Sobre a hipótese do contínuo
algumas aplicações e equivalências

Leandro Fiorini Aurichi

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM CIÊNCIA

Área de Concentração: Matemática
Orientador: **Profa. Dra. Lúcia Renato Junqueira**

Durante a elaboração deste trabalho, o autor recebeu apoio financeiro
da CNPq.

São Paulo, agosto de 2005

Sobre a hipótese do contínuo
algumas aplicações e equivalências

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação de mestrado devidamente
corrigida e defendida por Leandro Fiorini Aurichi
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, agosto de 2005.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Piotr Koszmider - IME-USP
- Prof. Dr. Ricardo Bianconi - IME-USP
- Profa. Dra. Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano - IFCH-UNICAMP

Agradecimentos

Dentre as pessoas a que devo agradecer, destaco os professores Lúcia Renato Junqueira (pela orientação e outras coisas), Piotr Koszmider (pelo *forcing* e outras coisas) e Zara Issa Abud (pela orientação na graduação e outras coisas).

Também destaco a Kika e os Fô's. Todos esses por motivos que não cabem nessa página.

Agradeço também a todos os que se sentirem no direito de serem agradecidos :)

Agradeço, por fim, à CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é estudar algumas conseqüências da Hipótese do Contínuo (CH). Consideramos alguns modelos obtidos por forcing onde CH não vale. Alguns destes modelos têm propriedades interessantes a respeito de medida (por exemplo, o modelo de Solovay). Também estudamos algumas equivalências de CH em diversas áreas da matemática. Algumas destas áreas são: funções analíticas, topologia geral e submodelos elementares. Depois disso, apresentamos algumas aplicações de CH, a maioria delas em topologia geral. Existência de P -pontos e propriedades a respeito de espaços discretamente gerados são exemplos destas aplicações.

Abstract

The main purpose of this work is to study some consequences of the Continuum Hypothesis (CH). We consider some models obtained by forcing where CH does not hold. Some of these models have interesting properties about measure (e.g the Solovay's model). Also, we study some equivalences of CH in different areas of mathematics. Some of these areas are: analytic functions, general topology and elementary submodels. After this, we show some applications of CH, most of them in general topology. Existence of P -points in ω^* and questions about discretely generated spaces are some examples of these applications.

Sumário

Introdução	8
1 Resultados preliminares	11
1.1 Teoria dos Conjuntos e Lógica	11
1.1.1 Um pouco de lógica	11
1.1.2 ZFC	13
1.1.3 Os teoremas de Gödel	14
1.1.4 A consistência de CH	15
1.1.5 Submodelos elementares	17
1.2 Forcing	19
1.2.1 Uma visão geral e informal de forcing	19
1.2.2 Modelos para ZFC	20
1.2.3 Como construir $M[G]$	21
1.2.4 O que vale em $M[G]$	23
1.2.5 Absolutividade	25
1.2.6 Alguns tipos de forcing	26
1.2.7 A consistência de $\neg$ CH	28
1.2.8 Forcing e álgebras de Boole	30
1.3 Topologia	32
1.3.1 Definições e notações básicas	32
1.3.2 Espaços compactos e generalizações	35
1.3.3 Espaços 0-dimensionais	38
1.3.4 Compactificação de Stone-Čech	39
1.3.5 Funções cardinais	40
2 Alguns Modelos de $\neg$ CH	45
2.1 Extensões que preservam algumas conseqüências de CH	45
2.2 Os reais aleatórios	57
2.2.1 Conjuntos de Baire	57
2.2.2 Os códigos	58
2.2.3 Absolutividade para os códigos entre modelos	60
2.2.4 O forcing dos reais aleatórios	63

2.3	Medida universal sobre a reta	68
2.4	Reais Lebesgue mensuráveis	74
3	Algumas equivalências de CH	83
3.1	CH e funções analíticas	83
3.2	CH e funções de Peano	86
3.3	CH e submodelos elementares	89
3.4	CH e o caráter de espaços de Lindelöf	91
3.5	CH e um jogo de dardos	93
3.6	CH e probabilidade	95
4	Algumas aplicações de CH	99
4.1	Um S-espaço	99
4.2	P-pontos	104
4.2.1	P-pontos em $\beta\omega$	104
4.2.2	P-pontos e pontos remotos	110
4.3	Espaços discretamente gerados	117
	Notação	130
	Índice Remissivo	131

Notações básicas

A^B	As funções de B em A
ω_n	O n -ésimo cardinal não enumerável, para $n \geq 1$
$[A]^\kappa$	os subconjuntos de A de cardinalidade κ
$[A]^{\leq \kappa}$	os subconjuntos de A de cardinalidade $\leq \kappa$
$\mathbb{R}$	o conjunto dos reais
$\mathbb{Q}$	o conjunto dos racionais
(HI)	hipótese de indução

Introdução

Nosso principal objetivo neste trabalho é apresentar alguns resultados relacionados à Hipótese do Contínuo (**CH**), isto é, a proposição $2^\omega = \omega_1$. As relações com CH que trabalhamos são de diversas formas: podem ser propriedades equivalentes à CH, podem ser conseqüências de CH ou até podem ser propriedades que valem em algum modelo em que não vale CH.

Estamos, principalmente, interessados em problemas topológicos, mas não só. Também procuramos apresentar resultados relacionados com diversas áreas da matemática, mostrando, assim, que a Hipótese do Contínuo não pode ser encarada como algo restrito a problemas tidos como de “fundamentos da matemática”.

Este trabalho está estruturado da seguinte maneira. No primeiro capítulo fazemos um breve resumo de resultados que serão utilizados nos posteriores. As principais áreas contidas nesse capítulo são: lógica e teoria dos conjuntos, a técnica de forcing e topologia geral. Não é o nosso intuito fazer com que esse capítulo seja completo nestas áreas. A principal função dele é situar o leitor com o trabalho, apresentar a notação utilizada, destacar alguns resultados e indicar a bibliografia que contenha as informações necessárias. Principalmente nas partes sobre lógica, teoria dos conjuntos e forcing, tentamos apresentar os resultados de forma rigorosa, mas não completamente formalizada. Quer dizer, muitos conceitos são apresentados sem uma definição formal e muitas “idéias” são dadas sem demonstrações. Isso para que o leitor tenha informação suficiente para acompanhar o que será feito posteriormente e, ao mesmo tempo, não tomar muito espaço e atenção com coisas que fogem ao propósito original do trabalho.

No segundo capítulo, apresentamos alguns modelos em que não vale CH mas que têm propriedades interessantes. Algumas propriedades são relativas à construções de medidas universais sobre a reta real. Outras são a respeito de preservação de propriedades existentes em modelos de CH. Um dos modelos que apresentamos neste capítulo é o modelo de Solovay. Para isso, apresentamos também o forcing dos reais aleatórios.

O terceiro capítulo é o que apresenta mais resultados em diversas áreas da matemática. Apresentamos propriedades equivalentes à CH formuladas na teoria de funções analíticas, em topologia geral, em submodelos elementares e outras. Algumas são de demonstração simples e outras nem tanto. Mas, em geral, têm enunciados que, a princípio, nada se parecem com a formulação original da Hipótese do Contínuo.

No quarto, e último, capítulo apresentamos algumas aplicações de CH em topologia ge-

ral. Algumas destas conseqüências de CH têm respostas mesmo sem se supor CH (como, por exemplo, se $\beta\omega \setminus \omega$ é homogêneo ou não). Mas a demonstração, assumindo-se CH, torna-se bastante simplificada, além do que, a técnica utilizada é interessante para outras aplicações. Outros problemas (como, por exemplo, a existência de S -espaços) são sabidamente independentes de ZFC. Apresentamos também outras propriedades que ainda não é sabido se podem ser mostradas sem a presença de CH (como, por exemplo, algumas propriedades relativas a espaços discretamente gerados).

É claro que existem muito mais aplicações de CH do que as que se encontram neste trabalho. Nosso propósito foi escolher algumas aplicações em problemas “clássicos” (como construções de medida sobre a reta) e outros de áreas mais “recentes” (como os espaços discretamente gerados).

Capítulo 1

Resultados preliminares

Introdução

Neste capítulo apresentamos diversos resultados que usamos em capítulos posteriores. Começamos o capítulo com uma breve revisão de conceitos de teoria dos conjuntos e lógica. Depois fazemos uma descrição informal da ferramenta de forcing que será bastante utilizada posteriormente, principalmente no Capítulo 2, quando apresentamos modelos em que não vale CH. Em seguida, fazemos outra breve revisão, desta vez a respeito de topologia geral. Apresentamos alguns resultados básicos no intuito de fixar notação e situar o leitor.

1.1 Teoria dos Conjuntos e Lógica

Introdução

Nesta seção, apresentamos um esquema bastante informal sobre teoria dos conjuntos e lógica. Quer dizer, fazemos a exposição com cuidado suficiente para que os conceitos sejam apresentados de forma correta, mas deixamos de lado boa parte da formalização propriamente dita. Nosso objetivo principal é deixar o leitor situado com o que apresentamos nos capítulos posteriores. Para uma formalização do que vem a seguir, bem como para as definições de demonstrações omitidas aqui, recomendamos [10]. Estamos assumindo que o leitor sabe o que é uma fórmula formal e que conhece regras de derivação. Estamos, também, usando como linguagem formal a linguagem da teoria dos conjuntos.

1.1.1 Um pouco de lógica

Suponha que temos uma certa coleção de fórmulas T . Vamos chamar de $[T]$ a coleção de todas as fórmulas que são conseqüências de T . Por exemplo, se as fórmulas A e $A \rightarrow B$ estão em T , então a fórmula B está em $[T]$. Outro exemplo seria que T é formado pelos axiomas que descrevem o que é um corpo e $[T]$ é toda a teoria de corpos. Dizemos que uma

coleção T de fórmulas é consistente se não existem contradições em $[T]$. Mais formalmente, temos:

Definição 1.1.1. Dizemos que T é **consistente** se não existe fórmula φ tal que φ e $\neg\varphi$ são conseqüências de T .

Dada uma coleção T , verificar se ela é consistente ou não pode ser uma tarefa difícil, já que temos que determinar a existência, ou não, de fórmulas contraditórias em $[T]$ e, na maioria das vezes, $[T]$ é infinito. Mas uma maneira de contornarmos tal problema é o seguinte resultado, que passa o problema de consistência para o de existência de modelo.

Teorema 1.1.2 (da Completude). *T admite modelo se, e somente se, T é consistente.*

Dem.: Ver [4] p. 66. □

Ou seja, se conseguimos um modelo para T , então T é consistente. Mas o que é um modelo? Não é o nosso objetivo definir formalmente o que é “ser um modelo” aqui. Vamos nos limitar a dar uma idéia disso para o caso particular de quando as fórmulas envolvidas estão na linguagem da teoria dos conjuntos. Tal caso é suficiente para tudo o que temos neste trabalho. Com isso, chamamos de modelo para T , um conjunto M munido de uma “operação” que verifica a “veracidade” de fórmulas em M . Tal operação é definida da seguinte maneira: dada uma fórmula φ , chamamos de φ^M a restrição de φ para M . Tal restrição é feita restringindo-se os quantificadores de φ para M , isto é, $\forall x$ torna-se $\forall x \in M$ e $\exists x$ fica $\exists x \in M$. Pode-se fazer isso formalmente definindo-se recursivamente sobre as fórmulas (para tanto, ver [25] p. 112). Com isso, dizemos que φ vale em M se, e somente se, φ^M vale.

Assim, podemos ver a força de 1.1.2. Para saber se uma coleção T de fórmulas é consistente, basta verificarmos se existe algum M tal que φ^M é verdadeira para toda φ em T . Por exemplo, temos que se T é formada pela única fórmula “ $\forall x \ x = 0$ ”, então T é consistente, pois basta tomarmos M como sendo $\{0\}$ (pois aí temos que $\varphi^M = “\forall x \in M \ x = 0”$ é verdadeira). Outro exemplo é que os axiomas que descrevem o que é um corpo formam uma coleção consistente, pois $\mathbb{R}$ (e $\mathbb{Q}$ e outros) é um modelo para tal coleção.

Note que, a princípio, dadas uma coleção de axiomas T e uma fórmula φ , podemos ter que nem φ nem $\neg\varphi$ estão em $[T]$. Neste caso, dizemos que φ é **independente** de T . Note que, assim, tanto φ quanto $\neg\varphi$ são consistentes com T .

1.1.2 ZFC

Tudo o que faremos nesse trabalho se baseia na teoria dos conjuntos. Por isso, precisamos ter uma formalização do que é tal teoria. Da mesma forma que temos axiomas que descrevem o que é ser um corpo, podemos adotar axiomas que descrevem a teoria dos conjuntos. Os axiomas que adotamos neste trabalho são:

Axioma do vazio: $\exists x \forall y (y \notin x)$.

Informalmente, “existe um conjunto que não tem elementos”.

Axioma da extensionalidade: $\forall x \forall y (x = y \leftrightarrow \forall t (t \in x \leftrightarrow t \in y))$.

Informalmente, “dois conjuntos são iguais se, e somente se, têm os mesmos elementos”.

Axioma do par: $\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z \wedge (\forall t t \in z \rightarrow (t = x \vee t = y)))$

Informalmente, “se A, B são conjuntos, então existe o conjunto $\{A, B\}$ ”.

Axioma da união: $\forall x \exists y \forall t (t \in y \leftrightarrow \exists w (w \in x \wedge t \in w))$.

Informalmente, “se A é conjunto, então existe o conjunto $\bigcup A$ ”.

Axioma da separação (esquema): Dada $\varphi(x_1, \dots, x_n, y)$ uma fórmula da linguagem da teoria dos conjuntos, o seguinte é um axioma: $\forall x_1 \dots \forall x_n \forall u \exists z \forall y (y \in z \leftrightarrow (y \in u \wedge \varphi(x_1, \dots, x_n, y)))$.

Informalmente, “se A é conjunto e φ é uma fórmula da teoria dos conjuntos, então existe o conjunto $\{x \in A : \varphi(x)\}$ ”.

Axioma da substituição (esquema): Dada $\varphi(u_1, \dots, u_n, x, y)$ uma fórmula da teoria dos conjuntos, então o seguinte é um axioma: $\forall u_1 \dots \forall u_n [\forall x \forall y \forall y' ((\varphi(u_1, \dots, u_n, x, y) \wedge \varphi(u_1, \dots, u_n, x, y')) \rightarrow y = y') \rightarrow \forall s \exists z \forall y (y \in z \leftrightarrow \exists x \in s \varphi(u_1, \dots, u_n, x, y))]$.

Informalmente, “se A é um conjunto e existe uma fórmula que, para cada $a \in A$ associa um conjunto $f(a)$, então existe o conjunto $\{f(a) : a \in A\}$ ”.

Axioma das partes: $\forall x \exists y \forall t (t \in y \leftrightarrow \forall z (z \in t \rightarrow z \in x))$.

Informalmente, “se A é um conjunto, então existe um conjunto cujos elementos são os subconjuntos de A ”.

Axioma do infinito: $\exists x [\exists y (y \in x \wedge \forall z z \notin y) \wedge \forall y (y \in x \rightarrow \exists z (z \in x \wedge \forall t (t \in z \leftrightarrow (t \in y \vee t = y))))]$.

Informalmente, “existe um conjunto infinito, na verdade, existe um conjunto que contém o vazio e que, dado x um elemento seu, também contém $x \cup \{x\}$ ”.

Axioma da regularidade: $\forall x (\exists z z \in x \rightarrow \exists z (z \in x \wedge \forall y \in z y \notin x))$.

Informalmente, “se A é um conjunto não vazio, então existe $B \in A$ tal que $B \cap A = \emptyset$ ”.

Tal coleção de axiomas é chamada de **ZF** (Zermelo-Frankel). Quase sempre adicionamos mais um axioma a tal coleção:

Axioma da escolha: Informalmente, “se $\mathcal{F}$ é uma família de conjuntos tal que, para todo $F \in \mathcal{F}$, $F \neq \emptyset$, então existe $f : \mathcal{F} \rightarrow \bigcup \mathcal{F}$ tal que, para todo $F \in \mathcal{F}$, $f(F) \in F$ ”. Isto é, dada uma família de conjuntos não vazios, podemos escolher um elemento de cada conjunto.

Chamamos a coleção ZF juntamente com o Axioma da Escolha de **ZFC**.

1.1.3 Os teoremas de Gödel

Nosso principal propósito é estudar propriedades relativas à Hipótese do Contínuo, que é uma sentença independente dos axiomas de ZFC. Isto é, nem ela, nem sua negação causam alguma inconsistência com os axiomas.

Mas a Hipótese do Contínuo não é a única sentença independente de tais axiomas. Alguns outros exemplos são a Hipótese Generalizada do Contínuo, o Axioma de Martin etc. Alguém poderia perguntar qual seria uma coleção de sentenças que estendesse ZFC e que não deixasse sentenças sem uma “decisão”. Isto é, uma coleção com a qual qualquer sentença fosse ou consistente ou inconsistente. Mas tal coleção não pode existir. Ou, na verdade, existe, mas necessariamente é uma coleção inconsistente (pois daí fica fácil, dada qualquer sentença, ela é inconsistente com a coleção). O que garante tal fato é o seguinte resultado, que apresentamos de maneira informal:

Teorema 1.1.3 (Primeiro Teorema da Incompletude de Gödel). *Seja T uma coleção recursiva de axiomas que estende a aritmética. Se T é completo, então T é inconsistente.*

Para uma demonstração para tal teorema, bem como uma discussão mais completa sobre o assunto de sentenças independentes, recomendamos [31].

De posse de tal teorema, temos que não podemos estender ZFC para um sistema completo e consistente, pois o próprio ZFC estende a aritmética (pois podemos definir aritmética dentro de ZFC) e, portanto, toda extensão sua também.

Um segundo resultado, que será novamente comentado quando discutirmos forcing, é o seguinte:

Teorema 1.1.4 (Segundo Teorema da Incompletude de Gödel). *Seja T uma coleção de axiomas que estenda a aritmética. Se T prova sua consistência, então T é inconsistente.*

Novamente, recomendamos [31] para o assunto.

1.1.4 A consistência de CH

O que vamos apresentar nesta seção é a idéia usada por Gödel para mostrar que CH é consistente com ZFC. Tal idéia é conhecida por Universo Construtível. Começamos com algumas motivações para a construção de tal universo.

Se quisermos mostrar a igualdade $2^\omega = \omega_1$, uma primeira tentativa seria “descrever” todos os subconjuntos de ω e daí “contar” o número de “descrições”. Pensando dessa maneira, poderíamos tentar “contar” quantos conjuntos poderíamos criar cujos elementos são números naturais. Note que, se tivéssemos um método de dizer, dado um conjunto, quais são todos os seus subconjuntos, poderíamos tentar descrever todos os conjuntos. Por exemplo, partimos do conjunto $\emptyset$. Daí, consideramos o conjunto de todos os seus subconjuntos, que, simplesmente, é $\{\emptyset\}$. Daí tomamos o conjuntos de todos os subconjuntos deste, isto é, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Poderíamos esperar que, dado um conjunto qualquer, ele fosse formado dessa maneira. O próximo resultado dá um jeito de formalizarmos esta idéia:

Teorema 1.1.5. *Seja F um termo de classe e seja a um conjunto. Então existe um único termo de classe G definido sobre os ordinais tal que:*

- (i) $G(\emptyset) = a$
- (ii) $G(\alpha + 1) = F(G(\alpha))$ se α é um ordinal.
- (iii) $G(\alpha) = \bigcup_{\xi < \alpha} G(\xi)$ se α é um ordinal limite.

Tal resultado pode ser mostrado por indução transfinita.

Antes de explicarmos como o último resultado pode ser usado para formar todos os conjuntos, vamos a uma explicação sobre seu enunciado. Um termo de classe, informalmente falando, nada mais é do que uma função, com a diferença que nem seu domínio, nem sua imagem formam, necessariamente, um conjunto. Mas cada elemento de seu domínio e cada elemento de sua imagem é, necessariamente, um conjunto. Por exemplo, $F : \text{Ord} \rightarrow \text{Ord}$ tal que $F(\alpha) = \alpha + 1$ é um termo de classe sobre os ordinais.

Assim, o resultado 1.1.5 nos diz que podemos construir uma família de conjuntos indexada por todos os ordinais. Vamos usar essa idéia para construirmos uma família que contenha todos os conjuntos. Note que isso não será um conjunto pois a família estará

indexada pelos ordinais. Note também que não estamos fazendo algo fora da linguagem da teoria dos conjuntos. O que vamos provar, escrito em termos de conjuntos, é “que para todo conjunto C existe um ordinal α tal que $C \in G(\alpha)$ ”, lembrando que $G(\alpha)$ é um conjunto.

Para construir tal família, adotamos, com a mesma notação de 1.1.5, $a = \emptyset$ e $F(X) = \wp(X)$. Note que, de fato, $F(X)$ é um conjunto se X é um conjunto. É possível mostrarmos que, dado um conjunto C qualquer, existe um ordinal α tal que $C \in G(\alpha)$.

Com isso já conseguimos dizer quem são todos os conjuntos. Mas o problema da Hipótese do Contínuo permanece, pois ao chegarmos a um passo α em que $F(\alpha)$ seja infinito enumerável¹, o passo seguinte será $G(\alpha + 1) = \wp(G(\alpha))$ e novamente não sabemos quantos são os subconjuntos de $F(\alpha)$. Vamos examinar nossa construção mais de perto para contornarmos tal problema. A cada passo sucessor, acrescentamos conjuntos novos. Já nos passos limites, simplesmente juntamos tudo o que já foi feito. Então vamos nos concentrar em como acrescentamos conjuntos novos. Note que, simplesmente, pegamos tudo o que já foi feito e tomamos subconjuntos disso. Isto é, criamos conjuntos cujos elementos já foram obtidos. O problema é que tomamos qualquer conjunto e simplesmente não sabemos quantos são os subconjuntos de ω . Assim, nosso problema pode ser contornado se, em vez de tomarmos qualquer subconjunto, tomarmos apenas alguns subconjuntos especiais, mas suficientes para satisfazer os axiomas de ZFC. Isto é, vamos pegar uma parte “menor” da construção que já foi feita, mas que também satisfaça os axiomas de ZFC.

Um primeira idéia é a seguinte: suponha que C é um conjunto. Chamemos de $Def(C)$ todos os subconjuntos de C que podem ser definidos por fórmulas. Suponha por um momento que possamos formalizar Def dentro da linguagem da teoria dos conjuntos. Então podemos aplicar 1.1.5 com $a = \emptyset$ e $F(X) = Def(X)$. É de se esperar que G assim obtida satisfaça os axiomas de ZFC (intuitivamente falando, temos isso pois cada axioma diz que um determinado conjunto deve existir, mas cada conjunto assim é descrito por uma fórmula e, portanto, deve estar incluído em nossa família). Assim, só nos resta formalizar o conceito de Def para a teoria dos conjuntos. Isso pode ser feito adotando-se a seguinte idéia: $Def(C) = \{x \in \wp(C) : x = \{c \in C : \varphi(c, v_1, \dots, v_n)\}\}$. Para formalizar $\{c \in C : \varphi(c, v_1, \dots, v_n)\}$, usamos a idéia da enumeração de Gödel para falar “o conjunto dos c 's para os quais existem $v_1, \dots, v_n$ tais que o número associado a $\varphi(c, v_1, \dots, v_n)$ pertence ao conjunto dos números de fórmulas demonstráveis”. Não vamos explicar o processo de enumeração de Gödel aqui. Para quem se interessar, indicamos [31]. Mas o importante sobre tal processo que utilizamos é que, dada uma fórmula, ela pode ser representada por um número. E também que, dentro de ZFC, podemos decidir se, dados dois números, as fórmulas que eles representam são conseqüências uma da outra e, assim, podemos falar do conjunto dos números que representam conseqüências dos axiomas de ZFC.

Feita a construção descrita acima, chamamos de L a coleção dos conjuntos x 's tais que existe α tal que $x \in G(\alpha)$. Pode-se mostrar que L satisfaz os axiomas de ZFC e

¹não é muito difícil mostrar que tal passo é exatamente o passo $\alpha = \omega$.

pode-se mostrar que CH vale em L (na verdade, pode-se mostrar que GCH, a Hipótese Generalizada do Contínuo, vale em L). Com isso, é possível mostrar que, se ZFC + CH é inconsistente, então ZFC é inconsistente.

1.1.5 Submodelos elementares

Apresentamos nesta parte um pequeno resumo da técnica de submodelos elementares. Esta técnica será utilizada em alguns capítulos posteriores. Por exemplo, apresentaremos uma equivalência de CH feita na teoria de submodelos elementares e também, ao estudarmos modelos em que não vale CH, apresentaremos um axioma cuja idéia surge na teoria dos submodelos elementares e que é mais fraco que CH.

Para esta parte, estamos adotando [17]. Todas as demonstrações e definições omitidas aqui podem ser encontradas lá.

Definição 1.1.6. Sejam M e N modelos. Dizemos que M é um **submodelo elementar** de N , e denotamos por $M \prec N$, se $M \subset N$ e, para toda fórmula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ da linguagem da teoria dos conjuntos, e todo $a_1, \dots, a_n \in M$, temos

$$\varphi^M(a_1, \dots, a_n) \text{ se, e somente se, } \varphi^N(a_1, \dots, a_n)$$

Definição 1.1.7. Seja X um conjunto. Definimos o **fecho transitivo** de X por

$$TC(X) := \bigcap \{T : T \supset X \text{ e } T \text{ é transitivo}\}.$$

Definição 1.1.8. Seja λ um cardinal regular. Denotamos por $H(\lambda)$ o conjunto $\{x : TC(x) < \lambda\}$.

Teorema 1.1.9. *Seja λ um cardinal regular não enumerável. Então $H(\lambda)$ é um modelo para ZFC - P, onde ZFC - P é a coleção de axiomas ZFC sem o axioma das partes.*

Dem.: Ver [25] p. 132. □

Uma aplicação para o último resultado é que, em geral, numa demonstração só trabalhamos com conjuntos que estão todos contidos num $H(\lambda)$ com λ fixado. Assim, para os conjuntos que nos interessam na demonstração, temos que vale ZFC todo. A questão se resume a tomarmos um λ “suficientemente grande”. Assim, no que se segue, quando dissermos λ é suficientemente grande, estamos dizendo que queremos um λ tal que todos os conjuntos envolvidos no contexto estejam em $H(\lambda)$. Também, muitas vezes, faremos o abuso de linguagem de dizer “ M é um submodelo elementar” em vez de dizer “ M é um submodelo elementar de $H(\lambda)$ com λ suficientemente grande”.

Lema 1.1.10. *Seja λ um cardinal regular e seja $\kappa \leq \lambda$. Sejam M_ξ com $\xi < \kappa$, submodelos elementares de $H(\lambda)$ tais que $M_\xi \prec M_\eta$ se $\xi \leq \eta$. Então $M := \bigcup_{\xi < \kappa} M_\xi$ é submodelo elementar de $H(\lambda)$*

Teorema 1.1.11 (de Löwenheim-Skolem-Tarski). *Seja M um modelo de tamanho α de uma linguagem enumerável. Então, dado $X \subset M$ de tamanho $\beta \leq \alpha$, existe M' submodelo elementar de M tal que $|M'| = \omega \cdot \beta$ e $X \subset M'$.*

Dem.: [25] p. 156. □

É fácil mostrar que determinados conjuntos sempre pertencem a submodelos elementares. Alguns exemplos são ω , ω_1 , cada número natural etc. Isso porque tais conjuntos são definíveis por fórmulas.

O próximo resultado diz que, dado um conjunto enumerável num submodelo, então tal conjunto está contido no submodelo, isto é, todos os seus elementos também são elementos do submodelo.

Lema 1.1.12. *Seja M um submodelo elementar. Se $A \in M$ é enumerável, então $A \subset M$.*

Dem.: Como A é enumerável, existe $f : \omega \rightarrow A$ bijetora. Pela elementaridade de M e como $\omega \in M$, temos que existe $f \in M$ bijeção de ω em A . Assim, dado $a \in A$, existe $n \in \omega$ tal que $a = f(n)$ e $f(n) \in M$ já que $f, n \in M$. □

A título de tornar as coisas um pouco mais claras, vamos a um “esquema” de como submodelos elementares podem ser usados. Suponha que queremos mostrar uma propriedade P . Então supomos, por absurdo, que vale $\neg P$. Daí, usamos 1.1.9 para obter um modelo para $\neg P$ (na verdade, escolhemos um λ “suficientemente grande” para que não valha P), então tomamos M um submodelo elementar de $H(\lambda)$. Como $\neg P$ vale em M e M é “pequeno”, tentamos obter outra propriedade que não valha em $H(\lambda)$ mas que valha em M . Daí, novamente pela elementaridade de M , tal propriedade deveria valer em $H(\lambda)$ e temos uma contradição.

Referências: [17, 31, 10, 7]

1.2 Forcing

Introdução

Apresentamos aqui um pequeno resumo do que é a técnica de forcing. Nosso maior interesse está em apresentar como se usa a técnica para obter resultados de independência. Todas as demonstrações e definições que não apresentarmos aqui, a menos de menção contrária, estão em [25].

1.2.1 Uma visão geral e informal de forcing

A técnica de forcing serve, principalmente, para mostrar que certas afirmações são consistentes com ZFC. Funciona mais ou menos assim. Supomos que M é um “modelo” para ZFC. Daí, usando um argumento combinatório, construímos um conjunto G que não está em M . Então consideramos o modelo $M[G]$, que é o menor modelo N (de ZFC) tal que $M \subset N$ e $G \in N$.

Fazendo uma analogia com extensões de corpos, consideramos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, onde $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ é o menor corpo K tal que $\mathbb{Q} \subset K$ e $\sqrt{2} \in K$. Como $M[G]$ tem que ser um modelo de ZFC, alguns conjuntos que não estavam necessariamente em M precisam estar em $M[G]$, por exemplo $G \times G$, $\bigcup G$ etc. Assim como $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ precisa conter certos números que não estavam em $\mathbb{Q}$, por exemplo $\sqrt{2} + 1$, $5\sqrt{2}$ etc. Nos dois casos, a minimalidade garante que não acrescentamos elementos desnecessários.

Algumas propriedades de G (que vão depender da forma como o construímos) nos darão informações importantes sobre $M[G]$. Por exemplo, podemos ter que $\bigcup G$ é uma função injetora de ω_2 em 2^ω e, daí, termos que a Hipótese do Contínuo não vale em $M[G]$ e, portanto, termos a consistência de $\neg \text{CH}$ com ZFC.

Vejam agora como obter $M[G]$ a partir de M e G . Voltando ao exemplo $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, de posse de $\mathbb{Q}$ e de $\sqrt{2}$, conseguimos facilmente construir $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, simplesmente escrevendo todos os elementos da forma $a_0 + a_1\sqrt{2} + \dots + a_n\sqrt{2}^n$ para $n \in \omega$ e $a_i \in \mathbb{Q}$. Note que, desta forma, obtemos todo $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e somente ele. Com isso, temos que todos os elementos de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ estão determinados por uma seqüência $a_0, \dots, a_n$ em $\mathbb{Q}$. Na verdade, fizemos tal construção sem usar qualquer característica especial de $\sqrt{2}$, de forma que, se queremos adicionar um determinado $r \in \mathbb{C}$ a $\mathbb{Q}$, a extensão $\mathbb{Q}(r)$ estará determinada a partir de todos os elementos da forma $a_0 + a_1r + \dots + a_nr^n$. Assim, mesmo sem saber quem é o r , sabemos como é a extensão $\mathbb{Q}(r)$: seqüências $a_0, \dots, a_n$ em $\mathbb{Q}$ dão um “algoritmo” para os elementos de $\mathbb{Q}(r)$.

Com M e $M[G]$ acontece algo parecido. Sempre podemos encontrar, dentro de M , determinados conjuntos especiais que chamaremos de nomes. Tais conjuntos serão, como no caso das extensões de corpos, “algoritmos” em M para os elementos de $M[G]$. De posse de G , tais nomes determinarão $M[G]$, ou seja, dado um nome σ em M , ao “aplicarmos” G a σ , obtemos um conjunto que chamaremos de σ_G . Também temos que, dado $a \in M[G]$,

existe $\sigma \in M$ tal que $a = \sigma_G$ (da mesma forma que, dado $a \in \mathbb{Q}(r)$, existem $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Q}$ tais que $a_0 + a_1r + \dots + a_nr^n = a$).

Outra semelhança entre a relação de M com $M[G]$ e a de $\mathbb{Q}$ com $\mathbb{Q}(r)$ é que dois nomes podem representar um mesmo conjunto, isto é, podemos ter $\sigma, \tau \in M$ nomes distintos tais que $\tau_G = \sigma_G$. Note que, de fato, o mesmo ocorre com $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}(r)$, por exemplo, $a_0 = 4$ e $b_0 = b_1 = 0$ e $b_2 = 2$ são seqüências distintas mas que representam o mesmo elemento em $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ($4 = 0 + 0\sqrt{2} + 2\sqrt{2}^2$).

1.2.2 Modelos para ZFC

No esquema apresentado na seção anterior, um problema aparece pelo seguinte resultado:

Teorema 1.2.1. *ZF não prova a consistência de ZF.*

Esse resultado é consequência direta do segundo teorema da incompletude de Gödel. Como podemos mostrar a consistência relativa de ZFC a ZF (isto é, podemos mostrar que, se ZFC é inconsistente, então ZF é inconsistente), também temos que não podemos mostrar a consistência de ZFC usando ZF. Assim, não podemos tomar M um modelo para ZFC. Para contornar este problema, usamos o seguinte resultado:

Teorema 1.2.2. *Seja S um conjunto de sentenças que contenha os axiomas de ZFC. Seja $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sentenças de S . Então S prova:*

$$\exists M (|M| = \omega \text{ e } M \text{ é transitivo e } (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)^M)$$

Em particular, temos que, dado um conjunto finito de axiomas de ZFC, existe um modelo enumerável e transitivo para tal conjunto. Isso já é suficiente para o que queremos, como mostra o seguinte resultado:

Teorema 1.2.3 (Princípio de forcing). *Seja φ uma fórmula. Suponha dadas $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ fórmulas de $ZFC + \varphi$, existem $\psi_1, \dots, \psi_m$ fórmulas de ZFC tais que*

$$\begin{aligned} &\forall M \text{ modelo enumerável transitivo para } \psi_1, \dots, \psi_m \\ &\exists N \text{ modelo enumerável transitivo para } \varphi_1, \dots, \varphi_n \text{ tal que } M \subset N. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Com isso, temos que, se ZFC é consistente, então $ZFC + \varphi$ também é.

Dem.: Suponha que $\text{ZFC} + \varphi$ seja inconsistente. Então existem $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ fórmulas de $\text{ZFC} + \varphi$ que demonstram uma contradição. Por hipótese, existe $\psi_1, \dots, \psi_m$ fórmulas de ZFC tais que vale (1.1). Em particular, por 1.2.2 temos que existe M modelo enumerável transitivo para $\psi_1, \dots, \psi_m$. Então, por (1.1), existe N modelo enumerável transitivo para $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Absurdo, pois $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ mostram uma contradição. $\square$

Pelo último resultado, tudo o que precisamos fazer é conseguir fazer valer (1.1). Por enquanto, ainda não vimos a necessidade dos modelos envolvidos serem enumeráveis e transitivos. Veremos qual a necessidade disso na próxima seção. Tendo em vista tal resultado, adotaremos o seguinte “abuso” de notação: em vez de falarmos que M é um modelo enumerável e transitivo para $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, diremos apenas que M é um modelo para ZFC . Note que tal abuso não traz problemas uma vez que sempre podemos examinar as demonstrações envolvidas numa prova de consistência verificando quais axiomas de ZFC usados e aplicar 1.2.3.

1.2.3 Como construir $M[G]$

Tendo em vista 1.2.3, precisamos saber como, a partir de um modelo M , construir um N que satisfaça os axiomas que desejamos. Tal N será um $M[G]$ para algum G . Muitas das propriedades que $M[G]$ terá dependerão de como este G é obtido. Antes de verificarmos tais dependências, vamos examinar como, a partir de M , construímos $M[G]$. Para isso, precisamos descrever quem vai ser G .

Definição 1.2.4. Dizemos que $(P, \leq)$ ou simplesmente P é uma **ordem parcial** se:

- $\forall p \in P \ p \leq p$
- $\forall p, q \in P \ (p \leq q \text{ e } q \leq p) \rightarrow p = q$
- $\forall p, q, r \in P \ (p \leq q \text{ e } q \leq r) \rightarrow p \leq r$
- existe um elemento em P , denotado por 1 , tal que $\forall p \in P \ p \leq 1$.

A definição usual de uma ordem parcial não inclui nossa última exigência. Mas acrescentá-la não traz grandes problemas (dada uma ordem parcial no sentido usual, sempre podemos acrescentar tal elemento) e, muitas vezes, é mais fácil trabalhar adotando-a.

Dizemos que $p \perp q$ (lê-se p **incompatível** com q) se não existe $r \leq p, q$. Dizemos que P é uma **ordem parcial não trivial** se para todo $p \in P$ existem $q, r \leq p$ tais que $q \perp r$.

Muitas vezes chamaremos uma ordem parcial como acima de **forcing**.

Definição 1.2.5. Seja P uma ordem parcial. Dizemos que $D \subset P$ é um **denso** em P se para todo $p \in P$ existe $d \in D$ tal que $d \leq p$.

Definição 1.2.6. Seja P uma ordem parcial. Dizemos que $F \subset P$ é um **filtro** se:

- $\forall p, q \in F \exists r \in F r \leq p, q$
- $\forall p \in F \forall q \in P p \leq q \rightarrow q \in F$

Definição 1.2.7. Seja P uma ordem parcial. Se M é um modelo e $P \in M$, dizemos que um filtro G é um **P -genérico** sobre M se para todo $D \in M$ tal que D é denso em P temos $D \cap G \neq \emptyset$. Quando a ordem e o modelo estiverem claros no contexto, poderemos dizer simplesmente que G é **genérico**.

Com essas definições, já podemos dizer quem é o G desejado. Partindo de um modelo M , definimos uma ordem parcial $P \in M$ e depois consideramos $G \subset P$ um P -genérico sobre M . O próximo resultado garante que sempre podemos fazer isso e que, em geral, $G \notin M$.

Lema 1.2.8. *Seja M um modelo transitivo enumerável e $P \in M$ uma ordem parcial. Então existe G um P -genérico sobre M . Além disso, se P é não trivial e H é um P -genérico sobre M , então $H \notin M$.*

Agora precisamos definir $M[G]$ de posse de M e de G . Primeiramente, definimos os nomes que serão os “algoritmos” (em M) de construção dos elementos de $M[G]$.

Definição 1.2.9. Seja P uma ordem parcial. Dizemos que σ é um **P -nome** se ocorre uma das seguintes alternativas:

- $\sigma = \emptyset$
- $\forall a \in \sigma \exists p \in P \exists \tau$ um P -nome tal que $a = (\tau, p)$.

Note que a definição de um P -nome não envolve modelos nem o genérico. Assim, ela pode ser feita dentro de M . Vamos agora, tendo G , definir σ_G para um P -nome σ dado. Estes serão os elementos de $M[G]$.

Definição 1.2.10. Sejam M um modelo, $P \in M$ uma ordem parcial e G um P -genérico sobre M . Seja σ um P -nome em M . Definimos $\sigma_G := \{\tau_G : \exists p \in G (\tau, p) \in \sigma\}$.

Com isso, a definição de $M[G]$ é a natural:

Definição 1.2.11. Seja M um modelo, $P \in M$ uma ordem parcial e G um P -genérico. Definimos $M[G] := \{\sigma_G : \sigma \text{ é um } P\text{-nome em } M\}$.

1.2.4 O que vale em $M[G]$

Vamos apresentar algumas propriedades que temos em $M[G]$. Entre elas, que $M[G]$ de fato estende M . Outras propriedades estão relacionadas a fatos sobre $M[G]$ que podemos descrever em M .

Começemos com uma definição de um tipo especial de nome que vai nos ajudar a mostrar que $M \subset M[G]$.

Definição 1.2.12. Sejam M um modelo, $P \in M$ uma ordem parcial e $x \in M$. Definimos $\check{x} := \{(\check{y}, 1) : y \in x\}$.

Teorema 1.2.13. *Seja M um modelo transitivo, $P \in M$ uma ordem parcial e G um filtro em P . Então, temos:*

- (i) $\forall x \in M$ $\check{x}$ é um P -nome e $\check{x}_G = x$.
- (ii) $M \subset M[G]$
- (iii) $M[G]$ “satisfaz” ZFC.

Uma breve explicação sobre o resultado anterior: quando dizemos que $M[G]$ “satisfaz” ZFC, queremos dizer que $M[G]$ satisfaz qualquer axioma de ZFC previamente fixado, desde que M satisfaça uma certa lista (finita) de axiomas.

Dado M um modelo e x um conjunto, denotamos por $M[x]$ o “menor” modelo que estende M e contém x , isto é, se N é um modelo tal que $M \subset N$ e $x \in N$, temos que $M[x] \subset N$. Pode-se mostrar que tal notação é coerente com o que temos até agora. Isto é, que, dado M e G um genérico sobre M , $M[G]$ é o “menor” modelo que estende M e contém G .

Agora vamos entender como algumas propriedades de M podem levar a outras em $M[G]$. Na verdade, muitas propriedades que a ordem $P \in M$ tiver, darão origem a outras propriedades em $M[G]$. Esta relação começa a se apresentar no próximo resultado.

Definição 1.2.14. Sejam M um modelo enumerável transitivo para ZFC, sejam $P \in M$ uma ordem parcial e $p \in P$. Sejam $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ uma fórmula e $\tau_1, \dots, \tau_n$ P -nomes em M . Dizemos que p **força** $\varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ e denotamos por $p \Vdash \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ se, para todo P -genérico G sobre M tal que $p \in G$, temos que $\varphi((\tau_1)_G, \dots, (\tau_n)_G)^{M[G]}$ vale.

Note que tal definição é feita “fora” de M , pois fala do próprio M e de genéricos que normalmente não estão em M . Mas existe uma outra “relação de forcing”, que vamos denotar por $\Vdash^*$, que pode ser definida em M (não vamos apresentar tal definição aqui, mas ela pode ser encontrada em [25] p. 195). De posse de tal relação, pode-se mostrar o seguinte resultado:

Teorema 1.2.15. *Sejam M um modelo enumerável transitivo para ZFC e $P \in M$ uma ordem parcial. Seja $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ uma fórmula e $\tau_1, \dots, \tau_n$ P -nomes em M . Então, para qualquer $p \in P$, temos:*

$$p \Vdash \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n) \text{ se, e somente se, } (p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n))^M$$

Ou seja, apesar da nossa definição de forcing não poder ser feita em M , existe uma que pode e que é equivalente.

Um fato importante sobre a relação de forcing e de como ela relaciona propriedades da ordem $P \in M$ e de $M[G]$ é dado pelo próximo resultado:

Teorema 1.2.16. *Sejam M um modelo enumerável transitivo para ZFC e $P \in M$ uma ordem parcial. Seja $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ uma fórmula e $\tau_1, \dots, \tau_n$ P -nomes em M . Então, dado um P -genérico G sobre M , temos:*

$$\varphi((\tau_1)_G, \dots, (\tau_n)_G)^{M[G]} \text{ se, e somente se, } \exists p \in G \ p \Vdash \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$$

Informalmente, o último resultado diz que uma afirmação vale em $M[G]$ se, e somente se, ela é forçada por algum elemento do genérico. Com isso, podemos ver que os conjuntos densos em P dizem muito sobre $M[G]$, como mostra o seguinte resultado:

Lema 1.2.17. *Sejam M um modelo enumerável transitivo para ZFC, $P \in M$ uma ordem parcial e G um P -genérico sobre M . Sejam $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ uma fórmula e $\tau_1, \dots, \tau_n$ P -nomes em M . Se $D := \{p \in P : p \Vdash \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)\}$ é denso em P , então vale $\varphi((\tau_1)_G, \dots, (\tau_n)_G)^{M[G]}$.*

Dem.: Suponha que D é denso. Por 1.2.15, temos que $D \in M$. Assim, como G é genérico, existe $p \in G \cap D$. Logo, por 1.2.16 vale $\varphi((\tau_1)_G, \dots, (\tau_n)_G)^{M[G]}$. $\square$

Vejamos agora algumas propriedades de $\Vdash$:

Lema 1.2.18. *Sejam M um modelo enumerável transitivo, $P \in M$ uma ordem parcial, $p, q \in P$, $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, $\psi(x_1, \dots, x_n)$ fórmulas e $\tau_1, \dots, \tau_n$ P -nomes. Então valem:*

- (i) *se $p \Vdash \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ e $q \leq p$, então $q \Vdash \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$;*
- (ii) *$(p \Vdash \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n) \text{ e } p \Vdash \psi(\tau_1, \dots, \tau_n))$ se, e somente se, $p \Vdash (\varphi(\tau_1, \dots, \tau_n) \wedge \psi(\tau_1, \dots, \tau_n))$;*
- (iii) *se $p \Vdash \exists x \varphi(x, \tau_2, \dots, \tau_n)$, então existem $r \leq p$ e τ um P -nome tais que $q \Vdash \varphi(\tau, \tau_2, \dots, \tau_n)$;*

1.2.5 Absolutividade

Quando trabalhamos com dois ou mais modelos, podemos ter que certas fórmulas valem em um e não valem em outro. Vamos investigar com que tipo de fórmula isso não ocorre, isto é, que tipo de fórmulas valem num modelo se, e somente se, valem no outro. Primeiramente, vamos a uma definição mais formal do que queremos:

Definição 1.2.19. Seja $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ uma fórmula e sejam $M \subset N$ modelos. Dizemos que $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ é **absoluta** para M e N se

$$\forall x_1, \dots, x_n \in M (\varphi(x_1, \dots, x_n)^M \text{ se, e somente se, } \varphi(x_1, \dots, x_n)^N)$$

Um dos motivos pelos quais trabalhamos com modelos transitivos é que, em tais modelos, podemos garantir que várias propriedades são absolutas. Por exemplo, entre modelos transitivos, são absolutas as seguintes fórmulas: “ $x = y$ ”, “ $x \subset y$ ”, “ $x \cup y$ ”, “ x é um par ordenado”, “ f é uma função bijetora” etc.

