Álgebras Cúbicas Admissíveis

Oscar Alberto Correa Arango

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Álgebra**

Orientador: **Prof. Dr. Luiz Antonio Peresi**

Durante este trabalho, o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq e da CAPES.

São Paulo, julho de 2005

Álgebras Cúbicas Admissíveis

Este exemplar corresponde à redação final da
Dissertação de Mestrado, defendida por
Oscar Alberto Correa Arango e
aprovada pela Comissão Julgadora.

São Paulo, 14 de outubro de 2005.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Luiz Antonio Peresi (Presidente)	IME-USP
Prof. Dr. Henrique Guzzo Jr	IME-USP
Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov	IMECC-UNICAMP

Dedicatória

Dedico este trabalho a minha família e especialmente a meus pais: a minha mãe pelo seu amor eterno, e a meu pai pelo seu amor e que com seus olhos tristes olhou-me sair de casa e que ao meu regresso só poderá olhar-me com a suas mãos.

Agradecimentos

- Ao Prof. Dr. Luiz Antonio Peresi pela sua orientação, compreensão e pelos seus conselhos acertados.
- Aos Professores do IME, que de uma ou outra forma tiveram que ver comigo.
- Aos meus amigos colombianos, especialmente a meu amigo Mauricio pela sua eterna amizade.
- Aos meus amigos brasileiros pela grata acolhida.
- Aos meus amigos peruanos e argentinos pela amizade e solidariedade.
- Aos meus irmãos Miguel e Diego e as minhas irmãs Olga, Doralba e Socorro.
- Agradeço de maneira muito especial a minha esposa Tatiane e a minha filha Gabriela que fizeram os meus dias de estudo mais felizes.

Muito obrigado!

Resumo

Este trabalho resultou do estudo do artigo *On algebras satitsfying $x^2x^2 = N(x)x$* de Alberto Elduque e Susumu Okubo publicado no Mathematische Zeitschrift em 2000. Os resultados principais são: a classificação das álgebras cúbicas admissíveis com forma traço não-degenerada; e o relacionamento com as álgebras de Jordan quárticas, álgebras genericamente algébricas, álgebras com pseudo-composição, álgebras de Jordan construídas a partir de formas cúbicas admissíveis e álgebras ponderadas.

Abstract

This work is based on the paper *On algebras satistsfying $x^2x^2 = N(x)x$* by Alberto Elduque e Susumu Okubo published in Mathematische Zeitschrift in 2000. The main results are: the classification of admissible cubic algebras with nondegenerate trace form; and the relationship between admissible cubic algebras and quartic Jordan algebras, generically algebraic algebras, pseudo-composition algebras, Jordan algebras constructed from admissible cubic forms and baric algebras.

Sumário

Introdução	1
1 Noções Preliminares	3
1.1 Definições e Resultados Básicos	3
1.2 Topologia de Zariski	8
1.3 Polinômio Mínimo Genérico	11
1.4 Álgebras de Jordan Quárticas	16
1.5 Álgebras Com Pseudo-Composição	17
1.6 Álgebras Ponderadas	18
1.7 Categorias e Funtores	19
2 Álgebras Cúbicas Admissíveis	21
2.1 Definição e Exemplos	21
2.2 Algumas Álgebras de Jordan Quárticas	28
2.2.1 As Categorias $\mathcal{AC}$ e $\mathcal{QJ}$	38
2.2.2 As Subcategorias Plenas $\mathcal{AC}_{\text{nd}}$ e $\mathcal{QJ}_{\text{nd}}$	46
2.3 Classificação das Álgebras Cúbicas Admissíveis	47

3	Álgebras Cúbicas Admissíveis e Outras Álgebras	51
3.1	Idempotentes	51
3.2	Álgebras Com Pseudo-Composição	53
3.2.1	As Categorias $\mathcal{AC}_e$ e $\mathcal{PC}_2$	61
3.3	Construção de Álgebras de Jordan	62
3.3.1	Forma Quadrática	62
3.3.2	Forma Cúbica de Jordan	63
3.4	Álgebras Ponderadas	65

Introdução

As álgebras consideradas neste trabalho são álgebras não-associativas comutativas sobre um corpo F de característica diferente de 2 e 3.

Alberto Elduque e Susumu Okubo [1] definiram as *álgebras cúbicas admissíveis* como aquelas álgebras A tais que existe uma forma cúbica $N : A \rightarrow F$ tal que $x^2x^2 = N(x)x$ para todo $x \in A$. Estas álgebras tem um relacionamento com as álgebras de Jordan quárticas as quais são definidas a seguir.

Seja $(J, +, \bullet)$ uma álgebra de Jordan com 1 sobre o corpo F . Dizemos que J é uma *álgebra de Jordan quártica* se existem uma forma linear $t : J \rightarrow F$ (traço de J), uma forma quadrática $s : J \rightarrow F$, uma forma cúbica $r : J \rightarrow F$ e uma forma quártica $n : J \rightarrow F$ que verificam:

(i) Todo x em J satisfaz a equação quártica

$$x^{\bullet 4} - t(x)x^{\bullet 3} + s(x)x^{\bullet 2} - r(x)x + n(x)1 = 0.$$

(ii) $t(1) = 4$.

(iii) As seguintes fórmulas de Newton são válidas:

$$2s(x) = t(x)^2 - t(x^{\bullet 2})$$

$$6r(x) = t(x)^3 - 3t(x)t(x^{\bullet 2}) + 2t(x^{\bullet 3})$$

$$24n(x) = t(x)^4 - 6t(x)^2t(x^{\bullet 2}) + 8t(x)t(x^{\bullet 3}) + 3t(x^{\bullet 2})^2 - 6t(x^{\bullet 4}).$$

Seja $\mathcal{AC}$ a categoria cujos objetos são os pares $(A, <, >)$, onde A é uma álgebra cúbica

admissível com forma bilinear simétrica associativa $\langle, \rangle$, e cujos morfismos

$$\varphi : (A_1, \langle, \rangle_1) \longrightarrow (A_2, \langle, \rangle_2)$$

são os homomorfismos de álgebras que preservam a forma traço. Denotemos por $\widetilde{\mathcal{AC}}$ a subcategoria plena cujos objetos são as álgebras cúbicas admissíveis com norma não zero $(A, \langle, \rangle)$.

Seja $\mathcal{QJ}$ a categoria cujos objetos são os pares (J, t) onde J é uma álgebra de Jordan quártica com uma forma traço t e cujos morfismos $\psi : (J_1, t_1) \longrightarrow (J_2, t_2)$ são os homomorfismos de álgebras com 1 que preservam a forma traço t e portanto preservam s , r e n . Denotemos por $\widetilde{\mathcal{QJ}}$ a subcategoria plena cujos objetos são os pares (J, t) onde J é uma álgebra de Jordan quártica com uma forma traço t e tal que existem elementos $x \in J$ com $t(x) = 0$ e $t(x^{\bullet 3}) \neq 0$.

A. Elduque e S. Okubo mostraram que existe um funtor pleno e fiel $\mathbf{C} : \mathcal{QJ} \rightarrow \mathcal{AC}$ que se restringe a uma equivalência entre as categorias $\widetilde{\mathcal{QJ}}$ e $\widetilde{\mathcal{AC}}$.

As álgebras cúbicas admissíveis estão também relacionadas com as álgebras com pseudo-composição. Uma álgebra A é uma *álgebra com pseudo-composição* se existe uma forma bilinear simétrica $\phi(x, y)$ tal que $x^3 = \phi(x, x)x$ para todo $x \in A$. As álgebras com pseudo-composição foram caracterizadas por K. Meyberg e J. M. Osborn [7].

O Capítulo 1 é dedicado a apresentar algumas definições e alguns resultados básicos para o desenvolvimento deste trabalho.

No Capítulo 2 apresentamos a definição, exemplos e resultados das álgebras cúbicas admissíveis, caracterizamos algumas álgebras de Jordan quárticas e estudamos a equivalência entre as categorias $\mathcal{QJ}$ e $\mathcal{AC}$ por meio de um funtor pleno e fiel que denotamos por $\mathbf{C}$, e finalmente obtemos a classificação das álgebras cúbicas admissíveis com forma traço não-degenerada.

No Capítulo 3 apresentamos o relacionamento das álgebras cúbicas admissíveis com as álgebras com pseudo-composição, as álgebras de Jordan de formas cúbicas admissíveis e algumas álgebras que tem significado genético.

Noções Preliminares

Neste capítulo apresentamos as ferramentas preliminares para o desenvolvimento deste trabalho: tópicos relacionados com a teoria das álgebras não-associativas, alguns conceitos da topologia de Zariski e das categorias e funtores. Provamos alguns dos principais teoremas que usamos na prova do teorema central deste trabalho, e fazemos sugestões de referências onde o leitor pode encontrar as provas dos teoremas não provados aqui.

1.1 Definições e Resultados Básicos

Em todo o trabalho vamos assumir que F é um corpo de característica diferente de 2, 3.

Um espaço vetorial A sobre F é denominado uma *álgebra* sobre F se está definido em A uma operação de multiplicação, isto é, uma aplicação $(a, b) \in A \times A \rightarrow ab \in A$ satisfazendo as seguintes relações:

$$(a + b)c = ac + bc, \quad a(b + c) = ab + ac, \quad \alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$$

para todo $\alpha \in F$, $a, b \in A$.

Se a, b, c são elementos de uma álgebra A definimos o *associador* $(a, b, c) := (ab)c - a(bc)$ e o *comutador* $[a, b] := ab - ba$. Dizemos que A é uma *álgebra associativa* se $(a, b, c) = 0$ para todo $a, b, c \in A$, e que A é uma *álgebra comutativa* se $[a, b] = 0$ para todo $a, b \in A$. O corpo F é uma álgebra associativa e comutativa sobre F . A álgebra de matrizes $M_n(F)$ formada por todas as matrizes $n \times n$ com coeficientes em F é associativa mas não é comutativa sobre F , quando $n > 1$.

Seja A uma álgebra sobre um corpo F e suponhamos que A contém um elemento identidade 1. Então dizemos que a álgebra A é uma *álgebra quadrática ou de grau 2* se o conjunto $\{1, a, a^2\}$ é linearmente dependente para qualquer $a \in A$. Isto é, a satisfaz a equação

$$\alpha a^2 + \beta a + \gamma 1 = 0$$

com $\alpha, \beta, \gamma \in F$ não todos nulos. Os escalares α, β, γ dependem de a . Vamos verificar que esta condição é equivalente a dizer que a satisfaz

$$a^2 - t(a)a + n(a)1 = 0,$$

onde t e n são funções de A em F . Suponhamos que $1, a$ é linearmente independente. Temos que $\alpha \neq 0$ pois o caso contrário implica que $\beta a + \gamma 1 = 0$ e todos os coeficientes são nulos. Tomemos então $\alpha = 1$. Isto é,

$$a^2 + \beta a + \gamma 1 = 0.$$

Mostremos que β e γ estão bem definidos. Suponhamos que existam β' e $\gamma' \in F$ tais que

$$a^2 + \beta' a + \gamma' 1 = 0.$$

Subtraindo temos $(\beta - \beta')a + (\gamma - \gamma')1 = 0$, logo $\beta = \beta'$ e $\gamma = \gamma'$. Portanto t e n estão bem definidos. Suponhamos que $\{1, a\}$ é linearmente dependente. Isto é, $a = \delta 1$ com $\delta \in F$. Neste caso $\delta^2 1 - t(\delta)\delta + n(\delta)1 = 0$, com $t(\delta) = 2\delta$, $n(\delta) = \delta^2$ para todo $\delta \in F$. Chamamos os escalares $t(a)$ e $n(a)$ de *traço* e *norma* do elemento a . A função traço é uma forma linear e a função norma é uma forma quadrática.

Uma álgebra J sobre o corpo F chama-se *álgebra de Jordan* se é comutativa e verifica a identidade de Jordan $(x^2, y, x) = 0$. A álgebra de matrizes $M_n(F)$ com a multiplicação o dada por $A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA)$ é uma álgebra de Jordan. Toda vez que substituimos o produto xy em uma álgebra associativa A , pelo produto de Jordan $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$, obtemos uma álgebra de Jordan denotada por $A^{(+)}$. Nem toda álgebra de Jordan é isomorfa a uma subálgebra de $A^{(+)}$ para alguma álgebra associativa A .

Seja V um espaço vetorial sobre F e $q : V \times V \rightarrow F$ uma forma bilinear simétrica. Consideremos a álgebra $F1 \oplus V$ com multiplicação dada por:

$$(\alpha 1 + x)(\beta 1 + y) = (\alpha\beta + q(x, y))1 + \beta x + \alpha y.$$

Esta álgebra é uma álgebra de Jordan denominada *álgebra de Jordan da forma q* , e também é denominada *álgebra de Jordan de grau 2* pois, para todo $a = \alpha 1 + x$, temos $a^2 - t(a)a + n(a)1 = 0$, onde $t(a) = 2\alpha$ e $n(a) = \alpha^2 - q(x, x)$.

A classe das álgebras de Jordan de grau 2 é a interseção da classe das álgebras comutativas com a classe das álgebras quadráticas. Um exemplo de álgebra de Jordan de grau 2 é a álgebra $M_2(F)^{(+)}$.

Uma álgebra é dita *flexível* se satisfaz a identidade $(x, y, x) = 0$.

Seja A uma álgebra. Dizemos que A é uma *álgebra associativa nas potências* se a subálgebra gerada por qualquer $a \in A$ é associativa. Se a^m é definido de maneira usual $a^0 = 1$, $a^k = a^{k-1}a$, então associatividade nas potências é equivalente a $a^r a^s = a^{r+s}$ para todo $a \in A$, e r, s inteiros não negativos. A álgebra de matrizes $M_n(F)$ com o produto o definido acima é uma álgebra associativa nas potências. Toda álgebra de Jordan é associativa nas potências.

Uma álgebra A é *estritamente associativa nas potências* se a álgebra extensão A_P é associativa nas potências para cada extensão P do corpo F . Cada álgebra associativa nas potências sobre um corpo de característica 0 é estritamente associativa nas potências.

Definição 1.1.1. *Seja V um espaço vetorial (possivelmente de dimensão infinita) sobre um corpo F de característica 0 ou $p > n$. A transformação $N : V \rightarrow F$ tal que $x \rightarrow N(x)$ é chamada uma **forma de grau n** sobre V no caso em que:*

(i) $N(\alpha x) = \alpha^n N(x)$ para todo $\alpha \in F$ e $x \in V$,

(ii) $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle = \frac{1}{n!} [N(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - \sum_{i=1}^n N(x_1 + x_2 + \dots + \hat{x}_i + \dots + x_n) +$

$$\sum_{i < j} N(x_1 + x_2 + \dots + \hat{x}_i + \dots + \hat{x}_j + \dots + x_n) - \dots + (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n N(x_i)]$$

é n -linear, onde $\hat{x}_i$ indica que x_i não aparece.

Como $\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^n = n!$, onde $\binom{n}{i}$ denota o coeficiente binomial, temos que $N(x) = \langle x, \dots, x \rangle$. Dizemos que $N(x)$ e a n -forma linear (ii) são *não-degeneradas* no caso em que $\langle x_1, \dots, x_n \rangle = 0$ para todo $x_2, \dots, x_n \in V$, implica que $x_1 = 0$.

Por exemplo, para $n = 3$, isto é, para uma forma cúbica, temos que $N(\alpha x) = \alpha^3 N(x)$ para todo $\alpha \in F$ e $x \in V$ e

$$\langle x, y, z \rangle = \frac{1}{6} [N(x+y+z) - N(x+y) - N(x+z) - N(y+z) + N(x) + N(y) + N(z)]$$

é trilinear. As formas $N(x)$ e $\langle x, y, z \rangle$ são não-degeneradas no caso que $\langle x, y, z \rangle = 0$ para todo $y, z \in V$, implica que $x = 0$.

Uma função polinomial P *divide* ou é um fator da forma Q se existe uma função polinomial R com $Q = PR$; equivalentemente, Q/P é uma função polinomial sob todo subespaço de dimensão finita.

Dizemos que P é *irredutível* se não tem fatores próprios, e *primo* se P divide R ou S sempre que P divide o produto RS .

Suponhamos $\mathcal{X}_\alpha \subset \mathcal{X}_\beta$ dois subespaços de dimensão finita.

Observemos que se P_β é uma forma sob $\mathcal{X}_\beta$ então a sua restrição P_α a $\mathcal{X}_\alpha$ é de novo uma forma do mesmo grau, e portanto ou é não constante ou identicamente zero. Se P_β é primo sob $\mathcal{X}_\beta$ então P_α pode não ser primo sob $\mathcal{X}_\alpha$; neste caso, dizemos que P_β *cinde* sob a restrição a $\mathcal{X}_\alpha$. Se P_β e R_β são primos distintos sob $\mathcal{X}_\beta$ estes devem ser primos sob $\mathcal{X}_\alpha$ mas não necessariamente distintos. Se $P_\alpha = R_\alpha$ então dizemos que estes *colapsam* sob a restrição a $\mathcal{X}_\alpha$.

Se x_0 é um ponto em $\mathcal{X}_\alpha$ onde $Q(x_0) \neq 0$, $Q_\alpha = Q(x_0) \prod Q_{i\alpha}^{q_{i\alpha}}$ e $Q_\beta = Q(x_0) \prod Q_{i\beta}^{q_{i\beta}}$ a fatoração (única) de Q sob $\mathcal{X}_\alpha$ e $\mathcal{X}_\beta$ em fatores primos distintos $Q_{i\alpha}$ e $Q_{i\beta}$ com $Q_{i\alpha}(x_0) = Q_{i\beta}(x_0) = 1$, então $\mathcal{X}_\beta$ é uma extensão *estável* de $\mathcal{X}_\alpha$ para Q se não existe cindimento ou colapsamento entre os $Q_{i\beta}$ sob restrição. O subespaço $\mathcal{X}_\alpha$ é um *espaço de estabilidade* para Q se todas as extensões $\mathcal{X}_\beta$ de $\mathcal{X}_\alpha$ são estáveis. Note que toda extensão de um espaço de estabilidade é novamente um espaço de estabilidade.

Lema 1.1.2. *Toda forma Q tem um espaço de estabilidade.*

Prova: Fixemos um ponto x_0 onde $Q(x_0) \neq 0$, e consideremos somente os espaços $\mathcal{X}_\alpha$ contendo x_0 . Se

$$Q_\alpha = Q(x_0) \prod_{i=1}^{n_\alpha} Q_{i\alpha}^{q_{i\alpha}}$$

é a fatoração de Q_α com $Q_{i\alpha}(x_0) = 1$, $q_{i\alpha} > 0$, seja $m_\alpha = \sum_{i=1}^{n_\alpha} q_{i\alpha}$ o número total de fatores primos. Afirmamos que se $\mathcal{X}_\alpha \subset \mathcal{X}_\beta$ então $m_\alpha \geq m_\beta$. Realmente, se

$$Q_\beta = Q(x_0) \prod_{i=1}^{n_\beta} Q_{i\beta}^{q_{i\beta}}$$

é a correspondente fatoração sobre $\mathcal{X}_\beta$ então a restrição de $Q_{i\beta}$ a $\mathcal{X}_\alpha$ não é constante, portanto é primo ou cinde em vários fatores. Assim, o número total de fatores da restrição de Q_β a $\mathcal{X}_\alpha$ é pelo menos m_β ; esta restrição é Q_α e o seu número total é m_α pela unicidade da fatoração sobre $\mathcal{X}_\alpha$, logo a desigualdade acima se verifica. Temos a igualdade somente se não acontece cindimento entre os $Q_{i\beta}$ sob restrição.

Escolhamos $\mathcal{X}_\alpha$ com m_α minimal. Pelo que vimos, para qualquer extensão $\mathcal{X}_\beta$ temos $m_\alpha = m_\beta$ e não acontece cindimento sob restrição dos primos $Q_{i\beta}$. Neste caso afirmamos que $\eta_\alpha \leq \eta_\beta$. Realmente, as restrições de $Q_{i\beta}$ a $\mathcal{X}_\alpha$ permanecem primos mas não precisam ser distintos. Assim, o número de fatores primos distintos é no máximo n_β ; o número de fatores distintos de Q_α é n_α . Assim, a desigualdade acima é válida. Temos igualdade só se nenhum dos $Q_{i\beta}$ colapsa sob restrição dos $\mathcal{X}_\alpha$.

Finalmente, entre os $\mathcal{X}_\alpha$ com m_α minimal escolhemos um com n_α maximal. Então para $\mathcal{X}_\alpha \subset \mathcal{X}_\beta$ temos que $m_\alpha = m_\beta$, $\eta_\alpha = \eta_\beta$. Portanto, não acontecem cindimento ou colapsamento sob restrição dos $Q_{i\beta}$ a $\mathcal{X}_\alpha$, todos $\mathcal{X}_\beta$ são extensões estáveis de $\mathcal{X}_\alpha$, e $\mathcal{X}_\alpha$ é um espaço de estabilidade para Q . ■

Teorema 1.1.3. *Se Q é uma forma e x_0 é um ponto com $Q(x_0) \neq 0$ então Q tem fatoração única $Q = Q(x_0) \prod Q_i^{q_i}$ em fatores irredutíveis Q_i com $Q_i(x_0) = 1$.*

Prova: Seja $\mathcal{X}_\alpha$ um espaço de estabilidade para Q contendo x_0 , $Q_\alpha = Q(x_0) \prod Q_{i\alpha}^{q_{i\alpha}}$ a fatoração de Q sobre $\mathcal{X}_\alpha$. Como a família de extensões de $\mathcal{X}_\alpha$ é cofinal na coleção de todos os $\mathcal{X}_\beta$ (isto é, para cada extensão $\mathcal{X}_\gamma$ de $\mathcal{X}_\alpha$ existe um ρ tal que $\mathcal{X}_\gamma \subset \mathcal{X}_\rho$), para definir Q_i é suficiente definir $Q_{i\beta}$ nas extensões $\mathcal{X}_\beta$ de uma maneira consistente. Como não existe cindimento ou colapsamento sob restrições a $\mathcal{X}_\alpha$, temos uma fatoração única $Q_\beta = Q(x_0) \prod Q_{i\beta}^{q_{i\beta}}$ em $\mathcal{X}_\beta$ com $q_{i\beta} = q_{i\alpha}$, $Q_{i\beta}|_{\mathcal{X}_\alpha} = Q_{i\alpha}$; a unicidade garante a consistência. Claramente, $Q = Q(x_0) \prod Q_i^{q_i}$ pois isto vale em cada subespaço $\mathcal{X}_\beta$, e os Q_i são irredutíveis já que eles estão em $\mathcal{X}_\alpha$. Note que a fatoração de Q tem a mesma forma que a fatoração de Q_α .

