Classificação das superálgebras
alternativas em
característica diferente de dois e três

Ana Paula Teles de Oliveira

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE
EM
CIÊNCIAS

Área de Concentração: Matemática
Orientadora: Prof. Dra. Lucia Satie Ikemoto Murakami

São Paulo, outubro de 2006.

Classificação das superálgebras
alternativas em
característica diferente de dois e três

Este exemplar corresponde à redação final da
dissertação devidamente corrigida e defendida
por Ana Paula Teles de Oliveira
aprovada pela Comissão Julgadora.

São Paulo, 10 de outubro de 2006.

Banca Examinadora:

Profa: Dra. Lucia Satie Ikemoto Murakami (orientadora) - IME/USP

Prof: Dr. Ivan Shestakov - IME/USP

Prof: Dr. Juaci Picanço da Silva - UFPA

Agradecimentos

A Deus, por permitir que eu realizasse o meu sonho de cursar a licenciatura aqui no IME, e Ele me concedeu a oportunidade de concluir também o mestrado.

Aos meus pais Osório e Socorro, pelo apoio em todos os aspectos da minha vida.

As minhas irmãs Luciana, Cristina e Raquel, e a minha amiga Ana Beatriz, que não negaram esforços para me ajudar quando necessitei.

Aos professores e funcionários.

A professora Mary Lilian que, de maneira muito especial, me auxiliou e aconselhou.

A professora Lúcia que, com sua paciência, compreensão, dedicação e amizade, tornou possível a realização desse trabalho.

A todos vocês, que marcaram profundamente a minha vida, muito obrigada.

Resumo

Neste trabalho propomo-nos a realizar um estudo sobre as superálgebras alternativas simples, classificando-as. Demonstraremos o teorema principal, mostrando que para característica diferente de 2 e 3 as superálgebras alternativas simples são associativas ou uma álgebra de Cayley-Dickson.

Abstract

The aim of this work is to study simple alternative superalgebras. The main theorem states that, for characteristic not 2 and 3, simple alternative superalgebras are associative or Cayley-Dickson algebras.

Introdução

O nosso objetivo é a classificação das superálgebras alternativas simples em característica diferente de dois e três.

No primeiro capítulo, estudaremos álgebras alternativas. Esse capítulo está baseado em [14], Capítulos 2, 5, 7, 8, 9 e 13, em [1], Capítulo 1 e em [8], Capítulos 1, 2 e 3. As álgebras com composição têm um papel fundamental na teoria das álgebras alternativas. A Seção 1.2.1 tratará da classificação das álgebras com composição. Toda álgebra alternativa quadrática simples com característica diferente de dois é uma álgebra com composição. Com esse resultado, iremos classificar as álgebras alternativas quadráticas simples. O Teorema de Kleinfeld, que diz que a única álgebra alternativa simples, não associativa, é a álgebra de Cayley-Dickson, será provado na Seção 2.5.

O Capítulo 3 está baseado nos artigos [10], [11] e [12]. Nesse capítulo, definiremos superálgebras alternativas. Em uma superálgebra alternativa, a parte ímpar é um bimódulo alternativo. Dessa maneira teremos uma seção sobre bimódulos. O estudo sobre bimódulos será baseado nos artigos [3] e [9]. Ao estudarmos bimódulos, veremos a relação entre suas bi-representações. Um resultado importante é que um bimódulo alternativo é soma direta de um bimódulo associativo e um bimódulo de Cayley. As superálgebras têm um papel fundamental para as álgebras não associativas. Uma das utilidades é a construção de exemplos de álgebras solúveis que não sejam nilpotentes, teremos um exemplo nesse capítulo no caso em que a álgebra é alternativa.

Na primeira seção do capítulo 4, provaremos o principal teorema desta dissertação, que trata da classificação das superálgebras alternativas simples em característica diferente de 2 e 3. Na Seção 4.2, apresentaremos alguns exemplos de superálgebras simples em característica igual a dois e três.

Sumário

1	Álgebras alternativas	7
1.1	Álgebras alternativas	7
1.2	Álgebras com composição	11
1.2.1	Processo de Cayley-Dickson	16
1.2.2	Álgebras quadráticas simples	24
1.2.3	Álgebras split	27
2	Álgebras alternativas simples	33
2.1	Resultados sobre as álgebras alternativas	33
2.2	Álgebras alternativas simples	37
2.3	Identities do centro associativo das álgebras alternativas . .	40
2.4	O teorema de Shirshov	48
2.5	O teorema de Kleinfeld	55
2.6	Anel de Cayley-Dickson	57
3	Superálgebras alternativas	67
3.1	Superálgebras	67
3.2	Bimódulos	69
3.3	Superálgebras alternativas	74
3.4	Superálgebras alternativas primas	83
4	A classificação	86
4.1	Teorema principal	86
4.2	Exemplos em característica 2 e 3	95

Capítulo 1

Álgebras alternativas

Neste trabalho, iremos considerar álgebras não associativas sobre um corpo F de característica diferente de dois e três. Uma *álgebra* A sobre F é um espaço vetorial sobre F , com uma operação de multiplicação, tal que $(x + y)z = xz + yz$, $x(y + z) = xy + xz$ e $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$, para todos $x, y, z \in A, \alpha \in F$.

Os conceitos de subálgebras, ideais e homomorfismos não envolvem a associatividade. Estas definições são a mesma em qualquer classe de álgebras (associativas ou não).

Seja A uma álgebra e $a \in A$. Denotamos por $\text{id}\langle a \rangle$ o ideal gerado por a em A . Seja X um conjunto de A , denotamos por $\text{alg}\langle X \rangle$ a álgebra gerada pelo conjunto X .

A *linearização* é uma ferramenta importante no estudo de álgebras não associativas. Ela consiste em tomar uma variável em uma identidade e substituir pela soma de duas variáveis, obtendo assim uma nova identidade equivalente à original, onde o grau da variável substituída é menor. Se o corpo tem característica zero, a linearização completa de uma identidade produz uma identidade multilinear equivalente à identidade dada.

1.1 Álgebras alternativas

Uma álgebra A sobre o corpo F é chamada de *álgebra alternativa* se, para todos $x, y \in A$, temos $x^2y = x(xy)$ e $yx^2 = (yx)x$. Linearizando essas identidades, teremos

$$xz.y + zx.y = x.zy + z.xy \quad \text{e} \quad y.xz + y.zx = yx.z + yz.x,$$

para quaisquer $x, y, z \in A$. Podemos observar que toda álgebra associativa é uma álgebra alternativa.

Toda álgebra pode ser imersa numa álgebra com unidade. Se a álgebra A não possui unidade, definimos em $\hat{A} = F \times A$ uma estrutura de álgebra, onde a soma é feita coordenada a coordenada e a multiplicação é definida por $(\alpha, a)(\beta, b) = (\alpha\beta, ab + \alpha b + \beta a)$, para todos $(\alpha, a), (\beta, b) \in \hat{A}$. Observe que a unidade é $(1, 0)$ e a álgebra A está contida em $\hat{A}$, pois A é isomorfa à subálgebra de $\hat{A}$ formada pelos elementos cuja primeira coordenada é nula. Logo, podemos escrever $(\alpha, a) = \alpha.1 + a$, ou simplesmente, $\alpha + a$. Vamos verificar que se A é alternativa, então $\hat{A}$ também é. Sejam $x, y \in \hat{A}$, tais que $x = \alpha + a, y = \beta + b$, temos que

$$\begin{aligned} x^2y &= (\alpha + a)^2(\beta + b) \\ &= (\alpha^2 + 2\alpha a + a^2)(\beta + b) \\ &= \alpha^2\beta + \alpha^2b + 2\alpha\beta a + \beta a^2 + 2\alpha ab + a^2b \\ &= \alpha^2\beta + \alpha\beta a + \alpha^2b + \alpha ab + \alpha\beta a + \alpha ab + \beta a^2 + a.ab \\ &= (\alpha + a)(\alpha\beta + \alpha b + \beta a + ab) \\ &= (\alpha + a)((\alpha + a)(\beta + b)) = x(xy). \end{aligned}$$

De modo análogo, podemos provar que $xy^2 = (xy)y$. Logo, se A não possui unidade, podemos considerar $\hat{A}$.

Sejam $x, y, z \in A$. Definimos:

- $[x, y] = xy - yx$, o *comutador* de x e y .
- $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$, o *associador* de x, y e z .
- $x \circ y = xy + yx$, o *produto de Jordan* de x e y .

Dessa maneira, podemos caracterizar as leis alternativas utilizando o associador.

Proposição 1.1.1. *Seja A uma álgebra alternativa e $x, y, z \in A$. Então*

$$\begin{aligned} (x, x, y) &= (y, x, x) = 0, \\ (x, y, z) &= -(x, z, y), \\ (x, y, z) &= -(y, x, z), \\ (x, y, x) &= 0. \end{aligned}$$

Demonstração. Pelas leis alternativas, sabemos que são válidas as três primeiras identidades. Como $(x, y, z) = -(x, z, y)$, temos que

$$(x, y, x) = -(x, x, y) = 0,$$

terminando assim a demonstração. $\square$

Neste momento, vamos mostrar que o produto de dois ideais I e J de uma álgebra alternativa A é um ideal de A . Como IJ é um subespaço, basta verificar que a multiplicação de elementos de IJ por elementos de A pertence a IJ . Sejam $i \in I$ e $j \in J$. Para qualquer $a \in A$, temos

$$(ij)a = i(ja) + (i, j, a) = i(ja) - (i, a, j) = i(ja) - (ia)j + i(aj) \in IJ.$$

Do mesmo modo, temos

$$a(ij) = (ai)j - (a, i, j) = (ai)j + (i, a, j) = (ai)j + (ia)j - i(aj) \in IJ.$$

Outras propriedades importantes são as chamadas *Identidades de Moufang*, que estão descritas a seguir.

Proposição 1.1.2. *Seja A uma álgebra alternativa e $x, y, z \in A$. Então*

1. $(xzx)y = x(z(xy))$, a identidade de Moufang à esquerda;
2. $y(xzx) = ((yx)z)x$, a identidade de Moufang à direita;
3. $(xy)(zx) = x(yz)x$, a identidade de Moufang central;
4. $(y, xz, x) = -(y, x, z)x$;
5. $(x, zx, y) = -x(z, x, y)$.

Demonstração. 1. Para quaisquer $x, y, z \in A$, temos

$$\begin{aligned} (xzx)y - x(z(xy)) &= (xz, x, y) + (x, z, xy) \\ &= -(x, xz, y) - (x, xy, z) \\ &= -(x(xz))y + x((xz)y) \\ &\quad - (x(xy))z + x((xy)z) \\ &= -(x^2z)y - (x^2y)z + x((xz)y + (xy)z) \\ &= -(x^2, z, y) - (x^2, y, z) - x^2(z y) \\ &\quad - x^2(yz) + x((xz)y + (xy)z) \\ &= -(x^2, z, y) + (x^2, z, y) \\ &\quad + x(-x(z y) - x(yz) + (xz)y + (xy)z) \\ &= x((x, z, y) + (x, y, z)) \\ &= x((x, z, y) - (x, z, y)) = 0. \end{aligned}$$

2. Demonstração análoga à anterior.

3. Sejam $x, y, z \in A$. Temos

$$\begin{aligned}
 (xy)(zx) - x(yz)x &= (x, y, zx) + x(y(zx)) - x(yz)x \\
 &= (x, y, zx) + x(y(zx) - (yz)x) \\
 &= -(x, zx, y) - x(y, z, x) \\
 &= -(x(zx))y + x((zx)y - x(y, z, x)) \\
 &= -(xzx)y + x((zx)y - (y, z, x)) \text{ pela identidade} \\
 &\quad \text{de Moufang à esquerda} \\
 &= -x(z(xy) - (zx)y + (y, z, x)) \\
 &= -x(-(z, x, y) + (y, z, x)) = 0.
 \end{aligned}$$

4. Sejam $x, y, z \in A$. Então

$$\begin{aligned}
 (y, xz, x) &= (y(xz))x - y(xzx) \text{ pela identidade} \\
 &\quad \text{de Moufang à direita} \\
 &= (y(xz))x - ((yx)z)x \\
 &= -(y, x, z)x.
 \end{aligned}$$

5. Prova análoga à anterior.

□

As identidades dos itens 4 e 5 são generalizações das identidades de Moufang à direita e à esquerda. Se elas forem linearizadas, teremos

$$(x, zw, y) + (w, zx, y) = -x(z, w, y) - w(z, x, y), \quad (1.1)$$

$$(y, wz, x) + (y, xz, w) = -(y, w, z)x - (y, x, z)w, \quad (1.2)$$

para todos $x, y, z, w \in A$.

Um resultado muito importante é o Teorema de Artin, que caracteriza as álgebras alternativas.

Teorema 1.1.3 (Artin). *A é uma álgebra alternativa se, e somente se, toda subálgebra gerada por dois elementos de A for associativa.*

Demonstração. Seja A uma álgebra tal que toda subálgebra gerada por dois elementos de A é associativa. Então claramente A é alternativa. Vamos verificar a condição contrária. Sejam $x, y \in A$. Sejam $p = p(x, y), q = q(x, y)$

e $r = r(x, y)$ monômios não nulos em x e y . Denotaremos o grau do monômio p por dp .

Vamos provar por indução em $n = dp + dq + dr$ que $(p, q, r) = 0$. Para $n = 3$, temos que $dp = dq = dr = 1$. Como p, q e r são monômios iguais a x ou a y e A é alternativa, então $(p, q, r) = 0$. A nossa hipótese de indução será que $(p', q', r') = 0$, para todos os monômios p', q' e r' com $dp' + dq' + dr' < n$. Vamos provar que $(p, q, r) = 0$ para $dp + dq + dr = n$. Como x e y são os únicos fatores de p, q e r , temos que dois monômios começam com a mesma letra. Podemos supor que q e r começam com a letra x . Vamos agora separar em três casos:

Caso 1: Se $dq > 1$ e $dr > 1$. Pela hipótese de indução temos que $q = xq'$ e $r = xr'$. Dessa forma, temos $dq' = -1 + dq$ e $dr' = -1 + dr$. Ao utilizarmos a Identidade de Moufang 4 e (1.2), temos

$$\begin{aligned} (p, q, r) &= (p, xq', xr') \\ &= -(xr', xq', p) \\ &= (xr', pq', x) + (xr', x, q')p + (xr', p, q')x \\ &= (xr', pq', x) \\ &= -(pq', xr', x) \\ &= (pq', x, r')x. \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução, temos $(p, q, r) = (pq', x, r')x = 0$

Caso 2: Se $dq > 1$ e $dr = 1$. Pela hipótese de indução temos $q = xq'$, logo $dq' = -1 + dq$. Pela Identidade de Moufang 4, temos

$$\begin{aligned} (p, q, r) &= (p, xq', x) \\ &= -(p, x, q')x. \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução, temos $(p, q, r) = -(p, x, q')x = 0$.

Caso 3: Se $dq = dr = 1$, então $q = r = x$. Como A é alternativa, temos que $(p, q, r) = 0$. $\square$

1.2 Álgebras com composição

O objetivo desta seção é estudar álgebras que tenham formas quadráticas não degeneradas sobre um corpo arbitrário. Isso leva à descrição de uma classe de álgebras, conhecida como álgebras com composição, que têm um papel fundamental na teoria das álgebras alternativas. Começaremos com algumas definições.

Sejam F um corpo e A um espaço vetorial não nulo sobre F . A função $f : A \times A \rightarrow F$ é *bilinear* se f for linear em cada coordenada. Dizemos que f é *simétrica* se $f(x, y) = f(y, x)$, para todos $x, y \in A$. E f é *não degenerada* se $f(x, y) = 0$, para todo $y \in A$, implicar $x = 0$.

Uma função $n : A \rightarrow F$ é chamada *forma quadrática* se $n(\alpha x) = \alpha^2 n(x)$, e se $f(x, y) = n(x + y) - n(x) - n(y)$ for bilinear em A , para arbitrários $x, y \in A$ e $\alpha \in F$.

Chamamos n de *estritamente não degenerada* se f definida acima for não degenerada. Dizemos que n *admite composição* se $n(x)n(y) = n(xy)$, para todos $x, y \in A$.

Definição. Uma álgebra A sobre F com forma quadrática n é chamada de *álgebra com composição* se, para todos $x, y \in A$, tivermos

- (i) $n(xy) = n(x)n(y)$,
- (ii) n é estritamente não degenerada,
- (iii) a álgebra A possui unidade.

Seja A uma álgebra com unidade sobre F . Dizemos que A é *quadrática* se, para qualquer $x \in A$, existirem $t(x), n(x) \in F$ tais que

$$x^2 - t(x)x + n(x) = 0. \quad (1.3)$$

Chamamos $t(x)$ de *traço de x* e $n(x)$ de *norma de x* . Prova-se que ambas são unicamente determinadas.

Agora veremos a relação entre álgebras alternativas e álgebras com composição.

Lema 1.2.1. *Seja A uma álgebra com composição. Então A é alternativa e cada elemento de A satisfaz uma equação quadrática com coeficientes em F , ou seja, A é quadrática sobre F .*

Demonstração. Podemos tomar $F.1 = F$ como subálgebra de A . Sejam $x, y, w, z, u \in A$. Como A é álgebra com composição, temos

$$n(x)n(y + w) = n(xy + xw) \quad (1.4)$$

e

$$n(x)f(y, w) = f(xy, xw), \quad (1.5)$$

pois

$$\begin{aligned} n(x)f(y, w) &= n(x)(n(y + w) - n(y) - n(w)) \\ &= n(xy + xw) - n(xy) - n(xw) \\ &= f(xy, xw). \end{aligned}$$

Observemos que

$$f(x, z)f(y, w) = f(xy, zw) + f(zy, xw), \quad (1.6)$$

pois

$$\begin{aligned} f(x, z)f(y, w) &= (n(x + z) - n(x) - n(z))f(y, w) \\ &= f(xy + zy, xw + zw) - f(xy, xw) - f(zy, zw) \\ &= f(xy, xw) + f(xy, zw) + f(zy, xw) \\ &\quad + f(zy, zw) - f(xy, xw) - f(zy, zw). \end{aligned}$$

Substituindo $z = 1$ e $y = xu$ em (1.6), temos

$$f(x, 1)f(xu, w) = f(x.xu, w) + f(xu, xw). \quad (1.7)$$

Por (1.5) e (1.7), temos

$$f(x.xu, w) + n(x)f(u, w) - f(x, 1)f(xu, w) = 0.$$

Usando que f é bilinear e $n(x) \in F$, temos

$$f(x.xu + n(x)u - f(x, 1)xu, w) = 0.$$

Como $f(x, y)$ é não degenerada e w é qualquer, temos

$$x.xu + n(x)u - f(x, 1)xu = 0, \quad (1.8)$$

para todos $x, u \in A$. Tomando $u = 1$ temos

$$x^2 - f(x, 1)x + n(x) = 0. \quad (1.9)$$

Vamos agora mostrar que A é alternativa. Tomando (1.9), multiplicando por u e subtraindo (1.8), temos

$$x^2.u - f(x, 1)xu + n(x)u - x.xu - n(x)u + f(x, 1)xu = 0.$$

Logo, $x^2u = x.xu$.

Para demonstrar que $ux^2 = ux.x$, basta tomar $y = ux$ em (1.6) e repetir todo o processo. $\square$

Vamos agora determinar t e n .

Seja ρ um endomorfismo linear de A . Dizemos que ρ é *involução* da álgebra A se, para todos $a, b \in A$, tivermos $\rho(\rho(a)) = a$ e $\rho(ab) = \rho(b)\rho(a)$.

Lema 1.2.2. *A função definida por $a \mapsto \bar{a} = f(1, a) - a$, para qualquer $a \in A$, é uma involução da álgebra A que deixa os elementos de F fixos. Para cada $a \in A$, temos que $t(a) = a + \bar{a} \in F$, $n(a) = a\bar{a} \in F$ e a satisfaz a identidade $a^2 - t(a)a + n(a) = 0$.*

Demonstração. Vamos verificar as propriedades da involução. Sejam $a, b \in A$ e $\alpha \in F$. Mostraremos que $a \mapsto \bar{a}$ é linear. Temos

$$\begin{aligned}\overline{a+b} &= f(1, a+b) - (a+b) \\ &= f(1, a) - a + f(1, b) - b \\ &= \bar{a} + \bar{b}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\overline{\alpha a} &= f(1, \alpha a) - \alpha a \\ &= \alpha(f(1, a) - a) \\ &= \alpha \bar{a}.\end{aligned}$$

Agora vamos mostrar que $\bar{\bar{a}} = a$, para todo $a \in A$. Sabemos que

$$\begin{aligned}\bar{\bar{a}} &= f(1, \bar{a}) - \bar{a} \\ &= f(1, f(1, a) - a) - f(1, a) + a \\ &= f(1, f(1, a)) - f(1, a) - f(1, a) + a \\ &= f(1, a)f(1, 1) - 2f(1, a) + a.\end{aligned}$$

Temos que $n(1) = n(1)n(1)$, logo $n(1)(1 - n(1)) = 0$. Desse modo, temos $f(1, 1) = n(2) - n(1) - n(1) = 4n(1) - 2 = 2$. Então

$$\bar{\bar{a}} = 2f(1, a) - 2f(1, a) + a = a.$$

Vamos verificar que $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$, para arbitrários $a, b \in A$. A equação (1.9) é válida para a, b e $a+b$. Logo,

$$\begin{aligned}a^2 - f(a, 1)a + n(a) &= 0, \\ b^2 - f(b, 1)b + n(b) &= 0, \\ a^2 + ab + ba + b^2 - f(a, 1)a - f(a, 1)b - f(b, 1)a - f(b, 1)b + n(a+b) &= 0.\end{aligned}$$

Ao subtrairmos as duas primeiras expressões da última, temos

$$ab + ba - f(a, 1)b - f(b, 1)a + n(a + b) - n(a) - n(b) = 0. \quad (1.10)$$

Substituindo $x = y = 1, z = a$ e $w = b$ em (1.6), temos

$$f(1, a)f(1, b) = f(1, ab) + f(a, b). \quad (1.11)$$

Substituindo (1.11) em (1.10), temos

$$ab + ba - f(1, a)b - f(1, b)a + f(1, a)f(1, b) - f(1, ab) = 0. \quad (1.12)$$

Ao utilizarmos (1.11) e (1.12), temos

$$\begin{aligned} \bar{a}\bar{b} &= (f(1, a) - a)(f(1, b) - b) \\ &= ab - f(1, a)b - f(1, b)a + f(1, a)f(1, b) \\ &= f(1, ab) - ba = f(1, ba) - ba \\ &= \overline{ba}. \end{aligned}$$

Agora, seja $\alpha \in F$. Então

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= f(1, \alpha) - \alpha \\ &= \alpha f(1, 1) - \alpha \\ &= 2\alpha - \alpha \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Observemos que $\bar{a} = f(1, a) - a$, o que implica $a + \bar{a} = f(1, a) = t(a) \in F$. Por último, $a\bar{a} = f(1, a)a - a^2 = n(a) \in F$. $\square$

Lema 1.2.3. *Sejam A uma álgebra sobre F com unidade e $x \mapsto \bar{x}$ uma involução de A tal que, para qualquer $x \in A$, temos $x + \bar{x}, x\bar{x} \in F$. Se a forma quadrática $n(x) = x\bar{x}$ é estritamente não degenerada em A , então A é simples ou A é isomorfa a $F \oplus F$.*

Demonstração. Seja I um ideal de A , tal que $I \neq A$ e $I = \bar{I}$. Vamos verificar que $I = (0)$. Pelo fato de que $I \cap F = (0)$, temos $a + \bar{a} = a\bar{a} = 0$, para todo $a \in I$. Seja $a \in I$. Então

$$f(a, x) = n(a + x) - n(a) - n(x) = a\bar{x} + \overline{a\bar{x}} = 0,$$

para todo $x \in A$. Como f é não degenerada, temos que $a = 0$. Como a pode ser qualquer, então $I = (0)$.

Vamos supor que A não é simples. Seja T um ideal não nulo de A , tal que $T \neq A$. Seja $I = T + \bar{T}$. Temos que $\bar{I} = I$ e $I \neq (0)$, então $I = A$. Seja $J = T \cap \bar{T}$. Temos que $\bar{J} = J$ e $J \neq A$, logo J é nulo. Então $A = T \oplus \bar{T}$. Vamos provar que o ideal T tem dimensão igual a um sobre F . Sejam $t, s \in T$, tal que t é não nulo. Sejam $\lambda = t + \bar{t}$ e $\mu = s + \bar{s}$. Então $\lambda, \mu \in F$. Observemos que se $\lambda = 0$, temos $t = -\bar{t} \in T \cap \bar{T} = (0)$. Logo, λ é não nulo. Como $T\bar{T} + \bar{T}T \subseteq T \cap \bar{T} = (0)$, temos $\lambda s = ts + \bar{t}s = ts$ e $\mu t = t\mu = ts$. Logo, $\mu t = \lambda s$ e $s = (\lambda^{-1}\mu)t$, ou seja, t e s são linearmente dependentes. Logo, T é unidimensional sobre F . Portanto, se A não for simples então é isomorfa à soma direta de duas cópias do corpo. $\square$

Na próxima seção descreveremos um processo que permite a construção de álgebras com composição e veremos sua classificação.

1.2.1 Processo de Cayley-Dickson

Seja A uma álgebra sobre F com unidade e com involução $a \mapsto \bar{a}$, onde $a + \bar{a} \in F$ e $a\bar{a} \in F$, para todo $a \in A$. Vamos construir uma nova álgebra, com involução, que contém A como subálgebra e, se a dimensão de A for m , então a dimensão da nova álgebra será $2m$.

Fixemos $0 \neq \alpha \in F$ e denotemos por (A, α) a coleção de todos pares ordenados (a_1, a_2) , tais que $a_1, a_2 \in A$, com a adição coordenada a coordenada, $\lambda(a_1, a_2) = (\lambda a_1, \lambda a_2)$, para $\lambda \in F$, $(a_1, a_2)(a_3, a_4) = (a_1 a_3 + \alpha a_4 \bar{a}_2, \bar{a}_1 a_4 + a_3 \bar{a}_2)$ e a involução $\overline{(a_1, a_2)} = (\bar{a}_1, -a_2)$.

Observemos que (A, α) é uma álgebra sobre F , onde $(1, 0)$ é o elemento unidade e a subálgebra A' de (A, α) gerada pelos elementos em que a segunda coordenada é nula é isomorfa a A . Seja $v = (0, 1)$. Podemos observar que $v^2 = (0, 1)(0, 1) = \alpha(1, 0)$ e $(A, \alpha) = A' \oplus vA'$.

Logo, para arbitrários $x, y \in (A, \alpha)$, podemos representar $x = a_1 + va_2$ e $y = a_3 + va_4$, onde $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$. Assim, $(a_1 + va_2)(a_3 + va_4) = (a_1 a_3 + \alpha a_4 \bar{a}_2) + v(\bar{a}_1 a_4 + a_3 \bar{a}_2)$ e $\bar{x} = \bar{a}_1 - va_2$.

Esse processo descrito anteriormente é chamado de *Processo de Cayley-Dickson*.

Lema 1.2.4. *A aplicação $x \mapsto \bar{x}$ é uma involução da álgebra (A, α) , tal que $x + \bar{x} \in F$ e $x\bar{x} \in F$, para todo $x \in (A, \alpha)$. Se a forma quadrática $n(a) = a\bar{a}$ é estritamente não degenerada em A , então a forma quadrática $n(x) = x\bar{x}$ é estritamente não degenerada em (A, α) .*

Demonstração. Sejam $x, y \in (A, \alpha)$. Então $x = a_1 + va_2, y = a_3 + va_4$, onde $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$. Vamos verificar que a operação acima é uma involução

em (A, α) . Temos

$$\begin{aligned}\overline{x+y} &= ((a_1 + a_3) - v(a_2 + a_4)) \\ &= (\bar{a}_1 - va_2) + (\bar{a}_3 - va_4) \\ &= \bar{x} + \bar{y}\end{aligned}$$

e, para $\lambda \in F$,

$$\begin{aligned}\lambda \bar{x} &= \lambda(\bar{a}_1 - va_2) \\ &= \overline{\lambda a_1} - v\lambda a_2 \\ &= \overline{\lambda x}.\end{aligned}$$

Logo, a aplicação $x \mapsto \bar{x}$ é linear. Agora

$$\begin{aligned}\bar{y}\bar{x} &= (\bar{a}_3 - va_4)(\bar{a}_1 - va_2) \\ &= (\bar{a}_3\bar{a}_1 + \alpha a_2\bar{a}_4) - v(a_3a_2 + \bar{a}_1a_4).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\overline{\bar{y}\bar{x}} &= (\bar{a}_3\bar{a}_1 + \alpha a_2\bar{a}_4) - v(\bar{a}_1a_4 + a_3a_2) \\ &= \bar{y}\bar{x}.\end{aligned}$$

Vamos verificar que o traço e a norma em (A, α) pertencem ao corpo

$$\begin{aligned}x + \bar{x} &= (a_1 + va_2) + (\bar{a}_1 - va_2) \\ &= a_1 + \bar{a}_1 \in F,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}x\bar{x} &= (a_1 + va_2)(\bar{a}_1 - va_2) \\ &= a_1\bar{a}_1 - \alpha a_2\bar{a}_2 + v(-\bar{a}_1a_2 + \bar{a}_1a_2) \\ &= a_1\bar{a}_1 - \alpha a_2\bar{a}_2 \in F.\end{aligned}$$

Suponhamos agora que n é estritamente não degenerada em A . Para $x = a_1 + va_2, y = a_3 + va_4 \in (A, \alpha)$, com $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$, temos

$$\begin{aligned}f(x, y) &= n(x+y) - n(x) - n(y) \\ &= (x+y)(\overline{x+y}) - x\bar{x} - y\bar{y} \\ &= x\bar{y} + y\bar{x} \\ &= (a_1 + va_2)(\bar{a}_3 - va_4) + (a_3 + va_4)(\bar{a}_1 - va_2) \\ &= a_1\bar{a}_3 - \alpha a_4\bar{a}_2 + v(-\bar{a}_1a_4 + \bar{a}_3a_2) \\ &\quad + a_3\bar{a}_1 - \alpha a_2\bar{a}_4 + v(-\bar{a}_3a_2 + \bar{a}_1a_4) \\ &= a_1\bar{a}_3 + a_3\bar{a}_1 - \alpha(a_2\bar{a}_4 + a_4\bar{a}_2).\end{aligned}$$

Suponhamos $f(x, y) = 0$, para todo $y \in (A, \alpha)$. Em particular, para qualquer $y = a_3 \in A$, temos que

$$0 = a_1 \bar{a}_3 + a_3 \bar{a}_1 = f(a_1, a_3) = f(x, a_3).$$

Como n é estritamente não degenerada em A devemos ter $a_1 = 0$. Analogamente, concluímos que $a_2 = 0$, tomando $y = \alpha a_4 \in A$. Logo, n é estritamente não degenerada em (A, α) . $\square$

Seja A uma álgebra com composição. O próximo resultado determina quando (A, α) será novamente uma álgebra com composição.