Outro exemplo de propriedade absoluta entre modelos transitivos é a de “ser um ordinal”. Mas, ao contrário desta, a propriedade “ser um cardinal” nem sempre é absoluta. É do nosso interesse determinar quando isso ocorre, no caso específico em que trabalhamos com M e $M[G]$. Para tal caso, usamos a seguinte terminologia:

Definição 1.2.20. Seja M um modelo enumerável transitivo. Seja $P \in M$ uma ordem parcial. Dizemos que P **preserva cardinais** se, para todo P -genérico G sobre M , temos

$$\forall \alpha \in M (\alpha \text{ é cardinal})^M \text{ se, e somente se, } (\alpha \text{ é cardinal})^{M[G]}$$

Muitas vezes podemos ter que P preserva alguns cardinais, mas não todos. Para esses casos, temos as seguintes definições:

Definição 1.2.21. Sejam M um modelo enumerável transitivo, $P \in M$ uma ordem parcial e α um cardinal em M . Dizemos que P **preserva cardinais abaixo** de α se

$$\forall \beta \leq \alpha (\beta \text{ é cardinal})^M \text{ se, e somente se, } (\beta \text{ é cardinal})^{M[G]}$$

e dizemos que P **preserva cardinais acima** de α se

$$\forall \beta \geq \alpha (\beta \text{ é cardinal})^M \text{ se, e somente se, } (\beta \text{ é cardinal})^{M[G]}$$

Apesar de “ser um cardinal” nem sempre ser absoluto entre M e $M[G]$, temos que as propriedades “ser finito” e “ser enumerável” sempre são absolutas. Na verdade, para o caso finito, a cardinalidade é sempre absoluta. Por exemplo, se, em M , certo conjunto tem 3 elementos, então, em $M[G]$, ele também terá 3 elementos.

1.2.6 Alguns tipos de forcing

Vamos apresentar aqui algumas propriedades que ordens parciais podem ter. Tais propriedades, por si só, já trazem alguma informação a respeito da extensão.

Pela própria definição de ser genérico, temos que os densos de uma ordem P dão propriedades sobre um genérico G . Outro tipo de subconjunto de P que dá propriedades sobre genéricos é o das anticadeias:

Definição 1.2.22. Seja P uma ordem parcial. Dizemos que $A \subset P$ é uma **anticadeia** se, para todo $a, b \in A$ temos $a \perp b$.

É um exercício simples mostrar que, assim como os densos, um genérico qualquer intercepta todas as anticadeias maximais de uma ordem P em M . Mas, além dessa propriedade, os tamanhos possíveis das anticadeias numa ordem parcial também dão propriedades para a extensão $M[G]$. Para ver isso, comecemos com uma definição a respeito de tamanhos máximos para anticadeias em P :

Definição 1.2.23. Seja P ordem parcial. Dizemos que P tem **c.c.c.** (*countable chain condition*) se, para toda anticadeia A em P , temos que $|A| \leq \omega$. Analogamente, se θ é um cardinal, dizemos que P é **θ -c.c.** se para todo $A \subset P$ tal que A é anticadeia, temos que $|A| < \theta$ (note que c.c.c. é o mesmo que ω_1 -c.c.).

O seguinte resultado tem diversas aplicações:

Lema 1.2.24. Sejam $P \in M$ e $A, B \in M$. Seja $\theta \in M$ tal que, em M , P tem θ -c.c.. Sejam G um P -genérico e $f \in M[G]$ tal que $f : A \rightarrow B$. Então existe $F \in M$ tal que $F : A \rightarrow \wp(B)$ e que, para todo $a \in A$, $f(a) \in F(a)$ e $(|F(a)| < \theta)^M$.

Uma maneira informal de vermos o que o último resultado diz é a seguinte: dada uma função $f : A \rightarrow B$ na extensão, cujos domínio e contra-domínio estão em M , mesmo sem podermos, em M , “decidir” para cada $a \in A$ o valor de $f(a)$, ainda podemos encontrar um subconjunto de B de “candidatos” a valor de $f(a)$. E temos que o tamanho de tal conjunto de “candidatos” é limitado pelo tamanho das anticadeias.

Outra propriedade que os tamanhos máximos de anticadeias têm é relativo à preservação de cardinais. O próximo lema é consequência do anterior:

Lema 1.2.25. *Sejam M um modelo enumerável transitivo, $P \in M$ uma ordem parcial e θ um cardinal regular em M tais que P é θ -c.c. em M . Então P preserva cardinais acima de θ .*

Note que, em particular, o último resultado nos dá que forcings c.c.c. preservam cardinais.

Outra consequência que o tamanho de anticadeias nos dá, é a limitação para o “tamanho” de certas potências:

Lema 1.2.26. *Seja P uma ordem parcial κ -c.c. tal que $|P| = \alpha \geq \omega$. Seja λ um cardinal infinito e seja θ um cardinal tal que $(\theta = \alpha^{\kappa\lambda})^M$. Então vale $(2^\lambda \leq \theta)^{M[G]}$.*

Outra propriedade que podemos exigir de uma ordem parcial é relacionada a uma espécie de “completude” da ordem, a saber, se ela é fechada para cadeias decrescentes:

Definição 1.2.27. *Seja P ordem parcial. Dizemos que P é σ -fechado se, dados $(p_n)_{n \in \omega} \subset P$ tais que $p_{n+1} \leq p_n$ para todo $n \in \omega$, temos que existe $p \in P$ tal que $p \leq p_n$ para todo $n \in \omega$. Analogamente, dado λ cardinal, dizemos que P é λ -fechado se, dados $\kappa < \lambda$ e $(p_\xi)_{\xi < \kappa}$ tais que $p_\xi \leq p_{\xi'}$ se $\xi \leq \xi'$, temos que existe $p \in P$ tal que $p \leq p_\xi$ para todo $\xi < \kappa$ (note que σ -fechado é o mesmo que ω_1 -fechado).*

Uma propriedade que forcings λ -fechados têm é a de não “acrescentarem” determinados tipos de conjuntos:

Lema 1.2.28. *Sejam M um modelo transitivo enumerável, $P \in M$ uma ordem parcial, $\lambda \in M$ um cardinal em M e $X \in M$. Então P não adiciona subconjuntos de X de cardinalidade menor que λ , isto é, se $p \Vdash \sigma \in \check{X}$ e $|\sigma| < \check{\lambda}$ então existe $q \leq p$ e $Y \subset X$ tais que $Y \in M$ e $q \Vdash \sigma = \check{Y}$.*

Outra propriedade destes forcings é, também, relativa à preservação de cardinais:

Lema 1.2.29. *Sejam M um modelo enumerável transitivo, $P \in M$ uma ordem parcial e λ um cardinal em M tais que P é λ -fechado. Então P preserva cardinais abaixo de λ .*

Apresentamos agora uma maneira de se construir um novo forcing baseado em forcings anteriores. Essa construção é chamada de **produto de forcings**:

Definição 1.2.30. Sejam P e Q ordens parciais. Definimos $P \times Q$ como o conjunto $\{(p, q) : p \in P \text{ e } q \in Q\}$ com a seguinte ordem:

$$(p_1, q_1) \leq (p_2, q_2) \text{ se } p_1 \leq p_2 \text{ e } q_1 \leq q_2$$

O próximo resultado mostra como os genéricos de cada forcing se relacionam com o genérico do produto:

Lema 1.2.31 (do produto). *Seja M modelo enumerável transitivo. Sejam P e Q forcings em M . Seja $G \subset P \times Q$. Então G é $(P \times Q)$ -genérico sobre M se, e somente se, $G = G_1 \times G_2$ onde $G_1 := \{p \in P : \exists q \in Q (p, q) \in G\}$ é P -genérico sobre M e $G_2 := \{q \in Q : \exists p \in P (p, q) \in G\}$ é Q -genérico sobre $M[G_1]$. Além disso, nessas condições, $M[G] = M[G_1][G_2] = M[G_2][G_1]$.*

1.2.7 A consistência de $\neg \text{CH}$

Vamos apresentar aqui o forcing usado por Cohen em [6] para se mostrar a consistência de $\neg \text{CH}$.

Definição 1.2.32. Chamamos de **forcing de Cohen** a seguinte ordem parcial:

$$Fn(I, J) := \{p : |p| < \omega, p \text{ é função, } \text{dom } p \subset I \text{ e } \text{Im } p \subset J\}$$

onde $p \leq q$ se $p \supset q$.

Antes de mostrarmos algumas propriedades dos forcings de Cohen, vamos ao conceito de Δ -sistema que nos será bastante útil.

Definição 1.2.33. Seja $\mathcal{F}$ uma família. Dizemos que $\mathcal{F}$ forma um Δ -sistema de **raiz** r se, para todo $F, G \in \mathcal{F}$, $F \cap G = r$.

Lema 1.2.34 (do Δ -sistema). *Seja $\mathcal{F}$ uma família de tamanho ω_1 tal que, para todo $F \in \mathcal{F}$, $|F| < \omega$. Então existem $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ e r tais que $|\mathcal{F}'| = \omega_1$ e $\mathcal{F}'$ forma um Δ -sistema de raiz r .*

Com o Lema do Δ -sistema, podemos mostrar que, sob certas hipóteses, $Fn(I, J)$ tem c.c.c. e, assim, preserva cardinais.

Lema 1.2.35. *Sejam I e J conjuntos tais que J é enumerável. Então $F_n(I, J)$ tem c.c.c..*

Dem.: Sejam $(p_\xi)_{\xi < \omega_1} \subset F_n(I, J)$. Considere, para cada $\xi < \omega_1$, $d_\xi := \text{dom } p_\xi$. Por 1.2.34 podemos supor que $\{d_\xi : \xi < \omega_1\}$ formam um Δ -sistema de raiz r . Como J é enumerável e r é finito, $|J^r| = \omega$. Assim, podemos supor que $p_\xi|_r$ são todos idênticos (só existe uma quantidade enumerável possibilidades para $p_\xi|_r$). Note que os p_ξ 's são 2-2 compatíveis. Logo, não existe anticadeia não enumerável. $\square$

Vejamos que é fácil obter uma função a partir de um $F_n(I, J)$ -genérico G :

Lema 1.2.36. *Sejam M um modelo transitivo enumerável, $I, J \in M$ com I infinito e J não vazio. Seja G um $F_n(I, J)$ -genérico sobre M . Então $\bigcup G$ é uma função sobrejetora de I em J .*

Dem.: Note que $\bigcup G$ é função pois G é filtro. Vamos mostrar que, para todo $i \in I$, existem $j \in J$ e $p \in F_n(I, J)$ tais que $(i, j) \in p \in G$. Trabalhando em M , seja

$$D_i := \{p \in F_n(I, J) : i \in \text{dom } p\}$$

Note que, como J é não vazio, D_i é denso em $F_n(I, J)$. Logo, existe $p \in D_i \cap G$ e temos o resultado.

Agora vamos mostrar que, dado $j \in J$, existem $i \in I$ e $p \in F_n(I, J)$ tais que $(i, j) \in p \in G$. Trabalhando em M , considere

$$D_j := \{p \in F_n(I, J) : j \in \text{Imp } p\}$$

Note que, como I é infinito e $\text{dom } q$ é finito para todo $q \in F_n(I, J)$, D_j é denso em $F_n(I, J)$. Assim, existe $q \in G \cap D_j$ e temos o resultado. $\square$

Com isso, obtemos o resultado desejado:

Proposição 1.2.37. *Seja M um modelo enumerável. Seja G um $F_n(\omega_2 \times \omega, 2)$ -genérico sobre M . Então, em $M[G]$, $2^\omega \geq \omega_2$*

Dem.: Trabalhando em $M[G]$, seja $f : \omega_2 \times \omega \rightarrow 2$, tal que $f = \bigcup G$ (temos isso por 1.2.36). Para cada $\xi < \omega_2$, considere $f_\xi : \omega \rightarrow 2$ dada por

$$f_\xi(n) = f(\xi, n)$$

Vamos mostrar que $f_\xi \neq f_\eta$ se $\xi \neq \eta$. Trabalhando em M , considere

$$D := \{p \in F_n(\omega_2 \times \omega, 2) : \exists n (\xi, n), (\eta, n) \in \text{dom } p \text{ e } p(\xi, n) \neq p(\eta, n)\}$$

Note que, como $\text{dom } q$ é finito para todo $q \in F_n(\omega_2 \times \omega, 2)$, D é denso em $F_n(\omega_2 \times \omega, 2)$. Assim, existem $p \in G$ e $n \in \omega$ tais que $p(\xi, n) \neq p(\eta, n)$ e, portanto, $f_\xi \neq f_\eta$.

Com isso, temos que $(2^\omega \geq |\omega_2|)^{M[G]}$. Como $F_n(\omega_2 \times \omega, 2)$ tem c.c.c. (por 1.2.35), temos, por 1.2.25, que $F_n(\omega_2 \times \omega, 2)$ preserva cardinais. Assim, temos o resultado. $\square$

Na verdade, no último resultado é possível obter $(2^\omega = \omega_2)^{M[G]}$. Mais do que isso, podemos mostrar a consistência de $2^\omega = \kappa$ onde κ é qualquer cardinal de cofinalidade não enumerável.

1.2.8 Forcing e álgebras de Boole

Uma classe importante de forcings é a dos que, em vez de uma ordem parcial qualquer, são dados por uma álgebra de Boole com sua ordem usual. Na verdade, é possível mostrar que, dada uma ordem parcial qualquer, ela pode ser “imersa” de uma “maneira boa” numa álgebra de Boole completa. Começemos pela definição da tal “maneira boa”:

Definição 1.2.38. Sejam P e Q ordens parciais. Dizemos que P é **imersa densamente** em Q se existe uma função $i : P \rightarrow Q$ satisfazendo:

- (a) $i(p) \leq i(q)$ se $p \leq q$.
- (b) dado $q \in Q$, existe $p \in P$ tal que $i(p) \leq q$.

Agora vejamos por que “imegrir densamente” é uma maneira boa de se fazer uma imersão:

Proposição 1.2.39. *Sejam M um modelo e $P, Q \in M$ ordens parciais. Se P é imersa densamente em Q então, dado um P -genérico G_P temos que existe um Q -genérico G_Q , tal que $M[G_P] = M[G_Q]$. Temos também o análogo para Q , isto é, dado G_Q existe G_P tal que $M[G_Q] = M[G_P]$.*

Por sua vez, uma álgebra de Boole qualquer pode ser imersa densamente numa álgebra de Boole completa, que é chamada de seu **completamento**. Fazer tal imersão é interessante pois álgebras de Boole completas tem boas propriedades. Começemos pela sua definição:

Definição 1.2.40. Seja B uma álgebra de Boole. Dizemos que B é uma **álgebra de Boole completa** se, dado $A \subset B$, temos que $\sup A \in B$. Muitas vezes denotamos $\sup A$ por $\sum_{a \in A} a$.

O próximo resultado resume o que temos até aqui:

Proposição 1.2.41. *Seja P uma ordem parcial. Então existe uma álgebra de Boole completa B tal que P é imersa densamente em B .*

Uma facilidade que álgebras de Boole completas trazem é a de podermos usar valores Booleanos de fórmulas:

Definição 1.2.42. Seja M um modelo. Sejam $B \in M$ uma álgebra de Boole completa e φ uma fórmula. Denotamos por $\llbracket \varphi \rrbracket$ o elemento $\sup\{a \in B : a \Vdash \varphi\} \in B$.

Podemos interpretar $\llbracket \varphi \rrbracket$ como o “quanto” B força φ . Por exemplo, se φ vale em ZFC, temos que $\llbracket \varphi \rrbracket = 1$ e se $\neg\varphi$ vale em ZFC, temos que $\llbracket \varphi \rrbracket = 0$, onde 1 e 0 representam o maior e o menor elemento da álgebra de Boole em questão.

Referências: [25, 17, 10]

1.3 Topologia

Introdução

Nesta seção fazemos uma breve revisão de topologia geral. Apresentamos alguns resultados gerais que serão usados nos capítulos posteriores. Definições e demonstrações que estiverem suprimidas, podem ser encontradas, a menos de menção contrária, em [11].

1.3.1 Definições e notações básicas

Começemos com algumas definições e resultados básicos de topologia geral.

Podemos passar o conceito de base de uma topologia, que é um conceito global, para um conceito local:

Definição 1.3.1. Seja X um espaço topológico. Seja $x \in X$. Dizemos que B é uma **base para x** , ou uma **base local para x** se para todo aberto V tal que $x \in V$, existe $b \in B$ tal que $x \in b \subset V$.

A seguir, recordamos os axiomas de enumerabilidade e os de separação que serão utilizados diversas vezes. Começemos com os axiomas de enumerabilidade:

Definição 1.3.2. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X satisfaz o:

- **primeiro axioma de enumerabilidade** se, para todo $x \in X$, x tem uma base local enumerável.
- **segundo axioma de enumerabilidade** se X admite uma base enumerável.
- **terceiro axioma de enumerabilidade** se existe $D \subset X$ denso enumerável.

Agora, vamos aos axiomas de separação:

Definição 1.3.3. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é:

- **T_0** se, para todos $x, y \in X$ distintos, existe V aberto tal que $x \in V$ e $y \notin V$ ou $y \in V$ e $x \notin V$.
- **T_1** se, para todos $x, y \in X$ distintos, existe V aberto tal que $x \in V$ e $y \notin V$. Note que isso é equivalente a dizer que, para todo $x \in X$, $\{x\}$ é fechado.

- **T₂** ou **Hausdorff** se, para todos $x, y \in X$ distintos, existem U e V abertos disjuntos tais que $x \in U$ e $y \in V$.
- **T₃** se, para todo $x \in X$ e $F \subset X$ fechado tal que $x \notin F$, existem U e V abertos disjuntos tais que $x \in U$ e $F \subset V$. Se X também é T_1 , dizemos que X é um **espaço regular**.
- **T₄** se, para todos $F, G \subset X$ fechados disjuntos existem U e V abertos disjuntos tais que $F \subset U$ e $G \subset V$. Se X também é T_1 , dizemos que X é um **espaço normal**.

Num espaço normal, além de “separar” fechados disjuntos por abertos, podemos fazer tal separação também por funções contínuas, como mostra o seguinte lema:

Lema 1.3.4 (de Urysohn). *Seja X um espaço normal. Sejam $F, G \subset X$ fechados disjuntos. Então existe $f : X \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in F$ e $f(x) = 1$ para todo $x \in G$.*

Note que a recíproca do último lema também é verdadeira, isto é, se existe tal função para quaisquer F e G fechados disjuntos, então X é normal (basta pegar os abertos $f^{-1}([0, \frac{1}{3}])$ e $f^{-1}([\frac{2}{3}, 1])$). Outro fato importante é que não exigimos que não exista $x \in X$ tal que $f(x) = 0$ ou $f(x) = 1$ com $x \notin F, G$. Na verdade, tal exigência é mais forte do que a normalidade e nos dá a seguinte definição:

Definição 1.3.5. *Seja X um espaço T_1 . Se para quaisquer F, G fechados disjuntos em X existe $f : X \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $f^{-1}(\{0\}) = F$ e $f^{-1}(\{1\}) = G$, então dizemos que X é **perfeitamente normal**.*

Um exemplo de um espaço perfeitamente normal é qualquer espaço métrico, como mostra o seguinte resultado:

Proposição 1.3.6. *Seja X um espaço métrico. Então X é perfeitamente normal.*

Dem.: Dados F e G fechados disjuntos, basta notar que a função f dada por

$$f(x) := \frac{d(x, F)}{d(x, F) + d(x, G)}$$

onde $d(x, F)$ é a distância de x para o conjunto F , satisfaz o que desejamos. □

Poderíamos esperar que valesse algo análogo ao lema de Urysohn para espaços regulares. Mas tal fato não é verdade o que nos leva à seguinte definição:

Definição 1.3.7. Seja X um espaço topológico. Se para todo $x \in X$ e $F \subset X$ fechado tal que $x \notin F$ existe $f : X \rightarrow [0, 1]$ contínua satisfazendo $f(x) = 0$ e $f(y) = 1$ para todo $y \in F$, então dizemos que X satisfaz a propriedade $T_{3\frac{1}{2}}$. Se X é também T_1 dizemos que X é um **espaço de Tychonoff**.

Em espaços de Tychonoff podemos tomar funções contínuas que só se anulam em G_δ 's previamente determinados, como mostra o próximo resultado. Lembramos que um G_δ é um conjunto que pode ser escrito como intersecção enumerável de abertos. A existência de tais funções nos será útil quando trabalharmos com a compactificação de Stone-Čech.

Proposição 1.3.8. *Seja X um espaço de Tychonoff. Sejam $x \in X$ e $A \subset X$ um G_δ tal que $x \in A$. Então existe $f : X \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $x \in f^{-1}(0) \subset A$.*

Dem.: Escreva $A = \bigcap_{n \in \omega} V_n$ onde cada V_n é aberto. Para cada $n \in \omega$, seja $f_n : X \rightarrow [0, \frac{1}{2^n}]$ tal que $f_n(x) = 0$ e $f_n(y) = \frac{1}{2^n}$ para todo $y \notin V_n$. Considere $f : X \rightarrow [0, 1]$ dada por $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Note que, como cada $|f_n(y)| \leq \frac{1}{2^n}$, f está bem definida e a convergência é uniforme e, portanto, f é contínua. Note também que $f^{-1}(0) \subset A$. $\square$

Ao trabalharmos com produto de espaços topológicos, uma classe importante de funções são as projeções:

Definição 1.3.9. Seja I um conjunto e sejam (X_i) , com $i \in I$, espaços topológicos. Para cada $i \in I$ definimos $\pi_i : \prod_{\xi \in I} X_\xi \rightarrow X_i$ por $\pi_i(x) = x(i)$. Tal função é dita a **projeção** na coordenada i .

As projeções dão uma caracterização para as funções contínuas num espaço produto:

Proposição 1.3.10. *Sejam Z um conjunto e X, Y_z , com $z \in Z$, espaços topológicos. Seja $f : X \rightarrow \prod_{z \in Z} Y_z$. Temos que f é contínua se, e somente se, para todo $z \in Z$, $\pi_z \circ f$ é contínua.*

Dem.: $\Rightarrow$) Imediato pois composta de contínuas é contínua e pelo fato que as projeções são contínuas.

$\Leftarrow$) Sejam $z_1, \dots, z_n \in Z$ e $V_1, \dots, V_n$ abertos de $Y_{z_1}, \dots, Y_{z_n}$ respectivamente. Basta mostrarmos que $f^{-1}(\pi_{z_1}^{-1}(V_1) \cap \dots \cap \pi_{z_n}^{-1}(V_n))$ é aberto (pois intersecções finitas de abertos da forma $\pi_z^{-1}(V_z)$ formam uma base para $\prod_{z \in Z} Y_z$). Mas $f^{-1}(\pi_{z_1}^{-1}(V_1) \cap \dots \cap \pi_{z_n}^{-1}(V_n)) = f^{-1}(\pi_{z_1}^{-1}(V_1)) \cap \dots \cap f^{-1}(\pi_{z_n}^{-1}(V_n)) = (\pi_{z_1} \circ f)^{-1}(V_1) \cap \dots \cap (\pi_{z_n} \circ f)^{-1}(V_n)$ que é aberto pois $\pi_z \circ f$ é contínua para todo z . $\square$

Apresentemos agora dois tipos de conjuntos em espaços topológicos:

Definição 1.3.11. Sejam X um espaço topológico e $Y \subset X$. Dizemos que Y é um **discreto** se, para todo $y \in Y$ existe V aberto de X tal que $V \cap Y = \{y\}$, isto é, se Y é um subespaço discreto com a topologia induzida.

Definição 1.3.12. Seja X um espaço topológico. Dizemos que $R \subset X$ é **raro** se $X \setminus \overline{R}$ é denso em X .

O próximo resultado diz que, em muitos espaços, subespaços discretos também são subconjuntos raros:

Proposição 1.3.13. *Seja X um espaço T_1 sem pontos isolados. Seja $D \subset X$ um subespaço discreto. Então D é raro em X .*

Dem.: Vamos mostrar que $X \setminus \overline{D}$ é denso em X . Seja V um aberto não vazio. Note que, como X não tem pontos isolados, existe $x \in V \setminus D$. Se $V \cap D = \emptyset$, acabamos. Se não, seja $d \in V \cap D$ e seja V_d aberto tal que $V_d \cap D = \{d\}$. Novamente, por X não ter pontos isolados, existe $y \in V_d \cap V$ com $y \neq d$. Como X é T_1 , $V_d \setminus \{d\}$ é aberto. Como $y \in (V_d \setminus \{d\}) \cap V$ e $(V_d \setminus \{d\}) \cap D = \emptyset$, temos que $y \in V \cap (X \setminus \overline{D})$. $\square$

1.3.2 Espaços compactos e generalizações

Vamos agora apresentar algumas propriedades sobre espaços compactos. Também vamos apresentar algumas generalizações de compacidade que serão úteis nos capítulos posteriores.

Antes, convém notar que, diferentemente de [11], ao dizermos que X é compacto, não estaremos assumindo que X seja T_2 , isto é, só fazemos a exigência de que toda cobertura aberta de X tenha subcobertura finita.

É um exercício simples mostrar o seguinte resultado.

Proposição 1.3.14. *Seja X compacto e T_2 . Então X é normal.*

Um conceito que aparece muitas vezes quando trabalhamos com espaços compactos é o de ponto de acumulação completo:

Definição 1.3.15. Seja X um espaço topológico. Sejam $Y \subset X$ e $x \in X$. Dizemos que x é um **ponto de acumulação completo** de Y se, para toda vizinhança V de x , temos que $|V \cap Y| = |Y|$.

Os dois próximos resultados dão caracterizações para espaços compactos:

Teorema 1.3.16. *Seja X um espaço topológico. Então as seguintes propriedades são equivalentes:*

- (i) X é compacto.
- (ii) Todo subconjunto infinito de X tem ponto de acumulação completo.
- (iii) Se $(F_\xi)_{\xi < \kappa}$ são fechados não vazios tais que $F_\alpha \supset F_\beta$ se $\alpha < \beta$, então $\bigcap_{\xi < \kappa} F_\xi \neq \emptyset$.

Dem.: $i \Rightarrow ii$): Suponha que não. Então existe $Y \subset X$ infinito que não tem ponto de acumulação completo. Para cada $x \in X$, seja V_x uma vizinhança aberta de x tal que $|V_x \cap Y| < |Y|$. Como X é compacto, existem $x_1, \dots, x_n$ tais que $\bigcup_{i=1}^n V_{x_i} = X$. Absurdo, pois $|\bigcup_{i=1}^n V_{x_i} \cap Y| < |Y|$.

$ii \Rightarrow iii$): Podemos supor que $F_\alpha \neq F_\beta$ para todo $\alpha \neq \beta$ e que κ é um cardinal. Então, para cada $\xi < \kappa$, podemos tomar $x_\xi \in F_\xi \setminus F_{\xi+1}$. Seja x ponto de acumulação completo de $\{x_\xi : \xi < \kappa\}$. Logo, $x \in F_\xi$ para todo ξ pois cada F_ξ é fechado e $F_\xi \supset F_\eta$ se $\xi < \eta$.

$iii \Rightarrow i$): Basta lembrar que ser compacto é equivalente a intersecção de fechados com p.i.f. ser não vazia. □

Teorema 1.3.17 (Tkachuk). *Seja X um espaço topológico T_2 . Então X é compacto se, e somente se, todo $D \subset X$ subespaço discreto é tal que $\overline{D}$ é compacto.*

Dem.: Se X é compacto, então, claramente, $\overline{D}$ é compacto. Vamos mostrar a outra implicação. Suponha que X não seja compacto. Então existem $(F_\xi)_{\xi < \kappa}$ fechados não vazios tais que $F_\alpha \supset F_\beta$, se $\alpha < \beta$, e com $\bigcap_{\xi < \kappa} F_\xi = \emptyset$. Note que, se $K \subset X$ é um compacto, então existe $\xi \in \kappa$ tal que $K \cap F_\xi = \emptyset$. Por hipótese, $\overline{D}$ é compacto para cada $D \subset X$ discreto. Assim, seja $\xi(D)$ o menor ξ tal que $\overline{D} \cap F_\xi = \emptyset$. Vamos contruir uma seqüência $(x_\xi)_{\xi < \kappa}$ tal que:

- $D_\alpha := \{x_\xi : \xi < \alpha\}$ é discreto para todo $\alpha < \kappa$.
- $x_\alpha \in F_{\xi(D_\alpha)}$

Seja $x_0 \in F_0$. Suponha definidos $(x_\xi)_{\xi < \alpha}$. Então tomamos $x_\alpha \in F_{\xi(D_\alpha)}$. Note que $D_{\alpha+1}$ de fato é discreto pois $(X \setminus \overline{D_\alpha}) \cap D_{\alpha+1} = \{x_\alpha\}$.

Note que $D := \{x_\xi : \xi < \kappa\}$ é discreto, pois dado $\xi < \kappa$, $x_\xi \notin \overline{D_\xi}$ e $x_\xi \notin \overline{\{x_\alpha : \xi < \alpha < \kappa\}}$ já que $\{x_\alpha : \xi < \alpha < \kappa\} \subset F_{\xi(D_{\xi+1})}$. Logo, $\overline{D}$ é compacto. Absurdo, pois $\overline{D} \cap F_\xi \neq \emptyset$ para todo $\xi < \kappa$ já que $\xi(D_\alpha) \geq \alpha$ para todo $\alpha < \kappa$. $\square$

Vamos agora a algumas generalizações para a compacidade. Uma primeira generalização que usamos é a seguinte:

Definição 1.3.18. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é **inicialmente κ -compacto** se dada uma cobertura C por abertos de X tal que $|C| \leq \kappa$, existe $C' \subset C$ uma subcobertura finita de X .

Tal generalização guarda várias analogias à compacidade. Uma primeira é a seguinte, cuja demonstração é análoga ao do caso compacto:

Lema 1.3.19. *Sejam X e Y espaços topológicos. Seja $f : X \longrightarrow Y$ contínua e sobrejetora. Então, se X é inicialmente κ -compacto, temos que Y é inicialmente κ -compacto.*

Uma segunda analogia é a dada pelo próximo resultado:

Lema 1.3.20. *Seja X um espaço inicialmente κ -compacto. Se $A \subset X$ infinito é tal que $|A| \leq \kappa$, então A tem um ponto de acumulação completo em X .*

Dem.: Suponha que não. Considere $A := \{x_\xi : \xi < \kappa\}$ que não admita ponto de acumulação completo em X . Considere, para cada $\xi < \kappa$, $F_\xi := \overline{\{x_\eta : \eta \geq \xi\}}$. Note que, como A não tem ponto de acumulação completo, $\bigcap_{\xi < \kappa} F_\xi = \emptyset$. Assim, $\{X \setminus F_\xi : \xi < \kappa\}$ é uma cobertura aberta de X sem subcobertura finita. $\square$

Uma outra generalização para espaços compactos que adotamos é a seguinte:

Definição 1.3.21. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é um **espaço de Lindelöf** se, dada $\mathcal{U}$ cobertura por abertos de X existe $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ subcobertura enumerável de X .

Um resultado para espaços de Lindelöf, análogo ao resultado para compactos é o seguinte:

Lema 1.3.22. *Seja X um espaço de Lindelöf. Se $A \subset X$ é tal que $|A| \geq \omega_1$, então A tem um ponto de acumulação completo em X .*

Sua demonstração é análoga à apresentada em 1.3.16 para espaços compactos.

1.3.3 Espaços 0-dimensionais

Uma classe importante de espaços que aparece em nosso trabalho é a dos espaços 0-dimensionais. Tais espaços surgem naturalmente quando trabalhamos com a relação entre álgebras de Boole e espaços de Stone. Um exemplo importante de um espaço 0-dimensional é $\beta\omega$, que estudamos num capítulo posterior.

Definição 1.3.23. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é um **espaço 0-dimensional** se X admite uma base composta por abertos fechados.

Uma propriedade muitas vezes útil que espaços 0-dimensionais têm é que, por causa de sua base de abertos fechados, é muito fácil construirmos funções contínuas que separam pontos (no sentido do lema de Urysohn). Tal conceito pode ser generalizado para qualquer outro conjunto:

Definição 1.3.24. Seja X um espaço topológico e sejam $A, B \subset X$. Dizemos que A e B são **completamente separados** se existe $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $f(a) = 0$ para todo $a \in A$ e $f(b) = 1$ para todo $b \in B$.

Definição 1.3.25. Um espaço de Tychonoff X é dito **fortemente 0-dimensional** se, para todo $A, B \subset X$ completamente separados existe U um aberto fechado tal que $A \subset U \subset X \setminus B$.

Teorema 1.3.26. Se X é um espaço de Lindelöf e 0-dimensional, então X é fortemente 0-dimensional.

Dem.: Sejam $A, B \subset X$ completamente separados. Então $\overline{A}$ e $\overline{B}$ também são completamente separados. Para cada $x \in X$, seja W_x aberto fechado tal que $W_x \cap \overline{A} = \emptyset$ ou $W_x \cap \overline{B} = \emptyset$. Sejam $(x_n)_{n \in \omega}$ tal que $(W_{x_n})_{n \in \omega}$ seja uma subcobertura enumerável de X . Definimos $U_i := W_{x_i} \setminus \bigcup_{j < i} W_{x_j}$. Note que cada U_i é um aberto fechado e que $U_i \cap U_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Considere $U := \bigcup \{U_i : \overline{A} \cap U_i \neq \emptyset\}$. Note que U é um aberto fechado (pois $(U_i)_{i \in \omega}$ é uma cobertura de X por abertos fechados dois a dois disjuntos) e $\overline{A} \subset U \subset X \setminus \overline{B}$. Logo, $A \subset U \subset X \setminus B$. $\square$

1.3.4 Compactificação de Stone-Čech

Vamos agora um resultado que garante, sob certas hipóteses, que dado um espaço X podemos tomar uma compactificação sua com algumas boas propriedades. A primeira boa propriedade é relativa a extensões para funções contínuas:

Definição 1.3.27. Sejam X e Y espaços topológicos tais que $X \subset Y$. Dizemos que Y tem a **propriedade da extensão de funções contínuas** de X se, para toda $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e limitada, existe $\tilde{f} : Y \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $\tilde{f} \upharpoonright X = f$.

O próximo resultado garante que, para certos espaços, sempre conseguimos sua “compactificação” e que ela é única (a menos de homeomorfismos).

Teorema 1.3.28. *Seja X um espaço de Tychonoff. Então existe βX compacto T_2 , tal que $\overline{X} = \beta X$ e βX tem a propriedade da extensão de funções contínuas de X . βX é dito o **compactificado de Stone-Čech** de X . Além disso, se Y é uma compactificação de X e Y tem a propriedade da extensão de funções contínuas de X , então Y é homeomorfo a βX .*

O resultado a seguir tem importância no último capítulo quando estudamos um exemplo de um espaço 0-dimensional X e tomamos sua compactificação de Stone-Čech. Gostaríamos que βX também fosse 0-dimensional, mas isso nem sempre é verdade. O que o próximo resultado mostra é que, se tivermos uma hipótese mais forte, a saber, o espaço ser fortemente 0-dimensional, obtemos o que desejamos. Antes de apresentarmos o resultado propriamente dito, enunciemos o seguinte lema:

Lema 1.3.29. *Seja X um espaço de Tychonoff. Se A é um aberto fechado de X , então $\overline{A}$ é um aberto fechado em βX .*

Teorema 1.3.30. *Se X é fortemente 0-dimensional então βX é fortemente 0-dimensional.*

Dem.: Sejam $A, B \subset \beta X$ completamente separados. Seja $f : \beta X \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $f(A) \subset \{0\}$ e $f(B) \subset \{1\}$. Note que $A_1 := X \cap f^{-1}([0, \frac{1}{3}])$ e $B_1 := X \cap f^{-1}([\frac{2}{3}, 1])$ são conjuntos completamente separados em X , logo, existe U aberto fechado de X tal que $A_1 \subset U \subset X \setminus B_1$. Como X é $T_{3\frac{1}{2}}$, $\overline{U}$ é aberto fechado em βX (por 1.3.29. Como X é denso em βX , temos que $A \subset \overline{A_1}$ e $B \subset \overline{B_1}$ e, portanto, $A \subset \overline{U} \subset \beta X \setminus B$. $\square$

Corolário 1.3.31. *Se X é um espaço 0-dimensional e Lindelöf, então βX é fortemente 0-dimensional.*

Dem.: Imediato a partir do teorema anterior e de 1.3.26. $\square$

1.3.5 Funções cardinais

Uma função cardinal é, intuitivamente falando, uma função¹ que associa um espaço topológico, ou um ponto deste, a um cardinal. Tal associação dá algumas informações sobre a “complexidade” do espaço.

Para esta parte, estamos adotando como referências principais [18] e [16].

Começemos com algumas definições de funções cardinais. A primeira diz respeito a tamanhos de bases:

Definição 1.3.32. Seja X um espaço topológico. Definimos

$$\omega(x) := \inf\{|B| : B \text{ é base para } X\} + \omega.$$

$\omega(x)$ é dito o **peso** de X . Dado $x \in X$ definimos

$$\chi(x, X) := \inf\{|B| : B \text{ é base local para } x\} + \omega.$$

Dizemos que $\chi(x, X)$ é o **caráter** de x . Definimos

$$\chi(X) := \sup\{\chi(x, X) : x \in X\}.$$

Dizemos que $\chi(X)$ é o **caráter** de X .

Apesar de sua demonstração simples, o próximo resultado dá uma limitação importante para o tamanho da topologia de um espaço com referência ao tamanho de uma base sua:

Proposição 1.3.33. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico com $\mathcal{T}$ infinito. Então $|\mathcal{T}| \leq 2^{\omega(X)}$.*

Dem.: Seja B base de X tal que $|B| = \omega(X)$. Considere $f : \mathcal{T} \rightarrow \wp(B)$ dada por $f(V) = \{b \in B : b \subset V\}$. Note que f é injetora. Como $|\wp(B)| = 2^{|B|}$ temos o resultado. $\square$

Note que, dados X um espaço T_1 , $x \in X$ e $\mathcal{U}$ uma base local para x , temos que $\bigcap \mathcal{U} = \{x\}$. Mas, muitas vezes, podemos conseguir uma família “menor” que $\mathcal{U}$ com a mesma propriedade e que não é uma base para x (uma família com tal propriedade é dita uma **pseudo - base** para x). Isso nos leva a seguinte definição:

¹na verdade, não é uma função porque seu domínio não necessariamente forma um conjunto

Definição 1.3.34. Sejam X um espaço topológico e $x \in X$. Dizemos que uma família de abertos $\mathcal{U}$ é uma **pseudo - base** para x se $\bigcap \mathcal{U} = \{x\}$. Denotamos por

$$\psi(x) := \inf\{\kappa : \text{existe } \mathcal{U} \text{ pseudo-base para } x \text{ tal que } |\mathcal{U}| = \kappa\} + \omega.$$

Chamamos $\psi(x)$ de **pseudo - caráter** de x .

Num espaço primeiro enumerável X , dado $A \subset X$, se $x \in \overline{A}$, é fácil mostrar que existe $A' \subset A$ enumerável tal que $x \in \overline{A'}$ (basta tomar uma seqüência convergente para x). Mas existem espaços onde nem sempre é possível conseguirmos um conjunto enumerável com tal propriedade. A próxima função cardinal indica o menor tamanho possível para conjuntos assim:

Definição 1.3.35. Sejam X um espaço topológico e $x \in X$. Denotamos por

$$t(x, X) := \inf\{\kappa : \text{para qualquer } A \subset X \text{ tal que } x \in \overline{A} \\ \text{existe } A' \subset A \text{ com } |A'| \leq \kappa \text{ tal que } x \in \overline{A'}\} + \omega.$$

Denotamos por

$$t(X) := \sup\{t(x, X) : x \in X\}.$$

Chamamos $t(X)$ de **tightness** de X .

O próximo resultado mostra que tightness enumerável é preservado por funções fechadas:

Proposição 1.3.36. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ sobrejetora, contínua e fechada. Se $t(X) = \omega$, temos que $t(Y) = \omega$.*

Dem.: Sejam $A \subset Y$ e $y \in Y$ tais que $y \in \overline{A}$. Note que existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$ e $x \in \overline{f^{-1}(A)}$. De fato, suponha que não. Então $\overline{f^{-1}(A)}$ é um fechado tal que para todo $x \in \overline{f^{-1}(A)}$, $f(x) \neq y$. Como f é fechada, $f(\overline{f^{-1}(A)})$ é fechado e não contém y . Absurdo, pois $f(\overline{f^{-1}(A)}) \supset \overline{A}$.

Como $t(X) = \omega$, existe $B \subset f^{-1}(A)$ enumerável tal que $x \in \overline{B}$. Note que, como f é contínua, $f(x) \in \overline{f(B) \cap A}$ e temos o resultado. $\square$

O próximo resultado mostra que, sob certas condições, podemos determinar o tightness de um produto:

Teorema 1.3.37. *Sejam X e Y espaços T_2 com X compacto. Então $t(X \times Y) = t(X) \cdot t(Y)$.*

Vamos a mais uma função cardinal:

Definição 1.3.38. Seja X um espaço topológico. Dizemos $(x_\xi)_{\xi < \kappa} \subset X$ é uma **seqüência livre** se para todo $\xi < \kappa$,

$$\overline{\{x_\eta : \eta \leq \xi\}} \cap \overline{\{x_\eta : \eta > \xi\}} = \emptyset$$

Denotamos por

$$F(X) := \sup\{\kappa : \exists (x_\xi)_{\xi < \kappa} \text{ seqüência livre em } X\} + \omega.$$

Chamamos $F(X)$ de **freeness** de X .

O próximo resultado mostra que, para espaços compactos, o tightness e o freeness de um espaço são iguais:

Proposição 1.3.39. *Seja X um espaço compacto T_2 . Então $t(X) = F(X)$.*

O próximo resultado é o análogo do anterior para espaços inicialmente ω_1 -compactos:

Proposição 1.3.40. *Seja X um espaço T_2 , inicialmente ω_1 -compacto e com $t(X) = \omega$. Então $F(X) = \omega$.*

Dem.: Suponha que não. Então existe $(x_\xi)_{\xi < \omega_1}$ livre em X . Por 1.3.20, temos que $\{x_\xi : \xi < \omega_1\}$ tem um ponto de acumulação completo x em X . Como $t(X) = \omega$, existem $(x_{\xi_n})_{n \in \omega}$ tais que $x \in \overline{\{x_{\xi_n} : n \in \omega\}}$. Seja $\eta := \sup\{\xi_n : n \in \omega\}$. Então $x \in \overline{\{x_\xi : \xi \leq \eta\}}$. Mas para qualquer vizinhança V de x , existe $\xi > \eta$ tal que $x_\xi \in V$, pois x é ponto de acumulação completo de $\{x_\xi : \xi < \omega_1\}$. Logo, $x \in \overline{\{x_\xi : \xi > \eta\}}$ contrariando o fato de $(x_\xi)_{\xi < \omega_1}$ ser livre. Absurdo. $\square$

Apresentemos mais algumas funções cardinais:

Definição 1.3.41. Sejam X um espaço topológico e $x \in X$. Chamamos de **pseudo-caráter fechado** de x o cardinal

$$\psi_C(x, X) := \inf\{\kappa : \text{existem abertos } V_\xi \text{ para } \xi < \kappa \text{ tais que } \bigcap_{\xi < \kappa} \overline{V_\xi} = \{x\}\} + \omega.$$

Definimos

$$\psi_C(X) := \sup\{\psi_C(x, X) : x \in X\}.$$

Definição 1.3.42. Seja X um espaço topológico. Chamamos de **grau de Lindelöf** de X o cardinal $L(X) := \inf\{\kappa : \text{dada } C \text{ uma cobertura por abertos de } X, \text{ existe } C' \subset C \text{ subcobertura tal que } |C'| \leq \kappa\} + \omega$.

Note que se X é de Lindelöf, então $L(X) = \omega$. Note também que, se $Y \subset X$ é um fechado, então $L(Y) = L(X)$.

