Convergência de Conjuntos de Nível de Polinômios Homogêneos

Guilherme R. A. Molina Benites

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Análise**
Orientador: **Profa. Dra. Mary Lilian Lourenço**

-São Paulo, junho de 2006-

Convergência de Conjuntos de Nível de Polinômios Homogêneos

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação de mestrado devidamente
corrigida e defendida por Guilherme R. A. M. Benites
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 23 de junho de 2006.

Banca examinadora:

- Profa. Dra. Mary Lilian Lourenço — IME-USP
- Profa. Dra. Maria Sueli Marconi Roversi — IMECC-UNICAMP
- Prof. Dr. Leonardo Pellegrini Rodrigues — USP Leste

À Paula

Agradecimentos

Devo o meu primeiro agradecimento ao Prof. Benê, que me ensinou Matemática ao longo do Ensino Médio. Seu carisma e sua dedicação foram fundamentais para a escolha que fiz ao concluir a primeira etapa da minha vida acadêmica.

Agradeço também aos meus familiares, mas principalmente a meus pais, Ilka e Luis, que sempre me incentivaram e apoiaram, independentemente das escolhas que fiz. É impossível expressar em palavras o que significam para mim.

Agradeço aos colegas de graduação, sobretudo à turma do “Básico 2000”. É uma imensa satisfação saber que os tenho por perto, ainda que tenhamos seguido rumos distintos. Em especial, pela ajuda e pela amizade, gostaria de agradecer a Bruno Leite e a Sérgio Malacrida. Ao primeiro, ainda devo minha gratidão pela ajuda nos momentos finais da conclusão desse trabalho.

Também não posso deixar de agradecer a dois colegas que colaboraram imensamente durante o mestrado: Vinicius Cifú Lopes, companheiro em diversas disciplinas, e Neusa Nogas, que paciente-mente assistiu à maioria de meus seminários.

Agradeço, ainda, aos colegas de Risk Office, em especial a Fábio Perdiz, Fernando Lovisotto, Leonardo Bortoloto, Roberto Masaishi Yoshikawa e Wanderlei Lima.

À Paula Stefanoni, por ter sido responsável por tornar tudo isso mais fácil e agradável.

À banca examinadora, pelas sugestões apresentadas para a versão final. Em especial, ao Prof. Dr. Leonardo Pellegrini, pelos aprimoramentos sugeridos para algumas demonstrações apresentadas ao longo da dissertação.

E, finalmente, à minha orientadora, Prof. Dra. Mary Lilian Lourenço. Não posso agradecer-lhe somente pela orientação. Tudo o que aprendi trabalhando com ela, tanto pessoal como profissionalmente, é a maior lição que fica desse período. Ficaria feliz em poder, algum dia, ensinar a alguém tudo o que ela me ensinou.

“Talvez o mundo não seja pequeno
Nem seja a vida um fato consumado
Quero inventar o meu próprio pecado
Quero morrer do meu próprio veneno.”

(Chico Buarque e Gilberto Gil, em “*Cálice*” - 1973)

Resumo

O objetivo principal desse trabalho é estudar algumas caracterizações das convergências pontual e uniforme de seqüências de polinômios homogêneos em espaços de Banach através de alguns tipos de convergência topológica de seus conjuntos de nível.

Para isso, definimos alguns tipos de convergência de conjuntos e analisamos suas principais propriedades. Inicialmente, encontramos caracterizações de convergências de funcionais lineares contínuos, que são generalizadas para o contexto de polinômios homogêneos, tanto no caso real como no caso complexo. Esse trabalho é baseado no texto científico de J. Ferrera, publicado em 1998 no periódico *Transactions of the American Mathematical Society*, vol.350.

Abstract

The main purpose of this work is to study characterization of pointwise and uniform convergence of sequences of homogeneous polynomials on a Banach space by means of some kinds of topological convergence of their level sets.

We define some kinds of convergence of sets and analyze their main properties. We first study some characterization of convergence of sequences of continuous linear functionals and then generalize them to the context of homogeneous polynomials, both in the real and the complex cases. The main results presented here were obtained by J. Ferrera, and published at *Transactions of the American Mathematical Society*, vol.350.

Conteúdo

Introdução	3
Notações	4
1 Preliminares	5
1.1 Estruturas em Espaços Vetoriais	5
1.2 Teoremas Fundamentais e Espaços Reflexivos	7
1.3 Topologias Fraca e Fraca- $\star$	10
2 Convergência de Conjuntos	14
2.1 O Espaço $CL(X)$	14
2.2 A distância de Hausdorff	15
2.3 A Convergência de Wijsman	17
2.4 A convergência de Kuratowski	19
2.4.1 A topologia de Fell	22
2.4.2 Espaços com nice closed balls	24
2.5 r -Convergência	27
2.6 A Convergência de Mosco	30
3 Convergência de conjuntos de nível de funcionais lineares contínuos	37
3.1 Convergência Fraca- $\star$	38
3.2 Convergência em Norma	43
4 Polinômios Homogêneos	52
4.1 Aplicações Multilineares	52
4.2 Aplicações Multilineares Simétricas	58
4.3 Polinômios	61
4.4 Diferenciabilidade	65

5	Convergência de conjuntos de nível de polinômios	68
5.1	Introdução	68
5.2	Convergência no sentido de Kuratowski	70
5.3	Convergência no sentido de Wijsman	83
5.4	r -Convergência	91
	Bibliografia	98

Introdução

Esse trabalho apresenta algumas caracterizações de convergências, tanto de funcionais lineares contínuos como de polinômios homogêneos, a partir de alguns tipos de convergência de seus conjuntos de nível.

As relações apresentadas no caso de funcionais lineares contínuos foram obtidas por G. Beer, em [3], enquanto que J. Ferrera, em [8], apresentou uma generalização destes resultados no contexto de polinômios homogêneos em espaços de Banach. O estudo desses textos exige uma série de pré-requisitos, que são apresentados da forma como se segue.

No Capítulo 1, estudamos espaços normados, espaços de Banach e algumas convergências que ocorrem nesses espaços: convergência em norma, convergência fraca e convergência fraca- $\star$. Também se apresentam alguns resultados sobre espaços reflexivos.

O Capítulo 2 dedica-se ao estudo de alguns tipos de convergências de conjuntos, que serão utilizadas nas caracterizações a que visamos encontrar.

No Capítulo 3, baseado em [3], estudamos as relações existentes entre convergência de funcionais lineares contínuos e convergência de seus conjuntos de nível.

No Capítulo 4, desenvolvemos o estudo de aplicações multilineares, de polinômios e de suas convergências, provando alguns resultados básicos dessa teoria. Estuda-se também, de forma bastante superficial, a diferenciabilidade de polinômios.

No Capítulo 5, baseado em [8], algumas relações estudadas no capítulo 3 são estendidas para o contexto de polinômios homogêneos em espaços de Banach. Além disso, estudam-se relações que ocorrem apenas nesse contexto.

Notações

Ao longo desse trabalho, as seguintes notações serão utilizadas:

$\mathbb{N}_0$: o conjunto dos números naturais;

$\mathbb{N}$: o conjunto dos números naturais positivos;

$\mathbb{K}$: o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;

$B(x, \epsilon)$: a bola aberta de centro em x e raio ϵ ;

$\overline{B(x, \epsilon)}$: a bola fechada de centro em x e raio ϵ , em um espaço métrico;

$B[x, \epsilon]$: a bola fechada de centro em x e raio ϵ , em um espaço normado;

$D(x, \epsilon)$: o disco aberto no plano complexo de centro em x e raio ϵ ;

e_n : a seqüência $(0, 0, \dots, 0, \overbrace{1}^n, 0, \dots)$;

V^* : espaço dual de um espaço vetorial V ;

E' : espaço dual de um espaço normado E ;

E'' : espaço bidual de um espaço normado E ;

$[x, y]$: o conjunto $\{(1 - \lambda)x + \lambda y : \lambda \in [0, 1]\}$ em um espaço normado E sobre $\mathbb{K}$;

$c_0(\mathbb{K})$: o espaço das seqüências em $\mathbb{K}$ convergentes a 0;

$\Re(A)$: parte real do conjunto A , dada por $\Re(A) = \{\Re(z) : z \in A\}$, onde $\Re(z)$ denota a parte real de $z \in A$.

Capítulo 1

Preliminares

Nesse capítulo, apresentaremos alguns fatos relevantes sobre espaços de Banach, que serão utilizados ao longo da dissertação.

1.1 Estruturas em Espaços Vetoriais

Nessa seção, introduziremos o conceito de norma em um espaço vetorial, e de convergência em norma nesse espaço. Também apresentaremos alguns resultados sobre hiperplanos, que serão utilizados no capítulo 3.

Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Vamos definir a noção de norma sobre esse espaço. Como passo intermediário, definiremos a noção de semi-norma sobre E .

Definição 1.1. *Uma semi-norma sobre E é uma função $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

- i) $p(x) \geq 0, \forall x \in E$;*
- ii) $p(\lambda x) = |\lambda|p(x), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E$;*
- iii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in E$.*

Uma norma sobre E é uma função $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as propriedades acima e, além delas, a propriedade seguinte:

$$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0.$$

O espaço $(E, \| \cdot \|)$ é dito espaço normado. Quando não houver risco de ambigüidade, denotaremos esse espaço apenas por E . A norma de E induz, naturalmente, uma topologia sobre E , conhecida por topologia da norma.

Ao longo dessa dissertação, a seguinte notação será utilizada: se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ converge a $x \in E$ na topologia da norma, escreveremos $x = \text{s-} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ou $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$.

Cabe observar que o item *iii)* de sua definição garante que a norma é uma função convexa. Uma norma em E é dita **estritamente convexa** quando, para todos $x, y \in E$ com $x \neq y$ e $\|x\| = \|y\| = 1$, tem-se $\|x + y\| < 2$. Nesse caso, diz-se que o espaço normado E é estritamente convexo.

A seguir, apresentaremos a definição de hiperplano, e alguns resultados que serão utilizados mais adiante. Cabe ressaltar que a definição pode ser dada para espaços vetoriais em geral.

Definição 1.2. *Seja V um espaço vetorial não-nulo. Um hiperplano de V é um subespaço próprio $W \subset V$ com a seguinte propriedade: se $\tilde{W}$ for um subespaço de V com $W \subseteq \tilde{W} \subseteq V$, então $W = \tilde{W}$ ou $\tilde{W} = V$.*

Exemplo 1.3. Se V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com $\dim_{\mathbb{K}} V = n < +\infty$, então todo subespaço de V com dimensão $n - 1$ é um hiperplano de V . Pode-se mostrar (vide [5]) que a recíproca desse resultado é verdadeira.

O teorema seguinte caracteriza os hiperplanos em espaços de dimensão qualquer. Sua demonstração será omitida. Como referência, podemos citar [5].

Teorema 1.4. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Se $f \in V^*$ é um funcional linear não-nulo, então $\ker f$ é um hiperplano de V . Reciprocamente, se H é um hiperplano de V , então existe um funcional linear não-nulo $f \in V^*$ tal que $\ker f = H$.*

Corolário 1.5. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, e sejam $f, g \in V^*$. Então:*

$$\ker f = \ker g \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \text{ tal que } f = \lambda g.$$

Demonstração. Se existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $f = \lambda g$, então é claro que $\ker f = \ker g$. Reciprocamente, observe que, se algum dos funcionais for nulo, o outro também deve ser, e não há o que demonstrar. Suponhamos, então, que f e g não são nulos.

Como $\ker f$ é um hiperplano, existe $v_0 \in V$ tal que $V = \ker f + [v_0]$. Então, se $x \in V$, $x = x_0 + \alpha v_0$, com $x_0 \in \ker f$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Portanto:

$$f(x) = f(x_0 + \alpha v_0) = \alpha f(v_0) \quad \text{e} \quad g(x) = g(x_0 + \alpha v_0) = \alpha g(v_0).$$

Como $g(v_0) \neq 0$, podemos tomar:

$$\lambda = \frac{f(v_0)}{g(v_0)}.$$

Temos, então, $f(x) = \lambda g(x)$, $\forall x \in V$. □

Observação 1.6. É possível generalizar esse resultado, da seguinte forma:

Sejam $f_1, f_2, \dots, f_n, g$ funcionais lineares em V . Então, $g = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n$, com $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$, se e somente se $\bigcap_{i=1}^n \ker(f_i) \subseteq \ker(g)$.

No entanto, o resultado mais simples, dado pelo lema 1.5, é suficiente ao nosso contexto.

1.2 Teoremas Fundamentais e Espaços Reflexivos

Nessa seção, apresentaremos dois dos teoremas fundamentais da Análise Funcional, que serão utilizados ao longo dessa dissertação. As demonstrações dos resultados principais serão omitidas, por fugirem ao escopo desse trabalho. Como referência, podemos citar os livros [9] e [12].

Cabe ressaltar que, quando nos referirmos ao espaço dual de um espaço normado E , estaremos trabalhando com a seguinte norma:

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|.$$

A seguir, apresentaremos o teorema de Hahn-Banach. Esse teorema trata da extensão de funcionais lineares, e é um dos principais teoremas da Análise Funcional. Grande parte de suas aplicações não se dá de forma direta, e sim a partir de seus corolários.

Teorema 1.7. (Hahn-Banach) Sejam E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $p : E \rightarrow \mathbb{K}$ uma seminorma em E , $M \subseteq E$ um subespaço próprio de E e $\varphi : M \rightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear tal que $|\varphi(x)| \leq p(x), \forall x \in M$. Então, existe $\bar{\varphi} \in E'$ tal que:

1. $\bar{\varphi}|_M = \varphi$;
2. $|\bar{\varphi}(x)| \leq p(x), \forall x \in E$.

O corolário seguinte garante que, em um espaço normado não-trivial, sempre existe um funcional linear que separa pontos desse espaço.

Corolário 1.8. Sejam E um espaço normado sobre $\mathbb{K}$ e $x_0 \in E$, com $x_0 \neq 0$. Então, existe $\phi \in E'$ tal que $\|\phi\| = 1$ e $\phi(x_0) = \|x_0\|$.

Demonstração. Seja M o subespaço gerado por x_0 , isto é, $M = [x_0]$, e considere $\varphi : M \rightarrow \mathbb{K}$ dada por $\varphi(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|$, com $\lambda \in \mathbb{K}$. É fácil ver que φ é linear.

Além disso, $|\varphi(\lambda x_0)| = |\lambda| \|x_0\| = \|\lambda x_0\|$, donde $\forall x \in M$, $|\varphi(x)| = \|x\|$. Logo, φ é contínuo e $\|\varphi\| = 1$.

Por Hahn-Banach, existe $\phi \in E'$ tal que $\phi|_M = \varphi$ e $|\phi(x)| \leq \|x\|, \forall x \in E$. Mas:

$$\|\phi\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} |\phi(x)| \geq \sup_{\substack{x \in M \\ \|x\|=1}} |\phi(x)| = \sup_{\substack{x \in M \\ \|x\|=1}} |\varphi(x)| = \|\varphi\| = 1.$$

Logo, $\|\phi\| = 1$ e $\phi(x_0) = \varphi(x_0) = \|x_0\|$. □

O corolário seguinte apresenta uma outra forma para a obtenção da norma de um vetor no espaço normado E .

Corolário 1.9. *Seja E um espaço normado. Para cada $x \in E$, vale que:*

$$\|x\| = \sup_{\|\varphi\|=1} |\varphi(x)|.$$

Demonstração. Seja $x \in E$. Para cada $\varphi \in E'$, tem-se $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\|\|x\|$. Então:

$$\sup_{\|\varphi\|=1} |\varphi(x)| \leq \|x\|.$$

Se $x \neq 0$, pelo corolário anterior existe $\phi \in E'$ tal que $\|\phi\| = 1$ e $\phi(x) = \|x\|$. Logo, $\sup_{\|\varphi\|=1} |\varphi(x)| = \|x\|$. Se $x = 0$, a igualdade é trivial. □

Finalmente, o próximo corolário nos diz que existe um funcional linear que fornece a distância de um ponto a um subespaço próprio fechado do espaço em questão.

Corolário 1.10. *Sejam E um espaço normado e $F \subseteq E$ um subespaço próprio e fechado de E . Seja $x_0 \in E \setminus F$. Então, existe $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ tal que:*

1. $\|f\| = 1$;
2. $f(x) = 0, \forall x \in F$;
3. $f(x_0) = \inf_{x \in F} \|x_0 - x\| = d(x_0, F)$.

Demonstração. Vamos definir $M = [x_0, F] = \{x + \lambda x_0 : x \in F, \lambda \in \mathbb{K}\}$ e $\varphi : M \rightarrow \mathbb{K}$ dada por $\varphi(x + \lambda x_0) = \lambda \delta$, onde $\delta = d(x_0, F)$. É fácil ver que φ está bem definida e é linear.

Se $x \in F$, então $\lambda = 0$ e $\varphi(x) = 0$. Além disso, $\varphi(x_0) = \delta$. Vamos, agora, mostrar que φ é contínuo. Se $\lambda \neq 0$, temos:

$$\|x + \lambda x_0\| = |\lambda| \left\| \frac{x}{\lambda} + x_0 \right\| \geq |\lambda| \delta = |\varphi(x + \lambda x_0)|.$$

Se $\lambda = 0$, a desigualdade é imediata. Logo, φ é contínuo e $\|\varphi\| \leq 1$. Dado $\epsilon > 0$, existe $x \in F$ tal que $\|x + x_0\| < \delta + \epsilon$. Considere $z = \frac{x+x_0}{\|x+x_0\|}$. Temos:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\|x + x_0\|} \varphi(x + x_0) = \frac{\delta}{\|x + x_0\|} > \frac{\delta}{\delta + \epsilon}.$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, temos que $|\varphi(z)| \geq 1$. Então, $\|\varphi\| = 1$. Por Hahn-Banach, existe $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $f|_M \equiv 0$, $f(x_0) = \varphi(x_0) = \delta$ e $\|f\| = \|\varphi\| = 1$. $\square$

O próximo teorema é conhecido como Princípio da Limitação Uniforme, ou Teorema de Banach-Steinhaus. Esse teorema permite concluir, a partir da limitação pontual de uma seqüência de operadores, a sua limitação uniforme.

Teorema 1.11. (Banach-Steinhaus) *Sejam E um espaço de Banach e F um espaço normado. Seja $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de operadores de E em F tal que, para cada $x \in E$, existe $M_x \in \mathbb{R}$ que satisfaz:*

$$\|T_n(x)\| \leq M_x, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\|T_n\| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

A seguir, apresentaremos o conceito de espaço reflexivo, que será utilizado no estudo das relações entre convergências de funcionais e convergência de conjuntos no sentido de Mosco.

Seja E um espaço normado sobre $\mathbb{K}$. Dado $x \in E$, podemos definir o funcional linear contínuo $g_x : E' \rightarrow \mathbb{K}$ por $g_x(f) = f(x)$. Por Hahn-Banach,

$$\|g_x\| = \sup_{\|f\|=1} |g_x(f)| = \sup_{\|f\|=1} |f(x)| = \|x\|.$$

Seja E um espaço normado sobre $\mathbb{K}$. A **aplicação canônica** entre E e seu bidual E'' é a aplicação $C : E \rightarrow E''$ dada por $C(x) = g_x$. É fácil ver que C é linear. Além disso, C é um isomorfismo entre E e $C(E)$, uma vez que $g_x - g_y = g_{x-y}$ e, portanto, $\|g_x - g_y\| = \|g_{x-y}\| = \|x - y\|$.

Vamos, agora, definir a reflexividade de um espaço normado.

Definição 1.12. *O espaço normado E é reflexivo se $\text{Im}(C) = E''$.*

Exemplo 1.13. Os exemplos seguintes apresentam algumas classes de espaços reflexivos:

a) Todo espaço de dimensão finita é reflexivo;

b) Os espaços $l_p(\mathbb{K}) = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty \right\}$, com $1 < p < +\infty$, são reflexivos.

As demonstrações desses fatos podem ser encontradas em [9].

Teorema 1.14. *Se E é um espaço normado reflexivo, então E é um espaço de Banach.*

Demonstração. Como E' é um espaço normado e $\mathbb{K}$ é completo, a teoria de funcionais nos garante que E'' é um espaço de Banach. Como E é reflexivo, segue que E é isomorfo a E'' . Logo, E é um espaço de Banach. $\square$

1.3 Topologias Fraca e Fraca- $\star$

Essa seção será dedicada a apresentar as topologias fraca e fraca- $\star$. Além disso, definiremos a convergência com relação a cada uma delas, e compararemos essas definições entre si e com a convergência em norma.

Inicialmente, vamos definir a topologia fraca em E :

Definição 1.15. *Seja G um subconjunto de E . Dizemos que G é fracamente aberto se, para cada $x \in G$, existem $f_1, \dots, f_n \in E'$ e $\epsilon > 0$ tais que:*

$$U(x, f_1, \dots, f_n, \epsilon) = \left\{ y \in E : \sup_{1 \leq i \leq n} |f_i(y - x)| < \epsilon \right\} \subset G.$$

A topologia fraca em E é a topologia formada pela família dos conjuntos fracamente abertos em E , unida com o conjunto vazio.

Essa topologia dá origem a um tipo de convergência conhecido como convergência fraca. Vamos definir esse tipo de convergência:

Definição 1.16. *Seja E um espaço normado sobre $\mathbb{K}$. Uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ é dita fracamente convergente em E se existe $x \in E$ tal que, para cada $f \in E'$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$.*

Denotaremos essa convergência por $x = w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ou $x_n \xrightarrow{w} x$.

O exemplo seguinte mostra que a topologia fraca pode estar propriamente contida na topologia da norma:

Exemplo 1.17. Considere a seqüência $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset l_2(\mathbb{K})$. Temos:

1. Se $f \in l'_2(\mathbb{K})$, então $f(e_n) \rightarrow 0$. Logo, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0 na topologia fraca;
2. Como $\|e_n\| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, a seqüência $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não converge a 0 na topologia da norma.

A topologia fraca em E é a menor topologia para a qual cada elemento de E' é contínuo. Dessa forma, essa topologia deve ser menos fina que qualquer topologia na qual todos os elementos de E' sejam contínuos. Em particular, a topologia fraca é menos fina que a topologia da norma. Portanto, podemos enunciar a seguinte:

Proposição 1.18. *Sejam E um espaço normado e f um funcional linear em E . Então, f é contínuo com respeito à topologia fraca se e somente se é contínuo com respeito à topologia da norma.*

O seguinte lema apresenta alguns fatos sobre a convergência fraca.

Lema 1.19. *Seja E um espaço normado, e seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ tal que $x_n \xrightarrow{w} x \in E$. Então:*

1. *O limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é único;*
2. *A seqüência $(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada.*

Demonstração. (1) Suponha que $x_n \xrightarrow{w} x$ e que $x_n \xrightarrow{w} y$. Se $f \in E'$, então $f(x_n) \rightarrow f(x)$ e $f(x_n) \rightarrow f(y)$. Logo, $f(x) = f(y)$, e $f(x - y) = 0$.

Como f é arbitrária, segue, pelo corolário 1.9, que $x - y = 0$.

(2) Para cada $f \in E'$, $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ é convergente e, portanto, limitada. Utilizando a aplicação canônica $C : E \rightarrow E''$, definimos $g_n(f) = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$. Assim, a seqüência $(|g_n(f)|)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, $\forall f \in E'$.

Mas E' é completo. Então, pelo teorema 1.11, $(\|g_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. Como $\|g_n\| = \|x_n\|$, segue o resultado. $\square$

O teorema seguinte compara os dois tipos de convergência já definidos:

Teorema 1.20. *Seja E um espaço normado, e seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ uma seqüência. Então,*

1. *Se $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$, então $x_n \xrightarrow{w} x$;*
2. *Se $\dim_{\mathbb{K}} E < +\infty$, as duas noções de convergência são equivalentes.*

Demonstração. (1) Se $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$, então $\|x_n - x\| \rightarrow 0$. Tome $f \in E'$. Temos:

$$|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leq \|f\| \|x_n - x\|.$$

Como f era arbitrária, segue que $x_n \xrightarrow{w} x$.

(2) É necessário provar que a convergência fraca da sequência implica sua convergência em norma. Suponhamos que $x_n \xrightarrow{w} x$ e que $\dim_{\mathbb{K}} E = k \in \mathbb{N}$.

Seja $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ uma base de E , e escrevamos $x_n = \sum_{i=1}^k \alpha_i^n e_i$ e $x = \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i$. Por hipótese, $f(x_n) \rightarrow f(x)$, $\forall f \in E'$.

Tome, em particular, $f_1, \dots, f_k$ dadas por $f_i(e_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq k$. Então, $f_i(x_n) = \alpha_i^n$ e $f_i(x) = \alpha_i$. Logo, $\alpha_i^n \rightarrow \alpha_i$, $\forall 1 \leq i \leq k$.

Obtemos:

$$\|x_n - x\| = \left\| \sum_{i=1}^k (\alpha_i^n - \alpha_i) e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^k |\alpha_i^n - \alpha_i| \|e_i\| \rightarrow 0$$

e $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$. □

Cabe ressaltar que existem espaços de dimensão infinita onde essas noções de convergência também são equivalentes. Em 1921, Schur ([16]) mostrou que isso acontece em $l_1(\mathbb{K})$.

No que segue, vamos definir a topologia fraca- $\star$ de funcionais em E' .

Definição 1.21. *Seja G um subconjunto de E' . Dizemos que G é fraca- $\star$ aberto se, para cada $g \in G$, existem $x_1, \dots, x_n \in E$ e $\epsilon > 0$ tais que:*

$$V(g, x_1, \dots, x_n, \epsilon) = \left\{ f \in E' : \sup_{1 \leq i \leq n} |f(x_i) - g(x_i)| < \epsilon \right\} \subset G.$$

A topologia fraca- $\star$ em E' é a topologia formada pela família dos conjuntos fraca- $\star$ abertos em E' , unida com o conjunto vazio.

Essa topologia dá origem à convergência fraca- $\star$ de funcionais, definida a seguir:

Definição 1.22. *Seja E um espaço normado e seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funcionais em E' . A convergência fraca- $\star$ dessa sequência ocorre se existe $f \in E'$ tal que $f_n(x) \rightarrow f(x)$, $\forall x \in E$.*

Nesse caso, escrevemos $f = w^* - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ ou $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

O exemplo seguinte mostra que a convergência fraca- $\star$ não implica, necessariamente, a convergência fraca de uma sequência de funcionais.

Exemplo 1.23. Sabemos que $c'_0(\mathbb{K}) = l_1(\mathbb{K})$. Considere a sequência $(e'_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset c'_0(\mathbb{K})$ de elementos que correspondem, de forma canônica, aos elementos $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $l_1(\mathbb{K})$.

Vamos mostrar que $(e'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fraca- $\star$ a 0. Tome $x \in c_0(\mathbb{K})$. Se $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, então $x_n \rightarrow 0$. Mas $e'_n(x) = x_n \rightarrow 0$, donde $e'_n \xrightarrow{w^*} 0$.

Mas $(e'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não converge fracamente a 0. De fato, sabemos que $c_0''(\mathbb{K}) = l_1'(\mathbb{K}) = l_\infty(\mathbb{K})$, o espaço das seqüências limitadas. Tome $g \in c_0''(\mathbb{K})$ o elemento associado a $(1, 1, 1, \dots) \in l_\infty(\mathbb{K})$. Então, $g(e'_n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, e segue o resultado.

A topologia fraca- $\star$ de E' é a menor topologia em E' na qual se tem que, para cada $x \in E$, o funcional linear em E' dado por $f \ni E \mapsto f(x)$ é contínuo.

Como $C(E) \subseteq E''$ e a topologia fraca- $\star$ em E' é a menor topologia na qual todos os elementos de E'' são contínuos, a topologia fraca- $\star$ em E' é menos fina que a topologia fraca em E' . Além disso, ambas as topologias coincidem se e somente se $C(E) = E''$, isto é, se E é reflexivo. Esses fatos serão registrados no teorema seguinte, que relaciona as convergência fraca e fraca- $\star$ de funcionais:

Teorema 1.24. *Seja E um espaço normado e seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funcionais em E' . Então:*

1. *Se $f_n \xrightarrow{w} f$, então $f_n \xrightarrow{w^*} f$;*
2. *Se E é reflexivo, a recíproca de (1) é verdadeira.*

Demonstração. (1) Suponha que $f_n \xrightarrow{w} f$. Então, $\forall g \in E''$, $g(f_n) \rightarrow g(f)$. Para cada $x \in E$ e cada $f \in E'$, seja $g_x(f) = f(x)$. Já vimos que $g_x \in E''$. Então, $\forall x \in E$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$, donde $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

(2) Suponhamos E reflexivo e $f_n \xrightarrow{w^*} f$. Então, $\forall x \in E$, $f_n(x) \rightarrow f(x)$. Como E é reflexivo, a aplicação canônica C é bijetora. Seja $g \in E''$. Então, $g = g_{x_0}$, para algum $x_0 \in E$. Mas $f_n(x_0) \rightarrow f(x_0)$, donde segue que $g(f_n) \rightarrow g(f)$. Como g era arbitrário, segue que $f_n \xrightarrow{w} f$. $\square$

Corolário 1.25. *Seja E um espaço normado e seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funcionais em E' . Então:*

1. *Se $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} f$, então $f_n \xrightarrow{w^*} f$;*
2. *Se $\dim_{\mathbb{K}} E < +\infty$, as três noções de convergência são equivalentes.*

Demonstração. (1) Trivial, pois convergência em norma implica convergência fraca.

(2) Se $\dim_{\mathbb{K}} E < +\infty$, as convergências em norma e fraca são equivalentes. Além disso, E é reflexivo, donde as convergências fraca e fraca- $\star$ são equivalentes. $\square$

Capítulo 2

Convergência de Conjuntos

Ao longo desse capítulo, apresentaremos as noções de convergência de conjuntos utilizadas ao longo dessa dissertação. Em geral, utilizaremos essas noções apenas em espaços normados. No entanto, a maior parte delas pode ser introduzida no contexto de espaços métricos em geral. A primeira parte da teoria foi desenvolvida com base no livro [10].

Antes de adentrar à teoria, devemos mencionar uma notação que será largamente utilizada ao longo desse texto. Se $N \subseteq \mathbb{N}$ é um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, a notação $(a_n)_{n \in N}$ indica a seqüência:

$$a_{n(1)}, a_{n(2)}, a_{n(3)}, a_{n(4)}, \dots$$

onde $n(i)$ é o i -ésimo natural em N , em termos da ordem usual de $\mathbb{N}$. As noções de limite e de convergência, em função dessa notação, podem ser facilmente entendidas.

No que segue, também utilizaremos a seguinte notação: se A e B são subconjuntos de um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$ e $r \in \mathbb{K}$, então:

$$A + rB = \{a + rb : a \in A, b \in B\}.$$

2.1 O Espaço $CL(X)$

Considere (X, d) um espaço métrico. Quando não houver perigo de ambigüidade, denotaremos esse espaço apenas por X . Vamos denotar por $CL(X)$ o conjunto de todos os subconjuntos fechados de X , isto é,

$$CL(X) = \{S \subseteq X : S \text{ é fechado}\}.$$

O espaço $CL(X)$ é tradicionalmente munido de uma topologia, conhecida como *topologia exponencial*. Para definirmos essa topologia, é necessário, primeiramente, definirmos o significado de $CL(A)$, com $A \subset X$.

O conjunto $CL(A)$ é formado por todos os subconjuntos de A que são fechados em X . Evidentemente, se um conjunto $S \subseteq A$ é fechado em X , também o é em A , uma vez que se pode escrever $S = S \cap A$. A seguir, definimos a *topologia exponencial* em $CL(X)$.

