Integral de Kurzweil-Henstock
em um disco p -ádico

José Angelo Pezzotta

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do grau
de
Doutor em Matemática

Área de Concentração: ANÁLISE
Orientador: Prof. Dr. RICARDO BIANCONI

São Paulo-agosto-2005

Integral de Kurzweil-Henstock em um disco p -ádico

Este exemplar corresponde à redação final da tese
devidamente corrigida e defendida por
José Angelo Pezzotta
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, dezembro de 2005

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Ricardo Bianconi (Presidente)- IME-USP
- Prof. Dr. Paulo Agozzini Martin - IME-USP
- Prof. Dr. Plácido Zoega Taboas - ICMC-USP
- Prof. Dr. José Luiz Boldrini - UNICAMP
- Prof. Dr. Dicesar Lass Fernandes - UNICAMP

À minha cara amiga e mestre

Prof^{la} Dr^{la} Iracema Martin Bund

com carinho e respeito.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Ricardo Bianconi os nossos sinceros agradecimentos por ter aceitado orientar-nos neste trabalho. Sua dedicada orientação, amizade, apoio, sempre apresentando sugestões e corrigindo os nossos erros (alguns crassos) sempre com bom humor e paciência tornaram o nosso caminho nesta empreitada mais suave.

À minha querida esposa, Paula, que durante todo o tempo que dedicamos ao desenvolvimento desta pesquisa, sempre procurou dar a sua contribuição, através do incentivo e compreensão, a minha gratidão e o meu carinho.

Ao Prof. Dr. Chaim Samuel Hönig, com o qual tomei o primeiro contato com a integral de Kurzweil-Henstock, a minha gratidão.

Resumo

Neste trabalho desenvolvemos a integral de Kurzweil-Henstock em um disco p -ádico. Apresentamos a sua definição; provamos suas propriedades elementares; verificamos o Critério de Cauchy e o Lema de Henstock; estudamos os principais teoremas de convergência: o Teorema da Convergência Monótona e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. Introduzimos os conceitos de funções e conjuntos mensuráveis, definimos uma medida no disco p -ádico e provamos que a mesma é uma medida de Haar. Estabelecemos relações entre funções mensuráveis e funções integráveis e finalizamos resolvendo a equação de Fredholm de 2ª espécie no disco p -ádico.

Abstract

In this work we develop the Kurzweil-Henstock integral in a p -adic disk. We introduce its definition and we prove its basic properties, the Cauchy criterion and the Henstock's Lemma. We study the principal theorems of convergence: the Monotone Convergence Theorem and the Dominated Convergence Theorem. The concepts of measurable functions and measurable sets are introduced, we define one measure in the p -adic disk and we prove that it is the Haar measure. We establish relations between measure functions and integrable functions and we finish solveing the 2th Fredholm equation in the p -adic disk.

Sumário

1	Preliminares	4
1.1	Espaços ultramétricos	4
1.2	Números p-ádicos	6
2	Integral de Kurzweil-Henstock	13
2.1	Introdução	13
2.2	A integral como funcional linear	19
2.3	O Critério de Cauchy	20
2.4	A integral como função de discos	22
2.5	A integral e as funções contínuas	25
2.6	O Lema de Henstock	28
2.7	As funções absolutamente integráveis	31
3	Teoremas de Convergência	36
3.1	Conjunto Nulo	36
3.2	Teoremas de Convergência	38
4	Integração em conjuntos	51
4.1	Funções mensuráveis	51
4.2	Conjuntos mensuráveis	54
4.3	Integrabilidade e mensurabilidade	60
5	Aplicação da Integral	70
5.1	Equação de Fredholm	70

Prefácio

Em 1957 Jaroslav Kurzweil apresentou uma definição de integral que se mostrou, em diversos aspectos, mais abrangente que aquela de Lebesgue. Posteriormente, Ralph Henstock desenvolveu a teoria dessa nova integral que passou a ser apresentada com os nomes de *integral de Kurzweil*, *integral de Henstock*, *integral de Riemann generalizada* ou *integral de gauge*. Em respeito e homenagem aos pioneiros desta nova ferramenta da matemática, chamamos neste trabalho, a *integral de Kurweil-Henstock*.

Nosso interesse por essa integral surgiu quando participamos de um seminário ministrado pelo Prof. Dr. Chaim S. Hönig no IME na década de 1990, e a oportunidade de pesquisarmos sobre a mesma surgiu através do Prof. Dr. Ricardo Bianconi que se prontificou em orientar-nos nessa pesquisa.

O objetivo deste trabalho é desenvolver a integral de Kurzweil-Henstock em um disco contido no conjunto dos números p-ádicos.

Certamente a curiosidade do leitor indagará sobre a motivação para desenvolver tal integral no disco p-ádico. Desde a época de Euclides o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ é tomado como o modelo matemático para o espaço físico real. Ele é um modelo tão bom que facilmente verificamos na prática os seus axiomas e teoremas. Entretanto está provado que em gravidade quantum e teoria das molas há embaços para se realizar medidas tomando-se o espaço euclidiano como modelo matemático, uma vez que não se pode medir segmentos cujos comprimentos são inferiores ao denominado *comprimento de Planck*, que é da ordem de 10^{-33} cm. Isso significa afirmar que o modelo matemático para espaços físicos cujas distâncias apresentam medidas muito pequenas não pode ser arquimediano ou, em outras palavras, os números reais não são adequados para as medidas de comprimento nesses espaços. Por outro lado, no nosso cotidiano, qualquer ação prática que exija uma medida e qualquer que seja o aparelho utilizado para expressá-la e, ainda mais, por mais preciso que seja esse aparelho, o resultado da medição será sempre um número racional.

Assim, para resolvermos problemas da geometria das pequenas distâncias devemos considerar um conjunto que contenha todos os números racionais e, além disso, deve possuir a propriedade de não ser arquimediano. O conjunto dos números p -ádicos contém todos os números racionais e é não arquimediano, logo ele pode ser um modelo para essa geometria. Esse fato motivou-nos o desenvolvimento da integral de Kurzweil-Henstock no disco p -ádico. Como os conhecimentos sobre os números p -ádicos e sua estrutura topológica são necessários para a construção da integral apresentamos, no capítulo primeiro, os resultados essenciais sobre espaços ultramétricos e números p -ádicos. Todos os resultados apresentados são conhecidos, entretanto optamos por deixar a demonstração daqueles que foram mais utilizados no texto.

No capítulo segundo iniciamos a construção da integral de Kurzweil-Henstock propriamente dita. Nessa construção procuramos seguir o desenvolvimento lógico apresentados pelos livros sobre o tema no conjunto dos números reais. Aqui, [21] e [34] serviram de referência. Nesse capítulo apresentamos a definição e as propriedades básicas da integral, o critério de Cauchy e o Lema de Henstock. A integrabilidade das funções contínuas e as condições para que uma função seja absolutamente integrável também são vistas. Alguns exemplos ilustram este capítulo.

O capítulo 3 reservamos para os teoremas de convergência. Ele inicia-se com o conceito de conjunto nulo para que possamos enunciar os teoremas importantes de convergência: Teorema da Convergência Monótona e Teorema da Convergência Dominada utilizando a propriedade válida *quase sempre*.

No capítulo 4 a definição de *funções mensuráveis* é fornecida por Bartle em [1]. Nele mostramos que toda função contínua é mensurável; construímos a sigma-álgebra dos conjuntos mensuráveis, definimos a medida de um conjunto e mostramos que essa medida é de Haar. Mostramos a existência de conjuntos não mensuráveis e encerramos o capítulo mostrando que toda função integrável é mensurável.

No capítulo 5 efetuamos uma aplicação da integral resolvendo a equação de Fredholm de 2ª espécie no disco p -ádico.

Finalmente, embora o conjunto dos números p -ádicos apresentem uma topologia estranha e não possa ser linearmente ordenado, observamos a existência de teoremas com demonstrações semelhantes a aquelas presentes no intervalo real.

As notações utilizadas são apresentadas no decorrer do texto.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos os conceitos básicos necessários para o desenvolvimento dos nossos trabalhos. Esses resultados são conhecidos e podem ser encontrados em [14], [19] ou [36].

1.1 Espaços ultramétricos

Definição 1.1. Seja E um conjunto não vazio. Uma *ultramétrica* em E é uma função real $d: E \times E \rightarrow]0, \infty[$ que associa a cada par ordenado $(x, y) \in E \times E$ o número real $d(x, y) \geq 0$, denominado *distância de x a y* , satisfazendo as condições abaixo, quaisquer que sejam $x, y, z \in E$:

- (i) $d(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$;
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (iii) $d(x, y) \leq \max \{d(x, z), d(z, y)\}$.

O par (E, d) é chamado de *espaço ultramétrico* e cada elemento de E é um *ponto* desse espaço. Nesta seção reservaremos a letra E para designar um espaço ultramétrico com uma métrica já estabelecida. Somente faremos menção explícita ao espaço ultramétrico E ou à métrica quando necessário.

Proposição 1.2. Se $x, y, z \in E$ são tais que $d(x, z) \neq d(z, y)$, então $d(x, y) = \max \{d(x, z), d(z, y)\}$.

Corolário 1.3. Quaisquer que sejam $x, y, z \in E$ tem-se: $d(x, y) = d(x, z)$ ou $d(x, y) = d(z, y)$ ou $d(x, z) = d(z, y)$.

Segue-se de (1.3) que, em um espaço ultramétrico, todo triângulo é isósceles.

Notações 1.4. Dado o número real $r \geq 0$, o conjunto $\{z \in E: d(x, z) \leq r\}$ é chamado de *disco* de *centro* x e *raio* r e é denotado por $D_r(x)$. Se $r > 0$, o conjunto $\{z \in E: d(x, z) < r\}$ é chamado de *bola aberta* de *centro* x e *raio* r e é denotado por $B_r(x)$.

Proposição 1.5. Quaisquer que sejam $x, y \in E$ e $r, s \in]0, \infty[$, com $s \geq r$, tem-se:

- (i) se $D_r(x) \cap D_s(y) \neq \emptyset$, então $D_r(x) \subset D_s(y)$;
- (ii) se $B_r(x) \cap B_s(y) \neq \emptyset$, então $B_r(x) \subset B_s(y)$.

Corolário 1.6. Quaisquer que sejam $x, y \in E$ e $r \in]0, \infty[$, tem-se:

- (i) se $D_r(x) \cap D_r(y) \neq \emptyset$, então $D_r(x) = D_r(y)$;
- (ii) se $B_r(x) \cap B_r(y) \neq \emptyset$, então $B_r(x) = B_r(y)$.

De (1.6) segue-se que todo ponto pertencente a uma bola aberta ou a um disco é um centro da bola ou do disco, respectivamente. Em vista disso, quando não houver possibilidade de confusão, denotaremos uma bola aberta ou um disco de raio r , simplesmente, por B_r ou D_r , respectivamente.

Decorre ainda dessa proposição que, para todo $r \in]0, \infty[$, a coleção das bolas abertas ou dos discos de raio r é uma *partição* de E .

Corolário 1.7. Quaisquer que sejam $r_1, \dots, r_n$ números reais positivos satisfazendo $r_i \leq r$, para todo $1 \leq i \leq n$, tem-se:

- (i) se $D_r \subset \bigcup_{i=1}^n D_{r_i}$, então existe $m, 1 \leq m \leq n$, tal que $D_r = \bigcup_{i=1}^m D_{r_i}$;
- (ii) se $B_r \subset \bigcup_{i=1}^n B_{r_i}$, então existe $m, 1 \leq m \leq n$, tal que $B_r = \bigcup_{i=1}^m B_{r_i}$.

Definição 1.8. Seja $A \subset E$. Diz-se que A é *limitado* se existe um número real $M > 0$ tal que, quaisquer que sejam $x, y \in A$, tem-se $d(x, y) \leq M$. Se A é limitado, o número real $\rho(A)$, definido por $\rho(A) = \sup \{d(x, y) : x, y \in A\}$ é chamado de *diâmetro* de A .

Proposição 1.9. Quaisquer que sejam $x \in E$ e $r \in]0, \infty[$, tem-se:

- (i) $\rho(D_r(x)) \leq r$;
- (ii) $\rho(B_r(x)) \leq r$.

Definição 1.10. Seja $A \in E$ e $y \notin A$. Define-se a *distância de y a A* , e escreve-se $d(y, A)$, pela expressão

$$d(y, A) = \inf \{d(y, x) : x \in A\}$$

Decorre dessa definição que $d(y, A) \geq 0$.

Proposição 1.11. Se $y \notin D_r$, então $d(y, D_r) = d(x, y) > 0$, qualquer que seja $x \in D_r$.

1.2 Números p-ádicos

É sabido pela aritmética que todo número inteiro n , $n \neq 0$ e $n \neq \pm 1$, é igual ao produto finito de potências de números primos. Assim, quaisquer

que sejam os números inteiros n e p , com n não nulo e $p > 0$ primo, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = k \cdot p^s$, sendo s é o maior número natural tal que p^s divide n . É claro que se p não divide n , então $s = 0$.

Em toda esta seção consideraremos o número primo p fixado.

Definição 1.12. Define-se a aplicação $\overline{ord}_p: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ pela igualdade

$$\overline{ord}_p(n) = \begin{cases} s & , \text{ se } n = k \cdot p^s; \\ \infty & , \text{ se } n = 0 \end{cases}$$

na qual s é o maior número natural tal que p^s divide n .

A função $\overline{ord}_p$ está bem definida e, se definirmos $s + \infty = \infty + s = \infty$ para todo número natural s , a propriedade

$$\overline{ord}_p(m \cdot n) = \overline{ord}_p(m) + \overline{ord}_p(n) \quad (1)$$

torna-se válida

Como veremos a seguir, essa definição pode ser estendida para o conjunto dos números racionais.

Definição 1.13. Define-se a aplicação $ord_p: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ por

$$ord_p(x) = \begin{cases} \overline{ord}_p(a) - \overline{ord}_p(b) & , \text{ se } x = \frac{a}{b} \\ \infty & , \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

Observações 1.14. A aplicação ord_p goza das propriedades:

- (a) Para todo número inteiro n tem-se $ord_p(n) = \overline{ord}_p(n)$.
- (b) Essa definição independe da fração que expressa x .
- (c) $ord_p(x \cdot y) = ord_p(x) + ord_p(y)$

Definição 1.15. Uma função $|\cdot|: \mathbb{Q} \rightarrow [0, \infty[$ é chamada de *valor absoluto* em $\mathbb{Q}$ se, quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{Q}$, estão satisfeitas as condições:

- (i) $|x| = 0$ se e somente se $x = 0$;
- (ii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;
- (iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Com essa definição às mãos verifica-se facilmente que a função $|\cdot|_p$, definida abaixo, é um valor absoluto em $\mathbb{Q}$,

Definição 1.16. Para todo $x \in \mathbb{Q}$, define-se

$$|x|_p = \begin{cases} 0 & , \text{se } x = 0 \\ p^{-ord_p(x)} & , \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

Observações 1.17. De 1.16 seguem-se as propriedades:

- (a) $|p^n|_p = p^{-n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- (b) $|x|_p = |-x|_p \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{Q}$;
- (c) $|x|_p \neq 0$ se $x \neq 0$;
- (d) $|1|_p = p^0 = 1$;
- (e) a e b não são divisíveis por p , então $|\frac{a}{b}|_p = p^0 = 1$;
- (f) $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$;
- (g) O par $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ é um espaço ultramétrico.

Notações 1.18. Denota-se por $\mathbb{Q}_p$ o completado de $\mathbb{Q}$ com a métrica $|\cdot|_p$. Verifica-se que $\mathbb{Q}_p$ é o conjunto das séries formais $\sum_{k=m}^{\infty} a_k p^k$ na qual $m \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq a_k \leq p-1$, para todo $k \geq m$. Se $a_m \neq 0$, então a série formal é única para cada $x \in \mathbb{Q}_p$. Com as operações usuais de séries podemos mostrar que $\mathbb{Q}_p$ é um corpo completo em relação ao valor absoluto $|\cdot|_p$. Seguindo a notação usual denotaremos por Z_p o subconjunto de $\mathbb{Q}_p$ constituído por todos os números da forma $\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k$ - anel dos inteiros p -ádicos.

Proposição 1.19. Para todo $x \in \mathbb{Q}_p$, com $x = \sum_{k=m}^{\infty} a_k p^k$, com $a_m \neq 0$, tem-se $|x|_p = p^{-m}$.

Segue-se dessa proposição que $\mathbb{Z}_p = D_1(0)$

Proposição 1.20. $\mathbb{Z}_p$ é compacto.

Proposição 1.21. Para todo $x \in \mathbb{Q}_p$ e todo $r \geq 0$, $D_r(x)$ é compacto.

Proposição 1.22. Todo disco ou toda bola aberta, de raio não nulo, é, simultaneamente, um conjunto aberto e fechado.

Corolário 1.23. Sejam $D_1, \dots, D_n$ discos contidos em $D_r(x)$, dois a dois disjuntos. Então existem discos $F_1, \dots, F_m$, contidos em $D_r(x)$, dois a dois disjuntos, satisfazendo $D_r(x) = \left(\bigcup_{i=1}^n D_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^m F_j \right)$.

Prova. Por (1.22), cada D_i é um conjunto aberto. Para cada $y \notin \bigcup_{i=1}^n D_i$ consideremos o disco de centro y e raio $r_y = \min \{d(y, D_i) : 1 \leq i \leq n\}$. Por (1.11), $r_y > 0$, para todo y . Segue-se que a coleção

$$D_1, \dots, D_n, D_{r_y}(y) \left(y \notin \bigcup_{i=1}^n D_i \right)$$

é uma cobertura de $D_r(x)$ por abertos. A compacidade de $D_r(x)$ e (1.7) acarretam a existência de $y_1, \dots, y_m$ tais que

$$D_r(x) = D_1 \bigcup \dots \bigcup D_n \bigcup D_{r_{y_1}}(y_1) \bigcup \dots \bigcup D_{r_{y_m}}(y_m)$$

Fazendo, para todo $1 \leq j \leq m$, $F_j = D_{r_{y_j}}(y_j)$, a prova está completa. ■

Proposição 1.24. Para todo $x \in \mathbb{Q}_p$, e todo $r > 0$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

(i) $B_r(x) = D_{p^n}(x)$;

(ii) $D_r(x) = D_{p^n}(x)$.

Observação 1.25. À vista desta proposição somente são de interesse os discos cujos raios são da forma p^n , no qual n é um número inteiro. Assumiremos, a menos de citação em contrário, que todo disco de raio r teremos $r \in \{p^n : n \in \mathbb{Z}\}$.

Corolário 1.26. Quaisquer que sejam $x \in \mathbb{Q}_p$ e $n \in \mathbb{Z}$ tem-se $B_{p^{-n}}(x) = D_{p^{-n+1}}$ é compacto.

Proposição 1.27. O número de discos de raio p^{-n} que cobrem $\mathbb{Z}_p$ é p^n .