Apresentemos agora alguns resultados, que serão usados no terceiro capítulo, que envolvem essas últimas definições. O primeiro dá uma limitação para o pseudo-caráter fechado:

Proposição 1.3.43. *Seja X um espaço topológico T_2 . Então $\psi_C(X) \leq L(X)\psi(X)$.*

Dem.: Sejam $x \in X$ e U uma vizinhança aberta de x . Considere $\mathcal{F} := \{F \subset X : F \text{ é vizinhança fechada de } x\}$. Note que $\bigcup\{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\} \supset X \setminus U$. Como $L(X \setminus U) = L(X)$ (pois $X \setminus U$ é fechado), temos que existe $\mathcal{F}_U \subset \mathcal{F}$ com $|\mathcal{F}_U| \leq L(X)$ tal que $\bigcup\{X \setminus F : F \in \mathcal{F}_U\} \supset X \setminus U$, isto é, $\bigcap \mathcal{F}_U \subset U$. Seja $\mathcal{U}$ uma pseudo-base para x de tamanho $\psi(x, X)$. Note que $\mathcal{V} := \bigcup\{\mathcal{F}_U : U \in \mathcal{U}\}$ é uma família de vizinhanças fechadas de x tal que $\{x\} = \bigcap \mathcal{V}$ e que $|\mathcal{V}| = \psi(x, X)L(X)$. $\square$

O próximo resultado dá uma limitação para o tamanho do fecho de um conjunto com relação ao pseudo-caráter fechado:

Proposição 1.3.44. *Seja X um espaço topológico T_2 . Então $|\overline{A}| \leq 2^{|A|\psi_C(X)}$.*

Dem.: Para cada $b \in \overline{A}$, considere $(V_{\alpha,b})_{\alpha \leq \psi_C(X)}$ família de abertos tal que $\bigcap_{\alpha < \psi_C(X)} \overline{V_{\alpha,b}} = \{b\}$. Note que, para cada $b \in \overline{A}$, temos uma família $(V_{\alpha,b} \cap A)_{\alpha < \psi_C(X)}$ diferente e, portanto, temos o resultado. $\square$

Vamos agora mostrar uma limitação para o tamanho de um espaço com relação ao seu grau de Lindelöf, pseudo-caráter e freeness. Esse resultado generaliza o conhecido teorema de Arhangel'skii. O resultado é devido a Juhász mas ainda não foi publicado. A demonstração que apresentamos aqui é devida a Alas. Antes de mostrarmos tal resultado, apresentemos o seguinte lema:

Lema 1.3.45. *Sejam X um espaço topológico e $A \subset X$. Seja κ um cardinal tal que $\kappa \geq L(X)F(X)$. Se, para todo $B \in [A]^{\leq \kappa}$, temos que $\overline{B} \subset A$, então $L(A) \leq \kappa$.*

Dem.: Suponha que não. Então existe C uma cobertura aberta de A que não admite uma subcobertura de tamanho $\leq \kappa$. Vamos contruir uma seqüência $(x_\xi)_{\xi < \kappa^+}$ livre em X , o que nos leva a uma contradição.

Sejam $x_0 \in A$ e $V_0 \in C$ tal que $x_0 \in V_0$. Para cada $0 < \xi < \kappa^+$, vamos construir x_ξ e $C_\xi \subset C$ tais que

- (a) $|C_\xi| \leq \kappa$.
- (b) $\overline{\{x_\xi : \xi \leq \eta\}} \subset \bigcup C_\eta$ para todo $\eta < \kappa^+$.
- (c) $x_\eta \notin \bigcup(\bigcup_{\xi < \eta} C_\xi)$ para todo $\eta < \kappa^+$.
- (d) $C_\eta \supset \bigcup_{\xi < \eta} C_\xi$ para todo $\xi < \kappa^+$.

Note que podemos satisfazer (a), pois $\overline{\{x_\xi : \xi \leq \eta\}} \subset A$ e, portanto, existe $C' \subset C$ cobertura de $\overline{\{x_\xi : \xi \leq \eta\}}$ com $|C'| \leq \kappa = L(X)$.

Vejamos que $(x_\xi)_{\xi < \kappa^+}$ é livre. De fato, dado $\eta < \kappa^+$, temos que $\overline{\{x_\xi : \xi \leq \eta\}} \subset \bigcup C_\eta$ e $\overline{\{x_\xi : \xi > \eta\}} \subset X \setminus \bigcup C_\eta$. $\square$

Teorema 1.3.46 (Juhász). *Seja X um espaço T_2 . Então $|X| \leq 2^{L(X)F(X)\psi(X)}$.*

Dem.: Seja $\kappa := L(X)F(X)\psi(X)$. Seja $A_0 \subset X$ tal que $|A_0| \leq 2^\kappa$. Considere, para cada $x \in X$, $(V_{\alpha,x})_{\alpha < \psi(X)L(X)}$ uma família de abertos tal que $\bigcap_{\alpha < \psi(X)L(X)} \overline{V_{\alpha,x}} = \{x\}$ (existe por 1.3.43). Definimos, por indução, $(A_\xi)_{\xi < \kappa^+}$ uma família de subconjuntos de X tal que:

- (a) $|A_\xi| \leq 2^\kappa$.
- (b) $A_{\xi+1}$ contém $\overline{B}$ para todo $B \in [A_\xi]^{\leq \kappa}$.
- (c) Se $C \in [\{V_{\alpha,x} : \alpha < \psi(X)L(X) \text{ e } x \in A_\alpha\}]^{\leq L(X)}$ e $X \setminus \bigcup C \neq \emptyset$, então tomamos $x_C \in X \setminus \bigcup C$ e Tomamos $A_{\xi+1}$ contendo todos os x_C 's.

Note que podemos exigir (b) por 1.3.44.

Definimos $A := \bigcup_{\xi < \kappa^+} A_\xi$. Note que $|A| \leq 2^\kappa$. Vamos mostrar que $X = A$. Suponha que não. Então existe $y \in X \setminus A$. Para cada $x \in A$, existe α_x tal que $y \notin \overline{V_{\alpha_x,x}}$. Note que $\{V_{\alpha_x,x} : x \in A\}$ é uma cobertura aberta de A . Como $L(A) \leq \kappa$ (por 1.3.45), temos que existe $T \subset A$ com $|T| \leq \kappa$ tal que $\{V_{\alpha_x,x} : x \in T\}$ é uma cobertura de A . Como $|T| \leq \kappa$, existe $\xi < \kappa^+$ tal que $T \subset A_\xi$. Por (c), temos que existe $x \in X \setminus T \subset X \setminus A$ tal que $x \in A_{\xi+1} \subset A$, contradição. $\square$

Referências: [11, 18, 33, 16]

Capítulo 2

Alguns Modelos de $\neg$ CH

Introdução

Neste capítulo, apresentamos alguns modelos em que não vale CH. No primeiro, estudamos uma axioma mais fraco que CH e que vale em qualquer extensão de Cohen sobre um modelo em que vale CH.

Depois, apresentamos outros modelos em que não vale CH e que possuem propriedades interessantes sobre medidas universais sobre a reta. No primeiro modelo, apresentamos um forcing que traz boas propriedades sobre medida. Tal forcing será usado nos dois exemplos seguintes. No primeiro, construímos uma medida não trivial, σ -aditiva e universal sobre a reta. No segundo, temos que todos os subconjuntos da reta são Lebesgue mensuráveis. Como tal resultado é impossível sob o axioma da escolha, tal modelo satisfaz apenas ZF (e não ZFC).

2.1 Extensões que preservam algumas conseqüências de CH

Introdução

Apresentamos aqui um axioma, dado por Juhász, chamado de CH^* , que é mais fraco que a Hipótese do Contínuo. Mostramos que, dado um modelo V que satisfaz CH, $V[G]$ satisfaz CH^* , onde G é um genérico de um forcing de Cohen (não importando quantos reais são adicionados sobre o modelo original).

Temos que CH^* é formulado em termos da teoria de submodelos elementares, mas suas aplicações não são restritas a tal teoria, como mostram dois exemplos de aplicações, que apresentaremos no final desta seção.

A primeira aplicação é que, sob CH^* , todo espaço com tightness enumerável, inicialmente ω_1 -compacto e regular é compacto. Esse resultado já havia sido obtido, sob CH, independentemente por van Douwen e Dow (ver, por exemplo, [8]).

A segunda aplicação dá uma condição, também sob CH^* , sobre a metrizabilidade de um espaço compacto X , em termos de uma propriedade sobre a diagonal de $X \times X$. Esse fato também já havia sido mostrado, sob CH , por Juhász em [22].

A definição de CH^*

Quando trabalhamos com submodelos elementares, muitas vezes é vantajoso que o submodelo seja “pequeno”. Com CH , podemos tomar modelos “pequenos”, ainda com a propriedade, também muitas vezes vantajosa, de serem enumeravelmente fechados. Isto é, podemos tomar submodelos M tais que $|M| = \omega_1$ e $[M]^\omega \subset M$. Sem CH , isso é claramente impossível. O que vamos procurar é uma propriedade que seja mais fraca do que enumeravelmente fechado e que seja possível de se obter mesmo quando CH não vale.

Definição 2.1.1. Sejam N um conjunto e $A \subset N$. Dizemos que B é uma N -cobertura de A se são satisfeitas as seguintes condições:

- (a) $A \subset B \subset N$
- (b) $N \cap [B]^\omega$ é cofinal em $[B]^\omega$, isto é, dado $X \in [B]^\omega$, existe $Y \in N \cap [B]^\omega$ tal que $X \subset Y$.
- (c) dado $S \in N \cap [B]^\omega$ temos $|S \cap A| = \omega$.

Note que, se N é um modelo enumeravelmente fechado, isto é, $[N]^\omega \subset N$, então todo $A \subset N$ admite uma N -cobertura que é o próprio A .

Com CH , dado um modelo de tamanho ω_1 , sempre podemos “torná-lo” enumeravelmente fechado, isto é, obter um modelo maior, mas ainda de tamanho ω_1 e que seja enumeravelmente fechado. Sem CH e com o conceito de N -cobertura, exigimos algo mais fraco:

Definição 2.1.2. Seja λ um cardinal regular. Denotamos por $\mathcal{N}_\lambda$ a coleção de todos os submodelos $N \prec H(\lambda)$ tais que $|N| = \omega_1$, $\omega_1 \subset N$ e que valem:

- (i) $N \cap [N]^\omega$ é cofinal em $[N]^\omega$.
- (ii) dado $X \in [N \cap \text{Ord}]^{\omega_1}$ existe $A \in [X]^\omega$ que possui uma N -cobertura.

Definição 2.1.3. Chamamos de CH^* a afirmação de que, para qualquer λ suficientemente grande, $\mathcal{N}_\lambda$ é cofinal em $[H(\lambda)]^{\omega_1}$.

Vejamos que, de fato, CH implica CH*:

Proposição 2.1.4. (CH) *Seja $M_0 \prec H(\lambda)$. Então existe $M \supset M_0$ tal que $M \prec H(\lambda)$, $[M]^\omega \subset M$ e $|M| = \omega_1$. Em particular, $CH \Rightarrow CH^*$.*

Dem.: Seja $M_0 \prec H(\lambda)$ com $|M_0| = \omega_1$. Definimos, por indução sobre $\xi < \omega_1$ e usando 1.1.11, uma seqüência $(M_\xi)_{\xi < \omega_1}$ tal que

- (a) $|M_\xi| = \omega_1$.
- (b) $M_\xi \subset M_\eta$ se $\xi \leq \eta$
- (c) $[M_\xi]^\omega \subset M_{\xi+1}$
- (d) $M_\xi \prec M_{\xi+1}$.

Note que podemos fazer (c) pois temos CH. Considere $M := \bigcup_{\xi < \omega_1} M_\xi$. Então $M \prec H(\lambda)$ (por 1.1.10), $M_0 \subset M$, $|M| = \omega_1$ e $[M]^\omega \subset M$ (pois, dado $a \in [M]^\omega$, existe $\xi < \omega_1$ tal que $a \subset M_\xi$ e, portanto, $a \in M_{\xi+1}$). Note que, como $[M]^\omega \subset M$, $M \in \mathcal{N}_\lambda$. $\square$

CH* vale em qualquer extensão de Cohen

Vamos agora mostrar que CH* vale em $V[G]$, onde V é um modelo satisfazendo CH e G é um $Fn(\kappa, 2)$ -genérico. Note que, com isso, temos que qualquer conseqüência de CH* é independente de CH pois CH* é implicado por CH e por que podemos tomar extensões de Cohen onde não vale CH.

Começemos com um resultado que mostra uma relação entre submodelos elementares de V e submodelos elementares de $V[G]$.

Teorema 2.1.5. *Seja V um modelo. Sejam $M, \lambda \in V$ tais que, em V , $M \prec H(\lambda)$ e $[M]^\omega \subset M$. Seja $\kappa \in M$ um cardinal regular. Seja G um $Fn(\kappa, 2)$ -genérico sobre V . Então*

$$(M[G] \prec H(\lambda))^{V[G]}$$

onde $M[G] = \{\tau_G : \tau \in M\}$.

Agora mostremos que os submodelos da extensão têm boas propriedades:

Lema 2.1.6. *Seja V um modelo que satisfaz CH. Sejam $M, \lambda \in V$ tais que, em V , $M \prec H(\lambda)$ e $[M]^\omega \subset M$. Seja $\kappa \in M$. Seja G um $Fn(\kappa, 2)$ -genérico sobre V . Considere $N = M[G]$. Então valem as seguintes propriedades em $V[G]$:*

(i) $N \cap [N]^\omega$ é cofinal em $[N]^\omega$.

(ii) dado $X \in [N \cap \text{Ord}]^{\omega_1}$ existe $A \in [X]^{\omega_1}$ que possui uma N -cobertura.

Dem.: (i) Seja $A \in N \cap [N]^\omega$. Então existe, em $V[G]$, $f : \omega \longrightarrow M$ tal que $A = \{\text{val}_G(f(n)) : n \in \omega\}$. Por 1.2.24, existe $F \in V$, $F : \omega \longrightarrow \wp(M)$ tal que $|F(n)| \leq \omega$ e $f(n) \in F(n)$ para todo $n \in \omega$. Como $([M]^\omega \subset M)^V$, temos que cada $F(n) \in M$ e, portanto, $A' := \bigcup_{n \in \omega} F(n) \in M$ (pois $[M]^\omega \subset M$). Note que, em $V[G]$, temos $A \subset \{\text{val}_G(\sigma) : \sigma \in A'\} \in N \cap [N]^\omega$.

(ii) Vamos mostrar que, dado $p \in Fn(\kappa, 2)$ tal que $p \Vdash \dot{X} \in [M \cap \text{Ord}]^{\omega_1}$ existe $q \leq p$ tal que $q \Vdash \text{"}\exists \sigma \subset \dot{X}, |\sigma| = \omega_1 \text{ e } \sigma \text{ tem uma } N\text{-cobertura"}$. Para cada $\xi < \omega_1$, sejam $\alpha_\xi \in M \cap \text{Ord}$ e $p_\xi \leq p$ tais que $p_\xi \Vdash \alpha_\xi \in \dot{X}$ e com os α_ξ 's dois a dois distintos. Podemos assumir que $\{p_\xi : \xi \in \omega_1\}$ forma um Δ -sistema de raiz q . Note que, assim, $q \leq p$.

Para cada $\xi < \omega_1$, considere $r_\xi = p_\xi \cap M$. Sejam $\dot{A}$ e $\dot{B}$ $Fn(\kappa, 2)$ -nomes dados por

$$\dot{A} := \{(p_\xi, \alpha_\xi) : \xi < \omega_1\} \quad \dot{B} := \{(r_\xi, \alpha_\xi) : \xi < \omega_1\}$$

Note que, assim definido, $\dot{B} \in M$. Considere $r \in Fn(\kappa, 2)$. Vamos mostrar que $r \Vdash \dot{A} \subset \dot{B}$. Suponha que não, então existe um genérico G tal que existe $\alpha_\xi \in \dot{A}_G$ com $\alpha_\xi \notin \dot{B}_G$. Logo, pela definição de $\dot{A}$, $p_\xi \in G$ e, pela definição de $\dot{B}$, $r_\xi \notin G$. Absurdo pois $p_\xi \leq r_\xi$.

Mostremos também que $q \Vdash \text{"}\dot{A} \in [\dot{X}]^{\omega_1}\text{"}$. Note que $q \Vdash \dot{A} \subset \dot{X}$ pela definição de $\dot{A}$. Então basta mostrarmos que $q \Vdash |\dot{A}| = \omega_1$. Suponha que não. Então existe $r \leq q$ tal que $r \Vdash |\dot{A}| = \omega$. Por 1.2.24, existem $A' \subset \{\alpha_\xi : \xi < \omega_1\}$ e $s \leq r$ tais que $A' \in V$, $(|A'| = \omega)^V$ e $s \Vdash \dot{A} \subset A'$. Mas como doms é finito, só existem finitos p_ξ 's tais que $s \perp p_\xi$. Assim, existe ξ tal que $\alpha_\xi \notin A'$ e $p_\xi \not\leq s$ e, portanto, existe $t \leq p_\xi, s$. Assim, $t \Vdash \text{"}\alpha_\xi \in \dot{A} \text{ e } \dot{A} \subset A'\text{"}$. Absurdo.

Agora, vamos mostrar que $q \Vdash \text{"}\dot{B} \text{ é } N\text{-cobertura de } \dot{A}\text{"}$ e concluir o resultado. Temos que $q \Vdash \dot{A} \subset \dot{B}$. Mostremos que $q \Vdash \text{"}N \cap [\dot{B}]^\omega \text{ é cofinal em } [\dot{B}]^\omega\text{"}$. Seja $\dot{b}$ tal que $q \Vdash \dot{b} \in [\dot{B}]^\omega$. Por argumento análogo ao de (i), temos que existe $\dot{c}$ tal que $\dot{b} \subset \dot{c} \subset \dot{B}$ e $|q| = \omega$ em V . Como $\dot{B} \in M$ e $[M]^\omega \subset M$, temos que $\dot{c} \in M$ e, portanto, $\dot{c}_G \in N$ e temos o resultado.

Resta mostrarmos que q força a condição (c) da definição de N -cobertura. Queremos mostrar que, dado $\dot{S}$ tal que $q \Vdash \dot{S} \in N \cap [\dot{B}]^\omega$, $q \Vdash |\dot{S} \cap \dot{A}| = \omega$. Suponha que não. Então existem $r \leq q$ e $\xi_1, \dots, \xi_n$ tais que $r \Vdash \dot{S} \cap \dot{A} = \{\alpha_{\xi_1}, \dots, \alpha_{\xi_n}\}$. Como domínio de r é finito, existem infinitos p_ξ 's compatíveis com r . Assim, seja p_ξ tal que p_ξ é compatível com r e $\xi \neq \xi_1, \dots, \xi_n$. Então existe $s \leq r$ tal que $s \Vdash \alpha_\xi \in \dot{A}$ (pois $s \leq p_\xi$) e $s \Vdash \alpha_\xi \in \dot{S}$ (pois $s \leq r$). Absurdo, pois $s \leq r$ e $r \Vdash \dot{A} \cap \dot{S} = \{\alpha_{\xi_1}, \dots, \alpha_{\xi_n}\}$.

□

Finalmente, temos o resultado:

Teorema 2.1.7. *Seja V satisfazendo CH. Sejam κ um cardinal regular em V e G um $F_n(\kappa, 2)$ -genérico sobre V . Então $V[G] \models CH^*$.*

Dem.: Seja $X \subset H(\lambda)$ em $V[G]$ tal que $(|X| = \omega_1)^{V[G]}$. Seja $p \in F_n(\kappa, 2)$ e $f \in V[G]$ tais que $p \Vdash \dot{f} : \omega_1 \longrightarrow \dot{X}$ é bijetora. Para cada $\xi < \omega_1$, seja

$$B_\xi := \{q \leq p : \exists \sigma_q \ q \Vdash \dot{f}(\xi) = \sigma_q\}$$

Seja A_ξ antichain maximal em B_ξ . Considere

$$X' := \{\sigma_q : \exists \xi \ q \in A_\xi\}$$

Note que $X' \in V$ e que $(|X'| = \omega_1)^V$ (pois $F_n(\kappa, 2)$ tem c.c.c.). Trabalhando em V , seja $M \prec H(\lambda)$ tal que $X' \subset M$, $[M]^\omega \subset M$ e $|M| = \omega_1$ (existe por 2.1.4). Note que, por 2.1.5, temos que $(M[G] \prec H(\lambda))^{V[G]}$. Assim, por 2.1.6, basta mostrarmos que $p \Vdash \dot{X} \subset \dot{M}[G]$. Para isso, vamos mostrar que $p \Vdash \dot{X} \subset \dot{X}'[G]$, onde $X'[G] := \{\sigma_G : \sigma \in X'\}$ (isso basta pois $X' \subset M$). Suponha que não. Então existem $q \leq p$ e $\xi < \omega_1$ tais que $q \Vdash \dot{f}(\xi) \notin \dot{X}'[G]$. Seja $r \in A_\xi$ tal que r e q sejam compatíveis. Seja $s \leq r, q$. Então $s \Vdash \dot{f}(\xi) = \sigma_r \in \dot{X}'[G]$, pois $s \leq r$. Absurdo, pois $s \leq q$ e $q \Vdash \dot{f}(\xi) \notin \dot{X}'[G]$. $\square$

Aplicações de CH*

Vamos agora mostrar algumas aplicações de CH* em topologia geral. Antes de começarmos, façamos uma pequena observação. Dado (X, T) um espaço topológico qualquer, sempre existem um ordinal α e uma topologia T' sobre α tais que (X, T) e (α, T') são homeomorfos. Fazemos esta observação aqui pois, como a definição de CH* envolve subconjuntos de ordinais, alguns lemas serão enunciados assumindo-se que o conjunto base de certos espaços topológicos é um ordinal. A observação serve para dizer que, ao fazermos isso, não perdemos nada.

Começemos com um resultado de topologia geral que usaremos posteriormente:

Definição 2.1.8. Seja X um espaço topológico. Chamamos de um **sistema κ -diádico** um conjunto $\{(F_\xi^0, F_\xi^1) : \xi < \kappa\}$ tal que

- (a) F_ξ^0 e F_ξ^1 são fechados disjuntos para todo ξ .
- (b) Se $e : H \longrightarrow 2$ é tal que $H \subset \kappa$ finito então $\bigcap_{\xi \in H} F_\xi^{e(\xi)} \neq \emptyset$.

Lema 2.1.9. *Seja X compacto onde existe um sistema κ -diádico. Então existe $F \subset X$ fechado e $f : F \rightarrow 2^\kappa$ contínua e sobrejetora.*

Dem.: Seja $(F_\xi^0, F_\xi^1)_{\xi < \kappa}$ um sistema κ -diádico. Para cada $\xi < \kappa$, seja $F_\xi := F_\xi^0 \cup F_\xi^1$. Seja $F := \bigcap_{\xi < \kappa} F_\xi$. Note que F é fechado e que $F = \bigcup_{s \in 2^\kappa} F_s$ onde $F_s := \bigcap_{\xi < \kappa} F_\xi^{s(\xi)}$ para $s \in 2^\kappa$. Como $(F_\xi^0, F_\xi^1)_{\xi < \kappa}$ é κ -diádico, temos que $F_s \neq \emptyset$ para todo $s \in 2^\kappa$ e também temos que $F_s \cap F_t = \emptyset$ se $s \neq t$. Com isso, podemos definir $f : F \rightarrow 2^\kappa$ como $f(x) = s$ se $x \in F_s$. Para ver que f é contínua, basta mostrarmos que $f^{-1}([t])$ é aberto, onde t é uma função finita de κ em 2 e $[t] = \{s \in 2^\kappa : t \subset s\}$ (isso basta pois os $[t]$'s formam uma base de 2^κ). Temos $f^{-1}([t]) = \bigcup_{s \in [t]} F_s = F \setminus \bigcap_{s \notin [t]} F_s$ que é aberto. $\square$

Vamos agora a alguns resultados preliminares envolvendo CH^* :

Lema 2.1.10. *Seja N submodelo elementar de $H(\lambda)$ tal que $\omega_1 \subset N$. Seja X um espaço topológico tal que $X \in N$. Sejam $A, B \subset X$ tais que $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$. Suponha que A' e B' sejam N -coberturas de A e B respectivamente. Então, se $A' \cap B' \cap X$ é infinito, temos que existe um sistema ω_2 -diádico em X .*

Dem.: Seja $T \subset A' \cap B' \cap X$ com $|T| = \omega$. Como A' e B' são N -coberturas, existem $S_A \in N \cap [A']^\omega$ e $S_B \in N \cap [B']^\omega$ tais que $T \subset S_A, S_B$. Note que $S := S_A \cap S_B \in N$ e que $|S| = \omega$. Vamos mostrar o seguinte: se $\mathcal{T} \subset [S]^\omega$ com $|\mathcal{T}| \leq \omega_1$, então existem $S_0, S_1 \subset S$ tais que

$$\overline{S_0} \cap \overline{S_1} = \emptyset \text{ e } |S_0 \cap T| = |S_1 \cap T| = \omega \text{ para todo } T \in \mathcal{T}. \quad (2.1)$$

Suponha que não. Então considere $\mathcal{T}$ que contraria (2.1). Note que, como $X, S \in N$, pela elementaridade, podemos supor que $\mathcal{T} \in N$. Como $\omega_1 \subset N$ e $|\mathcal{T}| \leq \omega_1$, temos que $\mathcal{T} \subset N$. Assim, para cada $T \in \mathcal{T}$ temos que $T \in N \cap [A']^\omega$ e $T \in N \cap [B']^\omega$ e, portanto, temos que $|T \cap A| = |T \cap B| = \omega$ pela definição de N -cobertura. Assim, $S_0 := S \cap A$ e $S_1 := S \cap B$ são tais que $\overline{S_0} \cap \overline{S_1} = \emptyset$ (pois $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$) e $|S_0 \cap T| = |S_1 \cap T| = \omega$ para cada $T \in \mathcal{T}$. O que contraria como tomamos $\mathcal{T}$.

Com isso, podemos construir por indução $\{(\overline{S}_\xi^0, \overline{S}_\xi^1) : \xi < \omega_2\}$ um sistema ω_2 -diádico com $S_\xi^i \subset S$. $\square$

Lema 2.1.11. *Seja $N \in \mathcal{N}_\lambda$ para algum λ regular. Seja $X \in N$ um ordinal com uma topologia $\mathcal{T}$ tal que $(X, \mathcal{T})$ é um espaço regular sem um sistema ω_2 -diádico.*

Se $A \in [N \cap X]^{\omega_1}$ e $A' \subset X$ é uma N -cobertura de A , então todo ponto de acumulação completo de A' em X pertence a $\overline{A}$.

Dem.: Seja x um ponto de acumulação completo de A' . Suponha que $x \notin \overline{A}$. Como X é regular, existe um aberto U tal que $x \in U$ e $\overline{U} \cap \overline{A} = \emptyset$. Note que $|U \cap A'| = \omega_1$ (pois $|A'| = \omega_1$ já que $A' \subset N$ e $|N| = \omega_1$ e temos que x é ponto de acumulação completo de

A'). Por 2.1.6 (ii), temos que existe $B \subset [U \cap A']^{\omega_1}$ tal que existe uma N -cobertura B' de B (pois $U \cap A' \in [N \cap \text{Ord}]^{\omega_1}$ já que X é um ordinal). Note que $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, pois $\overline{B} \subset \overline{U}$. Note também que $B \subset A' \cap B' \cap X$ e, portanto, $|A' \cap B' \cap X| = \omega_1$. Assim, por 2.1.10, temos que existe um sistema ω_2 -diádico, contradizendo nossa hipótese. $\square$

Apresentemos agora mais um resultado topológico que necessitamos:

Definição 2.1.12. Seja X um conjunto. Dizemos que $\mathcal{F} \subset \wp(X)$ é uma **família κ -dirigida** se, dada $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ tal que $|\mathcal{F}'| < \kappa$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subset \bigcap \mathcal{F}'$.

Lema 2.1.13. *Seja X um espaço topológico tal que $t(X) \leq F(X) = \omega$. Seja $\mathcal{F}$ um família ω_1 -dirigida de fechados de X . Então, dado $A \subset X$ tal que $\overline{A} \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$, existe $S \subset A$ enumerável tal que $\overline{S} \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$.*

Dem.: Suponha que não. Seja $A \subset X$ tal que $\overline{A} \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$ e tal que, para todo $S \in [A]^\omega$, existe $F \in \mathcal{F}$ com $S \cap F = \emptyset$. Vamos definir, por indução sobre $\alpha < \omega_1$, $p_\alpha \in \overline{A}$, $S_\alpha \in [A]^{\leq \omega}$ e $F_\alpha \in \mathcal{F}$ da seguinte maneira. Se para todo $\beta < \alpha$, p_β , S_β e F_β estão definidos, então existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $\overline{\bigcup_{\beta < \alpha} S_\beta} \cap F = \emptyset$. Tomamos $F_\alpha \in \mathcal{F}$ de forma que $F_\alpha \subset F \cap \bigcap_{\beta < \alpha} F_\beta$ (podemos fazer isso pois $\mathcal{F}$ é ω_1 -dirigida). Seja $p_\alpha \in F_\alpha \cap \overline{A}$. Como $t(X) \leq \omega$, podemos tomar $S_\alpha \in [A]^{\leq \omega}$ tal que $p_\alpha \in \overline{S_\alpha}$.

Note que $(p_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ é uma sequência livre (pois, dado $\xi < \omega_1$, $\{p_\eta : \eta \leq \xi\} \subset \overline{\bigcup_{\eta < \xi} S_\eta}$ e $\{p_\eta : \eta > \xi\} \subset F_{\xi+1}$), contrariando que $F(X) \leq \omega$. $\square$

O próximo resultado será fundamental nas demonstrações de nossas aplicações:

Lema 2.1.14. *Seja X um ordinal com uma topologia tal que X é regular, inicialmente ω_1 -compacto e $t(X) \leq \omega$. Seja $\mathcal{F}$ um família ω_1 -dirigida de fechados de X . Seja $N \in \mathcal{N}_\lambda$ tal que $\mathcal{F} \in N$. Considere $\mathcal{F}_N := \{\overline{F \cap N} : F \in \mathcal{F} \cap N\}$. Então*

$$\bigcap \mathcal{F}_N \subset \bigcap \mathcal{F}$$

Dem.: Vamos inicialmente mostrar algumas propriedades de X :

(a) $F(X) = \omega$: Imediato por 1.3.40.

(b) X não tem um sistema ω_1 -diádico: Suponha que sim. Então, por 2.1.9 existe $F \subset X$ fechado e $f : F \rightarrow 2^{\omega_1}$ contínua e sobrejetora. Note que f é fechada, pois, dado $G \subset X$ fechado, temos que G é inicialmente ω_1 -compacto. Por 1.3.19, temos que $f(G)$ é inicialmente ω_1 -compacto. Como $w(2^{\omega_1}) = \omega_1$, temos que $f(G)$ é compacto e, portanto, fechado. Assim, por 1.3.36, temos que $t(2^{\omega_1}) = \omega$.

Por outro lado, considere, para cada $\xi < \omega_1$, $f_\xi \in 2^{\omega_1}$ dado por

$$f_\xi(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi < \eta \\ 0 & \text{se } \xi \geq \eta \end{cases}$$

Note que $f \in \overline{\{f_\xi : \xi < \omega_1\}}$, onde $f(\eta) = 1$ para todo η e que $f \notin \bar{A}$ para qualquer $A \subset \{f_\xi : \xi < \omega_1\}$ com $|A| = \omega$. Logo, $t(2^{\omega_1}) \geq \omega_1$. Assim, chegamos a uma contradição.

- (c) $\mathcal{F} \cap N$ é ω_1 -dirigido: Seja $(F_n)_{n \in \omega} \subset \mathcal{F} \cap N$. Por 2.1.6(i), existe $\mathcal{G} \in N$, tal que $|\mathcal{G}| = \omega$ e $\mathcal{G} \supset (F_n)_{n \in \omega}$. Como $\mathcal{F} \in N$, podemos supor $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ é ω_1 -dirigido, pela elementariedade, existe $F \in N$ tal que $F \subset G$ para todo $G \in \mathcal{G}$. Em particular, $F \subset F_n$ para todo $n \in \omega$.

Mostremos então o resultado. Seja $x \in \bigcap \mathcal{F}_N$. Note que basta mostrarmos que, dado U aberto tal que $x \in U$, temos que $\bar{U} \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$ (pois suponha que $x \notin \bigcap \mathcal{F}$. Então existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $x \notin F$. Como X é regular, existe U aberto tal que $x \in U$ e $\bar{U} \cap F = \emptyset$). Note que, como $|\mathcal{F} \cap N| \leq |N| = \omega_1$, por (c), podemos construir $(F_\xi)_{\xi < \omega_1} \subset \mathcal{F} \cap N$ tal que $F_\xi \supset F_\eta$ se $\xi < \eta$ e, para todo $F \in \mathcal{F} \cap N$, existe $\xi < \omega_1$ tal que $F_\xi \subset F$. Seja V aberto tal que $x \in V \subset \bar{V} \subset U$. Para cada $\xi < \omega_1$, seja $x_\xi \in V \cap F_\xi \cap N$ (podemos fazer isso pois $x \in \overline{F_\xi \cap N}$). Note que, dado $A \subset \omega_1$ com $|A| = \omega_1$, temos que $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ é tal que $\{x_\alpha : \alpha \in A\} \cap \bar{F} \cap \bar{N} \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F} \cap N$. Na verdade, para todo $F \in \mathcal{F} \cap N$, temos que

$$\text{existe } \xi \text{ tal que } \{x_\eta : \eta \geq \xi\} \subset \{x_\eta : \eta < \omega_1\} \cap \bar{F} \cap \bar{N} \quad (2.2)$$

pois dado $F \in \mathcal{F} \cap N$, existe ξ tal que $F_\xi \subset F$ e, portanto, $x_\eta \in F$ para todo $\eta \geq \xi$.

Suponha que existe $y \in N$ tal que $|\{\xi : x_\xi = y\}| = \omega_1$. Então temos que $y \in \bar{F} \cap \bar{N}$ para todo $F \in \mathcal{F} \cap N$. Note que, em N , $y \in F$ para todo F . Logo, pela elementariedade, $y \in F$ para todo $F \in \mathcal{F}$. Assim, como $y \in V \subset U$, temos que $\bar{U} \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$ e temos o resultado.

Agora suponha que, para todo $y \in N$, $|\{\xi : x_\xi = y\}| \leq \omega$. Então $Y := \{x_\xi : \xi < \omega_1\} \in [N \cap X]^{\omega_1}$. Aplicando 2.1.6(ii), existe $A \in [Y]^{\omega_1}$ tal que A admite uma N -cobertura A' . Como $X \in N$, podemos assumir que $A' \subset X$. Por 2.1.11, temos que todo ponto de acumulação completo de A' pertence a $\bar{A} \subset \bar{V} \subset U$. Como X é inicialmente ω_1 -compacto, temos que $|A' \setminus U| \leq \omega$ (por 1.3.20). Seja $T \in N \cap [A']^\omega$ tal que $A' \setminus U \subset T$ (que existe pela propriedade (b) de N -cobertura). Note que, como $|A' \cap \bar{F} \cap \bar{N}| = \omega_1$ para todo $F \in \mathcal{F}$ (pois $|T| = \omega$ e (2.2)), temos que $(A' \setminus T) \cap \bar{F} \cap \bar{N} \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F} \cap N$. Por 2.1.13, temos que existe $S \in [A' \setminus T]^\omega$ tal que $\bar{S} \cap \bar{F} \cap \bar{N} \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F} \cap N$. Pela propriedade (b) de N -cobertura, podemos tomar tal S em N . Assim, $\bar{S} \in N$ e, portanto, $\bar{S} \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$ (pela elementariedade de N). Como $S \subset U$, temos que $\bar{U} \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$. $\square$

Com o que temos, já conseguimos nossa primeira aplicação:

Teorema 2.1.15. (CH*) *Seja X um espaço inicialmente ω_1 -compacto, regular e tal que $t(X) = \omega$. Então X é compacto.*

Dem.: Seja $\mathcal{F}$ um ultrafiltro de fechados de X . Precisamos mostrar que $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Por CH*, existe $N \prec H(\lambda)$ (para algum λ suficientemente grande) tal que $X, \mathcal{F} \in N$ e $N \in \mathcal{N}_\lambda$. Como $\mathcal{F}$ é maximal e X é inicialmente ω_1 -compacto, temos que $\mathcal{F}$ é ω_1 -dirigido (pois uma família de tamanho $\leq \omega_1$ de fechados com p.i.f tem como intersecção um fechado não vazio). Então, por 2.1.13, temos que, dado $F \in \mathcal{F}$, existe $S \in [F]^{\leq \omega}$ tal que $\overline{S} \cap G \neq \emptyset$ para todo $G \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ é maximal, temos que $\overline{S} \in \mathcal{F}$. Pela elementariedade de N , temos que, para todo $F \in \mathcal{F} \cap N$, existe $S \in N \cap [F]^{\leq \omega}$ tal que $\overline{S} \in \mathcal{F} \cap N$. Note que, como $S \in N$, temos que $S \subset N$. Assim, $\overline{S} = \overline{S} \cap N \in \mathcal{F}_N$. Com isso, temos que $\bigcap (\mathcal{F} \cap N) = \bigcap \mathcal{F}_N$. Mas $\bigcap (\mathcal{F} \cap N) \neq \emptyset$ pois $|\mathcal{F} \cap N| \leq \omega_1$ e X é inicialmente ω_1 -compacto. Por 2.1.14, temos que $\emptyset \neq \bigcap \mathcal{F}_N \subset \bigcap \mathcal{F}$ e concluímos o resultado. $\square$

Vamos agora mostrar a segunda aplicação de CH*. Antes, apresentemos mais alguns resultados preliminares:

Definição 2.1.16. Seja X um espaço topológico. Seja $Y \subset X$. Denotamos por $\ell_\kappa(Y) := \{x \in X : \text{existe } (y_\xi)_{\xi < \kappa} \subset Y \text{ tal que } y_\xi \longrightarrow x\}$.

Proposição 2.1.17. (CH*) *Seja X um compacto T_2 tal que $t(X) = \omega$. Seja $S \subset X$ tal que $S \cap H \neq \emptyset$ para todo G_δ não vazio H de X . Então $X = \ell_{\omega_1}(S)$.*

Dem.: Seja $x \in X$. Se $x \in S$, é trivial. Então suponha $x \in X \setminus S$. Seja $\mathcal{F} := \{F \subset X : x \in F \text{ e } F \text{ é } G_\delta \text{ fechado}\}$. Por CH*, existem λ e $N \in \mathcal{N}_\lambda$ tais que $X, \mathcal{F}, x, S \in N$. Note que $\mathcal{F}$ é ω_1 -dirigido. Note também que $\bigcap \mathcal{F} = \{x\}$, então, por 2.1.14, temos que $\bigcap \mathcal{F}_N \subset \bigcap \mathcal{F} = \{x\}$. Como $x \in N$, temos que $\{x\} = \bigcap \mathcal{F}_N$.

Vamos mostrar que $x \in \overline{F \cap N \cap S}$ para todo $F \in \mathcal{F} \cap N$. Primeiramente, note que, dado $F \in \mathcal{F}$, $x \in \overline{F \cap S}$, pois, senão, existiria V aberto tal que $x \in V$ e $V \cap F \cap S = \emptyset$, contrariando a hipótese já que $V \cap F$ é um G_δ não vazio. Agora, como $t(X) = \omega$, existe $T \subset F \cap S$ tal que $|T| = \omega$ e $x \in \overline{T}$. Como $x, S, F \in N$, pela elementariedade de N podemos supor $T \in N$ e, portanto, $T \subset N$. Logo, $x \in \overline{T} \subset \overline{F \cap N \cap S}$.

Como na demonstração de 2.1.14, podemos construir $\{F_\xi : \xi < \omega_1\} \subset \mathcal{F} \cap N$ tal que $F_\xi \supset F_\eta$ se $\xi < \eta$ e, para todo $F \in \mathcal{F} \cap N$, existe ξ tal que $F_\xi \subset F$. Note que $x \in \overline{F_\xi \cap N \cap S}$ para todo $\xi < \omega_1$, logo

$$x \in \bigcap_{\xi < \omega_1} \overline{F_\xi \cap N \cap S} \subset \bigcap \mathcal{F}_N = \{x\}$$

Para cada $\xi < \omega_1$, seja $x_\xi \in F_\xi \cap N \cap S$. Vamos mostrar que $x_\xi \longrightarrow x$ e concluir o resultado. Suponha que não. Então existe V aberto tal que $x \in V$ e, para todo $\xi < \omega_1$,

existe $\eta > \xi$ tal que $x_\eta \notin V$. Daí, $A := \{x_\xi : \xi < \omega_1\} \setminus V$ é não enumerável. Então, como X é compacto, existe $y \in X \setminus V$ tal que y é ponto de acumulação completo de A . Como $F_\xi \supset F_\eta$ se $\xi < \eta$, temos que $y \in \overline{F_\xi \cap N \cap S}$ para todo $\xi < \omega_1$. Absurdo, pois $\bigcap_{\xi < \omega_1} \overline{F_\xi \cap N \cap S} = \{x\}$ $\square$

Corolário 2.1.18. (CH*) *Seja X compacto tal que $t(X) = \omega$. Seja $p \in X$ tal que $\chi(x, X) > \omega$. Então $p \in \ell_{\omega_1}(X \setminus \{p\})$.*

Dem.: Como X é compacto, temos que $\omega = \chi(p, X) = \psi(p, X)$. Então $\{p\}$ não é um G_δ e, portanto, $X \setminus \{p\}$ intercepta todo G_δ não vazio de X . Com isso, concluímos o resultado a partir da proposição anterior. $\square$

A aplicação que vamos apresentar dá uma condição para a metrizabilidade de um espaço X em termos de uma propriedade da diagonal de $X \times X$. Começemos pela definição da tal propriedade:

Definição 2.1.19. Seja X um espaço topológico. Denotamos por $\Delta := \{(x, x) : x \in X\} \subset X \times X$. Dizemos que X tem **diagonal pequena** se não existe $(x_\xi)_{\xi < \omega_1} \subset (X \times X) \setminus \Delta$ não trivial tal que $x_\xi \rightarrow \Delta$ (isto é, para todo aberto V tal que $\Delta \subset V$, existe $\xi < \omega_1$ tal que $\{x_\eta : \eta \geq \xi\} \subset V$).

O próximo resultado dá uma caracterização para a metrizabilidade de um espaço X em termos da diagonal de $X \times X$ ser G_δ . Utilizaremos tal caracterização quando mostrarmos a segunda aplicação de CH*.

Proposição 2.1.20. *Seja X compacto T_2 . Então X é metrizável se, e somente se, $\Delta \subset X \times X$ é G_δ .*

Dem.: $\Rightarrow$): Basta notar que $\Delta = \bigcap_{n \in \omega} V_n$ onde $V_n := \{B((x, x), \frac{1}{n}) : x \in X\}$.

$\Leftarrow$): Como Δ é fechado G_δ e X é normal, temos, por 1.3.8 que existe $f : X \times X \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $f^{-1}(0) = \Delta$. Note que d dada por

$$d(x, y) := \sup\{|f(x, z) - f(y, z)| : z \in X\}$$

é uma métrica em X . $\square$

Antes de mostrarmos a aplicação final, enunciemos o seguinte resultado:

Teorema 2.1.21. *Seja κ cardinal regular não enumerável. Seja X um compacto T_2 que tem uma seqüência livre de tamanho κ . Então X tem uma κ -seqüência convergente não trivial.*

Dem.: Teorema 1.2 de [22]. □

Finalmente, temos a segunda aplicação de CH^* :

Teorema 2.1.22. (CH^*) *Seja X compacto T_2 . Se X tem diagonal pequena, então X é metrizável.*

Dem.: Se $t(X) > \omega$, temos que existe $(x_\xi)_{\xi < \omega_1}$ ω_1 -seqüência convergente não trivial em X (pois, como X é compacto e $t(X) > \omega$, temos que, por 1.3.39, $F(X) > \omega$ e, assim, podemos aplicar 2.1.21) e, portanto, X não tem diagonal pequena, pois, se $x_\xi \rightarrow x$, $(x_\xi, x) \rightarrow (x, x)$. Logo, temos que $t(X) = \omega$.

Fixe $p \in \Delta$ e considere:

$$X_\Delta := \{(x, y) \in X \times X : x \neq y\} \cup \{p\}$$

com a topologia dada da seguinte maneira: seja U' um aberto em $X \times X$. Se U' é disjunto de Δ , U' é um aberto de X_Δ . Se $U' \supset \Delta$, então

$$U := (U' \setminus \Delta) \cup \{p\}$$

é um aberto de X_Δ . Considere $f : X \times X \rightarrow X_\Delta$ dada por

$$f(x, y) := \begin{cases} (x, y) & \text{se } x \neq y \\ p & \text{se } x = y \end{cases}$$

Temos que:

f é contínua: Dado U aberto de X_Δ , podemos ver que $f^{-1}(U)$ é aberto em $X \times X$ pela definição da topologia de X_Δ .

X_Δ é T_2 : Imediato por $X \times X$ ser T_2 , pelo fato que $X \times X$ ser regular e por Δ ser um fechado de $X \times X$.

X_Δ é compacto: Como f é contínua e $X \times X$ é compacto (pois X é compacto), temos o resultado.