Definição 2.1. A *topologia exponencial* é a menor topologia em $CL(X)$ para a qual vale:

- i) Se A é aberto, $CL(A)$ é aberto;
- ii) Se A é fechado, $CL(A)$ é fechado.

Uma sub-base aberta para essa topologia é a família de conjuntos:

$$\mathfrak{B} = \{CL(G) : G \subset X \text{ aberto}\} \cup \{CL(X) \setminus CL(X \setminus G) : G \subset X \text{ aberto}\}.$$

Utilizaremos essa topologia apenas para definir alguns tipos de convergência em $CL(X)$. Portanto, não estaremos interessados em suas propriedades, que são detalhadamente apresentadas em [10].

2.2 A distância de Hausdorff

Nessa seção, discutiremos a definição de distância de Hausdorff. Para cada $A \in CL(X)$, com $A \neq \emptyset$, podemos definir, em X , a função distância $d(\cdot, A) : X \rightarrow \mathbb{R}$ de um ponto $x \in X$ ao conjunto A , dada por:

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Por convenção, adotaremos $d(x, \emptyset) = +\infty$, $\forall x \in X$. Uma das mais familiares noções de convergência de conjuntos fechados é a convergência com relação à distância de Hausdorff. Essa distância é denotada por h_d e definida, em $(CL(X) \setminus \{\emptyset\}) \times (CL(X) \setminus \{\emptyset\})$, por:

$$h_d(A, B) = \sup (\{d(a, B) : a \in A\} \cup \{d(b, A) : b \in B\}).$$

Observe que $h_d(A, A) = 0$ e que $h_d(A, B) = h_d(B, A)$. No entanto, o exemplo abaixo mostra que o fato de a distância de Hausdorff entre dois conjuntos ser nula não implica a igualdade entre esses conjuntos.

Exemplo 2.2. Considere $X = \mathbb{R}$, $A = [-1, 1]$ e $B = [-1, 0) \cup (0, 1]$. Temos:

- $d(a, B) = 0, \forall a \in A$;
- $d(b, A) = 0, \forall b \in B$.

Logo, $h_d(A, B) = 0$, embora tenhamos $A \neq B$. No entanto, é fácil ver que $h_d(A, B) = 0$ implica $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$.

O seguinte lema relaciona a distância de Hausdorff à distância dos pontos do espaço aos conjuntos em questão:

Lema 2.3. *Seja X um espaço métrico, e sejam $A, B \in CL(X)$ dois conjuntos não-vazios. Então,*

$$h_d(A, B) = \sup_{x \in X} |d(x, A) - d(x, B)|.$$

Demonstração. Observemos que:

$$\{d(a, B) : a \in A\}, \{d(b, A) : b \in B\} \subseteq \{|d(x, A) - d(x, B)| : x \in X\}.$$

Dessa forma:

$$(\{d(a, B) : a \in A\} \cup \{d(b, A) : b \in B\}) \subseteq \{|d(x, A) - d(x, B)| : x \in X\}.$$

$$\text{Logo, } h_d(A, B) \leq \sup_{x \in X} |d(x, A) - d(x, B)|.$$

Suponhamos agora, por absurdo, que $h_d(A, B) < \sup_{x \in X} |d(x, A) - d(x, B)|$. Então, existe $x_0 \in X \setminus (A \cup B)$ tal que:

$$|d(x_0, A) - d(x_0, B)| > \sup(\{d(a, B) : a \in A\} \cup \{d(b, A) : b \in B\}).$$

Se $d(x_0, A) \geq d(x_0, B)$, temos:

$$d(x_0, A) > \sup(\{d(a, B) : a \in A\} \cup \{d(b, A) : b \in B\}) + d(x_0, B).$$

Fixe $a_0 \in A$ arbitrário. Então, $d(x_0, A) > d(a_0, B) + d(x_0, B)$. Observe, agora, que os conjuntos $\{d(a_0, b) : b \in B\}$ e $\{d(x_0, b) : b \in B\}$ são limitados inferiormente. Portanto:

$$\inf_{a \in A} d(x_0, a) > \inf_{b \in B} d(a_0, b) + \inf_{b \in B} d(x_0, b) = \inf_{b \in B} (d(a_0, b) + d(x_0, b)) \geq d(a_0, x),$$

o que gera uma contradição. Analogamente, chega-se a uma contradição com a hipótese de que $d(x_0, A) < d(x_0, B)$, e o resultado segue. $\square$

O seguinte corolário é imediato:

Corolário 2.4. *Sejam X um espaço métrico, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de conjuntos não-vazios em $CL(X)$ e $A \in CL(X)$ um conjunto não-vazio. Se $h_d(A_n, A) \rightarrow 0$, então $(d(\cdot, A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a $d(\cdot, A)$.*

Em particular, esse corolário garante que a convergência de uma sequência de conjuntos com relação à distância de Hausdorff implica a convergência pontual de suas funções distância, isto é, se uma sequência de conjuntos não-vazios $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq CL(X)$ converge com relação à distância de Hausdorff a um conjunto $A \in CL(X)$, então $(d(\cdot, A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente à função $d(\cdot, A)$. Essa noção de convergência será discutida na seção seguinte.

Exemplo 2.5. A seguir, apresentamos dois exemplos de seqüências de conjuntos convergentes com relação à distância de Hausdorff:

a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina, em $\mathbb{R}$:

$$A_n = \left[\frac{-1}{n}, \frac{1}{n} \right].$$

Seja $A = \{0\}$. Afirmamos que $A_n \xrightarrow{h_d} A$. De fato, se $x \in \mathbb{R}$, temos dois casos:

Caso I: $x \in A_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

$$|d(x, A_n) - d(x, A)| = |0 - |x|| \leq \frac{1}{n},$$

pois, se $x \in A_n$, então $|x| \leq \frac{1}{n}$.

Caso II: $x \notin A_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$|d(x, A_n) - d(x, A)| = \left| \left| x - \frac{1}{n} \right| - |x| \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Logo, $h_d(A_n, A) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina, em $\mathbb{R}^2$:

$$A_n = B \left(a, r + \frac{1}{n^2} \right), \text{ com } a \in \mathbb{R}^2 \text{ e } r > 0.$$

Seja $A = B(a, r)$. É fácil ver que $h_d(A_n, A) \leq \frac{1}{n^2}$. Logo, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a A com relação à distância de Hausdorff.

2.3 A Convergência de Wijsman

Nessa seção, discutiremos a definição de convergência de conjuntos no sentido de Wijsman, e relacionaremos essa definição com a noção de convergência de conjuntos com relação à distância de Hausdorff.

Definição 2.6. Uma seqüência $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq CL(X)$ de conjuntos não-vazios é dita convergente no sentido de Wijsman a um conjunto $A \in CL(X)$ se a seqüência de suas funções distância, $(d(\cdot, A_n))_{n \in \mathbb{N}}$, converge pontualmente à função $d(\cdot, A)$.

Nesse caso, escrevemos $A = W\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

De acordo com o corolário 2.4, é claro que a convergência com relação à distância de Hausdorff de uma seqüência de conjuntos implica a convergência, no sentido de Wijsman, dessa mesma seqüência.

Exemplo 2.7. Os exemplos exibidos na seção anterior apresentam seqüências convergentes no sentido de Wijsman, uma vez que essas seqüências convergem com relação à distância de Hausdorff.

No entanto, podemos exibir uma seqüência de conjuntos convergente no sentido de Wijsman que não converge com relação à distância de Hausdorff:

Exemplo 2.8. Considere $X =]0, +\infty[\subset \mathbb{R}$, e sejam:

$$A = \mathbb{N} \quad \text{e} \quad A_n = \{1, 2, \dots, n\}.$$

É fácil ver que $(d(\cdot, A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente a $d(\cdot, A)$. No entanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$h_d(A_n, A) = \sup_{x \in X} |d(x, A_n) - d(x, A)| = +\infty.$$

Logo, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não converge a A com relação à distância de Hausdorff.

Uma pergunta natural que surge a partir desses exemplos é: quando as duas noções de convergência definidas até então são equivalentes? A proposição seguinte nos garante que isso ocorre somente quando o espaço em que estamos trabalhando é totalmente limitado, isto é, quando, para cada $\epsilon > 0$, existe um número finito de bolas de raio ϵ que recobrem o espaço.

Proposição 2.9. Sejam X um espaço métrico, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq CL(X)$ uma seqüência de conjuntos não-vazios e $A \in CL(X)$ um conjunto não-vazio. São equivalentes:

1. X é totalmente limitado;
2. $A = W\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n \Leftrightarrow (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a A com relação à distância de Hausdorff.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) Já vimos que, mesmo sem assumirmos nenhuma hipótese adicional sobre o espaço X , a convergência com relação à distância de Hausdorff de uma seqüência de conjuntos garante a convergência pontual das funções distância dessa seqüência de conjuntos.

Suponhamos, então, que X é totalmente limitado e que $(d(\cdot, A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente a $d(\cdot, A)$. Sejam $\epsilon > 0$ e $F \subseteq X$ um conjunto finito tal que $\forall y \in X, d(y, F) \leq \frac{\epsilon}{3}$. Note que esse conjunto existe, uma vez que X é totalmente limitado. Para cada $x \in F$, escolha $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que, se $n > n_0$, tenhamos:

$$|d(x, A_n) - d(x, A)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Seja $y \in X$, e fixe $x \in F$. Como as funções distância são lipschitzianas com constante de Lipschitz igual a 1, temos, para $n > n_0$:

$$\begin{aligned} |d(y, A_n) - d(y, A)| &= |d(y, A_n) - d(x, A_n) + d(x, A_n) - d(x, A) + d(x, A) - d(y, A)| \leq \\ &\leq |d(y, A_n) - d(x, A_n)| + |d(x, A_n) - d(x, A)| + |d(x, A) - d(y, A)| \leq \\ &\leq 2d(x, y) + |d(x, A_n) - d(x, A)| < 3\frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Como $y \in X$ era arbitrário, segue que $\sup_{y \in X} |d(y, A_n) - d(y, A)| \leq \epsilon$. Assim, pelo lema 2.3, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a A com relação à distância de Hausdorff.

(2) $\Rightarrow$ (1) Suponhamos que X não é totalmente limitado. Usando o Lema de Zorn, podemos afirmar que existem $\epsilon > 0$ e A_ϵ infinito tais que:

$$X \subseteq B_\epsilon(A_\epsilon) = \bigcup_{x \in A_\epsilon} B(x, \epsilon)$$

e, se $\{x, y\} \subseteq A_\epsilon$, então $d(x, y) \geq \epsilon$. Seja $A = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ um subconjunto infinito e enumerável de A_ϵ . Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja:

$$A_n = \{x_j : j \leq n\}.$$

É fácil ver que $(d(\cdot, A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente a $d(\cdot, A)$. No entanto:

$$h_d(A_n, A) = \sup(\{d(a, A_n) : a \in A\} \cup \{d(y, A) : y \in A_n\}) = \sup\{d(a, A_n) : a \in A\},$$

e $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não converge a A com relação à distância de Hausdorff. $\square$

2.4 A convergência de Kuratowski

Nessa seção, discutiremos a definição de convergência no sentido de Kuratowski, e apresentaremos uma topologia em $CL(X)$ compatível com essa definição. Inicialmente, vamos definir a convergência de Kuratowski conforme concebida originalmente em [10].

Seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de conjuntos não-vazios em $CL(X)$. Vamos definir os limites inferior e superior dessa seqüência. Nessa definição, o conjunto V sempre denotará uma vizinhança do ponto x em questão.

Definição 2.10. Seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de conjuntos não-vazios em $CL(X)$. O limite inferior de $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é:

$$\text{Li } A_n = \{x \in X : \forall V \subseteq X, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ com } V \cap A_n \neq \emptyset, \forall n > n_0\}.$$

O limite superior de $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é:

$$\text{Ls } A_n = \{x \in X : \forall V \subseteq X, V \text{ intercepta infinitos termos } A_n\}.$$

Exemplo 2.11. A seguir, apresentamos dois exemplos que ilustram essa definição:

a) Seja $X = \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina, em X :

$$A_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right], \text{ se } n \text{ é par} \quad \text{e} \quad A_n = \left[\frac{1}{2}, 1\right], \text{ se } n \text{ é ímpar}$$

Então, $\text{Li } A_n = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ e $\text{Ls } A_n = [0, 1]$.

b) Seja $X = \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina, em X :

$$A_n = [n, n + 1].$$

Então, $\text{Li } A_n = \text{Ls } A_n = \emptyset$.

O exemplo mostra que não se pode garantir que $\text{Li } A_n$ e $\text{Ls } A_n$ sejam não-vazios, mesmo quando a seqüência $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é formada apenas por conjuntos não-vazios. Ao longo dessa dissertação, estaremos interessados apenas no caso em que esses limites não são conjuntos vazios. Além disso, é claro que $\text{Li } A_n \subseteq \text{Ls } A_n$. O exemplo também mostra que essa inclusão pode ser estrita.

O seguinte lema nos garante que tais conjuntos são fechados e, portanto, estão em $CL(X)$:

Lema 2.12. Os conjuntos $\text{Li } A_n$ e $\text{Ls } A_n$ são fechados em X .

Demonstração. Suponhamos $\text{Li } A_n \neq \emptyset$. Tome $p \in \overline{\text{Li } A_n}$, e seja W uma vizinhança aberta de p . Então, existe $q \in W \cap \text{Li } A_n$. Como $q \in \text{Li } A_n$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow W \cap A_n \neq \emptyset$ e, por definição, $p \in \text{Li } A_n$. Analogamente, mostra-se que $\text{Ls } A_n$ é fechado. $\square$

A partir dessas definições, pode-se definir a convergência no sentido de Kuratowski, da seguinte forma:

Definição 2.13. Seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de conjuntos não-vazios em $CL(X)$. Dizemos que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge no sentido de Kuratowski a um conjunto $A \in CL(X)$ se $A = \text{Li } A_n = \text{Ls } A_n$.

Nesse caso, escrevemos $A = K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Da maneira como é colocada, a definição da convergência no sentido de Kuratowski fica abstrata demais para o uso que desejamos fazer dela; a saber, relacioná-la à convergência de funcionais lineares contínuos e de polinômios homogêneos. Dessa forma, as duas proposições seguintes atuam como uma ferramenta para que possamos caracterizar essa definição de um modo mais palpável.

Proposição 2.14. *Seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de conjuntos não-vazios em $CL(X)$, e suponha que $\text{Li } A_n \neq \emptyset$. São equivalentes:*

1. $p \in \text{Li } A_n$;
2. Existe uma seqüência de pontos $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $p_n \in A_n, \forall n \in \mathbb{N}$, tal que $p_n \rightarrow p$.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) Tome $p \in \text{Li } A_n$, e seja $S_k = B(p, \frac{1}{k})$. Pela definição de limite inferior, existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_k \Rightarrow S_k \cap A_n \neq \emptyset$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $n_{k+1} > n_k, \forall k \in \mathbb{N}$. Vamos construir a seqüência $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- Se $n < n_1$, tome $p_n \in A_n$ (i.e., $p_1 \in A_1, \dots, p_{n_1-1} \in A_{n_1-1}$);
- Se $n_k \leq n < n_{k+1}$, tome $p_n \in S_k \cap A_n$.

Dessa forma, e de acordo com o que assumimos, temos que, se $k \rightarrow \infty$, então $n_k \rightarrow \infty$. Além disso, se $n > n_k$, então $p_n \in S_k$ e, portanto:

$$|p_n - p| < \frac{1}{k}.$$

Fazendo $k \rightarrow \infty$, temos $n \rightarrow \infty$ e, conseqüentemente, $p_n \rightarrow p$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Se $p_n \rightarrow p$, então, para cada V vizinhança de p , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow p_n \in V$. Logo, $V \cap A_n \neq \emptyset, \forall n > n_0$, e $p \in \text{Li } A_n$. □

Proposição 2.15. *Seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de conjuntos não-vazios em $CL(X)$, e suponha que $\text{Ls } A_n \neq \emptyset$. São equivalentes:*

1. $p \in \text{Ls } A_n$;
2. Existe uma seqüência de pontos $(p_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$, com $k_1 < k_2 < \dots$ e $p_{k_n} \in A_{k_n}, \forall n \in \mathbb{N}$, tal que $p_{k_n} \rightarrow p$.

Demonstração. Note que a demonstração desse fato é análoga à demonstração da proposição anterior, já que o fato de as vizinhanças não interceptarem todos os termos da seqüência a partir de um certo índice é contornado pela introdução de um subconjunto infinito arbitrário. $\square$

Um corolário imediato da proposição anterior (que nada mais é do que enunciar a implicação $(2) \Rightarrow (1)$ de outra maneira) é o seguinte: se $N \subseteq \mathbb{N}$ é um subconjunto infinito em $\mathbb{N}$ e $a_n \in A_n$, $\forall n \in N$, a convergência de $(a_n)_{n \in N}$ a $x \in X$ implica $x \in \text{Ls } A_n$.

De posse dessas ferramentas, podemos obter uma caracterização da convergência no sentido de Kuratowski, de uma maneira mais adequada ao nosso contexto:

Proposição 2.16. *Seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de conjuntos não-vazios em $CL(X)$. Então, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge no sentido de Kuratowski a um conjunto $A \in CL(X)$ se e somente se:*

i) $\forall a \in A$ existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $a_n \rightarrow a$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in A_n$;

ii) Sempre que $N \subseteq \mathbb{N}$ é um subconjunto infinito em $\mathbb{N}$ e $a_n \in A_n$, $\forall n \in N$, a convergência de $(a_n)_{n \in N}$ a $x \in X$ implica $x \in A$.

Demonstração. Basta usar as proposições 2.14 e 2.15. $\square$

Vamos ver um exemplo de uma seqüência de conjuntos convergente no sentido de Kuratowski.

Exemplo 2.17. Seja $X = (0, 2) \subseteq \mathbb{R}$, e seja $A_n = (0, 1] \cup \{2 - \frac{1}{n}\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que $A_n \rightarrow A = (0, 1]$ no sentido de Kuratowski.

i) Tome $x \in A$, e escolha a seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ na qual $x_n = x$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Temos, então, $x_n \in A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $x_n \rightarrow x$, evidentemente.

ii) Seja $N \subseteq \mathbb{N}$ um subconjunto infinito em $\mathbb{N}$, com $x_n \in A_n$, $\forall n \in N$. Suponhamos que $x_n \rightarrow x \in X$, e vamos mostrar que $x \in A$. De fato, se $x \notin A$, então $x \in (1, 2)$. Mas então $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \in N$ e $n > n_0$, então $x_n \in (1, 2)$. Logo, $x_n = 2 - \frac{1}{n}$, e então $(x_n)_{n \in N}$ não converge em X , absurdo. Logo, $x \in A$.

2.4.1 A topologia de Fell

Nessa seção, apresentaremos uma topologia que, quando colocada sobre o espaço $CL(X)$, torna-se compatível com a definição de convergência no sentido de Kuratowski. A topologia de *Fell*, também conhecida como *topologia da convergência fechada*, será denotada, ao longo desse texto, por τ_C . A topologia τ_C é gerada pela seguinte base:

$$\Gamma = \mathbb{A} \cup \mathbb{B},$$

onde:

$\mathbb{A} = \{W_1(K) : K \text{ é compacto em } X\}$, onde $W_1(K) = \{F \in CL(X) : F \subseteq (X \setminus K)\}$;

$\mathbb{B} = \{W_2(V) : V \text{ é aberto em } X\}$, onde $W_2(V) = \{F \in CL(X) : F \cap V \neq \emptyset\}$.

A proposição seguinte mostra que a convergência no sentido de Kuratowski de conjuntos fechados em um espaço métrico é compatível com a topologia τ_C . Por fugir ao escopo desse trabalho, sua demonstração será omitida. Como referência, citamos o texto [1].

Proposição 2.18. *Sejam X um espaço métrico, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq CL(X)$ uma seqüência de conjuntos não-vazios e $A \in CL(X)$ um conjunto não-vazio. Então:*

$$A = K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n \Leftrightarrow A_n \xrightarrow{\tau_C} A.$$

A próxima proposição estabelece uma relação entre a convergência no sentido de Wijsman e a convergência no sentido de Kuratowski:

Proposição 2.19. *Sejam $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq CL(X)$ uma seqüência de conjuntos não-vazios e $A \in CL(X)$ um conjunto não-vazio. Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a A no sentido de Wijsman, então também converge a A no sentido de Kuratowski.*

Demonstração. Tome $x \in A$. Como:

$$d(\cdot, A) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(\cdot, A_n),$$

temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, A_n) = 0.$$

Logo, $x \in \text{Li } A_n$, donde $A \subseteq \text{Li } A_n$. Por outro lado, se $x \in \text{Ls } A_n$, existe uma seqüência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, com $x_k \rightarrow x$, e uma seqüência crescente de inteiros $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $x_k \in A_{n_k}$, pela proposição 2.15. Temos, então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, A_{n_k}) = 0.$$

Mas $d(\cdot, A) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(\cdot, A_n)$, donde $d(x, A) = 0$, e $x \in A$. Logo, $\text{Ls } A_n \subseteq A$, e segue que $A = K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n$. $\square$

O exemplo seguinte mostra que a convergência de conjuntos em τ_C não implica, necessariamente, a convergência pontual de suas funções distância, o que significa que, em geral, a convergência no sentido de Wijsman é mais forte que a convergência no sentido de Kuratowski.

Exemplo 2.20. Seja $X = (0, 2) \subseteq \mathbb{R}$, e seja $A_n = (0, 1] \cup \{2 - \frac{1}{n}\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Já vimos que a seqüência $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, no sentido de Kuratowski, a $A = (0, 1]$. Vamos mostrar que essa convergência não se dá no sentido de Wijsman. Tome $x = \frac{7}{4} \in X$. Temos:

$$d(x, A_n) = 2 - \frac{7}{4} - \frac{1}{n} = \frac{1}{4} - \frac{1}{n}.$$

Logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, A_n) = \frac{1}{4}$. Mas:

$$d(x, A) = \frac{7}{4} - 1 = \frac{3}{4}.$$

Portanto, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não converge a $A = (0, 1]$ no sentido de Wijsman.

A proposição 2.19 e o exemplo 2.20 deixam claro que, se não assumirmos nenhuma hipótese adicional sobre o espaço X , além das que já assumimos, a convergência de uma seqüência de conjuntos no sentido de Wijsman é mais forte que sua convergência no sentido de Kuratowski.

Na próxima seção, apresentaremos uma classe de espaços na qual essas convergências são equivalentes.

2.4.2 Espaços com nice closed balls

Nessa seção, abordaremos uma classe de espaços na qual ocorre a equivalência entre a convergência de conjuntos no sentido de Wijsman e a convergência de conjuntos no sentido de Kuratowski. Os resultados aqui apresentados foram extraídos do texto [1].

Definição 2.21. Seja X um espaço métrico. Dizemos que X possui *nice closed balls* se, dada $B \subseteq X$ bola fechada e não-compacta, tem-se $B = X$.

Exemplo 2.22. Apresentamos três exemplos de espaços com *nice closed balls*:

a) Se X é discreto (isto é, d é a métrica zero-um), então X possui *nice closed balls*.

De fato, seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em X sem pontos de acumulação, e seja $p \in X$. Nesse caso, $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(p, x_n) = 1$; caso contrário, p seria ponto de acumulação de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dado $x \in X$, tem-se $d(x, p) \leq 1$.

b) $\mathbb{R}^m$ possui *nice closed balls*.

Mais geralmente, qualquer espaço X em que um conjunto fechado e limitado seja compacto possui *nice closed balls*. Vejamos: seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em X sem pontos de acumulação. É claro que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fica fora de cada bola de X , para n suficientemente grande (caso contrário, haveria uma subsequência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente). Assim, para cada $p \in X$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(p, x_n) = +\infty$.

c) Seja $X \subset l_\infty(\mathbb{K})$ o espaço métrico dado por:

$$X = \{e_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \left\{ \frac{1}{n}e_n : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\},$$

com d a métrica induzida pela norma de $l_\infty(\mathbb{K})$. Então, X possui *nice closed balls*.

De fato, para cada seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ sem pontos de acumulação e para cada ponto $p \in X$, temos $d(p, x_n) = 1$, para n suficientemente grande (ou p seria ponto de acumulação de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$). Além disso, o diâmetro de X é 1. Dessa forma, para cada $x \in X$, temos $d(p, x) \leq 1 = \liminf_{n \rightarrow \infty} d(p, x_n)$.

O próximo lema nos fornece uma caracterização de tais espaços.

Lema 2.23. *Seja X um espaço métrico. São equivalentes:*

1. Para cada $p \in X$ e cada $x \in X$, sempre que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência em X sem pontos de acumulação, tem-se:

$$d(p, x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d(p, x_n);$$

2. Se $B \subseteq X$ é uma bola fechada não-compacta, então $B = X$.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) Seja $\overline{B(p, \epsilon)}$ uma bola fechada e não-compacta em X . Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência nessa bola sem nenhum ponto de acumulação, e seja $\alpha = \liminf_{n \rightarrow \infty} d(p, x_n)$. Por hipótese, $X \subseteq \overline{B(p, \alpha)}$. Mas, para cada $n \in \mathbb{N}$, $d(p, x_n) \leq \epsilon$. Logo, $\alpha \leq \epsilon$. Assim, $X = \overline{B(p, \epsilon)}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Fixe $p \in X$, e seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em X sem pontos de acumulação. Se $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(p, x_n) = +\infty$, então (1) está satisfeita. Suponhamos que $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(p, x_n) = \alpha < +\infty$, e que, para algum $x \in X$, $d(p, x) > \alpha$. Tome:

$$\epsilon = \frac{\alpha + d(p, x)}{2}.$$

Então, $\overline{B(p, \epsilon)}$ contém infinitos termos de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não possui pontos de acumulação, $\overline{B(p, \epsilon)}$ não é compacto. Além disso, $\overline{B(p, \epsilon)} \neq X$, pois $x \notin \overline{B(p, \epsilon)}$, contradição. $\square$

A proposição a seguir apresenta a relação desejada:

Teorema 2.24. *Sejam X um espaço métrico e $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq CL(X)$ uma seqüência de conjuntos não-vazios. São equivalentes:*

1. Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente no sentido de Kuratowski a $A \in CL(X)$, então também o é no sentido de Wijsman;

2. X possui nice closed balls.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) Suponhamos que a convergência no sentido de Kuratowski implique a convergência no sentido de Wijsman, e vamos mostrar que X possui nice closed balls. Suponha, por absurdo, que X não possui nice closed balls. Então, podemos escolher pontos p e x em X e uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X sem pontos de acumulação de modo que:

$$d(p, x) > \liminf_{n \rightarrow \infty} d(p, x_n).$$

Podemos assumir - passando a uma subseqüência, se necessário - que, para algum $\epsilon > 0$, e para cada $n \in \mathbb{N}$, $d(p, x_n) < d(p, x) - \epsilon$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $C_n = \{x, x_n\}$, e seja $C = \{x\}$. Claramente, temos:

$$\text{Li } C_n = \text{Ls } C_n = C.$$

Mas, como $d(p, x_n) < d(p, x)$, segue que:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(p, C_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} d(p, x_n) \leq d(p, x) - \epsilon = d(p, C) - \epsilon.$$

Logo, $(d(\cdot, C_n))_{n \in \mathbb{N}}$ não converge pontualmente a $d(\cdot, C)$, contradição.

(2) $\Rightarrow$ (1) Seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq CL(X)$ uma seqüência convergente, no sentido de Kuratowski, a $A \in CL(X)$. Fixe $p \in X$. Como $A \subseteq \text{Li } A_n$, é claro que, mesmo sem assumirmos nenhuma hipótese adicional sobre X , temos:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(p, A_n) \leq d(p, A).$$

Falta mostrarmos que $d(p, A) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d(p, A_n)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolha $x_n \in A_n$ de modo que:

$$d(p, x_n) < d(p, A_n) + \frac{1}{n}.$$

Dessa forma, existe uma subseqüência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para a qual

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(p, x_{n_k}) = \liminf_{n \rightarrow \infty} d(p, A_n).$$

Se $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ possui um ponto de acumulação x , então $x \in \text{Ls } A_n$, e, pela continuidade da métrica, $d(p, A) \leq d(p, x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} d(p, A_n)$.

Se não, para cada $x \in X$:

$$d(p, x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d(p, x_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} d(p, A_n).$$

Em particular, isso vale para cada $x \in A$, donde $d(p, A) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d(p, A_n)$. Logo, $(d(\cdot, A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente a $d(\cdot, A)$. $\square$

2.5 r-Convergência

Nessa seção, vamos definir a r-convergência de conjuntos, e relacioná-la à convergência uniforme de funções em subconjuntos limitados de um espaço normado. Cabe ressaltar que a mesma definição pode ser feita em um espaço métrico qualquer. No entanto, para evitar o uso de resultados demasiadamente fora de nosso contexto, optamos por trabalhar em uma classe mais restrita.

Definição 2.25. *Sejam E um espaço normado, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de conjuntos não-vazios em $CL(E)$ e $A \in CL(E)$. Dizemos que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é r-convergente a A se, para cada $r > 0$ e cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$, ocorrem:*

$$i) A \cap rB[0, 1] \subseteq A_n + \epsilon B[0, 1];$$

$$ii) A_n \cap rB[0, 1] \subseteq A + \epsilon B[0, 1].$$

Nesse caso, escrevemos $A = r\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Exemplo 2.26. A seguir, apresentamos dois exemplos de seqüências de conjuntos r-convergentes:

a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $A_n = B[0, \frac{1}{n}] \subseteq \mathbb{R}^2$, e seja $A = \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Vamos mostrar que $A = r\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n$. De fato, se $r > 0$ e $\epsilon > 0$, temos, com $n > \frac{1}{\epsilon}$:

$$1. A \cap rB[0, 1] = \{0\} \subseteq A_n + \epsilon B[0, 1];$$

$$2. A_n \subseteq B[0, \epsilon] \text{ e } A + \epsilon B[0, 1] = \epsilon B[0, 1] \Rightarrow A_n \cap rB[0, 1] \subseteq A + \epsilon B[0, 1].$$

b) Seja $a \in \mathbb{R}$, com $a > 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $A_n = [-a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}]$, e seja $A = [-a, a]$. Vamos mostrar que $A = r\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Se $r > 0$ e $\epsilon > 0$, temos, com $n > \frac{1}{\epsilon}$:

$$1. A \cap r[-1, 1] \subseteq A_n + \epsilon[-1, 1], \forall n > \frac{1}{\epsilon};$$

$$2. A_n \cap r[-1, 1] \subseteq A + \epsilon[-1, 1], \forall n > \frac{1}{\epsilon}.$$

Apresentaremos mais alguns exemplos de seqüências r-convergentes ao longo do capítulo 3, uma vez que a relação obtida entre a r-convergência de conjuntos de nível e convergência em norma de funcionais lineares contínuos facilita sobremaneira a obtenção de tais exemplos em espaços normados quaisquer.

O nosso próximo objetivo é demonstrar um resultado que relacione a r-convergência de conjuntos à *topologia da convergência uniforme das funções distância em subconjuntos limitados de E* .

Denotemos por $C_b(E, \mathbb{R})$ o conjunto das funções contínuas de E a $\mathbb{R}$ que são limitadas em cada subconjunto limitado de E . É claro que $C_b(E, \mathbb{R}) \subseteq C(E, \mathbb{R})$.

