**Métodos de pontos fixos e soluções
periódicas para equações diferenciais
ordinárias não lineares**

David Armando Zavaleta Villanueva

**TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
CIÊNCIAS**

**Área de Concentração: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Luciano Barbanti**

**- Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro
da CAPES-**

São Paulo, 16 de novembro de 2006.

Métodos de Pontos Fixos em Espaços de Banach e Soluções Periódicas para Sistemas de Evolução

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida
e defendida por David Zavaleta Villanueva
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 16 de novembro de 2006.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Luciano Barbanti (Presidente) - IME-USP
- Prof. Dr. Pedro Aladar Tonelli - IME-USP
- Prof. Dr. José Manoel Balthazar - UNESP
- Prof. Dra. Márcia Cristina Anderson Braz Federson - ICMC-USP
- Prof. Dr. Gonzalo Astorga Tapia - ICEB - UFOP

“ A essência da matemática
está na sua liberdade” .

G.Cantor

*Aos meus Pais,
Migdonio Zavaleta e
Maria Villanueva de Zavaleta,
à minha esposa Kelli,
e aos meus filhos,
Matheus e Anastacya.*

Agradecimentos

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Ao meu orientador, prof. Dr. Luciano Barbanti, pelo excelente trabalho de orientação.

Aos professores da banca examinadora, pelas sugestões apresentadas, as quais contribuíram para a redação final desta tese.

Aos meus pais que desde longe torceram pelo meu sucesso.

Aos meus colegas do IME.

Ao IME-USP, pelo acolhimento e infra-estrutura disponibilizados.

A todos os professores do IME com os quais tive a oportunidade de estudar, por contribuírem diretamente para o sucesso alcançado.

Aos funcionários da secretaria de pós-graduação do IME, Sebastião F. Pinho Souza, Rosemary Colombo Lima e Alessandra F. Bernardo da Silva, pela dedicação no atendimento.

Aos funcionários da biblioteca do IME.

Resumo

O objetivo deste trabalho é fornecer condições sobre uma função f na EDO não linear $\dot{x} = A(t)x + f(t, x)$ para que um certo operador $\mathcal{M}_f$ tenha ponto fixo, garantindo assim a existência de soluções periódicas da equação. Os métodos utilizados remetem à teoria do grau topológico e teoremas de ponto fixo.

Abstract

The main purpose of this work is to furnish conditions about a function f in the nonlinear ODE $\dot{x} = A(t)x + f(t, x)$ for which an operator $\mathcal{M}_f$, has fixed points assuring the existence of periodic solutions. The methods that we dealt with are the topological degree and fixed points theorems.

Índice

Introdução	1
1 Teoria do Grau Topológico e α-Contrações	5
1.1 Introdução	5
1.2 O Grau de Brouwer	6
1.3 O Grau de Leray-Schauder	8
1.4 α -Contração	13
2 Soluções Periódicas para EDOs não Lineares e Pontos fixos de Operadores Associados à EDOs	17
2.1 Introdução	17
2.2 Preliminares	18
2.3 Operadores Projeção	19
2.4 Sistema Periódico não Homogêneo	20
2.5 O Operador $\mathbb{K}$	24
2.6 Teorema Principal	25
2.7 Casos Particulares do Sistema (2.1)	26

2.8	Primeiros Resultados	27
2.9	Exemplos	29
2.10	Compacidade de $\mathcal{M}_f$	32
3	Condições sobre a Função f do Problema (2.1) para a Existência de Soluções Periódicas através de Pontos Fixos	35
3.1	Introdução	35
3.2	Condições sobre f em (2.1) para termos ponto fixo em $\mathcal{M}_f$	36
3.3	Uma Aplicação do Teorema de Ponto Fixo de Schauder-Tychonov	39
3.4	Equação não Resonante	41
3.5	Solução Periódica e Grau de Leray Schauder	42
3.6	Solução Periódica e Ponto Fixo de Fan-Browder	47
3.7	Soluções periódicas e α -Contração	49
3.8	Unificação dos teoremas de Banach e Schauder	50
4	Soluções Periódicas das Equações de Lienard e Hill	53
4.1	Equação de Lienard	53
4.2	Equação de Van der Pol	58
4.3	Equação de Hill	59
	Referências Bibliográficas	63

Introdução

“O cientista não estuda a natureza porque é útil, senão porque o cativa, e o cativa porque é bela. Se a natureza não fosse formosa, não valeria a pena conhecê-la, se não valesse a pena conhecê-la, não valeria a pena viver. Claro, não me refiro aqui à beleza que estimula os sentidos, a das qualidades e aparências; não é que a desdenhe, em absoluto, senão que esta nada tem a ver com a ciência. Me refiro à beleza mais profunda, a que procede da ordem harmoniosa das partes e que pode captar uma inteligência pura.”

Henri Poincaré.

Os problemas de fronteira de equações diferenciais foram e são instrumentos de importância no desenvolvimento de várias áreas da matemática e aplicação nas ciências naturais.

No século *XIX*, Henri Poincaré, nas suas pesquisas de perturbações de soluções periódicas para equações diferenciais não lineares [26], fez profundas descobertas na teoria qualitativa das equações diferenciais donde emergiram a teoria moderna de sistemas dinâmicos, a topologia diferencial, etc.

Os problemas de fronteira para equações diferenciais ordinárias e parciais também serviram de motivação para os trabalhos de Kellog, Schauder, Leray, Cacciopoli, Krasnoselskii, Rothe e outros propiciaram a criação de vários ramos da análises funcional não

linear como os métodos variacionais, a teoria dos operadores monótonos, a teoria de grau topológico, etc.

A existência de soluções periódicas de equações diferenciais não lineares pode ser remetida ao estudo de pontos fixos de um operador completamente contínuo $\mathcal{M}_f$ construído a partir da equação. Isto pode ser visto em N. Rouche, J. Mawhin [28], J. Hale [13] e por L. Cesari [7], e consiste essencialmente em:

Seja a EDO no $\mathbb{R}^n$

$$(H) \quad \dot{x} = A(t)x$$

e sua adjunta

$$(Adj) \quad \dot{y} = -A^t(t)y$$

com $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$ suas respectivas projeções no espaço das soluções periódicas.

Supondo A em (H), periódica e $f : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, uma função contínua e T -periódica na primeira variável, temos que em:

$$(NL) \quad \dot{x} = A(t)x + f(t, x)$$

f define um operador $\mathcal{M}_f$ cujos pontos fixos são soluções periódicas do (NL).

Uma recíproca nesta teoria consiste no problema:

- Sejam (H) com A T -periódica e $\mathbb{T}$ um operador sobre as funções contínuas e T -periódicas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$, com ponto fixo
- Classificar as $f : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ que permitem decompor $\mathbb{T}$ na forma

$$\mathbb{T} = \mathbb{P} + \mathbb{Q}\mathcal{F} + \mathbb{K}(I - \mathbb{Q})\mathcal{F},$$

onde $\mathbb{K} \in \text{Ker}\mathbb{P}$ e $\mathcal{F}$ é o operador de superposição (ou Niemitskii) de f .

Mantendo em vista a solução deste problema, o presente trabalho estabelece, através de técnicas em teoria de grau topológico e pontos fixos, algumas condições sobre f para que o $\mathcal{M}_f$ correspondente tenha pontos fixos, e portanto (NL) tenha soluções periódicas.

No capítulo 1, estudamos a teoria de ponto fixo e a teoria de grau topológico, começando com algumas considerações básicas e explicando como esta teoria é usada no estudo das equações diferenciais ordinárias não lineares. Primeiramente, é tratado o caso de dimensão finita (grau de Brouwer), seguidamente este grau é estendido para operadores compactos

em espaços de Banach (grau de Leray-Schauder).

Algumas aplicações de grau topológico de Brouwer e de Leray-Schauder são dadas. Usando as propriedades destas teorias, provarei o Teorema de ponto fixo de Brouwer para um espaço normado de dimensão finita, o Teorema 1.6 de solução periódica de uma equação diferencial periódica $\dot{x} = f(t, x)$, assim como o teorema de Altman [1].

No final deste capítulo, incluímos uma breve referência à medida de não compacidade de Kuratowskii [17] e aos teoremas de Darbo e Sadovskii que estendem o teorema de ponto fixo de Schauder.

No capítulo 2, veremos um método funcional-analítico utilizado, entre outros, por N. Rouche, J. Mawhin [28], J. Hale [13] e por L. Cesari [7], que mostra a equivalência entre o problema de existência de soluções periódicas de EDO não lineares periódicas e o problema dos pontos fixos de um operador completamente contínuo $\mathcal{M}_f$ construído a partir da equação no espaço das funções periódicas. Em sua obra, [13], J. Hale (cap VIII) afirma que este método tem vantagens qualitativas em relação do clássico de Poincaré. A través de alguns exemplos mostramos como construir os operadores projeção $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$ e o operador $\mathbb{K}$ que decompõem o operador $\mathcal{M}_f$.

No capítulo 3, vamos enunciar e mostrar, usando a teoria desenvolvida nos capítulos 1 e 2 alguns resultados básicos de existência de soluções periódicas em EDO não lineares periódicos.

Deste ponto em diante, pode-se estabelecer condições sobre f para termos soluções periódicas no sistema a partir das condições para existência de pontos fixos de operadores. Por exemplo, no Teorema 3.1 e na Proposição 3.3 damos algumas condições sobre f para que a equação (NL) tenha soluções periódicas.

Como resultados importantes deste capítulo, mencionamos os teoremas de: ponto fixo de Schauder-Tychonov [35], ponto fixo de Fan-Browder [24], uma aplicação de α -contração e um teorema que unifica os teoremas de ponto fixo de Banach e Schauder [15]. Estes teoremas serão adequados para aplicarmos o operador $\mathcal{M}_f$.

No capítulo 4, fazendo uso do operador $\mathcal{M}_f$ construído a partir das equações de Liénard, Van der Pol e de Hill, mostramos que estas equações possuem soluções T-periódicas.

Teoria do Grau Topológico e α -Contrações

Neste capítulo, vamos introduzir o importante conceito de grau topológico tanto para espaços de dimensão finita como para espaços de Banach ou de Hilbert, úteis no estudo das soluções periódicas das equações diferenciais ordinárias não lineares.

Além disso, introduziremos os conceitos de medida de não compacidade, α - contração, aplicações condensativas e enunciaremos alguns fatos referentes a estes conceitos que serão usados nos capítulos seguintes.

A teoria desenvolvida segue Amann [2], Nagumo [21], Cronin [10]. Para uma breve referência histórica sobre teoria de grau, ver Siegborg [34].

1.1 Introdução

Seja E um espaço vetorial normado de dimensão finita e $\Omega \subset E$ aberto e limitado. Queremos associar a toda função $f : \overline{\Omega} \rightarrow E$, $x \mapsto f(x)$ que satisfaz as seguintes condições:

- $f \in C^1(\Omega, E) \cap C(\overline{\Omega}, E)$,
- se $x \in \Omega$ é tal que $f(x) = y$, $y \in E$,
- $f'(x) = Df(x)$ não singular

um inteiro que é o número de soluções de f em $\overline{\Omega}$ e ainda que este número seja invariante

por pequenas mudanças na função f . Mais precisamente,

Chamamos de grau da aplicação f ao número $d(f, \Omega, y) = \sum_{i=1}^n \text{sgn } \det f'(x_i)$, em que $x_1, \dots, x_n$ são as soluções de $f(x) = y$ em Ω , e

$$\text{sgn } \det f'(x_i) = \begin{cases} +1 & \text{se } \det f'(x_i) > 0 \\ -1 & \text{se } \det f'(x_i) < 0, \quad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

1.2 O Grau de Brouwer

A noção de grau topológico no caso de espaços de dimensão finita foi definida por L.E.J. Brouwer em 1912 [4].

Teorema 1.1. *Seja E um espaço vetorial normado de dimensão finita. Então para qualquer aberto limitado $\Omega \subset E$ e qualquer $y \in E$, existe uma aplicação numérica “O grau de Brouwer”*

$$d(\cdot, \Omega, y) : \{f \in C(\overline{\Omega}, E) \mid y \notin f(\partial\Omega)\} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

satisfazendo:

- 1) (Normalização): se $y \in \Omega$ e $f = Id$, então $d(Id, \Omega, y) = 1$
- 2) (Aditividade): Para todo par Ω_1 e Ω_2 de subconjuntos abertos disjuntos de Ω e toda função contínua $f : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ com $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ temos

$$d(f, \Omega, y) = d(f|_{\Omega_1}, \Omega_1, y) + d(f|_{\Omega_2}, \Omega_2, y)$$

- 3) (Continuidade): $d(\cdot, \Omega, y)$ é contínua
- 4) (Invariância por translação): $d(f, \Omega, y) = d(f - y, \Omega, 0)$ qualquer que seja $f : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ contínua e $y \notin f(\partial\Omega)$.
- 5) (Excisão): Para todo subconjunto aberto Ω_1 de Ω e toda função $f \in C(\overline{\Omega}, E)$ com $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$ temos $d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y)$.
- 6) (Existência de solução): Se $d(f, \Omega, y) \neq 0$, então existe um ponto $x \in \Omega$ tal que $f(x) = y$.
- 7) (Dependência dos valores na fronteira): se f e g são funções contínuas de $\overline{\Omega}$ em E tais que $f|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega}$ e $y \notin f(\partial\Omega), y \notin g(\partial\Omega)$, então

$$d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, y)$$

8) (*Invariância por homotopia*): Seja $\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ um intervalo compacto. Então para toda função contínua $h : \overline{\Omega} \times I \rightarrow E$ e toda curva contínua $y(\cdot) : I \rightarrow E$ tal que $y(\lambda) \notin h(\partial\Omega, \lambda)$ qualquer que seja $\lambda \in I$, $d(h(\cdot, \lambda), \Omega, y(\lambda))$ independe de $\lambda \in I$. Assim se $f, g : \Omega \rightarrow E$ são homotópicas, então $d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, y)$ para qualquer valor regular de y .

Observação: Este teorema assegura a existência de solução da equação $f(x) = y$, mas não fornece uma fórmula para calcular o grau $d(f, \Omega, y)$.

Damos o seguinte teorema como exemplo para mostrar como as propriedades acima podem ser usadas.

Teorema 1.2. (Ponto fixo de Brouwer). *Todo subconjunto não vazio, compacto e convexo de um espaço vetorial normado de dimensão finita tem a propriedade de ponto fixo.*

Demonstração: Seja X um espaço vetorial normado, $\dim X < \infty$ e $M \subset X$ compacto convexo, então toda função contínua $f : M \rightarrow M$ tem um ponto fixo.

$f : M \rightarrow M$ admite uma extensão contínua $\tilde{f} : \rho\overline{B} \rightarrow M$, (Teorema de extensão de Dugundji [12]), onde $B := \{x \in M : \|x\| \leq 1\}$ e ρ é tal que ρB contém M .

Se $\tilde{f}$ tem ponto fixo, f também tem.

No caso de existir $x_o \in \partial(\rho B)$ tal que $\tilde{f}(x_o) = x_o$, então não há nada mais a provar.