Para provar a unicidade da fatoração, é suficiente provar que formas irredutíveis são primas. Pelo que observamos acima, se P é irredutível então P é irredutível em qualquer

espaço de estabilidade. Suponhamos que P não é primo, digamos, que P divide RS mas P não divide R nem S . Então R/P e S/P não são polinômios e então existem subespaços $\mathcal{X}_\rho$ e $\mathcal{X}_\sigma$ onde R/P e R/S não podem ser representados por polinômios. Se $\mathcal{X}_\pi$ é o espaço de estabilidade de P contendo $\mathcal{X}_\rho$ e $\mathcal{X}_\sigma$ então P_π divide $R_\pi S_\pi$ mas não divide R_π ou S_π ; mas P_π é irredutível, logo primo, e isto é uma contradição. ■

Teorema 1.1.4. (Nullstellensatz de Hilbert)

Se F é algebricamente fechado e P e Q são formas tais que $P(x) = 0$ implica $Q(x) = 0$, então P é composto de fatores irredutíveis de Q .

Prova: Se $P = \prod P_i^{p_i}$ com P_i irredutível então é suficiente provar que P_i divide Q . Se não, existe um espaço $\mathcal{X}_\alpha$ onde Q/P_i não pode ser representado como um polinômio. Escolhamos um espaço de estabilidade $\mathcal{X}_\pi$ para P_i contendo $\mathcal{X}_\alpha$. Observamos no Teorema 1.1.3 que $P_{i\pi}$ é irredutível. Mas, para $x \in \mathcal{X}_\pi$, $P_{i\pi}(x) = 0$ implica que $P_i(x) = 0$ o que implica $Q(x) = 0$ e portanto $Q_\pi(x) = 0$. Portanto Q_π divide Q_π . Assim, pelo teorema Nullstellensatz usual para $\mathcal{X}_\pi$, $P_{i\pi}$ divide Q_π o que é impossível pois $\mathcal{X}_\pi$ contém $\mathcal{X}_\alpha$. ■

1.2 Topologia de Zariski

Nas provas de alguns resultados deste trabalho usamos as técnicas de linearização por operadores diferenciais e portanto precisamos da topologia de Zariski para álgebras de dimensão arbitrária.

Um conjunto parcialmente ordenado $(\Lambda, \leq)$ é chamado *dirigido* se para todo par $\lambda, \mu \in \Lambda$ existe $\nu \in \Lambda$ tal que $\lambda \leq \nu$ e $\mu \leq \nu$.

Seja $\{J_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de álgebras, indexadas por um conjunto dirigido parcialmente ordenado Λ . Suponhamos que $\{J_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ está munida de uma família de homomorfismos de álgebras $\phi_{\lambda\mu} : J_\lambda \rightarrow J_\mu$, indexados pelos pares $\lambda, \mu \in \Lambda$ tais que $\lambda \leq \mu$. Dizemos que $\{J_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é um *sistema de limite direto* de álgebras se verifica as seguintes condições:

$\phi_{\lambda\lambda}$ é a identidade sobre J_λ para todo $\lambda \in \Lambda$;

para todo $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ com $\lambda \leq \mu \leq \nu$, $\phi_{\lambda\nu} = \phi_{\mu\nu} \circ \phi_{\lambda\mu}$.

Outra maneira de apresentar esta definição é considerar o conjunto parcialmente ordenado Λ como uma categoria cujos objetos são os elementos de Λ e tal que existe exatamente

um morfismo de λ a μ se $\lambda \leq \mu$ e não existe em outro caso. De fato, um conjunto parcialmente ordenado é essencialmente a mesma coisa que uma categoria na qual existe ao menos um morfismo entre quaisquer dois objetos e objetos isomorfos são iguais. Um sistema de limite direto de álgebras é então a mesma coisa que um funtor covariante da categoria Λ na categoria das álgebras.

Dado um sistema de limite direto, formamos o limite direto $\lim_{\rightarrow \lambda} J_\lambda = J$ como segue. Suponhamos que os J_λ são mutuamente disjuntos como conjuntos (se não, substituímos por cópias isomorfas disjuntas, por exemplo, usando $J_\lambda \times \{\lambda\}$).

Definimos uma relação sobre a união disjunta dos J_λ , dizendo que $r \in J_\lambda$ e $s \in J_\mu$ são equivalentes se existe $\nu \geq \lambda, \mu$ tal que $\phi_{\lambda\nu}(r) = \phi_{\mu\nu}(s)$ (isto é também verdade para todo $\nu' \geq \nu$). É fácil provar que é uma relação de equivalência (usando que Λ é dirigido). O conjunto J das classes de equivalências é uma álgebra se definimos adição e multiplicação como segue: dados $r \in J_\lambda$ e $s \in J_\mu$ escolhemos $\nu \geq \lambda, \mu$ e pomos

$$[r] + [s] = [\phi_{\lambda\nu}(r) + \phi_{\mu\nu}(s)],$$

$$[r][s] = [\phi_{\lambda\nu}(r)\phi_{\mu\nu}(s)].$$

É fácil ver que as operações estão bem definidas sobre as classes de equivalências, isto é, classes de equivalências dos valores definidos para soma e produto são independentes dos representantes r, s e da escolha de ν . É também fácil ver que verificam as propriedades de álgebras e que $[0], [1]$, para $0, 1 \in J_\lambda$ e λ qualquer, são a identidade da soma e a identidade da multiplicação em J . Note que para cada $\lambda \in \Lambda$ obtemos o homomorfismo de álgebras $\phi_\lambda : J_\lambda \rightarrow J$ o qual associa r a $[r]$.

Seja F um corpo infinito. Para um polinômio $f \in F[x_1, \dots, x_n]$, sejam $V(f) = \{(a_1, \dots, a_n) \in F^n \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0\}$ e $O_f = F^n - V(f)$. O espaço vetorial F^n tem uma topologia natural, a topologia de Zariski. Nesta topologia, os abertos são os conjuntos $\cup_{f \in S} O_f$, em que S é um subconjunto de $F[x_1, \dots, x_n]$.

Seja $\{\mathcal{X}_\alpha\}$ uma coleção de subespaços de dimensão finita de um espaço vetorial $\mathcal{X}$ (não necessariamente de dimensão finita). Cada um de tais subespaços tem uma topologia natural, a topologia de Zariski. Suponhamos que X_α tem dimensão n sobre F . Identificamos X_α com F^n , e consideramos sobre X_α a topologia de Zariski induzida por F^n . Se $\mathcal{X}_\alpha \subset \mathcal{X}_\beta$ a topologia de Zariski sobre $\mathcal{X}_\alpha$ é a topologia induzida por $\mathcal{X}_\beta$. Assim, a transformação inclusão $\mathcal{I}_{\beta\alpha}$ é contínua. Como os $\{\mathcal{X}_\alpha\}$ formam um conjunto dirigido, $\mathcal{X}$ é de maneira

natural o limite direto dos espaços topológicos $\mathcal{X}_\alpha$. A topologia induzida sobre $\mathcal{X}$ é novamente chamada *topologia de Zariski*. Assim, V é um aberto de $\mathcal{X}$ se e somente se $V \cap \mathcal{X}_\alpha$ é um aberto em $\mathcal{X}_\alpha$ para cada α . Como no caso de dimensão finita, abertos não vazios são densos.

Se $\mathcal{D}$ é outro espaço vetorial então, para cada α , temos os espaços $\mathcal{P}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{D})$ e $\mathcal{R}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{D})$ de transformações polinomiais e racionais de $\mathcal{X}_\alpha$, ou um subconjunto aberto de $\mathcal{X}_\alpha$, em $\mathcal{D}$. Estes subespaços são gerados pelas transformações $\mathcal{F}_\alpha : x_\alpha \rightarrow \mathcal{F}_\alpha(x_\alpha)y$, onde $y \in \mathcal{D}$ e $\mathcal{F}_\alpha$ é uma função polinomial ou racional sobre $\mathcal{X}_\alpha$. O codomínio $\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{X}_\alpha)$ de qualquer $\mathcal{F}_\alpha \in \mathcal{R}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{D})$ está contido em um subespaço de dimensão finita $\mathcal{D}_\alpha$ de $\mathcal{D}$. Se $\mathcal{X}_\alpha \subset \mathcal{X}_\beta$ temos que a restrição natural $\rho_{\alpha\beta} = \mathcal{I}_{\beta\alpha}^*$ de $\mathcal{P}(\mathcal{X}_\beta, \mathcal{D}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{D})$ ou $\mathcal{R}(\mathcal{X}_\beta, \mathcal{D}) \rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{D})$, e podemos formar os *limites inversos* $\mathcal{P}(\mathcal{X}, \mathcal{D}) \rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{X}, \mathcal{D})$ das funções polinomiais ou racionais de $\mathcal{X}$ ou um subconjunto aberto de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{D}$. Para $\mathcal{D} = F$, $\mathcal{P}(\mathcal{X}) = \mathcal{P}(\mathcal{X}, F)$ e $\mathcal{R}(\mathcal{X}) = \mathcal{R}(\mathcal{X}, F)$ são as funções polinomiais e racionais sobre $\mathcal{X}$.

Uma transformação $\mathcal{F} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{D}$ definida sobre algum subconjunto aberto de $\mathcal{X}$ está em $\mathcal{P}(\mathcal{X}, \mathcal{D})$ ou $\mathcal{R}(\mathcal{X}, \mathcal{D})$ se e somente se cada restrição $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}|_{\mathcal{X}_\alpha}$ está em $\mathcal{P}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{D})$ ou $\mathcal{R}(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{D})$. Assim, $\mathcal{F}$ é construída a partir da família consistente $\{\mathcal{F}_\alpha\}$ de funções locais. É útil observar que $\mathcal{F}$ pode ser formada de uma família consistente $\{\mathcal{F}_\beta\}$ de funções sobre qualquer coleção cofinal $\{\mathcal{X}_\beta\}$ de subespaços.

Desafortunadamente, para espaços de dimensão infinita a topologia de Zariski é estritamente mais fina que a gerada pelos conjuntos abertos $V(\mathcal{F}) = \{x \in \mathcal{X} : \mathcal{F}(x) \neq 0\}$ para $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$, e $\mathcal{R}(\mathcal{X})$ não é o corpo quociente maior de $\mathcal{P}(\mathcal{X})$. Por exemplo, se $\{x_1, x_2, \dots\}$ é uma base para $\mathcal{X}$, seja $F_n(\xi_1, \dots, \xi_n) = \xi_1^{-n}(\xi_1 - \xi_2) \dots (\xi_1 - \xi_n)$ sobre os subespaços $\mathcal{X}_n = \{x_1, \dots, x_n\}$; os F_n determinam a função racional $\mathcal{F}$ a qual não é um quociente de dois polinômios pois $\{x \in \mathcal{X} : \mathcal{F}(x) = 0 \text{ ou } \mathcal{F}(x) \text{ não está definido}\}$ é um fechado sobre o qual polinômios não nulos se anulam.

Note em particular que veremos $\mathcal{R}(\mathcal{X})$ como um espaço de funções, porém às vezes o veremos como um corpo.

A situação é análoga a da teoria das funções de variável real, onde às vezes consideramos os objetos como funções e às vezes como classes de equivalências de funções, as quais diferem sobre conjuntos de comprimento nulo. Consideramos duas funções racionais como equivalentes se elas estão definidas e são iguais sobre algum conjunto aberto denso. Cada

classe tem um único representante com domínio de definição “maximal”, e considerando somente tais funções “maximais” as relações usuais tais como $H.H^{-1} = 1$ valem.

Toda a maquinaria do cálculo diferencial pode ser feita sobre esta teoria. Para $x \in \mathcal{X}$, $H \in \mathcal{R}(\mathcal{X}, \mathcal{D})$ a *diferencial* de H com relação a x é a transformação linear $\delta H|_x : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{D}$ cujos valores em um vetor $u \in \mathcal{X}$ é $\delta_u H|_x = \delta H|_x(u)$. A aplicação $x \rightarrow \delta_u H(x)$ é a transformação racional $\delta_u H : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{D}$ e $H \rightarrow \delta_u H$ é a derivada parcial δ_u na direção u . A aplicação $\delta H : x \rightarrow \delta H|_x$ é uma transformação de $\mathcal{X}$ em $\text{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{D})$, porém esta não precisa ser racional.

Se $H \in \mathcal{R}(\mathcal{D}, \mathcal{B})$, $G \in \mathcal{R}(\mathcal{X}, \mathcal{D})$, então $H \circ G \in \mathcal{R}(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ e a *regra da cadeia* implica que

$$\delta\{H \circ G\}|_x = \delta H|_{G(x)} \circ \delta G|_x,$$

$$\delta_u\{H \circ G\}|_x = \delta_v H|_{G(x)}, \quad v = \delta_u G|_x.$$

Para funções racionais definimos a *derivada logarítmica*

$$\delta_u \log H = H^{-1} \delta_u H,$$

com as seguintes regras:

$$\delta \log HG = \delta \log H + \delta \log G,$$

$$\delta_u \delta_v \log H = \delta_v \delta_u \log H = H^{-2} \{H \delta_u \delta_v H - \delta_u H \delta_v H\}.$$

A função H é *inseparável* se $\delta H = 0$; isto é, sobre qualquer $\mathcal{X}_\alpha = \{x_1, \dots, x_n\}$ temos que $H_\alpha(\xi_1, \dots, \xi_n) = G_\alpha(\xi_1^p, \dots, \xi_n^p)$, onde p denota a característica do corpo F . Se F é perfeito, isto é equivalente a $F = G^p$ para alguma função racional G . Dizemos que H é *homogênea* de grau n se $H(\lambda x) = \lambda^n H(x)$ para todo $\lambda \in H$; uma função polinômial homogênea é chamada *forma*.

Note que qualquer $H \in \mathcal{R}(\mathcal{X}, \mathcal{D})$ tem uma única extensão $f_\Omega \in \mathcal{R}(\mathcal{X}_\Omega, \mathcal{D}_\Omega)$ para qualquer extensão Ω do corpo base F .

1.3 Polinômio Mínimo Genérico

Seja A uma álgebra estritamente associativa nas potências com 1 de dimensão finita.

Seja $a \in A$ e seja a^r o primeiro elemento na seqüência $1, a, \dots, a^{r-1}, \dots$ o qual é linearmente dependente dos precedentes. Então $\{1, a, \dots, a^{r-1}\}$ é uma base para a subálgebra $F[a]$ gerada por a , e $a^r = \sum_{i=1}^r \beta_i a^{r-i}$. Portanto, se $\mu_a(\lambda) = \lambda^r - \sum_{i=1}^r \beta_i \lambda^{r-i}$ então é claro que $\mu_a(a) = 0$. O polinômio $\mu_a(\lambda)$ é chamado *polinômio mínimo de a* e é um fator de qualquer polinômio $f(\lambda)$ tal que $f(a) = 0$. Seja $R_a : A \rightarrow A$ a multiplicação à direita por a : $x \mapsto xa$. Seja $f_a(\lambda)$ o polinômio característico da transformação linear R_a . Então o subespaço $F[a]$ é invariante relativo a R_a e é R_a -cíclico com 1 como gerador. Segue que o polinômio mínimo $\mu_a(\lambda)$ coincide com o polinômio característico da restrição $\overline{R_a}$ de R_a a $F[a]$.

Um exemplo de que nem sempre o polinômio $m_a(\lambda)$ coincide com o polinômio minimal de R_a está dado se considerarmos a álgebra $(M_n(F), \circ)$ e $e \neq 1, 0$ um idempotente desta álgebra. Então $\mu_e(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$ enquanto que o polinômio minimal de R_e é $\lambda(\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - 1)$.

Seja $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ uma base para A sobre F , e sejam $\xi_1, \dots, \xi_n$ algebricamente independentes. Seja $P = F(\xi)$ o corpo das funções racionais nos ξ_i com coeficientes em F . O elemento $x = \sum \xi_i \mu_i$ de A_P chama-se *elemento genérico* de A e o seu polinômio mínimo $m_x(\lambda)$ chama-se o *polinômio mínimo* da álgebra A . Seja $f_x(\lambda)$ o polinômio característico de $R_x : A_P \rightarrow A_P$. Calculando $f_x(\lambda)$ usando a base $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ para A_P temos que $f_x(\lambda)$ é um polinômio homogêneo de grau n nas ξ_i e λ . Como $m_x(\lambda)$ é um fator de $f_x(\lambda)$ segue que $m_x(\lambda)$ é um polinômio homogêneo nas ξ_i e λ . Portanto podemos escrever

$$m_x(\lambda) = \lambda^m - \sigma_1(\xi)\lambda^{m-1} + \dots + (-1)^m \sigma_m(\xi)$$

onde $\sigma_i(\xi)$ é um polinômio homogêneo de grau i nas ξ_i .

Escrevemos $x^k = \sum_{i=1}^n \alpha_{ki}(\xi) \mu_i$, $k = 0, 1, 2, \dots$ onde $\alpha_{ki} = \alpha_{ki}(\xi)$ é um polinômio homogêneo de grau k nos ξ_i . Como $\{1, x, \dots, x^{m-1}\}$ é uma base para a subálgebra X de A_P gerada por x , um dos m -menores da matriz (α_{ki}) , $k = 0, \dots, m-1, i = 1, \dots, n$ é não nulo enquanto todos os $(m+1)$ -menores das matrizes obtidas juntando qualquer fila $(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n})$ a (α_{ki}) são 0. A equação $m_x(x) = 0$ é equivalente ao seguinte conjunto de relações polinomiais nas ξ_i

$$\alpha_{mi} = \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \sigma_k \alpha_{m-k,i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Se $a = \sum \beta_i \mu_i \in A$, então o polinômio $m_a(\lambda)$ obtido especializando $\xi_j \rightarrow \beta_j$ em $m_x(\lambda)$ chama-se o *polinômio mínimo genérico* de a . Além disso, temos que $m_a(a) = 0$. Portanto

$m_a(\lambda)$ é divisível pelo polinômio mínimo $\mu_a(\lambda)$ de a . O polinômio $m_a(\lambda)$ é independente da escolha do elemento genérico. Escrevemos

$$m_a(\lambda) = \lambda^m - \sigma_1(a)\lambda^{m-1} + \dots + (-1)^m \sigma_m(a).$$

Os elementos $\sigma_1(a)$ e $\sigma_m(a)$ são chamados respectivamente o *traço genérico* e a *norma genérica* de a . O grau de m é denominado *grau da álgebra* A .

O polinômio mínimo genérico foi definido por meio da base $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ de $A|_F$. Vamos estabelecer a independência da escolha de base.

Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma segunda base para $A|_F$ e consideremos o elemento genérico $y = \sum_{i=1}^n \xi_i v_i$ associado a esta base. Então temos que $v_i = \sum \mu_{ij} u_j$ onde $\mu_{ij} \in F$, (μ_{ij}) é não singular e $y = \sum \xi_i (\sum_j \mu_{ij} u_j) = \sum_{i,j} \xi_i \mu_{ij} u_j$. O argumento da especialização usado acima mostra que se $m_y(\lambda)$ é o polinômio obtido de $m_x(\lambda)$ substituindo ξ_i por $\eta_j = \sum \xi_i \mu_{ij}$, então $m_y(y) = 0$. Portanto, o grau do polinômio mínimo de y em A_P é menor ou igual que m . Por simetria, este grau é m e deste modo este polinômio mínimo é $m_y(\lambda)$. Isto implica que para qualquer $a = \sum \beta_i v_i = \sum \beta \mu_{ij} u_j$ os polinômios mínimos genéricos de a definidos por x e y coincidem.

Agora notamos que $m_a(\lambda)$ é invariante sob qualquer extensão do corpo base F . Isto é, se K é uma extensão do corpo F e identificamos A como a F -subálgebra de A_K , temos que $m_a(\lambda)$ é o mesmo se calculamos em A ou em A_K . Para ver isto notemos que como (u_i) é também base para A_K ($u_i \rightarrow 1 \otimes u_i$), então, assumindo que os ξ_i são algebricamente independentes sobre K , temos que $x = \sum \xi_i u_i$ é um elemento genérico de A_K . Além disso, das propriedades do produto tensorial, é claro que o polinômio mínimo de um elemento é invariante sob extensões do corpo F . Portanto $m_x(\lambda)$ é também o polinômio mínimo de x como elemento de $A_{K(\xi)} = P(\xi) \otimes_F A$. Claramente isto implica que o polinômio mínimo genérico de a é invariante sob extensões K de F .

Definimos o polinômio mínimo genérico para a em qualquer álgebra estritamente associativa nas potências de dimensão finita com 1. Das propriedades destes polinômios e seus coeficientes podemos assumir que o corpo F é infinito posto que o polinômio mínimo genérico é invariante sob extensão do corpo F .

Para F infinito, $a \rightarrow \sigma_i(a)$ é uma função polinomial homogênea de grau i sobre F . Como o polinômio mínimo $\mu_a(\lambda)$ de $a \in A$ é um fator de $m_a(\lambda)$, é claro que o grau de $\mu_a(\lambda)$, o qual é o mesmo que a dimensão de $F[a]$, não excede o grau m da álgebra. Chamamos

a de grau maximal se $\text{grau}(\mu_a(\lambda)) = m$. Este é o caso se e somente se $\{1, a, \dots, a^{m-1}\}$ é uma base para $F[a] \mid_F$. Se $x = \sum \xi_i u_i$ é um elemento genérico, então o fato de que $\{1, x, \dots, x^{m-1}\}$ é uma base para $P[x]$, $P = F(\xi_1, \dots, \xi_n)$ implica que a matriz $(\rho_{ik})_{(m \times n)}$ dada acima é de posto m . Se $D_1(\xi), \dots, D_r(\xi)$ são determinantes não nulos de ordem m da matriz, então $a = \sum \alpha_i u_i \in A$ é de grau maximal se e somente se $D_i(a) = D_i(\alpha) \neq 0$ para algum i . Portanto se F é infinito então o conjunto de elementos do grau maximal é um subconjunto aberto não vazio de Zariski de A .

Agora denotamos por $t(a)$ o traço genérico e por $n(a)$ a norma genérica de a para enunciar o seguinte teorema:

Teorema 1.3.1. *Seja A uma álgebra estritamente associativa nas potências de dimensão finita com 1, e sejam $m_a(\lambda)$, $t(a)$ e $n(a)$ o polinômio mínimo genérico, traço e a norma de $a \in A$, m o grau de A . Então*

- (i) $t(\alpha a) = \alpha t(a)$, $\alpha \in F$, $t(a + b) = t(a) + t(b)$.
- (ii) $n(\alpha a) = \alpha^m n(a)$, $n(ab) = n(a)n(b)$ se a, b estão na subálgebra $F[c]$ gerada por um terceiro elemento c .
- (iii) $n(\lambda 1 - a) = m_a(\lambda)$, onde $\lambda 1 - a$ é um elemento de $A \mid_{F(\lambda)}$, λ uma indeterminada.
- (iv) $t(1) = m$, $n(a) = 1$.
- (v) Todo fator irredutível de $m_a(\lambda)$ é um fator do polinômio mínimo $\mu_a(\lambda)$ de a .
- (vi) Se η é um isomorfismo ou anti-isomorfismo de A em A' , então $m_{\eta(a)}(\lambda) = m_a(\lambda)$.
- (vii) Se F é infinito então os coeficientes do polinômio mínimo $m_a(\lambda)$ genérico são invariantes de Lie sob as derivações de A , isto é, $\delta_{D_a} \sigma_i|_a = 0$ para toda derivação D de A .

Prova: As equações (i) e a primeira parte de (ii) seguem do fato que $t(\xi)$ é homogêneo de grau 1 nas ξ_i e $n(\xi)$ é homogênea de grau m nas ξ_i .