Corolário 1.28. Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$, com $m > n$, e seja $x \in \mathbb{Q}_p$. Então existem p^{m-n} discos de raio p^{-m} que cobrem $D_{p^{-n}}(x)$.

Teorema 1.29. Sejam $D, D_1, \dots, D_n$ discos de raios $r, r_1, \dots, r_n$, respectivamente, no qual cada r_i é um número da forma p^α , com $\alpha \in \mathbb{Z}$. Se $\bigcup_{i=1}^n D_i = D$ e $D_i \cap D_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$, então $r = r_1 + \dots + r_n$.

Prova. De $D_i \subset D$, segue-se que $r \geq r_i$, para todo $1 \leq i \leq n$. Inicialmente admitamos que $r_1 = \dots = r_n$. Por (1.28), D é coberto por $\frac{r}{r_n}$ discos de raio r_n . Utilizando a hipótese, vem $\frac{r}{r_n} = n$ e, portanto, $r = n \cdot r_n$, verificando a conclusão para o caso de todos os discos terem o mesmo raio.

Suponhamos que $r_1 \geq \dots \geq r_n$. Então, por (1.28) D é coberto por $\frac{r}{r_n}$ discos de raios r_n e, para cada $1 \leq i \leq n$ o disco D_i é coberto por $\frac{r_i}{r_n}$ discos de raios r_n . Como os discos $D_1, \dots, D_n$ são dois a dois disjuntos, então $fracrr_n = \frac{r_1}{r_n} + \dots + \frac{r_n}{r_n}$ ou $r = r_1 + \dots + r_n$. ■

Teorema 1.30. Seja A um subconjunto aberto de D . Então existe uma seqüência $E_1, \dots, E_n, \dots$ de discos contidos em D , dois a dois disjuntos, tais que $A = \bigcup_{n \geq 1} E_n$.

Prova. Dado $x \in A$, seja Γ o conjunto dos discos E que satisfazem a condição $x \in E \subset A$. Por (1.22), Γ é não vazio. Afirmamos que existe um disco $E_x \subset \Gamma$ tal que $E_x = \bigcup_{E \in \Gamma} E$

De fato, de $d(x, \mathbb{C}A) \leq 1$, segue-se que existe

$$s = \max \{z \in \mathbb{Z}: p^z < d(x, \mathbb{C}A)\}$$

Tomemos $E_x = D_{p^s}(x)$. É imediato que $x \in E_x \subset A$, logo

$$E_x \subset \bigcup_{E \in \Gamma} E \quad (1)$$

Por outro lado, dado $y \in \bigcup_{E \in \Gamma} E$ temos $y \in D_{p^n}(x)$, para algum $n \in \mathbb{Z}$. Como $p^n \leq d(x, \mathbb{C}A)$, então $n \leq s$ e, portanto, $y \in E_x$; mostrando que

$$\bigcup_{E \in \Gamma} E = E_x \quad (2)$$

De (1) e (2) segue a igualdade

$$E_x = \bigcup_{E \in \Gamma} E$$

E, dessa,

$$A = \bigcup_{x \in A} E_x$$

Por (1.5), dados $x, y \in A$ temos $E_x = E_y$ ou $E_x \cap E_y = \emptyset$. Seja $B \subset A$ o conjunto dos $x \in A$ tais os discos E_x são dois a dois disjuntos. Logo $A = \bigcup_{x \in B} E_x$.

Provemos que B é enumerável.

De $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{Q}_p$ segue-se que para cada $x \in B$ existe um número racional $r(x) \in E_x$. Assim a função $f: B \rightarrow \mathbb{Q}$ definida por $f(x) = r(x)$ está bem definida e é injetora, pois se $r(x) = r(y)$ então $r(y) \in E_x$, contrariando o fato de que $E_y \cap E_x = \emptyset$, quaisquer que sejam $x, y \in B$. Logo $A = \bigcup_{n \geq 1} E_n$.

■

Para cada $x \in \mathbb{Q}_p$ e $A \subset \mathbb{Q}_p$, denotamos por $x + A$ o subconjunto de $\mathbb{Q}_p$ definido por

$$x + A = \{z \in \mathbb{Q}_p: z = x + y, \text{ para algum } y \in A\}$$

Proposição 1.31. Sejam F_s e D_r discos contido em $\mathbb{Q}_p$, com $F_s \subset D_r$.

Então, para todo $x \in \mathbb{Q}_p$, tem-se:

- (i) $(x + F_s) \subset D_r$, se $|x|_p \leq r$;
- (ii) $(x + F_s) \cap D_r = \emptyset$, se $|x|_p > r$;
- (iii) $(x + F_s)$ é um disco de raio s .

Prova. Dado $z \in x + F_s$ existe $z_1 \in F_s$ tal que $z = x + z_1$. Segue-se que $|z - z_1|_p = |x|_p$. Se $|x|_p \leq r$, como $z_1 \in F_s \subset D_r$, temos $z \in D_r(z_1) = D_r$. Isso mostra que $x + F_s \subset D_r$.

Se $|x|_p > r$ então $|z - z_1|_p > r$ e $z \notin D_r(y) = \emptyset$. Isso implica que $x + F_s \cap D_r = \emptyset$. Com isso provamos (i) e (ii).

Seja $y \in x + F_s$. Dado $z \in x + F_s$ existe $z_1 \in F_s$ tal que $z = x + z_1$. Logo $|z - y|_p = |x + z_1 - y|_p = |z_1 - (y - x)|_p \leq s$ uma vez que $z_1, (y - x) \in F_s$. Isso mostra que

$$x + F_s \subset D_s(y) \quad (1)$$

Por outro lado se $w \in D_s(y)$, então $|(w - x) - (y - x)|_p = |w - y|_p \leq s$, mostrando que $w_1 = w - x \in D_s(y - x) = F_s$, pois $y - x \in F_s$. Segue-se que $w = x + w_1$, com $w_1 \in F_s$. Portanto

$$D_s(y) \subset x + F_s \quad (2)$$

De (1) e (2) vem $x + F_s = D_s(y)$. ■

Capítulo 2

Integral de Kurzweil-Henstock

2.1 Introdução

Iniciamos esta seção introduzindo os conceitos e terminologia que nos auxiliarão na compreensão da definição da integral de Kurzweil-Henstock.

Relembrando a Proposição (1.6) designaremos um disco de centro x e raio r simplesmente por D_r quando o seu centro não for fundamental no desenvolvimento que estivermos realizando. Também, relembrando que a imagem da métrica em $\mathbb{Q}_p$ é o conjunto $\{p^n: n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ fica estabelecido, para não sermos repetitivos, que os raios das bolas abertas e discos serão sempre elementos desse conjunto e os respectivos raios são não nulos; as exceções serão enunciadas.

No desenvolvimento de toda a teoria consideraremos fixo o disco D de raio $r > 0$.

Definição 2.1. Uma *divisão* de D é um conjunto finito de discos, $\{D_{r_1}, \dots, D_{r_n}\}$, contidos em D , satisfazendo as seguintes condições, para cada $1 \leq i \leq n$:

- (i) $r_i = p^{n_i}$, com $n_i \in \mathbb{Z}$;
- (ii) $D_{r_i} \cap D_{r_j} = \emptyset$, se $i \neq j$;
- (iii) $\bigcup_{i=1}^n D_{r_i} = D$.

A afirmação de que existe pelo menos uma divisão em D satisfazendo a definição acima é dada por (1.28).

Definição 2.2. Uma *divisão marcada* de D é um conjunto finito de pares ordenados, $\mathcal{D} = \{(x_1, D_{r_1}), \dots, (x_n, D_{r_n})\}$, no qual $\{D_{r_1}, \dots, D_{r_n}\}$ é uma divisão de D e os pontos $x_1, \dots, x_n$ verificam a condição $x_i \in D_{r_i} \subset D$, para todo $1 \leq i \leq n$. Os elementos $x_1, \dots, x_n$ são as *marcas* da divisão.

Definição 2.3. (i) Seja Λ o conjunto de todas as bolas abertas de raio finito, contidas em $\mathbb{Q}_p$. Toda aplicação δ que associa a cada ponto $x \in D$ o elemento $\delta(x) \in \Lambda$, satisfazendo a condição $x \in \delta(x)$, é chamada de *gauge em D* .

(ii) Sejam δ um gauge e $\mathcal{D} = \{(x_1, D_{r_1}), \dots, (x_n, D_{r_n})\}$ uma divisão marcada de D . Dizemos que $\mathcal{D}$ é uma *divisão marcada δ -fina* de D , e denotaremos $\mathcal{D} \ll \delta$, se $x_i \in D_{r_i} \subset \delta(x_i)$, para todo $1 \leq i \leq n$.

É claro que dada uma divisão marcada de D é possível encontrar um gauge tal que essa divisão marcada seja δ -fina. A recíproca dessa afirmação não é de todo evidente, entretanto ela é válida. Essa é a próxima proposição.

Proposição 2.4. Seja δ um gauge em D . Então, existe em D uma divisão marcada δ -fina, $\mathcal{D} = \{(x_1, D_{r_1}), \dots, (x_n, D_{r_n})\}$.

Prova. Seja $\Gamma = (\delta(x))_{x \in D}$ uma cobertura de D por abertos. A compacidade de D implica a existência de $x_1, \dots, x_m \in D$ satisfazendo

$$D \subset \bigcup_{i=1}^m \delta(x_i). \quad (1)$$

Por (1.24), existem

$$r_1, \dots, r_m \in \{p^k : k \in \mathbb{Z}\}, \quad (2)$$

satisfazendo

$$D_{r_i} = \delta(x_i), \text{ para todo } 1 \leq i \leq m. \quad (3)$$

Lembrando (1.5) podemos assumir $\delta(x_i) \cap \delta(x_j) = \emptyset$, se $i \neq j$. Logo

$$D_{r_i} \cap D_{r_j} = \emptyset, \text{ se } i \neq j \quad (4).$$

De (1) e (3) vem:

$$D \subset \bigcup_{i=1}^m D_{r_i}. \quad (5)$$

Relembrando (1.7.i), existe $1 \leq n \leq m$, tal que

$$D = \bigcup_{i=1}^n D_{r_i}. \quad (6)$$

Os itens (2),(4) e (6) mostram-nos que as condições da definição (2.1) estão satisfeitas, e (3) mostra que a divisão é δ -fina, completando a prova do teorema. ■

Definição 2.5. Sejam $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $\mathcal{D} = \{(x_1, D_{r_1}), \dots, (x_n, D_{r_n})\}$ uma divisão marcada de D . A *soma de Riemann de f em relação a $\mathcal{D}$* , $S(f, \mathcal{D})$, é definida por $S(f, \mathcal{D}) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot r_i$.

As ferramentas necessárias para a definição da integral de Kurzweil-Henstock estão disponíveis. Definamos essa integral.

Definição 2.6. Diz-se que uma função $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ é *Kurzweil-Henstock integrável em D* se existe um número real I satisfazendo a condição: para cada $\varepsilon > 0$ existe um gauge $\delta: D \rightarrow \Lambda$ tal que para toda $\mathcal{D} << \delta$ tem-se $|S(f, \mathcal{D}) - I| < \varepsilon$.

Teorema 2.7. Se f é uma função Kurzweil-Henstock integrável em D , então o elemento $I \in \mathbb{R}$ que satisfaz a definição acima é único.

Prova. Dado $\varepsilon > 0$, sejam I e J números reais, δ_1 e δ_2 gauges definidos em D tais que quaisquer que sejam $\mathcal{D}_1 \ll \delta_1$ e $\mathcal{D}_2 \ll \delta_2$ são válidas as desigualdades

$$|S(f, \mathcal{D}_1) - I| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad |S(f, \mathcal{D}_2) - J| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

Definamos $\delta(x) = \delta_1(x) \cap \delta_2(x)$, para todo $x \in D$. É claro que δ é um gauge em D e que toda divisão $\mathcal{D} \ll \delta$ é simultaneamente δ_1 e δ_2 -finas. Portanto, ambas as desigualdades de (1) são válidas para $\mathcal{D}$. Segue-se

$$|I - J| \leq |I - S(f, \mathcal{D}) + S(f, \mathcal{D}) - J| \leq |I - S(f, \mathcal{D})| + |S(f, \mathcal{D}) - J| < \varepsilon$$

e da arbitrariedade de ε , $I = J$. ■

Notações 2.8. O elemento $I \in \mathbb{R}$ que satisfaz a definição acima é chamado de *integral de Kurzweil-Henstock de f em D* e é denotado por $\int_D f$. Se a integral de f em D existe diremos que f é *integrável em D* . O conjunto de todas as funções integráveis em D será denotado por $\mathbb{KH}(D)$.

Exemplo 2.9. (Uma função constante é integrável) Seja $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$, para todo $x \in D$. Então $f \in \mathbb{KH}(D)$ e $\int_D f = kr$

Prova. De fato, sejam $\varepsilon > 0$ e δ um gauge arbitrário. Então, qualquer que seja $\mathcal{D} = \{(x_1, D_{r_1}), \dots, (x_n, D_{r_n})\} \ll \delta$ e, lembrando o teorema (1.29), temos

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot r_i - kr \right| = \left| \sum_{i=1}^n k \cdot r_i - kr \right| = \left| k \cdot \left[\sum_{i=1}^n r_i - r \right] \right| = 0.$$

Decorrem desse exemplo: $\int_{\mathbb{Z}_p} \chi_{\mathbb{Z}_p} = 1$ e $\int_D \chi_D = r$. ◇

Exemplo 2.10. Mostremos que dado um disco $D_s \subset D$, a função χ_{D_s} é integrável em D e $\int_D \chi_{D_s} = s$.

Sejam $\varepsilon > 0$, δ um gauge arbitrário e $\mathcal{D} = \{(x_1, D_{r_1}), \dots, (x_n, D_{r_n})\} < \delta$.

De $D_s \subset \bigcup_{i=1}^n D_{r_i}$ segue-se, por (1.7) que existem $i(1), \dots, i(m)$, tais que

$$D_s = \bigcup_{j=1}^m D_{r_{i(j)}}$$

e, por (1.29)

$$\sum_{j=1}^m r_{i(j)} = s.$$

Logo,

$$\left| \sum_{i=1}^n \chi_{D_s}(x_i) \cdot r_i - s \right| = \left| \sum_{j=1}^m \chi_{D_s}(x_{i(j)}) \cdot r_{i(j)} - s \right| = |s - s| = 0 < \varepsilon,$$

verificando a afirmação. $\diamond$

Exemplo 2.11. Seja $x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot 3^k \in \mathbb{Z}_3$. Na expansão triádica de x seja $j = \min \{k \geq 0: a_k = 2\}$.

Isso posto, fixemos $n \geq 0$ e definamos a função

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^j}{j+1} \cdot \frac{3^{j+1}}{2^j} & , \text{ se } j \leq n; \\ 0 & , \text{ nos demais pontos.} \end{cases}$$

Mostremos que f_n é integrável e $\int_D f_n = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j+1}$.

Dado $\varepsilon > 0$ podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\varepsilon < 1$.

Seja $A = \{x = a_0 \cdot 3^0 + \dots + 2 \cdot 3^j + a_{j+1} \cdot 3^{j+1} + \dots \in \mathbb{Z}_3: j \leq n\}$

É fácil verificar que A é dado pela reunião de todos os discos com centro em um ponto da forma $x = a_0 \cdot 3^0 + \dots + 2 \cdot 3^j + a_{j+1} \cdot 3^{j+1} + \dots$, com $j \leq n$ e raio $3^{-(j+1)}$. Além disso também podemos provar que:

$$D_{3^{-(j_1+1)}}\left(\sum_{\substack{k=0 \\ j_1 \leq n}}^{\infty} a_k \cdot 3^k\right) \cap D_{3^{-(j_2+1)}}\left(\sum_{\substack{k=0 \\ j_2 \leq n}}^{\infty} b_k \cdot 3^k\right) = \emptyset$$

se $a_k \neq b_k$ para algum $k \leq \min\{j_1, j_2\}$. Mais ainda, também podemos verificar que se $y \notin A$, a bola aberta $B_{3^{-n}}(y) = D_{3^{-(n+1)}}$ não contém nenhum número tendo o algarismo 2 na posição $j \leq n$. De fato, se $z \in B_{3^{-n}}(y)$ e z possui o algarismo 2 na posição $j \leq n$ então $3^{-n} > |z - x|_p = 3^{-j} \geq 3^{-n}$, que é uma contradição.

Com esses dados às mãos definamos o gauge δ em $\mathbb{Z}_3$ por

$$\delta(x) = \begin{cases} B_{3^{-j}}(x) = D_{3^{-(j+1)}}(x) & \text{se } x \in A; \\ B_{3^{-n}}(x) = D_{3^{-(n+1)}}(x) & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Para toda $\mathcal{D} = \{(x_i, D_{r_i}) : i = 1, \dots, m\} \ll \delta$ temos: se $x_i \notin A$ então $f_n(x_i) = 0$. Logo a soma de Riemann de f_n reduz-se aos pontos pertencentes a A . Pelo exposto acima os discos de raio $3^{-(j+1)}$, centrados em pontos com $j \leq n$ somente podem ser cobertos por discos centrados em pontos da mesma forma e a soma dos raios desses discos, conforme (1.29) é $3^{-(j+1)}$. Por outro lado a quantidade de discos, dois a dois disjuntos, centrados em pontos da forma $a_0 \cdot 3^0 + \dots + 2 \cdot 3^j + a_{j+1} \cdot 3^{j+1} + \dots$ é 2^j . Segue-se:

$$\sum_{j=0}^n \sum_{i \leq n} f(x_i) r_i = \sum_{j=0}^n 2^j \frac{(-1)^j}{j+1} \cdot \frac{3^{j+1}}{2^j} \cdot 3^{-(j+1)} = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j+1}$$

Logo, para todo $\varepsilon > 0$, tomamos δ o gauge acima. Assim, para toda $\mathcal{D} \ll \delta$ temos

$$\left| S(f_n, \mathcal{D}) - \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j+1} \right| = 0 < \varepsilon$$

Portanto f_n é integrável e $\int_D f_n = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j+1}$. $\diamond$

2.2 A integral como funcional linear

O teorema a seguir mostrará que $\mathbb{KH}(D)$, com a definição usual de soma e produto por um escalar, é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais. Também verificaremos que o funcional $f \mapsto \int_D f$ é linear e positivo.

Teorema 2.12. (linearidade e positividade). Sejam f e g integráveis em D . Então,

- (i) $f + g$ é integrável em D e $\int_D (f + g) = \int_D f + \int_D g$;
- (ii) af é integrável em D , para todo $a \in \mathbb{R}$, e $\int_D (af) = a \cdot \int_D f$;
- (iii) se $f \geq 0$, para todo $x \in D$, então $\int_D f \geq 0$.