$t(X) = \omega$: Note que $t(X \times X) = \omega$ por 1.3.37. Como $X \times X$ e X_Δ são compactos T_2 e f é contínua, temos que f é fechada. Assim, por 1.3.36, temos que $t(X_\Delta) = \omega$.

$\chi(p, X_\Delta) = \omega$: Suponha que não. Então, por 2.1.18, temos que $p \in \ell_{\omega_1}(X_\Delta \setminus \{p\})$. Isto é, existe $((x_\xi, y_\xi))_{\xi < \omega_1} \subset X_\Delta \setminus \{p\}$ tal que $(x_\xi, y_\xi) \rightarrow p$. Então, $(x_\xi, y_\xi) \rightarrow \Delta$, contrariando o fato que X tem diagonal pequena.

Vamos mostrar que Δ é G_δ . Seja $(V_n)_{n \in \omega}$ base local de p em X_Δ . Vamos mostrar que $\bigcap_{n \in \omega} f^{-1}(V_n) = \Delta$ e, como f é contínua, concluir o resultado. Seja $d \in \bigcap_{n \in \omega} f^{-1}(V_n)$. Então $f(d) = p$ e, portanto, $d \in \Delta$. Seja $d \in \Delta$. Então $f(d) = p \in V_n$ para todo n . Logo, $d \in \bigcap_{n \in \omega} f^{-1}(V_n)$.

Assim, X é metrizável por **2.1.20**. □

Referências: [21, 18, 22]

2.2 Os reais aleatórios

Introdução

Apresentamos aqui mais uma construção de um modelo por forcing em que não vale CH. O forcing utilizado aqui é o mesmo utilizado para se contruir o modelo de Solovay que será estudado numa seção posterior.

O forcing apresentado é o conjunto $B(X)/N$, isto é, os conjuntos de Baire de 2^X quocientado pelo ideal dos conjuntos de medida nula, com a ordem da inclusão. Pode-se mostrar que os forcings de Cohen são da forma $B(X)/M$, onde M é o ideal dos conjuntos magros. Para isso, ver, por exemplo, [17]. Por isso, muitas propriedades sobre medida, obtidas com forcing dos reais aleatórios, possuem uma análoga sobre categoria, obtida com um forcing de Cohen.

No que segue, estaremos basicamente seguindo [32] e [17]. Para os resultado sobre medida, adotamos também [15].

2.2.1 Conjuntos de Baire

Primeiramente, apresentemos os principais conjuntos com os quais trabalhamos:

Definição 2.2.1. Seja X um conjunto de ordinais. Considere 2^X com a topologia usual¹. Seja $Fn(X, 2) := \{s : s \text{ é uma função finita com } \text{dom}(s) \subset X \text{ e } \text{Im}(s) \subset 2\}$. Dado $s \in Fn(X, 2)$, seja $u_s^X := \{f \in 2^X : s \subset f\}$ (quando X estiver claro no contexto, denotaremos apenas u_s). Temos que $\{u_s : s \in Fn(X, 2)\}$ é uma base para a topologia de 2^X . Denominamos por u_s o **intervalo de Baire** determinado por s .

O próximo resultado dá uma maneira de se construir a σ -álgebra gerada por um conjunto. Sua demonstração não é difícil.

Proposição 2.2.2. *Seja A uma família não vazia de conjuntos. Defina $A_0 := A$ e, para cada $\alpha < \omega_1$, $\alpha > 0$, defina*

$$A_\alpha := \left(\bigcup \{A_\beta : \beta < \alpha\} \right)^*$$

onde B^* indica a família de todas as uniões enumeráveis de diferenças de elementos de B . Isto é, $B^* = \{\bigcup_{n \in \omega} (b_{2n+1} - b_{2n}) : b_n \in B\}$.

Então a σ -álgebra gerada por A é igual a $\bigcup_{\alpha < \omega_1} A_\alpha$.

¹tomando-se 2 com a topologia discreta e 2^X com a topologia do produto de Tychonoff.

Definição 2.2.3. Seja X um conjunto de ordinais. Seja $B(X)$ a σ -álgebra gerada por $\{u_s : s \in Fn(X, 2)\}$. Chamamos cada elemento de $B(X)$ de **conjunto de Baire**.

Note que, quando $|X| = \omega$, temos que $B(X)$ é o conjunto dos borelianos de X .

2.2.2 Os códigos

Vamos agora à principal idéia por trás da construção deste forcing que são os códigos. O que vamos usar é que um conjunto de Baire pode ser “codificado” através de uma função. Na verdade, todo conjunto de Baire possui um “algoritmo” de sua construção a partir dos abertos.

Definição 2.2.4. Sejam X um conjunto de ordinais e $A \subset 2^X$. Seja $J : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$ dada por $J(m, n) := 2^m(2n + 1)$. Definimos a noção “ r é um X -código para A ”, onde $r : \omega \longrightarrow \{0, 1, 2\} \cup Fn(X, 2)$, por recursão como se segue:

- (i) Se $s \in Fn(X, 2)$ então r é um X -código para u_s se $r(0) = 0$ e, para todo $n > 0$, $r(n) = s$.
- (ii) Se r_n é um X -código para A_n para todo $n \in \omega$, então r é um X -código para $\bigcup\{A_n : n \in \omega\}$ se $r(0) = 1$ e $r(J(m, n)) = r_m(n)$ para todo $m, n \in \omega$.
- (iii) Se t é um X -código para A , então r é um X -código para $2^X \setminus A$ se $r(0) = 2$ e $r(n + 1) = t(n)$.

Para ilustrar melhor a idéia de se “codificar” um conjunto, vamos a alguns exemplos:

Exemplo 2.2.5. (i) Considere $s := \emptyset \in Fn(X, 2)$. Note que $u_s = 2^X$. Então $r_1 : \omega \longrightarrow \{0, 1, 2\} \cup Fn(X, 2)$ dado por $r_1(0) := 0$ e $r_1(n) := \emptyset$ para todo $n > 0$ é um X -código para 2^X .

(ii) Considere r_1 do item anterior e $r_2 : \omega \longrightarrow \{0, 1, 2\} \cup Fn(X, 2)$ dado por $r_2(0) := 2$ e $r_2(n + 1) := r_1(n)$ para $n \in \omega$. Então r_2 é um X -código para $2^X \setminus 2^X$ isto é, r_2 é um X -código para o conjunto vazio.

(iii) Considere r_2 dado pelo item anterior $r_3 : \omega \longrightarrow \{0, 1, 2\} \cup Fn(X, 2)$ dado por $r_3(0) := 1$ e $r_3(J(m, n)) := r_2(n)$ para todo $m, n \in \omega$. Então r_3 é um X -código para $\bigcup_{n \in \omega} \emptyset$. Isto é, r_3 é um X -código para o conjunto vazio.

Note que o último exemplo mostra que um mesmo conjunto pode ter mais de um X -código.

O próximo resultado mostra que a idéia de se trabalhar com os X -códigos como “algoritmos” para os conjuntos de Baire realmente funciona, no sentido que cada conjunto de Baire está bem determinado por algum X -código.

Proposição 2.2.6. *Seja X um conjunto de ordinais. Então valem as seguintes propriedades:*

- (a) *Se r é um X -código para A_1 e A_2 , então $A_1 = A_2$.*
- (b) *Dado $A \in B(X)$ existe um X -código para A .*
- (c) *Se r é um X -código para A , então $A \in B(X)$.*

Dem.: (a) Por indução sobre r . Se $r(0) = 0$, então $r(n) = s$ para todo $n > 0$ e $A_1 = u_s = A_2$. Se $r(0) = 1$, então $A_1 = \bigcup \{B_n : n \in \omega\}$ e $A_2 = \bigcup \{C_n : n \in \omega\}$ com $r(J(m, n)) = r_m(n)$, onde r_i é um X -código para B_i e C_i para todo i . Logo, por (HI), temos que $B_i = C_i$, para todo i e, portanto, $A_1 = A_2$. Se $r(0) = 2$, temos que $A_1 = X \setminus B_1$, $A_2 = X \setminus B_2$ com $r(n+1) = t(n)$, onde t é um X -código para B_1 e B_2 . Logo, por (HI), temos que $B_1 = B_2$ e, portanto, $A_1 = A_2$.

(b) Usando a notação de 2.2.2, temos que $B(X) = \bigcup_{\alpha < \omega_1} A_\alpha$, com $A_0 = \{u_s : s \in Fn(X, 2)\}$. Seja α o menor ordinal tal que $A \in A_\alpha$. Vamos mostrar o resultado por indução sobre α . Como $A \in A_\alpha$, existem $\{B_n : n \in \omega\} \subset \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta$ tais que $A = \bigcup_{n \in \omega} (B_{2n} \setminus B_{2n+1})$. Por (HI), existem $\{r_n : n \in \omega\}$ tais que, para cada n , r_n é um X -código para B_n . Então, seja $\{t_n : n \in \omega\}$ tal que, para cada n , t_n seja um X -código para $(B_{2n} \setminus B_{2n+1})$ (a construção de t_n segue direto da definição de X -código para diferenças entre conjuntos). Com isso, podemos tomar r um X -código para $\bigcup_{n \in \omega} (B_{2n} \setminus B_{2n+1}) = A$ (novamente, segue direto da definição de X -código para união enumerável).

(c) Por indução sobre r :

Se $r(0) = 0$, então $A = u_s$ para algum $s \in Fn(X, 2)$ e, claramente, $A \in B(X)$.

Se $r(0) = 1$, então $A = \bigcup \{A_n : n \in \omega\}$ e existe $\{t_n : n \in \omega\}$ onde, para cada $n \in \omega$, t_n é um X -código para A_n . Logo, por (HI), $A_n \in B(X)$ para todo n . Portanto, $\bigcup \{A_n : n \in \omega\} = A \in B(X)$.

Se $r(0) = 2$, então $A = 2^\omega \setminus B$ e existe s um X -código para B . Logo, por (HI), $B \in B(X)$ e, portanto, $A \in B(X)$.

□

Dada a unicidade garantida no resultado anterior, podemos fazer a seguinte definição:

Definição 2.2.7. Dado r um X -código, denotamos por $b(r, X)$ o conjunto $A \in B(X)$ tal que r é um X -código para A .

2.2.3 Absolutividade para os códigos entre modelos

A importância dos códigos se dá, entre outras coisas, de podermos falar, em M , sobre certos conjuntos em $M[G]$. Mas, para que isso possa ser feito de maneira satisfatória, precisamos que certas propriedades dos códigos sejam preservadas entre modelos.

Começemos com algumas propriedades básicas:

Teorema 2.2.8. *Sejam M e N modelos transitivos para ZFC tais que N estende M . Sejam $r, s \in M$, $X \in M$ e $f \in (2^X)^M$. Então, as seguintes afirmações valem em M se, e somente se, valem em N :*

- (i) r é um X -código.
- (ii) r é um X -código e $f \in b(r, X)$.
- (iii) r e s são X -códigos e $b(r, X) = b(s, X)$.

Dem.: (i) Vamos mostrar o resultado por indução sobre r . Se $r(0) = 0$, e $r(1) = n$ então em M , r é um X -código para $(u_{r(1)})^M$ e, em N , r é um X -código para $(u_{r(1)})^N$.

Se $r(0) = 1$ e r é X -código em M . Então, em M , existem $(r_m)_{m \in \omega}$ X -códigos tais que $r(J(m, n)) = r_m(n)$ para todo m, n , então $b(r, X)^M = (\bigcup_{n \in \omega} b(r_n, X))^M$ e, por (HI), temos que $(r_m)_{m \in \omega}$ são X -códigos em N e $b(r, X)^N = (\bigcup_{n \in \omega} b(r_n, X))^N$.

Se $r(0) = 1$ e r é N -código em M , é análogo ao anterior.

Os casos em que $r(0) = 2$ são análogos.

- (ii) Suponha r um X -código em M e N . Seja $f \in B(r, X)^M$. Vamos mostrar o resultado por indução sobre r . Se $r(0) = 0$, seja $s = r(1)$. Então $b(r, X)^M = u_s^M$ e $b(r, X)^N = u_s^N$. Então

$$\begin{aligned} f \in u_s^M &\Leftrightarrow (f \upharpoonright \text{dom}(s) = s)^M \\ &\Leftrightarrow (f \upharpoonright \text{dom}(s) = s)^N \\ &\Leftrightarrow f \in u_s^N \end{aligned}$$

Os casos $r(0) \in \{1, 2\}$ seguem por indução.

(iii) Segue por indução sobre r e s .

□

A seguinte definição relaciona certos elementos de $B(X)^M$ com elementos de $B(X)^N$. Isso é útil quando falamos de elementos de $B(X)^N$ cujos códigos já existiam em M .

Definição 2.2.9. Sejam M e N modelos transitivos para ZFC tais que N estende M e seja X um conjunto de ordinais em M . Sejam $A \in B(X)^M$ e r um X -código para A em M , isto é, $(A = b(r, X))^M$. Definimos $A^* := b(r, X)^N$.

Note que, dado $A \in B(X)^M$, não necessariamente $A = A^*$. A semelhança entre A e A^* é que ambos têm o mesmo X -código, isto é, ambos são construídos da mesma maneira a partir dos abertos de 2^X . Com a diferença que A é construído com abertos de $(2^X)^M$ e A^* é construído com abertos de $(2^X)^N$. Para ilustrar melhor tal relação, vamos a alguns exemplos:

Exemplo 2.2.10. (i) Considere, em M , $A = 2^X$. Note que, não necessariamente, $(2^X)^M = (2^X)^N$. Mas existe, em M , um X -código tal que $A = b(r, X)^M$ (ver, por exemplo, 2.2.5). Note que, em N , r também é um código e que $A^* = b(r, X)^N = (2^X)^N$.

(ii) Considere, em M , $A = \emptyset$. Seja r um X -código para A (ver, por exemplo, 2.2.5). Então r é um X -código em N e $A^* = b(r, X)^N = \emptyset$. Note que, nesse caso, $A = A^*$.

Vejamos que a relação $A \longrightarrow A^*$ está, de fato, bem definida e tem certas propriedades desejadas:

Lema 2.2.11. Sejam M e N modelos transitivos para ZFC tais que N estende M e seja X um conjunto de ordinais em M . Dado $A \in B(X)^M$, temos:

- (i) a correspondência $A \longrightarrow A^*$ acima está bem definida.
- (ii) a função $A \longrightarrow A^*$ é injetora.
- (iii) $(A \subset A^*)^N$.

Dem.: (i) Precisamos que, dados r e s X -códigos em M , tais que $b(r, X)^M = b(s, X)^M$, então $b(r, X)^N = b(s, X)^N$. E temos isso por 2.2.8(iii).

(ii) Precisamos que, dados r e s X -códigos em M , tais que $b(r, X)^N = b(s, X)^N$, então $b(r, X)^M = b(s, X)^M$. E, novamente, temos isso por 2.2.8(iii).

(iii) Precisamos que, dado $f \in b(r, X)^M$, então $f \in b(r, X)^N$. E temos isso por 2.2.8(ii). $\square$

Vejamos agora que a relação $A \longrightarrow A^*$ preserva certas operações conjuntísticas:

Teorema 2.2.12. *Sejam M e N modelos transitivos para ZFC tais que N estende M e seja X um conjunto de ordinais em M . Sejam $A_1, A_2 \in B(X)^M$. Temos:*

(i) $(A_1 \cup A_2)^* = A_1^* \cup A_2^*$, $(A_1 \cap A_2)^* = A_1^* \cap A_2^*$ e $(2^X \setminus A_1)^* = (2^X)^N \setminus A_1^*$.

(ii) *Seja $(\{A_n : n \in \omega\} \subset B(X))^M$. Então $(\bigcup\{A_n : n \in \omega\})^* = \bigcup\{A_n^* : n \in \omega\}$ e $(\bigcap\{A_n : n \in \omega\})^* = \bigcap\{A_n^* : n \in \omega\}$.*

(iii) $A_1 \subset A_2$ se, e somente se, $A_1^* \subset A_2^*$.

(iv) $A_1 = \emptyset$ se, e somente se, $A_1^* = \emptyset$.

Dem.: Para (i) e (ii), basta provarmos os resultados relativos à união enumerável e à complementação. Suponha r um X -código para A em M . Considere s tal que $s(0) = 2$ e $s(n+1) = r(n)$ para todo $n > 0$. Então, s é um X -código em M para $(2^X \setminus A)^M$. E, claramente, s é um X -código em N para $(2^X \setminus b(r, X))^N$, isto é, $(2^X)^N \setminus A^*$.

Agora seja $(A_n : n \in \omega)$ uma sequência em $B(X)^M$ ¹. Trabalhando em M , temos que existe uma sequência $(r_n : n \in \omega)$ de X -códigos tais que $A_n = b(r_n, X)$ para todo $n \in \omega$. Seja r dado por $r(0) = 1$ e $r(J(m, n)) = r_m(n)$ para todo $m, n \in \omega$. Temos que $b(r, X) = \bigcup\{b(r_n, X) : n \in \omega\} = \bigcup\{A_n : n \in \omega\}$. Note que, trabalhando agora em N , também temos que $b(r, X) = \bigcup\{b(r_n, X) : n \in \omega\}$. Logo, $b(r, X)^N = \bigcup\{A_n^* : n \in \omega\}$ isto é, $(\bigcup\{A_n : n \in \omega\})^* = \bigcup\{A_n^* : n \in \omega\}$.

(iii) Basta usar (i) e o fato que $A \subset B$ se, e somente se, $A \cup B = B$.

(iv) Temos que $A_1^* = \emptyset \Rightarrow A_1 = \emptyset$ pois $A_1 \subset A_1^*$. Para a outra implicação, basta tomar, em M um X -código para o conjunto vazio e notar que, em N , ele continua sendo um X -código para o vazio. $\square$

Os dois últimos resultados garantem que trabalhar com códigos em M nos dá uma boa aproximação de alguns conjuntos de 2^X em N , onde N é um modelo que estende M .

¹ou seja, tanto cada $A_n \in M$ como a própria sequência está em M .

2.2.4 O forcing dos reais aleatórios

Começemos com a definição da medida que trabalharemos:

Definição 2.2.13. Definimos sobre $\wp(2) = \wp(\{0, 1\})$ uma medida m dada por

$$m(\emptyset) = 0 \quad m(\{0\}) = m(\{1\}) = \frac{1}{2} \quad m(2) = 1$$

Dado X conjunto de ordinais, considere $\mu : B(X) \longrightarrow [0, 1]$ a única medida regular satisfazendo

$$\mu(u_s) = \prod_{\alpha \in \text{doms}} m(s(\alpha))$$

onde $s \in Fn(X, 2)$.

O próximo resultado mostra que a relação $A \longrightarrow A^*$ preserva μ . Tal resultado pode ser mostrado por indução sobre X -códigos.

Teorema 2.2.14. *Sejam M e N modelos transitivos para ZFC tais que N estende M e seja X um conjunto de ordinais em M . Então, dado $A \in B(X)^M$ temos $\mu(A)^M = \mu(A^*)^N$.*

Considere X um conjunto de ordinais. É fácil ver que a relação $\equiv$ em $B(X)$ definida por, $A_1 \equiv A_2$ se $\mu(A_1 \Delta A_2) = 0$, onde $A_1, A_2 \in B(X)$, é uma relação de equivalência. Denotaremos por $[A]$ a classe de equivalência de $A \in B(X)$ pela relação $\equiv$. É fácil ver que a relação $\leq$ dada por $[A] \leq [B]$ se $\mu(A \setminus B) = 0$ está bem definida e é uma ordem parcial sobre $\{[A] : A \in B(X)\}$. Denotaremos por $Q(X)$ o conjunto $\{[A] : A \in B(X) \text{ e } \mu(A) > 0\}$ munido da ordem parcial $\leq$.

Vamos agora a algumas propriedades sobre $Q(X)$:

Teorema 2.2.15. *Seja X um conjunto de ordinais. Então $Q(X)$ tem c.c.c.*

Dem.: Primeiramente, observe que se $[A], [B] \in Q(X)$ são incompatíveis, então $\mu(A \cap B) = 0$, pois, caso contrário, $[A \cap B] \in Q(X)$ e $[A \cap B] \leq [A], [B]$. Assim, basta mostrar que dada I uma coleção de elementos de $B(X)$ de medida positiva tal que, para todo $A, B \in I$, com $A \neq B$, $\mu(A \cap B) = 0$, então I é enumerável. Mas, como $\mu(2^X) = 1$, temos que, para cada $n \in \omega$, existem, no máximo, n conjuntos de medida maior ou igual a $\frac{1}{n}$. Assim, temos que I é enumerável. $\square$

Lema 2.2.16. *Seja M um modelo transitivo enumerável de ZFC e seja X um conjunto de ordinais em M . Seja G um $Q(X)^M$ -genérico. Então se $(A_n)_{n \in \omega}$ é um seqüência em M de elementos de $B(X)^M$ e $[\bigcup_{n \in \omega} A_n] \in G$, então existe n tal que $[A_n] \in G$.*

Dem.: É suficiente mostrar que, em M , o conjunto $D := \{p \in Q(X) : \exists n \in \omega \ p \leq [A_n]\}$ é denso abaixo de $[\bigcup_{n \in \omega} A_n]$ em $Q(X)$ ¹. Trabalhando em M , suponha $[B] \leq [\bigcup_{n \in \omega} A_n]$. Então $\mu(B \setminus \bigcup_{n \in \omega} A_n) = 0$. Como $B \setminus \bigcup_{n \in \omega} A_n = \bigcap_{n \in \omega} (B \setminus A_n)$ e $\mu(B) > 0$, temos que, para algum $n \in \omega$, $\mu(B \setminus A_n) < \mu(B)$ e, portanto, $\mu(B \cap A_n) > 0$. Logo $[B \cap A_n] \in Q(X)$ e, claramente, $[B \cap A_n] \leq [B], [A_n]$. Logo, $[B \cap A_n] \in D$. $\square$

Definição 2.2.17. *Seja M um modelo transitivo enumerável para ZFC e seja X um conjunto de ordinais em M . Um elemento $A \in B(X)$ é dito **racional** sobre M se existe $A' \in B(X)^M$ tal que $A = A'^*$ (o $*$ é o usual, trocando-se N por V em sua definição). Uma função $h : X \rightarrow 2$ é dita **X -aleatória** sobre M se $h \notin A$, onde A é racional sobre M e $\mu(A) = 0$.*

Um conjunto ser racional sobre M quer dizer que existe um X -código para ele em M . Lembre que isso não quer dizer que o próprio conjunto esteja em M . Num exemplo, 2^X pode não ser o mesmo que $(2^X)^M$, mas temos que 2^X é racional sobre M pois existe um X -código para ele em M .

Já quanto a definição de uma função ser X -aleatória sobre M , a idéia é, basicamente, que a função não pertence a conjuntos “pequenos” de M . Mais do que isso, se h é X -aleatória sobre M , nenhum conjunto cujo código possa ser tomado em M e que seja “pequeno”, pode conter h .

O próximo resultado nos dá uma maneira de, a partir de um G genérico, construir um $h : X \rightarrow 2$ aleatório e vice-versa:

Teorema 2.2.18. *Seja M um modelo transitivo enumerável de ZFC e seja X um conjunto de ordinais em M . Temos:*

- (i) *Se G é um $Q(X)^M$ -genérico sobre M e $h := \bigcup \{s \in Fn(X, 2) : [u_s]^M \in G\}$, então para todo $A \in B(X)^M$ vale $h \in A^*$ se, e somente se, $[A] \in G$ e, portanto h é X -aleatório sobre M .*
- (ii) *Se h é X -aleatório sobre M e $G := \{[A] : A \in B(X)^M \text{ e } h \in A^*\}$, então G é $Q(X)^M$ -genérico sobre M .*
- (iii) *As correspondências dadas acima são inversas uma da outra e, se h e G são assim relacionados, então $M[h] = M[G]$.*

¹ pois $[\bigcup_{n \in \omega} A_n] \in G$.

Dem.: (i) Primeiramente, observe que se $A_1, A_2 \in B(X)^M$ são tais que $A_1 \cup A_2 = (2^X)^M$, então $[A_1] \in G$ ou $[A_2] \in G$, pois, $[(2^X)^M] \in G$ e aplicamos 2.2.16.

Vamos mostrar que h é uma função de domínio X^1 . Seja $\alpha \in X$. Então $\{(\alpha, 0)\}, \{(\alpha, 1)\} \in Fn(X, 2)$ e $u_{\{(\alpha, 0)\}}^M \cup u_{\{(\alpha, 1)\}}^M = (2^X)^M$. Então $(\alpha, 0) \in h$ ou $(\alpha, 1) \in h$, pois $[u_{\{(\alpha, 0)\}}^M] \in G$ ou $[u_{\{(\alpha, 1)\}}^M] \in G$. Assim, para termos que h é função, basta mostrarmos que não ocorre $(\alpha, 0) \in h$ e $(\alpha, 1) \in h$ ao mesmo tempo. Trabalhando em M , sejam $s_1, s_2 \in Fn(X, 2)$ tais que $(\alpha, 0) \in s_1$ e $(\alpha, 1) \in s_2$. Então $u_{s_1} \cap u_{s_2} = \emptyset$ e, portanto, $[u_{s_1}]$ e $[u_{s_2}]$ são incompatíveis. Assim, G não pode conter $[u_{s_1}^M]$ e $[u_{s_2}^M]$ ao mesmo tempo e, portanto, h não contém $(\alpha, 0)$ ou $(\alpha, 1)$.

Vamos agora mostrar que, dado $A \in B(X)^M$, $h \in A^*$ se, e somente se, $[A] \in G$. Vamos mostrar o resultado por indução sobre r onde r é um X -código para A em M .

Se $r(0) = 0$, então existe $s \in Fn(X, 2)^M$ tal que $A = u_s^M$ e $A^* = u_s$. Se $[u_s^M] \in G$, então $s \subset h$ e, portanto, $h \in u_s = A^*$. Por outro lado, suponha que $h \in u_s$. Seja $s_0, \dots, s_k$ uma enumeração de todos os elementos de $Fn(X, 2)$ cujos domínios são os mesmos de s e suponha que $s_0 = s$. Como, em M , $\bigcup_{i \leq k} u_{s_i} = 2^X$, temos, por 2.2.16, que existe i tal que $[u_{s_i}^M] \in G$. Mas temos que $i = 0$, pois, pela definição de h , $s_i \subset h$ e temos que h é função.

Se $r(0) = 1$, então existem $(r_m)_{m \in \omega}$ tais que $r(J(m, n)) = r_m(n)$. Sejam $(A_n)_{n \in \omega}$ tais que $b(r_n, X)^M = A_n$. Suponha $h \in (\bigcup_{n \in \omega} A_n)^* \stackrel{2.2.12}{=} \bigcup_{n \in \omega} A_n^*$. Então existe $n \in \omega$ tal que $h \in A_n^*$ e, portanto, por (HI), temos que $[A_n] \in G$. Como $[A_n] \leq [\bigcup_{n \in \omega} A_n]$ e G é filtro, temos que $[\bigcup_{n \in \omega} A_n] = [A] \in G$. Por outro lado, suponha $[A] = [\bigcup_{n \in \omega} A_n] \in G$. Por 2.2.16, temos que existe $n \in \omega$ tal que $[A_n] \in G$ e, portanto, por (HI), temos que $h \in A_n^* \subset \bigcup_{n \in \omega} A_n^* \stackrel{2.2.12}{=} A^*$.

O caso $r(0) = 2$ é análogo.

Finalmente, vamos mostrar que h é X -aleatório sobre M . Seja $A \in B(X)$ racional sobre M tal que $\mu(A) = 0$. Então $A = A'^*$ para algum $A' \in B(X)^M$ e, por 2.2.14, $\mu(A') = 0$. Então $[A'] \notin G$ (pois todo elemento de G tem medida positiva) e, portanto, pelo que acabamos de provar, $h \notin A'^* = A$.

- (ii) Note que, de fato $G \subset Q(X)^M$, pois se $h \in A^*$, $\mu(A^*) \stackrel{2.2.14}{=} \mu(A) > 0$. Sejam $A_1, A_2 \in B(X)^M$. Vamos mostrar que

$$(h \in A_1^* \text{ e } \mu(A_1 \setminus A_2) = 0) \Rightarrow h \in A_2^* \quad (2.3)$$

Suponha $\mu(A_1 \setminus A_2)^M = 0$ e $h \in A_1^*$. Por 2.2.14, temos que $\mu((A_1 \setminus A_2)^*) = 0$. Como h é X -aleatório, $h \notin (A_1 \setminus A_2)^* \stackrel{2.2.12}{=} A_1^* \setminus A_2^*$. Logo, $h \in A_2^*$.

Vamos mostrar que, se $[A_1] \leq [A_2]$ e $[A_1] \in G$ então $[A_2] \in G$. Como $[A_1] \in G$, temos que $h \in A_1^*$. Por (2.3), temos que $h \in A_2^*$, pois $\mu(A_1 \setminus A_2) = 0$. Assim, $[A_2] \in G$.

¹para termos que h é X -aleatória.

Para ver que os elementos de G são dois a dois compatíveis, considere $[A_1], [A_2] \in G$. Temos que $h \in A_1^*, A_2^*$. Logo, $h \in A_1^* \cap A_2^* \stackrel{2.2.12}{=} (A_1 \cap A_2)^*$ e, portanto, $[A_1 \cap A_2] \in G$.¹

Já temos que G é filtro, falta mostrar que é genérico. Seja D um denso de $Q(X)^M$ em M . Vamos trabalhar em M . Seja I um conjunto maximal incompatível em D . Por 2.2.15, $|I| = \omega$. Seja $([A_n])_{n \in \omega}$ uma enumeração de I . Vamos mostrar que $\mu(\bigcup_{n \in \omega} A_n) = 1$. Suponha que não. Então $B := 2^X \setminus \bigcup_{n \in \omega} A_n$ tem medida positiva. Logo, $[B] \in Q(X)$ e, como D é denso, existe $B' \in Q(X)$ tal que $[B'] \leq [B]$ e $[B'] \in D$. Mas note que $[B']$ é incompatível com todo A_n , contrariando a maximalidade de I . Assim, temos que $\mu(\bigcup_{n \in \omega} A_n) = 1$. Como h é X -aleatório, temos que $h \in (\bigcup_{n \in \omega} A_n)^*$ (simplesmente por que h não está no complementar disso, que tem medida nula). Como $(\bigcup_{n \in \omega} A_n)^* = \bigcup_{n \in \omega} A_n^*$, temos que $h \in A_n^*$ para algum n e, portanto, $[A_n] \in G \cap D$.

- (iii) Seja $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as funções X -aleatórias M e seja $\mathcal{A}$ o conjunto de todos os conjuntos $Q(X)^M$ -genéricos sobre M . Dado $h \in \mathcal{F}$, definimos $\chi_1(h) := \{[A] : A \in B(X)^M \text{ e } h \in A^*\}$. Pela parte (ii), temos que $\chi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{A}$. Dado $G \in \mathcal{A}$, definimos $\chi_2(G) := \bigcup \{s \in Fn(X, 2) : [u_s^M] \in G\}$. Pela parte (i), temos que $\chi_2 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{F}$. Observe que $\chi_1 \circ \chi_2$ e $\chi_2 \circ \chi_1$ são iguais a identidade e, portanto, χ_1 e χ_2 são ambas bijetoras e uma é inversa da outra.

Vamos mostrar que $M[h] \subset M[G]$. Para isso, basta mostrar que $h \in M[G]$. Temos que $G \in M[G]$, portanto, $\{s \in Fn(X, 2) : [u_s^M] \in G\} \in M[G]$, e, portanto, $h \in M[G]$.

Por outro lado, temos que, como $h \in M[h]$, $H := \{[A] : A \in B(X)^M \text{ e } h \in (A^*)^{M[h]}\} \in M[h]$. Para concluir que $H = G$, basta mostrarmos que $h \in A^*$ se, e somente se, $h \in (A^*)^{M[h]}$. Seja r em M um X -código para A . Temos que $(A^*)^{M[h]} = b(r, X)^{M[h]}$. Como $A^* = b(r, X)$, basta aplicarmos 2.2.8 para $M[h]$ e V que temos o resultado. Logo, $G \in M[h]$ e, portanto, $M[G] \subset M[h]$. Concluimos que $M[G] = M[h]$.

□

O próximo resultado mostra que o forcing dos reais aleatórios pode fazer o contínuo valer quase qualquer coisa. Em particular, pode violar a Hipótese do Contínuo.

Teorema 2.2.19. *Seja M um modelo enumerável para ZFC e seja λ um cardinal tal que $\lambda^\omega = \lambda$ em M . Se G é $Q(\lambda)^M$ -genérico sobre M , então, em $M[G]$, temos $2^\omega = \lambda$.*

¹e note que $[A_1 \cap A_2] \leq [A_1], [A_2]$.

Dem.: Como $Q(\lambda)$ tem c.c.c. em M , temos que cardinalidades e cofinalidades em $M[G]$ são preservadas. Note que temos $|Q(\lambda)| = \lambda$ em M , pois por 2.2.2, como $|Fn(X, 2)| = \lambda^\omega = \lambda$, temos que $|B| = \omega_1 \cdot \lambda = \lambda$. Assim, $2^\omega \leq (\lambda^\omega)^\omega = \lambda^\omega = \lambda$ em $M[G]$ ¹.

Para mostrar a outra desigualdade, considere h λ -aleatória sobre M e, para cada $\alpha \in \lambda$ seja $d_\alpha \in 2^\omega$ definida por

$$d_\alpha(n) := h(\omega \cdot \alpha + n)$$

Basta mostrar que $d_\alpha \neq d_\beta$ se $\alpha \neq \beta$. Suponha $d_\alpha = d_\beta$. Seja $B \in B(X)^M$ tal que $[B] \Vdash \dot{d}_\alpha = \dot{d}_\beta$. Vamos trabalhar em M . Considere

$$A := \{f \in 2^\kappa : \forall n \in \omega \ f(\omega \cdot \alpha + n) = f(\omega \cdot \beta + n)\}$$

Vamos mostrar que $[B] \leq [A]$. Suponha que não. Então $\mu(C) > 0$, onde $C := B \setminus A$. Mas $C = \bigcup_{n \in \omega} \{f \in B : f(\omega \cdot \alpha + n) \neq f(\omega \cdot \beta + n)\}$. Logo, para algum $m \in \omega$, $C_m := \{f \in B : f(\omega \cdot \alpha + m) \neq f(\omega \cdot \beta + m)\}$ tem medida positiva. Logo, $[C_m] \in Q(X)$ e $[C_m] \Vdash \dot{d}_\alpha(\check{m}) \neq \dot{d}_\beta(\check{m})$ ², contrariando o fato de que $[C_m] \leq [B]$ e $[B] \Vdash \dot{d}_\alpha = \dot{d}_\beta$. Logo, $[B] \leq [A]$. Mas isso também é um absurdo, pois $\mu(A) = 0$, já que $A = \bigcap_{n \in \omega} A_n$ onde $A_n := \{f \in 2^\kappa : f(\omega \cdot \alpha + n) = f(\omega \cdot \beta + n)\}$ e $\mu(\bigcap_{n=0}^{m+1} A_n) = \mu((\bigcap_{n=0}^m A_n) \cdot \frac{1}{4})$. $\square$

¹pois, se em M , $\mathbb{P}$ tem c.c.c., $|\mathbb{P}| = \lambda$, κ é um cardinal infinito e $\theta = \lambda^\kappa$ então, em $M[G]$, temos que $2^\kappa \leq \theta$.

²pois, se por 2.2.18, $C_m \in G$ implica $h \in C_m$ e, portanto, $d_\alpha(m) = h(\omega \cdot \alpha + m) \neq h(\omega \cdot \beta + m) = d_\beta(m)$

2.3 Um modelo em que existe uma medida universal sobre a reta

Introdução

Estamos interessados em construir, por forcing, um modelo $M[G]$ em que exista uma medida μ não trivial e enumeravelmente aditiva em que todo subconjunto de $[0, 1]$ seja μ -mensurável.

Para isso, assumiremos a existência de um cardinal mensurável¹ e usaremos o forcing dos reais aleatórios.

Como usamos o forcing dos reais aleatórios, temos que CH não vale no modelo obtido. Na verdade, temos que em tal modelo o contínuo é **fracamente inacessível** (κ é fracamente inacessível se é regular e $\forall \gamma < \kappa, \gamma^+ < \kappa$).

A construção da medida

Definição 2.3.1. Seja X um conjunto. Seja $u \subset \wp(X)$ um ultrafiltro sobre X . Dizemos que u é um **ultrafiltro principal** se existe $x \in X$. $\{x\} \notin u$. Dado κ um cardinal, dizemos que u é **κ -completo** se dada uma família $\{a_\xi : \xi < \gamma\}$ de elementos de u com $\gamma < \kappa$, temos que $\bigcap_{\xi < \gamma} a_\xi \in u$.

Definição 2.3.2. Um cardinal não enumerável κ é dito um **cardinal mensurável** se existe um ultrafiltro não principal κ -completo u sobre κ .

No que se segue, κ é um cardinal mensurável e u é um ultrafiltro κ -completo não principal sobre ele.

Vamos considerar o forcing dos reais aleatórios $Q(\kappa)$. Os fatos que usaremos sobre tal forcing são: ter c.c.c., existir uma medida m σ -aditiva sobre suas condições a valores em $[0, 1]$ e que, em $M[G]$, $|2^\omega| = \kappa$.

Como usamos o forcing dos reais aleatórios, temos que na extensão $2^\omega = \kappa$. Assim, para definirmos a medida de cada subconjunto de 2^ω , basta definirmos a medida de cada subconjunto de κ na extensão.

De posse de $\alpha < \kappa$ e da ordem $Q(\kappa)$, conseguimos definir uma primeira tentativa de valor para a medida de $\dot{A}$, onde $\dot{A}$ é um nome para um subconjunto de κ :

¹a consistência de tal existência é mais forte que a consistência de ZFC

Definição 2.3.3. Seja κ um cardinal. Seja $\dot{A}$ um $Q(\kappa)$ -nome e seja $p \in Q(\kappa)$ tal que $p \Vdash \dot{A} \subset \check{\kappa}$. Definimos, para cada $\alpha < \kappa$,

$$f_p(\dot{A}, \alpha) := \frac{m(p \cap \llbracket \check{\alpha} \in \dot{A} \rrbracket)}{m(p)} \quad (2.4)$$

onde m é a medida sobre $Q(\kappa)$.

Podemos interpretar $f_p(\dot{A}, \alpha)$ como “o quanto p força α estar em A ”.

Lema 2.3.4. *Seja κ um cardinal mensurável. Seja u um ultrafiltro não principal, κ -completo sobre κ . Sejam $\dot{A}$ um $Q(\kappa)$ -nome e $p \in Q(\kappa)$ tais que $p \Vdash \dot{A} \subset \check{\kappa}$. Então existe um único real r tal que $r = f_p(\dot{A}, \alpha)$ para quase todo α , isto é, $\{\alpha < \kappa : f_p(\dot{A}, \alpha) = r\} \in u$.*

Dem.: Existência: Suponha que não. Então, para todo $r \in \mathbb{R}$, o conjunto $C_r := \{\alpha < \kappa : f_p(\dot{A}, \alpha) \neq r\} \in u$, pois u é ultrafiltro. Como u é κ -completo e $|\mathbb{R}| < \kappa$, $\bigcap_{r \in \mathbb{R}} C_r \in u$. Mas $\bigcap_{r \in \mathbb{R}} C_r = \emptyset$, absurdo.

Unicidade: Suponha que existam r_1 e r_2 distintos como no enunciado. Considere $D_1 := \{\alpha < \kappa : f_p(\dot{A}, \alpha) = r_1\}$ e $D_2 := \{\alpha < \kappa : f_p(\dot{A}, \alpha) = r_2\}$. Então $D_1, D_2 \in u$ mas $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, Absurdo. □

Com tal resultado, podemos nos desfazer da dependência de α na definição de f_p :

Definição 2.3.5. Definimos $\mu_p(\dot{A})$ como o único real que satisfaz o lema anterior.

Vamos agora mostrar algumas propriedades de μ_p .

Lema 2.3.6. *Seja κ um cardinal mensurável. Sejam $\dot{A}$ e $(\dot{A}_\xi)_{\xi < \gamma}$, com $\gamma < \kappa$, $Q(\kappa)$ -nomes. Seja $p \in Q(\kappa)$. Se $p \Vdash \dot{A} = \bigcup_{\xi < \gamma} \dot{A}_\xi$ e $p \Vdash \dot{A}_\xi \cap \dot{A}_\alpha = \emptyset$ se $\xi \neq \alpha$, então $\mu_p(\dot{A}) = \sum_{\xi < \gamma} \mu_p(\dot{A}_\xi)$.*

Dem.: Primeiramente, note que, para cada $\alpha < \kappa$, $f_p(\dot{A}, \alpha) = \sum_{\xi < \gamma} f_p(\dot{A}_\xi, \alpha)$, já que podemos fazer tal soma pois só uma quantidade enumerável de $\dot{A}_\xi$'s pode ser tal que $f_p(\dot{A}_\xi, \alpha) \neq 0$. Para ver isso, note que $f_p(\dot{A}_\xi, \alpha) = 0$ se, e somente se, $m(p \cap \llbracket \alpha \in \dot{A}_\xi \rrbracket) = 0$. Assim, se X é o conjunto dos ξ 's tais que $f_p(\dot{A}_\xi, \alpha) \neq 0$, então $(p \cap \llbracket \check{\alpha} \in \dot{A}_\xi \rrbracket)_{\xi \in X}$ é uma anticadeia e, como $Q(\kappa)$ tem c.c.c., X é enumerável.

Com isso, temos que vale a igualdade já que m é σ -aditiva e $(p \cap \llbracket \check{\alpha} \in \dot{A}_\xi \rrbracket) \cap (p \cap \llbracket \check{\alpha} \in \dot{A}_\eta \rrbracket) = \emptyset$ se $\xi \neq \eta$.

Observe que $\bigcap_{\xi < \gamma} \{\alpha < \kappa : \mu_p(\dot{A}_\xi) = f_p(\dot{A}_\xi, \alpha)\} \in u$, pois u é κ -completo. E como $\bigcap_{\xi < \gamma} \{\alpha < \kappa : \mu_p(\dot{A}_\xi) = f_p(\dot{A}_\xi, \alpha)\} \subset \{\alpha < \kappa : f_p(\dot{A}, \alpha) = \sum_{\xi < \gamma} \mu_p(\dot{A}_\xi)\}$, temos que $\{\alpha < \kappa : f_p(\dot{A}, \alpha) = \sum_{\xi < \gamma} \mu_p(\dot{A}_\xi)\} \in u$. Isto é, $\mu_p(\dot{A}) = \sum_{\xi < \gamma} \mu_p(\dot{A}_\xi)$. □

Os próximos resultados nos dão como tirar a dependência de p em μ_p .

Lema 2.3.7. *Sejam $r \in \mathbb{R}$, $p \in Q(\kappa)$ e $\dot{A}$ um $Q(\kappa)$ -nome. Valem as seguintes propriedades:*

- (i) *Se para todo $q \leq p$, existe $s \leq q$ tal que $\mu_s(\dot{A}) < r$ então $\mu_p(\dot{A}) < r$.*
- (ii) *Se para todo $q \leq p$, existe $s \leq q$ tal que $\mu_s(\dot{A}) \geq r$ então $\mu_p(\dot{A}) \geq r$.*
- (iii) *Se para todo $q \leq p$, existe $s \leq q$ tal que $\mu_s(\dot{A}) \leq r$ então $\mu_p(\dot{A}) \leq r$.*

Dem.: (i) Considere $\{s \leq p : \mu_s(\dot{A}) < r\}$. Por hipótese, tal conjunto é denso abaixo de p . Seja $(p_n)_{n \in \omega}$ uma anticadeia maximal em tal conjunto. Note que, pela maximalidade, $\bigcup_{n \in \omega} p_n = p$. Para cada $n \in \omega$, $\{\alpha < \kappa : f_{p_n}(\dot{A}, \alpha) < r\} \in u$. Então $\bigcap_{n \in \omega} \{\alpha < \kappa : f_{p_n}(\dot{A}, \alpha) < r\} \in u$, pois u é κ -completo. Como $\bigcap_{n \in \omega} \{\alpha < \kappa : f_{p_n}(\dot{A}, \alpha) < r\} \subset \{\alpha < \kappa : f_p(\dot{A}, \alpha) < r\}$, pois se α é tal que $f_{p_n}(\dot{A}, \alpha) < r$ para todo n , então $f_p(\dot{A}, \alpha) < r$, temos que $\{\alpha < \kappa : f_p(\dot{A}, \alpha) < r\} \in u$. Logo, $\mu_p(\dot{A}) < r$.

(ii) Análogo.