Suponhamos que $\tilde{f}$ não tenha ponto fixo em $\partial(\rho B)$. Neste caso, o grau $d(I - \tilde{f}, \rho B, 0)$ está bem definido.

Sejam $g : \rho\overline{B} \rightarrow X$ definida por $g(x) = x - \tilde{f}(x)$ e

$h : \rho\overline{B} \times [0, 1] \rightarrow X$ dada por:

$$\begin{aligned} h(x, \lambda) &= \lambda g(x) + (1 - \lambda)x \\ &= x - \lambda \tilde{f}(x). \end{aligned}$$

Claramente, $h(x, \lambda)$ é uma função contínua em $\rho\overline{B} \times [0, 1]$.

Assumimos que existem $x \in \partial(\rho B)$ e $\lambda \in [0, 1]$ tais que $h(x, \lambda) = 0$.

Então

$$0 = |x - \lambda \tilde{f}(x)| \geq |x| - \lambda |\tilde{f}(x)| \geq (1 - \lambda)\rho \geq 0,$$

desde que $\|\tilde{f}(x)\| \leq \rho$ e $|x| = \rho$.

Assim $\lambda = 1$, o que contradiz a suposição de que $x - \tilde{f}(x) \neq 0$ na fronteira $\partial(\rho B)$. Por isso $h(x, \lambda) \neq 0$, para todo $x \in \partial(\rho B)$ e $\lambda \in [0, 1]$.

Pela propriedade 8) temos

$$d(h(\cdot, 1), \rho B, 0) = d(I - \tilde{f}, \rho B, 0) = d(h(\cdot, 0), \rho B, 0) = d(I, \rho B, 0) = 1,$$

donde pela propriedade 6), concluímos que $\exists x \in \rho B$ tal que $\tilde{f}(x) = x$.

■

1.3 O Grau de Leray-Schauder

Algumas conseqüências elementares das propriedades fundamentais do grau de Brouwer são falsas para algumas funções contínuas em espaços de Banach de dimensão infinita, o que mostra que uma extensão para todas as funções contínuas não é possível.

Por exemplo, a conclusão do teorema de ponto fixo de Brouwer não se cumpre num espaço de Hilbert l^2 (dimensão infinita).

De fato, seja

$$\begin{aligned} f: \overline{D} &\rightarrow \overline{D} \\ (x_1, x_2, \dots) &\mapsto \left(\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, \dots \right), \end{aligned}$$

em que $D := \{x = (x_i) \in l^2 : \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \leq 1\}$, uma aplicação contínua que transforma a bola unitária na bola unitária.

Mostremos que $f(x) \in \overline{D}$.

$$\|f(x)\|^2 = \|1 - \|x\|^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots\|^2 = 1.$$

f não tem ponto fixo. De fato, qualquer solução de $x = f(x)$ deve satisfazer as igualdades $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \dots$.

Para um elemento de l^2 , isto é equivalente à equação $x = (0, 0, \dots)$. Mas

$$f(0, 0, \dots) = (1, 0, 0, \dots) \neq (0, 0, \dots).$$

Nosso propósito aqui, seguindo a teoria de J. Leray e J. Schauder [19], é estender o grau de Brouwer para campos de vetores compactos $g = I - f$, em que f é uma aplicação compacta, definida no fecho de subconjuntos abertos e limitados de um espaço vetorial normado arbitrário E .

Definição 1.3. *Seja Ω um subconjunto limitado de um espaço de Banach. Um operador T definido em Ω com valores em E chama-se completamente contínuo em E se:*

- i) T é um operador contínuo em E ,
- ii) para qualquer limitado $\Omega \subset E$, $\overline{T(\Omega)}$, é um compacto no espaço E .

Definição 1.4. $KV(\overline{\Omega}, E) := \{g : \overline{\Omega} \rightarrow E \mid g = I - f \text{ campo vetorial compacto}\}.$

Se f, h são compactos, então $g = I - f$ e $r = I - h$ são campos vetoriais compactos.

$KV(\overline{\Omega}, E)$ é um subconjunto convexo de $C(\overline{\Omega}, E)$. De fato,

$$\begin{aligned} I - ((1 - \lambda)f + \lambda h) &= (\lambda I - (1 - \lambda)I) - ((1 - \lambda)f + \lambda h) \\ &= \lambda(I - h) + (1 - \lambda)(I - f), \end{aligned}$$

é compacto, qualquer que seja $\lambda \in [0, 1]$, isto é, $\lambda r + (1 - \lambda)g \in KV(\overline{\Omega}, E)$ para todo $\lambda \in [0, 1]$.

Teorema 1.5. *Sejam E um espaço vetorial normado e $\Omega \subset E$ aberto e limitado. Então para todo $y \in E$, existe uma aplicação numérica “O grau de Leray-Schauder”*

$$d(\cdot, \Omega, y) : \{g \in KV(\overline{\Omega}, E) \mid y \notin g(\partial\Omega)\} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

que satisfaz 1)- 8) do Teorema 1.1.

A seguir provaremos alguns resultados importantes fazendo uso da teoria de grau topológico de Leray-Schauder :

Consideremos a seguinte equação diferencial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x) \\ x(0) &= x(T), \end{aligned} \tag{1.1}$$

em que

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\longmapsto f(t, x), \end{aligned}$$

é contínua e

$$f(t + T, x) = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Denotemos

$$h(x) = - \int_0^T f(s, x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.2)$$

Teorema 1.6. *Assumimos que f é contínua e T -periódica e existe um conjunto aberto e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tal que a aplicação h definida em (1.2) seja diferente de zero em $\partial\Omega$, e seja*

$$d(h, \Omega, 0) \neq 0, \quad (1.3)$$

em que $d(h, \Omega, 0)$ é o grau de Brouwer. Então o problema (1.1) tem uma solução.

Demonstração: Sejam $E := \{x \in C([0, T], \mathbb{R}^n)\}$ e

$$H := \{x \in E : x : [0, T] \rightarrow \Omega\}.$$

Para $x \in \overline{H}$, definamos,

$$x(t, \lambda) = \lambda x(t) + (1 - \lambda)x(T), \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

$$m(t, \lambda) = \lambda t + (1 - \lambda)T, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Definamos $J : E \times [0, 1] \rightarrow E$ por

$$J(x, \lambda)(t) = x(T) + \int_0^{m(t, \lambda)} f(s, x(s, \lambda)) ds.$$

Pelo teorema de Arzela - Ascoli, mostra-se que o operador J é completamente contínuo.

Mostremos que $d(I - J(\cdot, 1), H, 0) \neq 0$.

Primeiramente mostremos que $J(\cdot, \lambda)$ não se anula em ∂H para $0 \leq \lambda \leq 1$.

Tomemos as seqüências $\{x_n\} \subset \partial H$ e $\{\lambda_n\} \subset [0, 1]$, tais que,

$$x_n(T) + \int_0^{m(t, \lambda_n)} f(s, x(s, \lambda_n)) ds \equiv x_n(t).$$

Suponhamos que $x_n \rightarrow x$ e $\lambda_n \rightarrow \lambda_o$, então temos,

$$x(t) = x(T) + \int_0^{m(t, \lambda_o)} f(s, x(s, \lambda_o)) ds = a \in \partial\Omega,$$

o que implica que $\int_0^T f(s, a) ds = 0$, que é uma contradição.

Portanto pela propriedade de invariância do grau de Leray-Schauder,

$$d(I - J(\cdot, 0), H, 0) = d(I - J(\cdot, 1), H, 0).$$

Notamos que $I - J = -\int_0^T f(s, a) ds = h(a)$. Assim,

$$\begin{aligned} d(I - J(\cdot, 0), H, 0) &= d(I - J(\cdot, 0), H \cap \mathbb{R}^n, 0) \\ &= d(I - J(\cdot, 0), \Omega, 0) \\ &= d(h, \Omega, 0). \end{aligned}$$

Portanto existe $x \in H$ tal que,

$$(I - J(\cdot, 0))x(t) = x(t) - x(T) - \int_0^t f(s, x(s))ds = 0,$$

isto é,

$$x(t) = x(T) + \int_0^t f(s, x(s))ds.$$

■

O seguinte teorema devido a Altman é verdadeiro.

Teorema 1.7. (Altman [1]) *Seja Ω um aberto limitado de um espaço de Banach E . Seja $T : \overline{\Omega} \rightarrow E$ uma aplicação completamente contínua que satisfaz a condição:*

$$(A) \quad \|x - T(x)\|^2 \geq \|T(x)\|^2 - \|x\|^2, \quad x \in \partial\Omega,$$

então T tem um ponto fixo em $\overline{\Omega}$.

Provamos este teorema usando essencialmente a propriedade de invariância do grau de Leray-Schauder.

Demonstração: Suponhamos que T não possui pontos fixos na fronteira $\partial\Omega$. Consideremos a seguinte homotopia,

$$F(\lambda, x) = x - \lambda T(x), \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Se,

$$\begin{cases} \lambda = 0 & F(0, x) = x \\ \lambda = 1 & F(1, x) = x - T(x) \end{cases}$$

Logo, esta família não tem zeros na fronteira $\partial\Omega$, para $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$.

Se $F(\lambda, x) = 0$ para algum $\lambda \in (0, 1)$, e algum $x \in \partial\Omega$, então $x = \lambda T(x)$, e pela desigualdade (A):

$$\begin{aligned} \|\lambda T(x) - T(x)\|^2 &\geq \|T(x)\|^2 - \|\lambda T(x)\|^2 \\ (\lambda - 1)^2 \|T(x)\|^2 &\geq (1 - \lambda^2) \|T(x)\|^2 \\ \lambda &\geq 1, \end{aligned}$$

o que contradiz o fato que $\lambda \in (0, 1)$.

Portanto, podemos concluir, pela propriedade de invariância do grau de Leray-Schauder, que

$$1 = d(I, \Omega, 0) = d(I - T, \Omega, 0),$$

que implica que $(I - T)(x) = 0$, $x = T(x)$ em Ω .

■

Um resultado análogo ao teorema anterior pode ser obtido se trocarmos a condição de Altman (A) pela condição de Rothe [27],

$$(R) \quad \|T(x)\| \leq \|x\|, \quad x \in \partial\Omega.$$

O seguinte exemplo é o teorema de ponto fixo de Schauder.

Teorema 1.8. (Ponto fixo de Schauder [32]). *Seja $\Omega \subset E$ um subconjunto não vazio, convexo fechado de um espaço vetorial normado. Seja $f : \Omega \rightarrow \Omega$ uma aplicação compacta. Então f tem um ponto fixo em Ω .*

Demonstração: Seja f uma aplicação em $\overline{\Omega}$. Se $x \in \partial\Omega$ e $f(x) = x$, o teorema está provado.

Suponhamos que não existe $x \in \partial\Omega$ tal que $f(x) = x$, logo $d(I - f, \overline{\Omega}, 0)$ está definido.

Consideremos a seguinte aplicação $T_\lambda : \overline{\Omega} \rightarrow E$ com $\lambda \in [0, 1]$, dada por $T_\lambda = I - \lambda f$.

Podemos supor, por conveniência, que Ω é uma bola.

Suponhamos que existem $x \in \partial\Omega$ e $\lambda \in [0, 1]$ tais que $T_\lambda(x) = 0$.

- se $\lambda \in (0, 1)$, $x = \lambda f(x)$, logo $\|\lambda f(x)\| = \|x\|$. Portanto $\|f(x)\| > \|x\|$, o que mostra que f não está em Ω .

- Se $\lambda = 0$ temos $x = 0$ o que é uma contradição já que $x \in \partial\Omega$.

Por isso, $T_\lambda x = x - \lambda f(x) \neq 0$ para todo $x \in \partial\Omega$ e $\lambda \in [0, 1]$.

Então $d(I - f, \Omega, 0) = d(I, \Omega, 0) = 1$, logo $\exists x \in \Omega$ tal que $(I - f)x = 0$.

■

Observação: O grau de Brouwer coincide com o grau de Leray-Schauder se $\dim E < \infty$, pois os dois graus são únicos determinados pelos Teoremas 1.1 e 1.5 [3].

1.4 α -Contração

Os teoremas clássicos, de contração de Banach e de Schauder podem ser estendidos a aplicações chamadas de α -contrações que foram introduzidas por Darbo [11], cuja terminologia foi adotada da teoria da medida de não-compacidade introduzida por Kuratowski em 1939 [17].

Sejam X um espaço de Banach e B um subconjunto limitado de X . Seguindo Kuratowski, definimos a medida de não-compacidade de B por:

$$\alpha(B) := \inf \left\{ \epsilon > 0 \mid \text{existe um número finito de conjuntos} \right. \\ \left. B_1, \dots, B_n \subset B, \text{ tais que } B = \cup_{i=1}^n B_i \text{ e } \text{diâmetro}(B_i) \leq \epsilon \right\}$$

Assim, $\alpha(B) = \alpha(\overline{B})$ e, mais importante, $\alpha(B) = 0 \iff B$ é relativamente compacto. Desta maneira, $\alpha(B)$ pode ser considerado como o grau característico da não compacidade do conjunto B .

Para todos os subconjuntos limitados $B, B_1, \dots, B_n, C$, do espaço de Banach X , a medida de não compacidade $\alpha(\cdot)$ tem as seguintes propriedades:

- a) se $B \subset C$, então $\alpha(B) \leq \alpha(C)$,
- b) $\alpha(B + C) \leq \alpha(B) + \alpha(C)$,
- c) $\alpha(\lambda B) \leq |\lambda| \alpha(B)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$,

- d) $\alpha(\cup_{i=1}^n B_i) = \max \{\alpha(B_1), \dots, \alpha(B_n)\}$,
e) $\alpha(B) = \alpha(\text{co}(B)) = \alpha(\overline{\text{co}}(B))$, $\text{co}(\Omega)$ é o convex hull,
f) $\alpha(x) = 0, x \in X$, em particular $\alpha(x + B) = \alpha(B)$.

Usando esta teoria, Kuratowskii mostrou, por exemplo, que a interseção de uma seqüência decrescente de compactos não vazios é não vazio.

Com a medida da não-compacidade associamos a definição de α -contração.

Definição 1.9. *Sejam E um espaço de Banach e $f : E \rightarrow E$ uma aplicação contínua. f é uma α -contração, se existe $k \in [0, 1[$ tal que $\alpha(f(B)) \leq k\alpha(B)$ para qualquer conjunto limitado $B \subset E$.*

Observamos que se $f : B \rightarrow E$ é uma contração (isto é, $\|f(x) - f(y)\| \leq l\|x - y\|$, $l \in [0, 1)$, $x, y \in B$), então f é uma α -contração com $k = l$.

O seguinte teorema é uma extensão do teorema do ponto fixo de Schauder devido a Darbo.

Teorema 1.10. (Ponto fixo de Darbo [11].) *Seja C um subconjunto convexo, limitado, fechado de um espaço de Banach. Neste caso se $f : C \rightarrow C$ é α -contração, então f tem um ponto fixo em C .*

Há uma classe mais geral de aplicações para a qual vale um resultado análogo ao teorema de ponto fixo de Darbo. Essa classe é a das aplicações condensativas.

