Sistemas de Numeração: um problema didático.

Angela Cristina Bonini dos Santos

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do grau
de
Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática Pura
Orientador: Prof. Dr. Oscar João Abdounur

São Paulo – janeiro - 2006

Sistemas de Numeração: um problema didático.

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente
corrigida e defendida por
Angela Cristina Bonini dos Santos
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, janeiro de 2006.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Oscar João Abdounur (Orientador) – IME-USP

Prof. Dr. Antonio Carlos Brolezzi – IME-USP

Prof^ª. Dr^ª. Maria do Carmo Santos Domite – FE-USP.

Angela Cristina Bonini dos Santos

Sistemas de Numeração: um problema didático.

Tese apresentada como exigência parcial
para obtenção de título de mestre em
Matemática pelo Instituto de Matemática e
Estatística da Universidade de São Paulo,
dentro da área de Matemática Pura,
sob a orientação do Professor Dr.
Oscar João Abdounur.

São Paulo
Janeiro de 2006

“Não tenho um caminho novo. O que
tenho de novo é um jeito de caminhar”.

Thiago de Melo

Dedicatória

Dedico este trabalho a Deus,
por fazer-me forte nas minhas
fraquezas.

Aos meus pais Ilza e Angelo e
ao meu esposo Douglas.

Agradecimentos

Ao Oscar João, professor e orientador, pela sua compreensão, amizade, dedicação e incentivo.

Aos Profs. Drs. Maria do Carmo Santos Domite e Vinício de Macedo Santos pelos comentários conexos oferecidos no exame de qualificação.

Aos meus pais Angelo e Ilza, por estarem sempre presentes e me incentivando.

Ao Douglas, pelo companheirismo, apoio e compreensão.

Aos meus tios José e Nadir, ao Júlio, Nara e Felipe, pelas horas de viagem e espera.

À direção, coordenação e professores da E. E. Calvino Barbosa Ferraz por terem me apoiado e concedido espaço para fazer este trabalho de campo.

Enfim, a todos aqueles que contribuíram de forma direta ou indireta para a realização deste projeto.

Resumo

Essa tese aborda o problema pedagógico referente ao ensino/aprendizagem de sistemas de numeração, dada a importância desse assunto e a dificuldade com que vem sendo tratado no ensino fundamental. Considerando a amplitude do tema, procurou-se estabelecer uma perspectiva para o problema, que abarcasse as razões históricas favorecedoras da consolidação do sistema de numeração hindu-árabe, a inevitabilidade de tal processo, bem como uma análise comparativa das vantagens e desvantagens dos diversos sistemas de numeração, abordagem essa construída à serviço das atividades didáticas realizadas, cujos resultados são apresentados ao final da dissertação.

Com o intuito de dar subsídios teóricos à leitura de sistemas de numeração mencionada anteriormente, fez-se uso de pressupostos teóricos de Gaston Bachelard no que se refere principalmente ao conceito de obstáculo epistemológico, bem como de abordagens sobre tal conceito estabelecidas por autores posteriores, fazendo com que a pesquisa utilizasse história e epistemologia da matemática para fins pedagógicos.

Ao final, são apresentados exemplos de oficinas temáticas abordadas sob uma perspectiva histórica-epistemológica que, por meio da análise estrutural de diversos sistemas de numeração sob uma ótica bachelardiana, procuraram não somente dar consciência do processo histórico que levou à prevalência do atual sistema de numeração hindu-árabe, mas ainda discutir e problematizar as trajetórias desse processo em diferentes culturas, com o intuito de propiciar a formação de um significado mais amplo para sistemas de numeração. Fazendo uso ainda das concepções epistemológicas de Bachelard, procurou-se em seguida analisar os resultados obtidos nas oficinas mencionadas.

Abstract

That thesis approaches the pedagogic problem regarding the teaching/learning of numerical systems due to the importance of such a subject and the difficulty of dealing with it in the fundamental teaching. Taking into account the extension of the theme, a perspective for the problem was established, which comprised the historical reasons for the consolidation of Hindu-Arabic numerical system, the unavoidability of such a process, as well as the comparative analysis of the advantages and disadvantages of several numerical systems. This approach was built for the sake of the accomplishment of didactical activities, whose results are presented at the end of this work.

In order to give theoretical subsidies to the comprehension of numerical systems, theoretical assumptions of Gaston Bachelard concerning mainly the concept of epistemological obstacle were considered. Some subsequent authors' approaches to this theme were also taken into account so that the research could make use of history and epistemology of mathematics for pedagogical aims.

Eventually, some examples of thematic workshops were carried out according to historical-epistemology approaches that made use of structural analysis of several numerical systems under Bachelardian perspectives. Such examples not only aim to make the students acquainted with the historical process that led to the prevalence of the current Hindu-Arabic numerical system, but also to discuss the developments of this process in different cultures in order to provide the construction of a wider meaning for numerical systems. Still using Bachelard's epistemological conceptions, the results of the workshops were analysed.

Sumário:

• Introdução.....	01
• Capítulo 1: Os números na história da civilização.	
1.1 – Introdução.....	03
1.2 – Contagem Primitiva.....	03
1.3 – Bases.....	04
1.4 – Sistemas de numeração antigos.....	04
1.5 – Números digitais e números escritos.....	05
1.6 – Sistemas de agrupamentos.....	05
1.7 – Sistema de numeração babilônico.....	06
1.8 – Sistema de numeração egípcio.....	15
1.9 – Sistema de numeração romano.....	21
1.10 – Sistema de numeração grego.....	27
1.11 – Sistema de numeração chinês-japonês.....	29
1.12 – Sistema de numeração maia.....	30
1.13 – Sistema de numeração hindo-arábico.....	33
1.14 – Semelhanças e diferenças dos diversos sistemas de numeração.....	35
Considerações finais.....	37
• Capítulo 2: Fundamentação Teórica.	
2.1 – Algumas reflexões sobre epistemologia e matemática.....	38
2.2 – Obstáculo Epistemológico segundo Gaston Bachelard.....	42
Considerações finais.....	45

- Capítulo 3: Explorando sistemas de numeração no Ensino de Matemática: oficinas temáticas.

3.1 – Oficina 1: Introdução.....	47
3.2 – Oficina 2: Numeração Egípcia.....	50
3.3 – Oficina 3: Numeração Mesopotâmica.....	53
3.4 – Oficina 4: Numeração Chinesa.....	58
3.5 – Oficina 5: Numeração Grega.....	59
3.6 – Oficina 6: Numeração Romana.....	60
3.7 – Oficina 7: Numeração Maia.....	62
3.8 – Oficina 8: Comparando Sistemas de Numeração.....	64
Considerações finais.....	67

- Capítulo 4: Análise das oficinas sobre sistemas de numeração sob uma perspectiva bachelardiana.

4.1 – Introdução.....	68
4.2 – Síntese dos principais resultados.....	69
4.3 – Análise das respostas às questões de pesquisa.....	72
4.4 – Implicações educacionais decorrentes das conclusões.....	73
4.5 – Conclusão.....	74
4.6 – Sugestões para futuros estudos.....	74

Introdução

O presente trabalho aborda um problema pedagógico referente ao ensino dos sistemas de numeração, uma vez que o acesso dos alunos do ensino fundamental a este tema vem se mostrando cada vez mais difícil.

Os números estão presentes o tempo todo à nossa volta, embora nem sempre os percebemos. Esse assunto desperta uma grande curiosidade nos alunos, curiosidade essa manifesta em questões tais como: “De onde vêm os algarismos?”, “Como os antigos escreviam os números?”, “Quem inventou o zero?”, “Como calculavam os romanos?”, etc. Questões dessa natureza motivaram em um primeiro momento o desenvolvimento dessa tese, que pretende, dentre seus objetivos, sanar tais curiosidades.

A partir disto, será proposto um estudo dos diferentes sistemas de numeração, para que o aluno construindo o seu conhecimento, adquira subsídios para refletir sobre questões tais como: Quais as vantagens e desvantagens dos diversos sistemas de numeração? Por que convergiu-se para o atual sistema hindo-arábico? O quão inevitável foi tal processo?

Este trabalho também pretende oferecer subsídios para que os professores compreendam melhor as dificuldades de seus alunos com relação ao ensino de bases, mais especificamente, ao uso da base 60, quando estudam contagem do tempo em horas, minutos e segundos ou ao estudo do círculo dividido em 360 graus, com graus divididos em 60 minutos e os minutos divididos em 60 segundos. Para isto, faz-se uma reconstrução histórica dos sistemas de numeração, que levará tais alunos à construção de seus próprios conhecimentos, revelando a necessidade da aprendizagem desse conteúdo.

Tendo em vista as dificuldades mencionadas, escolheu-se o conceito de obstáculo epistemológico concebido inicialmente por Gaston Bachelard como centro para a fundamentação teórica dessa tese.

O Capítulo I mostra o desenvolvimento de alguns sistemas de numeração, com o objetivo de obter subsídios históricos necessários à compreensão e análise da prevalência do atual sistema de numeração hindo-arábico, sugerindo dificuldades superadas no decorrer desse processo, que podem ser, em certa medida, categorizadas como obstáculos epistemológicos.

O Capítulo II irá apresentar uma síntese do conceito de Obstáculo Epistemológico de Gaston Bachelard, com o intuito de propiciar a leitura e análise de resultados das oficinas sobre sistemas de numeração aplicadas em uma 5ª série do ensino fundamental da Escola Estadual Calvino Barbosa Ferraz em Óleo, leitura e análise essas que serão expostas nos capítulos finais desse trabalho.

O Capítulo III expõe sugestões de oficinas sobre sistemas de numeração.

O Capítulo IV apresenta uma análise, à luz do conceito de obstáculo epistemológico, dos resultados da realização de tais oficinas.

Capítulo 1: Os números na história da civilização

1.1 - Introdução

Neste capítulo, trata-se do desenvolvimento de sistemas de numeração e algumas de suas estruturas, com o intuito de obter subsídios históricos necessários à compreensão e análise (por parte dos alunos da 5ª série mencionada) do processo que levou à prevalência do atual sistema de numeração Hindu-arábico, lançando luzes sobre possíveis obstáculos epistemológicos superados no decorrer desse processo. Para isso, serão abordados os sistemas de numeração babilônico, egípcio, romano, grego, chinês-japonês, maia e o hindu-arábico. Cabe ressaltar aqui que não se trata de analisar o desenvolvimento cognitivo do aluno em sala de aula como repetição do desenvolvimento histórico.

1.2 - Contagem Primitiva

O conceito de número e o processo de contar desenvolveram-se tão antes dos primeiros registros históricos que a maneira como ocorreram é largamente conjectural.

Não é difícil, porém, imaginar como isso provavelmente se deu. É razoável admitir que a espécie humana, mesmo nas épocas mais primitivas, tinha algum senso numérico, pelo menos a ponto de reconhecer a unidade, o par e a multidão. Com a evolução gradual da sociedade, tornaram-se inevitáveis contagens simples. Uma tribo tinha que saber quantos eram seus membros e quantos eram seus inimigos e tornava-se necessário a um homem saber se seu rebanho de carneiros estava diminuindo. É provável que a maneira mais antiga de contar se baseasse em algum método de registro simples, empregando o princípio da correspondência biunívoca. Para uma contagem de carneiros, por exemplo, podia-se dobrar um dedo para cada animal. Podia-se também contar fazendo-se ranhuras no barro ou numa pedra, produzindo-se entalhes num pedaço de madeira ou fazendo-se nós numa corda.

Então, talvez mais tarde, tenha se desenvolvido um arranjo de sons vocais para registrar verbalmente o número de objetos de um grupo pequeno. E mais tarde ainda, com o aprimoramento da escrita, foram surgindo arranjos de símbolos para representar esses números.

1.3 - Bases

Quando se tornou necessário efetuar contagens mais extensas, o processo de contar teve de ser sistematizado.

Em culturas onde os dedos de uma mão foram usados em fases mais antigas da numeração, o número de elementos de um grupo básico tornou-se cinco. Quando foram usados os dedos das duas mãos, esse número tornou-se dez. Quando os dedos das mãos e dos pés foram usados, tornou-se vinte.

Como os dedos do homem constituíam um dispositivo de correspondência conveniente, não é de se estranhar que o 10 acabasse sendo escolhido freqüentemente como uma base.

1.4 - Sistemas de numeração antigos

A necessidade de um sistema de numeração surgiu possivelmente da seguinte questão: O que deve ser feito quando a seqüência ordenada finita dos marcadores se esgotou, mas ainda restam objetos a ser contados?

Três métodos diferentes foram desenvolvidos para resolver este problema, embora apenas um deles sobreviveu.

1º) Estender a seqüência ordenada de marcadores.

2º) Extensão por repetição.

3º) Extensão que resultou nos sistemas de numeração atuais, ou seja, os posicionais.

1.5 - Números digitais e números escritos

Além dos números falados, numa certa época usaram-se largamente os números digitais (representados por meio dos dedos). Com efeito, a expressão de números por meio de várias posições dos dedos e das mãos talvez preceda os símbolos numéricos ou os nomes dos números.

Com o tempo, os números digitais foram estendidos de modo a abranger os números maiores que ocorriam nas transações comerciais. Perto da Idade Média eles tinham se tornado internacionais.

Os números digitais tinham a desvantagem de transcender diferenças de linguagem, mas, como os números vocais, deixavam a desejar quanto à permanência e não eram convenientes para a realização de cálculos.

1.6 - Sistemas de agrupamentos

Tem-se dois tipos de sistemas de agrupamentos:

- **Simples:**

Talvez o mais antigo tipo de sistema de numeração a se desenvolver. Neste agrupamento cada símbolo representa uma quantidade específica. Como exemplos temos os sistemas de numeração egípcio, babilônico, grego e romano.

- **Multiplicativos:**

Neste agrupamento os números consistem em dois numerais. Um representa um número e o outro representa uma potência. Como exemplo tem-se o sistema de numeração chinês-japonês.