Definamos a seguinte família de semi-normas em $C_b(E, \mathbb{R})$: para cada $a \in E$ fixo e para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$p_n(f) = \sup_{\|x-a\| \leq n} |f(x)|.$$

Pode-se mostrar que essa família de semi-normas determina uma topologia em $C_b(E, \mathbb{R})$, denotada por τ_φ , com certas propriedades que a tornam bastante interessante. Por fugirem ao escopo desse trabalho, omitiremos os detalhes sobre essa topologia. Uma discussão detalhada sobre ela pode ser encontrada em [14].

Note-se que τ_φ independe da escolha do ponto $a \in E$, uma vez que a escolha de outro ponto apenas altera o centro das bolas que estamos considerando. Além disso, a convergência com respeito a essa topologia significa convergência uniforme nos subconjuntos limitados de E .

De fato, ao tomarmos o supremo dos valores, garantimos a uniformidade da convergência. E, como todo subconjunto limitado de E deve estar contido em uma bola, a nomenclatura passa a fazer sentido.

Cabe, aqui, uma observação importante sobre o comportamento dessa topologia no espaço dual de um espaço normado E . Evidentemente, $E' \subseteq C_b(E, \mathbb{R})$. Vamos investigar o que ocorre com E' , quando visto como subespaço de $C_b(E, \mathbb{R})$, com a topologia induzida por τ_φ .

Como a topologia independe da escolha do ponto $a \in E$, podemos tomar, em particular, $a = 0$. Temos, então,

$$p_1(f) = \sup_{\|x-0\| \leq 1} |f(x)| = \|f\|.$$

Analogamente, $p_n(f) = n\|f\|$. Dessa forma, a base de τ_φ é a mesma base de vizinhanças da origem definida pela topologia da norma. Portanto, a topologia da convergência uniforme em subconjuntos limitados em $C_b(E, \mathbb{R})$ se reduz à topologia da norma, quando restrita a E' .

Considere, agora, a função $\psi : CL(E) \rightarrow C_b(E, \mathbb{R})$, dada por $\psi(A) = d(\cdot, A)$. A partir dessa função, é possível identificar $CL(E)$ com um subconjunto do espaço métrico $C_b(E, \mathbb{R})$. Chamaremos de *topologia da convergência uniforme das funções distância em subconjuntos limitados de E* a topologia induzida por τ_φ no subconjunto $\psi(CL(E)) \subseteq C_b(E, \mathbb{R})$.

A proposição seguinte relaciona essa topologia à r -convergência.

Proposição 2.27. *Sejam E um espaço normado, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos não-vazios em $CL(E)$ e $A \in CL(E)$ um conjunto não-vazio. São equivalentes:*

1. $A = r\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n$;

2. A seqüência $(d(\cdot, A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a $d(\cdot, A)$ em subconjuntos limitados.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) Seja $r > 0$, e suponhamos que $A = r\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Por hipótese, existem $n_0 \in \mathbb{N}$ e $r_1 > 0$ tais que $A \cap r_1 B[0, 1] \neq \emptyset$ e $A_n \cap r_1 B[0, 1] \neq \emptyset, \forall n > n_0$.

De fato, como $A \neq \emptyset$, existe $r_1 > 0$ tal que $A \cap r_1 B[0, 1] \neq \emptyset$. Agora, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A \cap r_1 B[0, 1] \subseteq A_n + \epsilon B[0, 1], \forall n > N$. Mas então:

$$A \cap r_1 B[0, 1] \subseteq (A_n \cap r_1 B[0, 1]) + \epsilon B[0, 1], \forall n > N.$$

Como ϵ é arbitrário, podemos fazer $\epsilon \rightarrow 0$, e obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow A \cap r_1 B[0, 1] \subseteq A_n \cap r_1 B[0, 1]$. Portanto, $A_n \cap r_1 B[0, 1] \neq \emptyset, \forall n > n_0$.

Assim, para cada $x \in rB[0, 1]$ e cada $n > n_0$, temos $d(x, A) \leq r + r_1$ e $d(x, A_n) \leq r + r_1$. Dado $\epsilon > 0$, tome:

$$r_2 > 2r + r_1 + \frac{\epsilon}{2}.$$

Seja $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_1$, tenhamos:

- $A \cap r_2 B[0, 1] \subseteq A_n + \frac{\epsilon}{2} B[0, 1]$;
- $A_n \cap r_2 B[0, 1] \subseteq A + \frac{\epsilon}{2} B[0, 1]$.

Para cada $n > n_1$ e cada $x \in B[0, 1]$, tome $b = b(x, n) \in A_n$ com $\|b - x\| \leq d(x, A_n) + \frac{\epsilon}{2}$. Pela escolha de r_2 , temos:

$$\|b\| \leq \|b - x\| + \|x\| < r + r + r_1 + \frac{\epsilon}{2} < r_2.$$

Como $A_n \cap r_2 B[0, 1] \subseteq A + \frac{\epsilon}{2} B[0, 1]$, existe $a = a(x, n) \in A$ com:

$$\|a - b\| \leq \frac{\epsilon}{2},$$

pois $b \in A_n \cap r_2 B[0, 1]$. Assim, para cada $x \in rB[0, 1]$ e cada $n > n_1$, temos:

$$d(x, A) \leq \|x - a\| \leq \|x - b\| + \|b - a\| < d(x, A_n) + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = d(x, A_n) + \epsilon$$

Dessa forma, $|d(x, A) - d(x, A_n)| < \epsilon$, e, se $n > n_1$:

$$\sup_{x \in rB[0, 1]} |d(x, A) - d(x, A_n)| \leq \epsilon.$$

Logo, $(d(\cdot, A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $d(\cdot, A)$ uniformemente em $rB[0, 1]$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Fixe $r > 0$ e $\epsilon > 0$. Por hipótese, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$:

$$\sup_{x \in rB[0, 1]} |d(x, A_n) - d(x, A)| < \epsilon.$$

Seja $x \in A \cap rB[0, 1]$, e fixe $n > n_0$. Como $d(x, A) = 0$, deve-se ter $d(x, A_n) < \epsilon$. Assim, para algum $a_n \in A_n$, tem-se $\|x - a_n\| < \epsilon$, donde:

$$A \cap rB[0, 1] \subseteq A_n + \epsilon B[0, 1], \forall n > n_0.$$

É possível mostrar, de forma análoga, que $A_n \cap rB[0, 1] \subseteq A + \epsilon B[0, 1], \forall n > n_0$. Logo, $A = r\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n$. $\square$

2.6 A Convergência de Mosco

A convergência de conjuntos no sentido de Mosco é muito semelhante à convergência, no sentido de Kuratowski, de conjuntos convexos. No entanto, a convergência no sentido de Mosco pode ser descrita apenas em termos das topologias da norma e fraca, sem referências à distância definida no espaço.

Ao contrário do que ocorre com a convergência no sentido de Kuratowski, a convergência no sentido de Mosco não faz sentido em espaços métricos em geral, uma vez que envolve a estrutura vetorial do espaço em questão. Cabe ressaltar que o foco do estudo da convergência no sentido de Mosco se dá em subconjuntos convexos de espaços reflexivos.

Assim como fizemos com a definição de convergência no sentido de Kuratowski, inicialmente vamos definir a convergência no sentido de Mosco da maneira como foi concebida, em [13]. Apesar disso, vamos trabalhar com uma caracterização mais próxima de nosso contexto.

Vamos definir o limite inferior forte e o limite superior fraco de uma seqüência de conjuntos:

Definição 2.28. *Seja E um espaço normado, e seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de conjuntos convexos e não-vazios em $CL(E)$. O limite inferior forte de $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é:*

$$\underline{s}\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \in E : x = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \text{ com } x_n \in A_n, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

O limite superior fraco de $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é:

$$\overline{w}\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \in E : x = w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n}, \text{ com } x_{k_n} \in A_{k_n}, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

A partir dessas definições, podemos estabelecer a convergência no sentido de Mosco:

Definição 2.29. *Seja E um espaço normado, e seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de conjuntos convexos e não-vazios em $CL(E)$. Dizemos que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge no sentido de Mosco a um conjunto $A \subseteq E$ se:*

$$A = \underline{s}\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n = \overline{w}\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Nesse caso, escrevemos $A = M\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

A proposição seguinte garante que, nesse caso, o conjunto A é convexo e fechado:

Proposição 2.30. *Seja E um espaço normado, e seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de conjuntos convexos e não-vazios em $CL(E)$ que converge, no sentido de Mosco, a um conjunto $A \subseteq E$. Então, A é convexo e fechado em E .*

Demonstração. A convexidade de A é evidente, a partir da convexidade de cada A_n . Vamos mostrar que $A \in CL(E)$. Por hipótese, $A = \underline{s}\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Considere $a \in \bar{A}$. Então, existe uma seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$ tal que $a_n \rightarrow a$. Como $a_n \in A, \forall n \in \mathbb{N}$, segue que $a_n = s\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^{(n)}$, com $x_k^{(n)} \in A_k, \forall k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $y_n = x_k^{(n)}$, com $x_k^{(n)} \in A_k$ e $k > n$. Observe que:

$$\|a - y_n\| = \|a - a_n + a_n - y_n\| \leq \|a - a_n\| + \|a_n - x_k^{(n)}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Logo, $a \in \underline{s}\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$, donde A é fechado. □

A seguir, vamos reescrever essa definição de uma maneira mais apropriada ao nosso contexto. A partir desse ponto, entenderemos a convergência no sentido de Mosco da seguinte forma:

Proposição 2.31. *Seja E um espaço normado, e seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de conjuntos convexos e não-vazios em $CL(E)$. Então, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge no sentido de Mosco a um conjunto convexo $A \in CL(E)$ se e somente se:*

- i) $\forall a \in A, \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \text{ com } a = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \text{ tal que, para cada } n \in \mathbb{N}, a_n \in A_n;$
- ii) *Sempre que $N \subseteq \mathbb{N}$ é um subconjunto infinito em $\mathbb{N}$ e $a_n \in A_n, \forall n \in N$, a convergência fraca de $(a_n)_{n \in N}$ a $x \in X$ implica $x \in A$.*

Demonstração. Análoga à proposição 2.16. □

A seguir, vamos exemplificar uma seqüência que converge no sentido de Mosco:

Exemplo 2.32. Considere, em $\mathbb{R}$, os seguintes conjuntos fechados e convexos:

$$A_n = \left[-\sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i}, \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} \right], \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad A = [-2, 2].$$

Vamos mostrar que $A = M\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

i) Tome $a \in A$. Se $a \in (-2, 2)$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow a \in A_n$. Logo, nesse caso é fácil encontrar uma seqüência que satisfaça a primeira condição da proposição 2.31. Se $a = 2$, tome $a_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i}$. Temos que $a_n \in A_n, \forall n \in \mathbb{N}$, e $a_n \rightarrow a$, claramente. O mesmo raciocínio deve ser usado no caso $a = -2$.

ii) Seja $N \subset \mathbb{N}$ infinito, com $a_n \in A_n, \forall n \in N$. Seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $x = w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Vamos mostrar que $x \in A$. Se $x \notin A$, então $|x| > 2$. Como $x = w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, deve-se ter, em particular, $id(x) = \lim_{n \in N} id(a_n)$, donde $x = \lim_{n \in N} a_n$, absurdo, pois $a_n \in [-2, 2], \forall n \in N$. Logo, $x \in A$.

É fácil ver, a partir de sua definição, que a convergência no sentido de Mosco de uma seqüência de conjuntos implica a convergência, no sentido de Kuratowski, dessa mesma seqüência. Além disso, ambas as definições coincidem quando o espaço E tem dimensão finita, uma vez que, nesse caso, as noções de convergência de seqüências de vetores utilizadas são equivalentes.

Denotemos por $Cc(E)$ o conjunto dos subconjuntos fechados e convexos de E . A seguir, apresentaremos uma topologia em $Cc(E)$ compatível com a convergência no sentido de Mosco, para o caso em que E é completo.

Definição 2.33. *Seja E um espaço de Banach. A topologia de Mosco em $Cc(E)$, τ_M , é a topologia gerada pelos conjuntos da forma:*

$$\{\{C \in Cc(E) : C \cap V \neq \emptyset\} : V \in O(E)\} \cup \{\{C \in Cc(E) : C \subseteq (E \setminus K)\} : K \in K(E)\}$$

onde:

$O(E)$: subconjuntos de E não-vazios e abertos (na topologia da norma) em E ;

$K(E)$: subconjuntos de E não-vazios e fracamente compactos em E .

A proposição seguinte apresenta a compatibilidade desejada:

Proposição 2.34. *Sejam E um espaço de Banach, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de conjuntos não-vazios em $Cc(E)$ e $A \in Cc(E) \setminus \{\emptyset\}$. Então:*

$$A = M\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n \Leftrightarrow A_n \xrightarrow{\tau_M} A$$

Por envolver uma parte da teoria que foge ao contexto dessa dissertação, optamos por omitir a demonstração desse resultado. Como referência, mencionamos o texto [2].

O próximo teorema estabelece uma relação entre as noções de convergência estudadas. A relação entre convergência no sentido de Mosco e convergência no sentido de Kuratowski já foi apresentada.

Teorema 2.35. *Sejam E um espaço reflexivo, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de conjuntos não-vazios em $Cc(E)$ e $A \in Cc(E) \setminus \{\emptyset\}$. Verificam-se as seguintes condições:*

1. Se $A = \text{r-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n$, então $A = \text{M-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n$;
2. Se $A = \text{M-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n$, então $A = \text{W-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n$;
3. Se $A = \text{W-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n$, então $A = \text{K-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n$;
4. Se $\dim E < +\infty$, todas as noções de convergência são equivalentes.

Demonstração. (1) Suponhamos que $A = \text{r-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n, \forall r > r_0 > 0$. Vamos, primeiramente, mostrar que $A \subseteq \text{s-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Tome $x \in A$, e seja $r > \max\{r_0, \|x\|\}$. Para qualquer $\epsilon > 0$, temos, pela primeira condição da definição de r-convergência, que $x \in A_n + \epsilon B[0, 1]$, para n suficientemente grande. Logo, $d(x, A_n) \leq \epsilon$.

Com esse raciocínio, temos que $d(x, A_n) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Logo, $x \in \text{s-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n$, donde segue que $A \subseteq \text{s-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Mostremos, agora, que $\overline{\text{w-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n} \subseteq A$. Sejam $x \in E$ e $x_k \in A_{n_k}$, com $(A_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ uma subseqüência de $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Suponhamos que $x = \text{w-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, e vamos mostrar que $x \in A$.

Como $x = \text{w-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, existe $r > r_0 > 0$ tal que $\|x_k\| \leq r, \forall k \in \mathbb{N}$. Assim, $x_k \in A_k \cap rB[0, 1], \forall k \in \mathbb{N}$. Pela segunda condição da definição de r-convergência, tem-se $x_k \in A + \epsilon B[0, 1]$, para k suficientemente grande. Como $A + \epsilon B[0, 1]$ é fechado e convexo, segue que $x \in A + \epsilon B[0, 1]$. Mas ϵ é arbitrário, donde segue que $x \in A$.

Finalmente, concluímos que $A = \text{M-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

(2) A demonstração dessa implicação envolve algumas estruturas topológicas que fogem ao contexto dessa dissertação. Como referência, podemos citar [2].

(3) Segue da proposição 2.19.

(4) Vamos mostrar a recíproca de (1). Suponhamos que $A = \text{M-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n$ e que $\dim E < +\infty$. Vamos mostrar que $A = \text{r-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n, \forall r > r_0 > 0$.

Suponhamos que $A \cap rB[0, 1] \neq \emptyset, \forall r > r_1$. Como $A \cap rB[0, 1]$ é compacto (já que é fechado e limitado), pode-se afirmar que $\forall \epsilon > 0$ existem $x_1, \dots, x_n \in A \cap rB[0, 1]$ tais que:

$$A \cap rB[0, 1] \subseteq \bigcup_{i=1}^n \left(\{x_i\} + \frac{\epsilon}{2} B[0, 1] \right).$$

Como $A = \text{M-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n$, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_\epsilon$, $d(x_i, A_n) \leq \frac{\epsilon}{2}$, para $i = 1, \dots, n$. Logo:

$$\{x_i\} + \frac{\epsilon}{2} B[0, 1] \subseteq A_n + \epsilon B[0, 1],$$

donde $A \cap rB[0, 1] \subseteq A_n + \epsilon B[0, 1]$, e a primeira condição da definição de r-convergência está satisfeita.

Agora, suponhamos $A_n \cap rB[0, 1] \neq \emptyset, \forall r > r_2 > 0, \forall n > n_2 > 0$. Vamos admitir, por absurdo, que existem $\bar{r} > r_2$ e $\bar{\epsilon} > 0$ tais que:

$$A_{n_k} \cap \bar{r}B[0, 1] \not\subseteq A + \bar{\epsilon}B[0, 1],$$

com $(A_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ uma subsequência de $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Então, existe uma sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, com $x_k \in A_{n_k} \cap \bar{r}B[0, 1], \forall k \in \mathbb{N}$ e $x_k \notin A + \bar{\epsilon}B[0, 1], \forall k \in \mathbb{N}$ que é limitada em E .

Logo, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência $(x_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ tal que $x_{k_l} \rightarrow x \in E$. Como $\overline{\text{w-lim}}_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq A$, devemos ter $x \in A$. Mas $x \notin A + \epsilon B[0, 1], \forall \epsilon < \bar{\epsilon}$, contradição.

Assim, deve ser válida a segunda condição da definição de r-convergência e, portanto, temos $A = \text{r-lim}_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Com relação aos demais itens, temos que, se $\dim E < +\infty$, então E é isomorfo a $\mathbb{R}^n$, para algum $n \in \mathbb{N}$, donde a convergência no sentido de Wijsman é equivalente à convergência no sentido de Kuratowski. Como as convergências nos sentidos de Kuratowski e de Mosco em espaços de dimensão finita também são equivalentes, seguem as recíprocas dos itens (2) e (3). $\square$

As recíprocas das três primeiras afirmações acima são falsas. Um exemplo disso, no caso (2), será apresentado no capítulo dedicado às relações entre convergência de conjuntos e convergência de funcionais lineares contínuos. No caso (3), já vimos um contra-exemplo, na seção sobre convergência no sentido de Kuratowski.

Finalmente, para o caso (1), consideremos o seguinte exemplo:

Exemplo 2.36. Vamos mostrar que a r-convergência de uma sequência de conjuntos pode ser estritamente mais forte que sua convergência no sentido de Mosco.

Considere, em $l_2(\mathbb{R})$, os seguintes conjuntos:

$$S = B \cap \left\{ x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots) \in l_2(\mathbb{R}) : 0 \leq x^{(k)} \leq 1, \forall k \in \mathbb{N} \right\} \text{ e}$$

$$S_n = B \cap \left\{ x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots) \in l_2(\mathbb{R}) : 0 \leq x^{(k)} \leq 1 + n^{-\alpha}k, \forall k \in \mathbb{N} \right\},$$

com $B = \{x \in l_2 : \|x\| \leq 2\}$ e $\alpha > 0$ dado. Vamos mostrar que $S = \text{M-lim}_{n \in \mathbb{N}} S_n$:

i) Observe que $S \subseteq S_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, se $x \in S$, podemos tomar $x_n = x, \forall n \in \mathbb{N}$, e temos que $x_n \in S_n, \forall n \in \mathbb{N}$, e $x = \text{s-lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$.

ii) Seja $N \subseteq \mathbb{N}$ infinito, e seja $x_n \in S_n, \forall n \in N$. Suponhamos que exista $x \in l_2(\mathbb{R})$ tal que $x = w-\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Vamos mostrar que $x \in S$.

Se $x \notin S$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x^{(k)} > 1$. Escrevamos $x^{(k)} = 1 + \epsilon$, com $\epsilon > 0$. Seja π_k a k -ésima projeção em $l_2(\mathbb{R})$. Como $x = w-\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, temos, em particular, que $\pi_k(x) = \lim_{n \in N} \pi_k(x_n)$. Logo, $x^{(k)} = \lim_{n \in N} x_n^{(k)}$. Mas, por definição, temos $0 \leq x_n^{(k)} \leq 1 + n^{-\alpha}k$. Assim, se escolhermos n suficientemente grande, temos $x_n^{(k)} < 1 + \epsilon$, e $x^{(k)} \neq \lim_{n \in N} x_n^{(k)}$, absurdo.

No entanto, $S \neq r-\lim_{n \in \mathbb{N}} S_n$. Vamos mostrar que não é verdade que, dado qualquer $\epsilon > 0$, temos $S_n \subseteq S + \epsilon B[0, 1]$ para todo n suficientemente grande. Observe que:

$$S + \epsilon B[0, 1] \subseteq B \cap \left\{ x \in l_2(\mathbb{R}) : 0 \leq x^{(k)} \leq 1 + \epsilon, \forall k \in \mathbb{N} \right\}$$

Logo, não é possível garantir, apenas impondo restrições para o valor de n , que se tenha $S_n \subseteq S + \epsilon B[0, 1]$.

Finalmente, a proposição seguinte apresenta um fato sobre r -convergência e convergência de Mosco que será utilizado ao longo do capítulo sobre convergência de funcionais lineares contínuos.

Proposição 2.37. *Sejam $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de conjuntos convexos e fechados em um espaço normado E , A um conjunto convexo e fechado em E e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ tal que $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x \in E$. Então:*

1. Se $A = M-\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n$, então $x + A = M-\lim_{n \in \mathbb{N}} (x_n + A_n)$;
2. Se $A = r-\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n$, então $x + A = r-\lim_{n \in \mathbb{N}} (x_n + A_n)$;

Demonstração. Definamos:

$$B_n = x_n + A_n = \{x_n + a : a \in A_n\} \quad \text{e} \quad B = x + A = \{x + a : a \in A\}.$$

(1) Inicialmente, precisamos mostrar que, para cada $b \in B$, existe uma seqüência $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $b = s-\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ e $b_n \in B_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Tome $b \in B$. Então, $b = x + a$, para algum $a \in A$. Por hipótese, existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $a_n \in A_n, \forall n \in \mathbb{N}$, tal que $a = s-\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Mas $x = s-\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Logo, se tomarmos $b_n = x_n + a_n$, temos $b = s-\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ e $b_n \in B_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Devemos mostrar, agora, que, se $N \subseteq \mathbb{N}$ é infinito e $b_n \in B_n, \forall n \in N$, a convergência fraca de $(b_n)_{n \in N}$ a $b \in X$ implica que $b \in B$. Sabemos que, se $x = s-\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, então $x = w-\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Tome $N \subseteq \mathbb{N}$ infinito, e seja $b_n \in B_n, \forall n \in N$, com $b = w-\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Mas $b_n = x_n + a_n$, com $a_n \in A_n, \forall n \in N$. Então:

$$b = w-\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + a_n) = w-\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + w-\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x + a \in B,$$

como queríamos.

(2) Sabemos que $A = r\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n$, e precisamos mostrar que, para cada $r > 0$ e cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica:

$$i) \quad B \cap rB[0, 1] \subseteq B_n + \epsilon B[0, 1];$$

$$ii) \quad B_n \cap rB[0, 1] \subseteq B + \epsilon B[0, 1].$$

Sejam $r > 0$ e $\epsilon > 0$. Por hipótese, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$:

$$A \cap rB[0, 1] \subseteq A_n + \frac{\epsilon}{2}B[0, 1].$$

Então, se $n > n_0$, temos:

$$(x + A) \cap rB[0, 1] \subseteq (x + A_n) + \frac{\epsilon}{2}B[0, 1]$$

donde, se $n > n_0$:

$$B \cap rB[0, 1] \subseteq (x + A_n) + \frac{\epsilon}{2}B[0, 1].$$

Mas, como $x_n \rightarrow x$ em norma, segue que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_1$:

$$x \in \{x_n\} + \frac{\epsilon}{2}B[0, 1].$$

Logo, se $n > n_1$:

$$(x + A_n) + \frac{\epsilon}{2}B[0, 1] \subseteq (x_n + A_n) + \epsilon B[0, 1] = B_n + \epsilon B[0, 1].$$

Tome $n_2 > \max\{n_0, n_1\}$. Então, se $r > 0$, $\epsilon > 0$ e $n > n_2$, tem-se $B \cap rB[0, 1] \subseteq B_n + \epsilon B[0, 1]$.

Analogamente, prova-se a outra asserção. $\square$

Capítulo 3

Convergência de conjuntos de nível de funcionais lineares contínuos

Esse capítulo será dedicado ao estudo das relações existentes entre os diversos tipos de convergência de funcionais lineares contínuos e a convergência, em cada um dos sentidos já apresentados, de seus conjuntos de nível. Como base para esse capítulo, utilizaremos o texto científico [3].

Inicialmente, vamos definir o conjunto de nível de um funcional linear contínuo.

Definição 3.1. *Sejam E um espaço normado sobre $\mathbb{K}$, $f \in E'$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. O conjunto de nível α de f é:*

$$L(f; \alpha) = \{x \in E : f(x) = \alpha\}.$$

Cabe notar que, em função da continuidade dos funcionais lineares, seus conjuntos de nível são conjuntos fechados em seu domínio. Assim, $L(f; \alpha) \in CL(E)$.

Exemplo 3.2. Apresentaremos alguns exemplos que ilustram essa definição:

a) Seja $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Sempre se pode escrever $E = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{K}} L(f; \alpha)$. Se $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ é o funcional nulo, tem-se $L(f; 0) = E$.

b) Considere $E = (C[0, 1]; \mathbb{R})$, e fixe $t \in [0, 1]$. Seja $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $f(x) = x(t)$. Então,

$$L(f; \alpha) = \{x \in (C[0, 1]; \mathbb{R}) : f(x) = \alpha\} = \{x \in (C[0, 1]; \mathbb{R}) : x(t) = \alpha\}.$$

c) Considere, novamente, $E = (C[0, 1]; \mathbb{R})$. Seja $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \int_0^1 x(t) dt.$$

Então:

$$L(f; \alpha) = \left\{ x \in E : \int_0^1 x(t) dt = \alpha \right\}.$$

d) Considere $E = l_2(\mathbb{R})$, e fixe $\zeta = (\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_2(\mathbb{R})$. Seja $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \zeta_n.$$

$$\text{Nesse caso, } L(f; \alpha) = \left\{ x \in l_2(\mathbb{R}) : \sum_{n=1}^{\infty} x_n \zeta_n = \alpha \right\}.$$

Observação 3.3. Se $x_0 \in E$ é tal que $f(x_0) = \alpha$, então $L(f; \alpha) = x_0 + L(f; 0)$. De fato, se $x \in L(f; \alpha)$ e $x \neq x_0$, existe $v \in E$ tal que $x = x_0 + v$. Então:

$$\alpha = f(x) = f(x_0) + f(v) = \alpha + f(v) \Rightarrow f(v) = 0.$$

Logo, $x \in x_0 + L(f; 0)$. Reciprocamente, se $x \in x_0 + L(f; 0)$, então $x = x_0 + v$, com $f(v) = 0$, donde $f(x) = f(x_0) = \alpha$.

Deste ponto em diante, apresentaremos os resultados que relacionam convergência de funcionais lineares contínuos e convergência de seus conjuntos de nível. Até o final desse capítulo, a menos de menção explícita em contrário, E denotará um espaço normado sobre $\mathbb{R}$.

3.1 Convergência Fraca- $\star$

O teorema seguinte é o principal resultado que relaciona a convergência fraca- $\star$ de uma seqüência de funcionais lineares contínuos à convergência, no sentido de Kuratowski, dos conjuntos de nível dessa seqüência de funcionais.

Teorema 3.4. *Sejam E um espaço normado, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funcionais não-nulos em E' e $f \in E' \setminus \{0\}$. São equivalentes:*

1. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $L(f; \alpha) = K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(f_n; \alpha)$;
2. Para cada $N \subseteq \mathbb{N}$ infinito, as condições $x = s\text{-}\lim_{n \in N} x_n$ e $\alpha = \lim_{n \in N} f_n(x_n)$ implicam $f(x) = \alpha$;
3. A seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, e $f = w^*\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$;
4. Sempre que $x = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n)$.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) Suponhamos $x = s\text{-}\lim_{n \in N} x_n$ e $\alpha = \lim_{n \in N} f_n(x_n)$. Como $f \neq 0$, f é sobrejetor. Portanto, podemos escolher $z \in E$ tal que $f(z) = 1 - \alpha$.

Escolha, por (1), uma sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $z = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, $z_n \in L(f_n, 1 - \alpha)$. É claro que:

$$\lim_{n \in N} f_n(x_n + z_n) = \lim_{n \in N} f_n(x_n) + \lim_{n \in N} f_n(z_n) = \alpha + 1 - \alpha = 1.$$

Se colocarmos $\alpha_n = f_n(x_n + z_n)$, então existe $n_0 \in N$ tal que, se $n > n_0$ e $n \in N$, então

$$\frac{x_n + z_n}{\alpha_n} \in L(f_n; 1) \quad \text{e} \quad x + z = s\text{-}\lim_{n > n_0} (x_n + z_n).$$

Por (1), $x + z \in L(f; 1)$, donde $f(x) = 1 - f(z) = 1 - 1 + \alpha = \alpha$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Suponha, por absurdo, que a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não seja limitada. Seja $N \subseteq \mathbb{N}$ um subconjunto infinito em $\mathbb{N}$ tal que, para cada $n \in N$, $\|f_n\| > n$. Para cada $n \in N$, existe $x_n \in E$ com $\|x_n\| < \frac{1}{n}$ e $f_n(x_n) = 1$.

É claro que $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$. Como $f(0) = 0$ e $\lim_{n \in N} f_n(x_n) = 1$, obtemos uma contradição. Logo, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deve ser limitada.

Agora, fixe $x \in E$. Como $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, tanto $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ como $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ existem e são finitos. Mas então:

- $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lambda_1 \Rightarrow \exists N_1 \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que $f_n(x) \rightarrow \lambda_1$, com $n \in N_1$;
- $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lambda_2 \Rightarrow \exists N_2 \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que $f_n(x) \rightarrow \lambda_2$, com $n \in N_2$.

Aplicando (2) para $x_n = x$, $\forall n \in \mathbb{N}$, temos:

$$x = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x \text{ e } \lim_{n \in N_1} f_n(x) = \lambda_1 \Rightarrow f(x) = \lambda_1 \text{ e}$$

$$x = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x \text{ e } \lim_{n \in N_2} f_n(x) = \lambda_2 \Rightarrow f(x) = \lambda_2.$$

Logo, $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, donde $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ existe e $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

(3) $\Rightarrow$ (4) Observe que:

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n\| \|x_n - x\| + |f_n(x) - f(x)|.$$

Por (3), $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada e $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Se $x = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, então $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n)$.

(4) $\Rightarrow$ (1) Fixe $\alpha \in \mathbb{R}$. Queremos mostrar que $L(f; \alpha) = K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(f_n; \alpha)$. Por (4), a condição ii) da proposição 2.16 é satisfeita, uma vez que, se $x = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, então $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$, isto é, se $x_n \in L(f_n; \alpha)$ e $x = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, então $x \in L(f; \alpha)$.

Para mostrarmos a condição i) dessa proposição, fixemos $x \in E$ com $f(x) = \alpha$. Se $\alpha \neq 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow f_n(x) \neq 0$, uma vez que $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Para cada $n > n_0$, seja $x_n = \frac{\alpha}{f_n(x)}x$. É claro que $x_n \in L(f_n; \alpha)$, pois:

$$f_n(x_n) = f_n\left(\frac{\alpha}{f_n(x)}x\right) = \frac{\alpha}{f_n(x)}f_n(x) = \alpha.$$

Além disso, é fácil ver que $x = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, pois $f_n(x) \rightarrow f(x) = \alpha$. Logo, a condição i) está satisfeita.