Teorema 1.2.5. *Seja A uma álgebra com composição. Então (A, α) é com composição se, e somente se, A é associativa.*

Demonstração. Sabemos que $(1, 0)$ é elemento unidade de (A, α) e n é estritamente não degenerada em (A, α) . Falta verificar quando $n(xy) = n(x)n(y)$, para todos $x, y \in (A, \alpha)$. Sejam $x, y \in (A, \alpha)$. Escreva $x = a_1 + va_2$, $y = a_3 + va_4$, onde $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$. Temos

$$\begin{aligned} n(x) &= x\bar{x} \\ &= a_1 \bar{a}_1 - \alpha a_2 \bar{a}_2 \\ &= n(a_1) - \alpha n(a_2), \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} n(xy) - n(x)n(y) &= n(a_1 a_3 + \alpha a_4 \bar{a}_2) - \alpha n(\bar{a}_1 a_4 + a_3 a_2) \\ &\quad - (n(a_1) - \alpha n(a_2))(n(a_3) - \alpha n(a_4)) \\ &= n(a_1 a_3) + \alpha^2 n(a_4 \bar{a}_2) + \alpha f(a_1 a_3, a_4 \bar{a}_2) \\ &\quad - \alpha n(\bar{a}_1 a_4) - \alpha n(a_3 a_2) - \alpha f(\bar{a}_1 a_4, a_3 a_2) \\ &\quad - n(a_1)n(a_3) + \alpha n(a_1)n(a_4) + \alpha n(a_2)n(a_3) \\ &\quad - \alpha^2 n(a_2)n(a_4). \end{aligned}$$

Para arbitrário $a \in A$, temos que $n(\bar{a}) = n(a)$, pois $n(\bar{a}) = a\bar{a} = a(t(a) - a) = (t(a) - a)a = \bar{a}a = n(a)$. Como $n(ab) = n(a)n(b)$ e $n(\bar{a}) = n(a)$, para quaisquer $a, b \in A$, temos

$$n(xy) - n(x)n(y) = \alpha f(a_1 a_3, a_4 \bar{a}_2) - \alpha f(\bar{a}_1 a_4, a_3 a_2).$$

Por (1.6), temos

$$\begin{aligned} f(a_1 a_3, a_4 \bar{a}_2) &= f(a_1 a_3, 1, a_4 \bar{a}_2) \\ &= -f(a_1 a_3, \bar{a}_2, a_4) + f(a_1 a_3, a_4)f(1, \bar{a}_2) \\ &= f(a_1 a_3(f(1, \bar{a}_2) - \bar{a}_2), a_4) \\ &= f(a_1 a_3, a_2, a_4) \end{aligned}$$

e, da mesma forma, temos $f(\bar{a}_1 a_4, a_3 a_2) = f(a_4, a_1 \cdot a_3 a_2)$. Portanto,

$$n(xy) - n(x)n(y) = \alpha f(a_1 a_3 \cdot a_2 - a_1 \cdot a_3 a_2, a_4).$$

Sabemos que $n(xy) = n(x)n(y)$ se, e somente se, para todos $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$, tivermos que $\alpha f(a_1 a_3 \cdot a_2 - a_1 \cdot a_3 a_2, a_4) = 0$. Como $\alpha \neq 0$ e f é não degenerada, concluímos que $n(xy) = n(x)n(y)$ se, e somente se, $a_1 a_3 \cdot a_2 - a_1 \cdot a_3 a_2 = 0$, para todos $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$, isto é, se, e somente se, A for associativa. $\square$

Tomemos o associador com elementos da álgebra (A, α) . Para todos $a, b, c \in (A, \alpha)$, escrevemos $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2), c = (c_1, c_2)$, onde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in A$. Temos

$$\begin{aligned} (a, b, c) &= (a_1 b_1 \cdot c_1 + \alpha b_2 \bar{a}_2 \cdot c_1 + \alpha c_2 \cdot \bar{b}_2 a_1 + \alpha c_2 \cdot \bar{a}_2 \bar{b}_1, \\ &\quad \bar{b}_1 \bar{a}_1 \cdot c_2 + \alpha a_2 \bar{b}_2 \cdot c_2 + c_1 \cdot \bar{a}_1 b_2 + c_1 \cdot b_1 a_2) \\ &\quad - (a_1 \cdot b_1 c_1 + \alpha a_1 \cdot c_2 \bar{b}_2 + \alpha \bar{b}_1 c_2 \cdot \bar{a}_2 + \alpha c_1 b_2 \cdot \bar{a}_2, \\ &\quad \bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1 c_2 + \bar{a}_1 \cdot c_1 b_2 + b_1 c_1 \cdot a_2 + \alpha c_2 \bar{b}_2 \cdot a_2) \\ &= (a_1 b_1 \cdot c_1 - a_1 \cdot b_1 c_1 + \alpha b_2 \bar{a}_2 \cdot c_1 - \alpha c_1 b_2 \cdot \bar{a}_2 \\ &\quad + \alpha c_2 \cdot \bar{b}_2 a_1 - \alpha a_1 \cdot c_2 \bar{b}_2 + \alpha c_2 \cdot \bar{a}_2 \bar{b}_1 - \alpha \bar{b}_1 c_2 \cdot \bar{a}_2, \\ &\quad \bar{b}_1 \bar{a}_1 \cdot c_2 - \bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1 c_2 + \alpha a_2 \bar{b}_2 \cdot c_2 - \alpha c_2 \bar{b}_2 \cdot a_2 \\ &\quad + c_1 \cdot \bar{a}_1 b_2 - \bar{a}_1 \cdot c_1 b_2 + c_1 \cdot b_1 a_2 - b_1 c_1 \cdot a_2). \end{aligned}$$

Dessa forma, verificamos que (A, α) é associativa se, e somente se, A for associativa e comutativa.

Analogamente, iremos tomar o comutador com elementos de (A, α) . Para quaisquer $a, b \in (A, \alpha)$, denotamos $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2)$, onde $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$. Temos

$$\begin{aligned} [a, b] &= (a_1, a_2)(b_1, b_2) - (b_1, b_2)(a_1, a_2) \\ &= (a_1 b_1 + \alpha b_2 \bar{a}_2, \bar{a}_1 b_2 + b_1 a_2) - (b_1 a_1 + \alpha a_2 \bar{b}_2, \bar{b}_1 a_2 + a_1 b_2) \\ &= (\alpha b_2 \bar{a}_2 - \alpha a_2 \bar{b}_2, (\bar{a}_1 - a_1) b_2 + (b_1 - \bar{b}_1) a_2). \end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que (A, α) será comutativa e associativa se, e somente se, A for associativa, comutativa e a involução for a identidade.

Agora citaremos alguns exemplos de álgebras com composição:

1. Seja F corpo de característica diferente de dois, $n(\alpha) = \alpha^2$ e $t(\alpha) = 2\alpha$, para todo $\alpha \in F$. Nesse caso, temos que a involução é a identidade. Observe que se F tem característica igual a dois, temos $f(x, y) = (x + y)^2 - x^2 - y^2 = 2xy = 0$. Logo f é degenerada.

2. Seja $K(\mu) = (F, \mu) = F + Fv_1$, onde $v_1^2 = v_1 + \mu$, $4\mu + 1 \neq 0$ e F um corpo arbitrário. Definimos a involução por $\overline{\alpha + \beta v_1} = (\alpha + \beta) - \beta v_1$ e a forma quadrática por $n(a) = a\bar{a}$. Se o polinômio $x^2 - x - \mu$ é irreduzível em $F[x]$, então $K(\mu)$ é a extensão de um corpo sobre F ; caso contrário, temos $K(\mu) = F \oplus F$. Se a característica do corpo F é diferente de dois, o elemento $v = v_1 - \frac{1}{2}$ satisfaz a igualdade $v^2 = \alpha$, onde $\alpha = \mu + \frac{1}{4} \neq 0$. E, nesse caso, $K(\mu) = (F, \alpha)$. Inversamente, se F é um corpo de característica diferente de dois, então a álgebra (F, α) é do tipo II. De fato, tomando $v_1 = v + \frac{1}{2}$, obtemos $v_1^2 = v_1 + (\frac{1}{4} + \alpha) = v_1 + (\alpha - \frac{1}{4})$. Logo, $4(\alpha - \frac{1}{4}) + 1 = 4\alpha \neq 0$. Além disso, temos que $\overline{\lambda + \beta v_1} = \lambda + \beta \overline{(v + \frac{1}{2})} = \lambda - \beta v + \frac{1}{2}\beta = (\lambda + \beta) - \beta v_1$. Observe que se F é de característica igual a dois, então a condição $4\mu + 1 \neq 0$ é satisfeita.
3. Seja $Q(\mu, \beta) = (K(\mu), \beta)$, $\beta \neq 0$. Dizemos que $Q(\mu, \beta)$ é a *álgebra de quatérnios generalizada*. Observe que ela perde a comutatividade.
4. Seja $C(\mu, \beta, \gamma) = (Q(\mu, \beta), \gamma)$, onde $\gamma \neq 0$. Dizemos que $C(\mu, \beta, \gamma)$ é a *álgebra de Cayley-Dickson*. Observe que ela perde a associatividade.

Como caso particular, temos:

1. seja $\mathbb{R}$ o corpo dos números reais e $\alpha = -1$. Então $(\mathbb{R}, -1)$ será o conjunto dos números complexos;
2. seja $\mathbb{C} = (\mathbb{R}, -1)$ o conjunto dos números complexos e $\beta = -1$. Então $((\mathbb{R}, -1), -1)$ será o conjunto dos quatérnios;
3. seja $\mathbb{H} = ((\mathbb{R}, -1), -1)$ o conjunto dos quatérnios e $\gamma = -1$. Então $\mathbb{O} = (((\mathbb{C}, -1), -1), -1)$ será o conjunto dos números de Cayley.

O nosso próximo passo será classificarmos as álgebras com composição. Para tanto necessitamos de algumas propriedades.

Sejam A uma álgebra com composição, B um subespaço de A e $f(x, y)$ a forma bilinear associada à forma quadrática $n(x)$. Definimos o *complemento ortogonal* do espaço B em relação a $f(x, y)$ como o seguinte conjunto

$$B^\perp = \{a \in A \mid f(a, B) = 0\}.$$

Lema 1.2.6. *Seja B uma subálgebra da álgebra com composição A , tal que a unidade pertença a B . Então $B^\perp B + BB^\perp \subseteq B^\perp$ e, para todos $a, b \in B, v \in B^\perp$, valem:*

1. $\bar{v} = -v$ e $av = v\bar{a}$,
2. $a(vb) = v(\bar{a}b)$ e $(vb)a = v(ab)$,
3. $(va)(vb) = -n(v)b\bar{a}$.

Demonstração. Sejam $a, b, c \in B$ e $v, v' \in B^\perp$.

1. Temos que $0 = f(v, 1) = v1 + 1\bar{v} = v + \bar{v}$. Logo, $\bar{v} = -v$. Como $0 = f(a, v) = a\bar{v} + v\bar{a}$, temos $av = v\bar{a}$.
2. Usando (1.6), temos

$$f(a, vb) = f(a.1, vb) = f(a, v)f(1, b) - f(ab, v.1) = 0.$$

Analogamente, temos $f(a, cv') = 0$. Então $f(a, vb + cv') = 0$, ou seja, $B^\perp B + BB^\perp \subseteq B^\perp$. Pelo Lema 1.2.1, sabemos que A é alternativa, logo,

$$\begin{aligned} x(\bar{x}y) &= x((t(x) - x)y) \\ &= (xt(x) - x^2)y \\ &= (x\bar{x})y, \end{aligned}$$

ou seja

$$x(\bar{x}y) = n(x)y. \quad (1.13)$$

Além disso, por (1.3), temos

$$\begin{aligned} f(x, z)y &= (n(x+z) - n(x) - n(z))y \\ &= ((x+z)t(x+z) - (x+z)^2 - xt(x) + x^2 - zt(z) + z^2)y \\ &= ((x+z)(\overline{x+z}) - x\bar{x} - z\bar{z})y \\ &= (x+z)((\bar{x} + \bar{z})y) - x(\bar{x}y) - z(\bar{z}y) \\ &= x(\bar{z}y) + z(\bar{x}y), \end{aligned}$$

ou seja,

$$x(\bar{z}y) + z(\bar{x}y) = f(x, z)y, \quad (1.14)$$

para quaisquer $x, y, z \in A$. Colocando $x = a, y = b, z = v$ em (1.14), obtemos $a(\bar{v}b) = -v(\bar{a}b)$. Pelo item 1 temos $a(vb) = v(\bar{a}b)$.

3. De (1.14), (1.5), (1.13) e os itens 1 e 2, temos

$$\begin{aligned}
(va)(vb) &= -\bar{v}(\bar{v}a.b) + f(va, \bar{v})b \\
&= v(\bar{a}\bar{v}.b) - f(va, v)b \\
&= -v(\bar{a}v.b) - n(v)f(a, 1)b \\
&= -v(va.b) - n(v)f(a, 1)b \\
&= v(\bar{v}.ba) - n(v)f(a, 1)b \\
&= n(v)(ba - f(a, 1)b) \\
&= -n(v)b\bar{a}.
\end{aligned}$$

Logo, $(va)(vb) = -n(v)b\bar{a}$.

□

A classificação das álgebras com composição será descrita no próximo teorema.

Teorema 1.2.7. *Seja A uma álgebra com composição. Então A é isomorfa a uma das seguintes álgebras:*

- I) F um corpo de característica diferente de 2;
- II) $K(\mu) = F + Fv_1$, onde $v_1^2 = v_1 + \mu$ e $\mu \in F$ é tal que $4\mu + 1 \neq 0$;
- III) $Q(\mu, \beta) = (K(\mu), \beta) = K(\mu) + v_2K(\mu)$, $\beta \neq 0$;
- IV) $C(\mu, \beta, \gamma) = (Q(\mu, \beta), \gamma)$, $\gamma \neq 0$.

Demonstração. Seja B uma subálgebra de A de dimensão finita, tal que a unidade da álgebra pertença a B e a restrição de $f(x, y)$ a B seja não degenerada. Como f é bilinear temos que $B^\perp$ é um subespaço de A .

Seja $v \in B^\perp$. Pelo Lema anterior, temos que $\bar{v} = -v$. Logo, $n(v) = v\bar{v} = -v^2 = -\alpha \neq 0$. Por (1.5), temos $f(va, vb) = n(v)f(a, b) = -\alpha f(a, b)$, logo f é não degenerada em vB e $\dim B = \dim vB$. Definimos o subespaço $B_1 = B + vB$. Vamos verificar que f é não degenerada em B_1 . Seja $a = d + vd' \in B_1$, tal que, para qualquer $b = c + vc' \in B_1$, com $d, d', c, c' \in B$, temos

$$\begin{aligned}
0 &= f(a, b) = f(d + vd', c + vc') \\
&= f(d, c) + f(d, vc') + f(vd', c) + f(vd', vc') \\
&= d\bar{c} + c\bar{d} - \alpha d'\bar{c}' - \alpha c'\bar{d}'.
\end{aligned}$$

Tomemos $c' = 0$, obtemos $0 = d\bar{c} + c\bar{d} = f(d, c)$, para todo $c \in B$ e, de modo análogo, para $c = 0$, obtemos $0 = d'\bar{c}' + c'\bar{d}' = f(d', c')$, para arbitrário $c' \in B$. Como f é não degenerada em B , temos que $0 = d = d'$, isto é, $a = 0$, mostrando assim que f é não degenerada em B_1 . Vamos verificar que B_1 é uma subálgebra. Temos

$$\begin{aligned} ab &= (d + vd')(c + vc') \\ &= dc + d(vc') + (vd')c + (vd')(vc') \\ &= dc + v(\bar{d}c') + v(cd') - n(v)c'\bar{d}' \\ &= dc + \alpha c'\bar{d}' + v(\bar{d}c' + cd') \in B_1. \end{aligned}$$

Como $\bar{v} = -v$, temos que $\overline{a + vb} = \bar{a} - \bar{b}v = \bar{a} - vb$. Como B_1 é subálgebra de A , temos que B_1 é uma álgebra de composição. Resumindo, temos que B é uma subálgebra de B_1 , a dimensão de B_1 é o dobro da dimensão de B , a operação de multiplicação e a involução em B_1 são as mesmas obtidas pelo processo de Cayley-Dickson, ou seja, $B_1 = (B, \alpha)$. Se $B_1 \neq A$ podemos repetir o mesmo processo. Vamos agora analisar dois casos.

Caso 1: Se F é corpo de característica diferente de 2, temos que f é não degenerada com relação a F e podemos tomar o conjunto $B = F$. Temos que

1. se $B \neq A$, existe B_1 do tipo II contido em A .
2. se $B_1 \neq A$, existe B_2 do tipo III contido em A .
3. se $B_2 \neq A$, existe B_3 do tipo IV contido em A .
4. como B_3 não é associativa, pelo Teorema 1.2.5, temos $A = B_3$.

Caso 2: Seja F corpo de característica igual a 2. Vamos mostrar que existe $a \in A \setminus F$, tal que $t(a) \neq 0$. Suponhamos por absurdo que $t(x) = f(1, x) = 0$, para arbitrário $x \in A \setminus F$. Como $t(\alpha) = 2\alpha = 0$, para todo $\alpha \in F$, temos que $t(x) = 0$ para qualquer $x \in A$. Logo, f será degenerada, o que é uma contradição.

Seja $a \notin F$, com $t(a) \neq 0$ e seja $s = \frac{a}{t(a)}$. Temos que $t(s) = 1 = s + \bar{s}$. Logo, $s^2 = s + \mu$, $\mu = -s\bar{s} \in F$. Sabemos que $f(sa, sb) = n(s)f(a, b) = -\mu f(a, b)$. Então, f é não degenerada em $F + sF$. Consideremos a involução definida por

$$\overline{\alpha + \beta s} = \alpha + \bar{\beta} s = \alpha + \beta(1 - s) = \alpha + \beta - \beta s.$$

Então $F + sF$ é uma subálgebra do tipo II. Se $B = F + sF$, temos que

1. se $B \neq A$, existe B_1 do tipo III contido em A .
2. se $B_1 \neq A$, existe B_2 do tipo IV contido em A .
3. como B_2 é não associativa, pelo Teorema 1.2.5, temos que $A = B_2$.

□

Observemos que, pelo Lema 1.2.3, a álgebra dos quatérnios generalizada $Q(\mu, \beta)$ e a álgebra de Cayley- Dickson $C(\mu, \beta, \gamma) = (Q(\mu, \beta), \gamma)$ são álgebras simples.

1.2.2 Álgebras quadráticas simples

Sabemos que uma álgebra com composição é alternativa e quadrática sobre o corpo base. Aqui mostraremos que, para álgebras alternativas quadráticas simples, o contrário é válido, exceto para alguns exemplos de álgebras com característica igual a dois.

Na definição de álgebras quadráticas utilizamos duas funções $t(x)$ e $n(x)$, ou seja, o traço e a norma, respectivamente, do elemento x . Agora iremos saber mais sobre essas funções.

Teorema 1.2.8. *Seja A uma álgebra quadrática sobre F , que contém no mínimo 3 elementos. Então t é linear e n é quadrática. Se A é alternativa então n admite composição.*

Demonstração. Vamos mostrar que t é linear. Sejam $\alpha, \beta \in F$, tais que $\alpha \neq \beta$ e $\alpha\beta \neq 0$. Pela equação (1.3), temos

$$(\alpha x + \beta y)^2 - t(\alpha x + \beta y)(\alpha x + \beta y) + n(\alpha x + \beta y) = 0,$$

$$\alpha\beta(x + y)^2 - \alpha\beta t(x + y)(x + y) + \alpha\beta n(x + y) = 0.$$

Portanto, ao subtrairmos a primeira da segunda, teremos

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha^2 t(x) - \alpha t(\alpha x + \beta y) - \alpha\beta t(x) + \alpha\beta t(x + y))x \\ &+ (\beta^2 t(y) - \beta t(\alpha x + \beta y) - \alpha\beta t(y) + \alpha\beta t(x + y))y \\ &+ (-\alpha^2 n(x) - \beta^2 n(y) + n(\alpha x + \beta y) + \alpha\beta n(x) + \alpha\beta n(y) - \alpha\beta n(x + y)). \end{aligned}$$

Se $1, x, y$ são linearmente independentes sobre F , temos

$$\alpha t(x) - t(\alpha x + \beta y) - \beta t(x) + \beta t(x + y) = 0 \quad (1.15)$$

e

$$\beta t(y) - t(\alpha x + \beta y) - \alpha t(y) + \alpha t(x + y) = 0. \quad (1.16)$$

Ao subtrairmos (1.16) de (1.15), teremos

$$(\alpha - \beta)(t(x) + t(y) - t(x + y)) = 0,$$

ou seja, $t(x + y) = t(x) + t(y)$.

Se $1, x, y$ são linearmente dependentes, podemos assumir $y = \alpha x + \beta$. Por (1.3), temos que

$$(\alpha x + \beta)^2 - t(y)(\alpha x + \beta) + (\alpha x + \beta)(\overline{\alpha x + \beta}) = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} t(y)\beta &= (\alpha x)^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2 - (\alpha x)^2 - \alpha\beta x - \alpha^2 x\bar{x} \\ &\quad - \beta\alpha x + \alpha^2 x\bar{x} + \alpha\beta x + \alpha\beta\bar{x} + \beta^2 \\ &= 2\beta^2 + \alpha\beta t(x). \end{aligned}$$

Portanto, $t(y) = \alpha t(x) + 2\beta$. Então

$$\begin{aligned} t(x + y) &= t(x + \alpha x + \beta) \\ &= t((1 + \alpha)x + \beta) \\ &= (1 + \alpha)x + \beta + \overline{(1 + \alpha)x + \beta} \\ &= (1 + \alpha)(x + \bar{x}) + 2\beta \\ &= (1 + \alpha)t(x) + 2\beta \\ &= t(x) + \alpha t(x) + 2\beta \\ &= t(x) + t(y). \end{aligned}$$

Seja $\lambda \in F$. Ao utilizarmos (1.3), teremos

$$(\lambda x)^2 - t(\lambda x)\lambda x + n(\lambda x) - \lambda^2(x^2 - t(x)x + n(x)) = 0,$$

logo,

$$(\lambda t(x) - t(\lambda x))\lambda x - \lambda^2 n(x) + n(\lambda x) = 0.$$

Então $t(\lambda x) = \lambda t(x)$ e $n(\lambda x) = \lambda^2 n(x)$.

Vamos provar que $n(x)$ é uma forma quadrática. Por (1.3), temos

$$\begin{aligned} (x + y)^2 - t(x + y)(x + y) + n(x + y) &= x^2 + x \circ y + y^2 \\ &\quad - t(x)x - t(x)y - t(y)x \\ &\quad - t(y)y + n(x + y) = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= n(x + y) - n(x) - n(y) \\ &= -(x^2 + x \circ y + y^2 - t(x)x - t(x)y - t(y)x - t(y)y) \\ &\quad + x^2 - t(x)x + y^2 - t(y)y. \end{aligned}$$

Como o produto de Jordan é bilinear e a função traço é linear, temos que

$$f(x, y) = t(x)y + t(y)x - x \circ y \quad (1.17)$$

é bilinear.

Seja A alternativa. Vamos mostrar que $n(xy) = n(x)n(y)$, para todos $x, y \in A$. Multiplicando a identidade (1.17) por xy , temos

$$f(x, y)xy = t(x)yxy + t(y)x^2y - (xy)^2 - yx^2y. \quad (1.18)$$

Por (1.3), temos $yx^2y = y(t(x)x - n(x))y = t(x)yxy - n(x)t(y)y + n(x)n(y)$ e $t(y)x^2y = t(y)t(x)xy - t(y)n(x)y$.

Por (1.18), obtemos

$$(xy)^2 - (-f(x, y) + t(y)t(x))xy + n(x)n(y) = 0,$$

se $xy \notin F$, temos que a equação (1.3) é única. Portanto, $t(xy) = -f(x, y) + t(y)t(x)$ e $n(xy) = n(x)n(y)$.

Vejamus quando $xy = \alpha \in F$. Como n é quadrática, temos que $n(\lambda x) = \lambda^2 n(x) = n(\lambda)n(x)$, para qualquer $\lambda \in F$. Logo, basta verificar o caso em que $x \notin F$ e $y \notin F$. Multiplicamos (1.3) por y^2 , temos

$$x^2y^2 - t(x)xy^2 + n(x)y^2 = 0,$$

então

$$\alpha^2 - \alpha t(x)y + n(x)y = 0.$$

Seja $n(x) = 0$. Neste caso, se $\alpha \neq 0$, temos $\alpha = t(x)y$, ou seja, $y \in F$, contradizendo que $y \notin F$. Logo, $\alpha = 0$ e $n(xy) = 0 = n(x)n(y)$. Se $n(x) \neq 0$, podemos fazer $\frac{\alpha^2}{n(x)} - \alpha \frac{t(x)}{n(x)}y + y^2 = 0$. Como $y \notin F$, sabemos que a equação (1.3) é única. Portanto, $n(y) = \frac{\alpha^2}{n(x)}$, então $n(x)n(y) = n(x)\frac{\alpha^2}{n(x)} = n(xy)$. $\square$

Teorema 1.2.9. *Seja A uma álgebra alternativa quadrática simples sobre F que contém pelo menos três elementos. Então A é uma álgebra com composição ou A é um corpo com característica igual a dois.*

Demonstração. Sabemos que n é quadrática e admite composição. Defina $W = \{a \in A \mid f(a, A) = 0\}$. Observemos que W é subespaço. Vamos mostrar que W é ideal. Sejam $a \in W$ e $x, y \in A$. Por (1.6), temos

$$f(ax, y) = f(ax, y1) = -f(a, yx) + f(a, y)f(x, 1) = 0.$$

Logo, W é ideal à direita. Da mesma forma, mostramos que W é um ideal à esquerda de A . Como A é simples, temos que $W = (0)$ ou $W = A$. Se $W = (0)$, temos que f é não degenerada. Então A é de composição. Falta verificarmos quando $W = A$. Temos que

$$f(x, y) \equiv 0 = n(x + y) - n(x) - n(y).$$

Logo, $n(x + y) = n(x) + n(y)$, ou seja, n é homomorfismo de anéis. Sabemos que $\ker n$ é um ideal de A e $n(1) = 1$. Como $\ker n = 0$, pelo teorema do homomorfismo, temos que A é isomorfa a um subcorpo F' , que será igual a imagem de n em F . Logo,

$$0 = f(1, 1) = n(2.1) - n(1) - n(1) = 4 - 2 = 2 \in F'.$$

Então F' tem característica 2. □

1.2.3 Álgebras split

Seja A uma álgebra com composição. Dizemos que A é *split* se existir $x \in A$ não nulo, tal que $n(x) = 0$.

Lema 1.2.10. *Seja A uma álgebra com composição. São equivalentes:*

- (i) A é *split*,
- (ii) A possui divisores de zero.

Demonstração. Vamos verificar que (i) implica (ii). Seja $x \neq 0$. Temos que $n(x) = x\bar{x} = 0$. Então x é divisor de zero.

Vamos agora verificar que (ii) implica (i). Sejam $x, y \in A$, tais que $xy = 0$, $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Temos que $0 = n(xy) = n(x)n(y)$. Logo $n(x) = 0$ ou $n(y) = 0$. □

Lema 1.2.11. *Seja A uma álgebra com composição. A é *split* se, e somente se, A contém um idempotente e não trivial.*

Demonstração. Vamos verificar que se A contém um idempotente não trivial, então A é split. Seja $e \in A$, idempotente não trivial. Temos que $e^2 = e$, logo, $e^2 - e = 0$. Por isso, $0 = n(e(e - 1)) = n(e)n(e - 1)$. Então $n(e) = 0$ ou $n(e - 1) = 0$, ou seja, A é split.

Vamos verificar o caso contrário. Seja A split. Existe $x \in A, x \neq 0$, tal que $n(x) = 0$. Vamos mostrar que $t(x) \neq 0$. Suponha que $t(x) = 0$. Para todo $a \in A$, temos $n(xa) = n(x)n(a) = 0$, ou seja, $t(xa) = 0$. Por (1.11), temos $f(x, a) = t(x)t(a) - t(xa) = 0$. Como f é não degenerada, temos $x = 0$, contradição. Logo, $t(x) = \alpha \neq 0$. Usando que A é quadrática, temos que $(\alpha^{-1}x)^2 = \alpha^{-2}x^2 = \alpha^{-2}(t(x)x - n(x)) = \alpha^{-2}(\alpha x) = \alpha^{-1}x$. Logo, o elemento $\alpha^{-1}x$ é idempotente. $\square$

Seja $e \in A$, um idempotente não trivial. Como $n(e)n(e - 1) = 0$, temos que $n(e - 1) = 0$ ou $n(e) = 0$. Suponhamos que $n(e - 1) = 0$. Logo,

$$0 = (e - 1)(\bar{e} - 1) = n(e) - t(e) + 1.$$

Substituindo o valor de $t(e)$ na equação (1.3), temos $n(e)(1 - e) = 0$. Como $e \neq 1$, temos $n(e) = 0$.

Teorema 1.2.12. *Duas álgebras de composição split de mesma dimensão sobre um corpo F são isomorfas.*

Demonstração. Seja A uma álgebra de composição split e B uma subálgebra não degenerada de A que contém elemento unidade e um idempotente $e \neq 1, 0$. Vamos verificar que existe $v \in B^\perp$, tal que $v^2 = 1$. Pela prova do Teorema 1.2.7 sabemos que existe $u \in B^\perp$, tal que $u^2 = -n(u) = \alpha \neq 0$ e $ub \subseteq B^\perp$. Definimos $v = u + \alpha^{-1}(1 - \alpha)ue$. Temos que $v \in B^\perp$. Pela identidade de Moufang central, temos $(ue)^2 = (ue)(\bar{e}u) = 0$, pois $n(e) = 0$. Logo

$$\begin{aligned} v^2 &= (u + \alpha^{-1}(1 - \alpha)ue)^2 = u^2 + \alpha^{-1}(1 - \alpha)(u^2e + ueu) \\ &= \alpha + e + \alpha^{-1}(\alpha\bar{e}) - \alpha e - \alpha\bar{e} \\ &= \alpha + (1 - \alpha)(e + \bar{e}) = 1. \end{aligned}$$

Repetimos o processo do Teorema 1.2.7 e pelo Lema 1.2.11, obtemos que A será isomorfa a uma das álgebras $K(0)$, $Q(0, 1)$ ou $C(0, 1, 1)$. $\square$

Corolário 1.2.13. *Seja F um corpo algebricamente fechado. Então existem quatro álgebras sobre F com composição, não isomorfas entre si.*

Demonstração. Basta verificar que cada álgebra A com composição sobre F de dimensão maior que um é split. Sejam $a \in A$ e $\alpha \in F$, tais que $a \notin F$ e α é raiz da equação $x^2 - t(a)x + n(a) = 0$. Como A é de composição, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= a^2 - t(a)a + n(a) - (\alpha^2 - t(a)\alpha + n(a)) \\ &= (a - \alpha)(a + \alpha - t(a)). \end{aligned}$$

Logo, A é split. $\square$

Vamos agora verificar a estrutura das álgebras de composição split. Temos que $K(0)$ é isomorfo a $F \otimes F$, um homomorfismo é $\alpha + \beta v_1 \mapsto (\alpha + \beta, \alpha)$. A involução será $\overline{\alpha + \beta v_1} = \alpha + \beta - \beta v_1$, que corresponde a $\overline{(\alpha, \beta)} = (\beta, \alpha)$, para todos $\alpha, \beta \in F$.