Prova. Decorre da hipótese que dado $\varepsilon > 0$ existem gauges δ_1 e δ_2 tais que, quaisquer que sejam as divisões $\mathcal{D}_1 \ll \delta_1$ e $\mathcal{D}_2 \ll \delta_2$, tem-se:

$$\left| S(f, \mathcal{D}_1) - \int_D f \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \left| S(g, \mathcal{D}_2) - \int_D g \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Definamos o gauge $\delta(x) = \delta_1(x) \cap \delta_2(x)$, para todo $x \in D$. Logo, qualquer que seja a divisão $\mathcal{D} \ll \delta$ temos que $\mathcal{D} \ll \delta_1$ e $\mathcal{D} \ll \delta_2$. Portanto,

$$\begin{aligned} |S(f + g, \mathcal{D}) - [\int_D f + \int_D g]| &= |S(f, \mathcal{D}) - \int_D f + S(g, \mathcal{D}) - \int_D g| \\ &\leq |S(f, \mathcal{D}) - \int_D f| + |S(g, \mathcal{D}) - \int_D g| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

mostrando que $f + g$ é integrável e $\int_D (f + g) = \int_D f + \int_D g$. Isso encerra a prova de (i).

Para a prova de (ii) consideremos inicialmente $a = 0$. Logo $af = 0$ e, por (2.9) a função é integrável e a igualdade em (ii) é válida.

Admitamos $a \neq 0$. Logo $|a| \neq 0$.

Da hipótese, dado $\varepsilon > 0$ existe um gauge δ tal que para toda divisão $\mathcal{D} \ll \delta$ tem-se

$$\left| S(f, \mathcal{D}) - \int_D f \right| < \frac{\varepsilon}{|a|}$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} |S(af, \mathcal{D}) - a \cdot \int_D f| &= |a \cdot [S(f, \mathcal{D}) - \int_D f]| \\ &= |a| \cdot |S(f, \mathcal{D}) - \int_D f| \\ &< |a| \cdot \frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

mostrando que af é integrável em D e $\int_D af = a \int_D f$, e encerrando a prova de (ii).

Para a prova de (iii) consideremos $f > 0$. Então, para toda divisão marcada $\mathcal{D}$ tem-se $S(f, \mathcal{D}) \geq 0$. Da hipótese, dado $\varepsilon > 0$ seja δ o gauge que satisfaz a definição da integral. Portanto dada $\mathcal{D} \ll \delta$ tem-se

$$\left| S(f, \mathcal{D}) - \int_D f \right| < \varepsilon \Rightarrow 0 \leq S(f, \mathcal{D}) < \int_D f + \varepsilon,$$

para todo $\varepsilon > 0$. A conclusão segue da arbitrariedade de ε . ■

Corolário 2.13. Se $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ são funções integráveis em D e $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in D$, então $\int_D f \leq \int_D g$.

Prova. Segue de $\int_D (f - g) \geq 0$, aplicando o teorema anterior. ■

Corolário 2.14. Se f e $|f|$ são integráveis em D , então $|\int_D f| \leq \int_D |f|$.

Prova. Segue de $-|f| \leq f \leq |f|$ e aplicando o corolário anterior. ■

2.3 O Critério de Cauchy

O próximo teorema estabelece o critério de Cauchy para a integral de Kurzweil-Henstock. Essa condição apresenta as mesmas vantagens oferecidas pelo critério de Cauchy para as seqüências, isto é, permite-nos concluir se uma função é integrável sem a necessidade de conhecermos o seu valor.

Teorema 2.15. (Critério de Cauchy) Seja $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. A função f é integrável em D se e somente se, dado $\varepsilon > 0$, existe um gauge δ tal que, quaisquer que sejam as divisões marcadas δ -finas $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$, tem-se $|S(f, \mathcal{D}_1) - S(f, \mathcal{D}_2)| < \varepsilon$.

Prova. Necessária. De fato, dado $\varepsilon > 0$, sejam δ o gauge e $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$, divisões marcadas δ -finas de D , satisfazendo

$$\left| S(f, \mathcal{D}_1) - \int_D f \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \left| S(f, \mathcal{D}_2) - \int_D f \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Segue-se

$$|S(f, \mathcal{D}_1) - S(f, \mathcal{D}_2)| \leq \left| S(f, \mathcal{D}_1) - \int_D f \right| + \left| S(f, \mathcal{D}_2) - \int_D f \right| < \varepsilon.$$

verificando a condição necessária.

Suficiente. Para cada $n > 1$, tomemos δ_n , gauge sobre D tal que quaisquer que sejam as divisões marcada δ_n -finas, $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ tenhamos

$$|S(f, \mathcal{D}_1) - S(f, \mathcal{D}_2)| < \frac{1}{n}$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\delta_{n+1}(x) \subset \delta_n(x)$, para todo $x \in D$ e todo $n \geq 1$.

Designando por $\Gamma_n = \{S(f, \mathcal{D}): \mathcal{D} \ll \delta_n\}$ e escolhendo, para cada $n \geq 1$, $\mathcal{D}_n$ satisfazendo $S(f, \mathcal{D}_n) \in \Gamma_n$ temos,

$$|S(f, \mathcal{D}_m) - S(f, \mathcal{D}_n)| < \frac{1}{n}$$

para todo $m > n$.

Portanto a seqüência $(S(f, \mathcal{D}_n))_{n \geq 1}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$.

A completude de $\mathbb{R}$ acarreta a existência de $I \in \mathbb{R}$ tal que, para um dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \geq 1$ satisfazendo $|I - S(f, \mathcal{D}_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $n \geq n_0$.

Escolhendo $m \geq \max \left\{ n_0, \frac{2}{\varepsilon} \right\}$, segue-se, para toda $\mathcal{D} \ll \delta_m$,

$$\begin{aligned} |S(f, \mathcal{D}) - I| &= |S(f, \mathcal{D}) - S(f, \mathcal{D}_m) + S(f, \mathcal{D}_m) - I| \\ &\leq |S(f, \mathcal{D}) - S(f, \mathcal{D}_m)| + |S(f, \mathcal{D}_m) - I| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

mostrando que f é integrável. ■

2.4 A integral como função de discos

Teorema 2.16. Se f é integrável em D e E é um disco contido em D , então

- (i) f (restrita a E) é integrável em E ;
- (ii) $f\chi_E$ é integrável em D ;
- (iii) $\int_D f\chi_E = \int_E f$

Prova. (i) A compacidade de D e usando (1.23), existem discos $F_1, \dots, F_n$, dois a dois disjuntos, verificando $D = E \cup \left(\bigcup_{j=1}^n F_j \right)$.

Dado $\varepsilon > 0$ temos, por hipótese, que existe um gauge δ em D satisfazendo o critério de Cauchy.

Seja $\bar{\delta}$ um gauge em E definido por $\bar{\delta}(x) = \delta(x)$, para todo $x \in E$, e sejam $\overline{\mathcal{D}}_1, \overline{\mathcal{D}}_2 << \bar{\delta}$.

Para cada $1 \leq j \leq n$, definamos o gauge δ^j em F_j por $\delta^j(x) = \delta(x)$, para cada $x \in F_j$, e tomemos (em F_j) as divisões $\mathcal{D}^j << \delta^j$

Segue-se que

$$\mathcal{D}_1 = \overline{\mathcal{D}}_1 \cup \mathcal{D}^1 \cup \dots \cup \mathcal{D}^n \quad \text{e} \quad \mathcal{D}_2 = \overline{\mathcal{D}}_2 \cup \mathcal{D}^1 \cup \dots \cup \mathcal{D}^n$$

são divisões marcadas δ -finas de D . Portanto

$$\begin{aligned} |S(f, \overline{\mathcal{D}}_1) - S(f, \overline{\mathcal{D}}_2)| &= \left| S(f, \overline{\mathcal{D}}_1) + \sum_{k=1}^n S(f, \mathcal{D}^k) - \sum_{k=1}^n S(f, \mathcal{D}^k) - S(f, \overline{\mathcal{D}}_2) \right| \\ &= |S(f, \overline{\mathcal{D}}_1 \cup \mathcal{D}^1 \cup \dots \cup \mathcal{D}^n) - S(f, \overline{\mathcal{D}}_2 \cup \mathcal{D}^1 \cup \dots \cup \mathcal{D}^n)| \\ &= |S(f, \mathcal{D}_1) - S(f, \mathcal{D}_2)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Pelo Critério de Cauchy, f é integrável em E , provando (i).

As funções f e $f\chi_E$ são iguais em E . Então, por (i), $f\chi_E$ é integrável em E e $\int_E f\chi_E = \int_E f$.

Provemos que $f\chi_E$ é integrável em D .

Como $f\chi_E$ é integrável em E , dado $\varepsilon > 0$ existe um gauge $\bar{\delta}$ tal que para toda $\mathcal{D}_1 << \bar{\delta}$ temos $|\int_E f - S(f, \mathcal{D}_1)| < \varepsilon$.

Definamos o gauge δ em D por :

$$\delta(x) = \begin{cases} \bar{\delta}(x) & \text{se } x \in E; \\ F_j & \text{se } x \in D - E. \end{cases}$$

Agora, dada uma divisão

$$\mathcal{D} = \{(x_1, E_{r_1}), \dots, (x_n, E_{r_n}), (z_1, F_{s_1}), \dots, (z_m, F_{s_m})\} << \delta,$$

com $x_1, \dots, x_n \in E$ e $z_1, \dots, z_m \in D - E$, vem,

$$\begin{aligned} |S(f\chi_E, \mathcal{D}) - \int_E f| &= \left| \sum_{i=1}^n f(x_i)r_i + \sum_{j=1}^m f(z_j)s_j - \int_E f \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n f(x_i)r_i - \int_E f \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

provando (ii) e (iii). ■

Corolário 2.17. Se $\{D_1, \dots, D_n\}$ é uma divisão de D e f é integrável em D , então f é integrável em D_i , para cada $1 \leq i \leq n$ e $\int_D f = \sum_{i=1}^n \int_{D_i} f$.

Prova. Por (2.16) f é integrável em cada um dos discos $D_1, \dots, D_n$. Agora, como $f = \sum_{i=1}^n f\chi_{D_i}$ temos, usando (2.16) e (2.12.i),

$$\int_D f = \int_D \sum_{i=1}^n f\chi_{D_i} = \sum_{i=1}^n \int_D f\chi_{D_i} = \sum_{i=1}^n \int_{D_i} f \quad \blacksquare$$

Exemplo 2.18. Segue-se dos teoremas acima e do exemplo (2.9) que se E é um disco de raio s contido em D , então $\int_D \chi_E = \int_E \chi_E = s$ ◇

Teorema 2.19. Se E é um disco contido em D e f é integrável em E , então a função $f\chi_E$, prolongamento de f em D , é integrável em D e $\int_D f\chi_E = \int_E f$.

Prova. Se $E = D$ nada a provar. Admitamos $E \neq D$.

Dado $\varepsilon > 0$ seja $\bar{\delta}$ um gauge em E tal que, para toda $\mathcal{D}_1 << \bar{\delta}$, tenhamos

$$\left| S(f, \mathcal{D}_1) - \int_E f \right| < \varepsilon \quad (1)$$

Por (1.23), sejam $F_1, \dots, F_m$, dois a dois disjuntos, satisfazendo

$$D = E \cup F_1 \cup \dots \cup F_m$$

Por (1.22), $F_1, \dots, F_m$ são abertos. Assim podemos definir em D o gauge

$$\delta(x) = \begin{cases} \bar{\delta}(x) & , \text{se } x \in E; \\ F_j & , \text{se } x \in F_j, \ 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Logo, para toda $\mathcal{D} = \{(x_1, r_1), \dots, (x_n, r_n)\} \ll \delta$ temos:

$$\begin{aligned} |S(f\chi_E, \mathcal{D}) - \int_E f| &= \left| \sum_{x_i \in E} f\chi_E(x_i) \cdot r_i + \sum_{\substack{x_i \in F_j \\ 1 \leq j \leq m}} f\chi_E(x_i) \cdot r_i - \int_E f \right| \\ &= \left| S(f, \mathcal{D}_1) - \int_E f \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

encerrando a prova do teorema. ■

Corolário 2.20. Se $D_1, \dots, D_n$ são discos contidos em D , dois a dois disjuntos, tais que $\bigcup_{i=1}^n D_i = D$ e f é integrável em D_i , para cada $1 \leq i \leq n$, então f é integrável em D e $\int_D f = \sum_{i=1}^n \int_{D_i} f$.

Prova. Para cada $x \in D$, temos $f(x) = \sum_{i=1}^n (f\chi_{D_i})(x)$. Segue-se, por (2.12.i) que f é integrável e

$$\int_D f = \int_D \sum_{i=1}^n (f\chi_{D_i}) = \sum_{i=1}^n \int_D f\chi_{D_i} = \sum_{i=1}^n \int_{D_i} f,$$

encerrando a prova do teorema. ■

Teorema 2.21. Seja $f \geq 0$ integrável em D . Se $D_1, \dots, D_n$ são discos contidos em D , dois a dois disjuntos, então $0 \leq \sum_{i=1}^n \int_{D_i} f \leq \int_D f$.

Prova. Por (1.23) existem discos $F_1, \dots, F_m$ verificando

$$D = D_1 \bigcup \dots \bigcup D_n \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^m F_j \right).$$

Por (2.16) f é integrável em D_i , para cada $1 \leq i \leq n$, e em F_j , para cada $1 \leq j \leq m$. Além disso, por hipótese, $f \geq 0$, então por (2.12.iii), $\int_{D_i} f \geq 0$ e $\int_{F_j} f \geq 0$, para todo i e todo j . Segue-se, pelo teorema anterior, que

$$0 \leq \sum_{i=1}^n \int_{D_i} f \leq \sum_{i=1}^n \int_{D_i} f + \sum_{j=1}^m \int_{F_j} f = \int_D f$$

completando a prova do teorema. ■

Definição 2.22. Sejam E um subconjunto e f uma função definida em D .

Se a função $f\chi_E \in \mathbb{KH}(D)$ definimos $\int_E f = \int_D f\chi_E$.

2.5 A integral e as funções contínuas

Quando se estuda integrabilidade de funções, de imediato questiona-se a integrabilidade das funções contínuas. No que segue verificaremos que as mesmas são integráveis.

Lema 2.23. Seja $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e suponhamos que para cada $\varepsilon > 0$ existam funções $g_\varepsilon, h_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ integráveis, satisfazendo as condições

- (i) $g_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq h_\varepsilon(x)$, para todo $x \in D$,
- (ii) $\int_D (h_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Então, f é integrável em D .

Prova. Da hipótese segue-se que dado $\varepsilon > 0$ existem os gauges δ_1 e δ_2 tais que quaisquer que sejam as divisões $\mathcal{D}_1 \ll \delta_1$ e $\mathcal{D}_2 \ll \delta_2$ tem-se

$$\left| S(g_\varepsilon, \mathcal{D}_1) - \int_D g_\varepsilon \right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{e} \quad \left| S(h_\varepsilon, \mathcal{D}_2) - \int_D h_\varepsilon \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Definamos, em D , o gauge $\delta(x) = \delta_1(x) \cap \delta_2(x)$, para todo x . Então, qualquer que seja $\mathcal{D} \ll \delta$ temos que $\mathcal{D}$ é δ_1 e δ_2 — fina e, portanto,

$$\int_D g_\varepsilon - \frac{\varepsilon}{4} < S(g_\varepsilon, \mathcal{D}) \leq S(f, \mathcal{D}) \leq S(h_\varepsilon, \mathcal{D}) < \int_D h_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{4}$$

Vem daí que, se $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ são divisões quaisquer de D , δ -finas, então, usando a desigualdade acima,

$$-\varepsilon < -\int_D (h_\varepsilon - g_\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} \leq S(f, \mathcal{D}_1) - S(f, \mathcal{D}_2) \leq \int_D (h_\varepsilon - g_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

mostrando que $|S(f, \mathcal{D}_1) - S(f, \mathcal{D}_2)| < \varepsilon$ e, portanto, f é integrável pelo Critério de Cauchy. ■

Teorema 2.24. Se $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então f é integrável.

Prova. A função f é contínua no compacto D , logo uniformemente contínua em D . Dado $\varepsilon > 0$, e lembrando que o raio de D é r , existe um $n \geq 0$ satisfazendo a condição

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{r}, \quad \text{sempre que } |x - y|_p < p^{-n} \leq r$$

quaisquer que sejam $x, y \in D$.

Seja $t \geq n$ um número natural. Pelo corolário (1.28) existem $\lambda = p^t \cdot r$ discos, $E_1, \dots, E_\lambda$, dois a dois disjuntos e de raio p^{-t} satisfazendo $\bigcup_{j=1}^{\lambda} E_j = D$.

Seja E_j um de tais discos e sejam

$$m_{E_j} = \min \{f(x): x \in E_j\} \quad \text{e} \quad M_{E_j} = \max \{f(x): x \in E_j\}$$

Pelo exemplo (2.9) as funções $m_{E_j}\chi_{E_j}$ e $M_{E_j}\chi_{E_j}$ são integráveis em E_j , para todo $1 \leq j \leq \lambda$. Por (2.20) as funções $g = \sum_{j=1}^{\lambda} m_{E_j}\chi_{E_j}$ e $h = \sum_{j=1}^{\lambda} M_{E_j}\chi_{E_j}$ são integráveis em D com

$$\int_D \sum_{j=1}^{\lambda} m_{E_j}\chi_{E_j} = \sum_{j=1}^{\lambda} m_{E_j}p^{-t} \quad \text{e} \quad \int_D \sum_{j=1}^{\lambda} M_{E_j}\chi_{E_j} = \sum_{j=1}^{\lambda} M_{E_j}p^{-t}$$

Sejam δ_1 e δ_2 gauges definidos em D tais que, quaisquer que sejam as divisões $\mathcal{D}_1 \ll \delta_1$ e $\mathcal{D}_2 \ll \delta_2$,

$$\left| S(g, \mathcal{D}_1) - \sum_{j=1}^{\lambda} m_{E_j}p^{-t} \right| < \varepsilon \quad \text{e} \quad \left| S(h, \mathcal{D}_2) - \sum_{j=1}^{\lambda} M_{E_j}p^{-t} \right| < \varepsilon$$

Definamos o gauge $\delta(x) = \delta_1(x) \cap \delta_2(x)$, para todo $x \in D$. Então, se $\mathcal{D}_1 = \{(x_1, D_{r_1}), \dots, (x_n, D_{r_n})\}$ e $\mathcal{D}_2 = \{(y_1, D_{s_1}), \dots, (y_m, D_{s_m})\}$ são divisões marcadas δ -finas, temos

$$\begin{aligned} |S(f, \mathcal{D}_1) - S(f, \mathcal{D}_2)| &= \left| \sum_{i=1}^n f(x_i) r_i - \sum_{k=1}^m f(y_k) s_k \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^n f(x_i) r_i - \sum_{j=1}^{\lambda} m_{E_j} p^{-t} \right| + \left| \sum_{j=1}^{\lambda} M_{E_j} p^{-t} - \sum_{k=1}^m f(y_k) s_k \right| \\ &\quad + \left| \sum_{j=1}^{\lambda} M_{E_j} p^{-t} - \sum_{j=1}^{\lambda} m_{E_j} p^{-t} \right| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \left| p^{-t} \sum_{j=1}^{\lambda} |M_{E_j} - m_{E_j}| \right| < 2\varepsilon + p^{-t} \cdot \lambda \cdot \frac{\varepsilon}{r} = 3\varepsilon \end{aligned}$$

provando que f é integrável em D . ■

Teorema 2.25. Seja $f > 0$ integrável em D . Se g é contínua em D , então fg é integrável em D .