Para provar a segunda parte de (ii) introduzimos a extensão $P = F(\xi, \eta, \zeta)$ dos elementos algebricamente independentes $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_0, \dots, \eta_{m-1}, \zeta_0, \dots, \zeta_{m-1}$ e consideramos os elementos $x = \sum_{i=1}^n \xi_i \mu_i$, $y = \sum_{j=0}^{m-1} \eta_j x^j$, $z = \sum_{j=0}^{m-1} \zeta_j x^j$ em A_P . Escrevemos $y^k =$

$\sum_{j=0}^{m-1} \eta_{kj} x^j$, $z^k = \sum_{j=0}^{m-1} \zeta_{kj} x^j$, $(yz)^k = \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_{kj} x^j$, $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$, onde η_{kj} , ζ_{kj} , λ_{kj} são polinômios nas ξ , η , e ζ . Consideremos o $\det(\eta_{kj})$, $\det(\zeta_{kj})$, $\det(\lambda_{kj})$. Se especializamos $\eta_1 = 1$, $\eta_j = 0$ para $j \neq 1$ obtemos $y^k = x^k$. Assim, $\det(\eta_{kj})$ especializa a 1. Portanto $\det(\eta_{kj}) \neq 0$. Igualmente, $\det(\zeta_{kj}) \neq 0$. Também a especialização $\eta_1 = 1$, $\eta_j = 0$ para $j \neq 1$, $\zeta_0 = 1$, $\zeta_i = 0$ para $i \neq 0$ mostra que $\det(\lambda_{kj}) \neq 0$. Logo segue que x, y, z, yz geram a mesma álgebra comutativa associativa X . Portanto $n(y)$, $n(z)$, $n(yz)$ são os determinantes das restrições $\bar{R}_y, \bar{R}_z, \bar{R}_{yz}$ de R_y, R_z, R_{yz} ao subespaço invariante X . Como X é associativa $\bar{R}_{yz} = \bar{R}_y \bar{R}_z$; portanto $n(yz) = n(y)n(z)$ segue da propriedade multiplicativa do determinante. A segunda parte de (ii) segue agora por especialização.

Para provar (iii), consideramos o lado esquerdo de (iii) entendendo que $\lambda 1 - a$ é considerado como um elemento de $A_{F(\lambda)}$. Sejam $\xi_1, \dots, \xi_n, \lambda$ elementos algebricamente independentes e sejam $P = F(\xi)$, $x = \sum \xi_i \mu_i$, X a subálgebra de A_P gerada por x . Então $m_x(\lambda)$ é o polinômio característico da restrição $\bar{R}_x$ de R_x a X e portanto também o polinômio característico da restrição de $\bar{R}_x$ a $X_{P(\lambda)}$, a subálgebra de $A_{P(\lambda)}$ gerada por x . Isto é, $\det(\lambda 1 - \bar{R}_x) = \det(\bar{R}_{(\lambda 1 - x)})$. Por outro lado, a subálgebra gerada por $(\lambda 1 - x)$ é também $X_{P(\lambda)}$. Assim, $\det(\bar{R}_{(\lambda 1 - x)}) = n(\lambda 1 - x)$. Logo $m_x(\lambda) = n(\lambda 1 - x)$ e (iii) segue por especialização.

Para provar a segunda parte de (iv), notemos primeiro que $n(a) = n(1)n(a)$ vale para todo a por (ii). Portanto ou $n(1) = 1$ ou $n(1) = 0$ e se $n(1) = 0$ segue que $n(a) = 0$ para todo a . Isto vale também para toda extensão do corpo F . Portanto $m_x(\lambda) = 0$ por (iii) e isto é impossível pela definição de $m_x(\lambda)$. Portanto $n(a) = 1$.

Para provar (v), seja A a subálgebra gerada por $a \in A$. Como $\mu_a(a) = 0$ temos a equação $\mu_a(\lambda) = (\lambda 1 - a)q(\lambda, a)$ no anel associativo-comutativo dos polinômios $A[\lambda]$. Agora interpretando esta equação em $A_{F(\lambda)}$ e aplicando a propriedade multiplicativa de n obtemos que $n(\mu_a(\lambda)) = n(\lambda 1 - a)n(q(\lambda, a)) = m_a(\lambda)n(q(\lambda, a))$. Por outro lado, $n(\mu_a(\lambda)) = \mu_a(\lambda)^m$ por (ii) e (iv). Portanto $m_a(\lambda)$ é um fator de $\mu_a(\lambda)^m$, o que implica (v).

Como o polinômio mínimo de $a = 1$ é $\lambda - 1$ temos que, (v) implica que $m_1(\lambda) = (\lambda - 1)^m$. Portanto $t(1) = m$ o que prova a primeira parte de (iv).

Agora, seja η um automorfismo ou anti-automorfismo de A . Então a extensão linear η de η a A_P ($P = F(\xi)$) é um automorfismo ou anti-automorfismo. Logo $m_x(\lambda) = m_{\eta(x)}(\lambda)$.

Segue que $m_a(\lambda) = m_{\eta(a)}(\lambda)$. Isto prova (vi).

Finalmente, vamos provar (vii). Seja D uma derivação de $A|_F$. Então aplicando D a $m_a(a) = 0$ obtemos

$$D(a^m) - \sigma_1(a)D(a^{m-1}) + \cdots + (-1)^{m-1}\sigma_{m-1}(a)D(a) = 0. \quad (1.1)$$

Se f é qualquer aplicação polinomial de A em A então temos a aplicação polinomial $a \rightarrow \delta_{D_a}f|a$ de A em A . Aplicando isto a $p_k : a \rightarrow a^k$ obtemos $\delta_{D_a}p_k|a = D(a^k)$. Isto é claro para $k = 1$ pois p_1 é a aplicação linear $a \rightarrow a$ o que implica que $\delta_{D_a}p_1|a = D(a)$. Então, se $\delta_{D_a}p_{k-1}|a = D(a^{k-1})$, temos $\delta_{D_a}p_k|a = \delta_{D_a}(p_{k-1}p_1)|a = \delta_{D_a}p_{k-1}|a \cdot a + a^{k-1}D(a) = D(a^k)$. A equação $m_a(a) = 0$ é equivalente à equação de aplicações $p_m - \sigma_1(a)p_{m-1} + \cdots + (-1)^m\sigma_m = 0$. Aplicando $\delta_{D_a}|a$ obtemos

$$D(a^m) - \sigma_1(a)D(a^{m-1}) - (\delta_{D_a}\sigma_1|a)a^{m-1} + \sigma_2(a)D(a^{m-2}) + (\delta_{D_a}\sigma_2|a)a^{m-2} - \cdots = 0. \quad (1.2)$$

Subtraindo a equação (1.2) da equação (1.1) obtemos

$$(\delta_{D_a}\sigma_1|a)a^{m-1} - (\delta_{D_a}\sigma_2|a)a^{m-2} + \cdots = 0.$$

Portanto, se a é de grau maximal, obtemos $\delta_{D_a}\sigma_j|a = 0$. Isto implica que $\delta_{D_a}\sigma_j|a = 0$ para todo a e j e isto prova (vii). ■

1.4 Álgebras de Jordan Quárticas

No estudo de alguns resultados das álgebras de Jordan quárticas vamos precisar das álgebras genericamente algébricas.

Definição 1.4.1. Uma álgebra A chama-se *genericamente algébrica* se:

- (i) A é uma álgebra associativa nas potências com 1.
- (ii) Existe um polinômio mônico $f_x(\lambda) \in \mathcal{P}(V)[\lambda]$ satisfazendo $f_x(x) = 0$ para cada $x \in A$,

onde $V = A$ (considerada como um espaço vetorial) e $\mathcal{P}(V)[\lambda]$ é o anel dos polinômios em λ com coeficientes em V .

Toda álgebra associativa nas potências com 1 de dimensão finita é genericamente algébrica. Um exemplo de uma álgebra genericamente algébrica de dimensão infinita é a álgebra de Jordan de uma forma quadrática $q : V \times V \rightarrow F$, com V de dimensão infinita. Veja McCrimmon [5].

Definição 1.4.2. *Seja J uma álgebra de Jordan com 1 sobre o corpo F . Dizemos que J é uma **álgebra de Jordan quártica** se existem uma forma linear $t : J \rightarrow F$ (traço de J), uma forma quadrática $s : J \rightarrow F$, uma forma cúbica $r : J \rightarrow F$ e uma forma quártica $n : J \rightarrow F$ que verificam:*

(i) *Todo x em J satisfaz a equação quártica*

$$x^{\bullet 4} - t(x)x^{\bullet 3} + s(x)x^{\bullet 2} - r(x)x + n(x)1 = 0.$$

(ii) $t(1) = 4$.

(iii) *As seguintes fórmulas de Newton são válidas:*

$$2s(x) = t(x)^2 - t(x^{\bullet 2}),$$

$$6r(x) = t(x)^3 - 3t(x)t(x^{\bullet 2}) + 2t(x^{\bullet 3}),$$

$$24n(x) = t(x)^4 - 6t(x)^2t(x^{\bullet 2}) + 8t(x)t(x^{\bullet 3}) + 3t(x^{\bullet 2})^2 - 6t(x^{\bullet 4}).$$

Por exemplo, qualquer álgebra de Jordan genericamente algébrica de grau genérico 4 é uma álgebra de Jordan quártica (veja McCrimmon [5]).

1.5 Álgebras Com Pseudo-Composição

Definição 1.5.1. *Uma álgebra A sobre um corpo F é denominada uma **álgebra com pseudo-composição** se existe uma forma bilinear simétrica $\phi(x, y)$ tal que $x^3 = \phi(x, x)x$ para todo $x \in A$.*

Quando F é algebricamente fechado, a álgebra com pseudo-composição sempre tem um idempotente e . Em [7], Meyberg e Osborn caracterizaram as álgebras com pseudo-composição com idempotente: a álgebra é de tipo e -quadrático, ou módulo o radical da sua forma bilinear é do tipo e -quadrático ou pode ser construída a partir de uma álgebra alternativa quadrática. Todo ideal próprio de uma álgebra com pseudo-composição está contido no radical de sua forma bilinear. Portanto, se esta forma bilinear é não-degenerada então a álgebra com pseudo-composição é simples.

1.6 Álgebras Ponderadas

Se a álgebra A não é associativa nas potências, então definimos:

$x^1 = x$ e indutivamente $x^{i+1} = x^i x$ chamadas as *potências principais*;

$x^{[1]} = x$ e indutivamente $x^{[i+1]} = x^{[i]} x^{[i]}$ chamadas as *potências plenas*.

Uma álgebra A sobre um corpo F é uma *álgebra ponderada* ou *bárica* se admite um homomorfismo de álgebras não trivial $\omega : A \rightarrow F$. O homomorfismo ω é denominado *peso*.

Seja B uma álgebra ponderada sobre o corpo F , com função peso ω . Dizemos que B é uma *álgebra de Bernstein* se as potências plenas de qualquer elemento $x \in B$ satisfazem a equação

$$x^{[3]} - \omega(x)^2 x^{[2]} = 0.$$

Seja A uma álgebra comutativa de dimensão finita sobre o corpo F . A álgebra A pode não ter elemento identidade. Seja $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ uma base de A . Existe um polinômio nas potências principais que anula todos os elementos de A . O polinômio de grau minimal, que anula todos os elementos de A , é chamado *polinômio mínimo genérico* de A e é denotado por

$$\lambda^r + \theta_1 \lambda^{r-1} + \theta_2 \lambda^{r-2} + \dots + \theta_{r-1} \lambda$$

onde θ_p são polinômios homogêneos de grau p nas coordenadas ξ_i do elemento genérico $x = \sum \xi_i a_i$.

Uma álgebra ponderada A com função peso ω é chamada uma *álgebra train* de grau r se os coeficientes θ_p do polinômio mínimo genérico de A são funções de $\omega(x)$.

Seja A uma álgebra ponderada sobre F com função peso ω . A é dita *álgebra train especial* se $R = \ker \omega$ é nilpotente e todas as potências principais R^i ($R^1 = R, R^{i+1} = R^i R, i > 0$) são ideais de A .

Veja o artigo de Reed [8].

1.7 Categorias e Funtores

Os resultados fundamentais deste trabalho precisam de alguns conceitos relacionados a categorias e funtores.

Definição 1.7.1. *Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste de:*

- (1) *uma classe $ob\mathcal{C}$ de objetos.*
- (2) *para cada par ordenado (A, B) de objetos de $\mathcal{C}$ um conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ cujos elementos são chamados de morfismos com domínio A e codomínio B .*
- (3) *Para cada tripla ordenada (A, B, C) de objetos de $\mathcal{C}$ temos uma "composição" $\circ$*

$$\circ : Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \rightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$$

$$(f, g) \mapsto gf$$

Assumimos que os objetos e morfismos satisfazem as seguintes condições:

C1. *Se $(A, B) \neq (C, D)$, então $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ e $Hom_{\mathcal{C}}(C, D)$ são disjuntos.*

C2. *Se $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$ e $h \in Hom_{\mathcal{C}}(C, D)$, então $(hg)f = h(gf)$*

C3. *Para cada $A \in ob\mathcal{C}$ temos um elemento 1_A tal que $f1_A = f$ para todo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ e $1_Ag = g$ para todo $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$. O elemento 1_A é único.*

Exemplo 1.7.2. *Denotemos por $\mathcal{QJ}$ uma classe cujos objetos são os pares (J, t) onde J é uma álgebra de Jordan quártica com uma forma traço t e cujos morfismos $\psi : (J_1, t_1) \rightarrow (J_2, t_2)$ são os homomorfismos de álgebras com 1 que preservam a forma traço t e portanto preservam s , r e n . Claramente $\mathcal{QJ}$ é uma categoria.*

Definição 1.7.3. *Uma categoria $\mathcal{D}$ é uma subcategoria da categoria $\mathcal{C}$ se os objetos de $\mathcal{D}$ são uma sub-classe dos objetos de $\mathcal{C}$ e para qualquer par ordenado (A, B) de objetos de $\mathcal{D}$ $Hom_{\mathcal{D}}(A, B) \subseteq Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$. Requer-se também que 1_A para os objetos de $\mathcal{D}$ e o produto $\circ$ de morfismos para $\mathcal{D}$ sejam os mesmos que para $\mathcal{C}$.*

Denotemos por $\widetilde{\mathcal{QJ}}$ a classe cujos objetos são os pares (J, t) onde J é uma álgebra de Jordan quártica com uma forma traço t e tal que existem elementos $x \in J$ com $t(x) = 0$ e $t(x^{\bullet 3}) \neq 0$ o que equivale a dizer que $t \nmid r$. É claro que $\widetilde{\mathcal{QJ}}$ é uma subcategoria da categoria $\mathcal{QJ}$.

Definição 1.7.4. A subcategoria $\mathcal{D}$ é dita **plena** se $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ para todo $A, B \in \mathcal{D}$.

Pode-se mostrar que $\widetilde{\mathcal{QJ}}$ é uma subcategoria plena da categoria $\mathcal{QJ}$.

Definição 1.7.5. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Um **funtor** $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$ consiste de

- (i) Uma transformação $A \rightarrow \mathcal{F}(A)$ de objetos de $\mathcal{C}$ em objetos de $\mathcal{D}$.
- (ii) Para cada par de objetos (A, B) de $\mathcal{C}$, uma transformação $f \rightarrow \mathcal{F}(f)$ de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ em $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B)$.

Requer-se as seguintes condições:

(F1) Se gf é definido em $\mathcal{C}$, então $\mathcal{F}(gf) = \mathcal{F}(g)\mathcal{F}(f)$.

(F2) $\mathcal{F}(1_A) = 1_{\mathcal{F}A}$.

Por exemplo, a transformação da categoria dos grupos abelianos na categoria dos conjuntos, que envia o grupo $(G, +)$ no conjunto G , é um funtor.

Definição 1.7.6. Um funtor $\mathcal{F}$ chama-se **fiel** se para cada par de objetos (A, B) em $\mathcal{C}$ a transformação $f \rightarrow \mathcal{F}(f)$ de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ em $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B)$ é injetora e chama-se **pleno** se é sobrejetora.

No transcurso deste trabalho estudaremos alguns exemplos concretos das últimas duas definições.

Álgebras Cúbicas Admissíveis

Neste capítulo apresentamos o relacionamento das álgebras cúbicas admissíveis com as álgebras quárticas, e as ferramentas para compreender melhor o teorema da classificação das álgebras cúbicas admissíveis com forma traço não-degenerada.

2.1 Definição e Exemplos

Definição 2.1.1. *Sejam A uma álgebra comutativa sobre um corpo F , N uma forma cúbica chamada **norma** de A . Dizemos que A é uma **álgebra cúbica admissível** se*

$$x^2 x^2 = N(x)x \quad (2.1)$$

para qualquer $x \in A$.

As álgebras cúbicas admissíveis são também chamadas de *álgebras de Jordan cúbicas*, pois a forma cúbica N é usada para construir álgebras de Jordan.

Para a norma N existe uma forma bilinear simétrica associativa $\langle, \rangle$ tal que $N(x) = \langle x, x^2 \rangle$ para todo $x \in A$. Veja o Teorema 2.1.7 abaixo.

A seguir vamos dar alguns exemplos de álgebras cúbicas admissíveis (veja o Teorema 2.2.5).

Exemplo 2.1.2. *Seja $J = F1 \oplus V$ uma álgebra de Jordan da forma quadrática $q : V \rightarrow F$, $t(\alpha 1 + v) = 4\alpha$. A álgebra $(V, \langle, \rangle)$ com $V^2 = 0$ e $\langle v, v \rangle = \frac{4}{3}q(v)$ com a norma trivial é uma álgebra cúbica admissível.*

Exemplo 2.1.3. Seja $J = Fe_1 \oplus Fe_2 \oplus V$ a álgebra de Jordan com a multiplicação dada por

$$(e_i)^{\bullet 2} = e_i, \quad e_i \bullet v = \frac{1}{2}v, \quad e_1 \bullet e_2 = v^{\bullet 2} = 0.$$

Seja $t : J \rightarrow F$ a forma linear dada por

$$t(V) = 0, \quad t(e_1) = 1, \quad t(e_2) = 3.$$

A álgebra $(Fa \oplus V, <, >)$ com $a = \frac{3e_1 - e_2}{2}$ onde $a^2 = a$, $av = \frac{1}{2}v$, $V^2 = 0$, $<a, a> = 1$, $<a, v> = <v, v> = 0$ é uma álgebra cúbica admissível.

Exemplo 2.1.4. Seja $J = J_1 \oplus J_2$ a soma direta de ideais com $J_i = Fe_i \oplus V_i$ a álgebra de Jordan da forma quadrática $q_i : V_i \rightarrow F$ com identidade e_i , $t : J \rightarrow F$ a forma linear tal que $t(V_1 + V_2) = 0$, $t(e_1) = t(e_2) = 2$. A álgebra $A = Fa \oplus V_1 \oplus V_2$, onde $a = e_1 - e_2$ e

$$\begin{aligned} (\alpha a + v_1 + v_2)^2 &= \frac{1}{2}(q_1(v_1) + q_2(v_2))a + 2\alpha(v_1 - v_2), \\ <\alpha a + v_1 + v_2, \alpha a + v_1 + v_2> &= \frac{2}{3}(2\alpha^2 + q_1(v_1) + q_2(v_2)), \end{aligned}$$

é uma álgebra cúbica admissível.

Exemplo 2.1.5. Seja $K|_F$ uma extensão quadrática de F com automorfismo de Galois $k \rightarrow \bar{k}$. Sejam:

$J = K1 \oplus V$ a álgebra de Jordan de uma forma quadrática $q : V \rightarrow K$ sobre K .

J^F a álgebra J considerada como álgebra sobre F .

Então J^F é uma álgebra de Jordan quártica com traço $t(k1 + v) = 2(k + \bar{k})$. A álgebra $A = K_0 \oplus V$ onde $K_0 = \{k \in K : \bar{k} = -k\}$ com

$$(k + v)^2 = \frac{1}{2}(q(v) + \overline{q(v)}) + 2kv, \quad <k + v, k + v> = \frac{2}{3}(2k^2 + q(v) + \overline{q(v)})$$

é uma álgebra cúbica admissível denotada por $(\mathcal{A}_K, q)$.

Exemplo 2.1.6. Seja (J, t) a álgebra de Jordan quártica com $J = F \times H$ e H a álgebra de Jordan genericamente algébrica de grau genérico 3 e polinômio mínimo genérico dado por

$$\lambda^3 - \tau(x)\lambda^2 + \sigma(x)\lambda - \nu(x),$$

onde $t((\alpha, x)) = \alpha + \tau(x)$ (o traço genérico) para qualquer $\alpha \in F$ e $x \in H$.

Então se sobre H definimos o produto

$$x * x = x^{\bullet 2} - \tau(x)x + \sigma(x)1_H$$

e

$$\langle x, x \rangle = \frac{1}{3}\tau(x^{\bullet 2})$$

$((H, *), \langle, \rangle)$ é álgebra cúbica admissível.

Notemos que se substituimos x por x^2 na equação (2.1), obtemos $N(x)^2 x^2 = N(x^2)x^2$ para qualquer $x \in A$. Assim, $N(x)^2 = N(x^2)$ para qualquer x com $x^2 \neq 0$, e em particular para qualquer x com $N(x) \neq 0$. Se $N \neq 0$ então o conjunto destes elementos é denso (com respeito à topologia de Zariski), e temos que

$$N(x)^2 = N(x^2) \quad (2.2)$$

para qualquer $x \in A$. Por outro lado, linearizando a equação (2.1) obtemos

$$4x^2(xy) = 3N(x, x, y)x + N(x)y \quad (2.3)$$

e substituindo x por x^2 obtemos

$$4N(x)x(x^2y) = 3N(x^2, x^2, y)x^2 + N(x^2)y. \quad (2.4)$$

Teorema 2.1.7. *Seja A qualquer álgebra cúbica admissível com norma N . Então existe uma forma bilinear simétrica associativa $\langle, \rangle$ tal que $N(x) = \langle x, x^2 \rangle$ para qualquer $x \in A$. Se $N \neq 0$ então a forma $\langle, \rangle$ é única.*

Prova: Se $N = 0$ então podemos tomar $\langle x, y \rangle = 0$ para qualquer $x, y \in A$. Daí assumimos no que segue que $N \neq 0$ e por extensão de escalares se necessário que o corpo F é infinito; portanto podemos identificar as funções polinomiais sobre A ou $A \times A$ com os polinômios que as definem.