Consideremos agora a álgebra das matrizes $M_2(F)$ de ordem 2 com elementos em F . Ela é uma álgebra com composição, onde a forma quadrática é $n(x) = \det x$. Como $M_2(F)$ possui divisores de zero, sabemos que $M_2(F)$ é split. Pelo Teorema 1.2.12, teremos que será isomorfo a $Q(0, 1)$. Um isomorfismo é

$$\alpha + \beta v_1 + \gamma v_2 + \delta v_1 v_2 \mapsto \begin{pmatrix} \alpha + \beta & \gamma + \delta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix},$$

onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in F$, a função traço $t(x)$ será a usual das matrizes e a involução será $\bar{a} = t(a) - a$, ou seja,

$$\overline{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

Para considerar a álgebra de Cayley-Dickson $C(0, 1, 1)$, basta lembrar que ela é isomorfa $F_2 + vF_2$, onde $v \in F_2^\perp$, é tal que $v^2 = 1$. O conjunto

$$\begin{aligned} e_{11}, \quad e_{12}^{(1)} = e_{12}, \quad e_{12}^{(2)} = ve_{22}, \quad e_{12}^{(3)} = ve_{21}, \\ e_{22}, \quad e_{21}^{(1)} = e_{21}, \quad e_{21}^{(2)} = ve_{11}, \quad e_{21}^{(3)} = -ve_{12}, \end{aligned}$$

forma uma base para a álgebra $C(0, 1, 1)$, onde cada elemento é conhecido como *matriz unitária de Cayley-Dickson*. Essa álgebra é denominada *álgebra das Matrizes de Cayley-Dickson* sobre F . Todo elemento da álgebra das matrizes de Cayley-Dickson, pode ser representado por

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix},$$

onde $a_{ij} = (\alpha_{ij}^{(1)}, \alpha_{ij}^{(2)}, \alpha_{ij}^{(3)}) \in F^3$. Adição e multiplicação por escalar são os usuais e a multiplicação de elementos dessa álgebra é

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{11} & b_{12} \\ b_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + (a_{12}, b_{21}) & \alpha_{11}b_{12} + \beta_{22}a_{12} - a_{21} \times b_{21} \\ \beta_{11}a_{21} + \alpha_{22}b_{21} + a_{12} \times b_{12} & \alpha_{22}\beta_{22} + (a_{21}, b_{12}) \end{pmatrix},$$

onde, para os vetores $a = (b, c, d), x = (y, z, w) \in F^3$, temos $(a, x) = by + cz + dw$, o *produto escalar*, e $a \times b = (cw - dz, dy - bw, bz - cy)$, o *produto vetorial*. A função traço será a usual e, para a norma, usa-se o correspondente determinante.

Seja A uma álgebra alternativa com elemento unidade que contém um sistema de matrizes unitárias de Cayley-Dickson, tais que $e_{11} + e_{22} = 1$. Vamos mostrar que A é soma direta de submódulos $A_{ij} = \{a \in A | e_{ii}a = ae_{jj} = a\}$. Se $x \in A$, temos que $x = (e_{11} + e_{22})x(e_{11} + e_{22}) = e_{11}xe_{11} + e_{11}x.e_{22} + e_{22}x.e_{11} + e_{22}xe_{22}$. Usando as leis alternativas, temos

$$\begin{aligned} (e_{ii}xe_{ii})e_{ii} &= e_{ii}xe_{ii} \\ e_{ii}(e_{ii}xe_{ii}) &= e_{ii}xe_{ii}. \end{aligned}$$

Logo, $e_{ii}xe_{ii} \in A_{ii}$, onde $i = \{1, 2\}$. Podemos observar ainda que

$$e_{ii}x.e_{jj} = (e_{ii}x, e_{jj}) + e_{ii}.xe_{jj} = e_{ii}.e_{jj}x + e_{ii}.xe_{jj}.$$

Pelas identidades de Moufang e as leis alternativas, temos

$$\begin{aligned} (e_{ii}x.e_{jj})e_{jj} &= e_{ii}x.e_{jj}, \\ e_{ii}(e_{ii}x.e_{jj}) &= e_{ii}(e_{ii}.e_{jj}x + e_{ii}.xe_{jj}) \\ &= e_{ii}.e_{jj}x + e_{ii}.xe_{jj} = e_{ii}x.e_{jj}. \end{aligned}$$

Logo, $e_{ii}x.e_{jj} \in A_{ij}$. Vamos verificar que x é determinado de maneira única. Seja $x = \sum_{l,k=1}^2 x_{l,k}$. Temos que $e_{ii}x.e_{jj} = \sum_{l,k=1}^2 e_{ii}x_{l,k}.e_{jj}$. Pela identidade de Moufang central, temos

$$\begin{aligned} e_{11}xe_{11} &= e_{11}x_{11}e_{11} + e_{11}x_{12}.e_{11} + e_{11}x_{21}.e_{11} + e_{11}x_{22}e_{11} \\ &= x_{11} + e_{11}(x_{12}e_{22})e_{11} + e_{11}(e_{22}x_{21})e_{11} + e_{11}x_{22}e_{11} \\ &= x_{11}. \end{aligned}$$

Analogamente, provamos que $e_{ii}x.e_{jj} = x_{ij}$. Logo, $A = A_{11} \oplus A_{12} \oplus A_{21} \oplus A_{22}$.

Vamos verificar que $A_{ii}^2 \subseteq A_{ii}$. Sejam $a, b \in A_{ii}$. Pela identidade de Moufang à direita, temos

$$ab = a(e_{ii}be_{ii}) = ((ae_{ii})b)e_{ii} = (ab)e_{ii}.$$

Pela identidade de Moufang à esquerda, temos

$$ab = (e_{ii}ae_{ii})b = e_{ii}(a(e_{ii}b)) = e_{ii}(ab).$$

Logo, $ab \in A_{ii}$. Analogamente, usando as identidades de Moufang, obtemos

$$\begin{aligned} A_{ii}A_{jj} &= (0), A_{ii}A_{ij} + A_{ij}A_{jj} \subseteq A_{ij}, A_{jj}A_{ij} = A_{ij}A_{ii} = (0) \\ A_{ij}A_{ij} &\subseteq A_{ji}, A_{ij}A_{ji} \subseteq A_{ii}, \end{aligned}$$

onde $i \neq j$.

Podemos ainda verificar que para $i \neq j$, temos $A_{ij} = A_{ij}^{(1)} + A_{ij}^{(2)} + A_{ij}^{(3)}$, onde $A_{ij}^{(k)} = A_{ii}e_{ij}^{(k)} = e_{ij}^{(k)}A_{jj}$.

Seja A uma álgebra alternativa, com identidade, que possui um sistema de matrizes unitárias de Cayley-Dickson, tal que $e_{11} + e_{22} = 1$. Seja $\pi_{ij}^{(k)} A : \rightarrow A_{11}$, a função coordenada, cujo as únicas imagens de $\pi_{ij}^{(k)}$ não nulas, são

$$\begin{aligned} \pi_{11}(a_{11}) &= a_{11}, & \pi_{22}(a_{22}) &= e_{12}(a_{22}e_{21}), \\ \pi_{12}^{(k)}(a_{12}^{(k)}) &= (a_{12}^{(k)}e_{21}^{(k)}), & \pi_{21}^{(k)}(a_{21}^{(k)}) &= (e_{12}^{(k)}a_{21}^{(k)}). \end{aligned}$$

Dessa maneira, definimos o seguinte homomorfismo $\pi A : \rightarrow C(A_{11})$,

$$\pi(a) = \sum_{i=1}^2 \pi_{ii}(a)e_{ii} + \sum_{i=1}^3 (\pi_{12}^{(k)}(a)e_{12}^{(k)} + \pi_{21}^{(k)}(a)e_{21}^{(k)}).$$

Em nosso trabalho, estamos considerando a álgebra A , sobre um corpo F . O conceito de álgebra pode ser estendido, ao trocarmos o corpo base por um anel associativo, comutativo e com unidade.

Para verificarmos que A_{11} é associativo e comutativo, basta usar as identidades de Moufang. *! engraçadinha!*

Teorema 1.2.14 (Cordenada de Zorn). *Seja A uma álgebra alternativa com elemento unidade, que contém um sistema de matrizes unitárias de Cayley-Dickson tais que $e_{11} + e_{22} = 1$. Então A é uma álgebra de matrizes de Cayley-Dickson sobre o anel $\Omega = A_{11}$, onde $A_{11} = \{a \in A | e_{11}a = ae_{11} = a\}$.*

Demonstração. Seja π o homomorfismo definido anteriormente. Vamos verificar que o homomorfismo é injetor. Seja $a \in A$, temos que

$$\pi(a) = \sum_{i=1}^2 \pi_{ii}(a)e_{ii} + \sum_{i=1}^3 (\pi_{12}^{(i)}(a)e_{12}^{(i)} + \pi_{21}^{(i)}(a)e_{21}^{(i)}) = 0.$$

Logo, $\pi_{ii}(a) = 0$, $\pi_{12}^{(i)}(a) = 0$ e $\pi_{21}^{(i)}(a) = 0$, onde $i = \{1, 2\}$ e $k = \{1, 2, 3\}$. Pelo Teorema do isomorfismo, sabemos que $A/\ker \pi$ é isomorfo a imagem de π . Como $\ker \pi = (0)$, temos que A é isomorfa a $C(\Omega)$, ou seja, A é a álgebra das matrizes de Cayley-Dickson. $\square$

Capítulo 2

Álgebras alternativas simples

No capítulo anterior citamos um exemplo muito importante de álgebras alternativas, as álgebras de Cayley-Dickson. A sua importância se dá pelo motivo de ser a única álgebra alternativa simples, que não é associativa. O resultado foi obtido por Kleinfeld, que utilizou o teorema de Shirshov como ferramenta fundamental. O objetivo deste capítulo é demonstrar esse teorema.

2.1 Resultados sobre as álgebras alternativas

Seja A uma álgebra. Definimos

- $N(A) = \{n \in A \mid (n, A, A) = (A, n, A) = (A, A, n) = 0\}$, o *centro associativo*.
- $K(A) = \{k \in A \mid [k, A] = 0\}$, o *centro comutativo*.
- $Z(A) = N(A) \cap K(A)$, o *centro*.

Iremos verificar algumas propriedades dos elementos do centro associativo.

Lema 2.1.1. *Seja A uma álgebra arbitrária, $x, y, z \in A$ e $n \in N(A)$. Então*

1. $n(x, y, z) = (nx, y, z)$,
2. $(xn, y, z) = (x, ny, z)$,
3. $(x, y, z)n = (x, y, zn)$.

Se x ou y ou $z \in N(A)$, então

$$[xy, z] = x[y, z] + [x, z]y. \quad (2.1)$$

Demonstração. 1. $n(x, y, z) - (nx, y, z) = n((xy)z) - n(x(yz)) - ((nx)y)z + (nx)(yz) = (n(xy))z - (n(xy))z = 0$,

$$2. (xn, y, z) - (x, ny, z) = ((xn)y)z - (xn)(yz) - (x(ny))z + x((ny)z) = -x(n(yz)) + x(x(yz)) = 0,$$

$$3. (x, y, zn) - (x, y, zn) = ((xy)z)n - (x(yz))n - (xy)(zn) + x(y(zn)) = -x((yz)n) + x((yz)n) = 0.$$

Vamos provar (2.1). Temos

$$\begin{aligned} [xy, z] - x[y, z] - [x, z]y &= (xy)z - z(xy) - x(yz) + x(zx) - (xz)y + (zx)y \\ &= (x, y, z) - (x, z, y) + (z, x, y) = 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

pois x ou y ou $z \in N(A)$. $\square$

Temos que a identidade (2.2), para álgebras alternativas é

$$\begin{aligned} [xy, z] - x[y, z] - [x, z]y &= (xy)z - z(xy) - x(yz) + x(zx) - (xz)y + (zx)y \\ &= (x, y, z) - (x, z, y) + (z, x, y) = 3(x, y, z). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Seja A uma álgebra alternativa. Usaremos $N = N(A)$ e $Z = Z(A)$.

A função de Kleinfeld é definida por

$$f(w, x, y, z) = (wx, y, z) - x(w, y, z) - (x, y, z)w, \quad (2.4)$$

para todos $w, x, y, z \in A$.

Seja h o operador com n variáveis de $A \times A \times \dots \times A \mapsto A$. Dizemos que h é *anti-simétrico* se

$$\begin{aligned} h(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots, a_n) \\ = -h(a_1, \dots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \dots, a_n), \end{aligned}$$

para todos $a_i, a_j \in A$, onde $i, j = 1, \dots, n$.

Lema 2.1.2. *Seja A uma álgebra alternativa. Então a função de Kleinfeld é anti-simétrica.*

Demonstração. Sejam $a, b, c, d \in A$. Definimos

$$g(a, b, c, d) = -a(b, c, d) + (ab, c, d) + (a, b, cd) - (a, bc, d) - (a, b, c)d.$$

Observemos que g é constantemente nula em uma álgebra arbitrária, pois

$$\begin{aligned} & a(b, c, d) - (ab, c, d) - (a, b, cd) + (a, bc, d) + (a, b, c)d \\ &= a(bc.d) - a(b.cd) - (ab.c)d + ab.cd - ab.cd + a(b.cd) \\ &+ (a.bc)d - a(bc.d) + (ab.c)d - (a.bc)d = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Agora vamos provar que, para qualquer par de argumentos iguais, a função de Kleinfeld é nula. Temos

$$\begin{aligned} -f(d, a, b, c) &= g(a, b, c, d) - f(d, a, b, c) \\ &= -a(b, c, d) + (ab, c, d) + (a, b, cd) - (a, bc, d) \\ &\quad - (a, b, c)d - (da, b, c) + a(d, b, c) + (a, b, c)d \\ &= (ab, c, d) + (a, b, cd) - (a, bc, d) - (da, b, c). \end{aligned}$$

Logo,

$$-f(d, a, b, c) = (ab, c, d) + (cd, a, b) - (bc, d, a) - (da, b, c). \quad (2.6)$$

Por (2.6), temos que

$$f(c, d, a, b) = (ab, c, d) + (cd, a, b) - (bc, d, a) - (da, b, c) = -f(d, a, b, c).$$

Como A é alternativa, temos que $f(d, a, c, c) = 0$. Portanto, $f(c, d, a, c) = -f(d, a, c, c) = 0$. Ao linearizarmos $f(d, a, c, c) = 0$, teremos que

$$f(d, a, b, c) = 0,$$

para qualquer par de argumentos iguais. Logo, f é anti-simétrica. $\square$

Corolário 2.1.3. *Sejam A uma álgebra alternativa e f a função de Kleinfeld. Então*

$$f(d, a, b, c) = ([d, a], b, c) + ([b, c], d, a), \quad (2.7)$$

para quaisquer $a, b, c, d \in A$.

Demonstração. Subtraindo (2.7) de (2.6), obtemos

$$\begin{aligned} & ([d, a], b, c) + ([b, c], d, a) + (ab, c, d) + (cd, a, b) - (bc, d, a) - (da, b, c) \\ &= -(ad, b, c) - (cb, d, a) - (ab, c, d) - (cd, a, b). \end{aligned}$$

Observemos que, para todos $x, y \in A$, temos $(xy, x, y) = 0$. Ao linearizarmos $(xy, x, y) = 0$, com $x = a + c$ e $y = d$, teremos que $(ad, c, d) + (cd, a, d) = 0$. Depois, fazemos a linearização $(xy, x, y) = 0$, colocando $x = a$ e $y = b + d$, obtemos $(ad, a, b) + (ab, a, d) = 0$. Agora basta linearizarmos de novo a identidade $(xy, x, y) = 0$, para $x = a + c, y = b + c$. Dessa forma, obteremos que $-(ad, b, c) - (cb, d, a) - (ab, c, d) - (cd, a, b)$ é nula. $\square$

Lema 2.1.4. *Sejam A uma álgebra alternativa e $a, b \in A$, tais que $(a, b, A) = (0)$. Então $[a, b] \in N$.*

Demonstração. Para quaisquer $x, y \in A$, pela função de Kleinfeld (2.4), sabemos que $f(x, y, a, b) = (xy, a, b) - y(x, a, b) - (y, a, b)x = 0$. Por (2.7), temos que $([a, b], x, y) = f(x, y, a, b) - ([x, y], a, b) = 0$. Logo, $[a, b] \in N$. $\square$

Corolário 2.1.5. *Sejam A uma álgebra alternativa. Então $[N, A] \subseteq N$.*

Demonstração. Sejam A uma álgebra alternativa e $n \in N$. Pela função de Kleinfeld (2.4), temos $f(x, y, n, b) = (xy, n, b) - y(x, n, b) - (y, n, b)x = 0$. Por (2.7), temos que $([n, b], x, y) = f(x, y, n, b) - ([x, y], n, b) = 0$, para todos $x, y, b \in A$. $\square$

Corolário 2.1.6. *Sejam A uma álgebra alternativa, $x, y, z \in A$ e $n \in N$. Então*

$$n(x, y, z) = (nx, y, z) = (xn, y, z) = (x, y, z)n \quad (2.8)$$

Demonstração. Utilizando o Lema 2.1.1 e o Corolário 2.1.5, temos

$$(nx, y, z) - (xn, y, z) = ([n, z], y, z) = 0$$

e

$$n(x, y, z) - (x, y, z)n = [n, (x, y, z)] = 0,$$

terminando assim a demonstração. $\square$

Seja A uma álgebra alternativa sobre um corpo F . Lembremos que $\hat{A}$ denota a álgebra A acrescida da unidade.

Lema 2.1.7. *Seja A uma álgebra alternativa e seja $n \in N$, tal que $n\hat{A}n = (0)$. Então $\text{id}\langle n \rangle^2 = (0)$.*

Demonstração. Vamos mostrar que $\hat{A}n\hat{A} = \text{id}\langle n \rangle$. Como $\text{id}\langle n \rangle$ é um ideal, temos que $\hat{A}n\hat{A} \subseteq \text{id}\langle n \rangle$. Para mostrar o inverso, basta verificar que $\hat{A}n\hat{A}$ é um ideal da álgebra A . Sejam $r \in A$ e $s, t \in \hat{A}$. Por (2.8), temos

$$r.snt = rs.nt - (r, s, nt) = rs.nt - n(r, s, t) \in \hat{A}n\hat{A}.$$

Analogamente, temos que $snt.r \in \hat{A}n\hat{A}$. Então $\hat{A}n\hat{A}$ é um ideal, ou seja, $\hat{A}n\hat{A} = \text{id}\langle n \rangle$. Vamos verificar que $rns.tnv = 0$, para todos $r, s, t, v \in \hat{A}$. Por (2.8), temos

$$\begin{aligned} rns.tnv &= r(ns.tnv) + (r, ns, tnv) \\ &= r((ns.tn)v) - r(ns, tn, v) + n(r, s, tnv) \\ &= r((n(st)n)v) - r.n(s, t, v)n + (r, s, n.tnv) = 0. \end{aligned}$$

Logo, $\text{id}\langle n \rangle^2 = (0)$. □

2.2 Álgebras alternativas simples

Vejamos algumas propriedades das álgebras alternativas simples.

Teorema 2.2.1. *Seja A uma álgebra alternativa simples. Então $Z(A) = (0)$ ou $Z(A)$ é um corpo.*

Demonstração. Seja $Z = Z(A) \neq (0)$. Sabemos que Z é um anel associativo e comutativo. Vamos mostrar que Z é um corpo. Seja $0 \neq z \in Z$, então zA é um ideal de A . Como A é simples podemos observar que, para qualquer $z \in A$, temos $zA = (0)$ ou $zA = A$. Vamos supor $zA = (0)$. Seja álgebra A sobre um corpo F . Considere o subespaço Fz e $\alpha \in F$. Para todo $a \in A$, temos $\alpha za = 0$. Logo, Fz é um ideal não nulo de A , contradizendo que A é simples. Então $zA = A$. Logo, existe $e \in A$, tal que $ze = z$. Seja $x \in A$. Temos que $x = zy$, para algum $y \in A$. Logo,

$$ex = e(zy) = (ez)y = (ze)y = zy = x.$$

Analogamente, prova-se que $xe = x$. Então $e = 1 \in Z$. Seja $z' \in A$, tal que $zz' = e$. Para todos $x, y \in A$, temos

$$(z', x, y) = (z', zt, y) = (zz', t, y) = (e, t, y) = 0,$$

para um adequado $t \in A$. Analogamente, obtemos $(x, z', y) = (x, y, z') = 0$. Então $z' \in N(A)$. Pela identidade (2.1), temos

$$[z', x] = [z', zt] = z[z', t] + [z, t]z' = [zz', t] = [e, t] = 0.$$

Logo, $z' \in Z$. Então o inverso de z é $z' \in Z$. □

Uma álgebra A sobre F é chamada *central* se $Z(A) = F$.

Seja A uma álgebra, e $a \in A$. Definimos os seguintes operadores de $A \rightarrow A$, tais que $R_x(a) = xa$ e $L_x(a) = ax$, para qualquer $x \in A$. A subálgebra de $\text{End}(A)$, gerada por R_x e L_x é denotada por $M(A)$.

Teorema 2.2.2. *Seja A uma álgebra alternativa, simples e central sobre F e K uma extensão sobre F . Então a álgebra $A_K = K \otimes_F A$ é uma álgebra central simples sobre K .*

Demonstração. Vamos mostrar a simplicidade de A_K . Seja U ideal não nulo de A_K . Seja $u \in U$ não nulo, onde $u = \sum_i k_i \otimes a_i$, tais que $k_i \in K$, $a_i \in A$, o conjunto dos k_i é linearmente independente sobre F e u tenha o menor número de $a_i \neq 0$. Seja $M(A_K)$ a álgebra de multiplicações da álgebra A_K e considere a F -subálgebra $A^* = M^{A_K}(A)$ de $M(A_K)$, gerada pelos operadores que são multiplicação por elementos de A . Se $W \in A^*$ temos que $Wu = \sum_i k_i \otimes Wa_i \in U$. Podemos assumir que $a_1 \neq 0$. Como A é simples, temos $a_1 A = A$. Logo, existe $W_0 \in A^*$, tal que $W_0 a_1 = 1$. Tomemos

$$\begin{aligned} u_1 = W_0 u &= k_1 \otimes W_0 a_1 + k_2 \otimes W_0 a_2 + \dots + k_m \otimes W_0 a_m \\ &= k_1 \otimes 1 + k_2 \otimes a'_2 + \dots + k_m \otimes a'_m \in U. \end{aligned}$$

Para arbitrário $a \in A$, temos

$$\begin{aligned} [1 \otimes a, u_1] &= [1 \otimes a, k_1 \otimes 1 + k_2 \otimes a'_2 + \dots + k_m \otimes a'_m] \\ &= [1 \otimes a, k_1 \otimes 1] + [1 \otimes a, k_2 \otimes a'_2] + \dots + [1 \otimes a, k_m \otimes a'_m] \\ &= (1 \otimes a)(k_1 \otimes 1) - (k_1 \otimes 1)(1 \otimes a) + \dots \\ &\quad + (1 \otimes a)(k_m \otimes a'_m) - (k_m \otimes a_m)(1 \otimes a) \\ &= k_2 \otimes [a, a'_2] + \dots + k_m \otimes [a, a'_m] \in U. \end{aligned}$$

Como u tem o menor número de $a_i \neq 0$, temos que $[1 \otimes a, u_1] = 0$. Como o conjunto dos k_i é linearmente independente, temos $[a, a'_i] = 0$, para todo $i = 2, \dots, m$. Portanto, $a'_i \in K(A)$. Podemos observar ainda que, para todos $a, b \in A$, temos

$$\begin{aligned} (1 \otimes a, u_1, 1 \otimes b) &= (1 \otimes a, k_1 \otimes 1, 1 \otimes b) + (1 \otimes a, k_2 \otimes a'_2, 1 \otimes b) \\ &\quad + \dots + (1 \otimes a, k_m \otimes a'_m, 1 \otimes b) \\ &= k_2 \otimes (a, a'_2, b) + \dots + k_m \otimes (a, a'_m, b). \end{aligned}$$

Como k_i é linearmente independente sobre F e u tem o menor número de $a_i \neq 0$, temos que $(a, a'_i, b) = 0$. Logo $a'_i \in N(A)$. Pelo Teorema 2.2.1, temos $a_i \in Z(A) = F$.

Defina $a'_i = \alpha_i \in F$, temos

$$\begin{aligned} u_1 &= k_1 \otimes 1 + k_2 \otimes \alpha_2 + \dots + k_m \otimes \alpha_m \\ &= k_1 \otimes 1 + \alpha_2 k_2 \otimes 1 + \dots + \alpha_m k_m \otimes 1 \\ &= (k_1 + \alpha_2 k_2 + \dots + \alpha_m k_m) \otimes 1 = k \otimes 1, \end{aligned}$$

onde $0 \neq k \in K$, pois k_i é linearmente independente sobre F . Observe que $u_1(k^{-1} \otimes 1) = 1 \otimes 1 \in U$. Logo, $U = A_K$, ou seja, A_K é simples. Vamos verificar que $Z(A_K) = K$. Seja $z = \sum_i k_i \otimes a_i \in Z(A_K)$, com k_i é linearmente independente sobre F . Para todos $a, b \in A$, temos

$$0 = [z, 1 \otimes a] = \sum_i k_i \otimes [a_i, a]$$

e

$$0 = (z, 1 \otimes a, 1 \otimes b) = \sum_i k_i \otimes (a_i, a, b).$$

Então, $a_i \in Z(A) = F$. Defina $a_i = \alpha_i \in F$. Temos que $z = \sum_i k_i \otimes a_i = \sum_i \alpha_i k_i \otimes 1 \in K$. Portanto, $Z(A_K) \subseteq K$. Como $K \subseteq Z(A_K)$, temos que $Z(A_K) = K$, terminando assim a demonstração. $\square$

Proposição 2.2.3. *Não existem álgebras simples localmente nilpotentes.*

Demonstração. Seja A uma álgebra localmente nilpotente. Vamos assumir por contradição que A é simples.

Seja $a \in A$ não nulo e considere o ideal I_a gerado pelo conjunto $Aa + aA$. Como A é simples, temos que $I_a = A$. Podemos encontrar $0 \neq x_{ij} \in A$, tais que

$$a = \sum_{i=1}^t M_{x_{i1}} M_{x_{i2}} \dots M_{x_{ik_i}} a, \quad (2.9)$$

onde $M_{x_{ij}}$ é $R_{x_{ij}}$ ou $L_{x_{ij}}$.

Seja B a subálgebra de A , gerada pelo conjunto de elementos

$$\{a, x_{11}, \dots, x_{1k_1}, \dots, x_{t1}, \dots, x_{tk_t}\}.$$

Como B é nilpotente, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $B^n = (0)$. Substituímos o a do segundo membro por (2.9) teremos

$$a = \sum_{i=1}^t M_{x_{i1}} M_{x_{i2}} \dots M_{x_{ik_i}} \left(\sum_{i=1}^t M_{x_{i1}} M_{x_{i2}} \dots M_{x_{ik_i}} a \right),$$

Repetimos o processo $n-1$ vezes, teremos $a = 0$. Logo, A não é simples. $\square$

2.3 Identidades do centro associativo das álgebras alternativas

Vamos agora analisar algumas propriedades do comutador e do associador.

Proposição 2.3.1. *Seja A uma álgebra alternativa, $a, b, c, r, s, t, u \in A$ e $n \in N$. Então*

1. $[n, a](a, b, c) = 0$ e $(a, b, c)[n, a] = 0$.
2. $[n, a](r, s, t) = -[n, r](a, s, t)$ e $(r, s, t)[n, a] = -(a, s, t)[n, r]$.
3. $(a, b, c)(r, s, t)[n, u] = 0$.

Demonstração. 1. Pelo Lema 2.1.1 e Corolário 2.1.5, temos

$$\begin{aligned} [n, a](a, b, c) &= (a, [n, a]b, c) \\ &= (a, [n, ab], c) - (a, a[n, b], c) \\ &= (a, a, c)[n, b] = 0, \end{aligned}$$

da mesma forma, provamos a outra identidade.

2. Basta linearizarmos as identidades do item anterior.
3. Sejam $d = (a, b, c)$ e $d_1 = (r, s, t)$. Pelas identidades (2.1) e (2.8) e o Corolário 2.1.5, temos que $d[n, u] = [n, du] - n(a, b, c) + (a, b, c)n = [n, du]$. Logo

$$d[n, u] = [n, du] = [n, u]d. \quad (2.10)$$

De acordo com (2.10), temos que

$$d_1 d[n, u] = d_1 [n, du] = [n, du]d_1 = d[n, u]d_1 = dd_1[n, u]. \quad (2.11)$$

Consideremos $h = (r, s, t)(a, b, c)[n, u]$. Sabemos, pelo item 2 desta proposição, que h é anti-simétrico nas variáveis a, b, c, u . Pelas identidades (2.10) e (2.11), temos que será h anti-simétrico em todas as variáveis, com exceção a variável n . Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} (r, s, t)(a, b, c)[n, u] &= -(a, s, t)(r, b, c)[n, u] \\ &= (a, b, t)(r, s, c)[n, u] \\ &= -(a, b, c)(r, s, t)[n, u]. \end{aligned}$$

Por (2.10), temos

$$\begin{aligned}
(r, s, t)(a, b, c)[n, u] &= -(a, b, c)(r, s, t)[n, u] \\
&= -(a, b, c)[n, (r, s, t)u] \\
&= -[n, (r, s, t)u](a, b, c) \\
&= -(r, s, t)[n, u](a, b, c) \\
&= -(r, s, t)(a, b, c)[n, u].
\end{aligned}$$

Logo, $(r, s, t)(a, b, c)[n, u] = 0$.

□

Para uma álgebra A , chamamos o ideal $D(A) = \text{id}((a, b, c) | a, b, c \in A)$ de *ideal associador*.

Proposição 2.3.2. *Seja A uma álgebra arbitrária e $D(A)$ o ideal associador. Então*

$$D(A) = (A, A, A)\hat{A} = \hat{A}(A, A, A).$$

Demonstração. Como $C = (A, A, A)\hat{A}$ é um subespaço gerado pelos associadores multiplicados por elementos da álgebra ou do corpo, temos que C está contido em $D(A)$ e contém todos os associadores. Logo, basta mostrarmos que C é um ideal.

Como C é um subespaço, basta verificarmos se o produto de elementos de C por elementos de A pertence a C . Para tanto, vamos verificar a multiplicação à esquerda. Sejam $a, b, c, d, e \in A$. Pela propriedade distributiva da multiplicação, basta mostrarmos para elementos geradores. Por (2.5), temos que

$$a(b, c, d) \in C.$$

Pela definição do associador, temos que

$$a((b, c, d)e) = (a(b, c, d))e - (a, (b, c, d), e).$$

Por (2.5), para provarmos que $(a(b, c, d))e \in C$ é suficiente verificarmos que $((a, b, c)d)e \in C$. Pela definição do associador, temos

$$((a, b, c)d)e = (a, b, c)de + ((a, b, c), d, e) \in C.$$

Então,

$$a((b, c, d)e) = (a(b, c, d))e - (a, (b, c, d), e) \in C.$$

A multiplicação à direita vem da definição do associador e das observações anteriores. Logo C é um ideal e, como C está contido no menor ideal gerado pelos associadores, temos que $C = D(A)$. Analogamente, prova-se que $D(A) = \hat{A}(A, A, A)$. □

O maior ideal contido no centro associativo da álgebra A chamamos de *núcleo associativo* e denotamos por $U(A)$.

