**Extensão de polinômios para o bidual
de certos espaços de Banach
e tópicos relacionados**

Leonardo Pellegrini Rodrigues

TESE APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE
DOUTOR EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Análise**

Orientadora: **Profa. Dra. Mary Lilian Lourenço**

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro da FAPESP

-São Paulo, junho de 2005-

**Extensão de polinômios para o bidual
de certos espaços de Banach
e tópicos relacionados**

Este exemplar corresponde à redação final
da dissertação devidamente corrigida e
defendida por Leonardo Pellegrini Rodrigues
e aprovada pela comissão julgadora.
São Paulo, 11 de agosto de 2005.

Banca examinadora:

- Profa. Dra. Mary Lilian Lourenço (Orientadora) - IME - USP
- Prof. Dr. Piotr Boleslaw Koszmider - IME - USP
- Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui - IMECC - UNICAMP
- Prof. Dr. Mario Carvalho de Matos - IMECC - UNICAMP
- Profa. Dra. Luiza Amália de Moraes - UFRJ

*A Mariela,
principalmente por sua paciência.*

Agradecimentos

À minha orientadora, profa. Mary Lilian Lourenço pela orientação e principalmente, pelo incentivo após o mestrado, sem o qual, provavelmente não daria prosseguimentos aos estudos.

A Mariela, por sua paciência comigo e por me ajudar com a apresentação da defesa.

À FAPESP, pelo apoio financeiro.

Resumo

O objetivo deste trabalho é estender alguns resultados conhecidos para polinômios homogêneos definidos em c_0 para outros espaços de Banach. Damos uma caracterização da extensão canônica de polinômios homogêneos definidos no predual dos espaços de sequências de Lorentz e para espaços de Banach com um determinado tipo de base de Schauder. Mostramos que existe uma única extensão que preserva a norma para polinômios 2-homogêneos que atingem sua norma no espaço considerado por C. Stegall em [26]. Também estudamos a imagem de uma certa função restrição em espaços de polinômios e funções holomorfas nos espaços de sequência de Lorentz.

Abstract

The main purpose of this work is to extend some known results for homogeneous polynomials on c_0 to others Banach spaces. We give a characterization of the canonical extension of homogeneous polynomials on the predual of Lorentz sequence spaces and for Banach spaces with an specific type of Schauder bases. We show that there is a unique norm-preserving extension for norm-attaining 2-homogeneous polynomials on the space considered by C. Stegall in [26]. We also study the range of a restriction map on spaces of polynomials and holomorphic functions on Lorentz sequences spaces.

Índice

Notação	vi
Introdução	1
1 Conceitos Preliminares	3
1.1 Espaços de Sequências	3
1.2 O Predual do Espaço de Lorentz	13
2 Uma Caracterização da Extensão Canônica	17
2.1 Caracterização no Predual do Espaço de Lorentz	17
2.2 Espaços de Marcinkiewicz	23
3 Bases em Espaços de Polinômios	39
3.1 Bases Polinomialmente Contráteis	39
3.2 Caracterização da Extensão Canônica	45

4	Unicidade da extensão em $c_0(\bigoplus_{i=1}^{\infty} l_2^i)$	49
4.1	Preliminares	49
4.2	Unicidade da extensão	50
5	Funções Holomorfas em $d_*(w, 1)$	61
5.1	Polinômios	61
5.2	Funções Holomorfas	66
	Referências Bibliográficas	71

Notação

Estaremos utilizando a seguinte notação:

$\mathbb{N}$	o conjunto dos números naturais
$\mathbb{N}_0$	o conjunto dos números inteiro não negativos
$\mathbb{K}$	o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
B_E	a bola unitária fechada de um espaço normado E
rB_E	a bola fechada de raio r de um espaço normado E
$\overset{\circ}{B}_E$	a bola unitária aberta de um espaço normado E
E'	o dual topológico de um espaço normado E munido da norma usual
E''	o bidual topológico de um espaço normado E munido da norma usual
c_{00}	o espaço vetorial das sequências quase nulas
c_0	o espaço de Banach das sequências de números complexos que convergem para zero
l_∞	o espaço de Banach das sequências de números complexos que são limitadas
l_p^n	o espaço vetorial $\mathbb{C}^n$ munido da norma $\ \cdot\ _p$
e_k	o vetor unitário $(0, 0, \dots, \overbrace{1}^k, 0, \dots)$

Introdução

O estudo de polinômios m -homogêneos contínuos surge como uma ferramenta para o estudo de funções holomorfas definidas em espaços de Banach. Por esta razão, os polinômios homogêneos têm sido objeto contínuo de pesquisa. Com o tempo, o estudo das propriedades dos polinômios homogêneos passou a adquirir importância por si só.

Um tópico que nos últimos anos apresenta diversos trabalhos científicos é o da extensão de polinômios homogêneos definidos em espaços de Banach. Enquanto foi mostrado por Aron e Berner [2] em 1978 que todo polinômio homogêneo definido em um espaço de Banach pode ser estendido para seu bidual, foi apenas em 1989 que Davie e Gamelin [7] mostraram que tal extensão, denominada extensão canônica ou extensão de Aron-Berner, preserva a norma. Assim, tais resultados somados nos apresentam um tipo de teorema de Hahn-Banach para polinômios homogêneos.

Recentemente, Aron, Boyd e Choi em [3] mostraram a unicidade da extensão que preserva a norma de polinômios 2-homogêneos que atingem a norma de c_0 para l_∞ , além de apresentar uma caracterização da extensão canônica de polinômios m -homogêneos contínuos definidos em c_0 . Resultados análogos no que diz respeito a unicidade foram obtidos por Han e Song em [8] para polinômios homogêneos definidos em $d_*(w, 1)$, o predual do espaço de Lorentz $d(w, 1)$ e depois estendidos por Kamińska e Lee em [17] para polinômios 2-homogêneos definidos nos espaços de Marcinkiewicz.

O objetivo deste trabalho é estender alguns resultados relacionados a extensão de

polinômios homogêneos para o bidual de certos espaços de Banach. Como referência para as definições e resultados envolvendo polinômios sugerimos [19], enquanto que os resultados acima descritos sobre extensão de polinômios em c_0 podem ser encontrados em [24]. A seguir descreveremos os assuntos abordados em cada capítulo.

Começamos por apresentar no capítulo 1 alguns resultados sobre os espaços de sequências de Lorentz, espaço este será utilizados em grande parte deste trabalho. Tais resultados encontram-se em textos antigos, cuja linguagem é bastante diferente da utilizada hoje e por este motivo optamos por descrevê-los de forma mais detalhada.

No capítulo 2, apresentamos uma condição necessária e suficiente para que tenhamos uma caracterização da extensão canônica de polinômios definidos no predual do espaço de sequência de Lorentz por meio de fraca-estrela continuidade. Em seguida estendemos o resultado para os espaços de Marcinkiewicz. Tais resultados se encontram, numa primeira versão, nas Atas dos Seminários Brasileiros de Análise [21, 23].