(iii) Análogo. □

Lema 2.3.8. *Seja $D = \bigcup_{i=0}^n D_i \subset IP$ denso. Então existe $p \in IP$ e $i \leq n$ tal que D_i é denso abaixo de p .*

Dem.: Suponha que não. Então existem $p_1 \geq \dots \geq p_n$ tais que não existem elementos de D_i abaixo de p_i para todo $i \leq n$. Logo, não existe elemento de D abaixo de p_n . Absurdo, pois D é denso. □

Lema 2.3.9. *Sejam G um $Q(\kappa)$ -genérico e $\dot{A}$ um $Q(\kappa)$ -nome. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $p \in G$ tal que*

$$\sup\{\mu_q(\dot{A}) : q \leq p\} - \inf\{\mu_q(\dot{A}) : q \leq p\} < \varepsilon$$

Dem.: É suficiente mostrar que para todo $\varepsilon > 0$ e para todo $r \in Q(\kappa)$ existe $p \leq r$ tal que $\sup\{\mu_q(\dot{A}) : q \leq p\} - \inf\{\mu_q(\dot{A}) : q \leq p\} < \varepsilon$. Suponha que não. Então existem $\varepsilon > 0$ e $r \in Q(\kappa)$ tal que para todo $p \leq r$, $\sup\{\mu_q(\dot{A}) : q \leq p\} - \inf\{\mu_q(\dot{A}) : q \leq p\} \geq \varepsilon$. Seja $k \in \omega$ tal que em todo intervalo de $[0, 1]$ de tamanho ε existam números da forma $\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}$. Para cada $a \leq p$, dizemos que $a \in D_i$ se

$$\inf\{\mu_b(\dot{A}) : b \leq a\} \leq \frac{i}{2^k} < \frac{i+1}{2^k} \leq \sup\{\mu_b(\dot{A}) : b \leq a\}$$

Como $\bigcup_{i=0}^{2^k-1} D_i$ é denso abaixo de r , temos, pelo lema anterior, que existem $q \leq p$ e D_i tais que D_i é denso abaixo de q . Logo, $\{b \leq q : \mu_b(\dot{A}) \leq \frac{i}{2^k}\}$ e $\{b \leq q : \mu_b(\dot{A}) \geq \frac{i+1}{2^k}\}$ são densos abaixo de q . Por 2.3.7, temos que então $\mu_q(\dot{A}) \leq \frac{i}{2^k}$ e $\mu_q(\dot{A}) \geq \frac{i+1}{2^k}$. Absurdo. □

Corolário 2.3.10. *Existe um único $\alpha \in [0, 1]$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $p \in G$ tal que para todo $q \leq p$ temos $|\alpha - \mu_q(\dot{A})| < \varepsilon$. Chamamos tal α de $\lim_{p \in G} \mu_p(\dot{A})$.*

Dem.: Para cada $p \in G$, considere

$$I_p := [\inf\{\mu_q(\dot{A}) : q \leq p\}, \sup\{\mu_q(\dot{A}) : q \leq p\}]$$

Note que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $p \in G$ tal que diâmetro de I_p é menor que ε pelo lema anterior. E temos que, $I_p \cap I_q \supset I_r$ onde $r \leq p, q$. Assim, existe um único $\alpha \in \bigcap_{p \in G} I_p$. Note que tal α satisfaz o enunciado. $\square$

Finalmente, podemos definir μ :

Definição 2.3.11. Seja $\dot{A}$ um $Q(\kappa)$ -nome e G um $Q(\kappa)$ -genérico. Definimos, em $M[G]$, $\mu(\dot{A}_G) := \lim_{p \in G} \mu_p(\dot{A})$. Chamamos de $\dot{\mu}(\dot{A})$ o nome para a medida associada definida por G .

De uma certa maneira, podemos pensar que o genérico contém elementos que “aproximam” μ . No sentido que, quanto mais forte é uma condição $p \in G$ é, mais o valor de μ_p está perto de μ .

A medida construída satisfaz o que desejamos

Os próximos resultados servem para mostrar que μ é σ -aditiva.

Lema 2.3.12. *Sejam $\dot{A}, \dot{A}_1, \dots, \dot{A}_n$ $Q(\kappa)$ -nomes e $p \in Q(\kappa)$ tais que $p \Vdash \dot{A}_i \cap \dot{A}_j = \emptyset$ sempre que $i \neq j$ e $p \Vdash \bigcup_{i=1}^n \dot{A}_i = \dot{A}$. Então $\dot{\mu}(\dot{A}) = \sum_{i=1}^n \dot{\mu}(\dot{A}_i)$.*

Dem.: Vamos trabalhar em $M[G]$. Seja $\varepsilon > 0$. Para cada i , seja $p_i \in G$ tal que $|\mu(\dot{A}_i) - \mu_q(\dot{A}_i)| < \frac{\varepsilon}{2n}$ para todo $q \leq p_i$. Seja $p \leq p_1, \dots, p_n$. Então, para todo $q \leq p$, temos $|\sum_{i=1}^n \mu(\dot{A}_i) - \sum_{i=1}^n \mu_q(\dot{A}_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pela aditividade de μ_q , **2.3.6**, temos que $|\sum_{i=1}^n \mu(\dot{A}_i) - \mu_q(\dot{A})| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Seja $q \leq p$ tal que $|\mu(\dot{A}) - \mu_q(\dot{A})| < \frac{\varepsilon}{2}$. Então, temos que $|\sum_{i=1}^n \mu(\dot{A}_i) - \mu(\dot{A})| < \varepsilon$. $\square$

Lema 2.3.13. *Sejam $p \in Q(\kappa)$, $\dot{A}$ um $Q(\kappa)$ -nome e $r > 0$ tais que $\{q \leq p : \mu_q(\dot{A}) \geq r\}$ é denso abaixo de p , então $p \Vdash \dot{\mu}(\dot{A}) \geq \check{r}$.*

Dem.: Suponha que não. Então existe G um $Q(\kappa)$ -genérico tal que $p \in G$ e, em $M[G]$, $r - \mu(A) = \varepsilon > 0$. Temos que existe $s \in G$ tal que para todo $t \leq s$, $|\mu_t(\dot{A}) - \dot{\mu}(\dot{A})| < \frac{\varepsilon}{2}$. Seja $q \leq s$ tal que $q \in \{t \leq p : \mu_t(\dot{A}) \geq r\}$, que existe pois tal conjunto é denso abaixo de p e p, s são compatíveis. Então $\varepsilon = r - \dot{\mu}(\dot{A}) \leq \mu_q(\dot{A}) - \dot{\mu}(\dot{A}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Absurdo. $\square$

Lema 2.3.14. *Sejam $\gamma \in \kappa$ e $\dot{A}$, $(\dot{A}_\xi)_{\xi < \gamma}$ $Q(\kappa)$ -nomes. Então, para todo $\varepsilon > 0$ e para todo $p_0 \in Q(\kappa)$ tal que $p_0 \Vdash \bigcup_{\xi < \gamma} \dot{A}_\xi = \dot{A}$ e $p_0 \Vdash \dot{A}_\xi \cap \dot{A}_\alpha = \emptyset$ quando $\xi \neq \alpha$, existem $q \leq p_0$ e $F \subset \gamma$ finito tais que $q \Vdash \sum_{\xi \in F} \dot{\mu}(\dot{A}_\xi) \geq \dot{\mu}(\dot{A}) - \varepsilon$.*

Dem.: Primeiramente, note que existe $p \leq p_0$ tal que

$$p \Vdash |\check{\mu}_p(\dot{A}) - \dot{\mu}(\dot{A})| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.5)$$

pois, dado $p \in G$, trabalhando em $M[G]$, temos que existem $r, s \in G$ tais que $r \Vdash |\check{\mu}_a(\dot{A}) - \dot{\mu}(\dot{A})| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $a \leq s$. Assim, basta tomarmos $p \leq r, s, p_0$.

Considere $F \subset \gamma$ finito tal que $\sum_{\xi \in F} \mu_p(\dot{A}_\xi) \geq \mu_p(\dot{A}) - \frac{\varepsilon}{2}$, que existe por 2.3.6. Temos que existe $q \leq p$ tal que

$$\{s : \mu_s(\bigcup_{\xi \in F} \dot{A}_\xi) \geq \mu_p(\dot{A}) - \frac{\varepsilon}{2}\}$$

é denso abaixo de q , pois, caso contrário, para todo $q \leq p$, existe $s \leq q$ tal que $\mu_s(\bigcup_{\xi \in F} \dot{A}_\xi) < \mu_p(\dot{A}) - \frac{\varepsilon}{2}$ contrariando 2.3.7 dada a escolha de F . Então, por 2.3.13, temos que $q \Vdash \dot{\mu}(\bigcup_{\xi \in F} \dot{A}_\xi) \geq \check{\mu}_p(\dot{A}) - \frac{\varepsilon}{2}$. Então, por (2.5) e por 2.3.12 temos que $q \Vdash \sum_{\xi \in F} \dot{\mu}(\dot{A}_\xi) \geq \dot{\mu}(\dot{A}) - \varepsilon$. $\square$

Teorema 2.3.15. μ é κ -aditiva.

Dem.: Sejam $\dot{A}$ e $(\dot{A}_\xi)_{\xi < \gamma}$, $\gamma < \kappa$, $Q(\kappa)$ -nomes tais, que em $M[G]$, $\dot{A}_\xi \cap \dot{A}_\alpha = \emptyset$ se $\xi \neq \alpha$ e $\bigcup_{\xi < \gamma} \dot{A}_\xi = \dot{A}$. Pelo lema anterior, já temos que, em $M[G]$, $\mu(\dot{A}_G) \leq \sum_{\xi < \gamma} \mu(\dot{A}_{\xi G})$. Para a outra desigualdade, basta notar que $\sum_{\xi \in F} \mu_q(\dot{A}_{\xi G}) \leq \mu_q(\dot{A}_G)$ para todo $q \in G$ e $F \subset \gamma$ finito. $\square$

Podemos agora mostrar o resultado final.

Definição 2.3.16. Seja μ uma medida sobre X . Dizemos que μ é não trivial se $\mu(\{x\}) = 0$ para todo $x \in X$.

Teorema 2.3.17. *Suponha que exista κ um cardinal mensurável. Então é consistente com ZFC que existe uma medida não trivial sobre todos os subconjuntos de $[0, 1]$, σ -aditiva.*

Dem.: Pelos resultados anteriores, basta mostrarmos que $\mu(\{x\}) = 0$ para todo x . Seja $\dot{A}$ um nome para um conjunto unitário na extensão. Então, para todo $p \in Q(\kappa)$ existem $q \leq p$ e $\alpha < \kappa$ tais que $q \Vdash \dot{A} = \{\alpha\}$. Logo $f_q(\dot{A}, \beta) = 0$ para quase todo β (pois $\{\alpha\} \notin u$). Logo, $\mu_q(\dot{A}) = 0$. Assim, $\dot{\mu}(\dot{A}) = 0$.

Assim, mostramos que μ é uma medida não trivial sobre todos os subconjuntos de κ . Como temos que, em $M[G]$, $2^\omega = \kappa$, temos uma medida como desejamos. $\square$

Referências: [17]

2.4 Um modelo em que todo subconjunto de reais é Lebesgue mensurável

Introdução

Apresentamos aqui a construção do modelo de Solovay. Este é um modelo para ZF em que todo subconjunto de $[0, 1]$ é Lebesgue mensurável. Temos CH não vale em tal modelo já que não existe, dentro do modelo, uma bijeção entre 2^ω e um ordinal. Note que tal bijeção daria uma função escolha sobre a reta o que implicaria a existência de um conjunto não Lebesgue mensurável (ver, por exemplo, [28] p. 55).

O seguinte esquema dá um resumo de como esta seção está estruturada. Nele, s é uma seqüência infinita de ordinais, X é um subconjunto do intervalo $[0, 1]$ e G é um genérico sobre uma ordem que definiremos a seguir. Os demais termos serão definidos no decorrer das demonstrações.

$$\left. \begin{array}{l} (A) \text{ se } M_1 \subset M_2 \text{ então } M_2 \models \text{"}\mu(x : x \notin Ra(M_1)) = 0 \\ \quad \Rightarrow \text{ todo Solovay sobre } M_1 \text{ é mensurável"} \\ (B) \text{ } M[G] \models \text{"}X \text{ definível por } s \Rightarrow X \text{ Solovay sobre } M[s]\text{"} \\ (C) \text{ } M[G] \models \text{"}\mu(x : x \notin Ra(M[s])) = 0\text{"} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$(D) \text{ } M[G] \models \text{"Todo } X \text{ definível por algum } s \text{ é mensurável"}$$

Depois que (D) estiver mostrado, restará construir um submodelo $\mathcal{N} \subset M[G]$ para ZF formado apenas por conjuntos definíveis por seqüências de ordinais. Com esta construção, teremos que o resultado valerá em tal modelo.

Nesta seção, estamos seguindo [17]. Todas as demonstrações e definições omitidas aqui, a menos de menção contrária, podem ser encontradas lá.

A demonstração de (A)

Vamos trabalhar com a ordem definida quando apresentamos os reais aleatórios. Com a diferença que, aqui, estaremos apenas interessados no caso enumerável. Isto é, trabalhamos com $Q(\omega)$. Com isso, simplificaremos a notação $b(r, \omega)$, onde r é um ω -código, por $b(r)$. Convém notar também que $Q(\omega) \cup \{0\}$ é uma álgebra de Boole completa.

Vamos agora definir os termos que aparecem em (A).

Definição 2.4.1. Seja M um modelo para ZFC. Denotamos por $Ra(M)$ o conjunto de todos os reais aleatórios sobre M .

Definição 2.4.2. Seja M um modelo para ZFC. Seja S um conjunto de reais. Dizemos que S é Solovay sobre M se existe uma fórmula $\varphi(x)$ com parâmetros em M tal que para todo x real,

$$x \in S \leftrightarrow M[x] \models \varphi(x)$$

Para ilustrar melhor a última definição, vamos a um exemplo:

Exemplo 2.4.3. (i) Seja $A \in M$ um conjunto de reais. Então A é Solovay sobre M , bastando tomar como φ a fórmula $x \in A$.

O próximo resultado mostra que, dentro dos reais aleatórios, podemos trabalhar com borelianos em vez de conjuntos de Solovay. Com tal resultado, obteremos a parte (A) do resultado principal.

Lema 2.4.4. *Seja S um conjunto Solovay sobre M . Então existe A em $B(\omega)$ tal que*

$$S \cap Ra(M) = A \cap Ra(M)$$

Dem.: Considere $\dot{G}$ o nome padrão de um $Q(\omega)$ -genérico G sobre M . Isto é, $\dot{G}$ é tal que, se H é $Q(\omega)$ -genérico sobre M , então $M[H] \models \dot{G}_H = H$. Para ver como contruir tal nome, sugerimos [25], com a única ressalva de que lá, $\dot{G}$ é chamado de Γ .

Seja $\dot{h}$ um nome para o h aleatório definido por $\dot{G}$. Seja $\varphi(x)$ uma fórmula com parâmetros em M tal que $x \in S \leftrightarrow M[x] \models \varphi(x)$ para todo x . Seja $A' \in B(\omega)^M$ tal que $[A']^M = \llbracket \varphi(\dot{h}) \rrbracket$. Seja $A := A'^*$. Claramente, $A \in B(\omega)$.

Vamos mostrar que A satisfaz o enunciado, isto é, vamos mostrar que, dado $x \in Ra(M)$, $x \in A$ se, e somente se, $x \in S$. Como x é aleatório, seja G tal que $M[G] \models x = h$, que existe por 2.2.18. Note que $M[G] = M[x]$ (novamente por 2.2.18). Assim, temos:

$$\begin{aligned} x \in S &\Leftrightarrow M[x] \models \varphi(x) \\ &\Leftrightarrow M[G] \models \varphi(x) \\ &\Leftrightarrow M[G] \models \varphi(h) \\ &\Leftrightarrow \llbracket \varphi(\dot{h}) \rrbracket \in G \\ &\Leftrightarrow [A'] \in G \\ &\stackrel{2.2.18}{\Leftrightarrow} x \in A'^* = A \end{aligned}$$

□

Finalmente, temos (A):

Corolário 2.4.5. *Se o conjunto de todos os reais que não são aleatórios sobre M tem medida nula, então todo conjunto Solovay sobre M é mensurável.*

Dem.: Seja S Solovay sobre M . Pelo lema, temos que existe $A \in B(\omega)$ tal que $S \cap Ra(M) = A \cap Ra(M)$. Portanto, $A \Delta S$ está contido no conjunto dos reais que não são aleatórios sobre M , que tem medida nula. Logo, S é mensurável. $\square$

A demonstração de (B)

Primeiramente, definimos o forcing com o qual trabalhamos.

Teorema 2.4.6 (de Lévy). *Seja λ um cardinal regular e seja $\kappa > \lambda$ um cardinal inacessível. Então existe um forcing $(P, \leq)$ tal que:*

- (i) *todo α tal que $\lambda \leq \alpha < \kappa$ tem cardinalidade λ em $M[G]$.*
- (ii) *todo cardinal $\leq \lambda$ e todo cardinal $\geq \kappa$ permanecem cardinais em $M[G]$.*

Logo, $M[G] \models \kappa = \lambda^+$.

Dem.: Para cada $\alpha < \kappa$, seja P_α o conjunto de todas as funções p_α tais que $\text{dom}(p_\alpha) \subset \lambda$, $|\text{dom}(p_\alpha)| < \lambda$ e $\text{Im}(p_\alpha) \subset \alpha$. Definimos $p_\alpha \leq q_\alpha$ se $p_\alpha \supset q_\alpha$.

Seja $(P, <)$ o λ -produto de P_α , $\alpha < \kappa$. Isto é, cada $p \in P$ é uma função de um subconjunto de $\kappa \times \lambda$ em λ tal que

- (i) $|\text{dom}(p)| < \lambda$
- (ii) $p(\alpha, \xi) < \alpha$ para cada $(\alpha, \xi) \in \text{dom}(p)$

Seja G um P -genérico. Para cada $\alpha < \kappa$, seja G_α a projeção de G sobre P_α . Então, por 1.2.31, G_α é P_α -genérico e $f_\alpha := \bigcup G_\alpha$ é uma função de λ sobrejetora em α . Logo, $M[G] \models |\alpha| \leq \lambda$ para todo $\alpha < \kappa$.

Temos que P é λ -fechado e, portanto, preserva cofinalidades e cardinalidades $\leq \lambda$ (por 1.2.29). Em particular, λ é um cardinal em $M[G]$.

Temos também que P é κ -c.c. (pelo resultado que diz que se κ é inacessível, $\lambda < \kappa$ regular, $|P_i| < \kappa$ para todo i então o λ -produto dos P_i tem κ -c.c.). Assim, todos os cardinais $\geq \kappa$ permanecem cardinais em $M[G]$ (por 1.2.25). $\square$

Definição 2.4.7. O forcing do último teorema é chamado de **colapso de Lévy** de κ para λ^+ e o denotamos por $Col(\kappa, \lambda^+)$.

Seja M um modelo enumerável transitivo para ZFC e seja κ um cardinal inacessível em M . Considere L o colapso de Lévy de κ para ω_1 ($Col(\kappa, \omega_1)$), isto é, L é o forcing que colapsa todo $\alpha < \kappa$ para ω . Então, cada $p \in L$ é uma função de um subconjunto de $\kappa \times \omega$, com $\text{dom}(p)$ finito, $p(\alpha, n) \subset \alpha$ para todo $(\alpha, n) \in \text{dom}(p)$ e $M[G] \models \kappa = \omega_1$. Denotaremos por $\mathcal{L}$ o complemento de L . No que se segue, quando dissermos colapso de Lévy, estaremos nos referindo à ordem L .

No que segue, quando falarmos de forcing, a menos de menção contrária, estaremos nos referindo a $\mathcal{L}$. Vamos agora a algumas propriedades de $\mathcal{L}$ necessárias para mostrarmos (B). Antes, convém notar que, como as condições do Colapso de Lévy são finitas, a definição de L é absoluta para qualquer modelo.

Teorema 2.4.8 (de fatorização). *Sejam G um $\mathcal{L}$ -genérico e $X \in M[G]$ um conjunto enumerável (em $M[G]$) de ordinais. Então existe um H $\mathcal{L}$ -genérico sobre $M[X]$ tal que $M[X][H] = M[G]$.*

Lema 2.4.9. *Seja B uma álgebra de Boole completa em M . Seja π um automorfismo de B . Então existe π' um automorfismo induzido de M^B tal que*

(i) $\pi'(\check{x}) = \check{x}$ para todo $x \in M$.

(ii) Se φ é uma fórmula e $x_1, \dots, x_n \in M^B$, então $\pi(\llbracket \varphi(x_1, \dots, x_n) \rrbracket) = \llbracket \varphi(\pi'(x_1), \dots, \pi'(x_n)) \rrbracket$.

Teorema 2.4.10 (da homogeneidade). *Dadas A, A' subálgebras isomorfas e completas de $\mathcal{L}$, tais que $|A| = |A'| < |\mathcal{L}|$, e π_0 é um isomorfismo entre A e A' , então existe um automorfismo π de $\mathcal{L}$ tal que $\pi \restriction A = \pi_0$.*

No próximo resultado, ao falarmos de 0 e 1 estamos nos referindo, respectivamente, ao menor e ao maior elemento de uma álgebra de Boole.

Corolário 2.4.11. *Se $u, v \in \mathcal{L}$ são tais que $u, v \notin \{0, 1\}$, então existe um automorfismo π de $\mathcal{L}$ tal que $\pi(u) = v$. Assim, dada uma fórmula φ e $x_1, \dots, x_n \in M$, temos que $\llbracket \varphi(\check{x}_1, \dots, \check{x}_n) \rrbracket \in \{0, 1\}$.*

Dem.: A primeira parte segue imediatamente do resultado anterior. Para a segunda, suponha que não. Então $\llbracket \varphi(\check{x}_1, \dots, \check{x}_n) \rrbracket, -\llbracket \varphi(\check{x}_1, \dots, \check{x}_n) \rrbracket \neq 0, 1$. Logo, pela primeira parte, existe π automorfismo de $\mathcal{L}$ tal que $\pi(\llbracket \varphi(\check{x}_1, \dots, \check{x}_n) \rrbracket) = -\llbracket \varphi(\check{x}_1, \dots, \check{x}_n) \rrbracket$. Usando o automorfismo induzido π' de 2.4.9, temos:

$$\begin{aligned} \llbracket \varphi(\check{x}_1, \dots, \check{x}_n) \rrbracket &\stackrel{2.4.9(i)}{=} \llbracket \varphi(\pi'(\check{x}_1), \dots, \pi'(\check{x}_n)) \rrbracket \\ &\stackrel{2.4.9(ii)}{=} \pi(\llbracket \varphi(\check{x}_1, \dots, \check{x}_n) \rrbracket) \\ &= -\llbracket \varphi(\check{x}_1, \dots, \check{x}_n) \rrbracket \end{aligned}$$

Absurdo. □

Definição 2.4.12. Seja s uma seqüência infinita de ordinais em $M[G]$. Dizemos que $X \in M[G]$ é um conjunto **definível** em $M[G]$ por s se existe uma fórmula φ tal que

$$X = \{x \in M[G] : M[G] \models \varphi(x, s)\}$$

Lema 2.4.13. Dada φ uma fórmula, existe $\tilde{\varphi}$ tal que para todos $x, y \in M[G]$ seqüências enumeráveis de ordinais, temos:

$$M[G] \models \varphi(x, y) \text{ se, e somente se, } M[x, y] \models \tilde{\varphi}(x, y)$$

Dem.: Primeiramente, vamos mostrar que, dada uma fórmula φ , existe uma fórmula $\tilde{\varphi}$ tal que, para toda seqüência s de ordinais em $M[G]$, vale

$$M[G] \models \varphi(s) \text{ se, e somente se, } M[s] \models \tilde{\varphi}(s)$$

Como as condições do colapso de Lévy são finitas, a definição de L é absoluta para qualquer modelo. Dado um modelo N , denotaremos por $\mathcal{L}^N$ o completamento de L em N . Dada uma fórmula φ e dado σ um $\mathcal{L}^N$ -nome, denotaremos por $\llbracket \varphi(\sigma) \rrbracket^N$ o valor booleano de $\varphi(\sigma)$ em $\mathcal{L}^N$. Tomaremos $\tilde{\varphi}(s)$ como a seguinte fórmula:

$$\llbracket \varphi(\dot{s}) \rrbracket^{M[s]} = 1$$

Vamos mostrar que, dada s uma seqüência enumerável de ordinais em $M[G]$, temos que $M[G] \models \varphi(s)$ se, e somente se $M[s] \models \tilde{\varphi}(s)$. Seja s uma seqüência enumerável de ordinais em $M[G]$, pelo lema de fatorização 2.4.8, temos que existe H um $\mathcal{L}$ -genérico sobre $M[s]$ tal que $M[G] = M[s][H]$. Trabalhando em $M[s]$, por 2.4.11 temos que $\llbracket \varphi(\dot{s}) \rrbracket^{M[s]}$ é igual a 1 ou 0. Como H é $M[s]$ -genérico, temos que $\varphi(s)$ é verdadeira em $M[G] = M[s][H]$ se, e somente se, $\llbracket \varphi(\dot{s}) \rrbracket^{M[s]} = 1$. Logo, $\varphi(s)$ é verdadeira em $M[G]$ se, e somente se, $\tilde{\varphi}(s)$, for verdadeira em $M[s]$.

Claramente, a argumento acima pode ser repetido para uma fórmula com duas variáveis e, portanto, temos os resultado. □

Finalmente, temos (B) :

Corolário 2.4.14. *Seja $X \in M[G]$ um conjunto de reais definível em $M[G]$ por uma sequência s de ordinais. Então X (em $M[G]$) é Solovay sobre $M[s]$.*

Dem.: Seja $X \in M[G]$ um conjunto de reais definível em $M[G]$ a partir de uma sequência s de ordinais. Então, existe uma fórmula φ tal que $x \in X$ se, e somente se, $M[G] \models \varphi(x, s)$ para todo $x \in M[G]$ real. Como todo real pode ser considerado como uma sequência enumerável de ordinais, temos que, pelo lema, existe $\tilde{\varphi}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^{M[G]}$, $x \in X$ se, e somente se $M[G] \models \varphi(x, s)$ se, e somente se, $M[s, x] \models \tilde{\varphi}(x, s)$. Por sua vez, isso vale se, e somente se, $M[s][x] \models \tilde{\varphi}(x, s)$. Logo, X é Solovay sobre $M[s]$. $\square$

A demonstração de (C)

Vamos agora à demonstração de (C) . Antes, mostremos mais algumas propriedades sobre $M[G]$:

Lema 2.4.15. *Seja G um L -genérico. Seja $f \in M[G]$ tal que $M[G] \models "f \text{ é função}"$, $\text{dom} f = \omega$, $\text{Im} f \subset \text{Ord}$. Então existe $\xi < \kappa$ tal que $M[f] \subset M[G_\xi]$ onde G_ξ é um P -genérico com $|P|^M \leq \xi$ e $L = P \times P'$.*

Dem.: Seja $\dot{f}$ um L -nome para f tal que $M[G] \models \dot{f}_G = f$. Trabalhando em M , considere, para cada $n \in \omega$,

$$D_n := \{ \llbracket \dot{f}(\check{n}) = \check{y} \rrbracket : \exists p \in \dot{P} \text{ e } \exists y \ p \Vdash \dot{f}(\check{n}) = \check{y} \}$$

Note que D_n é anticadeia em L e, portanto, como L é κ -c.c., $|D_n| < \kappa$. Considere $D := \bigcup_{n \in \omega} D_n$. Note que $|D| < \kappa$. E observe também que, por cada D_n ser anticadeia, temos:

$$\forall n \in \omega \ \exists! p \in G \cap D_n. \quad (2.6)$$

Seja $\xi' = \sup\{\alpha : \exists \beta (\alpha, \beta) \in D\}$. Note que, como $|D| < \kappa$ e κ é regular, $\xi' < \kappa$. Seja ξ tal que $\xi' < \xi < \kappa$. Seja $P := \{p \in L : \text{dom} p \subset \xi \times \omega\}$. Note que $|P| \leq \xi$ e que $L = P \times P'$ (quem exatamente é o P' não é muito difícil de ser mostrado, mas para o que faremos aqui não é importante). Definimos $G_\xi := \{p \in P : \exists q \in P' (p, q) \in G\}$. Por 1.2.31 temos que G_ξ é P -genérico. Assim, só nos resta mostrar que $f \in M[G_\xi]$.

Trabalhando em $M[G_\xi]$, considere, para cada $n \in \omega$, $g(n) := y$ onde y é tal que existe $p \in G_\xi$ tal que $p \Vdash \dot{f}(\check{n}) = \check{y}$ ($(p, 1) = \llbracket \dot{f}(\check{n}) = \check{y} \rrbracket$ com relação a L). Note que $g(n)$ está bem definida ¹. E note que, em $M[G]$, $g = f$, pois, por (2.6), para cada $n \in \omega$, existe $p \in D_n \cap G$ e, portanto $g(n) = y$, onde $p \Vdash \dot{f}(\check{n}) = \check{y}$. Logo, $M[f] \subset M[G_\xi]$. $\square$

¹suponha que existam y, w tais que $y \neq w$ e existam $p, q \in G_\xi$ tais que $p \Vdash \dot{f}(\check{n}) = \check{y}$ e $q \Vdash \dot{f}(\check{n}) = \check{w}$. Absurdo, pois $p, q \in G_\xi$ e, portanto, são compatíveis.

Lema 2.4.16. *Seja $s \in M[G]$ uma seqüência infinita de ordinais. Então, em $M[s]$, κ é inacessível.*

Dem.: Como $\mathcal{L}$ e L geram as mesmas extensões, podemos considerar o forcing com respeito a L . Pelo resultado anterior, existe $\xi < \kappa$ tal que $s \in M[G_\xi]$, onde G_ξ é P -genérico e $|P|^M \leq \xi$. Suponha que κ não é inacessível em $M[s]$. Então existe β ordinal tal que $\beta < \kappa$ e $(2^\beta = \kappa)^{M[s]}$ e, portanto, $(2^\beta \geq \kappa)^{M[G_\xi]}$. Trabalhando em M , note que P tem ξ^+ -c.c.. Seja $\theta := \xi^{\xi^+}$. Note que $\theta < \kappa$ pois κ é inacessível em M . Então, em $M[G_\xi]$, por 1.2.26, temos que $|2^\beta| \leq |\theta|$. Mas, por 1.2.25, temos que $|\theta| = \theta < \kappa$, pois $\theta \geq \xi^+$. Absurdo. $\square$

Finalmente, podemos mostrar (C):

Corolário 2.4.17. *Sejam G um $\mathcal{L}$ -genérico e $s \in M[G]$ uma seqüência infinita de ordinais. O conjunto de todos os reais (de $M[G]$) que não são aleatórios sobre $M[s]$ tem medida nula.*

Dem.: Vamos trabalhar em $M[G]$. Temos que $\kappa = \omega_1$. Pelo lema, temos que, em $M[s]$, $|2^\omega| = \alpha < \kappa$. Pelas propriedades do colapso de Lévy, em $M[G]$, $|\alpha| = \omega$. Assim, $M[G] \models |\wp(\omega) \cap M[s]| = \omega$. Isto é, em $M[G]$, existe apenas uma quantidade enumerável de subconjuntos de ω que estão em $M[s]$. Assim, em $M[G]$, existe apenas uma quantidade enumerável de códigos que estão em $M[s]$. Sejam $(A_n)_{n \in \omega}$ os elementos de $B(\omega)^{M[s]}$ dados por esses códigos. Temos que o conjunto dos reais não aleatórios é igual a $\bigcup \{[A_n^*] : n \in \omega \text{ e } A_n \text{ tem medida nula}\}$. Como cada $[A_n^*]$ tem medida nula, temos o resultado. $\square$

O resultado final

Começamos por (D):

Corolário 2.4.18. *Em $M[G]$, todo subconjunto dos reais definível por uma seqüência de ordinais é Lebesgue mensurável.*

Dem.: Seja X um subconjunto dos reais definível por uma seqüência s de ordinais em $M[G]$. Por 2.4.14 temos que X é Solovay sobre $M[s]$. Por 2.4.17 temos que os reais não aleatórios sobre $M[s]$ tem medida nula. Assim, aplicando 2.4.5 para $M[s]$ temos que X é mensurável. $\square$

Agora, vamos construir o modelo em que o resultado procurado vale.

Definição 2.4.19. Seja A uma classe. Definimos a classe dos conjuntos definíveis por ordinais sobre A , $OD(A)$, como a classe dos x tais que existe uma fórmula φ tal que

$$x = \{u : \varphi(u, \alpha_1, \dots, \alpha_n, s)\}$$

onde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são ordinais e s é uma seqüência finita de elementos de A . E definimos $HOD(A)$ como a classe

$$\{x : TC(\{x\}) \subset OD(A)\}$$

Definição 2.4.20. Em $M[G]$, seja S a classe de todas as seqüências infinitas de ordinais, isto é, $(S = Ord^\omega)^{M[G]}$. Definimos $\mathcal{N} := HOD(S)$.

O próximo resultado assegura que, de fato, $\mathcal{N}$ é modelo:

Teorema 2.4.21. $\mathcal{N}$ é um modelo para ZF.

Definição 2.4.22. Chamamos de **princípio das escolhas dependentes**, DC, o seguinte: Se E é uma relação binária num conjunto não vazio A tal que, para todo $a \in A$, existe $b \in A$, tal que $b E a$, então existe uma seqüência $(a_n)_{n \in \omega}$ em A tal que $a_{n+1} E a_n$ para todo $n \in \omega$.

Lema 2.4.23. (i) Se $f \in M[G]$ é uma função de ω com valores em $\mathcal{N}$, então $f \in \mathcal{N}$.

(ii) $\mathcal{N}$ satisfaz DC.

Dem.: (i) Vamos mostrar que, se f é uma função de ω com valores em $OD(S)$, então $f \in OD(S)$. Primeiramente, observe que $OD(S) = \bigcup \{OD(s) : s \in S\}$ ¹. Assim, existe uma função F de $Ord \times S$ tal que, para cada $s \in S$, a função $F_s(\alpha) := F(\alpha, s)$ de Ord em $OD(s)$ é sobrejetora. Seja $f : \omega \longrightarrow OD(S)$. Para cada $n \in \omega$, seja α_n e s_n tais que $f(n) = F(\alpha_n, s_n)$. Claramente, f é definível a partir de $(\alpha_n)_{n \in \omega}$ e $(s_n)_{n \in \omega}$. Mas é possível conseguir uma seqüência u que define tanto $(\alpha_n)_{n \in \omega}$ como $(s_n)_{n \in \omega}$. Assim, $f \in OD(u)$ e, portanto, $f \in OD(S)$. Logo, se $f \in M[G]$ é uma função de ω em $\mathcal{N}$, temos que $f \in \mathcal{N}$ pois $\omega \subset \mathcal{N}$.

(ii) Em $\mathcal{N}$, seja uma relação E definida sobre um conjunto não vazio A , tal que para todo $a \in A$, existe $b \in A$ tal que $b E a$. Como em $M[G]$ vale o axioma da escolha, temos que existe uma seqüência $(a_n)_{n \in \omega}$ tal que $a_{n+1} E a_n$ para todo n . Pela parte (i), temos que tal seqüência está em $\mathcal{N}$ e, portanto, vale DC em $\mathcal{N}$. □

¹pois se um conjunto é definível por várias (finitas) seqüências de ordinais, podemos colapsar tais seqüências para uma só.

O próximo resultado é necessário para concluirmos o que desejamos:

Proposição 2.4.24. *“ X tem medida nula” é absoluto para modelos transitivos de $ZF + DC$.*

Lema 2.4.25. *Em $\mathcal{N}$, todo subconjunto dos reais é Lebesgue mensurável.*

Dem.: Note que $\mathcal{N}$ tem os mesmos reais que $M[G]$, pois cada real pode ser escrito como uma seqüência de ordinais. Temos também que $\mathcal{N}$ e $M[G]$ têm os mesmos códigos. E como $b(r)^{\mathcal{N}} = b(r)^{M[G]} \cap \mathcal{N} = b(r)^{M[G]}$ para todo r código em $M[G]$, temos que $M[G]$ e $\mathcal{N}$ têm os mesmos borelianos.

Seja $X \in \mathcal{N}$ um conjunto de reais. Então X é definível em $M[G]$ por uma seqüência de ordinais. Logo, por 2.4.18, temos que $M[G] \models “X \text{ é mensurável}”$. Logo, em $M[G]$, existem $A, H \in B(\omega)$ tais que $X \Delta A \subset H$ e H tem medida nula. Por 2.4.24, temos que, em $\mathcal{N}$, H tem medida nula. E, portanto, X é mensurável em $\mathcal{N}$. $\square$

Assim, temos o seguinte:

Teorema 2.4.26. *Se existe um cardinal inacessível, é consistente que existe um modelo para $ZF + DC$ onde todo subconjunto de $[0, 1]$ é Lebesgue mensurável.*

Referências: [32, 17]

Capítulo 3

Algumas equivalências de CH

Introdução

Neste capítulo, apresentamos alguns enunciados, em diversas áreas da matemática, que são equivalentes a CH. Nosso objetivo aqui é mostrar que CH não é uma afirmação com influência apenas em áreas de fundamentos da matemática.

Apresentamos resultados, por exemplo, em funções analíticas, funções de Peano, topologia geral etc.

3.1 CH e funções analíticas

Introdução

Apresentamos aqui um resultado, devido a Erdős (em [12]), sobre um teste para se saber se uma dada família de funções analíticas é enumerável. Mostraremos que tal teste é equivalente a $\neg$ CH, isto é, o teste funciona se, e somente se, não vale a Hipótese do Contínuo.

Começemos com alguns resultados da teoria de funções analíticas:

Teorema 3.1.1. *Os zeros de uma função analítica não nula são isolados.*

Dem.: Ver, por exemplo, [5] p. 142. □

Lema 3.1.2. *Sejam f, g funções analíticas em U . Se $\{z \in U : f(z) = g(z)\}$ tem um ponto de acumulação em $\mathbb{C}$, então $f = g$.*

Dem.: Considere $h := f - g$. Note que h é analítica em U e que os zeros de h admitem ponto de acumulação. Então, por 3.1.1 h é identicamente nula. Logo, $f = g$. □

Enunciemos agora a propriedade de nosso teste:

Definição 3.1.3. Seja $\mathcal{F} := \{f_\alpha : \alpha < \kappa\}$ uma família de funções analíticas. Dizemos que $\mathcal{F}$ tem a propriedade P_0 se, para cada $z \in \mathbb{C}$, $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ é enumerável.

Lema 3.1.4. Se $2^\omega > \omega_1$, então, toda família $\mathcal{F}$ com a propriedade P_0 é enumerável.

Dem.: Suponha $|\mathcal{F}| > \omega$. Seja $(f_\alpha)_{\alpha < \omega_1} = \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Vamos mostrar que existe z_0 tal que $|\{f(z_0) : f \in \mathcal{G}\}| = \omega_1$. Para cada $(\alpha, \beta) \in \omega_1 \times \omega_1$, considere $S(\alpha, \beta)$ como o conjunto $\{z : f_\alpha(z) = f_\beta(z)\}$. Note que $|S(\alpha, \beta)| \leq \omega$ pois, se $|S(\alpha, \beta)| > \omega$, então $\{z : f_\alpha(z) = f_\beta(z)\}$ tem um ponto de acumulação (pois é não enumerável) e, portanto, por 3.1.2, temos que $f = g$. Seja $S := \bigcup_{\alpha, \beta < \omega_1} S(\alpha, \beta)$. Temos que $|S| \leq \omega_1$. Como $|\mathbb{C}| = 2^\omega > \omega_1$, existe $z_0 \in \mathbb{C} \setminus S$. Logo, $f_\alpha(z_0) \neq f_\beta(z_0)$ para todo $\alpha, \beta < \omega_1$ e, portanto, $|\{f(z_0) : f \in \mathcal{G}\}| = \omega_1$. $\square$

Lema 3.1.5. Se $2^\omega = \omega_1$, então existe uma família $\mathcal{F}$ com a propriedade P_0 tal que $|\mathcal{F}| = \omega_1$.

Dem.: Seja $S \subset \mathbb{C}$ um denso enumerável e seja $(z_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ uma boa ordenação de $\mathbb{C}$. Vamos construir, por indução sobre α , uma família $(f_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ de funções inteiras¹ tal que $f_\beta(z_\alpha) \in S$, para todo $\alpha < \beta$. Suponha que já temos f_β para todo $\beta < \gamma$ e vamos definir f_γ . Note que as famílias $(f_\beta)_{\beta < \gamma}$ e $(z_\beta)_{\beta < \gamma}$ são enumeráveis. Assim, sejam $(g_n)_{n \in \omega}$ e $(w_n)_{n \in \omega}$ reenumerações de tais famílias. Vamos construir f_γ com a seguinte propriedade para cada $n \in \omega$:

$$f_\gamma(w_n) \in S \text{ e } f_\gamma(w_n) \neq g_n(w_n) \quad (3.1)$$

Para definir f_γ , escrevemos:

$$f_\gamma(z) := \varepsilon_0 + \sum_{n \in \omega} \varepsilon_n \prod_{i=1}^n (z - w_i)$$

Note que, apenas baseados nos $(w_i)_{i \geq n}$ podemos escolher os $(\varepsilon_i)_{i \geq n}$ de forma que a série acima convirja no plano todo. E observe também que o valor de $f_\gamma(w_n)$ não depende dos valores de ε_i e w_i para $i \geq n$. Com isso, e pelo fato de que S é denso, podemos tomar os $(\varepsilon_n)_{n \in \omega}$ de forma que nossas condições sejam satisfeitas em (3.1).

Note que as $(f_\gamma)_{\gamma < \omega_1}$ acima definidas são todas distintas. Vamos agora mostrar que elas satisfazem o enunciado. Para isso, basta mostrar que elas tem P_0 . De fato, para cada $z \in \mathbb{C}$, digamos $z = z_\alpha$ na nossa enumeração, temos que, se $\alpha < \beta$, então $f_\beta(z_\alpha) \in S$ que é enumerável e, como só existem enumeráveis $\beta' \leq \alpha$, só existem no máximo enumeráveis outros valores $f_{\beta'}(\alpha)$. $\square$

¹analíticas em todo o plano

Com os dois últimos lemas, é imediato o seguinte resultado:

Teorema 3.1.6 (Erdős). $\neg CH$ é equivalente a

“Toda família $\mathcal{F}$ de funções analíticas que tenha a propriedade P_0 é enumerável”.

Referências: [12]

3.2 CH e funções de Peano

Introdução

Apresentamos aqui um resultado, devido a Morayne (em [26]), que diz que a existência de uma função de Peano $F = (f_1, f_2)$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$ existe $f'_1(x)$ ou $f'_2(x)$ é equivalente a CH.

Antes de mostrarmos o resultado, comecemos com uma outra equivalência de CH:

Definição 3.2.1. Dado $S \subset \mathbb{R}^2$, definimos:

$$S_u := \{y \in \mathbb{R} : (u, y) \in S\} \text{ e } S^v := \{x \in \mathbb{R} : (x, v) \in S\}$$

Teorema 3.2.2 (de Sierpiński). *A Hipótese do Contínuo é equivalente a afirmação que “existem $A, B \subset \mathbb{R}^2$ tais que $A \cup B = \mathbb{R}^2$ e A_u, B^v são enumeráveis para todo $u, v \in \mathbb{R}$ ”.*

Dem.: $\Rightarrow$) Sejam $(t_\alpha)_{\alpha < \omega_1} = \mathbb{R}$. Seja $A := \{(t_\alpha, t_\beta) : \beta \leq \alpha\}$ e $B := \mathbb{R} \setminus A$, isto é, $B = \{(t_\alpha, t_\beta) : \alpha < \beta\}$. Então $A_{t_\alpha} = \{t_\beta : \beta \leq \alpha\}$ e $B^{t_\beta} = \{t_\alpha : \alpha < \beta\}$, para $\alpha, \beta < \omega_1$ e, portanto, são enumeráveis.

$\Leftarrow$) Suponha que existam A, B como no enunciado. Seja $(x_\alpha)_{\alpha < \omega_1} \subset \mathbb{R}$. Considere $N := \{y \in \mathbb{R} : (x_\alpha, y) \in A \text{ e } \alpha < \omega_1\}$. Note que, pela propriedade de A , $|N| = \omega_1 \cdot \omega = \omega_1$. Vamos mostrar que $N = \mathbb{R}$.