Seja $\{v_i : i \in I\}$ uma base de A . Logo se $x \in A$, $x = \sum_{i \in I} \alpha_i v_i$ com $\alpha_i \in F$, então

$$\begin{aligned} x^2 &= \left(\sum_{i \in I} \alpha_i v_i \right) \left(\sum_{j \in I} \alpha_j v_j \right) \\ &= \sum_{i, j \in I} \alpha_i \alpha_j v_i v_j \\ &= \sum_{i, j} \alpha_i \alpha_j \left(\sum_k \beta_{ijk} v_k \right) \\ &= \sum_{k \in I} \left(\sum_{i, j} \alpha_i \alpha_j \beta_{ijk} \right) v_k. \end{aligned}$$

Seja $q_k(x) := \sum \alpha_i \alpha_j \beta_{ijk}$. As funções $q_i, i \in I$, são quadráticas e $x^2 = \sum_{i \in I} q_i(x) v_i$ para qualquer $x \in A$. As equações (2.2) e (2.4) implicam que $N(x) \mid N(x^2, x^2, y) q_i(x)$ para qualquer i . De fato, a equação (2.4) é $4N(x)x(x^2y) = 3N(x^2, x^2, y)x^2 + N(x^2)y$ e pela equação (2.2) temos que

$$\begin{aligned} 4N(x)x(x^2y) - N(x)^2y &= 3N(x^2, x^2, y)x^2, \\ N(x)[4x(x^2y) - N(x)y] &= 3N(x^2, x^2, y) \left(\sum_{i \in I} q_i(x) v_i \right), \\ N(x)[4x(x^2y) - N(x)y] &= 3 \sum_{i \in I} N(x^2, x^2, y) q_i(x) v_i. \end{aligned}$$

Daí segue que $N(x) \mid N(x^2, x^2, y) q_i(x)$ para $i \in I$.

Vejamos primeiro que $N(x) \mid N(x^2, x^2, y)$.

No caso contrário, existe um fator irredutível $f(x)$ de $N(x)$, de grau 1 ou 2 tal que $f(x) \mid q_i(x)$ para qualquer i . Como $N \neq 0$, então existe $x_0 \in A$ tal que $N(x_0) \neq 0$. Logo pelo Teorema (1.1.3) temos que N tem uma fatoração única $N(x) = N(x_0) \prod f_i^{q_i}$ em fatores irredutíveis f_i com $f_i(x_0) = 1$. Como $N(x) \nmid N(x^2, x^2, y)$ mas $N(x) \mid N(x^2, x^2, y) q_i(x)$ temos que existe um fator irredutível $f(x)$ tal que $f(x) \mid q_i(x)$ para qualquer i .

No caso em que $f(x)$ é linear obtemos $x^2 = f(x)\varphi(x)$ para alguma transformação linear $\varphi : A \rightarrow A$ e neste caso

$$N(x)x = x^2x^2 = f(x)^2\varphi^2(x).$$

Como $x^2 = f(x)\varphi(x)$, então se trocamos x por $\varphi(x)$ temos que

$$\varphi(x)^2 = f(\varphi(x))\varphi(\varphi(x)) = f(\varphi(x))\varphi^2(x)$$

e portanto

$$N(x)x = f(x)^2 f(\varphi(x)) \varphi^2(x)$$

para qualquer $x \in A$. Assim, como $f(x)$ é linear, $f(x)^2$ é quadrática e portanto $\varphi(x)^2 \in Fx$ para qualquer x tal que $N(x) \neq 0$ e por densidade para qualquer $x \in A$. Isto implica a existência de um escalar $\alpha \in F$ tal que $\varphi^2(x) = \alpha x$ para qualquer x , e então $N(x)x = f(x)^2 f(\varphi(x)) \alpha x$. Logo $N(x) = \alpha f(x)^2 f(\varphi(x))$, pois se $x = 0$ a identidade é trivial. Assim, linearizando temos que

$$6N(x, y, z) = \alpha[2f(x)f(y)f(\varphi(z)) + 2f(y)f(z)f(\varphi(x)) + 2f(x)f(z)f(\varphi(y))].$$

Logo

$$N(x, y, z) = \frac{\alpha}{3}[f(x)f(y)f(\varphi(z)) + f(y)f(z)f(\varphi(x)) + f(x)f(z)f(\varphi(y))]$$

para $x, y, z \in A$. Portanto $N(x^2, x^2, y) = N(f(x)\varphi(x), f(x)\varphi(x), y)$ e como N é trilinear então $N(x^2, x^2, y) = f(x)^2 N(\varphi(x), \varphi(x), y)$. E, como $N(x, x, x) = \alpha f(x)^2 f(\varphi(x))$, segue que

$$\begin{aligned} N(x^2, x^2, y) &= N(f(x)\varphi(x), f(x)\varphi(x), y) \\ &= f(x)^2 N(\varphi(x), \varphi(x), y) \\ &= f(x)^2 \frac{\alpha}{3}[f(\varphi(x))f(\varphi(x))f(\varphi(y)) + f(\varphi(x))f(y)f(\varphi^2(x)) \\ &\quad + f(\varphi(x))f(y)f(\varphi^2(x))] \\ &= f(x)^2 \frac{\alpha}{3}[f(\varphi(x))^2 f(\varphi(y)) + 2f(\varphi(x))f(y)f(\varphi^2(x))] \\ &= f(x)^2 \frac{\alpha}{3}[f(\varphi(x))^2 f(\varphi(y)) + 2f(\varphi(x))f(y)f(\alpha x)] \\ &= f(x)^2 \frac{\alpha}{3}[f(\varphi(x))^2 f(\varphi(y)) + 2\alpha f(\varphi(x))f(y)f(x)] \end{aligned}$$

o qual é divisível por $\alpha f(x)^2 f(\varphi(x)) = N(x)$.

Se $f(x)$ for quadrática então existe um elemento fixo $a \in A$ tal que $x^2 = f(x)a$ para qualquer $x \in A$. Logo $N(x)x = x^2 x^2 = f(x)a f(x)a = f(x)^2 a^2 = f(x)^2 f(a)a$ para qualquer x e concluímos que a dimensão de A é 1. Portanto $A = Fa$, $N(\lambda a) = \lambda^3 N(a)$ com $N(a) \neq 0$ e $N((\lambda a)^2, (\lambda a)^2, \mu a) = \lambda^4 \mu N(a) = \lambda \mu N(\lambda a)$ como queremos.

Como consequência existe uma forma bilinear $\langle x, y \rangle$ tal que

$$N(x^2, x^2, y) = N(x) \langle x, y \rangle \tag{2.5}$$

para todo $x, y \in A$. Em particular usando a equação (2.2) temos que

$$N(x)^2 = N(x^2) = N(x^2, x^2, x^2) = N(x) \langle x, x^2 \rangle .$$

Logo $N(x) = \langle x, x^2 \rangle$ para todo $x \in A$.

Substituindo x por x^2 em (2.5) temos que

$$\begin{aligned} N((x^2)^2, (x^2)^2, y) &= N(x^2) \langle x^2, y \rangle, \\ N(x)^2 N(x, x, y) &= N(x^2) \langle x^2, y \rangle, \\ N(x, x, y) &= \langle x^2, y \rangle . \end{aligned}$$

Linearizando obtemos

$$N(x, y, z) = \langle xy, z \rangle \quad (2.6)$$

para todo $x, y, z \in A$. A simetria de $N(\ , \ , \)$ implica que

$$\langle xy, z \rangle = \langle yz, x \rangle \quad (2.7)$$

para todo $x, y, z \in A$.

Vejamos agora a simetria de $\langle, \rangle$. Como $N(x) = \langle x, x^2 \rangle$ e $N(x) = \langle x^2, x \rangle$ pela equação (2.6) temos $\langle x, x^2 \rangle = \langle x^2, x \rangle$. Linearizando esta equação, e usando a equação (2.7), obtemos:

$$\begin{aligned} \langle x, yx \rangle + \langle x, xy \rangle + \langle y, x^2 \rangle &= \langle x^2, y \rangle + \langle yx, x \rangle + \langle xy, x \rangle, \\ 2 \langle x, xy \rangle + \langle y, x^2 \rangle &= \langle xx, y \rangle + 2 \langle xy, x \rangle, \\ 2 \langle x, xy \rangle + \langle y, x^2 \rangle &= 3 \langle x^2, y \rangle . \end{aligned}$$

Substituindo x por x^2 mais uma vez temos que:

$$\begin{aligned} \langle y, x^2 x^2 \rangle + 2 \langle x^2, x^2 y \rangle &= 3 \langle x^2 x^2, y \rangle, \\ \langle y, N(x)x \rangle + 2 \langle x^2, x^2 y \rangle &= 3 \langle N(x)x, y \rangle, \\ N(x) \langle y, x \rangle + 2 \langle x^2, x^2 y \rangle &= 3N(x) \langle x, y \rangle . \end{aligned} \quad (2.8)$$

Da equação (2.7) temos que $\langle xy, z \rangle = \langle yz, x \rangle$, logo

$$\langle x^2, x^2 y \rangle = \langle x(x^2 y), x \rangle .$$

A equação (2.4) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 4N(x)x(x^2y) &= 3N(x^2, x^2, y)x^2 + N(x^2)y, \\
 4N(x)x(x^2y) &= 3N(x) \langle x, y \rangle x^2 + N(x)^2y, \\
 4x(x^2y) &= 3 \langle x, y \rangle x^2 + N(x)y, \\
 4x(x^2y) &= 3 \langle x, y \rangle x^2 + \langle x, x^2 \rangle y.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Assim, da equação (2.8) e da equação (2.9) temos que:

$$\begin{aligned}
 3N(x) \langle x, y \rangle &= N(x) \langle y, x \rangle + 2 \langle \frac{3 \langle x, y \rangle x^2}{4} + \frac{N(x)y}{4}, x \rangle, \\
 3N(x) \langle x, y \rangle &= N(x) \langle y, x \rangle + 2 \langle \frac{3 \langle x, y \rangle x^2}{4}, x \rangle + 2 \langle \frac{N(x)y}{4}, x \rangle, \\
 3N(x) \langle x, y \rangle &= N(x) \langle y, x \rangle + \frac{3}{2} \langle x, y \rangle \langle x^2, x \rangle + \frac{1}{2} N(x) \langle y, x \rangle, \\
 3N(x) \langle x, y \rangle &= N(x) \langle y, x \rangle + \frac{3}{2} N(x) \langle x, y \rangle + \frac{1}{2} N(x) \langle y, x \rangle.
 \end{aligned}$$

Como $N(x) \neq 0$, temos que

$$\begin{aligned}
 3 \langle x, y \rangle &= \langle y, x \rangle + \frac{3}{2} \langle x, y \rangle + \frac{1}{2} \langle y, x \rangle, \\
 \frac{3}{2} \langle y, x \rangle &= \frac{3}{2} \langle x, y \rangle, \\
 \langle y, x \rangle &= \langle x, y \rangle.
 \end{aligned}$$

Portanto $\langle, \rangle$ é simétrica. E agora a associatividade segue da equação (2.7).

A unicidade de $\langle, \rangle$ segue da equação (2.7) pois, se $N(x) = (x, x^2)$ para alguma forma bilinear associativa simétrica $(\ , \)$, então $N(x, y, z) = (x, yz)$. Assim,

$$N(x) \langle x, y \rangle = N(x^2, x^2, y) = (x^2, x^2y) = (x^2x^2, y) = N(x)(x, y)$$

o que implica que $\langle x, y \rangle = (x, y)$ para todo $x, y \in A$.

Só resta verificar que se o corpo F é finito, então a forma bilinear $\langle, \rangle$, a qual foi definida sobre um corpo infinito K , extensão de F , toma valores em F quando é aplicada a elementos de A . Da equação (2.3) $4x^2(xy) = 3N(x, x, y)x + N(x)y$ temos que

$$4x^2(xy) = 3 \langle x^2, y \rangle x + \langle x^2, x \rangle y. \tag{2.10}$$

Logo obtemos que $\langle x^2, y \rangle \in F$ para todo $x, y \in A$ e portanto $\langle A^2, A \rangle \subseteq F$. Mas se a é qualquer elemento em A com $N(a) \neq 0$, a equação (2.1) implica que $a \in A^2$ e a equação

(2.10) com $x = a$ fica $4a^2(ay) = 3 \langle a^2, y \rangle a + \langle a^2, a \rangle y$ o que implica que $A^2 = A$. Portanto $\langle A, A \rangle \subset F$. ■

A forma bilinear referida no teorema acima será chamada a *forma traço* de N . Se $N = 0$ podem existir várias delas. O caso extremo é a situação na qual $A^2 = 0$, em que qualquer forma bilinear simétrica sobre A é uma forma traço.

Note que das equações (2.9) e (2.10) obtemos

$$x(x^2y) - x^2(xy) = \frac{3}{4}(\langle x, y \rangle x^2 - \langle x^2, y \rangle x) \quad (2.11)$$

para todo $x, y \in A$, em que A é uma álgebra cúbica admissível com norma não nula. Em geral a equação (2.11) não é satisfeita se a norma é trivial. Por exemplo, seja $A = Fu + Fv + Fw$ uma álgebra comutativa com o produto dado por $u^2 = v, uv = w = uw$ e os outros produtos sendo zero. Então A é uma álgebra cúbica admissível com norma trivial. E

$$u(u^2u) - u^2u^2 = w \neq \frac{3}{4}(\langle u, u \rangle u^2 - \langle u^2, u \rangle u)$$

não importante qual forma bilinear é usada.

2.2 Algumas Álgebras de Jordan Quárticas

As únicas álgebras de Jordan quárticas de grau genérico 1 são os corpos, enquanto que as álgebras de Jordan quárticas de grau genérico 4 são exatamente as álgebras de Jordan genericamente algébricas de grau genérico 4.

Caracterizemos agora as álgebras de Jordan quárticas de grau genérico 2 e 3.

Teorema 2.2.1. (Álgebras de Jordan quárticas de grau 2)

Seja J uma álgebra de Jordan quártica de grau genérico 2, forma traço t e polinômio mínimo genérico

$$m_x(\lambda) = \lambda^2 - \tau(x)\lambda + \sigma(x), \quad (2.12)$$

para uma forma linear τ e uma forma quadrática σ . Então uma das seguintes afirmações vale:

(i) $t = 2\tau$.

(ii) *Existem idempotentes primitivos $e_1, e_2 = 1 - e_1 \in J$ com decomposição de Peirce $J = Fe_1 \oplus Fe_2 \oplus J_{1/2}$ ($J_{1/2} = \{x \in J : e_1 \bullet x = \frac{1}{2}x\}$) tal que $J_{1/2} \bullet J_{1/2} = 0$ e para todo $\alpha, \beta \in F$ e $x \in J_{1/2}$*

$$t(\alpha e_1 + \beta e_2 + x) = \alpha + 3\beta. \quad (2.13)$$

Reciprocamente, dada uma álgebra de Jordan J de uma forma quadrática (grau genérico 2) com polinômio mínimo genérico $m_x(\lambda) = \lambda^2 - \tau(x)\lambda + \sigma(x)$, então J com o traço $t = 2\tau$ é uma álgebra de Jordan quártica; e se J satisfaz as condições em (ii) então J com o traço

$$t(\alpha e_1 + \beta e_2 + x) = \alpha + 3\beta$$

é uma álgebra de Jordan quártica.

Prova: Seja J uma álgebra de Jordan quártica com traço t e polinômio mínimo genérico $m_x(\lambda) = \lambda^2 - \tau(x)\lambda + \sigma(x)$. Seja $J_0 = \{x \in J : t(x) = 0\}$, assim que $J = F1 \oplus J_0$. De fato, se $a \in J$ então $a = \frac{1}{4}t(a)1 + a - \frac{1}{4}t(a)1$. É claro que $t(a - \frac{1}{4}t(a)1) = t(a) - \frac{t(a)}{4}t(1) = 0$, logo $a - \frac{1}{4}t(a)1 \in J_0$. Seja $b \in F1 \cap J_0$. Temos que $b = \lambda 1$, $t(b) = t(\lambda 1) = \lambda t(1) = 4\lambda = 0$ o que implica $\lambda = 0$ e segue que $b = 0$.

No caso em que $\tau(J_0) = 0$, então $t(\alpha 1 + x) = t(\alpha 1) + t(x) = \alpha t(1) + 0 = 4\alpha = 2\tau(\alpha 1 + x)$. Portanto $t = 2\tau$ e neste caso obtemos (i).

No outro caso, temos que $\tau(J_0) \neq 0$, Seja a qualquer elemento em J_0 com $\tau(a) = 1$. Este elemento a existe pois, como $\tau(J_0) \neq 0$, existe $b \in J_0$ tal que $t(b) \neq 0$, e se $a = \frac{b}{t(b)}$, então $\tau(a) = 1$. Então

$$a^{\bullet 2} = a - \sigma(a)1$$

pois $a^{\bullet 2} - \tau(a)a + \sigma(a)1 = 0$. Temos:

$$\begin{aligned} a^{\bullet 2} \bullet a &= a^{\bullet 2} - \sigma(a)a \bullet 1, \\ a^{\bullet 3} &= a^{\bullet 2} - \sigma(a)a \\ &= (a - \sigma(a)1) \bullet 1 - \sigma(a)a \\ &= a - \sigma(a)1 - \sigma(a)a. \end{aligned}$$

Logo

$$a^{\bullet 3} = (1 - \sigma(a))a - \sigma(a)1.$$

Temos:

$$\begin{aligned} a^{\bullet 3} \bullet a &= (1 - \sigma(a))a^{\bullet 2} - \sigma(a)a, \\ a^{\bullet 4} &= a^{\bullet 2} - \sigma(a)a^{\bullet 2} - \sigma(a)a \\ &= a - \sigma(a)1 - \sigma(a)(a - \sigma(a)1) - \sigma(a)a \\ &= a - \sigma(a)1 - \sigma(a)a + \sigma(a)^2 1 - \sigma(a)a \\ &= a - 2\sigma(a)a - \sigma(a)1 + \sigma(a)^2 1. \end{aligned}$$

Logo

$$a^{\bullet 4} = (1 - 2\sigma(a))a + (\sigma(a)^2 - \sigma(a))1.$$

Pelas fórmulas de Newton, como $t(1) = 4$ e $t(a) = 0$, temos:

$$\begin{aligned} 2s(a) &= t(a)^2 - t(a^{\bullet 2}) \\ &= 0 - t(a - \sigma(a)1) \\ &= -t(a) + \sigma(a)t(1) \\ &= 4\sigma(a), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6r(a) &= t(a)^3 - 3t(a)t(a^{\bullet 2}) + 2t(a^{\bullet 3}) \\ &= 2t((1 - \sigma(a))a - \sigma(a)1) \\ &= -2t(1)\sigma(a) \\ &= -8\sigma(a), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24n(a) &= t(a)^4 - 6t(a)^2 t(a^{\bullet 2}) + 8t(a)t(a^{\bullet 3}) + 3t(a^{\bullet 2})^2 - 6t(a^{\bullet 4}) \\ &= 3t(a^{\bullet 2})^2 - 6t(a^{\bullet 4}) \\ &= 3t[a - \sigma(a)1]^2 - 6t(1 - 2\sigma(a))a + (\sigma(a)^2 - \sigma(a))1 \\ &= 3[t(a) - \sigma(a)t(1)]^2 - 6(1 - 2\sigma(a))t(a) - 6(\sigma(a)^2 - \sigma(a))t(1) \\ &= 3[\sigma(a)^2 16] - 24(\sigma(a)^2 - \sigma(a)) \\ &= 24\sigma(a)^2 + 24\sigma(a). \end{aligned}$$

Portanto temos:

$$\begin{aligned} a^{\bullet 4} - t(a)a^{\bullet 3} + s(a)a^{\bullet 2} - r(a)a + n(a)1 &= 0, \\ (1 - 2\sigma(a))a + (\sigma(a)^2 - \sigma(a))1 + 2\sigma(a)a^{\bullet 2} + \frac{4}{3}\sigma(a)a + (\sigma(a)^2 + \sigma(a))1 &= 0, \\ a - 2\sigma(a)a + \sigma(a)^2 1 - \sigma(a)1 + 2\sigma(a)(a - \sigma(a)1) + \frac{4}{3}\sigma(a)a + (\sigma(a)^2 + \sigma(a))1 &= 0, \\ a - 2\sigma(a)a + \sigma(a)^2 1 - \sigma(a)1 + 2\sigma(a)a - 2\sigma(a)^2 1 + \frac{4}{3}\sigma(a)a + \sigma(a)^2 1 + \sigma(a)1 &= 0, \end{aligned}$$

$$(1 + \frac{4}{3}\sigma(a))a = 0.$$

Como $\tau(a) = 1$, temos que $a \neq 0$, e logo $\sigma(a) = -\frac{3}{4}$ e portanto

$$a^{\bullet 2} = a + \frac{3}{4}.$$

Sejam $e_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}a$ e $e_2 = 1 - e_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}a$. Então e_1 e e_2 são idempotentes primitivos ortogonais. Além disso, temos:

$$t(e_1) = t(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}a) = t(\frac{1}{4}) + \frac{1}{2}t(a) = \frac{1}{4}t(1) = 1,$$

$$t(e_2) = t(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}a) = t(\frac{3}{4}1) - \frac{1}{2}t(a) = \frac{3}{4}t(1) = 3.$$

Logo, $t(e_1) = 1$ e $t(e_2) = 3$. Por outro lado, se $V = \{x \in J_0 : \tau(x) = 0\}$ então $\tau(a+x) = 1$ para qualquer $x \in V$. Assim, $\sigma(a+x) = -\frac{3}{4}$ como acima e portanto

$$(a+x)^{\bullet 2} = \tau(a+x)(a+x) - \sigma(a+x)1 = a+x + \frac{3}{4}1 = a^{\bullet 2} + x.$$

Assim, $2ax + x^{\bullet 2} = x$ para todo $x \in V$, o que implica que $x^{\bullet 2} = 0$ e $ax = \frac{1}{2}x$ para todo $x \in V$ e portanto $e_1x = \frac{1}{2}x$ para todo $x \in V$. Portanto

$$V = J_{\frac{1}{2}}, \quad J_{\frac{1}{2}} \bullet J_{\frac{1}{2}} = 0,$$

$$A = F1 \oplus V = Fe_1 \oplus Fe_2 \oplus J_0,$$

$$t(\alpha e_1 + \beta e_2 + x) = \alpha t(e_1) + \beta t(e_2) + t(x) = \alpha + 3\beta.$$

e obtemos o caso (ii).