Apresentamos no capítulo 3 condições com as quais, num espaço de Banach com base de Schauder, o espaço dos polinômios m -homogêneos também possua base. Consequentemente, é possível estender a caracterização acima para tais espaços. Este resultado se encontra em [22].

No capítulo 4 demonstramos que todo polinômio 2-homogêneo que atinge sua norma definido no espaço considerado por C. Stegall em [26] possui uma única extensão que preserva a norma e mostramos que tal fato não se aplica a polinômios homogêneos de grau maior.

Finalmente no capítulo 5 consideramos uma aplicação do espaço das funções contínuas definidas no predual do espaço de Lorentz com valores no espaço de sequências que associa a cada função a sequência definida restringindo a base canônica. Esta aplicação foi estudada por Jaramillo [15] com o objetivo de relacionar a reflexividade do seu domínio com a sua imagem. Aqui caracterizamos a imagem desta aplicação quando restringimos seu domínio a espaços de polinômios e funções holomorfas.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

Iremos destacar neste capítulo os resultados necessários para o desenvolvimento do restante do trabalho.

1.1 Espaços de Sequências

Nesta seção, apresentamos as definições, bem como resultados, dos espaços de sequências de Lorentz. Tais resultados aparecem originalmente no artigo [12], de 1966. Porém, a linguagem deste é bastante diferente da utilizada hoje. Conceitos como base de Schauder e preduais aparecem de maneira implícita, e por este motivo, iremos descrevê-los de forma mais detalhada.

Definição 1.1 *Seja $\mathcal{U}$ uma coleção de subconjuntos de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ com as seguintes propriedades:*

- (i) $\mathcal{U}$ é dirigido pela inclusão;

- (ii) Para cada $A \in \mathfrak{U}$ e cada $i \in \mathbb{N}$, $\sup_{a \in A} |a_i| < \infty$;
 (iii) Para cada $i \in \mathbb{N}$, existem $A \in \mathfrak{U}$ e $a \in A$ tal que $a_i \neq 0$.

Para cada $A \in \mathfrak{U}$, seja

$$p_A(x) = \sup_{a \in A} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i a_i|,$$

onde $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ e definimos

$$\lambda_{\mathfrak{U}} = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : p_A(x) < \infty, \text{ para cada } A \in \mathfrak{U}\}.$$

Dizemos que um espaço de seqüências λ possui a *propriedade ideal* se, para qualquer $x \in \lambda$, dada uma seqüência qualquer y com $|y_i| \leq |x_i|$, $\forall i \in \mathbb{N}$, têm-se $y \in \lambda$.

Assim, claramente $\lambda_{\mathfrak{U}}$ é um espaço vetorial com a propriedade ideal, cada p_A é uma seminorma em $\lambda_{\mathfrak{U}}$ e a família $\{p_A\}_{A \in \mathfrak{U}}$ define uma topologia localmente convexa $\tau_{\mathfrak{U}}$ em $\lambda_{\mathfrak{U}}$. A propriedade (ii) mostra que $c_{00} \subset \lambda_{\mathfrak{U}}$, enquanto que a (iii) assegura que $\tau_{\mathfrak{U}}$ é Hausdorff.

Se $A \in \mathfrak{U}$, seja

$$\kappa_A = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : p_A(x) < \infty\}.$$

Então p_A é uma seminorma em κ_A e $\lambda_{\mathfrak{U}} = \bigcap_{A \in \mathfrak{U}} \kappa_A$.

Para cada $A \in \mathfrak{U}$, seja

$$I_A = \{i \in \mathbb{N} : \text{existe } a \in A \text{ com } a_i \neq 0\},$$

e considere o subespaço de κ_A

$$\nu_A = \{x \in \kappa_A : x_i = 0, \forall i \notin I_A\}.$$

Então, ν_A é um espaço normado por p_A . A próxima proposição mostra que ν_A é um espaço de Banach.

Proposição 1.2 *O espaço (ν_A, p_A) é um espaço de Banach.*

Demonstração: Seja $(x^n)_n$ uma sequência de Cauchy em ν_A . Seja $i \in I_A$ e tomamos $a \in A$ com $a_i \neq 0$. Então

$$|x_i^n - x_i^m| = \frac{1}{|a_i|} |x_i^n - x_i^m| |a_i| \leq \frac{1}{|a_i|} p_A(x^n - x^m).$$

Como $(x^n)_n$ é uma sequência de Cauchy em ν_A , $p_A(x^n - x^m)$ converge a zero. Assim, $(x_i^n)_n$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$ e portanto converge para um certo x_i . Agora, se $i \notin I_A$, $x_i^n = 0$, para todo n e obviamente x_i^n converge a zero. Assim, $(x^n)_n$ converge pontualmente para um certo x tal que $x_i = 0$, $\forall i \notin I_A$. Então, para que tenhamos $x \in \nu_A$, basta verificar que $p_A(x)$ é finito. Seja $M := \sup_n p_A(x^n) < \infty$, e seja $a \in A$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$\sum_{\substack{i \in I_A \\ i \leq k}} |x_i a_i| = \sum_{\substack{i \in I_A \\ i \leq k}} |\lim_n x_i^n| |a_i| = \lim_n \sum_{\substack{i \in I_A \\ i \leq k}} |x_i^n a_i| \leq \lim_n p_A(x^n) \leq M.$$

Assim, $\sum_{i \in I_A} |x_i a_i| \leq M$, para cada $a \in A$ e portanto $x \in \nu_A$.

Finalmente, seja $\varepsilon > 0$. Para cada $a \in A$ e $k \in \mathbb{N}$ temos

$$\sum_{\substack{i \in I_A \\ i \leq k}} |x_i^n - x_i| |a_i| = \lim_{m \geq n} \sum_{\substack{i \in I_A \\ i \leq k}} |x_i^n - x_i^m| |a_i| \leq \lim_{m \geq n} p_A(x^n - x^m) \leq \varepsilon,$$

para n suficientemente grande. Logo, $p_A(x^n - x) \rightarrow 0$.

■

Teorema 1.3 $(\lambda_{\mathcal{U}}, \tau_{\mathcal{U}})$ é completo.

Demonstração: Seja $(x^\alpha)_\alpha$ uma rede de Cauchy em $\lambda_{\mathcal{U}}$. Considere $i \in \mathbb{N}$. Pela propriedade (iii) da definição de $\lambda_{\mathcal{U}}$, existem $A \in \mathcal{U}$ e $a \in A$ com $a_i \neq 0$. Assim,

$$|x_i^\alpha - x_i^\beta| = \frac{1}{|a_i|} |x_i^\alpha - x_i^\beta| |a_i| \leq \frac{1}{|a_i|} p_A(x^\alpha - x^\beta).$$

Assim, para cada i , $(x_i^\alpha)_\alpha$ é uma rede de Cauchy em $\mathbb{K}$, e então $(x^\alpha)_\alpha$ converge pontualmente para um certo $x^0 \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$.