Seja $y \in \mathbb{R}$. Como B^y é enumerável e $A \cup B = \mathbb{R}^2$, o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : (x, y) \notin A\}$ é enumerável pois está contido em B^y . Logo, existe x_α tal que $(x_\alpha, y) \in A$ e, portanto, $y \in N$. □

Apresentemos agora alguns resultados preliminares sobre a medida de Lebesgue:

Proposição 3.2.3. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Seja $D := \{x \in \mathbb{R} : f \text{ é derivável em } x\}$. Então o conjunto $\{y \in f(D) : |f^{-1}(\{y\}) \cap D| > \omega\}$ tem medida de Lebesgue nula.*

Dem.: Ver, por exemplo, [29] p. 234 e p. 279. □

Para o próximo resultado, usaremos o seguinte lema:

Lema 3.2.4. *Seja $A \subset \mathbb{R}$ com medida de Lebesgue positiva. Então existem $F, G \subset A$ fechados disjuntos de medida positiva.*

Dem.: Suponha que não. Note que existe $i \in \omega$ tal que $[i, i+1[\cap A$ tem medida positiva. Por hipótese, ou $[i, i+\frac{1}{2}[\cap A$ tem medida nula, ou $[i+\frac{1}{2}, i+1[\cap A$ tem medida nula. Suponha que $[i+\frac{1}{2}, i+1[$ tem medida nula. Então $[i, i+1[\cap A$ e $[i, i+\frac{1}{2}[\cap A$ têm a mesma medida. Repetindo a construção, obtemos $(j_n)_{n \in \omega} \subset \mathbb{Q}$ tais que $[j_{n+1}, j_{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}}[\subset [j_n, j_n + \frac{1}{2^n}[$ e $[j_n, j_n + \frac{1}{2^n}[\cap A$ tem a mesma medida que $[i, i+1[\cap A$. Assim, temos que $\bigcap_{n \in \omega} [j_n, j_n + \frac{1}{2^n}[\cap A$ tem medida positiva. Absurdo, pois $\bigcap_{n \in \omega} [j_n, j_n + \frac{1}{2^n}[\cap A$ tem, no máximo um ponto. Assim, temos que existem $j \in \mathbb{Q}$ e $n \in \omega$ tais que $[j, j + \frac{1}{2^{n+1}}[\cap A$ e $[j + \frac{1}{2^{n+1}}, j + \frac{1}{2^n}[\cap A$ têm medida positiva. Assim, pela regularidade da medida de Lebesgue, temos os dois fechados desejados. $\square$

Proposição 3.2.5. *Se $K \subset \mathbb{R}$ é um compacto de medida de Lebesgue positiva, então $|K| = 2^\omega$.*

Dem.: Definimos, por indução, $f : 2^{<\omega} \longrightarrow \wp(K)$ tal que, para quaisquer $s, t \in 2^{<\omega}$, temos

- $f(s)$ é fechado de medida positiva.
- $f(s \smallfrown 0) \cap f(s \smallfrown 1) = \emptyset$.
- $f(s) \subset f(t)$ se $s \supset t$.

Note que podemos fazer tal indução por 3.2.4. Considere $F : 2^\omega \longrightarrow K$ dada por

$$F(a) := \bigcap_{n \in \omega} f(a|n)$$

Como K é compacto e $f(a|n)$ são fechados com p.i.f., F está bem definida e temos o resultado, pois $F(a) \neq F(b)$ se $a \neq b$. $\square$

Finalmente, podemos apresentar o resultado principal.

Definição 3.2.6. Chamamos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de uma **função de Peano** se $f[\mathbb{R}] = \mathbb{R}^2$.

Teorema 3.2.7 (Morayne). *A Hipótese do Contínuo é equivalente à existência de uma função de Peano $F = (f_1, f_2)$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $f'_1(x)$ ou existe $f'_2(x)$.*

Dem.: Suponha CH. Sejam A e B dados por 3.2.2. Considere $\varphi(x) = x \sin x$ para $x \in \mathbb{R}$. Note que φ é sobrejetora em $\mathbb{R}$ e que é diferenciável para todo $x \in \mathbb{R}$. Dados $u, v \in \mathbb{R}$, definimos as seguintes enumerações:

$$(t_n^u)_{n \in \omega} = \varphi^{-1}(\{u\}) \cap]-\infty, -1] \quad (s_n^v)_{n \in \omega} = \varphi^{-1}(\{v\}) \cap [1, \infty[$$

$$(y_n)_{n \in \omega} = A_u \quad (x_n)_{n \in \omega} = B^v$$

Definimos f_1 e f_2 tais que:

$$f_1(t) := \begin{cases} \varphi(t) & \text{se } t \leq 1 \\ x_n^v & \text{onde } n \text{ e } v \text{ são tais que } t = s_n^v, \text{ se } t > 1 \end{cases}$$

$$f_2(t) := \begin{cases} \varphi(t) & \text{se } t > -1 \\ y_n^u & \text{onde } n \text{ e } u \text{ são tais que } t = t_n^u, \text{ se } t \leq -1 \end{cases}$$

Vamos mostrar que $F = (f_1, f_2)$ satisfaz o que queremos. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Queremos mostrar que existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $F(t) = (a, b)$. Suponha $(a, b) \in A$. Então, existe $n \in \omega$ tal que $b = y_n^a$ (pois $b \in A_a$). Seja $t = t_n^a$. Note que $t \leq -1$ e que $\varphi(t) = a$. Assim, $f(t) = (a, b)$. Se $(a, b) \notin A$, temos que $(a, b) \in B$ e podemos encontrar t analogamente.

Agora suponha que existe F como no enunciado. Para cada $i = 1, 2$, considere

$$D_i := \{t \in \mathbb{R} : f'_i(t) \text{ existe}\}$$

Note que $\mathbb{R} = D_1 \cup D_2$. Por 3.2.3, temos que, para $i = 1, 2$

$$N_i := \{y \in f_i(D_i) : |f_i^{-1}(\{y\}) \cap D_i| > \omega\}$$

tem medida de Lebesgue nula. Logo, $M_i := \mathbb{R} \setminus N_i$ tem cardinalidade 2^ω para $i = 1, 2$. De fato, como N_i tem medida nula, existe V aberto de medida $\frac{1}{2}$ tal que $N_i \subset V$. Então, $\mathbb{R} \setminus V \subset M_i$ é um conjunto fechado de medida positiva. Assim, existe $n \in \omega$ tal que $(\mathbb{R} \setminus V) \cap [-n, n]$ tem medida positiva. Mas tal conjunto é compacto e, portanto, tem cardinalidade 2^ω por 3.2.5.

Considere $S_i := F(D_i) \cap M_1 \times M_2$, para $i = 1, 2$. Note que $S_1 \cup S_2 = M_1 \times M_2$. Temos que $(S_1)_u$ é enumerável, pois, dado $u \in M_1$

$$\begin{aligned} (S_1)_u &\subset \{f_2(y) : f_1(y) = u \text{ e } y \in D_1\} \\ &\subset f_2(\{f_1^{-1}(\{u\}) \cap D_1\}) \end{aligned}$$

que é enumerável pois $u \in \mathbb{R} \setminus N_1$. $(S_2)^v$ é enumerável por argumento análogo.

Assim, temos que vale a afirmação de 3.2.2, pois, considere g_1 e g_2 bijeções de M_1 e M_2 respectivamente, em $\mathbb{R}$. Então $g := (g_1, g_2)$ é uma bijeção de $M_1 \times M_2$ em $\mathbb{R}^2$. Seja $A_i = g_i(S_i)$ para $i = 1, 2$. Vamos mostrar que $(A_1)_u$ e $(A_2)^v$ são enumeráveis para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}$. Temos

$$\begin{aligned} (A_1)_u &= \{y \in \mathbb{R} : (u, y) \in A_1\} = \{y \in \mathbb{R} : (g_1^{-1}(u), g_2^{-1}(y)) \in S_1\} \\ &= \{g_2(y) \in \mathbb{R} : (g_1^{-1}(u), y) \in S_1\} \\ &= g_2((S_1)_{g_1^{-1}(u)}). \end{aligned}$$

E, como $(S_1)_{g_1^{-1}(u)}$ é enumerável, temos o resultado. O argumento para $(A_2)^v$ é análogo. $\square$

Referências: [26]

3.3 CH e submodelos elementares

Introdução

Apresentamos aqui um resultado, devido a Junqueira, da teoria de submodelos elementares que diz CH é equivalente a afirmação que todo submodelo ω -recoberto de $H(\lambda)$ é enumeravelmente fechado.

Começemos com a definição de enumeravelmente fechado:

Definição 3.3.1. Um submodelo elementar M é dito **enumeravelmente fechado** se para todo $A \subset M$ tal que $|A| = \omega$, temos que $A \in M$.

Um submodelo enumeravelmente fechado tem boas propriedades mas tem desvantagem de não poder ser “pequeno”, isto é, todo submodelo enumeravelmente fechado tem cardinalidade, no mínimo, igual a do contínuo.

Com isso em mente, fazemos uma exigência mais fraca que enumeravelmente fechado, para que o submodelo possa ser “pequeno” e ainda ter algumas das vantagens dos submodelos enumeravelmente fechado. Tal exigência é a dada na definição de ω -recoberto:

Definição 3.3.2. Um submodelo elementar M é dito **ω -recoberto** se, para todo $A \subset M$ tal que $|A| = \omega$, existe $B \in M$ tal que $|B| = \omega$ e $A \subset B$.

Vamos agora mostrar que, de fato, podemos tomar submodelos ω -recobertos “pequenos”:

Lema 3.3.3. *Existe um modelo ω -recoberto de tamanho ω_1 .*

Dem.: Seja $(M_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ uma seqüência submodelos elementares tal que, para todo $\alpha, \beta < \omega_1$:

- (a) $M_\alpha \subset M_\beta$ se $\alpha < \beta$.
- (b) $M_\alpha \in M_{\alpha+1}$.
- (c) $|M_\alpha| = \omega$.
- (d) $M_\alpha \prec M_{\alpha+1}$.

Podemos contruir tal seqüência por 1.1.11. Note que $M := \bigcup_{\alpha < \omega_1} M_\alpha$ é um submodelo elementar (por 1.1.10) e que $|M| = \omega_1$. Resta mostrarmos que, dado $A \subset M$, $|A| = \omega$, existe $B \in M$ tal que $|B| = \omega$ e $A \subset B$. Seja $A \subset M$ com $|A| = \omega$. Então existe $\alpha < \omega_1$ tal que $A \subset \bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta$. Assim, pela construção feita, $A \subset M_\alpha \in M$ e temos que $|M_\alpha| = \omega$. $\square$

Motremos agora algumas propriedades sobre submodelos elementares:

Lema 3.3.4. *Seja M um submodelo elementar. Então $M \cap \omega_1 = \alpha$ para algum ordinal $\alpha < \omega_1$.*

Dem.: Basta mostrar que, dado um ordinal $\beta \in M$ com $\beta < \omega_1$, temos que $\beta \subset M$. Mas isso é verdade, pois β é enumerável e por 1.1.12. $\square$

Lema 3.3.5. *Se M é ω -recoberto, então $\omega_1 \subset M$.*

Dem.: Suponha que não. Então, pelo lema anterior existe $\alpha < \omega_1$ tal que $M \cap \omega_1 = \alpha$. Como M é ω -recoberto, existe $B \in M$ enumerável tal que $\alpha \subset B$. Note que podemos supor $B \subset \omega_1$ pois $\omega_1 \in M$. Como B é enumerável e $B \in M$, temos que $B \subset M$, por 1.1.12. Note que $\alpha \notin M$ (pois $\alpha \in M$ implica $\alpha + 1 \in M$) e, como $B \cap \omega_1 \in M$ (pois $\omega_1 \in M$), temos que $\alpha \neq B$. Logo, existe β ordinal tal que $\beta \in B \subset M$ mas $\beta \notin \alpha$, contrariando a definição de α . $\square$

Finalmente, podemos mostrar o resultado principal:

Teorema 3.3.6 (Junqueira). *A Hipótese do Contínuo é equivalente a todo submodelo ω -recoberto de $H(\lambda)$ ser enumeravelmente fechado.*

Dem.: Suponha $\neg CH$. Seja M ω -recoberto de tamanho ω_1 (que existe por 3.3.3). Então M não é enumeravelmente fechado, pois, se M fosse enumeravelmente fechado, teríamos $|M| \geq 2^\omega > \omega_1$.

Suponha CH . Temos que $H(\lambda) \models$ “existe uma bijeção $f : \omega_1 \longrightarrow \wp(\omega)$ ”. Então, pela elementariedade de M , existe $f \in M$ bijeção de ω_1 em $\wp(\omega)$, pois $\omega_1, \wp(\omega) \in M$. Como $f \in M$ e $\omega_1 \subset M$, $\wp(\omega) \subset M$, pois, dado $X \in \wp(\omega)$, existe $\alpha \in M$ tal que $X = f(\alpha) \in M$.

Seja $A \subset M$ enumerável. Vamos mostrar que $A \in M$. Como M é ω -recoberto, existe $B \in M$ enumerável tal que $A \subset B$. Como B é enumerável, existe uma bijeção $g : B \longrightarrow \omega$ e, como $B \in M$, podemos tomar $g \in M$. Note que $g(A) \subset \omega$ e, portanto, $g(A) \in M$, já que $\wp(\omega) \subset M$. Como $g \in M$, $A = g^{-1}(g(A)) \in M$. $\square$

Referências: [23]

3.4 CH e o caráter de espaços de Lindelöf

Introdução

Apresentamos aqui uma equivalência à Hipótese do Contínuo dada por Juhász (em [19]). A equivalência é a validade de uma propriedade de reflexão sobre caráter de espaços de Lindelöf. Diz a propriedade que, num espaço de Lindelöf, se todo subespaço de tamanho $\leq \omega_1$ tem caráter enumerável, então o espaço todo tem caráter enumerável.

Vamos mostrar é que, se CH é vale, então a propriedade também vale. Se CH não vale, vamos contruir um contra-exemplo para a propriedade de reflexão.

Começemos com um resultado mais fraco que a reflexão desejada. Antes de apresentarmos tal resultado, enunciemos uma proposição que implicará o que desejamos:

Definição 3.4.1. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é um $L(\kappa)$ -espaço se, para qualquer cobertura aberta de X existe uma subcobertura aberta de tamanho menor que κ .

Proposição 3.4.2 (Alas). *Sejam X um $L(\kappa)$ -espaço e $x \in X$ tal que $\psi(x, X) \geq \kappa$. Então pelo menos uma das seguintes afirmações é verdadeira:*

- (i) *Existe $S \in [X]^{<\kappa}$ tal que $x \in S$ e $\chi(x, S) \geq \kappa$.*
- (ii) *Existe $Y \in [X]^\kappa$ e $y \in X$ tais que $t(y, \{y\} \cup Y) = \kappa$.*
- (iii) *Existe $T \in [X]^\kappa$ com $x \in T$ tal que $\psi(x, T) = \kappa$.*

Corolário 3.4.3. *Seja X um espaço de Lindelöf, T_2 tal que todo $Y \in [X]^{\leq \omega_1}$ tem $\chi(Y) = \omega$. Então $\psi(X) = \omega$.*

Dem.: Como X é de Lindelöf, X é um $L(\omega_1)$ -espaço. Note que, fazendo $\kappa = \omega_1$ na proposição anterior, temos que não valem (i) e (iii). Para ver que também não vale (ii), basta notar que $\chi(Y) = \omega$ implica $t(Y) = \omega$. Com isso, temos que não pode existir x em X com $\psi(x) \geq \omega_1$. $\square$

Teorema 3.4.4 (Juhász). *A Hipótese do Contínuo é equivalente à afirmação “se X é um espaço de Lindelöf, T_2 tal que para todo $Y \subset X$, com $|Y| \leq \omega_1$, temos $\chi(Y) = \omega$, então $\chi(X) = \omega$ ”.*

Dem.: $\Rightarrow$) Primeiramente, vamos mostrar que $F(X) = \omega$. Para isso, suponha que não. Então existe $(x_\xi)_{\xi < \omega_1} \subset X$ uma seqüência livre. Como X é de Lindelöf, existe $x \in X$ ponto de acumulação completo de $(x_\xi)_{\xi < \omega_1}$. Considere $Y := \{x_\xi : \xi < \omega_1\} \cup \{x\}$. Por hipótese, $\chi(Y) = \omega$ e, portanto, $t(Y) = \omega$. Logo, existe $\eta < \omega_1$ tal que $x \in \overline{\{x_\xi : \xi < \eta\}}$. Como x é ponto de acumulação completo de $\{x_\xi : \xi < \omega_1\}$, temos que $x \in \overline{\{x_\xi : \xi > \eta\}}$. Então, $x \in \overline{\{x_\xi : \xi \leq \eta\}} \cap \overline{\{x_\xi : \xi > \eta\}}$ contrariando o fato que $(x_\xi)_{\xi < \omega_1}$ é livre.

Note que, por 3.4.3, temos que $\psi(X) = \omega$. Com isso, temos que, por 1.3.46, $|X| \leq 2^{L(X)F(X)\psi(X)} = 2^\omega = \omega_1$. Assim, temos que $\chi(X) = \omega$ por hipótese.

$\Leftarrow$) Suponha $\neg$ CH. Seja $X := ([0, 1] \times \{0\}) \cup ([0, 1] \times \{1\})$ com a seguinte topologia:

- (i) $\{(y, 1)\}$ é aberto para todo $y \in]0, 1[$.
- (ii) W é vizinhança de $(x, 0)$ se existe V vizinhança usual de x em $]0, 1[$ tal que $W \supset (V \times \{0\}) \cup ((V \setminus \{x\}) \times \{1\})$.
- (iii) W é vizinhança de $(1, 1)$ se existe $n \geq 1$ e $A \subset]0, 1[$ com $|A| \leq \omega_1$ tal que $W \supset ([1 - \frac{1}{n}, 1] \setminus A) \times \{1\}$.

Note que X é T_2 . Temos que X é de Lindelöf pois seja C uma cobertura por abertos de X . Seja $C_0 \subset C$ tal que $\bigcup C_0 \supset]0, 1[\times \{0\}$. Note que, por (ii), podemos supor $|C_0| \leq \omega$. Novamente por (ii), temos que $|\{x \in]0, 1[\times \{1\} : x \notin \bigcup C_0\}| \leq \omega$, assim, existe $C' \subset C$ tal que $|C'| \leq \omega$ e $\bigcup C' \supset X$.

Seja $Y \subset X$ tal que $|Y| \leq \omega_1$. Seja $x \in Y$. Se $x \in]0, 1[\times \{0\}$, temos que x admite sistema fundamental de vizinhança enumerável. Se $x \in]0, 1[\times \{1\}$, $\{x\}$ é aberto em Y . Se $x = (1, 1)$ note que $\{x\}$ é aberto pois, em (iii), basta tomarmos $A := Y \cap ([0, 1] \times \{1\})$. Assim, $\chi(Y) \leq \omega$.

Vamos agora mostrar que $\chi(X) \geq \omega_1$. Suponha que não. Seja $(B_n)_{n \in \omega}$ base local de $(1, 1)$. Considere V uma vizinhança qualquer de $(1, 1)$. Vamos construir abertos $(V_n)_{n \in \omega}$ por indução como segue:

$$V_0 := \begin{cases} X & \text{se } B_0 \not\subset V \\ X \setminus \{x\} & \text{se } B_0 \subset V \text{ onde } x \in B_0 \setminus \{(1, 1)\} \end{cases}$$

$$V_{n+1} := \begin{cases} V_n & \text{se } B_{n+1} \not\subset V \\ V_n \setminus \{x\} & \text{se } B_{n+1} \subset V \text{ onde } x \in B_{n+1} \setminus \{(1, 1)\} \end{cases}$$

Note que $V' := \bigcap_{n \in \omega} V_n$ é vizinhança de $(1, 1)$. Mas $V' \not\supset B_n$ para todo n . Absurdo. $\square$

Referências: [19, 1]

3.5 CH e um jogo de dardos

Introdução

Apresentamos aqui um enunciado, devido a Freiling (em [13]), equivalente a $\neg CH$. O interesse em tal resultado está no fato de Freiling apresentar uma “justificativa” intuitiva para o resultado ser válido e, portanto, “justificar” intuitivamente $\neg CH$. Apresentamos aqui um esquema de tal “justificativa” e a demonstração da equivalência. Na próxima seção, apresentamos uma discussão sobre tal “justificativa” intuitiva e uma outra equivalência.

Suponha que um jogo consista em o jogador A escolher um $x \in \mathbb{R}$ jogando um dardo aleatoriamente na reta real (vamos supor que o dardo sempre acerte um, e somente um, número) e em o jogador B escolher um número y da mesma maneira. Diremos que o jogador B venceu o jogo se, e somente se, $x \neq y$. É de se esperar que seja muito provável acontecer $x \neq y$ e, portanto, o jogador B vencer o jogo. Tentando ajudar o jogador A , fixamos uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow [\mathbb{R}]^{\leq \omega}$ e dizemos que o jogador B venceu o jogo se $y \notin f(x)$. Mas, dado um conjunto enumerável X , como a reta é não enumerável, temos que é muito provável que $y \notin X$. Como todo $f(x)$ é enumerável, temos que é muito provável acontecer $y \notin f(x)$ e, portanto, que o jogador B ainda vença o jogo.

Como o jogador A continua com probabilidade baixa de ganhar, tentamos ajudá-lo novamente. Fixamos uma função f como acima, o jogador A joga um dardo aleatoriamente para escolher seu número x e o jogador B joga um dardo aleatoriamente para escolher seu número y . O jogador A ganha o jogo se $x \notin f(y)$ ou $y \notin f(x)$. Mas, por um argumento análogo ao acima e pelo fato que não importa quem jogou qual dardo, temos que a probabilidade do jogador A ganhar continua a ser baixa. Isto é, a probabilidade de acontecer $x \notin f(y)$ e $y \notin f(x)$ é alta.

Note que não usamos nenhuma característica especial da f , e, portanto, a chance de acontecer $x \notin f(y)$ e $y \notin f(x)$ é alta. Assim, podemos supor que, dada uma função f , existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x \notin f(y)$ e $y \notin f(x)$. Ou seja, teríamos justificado a seguinte afirmativa:

$$\forall f : \mathbb{R} \rightarrow [\mathbb{R}]^{\leq \omega} \exists x \exists y y \notin f(x) \text{ e } x \notin f(y)$$

Mas, tal afirmação é independente de ZFC, como mostra o seguinte resultado:

Teorema 3.5.1. $\neg CH$ é equivalente a afirmação “ $\forall f : \mathbb{R} \rightarrow [\mathbb{R}]^{\leq \omega} \exists x \exists y y \notin f(x) \text{ e } x \notin f(y)$ ”.

Dem.: $\Rightarrow$) Suponha $\neg CH$. Seja $(x_\alpha)_{\alpha < \omega_1} \subset \mathbb{R}$. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow [\mathbb{R}]^{\leq \omega}$. Considere o conjunto $A := \{x \in \mathbb{R} : \exists \alpha < \omega_1 x \in f(x_\alpha)\}$. Note que $|A| = \omega_1$ e, portanto, existe $y \in \mathbb{R} \setminus A$, isto é, $\forall \alpha < \omega_1, y \notin f(x_\alpha)$. E, como $|f(y)| = \omega$, existe $x_\alpha \notin f(y)$. Portanto, $x_\alpha \notin f(y)$ e $y \notin f(x_\alpha)$.

$\Leftarrow$) Suponha CH. Seja $(x_\alpha)_{\alpha < \omega_1} = \mathbb{R}$. Definimos $f : \mathbb{R} \longrightarrow [\mathbb{R}]^{\leq \omega}$ por $f(x_\alpha) = \{x_\beta : \beta \leq \alpha\}$. Note que não existe $\alpha, \beta < \omega_1$ tais que $(x_\beta \notin f(x_\alpha) \text{ e } x_\alpha \notin f(x_\beta))$ pois isso implicaria que $\beta > \alpha$ e $\alpha > \beta$.

□

Referências: [13]

3.6 CH e probabilidade

Introdução

Apresentamos aqui uma discussão sobre a “justificativa” intuitiva apresentada na última seção. Tal discussão leva a uma tentativa de formalização do que é ser “provável” num universo infinito e tal formalização nos leva a uma equivalência de $\neg$ CH.

Um problema com a justificativa de Freiling

Em [13], Freiling comenta que, se repetirmos o mesmo raciocínio apresentado na seção anterior, substituindo “conjuntos enumeráveis” por “conjuntos de cardinalidade menor que o contínuo”, conseguiríamos uma “justificativa” para a afirmação “ $\forall f : \mathbb{R} \rightarrow [\mathbb{R}]^{<2^\omega} \exists x \exists y y \notin f(x)$ e $x \notin f(y)$ ”. E pode-se mostrar, de maneira análoga ao que foi feito na seção anterior, que tal afirmação implica que não vale o Axioma da Escolha¹.

Mas também podemos aplicar o mesmo raciocínio substituindo $\mathbb{R}$ por $\mathbb{N}$ e “enumeráveis” por “finitos”. Assim, conseguiríamos uma “justificativa” para $\forall f : \mathbb{N} \rightarrow [\mathbb{N}]^{<\omega} \exists x \exists y y \notin f(x)$ e $x \notin f(y)$. Mas tal afirmação é falsa em ZF. Para notar isso, basta tomar f como sendo $f(x) = \{y : y \leq x\}$.

Parte do “argumento intuitivo” da última seção se resume a “se a chance de y pertencer a X , onde $X \subset \mathbb{R}$ é enumerável, é pequena, então a chance de y pertencer a $f(x)$, onde $f : \mathbb{R} \rightarrow [\mathbb{R}]^\omega$, também é pequena para qualquer x . E, portanto, a chance de y pertencer a $f(x)$ ou x pertencer a $f(y)$ também é pequena”. Vamos examinar tal argumento um pouco mais de perto. Suponha que a chance de y pertencer a X seja pequena. Podemos até supor que a probabilidade de y pertencer a X seja 0 (note que isso não quer dizer que $y \in X$ seja impossível). Isso implica que a probabilidade de y pertencer a $f(x)$ seja 0? Ou mesmo que seja baixa?

O argumento usado na última seção foi que, uma vez escolhido x , digamos, $x = x_0$, estamos no caso anterior, ou seja, $f(x_0)$ está fixado e, portanto, a probabilidade de y pertencer a $f(x_0)$ é 0. Mas estamos lidando com duas variáveis, então talvez estejamos deixando passar alguma coisa... Por exemplo, e se escolhermos $y = y_0$ primeiro? Qual a probabilidade de ocorrer y_0 pertence a $f(x)$? Note que, se $f \equiv \{y_0\}$ essa probabilidade seria 1... Para deixar o problema mais claro, voltemos ao caso em que $f : \mathbb{N} \rightarrow [\mathbb{N}]^{<\omega}$. Se X é um conjunto finito fixado, poderíamos dizer que a probabilidade de y pertencer a X é 0. E, se $f : \mathbb{N} \rightarrow [\mathbb{N}]^{<\omega}$, podemos concluir que a probabilidade de y pertencer a $f(x)$ é 0? Vejamos um exemplo. Tomemos $f(x) = \{y : y \leq x\}$. Qual a probabilidade de y pertencer a $f(x)$, isto é, a probabilidade de y ser menor ou igual a x ? Se fixarmos primeiro $x = x_0$,

¹na verdade, talvez haja um problema maior aqui, já que, sem o axioma da escolha, não é tão simples definir o conjunto $[\mathbb{R}]^{<2^\omega}$, já que $|2^\omega|$ não tem a definição usual.

ela parece ser 0. Se fixarmos $y = y_0$, a probabilidade de y_0 ser menor ou igual a x parece 1.

O que vamos fazer a seguir é tentar formalizar qual é a probabilidade de um evento ocorrer quando trabalhamos com um universo infinito. Em tal definição, teremos que y ser menor ou igual a x , com $x, y \in \mathbb{N}$ tem probabilidade $\frac{1}{2}$.

Uma definição para probabilidade

Dado um universo de variáveis e uma fórmula φ , vamos definir qual é a probabilidade de φ ocorrer. E vamos fazer isso de forma que satisfaça duas propriedades. A primeira é que, se o universo for finito, a probabilidade seja dada por contagem. A segunda é que, num universo infinito, a probabilidade de φ calculada em subuniversos finitos, a medida que os subuniversos “cresçam” (e se aproximem do universo inteiro), deve se aproximar da probabilidade de φ calculada no universo inteiro. Essas duas propriedades se traduzem na seguinte definição:

Definição 3.6.1. Seja U um conjunto e $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ uma fórmula com $x_1, \dots, x_n$ suas variáveis livres. Denotaremos por $P^U(\varphi(x_1, \dots, x_n))$ a **probabilidade** de ocorrer $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ em U . Diremos que tal probabilidade existe e é igual a p se:

- U é finito e $p = \frac{|\{(x_1, \dots, x_n) \in U^n : \varphi(x_1, \dots, x_n)\}|}{|U|^n}$.
- U é infinito e para toda família $(B_m)_{m \in \omega}$ de subconjuntos finitos de U tais que $B_{m+1} \supsetneq B_m$ temos que $\lim_{m \rightarrow \infty} P^{B_m}(\varphi(x_1, \dots, x_n)) = p$.

Exemplo 3.6.2. Seja U um conjunto infinito e seja $A \subset U$ finito. Então $P^U(x \in A) = 0$, pois, dados $(B_n)_{n \in \omega}$, $B_{n+1} \supsetneq B_n$, $P^{B_n}(x \in A) = \frac{|B_n \cap A|}{|B_n|} \leq \frac{|A|}{|B_n|} \rightarrow 0$ quando $|B_n| \rightarrow \infty$.

Observação 3.6.3. Note que tal definição de probabilidade não está definida para qualquer evento φ como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 3.6.4. $P^{\mathbb{N}}(x \text{ é par})$ não existe. Pois podemos construir $(B_n)_{n \in \omega}$ tais que $B_{n+1} \supsetneq B_n$ e $B_n \subset \{m \in \mathbb{N} : m \text{ é par}\}$ e, portanto, $P^{B_n}(x \text{ é par}) = 1$ para todo n e podemos construir $(C_n)_{n \in \omega}$ tais que $C_{n+1} \supsetneq C_n$ e $C_n \subset \{m \in \mathbb{N} : m \text{ é ímpar}\}$ e, portanto, $P^{C_n}(x \text{ é par}) = 0$ para todo n .

De maneira análoga, mostramos que, se U é um conjunto e $A \subset U$ é infinito com $U \setminus A$ infinito, temos que $P^U(x \in A)$ não existe.

A equivalência de $\neg CH$

Lema 3.6.5. *Suponha $\neg CH$. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow [\mathbb{R}]^{\leq \omega}$ e sejam $(a_\alpha)_{\alpha < \omega_2} \subset \mathbb{R}$ distintos. Então, existe $\alpha_0 < \omega_2$ tal que $|\{\beta > \alpha_0 : a_{\alpha_0} \notin f(a_\beta)\}| = \omega_2$, ou seja, existe $(a_{\alpha_\xi})_{\xi < \omega_2}$ subsequência de $(a_\alpha)_{\alpha < \omega_2}$ onde $a_{\alpha_0} \notin f(a_{\alpha_\xi})$ para todo $\xi < \omega_2$.*

Dem.: Suponha que não. Então para todo $\alpha < \omega_2$, $|\{\beta > \alpha : a_\alpha \notin f(a_\beta)\}| \leq \omega_1$ e, portanto, limitado em ω_2 . Logo, para todo α existe β_α tal que $\forall \gamma \geq \beta_\alpha$, $a_\alpha \in f(a_\gamma)$. Seja $\gamma := \sup\{\beta_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Note que $\gamma < \omega_2$. Então, para todo $\alpha < \omega_1$, $a_\alpha \in f(a_\gamma)$. Absurdo, pois $f(a_\gamma)$ é enumerável. $\square$

Corolário 3.6.6. *Suponha $\neg CH$ e seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow [\mathbb{R}]^{\leq \omega}$. Então existe $A \in [\mathbb{R}]^\omega$ tal que para todo $x, y \in A$, temos $x \notin f(y)$.*

Dem.: Primeiramente, considere $(a_\alpha)_{\alpha < \omega_2} \subset \mathbb{R}$ tal que $\forall \alpha < \omega_2$, $a_\alpha \notin \bigcup f(\{a_\beta : \beta \leq \alpha\})$. Podemos construir tal sequência pois $|\bigcup f(\{a_\beta : \beta \leq \alpha\})| \leq \omega_1 \omega < \omega_2$.

Construimos seqüências $(b_n)_{n \in \omega}$ e $(a_{\alpha_\xi})_{\xi < \omega_2}^n$, com $b_n < b_{n+1}$, por indução em n da seguinte forma:

- $b_0 = a_{\alpha_0}$ e $(a_{\alpha_\xi})_{\xi < \omega_2}^0$ são os dados pelo lema aplicado a $(a_\alpha)_{\alpha < \omega_2}$.
- $b_{n+1} = a_{\alpha_0}$ e $(a_{\alpha_\xi})_{\xi < \omega_2}^{n+1}$ são os dados pelo lema aplicado a $(a_{\alpha_\xi})_{\xi < \omega_2}^n$.

Note que $A := \{b_n : n \in \omega\}$ satisfaz o enunciado. $\square$

Corolário 3.6.7. *Suponha $\neg CH$ e seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow [\mathbb{R}]^{\leq \omega}$. Sejam $B \subset \mathbb{R}$ finito e $\varepsilon > 0$. Então existe $C \supset B$ finito tal que $P^C(y \in f(x)) \leq \varepsilon$.*

Dem.: Seja A dado pelo lema anterior. Fixe $C' \subset A \setminus B$ e considere $C := C' \cup B$. Temos que $|C \times C| = |C|^2 = |B|^2 + 2|B||C'| + |C'|^2$. Note que se $(x, y) \in C' \times C'$ então $y \notin f(x)$. Logo, $\{(x, y) \in C \times C : y \in f(x)\} \subset (B \times B) \cup (C' \times B) \cup (B \times C')$. Então, temos

$$P^C(y \in f(x)) \leq \frac{|B|^2 + 2|B||C'|}{|B|^2 + 2|B||C'| + |C'|^2}$$

Como C' pode ser tomado arbitrariamente grande (pois A é infinito), temos o resultado. $\square$

Teorema 3.6.8. *$\neg CH$ é equivalente à afirmação que " $\forall f : \mathbb{R} \longrightarrow [\mathbb{R}]^{\leq \omega}$ temos que $P^\mathbb{P}(y \in f(x)) = 0$ ou $P^\mathbb{P}(y \in f(x))$ não existe".*

Dem.: $\Rightarrow$ Suponha $\neg CH$. Por 3.6.7, se $P^\mathbb{P}(y \in f(x))$ existe, então $P^\mathbb{P}(y \in f(x)) = 0$.

$\Leftarrow$) Suponha CH. Seja $(x_\alpha)_{\alpha < \omega_1} = \mathbb{R}$. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow [\mathbb{R}]^{\leq \omega}$ dada por $f(x_\alpha) = \{x_\beta : \beta < \alpha\}$. É fácil ver que, para qualquer $B \subset \mathbb{R}$ finito e não vazio, temos

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{|B|} \leq P^B(y \in f(x)) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{|B|}$$

e que, portanto, $P^{\mathbb{R}}(y \in f(x)) = \frac{1}{2}$.

□

Capítulo 4

Algumas aplicações de CH

Introdução

Neste capítulo apresentamos algumas aplicações de CH, principalmente em topologia geral. Assumindo-se CH, começamos com a construção, assumindo-se CH, de um S -espaço. Depois mostramos a existência de P -pontos em $\beta\omega$, problema que surgiu ao se discutir se ω^* era homogêneo ou não. Em seguida, mostramos a existência de P -pontos para outros espaços diferentes de $\beta\omega$. Na verdade, mostramos a existência, em certos espaços, de pontos que são, ao mesmo tempo, P -pontos e pontos remotos. Tal existência, juntamente com CH, dá um contra-exemplo importante quando discutimos o próximo tópico, espaços discretamente gerados.

É claro que as aplicações de CH não se restringem às que apresentamos aqui. A escolha de tratar da existência de S -espaços e P -pontos justifica-se por serem assuntos centrais em topologia geral. Já a escolha de tratar de espaços discretamente gerados se justifica por ser uma área relativamente nova, com trabalhos ainda sendo publicados e com diversas questões em aberto.

4.1 Um S -espaço

Introdução

Apresentamos aqui uma construção, assumindo-se CH, de um S -espaço conhecido por “Reta de Kunen”. Tal construção contém idéias que podem ser usadas na construção de outros exemplos.

Este exemplo apareceu primeiramente em [20], mas aqui seguiremos [27]

A consistência com ZFC da não existência de um S -espaço foi mostrada por Todorćević em 1981.

Começemos com as definições necessárias para o problema.

Definição 4.1.1. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é um **espaço separável** se existe $D \subset X$ enumerável denso em X . Dizemos que X é **hereditariamente separável** se todo subespaço de X é separável.

Definição 4.1.2. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é **hereditariamente Lindelöf** se todo subespaço de X é Lindelöf.

Definição 4.1.3. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é um **S -espaço** se X regular, hereditariamente separável e não hereditariamente Lindelöf.

Em nossa construção é mais fácil trabalharmos com uma definição alternativa que é dada nos seguintes termos:

Definição 4.1.4. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é **separável à direita** se existe uma boa ordem de X tal que todo segmento inicial é um conjunto aberto. Dizemos que X é **separável à esquerda** se existe uma boa ordem de X tal que todo segmento inicial é um conjunto fechado.

A equivalência das definições é dada pelo seguinte resultado:

Teorema 4.1.5. *Seja X um espaço topológico. Temos:*

- (i) *X é hereditariamente separável se, e somente se, X não tem um subespaço não enumerável separável a esquerda.*
- (ii) *X é hereditariamente Lindelöf se, e somente se, X não tem um subespaço não enumerável separável a direita.*

Dem.: (i) Suponha que exista $S \subset X$ não enumerável separável a esquerda. Seja $(x_\alpha)_{\alpha < |S|}$ uma enumeração de S tal que todo segmento inicial é fechado. Considere $S' := \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Como, dados $I \subset \omega_1$ enumerável e $\beta := (\sup I) + 1$, $\{x_\alpha : \alpha \in I\} \subset \{x_\alpha : \alpha < \beta\} \neq S'$, temos que S' não é separável.

Por outro lado, suponha X não hereditariamente separável. Seja $S \subset X$ tal que S não seja separável. Contruímos, por indução, $(x_\alpha)_{\alpha < \omega_1} \subset S$ tal que $x_\alpha \notin \overline{\{x_\beta : \beta < \alpha\}}$. Assim, $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ é um subespaço não enumerável separado a esquerda.

- (ii) Suponha que existe $S \subset X$ não enumerável separável a direita. Seja $(x_\alpha)_{\alpha < |S|}$ uma enumeração de S tal que todo segmento inicial é aberto. Então a cobertura $(A_\alpha)_{\alpha < |S|}$, onde $A_\alpha = \{x_\beta : \beta < \alpha\}$, não admite subcobertura enumerável e, portanto, S não é Lindelöf.

Por outro lado, suponha X não hereditariamente Lindelöf. Seja $S \subset X$ não Lindelöf. Seja $(A_\alpha)_{\alpha < I}$ uma cobertura de S que não admita subcobertura enumerável. Então podemos supor que $(A_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ é uma família estritamente crescente de abertos que cobre S . Escolha $x_\alpha \in A_{\alpha+1} \setminus A_\alpha$. Então $S' := \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ é um subespaço não enumerável separável a direita. □

Definição 4.1.6. Sejam (X, T) um espaço topológico e $Y \subset X$. Denotamos por $T|Y$ o conjunto $\{A \in T : A \subset Y\}$. Note que $T|Y$ é uma topologia sobre Y se, e somente se Y é aberto em X .

Apresentemos agora a construção de nosso espaço:

Teorema 4.1.7. (CH) *Existe K um S -espaço regular e 0-dimensional.*

Dem.: Assuma CH e considere $(x_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ uma boa ordenação de $\mathbb{R}$. Sejam $(A_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ todos os conjuntos enumeráveis infinitos de $\mathbb{R}$ (podemos fazer isso pois $|\mathbb{R}|^\omega = 2^\omega = \omega_1$). Considere $X_\alpha := \{x_\beta : \beta < \alpha\}$. Seja $\mathcal{B}_\alpha := \{A_\beta : \beta < \alpha, A_\beta \subset X_\alpha, x_\alpha \in (\overline{A_\beta})^\mathbb{R}\}$. Escrevemos para cada α , $\mathcal{B}_\alpha := (C_{\alpha,n})_{n < \omega}$ de forma que cada $A \in \mathcal{B}_\alpha$ é igual a um $C_{\alpha,n}$ para infinitos n 's. Para cada $\alpha < \omega_1$, definimos uma topologia $\mathcal{T}_\alpha$ para X_α por indução sobre α com as seguintes hipóteses:

- (i) se $\beta < \alpha$, $(X_\beta, \mathcal{T}_\beta)$ é 0-dimensional e $\mathcal{T}_\beta$ é um refinamento da topologia usual induzida por $\mathbb{R}$ sobre X_β .
- (ii) se $\gamma < \beta < \alpha$ então $\mathcal{T}_\gamma = \mathcal{T}_\beta|X_\gamma$ e $X_\gamma \in \mathcal{T}_\beta$.
- (iii) se $\beta + 1 \leq \alpha$ e $A \in \mathcal{B}_\beta$ então $x_\beta \in (\overline{A})^{\mathcal{T}_{\beta+1}}$.
- (iv) $\beta < \alpha$, $(X_\beta, \mathcal{T}_\beta)$ é localmente compacto.

Vamos definir $\mathcal{T}_\alpha$. Se α é limite, tomamos $\mathcal{T}_\alpha$ como a topologia gerada por $\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{T}_\beta$. Verifiquemos as condições para esse caso:

- (i) Temos que mostrar que $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ é 0-dimensional e que é um refinamento da topologia induzida por $\mathbb{R}$. Que X_α é 0-dimensional é claro pois se $(B_\beta)_{\beta < \alpha}$ são bases de abertos fechados de $(X_\beta)_{\beta < \alpha}$, então $\bigcup_{\beta < \alpha} B_\beta$ é uma base de abertos fechados de X_α . O fato de ser um refinamento da topologia de $\mathbb{R}$, segue de (HI).

- (ii) Temos, claramente, que $\mathcal{T}_\beta = \mathcal{T}_\alpha|_{X_\beta}$ e que $X_\beta \in \mathcal{T}_\alpha$ para todo $\beta < \alpha$ pela definição de $\mathcal{T}_\alpha$.
- (iii) Não há o que ser verificado.
- (iv) Imediato por (HI).

Agora suponha $\alpha = \beta + 1$. Vamos definir $\mathcal{T}_\alpha$. Seja $(y_n)_{n \in \omega}$ tal que $y_n \in C_{\beta,n}$ para cada $n \in \omega$ e que $(|x_\beta - y_n|)_{n \in \omega}$ seja uma seqüência decrescente para 0. Seja $(I_n)_{n \in \omega}$ seqüência de intervalos abertos dois a dois disjuntos tais que $x_\beta \notin (\overline{I_n})^\mathbb{R}$, $y_n \in I_n$ e os diâmetros dos I_n formem uma seqüência que tenda a 0. Para cada $n \in \omega$, considere $u_{n,\beta}$ um aberto fechado compacto em $\mathcal{T}_\beta$ tal que $y_n \in u_{n,\beta} \subset I_n$ (existe por (HI)). Definimos

$$v_{n,\beta} := \{x_\beta\} \cup \bigcup_{k > n} u_{k,\beta}$$

e tomamos $\mathcal{T}_\alpha$ como sendo a topologia gerada por $\mathcal{T}_\beta \cup \{v_{n,\beta} : n < \omega\}$.

Verifiquemos as hipóteses de indução para $\alpha = \beta + 1$:

- (i) Primeiramente vamos mostrar que $\mathcal{T}_\alpha$ é um refinamento da topologia usual de $\mathbb{R}$. Sejam $x \in X_\alpha$ e $\varepsilon > 0$. Vamos mostrar que existe $U \in \mathcal{T}_\alpha$ tal que $U =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap X_\alpha$. Vamos dividir em dois casos: no primeiro, suponha $x = x_\beta$. Seja $A \in \mathcal{T}_\beta$ tal que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap X_\beta = A$. Tal A existe por (HI). Seja n tal que, na definição de $v_{n,\beta}$, para todo $m \geq n$, $I_m \subset]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$. Então, $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap X_\alpha = A \cup v_{n,\beta}$ que pertence a $\mathcal{T}_\alpha$. Agora, suponha $x \neq x_\beta$. Podemos supor $|x_\beta - x| < \varepsilon$ (o outro caso é trivial). Suponha $x_\beta < x$. Por (HI), temos que existem $A, B \in \mathcal{T}_\beta$ tais que $]x - \varepsilon, x_\beta[\cap X_\beta = A$ e $]x_\beta, x + \varepsilon[\cap X_\alpha = B$. Considere $\delta > 0$ tal que $]x_\beta - \delta, x_\beta + \delta[\subset]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$. Pela primeira parte, temos que existe $C \in \mathcal{T}_\alpha$ tal que $]x_\beta - \delta, x_\beta + \varepsilon[\cap X_\alpha = C$. Assim, temos que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap X_\alpha = A \cup B \cup C$. O caso em que $x_\beta > x$ é análogo.

Vamos agora mostrar que $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ é 0-dimensional. Seja $\mathcal{U}$ uma base de abertos fechados de $\mathcal{T}_\beta$ tal que, para todo $u \in \mathcal{U}$, existe $n \in \omega$ tal que $u \cap \bigcup_{k > n} u_{k,\beta} = \emptyset$. Tal base existe já que $\mathcal{T}_\beta$ é 0-dimensional e refina a topologia usual de $\mathbb{R}$ (para cada $x \in X_\beta$, tome abertos fechados contidos em $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ onde $\varepsilon = \frac{|x_\beta - x|}{2}$). Temos que $\mathcal{U}' := \mathcal{U} \cup \{v_{n,\beta} : n < \omega\}$ é uma base de $\mathcal{T}_\alpha$. Vamos agora mostrar que os elementos de $\mathcal{U}'$ são fechados em $\mathcal{T}_\alpha$. Sejam $v \in \mathcal{U}'$ e $x \in X_\alpha \setminus v$. Se $x = x_\beta$, então $v \in \mathcal{U}$ e, portanto, existe $n \in \omega$ tal que $v_{n,\beta} \cap v = \emptyset$ e temos que $x \in v_{n,\beta}$. Se $x \neq x_\beta$, então temos dois casos: se $v \in \mathcal{U}$, basta tomarmos $v' \in \mathcal{U}$ tal que $x \in v' \subset X_\beta \setminus v$. Se $v \notin \mathcal{U}$, então $v = v_{n,\beta}$ para algum n . Seja $\varepsilon > 0$ tal que $|x - x_\beta| > \varepsilon$. Seja $k \geq n$ tal que $v_{k,\beta} \subset]x_\beta - \varepsilon, x_\beta + \varepsilon[$. Note que $x \in X_\beta \setminus ([x_\beta - \varepsilon, x_\beta + \varepsilon] \cup \bigcup_{i=n}^k u_{i,\beta})$ que é aberto e é disjunto de $v_{n,\beta}$.