Prova. De $f > 0$ segue-se que $\int_D f > 0$.

De D compacto segue-se que g é uniformemente contínua. Logo dado $\varepsilon > 0$ existe um $n \in \mathbb{Z}$ tal que $p^n < r$ e quaisquer que sejam x e y em D , vale

$$|x - y|_p < p^n \Rightarrow g(y) - \frac{\varepsilon}{2 \int_D f} < g(x) < g(y) + \frac{\varepsilon}{2 \int_D f} \quad (1)$$

Por (1.28) existem $m = p^{-n} \cdot r$ discos de raio p^n cobrindo D . Sejam $D_1, \dots, D_m$ os discos que constituem essa divisão e sejam $x_1, \dots, x_m$ satisfazendo $x_i \in D_i$ para cada i .

Definamos as funções

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^m \left(g(x_i) - \frac{\varepsilon}{2 \int_D f} \right) \cdot \chi_{D_i}(x)$$

e

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^m \left(g(x_i) + \frac{\varepsilon}{2 \int_D f} \right) \cdot \chi_{D_i}(x)$$

Segue-se de (1) que, para todo $x \in D$,

$$\phi(x) \leq g(x) \leq \psi(x)$$

e, como $f > 0$, então

$$f\phi \leq fg \leq f\psi$$

para todo $x \in D$.

Por (2.10) χ_{D_i} é integrável em D , para cada $1 \leq i \leq m$; por (2.16.i) e (ii) $f\phi$ e $f\psi$ são integráveis em D e, usando (2.17),

$$\int_D (f\psi - f\phi) = \int_D \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon}{\int_D f} f \chi_{D_i} = \frac{\varepsilon}{\int_D f} \int_D f = \varepsilon \quad (2)$$

Com (1) e (2) as hipóteses de (2.23) estão satisfeitas e fg é integrável em D . ■

2.6 O Lema de Henstock

O Lema de Henstock afirma que se δ é um gauge em D tal que qualquer divisão marcada δ -fina nos dá uma boa aproximação da integral por somas de Riemann, então essa divisão marcada também é uma boa aproximação da integral por somas de Riemann para a reunião de discos finitos caracterizados pelo gauge δ .

Iniciemos esta seção com uma definição

Definição 2.26. Seja δ um gauge em D . Uma coleção finita de pares

$$\mathcal{D} = \{(x_1, D_{r_1}), \dots, (x_n, D_{r_n})\}$$

satisfazendo:

- (a) $x_i \in D_{r_i} \subset \delta(x_i)$, para todo $1 \leq i \leq n$;
- (b) $D_{r_i} \cap D_{r_j} = \emptyset$, se $i \neq j$;
- (c) $\bigcup_{i=1}^n D_{r_i} \subset D$.

será chamada de *divisão marcada parcial δ -fina* de D e será denotada por $\mathcal{E} \lll \delta$.

É claro que toda divisão marcada δ -fina é uma divisão marcada parcial de D .

Lema 2.27. (Lema de Henstock) Sejam f integrável em D e δ o gauge correspondente a um dado $\varepsilon > 0$ na definição de integral. Então, qualquer que seja $\mathcal{D} = \{(x_1, D_{r_1}), \dots, (x_n, D_{r_n})\} \lll \delta$, as seguintes condições são válidas:

- (i) $\left| \sum_{i=1}^n \left(f(x_i) r_i - \int_{D_{r_i}} f \right) \right| \leq \varepsilon;$
- (ii) $\sum_{i=1}^n \left| f(x_i) r_i - \int_{D_{r_i}} f \right| \leq 2\varepsilon;$
- (iii) $\sum_{i=1}^n \left| |f(x_i)| r_i - \left| \int_{D_{r_i}} f \right| \right| \leq 2\varepsilon;$

Prova. Pelo Cor.(1.7), sejam $E_1, \dots, E_m$ discos tais que

$$D = \left(\bigcup_{i=1}^n D_{r_i} \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^m E_j \right).$$

Por hipótese f é integrável em D , logo integrável em cada E_j , para cada $1 \leq j \leq m$. Portanto, dado $\sigma > 0$, existe, para cada j , um gauge δ_j tal que se $\mathcal{D}_j$ é uma divisão δ_j -fina de E_j , então

$$\left| S(f, \mathcal{D}_j) - \int_{E_j} f \right| < \frac{\sigma}{2^m} \quad \text{para cada } 1 \leq j \leq m \quad (1)$$

Definindo, em D , o gauge

$$\bar{\delta}(x) = \begin{cases} \delta(x) & , \text{ se } x \in D_{r_i} \quad , 1 \leq i \leq n \\ \delta_j(x) & , \text{ se } x \in E_j \quad , 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

temos que

$$\mathcal{D} = \{(x_1, D_{r_1}), \dots, (x_n, D_{r_n})\} \cup \left(\bigcup_{j=1}^m \mathcal{D}_j \right) << \bar{\delta}$$

e satisfaz

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n \left(f(x_i)r_i - \int_{D_{r_i}} f \right) \right| < \left| \sum_{i=1}^n \left(f(x_i)r_i - \int_{D_{r_i}} f \right) \right| - \sum_{j=1}^m \frac{\sigma}{2^m} + \sigma \\ & < \left| \sum_{i=1}^n \left(f(x_i)r_i - \int_{D_{r_i}} f \right) \right| - \left| \sum_{j=1}^m \left(S(f, \mathcal{D}_j) - \int_{E_j} f \right) \right| + \sigma \\ & \leq \left| \sum_{i=1}^n \left(f(x_i)r_i - \int_{D_{r_i}} f \right) + \sum_{j=1}^m \left(S(f, \mathcal{D}_j) - \int_{E_j} f \right) \right| + \sigma \\ & = \left| S(f, \mathcal{D}) - \int_D f \right| < \varepsilon + \sigma \end{aligned}$$

Como a desigualdade acima é válida para todo $\sigma > 0$, vem

$$\left| \sum_{i=1}^n \left(f(x_i)r_i - \int_{D_{r_i}} f \right) \right| \leq \varepsilon,$$

concluindo a prova de (i).

Para a prova de (ii), sejam A e B os conjuntos dos discos D_{r_i} , $1 \leq i \leq n$, que satisfazem as relações

$$f(x_i)r_i - \int_{D_{r_i}} f \geq 0 \quad \text{e} \quad f(x_i)r_i - \int_{D_{r_i}} f < 0,$$

respectivamente.

Aplicando (i) a cada um dos conjuntos temos

$$\left| \sum_{D_{r_i} \in A} \left(f(x_i)r_i - \int_{D_{r_i}} f \right) \right| \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad \left| \sum_{D_{r_i} \in B} \left(f(x_i)r_i - \int_{D_{r_i}} f \right) \right| \leq \varepsilon.$$

Segue

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left| \left(f(x_i) r_i - \int_{D_{r_i}} f \right) \right| &= \left| \sum_{D_{r_i} \in A} \left(f(x_i) r_i - \int_{D_{r_i}} f \right) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{D_{r_i} \in B} \left(f(x_i) r_i - \int_{D_{r_i}} f \right) \right| \leq 2\varepsilon, \end{aligned}$$

provando (ii).

Aplicando a desigualdade $||x| - |y|| \leq |x - y|$ a (ii), obtemos (iii). ■

Corolário 2.28. Se f é integrável em D e $\int_{D_1} f = 0$, qualquer que seja o disco $D_1 \subset D$. Então $|f|$ é integrável em D e $\int_D |f| = 0$

Prova. Dado $\varepsilon > 0$ seja δ o gauge em D satisfazendo a definição de integral. Então, qualquer que seja $\mathcal{D} = \{(x_1, D_{r_1}), \dots, (x_n, D_{r_n})\} \ll \delta$ temos, por hipótese e por (i) do Lema de Henstock,

$$\left| f(x_i) \cdot r_i - \int_{D_{r_i}} f \right| = |f(x_i)| \cdot r_i$$

para cada $1 \leq i \leq n$.

Segue-se por (ii) do mesmo Lema que

$$2\varepsilon \geq \sum_{i=1}^n \left| f(x_i) r_i - \int_{D_{r_i}} f \right| = \sum_{i=1}^n (|f(x_i)| \cdot r_i),$$

provando que $|f|$ é integrável e sua integral é nula. ■

2.7 As funções absolutamente integráveis

Definição 2.29. Uma função $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de *absolutamente integrável* se f e $|f|$ são integráveis.

O próximo teorema estabelece condições para que uma função integrável seja absolutamente integrável. Nesse teorema denotaremos por Ψ o conjunto de todas as coleções finitas de discos contidos em D , dois a dois disjuntos. É imediato que qualquer divisão de D é um elemento de Ψ .

Teorema 2.30. Sejam f e g funções integráveis em D tais que $|f(x)| \leq g(x)$, para todo $x \in D$. Então,

- (i) $|\int_D f| \leq \int_D g$;
- (ii) $\lambda = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \left| \int_{D_i} f \right| : \{D_1, \dots, D_n\} \in \Psi \right\} \leq \int_D g$,
- (iii) $|f|$ é integrável em D e $\int_D |f| = \lambda \leq \int_D g$.

Prova. (i) Dado $\varepsilon > 0$ seja δ um gauge que satisfaz a definição de integral para as funções f e g , isto é, para toda divisão marcada δ -fina $\mathcal{D}$,

$$\left| S(f, \mathcal{D}) - \int_D f \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \left| S(g, \mathcal{D}) - \int_D g \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Observando que para toda divisão marcada $\mathcal{D}$ é válido $S(|f|, \mathcal{D}) \leq S(g, \mathcal{D})$, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_D f \right| &< \frac{\varepsilon}{2} + |S(f, \mathcal{D})| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |S(|f|, \mathcal{D})| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + |S(g, \mathcal{D})| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left| -\int_D g + S(g, \mathcal{D}) \right| + \left| \int_D g \right| \\ &< \varepsilon + \left| \int_D g \right| \end{aligned}$$

Da arbitrariedade de $\varepsilon > 0$ segue-se que $|\int_D f| \leq \int_D g$, encerrando a prova de (i)

(ii) De (2.16) e (i) temos $|\int_E f| \leq \int_E g$, para todo disco $E \subset D$. Logo, se $D_1, \dots, D_n$ são discos contidos em D , dois a dois disjuntos, então, por (2.21), vem

$$\sum_{i=1}^n \left| \int_{D_i} f \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{D_i} g = \int_D g.$$

Pela definição de supremo, segue-se que

$$\lambda = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \left| \int_{D_i} f \right| : \{D_1, \dots, D_n\} \in \Psi \right\} \leq \int_D g,$$

encerrando a prova de (ii).

(iii) Inicialmente verifiquemos que para cada $\varepsilon > 0$ existe uma divisão $\mathcal{D}$ de D satisfazendo

$$\sum_{i=1}^n \left| \int_{D_i} f \right| > \lambda - \frac{\varepsilon}{5} \quad (1)$$

De fato, pela definição de supremo existe uma divisão $\{D_1, \dots, D_m\} \in \Psi$ tal que (1) é válida. Se $\bigcup_{i=1}^m D_{r_i} \neq D$ então, por (1.23), existem $D_{m+1}, \dots, D_n$ tais que $\bigcup_{i=1}^n D_{r_i} = D$ e $\lambda \geq \sum_{i=1}^n \left| \int_{D_i} f \right| \geq \sum_{i=1}^m \left| \int_{D_i} f \right| > \lambda - \frac{\varepsilon}{5}$, verificando (1).

Seja $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_m\}$ a tal divisão e seja δ_1 um gauge em D satisfazendo a definição da integral para $\frac{\varepsilon}{5}$.

Para cada $x \in D$ existe um único $1 \leq i \leq n$ tal que $x \in D_i$. Assim, recordando (1.5) e (1.6.ii) definamos o gauge δ em D por

$$\delta(x) = \begin{cases} \delta_1(x) & \text{se } \delta_1(x) \subset D_i; \\ D_i & \text{se } D_i \subset \delta_1(x). \end{cases}$$

Qualquer que seja $\mathcal{D}_1 = \{(x_1, D_{r_1}), \dots, (x_m, D_{r_m})\} < \delta$ temos por (1.5.i) que, para cada $1 \leq k \leq m$, existe um único índice i verificando $D_{r_k} \subset D_i$. Pela linearidade da integral,

$$\int_{D_i} f = \sum_{D_{r_k} \subset D_i} \int_{D_{r_k}} f$$

e

$$\left| \int_{D_i} f \right| \leq \sum_{D_{r_k} \subset D_i} \left| \int_{D_{r_k}} f \right|$$

De $\{D_{r_1}, \dots, D_{r_m}\} \in \Psi$ segue

$$\lambda - \frac{\varepsilon}{5} < \sum_{i=1}^n \left| \int_{D_i} f \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{D_{r_k} \subset D_i} \left| \int_{D_{r_k}} f \right| = \sum_{k=1}^m \left| \int_{D_{r_k}} f \right| \leq \lambda \quad (3)$$

Consideremos as divisões $\mathcal{D}_1 = \{(x_1, D_{r_1}), \dots, (x_n, D_{r_n})\} \ll \delta$, $\mathcal{D}_2 = \{(y_1, D_{s_1}), \dots, (y_m, D_{s_m})\} \ll \delta$ e provemos que $S(|f|, \mathcal{D}_1)$ e $S(|f|, \mathcal{D}_2)$ verificam a condição de Cauchy.

De $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ verificarem (3) vem

$$\left| \sum_{i=1}^n \left| \int_{D_{r_i}} f \right| - \sum_{j=1}^m \left| \int_{D_{s_j}} f \right| \right| < \frac{\varepsilon}{5} \quad (4)$$

Pelo Lema de Henstock,

$$\sum_{i=1}^n \left| |f(x_i)| \cdot r_i - \left| \int_{D_{r_i}} f \right| \right| < \frac{2\varepsilon}{5} \quad (5)$$

e

$$\sum_{j=1}^m \left| |f(y_j)| \cdot s_j - \left| \int_{D_{s_j}} f \right| \right| < \frac{2\varepsilon}{5} \quad (6)$$

Portanto, usando (4), (5) e (6), vem

$$\begin{aligned} |S(|f|, \mathcal{D}_1) - S(|f|, \mathcal{D}_2)| &= \left| \sum_{i=1}^n |f(x_i)| \cdot r_i - \sum_{j=1}^m |f(y_j)| \cdot s_j \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^n |f(x_i)| \cdot r_i - \sum_{i=1}^n \left| \int_{D_{r_i}} f \right| + \sum_{j=1}^m \left| \int_{D_{s_j}} f \right| - \sum_{j=1}^m |f(y_j)| \cdot s_j \right| \\ &\quad + \left| \sum_{i=1}^n \left| \int_{D_{r_i}} f \right| - \sum_{j=1}^m \left| \int_{D_{s_j}} f \right| \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| |f(x_i)| \cdot r_i - \left| \int_{D_{r_i}} f \right| \right| + \sum_{j=1}^m \left| |f(y_j)| \cdot s_j - \left| \int_{D_{s_j}} f \right| \right| + \frac{\varepsilon}{5} \\ &< \frac{2\varepsilon}{5} + \frac{2\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon \end{aligned}$$

mostrando que $|f|$ é integrável. ■

Dadas as funções $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$, é usual definirmos as funções $f \vee g$, $f \wedge g: D \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$(f \vee g)(x) = \sup \{f(x), g(x)\}$$

e

$$(f \wedge g)(x) = \inf \{f(x), g(x)\},$$

para todo $x \in D$.

Corolário 2.31. Sejam $f_1, f_2, g, h: D \rightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis. Se, para todo $x \in D$, tem-se $g(x) \leq f_i(x) \leq h(x)$, $i = 1, 2$, então as funções $|f_1 - f_2|$, $f_1 \vee f_2$ e $f_1 \wedge f_2$ são integráveis.

Prova. Para todo $x \in D$, tem-se $|f_1(x) - f_2(x)| \leq h(x) - g(x)$. Como g e h são integráveis, segue-se por (2.12.i) que $h - g \geq 0$ é integrável. Pelo teorema anterior, $|f_1 - f_2|$ é integrável.

Como

$$f_1 \vee f_2 = \frac{1}{2} (f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|)$$

e

$$f_1 \wedge f_2 = \frac{1}{2} (f_1 + f_2 - |f_1 - f_2|),$$

então, por (2.12.i), $f_1 \vee f_2$ e $f_1 \wedge f_2$ são integráveis. ■

Corolário 2.32. Sejam $(f_n)_{n \geq 1}$ uma seqüência de funções integráveis em D .

Se existem $g, h: D \rightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis tais que, para todo $x \in D$ e todo $n \geq 1$, $g(x) \leq f_n(x) \leq h(x)$, então $f_i \vee \dots \vee f_k$ e $f_i \wedge \dots \wedge f_k$ são integráveis em D , para todo $1 \leq i < k$.

Prova. Segue do corolário anterior. ■

Capítulo 3

Teoremas de Convergência

3.1 Conjunto Nulo

Definição 3.1. Diz-se que um subconjunto N de D é um *conjunto nulo* se, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma seqüência de discos $(D_{r_i})_{i \geq 1}$, com $D_{r_i} \subset D$ para todo $i \geq 1$, satisfazendo:

- (i) $N \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} D_{r_i}$;
- (ii) $\sum_{i=1}^{\infty} r_i < \varepsilon$.

Observação 3.2. Considerando (1.5) podemos sempre assumir que os discos da seqüência são dois a dois disjuntos.

Exemplo 3.3. O conjunto dos números naturais é um conjunto nulo em $\mathbb{Z}_p$.

Em $\mathbb{Z}_p$, todo número natural é da forma $\sum_{i=0}^n a_i p^i$, com $a_n \neq 0$. Assim, para cada $n \geq 0$, a quantidade de números naturais tais que $a_n \neq 0$ é dada

por

$$p^n(p-1) \tag{1}$$

Isso posto, dado $\varepsilon > 0$, seja $m \in \mathbb{N}$ satisfazendo a condição

$$\frac{1}{p^m} \cdot \frac{p}{p-1} < \varepsilon. \tag{2}$$

A cada número $\sum_{i=0}^n a_i p^i$, (é claro $a_n \neq 0$) associemos um disco contendo esse número e de raio $\frac{1}{p^{m+2n+1}}$.