Para cada $A \in \mathfrak{U}$, considere a projeção $\Theta_A : \lambda_{\mathfrak{U}} \rightarrow \nu_A$ definida por

$$\Theta_A(x)_i = \begin{cases} x_i, & \text{se } i \in I_A; \\ 0, & \text{se } i \notin I_A. \end{cases}$$

Claro que Θ_A é linear e contínua e portanto $(\Theta_A(x^\alpha))_\alpha$ é uma rede de Cauchy em ν_A . Pela proposição anterior, $(\Theta_A(x^\alpha))_\alpha$ converge para um certo $x^A \in \nu_A$ e pela norma de ν_A , $(\Theta_A(x^\alpha))_\alpha$ converge pontualmente para x^A . Mas como $(x^\alpha)_\alpha$ converge pontualmente para x^0 , claramente $(\Theta_A(x^\alpha))_\alpha$ converge pontualmente para $\Theta_A(x^0)$. Devemos ter então $\Theta_A(x^0) = x^A$. Logo,

$$p_A(x^0) = p_A(x^A) < \infty,$$

e portanto $x^0 \in \kappa_A$. Como A era arbitrário, segue que $x^0 \in \bigcap_{A \in \mathfrak{U}} \kappa_A = \lambda_{\mathfrak{U}}$.

Finalmente, para cada $A \in \mathfrak{U}$ temos

$$p_A(x^\alpha - x^0) = \sup_{a \in A} \sum_{i \in I_A} |x_i^\alpha - x_i^0| |a_i| = \sup_{a \in A} \sum_{i \in \mathbb{N}} |\Theta_A(x^\alpha)_i - x_i^A| |a_i| = p_A(\Theta_A(x^\alpha) - x^A),$$

que converge a zero. Logo $(x^\alpha)_\alpha$ converge para x^0 em $(\lambda_{\mathfrak{U}}, \tau_{\mathfrak{U}})$. ■

Seja x uma sequência qualquer. Dada uma função $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definimos a sequência x_φ por $(x_\varphi)_i = x_{\varphi(i)}$. Seja Π o conjunto de todas as permutações dos naturais. Dizemos que um espaço de sequências λ é *simétrico* se, para toda permutação $\pi \in \Pi$ temos

$$x \in \lambda \Rightarrow x_\pi \in \lambda.$$

O próximo lema nos fornece uma propriedade bastante útil dos espaços simétrico com a propriedade ideal.

Lema 1.4 *Seja λ um espaço de sequências simétrico e com a propriedade ideal. Se $x \in \lambda$, então para toda função injetora $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ temos que $x_\varphi \in \lambda$.*

Demonstração: Seja $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ injetora. Tomamos uma permutação $\pi \in \Pi$ tal que $\pi(i) = \varphi(i)$ para i ímpar. Assim

$$(x_{\varphi(1)}, x_{\pi(2)}, x_{\varphi(3)}, x_{\pi(4)}, \dots) = x_\pi \in \lambda,$$

e pela propriedade ideal de λ

$$(x_{\varphi(1)}, 0, x_{\varphi(3)}, 0, \dots) \in \lambda.$$

Da mesma forma, mostramos que

$$(0, x_{\varphi(2)}, 0, x_{\varphi(4)}, 0, \dots) \in \lambda,$$

e somando obtemos que $x_\varphi \in \lambda$. ■

O próximo teorema mostra que o principal interesse é estudar os espaços simétricos com propriedade ideal que estão contidos em c_0 .

Teorema 1.5 *Se λ é um espaço de sequências simétrico com a propriedade ideal, então ou $\lambda \subset c_0$, ou $\lambda = l_\infty$, ou $\lambda = \mathbb{K}^\mathbb{N}$.*

Demonstração: Primeiro vamos supor que $\lambda \not\subset c_0$, e seja $x \in \lambda \setminus c_0$. Então existe $\varepsilon > 0$ e um subconjunto infinito J de $\mathbb{N}$ tal que $|x_j| \geq \varepsilon$, $\forall j \in J$. Tomamos $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow J$ bijetora. Assim, pelo lema anterior, $x_\varphi \in \lambda$, e temos que $|x_{\varphi(i)}| \geq \varepsilon$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Dado $y \in l_\infty$, temos que $\frac{\|y\|}{\varepsilon} x_\varphi \in \lambda$ e pela propriedade ideal de λ segue que $y \in \lambda$. Logo $\lambda \supset l_\infty$.

Vamos supor agora que $\lambda \supsetneq l_\infty$ e seja $x \in \lambda \setminus l_\infty$. Se y é uma sequência qualquer, podemos tomar $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ injetora tal que $|x_{\varphi(i)}| \geq |y_i|$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Novamente pelo lema anterior, x_φ e pela propriedade ideal segue que $y \in \lambda$ e portanto $\lambda = \mathbb{K}^\mathbb{N}$.

■

Agora vamos nos restringir a um caso particular de espaços da forma $\lambda_{\mathbf{u}}$. Seja w uma sequência não nula, $A = \{w_\pi : \pi \in \Pi\}$ e vamos considerar o espaço λ_A .

Observe que pela definição 1.1 item (iii) devemos ter $w \neq 0$, enquanto que pelo item (ii) devemos ter $w \in l_\infty$. Observe também que tais hipóteses não são restritivas, já que se $w = 0$, claramente $\lambda_A = \mathbb{K}^\mathbb{N}$, enquanto que se $w \notin l_\infty$ então $\lambda_A = \{0\}$. De fato, se $x_i \neq 0$, para todo $M > 0$ existe w_j com $|w_j| > \frac{M}{|x_i|}$. Tomamos uma permutação $\pi \in \Pi$ com $\pi(j) = i$ e $\pi(i) = j$ e assim temos que

$$p_A(x) \geq |x_i w_{\pi(i)}| > M.$$

Logo $\lambda_A = \{0\}$.

Neste caso, observe que os espaços λ_A , κ_A e ν_A coincidem, já que $I_A = \mathbb{N}$. Logo, pela proposição 1.2, λ_A é um espaço de Banach.

Para tornar mais nítida a notação, denotaremos os espaços λ_A da forma acima por μ_w e para $x \in \mu_w$, escreveremos $p_A(x) = \|x\|_{\mu_w}$. A próxima proposição apresenta outras condições para w com as quais μ_w é um espaço conhecido.

Teorema 1.6 *Seja w uma sequência com $0 \neq w \in l_\infty$. Então:*

- (i) *As inclusões $l_1 \rightarrow \mu_w \rightarrow l_\infty$ são bem definidas e contínuas.*
- (ii) *Se $w \notin c_0$, então $\mu_w = l_1$ e a identidade é um isomorfismo topológico.*
- (iii) *Se $w \in l_1$, então $\mu_w = l_\infty$ e a identidade é um isomorfismo topológico.*

Demonstração: (i): Se $x \in l_1$, então

$$\|x\|_{\mu_w} = \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i w_{\pi(i)}| \leq \|w\|_{\infty} \|x\|_1,$$

e portanto $x \in \mu_w$ e a inclusão $l_1 \rightarrow \mu_w$ é contínua.