Definição 1.11. *Sejam E um espaço de Banach e $\Omega \subset E$. A aplicação contínua $T : \Omega \rightarrow \Omega$ é condensativa, se para qualquer conjunto limitado $B \subset \Omega$, $\alpha(T(B)) < \alpha(B)$.*

Se num espaço é dado alguma medida de não-compacidade, então o operador condensativo define-se como um operador que, grosseiramente falando, diminui a medida de não-compacidade de qualquer conjunto, cujo fecho não é compacto.

Segue da definição que cada α -contração é uma aplicação condensativa, mas a inversa não é verdadeira [23].

O resultado básico de ponto fixo para aplicações condensativas que estende o teorema de ponto fixo de Schauder é devido a Sadovskii.

Teorema 1.12. (Ponto fixo de Sadovskii [29].) *Sejam E um espaço de Banach, $C \subset E$ um conjunto fechado convexo e limitado, e suponhamos que $T : C \rightarrow C$ é condensativa. Então existe um ponto $x \in C$ tal que $Tx = x$.*

Nota-se que os operadores completamente contínuos, contrações são operadores condensativos, assim como a soma de operadores desses dois tipos.

A teoria da medida de não-compacidade e os teoremas de ponto fixo para operadores condensativos e α -contrações são de interesse para a topologia geral, as equações diferenciais ordinárias, as equações diferenciais parciais, etc. como veremos mais à frente.

Soluções Periódicas para EDOs não Lineares e Pontos fixos de Operadores Associados à EDOs

2.1 Introdução

Neste capítulo, estudaremos um método funcional-analítico desenvolvido entre outros por N. Rouche, J. Mawhin [28], J. Hale [13] e por L. Cesari [7], que mostra que a existência de soluções periódicas de sistemas periódicos não lineares de equações diferenciais ordinárias é reduzido ao estudo dos pontos fixos de um operador completamente contínuo no espaço das funções periódicas.

Vamos considerar o seguinte sistema de equações diferenciais T -periódicas não lineares da forma

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x) \tag{2.1}$$

em que

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^{n^2} \\ t &\longmapsto A(t) \\ f : \mathbb{R} \times \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\longmapsto f(t, x) \end{aligned}$$

são contínuas e T -periódicas em relação a t , e Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$.

Definamos o seguinte:

Definição 2.1. $C_T = \{(x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n) : x \text{ é contínua e } T\text{-Periódica}\}.$

C_T munido da norma $\|x\|_{C_T} = \sup_{t \in [0, T]} |x(t)| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|$ é um espaço de Banach e

$L_2[0, T]$ o espaço das funções de quadrado integrável com a norma $\|x\|_{L_2} = \left(\int_0^T |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}$ também é um espaço de Banach.

2.2 Preliminares

Denotemos por (H) a equação homogênea de (2.1), e por (Adj) a equação adjunta de (H), isto é,

$$(H) \quad \dot{x} = A(t)x$$

e sua adjunta

$$(Adj) \quad \dot{y} = -A^t(t)y$$

Os resultados mais importantes do sistema homogêneo (H) são dados pela teoria de Floquet [8], [9], [14].

Por conveniência daremos aqui alguns resultados.

1) Se $X(t)$ é uma solução fundamental de (H), $X(t + T)$ também é.

Pela fórmula de Jacobi-Liouville

$$\det X(t) = \det X(0) \exp \left[\int_0^t \text{tr} A(\tau) d\tau \right], \quad t \in [0, T].$$

Segue que é suficiente verificar a não singularidade da solução fundamental de (H), num único ponto.

2) Existe uma matriz não singular periódica $Q(t)$ e uma matriz constante R tal que a representação da solução fundamental é:

$$X(t) = Q(t)e^{tR}.$$

A partir desta representação, deduzimos uma condição que garante a existência de uma solução T-periódica não trivial.

Proposição 2.2. *O sistema homogêneo (H) tem uma solução T-periódica não trivial se e somente se $X(T)$ tem 1 como autovalor.*

Uma solução de (H) é dada por $x(t) = Q(t)e^{tR}x_o$, em que $x(0) = Q(0)x_o$. Por isso, x é T-periódica se e somente se

$$x(T) = Q(T)e^{TR}x_o = Q(0)e^{TR}x_o = Q(0)x_o,$$

que se cumpre se e somente se e^{TR} tem 1 como autovalor.

■

Observação: Se o autovalor de $X(T)$ é igual a -1, então, dizemos que o sistema (H) tem uma solução antiperiódica, isto é $x(t+T) = -x(t)$.

Sabemos, pela alternativa de Fredholm que a equação diferencial homogênea T- periódica (H) não admite nenhuma solução T-periódica não trivial, se a equação (Adj) também não admitir. Se existir, as equações (H) e (Adj) possuem o mesmo número de soluções T-periódicas linearmente independentes que denotaremos por

$$\varphi_1, \dots, \varphi_s \text{ e } \psi_1, \dots, \psi_s \quad (0 \leq s \leq n) \quad \text{respectivamente.}$$

Dizemos que $A(t)$ da equação (2.1) é não-ressonante se o sistema (H) tem como soluções T-periódicas somente a solução trivial. Chamamos de ressonante no outro caso, isto é, quando o sistema (H) possui soluções T-periódicas não triviais.

Os espaços lineares das soluções T-periódicas de (H) e (Adj) são isomorfos.

2.3 Operadores Projeção

Definamos os operadores projetores contínuos (lineares, limitados e idempotentes) $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$ de C_T em C_T :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} &: C_T \rightarrow C_T, \quad x \mapsto \sum_{1 \leq i \leq s} \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i \\ \mathbb{Q} &: C_T \rightarrow C_T, \quad x \mapsto \sum_{1 \leq i \leq s} \langle x, \psi_i \rangle \psi_i, \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} \langle, \rangle : C_T \times C_T &\rightarrow R \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x^t(t)y(t)dt; \end{aligned}$$

x^t é a transposta de x .

$\|\mathbb{P}x\|_{C_T} \leq p\|x\|_{C_T}$, $\|\mathbb{Q}x\|_{C_T} \leq q\|x\|_{C_T}$ para todo $x \in C_T$, e para p e q constantes positivas menores ou iguais a 1.

Assim, observamos que $\mathbb{P}$ leva C_T no subespaço de C_T gerado pelas soluções T-periódicas de (H) e $\mathbb{Q}$ leva C_T no subespaço de C_T gerado pelas soluções T-periódicas de (Adj).

Além disso, sabemos que, a $Im\mathbb{P}$ é sempre fechada, e que $I - \mathbb{P}$ também é um projetor que é ortogonal a $\mathbb{P}$. Portanto $\mathbb{P}$ divide C_T em uma soma direta

$$C_T = Ker\ \mathbb{P} \oplus Im\ \mathbb{P}.$$

Analogamente, $\mathbb{Q}$ divide C_T em:

$$C_T = Ker\ \mathbb{Q} \oplus Im\ \mathbb{Q}.$$

2.4 Sistema Periódico não Homogêneo

O sistema periódico não homogêneo

$$(NH) \quad \dot{x} = A(t)x + b(t),$$

em que $b \in C_T$, tem uma relação importante com o sistema homogêneo (H) no que se refere a existência e ao número de soluções T-periódicas.

Os seguintes resultados mostram estas relações.

Teorema 2.3. [28]. *Se o sistema (H) não tem soluções T-periódicas não triviais, então o sistema não homogêneo correspondente (NH) tem uma única solução T-periódica.*

Demonstração : A pesar que a prova deste teorema é dado em muitos livros, darei minha versão.

A solução do sistema (NH), é dado por,

$$x(t) = X(t)x(0) + \int_0^t X(t)X^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau,$$

em que $X(t)$ é a matriz fundamental de (H) com $X(0) = I$.

$x(t)$ é solução T-periódica se e somente se $x(0)$ satisfaz a seguinte condição:

$$x(0) = X(T)x(0) + \int_0^T X(T)X^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau.$$

Pela hipótese do teorema, $X(T)$ não tem autovalor igual a 1, portanto $\det[X(T) - I] \neq 0$. Desta forma, a correspondente solução T-periódica do sistema (NH), é da seguinte forma,

$$x(t) = X(t)[X(T) - I]^{-1} \int_0^T X(T)X^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau + \int_0^t X(t)X^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau.$$

■

Observação: Mesmo que o sistema homogêneo (H) tenha uma solução T-periódica, o sistema (NH) pode não ter uma solução desse tipo.

Uma ilustração simples desta afirmação é o seguinte exemplo:

$$\ddot{x} + x = \cos t.$$

Vemos que a equação homogênea tem solução 2π -periódica,

$$x_h(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Enquanto, a solução da equação não homogênea

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{t}{2} \sin t,$$

não é 2π -periódica.

O seguinte teorema mostra uma condição sob a qual o sistema homogêneo (H) e o sistema não homogêneo (NH) tem uma solução T-periódica. Além do mais, é possível ver uma relação fundamental entre os dois operadores projeção [13]:

Teorema 2.4. *Se o sistema homogêneo T -periódico (H) possui $s \leq n$ soluções linearmente independentes T -periódicas $\varphi_1(t), \dots, \varphi_s(t)$, então:*

i) O sistema adjunto (Adj) também possui s soluções linearmente independentes T -periódicas $\psi_1(t), \dots, \psi_s(t)$.

ii) O correspondente sistema não homogêneo (NH) tem soluções T -periódicas se $b \in \text{Ker } \mathbb{Q}$, isto é

$$\int_0^T \psi_i^t(\tau) b(\tau) d\tau = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (2.2)$$

E se $b \in \text{Ker } \mathbb{Q}$, então existe uma única solução T -periódica de (NH) que pertence a $\text{Ker } \mathbb{P}$.

Demonstração :

i) Seja $\varphi(t)$ a solução T -periódica de (H) , então $\varphi(t) = X(t)\varphi(0)$. Pela periodicidade de φ , temos

$$(X(T) - I) \varphi(0) = 0. \quad (2.3)$$

Pela hipótese, o sistema (H) tem k soluções linearmente independentes T -periódicas, então, $\text{rank } (X(T) - I) = n - k$.

$[X^{-1}(t)]^t$ é a matriz fundamental do sistema $(Adj.)$, logo pela equação (2.3), a solução $\psi(t)$ é T -periódica se e somente se a condição inicial $\psi(0)$ satisfaz $([X^{-1}(T)]^t - I) \psi(0) = 0$, ou

$$(X(T) - I)^t \psi(0) = 0. \quad (2.4)$$

Como $\text{rank } (X(T) - I) = n - k$, (2.4) tem k soluções linearmente independentes T -periódicas.

ii) Pelo teorema anterior, temos

$$[I - X(T)] x(0) = \int_0^T X(T) X^{-1}(\tau) b(\tau) d\tau, \quad (2.5)$$

e por (2.4) temos

$$[I - X(T)]^t \psi_s(0) = 0, \quad s = 1, \dots, k. \quad (2.6)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
0 &= \langle [I - X(T)]^t \psi_s(0), x(0) \rangle \\
&= \langle \psi_s(0), [I - X(T)] x(0) \rangle \\
&= \langle \psi_s(0), X(T) \int_0^T X^{-1}(\tau) b(\tau) d\tau \rangle \\
&= \langle X^t(T) \psi_s(0), \int_0^T X^{-1}(\tau) b(\tau) d\tau \rangle \\
&= \langle \psi_s(0), \int_0^T X^{-1}(\tau) b(\tau) d\tau \rangle \\
&= \int_0^T \langle \psi_s(0), X^{-1}(\tau) b(\tau) \rangle d\tau \\
&= \int_0^T \langle [X^{-1}(\tau)]^t \psi_s(0), b(\tau) \rangle d\tau \\
&= \int_0^T \langle \psi_s(\tau), b(\tau) \rangle d\tau \\
&= \int_0^T \psi_s^t(\tau) b(\tau) d\tau, \quad s = 1, \dots, k.
\end{aligned}$$

Se $b \in \text{Ker } \mathbb{Q}$,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^T \langle \psi_s(\tau), b(\tau) \rangle d\tau \\
&= \int_0^T \langle [X^{-1}(\tau)]^t \psi_s(0), b(\tau) \rangle d\tau \\
&= \int_0^T \langle \psi_s(0), X^{-1}(\tau) b(\tau) \rangle d\tau \\
&= \int_0^T \langle [X(T)]^t \psi_s(0), X^{-1}(\tau) b(\tau) \rangle d\tau \\
&= \int_0^T \langle \psi_s(0), X(T) X^{-1}(\tau) b(\tau) \rangle d\tau \\
&= \langle \psi_s(0), X(T) \int_0^T X^{-1}(\tau) b(\tau) d\tau \rangle.
\end{aligned}$$

Por (2.6) e pela última igualdade, o sistema (2.5) é compatível e existe uma solução T-periódica da equação não Homogênea (NH).

■

O seguinte resultado mostra a equivalência entre limitação e periodicidade da solução de (NH).

Teorema 2.5. (Massera [31].) *O sistema não homogêneo (NH) tem uma solução T-periódica se e somente se o sistema (NH) tem uma solução limitada.*

Observação: Se a equação (Adj) tem solução T-periódica e se $b \notin \text{Ker } \mathbb{Q}$, então todas as soluções de (NH) são ilimitadas.

Neste caso, dizemos que temos ressonância.

2.5 O Operador $\mathbb{K}$

Para qualquer $b \in \text{Ker } \mathbb{Q}$, a solução T-periódica u de (NH) é única e permite definir a aplicação linear e contínua (operador de primitivização):

$$\begin{aligned} \mathbb{K} : \text{Ker } \mathbb{Q} &\longrightarrow \text{Ker } \mathbb{P} \\ b &\longmapsto u \end{aligned}$$

O operador $\mathbb{K}$ para cada $x \in C_T$, tem as seguintes propriedades [13]:

- 1) $\mathbb{P}\mathbb{K}(I - \mathbb{Q})x = 0$,
- 2) $\frac{d}{dt} [\mathbb{K}(I - \mathbb{Q})x(t)] = x(t) - \mathbb{Q}x$, para cada $t \in \mathbb{R}$
- 3) $\|\mathbb{K}(I - \mathbb{Q})x\|_{C_T} \leq k(1 + q)\|x\|_{C_T}$, k é uma constante positiva.

A função $f : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ induz uma aplicação $\mathcal{F}$ de C_T em C_T , para cada $x \in C_T$

$$\mathcal{F}x(t) = f(t, x(t)) \quad \text{em} \quad \text{cada } t \in \mathbb{R}, \quad (2.7)$$

assim, $\mathcal{F}$ é uma função contínua de C_T .

$\mathcal{F}$ é chamado de **operador de Niemitskii** gerado por f .

Claramente, uma solução x de (2.1) de período T é uma solução de período T de (NH) com $b = \mathcal{F}x$. Assim, necessariamente, $\mathcal{F}x \in \text{Ker } \mathbb{Q}$ e $x = \mathbb{P}x + \mathbb{K}\mathcal{F}x$.

2.6 Teorema Principal

Construiremos explicitamente o operador $\mathcal{M}_f$ a partir da função f definida em (2.1) sobre o espaço C_T , cujos pontos fixos nos permitirão explicitar as soluções T -periódicas da equação (2.1).