Como para cada n a quantidade de discos com tais raios é dado por (1), a soma dos raios desses discos é

$$\frac{p^n(p-1)}{p^{m+2n+1}} \leq \frac{1}{p^{m+n}},$$

para cada n .

Logo, usando (2), a soma dos raios de todos os discos será limitada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{m+n}} = \frac{1}{p^m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{1}{p^m} \cdot \frac{p}{p-1} < \varepsilon.$$

satisfazendo (3.1.ii).

Pela construção dos discos é claro que (3.1.i) está verificada. Assim $\mathbb{N}$ é um conjunto nulo e, relembremos, denso em $\mathbb{Z}_p$. $\diamond$

Definição 3.4. Diz-se que uma propriedade P é válida *quase sempre* para os elementos de um conjunto, e escreve-se P q.s., se o conjunto dos pontos para os quais ela não é válida é um *conjunto nulo*.

Teorema 3.5. Se $f = g$ q.s. e $g \in \mathbb{KH}(D)$ então $f \in \mathbb{KH}(D)$ e $\int_D f = \int_D g$.

Prova. Inicialmente suponhamos que $g = 0$ em D e seja $N \subset D$ tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in N$. Dado $\varepsilon > 0$ seja $E_{s_1}, \dots, E_{s_m}, \dots$, uma seqüência de discos contidos em D , dois a dois disjuntos, satisfazendo (i) e (ii) de (3.1) para esse ε .

Para cada $j \geq 1$ e cada $x \in N \cap E_{s_j}$, $1 \leq j \leq m$, seja

$$m(x) = \frac{s_j}{|f(x)| + 1}$$

Definamos, em D , o gauge δ por

$$\delta(x) = \begin{cases} B_1(x) & , \text{ se } x \notin N; \\ B_{m(x)}(x) & , \text{ se } x \in N. \end{cases}$$

Então, dada $\mathcal{D} = \{(x_1, D_{r_1}), \dots, (x_n, D_{r_n})\} \ll \delta$ e observando que $r_j < m(x_j)$, se $x_j \in N$, temos

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n f(x_i) r_i \right| &= \left| \sum_{x_i \notin N} f(x_i) r_i + \sum_{x_j \in N} f(x_j) r_j \right| = \left| \sum_{x \in N} f(x) r_j \right| \\ &\leq \sum_{x_j \in N} \left(|f(x_j)| \cdot \frac{s_j}{|f(x_j)| + 1} \right) < \sum_{x_j \in N} s_j < \sum_{j=1}^{\infty} s_j < \varepsilon \end{aligned}$$

provando o teorema para esse caso.

Agora, se $g \neq 0$ consideramos a função $h = f - g$. Temos $h = 0$ q.s. e, como $f = g + (f - g)$, a conclusão segue usando (2.12.i). ■

Corolário 3.6. Se N é um conjunto nulo, então χ_N é integrável em D e $\int_D \chi_N = 0$.

Prova. Imediata. ■

3.2 Teoremas de Convergência

A seguir apresentamos os teoremas de convergência. Esses teoremas fornecem condições suficientes para a permuta das operações de *limite* e *integral*.

Teorema 3.7. Seja $(f_n)_{n \geq 1}$ uma seqüência de funções integráveis definidas em D satisfazendo:

- (i) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ q.s.;
- (ii) dado $\varepsilon > 0$, existe um gauge δ em D tal que a cada $\mathcal{D} \ll \delta$ está associado um número natural $n_{\mathcal{D}}$ tal que, para todo $n \geq n_{\mathcal{D}}$ a desigualdade

$$\left| S(f_n, \mathcal{D}) - \int_D f_n \right| < \varepsilon \quad (*)$$

está satisfeita.

Nessas condições, f é integrável em D e $\int_D f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n$

Prova. Suponhamos a condição (i) satisfeita para todo $x \in D$. Provemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n$ existe e é finito.

Dado $\varepsilon > 0$, sejam δ um gauge e $\mathcal{E} = \{(x_i, D_{r_i}) : i = 1, \dots, s\} \ll \delta$, fixada, e $n_{\mathcal{E}}$ satisfazendo (ii).

Dados $m, n \geq n_{\mathcal{E}}$ temos

$$\begin{aligned} \left| \int_D f_m - \int_D f_n \right| &\leq \left| \int_D f_m - \sum_{i=1}^s f_m(x_i) \cdot r_i \right| + \left| \sum_{i=1}^s f_m(x_i) \cdot r_i - \sum_{i=1}^s f_n(x_i) \cdot r_i \right| \\ &\quad + \left| \sum_{i=1}^s f_n(x_i) \cdot r_i - \int_D f_n \right| \\ &< 2 \cdot \varepsilon + \left| \sum_{i=1}^s [(f_m(x_i) - f_n(x_i)) \cdot r_i] \right| \end{aligned} \quad (1)$$

Por (i), para cada $1 \leq i \leq s$ existe um $n(x_i)$ tal que

$$|f_m(x_i) - f_n(x_i)| < \frac{\varepsilon}{s \cdot r_i} \quad (2)$$

quaisquer que sejam $m, n \geq n(x_i)$.

Tomando-se $m, n \geq \max\{n_{x_1}, \dots, n_{x_s}, n_{\mathcal{E}}\}$ segue de (1) e (2) que,

$$\left| \int_D f_m - \int_D f_n \right| < 2 \cdot \varepsilon + \left| \sum_{i=1}^s [(f_m(x_i) - f_n(x_i)) \cdot r_i] \right|$$

$$\leq 2 \cdot \varepsilon + \left| \sum_{i=1}^s \left[\frac{\varepsilon}{s \cdot r_i} \cdot r_i \right] \right| < 2 \cdot \varepsilon + \varepsilon = 3 \cdot \varepsilon$$

Isso mostra que a seqüência $(\int_D f_n)_{n \geq 1}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$, logo convergente. Seja $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n$.

A seguir mostraremos que f é integrável.

Dado $\varepsilon > 0$ seja n_0 tal que é válida a desigualdade

$$\left| \int_D f_n - I \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (3)$$

para todo $n \geq n_0$.

Seja δ um gauge satisfazendo (ii) para $\frac{\varepsilon}{3}$.

Qualquer que seja $\mathcal{D} = \{(z_i, D_{r_i}) : i = 1, \dots, k\} \ll \delta$, determinamos n_1 de modo que

$$|f(z_i) - f_n(z_i)| < \frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^i \cdot r_i} \quad (4)$$

esteja satisfeita para todo $i = 1, \dots, k$, e $n \geq n_1$.

Finalmente, escolhendo $n = \max\{n_{\mathcal{D}}, n_0, n_1\}$ vem

$$\begin{aligned} |S(f, \mathcal{D}) - I| &\leq |S(f, \mathcal{D}) - S(f_n, \mathcal{D})| + \left| S(f_n, \mathcal{D}) - \int_D f_n \right| + \left| \int_D f_n - I \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^k |f(z_i) - f_n(z_i)| \cdot r_i + \left| S(f_n, \mathcal{D}) - \int_D f_n \right| + \left| \int_D f_n - I \right| \\ &< \sum_{i=1}^k \frac{\varepsilon}{2^i \cdot 3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \end{aligned}$$

Isso encerra a prova para $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n(x) = \int_D f(x)$, para todo $x \in D$.

Assumamos que (i) é válida e denotemos por N o conjunto dos $x \in D$ tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq f(x)$.

Definamos

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & , \text{ se } x \in D - N; \\ 0 & , \text{ se } x \in N \end{cases}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ se } x \in D - N; \\ 0 & , \text{ se } x \in N; \end{cases}$$

É imediato que

$$g_n(x) = f_n(x) \text{ q.s.} \quad \text{e} \quad g(x) = f(x) \text{ q.s.} \quad (3)$$

e $g_n(x) \rightarrow g(x)$, para todo $x \in D$.

Mostremos que $g_n(x)$ verifica (ii). Dado $\varepsilon > 0$, seja δ o gauge tal que cada $\mathcal{D} = \{(x_i, D_{r_i}): i = 1, \dots, m\} \ll \delta$ e $n_{\mathcal{D}}$ verificando (*) para as funções f_n . Tomemos $k \geq n_{\mathcal{D}}$. Lembrando que $\int_D f_n = \int_D g_n$, para cada $n \geq 1$, e o lema de Henstock, vem:

$$\begin{aligned} \left| S(g_n, \mathcal{D}) - \int_D g_n \right| &= \left| \sum_{i=1}^m \left(g_n(x_i) r_i - \int_{D_{r_i}} g_n \right) \right| \\ &\leq \left| \sum_{x_i \in D-N} \left(g_n(x_i) r_i - \int_{D_{r_i}} g_n \right) \right| + \left| \sum_{x_i \in N} \left(g_n(x_i) r_i - \int_{D_{r_i}} g_n \right) \right| \\ &\leq \left| \sum_{x_i \in D-N} \left(f_n(x_i) r_i - \int_{D_{r_i}} f_n \right) \right| \\ &\leq \left| \sum_{x_i \in D-N} \left(f_n(x_i) r_i - \int_{D_{r_i}} f_n \right) \right| + \left| \sum_{x_i \in N} \left(f_n(x_i) r_i - \int_{D_{r_i}} f_n \right) \right| \\ &< 2\varepsilon \end{aligned}$$

mostrando que (ii) é válida para a seqüência $(g_n)_{n \geq 1}$. Portanto, pelas considerações primeiras, g é integrável e $\int_D g = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_D g_k$. Usando (3), segue-se que f é integrável e $\int_D f = \int_D g = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_D g_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_D f_k$. ■

Definição 3.8. Seja $(f_n)_{n \geq 1}$ uma seqüência de funções integráveis em D . Diz-se $(f_n)_{n \geq 1}$ é *uniformemente integrável* em D se, para cada $\varepsilon > 0$ existe um gauge δ tal que, para cada $\mathcal{D} \ll \delta$, tem-se $|S(f_n, \mathcal{D}) - \int_D f_n| < \varepsilon$ para todo $n \geq 1$.

Corolário 3.9. Se $(f_n)_{n \geq 1}$ é uniformemente integrável em D e $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$, então f é integrável em D e $\int_D f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n$.

Prova. Toma-se $n_{\mathcal{D}} = 1$, para toda $\mathcal{D} \ll \delta$ e aplica-se (3.7). ■

Teorema 3.10. Seja $(f_n)_{n \geq 1}$ uma seqüência de funções integráveis em D que convergem uniformemente para f . Se a seqüência $(\int_D f_n)_{n \geq 1}$ converge, então f é integrável em D e $\int_D f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n$.

Prova. Seja $\varepsilon > 0$, arbitrário. A hipótese da convergência uniforme e o Critério de Cauchy implicam na existência de um índice $n_0 \geq 1$ tal que

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3 \cdot r} \quad (1)$$

quaisquer que sejam $m, n \geq n_0$ e $x \in D$.

Da convergência da seqüência das integrais existe $n_1 \geq 1$ tal que, quaisquer que sejam $m, n \geq n_1$, tem-se

$$\left| \int_D f_n - \int_D f_m \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (2)$$

Se $N = \max \{n_0, n_1\}$. Então existe um gauge δ tal que

$$\left| S(f_N, \mathcal{D}) - \int_D f_N \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (3)$$

qualquer que seja $\mathcal{D} \ll \delta$

Para toda $\mathcal{D} = \{(x_1, D_{r_1}), \dots, (x_n, D_{r_n})\} \ll \delta$ façamos $n_{\mathcal{D}} = N$. Então, para todo $n \geq n_{\mathcal{D}}$ tem-se observando (1), (2) e (3),

$$\begin{aligned} \left| S(f_n, \mathcal{D}) - \int_D f_n \right| &\leq |S(f_n, \mathcal{D}) - S(f_N, \mathcal{D})| + \left| S(f_N, \mathcal{D}) - \int_D f_N \right| \\ &\quad + \left| \int_D f_N - \int_D f_n \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n [|f_n(x_i) - f_N(x_i)| \cdot r_i] + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3r} \cdot \sum_{i=1}^n r_i + \frac{2\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Estando satisfeitas as hipóteses de (3.7), a conclusão segue-se. ■

Teorema 3.11. (Teorema da Convergência Monótona) Seja $(f_n)_{n \geq 1}$ uma seqüência de funções integráveis em D satisfazendo as seguintes condições:

(i) $f_n(x) \rightarrow f(x)$, para quase todo $x \in D$;

(ii) $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, para quase todo $x \in D$ e $n \geq 1$.

Então f é integrável em D se e somente se $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n < \infty$.

Nessas condições $\int_D f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n$.

Prova. Seja N o conjunto dos $x \in D$ tais que $f_n(x) \not\rightarrow f(x)$ ou existe $n \geq 1$ tal que $f_n(x) \not\leq f_{n+1}(x)$. Por hipótese esse conjunto é nulo. Definamos

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & , \text{ se } x \in D - N; \\ 0 & , \text{ se } x \in N. \end{cases}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ se } x \in D - N; \\ 0 & , \text{ se } x \in N. \end{cases}$$

Dessa definição, segue-se que as hipóteses do teorema, aplicadas a g e g_n , são válidas para todo $x \in D$.

($\Rightarrow$) Suponhamos f e f_n integráveis em D . Por (3.5), g e g_n são integráveis em D , para todo $n \geq 1$. Lembrando (2.13) vem, para todo $n \geq 1$,

$$\int_D f_n = \int_D g_n \leq \int_D g = \int_D f < \infty.$$

e,

$$\int_D f_n = \int_D g_n \leq \int_D g_{n+1} = \int_D f_{n+1}.$$

Essas desigualdades mostram que a sequência $(\int_D f_n)_{n \geq 1}$ é monótona crescente e limitada. Portanto existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n \leq \int_D f < \infty$.

($\Leftarrow$) Temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n < \infty$.

Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário.

Da convergência da sequência $(\int_D g_n)_{n \geq 1}$ segue-se, pelo Critério de Cauchy, que existe $n_0 \geq 1$ tal que, quaisquer que sejam $m, n \geq n_0$,

$$\left| \int_D g_n - \int_D g_m \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (1)$$

De g_n integrável, segue-se que existe um gauge δ_n tal que, pelo Lema de Henstock, se $\{(x, E_s)\} \ll \delta_n$ então

$$\left| g_n(x) \cdot s - \int_{E_s} g_n \right| < \frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^n}, \quad (2)$$

para cada $n \geq 1$,

De (ii), para cada $x \in D$, existe um $n(x) \geq n_0$, tal que

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3 \cdot r}. \quad (3)$$

sempre que $m, n \geq n(x)$.

Definamos o gauge $\delta(x) = \delta_{n(x)}(x)$, para todo $x \in D$.

Assim, dada $\mathcal{D} = \{(x_1, D_{r_1}), \dots, (x_k, D_{r_k})\} \ll \delta$ tomamos $n_{\mathcal{D}} = \max\{n(x_1), \dots, n(x_k)\}$. Portanto, para todo $n \geq n_{\mathcal{D}}$ temos, usando (1), (2), (3) e (2.20)

$$\begin{aligned} \left| S(g_n, \mathcal{D}) - \int_D g_n \right| &= \left| \sum_{i=1}^k g_n(x_i) \cdot r_i - \int_D g_n \right| = \left| \sum_{i=1}^k g_n(x_i) \cdot r_i - \sum_{i=1}^k \int_{D_{r_i}} g_n \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^k [|g_n(x_i) - g_{n(x_i)}(x_i)| \cdot r_i] + \left| \sum_{i=1}^k \left(g_{n(x_i)}(x_i) \cdot r_i - \int_{D_{r_i}} g_{n(x_i)} \right) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{i=1}^k \left(\int_{D_{r_i}} g_{n(x_i)} - \int_{D_{r_i}} g_n \right) \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3 \cdot r} \sum_{i=1}^k r_i + \frac{\varepsilon}{3} \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^{n(x_i)}} + \left| \sum_{i=1}^k \left(\int_{D_{r_i}} g_{n_0} - \int_{D_{r_i}} g_n \right) \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \left| \int_D g_{n_0} - \int_D g_n \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

Estão, dessa forma, satisfeitas as condições (i) e (ii) de (3.7). Segue-se que g é integrável e $\int_D g = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D g_n$.

Finalmente, de (3.5), vem:

$$\int_D f = \int_D g = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n,$$

encerrando a prova do teorema. $\blacksquare$

Exemplo 3.12. Seja $(D_{r_i})_{i \geq 1}$ uma seqüência de discos, dois a dois disjuntos,

tais que $D_{r_i} \subset D$, para todo $i \geq 1$. Mostremos que $\chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} D_{r_i}}$ é integrável em D

$$\text{e } \int_D \chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} D_{r_i}} = \sum_{i=1}^{\infty} r_i.$$

Iniciemos observando que, de acordo com (1.23), existem, para cada $n \geq 1$, discos $F_{s_1}^n, \dots, F_{s_m}^n$, dois a dois disjuntos satisfazendo

$$D = \bigcup_{i=1}^n D_{r_i} \cup \left(\bigcup_{j=1}^m F_{s_j}^n \right)$$

e, por (1.29),

$$r = \sum_{i=1}^n r_i + \sum_{j=1}^m s_j.$$

Segue-se, dessa igualdade, que $\sum_{i=1}^n r_i < r$, para todo $n \geq 1$. Daí

$$\sum_{i=1}^{\infty} r_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n r_i \leq r \quad (1)$$

Agora, pelo exemplo (2.10), $\chi_{D_{r_i}}$ é integrável em D , para cada $i \geq 1$.

Definamos, para cada $x \in D$,

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \chi_{D_{r_1}}(x); \\ f_n(x) &= \chi_{\bigcup_{i=1}^n D_{r_i}}(x) \quad , \text{ se } n > 1. \end{aligned}$$

Observando que $\chi_{\bigcup_{i=1}^n D_{r_i}}(x) = \sum_{i=1}^n \chi_{D_{r_i}}(x)$, para todo $x \in D$ e todo $n > 1$, vem, por (2.12.i), que

$$f_n \text{ é integrável em } D, \text{ para todo } n \geq 1 \quad (2)$$

Ainda da definição de f_n seguem:

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \text{ para todo } x \in D \quad (3)$$

e

$$f_n(x) = \chi_{\bigcup_{i=1}^n D_{r_i}} \rightarrow f(x) = \chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} D_{r_i}} \quad (4)$$

Com (2),(3) e (4) estão satisfeitas as hipóteses do **TCM**. Finalmente, lembrando (1),

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D \chi_{\bigcup_{i=1}^n D_{r_i}}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D \left(\sum_{i=1}^n \chi_{D_{r_i}}(x) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_D \chi_{D_{r_i}}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n r_i = \sum_{i=1}^{\infty} r_i \leq r.\end{aligned}$$

Segue-se, pelo **TCM** que $\chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} D_{r_i}}$ é integrável em D e $\int_D \chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} D_{r_i}} = \sum_{i=1}^{\infty} r_i$, como queríamos verificar. $\diamond$

Exemplo 3.13. Seja $f: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{p^{2i}}, \quad \text{se } x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i.$$

Tomando $|x - y|_p = p^{-n}$, vem:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= \sum_{i=n}^{\infty} \frac{a_i}{p^{2i}} \leq (p-1) \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{p^{2i}} \\ &= \frac{p-1}{p^{2n}} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{p^i} = \frac{p-1}{p^{2n}} \cdot \frac{p}{p-1} \\ &= \frac{1}{p^{n-1}} \cdot p^{-n} = \frac{1}{p^{n-1}} \cdot |x - y|_p\end{aligned}$$

mostrando que f é uniformemente contínua em D .