Se $\alpha = 0$, tome $a \in E$ com $f(a) = 1$ e escolha seqüências $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em E tais que:

- (a) $x + a = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$;
- (b) $x - a = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} w_n$;
- (c) $z_n \in L(f_n; 1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- (d) $w_n \in L(f_n; -1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\eta_n = \frac{z_n + w_n}{2} \in L(f_n; 0)$, pois:

$$f_n(\eta_n) = \frac{1}{2}f_n(z_n + w_n) = \frac{1}{2}(f_n(z_n) + f_n(w_n)) = 0.$$

E, pelos itens (a) e (b), segue que:

$$x = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n + w_n}{2}.$$

Logo, a condição i) está satisfeita, e $L(f; \alpha) = K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(f_n; \alpha)$. □

Um corolário imediato desse teorema está colocado a seguir. Note-se que, assumindo a hipótese de que E é um espaço de Banach, podemos dispor do Princípio da Limitação Uniforme (vide teorema 1.11), o que nos permite enfraquecer a condição (3) do teorema anterior.

Corolário 3.5. *Sejam E um espaço de Banach, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funcionais não-nulos em E' e $f \in E' \setminus \{0\}$. São equivalentes:*

1. $f = w^*\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$;
2. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $L(f; \alpha) = K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(f_n; \alpha)$.

Demonstração. Inicialmente, suponhamos que $f = w^* - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. Assim, para cada $x \in E$, a seqüência $(|f_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. Pelo teorema 1.11, segue que $(\|f_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. Finalmente, pelo teorema 3.4, segue que para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $L(f; \alpha) = K - \lim_{n \in \mathbb{N}} L(f_n; \alpha)$.

Reciprocamente, se para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $L(f; \alpha) = K - \lim_{n \in \mathbb{N}} L(f_n; \alpha)$, o teorema 3.4 garante que $f = w^* - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. $\square$

Além disso, ainda é possível enfraquecer, também, a condição (1) do teorema, de acordo com a seguinte observação:

Observação 3.6. A condição (1) do teorema 3.4 pode ser substituída por uma condição mais fraca, a saber: $L(f; 1) = K - \lim_{n \in \mathbb{N}} L(f_n; 1)$. Na realidade, pode-se fazer isso para qualquer valor não-nulo de α . De fato, basta notar que $L(f; \alpha) = \alpha L(f; 1)$, $\forall \alpha \neq 0$. É importante notar que essa observação se estende aos resultados a seguir.

No entanto, a hipótese única de que $L(f; 0) = K - \lim_{n \in \mathbb{N}} L(f_n; 0)$ não garante a veracidade do teorema 3.4, como mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 3.7. A condição única de que $L(f; 0) = K - \lim_{n \in \mathbb{N}} L(f_n; 0)$ não garante a convergência fraca- $\star$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a $f \in E'$.

Seja $f \neq 0$ um funcional em E' . Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n = nf$. Vamos mostrar que $L(f; 0) = K - \lim_{n \in \mathbb{N}} L(f_n; 0)$. Seja $x \in L(f; 0)$, ou seja, $f(x) = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $x_n = x$. Assim, $f_n(x_n) = nf(x) = 0$, donde $x_n \in L(f_n; 0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Agora, seja $N \subseteq \mathbb{N}$ um subconjunto infinito em $\mathbb{N}$. Suponhamos que $x_n \in L(f_n; 0)$, $\forall n \in N$, e que $x_n \rightarrow x \in E$. Como $x_n \in L(f_n; 0)$, temos que $f_n(x_n) = 0$, $\forall n \in N$. Mas então $x_n \rightarrow x$ e $f(x_n) = 0$, $\forall n \in N$, donde $f(x) = 0$ e $x \in L(f; 0)$.

Assim, $L(f; 0) = K - \lim_{n \in \mathbb{N}} L(f_n; 0)$. Mas tome $x \in E$ tal que $f(x) = 1$. Então, $f_n(x) = nf(x) = n$, e $f_n(x) \not\rightarrow f(x)$. Logo, $f \neq w^* - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.

Da mesma forma, a completude de E é essencial para que o corolário apresentado seja válido. O exemplo a seguir ilustra esse fato:

Exemplo 3.8. Se E não é completo, o corolário 3.5 não é verdadeiro, isto é, a convergência fraca- $\star$ de uma seqüência de funcionais não garante a convergência, no sentido de Kuratowski, de seus conjuntos de nível.

Seja $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a base ortonormal canônica de $l_2(\mathbb{R})$, e seja $E \subset l_2(\mathbb{R})$ o subespaço das seqüências cujos termos são nulos a partir de um certo índice.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n \in E'$ dado por $f_n(x) = x_1 + nx_n$. Como as seqüências de E se anulam

a partir de um certo índice, temos, claramente, $f = w^* - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, onde $f(x) = x_1$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\frac{e_n}{n} \in L(f_n; 1)$. Mas $0 = s - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_n}{n}$, donde $(L(f_n; 1))_{n \in \mathbb{N}}$ não pode ser convergente, no sentido de Kuratowski, a $L(f; 1)$.

Vamos, agora, apresentar uma caracterização da convergência fraca- $\star$ de funcionais lineares contínuos a partir da convergência, no sentido de Wijsman, de seus conjuntos de nível. Para isso, precisaremos do seguinte lema:

Lema 3.9. *Seja E um espaço normado. Para cada $x \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $0 \neq f \in E'$, vale:*

$$d(x, L(f; \alpha)) = \frac{|f(x) - \alpha|}{\|f\|}.$$

Demonstração. Fixemos $\alpha = 0$, e tome $x \notin L(f; 0)$. Pelo corolário 1.10, existe $g \in E'$, com $\|g\| = 1$, tal que $\ker(g) = L(f; 0)$, e $g(x) = d(x, L(f; 0))$. Assim, $\ker(g) = L(f; 0) = \ker(f)$. Isso nos permite concluir, pelo corolário 1.5, que $f = \lambda g$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $\|g\| = 1$, é claro que $g = \frac{f}{\|f\|}$ ou $g = -\frac{f}{\|f\|}$. E, como $g(x) \geq 0$:

$$d(x, L(f; 0)) = \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

Suponhamos, agora, $\alpha \neq 0$. A observação 3.3 garante que, se $x_0 \in E$ é tal que $f(x_0) = \alpha$, então $L(f; \alpha) = x_0 + L(f; 0)$. Se $x \in L(f; \alpha)$, não há o que demonstrar. Caso contrário, temos:

$$d(x, L(f; \alpha)) = d(x, x_0 + L(f; 0)) = d(x - x_0, L(f; 0)).$$

Portanto,

$$d(x, L(f; \alpha)) = \frac{|f(x - x_0)|}{\|f\|} = \frac{|f(x) - f(x_0)|}{\|f\|} = \frac{|f(x) - \alpha|}{\|f\|}.$$

□

O próximo teorema caracteriza a convergência fraca- $\star$ de funcionais lineares contínuos a partir da convergência, no sentido de Wijsman, de seus conjuntos de nível. Sua demonstração é simples, em função do lema anterior:

Teorema 3.10. *Sejam E um espaço normado, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funcionais não-nulos em E' e $f \in E' \setminus \{0\}$. São equivalentes:*

1. $f = w^* - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ e $\|f\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|$;
2. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $L(f; \alpha) = W - \lim_{n \in \mathbb{N}} L(f_n; \alpha)$.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) Devemos mostrar que, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, a seqüência $(d(\cdot, L(f_n; \alpha)))_{n \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente a $d(\cdot, L(f; \alpha))$. Tome $x \in E$. Pelo lema 3.9 e pela condição (1), temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, L(f_n; \alpha)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f_n(x) - \alpha|}{\|f_n\|} = \frac{|f(x) - \alpha|}{\|f\|} = d(x, L(f; \alpha)).$$

Logo, $L(f; \alpha) = \text{W-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(f_n; \alpha)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sabe-se que a convergência no sentido de Wijsman garante a convergência no sentido de Kuratowski de uma seqüência de conjuntos. Dessa forma, se assumirmos (2), temos, pelo teorema

3.4, $f = \text{w}^*-\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.

Além disso, se $g \in E'$ e $g \neq 0$, temos, pelo lema 3.9:

$$d(0, L(g; 1)) = \frac{|g(0) - 1|}{\|g\|} = \frac{1}{\|g\|}.$$

Por (2), $d(0, L(f; 1)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(0, L(f_n; 1))$. Dessa forma, fazendo $g_n = f$ e também $g = f$:

$$\frac{1}{\|f\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\|f_n\|},$$

donde $\|f\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|$. □

3.2 Convergência em Norma

A seguir, apresentamos um teorema que relaciona a convergência em norma de funcionais lineares contínuos com a r-convergência de seus conjuntos de nível.

Teorema 3.11. *Sejam E um espaço normado, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funcionais não-nulos em E' e $f \in E' \setminus \{0\}$. São equivalentes:*

1. $f = \text{s-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$;
2. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $L(f; \alpha) = \text{r-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(f_n; \alpha)$.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) Sejam $r, \alpha \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$ fixos. Seja $0 < \delta < \inf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|$. Note-se que esse ínfimo é positivo, uma vez que todos os funcionais em questão são não-nulos e convergem a um funcional não-nulo. Por hipótese, $f = \text{s-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, donde:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0, x \in rB[0, 1] \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon\delta.$$

Pela escolha de δ - observe que $\|f_n\| > \delta$, para cada $n > n_0$, temos:

$$\sup_{x \in B[0, \epsilon]} |f_n(x)| > \epsilon\delta.$$

Então, $\forall x \in rB[0, 1]$, $\forall n > n_0$, existe $z = z(x, n) \in \epsilon B[0, 1]$ com $f_n(z) = f(x) - f_n(x)$. De fato, a partir das duas inequações anteriores conclui-se que:

$$\sup_{x \in B[0, \gamma]} |f_n(x)| > |f_n(x) - f(x)|$$

onde $\gamma = \min\{r, \epsilon\}$ e $n > n_0$. Além disso, $\min_{x \in B[0, \gamma]} |f_n(x)| = 0$. Temos, então:

$$0 \leq |f_n(x) - f(x)| < \sup_{x \in B[0, \gamma]} |f_n(x)|,$$

e, como f_n é contínua em $B[0, \gamma]$, segue o resultado. Podemos supor $f_n(z) = f(x) - f_n(x)$; caso contrário, basta tomar o ponto $-z$.

Se $x \in L(f; \alpha) \cap rB[0, 1]$, então $x + z(x, n) \in L(f_n; \alpha)$, pois:

$$f_n(x + z(x, n)) = f_n(x) + f_n(z(x, n)) = f_n(x) + f(x) - f_n(x) = f(x) = \alpha.$$

Mas $\|z(x, n)\| \leq \epsilon$, donde obtemos, se $n > n_0$:

$$L(f; \alpha) \cap rB[0, 1] \subseteq L(f_n; \alpha) + \epsilon B[0, 1].$$

Analogamente, mostra-se que, para $n > n_0$:

$$L(f_n; \alpha) \cap rB[0, 1] \subseteq L(f; \alpha) + \epsilon B[0, 1].$$

Segue, portanto, que $L(f; \alpha) = \text{r-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(f_n; \alpha)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sabemos que a topologia da convergência uniforme em subconjuntos limitados de E em $C_b(E, \mathbb{R})$, quando restrita a E' , equivale à topologia da norma em E' . Portanto, é suficiente mostrarmos que a seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f em $rB[0, 1]$, para cada $r > 0$. Fixemos $r > 0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $g_n(x) = f_n(x) - 1$, e defina $g(x) = f(x) - 1$. Vamos mostrar que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a g em $rB[0, 1]$. Sabemos que a r -convergência de uma seqüência de conjuntos implica sua convergência no sentido de Wijsman, e que isso não supõe a reflexividade do espaço. Então, $L(f; \alpha) = \text{W-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(f_n; \alpha)$. Assim, de acordo com o teorema 3.10, podemos afirmar que $f = \text{w}^*\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ e $\|f\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|$.

Como:

$$d(0, L(f_n; 1)) = \frac{1}{\|f_n\|},$$

temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(0, L(f_n; 1))$ existe. Assim, a seqüência $(d(\cdot, L(f_n; 1)))_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada, quando restrita a $rB[0, 1]$. Além disso, pela convergência uniforme de $(d(\cdot, L(f_n; 1)))_{n \in \mathbb{N}}$ a

$d(\cdot, L(f; 1))$, e pela convergência de $(\|f_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ a $\|f\|$, a seqüência $(\|f_n\|d(\cdot, L(f_n; 1)))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a $\|f\|d(\cdot, L(f; 1))$ em $rB[0, 1]$.

Mas:

$$|g_n(x)| = |f_n(x) - 1| = \|f_n\| \frac{|f_n(x) - 1|}{\|f_n\|} = \|f_n\|d(x, L(f_n; 1))$$

e

$$|g(x)| = |f(x) - 1| = \|f\| \frac{|f(x) - 1|}{\|f\|} = \|f\|d(x, L(f; 1))$$

Logo, $|g(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |g_n(x)|$ uniformemente em $rB[0, 1]$.

Suponhamos, agora, por absurdo, que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não converge uniformemente a g em $rB[0, 1]$. Nesse caso, existem $\epsilon > 0$ e $N \subseteq \mathbb{N}$ infinito tais que, para cada $n \in N$:

$$\sup_{x \in rB[0, 1]} |g_n(x) - g(x)| > 4\epsilon \quad \text{e} \quad \sup_{x \in rB[0, 1]} ||g_n(x)| - |g(x)|| < \epsilon.$$

Pela combinação dessas duas inequações, existe um subconjunto $M \subseteq N$ infinito que satisfaz uma das seguintes asserções:

- (a) Para cada $n \in M$, existe $x_n \in rB[0, 1]$ tal que $g_n(x_n) < -\epsilon < \epsilon < g(x_n)$;
- (b) Para cada $n \in M$, existe $x_n \in rB[0, 1]$ tal que $g(x_n) < -\epsilon < \epsilon < g_n(x_n)$.

Consideremos o caso (a). Fixe $x_0 \in rB[0, 1]$ com $g(x_0) > \epsilon$. Como $f = w^* - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, a seqüência $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente a g . Assim, existe $n \in M$ tal que $g_n(x_0) > \epsilon$. Como $g_n(x_n) < -\epsilon$, e g_n é um funcional afim, existe $\lambda \in [0, 1]$ tal que:

$$g_n(\lambda x_n + (1 - \lambda)x_0) = 0.$$

E, como g é linear:

$$g(\lambda x_n + (1 - \lambda)x_0) = \lambda g(x_n) + (1 - \lambda)g(x_0) > \lambda\epsilon + \epsilon - \lambda\epsilon = \epsilon.$$

Obtemos, assim, uma contradição, uma vez que, se $\beta = \lambda x_n + (1 - \lambda)x_0$, então:

$$\beta \in rB[0, 1] \quad \text{e} \quad ||g_n(\beta)| - |g(\beta)|| > \epsilon.$$

Analogamente, o caso (b) nos leva a uma contradição. Concluimos, portanto, que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a g . Logo, $f = s - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. □

Esse teorema nos permite obter mais exemplos de seqüências r -convergentes de conjuntos.

Exemplo 3.12. Apresentaremos mais dois exemplos de seqüências de conjuntos r -convergentes:

a) Considere os seguintes planos em $\mathbb{R}^3$:

$$\pi_n : \left(2 - \frac{1}{n}\right) x_1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} x_2 + \left(\frac{1}{3^n}\right) x_3 = 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\pi : 2x_1 + e^2 x_2 = 1$$

Afirmamos que $\pi = r\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} \pi_n$. De fato, basta definirmos os seguintes funcionais no dual de $\mathbb{R}^3$:

$$f_n(x_1, x_2, x_3) = \left(2 - \frac{1}{n}\right) x_1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} x_2 + \left(\frac{1}{3^n}\right) x_3,$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + e^2 x_2.$$

É fácil ver que $f = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. Logo, $L(f; 1) = r\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(f_n; 1)$. Mas $\pi_n = L(f_n; 1)$ e $\pi = L(f; 1)$, donde segue o resultado que procurávamos.

b) Considere $\xi_n = (\xi_n^{(1)}, \xi_n^{(2)}, \dots)$, $\xi = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots) \in l_2(\mathbb{R})$, com $\xi = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$. Definamos:

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_n^{(i)} x^{(i)} \quad \text{e} \quad f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi^{(i)} x^{(i)}.$$

Temos que $f = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. Logo, $L(f; 1) = r\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(f_n; 1)$.

Em particular, se $\xi_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$ e $\xi = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$, temos que:

$$A_n = L(f_n; 1) = \left\{ x \in l_2(\mathbb{R}) : x^{(1)} + \frac{x^{(2)}}{2} + \dots + \frac{x^{(n)}}{n} = 1 \right\},$$

$$A = L(f; 1) = \left\{ x \in l_2(\mathbb{R}) : x^{(1)} + \frac{x^{(2)}}{2} + \frac{x^{(3)}}{3} + \dots = 1 \right\}$$

Então, $A = r\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Em função da grande similaridade das definições de convergência de conjuntos no sentido de Kuratowski e no sentido de Mosco, o artigo [3] busca estabelecer, para seqüências de conjuntos convergentes no sentido de Mosco, um resultado análogo àquele obtido no caso de uma seqüência convergente no sentido de Kuratowski, apresentado no teorema 3.4.

A seguir, caminharemos na direção do resultado procurado. É importante notar que sua demonstração usa algumas variações do que é feito na demonstração do teorema 3.4. No entanto, nesse caso, a reflexividade do espaço E é fundamental. Iniciamos com o seguinte:

Lema 3.13. *Sejam E um espaço normado, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funcionais não-nulos em E' e $f \in E' \setminus \{0\}$. São equivalentes:*

1. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $L(f; \alpha) = M\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(f_n; \alpha)$;
2. Para cada $N \subseteq \mathbb{N}$ infinito, as condições $x = w\text{-}\lim_{n \in N} x_n$ e $\alpha = \lim_{n \in N} f_n(x_n)$ implicam $f(x) = \alpha$.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) Suponha $x = w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ e $\alpha = \lim_{n \in N} f_n(x_n)$. Escolha $z \in X$ tal que $f(z) = 1 - \alpha$. Por (1), escolha $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $z = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $z_n \in L(f_n; 1 - \alpha)$. Observe que:

$$\lim_{n \in N} f(x_n + z_n) = \lim_{n \in N} f(x_n) + \lim_{n \in N} f(z_n) = \alpha + 1 - \alpha = 1.$$

Se escrevermos $\alpha_n = f_n(x_n + z_n)$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$:

$$\frac{x_n + z_n}{\alpha_n} \in L(f_n; 1) \quad \text{e} \quad x + z = w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + z_n).$$

Por (1), $x + z \in L(f; 1)$, donde $f(x + z) = 1$, e $f(x) = 1 - f(z) = 1 - 1 + \alpha = \alpha$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Pela segunda condição da proposição 2.31, devemos ter: sempre que $N \subseteq \mathbb{N}$ é infinito e $x_n \in L(f_n; \alpha)$, $\forall n \in N$, a convergência fraca de $(x_n)_{n \in N}$ a $x \in X$ implica que $x \in L(f; \alpha)$. Por (2), $f(x) = \alpha$, donde $x \in L(f; \alpha)$, e essa condição está satisfeita.

Além disso, note que a condição (2) implica a condição (2) do teorema 3.4, uma vez que a convergência em norma implica a convergência fraca de uma seqüência. E esse teorema garante que $L(f; \alpha) = K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(f_n; \alpha)$.

Mas a primeira condição da proposição 2.16 implica a primeira condição da proposição 2.31. Logo, $L(f; \alpha) = M\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(f_n; \alpha)$. $\square$

O teorema seguinte usa o lema anterior e faz analogia ao teorema 3.4. Observe que a reflexividade do espaço é utilizada na implicação (2) $\Rightarrow$ (3).

Teorema 3.14. *Sejam E um espaço de Banach reflexivo, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funcionais não-nulos em E' e $f \in E' \setminus \{0\}$. São equivalentes:*

1. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $L(f; \alpha) = M\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(f_n; \alpha)$;
2. Para cada $N \subseteq \mathbb{N}$ infinito, as condições $x = w\text{-}\lim_{n \in N} x_n$ e $\alpha = \lim_{n \in N} f_n(x_n)$ implicam $f(x) = \alpha$;
3. $f = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$;
4. Sempre que $x = w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n)$.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) Segue do lema 3.13.

(2) $\Rightarrow$ (3) Vamos assumir (2). Pelo teorema 3.4, a sequência $(\|f_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. Se assumirmos $f \neq s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, existem $\epsilon > 0$ e $N \subseteq \mathbb{N}$ infinito tais que, para cada $n \in N$, $\|f_n - f\| > \epsilon$. Escolha $x_n \in E$ com $\|x_n\| = 1$ e $|f_n(x_n) - f(x_n)| > \epsilon$. Observe que esse vetor existe, uma vez que:

$$\|f_n - f\| = \sup_{\|x\|=1} |f_n(x) - f(x)| > \epsilon.$$

Como E é reflexivo, sua bola unitária é fracamente compacta (vide [12], página 245). Pelo Teorema de Eberlein (vide [12], página 248), a bola é fracamente sequencialmente compacta. Dessa forma, toda sequência na bola deve possuir uma subsequência fracamente convergente. Além disso, como a sequência $(\|f_n(x_n)\|)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, pois $(\|f_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ o é, $(f_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ também deve possuir subsequência convergente. Podemos, então, afirmar que existem $M \subseteq N$ subconjunto infinito, $x \in B[0, 1]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que $x = w\text{-}\lim_{n \in M} x_n$ e $\alpha = \lim_{n \in M} f_n(x_n)$.

Como $x = w\text{-}\lim_{n \in M} x_n$, segue que $f(x) = \lim_{n \in M} f_n(x_n)$. Além disso, temos $|f_n(x_n) - f(x_n)| > \epsilon$, $\forall n \in M$, donde $|\alpha - f(x)| \geq \epsilon$, contradição.

(3) $\Rightarrow$ (4) Suponhamos que $f = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. Observe que:

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leq \|f_n - f\| \|x_n\| + |f(x_n) - f(x)|.$$

Por hipótese, $\|f_n - f\| \rightarrow 0$. Se assumirmos que $x = w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, temos $f(x_n) \rightarrow f(x)$. Logo, $\|f_n(x_n) - f(x)\| \rightarrow 0$, e $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n)$.

(4) $\Rightarrow$ (2) Assumindo (4), se $x = w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, então $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n)$. Se $\alpha = \lim_{n \in N} f_n(x_n)$, então $f(x) = \alpha$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Segue do lema 3.13. □

De acordo com o teorema 2.35, a convergência no sentido de Mosco de uma sequência de conjuntos convexos implica a convergência, no sentido de Wijsman, dessa sequência. No entanto, antes da elaboração do artigo [3], não se sabia se a convergência no sentido de Mosco de uma sequência de conjuntos fechados e convexos em um espaço reflexivo poderia ser estritamente mais forte que a convergência, no sentido de Wijsman, dessa mesma sequência. No artigo [3], mostra-se que isso é possível. A seguir, vamos apresentar a maneira como isso é feito.

No artigo [4], A. L. Brown constrói um espaço reflexivo e estritamente convexo F que não possui a propriedade de Kadec, isto é, no qual a combinação da convergência fraca e da convergência das normas de uma sequência não garante sua convergência em norma.

Esse espaço nada mais é do que o espaço $l_2(\mathbb{R})$ das seqüências reais com quadrado somável, munido de uma norma convenientemente criada para satisfazer certas propriedades. Dessa forma, é possível obter uma seqüência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em F com:

- $y = w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ e $\|y\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\|$;
- $y \neq s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

O teorema seguinte apresenta o resultado obtido:

Teorema 3.15. *Existem um espaço reflexivo E , uma seqüência de conjuntos fechados e convexos $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ e um conjunto fechado e convexo $A \in E$ tais que $A = W\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n$, mas $A \neq M\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n$.*

Demonstração. Considere $E = F'$, onde F é o espaço construído em [4]. Observe que E é obviamente reflexivo e que $E' = F'' = F$. Dessa forma, podemos enxergar $y, y_1, y_2, \dots$ como funcionais lineares contínuos no espaço reflexivo E .

Como E é reflexivo, a convergência fraca e a convergência fraca- $\star$ de funcionais são equivalentes. Logo:

1. $y = w^\star\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ e $\|y\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\|$;
2. $y \neq s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

Então:

- Por (1) e pelo teorema 3.10, $L(f; 1) = W\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(f_n; 1)$;
- Por (2) e pelo teorema 3.14, $L(f; 1) \neq M\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(y_n; 1)$.

Dessa forma, E é um espaço reflexivo e estritamente convexo no qual a convergência, no sentido de Wijsman, de conjuntos convexos e fechados não acarreta a convergência dessa seqüência no sentido de Mosco. $\square$

Sabemos também que a r -convergência de uma seqüência de conjuntos fechados e convexos pode ser estritamente mais forte que a convergência no sentido de Mosco dessa seqüência (exemplo 2.36). No entanto, se trabalharmos apenas com hiperplanos, isso não pode ocorrer. Vamos demonstrar esse fato.

Lema 3.16. *Seja E um espaço normado, e seja $H \subseteq E$ um hiperplano fechado. Para cada $x \in E \setminus H$, existe $f \in E'$, $f \neq 0$, tal que $x + H = L(f; 1)$.*

Demonstração. Sabemos que, para cada hiperplano H de E , existe $\phi \in E'$ tal que $H = \ker \phi$. Seja $x \in E \setminus H$. Então, $\phi(x) = \alpha \neq 0$.

Considere $f = \alpha^{-1}\phi$. É óbvio que $x + H \subseteq L(f; 1)$. Por outro lado, se $y \in L(f; 1)$, então $f(y) = 1$, donde $\phi(y) = \alpha$ e, portanto, $\phi(x - y) = 0$. Logo, $x - y \in H$, e $y \in x + H$. Segue que $L(f; 1) \subseteq x + H$. $\square$

Proposição 3.17. *Sejam E um espaço de Banach reflexivo, $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de hiperplanos fechados em E e H um hiperplano fechado em E . Então:*

$$H = M\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} H_n \Leftrightarrow H = r\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} H_n.$$

Demonstração. Pelo teorema 2.35, sabemos que $H = r\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} H_n \Rightarrow H = M\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} H_n$. Resta-nos, então, provar a outra implicação.

Suponhamos que $H = M\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} H_n$, e seja $F = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n \right) \cup H$. Pelo Teorema de Baire (vide [12], página 36), F tem interior vazio. Logo, existe $x \in E \setminus F$, donde $x \notin H_n, \forall n \in \mathbb{N}$ e $x \notin H$.

Pelo lema 3.16, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $f_n \in E', f_n \neq 0$, tal que $x + H_n = L(f_n; 1)$. Além disso, existe $f \in E', f \neq 0$, tal que $x + H = L(f; 1)$.

Pelo lema 2.37, $x + H = M\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} (x + H_n)$. Então, $L(f; 1) = M\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(f_n; 1)$. Assim, pelo teorema 3.14, temos $f = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. Pelo teorema 3.11, segue que $L(f; 1) = r\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(f_n; 1)$, donde $x + H = r\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} (x + H_n)$. Mas então $H = r\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} H_n$, e o resultado está provado. $\square$

Os teoremas 3.4 e 3.14 contrastam as convergências, nos sentidos de Mosco e de Kuratowski, de seqüências de hiperplanos em um espaço reflexivo. Terminamos o capítulo com um exemplo concreto:

Exemplo 3.18. Vamos mostrar que a convergência fraca- $\star$ de uma seqüência de funcionais no dual de $l_2(\mathbb{R})$, embora assegure a convergência, no sentido de Kuratowski, de seus conjuntos de nível, não garante essa convergência, no sentido de Mosco. Em virtude do teorema 3.4, está implícita, na construção a seguir, uma seqüência de hiperplanos em $l_2(\mathbb{R})$ que converge no sentido de Kuratowski, mas não no de Mosco.

Considere, em $l_2'(\mathbb{R})$, a seqüência $f_n = e_1^* + e_n^*, \forall n \in \mathbb{N}$, onde e_i^* é a i -ésima projeção de um elemento de $l_2(\mathbb{R})$. Observe que:

1. A seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em norma;
2. Se $f = e_1^*$, então $f = w^*\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.

Pelo teorema 3.4, temos que $L(f; 1) = K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(f_n; 1)$. Para cada $n \geq 2$, $e_n \in L(f_n; 1)$. Mas $0 = w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} e_n$. Assim, $L(f; 1) \neq M\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(f_n; 1)$, uma vez que, se $L(f; 1) = M\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(f_n; 1)$, teríamos $f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(e_n) = 1$, absurdo.

Capítulo 4

Polinômios Homogêneos

Ao longo desse capítulo, apresentaremos as definições e alguns resultados básicos da teoria de polinômios homogêneos em espaços de Banach. Com isso, fundamentaremos as ferramentas utilizadas no capítulo 5, que relaciona os diversos tipos de convergência de conjuntos com a convergência desses polinômios. A maior parte desse capítulo se baseia na dissertação [15].

4.1 Aplicações Multilineares

Nessa seção, estudaremos as aplicações multilineares em espaços normados, e provaremos alguns resultados sobre sua continuidade. O estudo dessas aplicações servirá como base para o estudo dos polinômios homogêneos.

Em função de estarmos interessados apenas em aplicações contínuas, enunciaremos os resultados no contexto de espaços normados. No entanto, alguns resultados continuam válidos mesmo no contexto de espaços vetoriais.

Definição 4.1. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, E_2, \dots, E_n$ e F espaços normados sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação $A : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$ é dita n -linear se é linear em cada uma de suas variáveis.*

O conjunto de todas as aplicações n -lineares em um espaço se torna um espaço vetorial quando munido das operações usuais envolvendo funções. Denotaremos por $L_a(E_1, \dots, E_n; F)$ o espaço de todas as aplicações n -lineares de $E_1, E_2, \dots, E_n$ em F . Quando $F = \mathbb{K}$, escrevemos simplesmente $L_a(E_1, \dots, E_n)$. No caso em que $E_1 = E_2 = \dots = E_n = E$, escrevemos $L_a(^n E; F)$. Por convenção, $L_a(^0 E; F) = F$.

Se $E_1, \dots, E_n$ são espaços normados sobre o corpo $\mathbb{K}$, o espaço produto $E_1 \times \dots \times E_n$ também

é um espaço normado, com qualquer uma das normas:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < +\infty$$

Ambas as normas são equivalentes e geram a topologia produto em $E_1 \times \cdots \times E_n$. Ao longo do texto, utilizaremos a norma $\|\cdot\|_\infty$, que será denotada simplesmente por $\|\cdot\|$.

A proposição seguinte apresenta algumas equivalências para a continuidade de uma aplicação multilinear. Essa proposição é uma generalização de resultado análogo para as aplicações lineares:

Proposição 4.2. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, E_2, \dots, E_n$ e F espaços normados sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $A : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \rightarrow F$ uma aplicação n -linear. São equivalentes:*

1. *A é contínua;*
2. *A é contínua em 0;*
3. *Existe $M > 0$ tal que $\|A(x_1, \dots, x_n)\| \leq M\|x_1\| \cdots \|x_n\|$, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$.*

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2): Óbvio.

(2) $\Rightarrow$ (3): Se A é contínua no ponto 0, dado $\epsilon = 1$ existe $\delta > 0$ tal que, se $\|x\| < \delta$, então $\|A(x)\| \leq 1$. Seja $x \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ tal que $x_i \neq 0, \forall 1 \leq i \leq n$, e definamos:

$$y = \left(\frac{\delta x_1}{2\|x_1\|}, \frac{\delta x_2}{2\|x_2\|}, \dots, \frac{\delta x_n}{2\|x_n\|} \right).$$

Então, $\|y\| < \delta$ e $\|A(y)\| \leq 1$, donde:

$$\|A(x_1, \dots, x_n)\| \leq \frac{2^n}{\delta^n} \|x_1\| \cdots \|x_n\|.$$

Se $x \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ é tal que $x_i = 0$, para algum i , então $A(x) = 0$, e a desigualdade continua válida.