Seja k tal que $w_k \neq 0$, e tomamos uma sequência de permutações $(\pi_j)_j$ satisfazendo $\pi_j(j) = k$. Então, se $x \in \mu_w$,

$$\|x\|_{\mu_w} \geq \sup_j \sum_{i=1}^{\infty} |x_i w_{\pi_j(i)}| \geq \sup_j |x_j w_{\pi_j(j)}| = \|x\|_{\infty} |w_k|,$$

e portanto $x \in l_{\infty}$ e a inclusão $\mu_w \rightarrow l_{\infty}$ é contínua.

(ii): Se $w \notin c_0$, então existe $\varepsilon > 0$ e um conjunto infinito J com $|w_j| > \varepsilon$, $\forall j \in J$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos uma permutação $\pi_n \in \Pi$ de modo que $\pi_n(i) \in J$, $\forall i \leq n$. Assim, para todo $x \in \mu_w$,

$$\varepsilon \sum_{i=1}^n |x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |w_{\pi_n(i)}| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| |w_{\pi_n(i)}| \leq \|x\|_{\mu_w}.$$

Como a desigualdade é válida para todo n , temos que $\varepsilon \|x\|_1 \leq \|x\|_{\mu_w}$ e portanto $\mu_w \subset l_1$ e a inclusão é contínua. O item (i) finaliza a demonstração.

(iii): Se $w \in l_1$, então para todo $x \in l_{\infty}$,

$$\|x\|_{\mu_w} = \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i w_{\pi(i)}| \leq \|x\|_{\infty} \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} |w_{\pi(i)}| = \|x\|_{\infty} \|w\|_1.$$

e portanto, $l_{\infty} \subset \mu_w$ e a inclusão é contínua. Novamente completamos a demonstração usando o item (i). ■

O teorema anterior mostra que o principal interesse é o caso em que $w \in c_0 \setminus l_1$, já que caso contrário, μ_w é um espaço conhecido. Observe ainda que neste caso, pelo teorema 1.5, temos $\mu_w \subset c_0$, pois $e = (1, 1, \dots) \notin \mu_w$ e portanto $\mu_w \neq l_{\infty}$ e $\mu_w \neq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Seja então $x \in c_0$. Definimos a sequência $x' = (x'_i)$ por

$$x'_i = \begin{cases} \text{o } i\text{-ésimo termo não nulo de } x, & \text{caso exista tal termo;} \\ 0, & \text{caso não exista o } i\text{-ésimo termo não nulo de } x. \end{cases}$$

Se $x \in c_0$, existe uma permutação π tal que $|x'_{\pi(i)}| \geq |x'_{\pi(j)}|$, para $i \leq j$. Denotaremos por $[x] = ([x]_i)$ a sequência $(|x'_{\pi(i)}|)_i$. A sequência $[x]$ assim obtida é chamada *rearranjo decrescente* de x .

Pelo lema 1.4, fica claro que se x pertence a μ_w , então x' e $[x]$ também pertencem. A próxima proposição nos mostra que suas normas coincidem.

Proposição 1.7 *Seja $w \in c_0 \setminus l_1$. Então*

$$\|x\|_{\mu_w} = \|x'\|_{\mu_w} = \|[x]\|_{\mu_w}.$$

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, existem $\pi \in \Pi$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que

$$\|x'\|_{\mu_w} - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^n |x'_i w_{\pi(i)}|.$$

Tomamos $\sigma \in \Pi$ tal que $x_{\sigma(i)} = x'_i$, para $1 \leq i \leq n$, e assim

$$\|x'\|_{\mu_w} - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^n |x'_i w_{\pi(i)}| = \sum_{i=1}^n |x_{\sigma(i)} w_{\pi(i)}| \leq \|x\|_{\mu_w}.$$

Como ε era arbitrário, segue que $\|x'\|_{\mu_w} \leq \|x\|_{\mu_w}$. De maneira análoga mostramos que $\|x\|_{\mu_w} \leq \|x'\|_{\mu_w}$, e portanto $\|x\|_{\mu_w} = \|x'\|_{\mu_w}$. Como $[x] = |x'_\pi|$, para alguma permutação $\pi \in \Pi$, temos também que $\|x'\|_{\mu_w} = \|[x]\|_{\mu_w}$.

■

Observação 1.8 Com argumentos análogos, podemos mostrar que as igualdades da proposição anterior continuam válidas para valores infinitos e portanto temos que

$$\sup_{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i w_{\pi(i)}| = \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} |x'_i w_{\pi(i)}| = \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} |[x]_i w_{\pi(i)}|.$$

Vamos agora obter outra expressão para a norma de μ_w . Utilizaremos o seguinte lema cuja demonstração se encontra em [13].

Lema 1.9 *Sejam $a = (a_1, \dots, a_n)$ e $b = (b_1, \dots, b_n)$ n -úplas de números não negativos. Sejam $\bar{a}$ e $\bar{b}$ as n -úplas obtidas reordenando a e b respectivamente de maneira crescente. Então temos que*

$$\sum_{i=1}^n \bar{a}_i \bar{b}_{n-i+1} \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sum_{i=1}^n \bar{a}_i \bar{b}_i.$$

Proposição 1.10 *Seja $w \in c_0 \setminus l_1$. Então para $x \in c_0$ temos que*

$$\sup_{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i w_{\pi(i)}| = \sum_{i=1}^{\infty} [x]_i [w]_i.$$

Consequentemente,

$$\mu_w = \{x \in c_0 : \sum_{i=1}^{\infty} [x]_i [w]_i < \infty\}.$$

Demonstração: Vamos supor inicialmente que ambos os lados da igualdade são finitos. Pela proposição anterior, é suficiente mostrar que $\|[x]\|_{\mu_w} = \sum_{i=1}^{\infty} [x]_i [w]_i$.

Dado $\varepsilon > 0$, existem $\pi \in \Pi$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que

$$\|[x]\|_{\mu_w} - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^n [x]_i |w_{\pi(i)}|.$$

Seja $J = \{\pi(1), \dots, \pi(n)\}$, e escolhamos $\sigma \in \Pi$ de modo que $\sigma(J) = J$ e $|w_{\sigma\pi(i)}| \geq |w_{\sigma\pi(i+1)}|$, para $1 \leq i \leq n-1$, e assim, pelo lema anterior

$$\sum_{i=1}^n |[x]_i w_{\pi(i)}| \leq \sum_{i=1}^n |[x]_i w_{\sigma\pi(i)}| \leq \sum_{i=1}^n [x]_i [w]_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} [x]_i [w]_i.$$

Como ε era arbitrário, segue que $\|[x]\|_{\mu_w} \leq \sum_{i=1}^{\infty} [x]_i [w]_i$.

Por outro lado, para todo $\varepsilon > 0$, existem $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=1}^{\infty} [x]_i [w]_i - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^n [x]_i [w]_i$. Tomando uma permutação π tal que $|w_{\pi(i)}| = [w]_i$ para $i \leq n$ obtemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} [x]_i [w]_i - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^n [x]_i |w_{\pi(i)}| \leq \|x\|_{\mu_w}.$$

Como ε era arbitrário, temos que $\sum_{i=1}^{\infty} [x]_i [w]_i \leq \|x\|_{\mu_w}$.