Segue-se por (2.24) que f é integrável em $\mathbb{Z}_p$.

Determinemos $\int_D f$.

Consideremos a seqüência $(f_n(x))_{n \geq 1}$ definida por

$$f_n(x) = \left(a_0 + \frac{a_1}{p^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{p^{2(n-1)}} \right) \cdot \chi_{B_{p^{-n}}(a_0 + a_1 p + \dots + a_{n-1} p^{n-1})}$$

se $x = a_0 + a_1 p + \dots + a_{n-1} p^{n-1} + a_n p^n + \dots$

Para cada $n \geq 1$, temos

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{Z}_p} f_n(x) \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^{p-1} \left(a_{i_1} + \frac{a_{i_2}}{p^2} + \dots + \frac{a_{i_n}}{p^{2(n-1)}} \right) \cdot \int_{\mathbb{Z}_p} \chi_{B_{p^{-n}}}(a_{i_1} + \dots + a_{i_n} p^{n-1}) \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^{p-1} \left(a_{i_1} + \frac{a_{i_2}}{p^2} + \dots + \frac{a_{i_n}}{p^{2(n-1)}} \right) \cdot p^{-n} \\
&= p^{n-1} \cdot \frac{(p-1)p}{2} \cdot p^{-n} \cdot \left(1 + \dots + \frac{1}{p^{2(n-1)}} \right) \\
&= \frac{p-1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{p^{2(n-1)}}}{1 - \frac{1}{p^2}} \\
&= \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p^2 \cdot (p^{2(n-1)} - 1)}{p^{2(n-1)} \cdot (p^2 - 1)}
\end{aligned}$$

É imediato que a seqüência é monótona crescente e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{Z}_p} f_n = \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p^2}{p^2-1} = \frac{p}{2(p+1)}$$

Estando satisfeitas as hipóteses do TCM segue-se que $\int_{\mathbb{Z}_p} f = \frac{p}{2(p+1)}$. $\diamond$

Corolário 3.14. Seja $(f_n)_{n \geq 1}$ uma seqüência de funções integráveis em D satisfazendo as seguintes condições:

- (i) $f_n(x) \rightarrow f(x)$, para quase todo $x \in D$;
- (ii) $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$, para quase todo $x \in D$ e $n \geq 1$.

Então, f é integrável em D se e somente se $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n > -\infty$.

Definimos $g(x) = f_1(x) - f(x)$ e $g_n(x) = f_1(x) - f_n(x)$, para todo $n \geq 1$. Segue-se que $\int_D g_n$ existe para todo n e g é integrável se e somente se f for integrável. Por outro lado a seqüência de funções $(g_n)_{n \geq 1}$ satisfaz as hipóteses de (3.11). Logo

$$\int_D g = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D g_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D g_n < \infty$$

Segue-se

$$\begin{aligned}
f \text{ é integrável} &\Leftrightarrow g \text{ é integrável} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D g_n < \infty \\
&\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n = \int_D f_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D g_n < \infty
\end{aligned}$$

Lema 3.15. (Lema de Fatou) Seja $(f_n)_{n \geq 1}$ uma seqüência de funções integráveis em D e sejam g_1, g_2 funções integráveis em D tais que $g_1(x) \leq f_n(x) \leq g_2(x)$, para quase todo $x \in D$ e todo $n \geq 1$. Então $\liminf f_n$ é integrável em D e $\int_D \liminf f_n \leq \liminf \int_D f_n$.

Prova. Por (3.5) não há perda de generalidade admitirmos $g_1(x) \leq f_n(x) \leq g_2(x)$, para todo $x \in D$ e todo $n \geq 1$. Assim, para cada par (n, m) de números naturais, com $1 \leq n \leq m$ e todo $x \in D$ definamos

$$f_n^m(x) = \begin{cases} f_n(x) & , \text{ se } m = n; \\ (f_n \wedge \dots \wedge f_m)(x) & , \text{ se } m > n. \end{cases}$$

Quaisquer que sejam $m \geq n \geq 1$, usando (2.32), temos

$$f_n^m \text{ é integrável em } D, \quad (1)$$

e, de $f_n^m(x) \geq g_1(x)$, utilizando (2.13), vem

$$\int_D f_n^m \geq \int_D g_1 \quad (2)$$

Fixados n e x , a seqüência $(f_n^m(x))_{m \geq n}$ é monótona decrescente e limitada inferiormente por $g_1(x)$. Portanto está bem definida a função

$$h_n(x) = \inf \{f_n^m(x) : m \geq n\}$$

Além disso, essa seqüência satisfaz as hipóteses de (3.14). Assim, a função $h_n(x)$ é integrável em D e satisfaz as condições

$$g_1(x) \leq h_n(x) \leq g_2(x), \text{ para todo } n \geq 1. \quad (3)$$

De $\int_D h_n \leq \int_D f_n^m$, para todo $m \geq n$ segue-se

$$\int_D h_n \leq \inf_{m \geq n} \int_D f_m; \quad (4)$$

de $\inf \{f_n^m : m \geq n\} \leq \inf \{f_{n+1}^m : m \geq n+1\}$ vem que a seqüência $(h_n(x))_{n \geq 1}$ é monótona crescente e limitada superiormente por $g_2(x)$, convergindo para $\sup \{h_n(x) : n \geq 1\} = \liminf f_n$.

Estão, dessa forma, satisfeitas as hipóteses do TCM, com $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D h_n \leq \int_D g_2 < \infty$. Segue-se, pelo mesmo teorema, que $\liminf f_n$ é integrável e, observando (4),

$$\int_D \liminf f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D h_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{m \geq n} \int_D \inf f_n = \liminf \int_D f_n$$

completando a prova do teorema. ■

Corolário 3.16. Seja $(f_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de funções integráveis em D e sejam g_1, g_2 funções integráveis em D tais que $g_1(x) \leq f_n(x) \leq g_2(x)$, para quase todo $x \in D$ e todo $n \geq 1$. Então $\limsup f_n$ é integrável em D e $\int_D \limsup f_n \geq \limsup \int_D f_n$.

Prova. Assumamos, sem perda de generalidade, $g_1(x) \leq f_n(x) \leq g_2(x)$, para todo $x \in D$. Para todo $x \in D$, a sequência de funções $h_n(x) = -f_n(x)$, com $n \geq 1$, e as funções $l_1(x) = -g_1(x), l_2(x) = -g_2(x)$ satisfazem as hipóteses do Lema de Fatou. Portanto

$$-\int_D \liminf h_n \leq \liminf \int_D h_n \quad (1)$$

Lembrando que $\liminf h_n = -\limsup f_n$ e que $\liminf \int_D f_n = -\limsup \int_D f_n$, segue-se, de (1)

$$\int_D -\limsup f_n \leq -\limsup \int_D f_n$$

ou

$$\int_D \limsup f_n \geq \limsup \int_D f_n$$

provando o corolário. ■

Teorema 3.17. (Teorema da Convergência Dominada) Seja $(f_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de funções integráveis em D e sejam g_1, g_2 funções integráveis em D tais que $g_1(x) \leq f_n(x) \leq g_2(x)$, para quase todo $x \in D$ e todo $n \geq 1$. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, então f é integrável e $\int_D f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n$.

Prova. Estão satisfeitas as hipóteses do Lema de Fatou e do seu corolário. Como $f = \liminf f_n = \limsup f_n$, segue-se que f é integrável em D . Usando o Lema e o seu corolário, temos

$$\int_D f = \int_D \liminf f_n \leq \liminf \int_D f_n \leq \limsup \int_D f_n \leq \int_D \limsup f_n = \int_D f$$

Isso mostra que

$$\liminf \int_D f_n = \limsup \int_D f_n = \int_D f$$

Da primeira igualdade temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n$$

existe; e a segunda que esse limite é igual a $\int_D f$ provando o teorema. ■

Capítulo 4

Integração em conjuntos

4.1 Funções mensuráveis

Uma função $e: D \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de *função escada* se ela é dada por uma combinação linear finita de funções características de discos, isto é, para todo $x \in D$,

$$e(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{D_{r_i}}(x)$$

com $a_i \in \mathbb{R}$.

É imediato que toda função escada é absolutamente integrável.

Definição 4.1. Uma função $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de *mensurável* se existe uma seqüência de funções escada que converge para f q.s.

Decorre dessa definição que as funções características de discos assim como as funções escadas são mensuráveis.

Teorema 4.2. Toda função contínua é mensurável.

Prova. Seja $r = p^k$, com $k \in \mathbb{Z}$, o raio do disco D . Por (1.29) existem, para cada $n \geq 1$, $D_1^n, \dots, D_{p^n}^n$, discos de raio p^{k-n} , dois a dois disjuntos,

satisfazendo $D = \bigcup_{i=1}^{p^n} D_i^n$.

Designando por $m_i^n = \inf\{f(x) : x \in D_i^n\}$, definimos a função escada

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p^n} m_i^n \chi_{D_i^n}(x),$$

para cada $x \in D$.

Provemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n(x) = f(x)$, para todo $x \in D$.

Fixado x existe, para cada $n \geq 1$, um índice $1 \leq i(n) \leq p^n$ tal que

$$x \in D_{i(n)}^n \cap D_{i(n+1)}^{n+1}$$

Como $p^{k-(n+1)} < p^{k-n}$ segue-se, por (1.5.i), que $D_{i(n+1)}^{n+1} \subset D_{i(n)}^n$. Logo $m_{i(n)}^n \leq m_{i(n+1)}^{n+1} \leq f(x)$ e a sequência $(m_{i(n)}^n)_{n \geq 1}$ é monótona crescente e limitada, portanto convergente.

A continuidade de f e a compacidade de D implicam que f é uniformemente contínua. Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que, para todo $y \in D_{i(n_0)}^{n_0}$ temos $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. A compacidade de $D_{i(n_0)}^{n_0}$ acarreta a existência de $y \in D_{i(n_0)}^{n_0}$ satisfazendo $f(y) = m_{i(n_0)}^{n_0}$. Portanto, $|f(x) - m_{i(n_0)}^{n_0}| < \varepsilon$ e o crescimento monótono de $m_{i(n)}^n$ permite-nos concluir que, para todo $n \geq n_0$, temos $|f(x) - m_{i(n)}^n| < \varepsilon$, mostrando que $e_n(x) \rightarrow f(x)$ quando $n \rightarrow \infty$, completando a prova do teorema. ■

Teorema 4.3. Se f é mensurável e existem $g, h : D \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ q.s., com $g, h \in \mathbb{KH}(D)$, então $f \in \mathbb{KH}(D)$.

Prova. Assumamos, sem perda de generalidade, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, para todo $x \in D$.

A mensurabilidade de f acarreta a existência de uma sequência $(e_n)_{n \geq 1}$ de funções escada satisfazendo $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = f$.

Definindo-se $h_n(x) = e_n \wedge h$, temos, por (2.31), que h_n é integrável em D e satisfaz $g(x) \leq h_n(x) \leq h(x)$, para cada $n \geq 1$ e $x \in D$.

Pela sua definição, temos $h_n \rightarrow f$, quando $n \rightarrow \infty$. Estando satisfeitas as hipóteses do TCD, segue-se que f é integrável em D . ■

O exemplo a seguir exibe uma função mensurável, não limitada superiormente, logo não verifica a hipótese $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, e que não é integrável. Isso mostra que essa hipótese não pode ser eliminada no teorema acima.

Exemplo 4.4. Em $\mathbb{Z}_3$ consideremos a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 & , \text{ se } x = 2 + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \cdot 3^j \\ \frac{3^n}{2^{n-1}} \cdot \sum_{k=2^{n-1}-1}^{2^n-2} \frac{1}{2k+1} & , \text{ se } x = \sum_{i=0}^{n-2} a_i \cdot 3^i + 2 \cdot 3^{n-1} + \sum_{j=n}^{\infty} b_j \cdot 3^j \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$$

no qual os $a_i \in \{0, 1\}$, para todo i , e $b_j \in \{0, 1, 2\}$, para todo j . Em todo o restante do texto, para não sermos prolixos, a_i e b_j tomarão sempre os valores aqui expressos.

É fácil notarmos que f é constante em todo disco de raio 3^{-n} contendo os pontos em que o algarismo 2 surge, pela primeira vez, como coeficiente do termo 3^{n-1} .

Mostraremos que essa função é mensurável, porém não é integrável.

Definamos a sequência de funções $(g_n)_{n \geq 1}$ em D da seguinte forma:

$$g_1(x) = \begin{cases} 3 & , \text{ se } x = 2 + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \cdot 3^j \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$$

e, para todo $n > 1$,

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{3^n}{2^{n-1}} \cdot \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-2} \frac{1}{2k+1} & , \text{ se } x = \sum_{i=0}^{n-2} a_i \cdot 3^i + 2 \cdot 3^{n-1} + \sum_{j=n}^{\infty} b_j \cdot 3^j \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$$

É imediato que essas funções são funções escadas. A partir dessas funções construiremos uma sequência de funções escadas que convergem para f .

Para todo $x \in \mathbb{Z}_3$, definamos

$$e_n(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{se } n = 1 \\ \sum_{k=1}^n g_k(x) & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Para todo n , e_n é uma função escada e $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{Z}_3$. Isso mostra que f é mensurável.

Por outro lado $e_n(x) \leq e_{n+1}(x)$, para todo $x \in \mathbb{Z}_3$, mostrando que a sequência $((e_n(x))_{n \geq 1})$ é monótona crescente. Além disso,

$$\int_{\mathbb{Z}_3} e_n = \sum_{k=0}^{2^n-2} \frac{1}{2k+1} < \infty$$

satisfazendo as hipóteses do TCM. Entretanto, de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{Z}_3} e_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} = \infty$$

segue-se, pelo TCM, que f não é integrável, concluindo o exemplo. $\diamond$

4.2 Conjuntos mensuráveis

Nesta seção introduziremos uma σ -álgebra em D e definiremos o conceito de conjunto mensurável. Para tanto, denotaremos

$$\mathcal{A} = \{E \subset D: \chi_E \in \mathbb{KH}(D)\}$$

Teorema 4.5. $\mathcal{A}$ é uma σ -álgebra em D .

Prova. . É imediato que $\emptyset, D \in \mathcal{A}$. Agora, se $A \in \mathcal{A}$ então $\chi_A \in \mathbb{KH}(D)$. Logo, por (2.12.i), $\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A \in \mathbb{KH}(D)$, mostrando que $\bar{A} \in \mathcal{A}$.

Dados $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ segue-se $\chi_{A_1}, \dots, \chi_{A_n} \in \mathbb{KH}(D)$. De $0 \leq \chi_{A_i}(x) \leq 1$, para todo $x \in D$, segue-se, por (2.32),

$$\chi_{\bigcup_{n=1}^n A_n} = \chi_{A_1} \vee \dots \vee \chi_{A_n} \in \mathbb{KH}(D).$$

Isso mostra que $\chi_{\bigcup_{n=1}^n A_n} \in \mathcal{A}$.

Seja $(A_n)_{n \geq 1}$ uma seqüência de elementos de $\mathcal{A}$.

Definamos

$$f_n(x) = \begin{cases} \chi_{A_1} & , \text{ se } n = 1; \\ \chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i} & , \text{ se } n \geq 1. \end{cases}$$

Temos, então, que $(f_n)_{n \geq 1}$ é uma seqüência monótona crescente de funções integráveis verificando $f_n(x) \leq \chi_D(x)$, para todo $x \in D$ e, por (2.13), $\int_D f_n \leq \int_D \chi_D = r$. Segue-se, pelo TCM,

$$\int_D \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \int_D \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{\bigcup_{k=1}^n A_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D \chi_{\bigcup_{k=1}^n A_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n \leq r$$

mostrando que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ e provando que $\mathcal{A}$ é uma σ -álgebra. ■

O próximo teorema mostra que a σ -álgebra $\mathcal{A}$ contém os borelianos de D .

Teorema 4.6. A σ -álgebra $\mathcal{A}$ contém os borelianos $\mathcal{B}$ de D .

Prova. . É suficiente verificarmos que $\mathcal{A}$ contém os abertos de D . Por (1.30), para todo subconjunto aberto A de D existe uma seqüência $(D_i)_{i \geq 1}$ de discos contidos em D , dois a dois disjuntos, satisfazendo $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. De $D_n \in \mathcal{A}$ segue-se, pelo teorema anterior, que $A \in \mathcal{A}$. ■

Diz-se que um subconjunto A de D é *mensurável* se $A \in \mathcal{A}$. Com essa definição, introduziremos uma medida sobre $\mathcal{A}$ fazendo

$$\mu(A) = \int_D \chi_A,$$

para todo $A \in \mathcal{A}$.

Teorema 4.7. μ é uma medida completa sobre D .

Prova. É claro que μ é σ -aditiva, pois se $A_1, \dots, A_n, \dots$ uma seqüência de elementos de $\mathcal{A}$, dois a dois disjuntos, temos

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \int_D \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \int_D \lim_{m \rightarrow \infty} \chi_{\bigcup_{n=1}^m A_n} = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_D \chi_{\bigcup_{n=1}^m A_n} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_D \sum_{n=1}^m \chi_{A_n} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \int_D \chi_{A_n} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \mu_{A_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{A_n}\end{aligned}$$

Seja $A \in \mathcal{A}$, com $\mu(A) = 0$, e seja B um subconjunto de A . Provemos que B é mensurável e $\mu(B) = 0$. É suficiente verificarmos que χ_B é integrável em D .

De $\mu(A) = 0$ temos $\int_D \chi_A = 0$. Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe δ um gauge que satisfaz a definição de integral para a função χ_A . Então, para toda divisão $\mathcal{D} = \{(x_1, D_{r_1}), \dots, (\xi_n, D_{r_n})\} \ll \delta$, vem

$$\left| \sum_{i=1}^n \chi_B(\xi_i) r_i \right| \leq \left| \sum_{i=1}^n \chi_A(\xi_i) r_i \right| < \varepsilon.$$

mostrando que χ_B é integrável e a sua integral é nula.

Portanto todo subconjunto de um conjunto de medida nula é mensurável e a medida é completa. ■

Proposição 4.8. Todo subconjunto fechado de um espaço métrico compacto é compacto. Reciprocamente, um subconjunto compacto de qualquer espaço métrico é fechado

Prova. Vide ([9])p.211, Proposição 1. ■

Segue-se dessa proposição o corolário.