(3) $\Rightarrow$ (1): Mostremos que A é uniformemente contínua sobre os limitados e, portanto, é contínua. Fixe $a = (a_1, \dots, a_n) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$, e seja $x = (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$. Então:

$$A(x) - A(a) = A(x_1 - a_1, x_2, \dots, x_n) + \cdots + A(a_1, \dots, a_{n-1}, x_n - a_n).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|A(x) - A(a)\| &\leq \|A(x_1 - a_1, x_2, \dots, x_n)\| + \dots + \|A(a_1, \dots, a_{n-1}, x_n - a_n)\| \leq \\ &\leq M\|x_1 - a_1\|\|x_2\| \dots \|x_n\| + \dots + M\|a_1\| \dots \|a_{n-1}\|\|x_n - a_n\|.\end{aligned}$$

Assim, se $\|x\|, \|a\| < R$, temos, para cada $1 \leq i \leq n$, $\|x_i\|, \|a_i\| < R$. Portanto:

$$\|A(x) - A(a)\| \leq MR^{n-1}(\|x_1 - a_1\| + \dots + \|x_n - a_n\|) \leq MR^{n-1}\|x - a\|_1.$$

□

Denotaremos por $L(E_1, \dots, E_n; F)$ o espaço de todas as aplicações n -lineares contínuas de $E_1, E_2, \dots, E_n$ em F . Quando $F = \mathbb{K}$, escrevemos simplesmente $L(E_1, \dots, E_n)$. No caso em que $E_1 = E_2 = \dots = E_n = E$, escrevemos $L^n(E; F)$. Por convenção, $L^0(E; F) = F$.

A proposição seguinte relaciona a continuidade de uma aplicação multilinear com a continuidade em cada uma de suas variáveis. Deve-se notar que a hipótese sobre a completude dos espaços é essencial, como mostrará o exemplo após a proposição.

Proposição 4.3. *Sejam $E_1, E_2, \dots, E_n$ espaços de Banach e F um espaço normado. Então, $A \in L(E_1, \dots, E_n; F) \Leftrightarrow A$ é contínua em cada variável.*

Demonstração. Se A é contínua, então A é claramente contínua em cada variável, pois essas funções são apenas restrições da multilinear A .

Reciprocamente, suponhamos que $A : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ seja bilinear e contínua em cada uma de suas variáveis. Em particular, a função $A_y : E_1 \rightarrow F$ definida por $A_y(x) = A(x, y)$ é linear e contínua. Analogamente, pode-se definir a função $A_x : E_2 \rightarrow F$. Portanto:

$$\|A(x, y)\| = \|A_x(y)\| \leq M_x\|y\|, \forall y \in E_2.$$

Se $\|y\| \leq 1$, segue que $\|A_y(x)\| = \|A_x(y)\| \leq M_x$. Considere a família $\mathcal{F} = \{A_y : \|y\| \leq 1\}$. Então, $\|A_y(x)\| \leq M_x, \forall A_y \in \mathcal{F}$.

Pelo Teorema de Banach-Steinhaus (teorema 1.11), existe uma constante $M > 0$ com $\|A_y\| \leq M, \forall A_y \in \mathcal{F}$. Então, se $x \in E_1$, $\|x\| \leq 1$, $y \in E_2$ e $\|y\| \leq 1$:

$$\|A(x, y)\| = \|A_y(x)\| \leq \|A_y\| \leq M$$

e, conseqüentemente, para todo $(x, y) \in E_1 \times E_2$, tem-se $\|A(x, y)\| \leq M\|x\|\|y\|$. Pela proposição 4.2, A é contínua.

Suponhamos, agora, que toda aplicação $(n-1)$ -linear contínua em cada variável é contínua, e seja A uma aplicação n -linear contínua em cada variável. Fixemos $x_n \in E_n$, e definamos:

$$A_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = A(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n).$$

Então, A_{x_n} é $(n-1)$ -linear e contínua em cada variável. Logo, A_{x_n} é contínua, donde existe M_{x_n} tal que:

$$\|A_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\| = \|A(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)\| \leq M_{x_n} \|x_1\| \|x_2\| \cdots \|x_{n-1}\|.$$

Se $\|x_i\| \leq 1$, $1 \leq i \leq n-1$, então $\|A(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)\| \leq M_{x_n}$. Se definirmos

$$A_{x_1, \dots, x_{n-1}}(x_n) = A(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

e a família $\mathcal{F} = \{A_{x_1, \dots, x_{n-1}} : \|x_i\| \leq 1, 1 \leq i \leq n-1\}$, teremos, para cada $x_n \in E_n$:

$$\|A_{x_1, \dots, x_{n-1}}(x_n)\| = \|A(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)\| \leq M_{x_n}.$$

Utilizando novamente o Teorema de Banach-Steinhaus, existe uma constante positiva M tal que $\|A_{x_1, \dots, x_{n-1}}\| \leq M, \forall A_{x_1, \dots, x_{n-1}} \in \mathcal{F}$. Analogamente, concluímos que A é contínua. $\square$

Corolário 4.4. *Se A é uma aplicação multilinear definida em um produto de espaços de dimensão finita, então A é contínua.*

Demonstração. Basta notar que todo espaço de dimensão finita é completo e que, além disso, toda função linear definida em um espaço de dimensão finita é contínua. $\square$

O exemplo seguinte mostra que a completude do espaço é essencial para que a proposição seja verdadeira.

Exemplo 4.5. Seja $E = C([0, 1]; \mathbb{R})$ munido da norma $\|x\| = \int_0^1 |x(t)| dt$. A aplicação $f \in L_a(^2E)$, definida por $f(x, y) = \int_0^1 x(t)y(t) dt$ é contínua em cada variável, mas não é contínua.

De fato, fixado $x \in E$, temos:

$$|f(x, y)| \leq \int_0^1 |x(t)| |y(t)| dt \leq \|x\|_\infty \int_0^1 |y(t)| dt = \|x\|_\infty \|y\|.$$

Logo, a função é contínua na segunda variável, e o mesmo pode ser feito para mostrar que também é contínua na primeira variável. Vamos, agora, mostrar que f não é contínua. Considere a sequência em $C([0, 1]; \mathbb{R})$ definida por:

$$x_n(t) = \begin{cases} n - n^3 t & , 0 \leq t \leq \frac{1}{n^2} \\ 0 & , \frac{1}{n^2} < t < 1 \end{cases}$$

Temos que:

$$\|x_n\| = \int_0^{\frac{1}{n^2}} |n - n^3 t| dt = \int_0^{\frac{1}{n^2}} n - n^3 t dt = \frac{1}{2n}.$$

Logo, a sequência $((x_n, x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a zero. No entanto:

$$f(x_n, x_n) = \int_0^{\frac{1}{n^2}} (n - n^3 t)^2 dt = \frac{1}{3}.$$

e f não pode ser contínua.

A próxima proposição apresenta a norma utilizada no espaço das aplicações multilineares:

Proposição 4.6. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, E_2, \dots, E_n$ e F espaços normados sobre o corpo $\mathbb{K}$. A função $\|\cdot\| : L(E_1, E_2, \dots, E_n; F) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:*

$$\|A\| = \sup\{\|A(x)\| : x \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n, \|x\| \leq 1\}$$

é uma norma em $L(E_1, E_2, \dots, E_n; F)$.

Demonstração. Note que $\|A\| \in \mathbb{R}$, uma vez que A é contínua e, portanto, vale a proposição 4.2. Vamos demonstrar cada uma das propriedades da norma:

$$i) \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0.$$

Imediato, a partir da definição.

$$ii) \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|, \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

Seja $\lambda \in \mathbb{K}$. Então:

$$\|\lambda A\| = \sup\{\|\lambda A(x)\| : \|x\| \leq 1\} = |\lambda| \sup\{\|A(x)\| : \|x\| \leq 1\} = |\lambda| \|A\|.$$

$$iii) \|A_1 + A_2\| \leq \|A_1\| + \|A_2\|.$$

Sejam $A_1, A_2 \in L(E_1, E_2, \dots, E_n; F)$ e $x \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ com $\|x\| \leq 1$. Então:

$$\|A_1(x) + A_2(x)\| \leq \|A_1(x)\| + \|A_2(x)\| \leq \|A_1\| + \|A_2\|.$$

Logo:

$$\|A_1 + A_2\| = \sup\{\|A_1(x) + A_2(x)\| : \|x\| \leq 1\} \leq \|A_1\| + \|A_2\|.$$

□

O próxima lema identifica o espaço das aplicações multilineares contínuas com um espaço de aplicações lineares, e serve como base para o resultado seguinte, que é bastante relevante.

Lema 4.7. Sejam E_i, F_j, G espaços normados, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. A função

$$\Phi : L(E_1, \dots, E_m, F_1, \dots, F_n; G) \longrightarrow L(E_1, \dots, E_m; L(F_1, \dots, F_n; G))$$

definida por

$$\Phi(A)(x)(y) = A(x, y), \text{ para } x \in E_1 \times \dots \times E_m \text{ e } y \in F_1 \times \dots \times F_n$$

é uma isometria.

Demonstração. É fácil ver que Φ é linear. A sobrejetividade também é clara: se $B \in L(E_1, \dots, E_m; L(F_1, \dots, F_n; G))$, basta tomar $A(x, y) = B(x)(y)$. Assim, A é multilinear e A é contínua, pois:

$$\|A(x, y)\| = \|B(x)(y)\| \leq \|B(x)\| \|y_1\| \dots \|y_n\| \leq \|B\| \|x_1\| \dots \|x_m\| \|y_1\| \dots \|y_n\|,$$

para $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ e $\Phi(A) = B$. Vejamos, agora, que Φ é uma isometria e, conseqüentemente, é contínua. Dados $A \in L(E_1, \dots, E_m, F_1, \dots, F_n; G)$, $x \in E_1 \times \dots \times E_m$ e $y \in F_1 \times \dots \times F_m$, com $\|x\| \leq 1$ e $\|y\| \leq 1$, temos:

$$\|\Phi(A)\| = \sup_{\|x\|, \|y\| \leq 1} \|\Phi(A)(x)(y)\| = \sup_{\|x\|, \|y\| \leq 1} \|A(x)(y)\| = \|A\|.$$

□

Como conseqüência direta desse lema, temos o seguinte:

Teorema 4.8. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e F um espaço de Banach. Então, $L(E_1, \dots, E_n; F)$ é um espaço de Banach, para quaisquer espaços normados $E_1, \dots, E_n$.

Demonstração. Basta mostrarmos que o espaço é completo. Procedamos por indução. Se $n = 1$, então estamos no caso linear, e o resultado já é conhecido.

Suponha que todo espaço de aplicações n -lineares seja completo, e seja $L(E_0, E_1, \dots, E_n; F)$ um espaço de aplicações $(n + 1)$ -lineares. Por hipótese, $L(E_1, \dots, E_n; F)$ é completo. Logo, $L(E_0; L(E_1, \dots, E_n; F))$ é completo, pois é um espaço de aplicações lineares em um contra-domínio completo.

Mas, pelo lema 4.7, $L(E_0, E_1, \dots, E_n; F)$ é isométrico a $L(E_0; L(E_1, \dots, E_n; F))$. Como isometrias preservam completude, segue o resultado. □

4.2 Aplicações Multilineares Simétricas

Nessa seção, vamos restringir-nos às aplicações multilineares simétricas, em função do objetivo de estudar os polinômios homogêneos, que têm sua origem em aplicações desse tipo.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}_n$ denotará o conjunto de todas as permutações de $\{1, 2, \dots, n\}$. Dada $A \in L(^n E; F)$, dizemos que A é **simétrica** se $A(x_1, \dots, x_n) = A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$, para toda permutação σ de $\mathcal{S}_n$.

Denotaremos por $L_{as}(^n E; F)$ o espaço das aplicações n -lineares simétricas de E^n em F , e por $L_s(^n E; F)$ o espaço das aplicações n -lineares simétricas e contínuas de E^n em F . Quando $F = \mathbb{K}$, escrevemos simplesmente $L_s(^n E)$.

A fim de facilitar a notação utilizada ao longo do texto, vamos introduzir duas novas notações: para cada $k \in \mathbb{N}$ e para cada k -upla de naturais $\gamma = (n_1, \dots, n_k)$, escrevemos:

$$|\gamma| = \sum_{i=1}^k n_i \quad \text{e} \quad \gamma! = n_1! \cdots n_k!.$$

Definição 4.9. Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$, $A \in L_a(^n E; F)$ e $k \in \mathbb{N}$. Para cada $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$ e para cada k -upla de naturais $(n_1, \dots, n_k)$ com $n_1 + \dots + n_k = n > 0$, definimos:

$$Ax_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k} = A(\overbrace{x_1, \dots, x_1}^{n_1 \text{ vezes}}, \dots, \overbrace{x_k, \dots, x_k}^{n_k \text{ vezes}})$$

Se $n = 0$, então $Ax_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k} = A$, de acordo com a identificação que fizemos.

A próxima proposição é conhecida como Fórmula de Leibniz:

Proposição 4.10. Sejam E, F espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $A \in L_{as}(^n E; F)$. Se $x_1, \dots, x_k \in E$, temos:

$$A(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{|\gamma|=n} \frac{n!}{\gamma!} Ax_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}$$

onde a somatória ocorre sobre todas as k -uplas de naturais $\gamma = (n_1, \dots, n_k)$ que satisfazem $|\gamma| = n$.

Demonstração. Se $n = 0$ ou $n = 1$, o resultado é trivial. Assumamos a fórmula válida para $n \in \mathbb{N}$, e seja $A \in L_{as}(^{n+1} E; F)$. Então:

$$A(x_1 + \cdots + x_k)^{n+1} = A(x_1 + \cdots + x_k)(x_1 + \cdots + x_k)^n.$$

Aplicando a hipótese sobre a aplicação n -linear simétrica $A(x_1 + \cdots + x_k)$, temos:

$$A(x_1 + \cdots + x_k)^{n+1} = \sum_{|\gamma|=n} \frac{n!}{\gamma!} A(x_1 + \cdots + x_k) x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k} =$$

$$= \sum_{|\gamma|=n} \frac{n!}{\gamma!} A x_1^{n_1+1} \cdots x_k^{n_k} + \sum_{|\gamma|=n} \frac{n!}{\gamma!} A x_1^{n_1} x_2^{n_2+1} \cdots x_k^{n_k} + \cdots + \sum_{|\gamma|=n} \frac{n!}{\gamma!} A x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k+1}.$$

Para cada $1 \leq i \leq k$, definamos $\beta^{[i]} = (\beta_1^{[i]}, \dots, \beta_k^{[i]})$ tal que:

$$\beta_j^{[i]} = \begin{cases} n_i + 1 & , j = i \\ n_j & , 1 \leq j \leq k, j \neq i \end{cases}$$

Assim:

$$\begin{aligned} A(x_1 + \cdots + x_k)^{n+1} &= \sum_{|\beta^{[i]}|=n+1} \frac{n!}{(\beta_1^{[i]} - 1)! \beta_2^{[i]}! \cdots \beta_k^{[i]}!} A x_1^{\beta_1^{[i]}} x_2^{\beta_2^{[i]}} \cdots x_k^{\beta_k^{[i]}} + \cdots \\ &\quad \cdots + \sum_{|\beta^{[k]}|=n+1} \frac{n!}{\beta_1^{[k]}! \beta_2^{[k]}! \cdots (\beta_k^{[k]} - 1)!} A x_1^{\beta_1^{[k]}} x_2^{\beta_2^{[k]}} \cdots x_k^{\beta_k^{[k]}} \\ &= \sum_{\substack{|\beta|=n+1 \\ \beta_1 \geq 1}} \frac{n!}{(\beta_1 - 1)! \beta_2! \cdots \beta_k!} A x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_k^{\beta_k} + \cdots + \\ &\quad \cdots + \sum_{\substack{|\beta|=n+1 \\ \beta_k \geq 1}} \frac{n!}{\beta_1! \beta_2! \cdots (\beta_k - 1)!} A x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_k^{\beta_k} \\ &= \sum_{\substack{|\beta|=n+1 \\ \beta_1 \geq 1}} \frac{n! \beta_1}{\beta_1! \beta_2! \cdots \beta_k!} A x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_k^{\beta_k} + \cdots + \sum_{\substack{|\beta|=n+1 \\ \beta_k \geq 1}} \frac{n! \beta_k}{\beta_1! \beta_2! \cdots \beta_k!} A x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_k^{\beta_k} \end{aligned}$$

onde $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$. Temos, portanto:

$$\begin{aligned} A(x_1 + \cdots + x_k)^{n+1} &= \sum_{|\beta|=n+1} n! A x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_k^{\beta_k} \left(\frac{\beta_1}{\beta_1! \cdots \beta_k!} + \cdots + \frac{\beta_k}{\beta_1! \cdots \beta_k!} \right) \\ &= \sum_{|\beta|=n+1} \frac{n!}{\beta_1! \cdots \beta_k!} A x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_k^{\beta_k} (\beta_1 + \cdots + \beta_k) \\ &= \sum_{|\beta|=n+1} \frac{(n+1)!}{\beta!} A x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_k^{\beta_k} \end{aligned}$$

que é exatamente a fórmula que procurávamos. □

Corolário 4.11. Nesse contexto, se $k = 2$, vale a seguinte fórmula binomial:

$$A(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} A x^{n-i} y^i.$$

Demonstração. Imediata, a partir da aplicação do resultado anterior. $\square$

O próximo teorema é conhecido como Fórmula de Polarização. Esse resultado é notável, pois mostra que uma aplicação multilinear simétrica pode ser totalmente determinada apenas pelos valores que assume na diagonal do espaço onde está definida.

Teorema 4.12. *Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$. Se $A \in L_{as}(^n E; F)$, então:*

$$A(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!2^n} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \epsilon_i = \pm 1}} \epsilon_1 \cdots \epsilon_n A(\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_n x_n)^n$$

para quaisquer $x_1, \dots, x_n \in E$.

Demonstração. Pela proposição 4.10, temos:

$$\begin{aligned} A(\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_n x_n)^n &= \sum_{\gamma} \frac{n!}{n_1! \cdots n_n!} A(\epsilon_1 x_1)^{n_1} \cdots (\epsilon_n x_n)^{n_n} \\ &= \sum_{\gamma} \frac{n!}{n_1! \cdots n_n!} \epsilon_1^{n_1} \cdots \epsilon_n^{n_n} A x_1^{n_1} \cdots x_n^{n_n} \end{aligned}$$

onde $\gamma = (n_1, \dots, n_n) \in \mathbb{N}^n$ e $|\gamma| = n$. Portanto:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \epsilon_i = \pm 1}} \epsilon_1 \cdots \epsilon_n A(\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_n x_n)^n &= \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \epsilon_i = \pm 1}} \epsilon_1 \cdots \epsilon_n \sum_{\gamma} \frac{n!}{n_1! \cdots n_n!} \epsilon_1^{n_1} \cdots \epsilon_n^{n_n} A x_1^{n_1} \cdots x_n^{n_n} \\ &= \sum_{\gamma} \frac{n!}{n_1! \cdots n_n!} A x_1^{n_1} \cdots x_n^{n_n} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \epsilon_i = \pm 1}} \epsilon_1^{n_1+1} \cdots \epsilon_n^{n_n+1}. \end{aligned}$$

Se $n_j = 0$, para algum $1 \leq j \leq n$, temos $\epsilon^{n_j+1} = \epsilon = \pm 1$. Logo:

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \epsilon_i = \pm 1}} \epsilon_1^{n_1+1} \cdots \epsilon_n^{n_n+1} = \sum_{\substack{i \neq j \\ \epsilon_i = \pm 1}} \epsilon_1^{n_1+1} \cdots \epsilon_n^{n_n+1} - \sum_{\substack{i \neq j \\ \epsilon_i = \pm 1}} \epsilon_1^{n_1+1} \cdots \epsilon_n^{n_n+1} = 0.$$

Dessa forma, as únicas parcelas que contribuem para a soma são aquelas em que cada n_i não é nulo. Mas então devemos ter $n_1 = n_2 = \cdots = n_n = 1$. Assim, a soma consiste de uma única parcela. Nesse caso,

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \epsilon_i = \pm 1}} \epsilon_1^2 \cdots \epsilon_n^2 = 2^n.$$

Então:

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \epsilon_i = \pm 1}} \epsilon_1 \cdots \epsilon_n A(\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_n x_n)^n = n! 2^n A(x_1, \dots, x_n)$$

e segue o resultado. $\square$

4.3 Polinômios

Nessa seção, definiremos os conceitos de polinômios homogêneos e de polinômios. Apresentaremos, também, alguns teoremas sobre sua continuidade. Como vamos trabalhar apenas com polinômios contínuos em espaços de Banach, as definições seguintes se restringirão a espaços normados. No entanto, cabe ressaltar que os polinômios podem ser definidos em espaços vetoriais arbitrários.

Definição 4.13. *Sejam E e F espaços normados sobre o corpo $\mathbb{K}$. Dizemos que uma função $P : E \rightarrow F$ é um polinômio n -homogêneo se existe $A : E^n \rightarrow F$ aplicação n -linear tal que $P(x) = Ax^n, \forall x \in E$.*

Nesse caso, dizemos que P é o polinômio n -homogêneo associado a A . Denotaremos por $\mathcal{P}_a(^n E; F)$ o espaço vetorial de todos os polinômios n -homogêneos de E em F . Quando $F = \mathbb{K}$, escrevemos simplesmente $\mathcal{P}_a(^n E)$. Além disso, identificaremos $\mathcal{P}_a(^0 E; F)$ por F .

A seguir, definiremos um polinômio no espaço E .

Definição 4.14. *Sejam E e F espaços normados sobre o corpo $\mathbb{K}$. Dizemos que uma função $P : E \rightarrow F$ é um polinômio se pode ser representada como uma soma:*

$$P = P_0 + P_1 + \cdots + P_m$$

onde $P_i \in \mathcal{P}_a(^i E; F)$, $i = 0, \dots, m$. Se $P_m \neq 0$, diz-se que P é um polinômio de grau m .

O espaço vetorial de todos os polinômios de E em F será denotado por $\mathcal{P}_a(E; F)$. Se $F = \mathbb{K}$, escreveremos apenas $\mathcal{P}_a(E)$.

A próxima proposição analisa as aplicações multilineares associadas a um polinômio homogêneo:

Proposição 4.15. *Sejam E, F espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $n \in \mathbb{N}$. Se $P \in \mathcal{P}_a(^n E; F)$, existe uma única aplicação n -linear simétrica A tal que $P(x) = Ax^n, \forall x \in E$.*

Demonstração. Por definição, se $P \in \mathcal{P}_a(^n E; F)$, então existe uma aplicação n -linear A tal que $P(x) = Ax^n, \forall x \in E$. Essa aplicação não é, necessariamente, simétrica. Definamos:

$$A_s(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

É claro que $A_s x^n = Ax^n = P(x)$, e provamos a existência. A unicidade da aplicação é consequência imediata do teorema 4.12, uma vez que duas aplicações multilineares simétricas que coincidem na diagonal devem coincidir em todo o domínio. $\square$

A seguir, mostraremos que a representação de um polinômio como soma de polinômios homogêneos é única:

Proposição 4.16. *Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$. O espaço vetorial $\mathcal{P}_a(E; F)$ é a soma direta algébrica dos espaços $\mathcal{P}_a(^n E; F)$, com $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Por definição, todo polinômio pode ser representado como soma finita de polinômios homogêneos. Resta, então, mostrar que $P = P_0 + \dots + P_n = 0 \Rightarrow P_0 = P_1 = \dots = P_n = 0$.

Sejam $x \in E$ e $\lambda \neq 0$. Então:

$$\begin{aligned} P_0(\lambda x) + P_1(\lambda x) + \dots + P_n(\lambda x) &= 0 \Rightarrow P_0(x) + \lambda P_1(x) + \dots + \lambda^n P_n(x) = 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{\lambda^n} P_0(x) + \frac{1}{\lambda^{n-1}} P_1(x) + \dots + P_n(x) &= 0. \end{aligned}$$

Logo, fazendo $\lambda \rightarrow \infty$, temos que $P_n(x) = 0$. Utilizando raciocínio análogo, e lembrando que $x \in E$ é arbitrário, segue que $P_0 = P_1 = \dots = P_n = 0$. $\square$

A próxima proposição apresenta algumas equivalências para a continuidade de um polinômio n -homogêneo:

Proposição 4.17. *Sejam E, F espaços normados sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathcal{P}_a(^n E; F)$ e $A \in L_{as}(^n E; F)$, com P associado a A . São equivalentes:*

1. $A \in L_s(^n E; F)$;
2. P é contínuo;
3. P é contínuo na origem;
4. Existe $M > 0$ tal que $\|P(x)\| \leq M\|x\|^n$, para qualquer $x \in E^n$.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2): Evidente, pois $P = A \circ i$, onde $i : E \longrightarrow E^n$ é a inclusão.

(2) $\Rightarrow$ (3): Óbvio.

(3) $\Rightarrow$ (4): Por hipótese, P é contínuo em 0. Além disso, $P(0) = 0$. Assim, dado $\epsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que, se $\|x\| < \delta$, então $\|P(x)\| \leq 1$. Dado $x \in E$, com $x \neq 0$, temos:

$$1 \geq \left\| P \left(\frac{\delta x}{2\|x\|} \right) \right\| = \left\| A \left(\frac{\delta x}{2\|x\|} \right)^n \right\| = \frac{\delta^n \|Ax^n\|}{2^n \|x\|^n}.$$

Logo,

$$\|P(x)\| \leq \frac{2^n}{\delta^n} \|x\|^n, \quad \forall x \in E, x \neq 0.$$

Como a desigualdade permanece válida para $x = 0$, segue o resultado.

(4) $\Rightarrow$ (1): Sejam $x_1, \dots, x_n \in E$ tais que $\|x_i\| \leq \frac{1}{n}$, para $i = 1, \dots, n$. Pelo teorema 4.12:

$$\begin{aligned} \|A(x_1, \dots, x_n)\| &\leq \frac{1}{n!2^n} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \epsilon_i = \pm 1}} |\epsilon_1| \cdots |\epsilon_n| \|A(\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_n x_n)^n\| \\ &= \frac{1}{n!2^n} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \epsilon_i = \pm 1}} \|P(\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_n x_n)\| \leq \frac{1}{n!2^n} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \epsilon_i = \pm 1}} M \|(\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_n x_n)^n\| \\ &\leq \frac{1}{n!2^n} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \epsilon_i = \pm 1}} M (\|x_1\| + \cdots + \|x_n\|)^n \leq \frac{1}{n!2^n} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \epsilon_i = \pm 1}} M = \frac{1}{n!2^n} 2^n M = \frac{M}{n!}. \end{aligned}$$

Mas, para quaisquer $x_1, \dots, x_n \in E$, com $x_i \neq 0$, podemos definir $y_i = \frac{x_i}{n\|x_i\|}$. Então, $\|y_i\| \leq \frac{1}{n!}$, e:

$$\|A(y_1, \dots, y_n)\| = \frac{\|A(x_1, \dots, x_n)\|}{n^n \|x_1\| \cdots \|x_n\|} \leq \frac{M}{n!}.$$

Logo:

$$\|A(x_1, \dots, x_n)\| \leq \frac{Mn^n}{n!} \|x_1\| \cdots \|x_n\|, \quad \forall x \in E, x \neq 0.$$

Como a desigualdade permanece válida para $x = 0$, segue que $A \in L_s(nE; F)$. $\square$

Denotaremos por $\mathcal{P}(^n E; F)$ o espaço vetorial dos polinômios n -homogêneos contínuos de E em F . Quando $F = \mathbb{K}$, escrevemos simplesmente $\mathcal{P}(^n E)$. O espaço vetorial dos polinômios contínuos de E em F será denotado por $\mathcal{P}(E; F)$.

A proposição seguinte garante que o espaço dos polinômios n -homogêneos é um espaço normado:

Proposição 4.18. *Sejam E, F espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $P \in \mathcal{P}(^n E; F)$. Então,*

$$\|P\| = \sup_{\|x\|=1} |P(x)|$$

é uma norma em $\mathcal{P}(^n E; F)$.

Demonstração. Análoga à proposição 4.6. □

A proposição seguinte estabelece uma relação entre a norma de um polinômio homogêneo e a norma da aplicação multilinear associada a ele:

Proposição 4.19. *A função $\Psi : L_s(^n E; F) \longrightarrow \mathcal{P}(^n E; F)$ dada por $\Psi(A) = P$, que associa cada multilinear simétrica a um polinômio homogêneo, é um isomorfismo de espaços normados. Além disso, vale a seguinte desigualdade:*

$$\|P\| \leq \|A\| \leq \frac{n^n}{n!} \|P\|.$$

Demonstração. O isomorfismo é imediato. Falta, então, mostrarmos a desigualdade. Se $n = 0$ ou $n = 1$, então $A = P$, e a desigualdade é trivialmente verificada. Suponhamos, então, $n \geq 2$.

Como $\|P(x)\| = \|Ax^n\| \leq \|A\| \|x\|^n$, segue que $\|P\| \leq \|A\|$. Por outro lado, fixe $x = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$ com $\|x\| \leq 1$. Temos:

$$\begin{aligned} \|A(x_1, \dots, x_n)\| &\leq \frac{1}{n! 2^n} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \epsilon_i = \pm 1}} \|P(\epsilon_1 x_1 + \dots + \epsilon_n x_n)\| \\ &\leq \frac{1}{n! 2^n} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \epsilon_i = \pm 1}} \|P\| \|\epsilon_1 x_1 + \dots + \epsilon_n x_n\|^n \leq \frac{1}{n! 2^n} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \epsilon_i = \pm 1}} \|P\| (\|x_1\| + \dots + \|x_n\|)^n \\ &= \frac{1}{n!} \|P\| (\|x_1\| + \dots + \|x_n\|)^n \leq \frac{1}{n!} \|P\| n^n \end{aligned}$$

Logo, $\|A\| \leq \frac{n^n}{n!} \|P\|$. □

A corolário a seguir nos diz que $\mathcal{P}(^n E; F)$ é um espaço de Banach, quando F o é.

Corolário 4.20. *Sejam E um espaço normado e F um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(^n E; F)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Se $n = 0$, temos $\mathcal{P}(^0 E; F) = F$, e F é, por hipótese, um espaço de Banach. Se $n = 1$, então estamos no caso linear, para o qual já sabemos que tal resultado é verdadeiro.

Suponhamos, então, $n \geq 2$. Em virtude da proposição 4.19, é preciso apenas mostrar que $L_s(^n E; F) \subseteq L(^n E; F)$ é fechado, uma vez que, pelo teorema 4.8, $L(^n E; F)$ é completo.

Se $A \in \overline{L_s(^n E; F)}$, então existe uma sequência $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $L_s(^n E; F)$ tal que $A_n \xrightarrow{\|\cdot\|} A$. Fixado $x = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, temos:

$$\|A_n(x_1, \dots, x_n) - A(x_1, \dots, x_n)\| \leq \|A_n - A\| \|x_1\| \cdots \|x_n\|.$$

Então, $A_n(x_1, \dots, x_n) \rightarrow A(x_1, \dots, x_n)$, para todo $x = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Mas, para toda permutação σ de $\mathcal{S}_n$, temos:

$$A_n(x_1, \dots, x_n) = A_n(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \rightarrow A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Logo, $A(x_1, \dots, x_n) = A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$, para toda permutação σ de $\mathcal{S}_n$, donde $A \in L_s(^n E; F)$, e segue o resultado. $\square$

A próxima proposição mostra que, também no caso de polinômios, continuidade implica continuidade uniforme sobre os limitados. Isso já ocorria para aplicações lineares.