- (ii) Precisamos mostrar que $\mathcal{T}_\gamma = \mathcal{T}_\alpha|_{X_\gamma}$ e que $X_\gamma \in \mathcal{T}_\alpha$ para $\gamma < \alpha$. Note que, por (HI), só precisamos mostrar que $\mathcal{T}_\beta = \mathcal{T}_\alpha|_{X_\beta}$ e que $X_\beta \in \mathcal{T}_\alpha$. Mas note que isso

vale, pois $\mathcal{T}_\beta \subset \mathcal{T}_\alpha$, o que mostra que $\mathcal{T}_\beta \subset \mathcal{T}_\alpha|X_\alpha$ e $X_\beta \in \mathcal{T}_\alpha$. Temos também que $v_{n,\beta} \cap X_\beta = \bigcup_{k>n} u_{k,\beta} \in \mathcal{T}_\beta$, o que mostra que $\mathcal{T}_\beta \supset \mathcal{T}_\alpha|X_\beta$.

- (iii) Precisamos mostrar que $x_\beta \in \overline{A}^{\mathcal{T}_\alpha}$ para cada $A \in \mathcal{B}_\beta$. Seja U um aberto de $\mathcal{T}_\alpha$ tal que $x_\beta \in U$ e seja $A \in \mathcal{B}_\beta$. Temos que U contém uma vizinhança de x_β da forma $\{x_\beta\} \cup \bigcup_{k>n} u_{k,\beta}$. Como cada A aparece em $(C_{\alpha,n})_{n \in \omega}$ infinitas vezes e $u_{k,\beta}$ são vizinhanças de $y_k \in C_{k,\beta}$ para cada $k \in \omega$, temos que $A \cap \bigcup_{k>n} u_{k,\beta} \neq \emptyset$ e temos o resultado.
- (iv) Basta verificarmos que cada $v_{n,\beta}$ é compacto. Mas isso é claro já que, se $(U_\xi)_{\xi < \kappa} \supset v_{n,\beta}$ é um recobrimento aberto, temos que existe ξ tal que $x_\beta \in U_\xi$ e, portanto, $U_\xi = v_{m,\beta}$ para algum m . Como $v_{n,\beta} \setminus v_{m,\beta} = \bigcup_{i=n}^m u_{i,\beta}$, que são compactos, temos o resultado.

Definimos $K := \bigcup_{\alpha < \omega_1} X_\alpha$ com a topologia gerada por $(\mathcal{T}_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$.

Como cada $X_\alpha = \{x_\beta : \beta < \alpha\}$ para $\alpha < \omega_1$ é um subconjunto aberto de K , temos que K é separável a direita. Portanto, por 4.1.5 temos que K não é Lindelöf.

Vamos agora mostrar que K é hereditariamente separável. Seja $X \subset K$ não enumerável. Seja $D \subset X$ enumerável tal que $\overline{D}^{\mathbb{R}} = X$. Seja β tal que $D = A_\beta$ e seja $\delta > \alpha$ tal que $D \subset X_\delta$. Note que, como a topologia de K refina a de $\mathbb{R}$, $\overline{D}^K \subset \overline{D}^{\mathbb{R}}$. E note que $\overline{D}^{\mathbb{R}} \setminus \overline{D}^K \subset \{x_\xi \in X : A_\beta \notin \mathcal{B}_\xi\} = \{x_\xi \in X : \xi < \delta\}$ que é um conjunto enumerável. Logo, X é separável.

Temos que K é T_2 pois refina a topologia de $\mathbb{R}$. Para ver que é T_3 , basta notar que é 0-dimensional. E K é 0-dimensional, pois sua topologia é gerada por $(\mathcal{T}_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ e cada $\mathcal{T}_\alpha$ é 0-dimensional. $\square$

Referências: [27]

4.2 P-pontos

Introdução

Nesta seção, apresentamos duas provas, assumindo-se CH, de existência de P -pontos. Na primeira parte, tal existência se dá em $\beta\omega$. Na segunda parte, se dá numa classe de espaços topológicos onde garantimos, não só a existência de um P -ponto, como também a existência de um ponto que é, ao mesmo tempo, P -ponto e ponto remoto. Seguirá, imediatamente da definição de ponto remoto, que um ponto assim não pode existir em $\beta\omega$.

4.2.1 P-pontos em $\beta\omega$

Introdução

Apresentamos aqui uma prova de que, assumindo-se CH, existem P -pontos (isto é, pontos cujas intersecções enumeráveis de vizinhanças também são vizinhanças) em $\beta\omega$. O problema surgiu ao se discutir se ω^* (isto é, $\beta\omega \setminus \omega$) é homogêneo (dizemos que um espaço é homogêneo se, dados dois pontos seus, existem um homeomorfismo do espaço nele mesmo que leva um ponto no outro). Com a existência de P -pontos em ω^* , temos que este não é homogêneo (pois existem pontos em ω^* que não são P -pontos). Hoje já se sabe que, mesmo em ZFC, ω^* não é homogêneo (esse é um resultado de Frolík em [14]), mas tal fato segue de outras propriedades e não da existência de P -pontos. A existência de P -pontos é independente de ZFC. A consistência de não existência de P -pontos foi mostrada por Shelah (ver, por exemplo, [36]).

Usaremos nesta parte técnicas de álgebras de Boole e espaços de Stone. Apresentaremos os principais resultados utilizados e algumas definições com o intuito de situar o leitor e de fixarmos notação. Para tais técnicas, estaremos seguindo [24]. Todas as demonstrações e definições omitidas aqui, podem ser encontradas lá.

Começemos com a definição do espaço de Stone de uma determinada álgebra de Boole:

Definição 4.2.1. Seja A uma álgebra de Boole. Definimos $Ult(A) := \{u \subset A : u \text{ é um ultrafiltro de } A\}$.

Para todo $a \in A$, consideramos

$$a^* := \{u \in Ult(A) : a \in u\}.$$

Vamos considerar $Ult(A)$ com a topologia gerada por $\{a^* : a \in A\}$. Tal espaço chama-se o **espaço de Stone da álgebra A** e o denotaremos por $s(A)$.

Note que, na definição anterior, cada a^* é um aberto fechado. Vejamos agora a definição de espaço de Stone:

Definição 4.2.2. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é um **espaço de Stone** se X é compacto, Hausdorff e 0-dimensional.

Teorema 4.2.3. Dada A uma álgebra de Boole, $s(A)$ é um espaço de Stone.

Agora vejamos que o processo pode ser invertido, isto é, dado um espaço de Stone, podemos construir uma álgebra de Boole correspondente:

Definição 4.2.4. Seja X um espaço topológico. Denotamos por $Clop(X) := \{a \in \wp(X) : a \text{ é aberto fechado}\}$.

Lema 4.2.5. Seja X um espaço de Stone. Então $Clop(X)$ é uma álgebra de Boole.

O próximo resultado simplesmente diz que os processos de passagem de uma álgebra de Boole para um espaço de Stone e de passagem de um espaço de Stone para uma álgebra de Boole são um o inverso do outro.

Teorema 4.2.6. Sejam X um espaço de Stone e A uma álgebra de Boole. São equivalentes:

$$(i) \ A \cong Clop(X).$$

$$(ii) \ X \cong s(A).$$

Estamos agora interessados em mostrar que $\beta\omega$ é um espaço de Stone. Mais especificamente, que $\beta\omega$ é o espaço de Stone da álgebra $\wp(\omega)$. Começemos com alguns resultados preliminares:

Lema 4.2.7. Seja $\mathcal{F} \subset \wp(\omega)$ uma família com p.i.f. Então existe $u \in Ult(\wp(\omega))$ tal que $\mathcal{F} \subset u$.

Dem.: Considere $\mathcal{F}' = \{a \in \wp(\omega) : \exists b_1, \dots, b_n \in \mathcal{F} \text{ tais que } a = b_1 \cap \dots \cap b_n\}$. Como $\mathcal{F}$ tem p.i.f, $F := \{a \in \wp(\omega) : \exists b \in \mathcal{F}' \text{ tal que } b \subset a\}$ é um filtro. Como união de filtros é filtro, pelo lema de Zorn, temos que todo filtro pode ser estendido a um ultrafiltro e temos o resultado. $\square$

Definição 4.2.8. Dizemos que $u \in Ult(\wp(\omega))$ é um **ultrafiltro principal** se existe $n \in \omega$ tal que $u = \{A \subset \omega : n \in A\}$ e, nesse caso, dizemos que n gera u . Para cada $n \in \omega$, definimos u_n o ultrafiltro gerado por n . Chamamos de $N := \{u_n : n \in \omega\} \subset Ult(\wp(\omega))$.

Lema 4.2.9. ω é homeomorfo a $N \subset s(\wp(\omega))$.

Dem.: Basta mostrar que N é discreto pois, como $u_n \neq u_m$ se $n \neq m$, temos que N é enumerável. Note que N é discreto pois $\{n\}^* = \{u_n\}$ e, portanto, $\{u_n\}$ é aberto para todo n . $\square$

Devido ao último resultado, muitas vezes identificaremos ω com N .

Finalmente, conseguimos o resultado:

Lema 4.2.10. $\beta\omega$ é homeomorfo ao espaço de Stone da álgebra $\wp(\omega)$, isto é, $\beta\omega \cong s(\wp(\omega))$.

Dem.: Primeiramente, observe $s(\wp(\omega))$ é compacto Hausdorff. Por 4.2.9, basta verificarmos que N é denso em $s(\wp(\omega))$ e que toda função de N em $[0, 1]$ (que, necessariamente é contínua, já que N é discreto) pode ser estendida continuamente em $s(\wp(\omega))$. Para ver que N é denso, seja U um aberto fechado não vazio de $s(\wp(\omega))$. Podemos supor $U = a^*$, onde a^* é um aberto básico. Como a^* é não vazio, temos que a é não vazio e, portanto, existe $n \in a$. Assim $u_n \in a^*$ e, portanto, $N \cap a^* \neq \emptyset$.

Seja $f : N \rightarrow [0, 1]$ uma função. Para cada $A \in \wp(\omega)$, considere $A' := \{u_n : n \in A\} \subset N$. Seja $u \in s(\wp(\omega))$. Definimos $g(u)$ tal que $g(u) \in \bigcap_{A \in u} \overline{f(A')}$. Note que tal $g(u)$ existe, pois $[0, 1]$ é compacto e $\overline{f(A')}_{A \in u}$ tem p.i.f. já que u é filtro. Vamos mostrar que g é uma extensão contínua de f . Primeiramente, note que $\bigcap_{A \in u} \overline{f(A')}$ é um conjunto unitário. De fato, suponha $x, y \in \bigcap_{A \in u} \overline{f(A')}$, com $|x - y| > r > 0$. Considere $B \subset \omega$ tal que $n \in B$ se, e somente se, $|f(u_n) - x| < \frac{r}{2}$. Temos $B \notin \{ \emptyset, \omega \}$. Logo, como u é ultrafiltro, $B \in u$, ou $\omega \setminus B \in u$. Mas $x \notin \overline{f((\omega \setminus B)')}$ e $y \notin \overline{f(B')}$.

Com isso, temos que $g(u_n) = f(u_n)$ para todo n , isto é, g estende f .

Para ver que g é contínua, seja $u \in s(\wp(\omega))$ e $\varepsilon > 0$. Considere $B := \{n \in \omega : |g(u) - f(u_n)| < \frac{\varepsilon}{2}\}$. Temos que B^* é um aberto fechado. Note que $u \in B^*$, pois, senão teríamos $\omega \setminus B \in u$, mas $g(u) \notin \overline{f((\omega \setminus B)')}$. Para concluir, vamos mostrar que $g(B^*) \subset]g(u) - \varepsilon, g(u) + \varepsilon[$. De fato, se $s \in B^*$, então $g(s) \in \bigcap_{A \in s} \overline{f(A')} \subset \overline{f(B')} \subset [g(u) - \frac{\varepsilon}{2}, g(u) + \frac{\varepsilon}{2}]$. $\square$

Vamos agora à definição de ω^* e a sua relação com álgebras de Boole. Na verdade, vamos mostrar que ω^* é o espaço de Stone da álgebra $\wp(\omega)/Fin$.

Definição 4.2.11. Chamamos de ω^* o conjunto $\beta\omega \setminus \omega$.

Observação 4.2.12. Por 4.2.10 e 4.2.9, temos que $\omega^* \cong s(\wp(\omega)) \setminus \omega$.

Devido aos últimos resultados, muitas vezes identificaremos $\beta\omega$ com $Ult(\wp(\omega))$ e ω^* com os ultrafiltros não principais de $Ult(\wp(\omega))$.

Lema 4.2.13. *Seja $u \in Ult(\wp(\omega))$. Se existe $A \in u$ tal que A é finito, então u é um ultrafiltro principal.*

Dem.: Seja $\{n_1, \dots, n_m\} \in u$. Como u é ultrafiltro, para cada i , temos que ou $\{n_i\} \in u$, ou $\omega \setminus \{n_i\} \in u$. Suponha que u não é principal. Então não existe i tal que $\{n_i\} \in u$. Logo, para todo $i = 1, \dots, m$, $\omega \setminus \{n_i\} \in u$. Logo $\{n_1, \dots, n_m\} \cap \bigcap_{i=1}^m (\omega \setminus \{n_i\}) \in u$ mas $\{n_1, \dots, n_m\} \cap \bigcap_{i=1}^m (\omega \setminus \{n_i\}) = \emptyset$. Absurdo. $\square$

Lema 4.2.14. $\omega^* \cong s(\wp(\omega)/Fin)$, isto é, ω^* é homeomorfo ao espaço de Stone da álgebra $\wp(\omega)$ quocientado pelo ideal dos subconjuntos finitos de ω .

Dem.: Para mostrar o resultado, é suficiente mostrar que $Clop(\omega^*)$ é isomorfo a $\wp(\omega)/Fin$. Definimos $h : \wp(\omega)/Fin \rightarrow Clop(\omega^*)$ por $h([a]) = a^* \cap \omega^*$. Note que h está bem definida, pois dados $a, b \in \wp(\omega)$ tais que $[a] = [b]$, temos que $a^* \cap \omega^* = b^* \cap \omega^*$, pois suponha, sem perda de generalidade, que existe $u \in a^* \cap \omega^*$ tal que $u \notin b^* \cap \omega^*$. Então $a \in u$ e $b \setminus \omega \in u$. Como u é filtro, $a \cap (\omega \setminus b) = a \setminus b \in u$. Mas, como $a \Delta b$ é finito, $a \setminus b$ é finito e, portanto, u é ultrafiltro principal. Absurdo, pois $u \in \omega^*$.

Oserve também que $a^* \cap \omega^* \in Clop(\omega^*)$ pois $a^* \in Clop(\beta\omega)$. Vamos agora mostrar que h é um isomorfismo:

- $h([a] + [b]) = (a \cup b)^* \cap \omega^* = \{u \in \omega^* : (a \cup b) \in u\} = \{u \in \omega^* : a \in u\} \cup \{u \in \omega^* : b \in u\} = (a^* \cap \omega^*) \cup (b^* \cap \omega^*) = h([a]) + h([b]).$
- $h([a] \cdot [b]) = (a \cap b)^* \cap \omega^* = \{u \in \omega^* : a \cap b \in u\} = \{u \in \omega^* : a, b \in u\} = \{u \in \omega^* : a \in u\} \cap \{u \in \omega^* : b \in u\} = (a^* \cap \omega^*) \cap (b^* \cap \omega^*) = h([a]) \cdot h([b]).$
- $h(-[a]) = (\omega \setminus a)^* \cap \omega^* = \{u \in \omega^* : \omega \setminus a \in u\} = \{u \in \omega^* : a \notin u\} = \omega^* \setminus a^* = -h([a]).$
- $h(1) = h([\omega^*]) = \omega^* = 1.$
- $h(0) = h([\emptyset]) = \emptyset = 0.$

Para notar que h é injetora, vamos mostrar que, se $h([a]) = 0$, então $[a] = 0$. Para isso, mostraremos que tal a é finito. Seja a tal que $h([a]) = 0$. Então $a^* \cap \omega^* = \emptyset$. Assim, temos que, para todo $u \in Ult(\wp(\omega))$, $a \notin u$ e, portanto, $u \in N$ e isso implica que a é finito. De fato, suponha a infinito e considere $\{b \in \wp(\omega) : \omega \setminus b \text{ é finito}\} \cup \{a\}$. Note que tal família tem p.i.f. e, portanto, existe um ultrafiltro que a contém. Observe também que tal ultrafiltro não contém nenhum conjunto finito e, portanto, não é principal. Absurdo.

Para notar que h é sobrejetora, seja $U \in \mathcal{Clop}(\omega^*)$. Então existem A um aberto de $\beta\omega$ e F um fechado de $\beta\omega$ tais que $A \cap \omega^* = F \cap \omega^* = U$. Como A é aberto, considere para cada $x \in A \cap U$, um aberto fechado a_x tal que $x \in a_x \subset A$. Como ω^* é fechado, $\omega^* \cap F$ é fechado e note que $\bigcup \{a_x : x \in \omega^* \cap F\} \supset \omega^* \cap F$. Como $\omega^* \cap F$ é fechado e, portanto, compacto, existem $x_1, \dots, x_n$ tais que $\bigcup \{a_{x_1}, \dots, a_{x_n}\} \supset F \cap \omega^*$. Note que $\bigcup \{a_{x_1}, \dots, a_{x_n}\}$ é um aberto fechado de $\beta\omega$ e que $\omega^* \cap \bigcup \{a_{x_1}, \dots, a_{x_n}\} = U$. Assim, $U = h(a_{x_1} + \dots + a_{x_n})$. $\square$

Em particular, o último resultado mostra que ω^* é compacto.

Comecemos agora a mostrar o resultado principal, isto é, que, supondo CH, ω^* tem P -pontos. Antes, vamos a alguns resultados preliminares a respeito da topologia de ω^* .

Lema 4.2.15. ω^* não tem pontos isolados.

Dem.: Por 4.2.14 basta mostrarmos que dado $a \in \wp(\omega)$ com $0 \neq [a]$ existe $b \in \wp(\omega)$ tal que $0 < [b] < [a]$. Seja a tal que $[a] \neq 0$. Então a é infinito. Seja $b \subset a$ infinito tal que $b \setminus a$ seja infinito. Então $0 < [b] < [a]$. $\square$

Lema 4.2.16. Seja $([a_n])_{n \in \omega}$ uma seqüência em $\wp(\omega)/Fin$ tal que $[a_n] \leq [a_m]$ se $m < n$ e $[a_n] \neq 0$ para todo $n \in \omega$. Então existe $[b] \in \wp(\omega)/Fin$, $[b] \neq 0$ e $[b] \leq [a_n]$ para todo n .

Dem.: Podemos supor que $a_n \subset a_m$ para todo $m < n$. Tomamos b_0 como qualquer elemento de a_0 e tomamos $b_n \in a_n \setminus \{b_0, \dots, b_{n-1}\}$. Observe que $b := \{b_n : n \in \omega\}$ é infinito e, portanto $[b] \neq 0$. Temos também que $b \setminus a_n \subset \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ e, portanto, $[b] \leq [a_n]$ para todo $n \in \omega$. $\square$

O próximo resultado é simplesmente uma tradução do anterior para ω^* :

Corolário 4.2.17. Seja $\mathcal{F}$ uma família enumerável de abertos fechados de ω^* . Então $\bigcap \mathcal{F}$ tem interior não vazio.

Lema 4.2.18. Não existe uma cobertura de ω^* formada por ω_1 conjuntos raros.

Dem.: Sejam $(R_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ conjuntos raros em ω^* . Vamos contruir por indução $(C_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ abertos fechados não vazios tais que

- (i) $C_\alpha \subset C_\beta$ se $\beta < \alpha$
- (ii) $C_\alpha \subset \omega^* \setminus R_\alpha$ para todo $\alpha < \omega_1$.

Suponha contruídos C_α para $\alpha < \beta$ como acima e vamos contruir C_β . Seja $(A_n)_{n \in \omega}$ uma reenumeração de $(C_\alpha)_{\alpha < \beta}$. Como cada $A_n \neq \emptyset$, podemos aplicar 4.2.17 e, portanto, temos que existe $\emptyset \neq a^* \subset \bigcap_{n \in \omega} A_n$. Como a^* é aberto não vazio e R_β é raro, existe um aberto fechado não vazio b^* contido em $a^* \setminus R_\beta$. Tomamos C_β como tal b^* .

Como ω^* é compacto, temos que existe $x \in \bigcap_{\alpha < \omega_1} C_\alpha$ o que implica que $x \notin R_\alpha$ para todo $\alpha < \omega_1$ por (ii). $\square$

Finalmente, temos o material necessário para provar o resultado principal:

Definição 4.2.19. Seja X um espaço topológico. Dizemos que $p \in X$ é um **P-ponto** se sempre que $(V_n)_{n \in \omega}$ forem vizinhanças de p , $\bigcap_{n \in \omega} V_n$ também é uma vizinhança de x .

Teorema 4.2.20. (CH) *Existem P-pontos em ω^* .*

Dem.: Considere $A := \{\overline{U} \setminus U : U \text{ é aberto } F_\sigma\}$. Temos que $|A| \leq \omega_1$, já só existem 2^ω abertos F_σ 's pois $w(\omega^*) = 2^\omega$ e $(2^\omega)^\omega = \omega_1$. Note que $\overline{U} \setminus U$ é raro pois seu complementar é aberto denso. Então, por 4.2.18, temos que $\omega^* \setminus \bigcup A \neq \emptyset$. Vamos mostrar que todo elemento de $\omega^* \setminus \bigcup A$ é um P-ponto.

Seja $x \in \omega^* \setminus \bigcup A$. Considere $(a_n)_{n \in \omega}$ abertos fechados tais que $x \in a_n$ para todo $n \in \omega$. Vamos mostrar que existe b aberto tal que $b \subset \bigcap_{n \in \omega} a_n$ e $x \in b$. Suponha que não. Então para todo b aberto tal que $x \in b$, temos $b \cap (\omega^* \setminus \bigcap_{n \in \omega} a_n) \neq \emptyset$. Logo, $x \in \overline{\omega^* \setminus \bigcap_{n \in \omega} a_n}$. Mas $\omega^* \setminus \bigcap_{n \in \omega} a_n$ é um aberto F_σ que não contém x . Assim, $x \in \bigcup A$. Absurdo. $\square$

O próximo resultado, junto com o anterior, vai garantir que ω^* não é homogêneo se assumimos CH:

Lema 4.2.21. *Seja X um espaço topológico Hausdorff e compacto. Se todo $x \in X$ é um P-ponto, então X é finito.*

Dem.: Primeiramente, note que toda intersecção enumerável de abertos é aberta pois todo ponto é P-ponto. Então, toda união enumerável de fechados é fechada. Assim, como X é T_2 , todo subespaço enumerável de X é discreto e fechado, contrariando o fato de que num espaço compacto todo conjunto infinito tem ponto de acumulação. $\square$

Assim, temos o seguinte resultado:

Corolário 4.2.22. *Existe $x \in \beta\omega$ tal que x não é P-ponto.*

Com isso, temos que CH implica que ω^* não é homogêneo.

Aproveitando o que já foi feito, vamos fortalecer nosso resultado. Além de mostrarmos que existe um P -ponto em ω^* , vamos mostrar que tais pontos formam um conjunto denso.

Lema 4.2.23. *Sejam $a, b \in \wp(\omega)$ tais que $[a], [b] \notin \{[w], \emptyset\}$ em $\wp(\omega)/Fin$. Então existe um homeomorfismo em $\beta\omega$ que leva $[a]^*$ em $[b]^*$.*

Corolário 4.2.24. *Sejam U e V abertos fechados não vazios de ω^* tais que $U, V \neq \omega^*$. Então U e V são homeomorfos.*

Teorema 4.2.25. (CH) *O conjunto dos P -pontos de ω^* é denso em ω^* .*

Dem.: Seja V um aberto qualquer não vazio de ω^* . Seja $V' \subset V$ aberto fechado não vazio tal que $V' \neq \omega^*$. Seja x um P -ponto em ω^* (que existe por 4.2.20) e seja U aberto fechado tal que $x \in U$ e $U \neq \omega^*$. Temos, por 4.2.24 que V' e U são homeomorfos e, portanto, V contém um P -ponto. $\square$

Referências: [34, 24]

4.2.2 P-pontos e pontos remotos

Introdução

Agora apresentamos uma demonstração de que, assumindo-se CH, existem P -pontos em certos espaços da forma βX . Além disso, mostraremos que nesses espaços existem pontos que são, ao mesmo tempo, P -pontos e pontos remotos (isto é, não estão no fecho de qualquer discreto contido em X). Tal resultado será útil na próxima seção quando estudarmos espaços discretamente gerados. Lá utilizaremos a existência de um ponto na compactificação de 2^ω que é, ao mesmo tempo, P -ponto e ponto remoto para construir um contra-exemplo.

Estaremos adotando como referência básica [35]. Todas as demonstrações suprimidas aqui podem ser encontradas lá.

Começemos com alguns resultados e definições preliminares:

Definição 4.2.26. Seja X um espaço de Tychonoff não compacto. Denotamos por X^* $\beta X \setminus X$.

Lema 4.2.27. *Seja $f : \beta X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\{x \in \beta X : f(x) = 0\} \subset X^*$. Então existe uma cópia de ω^* em $\{x : f(x) = 0\}$.*

Uma categoria importante de espaços com os quais trabalharemos aqui é a dos espaços realcompactos:

Definição 4.2.28. Seja X um espaço de Tychonoff. Dizemos que X é **realcompacto** se, para todo $p \in X^*$, existe uma função $f : \beta X \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $f(p) = 0$ e $f(x) \neq 0$ para todo $x \in X$.

Apenas sabendo-se que um espaço é realcompacto, já temos algumas propriedades sobre sua compactificação:

Proposição 4.2.29. *Se X é realcompacto, então X^* não tem pontos isolados.*

Dem.: Suponha que $p \in X^*$ é isolado. Então existe V aberto de βX tal que $V \cap X^* = \{p\}$. Como X é $T_{3\frac{1}{2}}$, existe uma função $f : \beta X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $\{x : f(x) = 0\} \subset V$ e $Z_1 \cap X^* = \{p\}$. Por outro lado, como X é realcompacto, existe uma função $g : \beta X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $g(p) = 0$ e $W := \{x \in \beta X : g(x) = 0\} \subset X^*$. Então $V \cap W = \{p\}$ o que contraria 4.2.27 pois ω^* é infinito. $\square$

Os subconjuntos que são zeros de funções contínuas constituem uma categoria de subconjuntos que dão muitas informações relativas a P -pontos e pontos remotos.

Definição 4.2.30. Sejam X um espaço topológico e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Definimos $Z(f) := \{x \in X : f(x) = 0\}$ e $Z(X) := \{Z(f) : f \in \mathbb{R}^X \text{ é contínua}\}$.

Lema 4.2.31. *Sejam X um espaço topológico, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $F \subset \mathbb{R}$ um fechado. Então $f^{-1}(F) \in Z(X)$.*

Dem.: Como $\mathbb{R}$ é métrico, por 1.3.6 existe $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $g^{-1}(0) = F$. Então $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $(g \circ f)^{-1}(0) = f^{-1}(F)$. $\square$

Damos agora uma caracterização para espaços realcompactos dada em termos de zeros de funções contínuas:

Definição 4.2.32. Dizemos que uma família $\mathcal{F}$ tem a **propriedade da intersecção enumerável** (p.i.e.) se, para qualquer $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ enumerável, temos que $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$.

Teorema 4.2.33. *Seja X um espaço de Tychonoff. Temos que X é realcompact se, e somente se, para todo ultrafiltro em $Z(X)$ que tem p.i.e. tem intersecção não vazia.*

Dem.: $\Rightarrow$): Sejam X um espaço realcompact e $Z \subset Z(X)$ um ultrafiltro com p.i.e.. Como Z é ultrafiltro, $\bigcap_{n \in \omega} z_n \in Z$ para todo $(z_n)_{n \in \omega} \subset Z$. Note que $\{\bar{z} : z \in Z\}$ tem intersecção não vazia em βX (pois são fechados com p.i.f. num compacto). Assim, basta mostrarmos que, se $p \in \bigcap_{z \in Z} \bar{z}$, então $p \in X$ (pois, assim, teremos que $p \in \bigcap_{z \in Z} z$). Suponha que $p \in X^*$. Seja $f : \beta X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(p) = 0$ e $f(x) \neq 0$ para todo $x \in X$. Seja $z_n := X \cap f^{-1}([0, \frac{1}{n}])$ (note que $z_n \in Z(X)$ por 4.2.31). Como $f^{-1}([0, \frac{1}{n}])$ é vizinhança de p e $z_n \supset f^{-1}([0, \frac{1}{n}]) \cap X$, $z_n \cap z \neq \emptyset$ para todo $z \in Z$. Assim, cada $z_n \in Z$ e, portanto, $\bigcap_{n \in \omega} z_n \in Z$. Absurdo pois $\bigcap_{n \in \omega} z_n = \emptyset$.

$\Leftarrow$): Seja X um espaço de Tychonoff não realcompact. Então existe $p \in X^*$ tal que para toda função $f : \beta X \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $f(p) = 0$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = 0$. Seja $Z := \{Z(f) \cap X : f \in [0, 1]^{\beta X} \text{ é contínua e } f(p) = 0\}$. Note que $\bigcap_{n \in \omega} Z(f_n) \in Z$ para qualquer $(f_n)_{n \in \omega} \subset Z$ (basta escrever $g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{2^n}$). Logo, Z tem p.i.e.. Observe também que Z é um filtro em $Z(X)$.

Vamos mostrar que Z é um ultrafiltro. Para isso, vamos mostrar que Z é maximal. Seja $Z' \subset Z(X)$ filtro tal que $Z \subset Z'$. Seja $z \in Z'$. Seja $g : X \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $Z(g) = z$. Seja G a extensão contínua de g para βX . Suponha $p \notin Z(G)$. Como X é $T_{3\frac{1}{2}}$, existe $f : \beta X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(p) = 0$ e $Z(f) \cap Z(G) = \emptyset$. Logo, $(Z(f) \cap X) \cap z = \emptyset$. Absurdo pois $Z(f) \cap X \in Z$ e tínhamos $z \in Z'$. Logo, $p \in Z(G)$ e, portanto, $Z(G) \cap X = z \in Z$.

Note que, como βX é de Tychonoff, temos que $\bigcap Z = \emptyset$ o que contraria nossa hipótese. □

Em particular, o último resultado nos dá a seguinte implicação:

Corolário 4.2.34. *Todo espaço de Lindelöf é realcompact.*

Dem.: Pelo teorema, basta lembrar que os elementos de $Z(X)$ são fechados e que, por X ser de Lindelöf, toda família de fechados com p.i.e. tem intersecção não vazia. □

Os próximos resultados servem para mostrar que determinados pontos são P -pontos:

Proposição 4.2.35. *Suponha X um espaço métrico, Lindelöf, localmente compacto e não compacto. Seja $f : \beta X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se existe $p \in X^*$ tal que $f(p) = 0$, então existe $V \subset X^*$ aberto não vazio (em X^*) tal que $f(V) = \{0\}$.*

Dem.: Por 4.2.34, temos que existe $g : \beta X \rightarrow [0, 1]$ tal que $g(p) = 0$ e $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$. Considere $h : \beta X \rightarrow [0, 1]$ dada por $h = |f| + |g|$. Note que $Z(h) \subset Z(f)$. Sejam $(x_n)_{n \in \omega} \subset X$ e $(V_n)_{n \in \omega}$ seqüências tais que

- (i) $h(x_n) \rightarrow 0$;
- (ii) V_n é vizinhança compacta de x_n em X ;
- (iii) $V_n \cap V_m = \emptyset$ se $n \neq m$;
- (iv) $|h(x_n) - h(x)| \leq \frac{1}{n}$ para todo $x \in V_n$;

Note que $\{x_n : n \in \omega\}$ é um conjunto fechado em X . De fato, suponha que $y \in \overline{\{x_n : n \in \omega\}}^{\beta X} \setminus \{x_n : n \in \omega\}$. Então $h(y) = 0$ e, portanto, $y \in X^*$, pois $g(y) = 0$.

Assim, como X é métrico, temos, por 1.3.6, que existe $l : X \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $l^{-1}(1) = \{x_n : n \in \omega\}$ e $l^{-1}(0) \supset X \setminus \bigcup_{n \in \omega} V_n$. Seja $L : \beta X \rightarrow [0, 1]$ a extensão contínua de l . Suponha que exista $q \in X^*$ tal que $L(q) \neq 0$. Vamos mostrar que $f(q) = 0$. Note que cada vizinhança de q intercepta infinitos V_n 's. De fato, suponha que exista uma vizinhança W de q que só intercepte finitos V_n 's. Como cada V_n é compacto, existe W' vizinhança de q disjunta de todo V_n . Mas então $L(q) = 0$ pois X é denso em βX . Assim, por (iv), $h(q) = 0$ e, portanto $f(q) = 0$.

Assim, temos que

$$\{q \in X^* : L(q) \neq 0\} \subset \{q \in X^* : f(q) = 0\}.$$

Como L é contínua, basta mostrarmos que $\{q \in X^* : L(q) \neq 0\} \neq \emptyset$. Para isso, considere q tal que $q \in \overline{\{x_n : n \in \omega\}}^{\beta X} \setminus \{x_n : n \in \omega\}$ (existe pois $\overline{\{x_n : n \in \omega\}}^{\beta X}$ é um fechado num compacto e, portanto, é diferente de $\{x_n : n \in \omega\}$ que é um discreto infinito). Então $h(q) = 0$ e, portanto, $q \in X^*$. Note também que $L(q) = 1$. Logo, $L^{-1}(]0, 1]) \cap X^* \neq \emptyset$. $\square$

Apresentamos agora uma caracterização de P -pontos em termos de zeros de funções contínuas:

Lema 4.2.36. *Sejam X um espaço de Tychonof e $x \in X$. Então x é um P -ponto em X se, e somente se, para toda $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $f(x) = 0$ existe V aberto tal que $f \upharpoonright V \equiv 0$ e $x \in V$.*

Dem.: $\Rightarrow$): Note que $f^{-1}(] - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}])$ é uma vizinhança aberta se x . Então $\bigcap_{n \in \omega} f^{-1}(] - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}])$ é um G_δ que contém x e, portanto, contém um aberto V tal que $x \in V$. Note que $f \upharpoonright V \equiv 0$.

$\Leftarrow$): Seja G um G_δ que contém x . Então existe f contínua tal que $x \in f^{-1}(0) \subset G$ (por 1.3.8 e pelo fato que X é $T_{3\frac{1}{2}}$). Por hipótese, existe V aberto tal que $x \in V \subset f^{-1}(0) \subset G$. Logo, x é P -ponto. $\square$

Finalmente, conseguimos uma condição suficiente para um ponto ser P -ponto:

Lema 4.2.37. *Seja X métrico, sem pontos isolados, Lindelöf, localmente compacto e não compacto e seja $x \in X^*$. Se, para toda $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e limitada, $x \notin \partial_{X^*}\{y \in X : F(y) = 0\}$, onde F é a extensão contínua de f para βX , então x é um P -ponto em X^* .*

Dem.: Suponha que não. Então, por 4.2.36 existe $f : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $f(x) = 0$ e, para todo V aberto de X^* tal que $x \in V$ existe $y \in V$ tal que $f(y) \neq 0$. Seja $V_n := f^{-1}(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}]$. Note que cada V_n é um aberto de X^* e que $\bigcap_{n \in \omega} V_n = \{y \in X^* : f(y) = 0\}$. Para cada n seja V'_n aberto de βX tal que $V_n = V'_n \cap X^*$. Como $\bigcap_{n \in \omega} V'_n$ é um G_δ e βX é $T_{3\frac{1}{2}}$, por 1.3.8, temos que existe $g : \beta X \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $g(x) = 0$ e $\{y \in \beta X : g(y) = 0\} \subset \bigcap_{n \in \omega} V'_n$. Por hipótese, existe W aberto de X^* tal que $x \in W$ e $g \upharpoonright W \equiv 0$. Portanto, $W \subset \bigcap_{n \in \omega} V_n$. Mas $f \upharpoonright \bigcap_{n \in \omega} V_n \equiv 0$ o que contraria o fato que existe $y \in W$ tal que $f(y) \neq 0$. $\square$

Definição 4.2.38. Seja X um espaço topológico. Sejam $Y \subset X$ e $x \in X$. Dizemos que x é um **ponto remoto** para Y se, para todo $D \subset Y$ discreto, $x \notin \overline{D}$.

Estamos interessados em espaços da forma βX , tais que, em X^* , exista um ponto que seja, ao mesmo tempo, P -ponto e ponto remoto para X . Apesar de já termos mostrado que ω^* tem “muitos” P -pontos, ele não serve para o que desejamos pois, pela própria definição de ponto remoto, temos que ω^* não tem pontos remotos para ω .

Vamos agora obter uma condição suficiente para um ponto ser remoto. Antes, apresentamos um resultado preliminar:

Lema 4.2.39. *Se X é realcompacto, então, para qualquer $f \in C(X)$ temos*

$$Int_{X^*}(\overline{Z(f)}^{\beta X}) \cap X^* = Int_{\beta X}(\overline{Z(f)}^{\beta X}) \cap X^*.$$

Lema 4.2.40. *Seja X métrico, Lindelöf, sem pontos isolados, localmente compacto e não compacto. Seja $p \in X^*$. Se, para toda $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, $p \notin \partial_{X^*}\overline{Z(f)}^{\beta X}$, então p é um ponto remoto para X .*

Dem.: Suponha que não. Então existe $D \subset X$ discreto tal que $p \in \overline{D}^{\beta X}$. Como X é métrico sem pontos isolados, existe $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $f^{-1}(0) = \overline{D}^X$ (pois $X \setminus \overline{D}$ é não vazio por 1.3.13 e assim podemos usar o fato que X é perfeitamente normal, por 1.3.6, para construir uma f que separa $\overline{D}^X$ de um ponto de seu complementar). Assim, temos que $p \in \overline{Z(f)}^{\beta X} \cap X^*$. Por hipótese, $p \notin \partial_{X^*} \overline{Z(f)}^{\beta X}$. Logo, $p \in \text{Int}_{X^*} \overline{Z(f)}^{\beta X}$. Por 4.2.39, temos que $p \in \text{Int}_{\beta X} \overline{Z(f)}^{\beta X}$. Então $V := \text{Int}_{\beta X} \overline{Z(f)}^{\beta X}$ é um aberto não vazio, e, pela densidade de X , temos que $V \cap X$ também é não vazio. Note que $V \cap X \subset \overline{D}^X = \overline{D}^{\beta X} \cap X$. Mas isso contraria o fato que $X \setminus \overline{D}^X$ é denso em X (pois D é raro por 1.3.13). $\square$

Antes de apresentarmos o resultado principal, apresentemos alguns resultados preliminares. O primeiro é uma generalização do teorema de Baire para certos espaços:

Lema 4.2.41. *Seja X um espaço compacto tal que todo G_δ não vazio tem interior não vazio. Então, se D é uma família de ω_1 abertos densos, $\bigcap D$ é denso.*

Dem.: Seja V um aberto não vazio. Escreva $D = (D_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$. Note que, se $(F_\xi)_{\xi < \alpha}$ para $\alpha < \omega_1$, é uma família de fechados tal que o interior de cada F_ξ é não vazio e $F_\xi \subset \text{Int} F_{\xi'}$ se $\xi > \xi'$, então $\bigcap_{\xi < \alpha} F_\xi$ também tem interior não vazio (note que é diferente de vazio pois X é compacto e tem interior não vazio pois tal intersecção está contida num G_δ). Assim, seja $x \in D_0$ e seja F_0 vizinhança fechada de x tal que $F_0 \subset D_0$. Seja $\alpha < \omega_1$ e suponha definidos F_ξ para todo $\xi < \alpha$. Seja $x \in D_\alpha \cap V \cap \text{Int} \bigcap_{\xi < \alpha} F_\xi$ (existe pois D_α é denso e pela observação acima). Seja F_α uma vizinhança fechada de x tal que $F_\alpha \subset D_\alpha \cap V \cap \text{Int} \bigcap_{\xi < \alpha} F_\xi$. Note que $\bigcap_{\alpha < \omega_1} F_\alpha$ é não vazio (fechados com p.i.f. num compacto) e que $\bigcap_{\alpha < \omega_1} F_\alpha \subset \bigcap D \cap V$. $\square$

Lema 4.2.42. *Seja X localmente compacto $T_{3\frac{1}{2}}$. Então X^* é fechado em βX .*

Finalmente, temos o resultado principal:

Teorema 4.2.43. (CH) *Seja X $T_{3\frac{1}{2}}$ métrico, sem pontos isolados, Lindelöf, localmente compacto e não compacto. Então o conjunto dos pontos em X^* que são P-pontos em X^* e remotos para X é denso em X^* .*

Dem.: Temos que X^* é não vazio (pois X não é compacto) e fechado (pois X é localmente compacto e por 4.2.42). Logo, X^* é compacto. Como para todo G_δ A de X^* não vazio existe $f : X^* \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $\{x : f(x) = 0\} \subset A$, por 4.2.35 temos que o interior de A é não vazio. Note que X^* não tem pontos isolados pois X é realcompacto (por 4.2.34 e por 4.2.29. Assim, temos que

$$D_1 := \{p \in X^* : p \notin \partial_{X^*} \overline{Z(f)}^{\beta X} \text{ para toda } f \in C(X)\} \text{ e}$$

$D_2 := \{p \in X^* : p \notin \partial_{X^*}\{y : F(y) = 0\} \text{ para toda } F \text{ extensão contínua de alguma } f \in C(X)\}$

são intersecções de abertos densos. Por CH, temos que só existem ω_1 funções contínuas em X (pois X tem denso enumerável). Assim, temos que D_1 e D_2 são densos em X^* por 4.2.41. Como $D_1 \supset D_2$, dado $p \in \bigcap D_1 \cap \bigcap D_2$, por 4.2.37 e 4.2.40 temos que p é um P -ponto em X^* e um ponto remoto para X . $\square$

Referências: [35]

4.3 Espaços discretamente gerados

Introdução

Ao estudarmos espaços que satisfazem o primeiro axioma de enumerabilidade, uma propriedade de tais espaços que carrega consigo muitas conseqüências é a propriedade de que, se um ponto está no fecho de um determinado conjunto, então existe uma seqüência em tal conjunto que converge para esse ponto. Tal conceito (que, claramente, não é propriedade exclusiva dos espaços primeiro enumeráveis. Os espaços com essa propriedade são chamados de espaços de Fréchet-Urysohn) pode ser generalizado de uma maneira simples: em vez de exigirmos que exista uma seqüência convergente, podemos exigir que exista uma seqüência transfinita convergente, ou seja, não exigimos que a seqüência seja enumerável. Tais espaços são chamados de espaços radiais. Mas uma outra generalização pode ser feita da seguinte maneira: em vez de exigirmos que exista uma seqüência convergindo para o dito ponto, exigimos apenas que exista um subespaço discreto contendo o ponto em seu fecho (note que uma seqüência convergente é um subespaço assim). Espaços com tal propriedade são chamados de espaços discretamente gerados e começaram a ser estudados de forma mais sistemática em [9].

Vamos apresentar aqui algumas propriedades básicas de espaços discretamente gerados, bem como de uma generalização de tais espaços: os espaços fracamente discretamente gerados (que é uma generalização para os espaços seqüenciais). Vamos também estudar a relação entre espaços radiais e discretamente gerados. Por exemplo, veremos que um espaço compacto Hausdorff e radial é sempre discretamente gerado. Em seguida apresentaremos duas construções diferentes para um mesmo resultado usando CH. O resultado é que, mesmo com mais algumas hipóteses sobre o espaço, podemos contruir um espaço pseudo-radial (que é uma generalização de radial) que não é fracamente discretamente gerado. As duas construções apresentam técnicas diferentes e ainda não se sabe se existe um exemplo assim assumindo-se apenas ZFC.

Note que, se dado um conjunto qualquer $A \subset X$, sabemos como é o fecho de A , então temos determinada a topologia de X . Assim, o nome “discretamente gerado” fica natural: o fato de sabermos como são os fechados dos discretos implicar que sabemos como são os fechados de todos os subconjuntos do espaço implica que sabemos como é a topologia do espaço. Ou seja, em espaços discretamente gerados, determinar o fecho dos discretos é determinar a topologia do espaço todo.