Corolário 4.9. Seja $A \subset D$. A é fechado se e somente se A é compacto.

Proposição 4.10. Seja X um espaço de Hausdorff no qual cada subconjunto aberto A é um F_σ e seja ν uma medida Borel finita sobre X . Então, para

cada $A \in \mathcal{B}(X)$, tem-se:

- (i) $\nu(A) = \inf \{ \nu(U) : A \subset U \text{ e } U \text{ é aberto} \};$
- (ii) $\nu(A) = \sup \{ \nu(U) : F \subset A \text{ e } F \text{ é fechado} \};$

Prova. . Ver [7], p.207, Lema 7.2.4. ■

Teorema 4.11. A medida μ é regular sobre os borelianos de D .

Prova. . Por (1.30) todo aberto $A \subset D$ é um F_σ . Estão, pois, satisfeitas as hipóteses da proposição (4.10). E como, pela proposição (4.8), todo fechado em D é compacto, segue-se que estão satisfeitas as condições da definição de medida regular. Portanto μ é uma medida regular sobre os borelianos de D . ■

Teorema 4.12. Sejam $A \in \mathcal{A}$ então χ_{z+A} é integrável e $\int_{z+D} \chi_{z+A} = \int_D \chi_A$.

Prova. . De χ_A integrável segue-se que, dado $\varepsilon > 0$ existe um gauge δ_1 satisfazendo a definição de integral de χ_A para esse ε .

Definamos em $z + D$ o gauge δ por $\delta(z+x) = z + \delta_1(x)$, para todo $x \in D$. Segue-se, para todo $x \in D$,

$$D_s \subset \delta_1(x) \quad \text{se e somente se} \quad z + D_s \subset z + \delta_1(x) = \delta(z+x) \quad (1)$$

Para toda divisão δ -fina de $z + D$,

$$\{(z+x_1, z+D_{r_1}), \dots, (z+x_n, z+D_{r_n})\},$$

usando (1) e lembrando o teorema (1.31), vem:

$$\left| \sum_{i=1}^n \chi_{z+A}(z+x_i) r_i - \int_D \chi_A \right| = \left| \sum_{i=1}^n \chi_A(x_i) r_i - \int_D \chi_A \right| < \varepsilon$$

provando que χ_{z+A} é integrável e que $\int_{z+D} \chi_{z+A} = \int_D \chi_A$. ■

Os teoremas (4.11) e (4.12) mostram que a medida μ definida em $\mathcal{A}$ é a medida de Haar.

Em (4.6) mostramos todo subconjunto boreliano de um disco é mensurável. Uma questão natural que surge é sabermos se todos os subconjuntos de um disco são mensuráveis. O exemplo a seguir responde essa questão e a resposta, já prevista, é negativa.

Exemplo 4.13. Existe $A \subset \mathbb{Z}_p$ não mensurável.

Prova. Definamos em $\mathbb{Z}_p$ a relação

$$x \cong y \text{ se e somente se } x - y \in \mathbb{Z}$$

É imediato que $\cong$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}_p$.

Para cada $x \in \mathbb{Z}_p$ seja

$$[x] = \{y \in \mathbb{Z}_p : y \cong x\}$$

Como $\mathbb{Z}$ é denso em $\mathbb{Z}_p$ então $\mathbb{Z} + x$ também é denso em $\mathbb{Z}_p$. Seja $E \subset \mathbb{Z}_p$ o conjunto obtido escolhendo-se um elemento de cada classe de equivalência e seja

$$E_n = E + n, \text{ para cada } n \geq 1$$

Temos

$$E_n \cap E_m = \emptyset, \text{ se } n \neq m$$

De fato, se $x + n \in E_n \cap E_m$ então, existe $y \in E$ tal que $x + n = y + m$. Logo,

$$x + n = y + m \Rightarrow x - y = m - n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in [y],$$

contrariando a escolha dos elementos em E

É claro que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \mathbb{Z}_p$.

Provemos a inclusão oposta.

Se $x \in \mathbb{Z}_p$ então existe $e \in E$ tal que

$$x \cong e \Rightarrow x - e \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = e + k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}$$

Portanto $x \in E_k$ e $\mathbb{Z}_p \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Logo,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \mathbb{Z}_p \quad (1)$$

Provemos que E não é mensurável.

Suponhamos, por absurdo, que E seja mensurável. Então χ_E é integrável.

Decorre disso que χ_{E_n} é integrável e

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \chi_{E_n} = \int_{\mathbb{Z}_p} E. \quad (2)$$

Definamos, para todo $x \in \mathbb{Z}_p$,

$$f_m(x) = \begin{cases} \chi_{E_1}(x) & , \text{ se } m = 1; \\ \chi_{\bigcup_{n=1}^m E_n}(x) & , \text{ se } m > 1. \end{cases}$$

Por (2.12.i) f_m é integrável e

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f_m = \int_{\mathbb{Z}_p} \chi_{\bigcup_{n=1}^m E_n} = \int_{\mathbb{Z}_p} \sum_{n=1}^m \chi_{E_n} = \sum_{n=1}^m \int_{\mathbb{Z}_p} \chi_{E_n} = m \cdot \int_{\mathbb{Z}_p} \chi_E$$

Por outro lado, quaisquer que sejam $x \in \mathbb{Z}_p$ e $m \geq 1$ temos

$$f_m(x) = \chi_{\bigcup_{n=1}^m E_n}(x) \leq \chi_{\mathbb{Z}_p}(x)$$

Destas duas últimas relações segue-se que a desigualdade

$$m \int_{\mathbb{Z}_p} \chi_E \leq \int_{\mathbb{Z}_p} \chi_{\mathbb{Z}_p} = 1$$

é válida para todo $m \geq 1$. Portanto $\int_{\mathbb{Z}_p} \chi_E = 0$. Isso acarreta que $\chi_E = 0$ q.s. e, portanto E é um conjunto nulo (veja (4.23)). Este resultado, (1) e (2) implicam que $\mathbb{Z}_p$ também é um conjunto nulo, o que é uma contradição.

Portanto E não é mensurável. $\diamond$

4.3 Integrabilidade e mensurabilidade

O objetivo desta seção é provar que toda função integrável é mensurável. Ela é iniciada com as notações que serão utilizadas no decorrer da mesma.

Notações 4.14. Seja f integrável em D . Designaremos:

- (a) por Γ a família dos pares ordenados (x, E) , na qual E é um disco contido em D e $x \in E$;
- (b) para cada $\varepsilon > 0$,

$$\Gamma_{\frac{1}{\varepsilon}} = \left\{ (x, E_s) \in \Gamma : \left| \int_{E_s} f - f(x) \cdot s \right| \geq \varepsilon \cdot s \right\};$$

Em particular, para todo $k \geq 1$,

$$\Gamma_k = \left\{ (x, E_s) \in \Gamma : \left| \int_{E_s} f - f(x) \cdot s \right| \geq \frac{s}{k} \right\};$$

- (c) para cada par $k, n \geq 1$,

$$\Gamma_{kn} = \{ (x, E_s) \in \Gamma_k : E_s \subset B(x, p^{-n}) \};$$

- (d) e, para cada par $k, n \geq 1$,

$$A_{kn} = \{ x \in D : \text{existe um disco } E_s \text{ tal que } (x, E_s) \in \Gamma_{kn} \}$$

- (e) por $A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{kn}$, para todo $k \geq 1$.

Decorre de (4.14.(b)) a propriedade:

$$\text{se } k \leq m \quad \text{então} \quad \Gamma_k \subset \Gamma_m \quad (4.14.1)$$

Lema 4.15. Seja f integrável em D . Então, quaisquer que sejam $\eta > 0$ e $\varepsilon > 0$, existe um gauge δ tal que, para toda $\mathcal{E} = \{(x, E_s): (x, E_s) \in \Gamma_{\frac{1}{\eta}}\} \lll \delta$ tem-se $\sum_{(x, E_s) \in \mathcal{E}} s < \varepsilon$.

Prova. Seja $\eta > 0$ arbitrário. Da integrabilidade de f , dado $\varepsilon > 0$ existe um gauge δ satisfazendo a definição de integral para $\frac{\varepsilon \cdot \eta}{2}$. Pelo Lema de Henstock, se $\mathcal{E} = \{(x, E_s): (x, E_s) \in \Gamma_{\frac{1}{\eta}}\} \lll \delta$, então

$$\sum_{(x, E_s) \in \mathcal{E}} s = \frac{1}{\eta} \sum_{(x, E_s) \in \mathcal{E}} \eta \cdot s \leq \frac{1}{\eta} \cdot \sum_{(x, E_s) \in \mathcal{E}} \left| \int_{E_s} f - f(x) \cdot s \right| < \frac{1}{\eta} \cdot 2 \cdot \frac{\varepsilon \cdot \eta}{2} = \varepsilon,$$

e a prova do lema está completa. ■

Lema 4.16. Sejam $k \geq 1$ e f integrável em D . Então, dado $\varepsilon > 0$ existe um gauge δ tal que para toda $\mathcal{E} = \{(x, E_s): x \in A_k\} \lll \delta$ tem-se $\sum_{(x, E_s) \in \mathcal{E}} s < \varepsilon$.

Prova. Por (4.15), para cada $n \geq 1$ existe um gauge δ_n tal que

$$\sum_{(x, E_s) \in \mathcal{E}_n} s < \frac{1}{n},$$

para toda $\mathcal{E} = \{(x, E_s): (x, E_s) \in \Gamma_n\} \lll \delta_n$.

Dado $\varepsilon > 0$ escolhamos $n(\varepsilon)$ satisfazendo $n(\varepsilon) \geq \max\{k, \frac{1}{\varepsilon}\}$ e definamos o gauge

$$\delta(x) = \delta_{n(\varepsilon)}(x), \text{ para todo } x \in D$$

Assim, dada $\mathcal{E} = \{(x, E_s): x \in A_k\} \lll \delta$, segue-se, usando (4.14.1) que $\mathcal{E} \subset \Gamma_k \subset \Gamma_{n(\varepsilon)}$ e daí vem $\sum_{(x, E_s) \in \mathcal{E}} s < \frac{1}{n(\varepsilon)} < \varepsilon$, provando o lema. ■

Teorema 4.17. Se f integrável em D então, A_k é um conjunto nulo, para cada $k \geq 1$.

Prova. Fixemos $k \geq 1$. Por (4.16) para todo $\varepsilon > 0$ existe um gauge δ tal que para todo par $\{(x, E_{s(x)})\} \lll \delta$, com $x \in A_k$, tem-se $s(x) < \varepsilon$.

Seja $\Omega = \{(x, E_{s(x)}): x \in A_k\}$. É claro que $A_k \subset \bigcup_{(x, E_{s(x)}) \in \Omega} E_{s(x)}$.

Suponhamos determinados $(x_1, E_{s(x_1)}) \dots, (x_n, E_{s(x_n)})$ em Ω .

Se $A_k \subset \bigcup_{i=1}^n E_{s(x_i)}$ então, como $\{(x_i, E_{s(x_i)}): 1 \leq i \leq n\} \lll \delta$, segue-se por (4.16) que

$$\sum_{i=1}^n s(x_i) < \varepsilon \quad (1)$$

e, por (3.1), A_k é um conjunto nulo, provando teorema.

Caso contrário, seja

$$\Omega_n = \left\{ (x, D_{s(x)}) \in \Omega: D_{s(x)} \cap \bigcup_{i=1}^n E_{s(x_i)} = \emptyset \right\}$$

e

$$0 < \omega_n = \sup \{s(x): (x, D_{s(x)}) \in \Omega_n\} \leq r \quad (2)$$

Escolhamos $(x_{n+1}, D_{s(x_{n+1})}) \in \Omega_n$ satisfazendo

$$s(x_{n+1}) > \frac{\omega_n}{2} \quad (3)$$

e verifiquemos se $A_k \subset \bigcup_{i=1}^{n+1} E_{s(x_i)}$. Se a inclusão for válida o processo se encerra. Se não, continuamos o processo obtendo as seqüências $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$ e $\omega_n, \omega_{n+1}, \dots$.

Se existir $n_0 > n$ tal que $A_k \subset \bigcup_{i=1}^{n_0} E_{s(x_i)}$ então, de (1), A_k é um conjunto nulo.

Se não existir n_0 satisfazendo as condições acima, então construímos uma seqüência de discos, dois a dois disjuntos, $E_{s(x_1)}, \dots, E_{s(x_n)}, \dots$, com $x_i \in D_{s(x_i)}$. Decorre daí que $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{s(x_i)} \subset D$, e como $\chi_{D_{s(x_i)}}$ existe, para cada $1 \leq i \leq n$, temos, pelo Teorema da Convergência Dominada, que

$$r \geq \int_D \chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} D_{s(x_i)}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \int_D \chi_{D_{s(x_i)}} = \sum_{i=1}^{\infty} s(x_i)$$

mostrando que a série $\sum_{i=1}^{\infty} s(x_i)$ é convergente. logo

$$\lim_{i \rightarrow \infty} s(x_i) = 0 \quad (3)$$

Escolhamos o inteiro m de modo que

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} s(x_i) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4)$$

e façamos

$$B = A_k - \bigcup_{i=1}^m E_{s(x_i)}$$

Se mostrarmos que B é um conjunto nulo, o teorema está provado. então $A_k = B \cup \bigcup_{i=1}^m E_{s(x_i)}$ é um conjunto nulo e o teorema está verificado.

Para cada $j > m$ tomemos o disco $F_{r(x_j)}$, com $x_j \in F_{r(x_j)}$ e $r(x_j) = 2s(x_j)$. De (4) vem

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} r(x_j) = 2 \cdot \sum_{j=m+1}^{\infty} s(x_j) < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (5)$$

e a série $\sum_{j=m+1}^{\infty} r(x_j)$ é convergente.

De Ω é uma cobertura de A temos que para cada $x \in B$ existe $D_{s(x)}$ tal que $(x, D_{s(x)}) \in \Omega_m$.

Afirmamos que $D_{s(x)} \cap F_{r(x_j)} \neq \emptyset$, para algum $j > m$.

De fato, se tal não ocorresse, teríamos, para todo $j > m$, $D_{s(x)} \cap F_{r(x_j)} = \emptyset$. Isso implica, usando (2) e (3) que

$$0 < s(x) \leq 2 \cdot \frac{\omega_j}{2} < 2 \cdot s(x_{j+1}) = r(x_{j+1}),$$

e a série $\sum_{j=m+1}^{\infty} r(x_j)$ é divergente, que é uma contradição.

Seja $N > m$ satisfazendo $D_{s(x)} \cap E_{s(x_N)} \neq \emptyset$ e $D_{s(x)} \cap E_{s(x_{N-1})} = \emptyset$.

Novamente, usando (2) e (3), temos

$$s(x) \leq \omega_{N-1} < r(x_N)$$

mostrando, por (1.5), que $D_{s(x)} \subset F_{r(x_N)}$. Logo $B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} F_{r(x_j)}$ e, como (5) é válida, segue-se por (3.1), que B é um conjunto nulo, encerrando prova do teorema. ■

Corolário 4.18. Para todo $k \geq 1$ seja A_k como no teorema anterior. Então

$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ é um conjunto nulo.

Prova. Imediata. ■

Observação 4.19. Seja f é uma função integrável em D . Pela definição da integral, para cada $n \geq 1$, existe um gauge δ_n satisfazendo as seguintes condições:

$$\delta_n(x) \subset B_{p^{-n}}(x), \text{ para todo } x \in D \quad (1)$$

e, qualquer que seja $\mathcal{D}_n = \{(x_i, E_{s_i}): i = 1, \dots, \alpha(n)\} \ll \delta_n$,

$$\left| S(f, \mathcal{D}_n) - \int_D f \right| < \frac{1}{n} \quad (2)$$

Fixemos, para cada $n \geq 1$,

$$\mathcal{D}_n = \{(x_i, E_{s_i}): i = 1, \dots, \alpha(n)\} \ll \delta_n \quad (3)$$

e definamos

$$\phi_n(x) = \sum_{i=1}^{\alpha(n)} \frac{\int_{E_{s_i}} f}{s_i} \cdot \chi_{E_{s_i}}(x)$$

É imediato que a $\phi_n(x)$ é uma função escada e, para cada $x \in D$, existe um único $1 \leq i \leq \alpha(n)$ tal que $x \in E_{s_i}$, $(x_i, E_{s_i}) \in \mathcal{D}_n$ e

$$\phi_n(x) = \frac{\int_{E_{s_i}} f}{s_i} \quad (4)$$

Consideremos a seqüência $(\phi_n(x))_{n \geq 1}$ e designemos por

$$N = \left\{ x \in D: \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) \neq f(x), \right\}$$

no qual o limite pode ou não existir.

Teorema 4.20. Sejam f , Γ_k , Γ_{kn} , A_{kn} e A_k definidas como em (4.14) e N como acima. Se f é integrável em D , então N é um conjunto nulo.

Prova. Provaremos que $N \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

Da integrabilidade de f em D sejam, para cada $n \geq 1$, δ_n , $\mathcal{D}_n$, e ϕ_n satisfazendo as condições (1)-(4) de (4.19).

Mostraremos que se $z \in N$, então existe um $k \geq 1$ tal que $z \in A_k$.

Dado $z \in N$, existe um número natural k tal que, para cada $n \geq 1$, existe um $j_n \geq n$, verificando

$$|\phi_{j_n}(z) - f(z)| \geq \frac{1}{k} \quad (1)$$

Por (4.19.(4)) existe um par $(x_{j(n)}, E_{s(j_n)}) \in \mathcal{D}_n$ tal que $z \in E_{s(j_n)}$ e

$$\phi_n(z) = \frac{\int_{E_{s(j_n)}} f}{s(j_n)} \quad (2)$$

Portanto, de (1) e (2)

$$\begin{aligned} \left| \int_{E_{s(j_n)}} f - s(j_n) \cdot f(z) \right| &= \left| \frac{\int_{E_{s(j_n)}} f}{s(j_n)} - f(z) \right| \cdot s(j_n) \\ &= |\phi_{j_n}(z) - f(z)| \cdot s(j_n) \\ &\geq \frac{s(j_n)}{k} \end{aligned}$$

Isso mostra, lembrando (4.14), que o par $(z, E_{s(j_n)}) \in \Gamma_k$. Mas, como $j_n \geq n$, usando (4.19.(1)) vem:

$$E_{s(j_n)} \subset \delta_{j_n}(x(j_n)) \subset B_{p^{-j_n}}(x(j_n)) \subset B_{p^{-n}}(x(j_n)) = B_{p^{-n}}(z)$$

provando que o par $(z, E_{s(j_n)}) \in \Gamma_{kn}$. Segue-se que $z \in A_{kn}$. mas esta condição é válida para cada $n \geq 1$. Logo $z \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{kn} = A_k$.