Definamos o seguinte conjunto $A_T \subset C_T$,

Definição 2.6. $A_T := \{x \in C_T : x(t) \in \Omega, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}.$

Assim, para cada isomorfismo $\mathcal{J}_J$ de $Im \mathbb{Q}$ em $Im \mathbb{P}$ definido por:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_J : C_{T,\mathbb{Q}} &\longrightarrow C_{T,\mathbb{P}} \\ x = \sum_{1 \leq i \leq s} \langle x, \psi_i \rangle \psi_i &\longmapsto \sum_{1 \leq i \leq s} \langle x, \psi_i \rangle J\varphi_i, \end{aligned}$$

em que $C_{T,\mathbb{Q}}$ (resp. $C_{T,\mathbb{P}}$) $= \{x \in C_T, x = \mathbb{Q}x \text{ (resp. } x = \mathbb{P}x)\}$ e J uma matriz constante não singular de dimensão $n \times n$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_f : A_T &\longrightarrow C_T \\ x &\longmapsto \mathcal{M}_f(x) = \mathbb{P}x + \mathcal{J}_J \mathbb{Q} \mathcal{F}x + \mathbb{K}(I - \mathbb{Q}) \mathcal{F}x \end{aligned} \tag{2.8}$$

está bem definida e para cada $x \in A_T$, $\mathcal{M}_f$ é contínua.

Observação: Doravante $\mathcal{J}_J$ é o operador identidade.

Teorema 2.7. *Sob as notações e hipóteses acima, dizemos que a equação (2.1) possui uma solução T -periódica se e somente se o operador (2.8) possui um ponto fixo.*

Provarei a condição necessária.

Demonstração : ($\Rightarrow$) Seja x é uma solução T -periódica de (2.1), aplicando $\mathbb{Q}$ aos dois membros de (2.1). Temos

$$\mathbb{Q}(\dot{x} - A(t)x) = \mathbb{Q} \mathcal{F}(x).$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^s \frac{1}{T} \int_0^T [\dot{x}^t \psi_i - x^t A^t \psi_i] dt \psi_i &= \mathbb{Q} \mathcal{F} x \\
 \sum_{i=1}^s \frac{1}{T} \int_0^T [\dot{x}^t \psi_i + x^t \dot{\psi}_i] dt \psi_i &= \mathbb{Q} \mathcal{F} x \\
 \sum_{i=1}^s \frac{1}{T} \int_0^T [x^t \psi_i]' dt \psi_i &= \mathbb{Q} \mathcal{F} x \\
 \sum_{i=1}^s \frac{1}{T} [x^t \psi_i]^T \psi_i &= \mathbb{Q} \mathcal{F} x \\
 0 &= \mathbb{Q} \mathcal{F} x,
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

portanto

$$\mathcal{J}_J \mathbb{Q} \mathcal{F} x = 0. \tag{2.10}$$

Pelo lema anterior, $x - \mathbb{P}x = \mathbb{K} \mathcal{F} x$ e, usando (2.9) e (2.10), temos:

$$x = \mathbb{P}x + \mathcal{J}_J \mathbb{Q} \mathcal{F} x + \mathbb{K}(I - \mathbb{Q}) \mathcal{F} x.$$

($\Leftarrow$) Ver [28]

■

Daqui em diante, vamos analisar o operador $\mathcal{M}_f$ definido em (2.8), e observar que os pontos fixos dele são as soluções periódicas do sistema (2.1).

2.7 Casos Particulares do Sistema (2.1)

Dois casos especiais de (2.1) ou equivalentemente de (2.8) são de interesse particular:

1º CASO NÃO RESSONANTE:

A equação (H) só admite solução T-periódica trivial, e portanto, $\mathbb{P} = \mathbb{Q} = 0$, e assim, $I - X(T)$ é invertível, onde X é a matriz fundamental de (H).

Assim $\mathbb{K}$ é definido para cada $x \in C_T$ por

$$\begin{aligned}
 \mathbb{K} \mathcal{F} x(t) &= X(t) [I - X(T)]^{-1} X(T) \int_0^T X^{-1}(\tau) f(\tau, x(\tau)) d\tau + \\
 &+ X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) f(\tau, x(\tau)) d\tau.
 \end{aligned}$$

Portanto (2.8) se reduz à $\mathcal{M}_f = \mathbb{K}\mathcal{F}$.

2º $A(t) \equiv 0$ para todo $t \in R$.

A equação (2.1) é igual à

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (2.11)$$

É fácil ver que $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$ coincidem com a aplicação P_o que associa a cada $x \in C_T$ o valor médio de x , isto é,

$$\begin{aligned} P_o: C_T &\longrightarrow C_T \\ x &\longmapsto \frac{1}{T} \int_o^T x(s) ds. \end{aligned}$$

A aplicação $\mathbb{K}$, que por definição aplica $\text{Ker } P_o$ em si mesmo, é a aplicação K_o , que associa cada $x \in A_T$ com $P_o x = 0$,

$$K_o x(t) = \int_o^t x(s) ds - \frac{1}{T} \int_o^T \int_o^t x(s) ds dt, \text{ em cada } t \in R.$$

Assim, neste caso (2.8) pode ser escrita na forma

$$\mathcal{M}_f = \mathbb{P}_o + \mathbb{P}_o \mathcal{F} + \mathbb{K}_o(I - \mathbb{P}_o) \mathcal{F}. \quad (2.12)$$

2.8 Primeiros Resultados

Nesta seção, vamos discutir o uso dos teoremas clássicos de pontos fixos de operadores contração-de Banach e de operadores não expansivos-de Browder, para mostrar que o operador $\mathcal{M}_f$ possui um ponto fixo.

Por conveniência, vamos enunciar os dois teoremas [33], [5].

Teorema 2.8. *(Banach) Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach. Dado um operador $\mathbb{T}: M \subseteq X \rightarrow M$, com M um conjunto fechado que satisfaz*

$$\|\mathbb{T}x - \mathbb{T}y\| \leq l\|x - y\|, \quad x, y \in M, \quad l \in [0, 1).$$

Então $\mathbb{T}$ tem exatamente um ponto fixo em M .

Teorema 2.9. (Browder) Suponhamos que a aplicação $T : M \subseteq X \rightarrow M$ é não expansiva, isto é,

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|, \quad x, y \in M,$$

em que M é um subconjunto não vazio, fechado, limitado e convexo de um espaço de Banach X . Então T possui um ponto fixo em M .

A aplicação dos Teoremas 2.8 e 2.9 vai depender da conversão do problema (2.1) ao problema similar (2.8) envolvendo o operador $\mathcal{M}_f$.

Assim, definamos

$$V_\rho := \{x \in C_T : \|x\| \leq \rho, \rho \in \mathbb{R}_+\}.$$

V assim escolhido é fechado, limitado e convexo.

Se f definido em (2.1) satisfaz

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq l|u - v|, \quad u, v \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T], l \in [0, 1),$$

então

$$\|\mathcal{F}x - \mathcal{F}y\| \leq l\|x - y\|, \quad x, y \in V, \quad l \in [0, 1).$$

Pela continuidade de f , observamos que $\|f(\cdot, x)\| \leq m$.

Portanto, escolhendo as constantes adequadas, o operador $\mathcal{M}_f$ definido a partir de f satisfaz:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}_f x\| &= \|\mathbb{P}x + \mathcal{J}\mathbb{Q}\mathcal{F}x + \mathbb{K}(I - \mathbb{Q})\mathcal{F}x\| \\ &\leq p\|x\| + q\|f(\cdot, x)\| + k(1 + q)\|f(\cdot, x)\| \\ &\leq p\rho + qm + k(1 + q)m. \end{aligned}$$

Escolhendo

$$\frac{qm + k(1 + q)m}{(1 - p)} \leq \rho,$$

temos $\mathcal{M}_f(V_\rho) \subseteq V_\rho$. Logo

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}_f x - \mathcal{M}_f y\| &\leq p\|x - y\| + q\|\mathcal{F}x - \mathcal{F}y\| + k(1 + q)\|\mathcal{F}x - \mathcal{F}y\| \\ &\leq p\|x - y\| + q l\|x - y\| + k(1 + q) l\|x - y\|, \\ &= (p + q l + k(1 + q)l)\|x - y\|, \quad \text{para todo } x, y \in V_\rho. \end{aligned}$$

Escolhendo $p + q + k(1 - q)l \leq 1$, então $\mathcal{M}_f$ é uma contração em V_ρ . Portanto pelo teorema de Banach, $\mathcal{M}_f$ tem um ponto fixo x em V_ρ , e isto significa que o sistema (2.1) tem uma solução periódica. ■

Analogamente, se f definido em (2.1) satisfaz

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq |u - v|, \quad u, v \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T],$$

então:

$$\|\mathcal{F}x - \mathcal{F}y\| \leq \|x - y\|, \quad x, y \in V_\rho.$$

Como no caso anterior, mostra-se que $\mathcal{M}_f(V_\rho) \subseteq V_\rho$.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}_f x - \mathcal{M}_f y\| &\leq p \|x - y\| + q \|\mathcal{F}x - \mathcal{F}y\| + k(1 + q)\|\mathcal{F}x - \mathcal{F}y\| \\ &\leq p \|x - y\| + q \|x - y\| + k(1 + q) \|x - y\|, \\ &\leq (p + q + k(1 + q)) \|x - y\|, \quad \text{para todo } x, y \in V_\rho. \end{aligned}$$

Se $p + q + k(1 + q) = 1$, então $\mathcal{M}_f$ é uma aplicação não expansiva. Portanto pelo teorema de Browder, $\mathcal{M}_f$ tem um ponto fixo em V_ρ . ■

2.9 Exemplos

1) Consideremos o seguinte sistema simples

$$\dot{x} = b(t) \tag{2.13}$$

onde $b \in C_T$. Segundo o Teorema 2.4, a equação (2.13) tem uma única solução T-periódica se e somente se $\mathbb{P}b = 0$, isto é, se $\frac{1}{T} \int_0^T b(t) dt = 0$.

O operador $\mathbb{K}$ é definido por,

$$\mathbb{K}b = \int_0^T b(\tau) d\tau - \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T b(\tau) d\tau dt.$$

Portanto, cada solução T-periódica de (2.13) pode ser escrito como:

$$x(t) = \mathcal{M}_f x(t) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt + \int_0^t b(\tau) d\tau - \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^t b(\tau) d\tau dt.$$

Se $b(t) = \sin t$, então,

$$\mathcal{M}_f x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) dt - \cos t.$$

2) Consideremos a seguinte equação

$$\dot{x} = x + \cos t \quad (2.14)$$

A solução da equação homogênea de (2.14) é $x = e^t$, e a solução da (Adj) é $y = e^{-t}$.

Observamos que a equação homogênea (H) não possui solução periódica, portanto

$$\mathbb{P} = \mathbb{Q} = 0.$$

Calculamos $\mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \cos t &= e^t [1 - e^{2\pi}]^{-1} e^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\tau} \cos \tau d\tau + e^t \int_0^t e^{-\tau} \cos \tau d\tau \\ &= -\frac{\cos t}{2} + \frac{\sin t}{2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{M}_f x(t) = \mathbb{K} \cos t = -\frac{\cos t}{2} + \frac{\sin t}{2}.$$

3) Analizemos o seguinte sistema,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}.$$

Os valores próprios da matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ são dados por $\lambda_{1,2} = 0$. Portanto a matriz

fundamental da equação homogênea é $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de onde $\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

A matriz fundamental $\Psi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}$ da equação adjunta

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

tem uma solução T-periódica $\psi_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ contínua e T-periódica é tal que $\mathbb{Q}f = 0$, ou seja $\frac{1}{T} \int_0^T f_2(t)dt = 0$, então o sistema acima tem uma solução T-periódica.

Calculando $\mathbb{K}f$, obtemos

$$(\mathbb{K}f)(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t \left[f_1(s) - \frac{1}{T} \int_0^T f_1(\tau)d\tau + \int_0^s f_2(\sigma)d\sigma \right] ds \\ \frac{1}{T} \int_0^T f_1(t)dt + \int_0^t f_2(\tau)d\tau \end{pmatrix},$$

portanto

$$(\mathcal{M}x)(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t)dt \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^t \left[f_1(s) - \frac{1}{T} \int_0^T f_1(\tau)d\tau + \int_0^s f_2(\sigma)d\sigma \right] ds \\ \frac{1}{T} \int_0^T f_1(t)dt + \int_0^t f_2(\tau)d\tau \end{pmatrix}.$$

4) Consideremos agora,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Observamos que a equação homogênea é autoadjunta e a matriz fundamental é dada por $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$. Portanto $\varphi_1(t) = \psi_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ e

$\varphi_2(t) = \psi_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Como $\mathbb{Q}f \neq 0$, então a solução de 2.15 é dado por,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}C + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \begin{pmatrix} \sin \tau \\ \cos \tau \end{pmatrix} d\tau \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-\tau) & \sin(t-\tau) \\ -\sin(t-\tau) & \cos(t-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \tau \\ \cos \tau \end{pmatrix} d\tau \\ &= \begin{pmatrix} c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ -c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-\tau) \sin \tau & \sin(t-\tau) \cos \tau \\ -\sin(t-\tau) \sin \tau & \cos(t-\tau) \cos \tau \end{pmatrix} d\tau \\ &= \begin{pmatrix} c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ -c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \sin t \\ t \cos t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 \cos t + c_2 \sin t + t \sin t \\ -c_1 \sin t + c_2 \cos t + t \cos t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ é uma constante.

Notemos que a solução de (2.15) é não limitada, portanto não é T-periódica.

Observação: Se no exemplo (2.15) $Qf = 0$, então pelo teorema 2.4, existe uma única solução que pertence à $\text{Ker}\mathbb{P}$.

Como $\mathbb{K} : f \rightarrow x$, onde x é solução T-periódica de 2.15, então,

$$(\mathbb{K}f)(t) = \begin{pmatrix} c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ -c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-\tau)f_1(\tau) + \sin(t-\tau)f_2(\tau) \\ -\sin(t-\tau)f_1(\tau) + \cos(t-\tau)f_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau.$$

Como $\mathbb{P}\mathbb{K}f = 0$, calculamos a constante $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ da seguinte relação:

$$\mathbb{P} \left[\begin{pmatrix} c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ -c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{pmatrix} \right] = -\mathbb{P} \left[\int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-\tau)f_1(\tau) + \sin(t-\tau)f_2(\tau) \\ -\sin(t-\tau)f_1(\tau) + \cos(t-\tau)f_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau \right].$$

2.10 Compacidade de $\mathcal{M}_f$

Para aplicar a teoria de grau de Leray-Schauder e alguns teoremas de ponto fixo para obter teoremas de existência de soluções T-periódicas da equação diferencial (2.1) é necessário provar que o operador $\mathcal{M}_f$ é um operador completamente contínuo.

Um critério importante para mostrar a compacidade de um operador sobre um espaço de Banach é o teorema de Arzela-Ascoli, que por conveniência vamos a escrever [22].

Teorema 2.10. *Seja $\mathcal{L} := \{y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n\} \in C^1$, tal que:*

- $\|y\| \leq c_1$,
- $\|y'\| \leq c_2$,

em que c_1 e c_2 são constantes positivas, então $\mathcal{L}$ é relativamente compacto.