Com argumentos similares aos anteriores, mostramos que se um dos lados da igualdade for infinito, o outro também será. Logo $\sup_{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i w_{\pi(i)}| = \sum_{i=1}^{\infty} [x]_i [w]_i$. ■

Se $w \in c_0 \setminus l_1$, μ_w é chamado de espaço de seqüências de Lorentz, e denotado por $d(w, 1)$. Como consequência da proposição anterior, temos que, neste caso, $\mu_w = \mu_{[w]}$. Assim, podemos supor que w é uma seqüência decrescente de números reais positivos, como comumente aparece na definição de espaço de Lorentz, que enfatizaremos a seguir.

Definição 1.11 *Seja $w = (w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma seqüência decrescente de números positivos em $c_0 \setminus l_1$ com $w_1 = 1$. O espaço de seqüência de Lorentz $d(w, 1)$ é o espaço de Banach de todas as seqüências de escalares (reais ou complexos) $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ para as quais*

$$\|x\|_{d(w,1)} := \sup_{\pi \in \Pi} \sum_{i=1}^{\infty} |x_{\pi(i)}| w_i < \infty.$$

Observação 1.12 O “1” que aparece na notação $d(w, 1)$ se deve ao fato de que podemos definir espaço de Banach análogos $d(w, p)$, $1 < p < \infty$ pondo

$$d(w, p) = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|x\|_{d(w,p)} := \sup_{\pi \in \Pi} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_{\pi(i)}|^p w_i \right)^{1/p} < \infty\}.$$

Porém, tais espaços são reflexivos e portanto nosso interesse está no caso $p = 1$.

1.2 O Predual do Espaço de Lorentz

Nesta seção, vamos mostrar que o espaço de Lorentz admite um predual. Começamos com um resultado sobre bases de Schauder em μ_w . Lembramos que uma base de Schauder (x_i) em um espaço de Banach E é dita *limitadamente completa* quando para toda sequência de escalares (α_n) com $\sup_m \left\| \sum_{n=1}^m \alpha_n x_n \right\| < \infty$ tem-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ converge em E . A base é dita *contrátil* se a sequência de seus funcionais coordenados (x'_i) é uma base de Schauder para E' .

Teorema 1.13 *Seja $w \notin l_1$. Então, a sequência unitária canônica (e_i) forma uma base de Schauder limitadamente completa para μ_w .*

Demonstração: O teorema 10 de [12] mostra que para todo $x \in \mu_w$, $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$. A unicidade dos coeficientes é imediata, já que a convergência na norma de μ_w implica convergência pontual. Assim, a sequência unitária canônica (e_i) é uma base de Schauder para μ_w e resta apenas mostrar que é limitadamente completa.

Seja então uma sequência $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ tal que $\sup_m \left\| \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i \right\| = M < \infty$. Considere $y = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$. Dada uma permutação $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, temos claramente para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^k |\alpha_i| w_{\pi(i)} \leq \left\| \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i \right\| \leq M.$$

Assim, $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| w_{\pi(i)} < M$ para toda permutação π e portanto, $y \in \mu_w$. Novamente pelo teorema 10 de [12] temos que $y = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$, portanto a série $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ é convergente. ■

O teorema anterior já nos mostra que $d(w, 1)$ admite um predual, pois possui uma base limitadamente completa. Vamos agora obter uma expressão para esse predual.

Denotamos por $\mu_w^\times$ o conjunto de todas as seqüências de escalares $(y_i)_i$ para as quais

$$\sum_{i=1}^{\infty} |y_i x_i| < \infty,$$

para todo $x \in \mu_w$. Temos pelo corolário do teorema 10 de [12] que se $w \notin l_1$, $\mu_w^\times$ pode ser identificado com o dual de μ_w . Assim, pelo teorema 11 de [12], temos a seguinte caracterização do dual de $d(w, 1)$ que denotaremos por $d^*(w, 1)$.

Teorema 1.14 [12] *Suponha que $w \in c_0 \setminus l_1$ seja uma seqüência decrescente de números reais positivos. Então $x \in d^*(w, 1)$ se, e somente se,*

$$\sup_k \frac{\sum_{i=1}^k [x]_i}{\sum_{i=1}^k w_i} < \infty.$$

Temos ainda que

$$\|x\|_{d^*(w, 1)} := \sup_k \frac{\sum_{i=1}^k [x]_i}{\sum_{i=1}^k w_i}.$$

O próximo teorema nos fornece uma expressão para o predual do espaço de seqüência de Lorentz $d(w, 1)$.

Teorema 1.15 *Seja $w \in c_0 \setminus l_1$ uma seqüência decrescente de números reais positivos. Então $d(w, 1)$ admite um predual definido por*

$$d_*(w, 1) = \left\{ x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in c_0 : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^k [x]_i}{\sum_{i=1}^k w_i} = 0 \right\},$$

onde a norma é a induzida de $d^*(w, 1)$. Temos ainda que a sequência unitária canônica (e_i) é uma base contrátil para $d_*(w, 1)$.

Demonstração: Pelo teorema 1.13, a sequência unitária canônica forma uma base limitadamente completa para $d(w, 1)$. Então, $d(w, 1)$ admite um predual $d_*(w, 1)$ que pode ser caracterizado por $\overline{[e'_i : i \in \mathbb{N}]}$ e (e'_i) é uma base contrátil para $\overline{[e'_i : i \in \mathbb{N}]}$ (veja por exemplo [18]). Pela caracterização de $d^*(w, 1)$ dada anteriormente, temos que $d_*(w, 1) = \overline{[e_i : i \in \mathbb{N}]}^{d^*(w, 1)}$. Mas pelo teorema 12 de [12], um elemento de $d^*(w, 1)$ pertence ao fecho de $[e_i : i \in \mathbb{N}]$ se, e somente se, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^k [x]_i}{\sum_{i=1}^k w_i} = 0$. Logo,

$$d_*(w, 1) = \left\{ x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in c_0 : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^k [x]_i}{\sum_{i=1}^k w_i} = 0 \right\}.$$

■

Capítulo 2

Uma Caracterização da Extensão Canônica

Neste capítulo, apresentamos uma caracterização da extensão canônica de polinômios homogêneos nos duais dos espaços de Lorentz e nos espaços de Marcinkiewicz. O espaço de todos os polinômios n -homogêneos contínuos de E em $\mathbb{C}$ será denotado por $P(^nE)$. Denotaremos por $P_f(^nE)$ o subespaço de todos os polinômios n -homogêneos de tipo finito, ou seja, $P_f(^nE) := [\phi^n : \phi \in E']$. Indicaremos por $P_w(^nE)$ o subespaço dos polinômios n -homogêneos fracamente contínuos quando restritos aos subconjuntos limitados de E e por $P_{wsc}(^nE)$ o dos fracamente sequencialmente contínuos. Dado $P \in P(^nE)$ denotaremos por $\tilde{P}$ sua extensão canônica para E'' .

2.1 Caracterização no Predual do Espaço de Lorentz

Em um recente trabalho, Aron, Boyd e Choi [3] investigaram certas classes de polinômios homogêneos contínuos em c_0 para as quais há unicidade da extensão para l_∞ ,

além de apresentar uma caracterização da extensão canônica de polinômios contínuos em c_0 .