Primeiramente, vamos definir os espaços com os quais queremos trabalhar.

Definição 4.3.1. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é **discretamente gerado** se, para todo $A \subset X$ e para todo $x \in \overline{A}$ existe $D \subset A$ discreto tal que $x \in \overline{D}$. Dizemos que X é **fracamente discretamente gerado** se, para todo conjunto $A \subset X$ não fechado, existe $D \subset A$ tal que $\overline{D} \setminus A \neq \emptyset$.

A título de comparação, lembremos as definições de espaços de Fréchet-Urysohn e de espaços seqüenciais:

Definição 4.3.2. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é um **espaço de Fréchet-Urysohn** se, dado $A \subset X$, para cada $a \in \overline{A}$, existe $(x_n)_{n \in \omega} \subset A$ tal que $x_n \rightarrow a$.

Definição 4.3.3. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é um **espaço seqüencial** se, dado $A \subset X$ tal que $A \neq \overline{A}$, existem $(x_n)_{n \in \omega} \subset A$ e $x \in \overline{A} \setminus A$ tais que $x_n \rightarrow x$.

Note que, de fato, espaços discretamente gerados e espaços fracamente discretamente gerados são, respectivamente, generalizações de espaços de Fréchet-Urysohn e de espaços seqüenciais.

Nosso primeiro resultado já mostra que espaços fracamente discretamente gerados não são difíceis de se encontrar:

Teorema 4.3.4. *Seja X um espaço T_2 compacto. Então X é fracamente discretamente gerado.*

Dem.: Seja $A \subset X$ tal que $\overline{A} \setminus A \neq \emptyset$. Então, A não é compacto. Por 1.3.17 temos que existe $D \subset A$ discreto em A tal que $\overline{D}^A$ não é compacto. Como $\overline{D}$ é compacto, temos que $\overline{D} \setminus A \neq \emptyset$ como queríamos. $\square$

Agora, vamos ao conceito de um espaço radial:

Definição 4.3.5. Seja X um espaço topológico. Sejam A um subconjunto de X e $(x_\xi)_{\xi < \kappa}$ uma **seqüência transfinita** em X . Dizemos que $(x_\xi)_{\xi < \kappa}$ **converge** para o conjunto A se, para todo V aberto tal que $V \supset A$, existe $\alpha < \kappa$ tal que $x_\xi \in V$ para todo $\xi \geq \alpha$. Se $A = \{x\}$ dizemos simplesmente que $(x_\xi)_{\xi < \kappa}$ converge para x .

Definição 4.3.6. Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é um **espaço radial** se, dados $A \subset X$ e $a \in \overline{A} \setminus A$, existe uma seqüência transfinita em A que converge para a . Dizemos que X é **espaço pseudo-radial** se, dado $A \subset X$ não fechado, existe $a \in \overline{A} \setminus A$ tal que existe uma seqüência transfinita em A convergindo para a .

Note que também temos que espaços radiais e espaços pseudo-radiais são, respectivamente, generalizações de espaços de Fréchet-Urysohn e de espaços seqüenciais.

O próximo lema nos dará que, sob certas hipóteses, ser radial (ou pseudo-radial) implica ser discretamente gerado (ou fracamente discretamente gerado). Conseguimos isso simplesmente provando que, em espaços regulares, podemos construir subespaços discretos a partir de seqüências convergentes.

Lema 4.3.7. *Sejam X um espaço regular e $F \subset X$ fechado. Se $(x_\xi)_{\xi < \kappa}$ é uma seqüência transfinita que converge para F então existe $D \subset \{x_\xi : \xi < \kappa\}$ discreto tal que $F \cap \overline{D} \neq \emptyset$. Além disso, se $F = \{x\}$ basta supormos que X seja T_2 .*

Dem.: Note que podemos assumir que κ é regular e que $x_\xi \notin F$ para todo $\xi < \kappa$. Vamos definir seqüências $(\xi_\alpha)_{\alpha < \gamma}$, $(U_\alpha)_{\alpha < \gamma}$ e $(V_\alpha)_{\alpha < \gamma}$ para algum $\gamma \leq \kappa$ tais que:

- U_α e V_α são abertos.
- $\xi_\alpha < \xi_\beta$ se $\alpha < \beta$.
- $x_{\xi_\alpha} \in U_\alpha$.
- $x_{\xi_\alpha} \in (X \setminus \overline{\{x_{\xi_\beta} : \beta < \alpha\}}) \cap \bigcap_{\beta < \alpha} V_\beta$.
- $F \subset V_\alpha$.
- $U_\alpha \cap V_\alpha = \emptyset$.

Tomamos $\xi_0 := 0$ e escolhemos U_0 e V_0 usando o fato de X ser regular. Suponha definidas as seqüências para todo $\beta < \alpha$. Se não existe $x_\xi \in (X \setminus \overline{\{x_{\xi_\beta} : \beta < \alpha\}}) \cap \bigcap_{\beta < \alpha} V_\beta$ com $\xi > \xi_\beta$ para todo $\beta < \alpha$, tomamos $\gamma := \alpha$ e terminamos a construção. Caso contrário, tomamos $\xi_\alpha := \xi$ onde $x_\xi \in (X \setminus \overline{\{x_{\xi_\beta} : \beta < \alpha\}}) \cap \bigcap_{\beta < \alpha} V_\beta$ e $\xi > \xi_\beta$. Tomamos U_α e V_α usando o que X é regular.

Temos que $D := \{x_{\xi_\alpha} : \alpha < \gamma\}$ é discreto, pois para cada x_{ξ_α} com $\alpha < \gamma$, temos que o aberto $V := (X \setminus \overline{\{x_{\xi_\beta} : \beta < \alpha\}}) \cap U_\alpha$ é tal que $V \cap D = \{x_{\xi_\alpha}\}$.

Vamos agora mostrar que $\overline{D} \cap F \neq \emptyset$. Suponha que não. Seja $V \supset F$ aberto tal que $x_{\xi_\alpha} \notin V$ para todo $\alpha < \gamma$. Como $(x_\xi)_{\xi < \kappa}$ converge para F , existe $\beta < \kappa$ tal que $x_\xi \in V$ para todo $\xi > \beta$. Assim, $\xi_\alpha \leq \beta$ para todo $\alpha < \gamma$. Portanto, como κ é regular, $\gamma < \kappa$ e, assim, no passo γ , tivemos que não existe $x_\xi \in (X \setminus \overline{\{x_{\xi_\alpha} : \alpha < \gamma\}}) \cap \bigcap_{\alpha < \gamma} V_\beta$ com $\xi > \beta$. Absurdo, pois $X \setminus \overline{\{x_\xi : \xi < \beta\}}$ é um aberto que contém F e, portanto, contém um segmento final de $(x_\xi)_{\xi < \kappa}$. $\square$

Corolário 4.3.8. *Todo espaço radial T_2 é discretamente gerado.*

Dem.: Seja X como no enunciado. Seja $A \subset X$ não fechado. Seja $x \in \bar{A} \setminus A$. Como X é radial, existe $(x_\xi)_{\xi < \kappa} \subset A$ que converge para x . Pelo lema, existe $D \subset \{x_\xi : \xi < \kappa\}$ discreto tal que $x \in \bar{D}$. $\square$

Corolário 4.3.9. *Todo espaço pseudo-radial T_2 é fracamente discretamente gerado.*

Dem.: Seja X como no enunciado. Seja $A \subset X$ não fechado. Como X é pseudo-radial, existe $x \in \bar{A} \setminus A$ e $(x_\xi)_{\xi < \kappa} \subset A$ tais que $(x_\xi)_{\xi < \kappa}$ converge para x . Pelo lema, existe $D \subset \{x_\xi : \xi < \kappa\}$ discreto tal que $x \in \bar{D}$. Logo, $\bar{D} \setminus A \neq \emptyset$. $\square$

Estamos agora interessados em mostrar que a hipótese de ser pseudo-radial não é forte o suficiente para implicar que o espaço seja discretamente gerado. Isso, mesmo num espaço compacto Hausdorff. Na verdade, até o momento só existe uma resposta parcial parcial a isso: precisamos de CH para mostrar que não vale tal implicação. Construiremos dois contra-exemplos para tal afirmação.

Na construção do primeiro exemplo, usaremos resultados mais “fortes”. Por exemplo, usaremos o resultado, já mostrado, de que certos espaços da forma βX são tais que existe um ponto em X^* que é P -ponto e ponto remoto para X . Já no segundo exemplo, temos uma construção com combinatória mais “explícita” e, por isso mesmo, mais “complicada”.

Antes do primeiro exemplo, apresentemos o seguinte lema:

Lema 4.3.10. *Seja X um espaço compacto T_2 . Se, para todo D subespaço discreto de X , $\bar{D}$ é pseudo-radial, então X é pseudo-radial.*

Dem.: Seja $A \subset X$ não fechado. Por 4.3.4, existe $D \subset A$ discreto tal que $\bar{D} \setminus A \neq \emptyset$. Então, $A' := \bar{D} \cap A$ não é fechado em $\bar{D}$. Por hipótese, $\bar{D}$ é pseudo-radial. Assim, existe uma seqüência transfinita em $A' \subset A$ que converge para um ponto de $\bar{D} \setminus A' = \bar{D} \setminus A$. $\square$

Exemplo 4.3.11. (CH) Existe um espaço T_2 , compacto, pseudo-radial que não é discretamente gerado.

Dem.: Seja $a \in 2^\omega$. Considere 2^ω com a topologia usual e $T := 2^\omega \setminus \{a\}$ com a topologia induzida por 2^ω . Por CH e por 4.2.43, existe $q \in \beta T \setminus T$ P -ponto em $\beta T \setminus T$ e ponto remoto para T . Note que βT é 0-dimensional, pois, por 1.3.26, T é fortemente 0-dimensional e por 1.3.30 temos que βT é fortemente 0-dimensional. Temos também que $\chi(q, \beta T \setminus T) = \omega_1$, pois $\chi(q, \beta T \setminus T) \geq \omega_1$ pois q é P -ponto e $\chi(q, \beta T \setminus T) \leq \omega_1$ pois $\chi(\beta T \setminus T) = 2^\omega = \omega_1$ por CH. Assim, como q é P -ponto, podemos construir $(F_\xi)_{\xi < \omega_1}$ família de fechados de $\beta T \setminus T$ tal que:

- (i) $F_0 = \beta T \setminus T$ e, para todo $\alpha < \omega_1$, $F_{\alpha+1}$ é aberto fechado.
- (ii) $F_\alpha = \bigcap_{\xi < \alpha} F_\xi$ se $\alpha < \omega_1$ é ordinal limite.
- (iii) $F_\beta \subset F_\alpha$ com $F_\beta \neq F_\alpha$ se $\alpha < \beta$.
- (iv) $\{F_{\xi+1} : \xi < \omega_1\}$ é uma base para q em $\beta T \setminus T$.

Considere $\mathcal{D} := \{\{x\} : x \in T\} \cup \{P_\xi : \xi < \omega_1\} \cup \{\{q\}\}$, onde $P_\xi := F_\xi \setminus F_{\xi+1}$. Note que $\mathcal{D}$ é uma decomposição de βT por conjuntos fechados. Considere $X := \beta T / \mathcal{D}$. Seja $r : \beta T \rightarrow X$ dada por $r(x) = [x]$ onde $[x]$ é a classe de equivalência de x por $\mathcal{D}$.

Note que X é T_2 , pois, dados dois pontos distintos $[x], [y] \in X$, precisamos encontrar abertos disjuntos U e V em βT tais que $x \in U, y \in V$ e $r(U) \cap r(V) = \emptyset$. Se $x, y \in T \cup \{q\}$ é fácil (pois $[x] = \{x\}$ e $[y] = \{y\}$). Para o caso em que $x, y \in \beta T \setminus T$, basta notar que os P_ξ 's são abertos.

Seja $p := r(q)$ e $\{p_\alpha\} := r(P_\alpha)$ para todo $\alpha < \omega_1$. Note que $P := \{p_\alpha : \alpha < \omega_1\} \cup \{p\}$ é homeomorfo a $\omega_1 + 1$. Seja $S := r(T)$. Note que, assim, $X = S \cup P$.

Vamos mostrar que $\overline{D}$ é radial para todo $D \subset X$ discreto. Observe que X tem base enumerável para todo $x \in X \setminus \{p\}$ pois T é primeiro enumerável. Seja $D \subset X$ discreto e seja $A \subset \overline{D}$ não fechado. Seja $x \in \overline{A} \setminus A$. Se $x \neq p$, então $\chi(x, X) = \omega$ e, portanto, existe uma seqüência (enumerável) em A que converge para x . Agora suponha $p \in \overline{A}$. Note que $p \notin \overline{A \cap S}$ pois $\overline{A \cap S} \subset \overline{D \cap S}$ pois q é remoto com relação a T e $\{q\} \cup T$ é homeomorfo a $\{p\} \cup S$. Assim, $p \in \overline{A} \cap P$. Mas $P \cup \{p\}$ é homeomorfo a $\omega_1 + 1$ que é radial. Logo, existe uma seqüência transfinita em A que converge para p .

Vamos agora mostrar que X não é radial. Seja $Y \subset S$ um denso enumerável de S (existe pois T tem base enumerável). Note que temos que Y é denso em X . Logo, $p \in \overline{Y}$. Note que nenhuma seqüência de Y pode convergir para p (pois $S \cup \{p\}$ é homeomorfo a $T \cup \{q\}$ e q é remoto para T).

Para ver que X é pseudo-radial, note que para todo D subespaço discreto de X , $\overline{D}$ é pseudo-radial (pois é radial). Assim, por 4.3.10 temos que X é pseudo-radial.

Vamos agora mostrar que X não é discretamente gerado. Suponha que seja. Sejam $A \subset X$ e $x \in \overline{A}$. Então existe $D \subset A$ discreto tal que $x \in \overline{D}$. Como $\overline{D}$ é radial, existe uma seqüência transfinita em D que converge para x . Logo, X é radial, absurdo. $\square$

Note que o último exemplo também mostra que não vale o análogo a 4.3.10 para espaços radiais, isto é, o espaço do exemplo é um espaço compacto T_2 tal que, para qualquer D discreto, $\overline{D}$ é radial mas o espaço não é radial.

Vamos agora à construção do segundo exemplo:

Definição 4.3.12. Seja $\mathcal{M} := \omega \times 2^\omega$. Denotaremos por $C_n := \{n\} \times 2^\omega$. Sejam $A, B \subset \mathcal{M}$. Dizemos que $A \equiv B$ se $\{n \in \omega : A \cap C_n \neq B \cap C_n\}$ é finito. Denotamos por $[A]$ a classe de equivalência de A por $\equiv$ (note que, de fato, $\equiv$ é uma relação de equivalência). Dizemos que $[A] \subset [B]$ se $[A \setminus B] = [\emptyset]$. Seja $U \subset \mathcal{M}$ um aberto fechado. Dizemos que U é **bom** se $\{n \in \omega : U \cap C_n = \emptyset\}$ é finito e denotamos por $[A] \perp [B]$ se $[A \cap B] = [\emptyset]$.

Lema 4.3.13. *Sejam A e B bons tais que $[A] \subset [B]$ e seja $C \subset \mathcal{M}$. Se $[A] \not\subset [C]$, então $[A \cap B] \not\subset [C]$.*

Dem.: Como $\{n \in \omega : (A \setminus B) \cap C_n \neq \emptyset\}$ é finito, $\{n \in \omega : (A \cap B) \cap C_n \neq A \cap C_n\}$ é finito. Assim, $\{n \in \omega : A \cap B \cap C \cap C_n \neq \emptyset\}$ é infinito pois $\{n \in \omega : A \cap C \cap C_n \neq \emptyset\}$ é infinito. $\square$

O seguinte lema contém boa parte da combinatória necessária para a construção do exemplo:

Lema 4.3.14. (CH) *Existe uma família $(F_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ de abertos fechados de $\mathcal{M}$ satisfazendo:*

- (i) F_α é bom para todo $\alpha < \omega_1$.
- (ii) $[F_\beta] \subset [F_\alpha]$ se $\alpha \leq \beta$.
- (iii) $F_\alpha \setminus F_\beta$ é bom se $\alpha \leq \beta$.
- (iv) Se U é um aberto de $\mathcal{M}$ tal que para todo $\alpha < \omega_1$ $[F_\alpha] \not\perp [U]$ então o conjunto $\{\alpha < \omega_1 : \exists \beta < \alpha \text{ tal que } [U] \perp [F_\beta \setminus F_\alpha]\}$ é enumerável.
- (v) Se $D \subset \mathcal{M}$ é raro, então existe $\alpha < \omega_1$ tal que $\overline{D} \cap F_\alpha = \emptyset$.

Dem.: Note que, por 1.3.33, temos que $\mathcal{M}$ tem 2^ω abertos (pois $\mathcal{M}$ tem abse enumerável). Assim, por CH, temos que $\mathcal{M}$ tem ω_1 abertos. Assim, considere $(U_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ todos os abertos de $\mathcal{M}$ e $(D_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ todos os fechados raros de $\mathcal{M}$. Vamos contruir $(F_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ por indução sobre α . Seja $F_0 := \mathcal{M}$.

Suponha definidos F_β para todo $\beta < \alpha < \omega_1$. Como α é enumerável, podemos reenumerar $(F_\beta)_{\beta < \alpha}$ como $(H_n)_{n < \omega}$. Considere $\mathcal{U}_\alpha := \{U_\beta : \beta < \alpha \text{ e } \forall n < \omega [U_\beta] \not\perp [\bigcap_{m \leq n} H_m]\}$. Temos dois casos:

- Suponha $\mathcal{U}_\alpha \neq \emptyset$. Note que $\mathcal{U}_\alpha$ é enumerável, assim, seja $(U'_n)_{n < \omega}$ uma enumeração $\mathcal{U}_\alpha$.

Vamos definir, para cada $k \in \omega$, $n(k)$ e $m(k, 0), \dots, m(k, k)$ tais que, para todo $k \in \omega$ temos:

- (a) $n(k) < m(k, 0) < \dots < m(k, k) < n(k+1)$.
- (b) $C_n \cap \bigcap_{i=0}^k H_i \neq \emptyset$ se $n \geq n(k)$.
- (c) para cada $i \leq k$, $C_{m(k,i)} \cap U'_i \cap \bigcap_{j \leq k} H_j \neq \emptyset$.

Temos que H_0 (que é algum dos F_β , para $\beta < \alpha$) é bom. Então, existe $n(0) \in \omega$ tal que, para todo $m \geq n(0)$, $H_0 \cap C_m \neq \emptyset$. Como $U'_0 \in \mathcal{U}_\alpha$, o conjunto $\{n \in \omega : C_n \cap U'_0 \cap H_0 \neq \emptyset\}$ é infinito. Logo, podemos tomar $m(0,0) > n(0)$ tal que $C_{m(0,0)} \cap U'_0 \cap H_0 \neq \emptyset$. Agora suponha que temos definidos $n(i)$ e $m(i, j)$ para todo $i \leq k$, $j \leq i$. Como $\bigcap_{i=0}^{k+1} H_i$ é bom, temos que existe $n(k+1) > m(k, k)$ tal que, para todo $n \geq n(k+1)$ $C_n \cap \bigcap_{i=0}^{k+1} H_i \neq \emptyset$. Como $U'_0, \dots, U'_{k+1} \in \mathcal{U}_\alpha$, os conjuntos $\{n \in \omega : C_n \cap U'_i \cap \bigcap_{j=0}^{k+1} H_j \neq \emptyset\}$ são infinitos para $i = 0, \dots, k+1$. Assim, podemos tomar $m(k+1, 0) < \dots < m(k+1, k+1)$ tais que $C_{m(k+1,i)} \cap U'_i \cap \bigcap_{j=0}^{k+1} H_j \neq \emptyset$ para $i = 0, \dots, k+1$.

- Caso $\mathcal{U}_\alpha = \emptyset$. Então não definimos $m(k, i)$ para $i \leq k$, apenas $n(k)$ de maneira análoga.

Para cada $n \in \omega$ tal que $n(k) \leq n < n(k+1)$, considere

$$K_n := C_n \cap \bigcap_{j \leq k} H_j$$

Note que $K_n \neq \emptyset$ e que cada K_n é um aberto fechado.

Para cada $n \geq n(k)$, considere

$$L_n := \begin{cases} K_n & \text{se } n \neq m(k, i) \text{ para todo } i \leq k \\ L'_n & \text{se } m(k, i) = n \text{ para algum } k, i, \text{ onde } L'_n \subset K_n \cap U'_i \text{ é um aberto fechado não vazio} \end{cases}$$

Como D_α é raro, $D_\alpha \cap L_n$ é raro em L_n para todo $n \geq n(0)$. Assim, podemos tomar $M_n, O_n \subset L_n$ abertos fechados disjuntos e não vazios tais que $M_n \cap D_\alpha = \emptyset$ (aqui basta usar que $\mathcal{M}$ não tem pontos isolados e é T_2).

Definimos $F_\alpha := \bigcup_{n \geq n(0)} M_n$. Note que F_α é aberto fechado. De fato, temos que é aberto pois é união de abertos. Temos que é fechado pois, dado $x \in \mathcal{M} \setminus F_\alpha$, então $x \in C_n$ para algum n . Daí, ou $C_n \cap F_\alpha = \emptyset$ ou $x \in C_n \setminus M_n$ e $C_n \setminus M_n \cap F_\alpha = \emptyset$.

Verifiquemos que as hipóteses para F_α estão satisfeitas:

- (i) Temos que L_α é bom pois $L_\alpha \cap C_n = M_n \neq \emptyset$ para todo $n \geq n(0)$.
- (ii) $[F_\alpha \setminus F_\beta] = [\emptyset]$ para $\beta < \alpha$ pois $F_\beta = H_k$ para algum $k \in \omega$ e $F_\alpha \setminus H_k \subset \bigcup_{n=0}^{n(k)} C_n$.
- (iii) Primeiramente, note que $\bigcup_{n \geq n(0)} O_n$ é bom, pois $C_n \cap \bigcup_{k \geq n(0)} O_k = O_n \neq \emptyset$ para todo $n \geq n(0)$. Seja $\beta < \alpha$ e seja $k \in \omega$ tal que $H_k = F_\beta$. Note que $[\bigcup_{n \geq n(0)} O_n \setminus (H_k \setminus F_\alpha)] = [\emptyset]$ pois $\bigcup_{n \geq n(0)} O_n \setminus (H_k \setminus F_\alpha) = \bigcup_{n \geq n(0)} O_n \setminus H_k$ já que $F_\alpha = \bigcup_{n \geq n(0)} M_n$ e $M_n \cap O_n = \emptyset$ para todo $n \geq n(0)$. Temos também que $\bigcup_{n \geq n(0)} O_n \setminus H_k \subset \bigcup_{n=n(0)}^{n(k)} C_n$. Assim, $H_k \setminus F_\alpha$ é bom.

Vamos agora verificar (iv) e (v) supondo já construídos $(F_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$.

- (iv) Seja U aberto tal que $[U] \not\perp [F_\alpha]$ para todo $\alpha < \omega_1$. Seja $\alpha < \omega_1$ tal que $U = U_\alpha$. Note que $U \in \mathcal{U}_\gamma$ para todo $\gamma \geq \alpha + 1$ por 4.3.13. Seja $\gamma > \alpha + 1$. Então $[U] \perp [F_{\alpha+1} \setminus F_\gamma]$. De fato, seja O_n para $n \geq n(0)$ escolhido no passo γ . Temos que $\{n \in \omega : O_n \subset U \cap (F_{\alpha+1} \setminus F_\gamma)\}$ é infinito, pois sejam k, i tais que $F_{\alpha+1} = H_k$ e $U = U'_i$ no passo γ , então $O_n \setminus (U \cap (H_k \setminus F_\gamma)) = \emptyset$ para todo $m(j, i)$ com $j \geq k$ já que $O_n \subset U_i \cap H_j$. Assim, $\{\gamma < \omega_1 : \forall \beta < \gamma \ U \perp (F_\beta \setminus F_\gamma)\} \subset \alpha + 1$ que é enumerável.
- (v) Seja $D \subset \mathcal{M}$ raro. Então $\overline{D} = D_\alpha$ para algum $\alpha < \omega_1$. Logo, $F_\alpha \cap \overline{D} = F_\alpha \cap D_\alpha = D_\alpha \cap \bigcup_{n \geq n(0)} M_n = \emptyset$.

□

Exemplo 4.3.15. (CH) Um espaço pseudo-radial compacto e 0-dimensional que não é discretamente gerado.

Dem.: Seja p um ponto qualquer fora de $\mathcal{M}$. Seja X a união disjunta de $\mathcal{M} \cup \{p\}$ com $\omega_1 \setminus \{0\}$ e com a topologia dada por:

- $\mathcal{M}$ é aberto em X .
- Seja α tal que $0 < \alpha < \omega_1$. Uma base para α é

$$\{[\beta, \alpha] \cup ((F_\beta \setminus F_\alpha) \setminus \bigcup_{n < k} C_n) : \beta < \alpha \text{ e } k \in \omega\}$$

- Uma base para p é

$$\{\{p\} \cup [\beta, \omega_1] \cup (F_\beta \setminus \bigcup_{n < k} C_n) : \beta < \omega_1 \text{ e } k \in \omega\}$$

Vamos verificar que X satisfaz o enunciado:

X é T_2 : Sejam $x, y \in X$ distintos. Se $x, y \in \mathcal{M}$, segue de $\mathcal{M}$ ser T_2 . Se $x \in \mathcal{M}$ e $y = p$, seja $n \in \omega$ tal que $x \in C_n$. Seja $\beta \in \omega_1$ e considere $A := \{p\} \cup [\beta, \omega_1] \cup (F_\beta \setminus \bigcup_{k \leq n} C_k)$. Note que $p \in A$ e $A \cap C_n = \emptyset$. Se $x, y \in \omega_1$ com $x < y$, basta notar que $y \in [x, y] \cup (F_x \setminus F_y) \setminus C_0$ e $x \in [z, x] \cup (F_z \setminus F_x) \setminus C_0$ para $z < x$ (sempre existe pois $x \in \omega_1 \setminus \{0\}$). Se $x \in \omega_1$ e $y = p$, basta notar que $x \in [\xi, x] \cup (F_\xi \setminus F_x) \setminus C_0$ para $z < x$ e $p \in \{p\} \cup [x, \omega_1] \cup (F_x \setminus C_0)$.

X é 0-dimensional: Como $\mathbb{M}$ é 0-dimensional e $\mathbb{M}$ é um subespaço aberto de X , só precisamos cuidar das vizinhanças de pontos fora de $\mathbb{M}$. Seja $\alpha \in \omega_1 \setminus \{0\}$. Sejam $\beta < \alpha$ e $k \in \omega$. Considere a vizinhança de α $A :=]\beta, \alpha] \cup (F_\beta \setminus F_\alpha) \setminus \bigcup_{n \leq k} C_n$. Vamos mostrar que tal vizinhança é fechada. Seja $x \notin A$. Se $x \in \mathbb{M}$, basta tomarmos $\mathbb{M} \setminus ((F_\beta \setminus F_\alpha) \setminus C_0)$. Se $x \in \omega_1$, tomamos $]\xi, \beta] \cup (F_\xi \setminus F_\beta) \setminus C_0$ (com $\xi < x$) se $x < \beta$ ou $]\alpha, x] \cup (F_\alpha \setminus F_x) \setminus C_0$ se $\alpha < x$. Caso $x = p$, tomamos a vizinhança $\{p\} \cup]\alpha, \omega_1[\cup F_\alpha \setminus C_0$.

Considere $B := \{p\} \cup]\alpha, \omega_1[\cup F_\alpha \setminus \bigcup_{n \leq k} C_n$ vizinhança de p . Vamos mostrar que ela é fechada. Seja $x \notin B$. Se $x \in \mathbb{M}$, basta tomarmos $\mathbb{M} \setminus (F_\alpha \setminus \bigcup_{n \leq k} C_n)$. Se $x \in \omega_1$, basta tomarmos $]\xi, \alpha] \cup (F_\xi \setminus F_\alpha) \setminus C_0$ com $\xi < x$.

X é compacto: Seja $Y \subset X$ um conjunto infinito. Por 1.3.16, basta mostrar que Y tem um ponto de acumulação completo em X . Se $|Y| = |Y \cap \{p\} \cup \omega_1|$, acabamos pois $\{p\} \cup \omega_1$ é homeomorfo a $\omega_1 + 1$ que é compacto. Assim, podemos supor que $Y \subset \mathbb{M}$. Suponha que p não seja um ponto de acumulação completo de Y e que qualquer $m \in \mathbb{M}$ também não seja. Note que $|\bigcup_{n < k} C_n \cap Y| < |Y|$ pois, caso contrário, teríamos que existe $n \in \omega$ tal que $|C_n \cap Y| = |Y|$ mas C_n é compacto (é homeomorfo a 2^ω) e, portanto, existiria $m \in C_n \subset \mathbb{M}$ ponto de acumulação completo de Y . Assim, pela definição de vizinhança de p , temos que existe $\alpha < \omega_1$ tal que $|F_\alpha \cap Y| < |Y|$. Seja α_0 o menor com tal propriedade. Note que, pela definição de vizinhança de α_0 , temos que α_0 é ponto de acumulação completo de Y , pois $|(F_\beta \setminus F_\alpha) \cap Y| = |Y|$ para todo $\beta < \alpha$.

X é pseudo-radial: Seja $A \subset X$ não fechado. Note que, se existe $x \in \bar{A} \setminus A$ tal que $x \neq p$, então existe uma seqüência convergente para x em A pois $\chi(x, X) = \omega$. Assim, basta cuidarmos do caso em que $\bar{A} \setminus A = \{p\}$.

Decompomos A em $A \cap \omega_1$, $A \cap \text{Int}_{\mathbb{M}} \bar{A}$ e $A \cap \partial_{\mathbb{M}} \bar{A}$. Se $A \cap \omega_1$ é ilimitado em ω_1 , então $A \cap \omega_1$ é uma ω_1 -seqüência que converge para p . Como $\partial_{\mathbb{M}} \bar{A}$ é raro em $\mathbb{M}$, existe $\alpha < \omega_1$ tal que $F_\alpha \cap (\partial_{\mathbb{M}} \bar{A})^{\mathbb{M}} = \emptyset$. Então $p \notin (\partial_{\mathbb{M}} \bar{A})^{\mathbb{M}}$ e, portanto, $p \notin \partial_{\mathbb{M}} \bar{A}$. Assim, basta supormos que $p \in A \cap \text{Int}_{\mathbb{M}} \bar{A}$. Com isso, temos que $U := A \cap \text{Int}_{\mathbb{M}} \bar{A} \not\subset F_\beta$ para todo β . Por (iv) do lema, temos que existe uma quantidade não enumerável de γ 's tais que $\forall \alpha < \gamma$ $U \not\subset F_\alpha \setminus F_\gamma$. Logo, $U \cap (F_\alpha \setminus F_\gamma) \setminus \bigcup_{n < k} C_n \neq \emptyset$ para qualquer k . Assim, cada um desses γ 's está no fecho de U . Como $\bar{A} \setminus A = \{p\}$, temos que todos esses γ 's estão em A . Assim, $A \cap \omega_1$ é ilimitado e, portanto, é uma ω_1 -seqüência que converge para p .

X não é discretamente gerado: Temos que $p \in \bar{\mathbb{M}}$ mas não existe $D \subset \mathbb{M}$ discreto tal que $p \in \bar{D}$. De fato, se D é discreto, como $\mathbb{M}$ não tem pontos isolados, D é raro em $\mathbb{M}$ (por 1.3.13) e, portanto, existe α tal que $F_\alpha \cap \bar{D} = \emptyset$. Logo, $p \notin \bar{D}$.

□

Referências Bibliográficas

- [1] O. T. Alas. Pseudocharacter and reflection. preprint, 2003.
- [2] O. T. Alas, V. V. Tkachuk, and R. G. Wilson. Closures of discrete sets often reflect global properties. In *Proceedings of the 2000 Topology and Dynamics Conference (San Antonio, TX)*, volume 25, pages 27–44, 2000.
- [3] A. Bella and P. Simon. Spaces which are generated by discrete sets. *Topology Appl.*, 135(1-3):87–99, 2004.
- [4] C. C. Chang and H. J. Keisler. *Model theory*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1973. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 73.
- [5] R. V. Churchill. *Variáveis complexas e suas aplicações*. Makron Books, São Paulo, 1975.
- [6] P. J. Cohen. The independence of the continuum hypothesis. *Proc. of Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 50:1143–1148, 1963.
- [7] A. Dow. An introduction to applications of elementary submodels to topology. *Topology Proc.*, 13(1):17–72, 1988.
- [8] A. Dow. Compact spaces of countable tightness in the Cohen model. In *Set theory and its applications (Toronto, ON, 1987)*, volume 1401 of *Lecture Notes in Math.*, pages 55–67. Springer, Berlin, 1989.
- [9] A. Dow, M. G. Tkachenko, V. V. Tkachuk, and R. G. Wilson. Topologies generated by discrete subspaces. *Glas. Mat. Ser. III*, 37(57)(1):187–210, 2002.
- [10] H. B. Enderton. *A mathematical introduction to logic*. Academic Press, New York, 1972.
- [11] R. Engelking. *General topology*, volume 6 of *Sigma Series in Pure Mathematics*. Heldermann Verlag, Berlin, second edition, 1989. Translated from the Polish by the author.
- [12] P. Erdős. An interpolation problem associated with the continuum hypothesis. *Michigan Math. J.*, 11:9–10, 1964.

- [13] C. Freiling. Axioms of symmetry: throwing darts at the real number line. *J. Symbolic Logic*, 51(1):190–200, 1986.
- [14] Z. Frolík. Homogeneity problems for extremally disconnected spaces. *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 8:757–763, 1967.
- [15] P. R. Halmos. *Measure theory*. Van Nostrand Reinhold Company, 1969.
- [16] R. Hodel. Cardinal functions I. In K. Kunen and J. E. Vaughan, editors, *Handbook of set-theoretic topology*, pages 1–62. North-Holland, 1984.
- [17] T. Jech. *Set theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, 2003. The third millennium edition, revised and expanded.
- [18] I. Juhász. *Cardinal functions in topology—ten years later*, volume 123 of *Mathematical Centre Tracts*. Mathematisch Centrum, Amsterdam, second edition, 1980.
- [19] I. Juhász. Cardinal functions and reflection. *Topology Atlas*, preprint, 2000.
- [20] I. Juhász, K. Kunen, and M. E. Rudin. Two more hereditarily separable non-Lindelöf spaces. *Canad. J. Math.*, 28(5):998–1005, 1976.
- [21] I. Juhász, L. Soukup, and Z. Szentmiklóssy. What is left of CH after you add Cohen reals? *Topology Appl.*, 85(1-3):165–174, 1998. 8th Prague Topological Symposium on General Topology and Its Relations to Modern Analysis and Algebra (1996).
- [22] I. Juhász and Z. Szentmiklóssy. Convergent free sequences in compact spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 116(4):1153–1160, 1992.
- [23] L. R. Junqueira. Upwards preservation by elementary submodels. In *Proceedings of the 2000 Topology and Dynamics Conference (San Antonio, TX)*, volume 25, pages 225–249, 2000.
- [24] S. Koppelberg. *Handbook of Boolean algebras. Vol. 1*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989. Edited by J. Donald Monk and Robert Bonnet.
- [25] K. Kunen. *Set Theory. An introduction to independence proofs*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 102. North-Holland Publishing Co., 1980.
- [26] M. Morayne. On differentiability of Peano type functions. I, II. *Colloq. Math.*, 53(1):129–132, 133–135, 1987.
- [27] J. Roitman. Basic S and L . In K. Kunen and J. E. Vaughan, editors, *Handbook of set-theoretic topology*, pages 295–326. North-Holland, 1984.
- [28] W. Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, second edition, 1974. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics.

- [29] S. Saks. *Theory of the integral*. Second revised edition. English translation by L. C. Young. With two additional notes by Stefan Banach. Dover Publications Inc., New York, 1964.
- [30] W. Sierpiński. *Hypothèse du Continu*. Chelsea Publishing Co. New York, N.Y., 1956.
- [31] R. M. Smullyan. *Gödel's incompleteness theorems*, volume 19 of *Oxford Logic Guides*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1992.
- [32] R. M. Solovay. A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable. *Ann. of Math. (2)*, 92:1–56, 1970.
- [33] V. V. Tkachuk. Spaces that are projective with respect to classes of mappings. *Trudy Moskov. Mat. Obshch.*, 50:138–155, 261–262, 1987.
- [34] J. van Mill. An introduction to $\beta\omega$. In K. Kunen and J. E. Vaughan, editors, *Handbook of set-theoretic topology*, pages 503–567. North-Holland, 1984.
- [35] R. C. Walker. *The Stone-Čech compactification*. Springer-Verlag, 1974.
- [36] E. L. Wimmers. The Shelah P -point independence theorem. *Israel J. Math.*, 43(1):28–48, 1982.

Notação

$A \equiv B$, 122	$\omega(x)$, 40
A^* , 61	ω^* , 106
$B(X)$, 58	π_i , 34
C_n , 122	$\psi(x)$, 41
$Clop(X)$, 105	$\psi_C(X)$, 42
$Col(\kappa, \lambda^+)$, 77	$\psi_C(x, X)$, 42
$F(X)$, 42	$\lim_{p \in G} \mu_p(\dot{a})$, 71
$Fn(I, J)$, 28	σ_G , 22
G_δ , 34	φ^M , 12
$H(\lambda)$, 17	a^* , 104
$HOD(A)$, 81	$b(r)$, 74
$L(X)$, 43	$b(r, X)$, 60
$M \prec N$, 17	m , 63
$M[G]$, 22	$p \perp q$, 21
$M[x]$, 23	$s(A)$, 104
N , 105	$t(X)$, 41
$OD(A)$, 81	$t(x, X)$, 41
$P \times Q$, 28	u_n , 105
$P^U(\varphi(x_1, \dots, x_n))$, 96	u_s^X , 57
P_0 , 84	$\mathbb{M}$, 122
$Q(X)$, 63	$[A]$, 63
S^v , 86	$\llbracket \varphi \rrbracket$, 31
S_u , 86	
$TC(X)$, 17	
$Ult(A)$, 104	
X^* , 111	
$Z(X)$, 111	
$Z(f)$, 111	
$[A] \perp [B]$, 122	
$[A]$, 122	
$[A] \subset [B]$, 122	
$\mathcal{N}_\lambda$, 46	
Δ , 28, 54	
$\Vdash^*$, 24	
βX , 39	
$\chi(X)$, 40	
$\chi(x, X)$, 40	
$\ell_\kappa(Y)$, 53	
$\mu(\dot{A}_G)$, 71	

Índice Remissivo

- X -aleatória, 64
- Δ -sistema
 - lema do, 28
- κ -compacto
 - inicialmente, 37
- κ -diádico
 - sistema, 49
- κ -dirigida
 - família, 51
- u_s , 57
- álgebra de Boole
 - completa, 30
- P -genérico, 22
- P -nome, 22
- P -ponto, 109
- S -espaço, 100
- κ -completo, 68
- λ -fechado, 27
- ω -recoberto, 29
- σ -fechado, 27
- θ -c.c., 26
- 0-dimensional
 - espaço, 38
 - fortemente, 38
- absoluta, 25
- acumulação completo
 - ponto de, 36
- Alas, 91
- anticadeia, 26
- axioma de enumerabilidade
 - primeiro, 32
 - segundo, 32
 - terceiro, 32
- Baire
 - conjunto de, 58
 - intervalo de, 57
- base
 - pseudo -, 40, 41
- base local para x , 32
- base para x , 32
- bom, 122
- c.c.c., 26
- código, 58
- caráter, 40
- caráter
 - pseudo -, 41
- cardinais
 - preserva, 25
- cardinal
 - mensurável, 68
- CH, 9
- CH*, 46
- Cohen
 - forcing de, 28
- colapso
 - Lévy, de, 77
- compactificado
 - Stone-Čech, de, 39
- completa
 - álgebra de Boole, 30
- completamente
 - separados, 38
- completamento, 30
- Compleitude
 - teorema da, 12
- conjunto
 - Baire, de, 58
- consistente, 12
- converge, 118
- DC, 81
- definível, 78
- densamente
 - imersa, 30
- denso, 22

diagonal
 pequena, 54
 direita
 separável à, 100
 discretamente
 gerado, 117
 gerado, fracamente, 117
 discreto, 35
 elementar
 submodelo, 17
 enumeravelmente
 fechado, 89
 Erdős, 85
 escolhas dependentes
 princípio das, 81
 espaço
 0-dimensional, 38
 Fréchet-Urysohn, de, 118
 $L(\kappa)-$, 91
 Lindelöf, de, 37
 normal, 33
 pseudo-radial, 118
 radial, 118
 regular, 33
 separável, 100
 seqüencial, 118
 Stone da álgebra, de, 104
 Stone, de, 105
 Tychonoff, de, 34
 esquerda
 separável à, 100
 extensão de funções contínuas
 propriedade da, 39
 família
 κ -dirigida, 51
 fatorização
 lema de, 77
 fechado
 enumeravelmente, 89
 pseudo-caráter, 42
 fecho transitivo, 17

filtro, 22
 força, 23
 forcing, 21
 forcing
 Cohen, de, 28
 Princípio de, 20
 forcings
 produto de, 27
 fortemente
 0-dimensional, 38
 Fréchet-Urysohn
 espaço de, 118
 fracamente
 discretamente gerado, 117
 inacessível, 68
 freeness, 42
 função
 Peano, de, 87
 Gödel
 Primeiro Teorema da Incompletude de, 14
 Segundo Teorema da Incompletude de, 15
 genérico, 22
 gerado
 discretamente, 117
 fracamente discretamente, 117
 grau
 Lindelöf, de, 43
 Hausdorff, 33
 hereditariamente
 Lindelöf, 100
 separável, 100
 homogeneidade
 lema da, 77
 imersa
 densamente, 30
 inacessível
 fracamente, 68
 incompatível, 21

- independente, 12
- inicialmente
 - κ -compacto, 37
- intersecção enumerável
 - propriedade da, 112
- intervalo
 - Baire, de, 57
- Juhász, 44, 91
- Junqueira, 90
- $L(\kappa)$ —
 - espaço, 91
- Löwenheim-Skolem-Tarski
 - teorema de, 18
- Lévy
 - colapso de, 77
 - teorema de, 76
- lema
 - Δ -sistema, do, 28
 - fatorização, de, 77
 - homogeneidade, da, 77
 - produto, do, 28
 - Urysohn, de, 33
- Lindelöf
 - espaço de, 37
 - grau de, 43
 - hereditariamente, 100
- livre
 - seqüência, 42
- mensurável
 - cardinal, 68
- Morayne, 87
- N-cobertura, 46
- normal
 - espaço, 33
 - perfeitamente, 33
- ordem parcial, 21
- ordem parcial não trivial, 21
- Peano
 - função de, 87
- pequena
 - diagonal, 54
- perfeitamente
 - normal, 33
- peso, 40
- ponto
 - acumulação completo, de, 36
 - remoto, 114
- preserva
 - cardinais, 25
- preserva cardinais abaixo, 25
- preserva cardinais acima, 25
- primeiro
 - axioma de enumerabilidade, 32
- Primeiro Teorema da Incompletude
 - Gödel, de, 14
- Princípio
 - forcing, de, 20
- princípio
 - escolhas dependentes, das, 81
- principal
 - ultrafiltro, 68, 105
- probabilidade, 96
- produto
 - forcings, de, 27
 - lema do, 28
- projeção, 34
- propriedade
 - extensão de funções contínuas, da, 39
 - intersecção enumerável, da, 112
- pseudo
 - base, -, 40, 41
 - caráter, -, 41
- pseudo-caráter
 - fechado, 42
- pseudo-radial
 - espaço, 118
- racional, 64
- radial
 - espaço, 118

- raiz, 28
- raro, 35
- realcompacto, 111
- regular
 - espaço, 33
- remoto
 - ponto, 114
- segundo
 - axioma de enumerabilidade, 32
- Segundo Teorema da Incompletude
 - Gödel, de, 15
- separável
 - direita, à, 100
 - espaço, 100
 - esquerda, à, 100
 - hereditariamente, 100
- separados
 - completamente, 38
- seqüência
 - livre, 42
 - transfinita, 118
- seqüencial
 - espaço, 118
- Sierpiński
 - teorema de, 86
- sistema
 - κ -diádico, 49
- Solovay, 75
- Stone
 - espaço de, 105
- Stone da álgebra
 - espaço de, 104
- Stone-Čech
 - compactificado de, 39
- submodelo
 - elementar, 17
- T_0 , 32
- T_1 , 32
- T_2 , 33
- T_3 , 33
- T_4 , 33
- $T_{3\frac{1}{2}}$, 34
- teorema
 - Completeness, da, 12
 - Löwenheim-Skolem-Tarski, de, 18
 - Lévy, de, 76
 - Sierpiński, de, 86
- terceiro
 - axioma de enumerabilidade, 32
- tightness, 41
- Tkachuk, 36
- transfinita
 - seqüência, 118
- Tychonoff
 - espaço de, 34
- ultrafiltro
 - principal, 68, 105
- Urysohn
 - lema de, 33
- ZF, 14
- ZFC, 14