Mostramos que, para cada $z \in N$, existe um $k \geq 1$ tal que $z \in A_k$. Segue-se daí que $N \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, e, por (4.18) N é um conjunto nulo, completando a prova. ■

Corolário 4.21. Se f é integrável em D então f é mensurável.

Prova. De f é integrável segue-se pelo teorema acima que existe uma seqüência de funções escadas que convergem para f exceto para os pontos de um conjunto nulo. Estando satisfeitas as condições de (4.1) segue-se que f é mensurável. ■

Corolário 4.22. Toda função contínua é mensurável.

Prova. Imediata ■

Teorema 4.23. Se $\int_D \chi_N = 0$, então N é um conjunto nulo.

Prova. Dado $\varepsilon > 0$ tomemos $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, para esse ε' , por hipótese, existe um gauge δ satisfazendo a definição da integral.

Admitamos que o raio de D seja $r = p^m$, com $m \in \mathbb{Z}$, e seja $\alpha \in \mathbb{Z}$ tal que $p^{-\alpha} < \min\{p^m, \varepsilon'\}$. Dessa forma, por (1.28), para cada $n \geq 1$ o disco D é coberto por $p^{\alpha+n+m}$ discos de raio $p^{-(\alpha+n)}$.

Designemos por $\mathcal{F}_n$ cada uma dessas famílias de discos.

Para cada disco $E \in \mathcal{F}_1$ para o qual existe pelo menos um $x \in N$ satisfazendo $E \subset \delta(x)$, associemos um único desses x e o designemos por x_E . Isso posto chamemos de $\mathcal{G}_1$ o conjunto dos pares (x_E, E) .

É imediato que $\mathcal{G}_1$ é finito.

Suponhamos definidos os conjuntos $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_{n-1}$. Definamos $\mathcal{G}_n$. Para cada disco $G \in \mathcal{F}_n$, $n > 1$, para o qual existe pelo menos um $x \in N$ satisfazendo $G \subset \delta(x)$ e tal que

$$G \cap \bigcup_{\substack{k=1 \\ (x_E, E) \in \mathcal{G}_k}}^{n-1} E = \emptyset$$

associemos um único $x_G \in N$ satisfazendo essa condição e designemos

$$\mathcal{G}_n = \left\{ (x_G, G) : x_G \in N, G \in \mathcal{F}_n, G \subset \delta(x_G), G \cap \bigcup_{\substack{k=1 \\ (x_E, E) \in \mathcal{G}_k}}^{n-1} E = \emptyset \right\}$$

Novamente $\mathcal{G}_n$ é finito. Segue-se que $\left\{ (x, E) : (x, E) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n \right\}$ é enumerável; assim podemos indexar seus elementos obtendo a seqüência $((x_k, E_{r_k}))_{k \geq 1}$ com os raios r_k satisfazendo a condição $r_k \geq r_{k+1}$, para todo $k \geq 1$.

Afirmamos que

$$N \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{r_k} \quad (1).$$

De fato, dado $z \in N$ temos que $\delta(z)$ é um aberto, logo existe $n \in \mathbb{Z}$ satisfazendo

$$z \in B_{p^{-(\alpha+n-1)}}(z) = D_{p^{-(\alpha+n)}}(z) \subset \delta(z).$$

Segue-se que apenas uma das asserções abaixo é válida

$$D_{p^{-(\alpha+n)}}(z) \cap \bigcup_{r_k > p^{-(\alpha+n)}} E_{r_k} \neq \emptyset \quad (2)$$

ou

$$D_{p^{-(\alpha+n)}}(z) \cap \bigcup_{r_k > p^{-(\alpha+n)}} E_{r_k} = \emptyset \quad (3)$$

Se (2) ocorre, então existe um $r_j > p^{-(\alpha+n)}$ tal que $D_{p^{-(\alpha+n)}} \cap E_{r_j} \neq \emptyset$.

Por (1.5.i), $D_{p^{-(\alpha+n)}} \subset E_{r_j}$ e, portanto $z \in \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{r_k}$.

Se (3) ocorre, como $D_{p^{-(\alpha+n)}} \subset \delta(z)$, então ou $(z, D_{p^{-(\alpha+n)}}) \in \mathcal{G}_n$ ou existe um $y \in N$, com $y \neq z$, tal que $(y, D_{p^{-(\alpha+n)}}) \in \mathcal{G}_n$. Em qualquer um desses casos temos que $D_{p^{-(\alpha+n)}}$ é igual a um disco E_{r_k} , com $r_k = p^{-(\alpha+n)}$.

Novamente, $z \in \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{r_k}$. Portanto $N \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{r_k}$ completando a prova de (1).

Resta verificarmos que $\sum_{k=1}^{\infty} r_k < \varepsilon$.

Inicialmente, lembrando (2.16.iii) temos

$$0 \leq \int_{E_{r_k}} \chi_N = \int_D \chi_N \cdot \chi_{E_{r_k}} \leq \int_D \chi_N = 0$$

para todo $k \geq 1$.

Qualquer que seja $\ell \geq 1$ temos $\mathcal{D} = \{(x_1, E_{r_1}), \dots, (x_\ell, E_{r_\ell})\} \ll \delta$. Pelo Lema de Henstock (i), vem

$$\left| \sum_{k=1}^{\ell} \left(\chi_N(x_k) r_k - \int_{E_{r_k}} \chi_N \right) \right| \leq \varepsilon'$$

ou

$$\sum_{k=1}^{\ell} r_k \leq \varepsilon', \text{ para todo } \ell \geq 1.$$

Portanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_k \leq \varepsilon' < \varepsilon$$

satisfazendo as condições (i) e (ii) da (3.1). Segue-se que N é um conjunto nulo. ■

O teorema acima e (3.6) podem ser sintetizados em: N é um conjunto nulo se e somente se $\int_D \chi_N = 0$.

Teorema 4.24. Sejam f integrável em D , com $f \geq 0$ q.s., e $A \in \mathcal{A}$. Então $f\chi_A$ é integrável em D .

Prova. Decorre da hipótese que χ_A é integrável em D e, por (2.12.ii), $n \cdot \chi_A$ é integrável em D para todo $n \geq 1$. Segue-se, por (2.31), que $f \wedge n\chi_A$ é integrável e a sequência $(f \wedge n\chi_A)_{n \geq 1}$ satisfaz as condições: $0 \leq (f \wedge n\chi_A)(x) \leq f(x)$, para todo $x \in D$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} f \wedge n\chi_A = f\chi_A$. Portanto, pelo TCD a função $f\chi_A$ é integrável em D . ■

Corolário 4.25. Se f é absolutamente integrável em D e $A \in \mathcal{A}$ então existem as integrais $\int_A f$ e $\int_A |f|$.

Prova. A integração de $|f|$ decorre do teorema anterior.

Definindo-se, para todo $x \in D$, $f^+(x) = \frac{|f|(x)+f(x)}{2}$ e $f^-(x) = \frac{|f|(x)-f(x)}{2}$, é imediato que f^+ e f^- são não negativas. Logo, pelo teorema anterior, existem as integrais $\int_D f^+\chi_A$ e $\int_D f^-\chi_A$. O resultado segue de $f\chi_A = f^+\chi_A - f^-\chi_A$, usando (2.12). ■

A condição da função ser absolutamente integrável nos teoremas acima é essencial para a existência da integral, restrita a um conjunto mensurável, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 4.26. Em $\mathbb{Z}_3$ seja A a reunião de todos os discos de raio 3^{-2j} contendo os pontos da forma $a_0 + \dots + a_{2j-1}3^{2j-1} + 2 \cdot 3^{2j} + \dots$, para todo $j \geq 0$ e no qual os coeficientes $a_0, \dots, a_{2j-1}$ são distintos de 2. É imediato

que, para todo $x \in D$, temos

$$f_{\chi_A}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{j+1}} \cdot \frac{3^{2j+1}}{2^{2j}} & \text{se } x \in A; \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$$

Definindo-se a seqüência $(g_n)_{n \geq 1}$ em D por $g_n(x) = f_n \chi_A(x)$, para todo x , com f_n dada em (2.11) verificamos que, para todo $x \in D$

- a) $g_n(x) \rightarrow f_{\chi_A}(x)$;
- b) $g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$;

Pela definição das funções f_n temos que, para cada $n \geq 1$ as funções g_n são integráveis em D e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D g_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} = \infty$$

Portanto, pelo TCM, f_{χ_A} não é integrável. $\diamond$

Capítulo 5

Aplicação da Integral

5.1 Equação de Fredholm

O escopo desta seção é resolver equações integrais, aplicando a teoria desenvolvida. Mostraremos que a equação integral Fredholm de segunda espécie tem solução em D .

Inicialmente apresentaremos alguns conceitos e notações já conhecidos da Análise Funcional. Como usualmente se procede, $C(D)$ denotará o conjunto das funções contínuas definidas no disco D , com valores reais. Como D é um espaço completo então sabemos que

$$\|f\| = \sup \{|f(x)| : x \in D\}$$

é uma norma em D e que, com essa norma, $C(D)$ é, também, um espaço completo (Veja [16], capítulo 1). Finalmente, como de costume, definimos as funções $f_x, f^y : D \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_x(y) = f(x, y), \text{ para todo } y \in D$$

e

$$f^y(x) = f(x, y), \text{ para todo } x \in D$$

Lema 5.1. Sejam f e g integráveis e limitadas inferiormente ou superiormente em D . Então $f - g$ é absolutamente integrável em D .

Prova. Admitamos que $f(x) \geq m$, para todo $x \in D$ e provemos que ela é absolutamente integrável. É claro que a função $h(x) = f(x) - m > 0$ é integrável em D , segue-se que $h_1(x) = h(x) + |m|$ também é integrável em D . De $|f(x)| = |h(x) + m| \leq h(x) + |m| = h_1(x)$ vem, por (2.30) que $|f|$ é integrável em D . Analogamente verificamos que g é absolutamente integrável.

Finalmente de $|f - g| \leq |f| + |g|$ segue-se, novamente por (2.30), que $f - g$ é absolutamente integrável.

Se f for limitada superiormente escolhemos M tal que $h(x) = M - f(x) > 0$ e procedemos de forma análoga. ■

Teorema 5.2. (Teorema do Ponto Fixo de Banach) Sejam X um espaço métrico completo e $T: X \rightarrow X$ uma contração. Então:

- (i) existe um e um só $\bar{x} \in X$ tal que $T\bar{x} = \bar{x}$;
- (ii) qualquer que seja $x_1 \in X$, a seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde $x_{n+1} = T^n x_1$, converge a $\bar{x}$;
- (iii) para todo n , temos $d(x_n, \bar{x}) \leq c^{n-1} \frac{d(x_1, x_2)}{1-c}$, onde c é uma constante de contração de T , e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é a seqüência de (ii).

Prova. Vide ([17])

Teorema 5.3. Seja $f: D \times D \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

- (i) $\int_D f_x(y) dy$ existe, para cada $x \in D$;
- (ii) f_x é limitada inferiormente para cada $x \in D$;
- (iii) a família $(f^y)_{y \in D}$ é equicontínua em D
- (iv) $\lambda = \frac{1}{M+1}$, sendo $M = \sup \left\{ \int_D |f_x(y)| dy : x \in D \right\} < \infty$.

Então, para cada $g_0 \in C(D)$ existe uma única $g \in C(D)$ tal que

$$g(x) = g_0(x) + \lambda \int_D f(x, y) g(y) dy \quad (*)$$

Prova.

Dadas $g, g_0 \in C(D)$ seja

$$Tg(x) = g_0(x) + \int_D f_x(y)g(y)dy \quad (1)$$

Tg está bem definida pois, de (ii) e (2.25), a integral existe para cada $x \in D$.

Provemos que $Tg \in C(D)$.

Dados $x_1, x_2 \in D$ temos

$$\begin{aligned} |Tg(x_1) - Tg(x_2)| &= \left| g_0(x_1) - g_0(x_2) + \int_D [f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)]g(y)dy \right| \\ &\leq |g_0(x_1) - g_0(x_2)| + \left| \int_D [f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)]g(y)dy \right| \end{aligned} \quad (2)$$

Por (5.1) $f_{x_1} - f_{x_2}$ é absolutamente integrável e a continuidade de g implica a continuidade de $|g|$. Logo, de (2.25) e $|fg| = |f||g|$, temos que $[f_{x_1} - f_{x_2}] \cdot g$ é absolutamente integrável. De (2) vem

$$|Tg(x_1) - Tg(x_2)| \leq |g_0(x_1) - g_0(x_2)| + \left| \int_D [f^y(x_1) - f^y(x_2)]g(y)dy \right| \quad (3)$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $n \geq 1$ tal que $|x_1 - x_2| < p^{-n}$ implica

$$|g_0(x_1) - g_0(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4)$$

e, utilizando (iii),

$$|f^y(x_1) - f^y(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2 [\int_D |g| + 1]} \quad (5)$$

De (3),(4) e (5) vem $|Tg(x_1) - Tg(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2[\int_D |g| + 1]} < \varepsilon$ mostrando que $Tg \in C(D)$. e o operador T

Provemos que T é uma contração.

De fato, dados g e h em $C(D)$ temos, para todo $x \in D$,

$$\begin{aligned} \|Tg(x) - Th(x)\| &= |\lambda| \cdot \left| \int_D f(x, y)[g(y) - h(y)]dy \right| \\ &\leq |\lambda| \int_D |f(x, y)| \cdot |g(y) - h(y)| dy \leq |\lambda| \|g - h\| \int_D |f_x(y)| \end{aligned}$$

Finalmente, usando (iv), temos que

$$\|Tg(x) - Th(x)\| < \frac{1}{M+1} \cdot \int_D \|g - h\| \cdot |f_x(y)| < \|g - h\|$$

Isso mostra que T é uma contração. Portanto T tem um ponto fixo, ou seja, existe $g \in C(D)$ satisfazendo (*) e completando a prova do teorema. ■

Referências Bibliográficas

- [1] R.G.Bartle, *Return to the Riemann Integral*, American Mathematical Monthly,(1996),p.625-632
- [2] R.G.Bartle, *A Convergence Theorem for Generalized Riemann Integrals*, Real Analysis Exchange, vol. 20(1), 1994/95, p. 119-124.
- [3] R. Bianconi, *On the convergence of the Integrals of a Truncated Henstock-Kurzweil Integrabel Function*, Real Analysis Exchange, Vol.23(1),(1997/8),p.247-250
- [4] S.Bosch, U. Güntzer & R.Remmert, *Non-Archimedean Analysis*, Springer-Verlag, 1984.
- [5] E. Cabral & P.Y.Lee, *A Fundamental Theorem of Calculus for the Kurzweil-Henstock integral in $\mathbb{R}^m$* , Real Analysis Exchange, vol.26(2),(2000/01),p.867-876
- [6] E. Cabral & P.Y.Lee, *The Primitive of a Kurzweil-Henstock integrable function in multidimensional space*, Real Analysis Exchange, vol.27(2),(2001/02),p.627-634
- [7] D.J.Cohn,*Measure Theory*, Birkhäuser,Boston, 1980
- [8] J.D.DePree and C.W.Swartz, *Introduction to the real analysis*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1988.
- [9] E.L.Lima, *Espaços Métricos*, IMPA, Rio de Janeiro, 1977
- [10] M. Federson, *Two equivalent definitions of the Kurzweil integral*, 49º Seminário Brasileiro de Análise, (1999), 723-730.

- [11] I.Fleischer, *A Vitali-like Convergence Theorem for the Henstock Integral*, Real Analysis Exchange, Vol.32(1996/7), p.174-176
- [12] R.A Gordon, *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Graduate Studies in Mathematics, N°4, American Mathematical Society, 1994.
- [13] R.A Gordon, *A Convergence Theorem for the Riemann Integral*, Mathematics Magazine, v. 73, N°2, April 2000.
- [14] F.Q.Gouvêa, *p-adic Numbers*, Springer-Verlag, 1991.
- [15] C.S. Hönig, *As integrais de Gauge*, 37° Seminário Brasileiro de Análise (1993), 3-59.
- [16] C.S. Hönig, *Análise Funcional e Aplicações- v.1 e 2*, Publicações do IME-USP, São Paulo (1970)
- [17] C.S. Hönig, *Aplicações da topologia à análise* IMPA, CNPQ, Rio de Janeiro (1976)
- [18] L. Jitan & L.P.Yee, *The primitives of Henstock Integrable Function in Euclidean Space*, Bull. London Math.Soc.31 (1999), p. 173-180.
- [19] N.Koblitz, *p-adic Numbers, p-adic Analysis and Zeta-Functions*, Springer-Verlag.
- [20] J. Kurzweil, *A nonexistence result for the Kurzweil integral*, Math. Bohemia 127(2002) N°4, 571-580.
- [21] L.P. Yee & R.V ýborný, *The Integral: An Easy Approach after Kurzweil and Henstock*, Austr.Math. Soc. Lecture Series, v.14, United Kingdom, 2000.
- [22] P.Y.Lee, *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*, World Scientific, Singapore, 1989
- [23] P.Y.Lee, Z.M. Ma, T.S.Chew, *Absolute Integration Using Vitali Covers*, Real Analysis Exchange, Vol.18(2)(1992/93), p.409-419
- [24] E.L.Lima, *Espaços Métricos*, Edgard Blücher Ltda., São Paulo, 1977.

- [25] G. Liu, *On Necessary Conditions for Henstock Integrability*, Real Analysis Exchange, Vol. 18(2), (1992/93), 522-531.
- [26] J.Mawhin, *Introduction à l'Analyse*, Cabay, 1984.
- [27] R.M.McLeod, *The Generalized Riemann Integral*, Carus Mathematical Monographs, N° 20, Mathematical Association of America, 1980.
- [28] E.J.McShane, *A Unified Theory of Integration*, American Mathematical Monthly, 80 (1973), 349-359.
- [29] A.P. Monna, *Analyse non-archimédienne*, Springer-Verlag, 1970.
- [30] S.Schwabik, *Generalized Ordinary Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1992.
- [31] S.Schwabik, *Henstock's Condition for Convergence Theorems and Equi-integrability*, Real Analysis Exchange, Vol.18(1)(1992/93), 190-205
- [32] L.Shipan, L.Kecheng, *On Generalized Dominated Convergence*, Real Analysis Exchange, vol.16 (1990/91)
- [33] L.Shi-pan, L.Peng-Yee, *Globally Small Riemann Sums and the Henstock Integral*, Real Analysis Exchange, vol.16 (1990/91)
- [34] C.Swartz, *Introduction to Gauge Integrals*, World Scientific, Singapore, 2001
- [35] L. Tuo-Yeong, *A Full Descriptive Definition of the Henstock-Kurzweil Integral in the Euclidean Space*, Proc. London Math. Soc., 87(3), 2003, 677-700.
- [36] V.S.Vladimirov, I.V. Volovich & E.I.Zelenov, *p-adic Analysis and Mathematical Physics*, World Scientific, Singapore, 1994.