1.7 - Sistema de numeração babilônico

Os babilônios antigos, carecendo de papiros e tendo pouco acesso a pedras convenientes, recorreram principalmente à argila como material de escrita. As inscrições eram impressas em tabulas de argilas úmidas, depois essas tabulas eram cozidas num forno até endurecer, obtendo-se assim registros permanentes.

Desenvolveram um sistema de numeração sexagesimal ou de base sessenta que empregava o princípio posicional. Na verdade, esse sistema era uma mistura de base dez e base sessenta, em que os números menores que 60 eram representados pelo uso de um sistema de base dez simples, por agrupamentos, e o número 60 e os maiores eram designados pelo princípio da posição na base sessenta.

São eles que nos legaram a divisão do tempo em horas, minutos e segundos, bem como o círculo dividido em 360 graus, com graus divididos em 60 minutos e os minutos divididos em 60 segundos.

Eles criaram os símbolos cuneiformes.

Figura 1

O primeiro símbolo da figura 1 representa a unidade e era repetido para números até 9. O segundo símbolo da figura 1 representava o 10 e era repetido e usado com o símbolo da unidade, conforme o necessário, para representar números de 11 a 59. Os números de 60 em diante eram representados em termos dos símbolos para os números de 1 a 59, usando o princípio da posição para indicar múltiplos de potências de 60.

No período Babilônico Antigo, eles também inventaram um símbolo para a subtração (figura 2) a fim de simplificar a escrita.

Figura 2

Exemplo:

O número 38 era escrito como

Ou $38 = 40 - 2$

Apesar desse sistema de numeração ter um caráter sexagesimal e estritamente posicional, ele foi decimal e de tipo aditivo no interior de cada ordem de unidades. Inconveniente que engendrou, naturalmente, várias ambigüidades e que esteve na origem de erros bastante numerosos.

Nos textos dos antigos babilônios (1800 a 1600 a.C.) nenhum símbolo era usado para o zero, mas conscientes dessa dificuldade, às vezes um espaço em branco era deixado, para qualquer potência de 60 ausente. Mas o problema nem por isso foi resolvido. Este espaço era freqüentemente omitido pelos escribas distraídos ou pouco conscienciosos. Por outro lado, era difícil, nessas condições, simbolizar a ausência de duas ou mais ordens de unidades consecutivas.

Isso constituía a maior desvantagem do sistema babilônico pois, a não ser a partir do contexto, não havia como determinar, por exemplo, se a combinação

significava 11, $11 \cdot 60$ ou $11 \cdot 60^2$.

Outro exemplo são as formas escritas dos números 122 e 7022, pois são muito parecidas. Observe que:

podia significar $2 \cdot 60 + 2$ ou $2 \cdot 60^2 + 2$.

Ainda assim esse sistema de numeração apresentava-se mais completo que os outros sistemas antigos, uma vez que foi o primeiro a empregar o conceito de valor relativo.

Posteriormente, um símbolo especial (figura 3), consistindo de duas pequenas cunhas colocadas obliquamente, foi inventado para servir para marcar o lugar onde um numeral faltasse.

Então:

$$2 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60 + 2$$

era imediatamente distinguível de

$$2 \cdot 60 + 2$$

O símbolo babilônico para o zero aparentemente não terminou de todo com a ambigüidade, pois parece ter sido usado só para posições intermediárias. Não há tabletas, em existência, onde apareça em posição terminal.

Portanto o símbolo

podia representar $2 \cdot 60 + 2$ ou $2 \cdot 60^2 + 2 \cdot 60$ ou $2 \cdot 60^3 + 2 \cdot 60^2$ ou qualquer um de infinitos outros números em que apareçam só duas posições sucessivas com dois.

Uma outra dificuldade que tiveram foi com a notação das frações. Enquanto seus predecessores tinham atribuído um algarismo particular a cada fração em questão, os babilônios, partindo do princípio de posição, estenderam a representação às frações cujo denominador é uma potência de 60. Em outros termos, a notação sexagesimal posicional foi estendida ao que chamáramos hoje as potências negativas de 60. Portanto a notação

era usada não só para $2 \cdot (60) + 2$, mas também para $2 + 2 \cdot (60)^{-1}$ ou para $2 \cdot (60)^{-1} + 2 \cdot (60)^{-2}$.

Assim, a numeração era desenvolvida à esquerda em potências positivas de 60 e à direita em potências negativas da base 60, exatamente da mesma maneira como o desenvolvimento dos números em potências positivas ou negativas de dez do atual sistema posicional decimal. A única diferença é que não houve no sistema babilônico nenhum sinal comparável a nossa vírgula para permitir a separação da parte inteira da parte fracionária.

Por exemplo, a seguinte notação poderia ter três interpretações:

Interpretação nº 1: $25 \cdot 60 + 38$

Interpretação nº 2: $25 + \frac{38}{60}$

Interpretação nº 3: $\frac{25}{60} + \frac{38}{3600}$

Durante mais de um milênio todas essas ambigüidades não impediram os matemáticos e os astrônomos da Babilônia de efetuarem com a ajuda de seu sistema imperfeito muitos cálculos sofisticados. É verdade que eles tiveram sempre em mente a ordem de grandeza em questão: todas as confusões engendradas por seu sistema eram resolvidas ou pelo contexto ou pelo comentário do mestre.

Partindo do fato de que os documentos matemáticos publicados até nossos dias não nos revelam o emprego do zero a não ser em posições intermediárias, alguns historiadores das ciências consideram que os mesopotâmios só empregaram o zero no interior de representações numéricas e que é necessário cautela antes de concluir pela identidade funcional de seu zero com o nosso. Na realidade, sabemos há tempo, graças ao trabalho de O. Neugebauer que os astrônomos utilizaram o zero não somente em posição intermediária mas também em posição terminal ou inicial.

A cunha colocada no lugar onde faltasse um número, jamais foi concebida no sentido de “número zero”, mas teve claro significado do “vazio”. Temos essa prova num texto matemático de Susa (Ifrah, 1997, tomo 1, pg. 313), o escriba não sabendo exprimir o resultado da subtração de 20 por 20, concluiu: “*20 menos 20 ... tu vês.*” Ou ainda, em outro, onde se espera encontrar o número zero como resultado de uma operação de distribuição de grão, o escriba diz, simplesmente: “*O grão está esgotado*”.

Os babilônios recorriam freqüentemente às tabelas disponíveis em toda parte. Uma boa parte das tabletas cuneiformes encontradas são “textos tabelas”, inclusive de multiplicação, de recíprocos, de quadrados e cubos e raízes quadradas e cúbicas, escritas, é claro, em sexagesimais cuneiformes. Uma dessa, por exemplo, contém o equivalente do que aparece na tabela a seguir.

2	30
3	20
4	15
5	12
6	10
8	7,30
9	6,40
10	6
12	5

O produto de elementos de uma mesma linha é sempre 60, a base da numeração babilônica, e a tabela aparentemente era considerada uma tabela de recíprocos. A sexta linha, por exemplo, diz que o recíproco de 8 é $\frac{7}{60} + \frac{30}{60}$. Deve-se notar que faltam os recíprocos de 7 e 11 na tabela, porque os recíprocos desses números “irregulares” são sexagesimais infinitos, como em nosso sistema decimal os de 3, 6, 7 e 9. Novamente os babilônios se defrontavam com o problema da infinidade, mas não o tratavam sistematicamente.

Pode-se considerar que o sistema de numeração babilônico tinha duas falhas: eles não introduziram um sinal para o zero e nem um sinal para indicar o valor absoluto. Informações a respeito do valor absoluto e dos espaços vazios tinham de ser deduzidas do contexto.

A contribuição que os babilônios deixaram como herança para o desenvolvimento do conceito de número foi uma poderosa técnica de cálculo num sistema abstrato de valor posicional de notação numérica, que depois foi aprimorada com um símbolo para o zero.

Operações:

As operações aritméticas fundamentais eram tratadas pelos babilônios de modo não muito diferente do usado hoje, e com facilidade comparável.

A figura abaixo nós dá um exemplo característico de uma tábua de multiplicação. Na figura original constava na esquerda os números de 1 a 60 e na da direita, os resultados correspondentes por 25. Trata-se, portanto de uma tábua de multiplicação por 25. Nesta figura estão reproduzidos somente os números que iremos utilizar na multiplicação de 692 ($11 \cdot 60 + 32$) por 25.

1	25
2	50
3	1. 60 + 15
E assim, por diante.
11	4 . 60 + 35
30	12 . 60 + 30

Começavam, portanto, traçando no plano de argila mole as três primeiras colunas, que indicavam a ordem de grandeza do resultado. Partindo da direita para a esquerda a primeira corresponde às unidades sexagesimais da primeira ordem (números de 1 a 59), a segunda às da segunda ordem e a terceira às da terceira ordem.

À direita da figura representavam o multiplicando mediante algarismos cuneiformes.

11	32
---	---	--

Procuravam na tábua de multiplicação por 25 o correspondente de 2: encontravam 50, que reproduziam na coluna das unidades:

		50	11	32

Apagavam o 2 da representação algorítmica à direita das colunas e procuravam na tábua de multiplicação por 25 o correspondente de 30, que encontravam $12 \cdot 60 + 30$, que reproduziam colocando o 30 na coluna das unidades e o 12 na das sessentenas.

	12	50	11	30
		30		

Apagavam o 30 da representação algorítmica à direita das colunas e procuravam na tabuleta de multiplicação por 25 o correspondente de 11, encontravam $4 \cdot 60 + 35$, que reproduziam colocando o 35 na coluna das sessentenas (já que mudaram de ordem de unidades nesse meio tempo) e depois o 4 na das 60^2 .

4	12	50	11
	35	30	

Apagavam o 11 representado à direita das colunas e nada mais tinham que fazer senão reduzir as representações nas colunas para obter o resultado.

Na coluna das unidades temos 8 vigas ($5 + 3 = 8$), que ultrapassa os seis de uma sessentena, apagamos o 6 e substituímos por um prego disposto na coluna das 60 deixando 2 vigas na coluna das unidades:

Na coluna das sessentenhas temos 4 vigas e 8 pregos (7 pregos aos quais acrescentamos mais 1), cujo valor são 48 unidades de 2ª ordem que não ultrapassa 60. Apagamos, portanto as antigas representações e escrevemos 48. E como temos apenas um 4 na coluna das unidades da 3ª ordem, nada mais temos de fazer senão ler esse número par enunciarmos o resultado da multiplicação em questão:

$$692 \times 25 =$$

$$(11 \cdot 60 + 32) \times 25 = 4 \cdot 60^2 + 48 \cdot 60 + 20 = 17300$$

A divisão não era efetuada pelo incômodo processo de duplicação dos egípcios, mas por uma fácil multiplicação do dividendo pelo inverso do divisor, usando os itens apropriados nas tabelas. Assim como hoje o quociente de 34 por 5 é achado facilmente multiplicando 34 por 2 e colocando vírgula, na antiguidade o mesmo processo era realizado achando o produto de 34 por 12 e colocando uma casa sexagesimal, dando $6 \frac{48}{60}$.

1.8 - Sistema de numeração egípcio

O sistema primitivo egípcio usava a base dez, mas não tinha nenhum símbolo para o zero. Os números de 1 a 9 eram representados por um número respectivo de traços verticais. Símbolos individuais eram usados para as potências sucessivas de 10 até 1000000, e às vezes até além. Esses símbolos eram combinados e repetidos como fosse necessário para expressar qualquer número. A representação dos diferentes símbolos foi interpretada de várias maneiras:

Um bastão vertical	-	$10^0 = 1$
Uma ferradura	-	$10^1 = 10$
Um rolo de pergaminho	-	$10^2 = 100$
Uma flor de Lótus	-	$10^3 = 1\ 000$
Um dedo encurvado	-	$10^4 = 10\ 000$
Um barboto (peixe)	-	$10^5 = 100\ 000$
Um homem espantado	-	$10^6 = 1\ 000\ 000$

Assim, qualquer número expressava-se pelo uso desses símbolos aditivamente, repetindo-se cada um deles o número necessário de vezes.

Exemplo:

$$12.314 = 1.(10^4) + 2.(10^3) + 3.(10^2) + 1.(10) + 4$$

Como era usado o princípio aditivo simples, os símbolos podiam aparecer em qualquer ordem. Normalmente eles usavam escrever os números da direita para a esquerda. Eles colocavam as quantidades maiores na direita e as menores na esquerda. Mas, isto, às vezes variava, então a regra básica para a leitura egípcia era procurar os seres vivos e verificar para onde eles estavam olhando e então, ler ao contrário, isto é, ir ao encontro dos olhos.

Na matemática egípcia, o uso de frações restringia-se quase totalmente às chamadas frações unitárias, aquelas cujo numerador é 1. Em hieróglifos, essas frações eram representadas colocando-se o símbolo sobre o símbolo do denominador.

Exemplo: $\frac{1}{23}$

Símbolos especiais eram usados para $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$. Na forma hierática, geralmente usava-se um ponto sobre o denominador para indicar a fração unitária, embora também certas frações simples, tais como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$, tivessem cada uma seu próprio símbolo.

Operações:

Ao efetuarem uma adição, justapunham ou superpunham as representações cifradas dos números a adicionar, depois agrupavam (mentalmente) os algarismos idênticos substituindo de cada vez dez sinais de uma categoria pelo algarismo da classe decimal imediatamente superior.

Para adicionar os números 2347 e 3526, por exemplo, superpunham inicialmente, como abaixo, as representações cifradas correspondentes. Agrupava-se, em seguida, mentalmente os bastões, as ferraduras, os rolos de pergaminho e as flores de lótus. Depois, substituíam cada vez dez bastões por uma ferradura, dez ferraduras por um rolo de pergaminho, dez rolos de pergaminho por uma flor de lótus e assim por diante.

$$2347 + 3526 = 5873$$

Os egípcios sabiam também obter imediatamente o resultado da multiplicação ou da divisão de um número por dez: bastava-lhes substituir, na escrita do número em questão, cada símbolo pelo algarismo de seu décuplo no primeiro caso, e pelo seu décimo no outro caso.