Proposição 2.3.3. *Seja A uma álgebra arbitrária e $U(A)$ o núcleo associativo. Então*

$$U(A) = \{x \in A \mid x\hat{A} \subseteq N\}.$$

Demonstração. Vamos mostrar que $B = \{x \in A \mid x\hat{A} \subseteq N\}$ é um ideal em N . Observemos que se $x \in B$ então $x \in N$. Como N é uma subálgebra temos que a soma de elementos de B pertence a B . Logo, falta mostrarmos o que ocorre quando multiplicamos elementos de B por elementos da álgebra.

Sejam $a, b \in A$ e $x \in B$. Temos que

$$xb.a = x.ba + (x, b, a) \in B$$

e

$$bx.a = b.xa + (b, x, a) = [b, xa] + xa.b + (b, x, a) \in B.$$

Agora é preciso verificar que $U(A)$ está contido em B . Seja $u \in U(A)$. Sabemos que u e $ua \in N$, para todo $a \in A$. Logo, $u \in B$. $\square$

Vejamos o que ocorre quando multiplicamos o núcleo associativo e o ideal associador.

Proposição 2.3.4. *Sejam A uma álgebra arbitrária, $D(A)$ o ideal associador e $U(A)$ o núcleo associativo. Então*

$$D(A)U(A) = U(A)D(A) = (0).$$

Demonstração. Pelo Lema 2.1.1, sabemos que $u(a, b, c) = (ua, b, c) = 0$ e $(a, b, c)u = (a, b, cu) = 0$, para quaisquer $a, b, c \in A, u \in U(A)$. Temos que

$$U(A)(A, A, A) = (A, A, A)U(A) = (0).$$

Sejam $a, b, c, d \in A$ e $u \in U(A)$, temos

$$u((a, b, c)d) = (u(a, b, c))d = 0.$$

Logo, $U(A)((A, A, A)\hat{A}) = U(A)D(A) = 0$, provando assim a segunda igualdade. A primeira é provada da mesma forma. $\square$

Denotaremos por $P(A)$ o ideal da álgebra A gerado pelo conjunto $[N, A]$.

Lema 2.3.5. *Seja A uma álgebra alternativa. Então $P(A) = [N, A]\hat{A} = \hat{A}[N, A]$.*

Demonstração. É claro que $[N, A]\hat{A} \subseteq P(A)$. Vamos mostrar o contrário, provando que o subespaço $M = [N, A]\hat{A}$ é um ideal da álgebra A . Nesse caso, basta analisarmos a multiplicação entre elementos de M e elementos de A .

Sejam $x, z \in A, n \in N$ e $y \in \hat{A}$. Temos

$$\begin{aligned} y[n, x] &= (nx - xn)y + y(nx - xn) - (nx - xn)y \\ &= [n, x]y + [y, [n, x]] \in M. \end{aligned}$$

Podemos verificar que

$$\begin{aligned} [n, x]y.z &= ((nx)y)z - ((xn)y)z \\ &= (nx)(yz) - (xn)(yz) \\ &= [n, x](xz) \in M. \end{aligned}$$

Para finalizarmos, temos

$$\begin{aligned} z.[n, x]y &= z((nx)y - (xn)y) \\ &= (z(nx))y - (z(xn))y \\ &= (z[n, x])y \in M. \end{aligned}$$

Logo, M é ideal de A e, portanto, $P(A) = M$. Analogamente, provamos $P(A) = \hat{A}[N, A]$. $\square$

Lema 2.3.6. *Sejam A uma álgebra alternativa e $P(A)$ o ideal gerado pelo conjunto $[N, A]$. Então $(P(A), A, A) \subseteq N$.*

Demonstração. Pelo Lema anterior, basta verificar que $([x, n]y, z, t) \in N$, para todos $x, y, z, t \in A$ e $n \in N$. Pelo Lema 2.1.5 e as relações (2.8) e (2.1), temos

$$\begin{aligned} ([x, n]y, z, t) &= [x, n](y, z, t) \\ &= [x(y, z, t), n] - x[(y, z, t), n] \\ &= [x(y, z, t), n] \in [A, N] \subseteq N. \end{aligned}$$

Logo, $[A, N] \subseteq N$. $\square$

Vejamos outras identidades para uma álgebra alternativa.

Lema 2.3.7. *Seja A uma álgebra alternativa. Então*

$$(x, y, (x, y, z)) = [x, y](x, y, z), \quad (2.12)$$

$$((x, y, z), x, y) = -(x, y, z)[x, y], \quad (2.13)$$

$$(x, y, z) \circ [x, y] = 0, \quad (2.14)$$

para todos $x, y, z \in A$.

Demonstração. Sejam $x, y, z \in A$. Vamos provar a identidade

$$(xy)(x, y, z) = y(x(x, y, z)).$$

Pela definição do associador e a identidade de Moufang à esquerda, temos

$$\begin{aligned} (xy)((xy)z) &= (xy)(x(yz)) - y(x((xy)z) + y(x(x(yz)))) \\ &= (xy)^2z - ((xy)(xy) + (yx)(xy))z + y(x^2(yz)) \\ &= ((xy)^2 - (xy)^2 - yx^2y + yx^2y)z = 0. \end{aligned}$$

Para provarmos (2.12), basta aplicarmos a identidade provada. Temos

$$\begin{aligned} (x, y, (x, y, z)) &= -(y, x, (x, y, z)) \\ &= -(yx)(x, y, z) + y(x(x, y, z)) \\ &= -(yx)(x, y, z) + (xy)(x, y, z) \\ &= [x, y](x, y, z). \end{aligned}$$

A identidade (2.13) é análoga à (2.12).

Para a verificação de (2.14), usamos as identidades (2.12) e (2.13). Temos

$$\begin{aligned} (x, y, z) \circ [x, y] &= (x, y, z)[x, y] + [x, y](x, y, z) \\ &= -((x, y, z), x, y) + (x, y, (x, y, z)) = 0, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Lema 2.3.8. *Seja A uma álgebra alternativa e $x, y \in A$. Então para quaisquer elementos u, v da subálgebra gerada por x, y , temos*

$$(A, u, v) \subseteq (A, x, y).$$

Demonstração. Seja B a subálgebra gerada por x, y e os monômios não nulos $u_1, u_2, u'_1, u'_2 \in B$. Denotemos por $d(u_i)$ o grau do monômio u_i . Vamos provar por indução em $n = d(u_1) + d(u_2)$, que vale $(A, u_1, u_2) \subseteq (A, x, y)$. Para $n = 2$, temos $u_1 = x$ e $u_2 = y$ ou $u_1 = y$ e $u_2 = x$, portanto $(A, u_1, u_2) \subseteq$

(A, x, y) . A nossa hipótese de indução será que $(A, u'_1, u'_2) \subseteq (A, x, y)$ é válida para $d(u'_1) + d(u'_2) < n$. Denotamos $r \equiv s$ se $r - s \in (A, x, y)$. Pela a identidade de Moufang, temos

$$\begin{aligned} (z, x, yxy) - (z, xyx, y) &= (zx)(yxy) - z(xyxy) - (z(xyxy))y + z(xyxy) \\ &= (((zx)y)x)y - (((zx)y)x)y = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$(z, x, yxy) = (z, xyx, y), \quad (2.15)$$

para arbitrários $x, y, z \in A$. Ao linearizarmos (2.15), obtemos

$$(z, t, yxy) = (z, xy.t, y) + (z, ty.x, y) + (z, yty, x). \quad (2.16)$$

Vamos agora considerar dois casos:

Caso 1: Um dos monômios inicia e finaliza com o mesmo elemento. Suponhamos $u_1 = xv_1x$, tal que $v_1 \in B$ é monômio não nulo e $d(v_1) = d(u_1) - 2$. Seja $z \in A$. Por (2.16), temos

$$\begin{aligned} (z, u_1, u_2) &= (z, xv_1x, u_2) = (u_2, z, xv_1x) \\ &= (u_2, v_1x.z, x) + (u_2, zx.v_1, x) + (u_2, xzx, v_1) \equiv 0, \end{aligned}$$

se $u_1 = x^2$, teremos

$$\begin{aligned} (z, u_1, u_2) &= (z, x^2, u_2) = (zx, x, u_2) + (z, x, xu_2) \\ &= (z, x, u_2) \equiv 0. \end{aligned}$$

Caso 2: O início ou o fim do monômio u_2 tem o mesmo elemento que o início da palavra u_1 . Sejam $u_1 = xv_1$ e $u_2 = xv_2$, com $d(v_1) = d(u_1) - 1$ e $d(v_2) = d(u_2) - 1$. Pela linearização de Moufang, temos

$$\begin{aligned} (z, xv_1, xv_2) &= -(xv_2, xv_1, z) \\ &= (xv_2, zv_1, x) + (xv_2, z, v_1)x + (xv_2, x, v_1) \equiv 0, \end{aligned}$$

terminando assim a demonstração. $\square$

Corolário 2.3.9. *Seja A uma álgebra alternativa e $x, y, z \in A$. Então para todos elementos u_i, v_i da subálgebra gerada pelos elementos x, y , onde $i = \{1, 2\}$, vale a relação*

$$(u_1, v_1, z) \circ [u_2, v_2] = 0 \quad (2.17)$$

Demonstração. Seja B a subálgebra gerada por x, y e os monômios não nulos $u, v, u', v' \in B$. Denotemos por $d(u)$ o grau do monômio u . Vamos provar por indução em $n = d(u) + d(v)$, que vale $(u_1, v_1, z) \circ [u, v] = 0$. Pelo Lema anterior e a identidade (2.14), temos que para $n = 2$, a identidade $(u_1, v_1, z) \circ [u, v] = 0$ é válida. Nossa hipótese de indução será $(u_1, v_1, z) \circ [u', v'] = 0$ é válida, para $d(u') + d(v') < n$. Pelo Lema anterior, temos que existe $z \in A$, tal que $(u_1, v_1, z) = (x, y, z_1)$. Se $d(u) > 1$ e $d(v) = 1$, podemos supor $v = x$. Pela linearização de (2.14) e a hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned} (u_1, v_1, z) \circ [u, v] &= (x, y, z_1) \circ [u, x] \\ &= -(x, u, z_1) \circ [y, x] = (x, y, z_2) \circ [x, y] = 0, \end{aligned}$$

para um adequado $z_2 \in A$.

Se $d(u) > 1$ e $d(v) > 1$, temos

$$\begin{aligned} (u_1, v_1, z) \circ [u, v] &= (x, y, z_1) \circ [u, v] \\ &= -(x, y, z_1) \circ [x, v] - (x, v, z_1) \circ [u, y] - (u, v, z_1) \circ [x, y] \\ &= 0, \end{aligned}$$

terminando assim a demonstração. $\square$

Teorema 2.3.10. *Sejam A uma álgebra alternativa, $x, y \in A$ e B a subálgebra gerada pelos elementos x, y . Então, para todos $u_i, v_i \in B, r, s \in A$ e $w_i = [u_i, v_i]$ onde $i = \{1, 2, 3\}$, valem as identidades*

$$(w_1 \circ w_2, r, s)w_3 = w_3(w_1 \circ w_2, r, s) = 0, \quad (2.18)$$

$$(w_1^2, r, s)w_2 = w_2(w_1^2, r, s) = 0, \quad (2.19)$$

$$(w_1^2(w_2 \circ w_3), r, s) = ((w_2 \circ w_3)w_1^2, r, s) = 0, \quad (2.20)$$

$$(w_1^2w_2^2, r, s) = 0. \quad (2.21)$$

Demonstração. Mostraremos que, se $r \in A$ e $u \in B$, temos

$$(w_1 \circ w_2, u, r) = (w_1^2, u, r) = 0. \quad (2.22)$$

Pela linearização de Moufang e a identidade (2.17), temos

$$\begin{aligned} (w_1 \circ w_2, u, r) &= (r, w_1, u)w_2 + (r, w_2, u)w_1 \\ &\quad + w_2(w_1, u, r) + w_1(w_2, u, r) \\ &= w_1 \circ (w_2, u, r) + w_2 \circ (w_1, u, r) = 0. \end{aligned}$$

Analogamente, provamos $(w_1^2, u, r) = 0$.

Vamos agora verificar a identidade (2.18). Ao usarmos (2.13), (2.22), (2.17), a linearização de Moufang e o teorema de Artin, temos

$$\begin{aligned}
-(w_1 \circ w_2, r, s)w_3 &= -(w_1 \circ w_2, r, s)[u_3, v_3] \\
&= (w_1 \circ w_2, u_3, s)[r, v_3] + (w_1 \circ w_2, r, v_3)[u_3, s] \\
&\quad (w_1 \circ w_2, u_3, v_3)[r, s] + ((w_1 \circ w_2, r, s), u_3, v_3) \\
&\quad ((w_1 \circ w_2, u_3, s), r, v_3) + ((w_1 \circ w_2, r, v_3), u_3, s) \\
&\quad ((w_1 \circ w_2, u_3, v_3), r, s) \\
&= ((w_1 \circ w_2, r, s), u_3, v_3) \\
&= (w_1 \circ (w_2, r, s), u_3, v_3) + (w_2 \circ (w_1, r, s), u_3, v_3) \\
&= w_1 \circ ((w_2, r, s), u_3, v_3) + (w_2, r, s) \circ (w_1, u_3, v_3) \\
&\quad + w_2 \circ ((w_1, r, s), u_3, v_3) + (w_1, r, s) \circ (w_2, u_3, v_3) = 0.
\end{aligned}$$

Analogamente, provamos a outra identidade.

A verificação da identidade (2.19) é análoga à anterior.

Para provarmos a identidade (2.20), usamos a identidade (2.22) e a função de Kleinfeld. Temos

$$\begin{aligned}
f(w_1^2, w_2 \circ w_3, r, s) &= f(r, s, w_1^2, w_2 \circ w_3) \\
&= (rs, w_1^2, w_2 \circ w_3) - s(r, w_1^2, w_2 \circ w_3) \\
&\quad - (s, w_1^2, w_2 \circ w_3)r = 0.
\end{aligned}$$

Agora, ao utilizarmos as identidades de Moufang linearizada, (2.18) e (2.19), obtemos

$$\begin{aligned}
(w_1^2(w_2 \circ w_3), r, s) &= f(w_1^2, w_2 \circ w_3, r, s) + (w_2 \circ w_3)(w_1^2, r, s) \\
&\quad + (w_2 \circ w_3, r, s)w_1^2 \\
&= w_2(w_3(w_1^2, r, s) + w_3(w_2(w_1^2, r, s) \\
&\quad + ((w_2 \circ w_3, r, s)w_1)w_1 = 0.
\end{aligned}$$

Analogamente, provamos as identidades $((w_2 \circ w_3)w_1^2, r, s) = 0$ e (2.21). $\square$

Um resultado interessante é sabermos como são os elementos do associador. Esse resultado é um corolário do teorema anterior. Sejam $x, y \in A$. Definiremos as funções

$$\begin{aligned}
n_1(x, y) &= [x, y]^4, \\
n_2(x, y) &= [x, y]^2([x, y] \circ [x, yx]), \\
n_3(x, y) &= [x, y]^2[x, yx]^2.
\end{aligned}$$

Seja $A[X]$ uma álgebra alternativa livre, denotamos por $N_{Alt}[X]$, o seu centro associativo.

Corolário 2.3.11. *Seja $A[X]$ uma álgebra alternativa livre e $x, y \in A[X]$. Então os elementos $n_i(x, y) \in N_{Alt}[X]$, para $i = 1, 2, 3$. Temos, ainda,*

$$n_1(x, y)x^2 - n_2(x, y)x + n_3(x, y) = 0 \quad (2.23)$$

Demonstração. Basta observarmos as identidades do teorema anterior. A relação (2.23) é válida pelo Teorema 1.1.3. $\square$

2.4 O teorema de Shirshov

O Teorema de Kleinfeld diz que a única álgebra alternativa simples, que não é associativa é a álgebra de Cayley-Dickson. Para a demonstração deste teorema é necessário o Teorema de Shirshov. Para tanto, iremos utilizar alguns resultados conhecidos das álgebras associativas, que não serão demonstrados aqui. Maiores detalhes poderão ser obtidos em [2], [14] e [6].

Para a demonstração do Teorema de Shirshov, vamos considerar uma álgebra A sobre um anel Φ . Não podemos esquecer que Φ é associativo, comutativo e possui elemento unidade. Vamos fixar um ideal I do anel Φ .

Seja $A[X]$ uma álgebra livre. Dizemos que o polinômio $f \in A[X]$ é *admissível*, se pelo menos um dos coeficientes dos termos de maior grau é o elemento unidade.

Seja A uma álgebra. Dizemos que A é uma *PI-álgebra* se existir um polinômio admissível $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, tal que $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$, para todos $a_i \in A$.

Dizemos que uma Φ -álgebra A é *finita sobre I* se A for finitamente gerada e existirem elementos $a_1, a_2, \dots, a_k \in A$, tais que, para algum número natural m , cada elemento $c \in A^m$, pode ser representado na forma $c = \sum_{i=1}^k z_i a_i$, onde $z_i \in I$. Se cada Φ -subálgebra de A finitamente gerada sobre I for finita sobre I , dizemos que a álgebra B é *localmente finita sobre I* .

Teorema 2.4.1. *(Corolário do Teorema Height em [14])[Levitzki] Seja A uma PI-álgebra associativa finitamente gerada sobre Φ . Se cada elemento de A é nilpotente, então A é nilpotente.*

Dada uma álgebra associativa A , o *radical localmente nilpotente* de A , denotado por $\mathcal{L}(A)$, é o maior ideal localmente nilpotente de A . Podemos provar que $A/\mathcal{L}(A)$ não contém ideais à direita, à esquerda ou bilaterais não nulos localmente nilpotentes.

Proposição 2.4.2. *Seja A uma álgebra alternativa. Se $[x, y]^n = 0$, para quaisquer $x, y \in A$, então todos os elementos nilpotentes da álgebra A formam um ideal.*

Demonstração. Vamos analisar o caso em que A é associativa. Seja I o maior nil-ideal de A . O quociente $\bar{A} = A/I$ não contém nil-ideais diferentes de zero. Vamos assumir por contradição que existe $\bar{0} \neq \bar{x} \in \bar{A}$ nilpotente, tal que $\bar{x}^k = 0$, onde $k \in \mathbb{N}^*$. Podemos verificar que se $k \neq 2$, temos $(\bar{x}^k)^2 = 0$. Portanto, vamos supor que o índice de nilpotência é 2. Considere o ideal à direita $J = \bar{x}\bar{A}$. Para todo $\bar{y} \in \bar{A}$, temos $0 = [\bar{x}, \bar{y}]^n \bar{x}\bar{y} = (\bar{x}\bar{y})^{n+1}$, ou seja, J é um nil-ideal à direita de índice $n+1$. Se o ideal J for nulo, temos que o $\text{id}\langle \bar{x} \rangle$ ou $\bar{x}\bar{\Phi}$, será um nil-ideal não nulo de $\bar{A}$. Logo, $J \neq (0)$. Pelas hipóteses, podemos utilizar o Teorema 2.4.1, e concluir que J é um ideal à direita localmente nilpotente. Logo, temos que $\mathcal{L}(\bar{A}) \neq (0)$. Contradição, pois $\mathcal{L}(\bar{A})$ é um nil-ideal em $\bar{A}$.

Agora, iremos verificar o caso em que A é alternativa. Sejam $x, y \in A$ nilpotentes, tomemos a subálgebra B gerada por eles. Pelo Teorema 1.1.3 sabemos que B é uma subálgebra associativa. Observe que B satisfaz as condições da proposição e os elementos nilpotentes formam um ideal. Em particular, temos que $x+y$ é nilpotente. Seja $a \in A$ um elemento arbitrário. Considere a subálgebra gerada por a e x . De maneira análoga, temos que ax e xa são elementos nilpotentes. Consequentemente, os elementos nilpotentes da álgebra A formam um ideal. $\square$

Dizemos que um A -módulo M é *noetheriano* se para cada cadeia de submódulos $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ordenados por inclusão $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots \subseteq M_{n_0} \subseteq \dots$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para qualquer $n > n_0$, tem-se que $M_n = M_{n_0}$.

Teorema 2.4.3. *(Teorema VI.2.1 em [6]) Seja M um módulo sobre um anel A . Temos que M é noetheriano se, e somente se, todo submódulo de M (e, em particular, o próprio M) é finitamente gerado.*

Proposição 2.4.4. *(Proposição VI.2.4 em [6]) Um módulo finitamente gerado sobre um anel noetheriano é noetheriano.*

Lema 2.4.5. *Seja A uma álgebra finitamente gerada como um Φ -módulo. Então cada subálgebra finitamente gerada B da álgebra A é finitamente gerada como Φ -módulo.*

Demonstração. Seja $R = \{b_1, \dots, b_k\}$ o conjunto de geradores de B . Por hipótese, existem elementos $c_1, \dots, c_m \in A$ tais que $A = \Phi c_1 + \dots + \Phi c_m$. Em

particular, temos que $b_i = \sum_{l=1}^m \rho_i^l a_l$, com $i = 1, \dots, k$ e $c_i c_j = \sum_{l=1}^m \rho_{ij}^l a_l$, com $\rho_i^l, \rho_{ij}^l \in \Phi$, $i, j = 1, \dots, m$. Seja Φ_0 o subanel do anel Φ gerado pelo conjunto $\{1, \rho_i^l, \rho_{ij}^l\}$. Como Φ_0 é um anel finitamente gerado, pelo Teorema 2.4.3, temos que é noetheriano. Consideremos o Φ_0 -módulo A_0 tal que $A_0 = \Phi_0 c_1 + \Phi_0 c_2 + \dots + \Phi_0 c_m$. Observemos que A_0 é uma Φ -álgebra que contém o conjunto de geradores R . Consideremos a Φ_0 -subálgebra $B_0 \subseteq A_0$ gerado por R . Pela Proposição 2.4.4, temos que A_0 é noetheriano. Como A_0 é módulo noetheriano, temos que B_0 é um módulo finitamente gerado sobre Φ_0 . Pela própria construção de B e B_0 , temos que $B = B_0$. Logo, B é finitamente gerado. $\square$

Teorema 2.4.6 (Hamilton-Cayley). (*Teorema XV.4.8 em [2]*) *Sejam A um Φ -módulo, $W : A \rightarrow A$ uma função linear e P_W o polinômio característico da matriz associada a W com relação a uma base de A . Então $P_W(W) = 0$.*

Lema 2.4.7. *Seja A uma álgebra finita sobre I . Então A é localmente finita sobre I .*

Demonstração. Seja A uma álgebra finita sobre I e $B \subseteq A$ uma subálgebra arbitrária finitamente gerada. Vamos mostrar que B é uma álgebra finita sobre I . Como A é finitamente gerada como I -módulo, temos que B é finitamente gerada como I -módulo. Falta verificarmos que $\bar{B} = B/IB$ é nilpotente. Seja a álgebra das multiplicações $M^A(B)$, definida por B^* . Como $b^2 = L_b(b) = R_b(b)$, onde $b \in B$, é suficiente mostrarmos que a álgebra $\bar{B}^* = B^*/IB^*$ é nilpotente. Sejam $a_1, \dots, a_n \in A$ e um número natural m , tal que $A^m \subseteq Ia_1 + \dots + Ia_n$. Para todo $W \in B^*$, temos que $W^m a_i \in A^m$, onde $i = 1, \dots, n$. Logo, $W^m a_i = s_{i1} a_1 + \dots + s_{in} a_n$, onde $s_{ij} \in I$; $i, j = 1, 2, \dots, n$. Como a_i é gerador de A^m , iremos definir S como a matriz de dimensão $n \times n$, composta pelos elementos s_{ij} . Para cada $c \in A^m$ tal que $c = z_1 a_1 + \dots + z_n a_n$, onde $z_1 \in I$, associamos $[c] = (z_1, \dots, z_n)$. Denotamos por $\hat{a}$ a coluna

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Temos que $W^m c = [c].S.\hat{a}$, com o produto usual de matrizes. Observemos que $W^{km} c = [c].S^k.\hat{a}$, para todo k natural. Pelo teorema de Hamilton-Cayley, temos que a matriz S é uma raiz do polinômio característico, isto

é, $S^n = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k S^k$ onde $\sigma_k \in I$. Seja x um elemento arbitrário da álgebra. Consideremos

$$\begin{aligned} W^{m(n+1)}x &= W^{mn}(W^m x) = [W^m x].S^n.\hat{a} = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k [W^m x].S^k.\hat{a} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k W^{mk}(W^m x) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k W^{m(k+1)} \right) x, \end{aligned}$$

como x é arbitrário, obtemos que

$$W^{m(n+1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k W^{m(k+1)}, \sigma_k \in I.$$

Temos que $W^{m(n+1)} \in IB^*$ para qualquer elemento $W \in B^*$, isto é, $\bar{B}^*$ satisfaz a identidade polinomial $x^{m(n+1)=0}$. Pelo Teorema 2.4.1, temos $\bar{B}$ é nilpotente. $\square$

Seja $X = \{a_\alpha\}$ um conjunto de geradores da álgebra alternativa livre $Alt[X]$. Chamamos de r_1 -palavras aos produtos não associativos da forma $\langle a_{i_1}, \dots, a_{i_n} \rangle$ tais que $\langle a_1 \rangle = a_1$ e $\langle a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \rangle = \langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle a_n$. Se o conjunto de geradores forem r_1 -palavras, dizemos que os produtos não associativos da forma descrita acima são r_2 -palavras. Dessa maneira, definimos as r_i -palavras. Seja $M = \{m_i\}$ um conjunto da álgebra A . Definimos da mesma forma as r_i -palavras de M .

Teorema 2.4.8. (Teorema 5.5 em [14]) *Seja A uma álgebra alternativa e $v = v(x_1, \dots, x_n)$ uma palavra arbitrária não associativa. Então para todos os elementos $a_1, \dots, a_n \in A$ o elemento $v = v(a_1, \dots, a_n)$ é representado em forma de combinações lineares de r_2 -palavras de $a_1, \dots, a_n$ com o mesmo comprimento que v .*

Seja $Alt[X]$ a álgebra livre. Dizemos que cada elemento $f = f(x_1, \dots, x_n)$ da álgebra $Alt[X]$ é um j -polinômio alternativo, se for expresso por elementos do conjunto X pelas operações de adição, multiplicação por escalar e multiplicação quadrática ($U_y x = xyx$). Denotamos por $j_{Alt}[X]$ o conjunto de todos os j -polinômios alternativos e $j[X]$ o conjunto de todos os j -polinômios associativos.

Seja A uma álgebra alternativa. Dizemos que um polinômio admissível f é identidade se $f(a_1, \dots, a_n) = 0$, para arbitrários $a_i \in A$.

Teorema 2.4.9. (Teorema 5.3 em [14]) *Sejam A uma Φ -álgebra associativa e $\{a_i\}$ o conjunto de geradores de A , tais que o conjunto dos polinômios $j[\{a_i\}]$ satisfaz algum polinômio identidade. Se cada elemento do conjunto $j[\{a_i\}]$ é algébrico sobre I , então a álgebra A é localmente finita sobre I .*

Denotamos π o homomorfismo canônico da álgebra $Alt[X]$ para álgebra $Ass[X]$, onde $Ass[X]$ é a álgebra associativa livre gerada pelo conjunto X .

Lema 2.4.10. *Sejam X um conjunto gerador da álgebra alternativa e $f = f(x_1, \dots, x_n) \in j_{Alt}[X]$, então*

$$R_{f(x_1, \dots, x_n)} = \pi f(R_{x_1}, \dots, R_{x_n}).$$

Demonstração. Seja S o conjunto de todos j -polinômios onde vale

$$R_{f(x_1, \dots, x_n)} = \pi f(R_{x_1}, \dots, R_{x_n}).$$

Como $Alt[X]$ e $Ass[X]$ são gerados por X , temos que $X \subseteq S$. Como R_x é linear, temos que S é fechado com relação a I -combinações lineares. Vejamos se S é fechado na multiplicação quadrática. Seja $f \in S$. Como f é j -polinômio e π é o homomorfismo canônico, valem $\pi^2 = \pi$ e $\pi f = f\pi$. Logo,

$$R_{f^2(x_1, \dots, x_n)} = R^2_{f(x_1, \dots, x_n)} = [\pi f(R_{x_1}, \dots, R_{x_n})]^2 = \pi f^2(R_{x_1}, \dots, R_{x_n}).$$

Sejam $f, g \in S$. Ao utilizarmos a identidade de Moufang à direita, temos

$$\begin{aligned} R_{fgf(x_1, \dots, x_n)} &= R_{f(x_1, \dots, x_n)} R_{g(x_1, \dots, x_n)} R_{f(x_1, \dots, x_n)} \\ &= \pi f(R_{x_1}, \dots, R_{x_n}) \pi g(R_{x_1}, \dots, R_{x_n}) \pi f(R_{x_1}, \dots, R_{x_n}) \\ &= \pi f(R_{x_1}, \dots, R_{x_n}) (\pi^2(g(R_{x_1}, \dots, R_{x_n}) f(R_{x_1}, \dots, R_{x_n}))) \\ &= \pi(fgf)(R_{x_1}, \dots, R_{x_n}). \end{aligned}$$

Observemos que S é gerador e fechado com as operações de multiplicação, soma e multiplicação quadrática. Logo, $S = j_{Alt}[X]$. $\square$

Seja $f \in Alt[X]$. Dizemos que f é *essencial*, se πf é um polinômio admissível na álgebra $Ass[X]$.