Em [8], Choi, Han e Song obtiveram os mesmos resultados, no que diz respeito à unicidade, para polinômios homogêneos definidos em $d_*(w, 1)$, o predual do espaço de Lorentz $d(w, 1)$. Porém, a caracterização obtida em [3] não se aplica, em geral, para polinômios homogêneos definidos em $d_*(w, 1)$.

Nesta seção, iremos caracterizar os espaços $d^*(w, 1)$ nos quais a topologia polinomial-estrela coincide com a fraca-estrela sobre os subconjuntos limitados e com isso, apresentamos uma condição para w que torna válida tal caracterização.

Observemos inicialmente alguns fatos sobre base de Schauder em espaços de polinômios homogêneos. Seja E um espaço de Banach com base de Schauder $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ e seja $(x'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ a sequência de seus funcionais coordenados. Dizemos que $P \in P^n(E)$ é um monômio de grau n em relação à base $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ se P é da forma $P = x'_{i_1} x'_{i_2} \cdots x'_{i_n}$.

Considere a ordem quadrada em $\mathbb{N}^n$ definida recursivamente da seguinte forma:

- Se $n = 1$ a ordem quadrada coincide com a ordem usual dos naturais.
- Supondo $(s_1, s_2, \dots)$ a ordenação de $\mathbb{N}^{n-1}$, definimos a ordem quadrada em $\mathbb{N}^n$ por

$$(s_1, 1), (s_1, 2), (s_2, 2), (s_2, 1), (s_1, 3), (s_2, 3), (s_3, 3), (s_3, 2), (s_3, 1), \dots$$

Assim, a ordem quadrada de $\mathbb{N}^2$ é a sugerida pela figura abaixo

$$\begin{array}{ccccc} (1, 1) & \rightarrow & (1, 2) & & (1, 3) \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ (2, 1) & \leftarrow & (2, 2) & & (2, 3) \cdots \\ & & & & \downarrow \\ (3, 1) & \leftarrow & (3, 2) & \leftarrow & (3, 3) \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Mais detalhes sobre tal ordenação podem ser encontrados em [1].

Iremos nos restringir ao subconjunto $D^n \subset \mathbb{N}^n$ formado pelos $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ tais que $j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_n$ ordenado pela ordem quadrada induzida. Dimant e Dineen mostram em [9] que se E é um espaço de Banach com base contrátil, para cada natural n , os monômios de grau n indexados por D^n formam uma base de Schauder para $(P_w(^n E), \|\cdot\|)$. Pelo que foi visto no capítulo anterior, a sequência unitária canônica $(e_i)_i$ forma uma base contrátil para $d_*(w, 1)$. Assim, os monômios de grau n em relação à base canônica $(e_i)_i$ de $d_*(w, 1)$ formam uma base de Schauder para $(P_w(^n d_*(w, 1)), \|\cdot\|)$.

A seguir, caracterizamos os espaços $d^*(w, 1)$ nos quais a topologia polinomial-estrela coincide com a fraca-estrela sobre os subconjuntos limitados. Lembramos que uma rede $(x_\alpha)_{\alpha \in I} \subset E''$ converge para $x \in E''$ na *topologia polinomial-estrela* de E'' se $\tilde{P}(x_\alpha)$ converge para $\tilde{P}(x)$ em $\mathbb{C}$, para todo polinômio P em E . Claramente, é suficiente trabalhar com polinômios homogêneos. Começamos com um lema.

Lema 2.1 *Se $w \in l_p$, para algum $p > 1$, então $d_*(w, 1) \subset l_p$.*

Demonstração: Suponha que $w \in l_p$, para algum $p > 1$. Denotamos por p^* o conjugado de p , ou seja, o número real tal que $1/p + 1/p^* = 1$, e seja $x \in l_{p^*}$. Dada uma permutação π dos naturais, temos por Hölder que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_{\pi(i)}| w_i \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_{\pi(i)}|^{p^*} \right)^{1/p^*} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |w_i|^p \right)^{1/p} = \|x\|_{p^*} \|w\|_p < \infty.$$

Assim, $l_{p^*} \subset d(w, 1)$ e a inclusão $i : l_{p^*} \rightarrow d(w, 1)$ é contínua. Então a transposta $i^t : d^*(w, 1) \rightarrow (l_{p^*})' = l_p$ é bem definida e $d^*(w, 1) \subset l_p$.

■

Teorema 2.2 *A topologia polinomial-estrela de $d^*(w, 1)$ coincide com a fraca-estrela sobre os subconjuntos limitados se, e somente se, $w \notin l_p, \forall p > 1$.*

Demonstração: Claramente a topologia polinomial-estrela é mais fina que a fraca-estrela.

Suponha que $w \notin l_p, \forall p > 1$. Seja $(x_\alpha)_{\alpha \in I} \subset d^*(w, 1)$ uma rede limitada, que podemos supor contida em $B_{d^*(w, 1)}$, fraca-estrela convergente para $x \in B_{d^*(w, 1)}$.

Sejam $P \in P(n d_*(w, 1))$ e $\epsilon > 0$. Como a base (e_i) de $d_*(w, 1)$ é contrátil, segue de [9] que os monômios de grau n com a ordem quadrada formam uma base de Schauder para $(P_w(n d_*(w, 1)), \|\cdot\|)$. Como $w \notin l_n$, temos, por [20], que $P_{wsc}(n d_*(w, 1)) = P(n d_*(w, 1))$. Mas como $d(w, 1)$ é separável, a topologia fraca de $d_*(w, 1)$ é metrizável sobre os limitados e então $P_{wsc}(n d_*(w, 1)) = P_w(n d_*(w, 1)) = P(n d_*(w, 1))$.

Seja $\{s_1, s_2, \dots\}$ a ordenação de $\mathbb{N}^n$ segundo a ordem quadrada. Podemos então encontrar um polinômio da forma $Q = \sum_{i=1}^k P_{s_i}$ em $d_*(w, 1)$ tal que $\|P - Q\| < \frac{\epsilon}{3}$. Como a extensão canônica é uma isometria, temos que $\|\tilde{P} - \tilde{Q}\| < \frac{\epsilon}{3}$. Como (x_α) converge fraca-estrela para x , temos ainda que

$\tilde{P}_{s_i}(x_\alpha) = \tilde{x}'_{i_1}(x_\alpha) \cdots \tilde{x}'_{i_n}(x_\alpha) = x_\alpha(x'_{i_1}) \cdots x_\alpha(x'_{i_n}) \rightarrow x(x'_{i_1}) \cdots x(x'_{i_n}) = \tilde{x}'_{i_1}(x) \cdots \tilde{x}'_{i_n}(x)$,
ou seja, $\tilde{P}_{s_i}(x_\alpha) \rightarrow \tilde{P}_{s_i}(x)$. Logo

$$\tilde{Q}(x_\alpha) = \sum_{i=1}^k \tilde{P}_{s_i}(x_\alpha) \rightarrow \sum_{i=1}^k \tilde{P}_{s_i}(x) = \tilde{Q}(x).$$

Assim, podemos encontrar $\alpha_0 \in I$ tal que $\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow |\tilde{Q}(x_\alpha) - \tilde{Q}(x)| < \frac{\epsilon}{3}$, e portanto,

$$\begin{aligned} |\tilde{P}(x_\alpha) - \tilde{P}(x)| &\leq |\tilde{P}(x_\alpha) - \tilde{Q}(x_\alpha)| + |\tilde{Q}(x_\alpha) - \tilde{Q}(x)| + |\tilde{P}(x) - \tilde{Q}(x)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, a rede limitada $(x_\alpha)_{\alpha \in I} \subset d^*(w, 1)$ também converge na topologia polinomial-estrela e as duas topologias coincidem sobre os limitados.