Por exemplo, o número 1464 multiplicado por dez.

Ele é substituído automaticamente pelo seguinte:

Para a multiplicação ou a divisão de outros números, procediam de maneira inteiramente diferente: não sabiam multiplicar ou dividir senão por 2, então faziam geralmente, para tanto, duplicações sucessivas (ou séries de multiplicações por 2).

Para multiplicar 128 por 12, eles procediam da seguinte maneira:

1	-----	12
2	-----	24
4	-----	48
8	-----	96
16	-----	192
32	-----	384
64	-----	768
128	-----	1536

Com esses algarismos hieroglíficos, inscreviam, o multiplicador 12 na coluna da direita e, face a ele na coluna da esquerda, o número 1. Dobravam em seguida sucessivamente cada um dos dois números até o momento em que o multiplicando 128 aparecesse na coluna da esquerda. O número 1536, que corresponde assim a 128 na coluna da direita, constitui então o resultado dessa operação.

Para multiplicar, por exemplo, 84 por 15, dispunham a operação como antes:

1	-----	15
2	-----	30
4	-----	60
8	-----	120
16	-----	240
32	-----	480
64	-----	960

Inscriviam na coluna da direita o multiplicador 15 e, face a ele na coluna da esquerda o número 1. Dobravam em seguida sucessivamente cada um dos números. Mas, como o multiplicando não aparece desta vez na coluna da esquerda, prosseguiam a duplicação até o momento em que obteriam o maior número contido nesse multiplicando. Paravam, portanto, em 64 na coluna da esquerda e procuravam nesta os números cuja soma é igual a 84. Depois, marcavam com um pequeno traço os números assim retidos (aqui, os números 64, 16 e 4) e com uma pequena barra oblíqua os correspondentes da coluna da direita (isto é, 960, 240 e 60):

	1	-----	15
	2	-----	30
—	4	-----	60
	8	-----	120
—	16	-----	240
	32	-----	480
—	64	-----	960

Adicionando os números assim marcados com o traço oblíquo, obteriam então o resultado: $84 \times 15 = 960 + 240 + 60 = 1260$.

A divisão é feita igualmente seguindo multiplicações consecutivas, mas o procedimento era efetuado no sentido inverso.

Para efetuarem a divisão de 1476 por 12, colocavam a operação como se eles tivessem de fazer uma multiplicação por 12, escrevendo o número 1 na coluna da esquerda e 12, o divisor, na coluna da direita. Depois dobravam sucessivamente cada um desses números:

1	-----	12	___
2	-----	24	___
4	-----	48	
8	-----	96	___
16	-----	192	___
32	-----	384	___
64	-----	768	___

Nesse caso, eles paravam em 768 na coluna da direita, pois a multiplicação seguinte fornecerá um número superior ao dividendo 1476. Chegado a esse estágio eles procuravam, operando várias tentativas, na coluna da direita (e não mais na da esquerda) os números que adicionados, davam esse dividendo. Temos assim os números 768, 384, 192, 96, 24 e 12 (cuja soma é justamente 1476) e marcavam cada um deles com um pequeno traço horizontal. Adicionando os números correspondentes da coluna da esquerda (ou seja, 64, 32, 16, 8, 2 e 1), obtiam muito facilmente o resultado da divisão:

$$1476 : 12 = 64 + 32 + 16 + 8 + 2 + 1 = 123$$

Um exemplo de uma divisão não exata: $326 : 17 = 19$ e tem resto 3.

Calculando com 17:

1	-----	17
2	-----	34
4	-----	68
8	-----	136
16	-----	272

Paravam em 272, pois a multiplicação seguinte fornecerá um número superior ao dividendo 326.

$$272 + 136 = 408 \text{ (passou)}$$

$$272 + 68 = 340 \text{ (passou)}$$

$$272 + 34 = 306$$

$$272 + 34 + 17 = 323$$

$$\text{Então } 326 : 17 = 16 + 2 + 1 = 19 \text{ e tem resto } = 326 - 323 = 3.$$

1.9 - Sistema de numeração romano

A cultura romana utilizava a base dez em seu sistema de numeração.

Números Romanos	Representação Corrente	Origem
I	1	Representa um dedo erguido da mão.
V	5	Representa uma mão aberta.
X	10	Representa duas mãos cruzadas (dois V).
L	50	Evolução do símbolo grego “X”.
C	100	Inicial da palavra latina “centum” (cem).
D	500	Metade do símbolo grego “Φ”. Esse símbolo surgiu da letra M.
M	1.000	Inicial da palavra latina “Mille” (mil).

A característica dominante da notação romana é o princípio da adição. Na notação romana, raramente se empregava o princípio multiplicativo, segundo o qual VM não representa 1000 menos 5, mas 5×1000 ou 5000. Para multiplicar o valor de um número por mil, a indicação em alguns exemplos era feita colocando-se sobre ele um traço horizontal. Traços colocados no alto e nos lados indicavam cem milhares.

O uso sistemático do princípio subtrativo, segundo o qual um símbolo para uma unidade menor colocado antes de um símbolo para uma unidade maior significa a diferença entre as duas unidades (por exemplo, quando se escreve IV para 4 e IX para 9), raramente era utilizado nos tempos antigos e medievais. Seu uso pleno só começou nos tempos modernos e tornou-se comum só após a invenção da imprensa com tipos móveis.

Por exemplo:

1944 = MDCCCCXXXIII

ou, em notação moderna, de quando o princípio subtrativo se tornou comum,

1944 = MCMXLIV

Operações:

Na verdade, os algarismos romanos não são sinais que servem para efetuar operações aritméticas, mas abreviações destinadas a notificar e reter os números. É por isso que os contadores romanos sempre apelaram para ábacos de fichas para efetuar seus cálculos.

Em Roma, o ábaco de peças consistia numa mesa na qual divisões em linhas paralelas, traçadas preliminarmente, separavam as diferentes ordens de unidades da numeração latina.

Cada uma dessas colunas simbolizava uma potência de dez. Partindo da direita para a esquerda, a primeira era associada às unidades, a seguinte, às dezenas, a terceira, às centenas, a quarta, aos milhares e assim por diante. Para representar os números bastaria, então, colocar tantas pedras ou fichas (com valor de uma unidade simples) quantas fossem necessárias.

Para fazer figurar, por exemplo, o número 5673 nas colunas do ábaco, era necessário colocar em cada coluna um número de fichas idêntico a quantas unidades houvesse em cada ordem em questão, ou seja, 3 peças na primeira, 7 na segunda, 6 na terceira e 5 na quarta (veja figura abaixo).

$\overline{C}$	$\overline{X}$	M	C	X	I
		• • • • •	• • • • • •	• • • • • • •	• • •
		5	6	7	3

Para simplificar, subdividiu-se cada uma dessas colunas em duas partes; uma peça da parte de baixo designou, então, uma unidade de ordem correspondente, enquanto que uma peça da parte de cima valeu a metade da ordem imediatamente superior (5 para a parte superior da primeira coluna, 50 para a da segunda, 500 para a da terceira, etc.) . Figura abaixo.

		•	•	•	
$\overline{C}$	$\overline{X}$	M	C	X	I
			•	• •	• • •
		5	6	7	3

Graças a essas divisões e a um jogo sutil de peças (acrescentando, subtraindo ou colocando uma ou várias dentre elas de uma coluna para outra), chegava-se, portanto, a efetuar cálculos.

O cálculo no ábaco de fichas era muito lento e muito difícil, supondo da parte dos aritméticos um aprendizado preliminar longo e laborioso. Compreende-se, então, que a prática das operações tenha permanecido por muito tempo sob domínio de uma casta muito privilegiada de especialistas.

Neste instrumento de cálculo, a natureza dos algarismos pouco importava, pois em razão mesmo de sua estrutura (que faz com que os símbolos escolhidos tomem um valor variando segundo a posição que ocupam nas representações numéricas), as colunas sucessivas do ábaco são suscetíveis de tornar operatórios mesmo os algarismos mais primitivos da História.

Para efetuar a adição utilizando o ábaco, fazia-se com que figurasse, por sua vez, e lia-se o resultado obtido após ter procedido às reduções que se impunham. Se, numa dada coluna, o número das peças chegava a atingir ou ultrapassar a dezena, substituíam-se dez dessas peças por uma só dentre elas, na coluna situada imediatamente à sua esquerda.

Segundo produto parcial (figurado em círculos brancos):
 $2 \times 7 = 14$

			1	4	
$\overline{C}$	$\overline{X}$	M	C	X	I
	• • • •	• • ○	○ ○ ○ ○		
				•	
				•	• •
			•		
			• •	• •	

62 Multiplicador

720 Multiplicando

Suprime-se agora o 7 do multiplicando, e multiplica-se o 6 do multiplicador (que vale 60) pelo 2 do multiplicando (que tem por valor 20), coloca-se o resultado (ou seja, 1200), posicionando-se 2 fichas na terceira coluna e 1 ficha na quarta.

Terceiro produto parcial (figurado em círculos brancos):
 $6 \times 2 = 12$

			1	2	
$\overline{C}$	$\overline{X}$	M	C	X	I
	• • • •	• ○ • •	• ○ • •		
				•	
				•	• •
				•	
				• •	

62 Multiplicador

20 Redução do multiplicando

Enfim, pelo 2 do multiplicando (que vale 20) multiplica-se o 2 do multiplicador e colocam-se 4 fichas na segunda coluna.

4

	$\overline{C}$	$\overline{X}$	M	C	X	I
Quarto produto parcial (figurado em círculos brancos): $2 \times 2 = 4$		• • • •	• • •	• • • • •	○ ○ ○ ○ ○	
					•	
					•	• •
					• •	

62 Multiplicador

20 Multiplicando reduzido

Reduzindo agora as diversas fichas dispostas assim na mesa, obtém-se, então, facilmente, o resultado que se procura: $720 \times 62 = 44.640$.

4 4 6 4 0

	$\overline{C}$	$\overline{X}$	M	C	X	I
		○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○	○	○ ○ ○ ○ ○	

Resultado

1.10 - Sistema de numeração grego

Dos vários sistemas de numeração usados pelos gregos, dois são dignos de menção.

O mais antigo é conhecido com ático (porque os símbolos ocorrem com frequência em inscrições atenienses) ou herodiânico (devido ao nome do escritor que o descreveu no século II d.C.) e era usado já no ano 600 a.C. Nesse sistema, I era usado para 1, Γ para 5, Δ para 10, H para 100, X para 1000 e M para 10000. Esse sistema usava o princípio aditivo.

Enquanto os romanos adotavam símbolos distintos para 50 e 500, os gregos escreviam esses números combinando as letras para 5, 10 e 100, usando

$\overline{\Delta}$ (ou 5 vezes 10) para 50 e $\overline{H}$ (ou 5 vezes 100) para 500.

O outro sistema de numeração é o sistema jônio (ou alfabético), que é aditivo, de base dez, e emprega vinte e sete símbolos. Esses símbolos são as vinte e quatro letras do alfabeto grego, e mais três do fenício ou grego obsoleto: *digamma* para 6, *koppa* para 90 e *sampi* para 900.

Números Gregos	Representação Corrente	Leitura	Números Gregos	Representação Corrente	Leitura	Números Gregos	Representação Corrente	Leitura
α	1	Alpha	ι	10	Iota	ρ	100	Rho
β	2	Beta	κ	20	Kappa	σ	200	Sigma
γ	3	Gamma	λ	30	Lambda	τ	300	Tau
δ	4	Delta	μ	40	Um	υ	400	upsilon
ε	5	Epsilon	ν	50	Nu	φ	500	Phi
)	6	Digamma	ξ	60	Xi	χ	600	Chi
ζ	7	Zeta	ο	70	Omicron	ψ	700	Psi
η	8	Eta	π	80	Pi	ω	800	Omega
θ	9	theta	obsoleta	90	koppa	obsoleta	900	sampi

Exemplos:

12 = ιβ

21 = κα

247 = σμζ

Para os primeiros nove múltiplos de mil o sistema adotou as primeiras letras do alfabeto, um uso parcial do princípio posicional; mas para maior clareza essas letras eram precedidas por um risco ou acento:

,α	,β	,γ	,δ	,ε	,ς	,ζ	,η	,θ
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000

Dentro desse sistema qualquer número inferior a 10.000 podia ser escrito facilmente com apenas quatro símbolos. O número 8.888, por exemplo apareceria como ,ηωπη ou como ηωπη, com o acento às vezes omitido, quando o contexto fosse claro. O uso das mesmas letras para milhares e para unidades deveria ter sugerido aos gregos o completo esquema posicional na aritmética decimal, mas não parece que eles tenham percebido as vantagens de uma tal idéia.

Um símbolo para um inteiro de 1 a 9.999, quando colocado acima da letra M, ou depois dela, separado do resto do número por um ponto, indicava o produto do inteiro pelo número 10.000 – a miríade grega. Assim o número 88.888.888 apareceria como M.ηωπη.ηωπη. Se aparecessem números ainda maiores, o mesmo princípio seria aplicado à dupla miríade, 100.000.000 ou 10^8 .

As notações gregas primitivas para os inteiros não eram excessivamente incomodas e serviam bem aos seus objetivos. Era no uso de frações que o sistema era fraco. Como os egípcios, os gregos se sentiram tentados a usar frações unitárias, e para estas tinham uma representação simples. Escreviam o denominador e depois simplesmente o seguiam de um sinal diacrítico ou acento para distingui-lo do inteiro correspondente. Assim $\frac{1}{34}$ se escrevia λδ'. Isso, é claro, podia ser confundido com o número $30\frac{1}{4}$, mas podia-se supor que o contexto ou palavras explicativas esclarecessem a situação.

Operações:

A história da matemática durante o tempo de Tales e dos pitagóricos dependem necessariamente, em grau indesejável, de conjecturas e inferências, pois faltam inteiramente documentos da época. Nem mesmo artefatos matemáticos dos primeiros tempos da Grécia se preservaram. Segundo Boyer (Boyer, 1996), é evidente que algum tipo de ábaco era usado nos cálculos, mas a natureza e a maneira de operar de tal ábaco devem ser inferidas do ábaco romano e de algumas referências casuais em autores gregos.