Para a recíproca, se J é uma álgebra de Jordan de grau genérico 2 e polinômio mínimo genérico como na equação (2.12), então qualquer $x \in J$ é uma raiz do polinômio

$$m_x(\lambda)^2 = \lambda^4 - 2\tau(x)\lambda^3 + (2\sigma(x) + \tau(x)^2)\lambda^2 - 2\tau(x)\sigma(x)\lambda + \sigma(x)^2.$$

Então J satisfaz a equação quártica

$$\lambda^{\bullet 4} - t(x)\lambda^{\bullet 3} + s(x)\lambda^{\bullet 2} - r(x)\lambda + n(x)1 = 0$$

com

$$\begin{aligned} t(x) &= 2\tau(x), \\ s(x) &= 2\sigma(x) + \tau(x)^2, \\ r(x) &= 2\tau(x)\sigma(x), \\ n(x) &= \sigma(x)^2. \end{aligned}$$

Temos que $t(1) = 2\tau(1) = 4$. Vamos verificar as fórmulas de Newton. Como $x^{\bullet 2} = \tau(x)x - \sigma(x)$ temos $t(x^{\bullet 2}) = \tau(x)t(x) - \sigma(x)t(1)$. Mas como $t(x) = 2\tau(x)$ temos que

$$t(x^{\bullet 2}) = 2\tau(x)^2 - 4\sigma(x).$$

Logo

$$t(x)^2 - t(x^{\bullet 2}) = 4\tau(x)^2 - 2\tau(x)^2 + 4\sigma(x) = 2s(x).$$

Como $\lambda^{\bullet 2} = \tau(x)\lambda - \sigma(x)1$ temos:

$$\begin{aligned} x^{\bullet 3} &= \tau(x)x^{\bullet 2} - \sigma(x)x, \\ t(x^{\bullet 3}) &= \tau(x)t(x^{\bullet 2}) - \sigma(x)t(x) \\ &= \tau(x)[2\tau(x)^2 - 4\sigma(x)] - \sigma(x)t(x) \\ &= 2\tau(x)^3 - 4\sigma(x)\tau(x) - 2\tau(x)\sigma(x). \end{aligned}$$

Logo

$$t(x^{\bullet 3}) = 2\tau(x)^3 - 6\sigma(x)\tau(x).$$

E substituindo as equações anteriores temos que

$$t(x)^3 - 3t(x)t(x^{\bullet 2}) + 2t(x^{\bullet 3}) = 12\tau(x)\sigma(x) = 6r(x).$$

É fácil ver que $x^{\bullet 4} = \tau(x)x^{\bullet 3} - \sigma(x)x^{\bullet 2}$. Logo $t(x^{\bullet 4}) = \tau(x)t(x^{\bullet 3}) - \sigma(x)t(x^{\bullet 2})$ e substituindo novamente temos que

$$t(x^{\bullet 4}) = 2\tau(x)^4 - 8\tau(x)^2\sigma(x) + 4\sigma(x)^2.$$

E substituindo finalmente obtemos que

$$t(x)^4 - 6t(x)^2t(x^{\bullet 2}) + 8t(x)t(x^{\bullet 3}) + 3t(x^{\bullet 2})^2 - 6t(x^{\bullet 4}) = 24n(x).$$

Obtivemos assim as fórmulas de Newton. Logo J é uma álgebra de Jordan quártica.

Finalmente se J é uma álgebra de Jordan com dois elementos idempotentes primitivos $e_1, e_2 = 1 - e_1$, tal que $J = Fe_1 \oplus Fe_2 \oplus J_{\frac{1}{2}}$ e $J_{\frac{1}{2}} \bullet J_{\frac{1}{2}} = 0$ com $J_{\frac{1}{2}} = \{x \in J : e_1 \bullet x = \frac{1}{2}x\}$. Para $z = \alpha e_1 + \beta e_2 + x$ definimos $t(z) = \alpha + 3\beta$ como na equação (2.13). Para concluir que J é uma álgebra de Jordan quártica temos que verificar que

$$z^{\bullet 4} - t(z)z^{\bullet 3} + s(z)z^{\bullet 2} - r(z)z + n(z)1 = 0,$$

para qualquer $z = \alpha e_1 + \beta e_2 + x$, que $t(1) = 4$, e que valem as fórmulas de Newton. Para fazer isto, vamos considerar a transformação linear φ da subálgebra $S = Fe_1 + Fe_2 + Fx$ de J na álgebra de Jordan $M_4(F)^{(+)}$ de matrizes 4×4 com o produto simetrizado $u \circ v = \frac{1}{2}(uv + vu)$ dado por:

$$\begin{aligned} \varphi : S &\longrightarrow M_4(F)^{(+)} \\ e_1 &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ e_2 &\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ x &\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{aligned} \epsilon &= 1 \text{ se } x \neq 0, \\ \epsilon &= 0 \text{ em outro caso.} \end{aligned} \end{aligned}$$

A aplicação φ é um homomorfismo injetor de álgebras de Jordan e satisfaz $t(z) = \text{tr}(\varphi(z))$ para qualquer $z \in S$, onde tr é o traço usual em $M_4(F)$. Vamos verificar isto para $x \neq 0$.

Vejamos que φ é um homomorfismo de álgebras de Jordan, isto é, que $\varphi(z_1 \bullet z_2) =$

$\varphi(z_1) \circ \varphi(z_2)$. Sendo $z_1 = \alpha_1 e_1 + \beta_1 e_2 + \gamma_1 x$ e $z_2 = \alpha_2 e_1 + \beta_2 e_2 + \gamma_2 x$ temos:

$$\begin{aligned}
 z_1 \bullet z_2 &= (\alpha_1 e_1 + \beta_1 e_2 + \gamma_1 x) \bullet (\alpha_2 e_1 + \beta_2 e_2 + \gamma_2 x) \\
 &= \alpha_1 \alpha_2 e_1 + \alpha_1 \gamma_2 e_1 x + \beta_1 \beta_2 e_2 + \beta_1 \gamma_2 (1 - e_1) x + \gamma_1 \alpha_2 e_1 + \gamma_1 \beta_2 (1 - e_1) x \\
 &= (\alpha_1 \alpha_2) e_1 + (\beta_1 \beta_2) e_2 + \left(\frac{1}{2} \alpha_1 \gamma_2 + \beta_1 \gamma_2 - \frac{1}{2} \beta_1 \gamma_2 + \frac{1}{2} \gamma_1 \alpha_2 + \gamma_1 \beta_2 - \frac{1}{2} \gamma_1 \beta_2 \right) x \\
 &= (\alpha_1 \alpha_2) e_1 + (\beta_1 \beta_2) e_2 + \frac{1}{2} [(\alpha_1 + \beta_1) \gamma_2 + (\alpha_2 + \beta_2) \gamma_1] x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi(z_1 \bullet z_2) &= \varphi[(\alpha_1 \alpha_2) e_1 + (\beta_1 \beta_2) e_2 + \frac{1}{2} [(\alpha_1 + \beta_1) \gamma_2 + (\alpha_2 + \beta_2) \gamma_1] x] \\
 &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 & \frac{1}{2} [(\alpha_1 + \beta_1) \gamma_2 + (\alpha_2 + \beta_2) \gamma_1] & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1 \beta_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\varphi(z_1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(z_2) = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi(z_1) \circ \varphi(z_2) &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 & \frac{1}{2} [(\alpha_1 + \beta_1) \gamma_2 + (\alpha_2 + \beta_2) \gamma_1] & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1 \beta_2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Logo $\varphi(z_1 \bullet z_2) = \varphi(z_1) \circ \varphi(z_2)$.

Vejamos agora que φ é injetor, isto é $\text{Ker } \varphi = 0$. Seja $z = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma x \in \text{Ker } \varphi$. Logo

$$\varphi(z) = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} = 0$$

e segue que $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, $\beta = 0$, isto é, $z = 0$. Logo, $\text{Ker } \varphi = 0$.

Finalmente, se $z = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma x$ temos que $t(z) = \alpha + 3\beta$ e

$$\text{tr}(\varphi(z)) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \right) = \alpha + 3\beta.$$

Logo $t(z) = \text{tr}(\varphi(z))$.

Do homomorfismo injetor $\varphi : J \rightarrow M_4(F)^{(+)}$ segue que J satisfaz

$$z^{\bullet 4} - t(z)z^{\bullet 3} + s(z)z^{\bullet 2} - r(z)z + n(z)1 = 0$$

com $t(1) = 4$, e a validade das fórmulas de Newton em $M_4(F)^{(+)}$ dá agora a sua validade em J . Portanto, J é uma álgebra de Jordan quártica. ■

As álgebras de Jordan quárticas com forma traço t de grau 2 com $t \mid r$ são aquelas do Teorema 2.2.1 (i). De fato, seja J tal álgebra e seja $m_x(\lambda) = \lambda^2 - \tau(x)\lambda + \sigma(x)$ o polinômio mínimo genérico de J , onde τ é uma forma linear e σ é uma forma quadrática. Agora, como na prova do Teorema 2.2.1, temos que $r(x) = 2\tau(x)\sigma(x)$ e $t = 2\tau$. Logo $r(x) = t(x)\sigma(x)$ o que implica que $t \mid r$.

Teorema 2.2.2. (Álgebras de Jordan quárticas de grau 3).

Seja J uma álgebra de Jordan genericamente algébrica de grau genérico 3 e polinômio mínimo genérico

$$m_x(\lambda) = \lambda^3 - \tau(x)\lambda^2 + \sigma(x)\lambda - \nu(x), \quad (2.14)$$

para a forma linear τ , a forma quadrática σ e a forma cúbica ν . Então J é uma álgebra de Jordan quártica se e somente se existe um homomorfismo de álgebras de Jordan unitárias

$J \longrightarrow F$. Além disso, as formas t, s, r e n estão dadas por:

$$\begin{aligned} t(x) &= \varphi(x) + \tau(x), \\ s(x) &= \varphi(x)\tau(x) + \sigma(x), \\ r(x) &= \varphi(x)\sigma(x) + \nu(x), \\ n(x) &= \varphi(x)\nu(x), \end{aligned} \tag{2.15}$$

para um adequado homomorfismo $\varphi : J \rightarrow F$ de álgebras de Jordan unitárias.

Prova: Aplicando o Teorema 1.1.4 (prévia extensão de escalares se é preciso) obtemos que J é álgebra de Jordan quártica se e somente se existem formas lineares $\varphi, t : J \rightarrow F$ tais que:

$$\lambda^4 - t(x)\lambda^3 + s(x)\lambda^2 - r(x)\lambda + n(x) = (\lambda - \varphi(x))m_x(\lambda)$$

para s, r, n dadas pelas fórmulas de Newton. A afirmação das equações (2.15) é clara. Mas então, para qualquer $x \in J$,

$$\begin{aligned} 2s(x) &= t(x)^2 - t(x^{\bullet 2}) \\ &= (\varphi(x) + \tau(x))^2 - (\varphi(x^{\bullet 2}) + \tau(x^{\bullet 2})) \\ &= \varphi(x)^2 + 2\varphi(x)\tau(x) + \tau(x)^2 - \varphi(x^{\bullet 2}) - \tau(x^{\bullet 2}) \\ &= (\varphi(x)^2 - \varphi(x^{\bullet 2})) + 2\varphi(x)\tau(x) + (\tau(x)^2 - \tau(x^{\bullet 2})) \\ &= (\varphi(x)^2 - \varphi(x^{\bullet 2})) + 2(\varphi(x)\tau(x) + \sigma(x)) \\ &= (\varphi(x)^2 - \varphi(x^{\bullet 2})) + 2s(x). \end{aligned}$$

Portanto $\varphi(x^{\bullet 2}) = \varphi(x)^2$ e $\varphi : J \rightarrow F$ é um homomorfismo, pois substituindo x por $x + y$ temos:

$$\begin{aligned} \varphi(x + y)^2 &= \varphi((x + y) \bullet (x + y)) \\ (\varphi(x) + \varphi(y))^2 &= \varphi(x^{\bullet 2}) + \varphi(2x \bullet y) + \varphi(y^{\bullet 2}) \\ \varphi(x)^2 + 2\varphi(x)\varphi(y) + \varphi(y)^2 &= \varphi(x^{\bullet 2}) + 2\varphi(x \bullet y) + \varphi(y^{\bullet 2}). \end{aligned}$$

Logo $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x \bullet y)$. Além disso, $4 = t(1) = \varphi(1) + \tau(1) = \varphi(1) + 3$, assim que $\varphi(1) = 1$.

Reciprocamente, se $\varphi : J \rightarrow F$ é um homomorfismo de álgebras de Jordan unitárias, então as fórmulas de Newton para τ, σ e ν facilmente fornecem as fórmulas de Newton para t, s, r e n dadas pela equação (2.15). ■

Lema 2.2.3. *Seja J uma álgebra de Jordan quártica com traço t . Então a forma traço $(x, y) \longrightarrow t(x \bullet y)$ é associativa.*

Prova: Para simplificar, durante a prova vamos denotar os produtos $x \bullet y$ simplesmente por xy . Temos que mostrar que $t((xy)z) = t(x(yz))$, isto é, $t((x, y, z)) = 0$.

Se o grau genérico de J é 4 segue do Teorema 1.3.1 (vii), pois J é uma álgebra genericamente algébrica com polinômio mínimo genérico $m_x(\lambda) = \sum_{i=0}^4 m_i(x)\lambda^i$. A norma genérica é $m_0(x)$ e o traço genérico é $-m_3(x)$. Logo os m_i são invariantes de Lie, o que implica que $\delta_{D_x}m_i|_x = 0$ para qualquer derivação D de J . Como $m_x(\lambda) = x^{\bullet 4} - t(x)x^{\bullet 3} + s(x)x^{\bullet 2} - r(x)x + n(x)1$ temos $t(x) = -m_3(x)$ e $t(x)$ é invariante de Lie. Portanto, $\delta_{D_x}(t(x)) = 0$ para qualquer derivação. Tomemos a seguinte derivação $D : x \rightarrow (a, x, c)$. Vamos verificar que D é de fato uma derivação. Como J é uma álgebra de Jordan, temos que é comutativa e verifica a identidade $(x^2, y, x) = 0$. Linearizando esta identidade obtemos

$$2(xw, y, x) + (x^2, y, w) = 0$$

e linearizando de novo temos que $(xw, y, z) + (wx, y, z) + 2[(zw, y, x) + (zx, y, w)] = 0$. daí temos que

$$(xw, y, z) + (zw, y, x) + (zx, y, w) = 0.$$

Usando esta última equação temos:

$$\begin{aligned} (xy, a, c) &= -(cy, a, x) - (cx, a, y), \\ (xy, c, a) &= -(ay, c, x) - (ax, c, y). \end{aligned}$$

Subtraindo estas equações obtemos que

$$(xy, a, c) - (xy, c, a) = -(cy.a)x - (cx.a)y + (ay.c)x + (ax.c)y$$

e pela comutatividade obtemos que

$$(xy, a, c) - (xy, c, a) = x(a, y, c) + y(a, x, c)$$

Por outro lado temos que

$$(a, xy, c) = (a.xy)c - a(xy.c)$$

e também que

$$\begin{aligned} (a.xy)c &= (xy, a, c) + (xy)(ac), \\ a(xy.c) &= (xy, c, a) + (xy)(ca). \end{aligned}$$

Logo temos

$$(a.xy)c - a(xy.c) = (xy, a, c) - (xy, c, a).$$

Portanto

$$(a.xy)c - a(xy.c) = x(a, y, c) + y(a, x, c).$$

Logo obtemos que $(a, xy, c) = x(a, y, c) + y(a, x, c)$ o que implica que D é uma derivação. Portanto $\delta_{D_x}(t(x)) = 0$ e daí segue que $t((a, x, c)) = 0$, o que implica que t é associativa.

Se o grau genérico é 1 então $t(x) = 0$ e logo $t((x, y, z)) = 0$. Se o grau genérico é 2 então de acordo com o Teorema 2.2.1 temos dois casos:

(i) $t(x) = 2\tau(x)$. Neste caso, como J é genericamente algébrica com $m_x(\lambda) = \lambda^2 - \tau(x)\lambda + \sigma(x)$, então $-m_1(x) = \tau(x)$ e, como na prova acima, $\tau((x, y, z)) = 0$. Portanto $t((x, y, z)) = 0$.

(ii) J é de uma natureza muito específica e a forma traço está dada por $t(\alpha e_1 + \beta e_2 + x) = \alpha + 3\beta$ a qual é trivialmente associativa.

Finalmente, suponhamos que o grau genérico é 3. Então o traço genérico é $t(x) = \varphi(x) + \tau(x)$ para qualquer x , onde $\varphi : J \rightarrow F$ é um homomorfismo e portanto é associativo, e τ é o traço genérico de J (que é associativo como na prova acima).

Portanto a forma traço é associativa. ■

2.2.1 As Categorias $\mathcal{AC}$ e $\mathcal{QJ}$

Seja $\mathcal{AC}$ a categoria cujos objetos são os pares $(A, <, >)$ onde A é uma álgebra cúbica admissível e cujos morfismos

$$\varphi : (A_1, <, >_1) \longrightarrow (A_2, <, >_2)$$

são os homomorfismos de álgebras que preservam a forma traço, isto é, $\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1$ para todo $x, y \in A_1$. Denotemos por $\widetilde{\mathcal{AC}}$ a subcategoria plena cujos objetos são as álgebras cúbicas admissíveis com norma não nula $(A, <, >)$.

E seja $\mathcal{QJ}$ a categoria cujos objetos são os pares (J, t) onde J é uma álgebra de Jordan quártica com uma forma traço t e cujos morfismos $\psi : (J_1, t_1) \longrightarrow (J_2, t_2)$ são os homomorfismos de álgebras com 1 que preservam a forma traço t e portanto preservam

s, r e n . Denotemos por $\widetilde{\mathcal{QJ}}$ a subcategoria plena cujos objetos são os pares (J, t) onde J é uma álgebra de Jordan quártica com uma forma traço t e tal que existem elementos $x \in J$ com $t(x) = 0$ e $r(x) \neq 0$ (ou de maneira equivalente $t(x^{\bullet 3}) \neq 0$) o que equivale dizer que $t \nmid r$.

Seja (J, t) uma álgebra de Jordan quártica e seja $J_0 = \{x \in J : t(x) = 0\}$ o conjunto de elementos de traço zero. Definimos uma multiplicação em J_0 por

$$xy = x \bullet y - \frac{1}{4}t(x \bullet y)1 \quad (2.16)$$

Isto é, xy é a projeção $\text{proj}_{J_0}(x \bullet y)$ do produto $x \bullet y$ sobre J_0 relativa a decomposição de Peirce $J = F1 \oplus J_0$. Definimos também uma forma bilinear simétrica associativa por meio de

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{3}t(x \bullet y) \quad (2.17)$$

para $x, y \in J_0$.

Com as notações acima temos o seguinte teorema:

Teorema 2.2.4. *A aplicação*

$$C : \mathcal{QJ} \longrightarrow \mathcal{AC}$$

$$(J, t) \mapsto (J_0, \langle, \rangle)$$

onde $J_0 = \{x \in J : t(x) = 0\}$ com a multiplicação dada por

$$xy = x \bullet y - \frac{1}{4}t(x \bullet y)1$$

e a forma bilinear simétrica associativa

$$\langle, \rangle : J_0 \times J_0 \longrightarrow F$$

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{3}t(x \bullet y)$$

é um funtor fiel e pleno de $\mathcal{QJ}$ em $\mathcal{AC}$. Este funtor restringe-se a uma equivalência entre as subcategorias $\widetilde{\mathcal{QJ}}$ e $\widetilde{\mathcal{AC}}$.

Prova: Primeiro devemos mostrar que $(J_0, \frac{1}{3}t(-^{\bullet 3}))$ é de fato uma álgebra cúbica admissível.

Seja (J, t) uma álgebra de Jordan quártica. Então pelas fórmulas de Newton temos que para todo $x \in J_0$ se verifica que $2s(x) = t(x)^2 - t(x^{\bullet 2}) = -t(x^{\bullet 2})$. Logo

$$s(x) = -\frac{1}{2}t(x^{\bullet 2}),$$

$$r(x) = \frac{1}{3}t(x^{\bullet 3}).$$

Da equação (2.16) temos que para todo $x \in J_0$

$$\begin{aligned} x^2 x^2 &= \text{proj}_{J_0}(x^2 \bullet x^2) \\ &= \text{proj}_{J_0}((x^{\bullet 2} - \frac{1}{4}t(x^{\bullet 2})1) \bullet (x^{\bullet 2} - \frac{1}{4}t(x^{\bullet 2})1)) \\ &= \text{proj}_{J_0}(x^{\bullet 4} - \frac{1}{2}t(x^{\bullet 2})x^{\bullet 2}) \\ &= \text{proj}_{J_0}(x^{\bullet 4} + s(x)x^{\bullet 2}) \\ &= \text{proj}_{J_0}(r(x)x - n(x)1) \\ &= r(x)x = \frac{1}{3}t(x^{\bullet 3})x. \end{aligned}$$

Portanto temos que $x^2 x^2 = \frac{1}{3}t(x^{\bullet 3})x$ e isto mostra que $(J_0, \frac{1}{3}t(-^{\bullet 3}))$ é uma álgebra cúbica admissível. Observe que

$$\frac{1}{3}t(x^{\bullet 3}) = \frac{1}{3}t(x \bullet x^{\bullet 2}) = \langle x, x^2 \rangle.$$

Logo, $\langle, \rangle$ é a forma traço de $\frac{1}{3}t(-^{\bullet 3})$.

Se (J, t) é um objeto em $\widetilde{\mathcal{QJ}}$, então a restrição de r a J_0 é não trivial e portanto a norma desta álgebra cúbica admissível é não nula. Assim, este é um objeto que está em $\widetilde{\mathcal{AC}}$.

Vejam agora que o funtor $\mathbf{C}$ assim definido é fiel. De fato, sejam $(J_1, t_1), (J_2, t_2) \in \mathcal{QJ}$ e $f : (J_1, t_1) \rightarrow (J_2, t_2) \in \text{Hom}_{\mathcal{QJ}}((J_1, t_1), (J_2, t_2))$. Devemos provar que a aplicação $f \mapsto \mathbf{C}(f)$ é injetora. Sejam $f_1, f_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{QJ}}((J_1, t_1), (J_2, t_2))$ e suponhamos que $\mathbf{C}(f_1) = f_1|_{J_{10}} = \mathbf{C}(f_2) = f_2|_{J_{10}}$. Vejamos que $f_1 = f_2$. Sabemos que $f_1(x) = f_2(x)$ para todo $x \in J_{10}$. Por outro lado, $f_1(\alpha 1) = \alpha 1 = f_2(\alpha 1)$ para todo α em F . Logo $f_1 = f_2$. Portanto o funtor $\mathbf{C}$ é fiel.