Por outro lado, suponha que $w \in l_p$, para algum $p > 1$. Se N é um inteiro maior ou igual a p , então $w \in l_N$. Então, pelo lema 2.1, podemos então definir o polinômio N -homogêneo em $d_*(w, 1)$

$$P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^N.$$

A extensão canônica de P é $\tilde{P}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^N$ em $d^*(w, 1)$. Vemos então que $(e_i) \subset d^*(w, 1)$ converge fraca-estrela para zero, mas $\tilde{P}(e_i) = 1$, $\forall i \in \mathbb{N}$. ■

A seguir, apresentamos a versão para $d^*(w, 1)$ do teorema 5 de [3].

Proposição 2.3 *Se $w \notin l_p$, $\forall p > 1$, então, para $P \in P(n d^*(w, 1))$ são equivalentes:*

- (i) *P é a extensão canônica de algum polinômio homogêneo em $d_*(w, 1)$,*
- (ii) *P é w^* -contínuo sobre os limitados.*

Reciprocamente, se (i) e (ii) são equivalentes, então $w \notin l_p$, $\forall p > 1$.

Demonstração: Seja $P = \tilde{Q}$, com $P \in P(n d_*(w, 1))$. Se $(x_\alpha)_{\alpha \in I} \subset d^*(w, 1)$ é uma rede limitada fraca-estrela convergente para $x \in d^*(w, 1)$, então, pelo teorema 2.2, $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge polinomial-estrela para x e portanto $P(x_\alpha) = \tilde{Q}(x_\alpha) \rightarrow \tilde{Q}(x) = P(x)$.

Suponha agora P w^* -contínuo sobre os limitados, e considere $Q = P|_{d_*(w, 1)}$. Seja $\xi \in B_{d^*(w, 1)}$. Por [7], a bola unitária de um espaço de Banach é polinomial-estrela densa

na bola de seu bidual e portanto, existe uma rede $(x_\alpha)_{\alpha \in I} \subset B_{d_*(w,1)}$ tal que, para todo natural k , e para todo polinômio k -homogêneo R temos $R(x_\alpha) \rightarrow \tilde{R}(\xi)$, em particular,

$$x_\alpha \xrightarrow{w^*} x \text{ e } Q(x_\alpha) \rightarrow \tilde{Q}(x).$$

Mas como P é w^* -contínuo sobre os limitados, temos que $Q(x_\alpha) = P(x_\alpha) \rightarrow P(x)$. Logo $P(x) = \tilde{Q}(x)$.

Para a recíproca, como na proposição anterior, basta tomar o polinômio definido em $d^*(w, 1)$ dado por $\tilde{P}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^N$ da demonstração da proposição anterior, que é extensão canônica de $P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^N$, $x \in d_*(w, 1)$ mas não é w^* -contínuo sobre os limitados, já que $\tilde{P}(e_i) = 1$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

■

Com uma adaptação da demonstração de 2.2 temos a seguinte versão da proposição envolvendo o grau do polinômio.

Proposição 2.4 *Sejam $N \in \mathbb{N}$ e $w \notin l_N$. Então, para $P \in P(^N d^*(w, 1))$, são equivalentes:*

- (i) *P é a extensão canônica de algum polinômio homogêneo em $d_*(w, 1)$,*
- (ii) *P é w^* -contínuo sobre os limitados.*

Reciprocamente, se (i) e (ii) são equivalentes para $P \in P(^N d^(w, 1))$, então $w \notin l_N$.*

Demonstração: Segue da demonstração do teorema 2.2 que se $w \notin l_N$, para algum N e $(x_\alpha)_{\alpha \in I} \subset d^*(w, 1)$ é uma rede limitada w^* -convergente para x então

$\tilde{P}(x_\alpha) \rightarrow \tilde{P}(x)$, $\forall P \in P(Nd_*(w, 1))$. Assim, com argumentos análogos aos usados na demonstração da proposição 2.3 segue o resultado. ■

2.2 Espaços de Marcinkiewicz

Em [16], Kamińska e Lee generalizaram os resultados apresentados em [8] sobre unicidade da extensão de polinômios 2-homogêneos que atingem sua norma para os espaços de Marcinkiewicz. Nesta seção, iremos estender a caracterização da extensão canônica da seção anterior para tais espaços.

A fim de apresentar a definição dos espaços de Marcinkiewicz, destacaremos a seguir algumas definições e resultados.

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida σ -finito e μ -completo. Vamos denotar por $L_0(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, ou simplesmente por $L_0(\mu)$, o espaço vetorial das funções a valores escalares $\mathcal{A}$ -mensuráveis munido da topologia da convergência em medida sobre os conjuntos μ -finitos.

Definição 2.5 *Um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$ é dito um espaço de Banach de funções em $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ se é um subespaço (vetorial) de $L_0(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ tal que*

- (i) *X contém as funções características de conjuntos de medida finita;*
- (ii) *(Propriedade ideal) Se $f \in L_0(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $g \in X$ e $|f| \leq |g|$ μ -qs, então $f \in X$ e $\|f\| \leq \|g\|$.*

Além disso, se B_X é fechada em $L_0(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ dizemos que X tem a propriedade de Fatou.

Exemplo 2.6 Consideremos $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_c)$, onde μ_c é a medida de contagem em $\mathbb{N}$. Claro que $L_0(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_c) = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Então, um espaço de Banach de funções X em $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_c)$ é qualquer espaço de Banach de seqüências que satisfaça as propriedades (i) e (ii) da definição 2.5. No que se segue, chamaremos tais espaços apenas de espaço de Banach de seqüências. Observe que nesse caso, as funções características de conjuntos de medida finita são elementos de c_{00} , o espaço vetorial das seqüências quase nulas. Assim, temos que $e_i \in X$ e portanto $c_{00} \subset X$.

Como os conjuntos μ_c -finitos são os subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, é imediato que a topologia da convergência em medida sobre os conjuntos μ_c -finitos é a topologia produto de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (topologia da convergência pontual). De fato, se (x^α) é uma rede que converge em medida para x em cada subconjunto finito A de $\mathbb{N}$, então, como a medida considerada é a de contagem, (x^α) converge pontualmente para x em A . Logo, x_i^α converge para x_i para todo $i \in A$. Como A é arbitrário, segue que x_i^α converge para x_i para todo $i \in \mathbb{N}$. Por outro lado, se x_i^α converge para x_i para todo $i \in \mathbb{N}$, dado um conjunto finito $A \subset \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$, existe α_0 tal que para todo $\alpha \geq \alpha_0$ temos $|x_i^\alpha - x_i| < \varepsilon$, $\forall i \in A$. Assim,

$$\mu_c(\{i \in A : |x_i^\alpha - x_i| \geq \varepsilon\}) = 0 < \varepsilon, \forall \alpha \geq \alpha_0,$$

e portanto (x^α) converge em medida para x sobre A .