1.11 - Sistema de numeração chinês-japonês

Os chineses e japoneses, carecendo de um material de escrita como o papel, antigamente registravam suas descobertas em lâminas de bambu. A parte do caule do bambu situada entre dois nós era rachada longitudinalmente em tiras estreitas. Depois que essas tiras eram secas e raspadas, elas eram colocadas lado a lado e amarradas por quatro cordões transversais. A estreiteza das tiras fazia com que os caracteres fossem arranjados verticalmente, de cima para baixo, dando origem ao costume de escrever que pendurou até tempos mais modernos, quando as lâminas de bambu foram substituídas pela tinta e pelo papel, materiais de escrita mais convenientes.

O sistema de numeração tradicional chinês é um sistema de base dez que utiliza nove numerais e símbolos adicionais para os componentes de valor relativo (local) das potências de dez.

Números:

一	1
二	2
三	3
四	4
五	5
六	6
七	7
八	8
九	9

Potências:

十	10^1
百	10^2
千	10^3

Os egípcios escreviam as quantidades grandes no topo do papel e as pequenas no fim. Para todos os números intermediários, os chineses utilizavam a adição e a multiplicação ao mesmo tempo, decompondo o número 1.049, por exemplo, na forma:

$$1 \times 1.000 + 4 \times 10 + 9.$$

Antes do século VIII d.C., o lugar onde caberia um zero era sempre deixado vago. É num documento datado de 1247 que se acha pela primeira vez um símbolo circular para o zero, mas pode ser que esse símbolo já estivesse em uso cem anos antes.

As primeiras descrições claras das formas modernas, conhecidas na China como *saun phan* e no Japão como o *soroban*, são do século dezesseis; mas, segundo Boyer, formas precursoras parecem ter sido usadas talvez mil anos antes.

Os chineses conheciam as operações sobre frações comuns, para as quais achavam o mínimo denominador comum. Tinham uma tendência à decimalização de frações.

A idéia de números negativos parece não ter causado muitas dificuldades aos chineses pois estavam acostumados a calcular com duas coleções de barras- vermelha para os coeficientes positivos ou números e uma preta para os negativos.

1.12 - Sistema de numeração maia

Notável entre as realizações dos maias foi o desenvolvimento de um sistema de numeração vigesimal (base vinte) com notação posicional e um símbolo especial para o zero.

Em número de 19, as unidades de primeira ordem dessa numeração vigesimal eram representadas por símbolos muito simples (pontos e traços): de um a quatro pontos para as quatro primeiras unidades; um traço horizontal ou vertical para 5; um, dois, três ou quatro pontos colocados ao lado ou acima do traço para os números de 6 a 9; dois traços para 10; e assim por diante (figura abaixo).

1	•	8	••• ou ••	15	≡ ou ≡
2	•• ou ••	9	•••• ou •••	16	≡ ou ••
3	••• ou •••	10	≡ ou ≡	17	≡ ou ••
4	•••• ou ••••	11	≡ ou ••	18	≡ ou ••
5	— ou	12	≡ ou ••	19	≡ ou ••
6	• ou •	13	≡ ou ••		
7	•• ou ••	14	≡ ou ••		

Representação dos dezanove primeiros números na numeração maia.

Cada número superior a 20 era escrito numa coluna vertical que compreendia tantos andares quantas ordens de unidades havia.

Para os números compostos de duas ordens, colocava-se o algarismo das unidades simples no patamar inferior e o algarismo das vintenas do segundo patamar.

Assim, 21 ($= 1 \times 20 + 1$) e 79 ($3 \times 20 + 19$) eram escritos por eles:

<div> <div>• 1</div> <div>• 1</div> </div> <div>21 = 1 x 20 + 1</div>	<div> <div>••• 3</div> <div>•••• 19</div> </div> <div>79 = 3 x 20 + 19</div>
---	--

O andar intermediário superior (a terceira posição desse sistema de base 20), normalmente, deveria corresponder a valores vinte vezes maiores do que os da segunda. Tal qual, entre nós, a terceira ordem é associada às centenas (isto é, aos múltiplos de $10 \times 10 = 100$), a terceira fileira dessa numeração deveria corresponder às “quatro centenas” (isto é, aos múltiplos de $20 \times 20 = 400$).

Mas encontramos uma curiosa irregularidade, para os sábios maias, o terceiro andar indicava, na realidade, os múltiplos de 360.

A escrita seguinte, por exemplo:

≡ 12
••• 3
•••• 19

correspondia portanto a: $12 \times 360 + 3 \times 20 + 19$ e não a: $12 \times 20^2 + 3 \times 20 + 19$.

Para as posições seguintes, retorna-se a uma utilização estrita da base 20; cada patamar a partir do quatro vale vinte vezes mais do que o patamar imediatamente inferior. Assim, em virtude da irregularidade da terceira ordem, a quarta posição correspondia aos múltiplos de $7.200 = 20 \times 360$ (e não aos de $8.000 = 20 \times 20 \times 20$), a quinta aos múltiplos de $144.000 = 20 \times 7.200$ (e não aos de $160.000 = 20 \times 20 \times 20 \times 20$), e assim por diante.

Três multiplicações e uma adição permitiam, desde então, ler uma representação de quatro algarismos, por exemplo:

•	1 (= 1 x 7.200)
⋮	17 (= 17 x 360)
⋮	8 (= 8 x 20)
≡	15 (15 x 1)
= 1 x 7.200 + 17 x 360 + 8 x 20 + 15	
= 13.495	

Para que cada algarismo permanecesse em seu andar, na possibilidade das unidades de uma certa ordem faltarem, os sábios maias inventaram um zero, conceito ao qual deram (por razões que nos são desconhecidas) uma forma bastante semelhante à de um caramujo ou a uma concha de escargot (figura abaixo).

Um exemplo: o número que notamos 1.087.200 no nosso sistema decimal atual e cuja decomposição aritmética segundo as ordens de unidades do sistema maia ($1 \times 144.000 + 11 \times 7.200 + 0 \times 360 + 0 \times 20 + 0$) revela uma ausência de “trezentos-sessentenias”, de vintenias e de unidades simples, era indicado na forma:

⋮	7
⋮	11
⋮	0
⋮	0
⋮	0

1.13 - Sistema de numeração Hindo-arábico

O ábaco pode facilmente ser adaptado a qualquer sistema de numeração ou qualquer combinação de sistemas. O uso amplamente difundido do ábaco, segundo Boyer (1996), provavelmente pode explicar ao menos em parte o desenvolvimento estranhamente tardio de uma notação posicional consistente para inteiros e frações.

Nosso atual sistema não só possibilita uma maneira simples e concisa de registrar números. O mais importante é que a própria notação ajuda intensamente a execução de cálculos.

Os componentes essenciais de nosso sistema de numeração são os símbolos básicos, que incluem um símbolo para o conceito de zero, e a incorporação desses símbolos num sistema posicional ou de valor relativo.

Por volta do ano 800, o sistema tinha sido levado a Bagdá e adotado pelos árabes, que vieram a ter um importante papel na sua difusão através de outras partes do mundo. Os árabes nunca atribuíram a si mesmos a invenção desse sistema, sempre reconhecendo sua dívida para com os hindus.

“Valor local” tinha sido uma parte essencial da numeração babilônica, e segundo Boyer, talvez os hindus percebessem sua aplicabilidade à notação decimal para inteiros em uso na Índia. O desenvolvimento de notações numéricas na Índia parece ter seguido a mesma linha que se encontra na Grécia. As inscrições mais antigas mostram a princípio simples traços verticais, dispostos em grupos, mas por volta do terceiro século A.C. estava em uso um sistema semelhante ao herodiânico. No novo sistema continuava vigorando o princípio da repetição, mas foram adotados símbolos de ordem superior para quatro, dez, vinte e cem. Essa escrita, dita Karosthi, aos poucos cedeu lugar a uma outra notação, dos caracteres ditos brahmi, que se assemelhava à alfabética do sistema grego jônico.

Para passar dos numerais cifrados brahmi à notação atual para inteiros são necessários dois passos. O primeiro é uma percepção de que, pelo uso do princípio posicional, os símbolos para as primeiras nove unidades podem servir também para os múltiplos correspondentes de dez, ou igualmente bem para os múltiplos correspondentes de qualquer potência de dez. Essa percepção tornaria supérfluos todos os símbolos brahmi além dos nove primeiros. Não se sabe quando ocorreu essa redução a nove símbolos, e é

provável que a transição para a notação mais econômica se tenha processado gradualmente. Parece, pela evidência existente, que a mudança se deu na Índia, mas a fonte de inspiração para isso não é conhecida. Provavelmente os chamados numerais hindus foram resultado de desenvolvimento interno apenas; talvez se desenvolvessem primeiro ao longo dos limites ocidentais entre Índia e Pérsia, onde a lembrança da notação posicional babilônica pode ter levado à modificação do sistema brahmi. É possível que o novo sistema tenha surgido ao longo dos limites orientais na Índia e China, onde os numerais em barras pseudo-posicionais podiam sugerir a redução a nove símbolos. Há ainda uma teoria que diz que essa redução pode ter sido feita primeiro em Alexandria, dentro do sistema alfabético grego, e daí se propagado para a Índia. Durante o segundo período alexandrino o hábito grego antigo de escrever frações comuns com o numerador embaixo do denominador foi invertido, e foi nessa forma que os hindus o adotaram, sem a barra entre eles. Infelizmente, os hindus não aplicaram a nova numeração para inteiros ao domínio das frações decimais; assim perdeu-se a principal vantagem potencial da mudança de notação.

A primeira referência específica aos numerais hindus se encontra em 662 nos escritos de Severus Sebokt, um bispo sírio. Que os numerais estavam em uso já havia algum tempo é indicado pelo fato de que a primeira ocorrência na Índia é sobre um objeto do ano de 595, onde a data 346 está escrita em notação decimal posicional.

Deve-se notar que a referência a nove símbolos, em vez de dez, significa que os hindus ainda não tinham dado o segundo passo na transição para o moderno sistema de numeração – a introdução de uma notação para uma posição vazia, isto é, um símbolo zero. A história da matemática contém muitas anomalias, e a não menor dessas é que “a mais antiga ocorrência indubitável de um zero na Índia se acha numa inscrição de 876”, isto é, mais de dois séculos depois da primeira referência aos nove outros numerais. Não se sabe sequer se o número zero (diferente do símbolo para a posição vazia) surgiu em conjunção com os outros nove numerais hindus. É bem possível que o zero seja originário do mundo grego, talvez de Alexandria, e que tivesse sido transmitido à Índia depois que o sistema decimal posicional já estava estabelecido lá.

Com a introdução, na notação hindu, do décimo numeral, um ovo de ganso para o zero, o moderno sistema de numeração para os inteiros estava completo. Embora as formas hindus medievais dos dez numerais sejam bastante diferentes das em uso hoje, os princípios

do sistema estavam firmados. A nova numeração, que chamamos em geral o sistema hindu, é apenas uma nova combinação dos três princípios básicos, todos de origem antiga:

- 1) base decimal;
- 2) uma notação posicional; e
- 3) uma forma cifrada para cada um dos dez numerais.

Nenhum desses se deu originalmente aos hindus, mas presumivelmente foi devido a eles que os três foram ligados pela primeira vez para formar o moderno sistema de numeração.

1.14 - Semelhanças e diferenças dos diversos sistemas de numeração

Consideremos aqui algumas comparações entre os diversos sistemas numéricos apresentados, destacando semelhanças e diferenças entre eles.

Observa-se que são parecidas as maneiras de escrever o um, o dois e o três nos sistemas abaixo:

Sistema	Representação		
Egípcio
Babilônico
Romano	I	II	III
Chinês

No sistema egípcio, o onze pode ser escrito de duas formas:

Não importa a ordem dos símbolos. Mas veja o que acontece na numeração romana:

IV quatro

VI seis

Em alguns sistemas, como o egípcio, vale a regra conhecida como princípio aditivo: o número representado é a soma dos valores de cada símbolo. Mas, no sistema romano o princípio aditivo precisa ser aplicado com cuidado, porque nele existe também o princípio subtrativo.

Não podemos saber se os aparecimentos de ábaco na China, Arábia e Europa forma ou não acontecimentos independentes. O ábaco árabe tinha dez bolas em cada arame, sem barra central, enquanto que o chinês tinha cinco fichas superiores e cinco inferiores em cada arame, separadas por uma barra. Cada ficha superior no ábaco chinês equivale a cinco inferiores, um número é marcado fazendo deslizar as fichas adequadas até encostar na barra.

O sistema de numeração babilônico foi decimal e de tipo aditivo, o que o tornou inconveniente, pois gerou várias ambigüidades e erros. Também não usavam nenhum símbolo para o zero, outra grande desvantagem desse sistema, pois, a não ser a partir do contexto, não havia como determinar certas quantidades. Mas, mesmo assim esse sistema de numeração apresentava vantagens aos outros sistemas antigos, uma vez que foi o primeiro a empregar o conceito de valor relativo. A maior contribuição que os babilônios nos deixaram como herança para o desenvolvimento do conceito de número foi uma poderosa técnica de cálculo num sistema abstrato de valor posicional, que depois foi aprimorada com um símbolo para o zero.

Considerações Finais

Neste capítulo foram focalizados o desenvolvimento, a estruturação e a realização de algumas operações em determinados sistemas de numeração, com o objetivo de fazer com que os alunos construam critérios para comparar esses sistemas e estabeleçam relações, o que os levariam a compreender a prevalência do atual sistema de numeração hindo-arábico e a existência de outras bases, utilizadas até agora. As informações aqui apresentadas darão ainda subsídios para a análise nos capítulos finais das oficinas sobre sistemas de numeração mencionadas à luz do conceito de Obstáculo Epistemológico concebido originalmente por Bachelard.