Teorema 2.11. *Se f definido em (2.1) satisfaz $\|f(\cdot, x(\cdot))\| \leq M$, M constante positiva, então o operador $\mathcal{M}_f$ definido em (2.8) é completamente contínuo.*

Demonstração Seja $\{x_k\}$ uma sequência limitada de A_T , isto é $\|x_k\| \leq C$,

$k = 1, 2, \dots$ em que C é uma constante positiva. Então

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}_f x_k\| &\leq \|\mathbb{P}x_k\| + \|\mathcal{J}_J \mathbb{Q} \mathcal{F} x_k\| + \|\mathbb{K}(I - \mathbb{Q}) \mathcal{F} x_k\| \\ &\leq p\|x_k\| + q\|f(\cdot, x_k)\| + k(1 + q)\|f(\cdot, x_k)\| \\ &\leq pC + q + k(1 + q)M. \end{aligned}$$

Também vale

$$\|\mathcal{M}'_f x_k\| = \|(I - \mathbb{Q})f(\cdot, x_k(\cdot))\| \leq 2\|f(\cdot, x_k(\cdot))\| \leq 2M.$$

Logo $\{\mathcal{M}_f x_k\}$ é uma seqüência equilimitada e equicontínua de elementos de A_T e a compacidade de $\mathcal{M}_f$ segue pelo teorema de Arzela-Ascoli.

■

Condições sobre a Função f do Problema (2.1) para a Existência de Soluções Periódicas através de Pontos Fixos

Neste capítulo, vamos enunciar e mostrar, usando a teoria linear desenvolvida nos capítulos 1 e 2, alguns resultados para a existência de soluções periódicas de sistemas periódicos não lineares de equações diferenciais ordinárias.

3.1 Introdução

Nesta parte, vamos dar condições sobre f na equação (2.1) para que o operador $\mathcal{M}_f$ gerado tenha ponto fixo.

Uma questão mais geral que será respondida no futuro é:

Seja $\mathbb{T} : C_T \rightarrow C_T$ um operador completamente contínuo com ponto fixo. Achar f tal que a equação homogênea (H) tenha $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$, tal que $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{K}(f, \mathbb{P}, \mathbb{Q})$ decompõem $\mathbb{T}$ na forma de $\mathcal{M}_f$.

Observando melhor a questão, vemos que $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$ são dados independentemente de f : na verdade, a questão que resta é achar $f \in \text{Ker} \mathbb{Q}$ que gera o operador $\mathbb{K}$ que com $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$

decompõem $\mathbb{T}$ na forma do operador $\mathcal{M}_f$.

Deste ponto em diante, pode-se estabelecer condições sobre f em (2.1) para termos soluções periódicas no sistema a partir das condições para existência de pontos fixos em operadores.

3.2 Condições sobre f em (2.1) para termos ponto fixo em $\mathcal{M}_f$.

Os resultados que obtive nesta secção são, essencialmente, aplicações do teorema de ponto fixo de Schauder.

Teorema 3.1. *Seja f com*

$$\|f(t, x)\| \leq m\|x\|^\beta + n, \text{ para todo } x \in B(\rho), \quad (3.1)$$

onde m, n, β são constantes reais não negativas e $B(\rho) \subset A_T \subset C_T$, então o sistema (2.1) tem ao menos uma solução T -periódica.

Demonstração : Dividamos a demonstração em 3 partes dependendo do valor de β ,

- $\beta = 1$:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}_f x\| &= \|\mathbb{P}x + \mathbb{Q}\mathcal{F}x + \mathbb{K}(I - \mathbb{Q})\mathcal{F}x\| \\ &\leq p\|x\| + q\|f(\cdot, x)\| + k(1 + q)\|f(\cdot, x)\| \\ &\leq p\|x\| + q(m\|x\| + n) + k(1 + q)(m\|x\| + n). \end{aligned}$$

Para termos $\mathcal{M}_f$ bem definido, deve valer a condição $\|\mathcal{M}_f x\| \leq \|x\| \leq \rho$:

Dado um m com

$$m \leq \frac{\rho(1 - p) - qn - k(1 + q)n}{\rho[q - k(1 + q)]},$$

temos

$$\begin{aligned} qn + k(1 + q)n &\leq \|x\|(1 - p - qm - k(1 + q)m) \\ &\leq \rho(1 - p - qm - k(1 + q)m). \end{aligned}$$

Como já foi mostrado no capítulo anterior, o operador $\mathcal{M}_f$ é completamente contínuo e, portanto, pelo teorema de ponto fixo de Schauder ele terá ao menos um ponto fixo em $B(\rho)$.

Por exemplo, se tomamos $m = 30$, $p = 1/10$, $\rho = 1$, $q = 1/10$, $n = 1$, $k = 1/12$ temos satisfeitas as condições acima.

- $0 \leq \beta < 1$:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}_f x\| &= \|\mathbb{P}x + \mathcal{J}_J \mathbb{Q} \mathcal{F}x + \mathbb{K}(I - \mathbb{Q}) \mathcal{F}x\| \\ &\leq p \|x\| + q \|f(\cdot, x)\| + k(1 + q) \|f(\cdot, x)\| \\ &\leq p \|x\| + q (m \|x\|^\beta + n) + k(1 + q)(m \|x\|^\beta + n). \end{aligned}$$

Para termos $\|\mathcal{M}_f B(\rho)\| \leq \rho$, basta escolhermos,

$$\rho \left(p - 1 + \frac{q m + k(1 + q)m}{\rho^{1-\beta}} \right) + n [q + k(1 + q)] \leq 0. \quad (3.2)$$

Assim,

$$p \rho + q m \rho^\beta + q n + k(1 + q)m \rho^\beta + k(1 + q)n \leq \rho.$$

Finalmente vemos que tomando $\rho = 1$, $m = 10$, $p = 1/40$, $q = 1/40$, $n = 1$, $k = 1/20$, $\beta = 1/2$, temos as condições acima satisfeitas.

- $\beta > 1$:

Seja

$$\mathcal{L}(\rho) = p \rho + \rho^\beta (q m + k(1 + q)m) + q n + k(1 + q)n - \rho \leq 0. \quad (3.3)$$

Então,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}_f x\| &= \|\mathbb{P}x + \mathcal{J}_J \mathbb{Q} \mathcal{F}x + \mathbb{K}(I - \mathbb{Q}) \mathcal{F}x\| \\ &\leq p \|x\| + q \|f(\cdot, x)\| + k(1 + q) \|f(\cdot, x)\| \\ &\leq p \|x\| + q (m \|x\|^\beta + n) + k(1 + q)(m \|x\|^\beta + n). \end{aligned}$$

Derivando (3.3), temos

$$\mathcal{L}'(\rho) = p - 1 + \beta \rho^{\beta-1} (q m + k(1 + q)m) = 0,$$

assim $\mathcal{L}(\rho)$ tem mínimo em $\rho_\beta = \left(\frac{1 - p}{\beta [q m + k(1 + q)]} \right)^{\frac{1}{\beta-1}}$.

Calculando $\mathcal{L}(\rho_\beta)$, temos

$$\left(\frac{(1-p)(\beta-1)[q m + k(1+q)]}{\beta [q m + k(1+q)]} \right)^{\beta-1} \left[\frac{1-p}{\beta [q m + k(1+q)]} \right] \leq \quad (3.4)$$

$$\leq n^{\beta-1} (q + k(1+q))^{\beta-1}.$$

Escolhendo m, n e β de tal forma que satisfaçam (3.4), então $\mathcal{M}_f$ possui ao menos um ponto fixo em $B(\rho)$.

Um exemplo da realização de (3.4) é tomar $m = 10$, $p = 1/10$, $q = 1/10$, $n = 30$, $k = 1/20$, $\beta = 2$.

■

Como consequência do Teorema 3.1 mostremos que o modelo autônomo de evolução [20] que descreve a sobrevivência de uma espécie isolada num habitat estacionário e com recursos limitados dada pela equação

$$\begin{aligned} \dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde x é a densidade da espécie no momento $t > 0$, as constantes $r > 0$ e $k > 0$ são chamadas de constante de crescimento e de capacidade do médio ambiente, respectivamente, tem soluções periódicas.

Basta aplicarmos o caso $\beta > 1$ e $n = 0$. Para isto, escrevemos a equação (3.5) na forma

$$\dot{x} = rx - \frac{r}{k}x^2,$$

e observa-se que $f(t, x) = -\frac{r}{k}x^2$ é tal que $\|f(t, x)\| = \left|\frac{r}{k}\right|\|x^2\| \leq m\|x^2\|$, onde m é uma constante conveniente.

Observação: A equação (3.5) é um exemplo de uma equação diferencial com impulso.

3.3 Uma Aplicação do Teorema de Ponto Fixo de Schauder-Tychonov

O teorema de ponto fixo de Schauder é uma extensão do teorema de Banach que tem por sua vez uma generalização para espaços topológicos lineares, localmente convexos dada por Tychonov.

Teorema 3.2. [35]. *Seja $\mathcal{D}$ um espaço topológico, linear, localmente convexo. Sejam S um subconjunto compacto, convexo de $\mathcal{D}$ e $\mathbb{T}$ uma aplicação contínua $\mathbb{T} : S \rightarrow S$. Então $\mathbb{T}$ tem um ponto fixo em S , isto é $\mathbb{T}x = x$, $x \in S$.*

Vamos aplicar este teorema, para mostrar que a equação diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(0) = x(T) = x_T, \end{cases} \quad (3.6)$$

com f contínua no conjunto $\mathcal{H}$ definido abaixo, tem ao menos uma solução T -periódica.

O operador $\mathcal{M}_f$ correspondente à equação (3.6) tem a seguinte forma, vide parágrafo 2.7,

$$\mathcal{M}_f = \mathbb{P}_o + \mathcal{J}_J \mathbb{P}_o \mathcal{F} + \mathbb{K}_o(I - \mathbb{P}_o) \mathcal{F}.$$

Definamos o seguinte conjunto compacto,

$$\mathcal{H} := \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 \leq t \leq T, \|x - x_T\| \leq L\}.$$

Como $f \in C(\mathcal{H}, \mathbb{R}^n)$, existe $M > 0$ tal que $\|f(\cdot, x)\| \leq M$, para todo $(t, x) \in \mathcal{H} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Consideremos

$$\mathcal{H}_T := \{x \in C_T, \|x(t_1) - x(t_2)\| \leq 4M|t_1 - t_2|, \text{ para todo } t_1, t_2 \in [0, T]\}.$$

Mostremos que o conjunto $\mathcal{H}_T$ é compacto em C_T .

- Se $x \in C_T$, então,

$$\|x - x_T\| \leq \max_{t \in [0, T]} |x(t) - x_T| \leq 4M \max_{t \in [0, T]} |t - T| \leq 4MT \leq L,$$

o que implica que, $\|x\| \leq |x_T| + L$, para todo $t \in [0, T]$.

Logo, $\mathcal{H}_T$ é uniformemente limitado.

- Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) < \frac{\epsilon}{4M}$, $|t_1 - t_2| < \delta$ tal que

$$\max_{t_1, t_2 \in [0, T]} |x(t_1) - x(t_2)| \leq 4M|t_1 - t_2| < 4M\delta < 4M\frac{\epsilon}{4M} = \epsilon, \quad x \in \mathcal{H}_T,$$

o que mostra que $\mathcal{H}_T$ é equicontínua.

Pelo teorema de Arzela-Ascoli $\mathcal{H}_T$ é compacto.

Agora mostremos que $\mathcal{H}_T$ é convexo.

Sejam $x, y \in \mathcal{H}_T$ ($x(T) = y(T) = x_T$), e $\gamma \in [0, 1]$.

- $(\gamma x + (1 - \gamma)y)(T) = \gamma x(T) + y(T) - \gamma y(T) = y(T) = x_T$.

$$\begin{aligned} \|(\gamma x + (1 - \gamma)y)(t_1) - (\gamma x + (1 - \gamma)y)(t_2)\| &\leq \gamma \|x(t_1) - x(t_2)\| + \|(1 - \gamma)y(t_1) - (1 - \gamma)y(t_2)\| \\ &\leq \gamma 4M|t_1 - t_2| + (1 - \gamma)4M|t_1 - t_2| \\ &\leq 4M|t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

Logo, $\gamma x + (1 - \gamma)y \in \mathcal{H}_T$, e portanto $\mathcal{H}_T$ é convexo.

Mas $\mathcal{H}_T$ é invariante por $\mathcal{M}_f$:

$$\begin{aligned} &\max_{t_1, t_2 \in [0, T]} |\mathcal{M}_J x(t_1) - \mathcal{M}_J x(t_2)| \\ &= \max_{t_1, t_2 \in [0, T]} \left| \int_0^{t_1} [f(\tau, x(\tau)) - \frac{1}{T} \int_0^T f(\sigma, x(\sigma)) d\sigma] d\tau \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{T} \int_0^T \left(\int_0^{t_1} [f(\tau, x(\tau)) - \frac{1}{T} \int_0^T f(\sigma, x(\sigma)) d\sigma] d(\tau) \right) dt \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{t_2} [f(\tau, x(\tau)) - \frac{1}{T} \int_0^T f(\sigma, x(\sigma)) d\sigma] d\tau \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{T} \int_0^T \left(\int_0^{t_2} [f(\tau, x(\tau)) - \frac{1}{T} \int_0^T f(\sigma, x(\sigma)) d\sigma] d(\tau) \right) dt \right| \\ &= \max_{t_1, t_2 \in [0, T]} \left| \int_{t_2}^{t_1} f(\tau, x(\tau)) d\tau - \frac{1}{T} \int_{t_2}^{t_1} \int_0^T f(\sigma, x(\sigma)) d\sigma d\tau \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{T} \int_0^T \int_{t_1}^{t_2} f(\tau, x(\tau)) d\tau dt + \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_{t_2}^{t_1} \int_0^T f(\sigma, x(\sigma)) d\sigma d\tau dt \right| \\ &\leq M|t_1 - t_2| + M|t_1 - t_2| + M|t_1 - t_2| + M|t_1 - t_2| \\ &\leq 4M|t_1 - t_2| \leq L. \end{aligned}$$

Além disso, facilmente mostra-se que $\mathcal{M}_f x(0) = \mathcal{M}_f x(T)$.

Portanto, acabamos de provar que $\mathcal{M}_f(\mathcal{H}_T) \subset \mathcal{H}_T$.

Pela continuidade uniforme de f em $\mathcal{H}_T$, segue que $\mathcal{M}_f$ é contínua em $\mathcal{H}_T$.

Pelo teorema de ponto fixo de Schauder-Tychonov, $\mathcal{M}_f$ tem um ponto fixo x em $\mathcal{H}_T$.

■

3.4 Equação não Resonante

Nesta secção, daremos outra classe de funções f para que a equação (2.1) tenha solução periódica.

Seja f definido como em (2.1),

$$M_\rho = \max\{|f(t, x)| : 0 \leq t \leq T, |x| \leq \rho, \rho > 0\} \quad (3.7)$$

e

$$B(\rho) := \{x \in A_T : \|x\| \leq \rho\}$$

Vale o seguinte resultado:

Proposição 3.3. *Sejam A e f na equação (2.1), com A não ressonante, e*

$$\liminf_{\rho \rightarrow \infty} \frac{M_\rho}{\rho} = 0. \quad (3.8)$$

Então o operador $\mathcal{M}_f$ tem um ponto fixo em $B(\rho)$.