Lema 2.4.11. *Seja A uma Φ -álgebra alternativa com conjunto de geradores $R = \{a_1, \dots, a_k\}$ e o submódulo $M = j_{Alt}[R]$ satisfaz um polinômio essencial identidade f , onde $f \in j_{Alt}[X]$. Se cada elemento do submódulo de M é algébrico sobre I , então para um número natural n , todas as r_1 -palavras geradas por a_i de comprimento maior ou igual a n são representados em forma de I -combinações lineares de r_1 -palavras geradas por a_i de comprimento menor que n .*

Demonstração. Seja $a = (...((a_{i_1}a_{i_2})a_{i_3})...)a_{i_t}$ uma r_1 -palavra, onde $a_{i_j} \in R$. Temos que $a = R_{a_{i_t}}...R_{a_{i_3}}R_{a_{i_2}}a_{i_1}$. Logo, é suficiente provarmos que a subálgebra A^* da álgebra de multiplicação $R(A)$ gerada por $R_{a_1}, ..., R_{a_k}$ é finita. Sejam $d_1(x_i), ..., d_n(x_i)$ j -polinômios alternativos arbitrários. Temos que

$$d_t(a_1, ..., a_k) \in M,$$

para todo t . Pelo Lema 2.4.10 e pelo fato que $f(m_i) = 0$, para quaisquer $m_i \in M$, teremos

$$\begin{aligned} \pi f(\pi d_1(R_{a_i}), ..., \pi d_n(R_{a_i})) &= \pi f(R_{d_1(a_i)}, ..., R_{d_n(a_i)}) \\ &= R_{f(d_1(a_i), ..., d_n(a_i))} = 0. \end{aligned}$$

Pelo fato que $j[X] = \pi(j_{Alt}[X])$, temos que o conjunto de j -polinômios de $\{R_{a_1}, ..., R_{a_k}\}$ satisfaz o polinômio identidade $\pi f = 0$. Como os elementos do submódulo M são algébricos, para todos j -polinômio $d(x_1, ..., x_k) \in j_{Alt}[X]$, existe um número natural m e elementos $z_i \in I$ tal que

$$d^m(a_1, ..., a_k) = \sum_{i=1}^{m-1} z_i d^i(a_1, ..., a_k).$$

Ao utilizarmos outra vez o Lema 2.4.10 e o fato que $d^r(x_1, ..., x_k) \in j_{Alt}[X]$ temos que

$$\begin{aligned} (\pi d)^m(R_{a_1}, ..., R_{a_k}) &= \pi(d^m)(R_{a_1}, ..., R_{a_k}) = R_{d^m(a_1, ..., a_k)} \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} z_i R_{d^i(a_1, ..., a_k)} = \sum_{i=1}^{m-1} z_i (\pi d)^i(R_{a_1}, ..., R_{a_k}). \end{aligned}$$

Temos que cada j -polinômio do conjunto $\{R_{a_1}, ..., R_{a_k}\}$ é algébrico sobre I . Pelo Teorema 2.4.9, temos que A^* é localmente finita sobre I . $\square$

Seja X um conjunto gerador, o monômio $x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_t} \in Ass[X]$ e $*$ a involução em $Ass[X]$. Temos que $(x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_t})^* = x_{i_t}...x_{i_2}x_{i_1}$. Seja $f = \sum \alpha_i u_i$ um polinômio, onde $\alpha_i \in F$ e u_i são monômios. Ao aplicarmos a involução em f , temos $f^* = \sum \alpha_i u_i^*$.

Teorema 2.4.12. (Teorema 3.3 em [14])(Cohn) *Sejam X um conjunto gerador, $Ass[X]$ a álgebra associativa gerada por X tal que a involução $*$ é simétrica. Se a $card(X) < 4$, então $Ass[X] = j[X]$.*

Lema 2.4.13. *Cada PI-álgebra alternativa satisfaz um polinômio essencial identidade f , onde $f \in j_{Alt}[X]$.*

Demonstração. Seja $g(x_1, \dots, x_n) = 0$ um polinômio identidade essencial em uma PI-álgebra A . Defina $\rho(x, y) = g(xy, xy^2, \dots, xy^n)$. Como g é polinômio identidade, temos que $\rho(x, y) = 0$, para todos $x, y \in A$. Pelo Teorema de Artin temos que a álgebra $\text{Alt}[x, y]$ é associativa, e portanto isomorfa a $\text{Ass}[x, y]$. Seja

$$\theta(x, y) = \rho(x, y)\rho^*(x, y).$$

Como a cardinalidade de um conjunto finito é igual ao número de elementos, temos que o conjunto gerador de $\text{Ass}[x, y]$ tem cardinalidade igual a dois. Como $\theta^*(x, y) = (\rho(x, y)\rho^*(x, y))^* = \rho^{**}(x, y)\rho^*(x, y) = \theta(x, y)$, temos que a involução é simétrica. Logo, pelo Teorema de Cohn, temos que o polinômio $\theta(x, y)$ é um j -polinômio, ou seja,

$$\theta(x, y) \in j[\{x, y\}] = j_{\text{Alt}}[\{x, y\}].$$

Temos que $\theta(x, y)$ é um elemento essencial e uma identidade da álgebra A , terminando a demonstração. $\square$

Teorema 2.4.14 (Shirshov). *Seja A uma PI-álgebra alternativa sobre Φ com conjunto de geradores $R = \{a_i\}$ e seja M o conjunto de todas r_1 -palavras dos elementos do conjunto R . Se cada elemento do submódulo $j_{\text{Alt}}[M]$ é algébrico sobre ideal I , então a álgebra A é localmente finita sobre I .*

Demonstração. Pelo Lema 2.4.7, temos que uma álgebra finita sobre I , é localmente finita sobre I . Logo, é suficiente mostrarmos que todo subconjunto finito de R gera uma subálgebra finita de A sobre I . Seja B uma subálgebra arbitrária gerada por um conjunto finito $R_0 = \{a_{i1}, \dots, a_{ik}\}$. Como A é uma PI-álgebra, temos pelo o Lema 2.4.13, que A satisfaz um polinômio identidade essencial. Pelo Lema 2.4.11, podemos tomar um número natural n , tal que para cada r_1 -palavra do conjunto R_0 de comprimento maior que $n - 1$ é representada em forma de combinações lineares das r_1 -palavras de comprimento menor que n e escalares em I . Denotamos por R_1 o conjunto de todas r_1 -palavras dos elementos de R_0 , com comprimento menor que n . Repetindo o processo em R_1 , encontraremos um número natural m , tal que cada r_1 -palavra do conjunto R_1 com comprimento maior que $m - 1$ é representada por combinações lineares de r_1 -palavras do conjunto R_1 de comprimento menor que m . Observemos que para cada r_2 -palavra de comprimento maior que $mn - 1$ há combinação linear de r_2 -palavras do conjunto R_0 de menor comprimento mn . Pelo Teorema 2.4.8, concluímos que cada produto de mn ou mais elementos de R_0 é representado em forma de combinações lineares

de produtos com um número menor de fatores de R_0 . Conseqüentemente, a álgebra B é finita sobre I , como queríamos demonstrar. $\square$

2.5 O teorema de Kleinfeld

Lema 2.5.1. *Seja A uma álgebra com unidade sobre o corpo F e K uma extensão de F . Se a álgebra $\tilde{A} = K \otimes_F A$ é quadrática sobre K então a álgebra A é quadrática sobre F . Se $\tilde{A}$ é uma álgebra com composição com relação à norma $\tilde{n}$, então A é uma álgebra com composição onde a norma n será a restrição da norma $\tilde{n}$ a A .*

Demonstração. Seja $x \in \tilde{A}$. Temos que x satisfaz a relação $x^2 - \tilde{t}(x)x + \tilde{n}(x) = 0$, onde $\tilde{t}(x), \tilde{n}(x) \in K$. Definimos t e n pelas restrições a A do traço $\tilde{t}$ e da norma $\tilde{n}$, respectivamente. Observe que, para provar que A é quadrática é suficiente provar que $t(x), n(x) \in F$, para todo $x \in A$. Pela definição, sabemos que se $x \in F$, então $t(x) = 2x \in F$ e $n(x) = x^2 \in F$. Seja $x \notin F$. Então 1 e x são linearmente independentes. Neste caso, podemos selecionar uma base B de A , tal que $B = \{1, x, e_1, e_2, \dots\}$. Ela é uma base para $\tilde{A}$ sobre K . Tome $x^2 \in A$. Temos que $x^2 = \alpha + \beta x + \sum_i \gamma_i e_i$, com $\alpha, \beta, \gamma_i \in F$. Por outro lado, temos que $x^2 = t(x)x - n(x)$. Pela unicidade da representação de x^2 na base B , temos que $t(x) = \beta, n(x) = -\alpha \in F$. Portanto, a álgebra A é quadrática sobre F .

Vamos agora mostrar que se $\tilde{n}$ é estritamente não degenerada em $\tilde{A}$, então n é estritamente não degenerada em A . Seja $a \in A$ e $f(a, x) = n(a+x) - n(a) - n(x) = 0$, para $x \in A$ arbitrário. Como $\tilde{f} \equiv f$ em A , temos que $\tilde{f}(a, \tilde{A}) = 0$, então $a = 0$. Logo, n é estritamente não degenerada em A . $\square$

Lema 2.5.2. *Seja A uma álgebra alternativa com unidade sobre um corpo infinito, tal que $n_i(x, y) \in F$, para quaisquer $x, y \in A$, $i = 1, 2, 3$ e $n_1(a, b) \neq 0$ para algum $a, b \in A$. Então A é quadrática sobre F .*

Demonstração. Sejam $x, y \in A$, tais que $y^4 \neq 0$. Logo, existem elementos distintos $\beta_i \in F, i = \{1, 2\}$ tais que $(x + \beta_i y)^4 \neq 0$. Tome $a, b \in A$, tais que $[a, b]^4 \neq 0$ e x um elemento arbitrário. Como a, b não pertence ao comutador, temos que $[x, a] \neq 0$ ou $[x, b] \neq 0$. Observe que $([b, x] + \beta_i [b, a])^4 = [b, x + \beta_i a]^4 \neq 0$. Como $n_i(x, y) \in F$, por (2.23) existe $\alpha_i \in F$, tal que $(x + \beta_i a)^2 + \alpha_i(x + \beta_i a) \in F$, para $i = \{1, 2\}$. Se $[a, b]^4 \neq 0$, analogamente, temos que $a^2 \in F + Fa$. Então $x^2 + \alpha_i x + \beta_i y \in F + Fa$, onde $y = x \circ a$. Eliminando y e dividindo por $\beta_2 - \beta_1$, obtemos $x^2 + \alpha x + \gamma = \theta a$, para adequados $\alpha, \gamma, \theta \in F$. Se $[x, b] = 0$, podemos comutar essa relação com b e obteremos $\theta[a, b] = 0$.

Em ambos os casos, temos $\theta = 0$ e $x^2 + \alpha_i x + \gamma = 0$. Como x é um elemento arbitrário, temos que A é quadrática sobre F . $\square$

Teorema 2.5.3. (Kleinfeld) *Seja A uma álgebra alternativa simples e não associativa. Então o centro da álgebra A é um corpo e A é uma álgebra de Cayley-Dickson sobre o seu centro.*

Demonstração. Vamos supor que A é comutativa. Pela identidade (2.3), temos que A é associativa. Pelo Teorema 2.2.1, temos que A é um corpo.

Basta então considerar o caso em que A é não comutativa. Pelo Teorema 2.2.1, sabemos que $Z(A) = (0)$ ou $Z(A)$ é um corpo. Vamos mostrar que $Z(A) \neq (0)$. Como A é não associativa, vamos verificar que $N(A) = Z(A)$. De fato, seja $n \in N(A)$ tal que $n \notin Z$. Sabemos que $[n, b] \in P(A)$. Como A é simples, temos que $P(A) = A$. Logo, $((x, y, z), r, s) = 0$ para todos $x, y, z, r, s \in A$. Seja $m = (a, c, d) \neq 0$, com $a, b, c \in A$. Utilizando as identidades de Moufang, temos que

$$\begin{aligned} (a, c, d)(a, e, f) &= (d, (a, e, f), a)c + (d, ca, (a, e, f)) + (d, (a, e, f)a, c) \\ &= -(d, (e, a, fa), c) = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (a, c, d)y(a, c, d) &= -(a, y, d)c(a, c, d) - (a, cd, y)(a, c, d) - (a, yd, c)(a, c, d) \\ &= -((a, y, d), c, (a, c, d)) - (a, y, d).c(a, c, d) \\ &= (a, y, d)(cd, c, a) = 0. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.1.7, temos que $\text{id}\langle m \rangle^2 = 0$. Como A é simples, temos $\text{id}\langle m \rangle = 0$ e $m = 0$. Contradição, pois A é não associativa. Desse modo, $P(A) = (0)$ e $[n, b] = 0$. Então, $n \in Z(A)$.

Pelo Lema 2.3.11, basta então mostrar que existem $a, b \in A$, tais que $0 \neq [a, b]^4$.

Suponha por contradição que, para quaisquer $x, y \in A$, temos $[x, y]^4 = 0$. Pela Proposição 2.4.2, temos um ideal I , formado por todos elementos nilpotentes. Como A é não comutativa, temos que existem $a, b \in A$, tais que $0 \neq [a, b] \in I = A$. Logo, A é uma nil-álgebra.

Como $[x, y]^4 = 0$, para quaisquer $x, y \in A$, sabemos que A é uma PI-álgebra. Como A é uma nil-álgebra, temos que A é algébrica. Pelo Teorema de Shirshov 2.4.14, sabemos que A é localmente finita sobre $Z(A)$. Logo, qualquer subálgebra gerada por um número finito de elementos, será finita e nil, ou seja, nilpotente. Logo, A é localmente nilpotente simples. Pelo

Lema 2.2.3, é uma contradição. Logo, existem $a, b \in A$, tais que $0 \neq [a, b]^4$. Portanto, $Z = Z(A)$ é um corpo.

Vamos considerar a álgebra A sobre o seu centro. Seja K uma extensão infinita sobre Z . Sabemos que a álgebra $A_K = K \otimes_Z A$ é alternativa simples e central sobre o corpo Z .

Pelo Teorema 2.3.10, podemos observar que

$$(n_i(x, y), z, t) = [n_i(x, y), z] = 0, i = \{1, 2, 3\}.$$

valerá para a álgebra A_K . Então podemos mostrar da mesma maneira que $n_i \in Z(A_K) = K$. Pelo Lema 2.5.2, sabemos que A_K é quadrática. Como A_K é não comutativa pelo Teorema 1.2.9, temos que A_K é de composição. Pelo Lema 2.5.1, sabemos que A é de composição. Como A é não associativa e não comutativa, sabemos pelo Teorema 1.2.7 que é a álgebra de Cayley-Dickson. $\square$

2.6 Anel de Cayley-Dickson

Sejam R um anel com unidade e S um subconjunto de R contendo a unidade, fechado para multiplicação, associativo e comutativo. Podemos, então, definir a relação $\equiv$ em $R \times S$, da seguinte forma:

$$(a, s) \equiv (b, t) \text{ se, e somente se, } (at - bs)u = 0, \text{ para algum } u \in S.$$

Vamos denotar por (a/s) a classe de equivalência de (a, s) e por $S^{-1}R$, o conjunto das classes de equivalência.

O nosso próximo passo será mostrar que existe uma estrutura de anel em $S^{-1}R$. Para $(a/s), (b/t)$ elementos de $S^{-1}R$, definimos $(a/s) + (b/t) = (at + bs)/st$ e $(a/s).(b/t) = ab/st$.

Vamos verificar que a operação de adição está bem definida. Sejam $a/s = a'/s'$ e $b/t = b'/t'$. Então $(as' - a's)/ss' = 0$ e $(bt' - b't)/tt' = 0$. Logo,

$$((a/s) + (b/t)) - ((a'/s') + (b'/t')) = (at + bs)/st - (a't' + b's')/s't'.$$

Usando as propriedades do anel R e lembrando que S é associativo e comutativo, temos

$$\begin{aligned} & (at.s't' + bs.s't' - a't'.st - b's'.st)/st.s't' \\ &= (at.s't' - a't'.st + bs.s't' - b's'.st)/st.s't' \\ &= (as'.tt' - a's.tt')/ss'tt' + (bt'.ss' - b't.ss')/tt'.ss' \\ &= (as' - a's)/ss' + (bt' - b't)/tt' = 0. \end{aligned}$$

Portanto, em $S^{-1}R$, a adição está bem definida.

Vamos verificar se a operação de multiplicação está bem definida. Sejam $a/s = a'/s'$ e $b/t = b'/t'$. Então, $a = a's/s'$ e $b = b't/t'$. Usando a associatividade e a comutatividade de S , temos

$$\begin{aligned}
 (a/s).(b/t) - (a'/s').(b'/t') &= ab/st - a'b'/s't' \\
 &= (ab.s't' - a'b'.st)/st.s't' \\
 &= (a(b'tt'^{-1}).st' - a'b'.st)st.s't' \\
 &= (ab'.ts' - a'b'.st)/st.s't' \\
 &= ((a'ss'^{-1})b'.ts' - a'b'.st)/st.s't' \\
 &= (a's.b't - a'b'.st)/st.s't \\
 &= (a'b'.st - a'b'.st)/st.s't' = 0.
 \end{aligned}$$

Então a multiplicação está bem definida em $S^{-1}R$.

Agora, podemos verificar que $S^{-1}R$, com as operações de adição e multiplicação tem uma estrutura de anel. Seja $a/s \in S^{-1}R$. Temos que $-a/s$ é o oposto de a/s , o elemento neutro será $0/s$ e o elemento unidade será $1/1$. Vamos verificar se é válida a associatividade na adição e a distributiva em $S^{-1}R$. Sejam $a/s, b/t, c/u \in S^{-1}R$. Lembrando que S é associativo e comutativo, temos

$$\begin{aligned}
 (a/s + b/t) + c/u &= (at + bs)/st + c/u \\
 &= (at.u + bs.u + c.st)/st.u \\
 &= (a.tu + bu.s + ct.s)/s.tu \\
 &= a/s + (bu + ct)/tu \\
 &= a/s + (b/t + c/u).
 \end{aligned}$$

Logo, $S^{-1}R$ verifica a associatividade na adição. Temos que

$$\begin{aligned}
 (a/s).(b/t + c/u) &= a/s((bu + ct)/tu) \\
 &= (a.bu + a.ct)/s.tu \\
 &= ab/st + ac/su \\
 &= (a/s).(b/t) + (a/s).(c/u).
 \end{aligned}$$

Portanto, vale a distributiva em $S^{-1}R$.

Observe que se um anel R possui um subanel K que é um corpo, então R é uma K -álgebra.

A álgebra (anel) A é chamada de *prima(o)* se o produto de dois ideais não nulos for não nulo.

Pela Proposição 2.3.4, temos o seguinte colorário.

Corolário 2.6.1. *Se A é uma álgebra prima arbitrária, então $U(A) = (0)$ ou A é associativa.*

Seja R um anel primo com unidade. Vamos mostrar que o centro Z do anel não possui divisores de zero. Suponha por contradição que existam $a, c \in R$ não nulos tais que $c \in Z$ e $ca = 0$. Tome os seguintes conjuntos cR e aRa . Considere os ideais $\text{id}\langle cR \rangle$ e $\text{id}\langle aRa \rangle$. Como $a, c \in R$ e R tem unidade, ambos são ideais não nulos. Seja o ideal $I = \text{id}\langle \text{id}\langle cR \rangle \text{id}\langle aRa \rangle \rangle$. Para cada $b \in I$, temos combinação linear de elementos da forma $(cb_i)(ac_i a) = b_i(ca)c_i a = 0$. Logo, $b = 0$ e portanto $I = (0)$, contradizendo a hipótese de A ser primo.

A álgebra (anel) A é chamada(o) de *semiprima(o)* se não possui ideais nilpotentes.

Seja R um anel e S um conjunto de R contendo unidade, fechado na multiplicação, associativo e comutativo. Usaremos $a/s = s^{-1}a$, onde $a \in R$ e $s \in S$.

Proposição 2.6.2. *Sejam R um anel e Z seu centro. Se $S \subseteq Z$ é um conjunto multiplicativo que não possui divisores de zero do anel R , então*

1. *para cada $s \in S$, a função $\rho_s : R \mapsto S^{-1}R$ tal que $\rho_s(r) = s^{-1}(rs)$, para todo $r \in R$, insere o anel R em $S^{-1}R$.*
2. $Z(S^{-1}R) = S^{-1}Z$.
3. *o anel $S^{-1}R$ é semiprimo (primo) se, e somente se, o anel R for semiprimo (primo).*
4. *se o anel R é uma álgebra alternativa sobre F , então o anel $S^{-1}R$ também é uma álgebra alternativa sobre F , para $\alpha(s^{-1}r) = s^{-1}(\alpha r)$, onde $\alpha \in F, s \in S, r \in R$.*

Demonstração. 1. Vamos verificar que ρ_s é um homomorfismo de anéis. Sejam $t, u \in R$. Temos

$$\rho_s(t)\rho_s(u) = s^{-1}(ts)s^{-1}(us) = s^{-1}t(ss^{-1})us = s^{-1}(tu.s) = \rho_s(tu).$$

Vamos verificar que ρ_s é injetor. Seja $t \in R$, tal que $\rho_s(t) = 0$. Então $\rho_s(t) = s^{-1}(ts) = 0$. Como S não possui divisores de zero, temos $t = 0$, ou seja, ρ_s é um monomorfismo.

2. Sejam $z \in Z, r, t \in R$ e $s, s_1, s_2 \in S$. Temos

$$(s^{-1}z, s_1^{-1}r, s_2^{-1}t) = (ss_1s_2)^{-1}(z, r, t) = 0$$

e

$$[s^{-1}z, s_1^{-1}r] = (ss_1)^{-1}[z, r] = 0.$$

Logo, $S^{-1}Z \subseteq Z(S^{-1}R)$. Vamos verificar a condição contrária. Seja $s^{-1}r \in Z(S^{-1}R)$. Para todos $x, y \in R$, temos

$$0 = (s^{-1}r, x, y) = s^{-1}(r, x, y) = (s^{-1}(r, x, y))s = (r, x, y).$$

Logo, $r \in N(R)$. Analogamente, temos que $[r, x] = 0$, para qualquer $x \in R$, ou seja, $r \in Z$. Concluimos que $Z(S^{-1}R) = S^{-1}Z$.

3. Seja I um ideal de R . Vamos verificar que $S^{-1}I = \{s^{-1}b | s \in S, b \in I\}$ é um ideal do anel $S^{-1}R$. Sejam $r \in S^{-1}R$ e $a \in S^{-1}I$, onde $a = s^{-1}b$, com $b \in I$. Temos $ra = r(s^{-1}b) = s^{-1}rb \in S^{-1}I$. Analogamente, provamos para o produto à esquerda. Logo, $S^{-1}I$ é um ideal do anel $S^{-1}R$. Sejam I e J ideais de R , com o produto nulo. Verificaremos que $(S^{-1}I)(S^{-1}J)$ é um ideal nulo em $S^{-1}R$. Temos que $(0) = S^{-1}IJ = (S^{-1}IS)(S^{-1}J)$. Reciprocamente, temos que $(S^{-1}I)(S^{-1}J) = (S^{-1}IS)(S^{-1}J) = S^{-1}IJ = 0$. Portanto, se R é primo (semiprimo) então $S^{-1}R$ é primo (semiprimo). Agora vamos verificar o contrário. Seja $I \neq (0)$ um ideal de $S^{-1}R$ e $0 \neq a \in I$, tais que $a = s^{-1}r$, onde $s \in S, r \in R$. Temos que r é não nulo e $r = sa \in I \cap R$. Logo, $I \cap R \neq (0)$.
4. Seja R uma álgebra alternativa. Vejamos se $S^{-1}R$ é alternativa. Temos que $(s^{-1}r)^2 s_1^{-1}t = s^{-2} s_1^{-1} r(rt) = s^{-1} r((s^{-1}r)(s_1^{-1}t))$. Analogamente, prova-se a outra lei alternativa.

□

Sabemos que o centro Z de um anel A é um subanel. Se Z não possui elementos divisores de zero, então $(Z^*)^{-1}A$ é uma álgebra sobre o corpo $(Z^*)^{-1}Z$.

Seja A um anel alternativo, com o centro Z não nulo e sem divisores de zero. Chamamos A de *anel de Cayley-Dickson* se o anel de quocientes $(Z^*)^{-1}A$ for uma álgebra de Cayley-Dickson sobre o corpo de quocientes $(Z^*)^{-1}Z$.

Sejam A uma álgebra alternativa e $a \in A$. Dizemos que a é um *divisor de zero absoluto* se $aAa = (0)$. Se A não possui divisores de zero absoluto dizemos que é *não degenerada*.

Vamos agora estudar um teorema que mostra quando uma álgebra alternativa prima é um anel de Cayley-Dickson.

Seja X um subconjunto da álgebra A . O conjunto

$$Ann_r(X) = \{z \in A | Xz = (0)\}$$

é chamado *anulador à direita de X* , o conjunto

$$Ann_l(X) = \{z \in A | zX = (0)\}$$

é o *anulador à esquerda de X* e $Ann(X) = Ann_r(X) \cap Ann_l(X)$ é o *anulador de X* . Se A é alternativa e X é um ideal, pela definição do associador, podemos verificar que todos os anuladores acima serão ideais em A .

Seja A uma álgebra e seja I um ideal de A . Dizemos que I é um *ideal trivial de A* se a multiplicação em I for nula.

Teorema 2.6.3. (Teorema 9.1 em [14]) *Seja A uma álgebra alternativa prima e I um ideal da álgebra A . Então $N(I) = I \cap N(A)$.*

Lema 2.6.4. *Seja A uma álgebra alternativa semiprima. Sejam I um ideal de A e V um ideal trivial da álgebra I . Então os submódulos $\hat{A}V$ e $V\hat{A}$, são ideais triviais da álgebra I .*

Demonstração. Para verificarmos que $\hat{A}V$ é um ideal em I , basta utilizarmos a definição de associador, nos seguintes elementos $(av)c$ e $c(av)$, onde $a \in \hat{A}$, $c \in I$ e $v \in V$. Analogamente, mostra-se que $V\hat{A}$ é um ideal de I . Sejam $u, v \in V$, $c \in I$ e $a, b \in A$. Por (2.7), temos

$$f(a, c, u, v) = ([a, c], u, v) + (a, c, [u, v]) = 0.$$

Conseqüentemente, por (2.4), temos

$$c(a, u, v) = -f(a, c, u, v) + (ac, u, v) - (c, u, v)a = 0,$$

isto é, $(a, u, v) \in Ann_r(I)$. Ao mesmo tempo, temos $(a, u, v) = (v, a, u) \in I$. Como A é semiprima, $I \cap Ann_r(I) = (0)$, obtemos assim

$$(A, V, V) = (AV)V = (0). \quad (2.24)$$

De (2.24), ao utilizarmos a linearização da identidade de Moufang, temos

$$(bv, c, u) = -(cv, b, u) + (v, c, u)b + (v, b, u)c = 0,$$

isto é,

$$(AV, I, V) = (0). \quad (2.25)$$

Por (2.25) e pelo Lema 2.1.4, temos que $[AV, V] \subseteq N(I)$. Por (2.24) e pelo Teorema 2.6.3, obtemos

$$VAV \subseteq N(A). \quad (2.26)$$

Pela linearização da identidade de Moufang e as relações (2.25) e (2.24), temos

$$v(c, b, u) = -c(v, b, u) + (c, bv, u) + (v, bc, u) = 0,$$

então

$$V(I, A, V) = (0). \quad (2.27)$$

Seja $w = uav$. Então $w \in V, w^2 = 0$ e por (2.26) temos $w \in N(A)$. Seja $c = ua$. Por (2.27), temos

$$wbw = w(b.cv) = w(bc.v) - w(b, c, v) = 0.$$

Temos que $w \in N(A)$ e $w\hat{A}w = 0$. Pelo Lema 2.1.7, o elemento w gera um ideal trivial na álgebra A , então $w = 0$. Portanto,

$$VAV = (0). \quad (2.28)$$

Por (2.25), (2.24) e (2.28), temos

$$f(c, a, bv, u) = ([c, a], bv, u) + (c, a, [bv, u]) = 0.$$

Logo,

$$(a, u, bv)c = -f(c, a, u, bv) + (ca, u, bv) - a(c, u, bv) = 0,$$

isto é, $(a, u, bv) \in \text{Ann}_l(I)$. Como A é semiprima, podemos concluir analogamente, que

$$(A, V, AV) = (0). \quad (2.29)$$

Por (2.24), (2.28) e (2.29) concluímos que $(\hat{A}V)^2 = (0)$. Analogamente, obtemos $(V\hat{A})^2 = (0)$. $\square$

Lema 2.6.5. (*Lema V.1.9Ac em [4]) [Zorn]* Se, num conjunto não vazio parcialmente ordenado, toda cadeia tem algum elemento majorante, então o conjunto contém algum elemento maximal.

Teorema 2.6.6 (Slater). Seja A uma álgebra alternativa semiprima. Então cada ideal I da álgebra A é uma álgebra semiprima.

