biholomorfa $f^*: D \rightarrow D'$.

Teorema da extensão de Fefferman [6]: Sejam D e D' domínios limitados com bordos suaves fortemente pseudoconvexos. Se $f: D \rightarrow D'$ é uma transformação biholomorfa então f se estende a uma função contínua $f^*: \bar{D} \rightarrow \bar{D}'$ tal que $f^*|_{\partial D} : \partial D \rightarrow \partial D'$ é um difeomorfismo de Cauchy-Riemann.

Podemos então enunciar o:

Teorema 8: O grupo de transformações biholomorfas do interior da esfera S^3 é isomorfo ao grupo dos automorfismos de Cauchy-Riemann de S^3 . Isto é, $\frac{SU(2,1)}{\text{centro}}$.

BIBLIOGRAFIA:

- [1] S. Bochner. Analytic and meromorphic continuation by means of Green's formula. Ann. of Math. 44, (1943), 652-673.
- [2] Boutet de Monvel. Intégration des équations de Cauchy-Riemann induites. Séminaire Goulaouic-Schwartz, 1974-1975, Exposé IX.
- [3] D. Burns and S. Shnider. Real hypersurfaces in complex manifolds. Proc. of Symp. Pure Math. 30 (1977), 141-168.
- [4] E. Cartan. Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de deux variables complexes I, II. Oeuvres II, 2, 1231-1304. Oeuvres III, 2, 1217-1238.
- [5] S.S. Chern and J. Moser. Real hypersurfaces in complex manifolds. Acta Math. 133 (1974) 219-271.
- [6] C. Fefferman. The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains. Invent. Math. 26 (1974), 1-65.
- [7] H. Goldschmidt. Integrability criteria for systems of non-linear partial differential equations. Jour. of Diff. Geometry, (1967), 269-307.

- [8] R.C. Gunning and H. Rossi. Analytic functions of several complex variables. Prentice Hall (1965).
- [9] H. Jacobowitz and F. Treves. Nonrealizable CR structures. Invent. Math. 66 (1982), nº 2, 231-249.
- [10] S. Kobayashi and K. Nomizu. Foundations of differential Geometry, Vol. II. (1969). Interscience Publishers.
- [11] M. Kuranishi. Lectures on involutive systems of partial differential equations. Publ. Soc. Mat. São Paulo (1967).
- [12] M. Kuranishi. Strongly pseudoconvex CR structures over small balls. I,II. Ann. of Math (2) 115 (1982), 451-500; 116 (1982), 1-64.
- [13] S. Namur, Teoria geométrica dos S.E.D.P. tese. IME (1984).
- [14] R. Narasimhan. Several complex variables. Chicago Lectures in Mathematics (1971).
- [15] A. Newlander and L. Nirenberg. Complex analytic coordinates in almost complex manifolds. Ann. of Math. 65(1957), 391-404.
- [16] M. Paluzny e A. Rodrigues. Automorfismos de G-estruturas de tipo finito. A aparecer.

A. Nijenhuis - W.B. Woolf. Some integration problems in almost-complex manifolds. Annals of Math., 77 (1963) 424-483.

- [17] H. Poincaré. Les fonctions analytiques de deux variables et la representation conforme. Rend. Circ. Mat. Palermo (1907), 185-220.
- [18] W. Rudin. Real and Complex Analysis. McGraw-Hill (1974).
- [19] N. Tanaka. On the pseudo-conformal geometry of hypersurfaces of the space of n complex variables. J. Math. Soc. Japan 14 (1962), 397-429.
- [20] R.O. Wells, Jr. The Cauchy-Riemann equations and differential geometry. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 6 (1982), 187-199.

A. F. Wilson - A. W. Jones. Some new conformal mappings for complex manifolds. I, II, Indagat. Math. (2) (1986), 519-531