Demonstração: Como A é não ressonante, então $\mathbb{P} = \mathbb{Q} = 0$. Assim $I - X(T)$ é não singular e o operador $\mathbb{K} : A_T \rightarrow C_T$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{K}x = & X(\cdot) [I - X(T)]^{-1} X(T) \int_0^T X^{-1}(\tau) f(\tau, x(\tau)) d\tau + \\ & + X(\cdot) \int_0^T X^{-1}(\tau) f(\tau, x(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_f x(t) = & X(t) [I - X(T)]^{-1} X(T) \int_0^T X^{-1}(\tau) f(\tau, x(\tau)) d\tau + \\ & + X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) f(\tau, x(\tau)) d\tau.\end{aligned}$$

Suponhamos que

$$\begin{aligned}\max_{0 \leq t \leq T} \|X(t) [I - X(T)]^{-1} X(T)\| &= C \\ \max_{0 \leq t \leq T} \|X^{-1}(t)\| &= D \\ \max_{0 \leq t \leq T} \|X(t)\| &= N,\end{aligned}$$

com C, D, N constantes positivas, então

$$\begin{aligned}\|\mathcal{M}_f x\| &\leq CDTM_\rho + NDTM_\rho \\ &= M_\rho DT(C + N) \\ &= LM_\rho\end{aligned}$$

com $L = DT(C + N)$.

Pela condição (3.8), $LM_\rho \leq \rho$ para ρ suficientemente grande. Logo

$\mathcal{M}_f : B(\rho) \rightarrow B(\rho)$.

Como já foi provado no capítulo anterior, $\mathcal{M}_f$ é completamente contínuo, e portanto o resultado segue do teorema de ponto fixo de Schauder.

■

3.5 Solução Periódica e Grau de Leray Schauder

Dadas uma aplicação completamente contínua $f : \overline{\Omega} \rightarrow E$, com Ω aberto de um espaço topológico linear E , e $\Psi = I - f$, se $0 \notin \Psi(\partial\Omega)$ e $d(\Psi, \Omega, 0) \neq 0$, vale $\Psi(x) = 0$ e $x = f(x)$ para algum $x \in \Omega$.

Damos, a seguir, mais uma classe de funções f em (2.1) para a qual existem soluções periódicas.

Usando a teoria de grau de Leray-Schauder vou provar de imediato [2]:

Teorema 3.4. *Seja $B(\rho) = \{x \in C_T : \|x\| \leq \rho\}$. Se $\mathcal{M}_f : B(\rho) \rightarrow C_T$ é completamente contínuo e satisfaz a condição de Krasnoselskii:*

$$(K) \quad \langle \mathcal{M}_f(x), x \rangle \leq \|x\|^2 \quad \text{para todo } x \in \partial B(\rho),$$

então $\mathcal{M}_f$ tem um ponto fixo em $B(\rho)$, onde $\langle, \rangle$ é o produto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_0^T f(t)g(t)dt \quad \text{em } C_T \subset L_2.$$

Demonstração: Se $\mathcal{M}_f(x) = x$ para $x \in \partial B(\rho)$ o teorema está provado.

Suponhamos que $(I - \mathcal{M}_f)x \neq 0$ para todo $x \in \partial B(\rho)$.

Definamos a seguinte aplicação $S : \overline{B}(\rho) \times [0, 1] \rightarrow C_T$ por $S(x, \lambda) = x - \lambda \mathcal{M}_f(x)$.

Mostremos que $S(x, \lambda) \neq 0$ para todo $x \in \partial B(\rho)$ e $\lambda \in [0, 1]$.

Se $\lambda = 0$, $x \neq 0$ para todo $x \in \partial B(\rho)$,

Se $\lambda = 1$, $x \neq \mathcal{M}_f x$ para todo $x \in \partial B(\rho)$.

Agora vamos supor que $(I - \lambda \mathcal{M}_f)x = 0$ para todo $x \in \partial B(\rho)$ e $\lambda \in (0, 1)$.

$$\begin{aligned} 0 = \langle \mathcal{M}_f x, x - \lambda \mathcal{M}_f x \rangle &= \langle \mathcal{M}_f x, x \rangle - \lambda \langle \mathcal{M}_f x, \mathcal{M}_f x \rangle \\ &\leq \|x\|^2 - \lambda \|\mathcal{M}_f(x)\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 - \lambda^{-1} \|x\|^2 \\ &= \|x\|^2 (1 - \frac{1}{\lambda}) < 0, \end{aligned}$$

o que é uma contradição.

Assim provamos que $(I - \lambda \mathcal{M}_f)x \neq 0$ para todo $x \in \partial B(\rho)$ e $\lambda \in [0, 1]$.

Pela propriedade de homotopia de grau de Leray-Schauder, temos

$$1 = d(I, B(\rho), 0) = d(I - \mathcal{M}_f, B(\rho), 0).$$

Então pela propriedade de solução, $(I - \mathcal{M}_f)x = 0$ tem ao menos uma solução em $B(\rho)$. ■

Diante deste resultado, podemos afirmar:

Corolário 3.5. *Seja f em (2.1) satisfazendo*

$$\|f(t, x)\| \leq m\|x\|, \quad m \in \mathbb{R}_+, \quad \text{para todo } x \in \partial B(\rho). \quad (3.9)$$

Então (2.1) tem solução periódica em $B(\rho)$.

Demonstração: Para $x \in \partial B(\rho)$,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{M}_f x, x \rangle &= \langle \mathbb{P}x, x \rangle + \langle \mathbb{Q}\mathcal{F}x, x \rangle + \langle \mathbb{K}(I - \mathbb{Q})\mathcal{F}x, x \rangle \\ &\leq \|\mathbb{P}x\| \|x\| + \|\mathbb{Q}\mathcal{F}x\| \|x\| + \|\mathbb{K}(I - \mathbb{Q})\mathcal{F}x\| \|x\| \\ &\leq p\|x\|^2 + qm\|x\|^2 + k(1 + q)m\|x\|^2 \\ &\leq (p + qm + k(1 + q)m)\|x\|^2, \end{aligned}$$

aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwartz.

Escolhendo m de tal forma que

$$p + qm + k(1 + q)m \leq 1,$$

isto é, tomando $m \leq \frac{1 - p}{q + k(1 + q)}$, temos que $\mathcal{M}_f$ tem um ponto fixo em $B(\rho)$. ■

Como a condição de Krasnoselskii (K) implica a condição de Altman (A) [1] temos

$$\begin{aligned} \|x - \mathcal{M}_f x\|^2 &= \langle x - \mathcal{M}_f x, x - \mathcal{M}_f x \rangle \\ &= \|x\|^2 - \langle x, \mathcal{M}_f x \rangle + \|\mathcal{M}_f x\|^2 \\ &\geq \|x\|^2 - 2\|x\|^2 + \|\mathcal{M}_f x\|^2 \\ &\geq \|\mathcal{M}_f x\|^2 - \|x\|^2, \quad x \in \partial B(\rho). \end{aligned}$$

Com isso, obtemos o seguinte,

Teorema 3.6. *Seja $B(\rho) = \{x \in C_T : \|x\| \leq \rho\}$. Se $\mathcal{M}_f : B(\rho) \rightarrow C_T$ é completamente contínuo e satisfaz a condição*

$$(A) \quad \|x - \mathcal{M}_f x\|^2 \geq \|\mathcal{M}_f x\|^2 - \|x\|^2, \quad \text{para todo } x \in \partial B(\rho),$$

então $\mathcal{M}_f$ tem um ponto fixo em $B(\rho)$.

Calcular o grau de Leray-Schauder é uma tarefa muito complexa. Em função disso, enunciaremos agora um resultado importante devido à Krasnoselskii que permitirá em alguns casos efetuar este cálculo.

Teorema 3.7. (M.A. Krasnoselskii, [16].) *Seja $\mathcal{U}$ um conjunto aberto limitado simétrico em relação a origem de um espaço de Banach E . Se $\mathbb{T} : \overline{\mathcal{U}} \rightarrow E$ é uma aplicação completamente contínua em $\overline{\mathcal{U}}$ tal que*

$$\begin{aligned}\mathbb{T}(-x) &= -\mathbb{T}(x), \quad x \in \mathcal{U} \\ \mathbb{T}(x) &\neq x, \quad x \in \partial\mathcal{U},\end{aligned}$$

então o grau de Leray Schauder $d(I - \mathbb{T}, \mathcal{U}, 0)$ é um número ímpar, portanto não nulo.

Uma aplicação imediata deste teorema é a seguinte:

Seja

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (3.10)$$

com f definido em (2.1) satisfazendo

$$f(t, -x) = -f(t, x). \quad (3.11)$$

Como foi visto no capítulo anterior, o operador $\mathcal{M}_f$ correspondente ao sistema (3.10), é:

$$\mathcal{M}_f = \mathbb{P}_o + \mathbb{P}_o \mathcal{F} + \mathbb{K}_o(I - \mathbb{P}_o)\mathcal{F}.$$

Como $\mathcal{F}x = f(\cdot, x)$, pela propriedade (3.11) de f , então $\mathcal{F}$ é ímpar. Portanto

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_f(-x) &= \mathbb{P}_o(-x) + \mathbb{P}_o \mathcal{F}(-x) + \mathbb{K}_o(I - \mathbb{P}_o)\mathcal{F}(-x) \\ &= -\mathbb{P}_o x - \mathbb{P}_o \mathcal{F}(x) - \mathbb{K}_o(I - \mathbb{P}_o)\mathcal{F}(x) \\ &= -\mathcal{M}_f x.\end{aligned}$$

Como $\mathcal{M}_f$ é um operador completamente contínuo e ímpar, temos pelo teorema de Krasnoselskii que:

$$d(I - \mathcal{M}_f, B(\rho), 0) \neq 0.$$

Logo, existe $x_o \in B(\rho) \subset A_T$ tal que $(I - \mathcal{M}_f)x_o = 0$. E isto significa que,

Lema 3.8. *O sistema (3.10) com f satisfazendo (3.11) e tal que cumpre-se (3.10) com $x \notin \partial B(\rho)$, possui uma solução T -periódica.*

Voltemos ao sistema (2.1)

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x).$$

Teorema 3.9. *Seja $A_T \subset C_T$ um subconjunto aberto limitado contendo o zero definido como no capítulo 2 e sejam a matriz $A(t)$ não ressonante e cumpra-se (2.1) para todo $x \notin \partial A_T$. Então o sistema (2.1) possui ao menos uma solução T -periódica em A_T .*

Demonstração : Definamos,

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} \times \Omega \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x, \lambda) &\longrightarrow h(t, x, \lambda) \end{aligned}$$

uma aplicação T -periódica em relação a t , contínua tal que:

$$\begin{aligned} h(t, x, 0) &= A(t)x \\ h(t, x, 1) &= A(t)x + f(t, x) \quad \text{para todo } (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega. \end{aligned}$$

Assim, $h(t, x, \lambda) = A(t)x + \lambda f(t, x)$.

Introduzimos agora a família de equações

$$\dot{x} = h(t, x, \lambda), \quad \lambda \in [0, 1]. \quad (3.12)$$

Notamos que se $\lambda = 1$, (3.12) $\equiv$ (2.1).

Como $A(t)$ é não ressonante, então o operador $\mathcal{M}_{f,\lambda}$ correspondente a $h(t, x, \lambda)$ tem a seguinte forma, (vide capítulo 2),

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{f,\lambda} x &= \lambda \left[X(\cdot) [I - X(T)]^{-1} X(T) \int_0^T X^{-1}(\tau) f(\tau, x(\tau)) d\tau \right] + \\ &+ \lambda \left[X(\cdot) \int_0^T X^{-1}(\tau) f(\tau, x(\tau)) d\tau \right]. \end{aligned}$$

Se $\lambda = 0$, então $\mathcal{M}_{f,0} = 0$. Assim

$$d(I - \mathcal{M}_{f,0}, A_T, 0) = d(I, A_T, 0) = 1.$$

Logo, pela propriedade de invariância por homotopia segue que

$$1 = d(I, A_T, 0) = d(I - \mathcal{M}_{f,1}, A_T, 0).$$

Portanto, existe $x \in A_T$ tal que $(I - \mathcal{M}_{f,1})x = 0$. Isto mostra que o sistema (2.1) tem uma solução T -periódica. ■

3.6 Solução Periódica e Ponto Fixo de Fan-Browder

Antes de enunciar o teorema de Fan-Browder, enunciemos algumas definições e alguns fatos conhecidos [6], [25].

Definição 3.10. *Suponhamos E um espaço topológico (subespaço de um espaço de Banach) e $r : E \rightarrow M$ uma função contínua com $M \subset E$, com $r|_M = I|_M$. Então M é chamado de retrato de E .*

Em alguns contextos, a aplicação r é também chamada de retrato (retração) de E .

Observação: $M = B_\rho = \{x \in E : \|x\| \leq \rho\}$ é um retrato de E , com r dado por

$$r(x) = \begin{cases} x & \text{se } \|x\| \leq \rho \\ \rho \frac{x}{\|x\|} & \text{se } \|x\| > \rho. \end{cases}$$

A importância das funções retrato (retração) consiste em remeter as questões de ponto fixo num conjunto para questões de ponto fixo em subconjuntos mais simples.

Por conveniência, enunciemos o seguinte resultado bem conhecido na literatura [2]:

Cada subconjunto fechado e convexo de um espaço normado E é um retrato de E .

De fato, Seja $M \subset E$ um fechado e convexo. Basta notar que a identidade $I : M \rightarrow M$ admite uma extensão $g : E \rightarrow M$ pelo teorema de Dugundji.

Definição 3.11. *Sejam X e Y espaços topológicos. A função $f : X \rightarrow Y$ é semicontínua inferiormente, se o conjunto $f^{-1}(B)$ é um aberto para qualquer conjunto aberto B de Y , isto é, os valores de $f(x)$ formam um conjunto não vazio e convexo, para todo $x \in X$ e as fibras $f^{-1}(y) = \{z : y \in f(z)\}$ são abertas para todo $y \in Y$.*

Notação: Denotemos por F^* a classe de aplicações semicontínuas inferiormente.

Teorema 3.12. (Fan-Browder [24], Teorema 2.2). *Seja Q um subconjunto fechado, convexo de um espaço vetorial Hausdorff localmente convexo E . Assumimos que U é um subconjunto aberto de Q com $0 \in U$ e U convexo. Além disso suponhamos que $G : \bar{U} \rightarrow Q$*

seja uma aplicação de F^* , compacta e que estejam satisfeitas as seguintes condições:

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \text{ um retrato contínuo } r : Q \rightarrow \bar{U} \text{ com} \\ r(z) \in \partial U \text{ para } z \in Q \setminus \bar{U} \text{ e } \exists \lambda \in (0, 1) \text{ com} \\ r(z) = \lambda z \text{ se } z \in Q \setminus \bar{U} \text{ (} \lambda \text{ pode depender de } z \text{)} \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Então G é do tipo Leray Schauder, isto é, vale:

(A1) G tem um ponto fixo em $\bar{U}$; ou

(A2) $\exists u \in \partial U$ e $\lambda \in (0, 1)$ com $u \in \lambda G(u)$.