Proposição 4.21. *Sejam E, F espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $P \in \mathcal{P}(^n E; F)$. Então, P é uniformemente contínuo sobre os limitados de E .*

Demonstração. Sejam $A \in L(^n E; F)$ a multilinear associada a P e $B \subseteq E$ limitado. Se $x, y \in B$, existe $R > 0$ tal que $\|x\|, \|y\| < R$. Temos:

$$\begin{aligned} \|P(x) - P(y)\| &= \|Ax^n - Ay^n\| = \|A(x, \dots, x) - A(y, x, \dots, x) + A(y, x, \dots, x) - \\ &- A(y, y, x, \dots, x) + A(y, y, x, \dots, x) - \cdots - A(y, \dots, y, x) + A((y, \dots, y, x) - A(y, \dots, y))\| \\ &\leq \|A(x - y, x, \dots, x)\| + \|A(y, x - y, x, \dots, x)\| + \cdots + \|A(y, \dots, y, x - y)\|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|P(x) - P(y)\| \leq n\|A\|R^{n-1}\|x - y\|.$$

Tomando $M = n\|A\|R^{n-1}$, segue o resultado. $\square$

4.4 Diferenciabilidade

Nessa seção, estudaremos, de forma bastante superficial, a diferenciabilidade de polinômios em espaços de Banach. Apresentaremos a sua definição e alguns resultados básicos sobre ela.

Definição 4.22. *Sejam E, F espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$, $U \subseteq E$ um subconjunto aberto em E e $f : U \rightarrow F$ uma função. Dizemos que f é diferenciável no ponto $a \in U$ se existe uma aplicação linear $A : E \rightarrow F$ tal que:*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a) - A(x - a)\|}{\|x - a\|} = 0.$$

Dizemos que f é diferenciável se f é diferenciável em cada ponto $a \in U$.

Observamos que, se f é diferenciável, então f é contínua, e que a função $A : E \longrightarrow F$ é unicamente determinada por f e por $a \in U$. Dessa forma, chamaremos a função A de diferencial de f no ponto $a \in U$, e a denotaremos por $df(a)$.

O exemplo seguinte apresenta o cálculo da diferencial de um polinômio:

Exemplo 4.23. Se $P \in \mathcal{P}(^n E)$ e A é a aplicação n -linear associada a P , então:

$$dP(a) = nAa^{n-1}, \forall a \in E.$$

De fato, pela fórmula binomial, temos:

$$P(x) = P(a) + nAa^{n-1}(x-a) + \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} Aa^{n-i}(x-a)^i.$$

Seja $\phi(x) = P(x) - P(a) + nAa^{n-1}(x-a)$. Então,

$$\phi(x) = \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} Aa^{n-i}(x-a)^i,$$

onde $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|\phi(x)\|}{\|x-a\|} = 0$.

A proposição seguinte fornece a “regra da cadeia” para funções em um espaço de Banach:

Proposição 4.24. Sejam E e F espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$, $U \subseteq E$ e $V \subseteq F$ dois subconjuntos abertos e $f : U \longrightarrow F$ e $g : V \longrightarrow \mathbb{K}$ funções diferenciáveis tais que $f(U) \subseteq V$. Então, $g \circ f : U \longrightarrow \mathbb{K}$ é diferenciável e $d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$, $\forall a \in U$.

Demonstração. Sejam $a \in U$ e $b = f(a) \in V$. Definamos $A = df(a)$ e $B = dg(b)$. Então, para cada $x \in U$ e cada $y \in V$, podemos escrever:

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + \phi(x) \quad \text{e} \quad g(y) = g(b) + B(y-b) + \psi(y)$$

onde:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|\phi(x)\|}{\|x-a\|} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow b} \frac{\|\psi(y)\|}{\|y-b\|} = 0.$$

Então:

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a)) + B(f(x) - f(a)) + \psi(f(x)) = g(f(a)) + B[A(x-a) + \phi(x)] + \psi(f(x)) = \\ &= g(f(a)) + B \circ A(x-a) + \rho(x) \end{aligned}$$

onde $\rho(x) = B(\phi(x)) + \psi(f(x))$. Então:

$$\frac{\|\rho(x)\|}{\|x - a\|} \leq \|B\| \frac{\|\phi(x)\|}{\|x - a\|} + \frac{\|\psi(f(x))\|}{\|f(x) - f(a)\|} \frac{\|f(x) - f(a)\|}{\|x - a\|}$$

e, como

$$\frac{\|f(x) - f(a)\|}{\|x - a\|} = \frac{\|A(x - a) + \phi(x)\|}{\|x - a\|} \leq \|A\| + \frac{\|\phi(x)\|}{\|x - a\|},$$

segue que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|\rho(x)\|}{\|x - a\|} = 0$, o que completa a prova. $\square$

A seguir, vamos demonstrar uma generalização do conhecido *Teorema do Valor Médio*.

Teorema 4.25. *Sejam $U \subseteq E$ um subconjunto aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{K}$ uma função diferenciável. Se o segmento $[a, a + t] = \{(1 - \lambda)a + \lambda(a + t) : \lambda \in [0, 1]\} \subset U$, então:*

$$\|f(a + t) - f(a)\| \leq \|t\| \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} \|df(a + \lambda t)\|.$$

Demonstração. Como a diferenciabilidade complexa implica a diferenciabilidade real, podemos assumir $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Considere a função $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$g(\lambda) = f(a + \lambda t).$$

Então, g é contínua em $[0, 1]$, diferenciável em $(0, 1)$ e $g'(\lambda) = df(a + \lambda t)t$ para cada $\lambda \in (0, 1)$. Pelo *Teorema do Valor Médio*, segue que:

$$|g(1) - g(0)| \leq \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} |g'(\lambda)|,$$

donde segue o resultado procurado. $\square$

Corolário 4.26. *Sejam $U \subseteq E$ um subconjunto aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{K}$ uma função diferenciável. Se o segmento $[a, a + t] \subset U$, então:*

$$\|f(a + t) - f(a) - df(a)(t)\| \leq \|t\| \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} \|df(a + \lambda t) - df(a)\|.$$

Demonstração. Basta aplicar o teorema 4.25 à função $g : U \rightarrow \mathbb{K}$ definida por:

$$g(x) = f(x) - df(a)(x - a).$$

$\square$

Capítulo 5

Convergência de conjuntos de nível de polinômios

Nesse capítulo, apresentaremos algumas caracterizações da convergência uniforme e da convergência pontual de polinômios homogêneos em espaços de Banach através da convergência de seus conjuntos de nível.

Apresentaremos, também, algumas generalizações para o caso de polinômios. Esse capítulo baseia-se no texto científico [8].

5.1 Introdução

Ao longo do presente capítulo, denotaremos por E um espaço de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$. Se $P \in \mathcal{P}(E)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, o conjunto de nível α de P , assim como já definido para funcionais lineares contínuos, é dado por:

$$L(P; \alpha) = \{x \in E : P(x) = \alpha\}.$$

Exemplo 5.1. A seguir, apresentamos dois exemplos de conjuntos de nível de polinômios:

a) Considere $E = \mathbb{R}^2$, e $P(x, y) = x^2 + y^2$. O conjunto de nível $\alpha > 0$ de P é:

$$L(P; \alpha) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \alpha\},$$

ou seja, a circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{\alpha}$.

b) Considere $E = l_2(\mathbb{R})$ e $P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$. O conjunto de nível $\alpha > 0$ de P é:

$$L(P; \alpha) = \left\{x \in l_2(\mathbb{R}) : \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 = \alpha\right\},$$

ou seja, a esfera em $l_2(\mathbb{R})$ de centro na origem e raio $\sqrt{\alpha}$.

Para denotar as convergências dos conjuntos de nível de uma seqüência de polinômios, utilizaremos as notações a seguir. Se $P \in \mathcal{P}(E)$ e $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(E)$, dizemos que:

- $P_n \xrightarrow{K} P$ se $(L(P_n; \alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente, no sentido de Kuratowski, a $L(P; \alpha)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$;
- $P_n \xrightarrow{W} P$ se $(L(P_n; \alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente, no sentido de Wijsman, a $L(P; \alpha)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$;
- $P_n \xrightarrow{r} P$ se $(L(P_n; \alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ é r-convergente a $L(P; \alpha)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

A mesma notação será utilizada no caso de polinômios homogêneos. A seguir, apresentaremos algumas observações que serão úteis ao longo do capítulo.

Observação 5.2. Consideremos $P \in \mathcal{P}({}^k E)$ e $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}({}^k E)$.

a) $L(P; \alpha) = \alpha^{\frac{1}{k}} L(P; 1)$, $\forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

De fato, se $x \in L(P; \alpha)$, então $P(x) = \alpha$. Como P é homogêneo, $P\left(\alpha^{-\frac{1}{k}} x\right) = 1$, donde $x \in \alpha^{\frac{1}{k}} L(P; 1)$. Reciprocamente, se $x \in \alpha^{\frac{1}{k}} L(P; 1)$, então $x = \alpha^{\frac{1}{k}} y$, com $P(y) = 1$. Logo, $P(x) = P(\alpha^{\frac{1}{k}} y) = \alpha P(y) = \alpha$, e $x \in L(P; \alpha)$.

b) Seja $\theta = K, W$ ou r . Se $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, temos:

$$(L(P_n; \alpha))_{n \in \mathbb{N}} \text{ é } \theta\text{-convergente a } L(P; \alpha) \Leftrightarrow (L(P_n; 1))_{n \in \mathbb{N}} \text{ é } \theta\text{-convergente a } L(P; 1).$$

É importante notar que ambas as observações continuam válidas para o caso em que $\alpha \in \mathbb{R}$ e k é ímpar. No entanto, caso tenhamos k par, devemos supor $\alpha > 0$.

c) Seja $\theta = K, W$ ou r . Temos que $P_n \xrightarrow{\theta} P \Leftrightarrow (L(P_n; 1))_{n \in \mathbb{N}}$ é θ -convergente a $L(P; 1)$ e $(L(P_n; 0))_{n \in \mathbb{N}}$ é θ -convergente a $L(P; 0)$.

Caso tenhamos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e k par, ainda é necessário supor que $(L(P_n; -1))_{n \in \mathbb{N}}$ seja θ -convergente a $L(P; -1)$. De fato, basta observar que, nesse caso, se $\alpha < 0$, temos $L(P; \alpha) = (-\alpha)^{\frac{1}{k}} L(P; -1)$.

Proposição 5.3. Sejam $P_n \in \mathcal{P}({}^{r_n} E)$ e $P \in \mathcal{P}(E)$, e suponhamos que $P_n \rightarrow P$ pontualmente. Então:

1. Se $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é ilimitada, então $P \equiv 0$;
2. Se $P \neq 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r_0$ e $P \in \mathcal{P}({}^{r_0} E)$.

Demonstração. (1) Seja $x \in E$. Sem perda de generalidade, podemos assumir $r_n \rightarrow \infty$. Temos:

$$P(2x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(2x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [2^{r_n} P_n(x)] = P(x) \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{r_n}.$$

Logo, $P(x) = 0$ e, como x era arbitrário, segue que $P \equiv 0$.

(2) Assumamos que $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. Se r_a e r_b são pontos de acumulação de $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$, escolha $x_0 \in E$ tal que $P(x_0) \neq 0$, e temos:

$$P(2x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} [2^{r_{n_k}} P_{n_k}(x_0)] = 2^{r_a} P(x_0).$$

Analogamente, $P(2x_0) = 2^{r_b} P(x_0)$. Logo, $r_a = r_b$, e $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente. Sejam $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$ arbitrários e $r_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$. Então:

$$P(\lambda x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\lambda x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^{r_n} P_n(x) = \lambda^{r_0} P(x).$$

Como $P \in \mathcal{P}(E)$, concluímos que $P \in \mathcal{P}(r_0 E)$. □

5.2 Convergência no sentido de Kuratowski

Essa seção será dedicada a estabelecer relações entre convergência de polinômios e a convergência, no sentido de Kuratowski, de seus conjuntos de nível. O objetivo inicial da seção é a obtenção de um resultado para polinômios análogo ao teorema 3.4.

Proposição 5.4. *Sejam E um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência tal que $P_n \in \mathcal{P}(r_n E)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e P_0 uma função contínua. Suponhamos que, $\forall \alpha \neq 0$, $P_n \xrightarrow{K} P_0$, e que $r_n \rightarrow \infty$. Então, $P_0 \equiv 0$.*

Demonstração. Sejam $\alpha \neq 0$ e $x \in E$ tal que $P_0(x) = \alpha$. Pela proposição 2.16, que caracteriza a convergência no sentido de Kuratowski, existe uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ com $x_n \rightarrow x$ e $P_n(x_n) = \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Considere $\epsilon_n = 2^{\frac{1}{r_n}}$. Claramente, $\epsilon_n \rightarrow 1$, e $\epsilon_n x_n \rightarrow x$. Mas $P_n(\epsilon_n x_n) = \epsilon_n^{r_n} P_n(x_n) = 2\alpha$. Logo, $\epsilon_n x_n \in L(P_n; 2\alpha)$ e, pela segunda condição da proposição 2.16, $x \in L(P_0; 2\alpha)$, donde $P_0(x) = 2\alpha$, contradição. □

Os dois lemas seguintes tratam sobre convergência uniforme de funções em subconjuntos limitados, e podem ser enunciados em um contexto muito mais geral do que aquele em que estamos trabalhando. A equivalência que esses resultados apresentam será utilizada na próxima proposição.

Lema 5.5. *Seja X um espaço métrico. Sejam $f, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas em X tais que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f . Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ é tal que $x_n \rightarrow x \in X$, então $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n)$.*

Demonstração. Pela convergência uniforme, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(y) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$, $\forall y \in X, \forall n > n_0$. Em particular, se tomarmos $y = x_n$, temos:

$$\forall n > n_0, |f_n(x_n) - f(x_n)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Como $x_n \rightarrow x$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall n > n_1, |f(x_n) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tomando $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$, temos, se $n > n_2$:

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| < \epsilon,$$

e segue o resultado. □

Lema 5.6. *Seja X um espaço métrico, e sejam $f, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas em X tais que:*

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X, x_n \rightarrow x \text{ implica } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n).$$

Então, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f em cada subconjunto compacto de X .

Demonstração. Vamos proceder por absurdo. Suponhamos que existe $K \subset X$ compacto no qual a seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não converge uniformemente a f . Dessa forma, existe $\epsilon > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in K$ tal que $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \epsilon$.

Como K é compacto, a seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite uma subseqüência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que converge a $x \in K$. Por hipótese, temos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x).$$

Então, existe $n_{k_0} \in \mathbb{N}$ tal que $|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$, $\forall n_k > n_{k_0}$. Assim:

$$|f(x) - f(x_{n_k})| \geq |f(x) - f_{n_k}(x_{n_k})| - |f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| > \epsilon - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2}, \forall n_k > n_{k_0},$$

absurdo, pois f é contínua. □

A proposição seguinte mostra que, sob certas hipóteses, a convergência de funções no sentido de Kuratowski implica a convergência uniforme das funções em subconjuntos compactos (note-se a equivalência da conclusão da proposição com esse fato, dada pelos lemas 5.5 e 5.6).

Proposição 5.7. Sejam E um espaço de Banach real, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funções contínuas em E e f uma função contínua em E tais que $f_n \xrightarrow{K} f$. Então, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n)$, para toda seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ tal que $x_n \rightarrow x$.

Demonstração. Seja $\alpha = f(x)$. Se a seqüência $(f_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ não converge a α , podemos assumir, passando a uma subseqüência se necessário, que existe $\epsilon > 0$ tal que $f_n(x_n) > \alpha + \epsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Usando a condição *i*) da proposição 2.16, podemos escolher uma seqüência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ convergente a x tal que $f_n(z_n) = \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Considere, agora, a função $\Lambda : [0, 1] \rightarrow E$ definida por $\Lambda(\lambda) = \lambda x_n + (1 - \lambda)z_n$. É claro que Λ é contínua. Seja $g_n = f_n \circ \Lambda$.

Então, $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, $g_n(0) = f_n(z_n) = \alpha$ e $g_n(1) = f_n(x_n) > \alpha + \epsilon$. Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $\lambda_n \in [0, 1]$ tal que $g_n(\lambda_n) = \alpha + \frac{\epsilon}{2}$.

Definamos $y_n = \Lambda(\lambda_n)$. Então, $y_n \rightarrow x$ e $f_n(y_n) = \alpha + \frac{\epsilon}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Utilizando a condição *ii*) da proposição 2.16, obtemos $f(x) = \alpha + \frac{\epsilon}{2}$, absurdo. $\square$

O caso complexo é mais complicado, como mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 5.8. Seja $w_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Definamos $f_n(w) = \phi_n(|w|)$, onde:

$$\phi_n(r) = \begin{cases} (1 - nr)w_n & , 0 \leq r \leq \frac{1}{n} \\ 0 & , r > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Note que $f_n \xrightarrow{K} 0$, pois, se $\alpha \neq 0$, o conjunto $L(f_n; \alpha)$ é não-vazio para, no máximo, um termo n . Além disso, $\mathbb{C} = K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(f_n; 0)$.

De fato, tome $\alpha \neq 0$. Se $w \in \mathbb{C}$ é tal que $f_n(w) = \alpha$, então $(1 - n|w|)w_n = \alpha$, donde $(1 - n|w|)e^{\frac{2\pi i}{n}} = \alpha$. Logo,

$$(1 - n|w|) \left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \right) = |\alpha|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Como $|w| < \frac{1}{n}$, temos $1 - n|w| > 0$ e, portanto, $1 - n|w| = |\alpha|$, e n está unicamente determinado, caso exista.

Além disso, $L(f_n; 0) = \{w \in \mathbb{C} : f_n(w) = 0\} \supseteq \{w \in \mathbb{C} : |w| \geq \frac{1}{n}\}$. Se $n \rightarrow \infty$, é fácil ver que $\mathbb{C} = K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(f_n; 0)$.

No entanto, $(f_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 1. De fato:

$$f_n(0) = \phi_n(0) = (1 - n \cdot 0)w_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, tem-se $f_n(0) \rightarrow 1$.

É possível obter um resultado semelhante no caso complexo, de acordo com [8]. No entanto, esse resultado utiliza conceitos de holomorfia em espaços de Banach, assunto que foge ao escopo desse trabalho. Uma versão mais simples desse resultado, e que basta ao nosso contexto, será enunciada na proposição a seguir:

Proposição 5.9. *Sejam E um espaço de Banach complexo, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de polinômios em $\mathcal{P}(E)$ e $P \in \mathcal{P}(E)$. Suponhamos que $\forall B \subset E$ limitado exista uma constante $M > 0$ tal que:*

$$\|dP_n(y)\| \leq M, \forall y \in B, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se $P_n \xrightarrow{K} P$, então $P(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x_n)$, para toda seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ tal que $x_n \rightarrow x$.

Demonstração. Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$, $x \in E$ tais que $x_n \rightarrow x$ e $\alpha = P(x)$. Pela proposição 2.16, existe uma seqüência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $P_n(z_n) = \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $z_n \rightarrow x$. Temos, pelo teorema 4.25:

$$|P_n(x_n) - P_n(z_n)| \leq \|dP_n(y_n)\| \|x_n - z_n\| \leq M \|x_n - z_n\|$$

onde $y_n \in [x_n, z_n]$. Como $x_n \rightarrow x$ e $z_n \rightarrow x$, segue que $y_n \rightarrow x$, donde podemos assumir que $y_n \in B(0; \|x\| + 1)$, para n suficientemente grande. Fazendo $n \rightarrow \infty$, temos que $z_n \rightarrow x$ e, portanto, $P_n(x_n) \rightarrow \alpha$. $\square$

A próxima proposição nos diz o que ocorre com os polinômios quando assumimos a convergência, no sentido de Kuratowski, de seus conjuntos de nível.

Proposição 5.10. *Sejam E um espaço de Banach, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência tal que $P_n \in \mathcal{P}(r_n E)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $P \in \mathcal{P}(r_0 E)$. Suponha que $\forall \alpha \neq 0$, $L(P; \alpha) = K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(P_n; \alpha)$. Então:*

1. $P_n(x_n) \rightarrow P(x)$ sempre que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ é tal que $x_n \rightarrow x$;
2. Se $P \neq 0$, então $(\|P_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada.

Demonstração. Vamos, inicialmente, demonstrar o item (2). Se $(\|P_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ não é limitada, podemos assumir, sem perda de generalidade, que existe uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$, com $\|x_n\| = 1$, tal que $P_n(x_n) = d_n$, com $d_n \rightarrow \infty$. Cabe notar que, no caso real, pode ser necessário substituir P_n por $-P_n$ e P por $-P$ para fazermos o que segue.

Seja $z_n = d_n^{-\frac{1}{r_n}} x_n$. É fácil ver que $z_n \in L(P_n; 1)$. Como $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, pela proposição 5.4 (se $r_n \rightarrow \infty$, teríamos $P \equiv 0$, absurdo), segue que $z_n \rightarrow 0$. Pela condição *ii*) da proposição 2.16, concluímos que $P(0) = 1$, o que não é possível, pois P é homogêneo.

Vamos, agora, à demonstração de (1). Denotemos $P(x) = \beta$ e $P_n(x_n) = \beta_n$. Se $\beta = 0$, devemos mostrar que $\beta_n \rightarrow 0$. Se isso não é verdade, podemos assumir que $|\beta_n| > \epsilon$, para algum $\epsilon > 0$

fixado. Seja $\alpha_n = \beta_n^{\frac{-1}{r_n}}$. A sequência $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. Assim, passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir que $\alpha_n \rightarrow \alpha \in \mathbb{K}$.

Definamos, agora, $z_n = \alpha_n x_n$. Então:

$$P_n(z_n) = P_n(\alpha_n x_n) = (\beta_n^{\frac{-1}{r_n}})^{r_n} P_n(x_n) = \beta_n^{-1} \beta_n = 1,$$

donde $z_n \in L(P_n; 1)$. Como $z_n \rightarrow \alpha x$, temos $P(\alpha x) = 1$, uma vez que estamos assumindo $L(P; 1) = K - \lim_{n \in \mathbb{N}} L(P_n; 1)$. Mas $P(x) = \beta = 0$, donde $P(\alpha x) = 0$, absurdo. Note-se que, para o caso real, algumas pequenas alterações nas definições de α_n e de z_n devem ser efetuadas.

Se $\beta \neq 0$, a proposição 5.7 fornece o resultado para o caso real. Pela proposição 5.9, para obtermos o resultado no caso complexo basta mostrarmos que $(\|dP_n(y)\|)_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em conjuntos limitados. Se A_n é a forma r_n -linear simétrica associada a P_n , temos, pelo exemplo 4.23 e, em seguida, pela proposição 4.19:

$$\|dP_n(y)\| \leq r_n \|y\|^{r_n-1} \|A_n\| \leq r_n \|y\|^{r_n-1} \frac{r_n^{r_n}}{r_n!} \|P_n\|.$$

Mas então $(\|dP_n(y)\|)_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em conjuntos limitados, pois $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\|P_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ são limitadas. $\square$

Essa proposição, juntamente com a proposição 5.3, fornece as seguintes alternativas: ou $P \equiv 0$ ou $r_n = r_0$, para n suficientemente grande. Dessa forma, podemos restringir o estudo a dois casos, não mutuamente exclusivos:

1. $r_n = k, \forall n \in \mathbb{N}$;
2. $P \equiv 0$.

O caso $k = 0$ será excluído. O exemplo seguinte mostra que, se $P \equiv 0$, não se pode afirmar que $(\|P_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. Para construir esse exemplo, é necessário conhecer o teorema de Josefson-Nissenzweig. Esse teorema será enunciado a seguir, mas sua demonstração será omitida, por fugir ao escopo desse trabalho. Tal demonstração pode ser encontrada à página 219 de [7]:

Teorema 5.11. (Josefson-Nissenzweig) *Se E é um espaço de Banach de dimensão infinita, existe uma sequência fraca- $\star$ nula de vetores unitários em E' .*

Por sequência fraca- $\star$ nula em E' , entendemos uma sequência que converge a zero em cada ponto do espaço E em questão, isto é, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E'$ é fraca- $\star$ nula se, para cada $x \in E$, $f_n(x) \rightarrow 0$.

Exemplo 5.12. Vamos mostrar que o fato de que $P_k \xrightarrow{K} P$ não nos permite afirmar que $(\|P_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. Seja E um espaço de Banach com $\dim_{\mathbb{K}} E = +\infty$. Pelo teorema 5.11, existe uma seqüência fraca- $\star$ nula $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ na esfera unitária de E' . Definamos:

$$P_k(x) = k(x_k^*(x))^k \quad \text{e} \quad P \equiv 0.$$

É claro que $P_k \in \mathcal{P}(^k E)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, e que $\|P_k\| = k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Além disso, $L(P_k; 0) = \{x \in E : k(x_k^*(x))^k = 0\} = \ker x_k^*$.

Como $\|x_k^*\| = 1$, temos, pelo lema 3.9, que $|x_k^*(x)| = d(x, \ker x_k^*)$. Então, existe $z_k \in L(P_k; 0)$ tal que $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge a x , pois $\lim_{k \rightarrow \infty} d(x, \ker x_k^*) = 0$, donde conclui-se que $L(P; 0) = K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(P_n; 0)$, já que a condição ii) da proposição 2.16 é trivialmente satisfeita, pois $E = L(P; 0)$.

Escrevamos:

$$L(P; 1) = \emptyset \quad \text{e} \quad L(P_k; 1) = \left\{ x \in E : x_k^*(x) = \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} \right\}.$$

Para mostrar que $P_k \xrightarrow{K} P$, precisamos mostrar que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ não possui subsequências convergentes se cada $x_k \in L(P_k; 1)$. Como $(x_k^*)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência fraca- $\star$ nula limitada, temos que, se $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n}$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n}^*(x_{k_n}) = 0$, o que não é verdade, pois $x_{k_n}^*(x_{k_n}) = \left(\frac{1}{k_n}\right)^{\frac{1}{k_n}}$. Note-se que, para evitar problemas com o caso real, devemos considerar k ímpar.

Cabe ressaltar que, se E é um espaço de dimensão finita, a compacidade dos subconjuntos fechados e limitados nos garante a convergência da norma de P_k a 0, se $P_k \xrightarrow{K} 0$.

Para poder dizer mais sobre o comportamento da norma dos elementos de seqüências de polinômios convergentes no sentido de Kuratowski, precisamos da seguinte:

Proposição 5.13. *Sejam E um espaço de Banach, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência tal que $P_n \in \mathcal{P}(^{r_n} E)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e P um polinômio contínuo em E . Se, $\forall \alpha \neq 0$, $L(P; \alpha) = K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(P_n; \alpha)$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ é limitada, então $(|P_n(x_n)|^{\frac{1}{r_n}})_{n \in \mathbb{N}}$ também é limitada.*

Demonstração. Inicialmente, vamos supor que E é um espaço de Banach complexo. Sejam $\alpha_n = P_n(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e seja $\alpha \neq 0$. Assumamos que $(|\alpha_n|^{\frac{1}{r_n}})_{n \in \mathbb{N}}$ não é limitada, e definamos $\beta_n = \alpha \alpha_n^{-1}$. Temos:

$$P_n \left(\beta_n^{\frac{1}{r_n}} x_n \right) = \left(\beta_n^{\frac{1}{r_n}} \right)^{r_n} P_n(x_n) = \beta_n \alpha_n = \alpha \Rightarrow \beta_n^{\frac{1}{r_n}} x_n \in L(P_n; \alpha).$$

Como $(|\alpha_n|^{\frac{1}{r_n}})_{n \in \mathbb{N}}$ não é limitada, uma subsequência de $(\beta_n^{\frac{1}{r_n}})_{n \in \mathbb{N}}$, e, conseqüentemente, uma subsequência de $(\beta_n^{\frac{1}{r_n}} x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, converge a zero. Mas então, pela caracterização da convergência no sentido de Kuratowski dada pela proposição 2.16, $0 \in L(P; \alpha)$.

Observe, agora, que P_n converge a P pontualmente (basta notar que estamos no caso $P(x) \neq 0$ da proposição 5.10, que não exige a homogeneidade de P , pois só usa a proposição 5.9). Assim, pela proposição 5.3, P é um polinômio homogêneo, o que contradiz o fato de que $0 \in L(P; \alpha)$.

Note-se que algumas pequenas alterações devem ser efetuadas para provarmos o caso em que E é um espaço de Banach real, em função da necessidade de extrairmos raízes de elementos do corpo. $\square$

Os corolários seguintes são imediatos:

Corolário 5.14. *Sejam E um espaço de Banach, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência tal que $P_n \in \mathcal{P}(r_n E)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e P um polinômio contínuo em E . Se, $\forall \alpha \neq 0$, $L(P; \alpha) = K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(P_n; \alpha)$, então $(\|P_n\|^{\frac{1}{r_n}})_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $(\|P_n\|^{\frac{1}{r_n}})_{n \in \mathbb{N}}$ não é limitada. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in E$, com $\|x_n\| = 1$, tal que $|P_n(x_n)|^{\frac{1}{r_n}} = d_n$ e $d_n \rightarrow \infty$, o que contradiz a proposição anterior. $\square$

Corolário 5.15. *Seja E um espaço de Banach. Se $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset P(kE)$, $P \in \mathcal{P}(kE)$ e $L(P; \alpha) = K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(P_n; \alpha)$, $\forall \alpha \neq 0$, então $(\|P_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada.*

Demonstração. Pelo corolário 5.14, temos que $(\|P_n\|^{\frac{1}{k}})_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. Como k é fixo, $(\|P_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ também deve ser limitada. $\square$

O exemplo 5.12 mostrou que o fato de termos $P_n \xrightarrow{K} 0$ não garante que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n\|^{\frac{1}{r_n}} = 0$. No entanto, temos a seguinte recíproca:

Proposição 5.16. *Sejam E um espaço de Banach, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência tal que $P_n \in \mathcal{P}(r_n E)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $P \in \mathcal{P}(E)$. Se $L(P; \alpha) = K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(P_n; \alpha)$, $\forall \alpha \neq 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n\|^{\frac{1}{r_n}} = 0$, então $P \equiv 0$.*

Demonstração. Assumamos que $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada (caso contrário, a proposição 5.4 já garante o resultado), e seja $x \in E$ com $P(x) = \alpha \neq 0$. Por hipótese, existe uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ convergente a x , e então limitada em norma por uma constante $M > 0$, tal que $x_n \in L(P_n; \alpha)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo, $P_n(x_n) = P(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então:

$$|P(x)| = |P_n(x_n)| \leq \|P_n\| \|x_n\|^{r_n} \leq \|P_n\| M^{r_n} = \left(\|P_n\|^{\frac{1}{r_n}} M \right)^{r_n}.$$

Como $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, segue que $\left(\|P_n\|^{\frac{1}{r_n}} M \right)^{r_n} \rightarrow 0$. $\square$

A proposição seguinte apresenta uma recíproca da proposição 5.10:

Proposição 5.17. *Sejam E um espaço de Banach, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência tal que $P_n \in \mathcal{P}(r^n E)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $P \in \mathcal{P}(r^0 E)$. Se, para toda seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em E convergente a $x \in E$, se tem $P_n(x_n) \rightarrow P(x)$, então $L(P; \alpha) = K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(P_n; \alpha), \forall \alpha \neq 0$.*

Demonstração. De acordo com a observação 5.2, é suficiente mostrarmos o caso $\alpha = 1$ (o caso $\alpha = -1$ é análogo). Se $P \neq 0$ e $x \in L(P; 1)$, a seqüência $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 1. Podemos, então, assumir que $P_n(x) \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Se definirmos

$$x_n = P_n(x)^{\frac{-1}{r_n}} x,$$

temos $x_n \rightarrow x$ e $x_n \in L(P_n; 1), \forall n \in \mathbb{N}$, o que demonstra o item (i) da proposição 2.16. E, se $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge a x e $P_{n_k}(x_{n_k}) = 1, \forall k \in \mathbb{N}$, a hipótese nos garante que $P(x) = 1$, donde $L(P; 1) = K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(P_n; 1)$, o que demonstra o item (ii) de 2.16.