Capítulo 2: Fundamentação Teórica

Neste capítulo pretende-se apresentar uma breve síntese do conceito de Obstáculo Epistemológico concebido originalmente por Gaston Bachelard com o intuito de expor as concepções subjacentes às oficinas sobre sistemas de numeração, bem como a leitura e análise de seus resultados expostas nos capítulos finais desse trabalho, o que lança luzes necessariamente sobre idéias referentes ao ensino da Matemática elementar.

Assim, muitas das conclusões a que chegamos se traduzem em contribuições para a elaboração de estratégias de ensino. Cabe ainda ressaltar que, embora algumas indicações de caráter prático aqui apresentadas soem talvez como algo já visto para quem lida com o ensino de matemática visando uma construção mais significativa do seu conteúdo, acreditamos que a contribuição maior desse trabalho é mostrar que tais atividades têm um valor mais profundo do que habitualmente se pensa, levando em consideração um conhecimento aberto e dinâmico e um aluno questionador.

2.1 – Algumas reflexões sobre epistemologia e matemática

Este trabalho faz uso basicamente da pesquisa em História da Matemática, levando em consideração que esse recurso pode ter um papel decisivo na organização didática do conteúdo matemático, estruturando-o com base no modo de raciocinar próprio do conhecimento que se quer construir.

Ele consiste ainda em estruturar os sistemas de numeração à luz de sua evolução histórica de modo a tornar seu ensino mais significativo, bem como dar subsídios ao professor para identificar possíveis obstáculos epistemológicos no ensino do conteúdo em questão. Cabe entretanto reiterar que não se trata de considerar que o desenvolvimento cognitivo do aluno em sala de aula referente a um determinado conceito repete seu desenvolvimento histórico.

Para o desenvolvimento desse trabalho, partimos de uma análise em epistemologia referente ao conceito de obstáculo epistemológico. Para isso, procuramos entender melhor como o aluno aprende Sistemas de Numeração para então elaborar nossa sequência didática de oficinas. Esta preocupação nos levou ao estudo do conceito de obstáculo epistemológico, concebido originalmente por Gaston Bachelard, bem como de outros conceitos epistemológicos necessários à organização de tal estudo.

Partimos de uma análise do legado de Bkouche (1997) no que se refere à epistemologia, onde ele distingue três aspectos importantes:

- **Epistemologia dos fundamentos:** estudo das condições de legitimação da atividade científica;
- **Epistemologia do funcionamento:** análise dos procedimentos técnicos ou conceituais;
- **Epistemologia das problemáticas:** análise de como os problemas conduzem o homem a produzir o conhecimento científico.

No trabalho de Vergnaud (1990), referindo-se à Epistemologia da Matemática, podemos citar as seguintes abordagens:

- o estudo do conhecimento matemático: reflexões espontâneas dos próprios matemáticos sobre a natureza de seu conhecimento e dos processos de invenção e de descoberta;
- a perspectiva histórica, para entender os ambientes sociais e científicos em que novos conceitos e técnicas da Matemática emergiram e se desenvolveram;
- a incorporação do embate matemático-filosófico sobre os fundamentos da Matemática, que incluem o logicismo, o intuicionismo, o formalismo, o construtivismo entre outros.

Tomando por base tais concepções, debruçamo-nos no objetivo de trazer significado aos sistemas de numeração. Para isto, as oficinas foram planejadas de maneira a levar os alunos a identificarem o contexto social que mostrou quando um sistema de numeração já não era mais tão eficaz, levando ao surgimento de outros considerados mais vantajosos naquele contexto cultural e sob a perspectiva dos fins considerados não mais cumpridos nos sistemas precedentes.

Muitas vezes ensina-se Matemática não levando em consideração que o seu surgimento e desenvolvimento também foram significativamente motivados por necessidades sociais. A História da Matemática nos espaços escolares pode auxiliar muito para que o processo educacional se desenvolva a contento, devendo portanto ser uma metodologia de ensino, a fim de enriquecer as aulas. Queremos mostrar ao aluno que o conhecimento possui uma história e que a Matemática, particularmente, não é estática.

Brousseau (1983) defende que uma boa teoria epistemológica acompanhada de uma boa “didática” são indispensáveis para responder muitas das questões que têm sido colocadas para a pesquisa em didática da Matemática. Ele considera também que a análise epistemológica permite a um pesquisador da Educação Matemática a identificação de obstáculos, entre as dificuldades detectadas no processo da aprendizagem. Ele distingue três tipos de obstáculos que se apresentam no sistema didático: os de **origem ontogênica**, que são aqueles que se processam a partir de limitações de ordem do tipo neurofisiológicas entre outras, do sujeito, no momento de seu desenvolvimento; os de **ordem didática** que dependem somente das escolhas realizadas para um sistema educativo; e os de **ordem epistemológica**, que são aqueles dos quais não se pode nem se deve escapar, pois são constitutivos do conhecimento visado.

Está claro para nós que as condições sociais e as interações humanas afetam o pensamento e o raciocínio, especialmente durante a aprendizagem de certo conhecimento. Não podemos então deixar de valorizar o trabalho em trios e em alguns momentos em grupos de 4 elementos. O convívio em grupo (ainda que pequeno), provoca um tipo de interação que enriquece o ponto de vista de cada participante, fazendo com que o aluno analise, rebata, sustente e dialogue. Precisamos, enquanto educadores, viabilizar formas de trabalho coletivo, pois o desenvolvimento intelectual se origina na interiorização de formas produzidas socialmente dando subsídios para tornar os alunos mais questionadores.

Sob a perspectiva bachelardiana de que o desenvolvimento do pensamento científico se processa na superação de obstáculos, a introdução da noção de obstáculo epistemológico pode contribuir para desenvolver um relacionamento maior entre epistemologia e didática.

Há grandes diferenças entre dificuldades, conflitos e obstáculos:

- **Dificuldade:** algo que impede a execução do entendimento de certo conteúdo. Pode ter diversas causas, relacionadas com o conceito que se aprende, com o método que o professor utiliza, com o conhecimento prévio do aluno ou com sua própria disposição para aprender.
- **Conflito:** significa choque ou oposição entre formas contraditórias de interpretar uma mesma situação. Há um conflito cognitivo quando duas idéias contraditórias se chocam e produzem um desequilíbrio que pode provocar dúvida e erros.
- **Obstáculo:** algo embaraçoso, difícil, um impedimento, um estorvo, um empecilho, uma barreira.

De acordo com Bachelard (1996), os obstáculos epistemológicos aparecem no ato de conhecer, construir o conhecimento; são conflitos, momentos de estagnação e até de regressão. Pode-se pesquisar os obstáculos epistemológicos a partir de uma análise histórica ou a partir de dificuldades resistentes entre os alunos, procurando confrontá-las.

Aqui está mais um motivo para pretendemos um trabalho coletivo e colaborativo durante a realização de nossa seqüência didática. Além do que, atividades em grupos promovem o desenvolvimento da linguagem, da criatividade, do raciocínio lógico e do conflito entre idéias contraditórias, o que possivelmente gera um obstáculo epistemológico.

Segundo Durox (1982), um obstáculo é um conhecimento, uma concepção, não uma dificuldade ou falta de conhecimentos. O conceito de obstáculo não pode confundir-se com o de dificuldade, pois, para que possamos falar de obstáculo, segundo Brousseau(1983), devemos nos basear na quatro condições seguintes:

- **Primeira:** Deve ser um conhecimento, nem que seja falso ou incompleto. Ele permite reformular a dificuldade de que se trata em termos de conhecimento e não na ausência de conhecimento.
- **Segunda:** O obstáculo epistemológico tem seu domínio de validade e de eficiência: em certas situações resulta pertinente e adaptado, mas em outras, os resultados raios e conduzem ao erro.
- **Terceira:** É resistente no estabelecimento de um novo conceito ou à mudança da condição desse conceito antigo em um novo.
- **Quarta:** Não é fruto de um erro passageiro.

2.2 - Obstáculo Epistemológico segundo Gaston Bachelard

Chamam-se obstáculos epistemológicos às concepções que são constitutivas do conhecimento. Como dependem unicamente do mesmo conceito, são inerentes à noção a que se referem e, portanto, qualquer aluno que deseje adquirir essa noção, deverá superar esses obstáculos. Não é possível não considerar os obstáculos epistemológicos, dado que, a superação desses obstáculos é uma forma de conhecimento. Por outro lado, os obstáculos epistemológicos se caracterizam porque são reproduzidos (aparecem em situações semelhantes), são resistentes às transformações e se opõem aos mais sólidos conhecimentos prévios. É importante para o professor saber que o conhecimento anterior não será somente um apoio na hora de instalar um novo conhecimento, mas também um obstáculo que terá que ser superado.

Acreditamos que a qualidade das trocas verbais entre professor e alunos irá influenciar decisivamente na forma como os educandos tornam mais complexos seus pensamentos, processam novas informações e promovem o surgimento de outros questionamentos. Cabe ao professor assumir seu papel de mediador da aprendizagem, procurando fazer uso de uma linguagem acessível aos alunos.

Segundo Bachelard (1996), o *“ato de conhecer dá-se contra um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos, superando o que, no próprio espírito, é obstáculo à espiritualização”*. Ou seja, é no próprio ato de conhecer que aparecem lentidões e conflitos, que geram momentos de estagnação e até de regressão e são essas causas que Bachelard denomina obstáculos epistemológicos. Como exemplo disto, temos a facilidade ou não de representar quaisquer quantidades e a comodidade para a realização de cálculos em outros sistemas de numeração.

Para ele, todo conhecimento é construído através de uma resposta à uma pergunta, portanto, sem dúvidas não há conhecimento, nada é evidente e sim, tudo é construído. Retomando nossos questionamentos: Por que convergiu-se para o atual sistema de numeração hindo-arábico? Será que era inevitável chegar a esse sistema? De onde vêm os algarismos? Ao longo deste trabalho pretende-se responder a essas perguntas. Na ausência de tais questionamentos, o aluno tende a ter um obstáculo epistemológico incrustado nesse conhecimento. Além disso, estes questionamentos motivam a aprendizagem, obtendo assim um maior rendimento e um aluno mais crítico. A reflexão sobre tais questionamentos pode

propiciar ao aluno uma maior consciência a respeito dos diferentes processos passados por distintas civilizações no decorrer da história no que concerne a seus sistemas de numeração, o que inclui obstáculos enfrentados na evolução de tais sistemas, bem como a luta para superá-los, envolvendo tentativas de tornar seus sistemas de numeração mais práticos.

Por isso, a origem da oficina 8, denominada Comparando Sistemas de Numeração, onde serão abordados questionamentos que poderão levar os alunos a construção de um quadro comparativo entre os diferentes sistemas de numeração. Este quadro será um auxílio para a descoberta das vantagens e desvantagens entre os diversos sistemas de numeração.

De acordo com Bachelard (1996), “Não se pode basear nada na opinião: antes de tudo, é preciso destruí-la”. Então, o nosso primeiro obstáculo a ser superado é a utilização do sistema hindo-arábico como sendo o que apresenta mais vantagens. Não basta, por exemplo, citar e corrigir determinados pontos nos sistemas de numeração, mas sim fazer com que os alunos percebam o que não está funcionando, de modo a ajustá-los de acordo com determinados fins.

Vale ressaltar que um dos objetivos mais importantes da Didática da Matemática é o de determinar os obstáculos que se opõem à compreensão e à aprendizagem de um conceito matemático, para então conseguirmos atingir nossa principal finalidade: a construção de um conhecimento dinâmico. Tais obstáculos estão entre as questões norteadoras deste trabalho.

Há crises que impulsionaram o desenvolvimento do conhecimento, e serão tais crises que possibilitarão a reorganização do saber. À partir disto, pretendemos desenvolver no estudante a capacidade de resolver problemas por si próprio. A noção de obstáculo epistemológico pode ser utilizada tanto para analisar a gênese histórica de um conhecimento como o ensino ou a evolução espontânea do aluno. Pode-se portanto pesquisar os obstáculos epistemológicos a partir de uma análise histórica ou a partir de dificuldades resistentes entre os alunos procurando confrontá-las.

O estudo desses obstáculos epistemológicos também ajudará os professores, pois facilitará a compreensão por parte deles daquilo que os alunos têm maior dificuldade de entender. Bachelard (1996) afirma que os professores, quando entram em sala, devem considerar os conhecimentos empíricos já constituídos pelos alunos, portanto devemos mudar a cultura experimental desse aluno e não fazer com que ele a adquira, fazendo com que esses obstáculos sejam derrubados e não sedimentados pela vida cotidiana. Um exemplo disso é o ensino de bases, mais especificamente, no uso da base 60, quando é abordada a contagem do tempo em horas, minutos e segundos ou no estudo do círculo dividido em 360 graus, com graus divididos em 60 minutos e os minutos divididos em 60 segundos. O entendimento

dessas situações, que às vezes pode nos parecer tão óbvio, para alguns alunos é quase incompreensível.

Na verdade, o desenvolvimento dos sistemas de numeração foi um processo lento e cheio de obstáculos, ligados às necessidades de cálculos de cada cultura. Na educação, a noção de obstáculo ainda é pouco explorada. Para procurar entender o porquê de alguém não compreender, não basta reconstruir uma cultura falha pela repetição da lição, que procura fazer o aluno entender uma demonstração repetindo-a ponto por ponto. Devemos levar em conta que o aluno entra em sala de aula com conhecimentos empíricos já constituídos. Não se trata de adquirir uma cultura experimental, mas sim de mudar essa cultura, derrubando os obstáculos já sedimentados pela vida cotidiana.

As intervenções pedagógicas deste trabalho procuram envolver o aluno ativa e emocionalmente. Nossa preocupação constante está em fazer com que as questões trazidas pelos alunos sejam partilhadas com os demais, propiciando a formulação e reformulação de hipóteses e o envolvimento do grupo em torno dessas questões. Nesta seqüência, atuaremos como mediadores entre o aluno e o conhecimento, formulando perguntas que objetivam provocar um desequilíbrio na estrutura cognitiva dos alunos. Ao fazer avançar no sentido de uma nova e mais elaborada reestruturação, valoriza-se a produção de significados e o processo comunicativo, na medida em que, ao expressar-se oralmente ou por meio da escrita, o aluno está produzindo significados.