Observação: Como G é uma aplicação de F^* compacta, então $G \circ r : Q \rightarrow Q$ tem um ponto fixo em Q .

Adequando as condições do teorema para o operador $\mathcal{M}_f$ definido em (2.8), então, se f limitada no seu domínio de definição implica que o operador $\mathcal{M}_f$ correspondente é operador completamente contínuo e satisfaz a condição do teorema, para $G = \mathcal{M}_f \circ r$. Além disso $\mathcal{M}_f \circ r : C_T \rightarrow C_T$ pertence a F^* e é uma aplicação completamente contínua. Tomando o retrato $r : C_T \rightarrow B_\rho$ como

$$r(y) = \begin{cases} y & \text{se } \|y\| \leq \rho \\ \rho \frac{y}{\|y\|} & \text{se } \|y\| > \rho, \end{cases} \quad (3.14)$$

Então pelo teorema de Schauder, existe $x \in C_T$ tal que $x = \mathcal{M}_f \circ r(x)$.

Mostremos agora que $y = r(x)$ é um ponto fixo da composição $r \circ \mathcal{M}_f : B_\rho \rightarrow B_\rho$, essencialmente usando o fato de que:

$$\begin{aligned} &\text{ou } \|\mathcal{M}_f y\| \leq \rho \quad \text{ou} \\ &\text{ou } \|\mathcal{M}_f y\| > \rho, \end{aligned}$$

• se $\|\mathcal{M}_f y\| \leq \rho$, então $r \circ \mathcal{M}_f y = \mathcal{M}_f y$ e portanto $y = \mathcal{M}_f y$. Assim $\mathcal{M}_f$ tem um ponto fixo em B_ρ

• se $\|\mathcal{M}_f y\| > \rho$, $\exists z = \mathcal{M}_f y$ ($z \notin B_\rho$) tal que $\|z\| > \rho$ e $y = r(z)$, portanto:

$$y = \rho \frac{z}{\|z\|} \in \partial(B_\rho) \text{ por (3.14) e } z = \frac{\|z\|}{\rho} y = \mathcal{M}_f y.$$

Escrevendo $\lambda = \frac{\rho}{\|z\|} < 1$, obtemos

$$y = \lambda \mathcal{M}_f y.$$

■

3.7 Soluções periódicas e α -Contração

Assumindo que $B_\rho = B(0, \rho)$ é uma bola aberta com centro em zero e raio $\rho > 0$ num espaço de Banach X e usando o teorema de ponto fixo de Sadovskii [29], obtemos uma generalização deste teorema quando o operador condensativo $\mathbb{T}$ satisfaz a condição de fronteira de Rote (R) [27],

$$(R) \quad \|\mathbb{T}(x)\| \leq \|x\|, \quad x \in \partial B_\rho.$$

Teorema 3.13. *Sejam X um espaço de Banach e $\mathbb{T} : \overline{B}_\rho \rightarrow X$ uma aplicação condensativa que satisfaz a condição de Rothe (R). Então $\mathbb{T}$ tem um ponto fixo em $\overline{B}_\rho$.*

Se f é limitada no seu domínio de definição, então o $\mathcal{M}_f$ correspondente é um operador completamente contínuo e, portanto, é um operador condensativo.

Seja $r : C_T \rightarrow B_r$ um retrato. Definamos a aplicação

$$\begin{aligned} g : \overline{B}_\rho &\rightarrow \overline{B}_\rho \\ x &\longmapsto g(x) = r \circ \mathcal{M}_f(x) \end{aligned}$$

contínua de $\overline{B}_\rho$ em $\overline{B}_\rho$.

Mostremos que a função g é condensativa. De fato: como $r : C_T \rightarrow B_r$ é uma α -contração com $k = 1$, temos:

$$\alpha(g(B_\rho)) = \alpha(r \circ \mathcal{M}_f(B_\rho)) \leq \alpha(\mathcal{M}_f(\overline{B}_\rho)) < \alpha(\overline{B}_\rho).$$

Pelo teorema de Sadovskii, existe ao menos um ponto fixo de g em $\overline{B}_\rho$.

Seja $x_o \in B_\rho$ este ponto fixo de g . Mostremos que x_o é ponto fixo de $\mathcal{M}_f$.

$$x_o = g(x_o) = r \circ \mathcal{M}_f(x_o) = \begin{cases} \mathcal{M}_f(x_o) & \text{se } \|\mathcal{M}_f(x_o)\| \leq \rho \\ \rho \frac{\mathcal{M}_f(x_o)}{\|\mathcal{M}_f(x_o)\|} & \text{se } \|\mathcal{M}_f(x_o)\| > \rho. \end{cases}$$

Se $\|x_o\| \leq \rho$, $\mathcal{M}_f$ tem ponto fixo x_o .

Se $\|x_o\| = \rho$, então $\|\mathcal{M}_f(x_o)\| \leq \rho$, pois se $\mathcal{M}_f(x_o) = cx_o$ com $c \geq 1$, temos pela condição (R) que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}_f(x)\| &\leq \|x\| \\ \|cx\| &\leq \|x\|, \end{aligned}$$

o que é possível só se $c = 1$.

■

Observação: No caso de X ser um espaço de Hilbert, a condição de Rothe (R) no teorema anterior pode ser trocada pela condição de Krasnoselskii (K), isto é,

Teorema 3.14. *Sejam X um espaço de Hilbert e $\mathbb{T} : B_\rho \rightarrow X$ uma aplicação condensativa e suponhamos que $\mathbb{T}$ satisfaz a condição de Krasnoselskii (K),*

$$(K) \quad \langle x, \mathbb{T}(x) \rangle \leq \|x\|^2 \quad x \in \partial B_\rho.$$

Então $\mathbb{T}$ tem um ponto fixo em B_ρ .

Demonstração: Basta mostrar que (R) implica (K).

De fato:

$$\langle x, \mathbb{T}(x) \rangle \leq \|x\| \|\mathbb{T}(x)\| \leq \|x\| \|x\| = \|x\|^2.$$

■

3.8 Unificação dos teoremas de Banach e Schauder

Um resultado que unifica os teoremas clássicos de pontos fixos: Teorema de Schauder e Teorema de Banach foi dado por Krasnoselskii em 1955 quem provou este resultado para um operador A da forma $A = A_1 + A_2$, com $\|A_1\| < 1$ e A_2 compacto [37].

Teorema 3.15. (Krasnoselskii) [15]. *Seja A um operador que aplica a bola $B_\rho = \{x \in C_T : \|x\| \leq \rho, \rho \in \mathbb{R}_+\}$ em si mesma e seja A da forma*

$$A = A_1 + A_2, \tag{3.15}$$

onde A_1 é uma contração e A_2 é completamente contínuo. Então A tem ao menos um ponto fixo em B_ρ .

Adequando as condições do Teorema 3.15 para que o operador $\mathcal{M}_f$ definido em (2.8) tenha a forma (3.15), f deve ser uma l -contração ($l < 1$), isto é:

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq l \|x_1 - x_2\|, \quad x_1, x_2 \in \Omega, \quad l \in (0, 1). \quad (3.16)$$

Seja $\mathcal{M}_f = A_1 + A_2$, onde, $A_1 = \mathbb{P} + \mathbb{Q}\mathcal{F}$ e $A_2 = \mathbb{K}(I - \mathbb{Q})\mathcal{F}$.

De fato, se $x_1, x_2 \in B(\rho) \subset C_T$,

$$\begin{aligned} \|A_1(x_1) - A_1(x_2)\| &\leq \|\mathbb{P}(x_1 - x_2)\| + \|\mathbb{Q}(\mathcal{F}x_1 - \mathcal{F}x_2)\| \\ &\leq p \|x_1 - x_2\| + \|q\| \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \\ &\leq p \|x_1 - x_2\| + q l \|x_1 - x_2\| \\ &= (p + q l) \|x_1 - x_2\|, \end{aligned}$$

logo A_1 é uma contração se $(p + q l) < 1$.

Mostremos que A_2 é um operador completamente contínuo.

Seja $x \in B_\rho$, então por definição $A_2x = \mathbb{K}(I - \mathbb{Q})\mathcal{F}x \in C_T$ e verifica:

$$A'_2x = A(t)A_2x + (I - \mathbb{Q})\mathcal{F}x(t),$$

logo,

$$\begin{aligned} \|A_2x\| &\leq k(1 + q)\|f(t, x)\| \\ \|A'_2x\| &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \|A(t)\| (k(1 + q)\|f(t, x)\| + (1 + q)\|f(t, x)\|) \\ &= (1 + q) \left(k \sup_{t \in \mathbb{R}} \|A(t)\| + 1 \right) \|f(t, x)\|, \end{aligned}$$

Como $f \in C([\mathbb{R} \times \Omega], \mathbb{R}^n)$, existe $m > 0$, tal que $\|f(t, x)\| \leq m$ para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega$.

Logo, A_2 é completamente contínuo.

Isto implica que,

Teorema 3.16. *Se f satisfaz a condição (3.16), então $\mathcal{M}_f$ tem ao menos um ponto fixo em B_ρ .*

Soluções Periódicas das Equações de Lienard e Hill

Neste seção, faremos uso dos teoremas do capítulo 2 para provarmos a existência de soluções T -periódicas da equação periódica com termo forçante de Lienard, da equação de Van der Pol e da equação de Hill.

Estes problemas já foram extensivamente estudados por métodos tradicionais no século passado, havendo uma extensa bibliografia a respeito, por exemplo, [9], [30], [36]

4.1 Equação de Lienard

Consideremos a equação não linear de segunda ordem

$$x'' + h(x)x' + g(x) = e(t), \quad (4.1)$$

chamada de equação de Lienard.

Vamos assumir que $e, h, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas, $e(\cdot)$ é T -periódica e de valor médio nulo, isto é, $\frac{1}{T} \int_0^T e(t) dt = 0$.

Fazendo $e(t) \equiv 0$ em (4.1) temos

$$x'' + h(x)x' + g(x) = 0. \quad (4.2)$$

Assim, qualquer resultado qualitativo para (4.1) produz um resultado análogo para (4.2).

Denotemos $F(x) = \int_0^x h(x)dx$.

Lembramos que uma solução periódica para (4.1) é equivalente à existência de ponto fixo para o operador $\mathcal{M}_f$ correspondente.

Assim é mais conveniente analisar a equação (4.1) no plano de fase, isto é, considerar o sistema

$$\begin{cases} x' = y - F(x) \\ y' = -g(x) + e(t). \end{cases} \quad (4.3)$$

Pela equivalência de (4.1) e (4.3) as condições

- h é par (portanto $F(x)$ é ímpar), g é ímpar, $xg(x) > 0$ para todo $x \neq 0$, $f(0) < 0$,
- $F(x)sgn(x) \rightarrow^+ \infty$ quando $|x|$ tende ao infinito.
- $h, e \in C^0(\mathbb{R})$ e $g \in C^1(\mathbb{R})$,

asseguram a existência e unicidade de solução periódica de (4.1) para qualquer condição inicial arbitrária [18].

Observemos que o sistema (4.3) fica inalterável se (x, y) é substituído por $(-x, -y)$, isto significa que se a curva integral passa por $(0, y)$, ela deve passar também por $(0, -y)$.

Notemos que uma solução periódica de (4.1) corresponde a uma curva integral fechada do sistema (4.3).

O estudo do sistema (4.3) no lugar de (4.1) tem, em geral, a vantagem que algumas hipóteses de regularidade sobre F e g podem ser desconsideradas.

Usando os métodos desenvolvidos no capítulo 2 mostrarei que a equação de Lienard possui ao menos uma solução T-periódica.

De fato, fazendo $u = \begin{pmatrix} x \\ y = x' \end{pmatrix}$, podemos reescrever (4.1) como:

$$u' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} -F(x) \\ -g(x) + e(t) \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

em que

$$f(t, u) = \begin{pmatrix} -F(x) \\ -g(x) + e(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, u) \\ f_2(t, u) \end{pmatrix}.$$

A matriz fundamental do sistema homogêneo de (4.4) é dada por

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

logo, temos uma solução periódica $\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Então

$$\begin{aligned} \mathbb{P}u &= \frac{1}{T} \int_0^T (x(t), y(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Analogamente, calculamos a matriz fundamental da adjunta da equação homogênea de (4.4).

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix},$$

que possui uma solução periódica $\psi_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Para que a equação (4.4) tenha uma única solução T-periódica, devemos ter $\mathcal{F}x \in \text{Ker}\mathbb{Q}$, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T [-F(x(t)), g(x(t)) + e(t)] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt &= 0 \\ -\frac{1}{T} \int_0^T g(x(t)) dt + \frac{1}{T} \int_0^T e(t) dt &= 0 \\ -\frac{1}{T} \int_0^T g(x(t)) dt &= 0. \end{aligned}$$

Pela definição do operador $\mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned} (\mathbb{K}f)(t) &= \begin{pmatrix} \int_0^t \left[f_1(s) - \frac{1}{T} \int_0^T f_1 + \int_0^s f_2 \right] ds \\ -\frac{1}{T} \int_0^T f_1 + \int_0^t f_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\int_0^t F(x(s)) ds - \frac{1}{T} \int_0^t \int_0^T F(x(\tau)) d\tau ds + \int_0^t \int_0^s [-g(x(\tau)) + e(\tau)] d\tau ds \\ -\frac{1}{T} \int_0^T F(x(t)) dt + \int_0^t [-g(x(\tau)) + e(\tau)] d\tau \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, o operador $\mathcal{M}_f$ pode ser calculado:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_f u(t) = & \left(\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \right) + \\ & + \left(- \int_0^t F(x(s)) ds - \frac{1}{T} \int_0^t \int_0^T F(x(\tau)) d\tau ds + \int_0^t \int_0^s [-g(x(\tau)) + e(\tau)] d\tau ds \right. \\ & \left. - \frac{1}{T} \int_0^T F(x(t)) dt + \int_0^t [-g(x(\tau)) + e(\tau)] d\tau \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Como $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, escolhemos a norma

$$\|u\| = \|x\| + \|y\| = \|x\| + \|x'\|$$

e temos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}_f u\| = & \left\| \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \right\| + \\ & + \left\| - \int_0^t F(x(s)) ds - \frac{1}{T} \int_0^t \int_0^T F(x(\tau)) d\tau ds + \int_0^t \int_0^s [-g(x(\tau)) + e(\tau)] d\tau ds \right\| + \\ & + \left\| \frac{1}{T} \int_0^T F(x(t)) dt + \int_0^t [-g(x(\tau)) + e(\tau)] d\tau \right\|. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}_f u\| \leq & \left\| \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \right\| + \left\| \int_0^t F(x(s)) ds \right\| + \left\| \frac{1}{T} \int_0^t \int_0^T F(x(\tau)) d\tau ds \right\| \\ & + \left\| \int_0^t \int_0^s [-g(x(\tau)) + e(\tau)] d\tau ds \right\| + \\ & + \left\| \frac{1}{T} \int_0^T F(x(t)) dt \right\| + \left\| \int_0^t [-g(x(\tau)) + e(\tau)] d\tau \right\|. \end{aligned}$$

Usando a definição de norma $\|u\| = \|x\| + \|x'\|$, escrevemos a desigualdade anterior na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\max_{t \in [0, T]} |\mathcal{M}ju(t)| &\leq \max_{t \in [0, T]} |x(t)| + \max_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t F(x(s)) ds \right| + \max_{t \in [0, T]} \left| \frac{1}{T} \int_0^t \int_0^T F(x(\tau)) d\tau ds \right| \\
&+ \max_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t \int_0^s [-g(x(\tau)) + e(\tau)] d\tau ds \right| + \\
&+ \max_{t \in [0, T]} \left| \frac{1}{T} \int_0^T F(x(t)) dt \right| + \max_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t [-g(x(\tau)) + e(\tau)] d\tau ds \right| \\
&\leq \max_{t \in [0, T]} |x(t)| + \max_{t \in [0, T]} (2t + 1) |F(x(t))| \\
&+ \max_{t, s \in [0, T]} (ts + t) |-g(x(t)) + e(t)| \\
&\leq \max_{t \in [0, T]} |x(t)| + (2T + 1) \max_{t \in [0, T]} |F(x(t))| \\
&+ (T^2 + T) \max_{t \in [0, T]} |-g(x(t)) + e(t)|.
\end{aligned}$$

Supondo $H = \max_{\|x\| \leq \rho} |h(x)|$, $G = \max_{\|x\| \leq \rho} |g(x)|$ e $E = \|e\|$, então $\|x''\| \leq H\|x'\| + G + E$.