Demonstração. Sejam A uma álgebra alternativa semiprima e I um ideal que não seja semiprimo. Logo, existe $(0) \neq J \subseteq I$ um ideal trivial de I . Denotaremos por $\mathcal{J}$ o conjunto de todos ideais triviais de I contidos em J . O conjunto $\mathcal{J}$ é não vazio e ordenado parcialmente pela inclusão. Ao utilizarmos o Lema de Zorn, sabemos que $\mathcal{J}$ possui elemento maximal V . Pelo Lema 2.6.4, temos que $\hat{A}V \in \mathcal{J}$ e então $AV \subseteq V$. Analogamente, $VA \subseteq V$. Logo, V é um ideal da álgebra A . Como A é semiprima, temos que $V = (0)$. Como V é maximal, temos $J = (0)$, contradizendo a nossa hipótese. $\square$

Corolário 2.6.7. *Cada ideal de uma álgebra alternativa prima é uma álgebra prima.*

Demonstração. Seja A uma álgebra alternativa prima e seja I um ideal de A . Se a álgebra I não é prima, então existem ideais não nulos $J, J' \subseteq I$ tais que $JJ' = (0)$. Seja $M = \text{Ann}_r(J)$. Observe que $(M \cap J)^2 = (0)$. Pelo Teorema anterior temos que I é semiprima, então $(M \cap J) = (0)$. Agora considere o quociente $\bar{I} = I/M$. Seja $\bar{T}$ um ideal em $\bar{I}$, tal que $\bar{T}^2 = (0)$. Se T é a imagem inversa do ideal $\bar{T}$ na álgebra $\bar{I}$, temos que $T^2 \subseteq M$ e $(T \cap J)^2 \subseteq T^2 \cap J \subseteq M \cap J = (0)$, ou seja, $(T \cap J) = (0)$. Conseqüentemente, $JT \subseteq J \cap T = (0)$, e portanto, $T \subseteq M$ e $\bar{T} = (\bar{0})$, provando assim que $\bar{I}$ é semiprima. Vmoa mostrar que M é um ideal de A . Seja $a \in A$, quero mostrar que $Ma \subseteq M$. Defina o submódulo $M' = M + Ma$. Sejam $m = n' + na \in M'$ e $c \in I$. Temos

$$(n' + na)c = n'c + n(ac) + (n, a, c) = n'c + n(ac) - (n, c, a) \in M'.$$

Analogamente, provamos que $cm \in M'$. Logo, M' é um ideal de M . Observe que $M' \not\subseteq M$. Logo, a imagem inversa $\bar{M}'$ de M' é não nulo. Vamos verificar que $(\bar{M}')^2(\bar{M}')^2 \subseteq \bar{M}$. Primeiramente, temos

$$\begin{aligned} (\bar{M} + (\bar{M}a)^2)\bar{I} &\subseteq \bar{M} + (\bar{M}a)((\bar{M}a)\bar{I}) + (\bar{M}a, \bar{M}a, \bar{I}) \\ &\subseteq \bar{M} + (\bar{M}a)^2 + (\bar{M}a, \bar{I}, \bar{M}a) \\ &\subseteq \bar{M} + (\bar{M}a)^2. \end{aligned}$$

Logo, $(\bar{M} + (\bar{M}a)^2)\bar{I} \subseteq \bar{M} + (\bar{M}a)^2$ e $(\bar{M} + (\bar{M}a)^2)\bar{I} \subseteq \bar{M}'$. Sejam $m \in \bar{M}$, $x, y \in \bar{I}$ e $a \in A$. Como $\bar{M}$ é um ideal de $\bar{I}$, usando a identidade de Moufang à esquerda linearizada, temos $(ma, x, y) - (a, x, m)y = (a, x, y)m - (ya, x, m) \in \bar{M}$. Logo,

$$(ma, x, y) - (a, x, m)y = (ma, x, y) - (m, a, x)y = ma.xy - (m.ax)y \in \bar{M}.$$

Como $(m.ax)y \in \bar{M}$, temos que $ma.xy \in \bar{M}$, isto é, $\bar{M}a\bar{I}^2 \subseteq \bar{M}$. Finalmente, temos

$$\begin{aligned} ((\bar{M}a)^2(\bar{M}a)^2) &\subseteq \bar{M}'(\bar{M}a)^2, \bar{M}' \text{ é ideal} \\ &\subseteq \bar{M}(\bar{M}a)^2 + (\bar{M}a)(\bar{M}a)^2 \subseteq \bar{M}a \text{ é ideal de } \bar{I} \\ &\subseteq \bar{M}\bar{M}a\bar{I}^2 \\ &\subseteq \bar{M}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} (\bar{M}')^2(\bar{M}')^2 &\subseteq ((\bar{M} + \bar{M}a)(\bar{M}) + \bar{M}a)((\bar{M} + \bar{M}a)(\bar{M} + \bar{M}a)) \\ &\subseteq (\bar{M} + (\bar{M}a)^2)(\bar{M} + (\bar{M}a)^2) \subseteq \bar{M} + (\bar{M}a)^2(\bar{M}a)^2 \\ &\subseteq \bar{M}. \end{aligned}$$

Temos que

$$(\bar{M}')^2(\bar{M}')^2 \subseteq \bar{M} = (\bar{0}).$$

Como vimos que $\bar{I}$ é semiprima, temos que $\bar{M}' = (0)$. Logo, $\bar{M}a \subseteq \bar{M}$. Da mesma forma, mostramos que $a\bar{M} \subseteq \bar{M}$. Então, $\bar{M}$ é um ideal de A . Como $(0) \neq J \subseteq \text{Ann}_r(M)$ e $\text{Ann}_r(M)$ é ideal de A , contradiz que A é prima. Portanto I é prima, como queríamos demonstrar. $\square$

Lema 2.6.8. *Cada ideal de uma álgebra alternativa não degenerada é uma álgebra não degenerada.*

Demonstração. Vamos agora verificar que I é não degenerada. Suponhamos por contradição que existe $d \in I$ tal que $dId = (0)$. Sejam $x, y \in A$ elementos arbitrários. Pelas identidades de Moufang, temos

$$(dxd)y(dxd) = (d(x.dy))(dxd) = (d(x.dy))(dx.d) = d((x.dy)(dx))d = 0.$$

Logo, $(dxd)A(dxd) = (0)$. Como A é não degenerada temos que $dxd = 0$. Como o elemento x é arbitrário, isto significa que $dAd = (0)$. Então $d = 0$, ou seja, I não possui divisores de zero absoluto. $\square$

Teorema 2.6.9 (Slater). *Seja A uma álgebra alternativa, prima e não degenerada. Se A é não associativa então o centro de A é não nulo.*

Demonstração. Seja $D(A) = D$, o ideal associador de A . Como A é não associativa, temos que $D \neq (0)$. Pelo Corolário 2.6.7, temos que D é uma álgebra prima. Vamos verificar que $N(D)$ é não nulo. Temos que $N_{alt}[D] \subseteq N(D)$. Se $N_{alt}[D] \neq (0)$, teremos nada a demonstrar. Vamos supor que

$N_{alt}[D] = (0)$. Para todos $x, y \in D$, temos $[x, y]^4 = 0$. Pela Proposição 2.4.2, temos que os elementos nilpotentes geram um ideal I , ou seja, I é uma nil-álgebra. Pelo Teorema 2.4.14, temos que I é localmente finita e portanto localmente nilpotente. Seja $\text{alg}\langle [x, y] \rangle \subseteq I \subseteq D$. Como I é prima temos que $[x, y] = 0$. Logo, I é comutativa e associativa. Sabemos que I é um ideal de D . Logo $N(D) \neq (0)$. Como D é não degenerada e prima, pelo Teorema 2.6.3, temos

$$0 \neq n \in N(D) = D \cap N(A).$$

Vamos verificar que $P(A) \subseteq U(A)$. Suponhamos por contradição que $P(A) \not\subseteq U(A)$. Logo, podemos achar $n \in N, a, b, c, d \in A$, tais que

$$m = ([a, n]b, c, d) \neq 0.$$

Vamos mostrar que $\text{id}\langle m \rangle^2 = (0)$. Sejam $e, f \in A$. Utilizando as identidades de Moufang, temos que

$$\begin{aligned} (a, c, d)(a, e, f) &= (d, (a, e, f), a)c + (d, ca, (a, e, f)) + (d, (a, e, f)a, c) \\ &= -(d, (e, a, fa), c) = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (a, c, d)y(a, c, d) &= -(a, y, d)c.(a, c, d) - (a, cd, y)(a, c, d) \\ &\quad - (a, yd, c)(a, c, d) \\ &= -((a, y, d), c, (a, c, d)) - (a, y, d).c(a, c, d) \\ &= (a, y, d)(cd, c, a) = 0. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.1.7, temos que $\text{id}\langle m \rangle^2 = 0$. Como A é prima temos $\text{id}\langle m \rangle = 0$ e $m = 0$. Logo, $P(A) \subseteq U(A)$. Para qualquer $a \in A$, temos que

$$[n, a] \in P(A) \cap D \subseteq U(A) \cap D.$$

Pela Proposição 2.3.4, temos $(U(A) \cap D)^2 = (0)$. Como A é prima, temos $(U(A) \cap D) = (0)$. Logo, $[n, a] = 0$, para qualquer $a \in A$, isto é, $n \in Z(A)$. $\square$

Teorema 2.6.10 (Slater). *Seja A uma álgebra alternativa, prima, não degenerada e não associativa. Então A é um anel de Cayley-Dickson.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.6.9, o centro Z da álgebra é não nulo. Como A é prima, temos que Z não possui divisores de zero do anel A . Seja $A_1 = (Z^*)^{-1}A$. Sabemos pela Proposição 2.6.2 que $Z(A_1) = (Z^*)^{-1}Z = Z_1$. Como A está contida em A_1 temos que A_1 é não associativa. Pela Proposição 2.6.2, temos que A_1 é alternativa e prima. Pelo Teorema de Kleinfeld basta provar que A_1 é simples. Como $D(A_1)$ é não nulo, pelo Corolário 2.6.1, temos que $U(A_1) = (0)$. Agora, seja $I \neq (0)$ ideal arbitrário da álgebra A . Pelo Corolário 2.6.7, temos que I é prima. Pelo Lema 2.6.8, temos que I é não degenerada. Pelo Teorema 2.6.3, se I é associativo, então $I \subseteq N(I) \subseteq N(A_1)$, contradizendo que $U(A_1)$ é nulo. Logo, I é não associativo. Pelo Teorema 2.6.9, temos $(0) \neq Z(I)$. Vamos mostrar que $Z(I) = I \cap Z(A_1) = I \cap Z_1$. Seja $z \in Z(I)$. Para quaisquer $a \in A$ e $b \in I$, temos

$$b[a, z] = [ba, z] - [b, z]a = 3(b, a, z) = 0.$$

Logo, $[a, z] \in \text{Ann}_r(I) = M$. Observemos que $(M \cap I)^2 = (0)$. Como A é prima, temos $(M \cap I) = (0)$. Logo, $[a, z] = 0$ e $z \in Z_1$. Seja $0 \neq \alpha \in I \cap Z_1$, temos que $1 = \alpha\alpha^{-1} \in I$, então $I = A_1$. Logo, A_1 é simples. $\square$

Capítulo 3

Superálgebras alternativas

Neste capítulo, o nosso objetivo será definir superálgebras, o conceito de superálgebra em uma variedade e, então, estudaremos as superálgebras alternativas. Também mostraremos uma das utilidades das superálgebras, a construção de exemplos de álgebras alternativas solúveis que não são nilpotentes.

3.1 Superálgebras

Uma superálgebra A é uma álgebra Z_2 -graduada, ou seja, $A = A_0 \oplus A_1$, onde A_i é subespaço de A e $A_i A_j \subseteq A_{i+j \pmod{2}}$, para $i, j \in \{0, 1\}$.

Seja um corpo F em característica diferente de dois. A álgebra de Grassmann é definida por

$$\Gamma = \text{alg}\langle 1, e_1, e_2, \dots, e_n, \dots | e_i e_j = -e_j e_i \rangle.$$

Uma base desta álgebra é

$$\{1, e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k}, i_1 < i_2 < \dots < i_k, k \geq 1\}.$$

A álgebra de Grassmann é uma superálgebra, onde Γ_0 e Γ_1 são os subespaços gerados por produtos de comprimento par e ímpar, respectivamente.

Vamos agora definir o conceito de superálgebra em uma variedade.

Seja A uma superálgebra. Consideremos a F -álgebra $\Gamma \otimes A$. Denominamos a subálgebra

$$\Gamma(A) = \Gamma_0 \otimes A_0 + \Gamma_1 \otimes A_1$$

de $\Gamma \otimes A$ de *envolvente de Grassmann de A* .

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade de álgebras sobre F . Chamamos a superálgebra A de $\mathcal{M}$ -superálgebra se $\Gamma(A) \in \mathcal{M}$.

Seja $A = A_0 \oplus A_1$ uma superálgebra. Para todo $a \in A_0 \cup A_1$, definimos $p(a) = i$ se $a \in A_i$, onde $i \in \{1, 2\}$.

Exemplo. Vamos determinar quando uma superálgebra A é comutativa. Sejam $x = a_i \otimes x_i$ e $y = b_j \otimes y_j$, onde $a_i \in \Gamma_i, b_j \in \Gamma_j, x_i \in A_i, y_j \in A_j$ e $i, j \in \{0, 1\}$. Para que $xy = yx$, devemos ter

$$(a_i \otimes x_i)(b_j \otimes y_j) - (b_j \otimes y_j)(a_i \otimes x_i) = 0,$$

isto é,

$$(a_i b_j) \otimes (x_i y_j) - (b_j a_i) \otimes (y_j x_i) = 0.$$

Portanto,

$$(a_i b_j) \otimes (x_i y_j) - (-1)^{p(a_i)p(b_j)}(a_i b_j) \otimes (y_j x_i) = 0.$$

Observemos que $p(a_i) = p(x_i)$ e $p(b_j) = p(y_j)$. Logo,

$$(a_i b_j) \otimes (x_i y_j - (-1)^{p(x_i)p(y_j)} y_j x_i) = 0.$$

Como $(a_i b_j) \otimes (x_i y_j - (-1)^{p(x_i)p(y_j)} y_j x_i) = 0$, para quaisquer $a_i, b_j \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, temos que A será comutativa se

$$x_i y_j = (-1)^{p(x_i)p(y_j)} y_j x_i.$$

Podemos verificar que uma superálgebra comutativa não é uma álgebra comutativa. Para evitar dúvidas, chamaremos as superálgebras comutativas de supercomutativas. Observe que a superálgebra de Grassmann é supercomutativa.

Definimos o *supercomutador* de uma superálgebra A , como

$$\langle x_i, y_j \rangle = x_i y_j - (-1)^{p(x_i)p(y_j)} y_j x_i,$$

onde $x_i \in A_i$ e $y_j \in A_j$, com $i, j \in \{0, 1\}$.

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade de álgebras definidas por um conjunto de identidades. Observemos que as relações que definem as $\mathcal{M}$ -superálgebras não são identidades propriamente ditas, pois são válidas somente para elementos homogêneos; por isso, essas relações serão chamadas de *superidentidades* de A .

Seja A uma superálgebra. O centro associativo $N(A)$ e o centro $Z(A)$ de A são definidos por $N(A) = \{a \in A | (a, A, A) = (A, a, A) = (A, A, a) = 0\}$

e $Z(A) = \{a \in N(A) \mid [a, A] = 0\}$. Esses conjuntos são subsuperálgebras em A .

Dada uma superálgebra de A , chamamos de *supercentro* o seguinte conjunto

$$Z^s(A) = Z^s(A)_0 + Z^s(A)_1,$$

onde $Z^s(A)_i = \{z \in N(A)_i \mid \langle z, a_j \rangle = 0, \forall a_j \in A_j\}$ e $N(A)_i = N(A) \cap A_i$, para $i, j \in \{1, 2\}$.

3.2 Bimódulos

Seja A uma álgebra sobre o corpo F e seja M um espaço vetorial sobre F . Consideremos o espaço $E = A \oplus M$. Dizemos que M é um *A-bimódulo* se existirem aplicações bilineares

$$\begin{aligned} A \times M &\rightarrow M \\ (a, m) &\mapsto am, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} M \times A &\rightarrow M \\ (m, a) &\mapsto ma \end{aligned}$$

para arbitrários $a \in A$ e $m \in M$. Seja $\mathcal{M}$ uma variedade e seja $A \in \mathcal{M}$. Chamamos um *A-bimódulo* M é de *M-bimódulo* para A (ou *A-bimódulo* na variedade $\mathcal{M}$) se a álgebra $E = A \oplus M$, com multiplicação definida por $(a + m)(b + n) = ab + an + mb$, para todos $a, b \in A, m, n \in M$, for um elemento de $\mathcal{M}$. Denominamos a álgebra $E = A \oplus M$ de *extensão split* de A .

Seja A uma álgebra alternativa. Com a definição dada, um módulo M é um *A-bimódulo alternativo* se

$$(a, m, b) = -(m, a, b) = (b, a, m) = -(b, m, a),$$

para quaisquer $a, b \in A$ e $m \in M$.

Chamamos o bimódulo M sobre uma álgebra com unidade A de *unital* se $1m = m$, para todo $m \in M$.

O par de funções lineares de $A \rightarrow \text{End}(M)$, tais que $a \mapsto L_a$ e $a \mapsto R_a$, onde $L_a(m) = am$ e $R_a(m) = ma$ satisfaz as condições para que M seja um bimódulo é chamado de *bi-representação*.

Seja A uma álgebra alternativa. Com a definição dada, uma bi-representação é *alternativa* se existem transformações lineares $L : a \rightarrow L_a$ e $R : a \rightarrow R_a$, tais que

$$[L_a, R_b] = R_{ab} - R_a R_b = L_{ba} - L_a L_b = [R_a, L_b]. \quad (3.1)$$

Seja A uma álgebra alternativa. As álgebras alternativas estão intimamente relacionadas com as álgebras associativas. Sabemos que a bi-representação alternativa (L, R) satisfaz (3.1). Para essa bi-representação (L, R) ser *associativa*, as seguintes condições devem ser válidas:

$$R_{ab} = R_a R_b, [L_a, R_b] = 0, L_{ab} = L_b L_a. \quad (3.2)$$

Seja M um bimódulo para A . Então existem aplicações lineares $A \rightarrow \text{End}(M)$, tais que $L_a : m \rightarrow am$ e $R_a : m \rightarrow ma$ que define uma bi-representação. Inversamente, se uma bi-representação L_a e R_a , age em M , então a composição $ma \equiv R_a m$ e $am \equiv L_a m$ define um bimódulo. Dessa forma, podemos concluir que o conceito de bimódulo e bi-representação são equivalentes.

Seja A uma álgebra com involução e unidade. Seja M um bimódulo unital, com aplicações bilineares ma e am . Dizemos que M é um *bimódulo de Cayley* sobre uma álgebra A , se as seguintes relações são satisfeitas

$$(ab)m = b(am), \quad (3.3)$$

$$ma = \bar{a}m, \quad (3.4)$$

para quaisquer $a, b \in A$ e $m \in M$, onde $a \mapsto \bar{a}$ é a involução.

A *bi-representação de Cayley* (L, R) , é definida por $L_a = R_{\bar{a}}$ e $L_{ab} = L_b L_a$.

Vejam algumas identidades dessa relação.

Proposição 3.2.1. *Sejam A uma álgebra alternativa não comutativa com involução, M um bimódulo de Cayley sobre A , $a, b \in A$ e $m \in M$. Então*

$$(ma)b = m(ba), \quad (3.5)$$

$$m \circ a = t(a)m, \quad (3.6)$$

onde $t(a)$ é a função traço na álgebra A .

Demonstração. Para provar (3.5), usamos as relações (3.3) e (3.4). Temos

$$(ma)b = (\bar{a}m)b = \bar{b}(\bar{a}m) = (\bar{a}\bar{b})m = (\overline{ba})m = m(ba).$$

Para verificar (3.6), usamos (3.4). Temos

$$m \circ a = ma + am = \bar{a}m + am = t(a)m,$$

como queremos demonstrar. $\square$

Seja A uma álgebra. Dizemos que A é uma *álgebra de Jordan* se, para quaisquer $x, y \in A$, temos $xy = yx$ e $(x^2y)x = x^2(yx)$.

Seja D uma álgebra associativa e seja $M_n(D)$ a álgebra de matrizes $n \times n$, com entradas em D . Como usual, definimos e_{ij} as matrizes com 1 na posição (i, j) e 0 nas outras. Temos que $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$, com $\delta_{jk} = 0$, se $j \neq k$ e $\delta_{jk} = 1$, se $j = k$, para $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$. Observemos que $\sum_{i=1}^n e_{ii} = 1$. Podemos obter uma *álgebra de Jordan* D_J , ao trocarmos a composição da álgebra associativa ab pelo produto de Jordan $a \circ b = ab + ba$, para quaisquer $a, b \in D$. A álgebra D_J é chamada *álgebra especial de Jordan*.

Sejam A uma álgebra especial de Jordan e M um bimódulo de Jordan. As bi-representações L_a e R_a , satisfazem as seguintes relações: $L_a = R_a$ e $[[R_a, R_b]R_c] = R_{(b,c,a)}$. Vamos verificar a segunda relação. Sejam $a, b, c \in A$. Temos que

$$\begin{aligned} R_{(b,c,a)} &= R_{(boc)oa} - R_{bo(coa)} \\ &= R_b R_c R_a + R_c R_b R_a + R_a R_b R_c + R_a R_c R_b \\ &\quad - R_b R_c R_a - R_b R_a R_c - R_c R_a R_b - R_a R_c R_b \\ &= [[R_a, R_b]R_c]. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Seja J uma álgebra de Jordan. Então uma *representação especial* S para J é uma função linear de $J \rightarrow \text{End}(M)$, tal que

$$S_{ab} = S_a S_b + S_b S_a,$$

para todos $a, b \in J$.

O próximo teorema estabelece resultados para as álgebras de Jordan. Por esse motivo não iremos demonstrá-lo aqui.

Teorema 3.2.2 (Teorema 7.4 em [3]). *Sejam $\mathcal{M}$ uma classe de álgebras, $D, B \in \mathcal{M}$, tal que D tenha unidade e C uma subálgebra de B . Tomemos A álgebra das matrizes $M_n(D)$, $n > 1$. Seja S um homomorfismo de A_J em uma álgebra B_J , tais que as imagens das matrizes e_{ij} são elementos do núcleo associativo da subálgebra C de B . Então $C = C^{(1)} \oplus C^{(2)}$, onde $C^{(1)}$ e $C^{(2)}$ são ideais, tais que a projeção de C por S em $C^{(1)}$ é um homomorfismo e a projeção de C por S em $C^{(2)}$ é um anti-homomorfismo.*

Seja D uma álgebra associativa. Definimos $A = M_n(D)$. Agora vamos mostrar que a bi-representação $L : a \longrightarrow L_a$ e $R : a \longrightarrow R_a$ de um bimódulo alternativo unital M são representações especiais de A_j . Ao utilizarmos (3.1), temos $L_{ba} = L_a L_b + R_a L_b - L_b R_a$ e $L_{ab} = L_b L_a + L_b R_a - R_a L_b$. Logo, para arbitrários $a, b \in A$, temos

$$L_{aob} = L_{ab+ba} = L_{ab} + L_{ba} = L_a L_b + L_b L_a.$$

Logo, L_a é uma representação especial de A_j . Analogamente, verificamos que R_a é uma representação especial de A_j . Como A é associativa, temos que $L(A)$ é uma álgebra de funções lineares do tipo L_a , com $a \in A$. Seja o homomorfismo L . Temos que $L_{e_{ij}} \in N(L(A)_j)$. Pelo Teorema 3.2.2, temos que $L(A) = L(A)^{(1)} \oplus L(A)^{(2)}$, onde $L(A)^{(1)}$ e $L(A)^{(2)}$ são ideais. Como M é unital, temos $L(A)M = M$. Então M é decomposto por $L(A)$, ou seja, $M = M^{(1)} \oplus M^{(2)}$, com $M^{(i)} = L(A)^{(i)}M$, onde $i \in \{1, 2\}$. Temos que $M^{(i)}$ são subespaços de $L(A)^{(i)}M$. Podemos observar que, pela própria construção, temos que $L(A)M^{(i)} = M^{(i)}$, a contração L_a para $M^{(1)}$ é um homomorfismo e, para $M^{(2)}$, é um anti-homomorfismo. Observemos que, para qualquer $a \in A$, a função $L(A) \longrightarrow \text{End}(M)$, tal que $L_a \mapsto [L_a, R_b] = L_{ba} - L_b L_a$, leva transformações lineares $L(A)$ em $L(A)$. Como $(L(A)^{(i)})^2 = L(A)^{(i)}$, os ideais $L(A)^{(i)}$ são invariantes por essa função. Logo, $M^{(i)}$ são sub-bimódulos. De maneira similar, podemos decompor cada $M^{(i)}$ em dois sub-bimódulos, tais que $a \longrightarrow R_a$ é um homomorfismo em um e um anti-homomorfismo no outro. Observemos que se L_a e R_b são homomorfismos, temos $L_{ba} - L_a L_b = R_{ab} - R_a R_b = 0$. Logo, L_a será um anti-homomorfismo e um homomorfismo, ou seja, a álgebra A tem que ser comutativa. Como A não é comutativa, temos que o sub-bimódulo será nulo. Analogamente, se L_a e R_b são anti-homomorfismos, teremos um sub-bimódulo nulo. Sabemos, por (3.2), que se $a \longrightarrow L_a$ é um anti-homomorfismo e $a \longrightarrow R_a$ for um homomorfismo, então o bimódulo é associativo. Logo, o bimódulo M é soma direta de um bimódulo associativo e um outro bimódulo, onde $a \longrightarrow R_a$ é um anti-homomorfismo e $a \longrightarrow L_a$ é um homomorfismo.

Teorema 3.2.3. *Seja D uma álgebra associativa. Todo bimódulo alternativo representado por $M_2(D)$ é soma direta de um bimódulo associativo e um bimódulo de Cayley.*

Demonstração. Pelo processo feito acima temos que todo bimódulo alternativo unital das álgebras de matrizes $M_n(D)$ é soma direta de um bimódulo associativo M_1 e um outro bimódulo M_2 , tais que $a \longrightarrow L_a$ é um homomorfismo e $a \longrightarrow R_a$ é um anti-homomorfismo. Seja $A = M_2(D)$. Vamos

estudar o bimódulo M_2 . Temos que $L_{ab} = L_a L_b$ e $R_{ab} = R_b R_a$ em M_2 . Como M é um bimódulo alternativo, por (3.1) temos $[L_a, R_b] = [R_b, R_a] = [L_b, L_a] = [R_a, L_b]$. Definimos $T_a \equiv L_a + R_a$. Temos que

$$T_a L_b = L_a L_b + R_a L_b = L_a L_b + L_b R_a + L_b L_a - L_a L_b = L_b T_a.$$

Analogamente, mostramos que T_a comuta com R_b . Logo, $[T_a, T_b] = 0$. Sabemos que $(m, a, b) = -(m, b, a)$, ou seja, $m(ab + ba) = (ma)b + (mb)a$. Similarmente, temos que $(ab + ba)m = a(bm) + b(am)$. Dessa forma, temos que $a \rightarrow T_a$ é uma representação de A_J . Pela identidade (3.7), temos que $T_{(a,b,c)} = [[T_a, T_b], T_c] = 0$, para arbitrários $a, b, c \in A_J$. Observemos $(boc) \circ a - b \circ (coa) = a.bc + a.cb + bc.a + cb.a - b.ca - b.ac - ca.b - ac.b = [[a, b], c]$, pois A é associativa. Logo, $T_u = 0$, com $u = [[a, b], c]$, onde $a, b, c \in A$. Seja $\{e_{ij} | i, j \in \{1, 2\}\}$ o sistema de matrizes unitárias para A . Como $e_{11} - e_{22} = [[e_{12}, e_{22}], e_{21}]$, temos que $T_{e_{12}} = T_{e_{22}}$. Como $L_1 = R_1 = 1$, temos $T_1 = 2$. Logo, $T_{e_{11}} = T_{e_{22}} = 1$. Como $e_{12} = [[e_{12}, e_{22}], e_{22}]$, temos $T_{e_{12}} = 0$. Analogamente, temos $T_{e_{21}} = 0$. Para todo $x = e_{11}a + e_{12}b + e_{21}c + e_{22}d \in M_n(D)$, com $a, b, c, d \in D$, temos que $T_x = T_{e_{11}a + e_{12}b + e_{21}c + e_{22}d} = 1a + 1d$. Dessa maneira, podemos concluir que T_a é a função traço multiplicada pela identidade de M_2 . Segue que $R_a = T_a - L_a = L_{\bar{a}}$. Então R_a e L_a é uma bi-representação Cayley, para $M_2(D)$, ou seja, M_2 é um bimódulo de Cayley. $\square$

Vejamos algumas identidades dos bimódulos alternativos.

Proposição 3.2.4. *Seja A uma álgebra associativa, comutativa e M um A -bimódulo alternativo. Então, para quaisquer $a, b, c \in A$ e $m \in M$, valem*

$$(ma, b, c) = (m, b, c)a \quad , \quad (am, b, c) = a(m, b, c); \quad (3.8)$$

$$((m, a, b), a, c) = 0. \quad (3.9)$$

Demonstração. Sejam $a, b \in A$. Para todo $m \in M$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= (m, a, b) - (m, b, a) = ma.b - m.ab - mb.a + m.ba \\ &= R_a R_b(m) - R_b R_a(m). \end{aligned}$$

Logo, $R_a R_b = R_b R_a$. Sejam $a, b, c \in A$ e $m \in M$. Temos

$$\begin{aligned} (ma, b, c) - (m, b, c)a &= (ma.b)c - ma.bc - (mb.c)a + (m.bc)a \\ &= R_c R_b R_a(m) - R_{bc} R_a(m) \\ &\quad - R_a R_c R_b(m) + R_a R_{bc}(m) \\ &= (R_{bc} R_a - R_{bc} R_a - R_a R_b R_c + R_a R_b R_c)(m) = 0. \end{aligned}$$

De modo análogo, provamos que $(am, b, c) = a(m, b, c)$, demonstrando a identidade (3.8).

Para a demonstração de (3.9), vamos utilizar a identidade (2.12), na extensão split E . Temos que $((a, b, m + c), a, m + c) = [a, m + c](a, b, m + c)$, para todos $a, b, m + c \in E$, onde $a, b, c \in A$ e $m \in M$. Logo,

$$((a, b, m), a, c) = [a, c](a, b, m) + [a, m](a, b, c) - ((a, b, c), a, m)$$

Como A é associativo e comutativo, temos que $((a, b, m), a, c) = 0$, ou seja, $((m, a, b), a, c) = 0$. $\square$

3.3 Superálgebras alternativas

De acordo com a definição de superálgebra em uma variedade, a superálgebra $A = A_0 \oplus A_1$ é *alternativa* se $\Gamma(A)$ for alternativa, ou seja, se verifica as identidades $(xy)z + (yx)z = x(yz) + y(xz)$ e $x(yz) + x(zy) = (xy)z + (xz)y$, para arbitrários $x, y, z \in \Gamma(A)$.

Vamos descrever as superidentidades para que a álgebra $\Gamma(A)$ seja alternativa.

Sejam $x, y, z \in \Gamma(A)$. Escreva $x = a_i \otimes x_i, y = b_j \otimes y_j$ e $z = c_l \otimes z_l$, onde $a_i, b_j, c_l \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1, x_i, y_j, z_l \in A_0 \cup A_1$ e $i, j, l \in \{0, 1\}$. Ao substituirmos x, y, z na identidade $(xy)z + (yx)z = x(yz) + y(xz)$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= ((a_i \otimes x_i)(b_j \otimes y_j))(c_l \otimes z_l) + ((b_j \otimes y_j)(a_i \otimes x_i))(c_l \otimes z_l) \\ &\quad - (a_i \otimes x_i)((b_j \otimes y_j)(c_l \otimes z_l)) - (b_j \otimes y_j)((a_i \otimes x_i)(c_l \otimes z_l)) \\ &= (a_i b_j \cdot c_l) \otimes (x_i y_j \cdot z_l - x_i \cdot y_j z_l) \\ &\quad + (-1)^{p(y_j)p(x_i)} (a_i b_j \cdot c_l) \otimes (y_j x_i \cdot z_l - y_j \cdot x_i z_l) \\ &= (a_i b_j \cdot c_l) \otimes ((x_i, y_j, z_l) + (-1)^{p(y_j)p(x_i)} (y_j, x_i, z_l)), \end{aligned}$$

para quaisquer $a_i, b_j, c_l \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Portanto, a superálgebra A deverá verificar esta superidentidade

$$(x_i, y_j, z_l) + (-1)^{p(y_j)p(x_i)} (y_j, x_i, z_l) = 0. \quad (3.10)$$

Analogamente, pela identidade $x(yz) + x(zy) = (xy)z + (xz)y$, temos a superidentidade

$$(x_i, y_j, z_l) + (-1)^{p(z_l)p(y_j)} (x_i, z_l, y_j) = 0. \quad (3.11)$$

Essas duas relações determinam dezesseis identidades para uma superálgebra A ser alternativa. Por (3.10), temos

- $(x_0, y_0, z_0) + (y_0, x_0, z_0) = 0,$
- $(x_0, y_0, z_1) + (y_0, x_0, z_1) = 0,$
- $(x_0, y_1, z_0) + (y_1, x_0, z_0) = 0,$
- $(x_0, y_1, z_1) + (y_1, x_0, z_1) = 0,$
- $(x_1, y_1, z_0) - (y_1, x_1, z_0) = 0,$
- $(x_1, y_1, z_1) - (y_1, x_1, z_1) = 0,$
- $(x_1, y_0, z_0) + (y_0, x_1, z_0) = 0,$
- $(x_1, y_0, z_1) + (y_0, x_1, z_1) = 0,$

para todos $x_0, y_0, z_0 \in A_0$ e $x_1, y_1, z_1 \in A_1$. Por (3.11) temos

- $(x_0, y_0, z_0) + (x_0, z_0, y_0) = 0,$
- $(x_0, y_0, z_1) + (x_0, z_1, y_0) = 0,$
- $(x_0, y_1, z_0) + (x_0, z_0, y_1) = 0,$
- $(x_0, y_1, z_1) - (x_0, z_1, y_1) = 0,$
- $(x_1, y_1, z_0) + (x_1, z_0, y_1) = 0,$
- $(x_1, y_1, z_1) - (x_1, z_1, y_1) = 0,$
- $(x_1, y_0, z_0) + (x_1, z_0, y_0) = 0,$
- $(x_1, y_0, z_1) + (x_1, z_1, y_0) = 0,$

para quaisquer $x_0, y_0, z_0 \in A_0$ e $x_1, y_1, z_1 \in A_1$.