Suponhamos, agora, que $P \equiv 0$. Devemos mostrar que $\emptyset = K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(P_n; 1)$. Se $x_{n_k} \in L(P_{n_k}; 1), \forall k \in \mathbb{N}$, então $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ não pode ser convergente, pois, se fosse, a imagem de seu limite por P seria 1 (por hipótese), o que contradiz o fato de termos $P \equiv 0$. $\square$

Observe que as proposições 5.10 e 5.17, em conjunto, nos fornecem um resultado análogo, no contexto de polinômios, àquele obtido no teorema 3.5. Basta notar que a convergência pontual de polinômios corresponde à convergência fraca- $\star$ de funcionais lineares contínuos.

Agregando os resultados anteriores, obtemos o teorema pelo qual buscávamos ao longo dessa seção:

Teorema 5.18. *Seja E um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$, e sejam $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência tal que $P_n \in \mathcal{P}(r^n E), \forall n \in \mathbb{N}$ e $P \in \mathcal{P}(r^0 E)$. São equivalentes:*

1. $L(P; \alpha) = K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(P_n; \alpha), \forall \alpha \neq 0$;
2. Para toda seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a $x \in E$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x_n) = P(x)$.
3. A seqüência $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a P em subconjuntos compactos de E .

Além disso, se supusermos que P_n, P são polinômios não-nulos, as condições acima são equivalentes a:

4. A seqüência $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente a P e $(\|P_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada.

Esse teorema não afirma nada sobre a convergência de $L(P_n; 0)$. O comportamento distinto no caso $\alpha = 0$ está relacionado ao fato de 0 ser o único valor crítico ($\exists x \in L(P; 0)$ tal que $dP(x) = 0$)

de um polinômio homogêneo. Dessa forma, é possível haver mudanças na topologia de $L(P_n; \alpha)$ em vizinhanças do ponto $\alpha = 0$.

O exemplo seguinte mostra que, no caso $P \equiv 0$, podemos não ter a convergência de $L(P_n; 0)$ a $L(P; 0)$, mesmo assumindo hipóteses fortes.

Exemplo 5.19. Sejam $E = \mathbb{K}^2$ e $P_n(x, y) = \frac{x^2}{n}$. Observe que, $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n é um polinômio 2-homogêneo, e que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n\| = 0$. No entanto, $\mathbb{K}^2 = L(0; 0) \neq K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(P_n; 0)$. De fato, $(x_0, y_0) = (1, 0) \in L(0; 0)$. Mas, se $(x, y) \in L(P_n; 0)$, então $x = 0$, e não pode existir uma seqüência $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$, tal que $(x_n, y_n) \in L(P_n; 0), \forall n \in \mathbb{N}$.

A seguir, vamos apresentar uma recíproca da proposição 5.9. A demonstração desse resultado utiliza um corolário do teorema de Hurwitz, cujo enunciado está a seguir. Por fugir ao escopo desse trabalho, sua demonstração será omitida, mas pode ser encontrada em [6], à página 152. Por $\mathcal{H}(G)$, denotamos o conjunto das funções holomorfas em um subconjunto aberto e conexo G do plano.

Teorema 5.20. (Hurwitz) *Seja $G \subseteq \mathbb{C}$ um subconjunto aberto e conexo do plano. Suponhamos que a seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}(G)$ convirja uniformemente a $f \in \mathcal{H}(G)$. Se $f \not\equiv 0$, $B[a, r] \subset G$ e $f(z) \neq 0, \forall z \in G$ tal que $|z - a| = r$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$, f e f_n possuem o mesmo número de zeros em $B(a, r)$.*

O seguinte corolário é imediato:

Corolário 5.21. *Seja $G \subseteq \mathbb{C}$ um subconjunto aberto e conexo do plano. Suponhamos que a seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}(G)$ convirja uniformemente a $f \in \mathcal{H}(G)$ e que cada f_n não possua zeros em G . Então, $f \equiv 0$ ou f nunca se anula em G .*

Proposição 5.22. *Sejam E um espaço de Banach complexo, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(E) \setminus \{0\}$ e $P \in \mathcal{P}(E) \setminus \{0\}$. Suponhamos que, para toda seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a $x \in E$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x_n) = P(x)$. Então, $P_n \xrightarrow{K} P$.*

Demonstração. Para mostrar essa convergência, vamos utilizar a caracterização da convergência no sentido de Kuratowski fornecida pela proposição 2.16. Em função da hipótese que assumimos, o item *ii*) dessa proposição é trivialmente satisfeito. Vamos, então, mostrar o item *i*).

Seja $x \in L(P; \alpha)$. Suponhamos, por absurdo, que não existe uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ convergente a x tal que $P_n(x_n) = \alpha, \forall n \in \mathbb{N}$. Podemos, então, assumir que existe $\epsilon > 0$ tal que $L(P_n; \alpha) \cap B(x, \epsilon) = \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$.

Considere os polinômios $Q_n = P_n - \alpha$ e $Q = P - \alpha$. Então, $L(Q_n; 0) \cap B(x, \epsilon) = \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$. Considere o subconjunto unidimensional $R_z = \{x + \lambda z : \lambda \in \mathbb{C}\}$, e tome $z_0 \in E$ de forma que Q não

seja identicamente nula em R_{z_0} (observe que esse subconjunto existe, pois, se Q fosse identicamente nula em cada subconjunto da forma R_z , teríamos Q identicamente nula em uma bola, o que nos daria $Q \equiv 0$, absurdo).

Seja $\Lambda : \mathbb{C} \rightarrow R_{z_0}$ dada por $\Lambda(\lambda) = x + \lambda z_0 \in R$, e sejam $q_n = (Q_n)|_{R_{z_0}}$ e $q = Q|_{R_{z_0}}$. Definamos $\Omega = B(x, \epsilon) \cap R_{z_0}$. Observe que o conjunto $\Lambda^{-1}(\Omega)$ é aberto e conexo em $\mathbb{C}$, pelas definições de Λ e de Ω .

Se escrevermos $\phi = q \circ \Lambda$ e $\phi_n = q_n \circ \Lambda$, temos que:

- $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a ϕ em $\Lambda^{-1}(\Omega)$, pois, por hipótese, $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a Q em subconjuntos compactos (e, em particular, em $\bar{\Omega}$);
- Por definição, ϕ_n não se anula em $\Lambda^{-1}(\Omega)$.

Assim, pelo corolário 5.21, temos as seguintes alternativas: ou ϕ é identicamente nulo, ou ϕ não possui zeros em $\Lambda^{-1}(\Omega)$. Nenhuma delas é verdadeira, pela definição de R_{z_0} e pelo fato de que $q(x) = Q(x) = P(x) - \alpha = 0$. $\square$

Corolário 5.23. Se E é um espaço de Banach complexo, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}^k(E) \setminus \{0\}$, $P \in \mathcal{P}^k(E) \setminus \{0\}$, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente a P e $(\|P_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, então $L(P; 0) = K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(P_n; 0)$.

Demonstração. Basta notar que, nesse caso, o teorema 5.18 garante que $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x_n) = P(x)$, para toda seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a $x \in E$. Além disso, como P e P_n são não-nulos, a proposição 5.22 nos dá o resultado. $\square$

Os resultados obtidos podem ser resumidos em um teorema global para o caso complexo:

Teorema 5.24. Sejam E um espaço de Banach complexo, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}^k(E) \setminus \{0\}$ e $P \in \mathcal{P}^k(E) \setminus \{0\}$. São equivalentes:

1. $P_n \xrightarrow{K} P$;
2. $L(P; 1) = K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(P_n; 1)$;
3. A seqüência $(P_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $P(x)$, para toda seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a $x \in E$;
4. A seqüência $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente a P e $(\|P_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada.

O exemplo seguinte mostra que, no caso real, não se pode obter um resultado tão interessante:

Exemplo 5.25. Sejam $E = \mathbb{R}^2$, $k = 2$, $P_n(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{n}$ e $P(x, y) = x^2$.

Temos $\|P_n\| = \|P\| = 1$, e $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x, y) = P(x, y)$, $\forall (x, y) \in E$. Mas $L(P_n; 0) = \{(0, 0)\}$ e $L(P; 0) = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$, donde $L(P; 0) \neq K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(P_n; 0)$.

No entanto, a adição de certas hipóteses nos permite obter um resultado semelhante no caso real. Começamos com o seguinte:

Lema 5.26. *Sejam $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de polinômios reais e P um polinômio real tais que, para todo intervalo $I \subset \mathbb{R}$, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a P em I , $P(0) = 0$ e $P'(0) \neq 0$. Então, existe uma seqüência $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, com $\lambda_n \rightarrow 0$, e existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $P_n(\lambda_n) = 0, \forall n > n_0$.*

Demonstração. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $P'(0) > 0$. Nesse caso, existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < x < \delta$, então $P(x) > 0$ e, se $-\delta < x < 0$, então $P(x) < 0$.

Por hipótese, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a P em $(0, \delta)$. Em particular, fixado $x_1 \in (0, \delta)$, temos que $P_n(x_1) \rightarrow P(x_1)$. Logo, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_1 \Rightarrow P_n(x_1) > 0$. Analogamente, se fixarmos $x_2 \in (-\delta, 0)$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_2 \Rightarrow P_n(x_2) < 0$.

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então, se $n > n_0$, podemos afirmar que P_n tem ao menos uma raiz no intervalo $(-\delta, \delta)$. Definamos a seqüência $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ da seguinte forma: se $n \leq n_0$, então $\lambda_n = 0$. Se $n > n_0$, λ_n é a raiz de P_n mais próxima de 0 no intervalo $(-\delta, \delta)$. Observe que podemos definir a raiz mais próxima, pois o número de raízes é finito. Segue que $P_n(\lambda_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Além disso, $\lambda_n \rightarrow 0$. Suponha, por absurdo, que isso não acontece. Então, existe $\epsilon > 0$ tal que $\forall N \in \mathbb{N}$ existe $n > N$ com $|\lambda_n| \geq \epsilon$. Se $\epsilon > \delta$, a contradição é clara. Caso contrário, escolhamos $M \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\delta}{M} < \epsilon$. Utilizando o mesmo argumento, pode-se encontrar $n'_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n'_0$, então P_n possui ao menos uma raiz em $(\frac{-\delta}{M}, \frac{\delta}{M})$, o que contradiz a afirmação anterior. $\square$

A proposição seguinte nos apresenta o resultado procurado.

Proposição 5.27. *Sejam E um espaço de Banach real, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}^k(E)$ e $P \in \mathcal{P}^k(E)$ com $dP(x) \neq 0, \forall x \neq 0$. Se $(P_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $P(x)$, para toda seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a $x \in E$, então $L(P; 0) = K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(P_n; 0)$.*

Demonstração. Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em E e $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ uma subsequência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $P_{n_k}(x_{n_k}) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$, e $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente a $x \in E$. Por hipótese, segue que $P(x) = 0$. Logo, $Ls L(P_n; 0) \subseteq L(P; 0)$.

Para provar que $L(P; 0) \subseteq Li L(P_n; 0)$, considere um ponto $x \in E$ tal que $P(x) = 0$. Se $x = 0$, é claro que $x \in Li L(P_n; 0)$. Se não, escolhamos $y \in E$ tal que $dP(x)(y) \neq 0$, e definamos, em $\mathbb{R}$:

$$f_n(r) = P_n(x + ry) \quad \text{e} \quad f(r) = P(x + ry).$$

Então, $f'(r) = dP(x + ry)y \Rightarrow f'(0) = dP(x)(y) \neq 0$. Mas f_n e f são polinômios de grau k sobre $\mathbb{R}$ e f_n converge pontualmente a f , por hipótese. Logo, f_n converge a f uniformemente em subconjuntos limitados.

Pelo lema 5.26, pode-se afirmar que existe uma seqüência $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ de raízes de f_n convergindo a 0. Dessa forma, $x + \lambda_n y \in L(P_n; 0)$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} (x + \lambda_n y) = x$, o que conclui a demonstração. $\square$

A mesma demonstração é utilizada no seguinte:

Teorema 5.28. *Sejam E um espaço de Banach real, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}^k(E)$, $P \in \mathcal{P}^k(E)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $P(x) = \alpha \Rightarrow dP(x) \neq 0$. Se $(P_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $P(x)$, para toda seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a $x \in E$, então $L(P; \alpha) = K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(P_n; \alpha)$.*

A proposição seguinte apresenta um resultado sobre o comportamento do fecho dos conjuntos obtidos a partir da aplicação de um polinômio em uma bola aberta.

Proposição 5.29. *Se $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e P são polinômios homogêneos em um espaço de Banach E , $P_n \xrightarrow{K} P$ e $B \subseteq E$ é uma bola aberta, então $\overline{P(B)} \subseteq \text{Li } \overline{P_n(B)}$.*

Demonstração. Seja $r \in P(B)$. Então, existe $x \in B$ tal que $P(x) = r$. Pela proposição 2.16, existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$, com $x_n \rightarrow x$, tal que $P_n(x_n) = r$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Além disso, podemos assumir que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$, uma vez $x_n \in B$, para n suficientemente grande. Então, $r \in P_n(B)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e, conseqüentemente, $r \in \overline{P_n(B)}$. Como $\text{Li } \overline{P_n(B)}$ é fechado, concluímos que $\overline{P(B)} \subseteq \text{Li } \overline{P_n(B)}$. $\square$

Observação 5.30. Cabem as seguintes observações:

a) De acordo com a demonstração, nota-se que a homogeneidade não é imprescindível: a continuidade seria suficiente. Além disso, o resultado é válido para qualquer bola $B \subseteq E$;

b) Se $P \neq 0$, seria suficiente supor que $L(P; \alpha) = K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(P_n; \alpha)$, $\forall \alpha \neq 0$, pois poderíamos mostrar que $P(B) \setminus \{0\} \subseteq \text{Li } \overline{P_n(B)}$. Então, basta notar que $\overline{P(B)} = \overline{P(B) \setminus \{0\}}$, uma vez que 0 não é um ponto isolado, já que $P \neq 0$.

O exemplo seguinte mostra que a convergência no sentido de Kuratowski não é suficiente para garantir a igualdade dos conjuntos em questão:

Exemplo 5.31. Sejam $E = c_0(\mathbb{K})$, $P_n(x) = e_1^*(x)^2 - e_n^*(x)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $P(x) = e_1^*(x)^2$.

É fácil ver que:

- $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente a P ;
- $\|P\| = 1$ e $\|P_n\| = 1$, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ou $\|P_n\| = 2$, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Pelo teorema 5.24, $P_n \xrightarrow{K} P$, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, devemos ter $L(P; 0) = K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(P_n; 0)$. Vamos mostrar isso:

i) Se $x \in L(P; 0)$, então $e_1^*(x) = 0$. Seja $x_n = x - e_n^*(x)e_n$. É claro que $P_n(x_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Além disso:

$$\|x_n - x\| = \|x - e_n^*(x)e_n - x\| \leq |e_n^*(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

ii) Se $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = x$ e $x_{n_j} \in L(P_{n_j}; 0), \forall j \in \mathbb{N}$, temos:

$$\|x_{n_j} - x\| \geq |e_1^*(x_{n_j}) - e_1^*(x)| = |e_1^*(x) \pm e_{n_j}^*(x_{n_j})| \geq |e_1^*(x)| - |e_{n_j}^*(x_{n_j})|.$$

A equação central é consequência do fato de que $P_{n_j}(x_{n_j}) = 0, \forall j \in \mathbb{N}$. Então:

$$\begin{aligned} |e_1^*(x)| &\leq \|x_{n_j} - x\| + |e_{n_j}^*(x_{n_j})| \leq \|x_{n_j} - x\| + |e_{n_j}^*(x_{n_j} - x)| + |e_{n_j}^*(x)| \leq \\ &\leq 2\|x_{n_j} - x\| + |e_{n_j}^*(x)|. \end{aligned}$$

Fazendo $n_j \rightarrow +\infty$, a expressão da direita vai a zero e, conseqüentemente, $e_1^*(x) = 0$, donde $x \in L(P; 0)$. Finalmente, $P_n \xrightarrow{K} P$, para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Agora, seja $B = B(e_1, \frac{1}{2})$. No caso real, temos:

$$\overline{P(B)} = \left[\frac{1}{4}, \frac{9}{4} \right] \quad \text{e} \quad \overline{P_n(B)} = \left[0, \frac{9}{4} \right].$$

Logo, $\text{Ls } \overline{P_n(B)} \not\subset \overline{P(B)}$. No caso complexo, $P(B) = \{w^2 : w \in D\}$, onde $D = B(1; \frac{1}{2})$. Por outro lado, $P_n(B) = h(A)$, onde $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por $h(z_1, z_2) = z_1^2 - z_2^2$ e

$$A = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 \in B\left(1; \frac{1}{2}\right), z_2 \in B\left(0; \frac{1}{2}\right) \right\}.$$

Claramente, $\text{Ls } \overline{P_n(B)} \not\subset \overline{P(B)}$, pois $[0, \frac{5}{2}] \subset \Re(P_n(B)), \forall n \in \mathbb{N}$, mas $[0, \frac{5}{2}] \not\subset \Re(P(B))$.

Observação 5.32. No caso real, esse exemplo diz que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n\| = \|P\|$, e a convergência no sentido de Kuratowski não é suficiente para provar que $\overline{P(B)} = K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} \overline{P_n(B)}$. Em particular, o exemplo mostra que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = P(x), \forall x \in E \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n\| = \|P\| \not\Rightarrow \overline{P(B)} = K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} \overline{P_n(B)}.$$

No entanto, vale o seguinte resultado:

Proposição 5.33. Sejam E um espaço de Banach, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de polinômios homogêneos em E e P um polinômio homogêneo em E tais que $P_n \xrightarrow{K} P$. Então, $\text{Ls } P_n(K) \subseteq P(K)$, para todo subconjunto compacto $K \subset E$.

Demonstração. Se $r \in \text{Ls } P_n(K)$, existe uma seqüência $(r_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ convergente a r tal que $r_{n_j} \in P_{n_j}(K)$, $\forall j \in \mathbb{N}$, por definição de limite superior. Então, existe $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}} \in K$ tal que $P_{n_j}(x_{n_j}) = r_{n_j}$, donde $\lim_{j \rightarrow \infty} P_{n_j}(x_{n_j}) = r$.

Como K é compacto, existe uma subseqüência de $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ convergente a um ponto $x \in K$. Seja $(x_{n_{j_l}})_{l \in \mathbb{N}}$ essa subseqüência. Pela proposição 5.10,

$$P(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} P_{n_{j_l}}(x_{n_{j_l}}) = r$$

e $r \in P(K)$. □

5.3 Convergência no sentido de Wijsman

Essa seção será dedicada a estabelecer relações entre convergência de polinômios e a convergência, no sentido de Wijsman, de seus conjuntos de nível.

O primeiro resultado que apresentamos é análogo ao lema 3.9, que usa fortemente a linearidade em sua demonstração, e não é válido para polinômios em geral. No entanto, temos o seguinte:

Lema 5.34. *Seja E um espaço de Banach complexo. Se $P \in \mathcal{P}^k(E)$, $P \neq 0$ e $k \in \mathbb{N}$, temos:*

$$d(0; L(P; \alpha)) = \left(\frac{|\alpha|}{\|P\|} \right)^{\frac{1}{k}}.$$

Demonstração. Sabemos que:

$$d(0; L(P; \alpha)) = \inf_{x \in L(P; \alpha)} \|x\|.$$

Além disso, $|P(x)| \leq \|P\| \|x\|^k$. Logo, se $x \in L(P; \alpha)$, então:

$$\|x\|^k \geq \frac{|P(x)|}{\|P\|} = \frac{|\alpha|}{\|P\|}.$$

Mas então:

$$\|x\| \geq \left(\frac{|\alpha|}{\|P\|} \right)^{\frac{1}{k}}, \forall x \in L(P; \alpha).$$

Logo, $d(0; L(P; \alpha)) \geq \left(\frac{|\alpha|}{\|P\|} \right)^{\frac{1}{k}}$.

Por outro lado, $\forall \epsilon > 0$, existe $x \in E$ tal que $|P(x)| > (\|P\| - \epsilon) \|x\|^k$. Seja $z = \left(\frac{\alpha}{P(x)} \right)^{\frac{1}{k}} x$. É fácil ver que $z \in L(P; \alpha)$. Além disso,

$$\|z\| = \left| \frac{\alpha}{P(x)} \right|^{\frac{1}{k}} \|x\| < \left| \frac{\alpha}{\|P\| - \epsilon} \right|^{\frac{1}{k}}.$$

Como $z \in L(P; \alpha)$, temos:

$$d(0; L(P; \alpha)) \leq \left(\frac{|\alpha|}{\|P\| - \epsilon} \right)^{\frac{1}{k}}.$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, segue o resultado. □

No caso real, o lema continua válido se supusermos k ímpar. Se k é par, o resultado não é verdadeiro, como mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 5.35. Sejam $E = \mathbb{R}^2$, $P(x, y) = -x^2 + \frac{y^2}{4}$, $\alpha = \frac{1}{4}$. Nesse caso, temos:

$$L(P; \alpha) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x^2 + \frac{y^2}{4} = \frac{1}{4} \right\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = 1 + 4x^2\}.$$

A partir da equação, é fácil ver que $d(0; L(P; \alpha)) = 1$. Mas:

$$\left(\frac{|\alpha|}{\|P\|} \right)^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{\frac{1}{4}}{1} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

A proposição seguinte analisa o que ocorre com a imagem de bolas quando assumimos a convergência, no sentido de Wijsman, dos conjuntos de nível dos polinômios. Aqui, cabe lembrar que a convergência no sentido de Wijsman é mais forte que a convergência no sentido de Kuratowski, o que explica a diferença entre a proposição seguinte e a proposição 5.33.

Proposição 5.36. Sejam $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}^k(E)$ e $P \in \mathcal{P}^k(E)$. Se $L(P; \alpha) = \text{W-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(P_n; \alpha)$, $\forall \alpha \neq 0$, então $\overline{P(B)} = \text{K-}\lim_{n \in \mathbb{N}} \overline{P_n(B)}$, para toda bola $B \subset E$.

Demonstração. Se $P \equiv 0$, a condição $L(P; \alpha) = \text{W-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(P_n; \alpha)$ significa que $(L(P_n; 1))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, no sentido de Wijsman, a $\emptyset$. Equivalentemente, pode-se afirmar que:

$$\forall x \in E, \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, L(P_n; 1)) = +\infty.$$

Em particular, $\lim_{n \rightarrow \infty} d(0, L(P_n; 1)) = +\infty$. Vamos mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n\| = 0$.

Caso I: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Dado $M > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(0, L(P_n; 1)) \geq M$, se $n > n_0$. Logo, se $|P_n(x)| = 1$, temos que $\|x\| \geq M$. Dado $\epsilon > 0$, seja $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$d(0, L(P_n; 1)) \geq \frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{k}}}.$$

Seja $x \in B(0, 1)$ tal que $P_n(x) \neq 0$. Então:

$$P_n \left(\frac{x}{|P_n(x)|^{\frac{1}{k}}} \right) = \frac{P_n(x)}{|P_n(x)|} = \pm 1.$$

Logo, se $n > n_1$:

$$\left\| \frac{x}{|P_n(x)|^{\frac{1}{k}}} \right\| \geq \frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{k}}},$$

ou seja, $|P_n(x)| \leq \epsilon$, donde $\|P_n\| \leq \epsilon$, se $n > n_1$.

Caso II: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Dado $x \in B(0, 1)$, seja $\lambda_n \in D(0, 1)$ tal que $\lambda_n |P_n(x)| = P_n(x)$. Seja u_n uma raiz k -ésima de λ_n . Então:

$$P_n \left(\frac{x}{u_n |P_n(x)|^{\frac{1}{k}}} \right) = \frac{P_n(x)}{\lambda_n |P_n(x)|} = 1,$$

donde segue que:

$$\left\| \frac{x}{u_n |P_n(x)|^{\frac{1}{k}}} \right\| \geq \frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{k}}}.$$

Usando o mesmo raciocínio do caso anterior, segue o resultado. Logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n\| = 0$. Portanto, $K-\lim_{n \in \mathbb{N}} \overline{P_n(B)} = \{0\} = \overline{P(B)}$, para toda bola $B \subset E$, uma vez que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a 0 em B .

Suponhamos, agora, que $P \neq 0$. Como a convergência no sentido de Wijsman implica a convergência no sentido de Kuratowski, a proposição 5.29 (veja a observação) assegura que precisamos mostrar somente que $\text{Ls } \overline{P_n(B)} \subset \overline{P(B)}$, ou, de maneira equivalente, que se $w_{n_j} \in \overline{P_{n_j}(B)}$ e $w = \lim_{j \rightarrow \infty} w_{n_j}$, então $w \in \overline{P(B)}$.

Consideremos $B = B(x_0, r_0)$ e assumamos, sem perda de generalidade, que $w_n \in P_n(B)$, e que $w = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$.

Caso I: $w \neq 0$.

Se $w \notin \overline{P(B)}$, afirmamos que existe $\eta > 0$ tal que $d(x_0, L(P; w)) > r_0 + \eta$. De fato, seja $\epsilon > 0$ tal que $w \notin \{z \in E : d(z, \overline{P(B)}) \leq \epsilon\}$. Sejam $z \in B(x_0, r_0 + \eta)$ e $y_z \in B$ tais que $\|y_z - z\| < \eta$. Então:

$$|P(z) - P(y_z)| \leq M\eta$$

onde M depende apenas de r_0 , de k e de $\|P\|$. Escolhendo η de forma que $M\eta < \epsilon$, a afirmação está demonstrada.

Em função dessa afirmação, a convergência no sentido de Wijsman nos permite assumir que $d(x_0, L(P_n; w)) > r_0 + \eta, \forall n \in \mathbb{N}$. Escolhamos, agora, $z_n \in B$ tal que $P_n(z_n) = w_n$, e definamos $\theta_n = \left(\frac{w}{w_n}\right)^{\frac{1}{k}}$. Temos:

$$P_n(\theta_n z_n) = P_n\left(\left(\frac{w}{w_n}\right)^{\frac{1}{k}} z_n\right) = \frac{w}{w_n} P_n(z_n) = w$$

donde $d(x_0, L(P_n; w)) \leq \|x_0 - \theta_n z_n\|$. Mas então:

$$r_0 + \eta \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_0, L(P_n; w)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_0 - \theta_n z_n\| \leq r_0$$

pois:

$$\|x_0 - \theta_n z_n\| = \|x_0 - z_n + z_n - \theta_n z_n\| \leq \|x_0 - z_n\| + |1 - \theta_n| \|z_n\| < r_0 + |1 - \theta_n| (\|x_0\| + r)$$

e $\theta_n \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$, contradição.

Caso II: $w = 0$.

Se $0 \notin \overline{P(B)}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(0; \epsilon) \cap P(B) = \emptyset$. Sejam $y_0 \in B$ e $y_n \in B$ tais que $P_n(y_n) = w_n$. Como $w_n \rightarrow 0$, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $|w_n| < \frac{\epsilon}{2}$, para n suficientemente grande.

Escolha $z_n \in [y_0, y_n] \subset B$ tal que $P_n(z_n) \in B(0; \epsilon) \setminus B(0; \frac{\epsilon}{2})$. Esse ponto existe, pois:

- $P(y_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(y_0)$, o que é consequência da convergência no sentido de Kuratowski;
- $P(y_0) \in P(B)$, e $P(B) \cap B(0; \epsilon) = \emptyset$.

Então, $(P_n(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente a $w_0 \in B(0; \epsilon) \setminus \{0\}$. Dessa forma, basta usar o Caso I para obtermos uma contradição, e a proposição está demonstrada. $\square$

A partir de agora, vamos utilizar a seguinte notação: fixemos $x \in E$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, e sejam $P, P_n \in \mathcal{P}^k(E) \setminus \{0\}$. Definamos:

$$\lambda = d(x, L(P; \alpha)) \quad \text{e} \quad \lambda_n = d(x, L(P_n; \alpha)).$$

Como a convergência no sentido de Kuratowski é mais fraca que a convergência no sentido de Wijsman, o fato de que $P_n \xrightarrow{K} P$ não implica $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$. No entanto, o seguinte resultado é válido:

Proposição 5.37. *Sejam $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(E)$ e $P \in \mathcal{P}(E)$ tais que $P_n \xrightarrow{K} P$. Então, $\forall \epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_n < \lambda + \epsilon, \forall n \geq n_0$.*

Demonstração. Seja $z \in B(x, \lambda + \epsilon)$ com $P(z) = \alpha$. Pela caracterização da convergência no sentido de Kuratowski, dada pela proposição 2.16, existe uma seqüência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a z tal que $P_n(z_n) = \alpha$. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z_n \in B(x, \lambda + \epsilon), \forall n \geq n_0$. Segue que:

$$\lambda_n \leq \|z_n - x\| < \lambda + \epsilon, \forall n \geq n_0.$$

□

Corolário 5.38. Sejam $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(E)$ e $P \in \mathcal{P}(E)$ tais que $P_n \xrightarrow{K} P$. Então, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \leq \lambda$.

Demonstração. Imediata, a partir da proposição anterior. □

Vamos, agora, estudar uma recíproca da proposição 5.36. Iniciaremos com o seguinte lema:

Lema 5.39. Sejam $\alpha \neq 0$, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(E)$ e $P \in \mathcal{P}(E)$. Se $\text{Ls } \overline{P_n(B)} \subseteq \overline{P(B)}$, para toda bola $B \subset E$, então $\lambda \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$.

Demonstração. Se a conclusão não é verdadeira, existem $\lambda^* < \lambda$ e uma subsequência $(\lambda_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tais que $\lambda_{n_k} < \lambda^*, \forall k \in \mathbb{N}$.

Fixe $x \in E$, e seja $B = B(x, \lambda^*)$. Observe que $B(x, \lambda_{n_k}) \subset B$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $z_{n_k} \in B$ tal que $P_{n_k}(z_{n_k}) = \alpha$ (ou a inclusão não seria estrita). Logo, $\alpha \in P(B), \forall k \in \mathbb{N}$, e, portanto, $\alpha \in \overline{P(B)}$. Agora, para cada $j \in \mathbb{N}$, escolhamos $y_j \in B$ de forma que $|\alpha - P(y_j)| < \frac{1}{j}$, e definamos:

$$\gamma_j = \left(\frac{\alpha}{P(y_j)} \right)^{\frac{1}{j}}.$$

Note que, como $\alpha \neq 0$, podemos assumir que $P(y_j) \neq 0$ e que, no caso real, $\text{sg}(P(y_j)) = \text{sg}(\alpha)$. Então, $P(\gamma_j y_j) = \alpha$. Observe que:

$$\begin{aligned} \|\gamma_j y_j - x\| &= \|\gamma_j y_j - y_j + y_j - x\| \leq |\gamma_j - 1| \|y_j\| + \|y_j - x\| < \\ &< |\gamma_j - 1| (\|x\| + \lambda^*) + \lambda^* < \frac{\lambda + \lambda^*}{2} \end{aligned}$$

quando j é suficientemente grande. Logo, $\gamma_j y_j \in B(x, \frac{\lambda + \lambda^*}{2}) \subset B(x, \lambda)$ quando j é suficientemente grande, o que contradiz a definição de λ . □

Proposição 5.40. Sejam $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}^k(E)$ e $P \in \mathcal{P}^k(E)$. Se, para toda bola $B \subset E$, vale que $K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} \overline{P_n(B)} = \overline{P(B)}$, então $L(P; \alpha) = W\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(P_n; \alpha), \forall \alpha \neq 0$.