Da desigualdade de Landau: $\|x'\|^2 \leq 4\|x\|\|x''\|$, temos,

$$\|x'\| \leq C\|x\|, \text{ onde } C = C(x, x', x'').$$

Escrevendo $L := \min\{2T + 1, T^2 + T\}$, e escolhendo as funções F, g, e de (4.4) de tal forma que:

$$\begin{aligned}
&\max_{t \in [0, T]} |x(t)| + (2T + 1) \max_{t \in [0, T]} |F(x(t))| + (T^2 + T) \max_{t \in [0, T]} |-g(x(t)) + e(t)| \\
&\leq \max_{t \in [0, T]} |x(t)| + \max_{t \in [0, T]} |x'(t)| \\
&\leq \max_{t \in T} |x(t)| + C \max_{t \in [0, T]} |x(t)|.
\end{aligned}$$

Obtemos

$$L/C \left(\max_{t \in T} |F(x(t))| + \max_{t \in T} |-g(x(t)) + e(t)| \right) \leq \max_{t \in T} |x(t)|,$$

ou

$$L/C (\|F(x)\| + \|-g(x) + e(\cdot)\|) \leq \|x\|.$$

Isto é, o operador $\mathcal{M}_f$ construído a partir de (4.4) possui um ponto fixo em $B(\rho)$.

Assim, mostramos o seguinte,

Teorema 4.1. *Seja a equação de Lienard (4.1), com $e, h, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas, $e(\cdot)$ T -periódica de valor médio nulo e seja $F(x) = \int_0^x h(s) ds$. Suponhamos que*

$$\int_0^T g(x(t)) dt = 0 \quad e$$

$$L/C (\|F(x)\| + \|-g(x) + e(\cdot)\|) \leq \|x\|,$$

com $L := \min\{2T+1, T^2+T\}$ e $\|x'\| \leq C\|x\|$, onde $C = C(x, x', x'')$. Então, a equação (4.1) tem solução T -periódica.

4.2 Equação de Van der Pol

Como um caso especial da equação de Lienard (4.1), obtemos

$$x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = 0, \quad (4.6)$$

a equação de Van der Pol com $\mu > 0$, fazendo $h(x) = \mu(x^2 - 1)$, $g(x) = x$ e $e(t) = 0$.

No plano de fase, (4.6) é equivalente a

$$\begin{cases} x' = y - \mu(\frac{x^3}{3} - x) \\ y' = -x, \end{cases} \quad (4.7)$$

Fazendo

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y = x' \end{pmatrix}, \quad f(t, u) = \begin{pmatrix} -\mu(\frac{x^3}{3} - x) \\ -x \end{pmatrix},$$

podemos reescrever (4.7) como:

$$u' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} -\mu(\frac{x^3}{3} - x) \\ -x \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Pelos resultados acima, temos $\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\psi_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Para que a equação (4.7) tenha uma única solução T -periódica, devemos ter $\mathcal{F}x = \left(-\mu(\frac{x^3}{3} - x), -x\right) \in \text{Ker}\mathbb{Q}$, isto é $\int_0^T x(t)dt = 0$

Analogamente ao caso anterior, o operador $\mathcal{M}_f$ construído a partir de

$$f(t, u) = \begin{pmatrix} -\mu(\frac{x^3}{3} - x) \\ -x \end{pmatrix}$$

é da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_J u(t) &= \left(\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \right) + \\
 &+ \left(- \int_0^t \mu \left(\frac{x^3(s)}{3} - x(s) \right) ds - \frac{1}{T} \int_0^t \int_0^T \mu \left(\frac{x^3(\tau)}{3} - x(\tau) \right) d\tau ds + \int_0^t \int_0^s [-x(\tau)] d\tau ds \right) \\
 &\quad - \frac{1}{T} \int_0^T \mu \left(\frac{x^3(t)}{3} - x(t) \right) dt + \int_0^t [-x(\tau)] d\tau \\
 &= \left(- \int_0^t \mu \left(\frac{x^3(s)}{3} - x(s) \right) ds - \frac{1}{T} \int_0^t \int_0^T \mu \left(\frac{x^3(\tau)}{3} - x(\tau) \right) d\tau ds + \int_0^t \int_0^s [-x(\tau)] d\tau ds \right) \\
 &\quad - \frac{1}{T} \int_0^T \mu \left(\frac{x^3(t)}{3} - x(t) \right) dt + \int_0^t [-x(\tau)] d\tau
 \end{aligned}$$

Podemos formular agora um resultado análogo ao Teorema 4.1.

Teorema 4.2. *A equação de Van der Pol (4.6) tem uma solução T -periódica em $B(0, \rho) = \{x \in C_T : \|x\| \leq \rho, \rho > 0\}$, se*

$$\frac{\mu(2T+1)}{C+1-T(T+1)} \left\| \frac{x^3}{3} - x \right\| \leq \|x\|,$$

onde $\|x'\| \leq C\|x\|$ com $C = C(x, x', x'')$

4.3 Equação de Hill

Uma das equações diferenciais ordinárias que descreve por exemplo as oscilações de uma mola ou as oscilações de um pendulo, etc, é a equação de Hill dada por [9].

$$\ddot{x} + p(t)x = 0, \tag{4.9}$$

com $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, uma função T -periódica.

Fazendo uso dos métodos usados no capítulo 2, daremos uma demonstração para provar que a equação de Hill possui ao menos uma solução T -periódica.

Seja $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Escrevemos (4.9) da seguinte forma

$$z' = f(t, z), \tag{4.10}$$

em que $f(t, z) = \begin{pmatrix} y \\ -p(t)x \end{pmatrix}$.

Observamos que a equação (4.10) é um caso particular da equação (2.1) com $A(t) \equiv 0$.

Portanto o operador $\mathcal{M}_f$ construído a partir de f de (4.10) tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_f z(t) = & \begin{pmatrix} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ - \int_0^T p(t)x(t) dt \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} \int_0^t x'(\tau) d\tau \\ - \int_0^t p(\tau)x(\tau) d\tau \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \int_0^t \int_0^T p(\sigma)x(\sigma) d\sigma d\tau \end{pmatrix} \\ & - \begin{pmatrix} \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^t x'(\tau) d\tau dt \\ - \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^t p(\tau)x(\tau) d\tau dt \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ - \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^t \int_0^T p(\sigma)x(\sigma) d\sigma d\tau dt \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Usando a norma definida anteriormente na secção 4.1, temos:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}_f z\| \leq & \left\| \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \right\| + \left\| \int_0^T p(t)x(t) dt \right\| \\ & + \left\| \int_0^t x'(\tau) d\tau \right\| + \left\| \int_0^t p(\tau)x(\tau) d\tau \right\| + \left\| \int_0^t \int_0^T p(\sigma)x(\sigma) d\sigma d\tau \right\| \\ & + \left\| \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^t x'(\tau) d\tau dt \right\| + \left\| \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^t p(\tau)x(\tau) d\tau dt \right\| \\ & + \left\| \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^t \int_0^T p(\sigma)x(\sigma) d\sigma d\tau dt \right\|, \end{aligned} \quad (4.12)$$

isto é,

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, T]} |\mathcal{M}_f z(t)| & \leq \max_{t \in [0, T]} |x(t)| + T \max_{t \in [0, T]} |p(t)x(t)| \\ & + \max_{t \in [0, T]} |x(t)| + T \max_{t \in [0, T]} |p(t)x(t)| + T^2 \max_{t \in [0, T]} |p(t)x(t)| \\ & + \max_{t \in [0, T]} |x(t)| + T \max_{t \in [0, T]} |p(t)x(t)| \\ & + T \max_{t \in [0, T]} |p(t)x(t)| \\ & \leq 3 \max_{t \in [0, T]} |x(t)| + (4T + T^2) \max_{t \in [0, T]} |p(t)||x(t)|. \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} 3 \max_{t \in [0, T]} |x(t)| + (4T + T^2) \max_{t \in [0, T]} |p(t)| |x(t)| &\leq \max_{t \in [0, T]} |x(t)| + \max_{t \in [0, T]} |x'(t)| \\ &\leq \max_{t \in [0, T]} |x(t)| + C \max_{t \in [0, T]} |x(t)|, \end{aligned}$$

e isto significa que

$$\max_{t \in [0, T]} |p(t)| \leq \frac{1 + C}{3 + (4T + T^2)}.$$

Assim mostramos o seguinte,

Teorema 4.3. *A equação de Hill (4.9) tem uma solução T -periódica, se a função $p(t)$ satisfaz:*

$$\max_{t \in [0, T]} |p(t)| \leq \frac{1 + C}{3 + (4T + T^2)},$$

onde $\|x'\| \leq C\|x\|$ com $C = C(x, x', x'')$.

■

Referências Bibliográficas

- [1] M. Altman, A fixed point theorem in Banach space, *Bulletin de l'academie Polonaise des Sciences*, III, vol. II, 1957, pp. 1–2.
- [2] H. Amann, *Lectures on some fixed point theorems*, Monografias em Matemática - IMPA, 1975.
- [3] H. Amann e S. Weiss, On the uniqueness of the topological degree, *Math. Zeitschr.*, (1973), no. 130, 39–54.
- [4] L.E.J. Brouwer, Uber eineindeutig, stetige transformationen von flächen en sich, *Math. Ann.* (1910), no. 69, 176–180.
- [5] F. Browder, Nonexpansive nonlinear operators in Banach space, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* (1965/66), no. 54, 1041–1044.
- [6] F. Browder, The fixed point theory of multivalued mappings in topological vector spaces, *Math. Anal* (1968), no. 177, 233–301.
- [7] L. Cesari, Functional analysis and periodic solutions of nonlinear differential equations, *Contrib. Differential Equations* (1963), no. 1, 149–187.
- [8] N. Coddington, E. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, Mc Graw-Hill, New York, 1955.
- [9] J. Cronin, *Differential equations, introduction and qualitative theory*, no. 54, 1980.

- [10] J. Cronin, *Fixed points and topological degree in nonlinear analysis*, Math. Surveys, no. 11, Amer. Math. Soc, Providence, R.I., 1964.
- [11] G. Darbo, Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* (1955), no. 24, 84–92.
- [12] J. Dugundji, *Topological*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.
- [13] J. Hale, *Ordinary differential equations*, Wiley-Interscience, New York, 1969.
- [14] P. Hartman, *Ordinary differential equations*, Wiley, New York, 1964.
- [15] M.A. Krasnoselskii, Two remarks on the method of successive approximations (russian), *Uspehi Mat. Nauk* 10 (1955), no. 1, 123–127.
- [16] M.A. Krasnoselskii, *Méthodes topologiques dans l'étude des équations intégrale non linéaires*, GITTL, Moscou, 1956.
- [17] C. Kuratowski, *Topologie*, 4th ed., 1962.
- [18] S. Lefschetz, *Differential Equations: Geometric Theory*, Interscience publisher, Inc., New York, 1957.
- [19] J. Leray e J. Schauder, Topologie et équations fonctionnelles, *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, no. 51, pp. 45–63.
- [20] Bai Ling e Wang Ke, Optimal Impulsive Harvest Policy for Time-Dependent logistic Equation with Periodic Coefficients, *Electronic Journal of Differential Equations* 2003 (2003), no. 121, 1–9.
- [21] M. Naguno, Degree of mapping in convex linear topological spaces, *American Journal of Mathematics* 73 (1951), 497–511.
- [22] L. Nirenberg, *Topics in nonlinear functional analysis*, Lectures Notes, Courant Institute Math. Sci., 1974.
- [23] R.D. Nussbaum, The fixed point index for local condensing maps, *Ann. Math. pura Appl.* (1971), no. 89, 217–258.

- [24] D. O'Regan, Fixed point theory of Browder-Fan type, *Appl. Anal.* **69** (1998), no. 1,2, 25–30.
- [25] D. O'Regan, Fixed point theory for compact uppersemi-continuous or lowersemi-continuous maps, *Proc. Amer. Math. Soc.* (1997), no. 125, 875–881.
- [26] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, vol. I,II,III, Gauthier-Villars, Paris, 1899.
- [27] E. Rothe, Theorie der topologischen Ordnung und der Vektorfeldern in Banach-Schen Räumen, *Comp. Math.*, no. 5, 1937, pp. 177–197.
- [28] N. Rouche e J. Mawhin, *Équations différentielles ordinaires*, vol. I,II, Masson ET Cie, 1973.
- [29] B. N. Sadovskii, On a fixed point theorem, *Funkcional Anal. i Prilozhen* (1967), no. 1.
- [30] R. Sansone, G. Conti, *Nonlinear differential equations*, Mac Millan, New York, 1964.
- [31] Reissig R. Sansone, G e R. Conti, *Non-linear differential equations of higher order*, Noordhoff International Publishing Lerdén, 1974.
- [32] J. Schauder, Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, *Studia Math.* (1930), no. 2, 170–179.
- [33] J. Schwartz, *Nonlinear functional analysis*, Gordon and Breach, New York, 1969.
- [34] H. Siegborg, Some historical remarks concerning degree theory, *Amer. Math. Monthly* (1981), no. 88, 125–139.
- [35] H. Tychonov, Ein fixpunktsatz, *Math. Ann* (1935), no. 111, 767–776.
- [36] G. Villari, On the existence of periodic solutions for lienard 's equations, *Nonlin. Anal* **7** (1983), no. 1, 71–78.
- [37] M. Zabreiko, P. Krasnoselskii, A method for producing new fixed point theorems, *Soviet Math. Dokl.* **8** (1967), no. 5, 1297–1299.