Agora vejamos que o funtor $\mathbf{C}$ é pleno, isto é, a aplicação $f \mapsto \mathbf{C}(f)$ é sobrejetora. Seja $g \in \text{Hom}_{\mathcal{AC}}((J_{10}, \langle, \rangle_1), (J_{20}, \langle, \rangle_2))$. Sabemos que $J_1 = F1 \oplus J_{10}$ e $J_2 = F1 \oplus J_{20}$. Definamos $f : ((J_1, t_1) \rightarrow (J_2, t_2))$ da seguinte maneira: $f(\alpha 1 + x) = \alpha 1 + g(x)$. Vejamos

que $f \in \text{Hom}_{\mathcal{QJ}}((J_1, t_1), (J_2, t_2))$. Sejam $x_1 = \alpha 1 + x$, $x_2 = \beta 1 + y \in J_1$. Temos que $f(\gamma x_1 + x_2) = (\gamma\alpha + \beta)1 + g(\gamma x + y)$ e como $g \in \text{Hom}_{\mathcal{AC}}((J_{10}, <, >_1), (J_{20}, <, >_2))$ temos que $f(\gamma x_1 + x_2) = (\gamma\alpha + \beta)1 + \gamma g(x) + g(y) = \gamma f(x_1) + f(x_2)$. Por outro lado, usando a equação (2.16), temos:

$$\begin{aligned}
 x_1 \bullet x_2 &= \alpha\beta 1 + \beta x + \alpha y + x \bullet y \\
 &= (\alpha\beta + \frac{1}{4}t_1(x \bullet y))1 + (\beta x + \alpha y + xy), \\
 f(x_1 \bullet x_2) &= (\alpha\beta + \frac{1}{4}t_1(x \bullet y))1 + g(\beta x + \alpha y + xy) \\
 &= (\alpha\beta + \frac{1}{4}t_1(x \bullet y))1 + \beta g(x) + \alpha g(y) + g(xy) \\
 &= (\alpha\beta + \frac{1}{4}t_1(x \bullet y))1 + \beta g(x) + \alpha g(y) + g(x)g(y), \\
 f(x_1) \bullet f(x_2) &= (\alpha 1 + g(x)) \bullet (\beta 1 + g(y)) \\
 &= \alpha\beta 1 + \beta g(x) + \alpha g(y) + g(x) \bullet g(y) \\
 &= \alpha\beta 1 + \beta g(x) + \alpha g(y) + g(x)g(y) + \frac{1}{4}t_2(g(x) \bullet g(y)) \\
 &= (\alpha\beta + \frac{1}{4}t_2(g(x) \bullet g(y)))1 + \beta g(x) + \alpha g(y) + g(x)g(y).
 \end{aligned}$$

Mas

$$t_2(g(x) \bullet g(y)) = 3 \langle g(x), g(y) \rangle_2 = 3 \langle x, y \rangle_1 = t_1(x \bullet y).$$

Portanto $f(x_1 \bullet x_2) = f(x_1) \bullet f(x_2)$. Vejamos agora que f preserva a forma traço. Isto é, $t_2(f(\alpha 1 + x)) = t_1(\alpha 1 + x)$. De fato, $t_2(f(\alpha 1 + x)) = t_2(\alpha 1 + g(x)) = t_2(\alpha 1) + t_2(g(x)) = \alpha t_2(1) = 4\alpha = t_1(\alpha 1 + x)$. Além disso, temos que $C(f) = f_{J_{10}} = g$. Assim, C é um funtor pleno.

Agora, se $(A, <, >)$ é uma álgebra cúbica admissível com norma não nula então pelo Teorema 2.1.7 temos que $N(x) = \langle x, x^2 \rangle$. Seja $J_A = F1 \oplus A$ com a multiplicação comutativa dada por

$$1 \bullet 1 = 1, \quad 1 \bullet x = x, \quad x \bullet y = xy + \frac{3}{4} \langle x, y \rangle 1 \quad (2.18)$$

para $x, y \in A$.

Denotemos por $(X, Y, Z)^\bullet = (X \bullet Y) \bullet Z - X \bullet (Y \bullet Z)$ o associador em J_A . Então, para todo $X = \alpha 1 + x$, $Y = \beta 1 + y$, com $\alpha, \beta \in F$ e $x, y \in A$, temos que

$$(X \bullet X, Y, X)^\bullet = (x^2, y, x)^\bullet$$

pois 1 associa com qualquer elemento e $(x, y, x)^{\bullet} = 0$ por comutatividade. Logo, pela associatividade de $\langle, \rangle$, temos que

$$\begin{aligned}
 & ((X \bullet X) \bullet Y) \bullet X - (X \bullet X) \bullet (Y \bullet X) \\
 &= (x^2, y, x)^{\bullet} = (x^2 \bullet y) \bullet x - x^2 \bullet (y \bullet x) \\
 &= (x^2 y) \bullet x + \frac{3}{4} \langle x^2, y \rangle x - x^2 \bullet (yx) - \frac{3}{4} \langle x, y \rangle x^2 \\
 &= (x^2 y)x + \frac{3}{4} \langle x^2 y, x \rangle 1 + \frac{3}{4} \langle x^2, y \rangle x \\
 &\quad - x^2(yx) - \frac{3}{4} \langle x^2, yx \rangle 1 - \frac{3}{4} \langle x, y \rangle x^2 \\
 &= (x^2 y)x - x^2(yx) + \frac{3}{4} \langle x^2, y \rangle x - \frac{3}{4} \langle x, y \rangle x^2
 \end{aligned}$$

que é igual a zero pela equação (2.11). Portanto J_A é uma álgebra de Jordan com 1. Além disso, temos que:

$$\begin{aligned}
 X^{\bullet 2} &= (\alpha^2 + \frac{3}{4} \langle x, x \rangle) 1 + 2\alpha x + x^2, \\
 X^{\bullet 3} &= ((\alpha^2 + \frac{3}{4} \langle x, x \rangle) 1 + 2\alpha x + x^2) \bullet (\alpha 1 + x) \\
 &= (\alpha^3 + \frac{9}{4} \alpha \langle x, x \rangle + \frac{3}{4} \langle x, x^2 \rangle) 1 + (3\alpha^2 + \frac{3}{4} \langle x, x \rangle) x + 3\alpha x^2 + x^3, \\
 X^{\bullet 4} &= [(\alpha^2 + \frac{3}{4} \langle x, x \rangle) 1 + 2\alpha x + x^2]^{\bullet 2} \\
 &= (\alpha^4 + \frac{9}{2} \alpha^2 \langle x, x \rangle + \frac{9}{16} \langle x, x \rangle^2 + 3\alpha \langle x, x^2 \rangle + \frac{3}{4} \langle x^2, x^2 \rangle) 1 \\
 &\quad + (4\alpha^3 + 3\alpha \langle x, x \rangle + \langle x, x^2 \rangle) x + (6\alpha^2 + \frac{3}{2} \langle x, x \rangle) x^2 + 4\alpha x^3.
 \end{aligned}$$

Como $N(x) = \langle x, x^2 \rangle$ é a norma de A , se definimos

$$\begin{aligned}
 t(X) &= 4\alpha, \\
 s(X) &= 6\alpha^2 - \frac{3}{2} \langle x, x \rangle, \\
 r(X) &= 4\alpha^3 - 3\alpha \langle x, x \rangle + N(x), \\
 n(X) &= \alpha^4 - \frac{3}{2} \alpha^2 \langle x, x \rangle + \alpha N(x) + \frac{9}{16} \langle x, x \rangle^2 - \frac{3}{4} \langle x^2, x^2 \rangle,
 \end{aligned}$$

então

$$X^{\bullet 4} - t(X)X^{\bullet 3} + s(X)X^{\bullet 2} - r(X)X + n(X)1 = 0$$

para qualquer $X = \alpha 1 + x$. Vamos provar em seguida que as fórmulas de Newton valem.

Usando as equações acima temos que

$$2s(X) = 2(6\alpha^2 - \frac{3}{2} \langle x, x \rangle) = 12\alpha^2 - 3 \langle x, x \rangle.$$

Por outro lado, temos que $t(X)^2 = 16\alpha^2$ e

$$\begin{aligned} t(X^{\bullet 2}) &= t((\alpha^2 + \frac{3}{4} \langle x, x \rangle)1 + 2\alpha x + x^2) \\ &= 4(\alpha^2 + \frac{3}{4} \langle x, x \rangle) \\ &= 4\alpha^2 + 3 \langle x, x \rangle. \end{aligned}$$

Logo temos que

$$t(X)^2 - t(X^{\bullet 2}) = 16\alpha^2 - 4\alpha^2 - 3 \langle x, x \rangle = 12\alpha^2 - 3 \langle x, x \rangle$$

e portanto

$$2s(X) = t(X)^2 - t(X^{\bullet 2}).$$

Provemos agora que $6r(X) = t(X)^3 - 3t(X)t(X^{\bullet 2}) + 2t(X^{\bullet 3})$. Das equações acima temos que $6r(X) = 24\alpha^3 - 18\alpha \langle x, x \rangle + 6N(x)$. Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} t(X)^3 &= 64\alpha^3, \\ 3t(X)t(X^{\bullet 2}) &= 48\alpha^3 + 36\alpha \langle x, x \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2t(X^{\bullet 3}) &= 2t((\alpha^3 + \frac{9}{4}\alpha \langle x, x \rangle + \frac{3}{4} \langle x, x^2 \rangle)1 + (3\alpha^2 + \frac{3}{4} \langle x, x \rangle)x + 3\alpha x^2 + x^3) \\ &= 2(4(\alpha^3 + \frac{9}{4}\alpha \langle x, x \rangle + \frac{3}{4} \langle x, x^2 \rangle) \\ &= 8\alpha^3 + 18\alpha \langle x, x \rangle + 6 \langle x, x^2 \rangle). \end{aligned}$$

Daí temos que

$$t(X)^3 - 3t(X)t(X^{\bullet 2}) + 2t(X^{\bullet 3}) = 24\alpha^3 - 18\alpha \langle x, x \rangle + 6 \langle x, x^2 \rangle,$$

isto é,

$$t(X)^3 - 3t(X)t(X^{\bullet 2}) + 2t(X^{\bullet 3}) = 24\alpha^3 - 18\alpha \langle x, x \rangle + 6N(x) = 6r(X).$$

Igualmente podemos provar que

$$24n(X) = t(X)^4 - 6t(X)^2t(X^{\bullet 2}) + 8t(X)t(X^{\bullet 3}) + 3t(X^{\bullet 2})^2 - 6t(X^{\bullet 4}).$$

Assim, (J_A, t) é uma álgebra de Jordan quártica. Além disso, pela equação (2.18) $t(x \bullet y) = 3 \langle x, y \rangle$ para qualquer $x, y \in A$. Portanto, a álgebra cúbica admissível $(J_A)_0, \frac{1}{3}t(-\bullet^3))$ é precisamente $(A, \langle, \rangle)$ e isto completa a prova. ■

Vamos descrever agora as álgebras cúbicas admissíveis obtidas como $\mathbf{C}(J, t)$ (via o Teorema 2.2.4) para algumas álgebras de Jordan quárticas.

Teorema 2.2.5. (i) *Seja (J, t) uma álgebra de Jordan quártica onde $J = F1 \oplus V$ é a álgebra de Jordan da forma quadrática $q : V \rightarrow F$. Assim, $v^{\bullet 2} = q(v)1$ para qualquer $v \in V$ e $t(\alpha 1 + v) = 4\alpha$ (duas vezes o traço genérico de J se $V \neq 0$). Então $\mathbf{C}((J, t)) = (V, \langle, \rangle)$ onde $V^2 = 0$ e $\langle v, v \rangle = \frac{4}{3}q(v)$ para qualquer $v \in V$. Reciprocamente, dada qualquer álgebra trivial A ($A^2 = 0$) e qualquer forma bilinear simétrica $\langle, \rangle : A \times A \rightarrow F$, a álgebra $(A, \langle, \rangle)$ é a imagem sob $\mathbf{C}$ de uma álgebra de Jordan quártica de grau genérico ≤ 2 .*

(ii) *Seja $J = Fe_1 \oplus Fe_2 \oplus V$ a álgebra de Jordan quártica com multiplicação dada por*

$$(e_i)^{\bullet 2} = e_i, \quad e_i \bullet v = \frac{1}{2}v, \quad e_1 \bullet e_2 = v^{\bullet 2} = 0$$

para qualquer $v \in V$; e seja $t : J \rightarrow F$ a forma linear determinada por $t(V) = 0$, $t(e_1) = 1, t(e_2) = 3$. Então (J, t) é uma álgebra de Jordan quártica e $\mathbf{C}((J, t)) = (A, \langle, \rangle)$ com

$$\begin{aligned} A &= Fa \oplus V, \quad a = \frac{3e_1 - e_2}{2}, \\ a^2 &= a, \quad av = \frac{1}{2}v, \quad V^2 = 0, \\ \langle a, a \rangle &= 1, \quad \langle a, v \rangle = \langle v, v \rangle = 0. \end{aligned}$$

para qualquer $v \in V$.

(iii) *Seja $J = J_1 \oplus J_2$ (soma direta de ideais) a álgebra de Jordan onde $J_i = Fe_i \oplus V_i$ é a álgebra de Jordan da forma quadrática $q_i : V_i \rightarrow F$ com identidade e_i , e seja $t : J \rightarrow F$ a forma linear tal que $t(V_1 + V_2) = 0$, $t(e_1) = t(e_2) = 2$. (t é o traço genérico no caso $V_1 \neq 0 \neq V_2$). Então (J, t) é uma álgebra de Jordan quártica e $\mathbf{C}((J, t)) = (A, \langle, \rangle)$ com $A = Fa \oplus V_1 \oplus V_2$, $a = e_1 - e_2$ e*

$$(\alpha a + v_1 + v_2)^2 = \frac{1}{2}(q_1(v_1) + q_2(v_2))a + 2\alpha(v_1 - v_2),$$

$$\langle \alpha a + v_1 + v_2, \alpha a + v_1 + v_2 \rangle = \frac{2}{3}(2\alpha^2 + q_1(v_1) + q_2(v_2)),$$

para qualquer $\alpha \in F$, $v_1 \in V_1$, e $v_2 \in V_2$.

- (iv) Seja $K|_F$ uma extensão quadrática de F com automorfismo de Galois $k \rightarrow \bar{k}$, e seja $J = K1 \oplus V$ a álgebra de Jordan sobre K de uma forma quadrática $q : V \rightarrow K$. Seja J^F a álgebra J considerada como álgebra sobre F . Então J^F é uma álgebra de Jordan quártica com o traço dado por $t(k1 + v) = 2(k + \bar{k})$ (o qual é o traço genérico de J^F se $V \neq 0$) e $\mathbf{C}((J, t)) = (A, \langle, \rangle)$ com $A = K_0 \oplus V$, $K_0 = \{k \in K : \bar{k} = -k\}$ e

$$(k + v)^2 = \frac{1}{2}(q(v) + \overline{q(v)}) + 2kv,$$

$$\langle k + v, k + v \rangle = \frac{2}{3}(2k^2 + q(v) + \overline{q(v)}).$$

- (v) Seja (J, t) a álgebra de Jordan quártica com $J = F \times H$ e H a álgebra de Jordan genericamente algébrica de grau genérico 3 e polinômio mínimo genérico dado por

$$\lambda^3 - \tau(x)\lambda^2 + \sigma(x)\lambda - \nu(x),$$

e onde $t((\alpha, x)) = \alpha + \tau(x)$ (o traço genérico) para qualquer $\alpha \in F$ e $x \in H$. Então $\mathbf{C}((J, t))$ é isomorfa à álgebra cúbica admissível $((H, *), \langle, \rangle)$ com a multiplicação dada por

$$x * x = x^{\bullet 2} - \tau(x)x + \sigma(x)1_H$$

e a norma dada por

$$\langle x, x \rangle = \frac{1}{3}\tau(x^{\bullet 2}).$$

Prova: Todos os casos, exceto (v), são obtidos por cálculos diretos usando as equações (2.16) and (2.17). As álgebras de Jordan quárticas em (i) e (ii) são precisamente as álgebras no Teorema 2.2.1 (grau genérico 2), enquanto o caso (iii), com $V_1 = 0 \neq V_2$, encaixa-se no Teorema 2.2.2 (grau genérico 3).

Vamos provar o caso (v). Neste caso, $J_0 = Fe \oplus H_0$ com $e = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) \in F \times H$ e onde $H_0 = \{x \in H : \tau(x) = 0\}$ está identificado com $0 \times H_0$. Da equação (2.16) concluímos

que:

$$\begin{aligned} e^2 &= e, \quad ex = -\frac{1}{2}x, \\ x^2 &= x \bullet x - \frac{1}{4}t(x \bullet x)1 = \frac{1}{6}\tau(x \bullet x)e + (x \bullet x - \frac{1}{3}\tau(x \bullet x)1_H), \\ < e, e > &= 1, \quad < e, x > = 0, \quad < x, x > = \frac{1}{3}\tau(x^{\bullet 2}), \end{aligned}$$

para todo $x \in H_0$. Mas $2\sigma(x) = \tau(x)^2 - \tau(x^{\bullet 2})$. Logo

$$x^\# = x^{\bullet 2} - \tau(x)x + \sigma(x)1_H = x^{\bullet 2} - \frac{1}{2}\tau(x^{\bullet 2})1_H$$

e

$$x^2 = -\frac{1}{6}\tau(x^{\bullet 2})e + (x^\# + \frac{1}{6}\tau(x^{\bullet 2})1_H) \in Fe \oplus H_0$$

para todo $x \in H_0$. Portanto, a aplicação linear $\Phi : A \rightarrow J_0$, definida por $\alpha 1_H + x \rightarrow \alpha e + x$ para $\alpha \in F$ e $x \in H_0$, satisfaz

$$\begin{aligned} \Phi((\alpha 1_H + x)^\#) &= \Phi(\alpha^2 1_H - \alpha x + x^\#) \\ &= \Phi((\alpha^2 - \frac{1}{6}\tau(x^{\bullet 2}))1_H + (x^\# + \frac{1}{6}\tau(x^{\bullet 2})1_H - \alpha x)) \\ &= (\alpha^2 - \frac{1}{6}\tau(x^{\bullet 2}))e + (x^\# + \frac{1}{6}\tau(x^{\bullet 2})1_H - \alpha x) \\ &+ \alpha^2 e - \alpha x + x^2 = (\alpha e + x)^2 \\ &= \Phi(\alpha 1_H + x)^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\tau((\alpha 1_H + x)^{\bullet 2}) &= \frac{1}{3}\tau(\alpha^2 1_H + x^{\bullet 2}) \\ &= \alpha^2 + \frac{1}{3}\tau(x^{\bullet 2}) = < \alpha e + x, \alpha e + x >, \end{aligned}$$

para todo $x \in H_0$. ■

2.2.2 As Subcategorias Plenas $\mathcal{AC}_{\text{nd}}$ e $\mathcal{QJ}_{\text{nd}}$

Consideremos as subcategorias plenas $\mathcal{AC}_{\text{nd}}$ cujos objetos são as álgebras cúbicas admissíveis $(A, <, >)$ com forma traço não-degenerada e $\mathcal{QJ}_{\text{nd}}$ cujos objetos são as álgebras (J, t) onde J é uma álgebra de Jordan quártica e a forma traço $(x, y) \mapsto t(x \bullet y)$ é não-degenerada.

Teorema 2.2.6. *O funtor $C : \mathcal{QJ} \rightarrow \mathcal{AC}$ restringe-se a uma equivalência entre as subcategorias plenas $\mathcal{QJ}_{nd}$ e $\mathcal{AC}_{nd}$.*

Prova: Como $C(J, t) = (A, <, >)$ com $A = J_0 = \{x \in J_0 : t(x) = 0\}$, $< x, y > = \frac{1}{3}t(x \bullet y)$ para todo $x, y \in A$ e como $t(1) = 4 \neq 0$, segue que se (J, t) é um objeto em $\mathcal{QJ}_{nd}$. Logo $C(J, t)$ é um objeto em $\mathcal{AC}_{nd}$.

Agora, seja $(A, <, >)$ uma álgebra cúbica admissível com forma traço não-degenerada. Se a norma $N(x) = < x, x^2 >$ não é identicamente nula, então sabemos (pelo Teorema 2.2.4) que $(J_A = F1 \oplus A, t)$, com $t(\alpha 1 + x) = 4\alpha$ para $\alpha \in F$ e $x \in A$, e multiplicação dada por (2.18), é uma álgebra de Jordan quártica e, como $t(x \bullet y) = 3 < x, y >$ para todo $x, y \in A$, é um objeto em $\mathcal{QJ}_{nd}$ cuja imagem sob C é isomorfa a $(A, <, >)$. No caso contrário, se a norma $N(x) = < x, x^2 >$ é identicamente nula, linearizando $< x, x^2 > = 0$ e usando a associatividade de $<, >$, obtemos que $< y, x^2 > = 0$ para todo $x, y \in A$ e, pela não degenerescência, $A^2 = 0$. Então aplicamos o Teorema 2.2.5 (i) para obter (J, t) em $\mathcal{QJ}_{nd}$ tal que $C(J, t) = (A, <, >)$. ■

2.3 Classificação das Álgebras Cúbicas Admissíveis

Como um corolário dos Teoremas 2.2.5 e 2.2.6, vamos obter nesta seção a classificação das álgebras cúbicas admissíveis com forma traço não-degenerada.

Para obter esta classificação precisamos de alguns resultados sobre as álgebras seminormais que vamos descrever em seguida.

Uma *forma seminormal* sobre uma álgebra A com 1 é uma função bilinear simétrica associativa $\sigma : A \times A \rightarrow K$ com valores em alguma extensão $K|_F$ e que anula os elementos nilpotentes z em qualquer extensão de A , $\sigma(z) = \sigma(1, z) = 0$. O *radical seminormal* de A é a interseção dos radicais de todas as formas seminormais σ . Isto é,

$$S(A) = \bigcap_{\sigma} \text{Rad}(\sigma),$$

onde $\text{Rad}(\sigma) = \{y \in A : \sigma(x, y) = 0 \text{ para todo } x \in A\}$.

Uma álgebra A é dita *seminormal* se existem suficientes formas seminormais para separar pontos, isto é, $S(A) = 0$. A álgebra quociente $A/S(A)$ é sempre seminormal se a álgebra A é algébrica.

Se τ é uma forma seminormal com valores em F , então τ é chamada *normal*, e temos um correspondente *radical normal*

$$\mathcal{R}(A) = \cap_{\tau} \text{Rad}(\tau).$$

A álgebra A é dita *normal* se as formas normais separam pontos, isto é, $\mathcal{R}(A) = 0$, e outra vez, $A/\mathcal{R}(A)$ é normal se A é algébrica. Pode-se verificar que $\mathcal{S}(A) = A \cap \mathcal{R}(\bar{A})$ onde $\bar{A}$ é uma extensão de A , obtida estendendo F ao corpo algébrico $\bar{F}$ de F .

Teorema 2.3.1. (McCrimmon [5], Theorem 14) *Uma álgebra seminormal é flexível se a característica é diferente de 2 e é uma álgebra de Jordan não comutativa se a característica $\neq 2, 5$.*

Teorema 2.3.2. (McCrimmon [5], Theorem 16) *Uma álgebra genericamente algébrica seminormal é uma soma direta finita de ideais simples.*

Como observado por McCrimmon ([5], p. 549), o teorema anterior vale para uma classe um pouco mais ampla de álgebras, formada pelas álgebras que:

- (i) São estritamente associativas nas potências.
- (ii) São algébricas.
- (iii) São seminormais.
- (iv) Tem a condição de cadeia sobre idempotentes.

Teorema 2.3.3. (McCrimmon [5], Theorem 17) *Se A é uma álgebra genericamente algébrica simples e seminormal, então A é uma álgebra de Jordan não comutativa a qual é ou:*

- (i) *Uma álgebra quase associativa de dimensão finita.*
- (ii) *Uma álgebra de Jordan comutativa de dimensão finita.*
- (iii) *de grau dois sobre o seu centro.*

Vamos denotar as álgebras cúbicas admissíveis que aparecem no Teorema 2.2.5 (iii) por $\mathcal{A}((V_1, q_1), (V_2, (q_2)))$, e as que aparecem no Teorema 2.2.5 (iv) por $\mathcal{A}_K(V, q)$.