Considerações Finais

A partir das considerações anteriores, cabe aqui ressaltar que um conhecimento funciona como obstáculo se ele não for mais questionado ou se ele não exigir mais ser validado. Tal reflexão comprova que as concepções que ocasionam obstáculos no ensino da Matemática são raramente espontâneas, mas advindas do ensino e das aprendizagens anteriores e que os mecanismos produtores de obstáculos são também produtores de conhecimentos novos e fatores de progresso.

Uma das tarefas mais difíceis é mobilizar a cultura científica permanentemente no sentido de flexibilizar o saber fechado e estático rumo a um conhecimento aberto e dinâmico. No capítulo seguinte, as oficinas temáticas serão abordadas levando em consideração tal conhecimento aberto e dinâmico.

Capítulo 3: Explorando sistemas de numeração no Ensino de Matemática: oficinas temáticas

Neste capítulo pretende-se mostrar exemplos de oficinas temáticas, nas quais procuramos aplicar a abordagem histórica visando administrar o conceito dos sistemas de numeração dentro de assuntos do currículo elementar de matemática.

Aplicamos essa sequência de oficinas a um grupo de 26 alunos, com idade entre 11 e 13 anos, de classe média baixa, regularmente matriculados na 5ª série B do Ensino Fundamental, no período vespertino da Escola Calvino Barbosa Ferraz, na cidade de Óleo (SP), pertencente à Diretoria de Ensino de Piraju (SP).

Essas oficinas foram aplicadas em fevereiro de 2005 no próprio horário de aula, já que sou professora efetiva desta sala. Elas tiveram duração de 3 semanas, compreendendo 15 aulas com 50 minutos, distribuídas ao longo da semana.

Esperamos, com esses exemplos de oficinas, mostrar como é possível na prática construir um ensino que atenda a curiosidade dos alunos acerca de sistemas de numeração e propicie a reconstrução histórica de sua evolução, bem como a construção do conhecimento por parte de tais alunos. Mas, reparamos que uma oficina colocada em forma de texto perde sua característica principal, que é a ação desenvolvida pelos participantes, visando a construção do assunto abordado. O que mostramos aqui é na verdade apenas um roteiro de algumas oficinas, tendo em vista a impossibilidade de registrar, pelas características deste trabalho, tudo o que ocorre dos trabalhos em grupo durante as oficinas. Na maioria das vezes, foram necessárias mais de uma aula por oficina.

Os objetivos dessas oficinas eram, em princípio, sanar a curiosidade dos alunos acerca de sistemas de numeração, propiciar a construção do conhecimento por esse aluno, melhorar o entendimento da estruturação do atual sistema de numeração hindu-arábico, além de proporcionar ao professor maior consciência acerca dos possíveis obstáculos epistemológicos que os alunos enfrentam durante o processo ensino-aprendizagem, particularmente referente ao conceito de sistemas de numeração.

3.1 – Oficina 1: Introdução

Através das cavernas estudadas pelos arqueólogos, descobriu-se uma na França e conclui-se que as suas pinturas foram feitas há cerca de 25000 anos. Através destes estudos, podemos ter uma idéia de como eram e de como viviam seus habitantes.

Tudo indica que as pessoas daquele tempo eram parecidas conosco fisicamente. A diferença estava no modo de vida. Para alimentar-se caçavam e colhiam frutos. Não plantavam, não criavam animais e por isso, não vendiam, não faziam compras e não usava dinheiro. Portanto, é provável que elas não conhecessem os números, pois não tinham necessidade de utilizá-los no seu dia-a-dia.

-os poucos, e por várias razões, os habitantes das cavernas começaram a plantar.

À medida que essas mudanças iam ocorrendo, as contagens começaram a ser necessárias por razões práticas.

Enfim, todas as coisas que deram origem à civilização levaram também à criação dos números.

As primeiras contagens ocorreram em diferentes lugares e épocas, com procedimentos variados. Vejamos, por exemplo, o caso dos pastores de ovelhas. Eles levavam o rebanho para pastar durante o dia. À noite, as ovelhas eram recolhidas em lugar seguro para evitar que outros animais, como os lobos, atacassem-nas. Quando o rebanho era grande, ficava difícil saber se algum animal tinha-se perdido. Por isso, precisavam ter um controle para verificar se a quantidade de ovelhas soltas pela manhã era a mesma das que eram recolhidas.

Atividades:

- 1) Em nossos dias, os números aparecem em toda parte. Eles não são usados só para contar, mas para muitas outras coisas. Dê alguns exemplos do uso dos números.

- 2) Imagine que você é um pastor de ovelhas que não conhece os números. Todos os dias você solta as ovelhas pela manhã e as recolhe no final do dia. Como fazer para saber se nenhum animal se perdeu, se desgarrou? Imagine uma maneira de contar seu rebanho. Mas lembre-se: Você é um pastor da Pré-história!

Os historiadores chamam a atenção para o fato de a palavra cálculo originar-se da palavra latina *calculus*, que significa “pedrinha”.

Assim, a palavra calcular, na sua origem, pode significar “contar com pedrinhas”. Esse é um indício de que a contagem pode ter começado com pedrinhas.

Muitas outras formas de contar foram desenvolvidas: usamos conchas, grãos ou sementes no lugar das pedras; os incas, que habitavam os Andes, davam nós em cordões.

- 3) Numa determinada época, os homens eram caçadores e viviam em cavernas. Num período posterior, tornaram-se pastores e agricultores e surgiram as primeiras aldeias. Foi, então, que passaram a ter mais necessidade dos números. Escreva dois motivos para os números serem importantes nesse período.
- 4) Certo dia, um pastor quis registrar quantas ovelhas tinha seu rebanho. Para isso, separou uma pedrinha para cada ovelha e fez este monte de pedrinhas:

Figura disponível em: IMENES, Luiz Márcio, LELLIS, Marcelo. Os números na história da civilização. Coleção Vivendo a Matemática. São Paulo: Scipione, 1999, pp. 16.

Uma semana depois, ele fez a mesma contagem. Desta vez, o monte de pedrinhas ficou assim:

Você tem uma explicação para o que aconteceu com o rebanho nessa semana?

Desde as primeiras civilizações, a agricultura se tornou fundamental para a alimentação das pessoas. Assim, já naquele tempo, foi preciso dispor de calendários bem feitos para saber a época certa do plantio e da colheita. E, para fazer calendários, precisamos dos números, não é?

À medida que as civilizações progrediam, o comércio também progredia. Por volta de 2600 anos antes de Cristo, por exemplo, barcos de mercadorias egípcios, carregados com lentilhas, tecidos e papiros (uma espécie de papel), navegavam pelo mar Vermelho e pelo Mar Mediterrâneo, comercializando seus produtos. Para negociar, precisavam medir e pesar produtos, pagar e receber troco. Como fazer isso sem os números?

Essas civilizações também guerreavam e precisavam de armas e exércitos. Além de lutar, construíam monumentos e palácios. Como faziam para contar os soldados de um batalhão ou calcular o material necessário para uma construção?

Em todas elas, havia uma organização político-social, na qual geralmente o poder era exercido de forma absoluta por um rei, auxiliado por nobres e sacerdotes que davam ordens a vários funcionários públicos. Todo esse grupo era sustentado por impostos cobrados da população. E como calcular e cobrar impostos sem os números?

Como se observa, os números foram essenciais para as primeiras civilizações. Por essa razão, em cada uma delas inventou-se um sistema de numeração, ou seja, uma maneira de escrever e nomear os números.

3.2 – Oficina 2: Numeração Egípcia

Da civilização egípcia, restaram vários monumentos com inscrições, além de documentos em papiros. Essas fontes permitiram que os arqueólogos decifrassem o sistema de numeração egípcio. Você também pode decifrá-lo. Observe estes exemplos:

Já percebeu uma lógica nesse sistema, não é? Então, aceite este pequeno desafio: observe a seguir os símbolos que os egípcios usavam para os números e escreva como eles 13, 23 e 123.

	1	Um bastão vertical indicava a unidade.
	10	Uma ferradura indicava a dezena.
	100	Um rolo de pergaminho indicava a centena.
	1000	Um flor de Lótus representava o milhar.
	10 000	Um dedo encurvado era o símbolo para dez mil.
	100 000	Um barboto (peixe) representava cem mil.
	1 000 000	Um homem espantado indicava o milhão.

Observe que em vez de escrever 10 com dez risquinhos, os egípcios escreviam desta maneira:

Isso significa que um símbolo valia por dez símbolos . Da mesma forma, dez símbolos eram substituídos por um e assim por diante.

Notou que, na escrita dos números, os egípcios formavam grupos de dez do mesmo modo que fazemos hoje? Em nosso sistema de numeração, dez unidades formam a dezena; dez dezenas formam a centena e assim por diante, como ocorre também no sistema egípcio.

Isso quer dizer que o sistema egípcio era decimal como o nosso, ou, em outras palavras, era um sistema de base dez.

É interessante fazer uma adição usando nossa escrita dos números e, depois, a dos egípcios. Veja como é feita com nossos algarismos:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 37 \\ +25 \\ \hline 62 \end{array}$$

O pequeno 1 sobre o 3 indica a troca de dez unidades por uma dezena, é o chamado “vai um”. Algumas crianças pequenas têm dificuldade em entender esse procedimento, pois não compreendem essa troca. No entanto, no sistema egípcio, a conta ficaria mais fácil para elas porque podem “ver” a troca de dez unidades pela dezena. Observe:

Atividades:

- 1) Calcule os resultados das adições. Depois, escreva essas mesmas adições em nosso sistema de numeração.

a)

Diagram a) shows an addition problem in Egyptian numerals. The first number is composed of one lotus flower (10), three lotus flowers (30), and three vertical strokes (3), totaling 43. The second number is composed of two lotus flowers (20), three lotus flowers (30), and two vertical strokes (2), totaling 52. A plus sign is between them, and a horizontal line is below the second number for the result.

b)

Diagram b) shows an addition problem in Egyptian numerals. The first number is composed of one lotus flower (10), three lotus flowers (30), and three vertical strokes (3), totaling 43. The second number is composed of two lotus flowers (20), three lotus flowers (30), and two vertical strokes (2), totaling 52. A plus sign is between them, and a horizontal line is below the second number for the result.

- 2) Traduza da antiga escrita numérica do Egito para a nossa ou da nossa escrita para a do Egito antigo.

	102
	20111
	100010

3) Isto é uma brincadeira... e também um desafio! Você é um arqueólogo que entrou numa câmara secreta. Para prosseguir na sua exploração, você deve abrir as portas. Mas cada porta tem sua chave. Se você tentar abrir uma porta com a chave errada, o teto desaba sobre sua cabeça! Observe por que há uma relação entre os números das chaves e os das portas.

Agora, responda: qual é a chave de cada porta?

3.3 – Oficina 3: Numeração Mesopotâmica

Nas escavações arqueológicas, realizadas na região onde foram edificadas as cidades da Mesopotâmia, encontraram-se milhares de placas de barro que continham inscrições. Usando um bastonete, os escribas da Mesopotâmia escreveram sobre essas placas quando o barro ainda estava mole. Depois, elas foram cozidas no forno para endurecer.

Com base nessas placas, foi possível decifrar o sistema de numeração mesopotâmico.

O sinal indica 1 e o sinal , 10. Veja a escrita de alguns números:

Parece com o sistema egípcio, não é?

Parece, mas somente no início. Uma das placas de argila encontradas nas escavações continha os resultados da tabuada do nove. Examine com atenção esta placa:

Escrita mesopotâmica		Em nosso sistema	
		1	9
		2	18
		3	27
		4	36
		5	45
		6	54
		7	63
		8	72
		9	81
		10	90

Notou que há algo estranho nos quatro últimos resultados, que correspondem a 63, 72,

81 e 90? Por exemplo, para o 63 esperávamos esse registro , mas o que se vê

é . Você pode imaginar uma explicação para isso?

Acontece que eles usavam um sistema de numeração de base sessenta, o que parece muito esquisito. Veja o significado dos últimos resultados da tabuada do nove:

$$60 + 3$$

$$60 + 12$$

$$60 + 21$$

$$60 + 30$$

Agora é mais fácil perceber o que queremos dizer com numeração de base sessenta. Vamos comparar com a numeração egípcia:

- Na numeração egípcia, significa um grupo de dez mais três;
- Na numeração mesopotâmica, significa um grupo de sessenta mais três.

Repare que o símbolo da esquerda, separado dos outros três, vale sessenta.

Não fique pensando que é perda de tempo saber um pouco acerca da base sessenta. É verdade que o sistema de numeração dos povos da Mesopotâmia desapareceu há muito tempo, mas restaram vestígios dele, por exemplo, na contagem do tempo. Como você sabe, sessenta segundos compõem um minuto, e sessenta minutos compõem uma hora. Essa contagem em grupos de sessenta é herança da antiga numeração de base sessenta.

Assim, a escrita 1:30, que você vê nos relógios digitais ou nos fornos de microondas, não significa 130 minutos nem 1,30 hora. Note que 1:30 significa 90 minutos ou 1,5 hora. Isso porque o 1 antes dos dois pontos corresponde a 60 minutos.

O sistema numérico da Mesopotâmia apresenta alguns inconvenientes. Observe estes números:

Os três números representados são diferentes, embora todos sejam escritos com os mesmos sinais. O que muda é a distância entre os sinais. Se uma pessoa escrevesse esses números apressadamente, sem cuidado com os espaços, certamente causaria confusão.

Há ainda outra dificuldade. Veja estes exemplos:

E agora? Como seria a representação do sessenta? Assim ou assim ?

Se fosse assim , ele seria confundido com o um. Se fosse , então sessenta e

um deveria ser assim e não desta forma: .