Demonstração. Se $P \equiv 0$, o resultado segue do fato de que, se $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{P_n(B)} = \{0\}$ para qualquer bola $B \subset E$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, L(P_n; \alpha)) = +\infty$, para todo $x \in E$ e todo $\alpha \neq 0$.

Se $P \neq 0$, podemos assumir, sem perda de generalidade, que nenhum termo P_n é identicamente nulo pois, se infinitos termos o fossem, teríamos $\overline{P_n(B)} = \{0\}$ para infinitos valores de n , o que nos daria $P \equiv 0$, absurdo.

Seja $\alpha \neq 0$, e fixe $x_0 \in E$. Precisamos mostrar que $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$. Pelo lema 5.39, sabemos que $\lambda \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$. Logo, basta mostrarmos que $\forall \epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_n < \lambda + \epsilon, \forall n \geq n_0$.

Seja $B = B(x_0, \lambda + \frac{\epsilon}{2})$. Pela definição de λ , existe $z \in B$ tal que $P(z) = \alpha$, donde $\alpha \in P(B)$. Como $P(B) \subseteq \text{Li } \overline{P_n(B)}$, por hipótese, podemos escolher uma seqüência $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a α tal que $\alpha_n \in P_n(B), \forall n \in \mathbb{N}$. Então, existe $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ tal que $P_n(z_n) = \alpha_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Defina:

$$z'_n = \left(\frac{\alpha}{\alpha_n} \right)^{\frac{1}{k}} z_n.$$

Então, $z'_n \in L(P_n; \alpha)$ e $z'_n \in B(x_0, \lambda + \epsilon)$ para n suficientemente grande, já que:

$$\|z'_n - z\| = \left| 1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_n} \right)^{\frac{1}{k}} \right| \|z_n\| \quad \text{e} \quad \alpha_n \rightarrow \alpha.$$

Concluimos, portanto, que $\lambda_n < \lambda + \epsilon$. □

A união dos resultados anteriores nos dá o seguinte:

Teorema 5.41. *Sejam $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}^k(E)$ e $P \in \mathcal{P}^k(E)$. Então, $L(P; \alpha) = W\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(P_n; \alpha), \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0 \Leftrightarrow \overline{P(B)} = K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} \overline{P_n(B)}$, para toda bola aberta $B \subseteq E$.*

Demonstração. Basta utilizar as proposições 5.36 e 5.40. □

Utilizando os teoremas 5.18 e 5.41 e o fato de que a convergência no sentido de Wijsman implica a convergência no sentido de Kuratowski, temos:

Proposição 5.42. *Sejam $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}^k(E)$ e $P \in \mathcal{P}^k(E)$. Se $L(P; \alpha) = W\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(P_n; \alpha), \forall \alpha \neq 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = P(x), \forall x \in E$, e $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n\| = \|P\|$.*

Essa proposição estabelece um paralelo com o teorema 3.10, válido para o caso de funcionais lineares contínuos. No entanto, o exemplo 5.31 mostra que a recíproca dessa proposição não é verdadeira, e também apresenta uma seqüência convergente no sentido de Kuratowski que não converge no sentido de Wijsman.

Estudemos, agora, a convergência, no sentido de Wijsman, de $(L(P_n; 0))_{n \in \mathbb{N}}$. Vamos começar com o caso complexo. Antes, porém, relembremos a seguinte notação: fixados $x \in E$, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(E)$ e $P \in \mathcal{P}(E)$, temos, com $\alpha = 0$:

$$\lambda_n(x) = d(x, L(P_n; 0)) \quad \text{e} \quad \lambda(x) = d(x, L(P; 0)).$$

Proposição 5.43. *Sejam E um espaço de Banach complexo, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}^k(E) \setminus \{0\}$ e $P \in \mathcal{P}^k(E) \setminus \{0\}$. Se $\overline{P(B)} = K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} \overline{P_n(B)}$, para toda bola aberta $B \subseteq E$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(x) = \lambda(x)$, $\forall x \in E$.*

Demonstração. Pela proposição 5.40, temos que $L(P; \alpha) = W\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(P_n; \alpha)$, $\forall \alpha \neq 0$. Dessa forma, a proposição 5.42 garante que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente a P e que $(\|P_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. Assim, pelo teorema 5.24, $P_n \xrightarrow{K} P$. Pelo corolário 5.38, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(x) \leq \lambda(x)$, $\forall x \in E$.

Se o resultado não é válido, existe $x \in E$ tal que $\liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(x) < \lambda(x) = \lambda$. Passando a uma subsequência, se necessário, podemos assumir que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(x) = \lambda^* < \lambda' < \lambda$. Então, $0 \in P_n(B(x, \lambda'))$, $\forall n \in \mathbb{N}$, donde $0 \in \overline{P(B(x, \lambda'))}$. Isso nos permite escolher uma seqüência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $B(x, \lambda')$ de forma que $\lim_{n \rightarrow \infty} P(y_n) = 0$. Seja $x_0 \in B(0, 1)$ tal que $P(x_0) \neq 0$.

Agora, seja $\epsilon = \lambda - \lambda'$, e defina $\phi_n : D(0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{C}$ por $\phi_n(w) = P(y_n + wx_0)$. Observe que:

$$|\phi_n(w)| = |P(y_n + wx_0)| \leq \|P\|(\|y_n\| + |w|\|x_0\|)^k \leq (\|x\| + \lambda' + \epsilon)^k.$$

Logo, $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $D(0, \epsilon)$. Além disso, como ϕ_n é um polinômio, para cada $n \in \mathbb{N}$, a seqüência $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é equicontínua em cada parte compacta de $D(0, \epsilon)$. Assim, pelo teorema de Ascoli-Arzelá (vide [11], págs. 244 a 248), podemos afirmar que uma subsequência de $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a um polinômio ϕ em $D(0, \epsilon)$. Além disso,

$$\phi(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(y_n + 0x_0) = 0.$$

Por outro lado, ϕ_n não se anula, pois P não possui zeros em $B(x, \lambda)$, pela definição de λ . Usando o corolário 5.21, concluímos que $\phi \equiv 0$, o que contradiz o fato de que $P(x_0) \neq 0$. $\square$

Observação 5.44. Cabem as seguintes observações:

a) Se $P \equiv 0$, a proposição 5.43 é falsa. Vamos mostrar isso. Sejam $P_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, com $P_n(z) = \frac{z}{n}$. Temos:

- $\lambda(z) = 0$, pois $P \equiv 0$ e $d(z, L(P; 0)) = d(z, \mathbb{C}) = 0$;
- $\lambda_n(z) = |z|$, pois $d(z, L(P_n; 0)) = d(z, \{0\}) = |z|$.

Mas, se B é uma bola contida em $\mathbb{C}$, temos $P(B) = \{0\}$ e $P_n(B) = \frac{1}{n}B$. Dessa forma, segue que $K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} \overline{P_n(B)} = \overline{P(B)}$.

b) A mesma prova pode ser utilizada para estender o resultado a polinômios contínuos e não-constantes. Da condição “ $K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} \overline{P_n(B)} = \overline{P(B)}$, para toda bola aberta $B \subseteq E$ ” segue que $(P_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $P(x)$ para toda seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a x (teorema 5.18

e proposição 5.41). Basta, então, substituir o teorema 5.24 pela proposição 5.22 na demonstração anterior.

Essa proposição é falsa no caso real, mesmo sob hipóteses mais fortes. Vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 5.45. Sejam $P, P_n : c_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ definidos por:

$$P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} (x_k - x_{k+1})^2 \quad \text{e} \quad P_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} (x_k - x_{k+1})^2$$

Observe que:

- $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a P em subconjuntos limitados de c_0 ;
- $P(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $L(P; 0) = \{0\}$;
- $L(P_n; 0) = \{x \in c_0(\mathbb{R}) : x_1 = x_2 = \dots = x_n = x_{n+1}\}$.

Temos que:

$$d(e_1, L(P; 0)) = 1 \quad \text{e} \quad d(e_1, L(P_n; 0)) = \inf_{x \in L(P_n; 0)} \|e_1 - x\| = \frac{1}{2}.$$

Conseqüentemente, $\lim_{n \rightarrow \infty} d(e_1, L(P_n; 0)) \neq d(e_1, L(P; 0))$. Mas $K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} \overline{P_n(B)} = \overline{P(B)}$, uma vez que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a P em B .

Incidentalmente, o exemplo também mostra que o seguinte resultado, verdadeiro no caso complexo, não é válido no caso real:

$$B = B(x_0, r), 0 \in \overline{P(B)}, \eta > 0 \Rightarrow L(P; 0) \cap B(x_0, r + \eta) \neq \emptyset.$$

É suficiente considerarmos $x_0 = e_1$, $r = \frac{1}{2}$ e $\eta = \frac{1}{4}$. É claro que $0 \notin P(B(e_1, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}))$, mas $0 \in \overline{P(B(e_1, \frac{1}{2}))}$, pois:

$$z_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) e_1 + \sum_{j=2}^n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) e_j \in B\left(e_1, \frac{1}{2}\right) \quad \text{e} \quad 0 \leq P(z_n) \leq \frac{5}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Observação 5.46. Nesse exemplo, $dP(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Dessa forma, podemos utilizar a proposição 5.27 para mostrar que $(L(P_n; 0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, no sentido de Kuratowski, a $L(P; 0)$.

Além disso, como $K\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} \overline{P_n(B)} = \overline{P(B)}$, o teorema 5.41 afirma que $L(P; \alpha) = W\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(P_n; \alpha)$, $\forall \alpha \neq 0$. Como a convergência no sentido de Wijsman implica a convergência no sentido de Kuratowski, segue que $P_n \xrightarrow{K} P$.

Para obtermos um resultado similar no caso real, são necessárias condições mais fortes sobre o polinômio P :

Proposição 5.47. *Seja E um espaço de Banach real, e sejam $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(E)$ e $P \in \mathcal{P}(E)$ tais que P satisfaz:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|dP(y_n)\| = 0 \Rightarrow 0 \in \overline{\text{co}}((y_n)_{n \in \mathbb{N}}),$$

com $\overline{\text{co}}((y_n)_{n \in \mathbb{N}})$ a envoltória convexa de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Se $\text{K-}\lim_{n \in \mathbb{N}} \overline{P_n(B)} = \overline{P(B)}$, para toda bola aberta $B \subseteq E$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(x) = \lambda(x), \forall x \in E$.

Demonstração. Cabe lembrar que, nesse caso:

$$\lambda_n(x) = d(x, L(P_n; 0)) \quad \text{e} \quad \lambda(x) = d(x, L(P; 0)).$$

A condição sobre o polinômio P nos garante que $dP(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. De fato, se $x = 0$, então $dP(x) = 0$. Reciprocamente, suponha que $dP(x) = 0$. Se tomarmos a sequência $y_n = x, \forall n \in \mathbb{N}$, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \|dP(y_n)\| = 0$. Por hipótese, $0 \in \overline{\text{co}}((y_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \overline{\text{co}}(\{x\}) = \{x\}$, e $x = 0$. Pela observação 5.46, $P_n \xrightarrow{\text{K}} P$.

Analogamente ao que foi feito na proposição 5.43, se $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(x) \neq \lambda(x)$, podemos obter uma sequência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B(x, \lambda')$, com $\lambda' < \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(x)$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} P(y_n) = 0$.

Tome $\epsilon = \lambda - \lambda'$, e defina $\phi_n : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ por $\phi_n(t) = P(y_n + tz_n)$, onde $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são pontos da bola unitária para os quais vale:

$$|dP(y_n)(z_n)| > \frac{1}{2} \|dP(y_n)\|.$$

Observe que esses polinômios nunca se anulam e que, como $P(y_n) \rightarrow 0$, $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a um polinômio ϕ tal que $\phi(0) = 0$. Pelo lema 5.26, necessariamente temos $\phi'(0) = 0$, donde:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} dP(y_n)(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi'_n(0) = \phi'(0) = 0.$$

Segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|dP(y_n)\| = 0$, absurdo, pois $0 \notin B(x, \lambda)$ e $\overline{\text{co}}((y_n)_{n \in \mathbb{N}}) \subseteq B(x, \lambda)$. □

5.4 r-Convergência

Nessa seção, discutiremos as relações das convergências de polinômios com a r-convergência de seus conjuntos de nível. O principal objetivo dessa seção é demonstrar um resultado que generalize o teorema 3.11.

Relembremos, aqui, duas notações que serão largamente utilizadas ao longo da seção: fixados $x \in E$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(E)$ e $P \in \mathcal{P}(E)$, temos

$$\lambda = d(x, L(P; \alpha)) \quad \text{e} \quad \lambda_n = d(x, L(P_n; \alpha)).$$

O lema seguinte demonstra a suficiência da r -convergência dos conjuntos de nível para a convergência uniforme em subconjuntos limitados de uma seqüência de polinômios homogêneos. Como na proposição 5.36, o resultado é válido se $P \equiv 0$.

Lema 5.48. *Sejam E um espaço de Banach, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}({}^k E) \setminus \{0\}$ e $P \in \mathcal{P}({}^k E) \setminus \{0\}$. Se $L(P; \alpha) = r\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(P_n; \alpha)$, $\forall \alpha \neq 0$, então $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a P uniformemente em conjuntos limitados.*

Demonstração. Se não ocorre essa convergência, existem $\epsilon > 0$, uma bola $B \subseteq E$ e uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$ tais que $|P(x_n) - P_n(x_n)| > \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}$ (pode-se passar a uma subseqüência, se necessário). Seja $\gamma_n = P(x_n)$. Como $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada (pois $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$), podemos assumir (se necessário, utilizando uma subseqüência) que $\gamma_n \rightarrow \gamma$.

Caso I: $\gamma \neq 0$.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\frac{1}{2} < |\frac{\gamma}{\gamma_n}| < 2$, ou, no caso real, que $\frac{1}{2} < \frac{\gamma}{\gamma_n} < 2$. Fixemos $x \in E$, e definamos $\lambda = d(x, L(P; \gamma))$ e $\lambda_n = d(x, L(P_n; \gamma))$. A r -convergência nos garante que $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a λ uniformemente em conjuntos limitados (vide proposição 2.27).

Seja $x'_n = \left(\frac{\gamma}{\gamma_n}\right)^{\frac{1}{k}} x_n$. Note que $x'_n \in 2B$. Temos:

$$|\gamma - P_n(x'_n)| = \left| \frac{\gamma}{\gamma_n} (P_n(x_n) - P(x_n)) \right| = \left| \frac{\gamma}{\gamma_n} \right| |P_n(x_n) - P(x_n)| > \frac{\epsilon}{2}.$$

Por outro lado, $|\lambda_n(x'_n)| = |\lambda_n(x'_n) - \lambda(x'_n)|$ e então, pela convergência uniforme de $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $2B$, segue que $\forall \eta > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda_n(x'_n)| < \eta, \forall n > n_0$. Essa condição pode ser reescrita como:

$$\forall \eta > 0 \exists z'_n \in L(P_n; \lambda) \text{ tal que } \|z'_n - x'_n\| < \eta.$$

Então:

$$|\gamma - P_n(x'_n)| = |P_n(z'_n) - P_n(x'_n)| \leq M\eta < \frac{\epsilon}{2},$$

se começarmos com $\eta < \frac{\epsilon}{2M}$, onde M é uma constante dependendo somente de B , de k e de $\|P_n\|$, que é uniformemente limitada, pela proposição 5.10. Isso contradiz a primeira equação.

Caso II: $\gamma = 0$.

Isso significa que $\lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n) = 0$. Consequentemente, $|P_n(x_n)| > \frac{\epsilon}{2}$, para n suficientemente grande. Como $(P_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é limitado, podemos assumir, passando a uma subsequência se necessário, que $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x_n)$, com $\beta \neq 0$. Se denotarmos $\beta_n = P_n(x_n)$, podemos assumir que $\frac{1}{2} < |\frac{\beta}{\beta_n}| < 2$, ou, no caso real, que $\frac{1}{2} < \frac{\beta}{\beta_n} < 2$. Então:

$$|P(x'_n) - \beta| = \left| \frac{\beta}{\beta_n} (P(x_n) - P_n(x_n)) \right| > \frac{\epsilon}{2}$$

onde $x'_n = \left(\frac{\beta}{\beta_n}\right)^{\frac{1}{k}} x_n \in 2B \cap L(P_n; \beta)$. Se definirmos:

$$d(x) = d(x, L(P; \beta)) \quad \text{e} \quad d_n(x) = d(x, L(P_n; \beta)),$$

podemos afirmar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|d(x'_n)| = |d(x'_n) - d_n(x'_n)| < \frac{\epsilon}{2M}, \forall n > n_0,$$

pois $d_n(x'_n) = 0$ e $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a d em $2B$. A constante M depende apenas de B , de k e de $\|P\|$. Então, existe $z'_n \in L(P; \beta)$ tal que $\|z'_n - x'_n\| < \frac{\epsilon}{2M}$ e, consequentemente:

$$|P(x'_n) - \beta| = |P(x'_n) - P(z'_n)| < M \frac{\epsilon}{2M} = \frac{\epsilon}{2},$$

o que gera uma contradição. □

Mostremos, agora, a recíproca desse resultado. O caso $P \equiv 0$ é tratado de forma idêntica ao que foi feito quando do estudo da convergência no sentido de Wijsman.

Lema 5.49. *Sejam E um espaço de Banach, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}^k(E) \setminus \{0\}$ e $P \in \mathcal{P}^k(E) \setminus \{0\}$. Se $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a P uniformemente em subconjuntos limitados, então $L(P; \alpha) = \text{r-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(P_n; \alpha)$, $\forall \alpha \neq 0$.*

Demonstração. Fixemos $\alpha \neq 0$, e sejam λ, λ_n definidos como anteriormente. De acordo com a proposição 2.27, precisamos mostrar que $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a λ uniformemente em subconjuntos limitados de E . Fixemos $B = B(0, r)$ e $\epsilon \in (0, 1)$. Pela definição de λ , temos:

$$\forall x \in B, \exists z_x \in L(P; \alpha) \text{ tal que } \|x - z_x\| < \lambda(x) + \frac{\epsilon}{2}. \quad (*)$$

Seja $\tilde{B} = B(0, R)$, onde $R = 3r + \lambda(0) + 1$. Então, $z_x \in \tilde{B}$, pois:

$$\|z_x\| < \|x\| + \lambda(x) + \frac{\epsilon}{2} < r + \lambda(x) + 1 \leq r + 2r + \lambda(0) + 1 = R.$$

Seja $\alpha_n(x) = P_n(z_x)$. Como $\alpha \neq 0$ e $|\alpha_n(x) - \alpha| = |P_n(z_x) - P(z_x)|$, a convergência uniforme de $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a P em $\tilde{B}$ nos garante que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\alpha_n(x)} = 1$$

uniformemente em B - podemos assumir que $\alpha_n(x)$ nunca se anula. Se definirmos $z_n(x) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_n(x)}\right)^{\frac{1}{k}} z_x$, temos:

$$\|z_n(x) - z_x\| = \left|1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_n(x)}\right)^{\frac{1}{k}}\right| \|z_x\| < \frac{\epsilon}{2}, \forall n > n_0(\epsilon). \quad (\star\star)$$

Usando $(\star)$ e $(\star\star)$, obtemos $\lambda_n(x) - \lambda(x) < \epsilon$, pois:

$$\lambda_n(x) - \lambda(x) < \lambda_n(x) - \|x - z_x\| + \frac{\epsilon}{2} \leq |\lambda_n(x) - \|x - z_n(x)\|| + \|z_n(x) - z_x\| + \frac{\epsilon}{2} \leq$$

$$\|z_n(x) - z_x\| + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon, \forall n > n_0(\epsilon), \forall x \in B.$$

Pode-se verificar a outra desigualdade de modo similar: definamos $z_{n,x} \in L(P_n; \alpha)$ tal que $\|x - z_{n,x}\| < \lambda_n(x) + \frac{\epsilon}{2}$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(0) = \lambda(0)$, podemos assumir que $z_{n,x} \in \tilde{B}$.

Se denotarmos $\alpha_n(x) = P(z_{n,x})$, $\tilde{z}_{n,x} = \left(\frac{\alpha}{\alpha_n(x)}\right)^{\frac{1}{k}} z_{n,x}$ e escolhermos $\eta > 0$ de forma que:

$$\left|\left(\frac{t}{t_n}\right)^{\frac{1}{k}} - 1\right| < \frac{\epsilon}{2R}, \text{ sempre que } |t - t_n| < \eta,$$

obtemos: $\exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|\alpha - \alpha_n(x)| = |P_n(z_{n,x}) - P(z_{n,x})| < \eta$, $\forall n > n_0(\epsilon)$ (pela convergência uniforme de $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a P em $\tilde{B}$) e, consequentemente:

$$\begin{aligned} \lambda(x) - \lambda_n(x) &< \lambda(x) - \|x - z_{n,x}\| + \frac{\epsilon}{2} \leq \lambda(x) - \|\tilde{z}_{n,x} - x\| + \|\tilde{z}_{n,x} - z_{n,x}\| + \frac{\epsilon}{2} \leq \|\tilde{z}_{n,x} - z_{n,x}\| + \frac{\epsilon}{2} = \\ &= \left|\left(\frac{\alpha}{\alpha_n(x)}\right)^{\frac{1}{k}} - 1\right| \|z_{n,x}\| + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon, \forall n > n_0(\epsilon), \forall x \in B. \end{aligned}$$

Concluimos, portanto, que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(x) = \lambda(x)$ uniformemente em B . $\square$

A união dos lemas 5.48 e 5.49 e as observações sobre o caso $P \equiv 0$ nos garantem o resultado procurado:

Teorema 5.50. *Se $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}({}^k E)$ e $P \in \mathcal{P}({}^k E)$, então $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a P uniformemente em conjuntos limitados se, e somente se, $L(P; \alpha) = r\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(P_n; \alpha)$, $\forall \alpha \neq 0$.*

O último passo é estudar o caso $\alpha = 0$. Iniciemos com o caso complexo.

Proposição 5.51. *Sejam E um espaço de Banach complexo, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}({}^k E) \setminus \{0\}$ e $P \in \mathcal{P}({}^k E) \setminus \{0\}$. Suponhamos que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a P uniformemente em subconjuntos limitados de E . Então $L(P; 0) = r\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(P_n; 0)$.*

Demonstração. Seja B a bola unitária de E . Vamos mostrar que dados $r, \epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L(P_n; 0) \cap rB \subseteq L(P; 0) + \epsilon B$, $\forall n > n_0$. Se isso não ocorre, existem $r, \epsilon > 0$ e uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq rB$ tais que $P_n(x_n) = 0$, mas $B(x_n, \epsilon) \cap L(P; 0) = \emptyset$.

A convergência uniforme de $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a P em rB garante que $\lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n) = 0$. Escolhamos $z_0 \in B$ tal que $P(z_0) \neq 0$, e definamos a função $\phi_n : D(0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{C}$ por $\phi_n(w) = P(x_n + wz_0)$. Então:

$$\phi_n(w) = P(x_n) + \binom{k}{1} A(x_n, \dots, x_n, z_0)w + \dots + \binom{k}{k-1} A(x_n, z_0, \dots, z_0)w^{k-1} + P(z_0)w^k,$$

onde A denota a forma k -linear associada a P . Como $P(x_n) \rightarrow 0$, podemos afirmar que existe uma subsequência de $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a um polinômio ϕ tal que $\phi^{(k)}(0) = k!P(z_0) \neq 0$. Mas:

$$\phi(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n) = 0$$

e isso, associado ao fato de que ϕ_n não se anula em $D(0, \epsilon)$, nos garante, a partir do corolário 5.21, que $\phi \equiv 0$, absurdo.

Vamos, agora, mostrar a outra inclusão: dados $r, \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$, $L(P; 0) \cap rB \subseteq L(P_n; 0) + \epsilon B$. Procedemos de forma análoga: se isso não ocorre, existem $r, \epsilon > 0$ e uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq rB$ tais que $P(x_n) = 0$, mas $B(x_n, \epsilon) \cap L(P_n; 0) = \emptyset$.

Seja $z_0 \in B$ tal que $P(z_0) \neq 0$, e definamos $\phi_n, \tilde{\phi}_n : D(0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{C}$ por:

$$\phi_n(w) = P(x_n + wz_0) \quad \text{e} \quad \tilde{\phi}_n(w) = P_n(x_n + wz_0).$$

Note que $\tilde{\phi}_n$ não se anula. Escolhamos uma subsequência de $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a um polinômio ϕ tal que $\phi(0) = 0$. É fácil ver que a subsequência correspondente de $(\tilde{\phi}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ também converge a ϕ . Novamente, obtemos uma contradição pelo corolário 5.21. $\square$

O exemplo 5.45 mostra que, no caso real, a convergência uniforme de $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em conjuntos limitados não implica a r -convergência de (ou mesmo a W -convergência) de $L(P_n; 0)_{n \in \mathbb{N}}$ a $L(P; 0)$.

O exemplo seguinte mostra que, mesmo assumindo a W -convergência, a r -convergência dos conjuntos de nível 0 não segue da convergência uniforme de $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em conjuntos limitados, no caso real.

Exemplo 5.52. Seja $E = c_0(\mathbb{R})$, e tome os polinômios:

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} x_k^2 \quad \text{e} \quad P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} x_k^2.$$

É fácil ver que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a P . Além disso, temos $L(P; 0) = \{0\}$ e $L(P_n; 0) = \{x \in c_0(\mathbb{R}) : x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0\}$.

Temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(x) = \lambda(x)$, $\forall x \in E$, já que $\lambda(x) = \|x\|$ e $\lambda_n(x) = \|x\|$, $\forall n > n_0$, onde $n_0 \in \mathbb{N}$ é tal que $|x_n| < \frac{\|x\|}{2}$, $\forall n > n_0$. No entanto, se $B = B(0, 1)$, $L(P_n, 0) \cap 2B$ nunca está incluso em $L(P; 0) + \frac{1}{2}B$, pois $e_{n+1} \in L(P_n, 0) \cap 2B$, mas $e_{n+1} \notin \frac{1}{2}B$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observe que:

$$dP(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} x_k e_k^*$$

e, portanto:

$$\|dP(x)\|_1 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} |x_k|.$$

Logo, $\inf_{\|x\|=1} \|dP(x)\|_1 = 0$.

Esse fato sugere o seguinte resultado:

Proposição 5.53. *Sejam E um espaço de Banach real, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}^k(E)$ e $P \in \mathcal{P}^k(E)$ tais que:*

$$\inf_{\|x\|=1} \|dP(x)\|_1 > 0.$$

Se a sequência $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a P uniformemente em subconjuntos limitados, então $L(P; 0) = r\text{-}\lim_{n \in \mathbb{N}} L(P_n; 0)$.

Demonstração. Seja B a bola unitária de E . Primeiramente, vamos mostrar que dados $r, \epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L(P_n; 0) \cap rB \subseteq L(P; 0) + \epsilon B$, $\forall n > n_0$.

Se isso não ocorre, existem $r, \epsilon > 0$ e uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq rB$ tais que $P_n(x_n) = 0$, mas $B(x_n, \epsilon) \cap L(P; 0) = \emptyset$. A convergência uniforme de $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em rB garante que $\lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n) = 0$.

Como $x_n \in rB \setminus \epsilon B$, $\forall n \in \mathbb{N}$, existe uma constante $c > 0$ tal que $\|dP(x_n)\| > c$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo, podemos escolher $y_n \in B(0, 1)$ tal que $|dP(x_n)(y_n)| > c$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definamos $\phi_n : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ por $\phi_n(r) = P(x_n + ry_n)$. Como $P(x_n) \rightarrow 0$, podemos afirmar que uma subsequência de $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a um polinômio ϕ tal que:

$$\phi(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n) = 0.$$

O fato de que ϕ_n não se anula nos dá, pelo lema 5.26, que $\phi'(0) = 0$ ou, equivalentemente, $\lim_{n \rightarrow \infty} dP(x_n)(y_n) = 0$, absurdo.

Mostremos, agora, a outra inclusão: dados $r, \epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$, $L(P; 0) \cap rB \subseteq L(P_n; 0) + \epsilon B$.

Se isso não ocorre, existem $r, \epsilon > 0$ e uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq rB$ tais que $P(x_n) = 0$, mas $B(x_n, \epsilon) \cap L(P_n; 0) = \emptyset$. Considerando $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como na primeira parte da prova, definimos

$\phi, \phi_n : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\phi(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n + ry_n) \quad \text{e} \quad \phi_n(r) = P_n(x_n + ry_n)$$

passando a uma subsequência, se necessário. Observe que ϕ_n nunca se anula, e $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a ϕ , pela convergência uniforme de $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a P em $(r + \epsilon)B$. Mas $\phi(0) = 0$ e então, pelo lema 5.26, $\phi'(0) = 0$, donde $\lim_{n \rightarrow \infty} dP(x_n)(y_n) = 0$, absurdo. $\square$

Para finalizar, observamos aqui que não faz sentido estudar a convergência, no sentido de Mosco, de conjuntos de nível de polinômios homogêneos. Ao contrário do que ocorre no caso dos funcionais lineares contínuos, os conjuntos de nível dos polinômios não são convexos. Isso explica a ausência desse tipo de convergência de conjuntos no artigo [8].

Bibliografia

- [1] Beer, G. *Metric spaces with nice closed balls and distance functions for closed sets*. Bull. Austral. Math. Soc. 35 (1987), 81-96.
- [2] Beer, G. *On Mosco convergence of convex sets*. Bull. Austral. Math. Soc. 38 (1988), 239-253.
- [3] Beer, G. *Convergence of continuous linear functionals and their level sets*. Arch. Math. 52 (1989), 482-491.
- [4] Brown, A. L. *A rotund reflexive space having a subspace of codimension two with a discontinuous metric projection*. Michigan Math. J. 21 (1974), 145-151.
- [5] Coelho, F. U., Lourenço, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear*. EDUSP, São Paulo, 2001.
- [6] Conway, J. B. *Functions of One Complex Variable I*. Springer-Verlag, New York, 1978.
- [7] Diestel, J. *Sequences and Series in Banach Spaces*. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [8] Ferrera, J. *Convergence of polynomial level sets*. Transactions of the Amer. Math. Soc. vol. 350, Number 12 (1998), 4757-4773.
- [9] Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley and Sons, 1978.
- [10] Kuratowski, K. *Topology - Vol. 1*. Academic Press, New York and London, 1966.
- [11] Lages, E. L. *Espaços Métricos*. LTC, Rio de Janeiro, 1993.
- [12] Megginson, R. E. *An Introduction to Banach Space Theory*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [13] Mosco, U. *Convergence of convex sets and solutions of variational inequalities*. Adv. in Math. 3 (1969), 510-585.
- [14] Mujica, J. *Notas de Espaços Vetoriais Topológicos*. Notas de Aula, IMECC - UNICAMP, 2004.

- [15] Pellegrini, L. *Um Teorema de Hahn-Banach para Polinômios Homogêneos*. Dissertação de Mestrado, IME - USP, 2001.
- [16] Schur, I. *Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen*. Journal Reine Angew. Math. 1551 (1921), 79-111.