Teorema 2.3.4. *A seguinte lista esgota, a menos de isomorfismo, todas as álgebras cúbicas admissíveis com forma traço não-degenerada:*

- (i) *O corpo F com $\langle 1, 1 \rangle = 1$.*
- (ii) *Qualquer álgebra trivial ($A^2 = 0$) com qualquer forma bilinear simétrica não-degenerada.*
- (iii) *As álgebras $\mathcal{A}((V_1, q_1), (V_2, q_2))$ com $0 \neq \dim_F V_1 \geq \dim_F V_2$, e q_1 e q_2 são formas quadráticas não-degeneradas se $V_2 \neq 0$.*
- (iv) *As álgebras $\mathcal{A}_K(V, q)$ com K uma extensão quadrática de F , $V \neq 0$ e $q : V \rightarrow F$ uma forma quadrática não-degenerada.*
- (v) *As álgebras de Jordan simples de dimensão finita $(H, +, \bullet)$, de grau genérico 3, traço genérico τ e com a nova multiplicação dada por*

$$x * x = x^{\bullet 2} - \tau(x)x + \frac{1}{2}(\tau(x)^2 - \tau(x^{\bullet 2}))1$$

e a forma traço dada por

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{3}\tau(x \bullet y)$$

para $x, y \in H$.

- (vi) *As álgebras definidas sobre o conjunto J_0 dos elementos de traço zero em uma álgebra de Jordan simples de dimensão finita J , de grau genérico 4, traço genérico t e cujo centro não é uma extensão quadrática do corpo F , com a multiplicação e traço dados por:*

$$xy = x \bullet y - \frac{1}{4}t(x \bullet y)1, \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{3}t(x \bullet y)$$

para todo $x, y \in J_0$.

Além disso, álgebras em diferentes itens não são isomorfas. As álgebras no item (ii) são isomorfas (como álgebras) se e somente se têm a mesma dimensão. As álgebras nos itens (iii) ou (iv) são isomorfas se e somente se os correspondentes espaços com formas quadráticas são isométricos. As álgebras nos itens (v) e (vi) são isomorfas se e somente se as correspondentes álgebras de Jordan H ou J são isomorfas.

Prova: Pelo Teorema 2.2.6, só temos que descrever as álgebras de Jordan quárticas (J, t) com forma traço não-degenerada $(x, y) \mapsto t(x \bullet y)$. Pelos Teoremas 2.3.2 e 2.3.3 tal J é uma soma direta de ideais simples os quais são ou de dimensão finita ou de grau dois sobre o seu centro. As diferentes possibilidades para J , com a exceção do caso (vi), apareceram no Teorema 2.2.5. O fato da forma traço ser não-degenerada restringe o caso (ii) impondo que $V = 0$, e também impõe que as formas quadráticas envolvidas nos outros casos são não-degeneradas. ■

Álgebras Cúbicas Admissíveis e Outras Álgebras

Neste capítulo apresentamos alguns detalhes sobre álgebras cúbicas admissíveis com idempotentes e o relacionamento destas álgebras cúbicas admissíveis com outras álgebras, a saber: álgebras com pseudo-composição, álgebras de Jordan de formas cúbicas admissíveis e as álgebras ponderadas tais como álgebras de Bernstein, train e train especial.

3.1 Idempotentes

Se e é um idempotente não nulo em uma álgebra cúbica admissível $(A, <, >)$, então

$$e = e^2 e^2 = N(e)e.$$

Assim $N(e) = 1$. Em particular a norma é não nula e portanto existe (pelo Teorema 2.2.4) uma álgebra de Jordan quártica (J, t) com $C((J, t)) = (A, <, >)$.

Lema 3.1.1. *Seja (J, t) a álgebra de Jordan quártica com $C((J, t)) = (A, <, >)$. Então a aplicação*

$$\begin{aligned} \{x \in J : x^{\bullet 2} = x, t(x) = 1\} &\rightarrow \{x \in A : x \neq 0, x^2 = x\} \\ f &\mapsto 2f - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

é uma bijeção.

Prova: Se $f^{\bullet 2} = f$ e $t(f) = 1$, então $t(2f - \frac{1}{2}) = 0$. Assim, $e = 2f - \frac{1}{2} \in J_0 = A$ e

$$e^2 = e^{\bullet 2} - \frac{1}{4}t(e^{\bullet 2})1 = 2f + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}t(2f + \frac{1}{4}) = 2f + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = e.$$

Reciprocamente, se $0 \neq e \in A$ é um idempotente e $f = \frac{1}{2}e + \frac{1}{4}$, então $t(f) = t(\frac{1}{4}) = 1$ e portanto $e^{\bullet 2} = e^2 + \frac{3}{4} < e, e > 1$ e $1 = N(e) = \langle e, e^2 \rangle = \langle e, e \rangle$ e obtemos que

$$f^{\bullet 2} = \frac{1}{4}e^{\bullet 2} + \frac{1}{4}e + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}(e^2 + \frac{3}{4}) + \frac{1}{4}e + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}e + \frac{1}{4} = f.$$

■

Teorema 3.1.2. *Seja (J, t) uma álgebra de Jordan em $\widetilde{\mathcal{QJ}}$. Então existe uma extensão $K|_F$ de grau 1, 2 ou 4 tal que $K \otimes_F J$ contém idempotentes de traço 1.*

Prova: Seja A a álgebra cúbica admissível associada. É suficiente provar que A contém idempotentes não nulos.

Assumamos primeiro que existe um $x \in A$ com $N(x) \neq 0$ e tal que x^3 é linearmente dependente com x e x^2 . Se $x^2 \in Fx$, então $x^2 = \lambda x$ e $N(x) = \lambda^3 \neq 0$ pela equação (2.1). Assim, $e = \frac{1}{\lambda}x$ é um idempotente não nulo. De fato $e^2 = (\frac{1}{\lambda}x)(\frac{1}{\lambda}x) = \frac{1}{\lambda^2}x^2 = \frac{\lambda x}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}x = e$.

No outro caso temos que x e x^2 são linearmente independentes e então existem escalares α e $\beta \in F$ com $x^3 = \alpha x + \beta x^2$. Da equação (2.9) sabemos que $4xx^3 = 3 \langle x, x \rangle x^2 + N(x)x$ e, como $4xx^3 = 4x(\alpha x + \beta x^2) = 4\alpha x^2 + 4\beta(\alpha x + \beta x^2) = 4\alpha\beta x + 4(\alpha + \beta^2)x^2$, segue que $4\alpha\beta = N(x)$. Assim, em particular, $\alpha \neq 0 \neq \beta$.

Seja K a extensão de F obtida ajuntando uma raiz quadrada λ de 2α , com $\lambda \neq -2\beta$ (trocando λ por $-\lambda$ se for necessário). Então

$$\begin{aligned} (\lambda x + x^2)^2 &= \lambda^2 x^2 + 2\lambda(\alpha x + \beta x^2) + N(x)x \\ &= \lambda(\lambda + 2\beta)x^2 + (2\lambda\alpha + 4\alpha\beta)x \\ &= \lambda(\lambda + 2\beta)x^2 + (\lambda^3 + 2\lambda^2\beta)x \\ &= \lambda(\lambda + 2\beta)(\lambda x + x^2) \end{aligned}$$

e $e = \frac{1}{\lambda(\lambda + 2\beta)}(\lambda x + x^2)$ é um idempotente não nulo.

Agora assumimos que $x \in A$ satisfaz $N(x) \neq 0$ e x, x^2, x^3 são linearmente independentes. Consideramos a subálgebra unitária de J gerada por x . Esta é de dimensão 4 e, como $t(x) = 0$, é isomorfa ao quociente da álgebra polinomial $F[\lambda]$ módulo o ideal gerado

por um polinômio mônico $p(\lambda) = \lambda^4 - \eta\lambda^2 - \nu\lambda - \mu$, onde $\nu = r(x) = N(x) \neq 0$. Sobre o fecho algébrico de F , $p(\lambda)$ não é da forma $(\lambda - \alpha)^4$ nem da forma $(\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta)^2$ porque o coeficiente de λ^3 em $p(\lambda)$ é 0, enquanto o coeficiente de λ é $\neq 0$. Logo $p(\lambda)$ tem uma raiz, digamos α , de multiplicidade 1. Seja K o corpo obtido juntando esta raiz α ao corpo F . Então $p(\lambda) = (\lambda - \alpha)q(\lambda)$ sobre K com $q(\alpha) \neq 0$ e

$$K \otimes_F F[\lambda]/((p(\lambda))) \cong K[\lambda]/(p(\lambda)) \cong K[\lambda]/(\lambda - \alpha) \times K[\lambda]/(q(\lambda)) \cong K \times B.$$

Porém, em $K \times B$ o elemento $f = (1, 0)$ satisfaz $f^{\bullet 2} = f$ e o seu traço genérico é 1. Note que se $p(\lambda)$ é irredutível, então a extensão $K|_F$ tem grau 4. Se esta extensão é redutível, ou tem uma raiz de multiplicidade 1 em F e $K = F$, ou α é uma raiz de um fator irredutível de $p(\alpha)$ de grau 2 e $K|_F$ tem grau 2.

■

3.2 Álgebras Com Pseudo-Composição

Nesta seção relacionamos as álgebras cúbicas admissíveis com norma não nula com as álgebras com pseudo-composição as quais satisfazem a equação

$$(x * x) * x = (x, x)x.$$

Na presença de um idempotente, podemos associar uma álgebra com pseudo-composição a qualquer álgebra cúbica admissível.

Seja $(A, <, >)$ uma álgebra cúbica admissível com um elemento idempotente $e \neq 0$. Então a equação (2.1) implica que $N(e) = < e, e^2 > = < e, e > = 1$.

Seja V o complemento ortogonal de Fe relativo a $<, >$. A equação (2.10) com $x = e$ fornece

$$4e(ex) = 3 < e, x > e + x. \quad (3.1)$$

Assim, $V = \{x \in A : (2e)((2e)x) = x\}$.

Definamos uma multiplicação comutativa em V por meio de

$$x * x = 4(ex)(ex) - 4 < e, (ex)(ex) > e \quad (3.2)$$

3.2 Álgebras Com Pseudo-Composição Álgebras Cúbicas Admissíveis e Outras Álgebras

para qualquer $x \in V$, isto é, a projeção do quadrado de $2ex$ sobre V . Pela associatividade de $\langle, \rangle$ temos que

$$4 \langle e, (ex)(ex) \rangle = 4 \langle e(ex), ex \rangle = \langle x, ex \rangle = \langle e, x^2 \rangle.$$

Linearizando $x^2x^2 = \langle x, x^2 \rangle x$ temos que

$$4(xy)(xy) + 2x^2y^2 = 3 \langle y, x^2 \rangle y + 3 \langle x, y^2 \rangle x.$$

Assim,

$$4(ey)(ey) + 2ex^2 = 3 \langle x, e \rangle e + 3 \langle e, x^2 \rangle x$$

para qualquer $x \in A$. Portanto, podemos reescrever a equação (3.2) como

$$x * y = -2e(xy) + 2 \langle e, (xy) \rangle e \quad (3.3)$$

para todo $x, y \in V$.

Logo, para todo $x \in V$, temos:

$$\begin{aligned} (x * x) * x &= -2e((x * x)x) + 2 \langle e, (x * x)x \rangle e \\ &= -2e((-2ex^2 + 2 \langle e, x^2 \rangle e)x) + 2 \langle e, (x * x)x \rangle e \\ &= 4e((ex^2)x) - 4 \langle e, x^2 \rangle e(ex) + 2 \langle e, (x * x)x \rangle e \\ &= \langle x, x^2 \rangle e - \langle e, x^2 \rangle x + 2 \langle e, (x * x)x \rangle e \text{ (pelas equações (2.9) e (3.1))} \\ &= - \langle e, x^2 \rangle x \text{ (pois } (x * x) * x \in V). \end{aligned}$$

Portanto, com $(x, x) = - \langle e, x^2 \rangle$ para qualquer $x \in V$, obtemos que

$$(x * x) * x = (x, x)x \quad (3.4)$$

para qualquer $x \in V$. Assim, $(V, *)$ é uma álgebra com pseudo-composição.

Note que se $(x, x) = 0$ para qualquer x , então $(x * x) * x = 0$ e isto implica que a álgebra $(V, *)$ é uma álgebra de Jordan.

Também, para qualquer $x, y, z \in V$, pela associatividade de $\langle, \rangle$ e as equações (3.1) e (3.3) temos que

$$\begin{aligned} (x * y, z) &= - \langle e(x * y), z \rangle \\ &= \langle 2e(e(xy)) - 2 \langle e, xy \rangle e, z \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle xy, z \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle x, yz \rangle \\ &= (x, y * z). \end{aligned}$$

Consideremos agora o endomorfismo linear φ de V dado por $\varphi(x) = -2ex$. A equação (3.1) diz que $\varphi^2 = 1$. Também consideremos o endomorfismo linear ϕ de A dado por $\phi(e) = e$ e $\phi(x) = \varphi(x)$ para qualquer $x \in V$, e a sua extensão Φ à álgebra de Jordan $(J_A = F1 \oplus A, \bullet)$ (dada pelo Teorema 2.2.4) obtida definindo $\Phi(1) = 1$.

Agora estamos prontos para enunciar a seguinte proposição.

Proposição 3.2.1. *A aplicação φ é um automorfismo de $(V, *)$, ϕ é um automorfismo de A e Φ é um automorfismo de $(J, \bullet)$.*

Prova: Para qualquer $x \in V$, a equação (3.2) implica que

$$\begin{aligned}\varphi(x) * \varphi(x) &= (-2ex) * (-2ex) = 4(ex) * (ex) \\ &= 16((ex))(e(ex)) - 16 \langle e, (ex) \rangle (e(ex)) > e.\end{aligned}$$

Mas pela equação (3.1) temos que $4e(ex) = \langle e, x \rangle e + x$. Logo

$$\begin{aligned}\varphi(x) * \varphi(x) &= (3 \langle e, x \rangle e + x)^2 - \langle e, (3 \langle e, x \rangle e + x) \rangle^2 > e \\ &= x^2 - \langle e, x^2 \rangle e = x^2 + (x, x)e.\end{aligned}$$

Por outro lado, pelas equações (3.3) e (3.1) deduzimos que

$$\begin{aligned}\varphi(x * x) &= \varphi(-2ex^2 + 2 \langle e, x^2 \rangle e) \\ &= -2e(-2ex^2 + 2 \langle e, x^2 \rangle e) \\ &= 4e(ex^2) - 4 \langle e, x^2 \rangle e \\ &= x^2 - \langle e, x^2 \rangle e \\ &= x^2 + (x, x)e.\end{aligned}$$

Logo φ é um automorfismo de $(V, *)$.

Agora da equação (3.4) segue que $\varphi[(x * x) * x] = (x, x)\varphi(x)$ o que implica que $(\varphi(x), \varphi(x))\varphi(x) = (x, x)\varphi(x)$. Logo se $x \neq 0$ temos que $(\varphi(x), \varphi(x)) = (x, x)$ e se $x = 0$ é claro que $(\varphi(x), \varphi(x)) = (x, x)$. Logo φ é uma transformação ortogonal de $(,)$. Usando $e^2 = e$, $ex = -\frac{1}{2}\varphi(x)$ e $x^2 = \varphi(x * x) - (x, x)e$, vamos verificar que $\phi : A \rightarrow A$ é um endomorfismo de $A = Fe \oplus V$. Temos $\phi(e^2) = \phi(e) = e$ e $\phi(e)\phi(e) = ee = e^2 = e$; logo $\phi(e^2) = \phi(e)\phi(e)$. Temos $\phi(ex) = \phi(-\frac{1}{2}\varphi(x)) = -\frac{1}{2}\phi(\varphi(x))$. Como $\varphi(x) \in V$ temos que $\phi(ex) = -\frac{1}{2}\varphi(\varphi(x))$ e, como $\varphi^2 = 1$, temos que $\phi(ex) = -\frac{1}{2}x$. Por outro lado, tomando

3.2 Álgebras Com Pseudo-Composição Álgebras Cúbicas Admissíveis e Outras Álgebras

$\varphi(x)$ em vez de x em $ex = -\frac{1}{2}\varphi(x)$ temos que $e\varphi(x) = -\frac{1}{2}\varphi(\varphi(x)) = -\frac{1}{2}\varphi^2(x) = -\frac{1}{2}x$. Logo $\phi(ex) = \phi(e)\phi(x)$. Temos

$$\begin{aligned}\phi(x^2) &= \phi(\varphi(x * x) - (x, x)e) \\ &= \phi((\varphi(x * x) - (x, x)\phi(e)) \\ &= \varphi((\varphi(x * x) - (x, x)e) \\ &= \varphi^2(x * x) - (x, x)e \\ &= x * x - (x, x)e.\end{aligned}$$

Pondo $\varphi(x)$ em vez de x na equação $x^2 = \varphi(x * x) - (x, x)e$ temos

$$\begin{aligned}\phi(x)\phi(x) &= \varphi(x)\varphi(x) = \varphi(\varphi(x) * \varphi(x)) - (\varphi(x), \varphi(x))e \\ &= \varphi((\varphi(x * x) - (x, x)e) \\ &= x * x - (x, x)e.\end{aligned}$$

Logo ϕ é um endomorfismo de álgebras e é automorfismo pois $\varphi^2 = 1$.

O automorfismo φ induz uma $\mathbb{Z}_2$ -graduação de V , isto é, $V = V_0 \oplus V_1$ com $V_i = \{x \in V : \varphi(x) = (-1)^i x\}$ ($i = 0, 1$), e como φ é ortogonal para $(,)$, V_0 e V_1 são subespaços ortogonais relativos a $(,)$ pois $(x_0, x_1) = (\varphi(x_0), \varphi(x_1)) = (x_0, -x_1)$ e logo $(x_0, x_1) = 0$. Também para todo $x, y \in V$ temos que

$$(x, y) = - \langle e, xy \rangle = - \langle ex, y \rangle = \frac{1}{2} \langle \varphi(x), y \rangle .$$

Logo

$$\langle x, y \rangle = 2(\varphi(x), y)$$

para todo $x, y \in V$, o que implica que ϕ é uma transformação ortogonal relativa a $\langle, \rangle$ pois

$$\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = 2(\varphi(\varphi(x)), \varphi(x)) = 2(x, \varphi(x)) = 2(\varphi(x), x) = \langle x, x \rangle .$$

E pela definição da multiplicação $\bullet$ em J dada pela equação (2.18) temos $1 \bullet 1 = 1$, $1 \bullet x = x$, $x \bullet y = xy + \frac{3}{4} \langle x, y \rangle 1$. Logo temos que Φ é um automorfismo pois

$$\begin{aligned}\Phi(1 \bullet 1) &= 1 = 1 \bullet 1 = \Phi(1) \bullet \Phi(1), \\ \Phi(1 \bullet x) &= \Phi(x) = \varphi(x) = 1 \bullet \varphi(x) = \Phi(1) \bullet \Phi(x), \\ \Phi(x \bullet y) &= \phi(xy) + \frac{3}{4} \langle x, y \rangle 1 = \phi(x)\phi(y) + \frac{3}{4} \langle \phi(x), \phi(y) \rangle 1\end{aligned}$$

e por outro lado

$$\Phi(x) \bullet \Phi(y) = \phi(x)\phi(y) + \frac{3}{4} < \phi(x), \phi(y) > 1.$$

■

Além disso, para $\alpha \in F$ e $x \in V$, como $\varphi(x * x) = x^2 + (x, x)e$ (mostrado na prova da Proposição 3.2.1),

$$\begin{aligned} N(\alpha e + x) &= < \alpha e + x, (\alpha e + x)^2 > \\ &= < \alpha e + x, \alpha^2 e - \alpha \varphi(x) + x^2 > \\ &= < \alpha e + x, \alpha^2 e - \alpha \varphi(x) + \varphi(x * x) - (x, x)e > \\ &= < \alpha e + x, (\alpha^2 - (x, x))e - \alpha \varphi(x) + \varphi(x * x) > \\ &= < \alpha e, (\alpha^2 - (x, x))e > + < x, -\alpha \varphi(x) + \varphi(x * x) > \\ &= \alpha(\alpha^2 - (x, x)) + 2(\varphi(x), -\alpha \varphi(x) + \varphi(x * x)) > \\ &= \alpha(\alpha^2 - (x, x)) + 2(x, -\alpha x + x * x) \\ &= \alpha(\alpha^2 - (x, x)) + 2(x, -\alpha x) + 2(x, x * x) \\ &= \alpha^3 - (x, x)\alpha - 2\alpha(x, x) + 2(x, x * x). \end{aligned}$$

Portanto

$$N(\alpha e + x) = \alpha^3 - 3\alpha(x, x) + 2(x, x * x). \quad (3.5)$$

Reciprocamente, seja $(V, *)$ uma álgebra com pseudo-composição $\mathbb{Z}_2$ -graduada com automorfismo graduação φ . Se $V = V_0 \oplus V_1$ e $x = x_0 + x_1$ então $\varphi(x) = x_0 - x_1$. Linearizando a equação $((x * x) * x) = (x, x)x$ obtemos $(x * x) * y + 2(x * y) * x = 2(x, y)x + (x, x)y$. Substituindo y por $x * x$ obtemos

$$(x * x)(x * x) + 2(x, x * x)x - (x, x)x * x. \quad (3.6)$$

Então

$$\begin{aligned} (x * x, x * x)x * x &= ((x * x) * (x * x)) * (x * x) \\ &= 2(x, x * x)x * (x * x) - (x, x)(x * x) * (x * x) \\ &= (x, x)^2 x * x, \end{aligned}$$

e logo

$$(x * x, x * x) = (x, x)^2 \quad (3.7)$$

para todo $x \in V$. Note que, se $x * x = 0$, então $0 = (x * x) * x = (x, x)x$ e logo $(x, x) = 0$.

3.2 Álgebras Com Pseudo-Composição Álgebras Cúbicas Admissíveis e Outras Álgebras

Consideremos o novo espaço vetorial $A = Fe \oplus V$, com a multiplicação comutativa definida por

$$e^2 = e, \quad ex = -\frac{1}{2}\varphi(x), \quad x^2 = \varphi(x * x) - (x, x)e \quad (3.8)$$

para $x \in V$. Então as equações (3.6), (3.7) e (3.8) implicam, para todo $\alpha \in F$ e $x \in A$, que:

$$\begin{aligned} (\alpha e + x)^2 &= (\alpha^2 - (x, x))e = -\alpha\varphi(x) + \varphi(x * x), \\ (\alpha e + x)^2(\alpha e + x)^2 &= ((\alpha^2 - (x, x))e + \varphi(-\alpha x + x * x))^2 \\ &= [(\alpha^2 - (x, x))^2 - (\varphi(-\alpha x + x * x), \varphi(-\alpha x + x * x))]e \\ &\quad - (\alpha^2 - (x, x))(-\alpha x + x * x) \\ &\quad + (\alpha x + x * x) * (-\alpha x + x * x) \\ &= [\alpha^4 - 2\alpha^2(x, x) + (x, x)^2 - \alpha^2(x, x) \\ &\quad + 2\alpha(x, x * x) - (x * x, x * x)]e \\ &\quad + \alpha^3 x - \alpha(x, x)x - \alpha^2 x * x + (x, x)x * x \\ &\quad + \alpha^2 x * x - 2\alpha x * (x * x) + (x * x) * (x * x) \\ &= [\alpha^4 - 3\alpha^2(x, x) + 2\alpha(x, x * x)]e \\ &\quad + \alpha^3 x - 3\alpha(x, x)x + 2(x, x * x)x \\ &= (\alpha^3 - 3\alpha(x, x) + 2(x, x * x))(\alpha e + x) \end{aligned}$$

e portanto $X^2 X^2 = N(X)X$ para todo $X = \alpha e + x \in A$, com $N(X) = \alpha^3 - 3\alpha(x, x) + 2(x, x * x)$ (veja a equação (3.5)).