Seja A uma superálgebra sobre um corpo de característica igual a dois. Sejam $a \in A_0$ e $x \in A$. Temos $2(a, a, x) = 0 = (a, a, x) + (a, a, x)$, ou seja, $(a, a, x) = -(a, a, x)$. Logo, se A é uma superálgebra com característica igual a dois, então $(a, a, x) = 0$, para todos $a \in A_0$ e $x \in A$. Se a característica é diferente de dois, em consequência das superidentidades acima, temos que $(a, a, x) = 0$, para arbitrários $a \in A_0$ e $x \in A$.

Seja A uma superálgebra alternativa sem unidade sobre um corpo F . Do mesmo modo como foi feito para álgebras alternativas, vamos considerar $\hat{A} = F \times A$. Observemos que

$$\Gamma(\hat{A}) = \Gamma_0 \otimes (F \times A_0) + \Gamma_1 \otimes A_1,$$

portanto, $\Gamma(\hat{A})$ é alternativa. Logo, se A é uma superálgebra alternativa, então a superálgebra $\hat{A}$ é alternativa, onde a parte par é $A_0 + F$ e a parte ímpar é A_1 .

Vamos verificar as relações entre as identidades das álgebras alternativas e as superidentidades das superálgebras alternativas.

Para facilitar a visualização da próxima superidentidade, iremos denotar a função $p(a)$ por $\bar{a}$, para $a \in A$.

Proposição 3.3.1. *Seja A uma superálgebra alternativa. Então*

$$(xy)(zw) - (x.yz)w + (-1)^{\bar{w}\bar{y} + \bar{w}\bar{z} + \bar{x}\bar{w} + \bar{x}\bar{z} + \bar{y}\bar{x}}((wy)(zx) - (w.yz)x) = 0,$$

para quaisquer $x, y, z, w \in A_0 \cup A_1$.

Demonstração. Sejam $a \otimes x, b \otimes y, c \otimes z, d \otimes w \in \Gamma(A)$, onde $x, y, z, w \in A_0 \cup A_1$ e $a, b, c, d \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Pela linearização da identidade de Moufang central em uma álgebra, temos

$$(xy)(zw) + (wy)(zx) - (x.yz)w - (w.yz)x = 0.$$

Ao substituirmos na envolvente de Grassmann, temos

$$\begin{aligned} 0 &= (ab)(cd) \otimes (xy)(zw) - ((a.bc)d_k) \otimes ((x.yz)w) \\ &\quad + (db)(ca) \otimes (wy)(zx) - ((d.bc)a) \otimes ((w.yz)x) \\ &= (abcd) \otimes ((xy)(zw) - (x.yz)w) \\ &\quad + (-1)^{\bar{a}\bar{b}}(bdca) \otimes ((wy)(zx) - (w.yz)x). \end{aligned}$$

Como $\bar{a} = \bar{x}, \bar{b} = \bar{y}, \bar{c} = \bar{z}, \bar{d} = \bar{w}$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= (abcd) \otimes ((xy)(zw) - (x.yz)w) \\ &\quad + (-1)^{\bar{w}\bar{y} + \bar{w}\bar{z} + \bar{x}\bar{w} + \bar{x}\bar{z} + \bar{y}\bar{x}}((wy)(zx) - (w.yz)x). \end{aligned}$$

Como a, b, c e d são arbitrários, temos que

$$\begin{aligned} &(xy)(zw) - (x.yz)w \\ &+ (-1)^{\bar{w}\bar{y} + \bar{w}\bar{z} + \bar{x}\bar{w} + \bar{x}\bar{z} + \bar{y}\bar{x}}((wy)(zx) - (w.yz)x) = 0, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Proposição 3.3.2. *Seja A uma superálgebra alternativa e sejam $a, b, c \in A_0 \cup A_1$ tais que pelo menos um desses elementos pertença ao centro associativo, então a seguinte relação é válida*

$$\langle ab, c \rangle = a\langle b, c \rangle + (-1)^{p(c)p(b)}\langle a, c \rangle b \quad (3.12)$$

Demonstração. Sejam $\alpha \otimes a, \beta \otimes b$ e $\lambda \otimes c \in \Gamma(A)$, onde $a, b, c \in A_0 \cup A_1$ e $\alpha, \beta, \lambda \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Pela identidade (2.1), temos

$$\begin{aligned} 0 &= [(\alpha \otimes a)(\beta \otimes b), \lambda \otimes c] - (\alpha \otimes a)[\beta \otimes b, \lambda \otimes c] \\ &\quad - [\alpha \otimes a, \lambda \otimes c](\beta \otimes b) \\ &= (\alpha\beta\lambda) \otimes ((\langle ab, c \rangle - a\langle b, c \rangle - (-1)^{p(c)p(b)}\langle a, c \rangle d)). \end{aligned}$$

Como α, β e λ são arbitrários, temos que a superidentidade $\langle ab, c \rangle = a\langle b, c \rangle + (-1)^{p(c)p(b)}\langle a, c \rangle b$ é válida em A . $\square$

Vejamos alguns resultados que envolvem o associador e o supercomutador.

Proposição 3.3.3. *Sejam A uma superálgebra, $a, b, c, r, s, t, u \in A$ e $n \in N$. Então*

$$\langle n, a \rangle \in N \quad (3.13)$$

$$(a, b, c)(r, s, t)\langle n, u \rangle = 0 \quad (3.14)$$

Demonstração. Sejam $\alpha \otimes a, \beta \otimes b, \lambda \otimes c, \delta \otimes r, \rho \otimes s, \zeta \otimes t, \phi \otimes u \in \Gamma(A)$ e $\eta \otimes n \in N(\Gamma(A))_0 \cup N(\Gamma(A))_1$, onde $a, b, c, r, s, t, u \in A_0 \cup A_1, n \in N(A)_0 \cup N(A)_1, \alpha, \beta, \lambda, \delta, \rho, \zeta, \phi \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ e $\eta \in N(\Gamma)_0 \cup N(\Gamma)_1$. Pelo Corolário 2.1.5, temos

$$\begin{aligned} 0 &= ([\eta \otimes n, \alpha \otimes a], \beta \otimes b, \lambda \otimes c) \\ &= (\eta\alpha \otimes \langle n, a \rangle, \beta \otimes b, \lambda \otimes c) \\ &= (\eta\alpha\beta\lambda) \otimes (\langle n, a \rangle, b, c). \end{aligned}$$

Como η, α, β e λ são arbitrários, temos que a relação (3.13) é verificada.

Provaremos a superidentidade (3.14). Vamos aplicar os elementos da envolvente de Grassmann na identidade 3 da Proposição 2.3.1, temos

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha \otimes a, \beta \otimes b, \lambda \otimes c)(\delta \otimes r, \rho \otimes s, \zeta \otimes t)[\eta \otimes n, \phi \otimes u] \\ &= (\alpha\beta\lambda\delta\rho\zeta\eta\phi) \otimes ((a, b, c)(r, s, t)\langle n, u \rangle). \end{aligned}$$

Como os elementos da álgebra de Grassmann são arbitrários temos que $(a, b, c)(r, s, t)\langle n, u \rangle = 0$. $\square$

Observemos que a parte par de uma superálgebra é uma álgebra alternativa e a parte ímpar é um bimódulo alternativo sobre a parte par. Vejamos outras propriedades que utilizaremos para a demonstração do Teorema principal.

Proposição 3.3.4. *Seja A uma superálgebra alternativa, tal que a parte par seja associativa e comutativa. Sejam $x, y, z, x_i, a, b, r \in A$, tais que a, b pertençam à parte par e x, y, z, x_i pertençam à parte ímpar, com $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Então:*

$$[x_1, x_2]r = x_1(x_2r) - x_2(x_1r) \quad (3.15)$$

$$r[x_1, x_2] = (rx_1)x_2 - (rx_2)x_1 \quad (3.16)$$

$$(x_1x_2)(x_3x_4) - (x_4x_2) = (x_1x_2x_3)x_4 - (x_4x_2x_3)x_1 \quad (3.17)$$

$$([x, a], a, b) = 0 \quad (3.18)$$

$$x(y, a, b) + (x, a, b)y = 0 \quad (3.19)$$

$$[xy, a] - x[y, a] - [x, a]y = 3(x, y, a) \quad (3.20)$$

$$a(b, x, y) + x(b, a, y) + -(b, x, ya) = 0 \quad (3.21)$$

$$([x, a], yz, b) + y([x, a], z, b) - ([x, a], y, b)z - ([x, a], b, y, z) = 0 \quad (3.22)$$

$$(y, x, [z, a]) = (y, z, [x, a]) + [(y, x, a), z] - [(y, z, a), x] \quad (3.23)$$

Demonstração. Como $[x_1, x_2]r = (x_1x_2)r - (x_2x_1)r$, vamos subtrair esta relação pela identidade (3.15). Temos

$$(x_1x_2)r - x_1(x_2r) - (x_2x_1)r + x_2(x_1r) = (x_1, x_2, r) - (x_2, x_1, r).$$

Ao utilizarmos a definição de superálgebra alternativa, temos

$$(x_1, x_2, r) - (x_2, x_1, r) = (x_1, x_2, r) - (x_1, x_2, r) = 0.$$

Logo, a superidentidade (3.15) é verificada. A demonstração (3.16) é análoga à anterior.

Pela Proposição 3.3.1 verificamos (3.17).

Para demonstrarmos (3.18), vamos utilizar linearização da identidade de Moufang à direita e à esquerda, na extensão split E . Temos

$$(a, ab, x) = -(a, xb, a) - (a, a, b)x - (a, x, b)a = (x, a, b)a,$$

$$(a, ba, x) = -(x, ba, a) = (a, bx, a) + x(b, a, a) + a(b, x, a) = a(x, a, b),$$

para todos $a, b, x \in E$, onde $a, b \in A_0$ e $x \in A_1$. Como A_1 é um A_0 -bimódulo alternativo, podemos utilizar (3.8). Temos que

$$\begin{aligned}([x, a], a, b) &= (xa, a, b) - (ax, a, b) \\ &= (x, a, b)a - a(x, a, b) \\ &= (a, ab, x) - (a, ba, x) = (a, [a, b], x) = 0,\end{aligned}$$

pois A_0 é comutativo.

Para provar as demais superidentidades, usaremos a envolvente de Grassmann. Sejam $\alpha \otimes a, \beta \otimes b \in \Gamma(A)_0$ e $\gamma \otimes x, \lambda \otimes y, \theta \otimes z \in \Gamma(A)_1$, onde $a, b \in A_0$, $x, y, z \in A_1$, $\alpha, \beta \in \Gamma_0$ e $\lambda, \gamma, \theta \in \Gamma_1$.

Para verificarmos (3.19), usaremos a função de Kleinfeld. Temos

$$f(y, x, a, b) = (yx, a, b) - x(y, a, b) - (x, a, b)y = ([y, x], a, b) + ([a, b], y, x).$$

Ao calcularmos o comutador e cancelarmos os termos iguais, obtemos

$$-x(y, a, b) - (x, a, b)y = (-xy, a, b) + ([a, b], y, x). \quad (3.24)$$

Substituindo os elementos da envolvente de Grassmann em (3.24), temos

$$\begin{aligned}0 &= ((\alpha \otimes a)(\beta \otimes b), \lambda \otimes y, \gamma \otimes x) - ((\gamma \otimes x)(\lambda \otimes y), \alpha \otimes a, \beta \otimes b) \\ &\quad - ((\beta \otimes b)(\alpha \otimes a), \lambda \otimes y, \gamma \otimes x) + (\gamma \otimes x)(\lambda \otimes y, \alpha \otimes a, \beta \otimes b) \\ &\quad + (\gamma \otimes x, \alpha \otimes a, \beta \otimes b)(\lambda \otimes y) \\ &= (\alpha\beta \otimes ab, \lambda \otimes y, \gamma \otimes x) - (\gamma\lambda \otimes xy, \alpha \otimes a, \beta \otimes b) \\ &\quad - (\beta\alpha \otimes ba, \lambda \otimes y, \gamma \otimes x) + (\gamma \otimes x)(\lambda \otimes y, \alpha \otimes a, \beta \otimes b) \\ &\quad + (\gamma \otimes x, \alpha \otimes a, \beta \otimes b)(\lambda \otimes y).\end{aligned}$$

Logo,

$$(\alpha\beta\lambda\gamma) \otimes ((ab, y, x) + (xy, a, b) - (ba, y, x) - x(y, a, b) - (x, a, b)y) = 0.$$

Como α, β, λ e γ são arbitrários, temos que

$$(ab, y, x) + (xy, a, b) - (ba, y, x) - x(y, a, b) - (x, a, b)y = 0.$$

Como a parte par é associativa e comutativa, temos

$$x(y, a, b) = -(x, a, b)y.$$

Para verificarmos a superidentidade (3.20), vamos utilizar a identidade (2.3). Temos

$$\begin{aligned} 3(\gamma \otimes x, \lambda \otimes y, \alpha \otimes a) &= [(\gamma \otimes x)(\lambda \otimes y), \alpha \otimes a] \\ &\quad (-\gamma \otimes x)[\lambda \otimes y, \alpha \otimes a] \\ &\quad -[\gamma \otimes x, \alpha \otimes a](\lambda \otimes y). \end{aligned}$$

Logo,

$$(\gamma\lambda\alpha) \otimes (3(x, y, a) - [xy, a] + x[y, a] + [x, a]y) = 0.$$

Como γ, λ e α são arbitrários, temos que

$$3(x, y, a) - [xy, a] + x[y, a] + [x, a]y = 0.$$

Para a prova da superidentidade (3.21) basta tomarmos a linearização da identidade de Moufang. Temos

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha\beta\gamma\lambda) \otimes (a(b, x, y)) + (\lambda\beta\alpha\lambda) \otimes (x(b, a, y)) \\ &\quad -(\beta\alpha\lambda\gamma) \otimes (b, a, yx) - (\beta\gamma\lambda\alpha) \otimes (b, x, ya) \\ &= (\alpha\beta\gamma\lambda) \otimes (a(b, x, y) + x(b, a, y) + (b, a, yx) - (b, x, ya)). \end{aligned}$$

Como $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ são quaisquer e A_0 é associativa, temos

$$a(b, x, y) + x(b, a, y) - (b, x, ya) = 0.$$

Para verificarmos (3.22), basta tomarmos a função de Kleinfeld (2.4) e subtrair de (2.7). Temos

$$\begin{aligned} 0 &= (\gamma\alpha\lambda\theta\beta) \otimes ([x, a], yz, b) - (\lambda\gamma\alpha\theta\beta) \otimes (y([x, a], z, b)) \\ &\quad -(\gamma\alpha\lambda\theta\beta) \otimes ([x, a], y, b)z - (\gamma\alpha\beta\lambda\theta) \otimes ([x, a], b, y, z) \\ &= (\gamma\alpha\lambda\theta\beta) \otimes ([x, a], yz, b) + y([x, a], z, b) - ([x, a], y, b)z \\ &\quad -([x, a], b, y, z). \end{aligned}$$

Como $\gamma, \alpha, \lambda, \theta$ e β são arbitrários, temos

$$([x, a], yz, b) + y([x, a], z, b) - ([x, a], y, b)z - ([x, a], b, y, z) = 0.$$

Para demonstrarmos (3.23), basta tomarmos (1.2) e adicionarmos com (1.1). Temos

$$\begin{aligned}
0 &= (\lambda\gamma\alpha\theta) \otimes (y, x, az) - (\lambda\gamma\theta\alpha) \otimes (y, x, za) \\
&\quad + (\lambda\theta\alpha\gamma) \otimes (y, z, ax) - (\lambda\theta\gamma\alpha) \otimes (y, z, xa) \\
&\quad - (\gamma\lambda\theta\alpha) \otimes x(y, z, a) + (\lambda\theta\alpha\gamma) \otimes ((y, z, a)x) \\
&\quad - (\theta\lambda\gamma\alpha) \otimes z(y, x, a) + (\lambda\gamma\alpha\theta) \otimes ((y, x, a)z) \\
&= (\lambda\gamma\alpha\theta) \otimes ((y, x, az) - (y, x, za) - (y, z, ax) \\
&\quad + (y, z, xa) + x(y, z, a) \\
&\quad - (y, z, a)x - z(y, x, a) + (y, x, a)z).
\end{aligned}$$

Como λ, γ, α e θ são quaisquer, temos que

$$(y, x, -[z, a]) + (y, z, [x, a]) - [(y, z, a), x] + [(y, x, a), z] = 0.$$

Então, todas as superidentidades estão verificadas. $\square$

Proposição 3.3.5. *Sejam A uma superálgebra alternativa, não comutativa e M um bimódulo de Cayley sobre A_0 . Sejam $a \in A_0$ e $m_1, m_2 \in M$. Temos*

$$a(m_1m_2) = m_1(m_2a), \quad (3.25)$$

$$(m_1m_2)a = (am_1)m_2, \quad (3.26)$$

$$(m_1, m_2, a) = [m_1m_2, a]. \quad (3.27)$$

Demonstração. Para provarmos (3.25), usaremos a superidentidade alternativa e as identidades (3.6) e (3.4). Temos

$$\begin{aligned}
a(m_1m_2) &= (am_1)m_2 - m_1(am_2) + (m_1a)m_2 \\
&= -m_1(am_2) + (m_1a + am_1)m_2 \\
&= -m_1(am_2) + t(a)m_1m_2 \\
&= -m_1(am_2) + m_1(t(a)m_2) \\
&= m_1(\bar{a}m_2) \\
&= m_1(m_2a).
\end{aligned}$$

Analogamente, verificamos a identidade (3.26). Para provarmos (3.27), usaremos a identidade (3.25). Temos

$$(m_1, m_2, a) = (m_1m_2)a - m_1(m_2a) = (m_1m_2)a - a(m_1m_2) = [m_1m_2, a],$$

como queríamos provar. $\square$

Seja A uma superálgebra (álgebra). Dizemos que A é *nilpotente*, se existir um número natural n não nulo, tal que $\sum_{i+j=n} A^i A^j = (0)$, onde $A^1 = A$ e $A^j = A^{j-1}A$. Dizemos que A é *solúvel* se existir um número natural n não nulo, tal que $A^{(n)} = (0)$, onde $A^{(1)} = A^2$ e $A^{(n)} = (A^{(n-1)})^2$.

Quando estudamos as álgebras associativas, sabemos que há equivalência entre álgebras solúveis e álgebras nilpotentes. Para as álgebras alternativas, se uma álgebra for nilpotente, então ela é solúvel. Quando a dimensão for finita, podemos verificar que se a álgebra for solúvel, então ela é nilpotente. Mas isso não ocorre em geral. Isso foi provado por G.V. Dorofeev, que em 1960, construiu um exemplo de álgebra alternativa solúvel, que não é nilpotente, veja [14]. Esse exemplo é complicado. Uma outra maneira de exemplificarmos facilmente esse resultado, é utilizarmos as superálgebras alternativas como ferramenta para a construção. Esse será o nosso próximo passo.

Exemplo. Sejam F um corpo e $A = A_0 + A_1$ a superálgebra, definida por $A_0 = Fa + Fb$, $A_1 = Fx + Fax + Fxa$, cujos únicos produtos dos elementos da base não nulos, são

$$\begin{aligned} x.a &= xa, \\ a.x &= ax, \\ b.x &= -xa, \\ x.b &= xa + ax, \\ xa.x &= -b, \\ x.ax &= a - b, \\ ax.x &= -x.xa = a. \end{aligned}$$

Vamos verificar que as identidades (3.10) e (3.11) valem. Sejam $x, ax, xa \in A_1$, elementos geradores. Temos

$$\begin{aligned} (x, ax, xa) - (ax, x, xa) &= (x.ax)xa - x(ax.xa) \\ &\quad - (ax.x)xa + ax(x.xa) \\ &= (a - b)xa - a.xa + ax(-a) = 0 \end{aligned}$$

Analogamente, provamos que, para qualquer elemento gerador, vale as superidentidades alternativas. Logo, A é uma superálgebra alternativa. Temos que $A^{(1)} = A^2 = Fax + Fxa + Fa + Fb$ e $A^{(2)} = (0)$. Logo, A é solúvel de índice dois. Como $ax.x = a$, temos que A não é nilpotente. Como A é uma superálgebra alternativa, temos que a envolvente de Grassmann é uma álgebra alternativa, que será solúvel de índice dois e não será nilpotente.

3.4 Superálgebras alternativas primas

Quando falarmos de ideais de uma superálgebra, estaremos considerando ideais homogêneos. Dizemos que a superálgebra A é *prima* se o produto de dois ideais não nulos for um ideal não nulo. Chamamos a superálgebra A de *semiprima* se não possuir ideais nilpotentes. Falamos que a superálgebra A é *simples* se $A^2 \neq (0)$ e os únicos ideais forem (0) e A .

Observemos que toda superálgebra simples é uma superálgebra prima.

Vamos verificar que se A é uma superálgebra prima, então $\hat{A}$ será prima. Observamos que se I é um ideal de A , também será um ideal de $\hat{A}$. Vamos supor que $\hat{A}$ é uma superálgebra que não seja prima. Sejam $\hat{I}, \hat{J}$ ideais não nulos de $\hat{A}$, tais que $\hat{I}\hat{J} = 0$. Seja $a = k + a' \in \hat{I}$, um elemento arbitrário, não nulo de $\hat{I}$, com $a' \in A$ e $k \in K$. Para todo $b = k' + b' \in \hat{J}$, com $k \in K$ e $b' \in A$, temos $ab = ba = 0$. Logo, $0 = kk' + kb' + k'a + a'b'$, ou seja, $k' = 0$ ou $k = 0$. Suponhamos que $k' = 0$, ou seja, $b = b' \in A$. Como $ab = 0$, temos $kb = -a'b$, para qualquer $b \in J$. Se $k \neq 0$, temos $a \in K$. Logo, contradiz que a é elemento homogêneo. Se $k = 0$, temos $a \in A$. Portanto, $\hat{I}, \hat{J} \in A$, ou seja, A não é prima.

Para uma superálgebra A , denotaremos $D(A) = \text{id}\langle(a, b, c) | a, b, c \in A\rangle$. Chamamos o ideal $D(A)$ de *ideal associador*.

Dizemos que o maior ideal contido no centro associativo da superálgebra A é o *núcleo associativo* e será denotamos por $U(A)$.

Seja A uma superálgebra alternativa e não associativa, então $D(A) \neq 0$. Se A é prima, pela Proposição 2.3.4, teremos $U(A) = 0$.

Agora veremos um lema interessante para obtermos informações sobre o centro.

Definiremos o ideal $P(A)$ gerado pelo conjunto $\langle N(A), A \rangle$, onde $\langle, \rangle$ é o supercomutador.

Lema 3.4.1. *Seja A uma superálgebra alternativa e $P(A)$ definido anteriormente. Então $P(A) = \langle N, A \rangle \hat{A}$ e $(P(A), A, A) \subseteq N(A)$.*

Demonstração. Pela definição de $P(A)$, temos que $\langle N, A \rangle \hat{A} \subseteq P(A)$. Vamos verificar a inclusão contrária. Seja $a \in P(A)$. Tomemos $\alpha \otimes a \in \Gamma(A)$, onde $\alpha \in \Gamma_0 \cup \Gamma(A)_1$ é arbitrário. Pelo Lema 2.3.5, temos

$$\alpha \otimes a = [\eta \otimes n, \beta \otimes b] \lambda \otimes c,$$

para $\beta \otimes b \in \Gamma(A)$, $\lambda \otimes c \in \hat{\Gamma}(A)$ e $\eta \otimes n \in N(\Gamma(A))$, onde $b \in A_0 \cup A_1$, $c \in \hat{A}_0 \cup \hat{A}_1$, $n \in N(A)_0 \cup N(A)_1$, $\beta, \lambda \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ e $\eta \in N(\Gamma)_0 \cup N(\Gamma)_1$. Logo,

temos

$$\begin{aligned}\alpha \otimes a &= [\eta \otimes n, \beta \otimes b] \lambda \otimes c \\ &= (\eta \beta \lambda) \otimes (\langle n, b \rangle c).\end{aligned}$$

Como $\alpha, \eta, \beta, \lambda$ são arbitrários, temos que $a = \langle n, b \rangle c$, onde $b \in A_0 \cup A_1, c \in \hat{A}_0 \cup \hat{A}_1, n \in N(A)_0 \cup N(A)_1$. Então, temos que $P(A) \subseteq \langle N, A \rangle \hat{A}$. Portanto,

$$P(A) = \langle N, A \rangle \hat{A}.$$

Analogamente, pelo Lema 2.3.6, provamos que $(P(A), A, A) \subseteq N(A)$. $\square$

Lema 3.4.2. *Seja A uma superálgebra alternativa e $P(A)$ o ideal definido anteriormente. Então $P(A)D(A) \subseteq U(A)$.*

Demonstração. Sejam I, J ideais de A , $b \in I$ e $c \in J$, onde $b \in I_0 \cup I_1, c \in J_0 \cup J_1$. Para todo $a \in A$, temos

$$(bc)a = b(ca) + (b, c, a) = b(ca) - (-1)^{p(c)p(a)}(b, a, c) \in IJ.$$

Analogamente, mostramos que $a(bc) \in IJ$. Logo, o produto de dois ideais é um ideal. Logo, será suficiente mostrar que $P(A)D(A)$ está contido no associador. Um elemento arbitrário desse ideal é a combinação linear de elementos da forma $(x, y, z)u.v\langle t, n \rangle$, onde $n \in N(A) = N, u, v \in \hat{A}, x, y, z, t \in A$. Como $\langle t, n \rangle \in N$, temos

$$\begin{aligned}(x, y, z)u.v\langle t, n \rangle &= ((x, y, z)u.v)\langle t, n \rangle \\ &= ((x, y, z), u, v)\langle t, n \rangle + ((x, y, z).uv)\langle t, n \rangle \\ &= ((x, y, z), u, v\langle t, n \rangle) + (x, y, z).uv\langle t, n \rangle.\end{aligned}$$

Pelo Lema anterior, temos que na última igualdade, o primeiro termo é nulo. Falta mostrar que o segundo termo da última igualdade é associativo. Como o associador é trilinear, basta verificar para todos $w, r, s \in A$. Então

$$((x, y, z)w.\langle t, n \rangle, r, s) = ((x, y, z)w, r, s)\langle t, n \rangle.$$

Pela Proposição 3.3.3 e a superidentidade (3.12), temos

$$-(t, r, s)\langle (x, y, z)w, n \rangle = (t, r, s)(x, y, z)\langle w, n \rangle = 0.$$

Logo, $D(A)P(A) \subseteq N(A)$. Como $D(A)P(A)$ é um ideal, temos que está contido em $U(A)$. $\square$

Corolário 3.4.3. *Seja A uma superálgebra alternativa prima, não associativa. Então $N(A) = Z^S(A)$.*

Demonstração. Sabemos que o centro está contido no centro associativo. Vamos mostrar a outra inclusão. Como A é não associativa, temos que $U(A) = 0$. Pelo Lema anterior, temos que $P(A) = 0$. Então, $N(A) \subseteq Z^S(A)$, como queríamos demonstrar. $\square$

Para uma superálgebra A arbitrária, observe que $Z^S(A)_0 = Z(A)_0$.

Uma superálgebra A com unidade é chamada *central* se $Z(A)_0 = F$.

Podemos observar que para uma superálgebra prima A , temos que o seu centro é nulo, ou cada elemento $z \in Z(A)_0^*$ não é divisor de zero. Se tomarmos a superálgebra $\hat{A}$, temos que será central sobre o corpo de frações $K = (Z(\hat{A})_0^*)^{-1}Z(\hat{A})_0$. Seja L/K uma extensão arbitrária do corpo K e $\hat{A}_L = \hat{A} \otimes_K L$ a correspondente extensão escalar.

Lema 3.4.4. *Seja $A = A_0 + A_1$ uma álgebra alternativa Z_2 -graduada e seja a um elemento par, tal que $(aA_0)a = 0$. Então o elemento a gera um ideal nilpotente em A .*

Demonstração. Seja $x \in A$, tal que $x = x_0 + x_1, x_i \in A_i$. Temos que

$$(axa)xa = (a(x_0 + x_1)a)(x_0 + x_1)a = ((ax_0)a + (ax_1)a)(x_0a + x_1a).$$

Utilizando a hipótese, temos

$$((ax_0)a + (ax_1)a)(x_0a + x_1a) = ((ax_1)a)x_0a + ((ax_1)a)x_1a.$$

Pela identidade de Moufang à esquerda e a hipótese, temos

$$((ax_1)a)x_0a + ((ax_1)a)x_1a = (ax_1)(ax_0a) + ((ax_1)a)x_1a = ((ax_1)a)x_1a.$$

Pelo Teorema 1.1.3, temos que $axaxa = ax_1ax_1a \in aA_0a = (0)$ e $(ax)^3 = (axaxa)x = 0$. Pela introdução e a demonstração do Lema 2 em [7], temos que a , gera um ideal solúvel e portanto gera um ideal nilpotente em A . $\square$

O próximo resultado relacionará superálgebras alternativas e elementos nilpotentes da parte par.

Corolário 3.4.5. *Seja A um superálgebra alternativa. Se $A = A_0 + A_1$ é semiprima, então a álgebra alternativa A_0 é não degenerada.*

Demonstração. Seja $\Gamma(A) = \Gamma_0 \otimes A_0 + \Gamma_1 \otimes A_1$ a envolvente de Grassmann. Sabemos que $\Gamma(A)$ é uma álgebra alternativa Z_2 -graduada. Tome $a = a_0 \otimes a_0 \in \Gamma(A)_0$, tal que $(a\Gamma(A)_0)a = 0$. Pelo Lema anterior, temos que a gera um ideal nilpotente em $\Gamma(A)$. Logo, a_0 gera um ideal nilpotente em A . Como A é semiprima, temos que $a_0 = 0$. $\square$

Capítulo 4

A classificação

Neste capítulo, provaremos o principal teorema desta dissertação, que trata de superálgebras alternativas simples em característica diferente de 2 e 3. Na segunda seção, apresentaremos exemplos de superálgebras alternativas simples em característica 2 e 3.

4.1 Teorema principal

Para a demonstração do teorema, necessitamos de três lemas. Não podemos esquecer que estamos considerando superálgebras alternativas em característica diferente de 2 e 3.

Seja A uma superálgebra. Definimos $B(A)$ o menor ideal de A , tal que $A/B(A)$ seja semiprima. Chamamos $B(A)$ de *ideal de Baer de A* .

Seja L/K uma extensão arbitrária do corpo K e a álgebra $\hat{A}$ a álgebra A acrescida da unidade. Denotamos por $\hat{A}_L = \hat{A} \otimes_K L$ a correspondente extensão escalar. Podemos observar que existe um homomorfismo $h : A \rightarrow \hat{A}_L$, tal que $h(a) = a \otimes 1$.