Talvez você tenha pensado em escrever o sessenta assim: .

Uma boa idéia! Mas os povos da Mesopotâmia ainda não tinham inventado um símbolo que representasse o nada. Somente na fase final daquela civilização é que eles começaram a pensar num símbolo para o zero. Antes disso, por alguns séculos, a apresentação do sessenta e de alguns outros números causou muita confusão.

Não é esquisito que o zero, um símbolo para o nada, faça tanta falta?

Atividades:

1) Descubra que números estão escritos abaixo, no sistema de numeração mesopotâmico:

2) No sistema de base sessenta usado na Mesopotâmia, a falta do zero podia provocar certas confusões. Observe os números escritos abaixo e diga quais são as possíveis confusões.

3) Você consegue fazer a conta a seguir com os números escritos no sistema mesopotâmico? Não se esqueça: a base é sessenta.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c} \triangle \triangle \\ \triangle \triangle \end{array} \quad \begin{array}{c} \triangle \triangle \triangle \triangle \\ \triangle \triangle \triangle \triangle \end{array} \quad \begin{array}{c} \triangle \triangle \triangle \\ \triangle \triangle \triangle \end{array} \\
 + \\
 \begin{array}{c} \triangle \\ \triangle \triangle \triangle \triangle \end{array} \quad \begin{array}{c} \triangle \triangle \triangle \triangle \\ \triangle \triangle \triangle \triangle \end{array} \quad \triangle \\
 \hline
 \end{array}$$

4) Esta é uma conta que tem muita semelhança com a anterior porque estamos usando o nosso sistema sexagesimal, que serve para indicar horas e minutos. Será que você consegue fazer esta conta?

$$\begin{array}{r} 2\text{h}37\text{min} \\ +1\text{h}54\text{min} \\ \hline \end{array}$$

3.4 – Oficina 4: Numeração Chinesa

Na longa história da civilização chinesa, houve mais de um sistema numérico. O mais utilizado deles tinha estes símbolos:

一	1	十	10
二	2	百	100
三	3	千	1000
四	4		
五	5		
六	6		
七	7		
八	8		
九	9		

Esses símbolos ainda hoje são conhecidos tanto na China como no Japão. No entanto, para fazer cálculos, todos usam o mesmo sistema de numeração que nós.

O antigo sistema de numeração chinês tem regras interessantes. Veja os exemplos:

oitocentos e vinte e quatro
八百二十四
8 100 2 10 4
$8 \times 100 + 2 \times 10 + 4$

cinco mil e noventa e sete
五千九百七
5 1000 9 10 7
$5 \times 1000 + 9 \times 10 + 7$

Percebeu que é um sistema decimal e que tem semelhança com o nosso sistema? Compare a nossa maneira de escrever 824 com a deles. Notou que a idéia é a mesma? A diferença é que, no nosso caso, o 100 e o 10 ficam “escondidos”, não aparecem na escrita 824.

Atividade:

- 1) Os números a seguir estão escritos no sistema de numeração chinês tradicional. Escreva-os no nosso sistema.

a)

b)

1.5 – Oficina 5: Numeração Grega

Curiosamente, em contraste com a relevância de suas criações, o sistema de numeração estabelecido pelos gregos, em que usavam as letras de seu alfabeto para representar os números, não influenciou outros povos. Para você ter uma idéia de como era o sistema de numeração grego, veja alguns desses símbolos:

Números Gregos	Representação Corrente	Leitura	Números Gregos	Representação Corrente	Leitura	Números Gregos	Representação Corrente	Leitura
α	1	Alpha	ι	10	Iota	ρ	100	Rho
β	2	Beta	κ	20	Kappa	σ	200	Sigma
γ	3	Gamma	λ	30	Lambda	τ	300	Tau
δ	4	Delta	μ	40	Um	υ	400	upsilon
ϵ	5	Epsilon	ν	50	Nu	ϕ	500	Phi
$\digamma$	6	Digamma	ξ	60	Xi	χ	600	Chi
ζ	7	Zeta	$\omicron$	70	Omicron	ψ	700	Psi
η	8	Eta	π	80	Pi	ω	800	Omega
θ	9	theta	obsoleta	90	koppa	obsoleta	900	sampi

Observe como escreviam alguns números:

$\lambda\alpha$	$\sigma\mu\epsilon$	$\rho\delta$
31	245	104

3.6 – Oficina 6: Numeração Romana

Por sua vez, o sistema numérico romano não desapareceu por completo. Em nosso cotidiano, podemos ver os seus sinais em relógios ou nas fachadas de prédios antigos em que há a data da construção.

De maneira resumida, a seguir, estão as características do sistema numérico romano.

Símbolos usados e seus valores

Símbolo	I	V	X	L	C	D	M
Valor	1	5	10	50	100	500	1000

Regras do sistema romano:

- Os símbolos I, X e C podem ser repetidos até três vezes.

Exemplos:

$$\text{II} = 2 \qquad \text{III} = 3 \qquad \text{XX} = 20 \qquad \text{DCCC} = 800$$

- Se o símbolo de valor maior vem antes do de valor menor; somam-se seus valores.

Exemplos:

$$\text{LI} = 50 + 1 = 51 \qquad \text{DCCCX} = 500 + 100 + 100 + 100 + 10 = 810$$

- Se o símbolo de valor menor vem antes do de maior valor ou vem entre dois símbolos de valores maiores, faz-se uma subtração.

Exemplos:

$$\begin{aligned} \text{IV} &= 5 - 1 = 4 & \text{XL} &= 50 - 10 = 40 \\ \text{CD} &= 500 - 100 = 400 & \text{XIX} &= 10 + (10 - 1) = 19 \\ \text{DXL} &= 500 + (50 - 10) = 540 \end{aligned}$$

- Colocando-se um traço sobre o símbolo, seu valor é multiplicado por 1000.

Exemplo:

$$\overline{V} = 5000$$

Atividades:

- 1) Será que você entendeu as idéias básicas do sistema romano? Para saber, escreva nesse sistema os números 125, 190 e 218.
- 2) Se escrevermos a data da proclamação da Independência do Brasil em algarismos romanos, fica: VII de IX de MDCCCXXII. Escreva essa data usando algarismos de nosso sistema de numeração.
- 3) Muitos prédios antigos têm o ano de sua construção gravado na fachada, da maneira que se vê na figura:

Em que sistema de numeração foi escrito o ano da construção? Escreva este número em nosso sistema atual.

- 4) Traduza do sistema de numeração romano para o nosso ou do nosso para o romano.

XLIX	
	401
	675
	1809
	1999
MMI	
$\overline{\text{IVCMXLVIII}}$	

3.7 – Oficina 7: Numeração Maia

Já examinamos vários sistemas de numeração. Foram propostas questões como: O que vocês observaram até agora? O que repetiu nos sistemas de numeração? O que não apareceu até este momento? Questões estas que levaram o aluno a concluir que nenhum dos sistemas estudados até agora usava o zero, que é tão importante em nosso sistema.

Mas há um sistema antigo em que se utilizava o zero. É o sistema dos maias. Esse povo, que habitou a América Central durante mais de mil anos, desenvolveu uma cultura sofisticada. Eles criaram um sistema de escrita bastante evoluído e também calendários muito precisos.

Além disso, os maias desenvolveram um sistema de numeração complexo. Por essa razão, vamos mostrá-lo apenas em parte. Veja a seguir a representação dos primeiros números:

1	•	8	••• ou ••	15	≡ ou
2	•• ou ••	9	•••• ou •••	16	≡ ou •••
3	••• ou •••	10	≡ ou	17	≡ ou •••
4	•••• ou ••••	11	•• ou ••	18	≡ ou •••
5	— ou	12	•• ou ••	19	••• ou •••
6	• ou •	13	••• ou •••		
7	•• ou ••	14	•••• ou ••••		

Representação dos dezenove primeiros números na numeração maia.

E agora, percebeu o padrão? Adivinhe a continuação: qual era o símbolo para o 20?

Seria este ?

Não, não era essa a maneira de representar o 20. Era desta forma:

A concha representava o zero. Agora, observe a representação de mais alguns números depois do 20 para entender um pouco mais o sistema:

•	••	•••	••••	•	••	•••	••••	•
21	22	23	24	25	26	27	28	29
30								

•	1 x 20	
•••	+	= 39
≡	19	

••	2 x 20	
•	+	= 40
•	0	

•••	3 x 20	
•	+	= 66
•	6	

—	5 x 20	
•	+	= 100
•	0	

3.8 – Oficina 8: Comparando Sistemas de Numeração

Agora que você já conhece vários sistemas de numeração, vamos destacar e comparar algumas de suas características. Foram abordados questionamentos que levaram os alunos a deduzirem as seguintes conclusões, que ficaram registradas no quadro-negro:

✓ **As representações dos números um, dois e três.**

Veja como elas se parecem em todos estes sistemas:

Sistema	Representação		
Egípcio
Mesopotâmico
Romano	I	II	III
Chinês
Maia	•	••	•••

✓ **Sobre a posição dos símbolos.**

- No sistema egípcio, tanto faz escrever ou . No primeiro caso, você terá $10 + 1$ e no segundo, $1 + 10$, ou seja, sempre terá 11.
- No sistema romano, a ordem pode fazer diferença: IV é quatro e VI é seis.
- No sistema mesopotâmico, a posição também é fundamental. Uma pequena mudança na posição dos símbolos transforma 62 em 121!

$$60 + 2 = 62$$

$$2 \times 60 + 1 = 121$$

Conclusão: os sistemas mesopotâmico e romano são posicionais, ou seja, mudando a posição dos símbolos, muda-se o número representado. Isso não acontece no sistema egípcio.

Para você pensar: o sistema que usamos é posicional?

✓ **O princípio aditivo.**

Um sistema de numeração apresenta o princípio aditivo quando o número representado é a soma dos valores de cada símbolo. Assim:

$$100 + 100 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1 = 232$$

O sistema romano tem o princípio aditivo. Mas atenção, ele também tem o princípio subtrativo.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{C} & \text{D} & \text{X} & \text{X} & \text{IV} & & \\ 500 & - 100 & + 10 & + 10 & + (5 - 1) & = & 424 \end{array}$$

✓ E as contas?

Finalmente, comparando os sistemas, podemos saber se são adequados para fazer contas. No sistema egípcio, é fácil fazer algumas contas, mas é preciso escrever muito. Para fazer adições, basta juntar os símbolos e, se preciso, fazer trocas:

Dez foram trocados por um .

Na comparação entre os diversos sistemas, um outro ponto importante é a questão do zero. Dentre os sistemas aqui mostrados, a maioria não possui uma representação para o nada. Mesmo na numeração dos mesopotâmios, o zero teve pouca importância, pois só apareceu na época final daquela civilização. Os maias, por sua vez, desenvolveram e fizeram amplo uso de uma representação para esse número.

Voltando à nossa pergunta inicial: Qual desses sistemas apresenta vantagens? É muito difícil responder essa pergunta, já que estamos tão acostumados com o atual sistema, o hindu-arábico, que qualquer julgamento seria parcial.

Para avaliarmos um sistema numérico, devemos levar em conta não apenas a facilidade para representar quaisquer quantidades, mas também se o sistema é cômodo ou não para realizar cálculos.

Por exemplo, com o sistema egípcio não é difícil fazer uma adição, mas com o sistema romano sentimos uma maior dificuldade. Aliás, entre os romanos ele não era mesmo utilizado, as contas eram feitas em ábacos.

Com a intensificação do comércio, da navegação, da urbanização, etc., a necessidade de calcular foi-se tornando maior. O aparecimento de um sistema de numeração mais eficiente, que permitiu escrever os números e calcular com eles de forma mais simples e rápida, tornou ultrapassados os outros sistemas. Este sistema que citado anteriormente é o nosso atual sistema hindu-arábico, usado hoje praticamente no mundo todo.

Sua criação não foi obra de um único homem, nem mesmo de um único povo. Tampouco se deu da noite para o dia. Foi o resultado de um grande esforço que envolveu muitas civilizações, durante séculos.

Considerações Finais

Estas oficinas tiveram o intuito de sanar a curiosidade dos alunos acerca de sistemas de numeração, propiciando a reconstrução histórica de sua evolução e a construção do conhecimento por esse aluno. Elas fizeram ainda com que os alunos entendessem melhor a estruturação do atual sistema de numeração hindu-arábico, além de proporcionar ao professor o entendimento dos obstáculos epistemológicos que os alunos enfrentam para a compreensão deste conteúdo.

Capítulo IV: Análise das oficinas sobre sistemas de numeração sob uma perspectiva bachelardiana

4.1 – Introdução

Esse capítulo pretende analisar, à luz do conceito de Obstáculo Epistemológico concebido originalmente por Bachelard, as oficinas apresentadas no capítulo anterior. Cabe ressaltar inicialmente, que elaboramos esta sequência didática de oficinas procurando auxiliar o aluno na construção do significado deste conteúdo não somente para a aquisição, de sua parte, da consciência da existência de outros sistemas de numeração, mas ainda para sua compreensão dos processos que levaram à convergência do atual sistema hindu-arábico, sob uma perspectiva comparativa de vantagens e desvantagens na utilização de cada sistema para efeitos de determinados fins também vinculados a necessidades culturais. Para isto, procuramos motivar a aprendizagem dentro de uma abordagem prática munida de embasamento histórico.

Através destas oficinas, foram mostradas maneiras diferentes de representar os números, a partir das quais os alunos tornaram-se capazes de observar semelhanças e diferenças entre diversos sistemas de numeração. Além disso, elas puderam atender a curiosidade dos alunos sobre o surgimento dos primeiros números, propiciando a construção de seu conhecimento por meio dessa reconstrução histórica, bem como permitindo-lhes avaliar qual desses sistemas de numeração foi mais adequado para um dado fim e porquê do sistema hindu-arábico tornar-se predominante.