Se definimos a forma bilinear simétrica $\langle, \rangle$ em $A = Fe \oplus V$ por

$$\langle \alpha e + x, \beta e + y \rangle = \alpha\beta + 2(\varphi(x), y)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \langle \alpha e + x, (\alpha e + x)^2 \rangle &= \langle \alpha e + x, (\alpha^2 - (x, x))e + \varphi(-\alpha x + x * x) \rangle \\ &= \alpha(\alpha^2 - (x, x)) + 2(\varphi(x), \varphi(-\alpha x + x * x)) \\ &= \alpha^3 - 3\alpha(x, x) + 2(x, x * x) = N(\alpha e + x). \end{aligned}$$

Se $\langle, \rangle$ é associativa então $\langle, \rangle$ é única pelo Teorema 2.1.7. Mas para todo $x, y, z \in V$ e $\alpha, \beta, \gamma \in F$ temos:

$$\langle (\alpha e + x), (\beta e + y)(\gamma e + z) \rangle$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle \alpha e + x, (\beta\gamma - (y, z))e + \varphi(y * z) - \frac{1}{2}\beta\varphi(z) - \frac{1}{2}\gamma\varphi(y) \rangle \\
 &= \alpha\beta\gamma - \alpha(y, z) + 2(\varphi(x), \varphi(y * z) - \frac{1}{2}\gamma\varphi(y)) \\
 &= \alpha\beta\gamma - [\alpha(y, z) + \beta(x, z) + \gamma(x, y)] + 2(x, y * z).
 \end{aligned}$$

Isto mostra que $\langle, \rangle$ é associativa em A se e somente se $(,)$ é associativa em $(V, *)$. Portanto, precisamos do seguinte resultado, que é interessante por si mesmo.

Teorema 3.2.2. *A forma bilinear simétrica de qualquer álgebra com pseudo-composição é associativa*

Prova: Podemos estender escalares e assumir que o corpo é infinito. Seja $(V, *)$ uma álgebra com pseudo-composição com $(x * x) * x = (x, x)x$. No caso $(,) = 0$ o resultado é trivial.

No caso em que $(,) \neq 0$, $(V, *)$ é trivialmente $\mathbb{Z}_2$ -graduada com $V = V_0$ e $V_1 = 0$. Isto quer dizer que o automorfismo graduado φ é a identidade. Construímos como antes a álgebra $A = Fe \oplus V$ com a multiplicação (dada pela equação (3.8) com $\varphi = 1$)

$$e^2 = e, \quad ex = -\frac{1}{2}x, \quad x^2 = x * x - (x, x)e,$$

que tem norma dada por $N(\alpha e + x) = \alpha^3 - 3\alpha(x, x) + 2(x, x * x)$ para todo $\alpha \in F$ e $x \in V$. Seja $\langle, \rangle$ a única forma bilinear simétrica associativa associada a A pelo Teorema 2.1.7. Temos $N(\alpha e + x) = \langle \alpha e + x, (\alpha e + x)^2 \rangle$ para todo $\alpha \in F$ e $x \in V$. Então a equação (2.10) com $x = e$ e $y \in V$ fornece (já que $ey = -\frac{1}{2}y$)

$$y = 4e(ey) = 3 \langle e, y \rangle e + \langle e, e \rangle y.$$

Logo $\langle e, V \rangle = 0$ ($e \langle e, e \rangle = 1$). Também, para todo $x \in V$, a equação (2.9) implica que

$$\begin{aligned}
 4x(x^2x) &= 3 \langle x, x \rangle x^2 + \langle x, x^2 \rangle x \\
 &= 3 \langle x, x \rangle (x * x - (x, x)e) + \langle x, x^2 \rangle x.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Assim, a projeção de $4x(x^2x)$ sobre Fe é $-3 \langle x, x \rangle (x, x)e$. Como $x^2 = x * x - (x, x)e$

3.2 Álgebras Com Pseudo-Composição Álgebras Cúbicas Admissíveis e Outras Álgebras

temos:

$$\begin{aligned}
 x^2x &= (x * x - (x, x)e)x \\
 &= (x * x)x - (x, x)ex \\
 &= (x * x) * x - (x, x * x)e + \frac{1}{2}(x, x)x \\
 &= (x, x)x - (x * x, x)e + \frac{1}{2}(x, x)x \\
 &= \frac{3}{2}(x, x)x - (x * x, x)e,
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 4x(x^2x) &= 4x\left(\frac{3}{2}(x, x)x - (x * x, x)e\right) \\
 &= 6(x, x)x^2 - 4(x * x, x)ex \\
 &= 6(x, x)(x * x - (x, x)e) + 2(x * x, x)x \\
 &= 6(x, x)x * x - 6(x, x)^2e + 2(x * x, x)x. \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

Das equações (3.9) e (3.10) concluímos que $-3 < x, x > (x, x) = -6(x, x)^2$ para qualquer $x \in V$. Assim, como o corpo é infinito e $(,) \neq 0$, temos $< x, x > = 2(x, x)$ para qualquer $x \in V$. Agora, para quaisquer $x, y, z \in V$, usando o fato que $<, >$ é associativa com $< e, V > = 0$ e a equação (3.8) obtemos

$$(x * y, z) = \frac{1}{2} < xy, z > = \frac{1}{2} < x, yz > = (x, y * z).$$

Portanto, a forma $(,)$ é associativa. ■

Portanto, a toda álgebra com pseudo-composição, podemos associar uma álgebra genericamente algébrica de grau ≤ 3 .

Corolário 3.2.3. *Toda álgebra comutativa com 1, estritamente associativa nas potências, e genericamente algébrica de grau ≤ 3 é uma álgebra de Jordan.*

Prova: Seja A uma tal álgebra associativa nas potências. No caso em que o grau de A é ≤ 2 , o resultado é claro já que $(x^2, y, x) = (x^2y)x - x^2(yx) \in (F1 + Fx, y, x) = 0$, pela comutatividade. Logo, vamos assumir que o grau de A é 3 e vamos estender escalares e assumir que o corpo é infinito.

Todo elemento $x \in A$ satisfaz a equação

$$x^3 - \tau(x)x^2 + \sigma(x)x - \nu(x)1 = 0,$$

onde τ é uma forma linear (o traço genérico), σ uma forma quadrática e ν uma forma cúbica. Para todo elemento genérico $x \in A$, seu grau é 3 e $\tau(x)$, $\sigma(x)$ e $\nu(x)$ são os coeficientes do polinômio característico da restrição $\overline{R_x} : F[x] \rightarrow F[x]$ da multiplicação à direita $R_x : A \rightarrow A$, em que $F[x]$ é a subálgebra gerada por x . Portanto, $\sigma(x) = \frac{1}{2}(\tau(x)^2 - \tau(x^2))$. Por densidade, isto é válido para todo x . Seja V o conjunto dos elementos de A de traço zero, e seja a multiplicação comutativa em V definida por

$$x * x = x^2 = x^2 - \frac{1}{3}\tau(x^2)1,$$

isto é, a projeção de x^2 sobre V . Então, para todo $x \in V$, temos:

$$\begin{aligned} (x * x) * x &= (x * x)x - \frac{1}{3}\tau((x * x)x)1 \\ &= x^3 - \frac{1}{3}\tau(x^2)x - \frac{1}{3}\tau(x^3)1 \\ &= \frac{1}{2}\tau(x^2)x + \nu(x)1 - \frac{1}{3}\tau(x^2)x - \frac{1}{3}\tau(x^3)1 \\ &= \frac{1}{6}\tau(x^2)x + (\nu(x) - \frac{1}{3}\tau(x^3))1 \\ &= \frac{1}{6}\tau(x^2)x, \end{aligned}$$

pois $(x * x) * x \in V$. Portanto, $(V, *)$ é uma álgebra com pseudo-composição e, pelo Teorema 3.2.4, a sua forma bilinear simétrica $(x, y) = \frac{1}{6}\tau(xy)$ é associativa. Além disso, para $x, y \in V$, temos

$$x^2 = x * x + \frac{1}{3}\tau(x^2)x = x * x + 2(x, x)1.$$

e disto podemos mostrar (como na prova do Teorema 2.2.4) que A é uma álgebra de Jordan. ■

3.2.1 As Categorias $\mathcal{AC}_e$ e $\mathcal{PC}_2$

Consideremos a categoria $\mathcal{AC}_e$ cujos objetos são os pares (A, e) , onde A é uma álgebra cúbica admissível e e é um idempotente não nulo, e cujos morfismos

$$\varphi : (A_1, e_1) \longrightarrow (A_2, e_2)$$

são os homomorfismos de álgebras tais que $\varphi(e_1) = e_2$. Não precisamos nos preocupar com a forma traço destes objetos, já que a existência de um idempotente não nulo força a norma ser não nula e existe (pelo Teorema 2.1.7) uma única forma traço associada.

3.3 Construção de Álgebras de Jordan Álgebras Cúbicas Admissíveis e Outras Álgebras

Consideremos também a categoria $\mathcal{PC}_2$ cujos objetos são as álgebras com pseudo-composição Z_2 -graduadas cujos morfismos são os homomorfismos que preservam a gradação.

Dado um objeto (A, e) em $\mathcal{AC}_e$, seja V o complemento ortogonal de Fe relativo à forma traço de A . Então $(V = V_0 \oplus V_1, *)$ é um objeto em $\mathcal{PC}_2$ pela Proposição 3.2.1, onde

$$V_0 = \{x \in V : \varphi(x) = -2ex = x\}$$

e

$$V_1 = \{x \in V : \varphi(x) = -2ex = -x\}$$

O seguinte resultado resume o que foi discutido nesta seção.

Teorema 3.2.4. *A aplicação $(A, e) \longrightarrow (V = V_0 \oplus V_1, *)$ é uma equivalência entre as categorias $\mathcal{AC}_e$ e $\mathcal{PC}_2$.*

■

3.3 Construção de Álgebras de Jordan

Neste seção apresentamos a maneira de construir álgebras de Jordan a partir das formas cúbicas admissíveis e relacionamos esta construção com as álgebras cúbicas admissíveis.

3.3.1 Forma Quadrática

Seja $Q : V \rightarrow F$ uma forma quadrática. Um *ponto base* de Q é um ponto $c \in V$ com $Q(c) = 1$. Seja $T(x) := Q(x, c)$ a forma linear associada. Temos $T(c) = Q(c, c) = 2Q(c) = 2$. Podemos decompor o espaço vetorial V como $V = Fc \oplus V_0$, onde $V_0 = \{x \in V : T(x) = 0\}$ é o complemento ortogonal $c^\perp$.

Se $Q : V \rightarrow F$ é uma forma quadrática com ponto base c então obtemos a álgebra de Jordan $Jord(Q, c) := (V, +, \bullet)$ com unidade c e produto

$$x \bullet y = \frac{1}{2}(T(x)y + T(y)x - Q(x, y)c).$$

Pondo $y = x$ vemos que todo elemento x satisfaz a equação de segundo grau

$$x^{\bullet 2} - T(x)x + Q(x)c = 0.$$

3.3.2 Forma Cúbica de Jordan

Em contraste com o caso da forma quadrática com ponto base, somente certos casos muito especiais de formas cúbicas com ponto base podem ser usados para construir álgebras de Jordan.

Seja $N(x)$ uma forma cúbica. Denotamos por $N(x; y)$ a linearização de $N(x)$ que é quadrática em x e linear em y . Denotamos por $N(x; y; z)$ a linearização de $N(x)$ que é simétrica e trilinear.

Um *ponto base* para uma forma cúbica $N : V \rightarrow F$ é um ponto $c \in V$ com $N(c) = 1$. Temos uma forma linear associada $T(x) := N(c; x)$ e uma forma quadrática associada $S(x) := N(x; c)$ cuja linearização é

$$S(x, y) := S(x + y) - S(x) - S(y) = N(x; y; c).$$

Logo $S(c) = T(c) = 3$.

Definição 3.3.1. Uma forma cúbica $N : V \rightarrow F$, com V de dimensão finita e com ponto base c , é chamada **cúbica de Jordan** ou **cúbica admissível** se:

(1) N não é degenerada no ponto base c , no sentido de que a forma bilinear traço

$$T(x, y) := T(x)T(y) - S(x, y)$$

é não-degenerada.

(2) A aplicação quadrática adjunta $\# : V \rightarrow V$, definida de maneira única por $T(x^\#, y) = N(x; y)$, satisfaz a identidade adjunta

$$(x^\#)^\# = N(x)x.$$

Construção de Springer. A partir de toda forma cúbica de Jordan N com ponto base c , podemos obter uma álgebra de Jordan $Jord(N, c)$ com unidade c e produto determinado pela linearização $x\#y := (x + y)^\# - x^\# - y^\#$ (da aplicação adjunta $\# : V \rightarrow V$)

3.3 Construção de Álgebras de Jordan Álgebras Cúbicas Admissíveis e Outras Álgebras

pela fórmula

$$x \bullet y := \frac{1}{2}(x \# y + T(x)y + T(y)x - S(x, y)c).$$

Esta álgebra de Jordan $Jord(N, c)$ é genericamente algébrica de grau ≤ 3 ,

$$x^{\bullet 3} - T(x)x^{\bullet 2} + S(x)x - N(x)c = 0,$$

e

$$x^{\#} = x^{\bullet 2} - T(x)x + S(x)c.$$

No que segue, sejam A uma álgebra e $N : A \rightarrow F$ uma forma cúbica de Jordan com ponto base e . Como vimos acima, $(A, +, \bullet)$ com o produto $x^{\bullet 2} = x^{\#} + T(x)x - S(x)e$, é uma álgebra de Jordan genericamente algébrica de grau genérico ≤ 3 , com unidade e e

$$x^{\bullet 3} - T(x)x^{\bullet 2} + S(x)x - N(x)e = 0.$$

A aplicação adjunta $\# : A \rightarrow A$ fornece a A uma estrutura de álgebra cúbica admissível. De fato, definindo a multiplicação comutativa $x^2 := x^{\#}$, obtemos que $(A, +, \cdot)$ é uma álgebra cúbica admissível, pois da identidade adjunta $(x^{\#})^{\#} = N(x)x$ segue que $x^2x^2 = N(x)x$ para todo $x \in A$. A norma $N(x)$ é não nula pois $N(e) = 1$. Além disso, $e = e^{\#} = e^2$.

O argumento usado na prova do Teorema 2.2.5 (v) funciona aqui e mostra que a álgebra cúbica admissível A é $C(J, t)$, onde $J = F \times A$ é o produto direto das álgebras de Jordan F e $(A, +, \bullet)$ e $t((\alpha, x)) = \alpha + T(x)$ para todo $\alpha \in F$ e $x \in A$.

Seja $\langle, \rangle$ a única forma traço da álgebra cúbica admissível A . Para todo $x, y \in A$ temos

$$T(x^2, y) = T(x^{\#}, y) = N(x; y) = 3 \langle x^2, y \rangle.$$

Substituindo x por x^2 obtemos $T(x^2x^2, y) = 3 \langle x^2x^2, y \rangle$ e, como $x^2x^2 = N(x)x$, segue que $T(x, y) = 3 \langle x, y \rangle$ para todo $x, y \in A$. Seja $V = \{z \in A : T(z) = 0\} = \{z \in A : \langle e, z \rangle = 0\}$. Para todo $x \in A$ temos $-2ex = x$. Portanto, o automorfismo φ de $(V, *)$ dado na Proposição 3.2.1 é a identidade (logo, temos uma Z_2 -gradação trivial).

Lembramos que, para todo $x \in V$, temos

$$\begin{aligned} x * x &= \text{proj}_V(2ex)^2 = \text{proj}_V(-x)^2 \\ &= x^2 - \langle e, x^2 \rangle e \\ &= x^2 - \langle ex, x \rangle e \\ &= x^2 + \frac{1}{2} \langle x, x \rangle e \end{aligned}$$

e $(x * x) * x = (x, x)x$ com $(x, x) = \frac{1}{2} \langle x, x \rangle$ pois $\langle x, y \rangle = 2(\varphi(x), y) = 2(x, y)$.

3.4 Álgebras Ponderadas

Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein. Então $x^2x^2 = \omega(x)^2x^2$ para todo $x \in A$. Logo, para todo x no núcleo $\ker(\omega)$ de ω , temos $x^2x^2 = 0$. Portanto, $\ker(\omega)$ é uma álgebra cúbica admissível com norma trivial.

Proposição 3.4.1. *Suponhamos que a norma $N(x)$ de uma álgebra cúbica admissível A pode ser fatorada como $N(x) = \mu\rho(x)^3$ para algum $\mu \in F$, $\mu \neq 0$ e ρ uma forma linear não nula. Então temos:*

(i) *A é uma álgebra ponderada com homomorfismo peso $\omega(x) = \nu\rho(x)$ ($\nu \in F, \nu \neq 0$), e A satisfaz a equação*

$$x^2x^2 = \omega(x)^3x.$$

(ii) *A é uma álgebra train e também é uma álgebra train especial.*

Prova: Da equação $N(x^2) = N(x)^2$ obtemos $\mu\rho(x^2)^3 = \mu^2\rho(x)^6$. Logo, pela fatoração única (estendendo escalares se necessário), existe um escalar não nulo ν tal que $\rho(x^2) = \nu\rho(x)^2$. Então $\mu\nu^3\rho(x)^6 = \mu^2\rho(x)^6$ e logo $\mu = \nu^3$. Substituindo $\rho(x)$ por $\omega(x) = \nu\rho(x)$ obtemos $N(x) = \mu\rho(x)^3 = (\nu\rho(x))^3 = \omega(x)^3$ para todo x e, além disso, $\omega(x^2) = \nu\rho(x^2) = \nu^2\rho(x)^2 = \omega(x)^2$ para todo x . Portanto, a álgebra comutativa A satisfaz a equação

$$x^2x^2 = \omega(x)^3x$$

para qualquer $x \in A$, onde $\omega : A \rightarrow F$ dado por $\omega(x) = \nu\rho(x)$ é um homomorfismo não nulo. Assim, A é uma álgebra ponderada de peso ω .

Das equações $x^2x^2 = N(x)x$ e $x^2x^2 = \omega(x)^3x$ temos que $N(x) = \omega(x)^3$ e linearizando obtemos que $N(x, y, z) = \omega(x)\omega(y)\omega(z)$. Logo $N(x^2, x^2, y) = \omega(x^2)\omega(x^2)\omega(y) = \omega(x)^4\omega(y)$ e então

$$N(x^2, x^2, y) = N(x)\omega(x)\omega(y).$$

Seja $\langle, \rangle$ a forma bilinear associativa associada a N (veja o Teorema 2.1.7). Como $N(x^2, x^2, y) = N(x) \langle x, y \rangle$ pela equação (2.5), concluímos então que

$$\langle x, y \rangle = \omega(x)\omega(y)$$

para todo $x, y \in A$.

Além disso, como sabemos que $4x(x^2y) = 3 \langle x, y \rangle x^2 + \langle x, x^2 \rangle y$ pela equação (2.9), pondo $y = x$ e usando a equação anterior obtemos que

$$4x^4 = 3\omega^2(x)x^2 + \omega^3(x)x.$$

Portanto, a álgebra A é uma *álgebra train*.

A equação (2.11) implica que

$$(x^2y)x - x^2(xy) = \frac{3}{4}(\langle x, y \rangle x^2 - \langle x^2, y \rangle x) = \frac{3}{4}(\omega(x)\omega(y)x^2 - \omega(x^2)\omega(y)x).$$

Logo $(x^2y)x - x^2(xy) = 0$ para $x \in R := \ker(\omega)$ e $y \in A$, o que implica que R é uma álgebra de Jordan. Como $x^2x^2 = \omega(x)x^3$, temos que $x^2x^2 = 0$ para $x \in R$, o que implica que R é nil de índice limitado. Portanto R é localmente nilpotente (veja [12]). Consideremos a cadeia das potências principais do ideal R : $R^1 = R, R^{i+1} = R^iR$ para qualquer $i \geq 0$. Estas potências R^i são ideais da álgebra de Jordan R . Como mostrado por Walcher [11], existe um idempotente não nulo e em A . Temos que $\omega(e) = 1$ e $V = \{x \in A : \langle e, x \rangle = 0\} = R$. Pela Proposição 3.2.1, temos um automorfismo $\phi : A \rightarrow A$ que preserva o ideal R e tal que $\phi(x) = -2ex$ para todo $x \in R$. Logo $\phi(R^i) \subset R^i$ para todo i e isto significa que $eR^i \subset R^i$. Portanto, R^i é um ideal de A para todo i e, como consequência, A é uma álgebra train especial. ■

A equação $x^2x^2 = \omega(x)^3x$ pode ser escrita como $x^{[3]} = \omega(x)^3x$ para qualquer $x \in A$. Isto quer dizer que os elementos $x \in A$ com peso $\omega(x) = 1$ oscila com período 2: $x^{[i+2]} = x^{[i]}$ para qualquer $i > 0$, em contraste com as álgebras de Bernstein, onde $x^{[i+1]} = x^{[i]}$ para $i \geq 2$.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Elduque, S. Okubo, *On algebras satisfying $x^2x^2 = N(x)x$* , Math. Z. 235, 275-314 (2000).
- [2] N. Jacobson, *Structure and representation of Jordan algebras*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Providence, Rhode Island (1968).
- [3] N. Jacobson, *Some groups of transformations defined by Jordan algebras I*, J. Reine Angew. Math. 201, 178-195 (1959).
- [4] E. N. Kuz'min, I. P. Shestakov, *Nonassociative structures*, in *Algebra VI*, A. I. Kostrikin, I. R. Shafarevich (editors), Encyclopaedia of Mathematical Sciences 57, 197-280 (1994).
- [5] K. McCrimmon, *Generically algebraic algebras*. Trans. Amer. Math. Soc 127, 527-551 (1967).
- [6] K. McCrimmon, *A Taste of Jordan Algebras*, Springer-Verlag, New York (2004).
- [7] K. Meyberg, J. M. Osborn, *Pseudo-composition algebras*, Math. Z. 214, 67-77 (1993).
- [8] M. L. Reed, *Algebraic structure of genetic inheritance*, Bull. Amer. Math. Soc. 34, 107-130 (1997).
- [9] R. D. Schafer, *An introduction to nonassociative algebras*, Academic Press, New York (1966).

- [10] R. D. Schafer, *On forms of degree n permitting composition*. J. Math. Mech. 12, 777-792 (1963).
- [11] S. Walcher, *Algebras which satisfy a train equation for first three plenary powers*, Arch. Math. 56, 547-551 (1991).
- [12] E. Zel'manov, *Jordan nil algebras of bounded index*, Soviet Math. Dokl. 20, 1188-1192 (1980).
- [13] K. A. Zevlakov, A. M. Slin'ko, I. P. Shestakov, A. I. Shirshov, *Ring that are nearly associative*. Academic Press, New York (1982).