Lema 4.1.1. *Seja A uma superálgebra alternativa prima em característica diferente de dois e três. Se a superálgebra alternativa $\hat{A}_L$ é associativa ou a parte ímpar é nula e a parte par é a álgebra de Cayley-Dickson, então a superálgebra A é associativa ou a parte ímpar é nula e a parte par é a álgebra de Cayley-Dickson.*

Demonstração. Pela Proposição 2.3.4, temos que $D(A) \subseteq B(A)$. Pela definição de $\hat{A}$, sabemos que $B(A) \subseteq B(\hat{A}_L)$. Logo,

$$D(A) \cap \text{id}\langle A_1 \rangle \subseteq B(\hat{A}_L) \cap A.$$

Vamos verificar que $B(\hat{A}_L) \cap A \subseteq B(A)$. Seja $I \in B(\hat{A}_L) \cap A$. Como $I \in A$ e $I \in \hat{A}_L$, temos que $I = J \otimes L$, onde J é ideal de A . Como I é nilpotente e L é um corpo, concluímos que J é nilpotente. Logo, $J \in B(A)$. Então

$$B(\hat{A}_L) \cap A \subseteq B(A).$$

Como A é prima, obtemos

$$D(A) \cap \text{id}\langle A_1 \rangle \subseteq B(\hat{A}_L) \cap A \subseteq B(A) = (0).$$

Como $D(A)$ e $\text{id}\langle A_1 \rangle$ são ideais, sabemos que pelo menos um deles tem que ser nulo. Se $D(A)$ é nulo, então A é associativa. Se $\text{id}\langle A_1 \rangle$ é nulo, então $A_1 = (0)$ e $A_0 = A$. Como A é semiprima, pelo Corolário 3.4.5, temos que A é não degenerada. Como A é não associativa, alternativa, prima e não degenerada, pelo Teorema 2.6.10, podemos concluir que A é um anel de Cayley-Dickson. $\square$

Lema 4.1.2. *Seja A uma superálgebra alternativa, não associativa prima, com unidade e seja $F = (Z(\hat{A})_0^*)^{-1}Z(\hat{A})_0$ infinito. Então a parte par é associativa e comutativa, ou a álgebra $(Z(\hat{A})_0^*)^{-1}A_0$ é quadrática sobre F .*

Demonstração. Sejam $x, y \in A_0$. Pelos Corolários 2.3.11 e 3.4.3, temos que $n_1(x, y) \in N(A)_0 = Z(A)_0 \subseteq F$. Vamos considerar dois casos.

Suponhamos que existam $a, b \in A_0$, tal que $n_1(a, b) = [a, b]^4$ é diferente de zero. Pelo Lema 2.5.2, temos que A_0 é quadrática.

Vejam os caso contrário, ou seja, $n_1(x, y) = [x, y]^4 = 0$, para todos $x, y \in A_0$. Pela Proposição 2.4.2, sabemos que os elementos nilpotentes formam um ideal I . Pelo Teorema 2.4.14, obtemos que I é localmente finita. Então I é localmente nilpotente. Logo, $\text{alg}\langle [x, y] \rangle$ é nilpotente. Como I é prima, podemos concluir que $[x, y] = 0$. Logo, A_0 é comutativa. Pela identidade (2.3) verificamos que A_0 é associativa. $\square$

Lema 4.1.3. *Seja A uma superálgebra alternativa prima onde a parte par é associativa e comutativa. Então A é associativa.*

Demonstração. Sejam $x, y, z, a, b, c \in A$, tais que x, y, z pertençam à parte ímpar e a, b, c pertençam à parte par. Vamos demonstrar o lema em vários passos:

1. Mostraremos que $(x, a, b)[y, c] = [y, c](x, a, b) = 0$.

Pelas superidentidades (3.19) e (3.9), temos que

$$(x, a, b)(y, a, c) = -x((y, a, c), a, b) = 0. \quad (4.1)$$

Pelas superidentidades (3.19) e (3.18), obtemos

$$(x, a, b)[y, a] = -x([y, a], a, b) = 0. \quad (4.2)$$

Ao linearizarmos a identidade (4.2), teremos

$$[y, c](x, a, b) = -[y, a](x, c, b). \quad (4.3)$$

Seja $d = (x, a, b)[y, c] \in A_0$. Pelas identidades (3.17) e (4.1), observamos que

$$\begin{aligned} d^2 &= ((x, a, b)[y, c])((x, a, b)[y, c]) \\ &= [y, c]^2(x, a, b)^2 + ((x, a, b) \cdot [y, c](x, a, b))[y, c] \\ &\quad - ([y, c] \cdot [y, c](x, a, b))(x, a, b) \\ &= ((x, a, b) \cdot [y, c](x, a, b))[y, c] - ([y, c] \cdot [y, c](x, a, b))(x, a, b). \end{aligned}$$

Vamos verificar que cada termo de d^2 é zero. Ao utilizarmos (4.3), (3.15), (4.1), (3.19), (3.18) e (4.2), temos

$$\begin{aligned} (x, a, b) \cdot [y, c](x, a, b) &= -(x, a, b) \cdot [y, a](x, c, b) \\ &= -[y, a] \cdot (x, a, b)(x, c, b) \\ &\quad - [(x, a, b), [y, a]](x, c, b) \\ &= (-(x, a, b)[y, a] + [y, a](x, a, b))(x, c, b) = 0. \end{aligned}$$

Por (4.3), (3.15) e (3.18), obtemos

$$\begin{aligned} [y, c] \cdot [y, c](x, a, b) &= -[y, c] \cdot [y, a](x, c, b) \\ &= -[y, a] \cdot [y, c](x, c, b) - [[y, c], [y, a]](x, c, b) \\ &= -[[y, c], [y, a]](x, c, b). \end{aligned}$$

Definimos $a_0 = [[y, c], [y, a]] \in A_0$. Pelas superidentidades (3.8) e (4.1), teremos que $d^2 = a_0(x, c, b) \cdot (x, a, b) = (a_0 x, c, b) \cdot (x, a, b) = 0$. Como A_0 é não degenerada concluímos que $d = 0$. Analogamente, provamos a identidade $[y, c](x, a, b) = 0$.

2. Vamos mostrar que $[(x, a, b), c] = ([x, c], a, b) = 0$.

Seja $I = \{x \in A_1 | xA_1 = A_1x = (0)\}$. Verificaremos que I é um ideal de A . Sejam $x, z \in I$. Para qualquer $d \in A_1$, sabemos que $(x + z)d = 0$, ou seja, I é fechado para a soma. Sejam $x \in I$ e $w \in A$,

com $w = w_0 + w_1$. Podemos observar que $xw = x(w_0 + w_1) = xw_0$. Logo, para todo $y \in A_1$, temos $(xw_0)y = x(w_0y) - (xy)w_0 + x(yw_0) = 0$. Como $I^2 = (0)$ e A é prima, concluímos que $I = (0)$. Utilizando (3.19) e o primeiro passo, teremos

$$[(x, a, b), c]y = ([x, c], a, b)y = -[x, c](y, a, b) = 0.$$

Analogamente, obtemos que $y[(x, a, b), c] = y([x, c], a, b) = 0$. Logo, $[(x, a, b), c] \in I$. Portanto, $[(x, a, b), c] = ([x, c], a, b) = 0$.

3. Provaremos que $(x, a, b)x = 0$. Definimos $c = (x, a, b)x \in A_0$. Por (3.19), obtemos que $c = -x(x, a, b)$. Por (3.17), (4.1), (3.8) e (3.19), temos

$$\begin{aligned} c^2 &= (x, a, b)x \cdot (x, a, b)x \\ &= x^2(x, a, b)^2 + ((x, a, b) \cdot x(x, a, b))x - (x \cdot x(x, a, b))(x, a, b) \\ &= -(x, a, b)cx + xc \cdot (x, a, b) \\ &= -(xc, a, b)x - (xc, a, b)x \\ &= -2(xc, a, b)x. \end{aligned}$$

Ao utilizarmos $2c = [(x, a, b), x]$, (3.16), (3.8), (3.9) e o segundo passo, observamos que

$$\begin{aligned} c^2 &= -2(xc, a, b)x \\ &= (x[x, (x, a, b)], a, b)x \\ &= (x^2(x, a, b), a, b)x - (x(x, a, b) \cdot x, a, b)x \\ &= (x^2((x, a, b), a, b))x + (cx, a, b)x \\ &= (xc, a, b)x. \end{aligned}$$

Logo, $3(xc, a, b)x = 0$. Então $c^2 = 0$. Como A_0 é não degenerada, então $(x, a, b)x = 0$.

4. Mostaremos que $(A_1, A_0, A_0) = 0$. Pela linearização de $(x, a, b)x = 0$, obtemos $(x, a, b)y + (y, a, b)x = 0$. Por (3.19), podemos observar que

$$[(x, a, b), y] = 0. \quad (4.4)$$

Seja $c = (x, a, b)y \in A_0$. Pelas superidentidades (3.17), (3.16), (4.1) e (4.4), temos

$$\begin{aligned} c^2 &= y^2(x, a, b)^2 + ((x, a, b) \cdot y(x, a, b))y - ((y \cdot y(x, a, b))(x, a, b) \\ &= ((x, a, b) \cdot y(x, a, b))y - ((y \cdot y(x, a, b))(x, a, b)). \end{aligned}$$

Vamos analisar cada termo de c^2 . Pela (3.8) e o segundo passo, obtemos

$$\begin{aligned} ((x, a, b).y(x, a, b)) &= y(x, a, b).(x, a, b) \\ &= (x.y(x, a, b)a, b) - (y(x, a, b).x, a, b) \\ &= ([x, y(x, a, b)], a, b) = 0. \end{aligned}$$

Logo, $(x, a, b).y(x, a, b) = ([x, y(x, a, b)], a, b)$. Analogamente, teremos

$$\begin{aligned} (y.y(x, a, b))(x, a, b) &= (y(x, a, b).y)(x, a, b) \\ &= +[y, y(x, a, b)](x, a, b) = 0. \end{aligned}$$

Logo, $y.y(x, a, b)(x, a, b) = [y, y(x, a, b)](x, a, b)$. Ao utilizarmos (3.16) e (4.4), observamos que

$$\begin{aligned} c^2 &= (y(x, a, b).(x, a, b))y - (y(x, a, b).y)(x, a, b) \\ &= (y(x, a, b))([x, a, b], y) = 0. \end{aligned}$$

Como $c = 0$, então $(x, a, b) \in I$ e $(x, a, b) = 0$.

5. Veremos que $(A_1, A_0, [A_0, A_1]) = (0)$. Por (3.21) e o quarto passo, obtemos

$$a(b, x, y) = (b, x, ya).$$

Analogamente, temos que $(b, x, y)a = (b, x, ay)$. Como $(b, x, y) \in A_0$, podemos obter que $(b, x, y)a = a(b, x, y)$. Logo,

$$\begin{aligned} (b, x, [y, a]) &= (b, x, ya - ay) \\ &= (b, x, ya) - (b, x, ay) = 0. \end{aligned}$$

6. Verificaremos que se A não for associativa, então $S = [[A_1, A_0], A_0] = (0)$. Primeiramente, iremos verificar que $S \subseteq N(A)_1$. Pelos passos quarto e quinto, basta provarmos que $([x, a], b, y, z) = 0$. Ao usarmos (3.22), obtemos

$$([x, a], b, y, z) = y([x, a], z, b) - ([x, a], y, b)z + ([x, a], yz, b) = 0.$$

Por Colorário 3.4.3, sabemos que $N(A) = Z^s(A)$. Além disso, para arbitrário $x \in Z^s(A)_1$, temos que $\langle x, x \rangle = 2x^2 = 0$. Logo, $x^2 = 0$. Seja I o ideal gerado por x . Logo, $I^2 = (0)$. Como A é prima, concluímos que $x = 0$. Então $Z^s(A)_1 = (0)$. Como $S \subseteq Z^s(A)_1 = (0)$, então $S = (0)$.

7. Provaremos que se A não for associativa, então temos que $[A_1, A_0] = (0)$. Ao substituirmos y por $[y, b] \in A_1$ em (3.20) e utilizarmos o quinto e o sexto passos, teremos $[x, a][y, b] = 0$. Pela superidentidade (3.17), o quinto e o sexto passos, temos

$$\begin{aligned} ([x, a]y)^2 &= ([x, a]y)([x, a]y) \\ &= y^2[x, a]^2 + ([x, a] \cdot y[x, a])y - (y \cdot y[x, a])[x, a] \\ &= (y[x, a] \cdot [x, a])y - y(y[x, a] \cdot [x, a]) \\ &= [(y, [x, a], [x, a]), y]. \end{aligned}$$

Pelos passos cinco e seis, ao substituirmos $z = [x, a]$ em (3.23), obtemos $(y, [x, a], [x, a]) = 0$, ou seja, $([x, a]y)^2 = (0)$. Como A_0 é não degenerada, podemos observar que $([x, a]y) = 0$, para todo $y \in A_1$. Então, $[x, a] = 0$.

8. Vamos mostrar que A é associativa. Por (3.10), (3.11) e o sétimo passo, temos

$$\begin{aligned} 3(x, y, z) &= (x, y, z) + (z, x, y) + (y, z, x) \\ &= [xy, z] + [yz, x] + [zx, y] = 0. \end{aligned}$$

Logo, $(A_1, A_1, A_1) = 0$. Por (3.20) e pelo passo sete, concluímos que $3(x, y, a) = 0$, ou seja, $(A_1, A_1, A_0) = 0$. Pelo quarto passo observamos que $(A_1, A_0, A_0) = 0$. Como A_0 é associativa, então A é associativa,

terminando a demonstração. $\square$

Seja A uma superálgebra sobre F , tal que A_0 é quadrática e L o fecho algébrico do corpo F . Para qualquer $a = a' \otimes l \in (\hat{A}_L)_0$, onde $a' \in A_0$ e $l \in L$, temos

$$a^2 - t(a)a + n(a) = a'^2 \otimes l^2 - (a'^2 \otimes l^2) - a\bar{a} \otimes l^2 + a\bar{a} \otimes l^2 = 0.$$

Logo, $(\hat{A}_L)_0$ é quadrática sobre L .

Lema 4.1.4. *Seja A uma superálgebra alternativa, não associativa, prima sobre um corpo infinito F . Se a parte par é quadrática, então a parte ímpar é nula e a parte par é uma álgebra de Cayley-Dickson.*

Demonstração. Pelo Lema 4.1.1, podemos considerar F algebricamente fechado. Vamos analisar a parte par, que é uma álgebra alternativa, semi-prima e quadrática. Pelos Teoremas 1.2.7 e 1.2.12, temos que F -álgebra A_0 é isomorfa a

1. a álgebra das matrizes $M_2(F)$;
2. a álgebra split de Cayley-Dickson sobre F ;
3. o corpo F ;
4. a soma direta $F \oplus F$.

Pelo Lema 4.1.2, é suficiente examinarmos o primeiro e o segundo caso.

Caso 1: Seja $A_0 = M_2(F)$. Como A_1 é um A_0 -bimódulo alternativo sobre $M_2(F)$, pelo Teorema 3.2.3, temos que A_1 será soma direta de um bimódulo associativo M_a e um bimódulo de Cayley M_c . Provaremos que A é associativa, contradizendo a hipótese do Lema. Iremos separar em três etapas.

1. Verificaremos que $M_c^2 = (0)$. Sejam $m_1, m_2 \in M_c$ e $a \in A_0$. Como A é uma superálgebra alternativa e $m_1, m_2 \in A_1$, temos que $(m_1, m_2, a) = (m_2, m_1, a)$. Logo, temos

$$\begin{aligned}
 0 &= (m_1, m_2, a) - (m_2, m_1, a), \text{ por (3.27)} \\
 &= [m_1 m_2, a] - [m_2 m_1, a] \\
 &= [[m_1, m_2], a],
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$[m_1, m_2] \in F. \quad (4.5)$$

Sejam e_{ij} as matrizes com 1 na posição ij e 0 nas outras e $e_{ij} \mapsto \bar{e}_{ij}$ a involução. Seja $n \in M_c$, tal que $n = n_1 + n_2$, onde $n_1 = ne_{11} = \bar{e}_{11}n = e_{22}n$ e $n_2 = ne_{22} = \bar{e}_{22}n = e_{11}n$. Como $n^2 \in A_0$, obtemos que

$$n^2 = \delta e_{11} + \alpha e_{12} + \beta e_{21} + \gamma e_{22}, \quad (4.6)$$

para adequados $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in F$. Logo,

$$\begin{aligned}
 n_1^2 &= (e_{22}n)(ne_{11}), \text{ por (3.25)} \\
 &= e_{11}(e_{22}n.n), \text{ por (3.26)} \\
 &= e_{11}(n^2 e_{22}), \text{ pela associatividade de } A_0 \\
 &= e_{11}n^2 e_{22}, \text{ por (4.6)} \\
 &= \alpha e_{12}.
 \end{aligned}$$

Analogamente, podemos obter que

$$\begin{aligned} n_2^2 &= (e_{11}n)(ne_{22}) = e_{22}n^2e_{11} = \beta e_{21}, \\ n_1n_2 &= (e_{22}n)(ne_{22}) = e_{22}n^2e_{22} = \gamma e_{22}, \\ n_2n_1 &= (e_{11}n)(ne_{11}) = e_{11}n^2e_{11} = \delta e_{11}. \end{aligned}$$

Como $[n_1, n_2] = \gamma e_{22} - \delta e_{11}$, por (4.5), temos que $\delta = -\gamma$. Ao usarmos a superidentidade alternativa e as relações anteriores, obtemos

$$\begin{aligned} n_1[n_1, n_2] &= n_1(n_1n_2) - n_1(n_2n_1) \\ &= (n_1^2n_2 - (n_1n_2)n_1 + n_1(n_2n_1)) - n_1(n_2n_1) \\ &= n_1^2n_2 - (n_1n_2)n_1. \end{aligned}$$

Logo, $n_1^2n_2 - (n_1n_2)n_1 = n_1[n_1, n_2]$, ou seja, $\alpha e_{12}n_2 = \gamma e_{22}n_1 + n_1\gamma = \gamma(n_1e_{11} + n_1)$. Como $n_1e_{11} = ne_{11}e_{11} = n_1$, então

$$\alpha e_{12}n_2 = 2\gamma n_1. \quad (4.7)$$

Analogamente, obtemos $\beta e_{21}n_1 = 2\gamma n_2$. Ao tomarmos (4.7) e substituímos pelo valor de n_2 , da última identidade, concluímos que

$$\alpha\beta e_{12}(e_{21}n_1) = -4\gamma^2n_1$$

. Além disso, ao usarmos (3.3), temos que

$$e_{12}(e_{21}n_1) = (e_{21}e_{12})n_1 = n_1.$$

Se $n_1 \neq 0$, podemos observar que

$$\alpha\beta = -4\gamma^2. \quad (4.8)$$

Se $n_1 = 0$ então $\alpha = \beta = 0$, sendo a identidade (4.8) verdadeira. Vamos considerar

$$\alpha n_2^2 e_{12} = \alpha(\beta e_{21})e_{12} = \alpha\beta e_{22}.$$

Utilizando a superidentidade alternativa, (3.6), (4.7) e as relações de α e β , temos

$$\begin{aligned} \alpha n_2^2 e_{12} &= \alpha n_2(n_2e_{12}) + \alpha n_2(e_{12}n_2) - \alpha(n_2e_{12})n_2 \\ &= -\alpha(n_2e_{12})n_2 + \alpha n_2(n_2 \circ e_{12}) \\ &= -\alpha(n_2e_{12})n_2 + \alpha(n_2t(e_{12}))n_2 \\ &= -\alpha(n_2e_{12})n_2 + \alpha(n_2e_{12})n_2 + \alpha(n_2\bar{e}_{12})n_2 \\ &= \alpha(n_2e_{12})n_2 = 2\gamma n_1n_2 = 2\gamma^2 e_{22} \\ &= \alpha\beta e_{22}. \end{aligned}$$

Logo, $2\gamma^2 = \alpha\beta$. Por (4.8), teremos que $6\gamma^2 = 0$, ou seja, $\gamma = 0 = \delta$. Dessa maneira, para todo $n \in M_c$, obtemos que $n^2 \in Fe_{12} + Fe_{21}$. Por (4.5), observamos que

$$M_c^2 \subseteq F.1 + Fe_{12} + Fe_{21}.$$

Pela superidentidades (3.25) e (3.26), concluímos que o subespaço M_c^2 é um ideal em F_2 . Sejam $m \in M_c^2$ e $a \in A_0$, tais que, $a = e_{11} + e_{12} + e_{21} + e_{22}$ e $m = \alpha + \beta e_{12} + \gamma e_{21}$, com $\alpha, \beta, \gamma \in F$. Temos que

$$ma = (\alpha + \beta)e_{11} + (\alpha + \beta)e_{12} + (\alpha + \gamma)e_{21} + (\alpha + \gamma)e_{22} \notin M_c^2.$$

Então, $M_c^2 = (0)$.

2. Mostraremos que $M_c M_a = M_a M_c = (0)$. Sejam $m \in M_c, n \in M_a$. Por (3.25), temos

$$\begin{aligned} (ab)(mn) &= m(\bar{a}bn) = m(\bar{b}\bar{a}.n) = m(\bar{b}(\bar{a}n)) \\ &= b(m(an)) = b(a(mn)) = (b(a(mn))) \\ &= (ba)(mn), \end{aligned}$$

para quaisquer $a, b \in A_0$. Logo, $[a, b](mn) = 0$. Como A_0 não é comutativa então $mn = 0$, ou seja, $M_c M_a = (0)$. Da mesma forma, mostramos que $M_a M_c = (0)$.

3. Agora, verificaremos que a superálgebra A é associativa. Seja $m \in M_c$. Para arbitrário $a = b + m' + n \in A$, onde $b \in A_0, m' \in M_c$ e $n \in M_a$, pelos passos 1 e 2, obtemos que

$$ma = mb + mm' + mn = mb \in M_c.$$

Analogamente, provamos que $am \in M_c$. Logo, M_c é um ideal em A , tal que $M_c^2 = (0)$. Como A é prima então $M_c = (0)$. Logo, $A = M_2(F) + M_a$. Como $(M_2(F), M_2(F), A) = (0)$. Passando para envolvente de Grassmann, pelo Lema 2.1.4, temos que $[M_2(F), M_2(F)] \subseteq N(A)$. Ao voltarmos para a superálgebra, pelo Corolário 3.4.3, obtemos que $[M_2(F), M_2(F)] \subseteq N(A)_0 = Z(A)_0$, contradição.

Caso 2: Seja A_0 uma álgebra de Cayley-Dickson. Então, a álgebra de Cayley-Dickson está contida na envolvente de Grassmann. Pelo Teorema 1.2.14, temos que a envolvente de Grassmann é uma álgebra de Cayley-Dickson. Logo, $\Gamma(A) = \Gamma_0 \otimes A_0 + \Gamma_1 \otimes A_1 = A_0 \otimes Z(\Gamma(A))$, onde $Z(\Gamma(A))$

comuta e associa com A_0 . Como o centro da álgebra é associativo e comutativo, temos que $A = A_0 \otimes B$, onde $B = B_0 + B_1$ é uma superálgebra associativa e comutativa. Logo, $A_1 = A_0 \otimes B_1$. Seja $b \in B_1$. Temos que $\langle b, b \rangle = 2b^2 = 0$, então $b^2 = 0$. Para todo $y \in A$, obtemos que $(yb)^2 = 0$ e $(by)^2 = 0$. Seja $x \in A_1$. Escrevemos $x = a \otimes b$. Seja $\text{id}\langle x \rangle = I$. Como o ideal I é homogêneo, sabemos que é a soma direta da parte par da superálgebra A com o bimódulo J gerado por x . Observemos que o bimódulo J é nilpotente de índice nove. Logo, $I^9 = (0)$. Como A é prima então que $x = 0$. Como x é arbitrário concluímos que $A_1 = (0)$. $\square$

Teorema 4.1.5. *Seja $A = A_0 + A_1$ uma superálgebra alternativa prima em característica diferente de dois e três. Então A é uma superálgebra associativa ou $A_1 = (0)$ e $A = A_0$ é uma álgebra de Cayley-Dickson.*

Demonstração. Pelo Lema 4.1.1, basta verificarmos esse Teorema, para uma superálgebra alternativa A , prima, central, com unidade, sobre um corpo infinito. Vamos analisar o caso que A não é associativa. Pelo Lema 4.1.2, é necessário considerar dois casos. O primeiro caso, quando a parte par é associativa e comutativa. Pelo Lema 4.1.3, temos que A será associativa. O segundo caso, quando a parte par é quadrática. Pelo Lema 4.1.4, temos que $A_1 = (0)$ e $A = A_0$ é uma álgebra de Cayley-Dickson. $\square$

Obtendo assim o teorema principal.

Teorema 4.1.6. *Seja $A = A_0 + A_1$ uma superálgebra alternativa simples em característica diferente de dois e três. Então A é uma superálgebra associativa ou $A_1 = (0)$ e $A = A_0$ é uma álgebra de Cayley-Dickson.*

Demonstração. Como toda superálgebra simples é prima, esse teorema é um corolário do teorema anterior. $\square$

4.2 Exemplos em característica 2 e 3

Nesta seção apresentaremos exemplos de superálgebras alternativas simples não associativa em característica 2 e 3. Para característica igual a 3, temos os seguintes exemplos.

1. A superálgebra $B(1, 2)$. Seja F um corpo em característica 3. A superálgebra $B(1, 2) = F.1 + F.x + F.y$, tal que $xy = -yx = 1$ é alternativa e simples. Essa superálgebra tem a parte par sendo $F.1$ e a parte ímpar sendo $Fx + Fy$. Essa superálgebra é supercomutativa e com unidade.

2. A *superálgebra* $B(4, 2)$. Seja F um corpo em característica 3 e M_2 a álgebra das matrizes 2×2 sobre F . A superálgebra $B(4, 2) = B(4, 2)_0 + B(4, 2)_1$, onde $B(4, 2)_0 = M_2(F)$ e $B(4, 2)_1 = F.m_1 + F.m_2$ é alternativa e simples. A álgebra $B(4, 2)_0$ age em $B(4, 2)_1$, por

$$\begin{aligned} e_{ij}m_k &= \delta_{ik}m_j, i, j, k \in \{1, 2\}, \\ m.a &= \bar{a}m, \end{aligned}$$

onde $a \in B(4, 2)_0, m \in B(4, 2)_1$ e $a \mapsto \bar{a}$ é a involução em $B(4, 2)_0$. Temos que $B(4, 2)_1$ é um bimódulo de Cayley. A operação de multiplicação de $B(4, 2)_1$ é definida por

$$\begin{aligned} m_1^2 &= -e_{21}m, \\ m_2^2 &= e_{12}m, \\ m_1m_2 &= e_{11}, \\ m_2m_1 &= -e_{22}. \end{aligned}$$

3. A *superálgebra twisted do tipo vetorial* $B(\Phi, D, \gamma)$. Seja F um corpo em característica 3. Seja Φ uma superálgebra associativa e comutativa sobre F , D uma derivação par de Φ , $\gamma \in \Phi_0$ e seja $\bar{\Phi}$ a cópia isomorfa do espaço vetorial Φ , com isomorfismo $a \mapsto \bar{a}$. Considere o espaço vetorial $B(\Phi, D, \gamma) = \Phi + \bar{\Phi}$ e defina a operação de multiplicação, por

$$\begin{aligned} a.b &= ab, \\ a.\bar{b} &= \overline{ab}, \\ \bar{a}.b &= (-1)^{p(b)}\overline{ab}, \\ \bar{a}.\bar{b} &= (-1)^{p(b)}(\gamma ab + 2D(a)b + aD(b)), \end{aligned}$$

onde $a, b \in \Phi_0 \cup \Phi_1$ e ab é o produto em Φ . Definimos a Z_2 -gradação em $B(\Phi, D, \gamma)$, sendo a parte par $\Phi_0 + \bar{\Phi}_1$ e a parte ímpar $\Phi_1 + \bar{\Phi}_0$. A superálgebra $B(\Phi, D, \gamma)$ é alternativa. Será não associativa se $D(\Phi)\Phi^2 \neq 0$. Além disso, será simples se a derivação é D-simples.

Seja A uma álgebra alternativa Z_2 -graduada, em característica 2. Sejam $a, b \in A_1$ e $c \in A_1 \cup A_0$. Temos

$$(a, b, c) + (-1)^{p(a)p(b)}(b, a, c) = (a, b, c) - (b, a, c) = 2(a, b, c) = 0.$$

Logo, os elementos da parte ímpar verificam esta superidentidade alternativa. Claramente os elementos na parte par satisfazem essa mesma su-

peridentidade alternativa. De modo análogo, verificamos a outra superidentidade alternativa. Assim, concluímos que uma álgebra alternativa Z_2 -graduada em característica 2 é uma superálgebra alternativa. Vejamos agora dois exemplos de superálgebras alternativas simples em característica 2.

1. A *superálgebra Cayley-Dickson* $O(4, 4)$. Seja F um corpo em característica 2. A superálgebra $O = O(4, 4) = H + vH$, é a álgebra Z_2 -graduada, construída pelo processo de Cayley-Dickson em uma álgebra de quatérnios generalizada H . Ela é uma superálgebra alternativa simples.
2. A *superálgebra double Cayley-Dickson* $O[u]$. Seja F um corpo em característica 2 e $u \in F$ tal que $u^2 = \alpha \neq 0$. Seja $F[u] = F + Fu$. Temos que $F[u]$ é uma superálgebra simples de dimensão dois, com a parte par sendo F e a parte ímpar sendo Fu . Definimos $O(4, 4) = F[u] \otimes A$. Nessa superálgebra a parte par é O e a parte ímpar é Ou .

Em [11], o autor prova que as álgebras apresentadas anteriormente são todas as superálgebras alternativas simples em característica 2 ou 3, a menos de isomorfismos.

Referências Bibliográficas

- [1] E.G. Goodaire, E.Jespers, C. P. Milies, *Alternative loop rings*, Elsevier Science B.V., Amsterdam (1996).
- [2] S. Lang, *Álgebra*, Addison-Wesley Publishing Company, New York (1965).
- [3] N. Jacobson, Structure of alternative and bimodules, *Osaka Math.* **6** (1954), 1-71.
- [4] A. Levy, *Basic Set Theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York (1979).
- [5] A.L. Maltsev, *Fundamentos de álgebra linear*, Mir Moscou, (1972).
- [6] F. C. P. Milies, *Anéis e módulos*, Instituto de Matemática e Estatística, São Paulo, (1972).
- [7] S.V. Pchelintsev, Nilpotent elements and nil-radicals of alternative algebras, *Algebra and Logic* **24** (1985), 674-695.
- [8] R.D. Schafer, *An introduction to nonassociative algebras*, Academic Press, New York (1966).
- [9] I.P. Shestakov, Alternative algebras whit the identity $[x, y]^n = 0$, *Algebra and Logic* **20** (1981), 575-596.
- [10] I.P. Shestakov, Superalgebras and counterexamples, *Siberian Math. J.* **32** (1991), no. 6, 1052-1060.
- [11] I.P. Shestakov, Prime alternative superalgebras of arbitrary characteristic, *Algebra and Logic* **36** (6) (1997), 389-420.
- [12] I.P. Shestakov, Alternative and Jordan Superalgebras, *Siberian Advances in Mathematics* **9** (1999), 83-99.

- [13] E.I. Zelmanov, I.P. Shestakov, Prime alternative superalgebras and nilpotency of the radical of the free alternative algebra, *Math. USSR-Izv.* **37** (1991), no. 1, 19-36.
- [14] K.A. Zhevlakov, A.M. Slin'ko, I.P. Shestakov, A.I. Shirshov, *Rings that are nearly associative*, Academic Press, New York (1982).