Para o professor, tais oficinas contribuíram para um melhor entendimento das dificuldades que os alunos enfrentam quando estudam sistemas de numeração, bem como para o esclarecimento dos obstáculos epistemológicos que persistem no ensino/aprendizagem desse conteúdo, reinterando a necessidade dessa aprendizagem ao fazer com que tais alunos construam seu próprio conhecimento.

4.2 – Síntese dos principais resultados

Os resultados obtidos de uma forma geral apontam para uma defasagem em relação aos conteúdos:

- **A produção dos alunos mostrou que tiveram pouco contato com os diversos sistemas de numeração.**

Poucos sabiam que existiam outros sistemas de numeração além do atual sistema hindu-arábico e do sistema de numeração romano. Os resultados obtidos apontam para o fato de que tal entrave pode ser solucionado se o professor dedicar aos sistemas de numeração uma importância semelhante àquela dada às operações básicas, evitando usar a História da Matemática como mero acessório didático, mas sim como instrumento definidor de estratégias pedagógicas capazes de produzir um estudo mais significativo.

- **Havia pouca familiaridade com a noção de agrupamento.**

No início enfrentamos várias dificuldades, uma vez que alguns alunos não conseguiam resolver a atividade 2 da oficina a qual pedia para eles imaginarem uma maneira de contar rebanhos na pré-história, pois desconheciam outras formas de agrupamento. Foi necessário então orientá-los sobre a definição de agrupamento para então chegarem às conclusões desta atividade.

- **Haviam dificuldades estruturais quanto ao cálculo.**

Nessa atividade, alguns alunos não compreendiam a troca de dez unidades por uma dezena ou vice-versa. Nesse sentido, procuramos interferir em tais concepções, enfatizando a obrigatoriedade dessas trocas, sempre estabelecendo relações com o dinheiro. Nesse caso, enfatizou-se a equivalência entre dez moedas de 1 centavo com uma de dez centavos.

A oficina 2, sobre o sistema de numeração egípcio, contribuiu para que alguns alunos, que ainda não sabiam o porque do “vai um” ou “empreta um”, compreendessem o significado de tais expressões. Através dessas atividades, tais alunos puderam atribuir mais significados aos conceitos aqui envolvidos, o que não era a princípio, nosso objetivo, em particular, nessa atividade.

- **Às vezes os alunos lidavam com a Matemática como se estivessem num jogo de azar, tentando de tudo sem saber o porquê.**

Em muitos momentos, ao serem solicitados a explicar e justificar suas ações, os alunos utilizaram frases desconexas, o que muitas vezes lançou luzes sobre as concepções à luz das quais tais alunos lidavam com o conceito de sistema de numeração e de maneira mais geral, com matemática.

- **Dificuldades no uso da base 60.**

Uma das oficinas em que os alunos encontraram maior dificuldade foi a de número 3, sobre o sistema de numeração mesopotâmico, na qual foi utilizada a base 60. Nesse caso, em particular, pode-se interpretar a dificuldade vivenciada como um obstáculo epistemológico que foi superado, na medida em que puderam gradativamente fazer operações com horas, minutos e segundos, estruturalmente equivalente a um sistema sexagesimal.

- **Percebemos avanços cognitivos quanto às categorias de análise e investigação.**

Interpretar as questões se constituiu numa das principais dificuldades dos estudantes, pois não tiveram oportunidade de desenvolver esta competência, que envolvia um trabalho cognitivo mais árduo. Foram acostumados a manusear algoritmos, a reproduzir determinadas questões e, portanto estavam totalmente despreparados para este tipo de atividade. Numa situação problema, a etapa seguinte à interpretação das questões, basicamente se sustenta na resolução de cálculos ou expressões algébricas.

Entretanto, foi possível perceber avanços significativos neste sentido. Os alunos passaram a ler com mais atenção o exercício, procurando informações e utilizando os símbolos matemáticos de forma mais ordenada. Estes avanços se devem em parte por termos criado um ambiente no qual as situações que envolvendo os conteúdos matemáticos tenham sido problematizadas, estimulando o educando a formular e reformular hipóteses, a justificar suas respostas, a argumentar e contra-argumentar, de maneira a poder formar, enriquecer e reorganizar os conceitos matemáticos que possui.

- **Construção da tabela comparativa entre os diversos sistemas de numeração**

Para Bachelard, todo conhecimento é construído através de uma resposta à uma pergunta, portanto sem dúvidas não há conhecimento, nada é evidente e sim, tudo é construído. Pensando nisto, foram levantados questionamentos que levaram os alunos a construir uma tabela comparativa entre os diferentes sistemas de numeração, na oficina 8, que serviu de auxílio para a descoberta das vantagens e desvantagens entre os diversos sistemas de numeração. E além disso, estes questionamentos motivaram a aprendizagem, obtendo assim um maior rendimento e um aluno mais crítico.

A reflexão sobre tais questionamentos propiciou ao aluno uma maior consciência a respeito dos diferentes processos passados por distintas civilizações no decorrer da história no que concerne a seus sistemas de numeração, o que inclui obstáculos enfrentados na evolução de tais sistemas bem como a luta para superá-los envolvendo tentativas de tornar seus sistemas de numeração mais práticos.

- **O trabalho em trios foi eficiente.**

Em contato com educadores e com alunos, vimos que a eficiência da metodologia do trabalho em trios dentro do processo de ensinar e aprender não é reconhecida por todos os professores de matemática, devido a uma falsa suposição de que o aluno resolve uma determinada questão apenas com a ajuda do colega.

De acordo com Bachelard, pode-se pesquisar os obstáculos epistemológicos a partir de dificuldades resistentes entre os alunos, procurando confrontá-las. Por isso, podemos dizer que o trabalho em grupo foi eficiente, pois percebemos que um ensino mais solidário ajuda o aluno a expressar melhor suas idéias, à medida que precisará muitas vezes confrontá-las com as dos colegas.

4.3 – Respostas às nossas questões de pesquisa

Estaremos procurando responder nossas questões de pesquisa à luz dos resultados obtidos por meio da experimentação.

✓ Quais as vantagens e desvantagens dos diversos sistemas de numeração?

Os alunos perceberam que as leis que regem os diferentes sistemas de numeração produzidos pela humanidade não são universais e através de questionamentos, puderam comparar esses sistemas e então observar suas vantagens e desvantagens em relação ao atual sistema de numeração hindu-arábico.

A reflexão sobre tais questionamentos pôde propiciar ao aluno uma maior consciência a respeito dos diferentes processos passados por distintas civilizações no decorrer da história no que concerne a seus sistemas de numeração, o que inclui obstáculos enfrentados na evolução de tais sistemas bem como a luta para superá-los envolvendo tentativas de tornar seus sistemas de numeração mais práticos.

✓ Por que convergiu-se para o atual sistema hindu-arábico?

A busca pela resposta da questão anterior colocou em evidência a vantagem de um sistema de numeração posicional, pois apesar de não ser muito transparente, porque o valor de cada símbolo depende da posição, ele é muito mais econômico que um sistema aditivo, pois uma quantidade finita de símbolos - de dez, no caso do sistema hindu-arábico-, é suficiente para registrar qualquer número.

✓ O quão inevitável foi tal processo?

A busca de soluções para esta pergunta levaram os alunos a estabelecerem novas relações, a refletirem sobre os diferentes sistemas de numeração e os procedimentos que conduziram à esses sistemas, a argumentar a favor ou contra essas diferentes propostas, a validar determinados conhecimentos e a rejeitar outros. No decorrer desse processo, começaram a surgir as vantagens do atual sistema de numeração hindu-arábico.

4.4 – Sugestões para o ensino, decorrentes das conclusões

Acreditamos que o professor deve procurar modificar sua prática em sala de aula, buscando utilizar instrumentos, construídos pelos alunos ou não, para auxiliar a representação, incentivando o uso de desenhos, esboços e argumentação, bem como tornando o ato de ensinar dinâmico, interativo e criativo.

O que importa não é que uma atividade está categorizada como “tradicional ou inovadora”, mas sim que as propostas de trabalho, particularmente no que tange ao ensino/aprendizagem de sistemas de numeração, reúnam condições tais como partir dos problemas formulados pelo uso da numeração escrita; contemplar diferentes procedimentos; admitir diferentes respostas; gerar alguma aprendizagem a respeito do sistema de numeração em todos os membros do grupo; favorecer o debate e a circulação de informação; garantir a interação com a numeração escrita atual; propiciar uma crescente autonomia na busca de informação e aproximar, na medida do possível, o uso escolar do uso social da notação numérica.

O presente trabalho sugere o uso da História da Matemática como instrumento importante na organização do conteúdo matemático que se quer ensinar considerando ainda uma abordagem epistemológica centrada na idéia de obstáculo epistemológico concebida originalmente por Gaston Bachelard.

4.5 – Conclusão

Segundo Gaston Bachelard (1996), não há aprendizagem, ou seja, construção do conhecimento, se não houver questionamentos, perguntas, dúvidas e incertezas. Pudemos perceber, ao longo deste trabalho, que além das nossas três perguntas, concebidas inicialmente, foram surgindo outras (por exemplo, o Porque do “vai um”?), que fizeram com que o conhecimento sobre sistemas de numeração fosse construído.

No ensino, a idéia de obstáculo epistemológico originada em Bachelard representa um instrumento importante na medida em que questionamentos e conflitos podem servir de motivadores relevantes para o ensino de Matemática de forma significativa, propiciando e obtendo a construção e a compreensão dos conteúdos.

Procuramos demonstrar, ao longo desta tese, a necessidade e a possibilidade de trabalhar sistemas de numeração utilizando a idéia de gerar dúvidas e questionamentos. Ou seja, foi através de questionamentos tais como Por que convergiu-se para o atual sistema de numeração hindu-arábico?, Será que era inevitável chegar a esse sistema?, De onde vêm os algarismos? que os alunos tiveram uma aprendizagem motivada, obtendo assim um maior rendimento, bem como um espírito mais crítico e questionador.

A reflexão sobre tais questionamentos propiciou ao aluno uma maior consciência a respeito dos diferentes processos passados por distintas civilizações no decorrer da história no que concerne a seus sistemas de numeração, o que inclui obstáculos enfrentados na evolução de tais sistemas bem como a luta para superá-los envolvendo tentativas de tornar seus sistemas de numeração mais práticos.

4.6 – Sugestões para futuros estudos

A realização da pesquisa e análise das oficinas segundo a perspectiva de obstáculo epistemológico nos leva a sugerir o uso de tal conceito epistemológico em outras áreas da Matemática dentro do currículo escolar do Ensino Fundamental ou Médio.

Bibliografia

AABOE, Asger. Episódios da História Antiga da Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

ALFONSO, Bernardo Gómez. La numeración, evolución y comparación de sistemas. In: Numeracion y Calculo. Editorial Sintesis, pp. 31-63.

BACHELARD, Gaston. A formação do espírito científico. Rio de Janeiro: Editora Contraponto, 1996.

BOYER, Carl B. História da Matemática. Tradução de Elza F. Gomide. Editora Edgard Blücher. São Paulo, 1996.

BROLEZZI, Antonio Carlos. A tensão entre o discreto e o contínuo na história da matemática e no ensino de matemática. Faculdade de Educação da USP, Tese de doutorado, 1996.

BROUSSEAU, Guy. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. RDM, vol.4, nº 2, pp. 165-198. Grenoble, 1983.

BKOUICHE, Rudolf. Epistémologie, histoire et enseignement des mathématiques. For the learning of mathematics. An International Journal of Mathematics Education, vol.17, number 1, pp. 34-42. Canada, FLM Publishing Association Vancouver, B.C., 1997.

CAJORI, Florian. A history of mathematical notations. Vol I. Chicago: Open Court Pub. Co., 1928-1929.

DAMEROW, Peter. Números e o nascimento da escrita na Mesopotâmia. In: Ciência e Arte: imaginário e descoberta. São Paulo: Estação Ciência, USP, 2003, pp 223-252.

EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.

GRATTAN-GUINNESS, Ivor. Alguns aspectos negligenciados na compreensão e ensino de números e sistemas numéricos. In: Zetetiké, vol.7, nº 11, pp.9-27, 1999.

GUNDLACH, Bernard H. Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Números e Numerais. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual Editora, 1992.

IFRAH, Georges. História Universal dos Algarismos: A Inteligência dos Homens Contada pelos Números e pelo Cálculo. Tradução de Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1997.

IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. A noção de "Obstáculo Epistemológico" e a Educação Matemática. In: Educação Matemática: uma introdução. São Paulo: Educ, PUC, 1999, pp. 89-113.

IMENES, Luiz Márcio, LELLIS, Marcelo. Os números na história da civilização. Coleção Vivendo a Matemática. São Paulo: Scipione, 1999.

IMENES, Luiz Márcio. A numeração indo-arábica. Coleção Vivendo a Matemática. São Paulo: Scipione, 1999.

JAPIASSU, Hilton. A epistemologia histórica de G. Bachelard. In: Introdução ao pensamento epistemológico. Rio de Janeiro: Francisco Alves Editora, 1992, pp.61-81.

LERNER, Delia, SADOVSKY, Patrícia. O sistema de numeração: um problema didático. In: PARRA, Cecília, SAIZ, Irma, Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

MACHADO, Nilson J. Epistemologia e Didática: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. São Paulo: Cortez, 1996.

PÉREZ, Julia Centeno. Dificuldades, errores, conflictos y obstáculos. In: Números decimales? Por qué? Para qué? Editorial Síntesis, pp. 135-149.

RENN, Jürgen. Historical Epistemology and the Advancement of Science. Preprint do Max Planck Institut für Wissenschaftsgeschichte. Berlin, 1997

RENN, Jürgen. Historical Epistemology and Interdisciplinarity. In: Kostas Gavroglu et al. (eds.) Physics, Philosophy and the Scientific Community, Dordrecht: Kluwer 1995, pp. 241-251.

VERGNAUD, Gérard. Epistemology and Psychology of Mathematics Education. Mathematics and Cognition: A research synthesis by the international group for the psychology of Mathematics Education. ICMI Study Series, pp. 14-30. Cambridge University Press, 1990.