Assim, como a topologia da convergência em medida sobre os conjuntos μ_c -finitos é a topologia da convergência pontual, tomando-se o limite pontual, é imediato que a bola de l_∞ é fechada em $L_0(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_c)$. Logo, l_∞ é um espaço de Banach de seqüências em $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_c)$ com a propriedade de Fatou.

Por outro lado, o espaço de Banach c das seqüências convergentes não é um espaço de Banach de seqüências em $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_c)$, pois não possui a propriedade ideal.

■

Definição 2.7 *Seja X um espaço de Banach de funções. Um elemento $f \in X$ é dito ordem contínuo se para qualquer sequência $(f_n) \subset X$ com $|f_n| \leq |f|$ μ -qs e $|f_n| \downarrow 0$ μ -qs, temos $\|f_n\| \downarrow 0$.*

Exemplo 2.8 Um elemento $x \in l_\infty$ é ordem contínuo se, e somente se, $x \in c_0$. De fato, seja $x \in c_0$ e $(x^n) \subset l_\infty$ com $|x_i^n| \leq |x_i|$ e $|x_i^n| \downarrow 0, \forall i \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, seja i_0 tal que $|x_i| < \varepsilon, \forall i > i_0$. Então, para todo $i > i_0$ temos $|x_i^n| < \varepsilon, \forall n$. Para cada $i \leq i_0$, existe n_i tal que, para todo $n > n_i, |x_i^n| < \varepsilon$. Assim, se $n > \max_{i=1, \dots, i_0} n_i$, temos $|x_i^n| < \varepsilon, \forall i \in \mathbb{N}$ e portanto $\|x^n\| \downarrow 0$. Por outro lado, suponha que $x \notin c_0$. Então existem $r > 0$ e uma sequência crescente de índices (i_k) tal que $|x_{i_k}| \geq r > 0$. Definimos a sequência $(x^n) \subset l_\infty$ por

$$x_i^n = \begin{cases} x_i, & \text{se } i \in \{i_k : k \in \mathbb{N}\} \text{ e } i \geq i_n; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Vemos então que para cada $i, |x_i^n| \leq |x_i|, |x_i^n| \downarrow 0$, mas $\|x^n\| \geq r$. Logo, x não é ordem contínuo. ■

Denotamos por X_0 o subconjunto de todos os elementos ordem contínuo de X . Temos a seguinte propriedade X_0 :

Proposição 2.9 *Sejam X um espaço de Banach de funções e X_0 o subconjunto dos elementos ordem contínuo de X . Então X_0 é um subespaço vetorial com a propriedade ideal.*

Demonstração: Vamos demonstrar apenas que a soma de dois elementos ordem contínuo é ordem contínuo. As demais afirmações são triviais.

Sejam $f, g \in X$ ordem contínuo e considere uma sequência $(h_n)_n \subset X$ com

$$|h_n| \leq |f + g| \text{ e } |h_n| \downarrow 0, \mu\text{-qs}.$$

Apenas para simplificar a escrita, vamos supor que as relações acima valem sempre. Definimos

$$f_n(x) = \begin{cases} |h_n(x)|, & \text{se } |h_n(x)| \leq |f(x)|; \\ |f(x)|, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, temos que $|f_n| \leq |f|$ e portanto, pela propriedade ideal de X , $f_n \in X$. Além disso, $|f_n| \downarrow 0$. De fato, se x é tal que $|f(x)| = 0$, então $|f_n(x)| = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto $|f_n(x)| \downarrow 0$. Se $|f(x)| \neq 0$, como $|h_n| \downarrow 0$, existe n_0 tal que $|h_n(x)| < |f(x)|$, $\forall n \geq n_0$, e portanto $|f_n(x)| \downarrow 0$. Logo, $|f_n| \downarrow 0$. Assim, como f é ordem contínuo em X temos que $\|f_n\| \downarrow 0$.

De maneira análoga, definimos

$$g_n(x) = \begin{cases} |h_n(x)|, & \text{se } |h_n(x)| \leq |g(x)|; \\ |g(x)|, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Usando mesmo argumento, mostramos que $\|g_n\| \downarrow 0$.

Finalmente, seja $x \in \Omega$. Se $|h_n(x)| \leq |g(x)|$,

$$|h_n(x)| = g_n(x) \leq g_n(x) + f_n(x) = |g_n(x) + f_n(x)|.$$

Se $|h_n(x)| \leq |f(x)|$,

$$|h_n(x)| = f_n(x) \leq g_n(x) + f_n(x) = |g_n(x) + f_n(x)|.$$

Se nenhuma das condições é satisfeita, $g_n(x) = |g(x)|$ e $f_n(x) = |f(x)|$, e então

$$|g_n(x) + f_n(x)| = g_n(x) + f_n(x) = |g(x)| + |f(x)| \geq |g(x) + f(x)| \geq |h_n|.$$

Assim, nos três casos temos que $|h_n(x)| \leq |g_n(x) + f_n(x)|$ e pela propriedade ideal de X concluímos que

$$\|h_n\| \leq \|g_n + f_n\| \leq \|g_n\| + \|f_n\| \downarrow 0.$$

■

Vamos agora apresentar uma caracterização bastante útil dos elementos ordem contínuo de X .

Seja $(E_n)_n$ uma sequência de subconjuntos mensuráveis de Ω . Escreveremos $E_n \downarrow \emptyset$ se $(E_n)_n$ decresce e $\chi_{E_n} \downarrow \chi_\emptyset$ μ -qs. Com essa notação, temos o seguinte lema.

Lema 2.10 *Seja $(E_n)_n$ uma sequência decrescentes de subconjuntos mensuráveis de Ω . Então, se $\mu(E_n) \downarrow 0$, temos que $E_n \downarrow \emptyset$. Reciprocamente, se os conjuntos E_n têm medida finita, então $E_n \downarrow \emptyset$ implica $\mu(E_n) \downarrow 0$.*

Demonstração: Suponhamos que $(E_n)_n$ decresce e $\mu(E_n) \downarrow 0$. Seja $A = \cap_{n=1}^{\infty} E_n$. Como $\mu(E_n) \rightarrow 0$, a partir de um certo índice cada E_n tem medida finita e portanto

$$\mu(A) = \lim_n \mu(E_n) = 0.$$

Se $x \notin A$, $x \notin E_{n_0}$, para algum n_0 . Assim, para $n \geq n_0$ temos $\chi_{E_n}(x) = 0$, pois E_n decresce. Portanto, $\chi_{E_n} \downarrow 0$ μ -qs.

Reciprocamente, se $E_n \downarrow \emptyset$ temos que $\mu(\cap_{n=1}^{\infty} E_n) = 0$, e como cada E_n é de medida finita, temos

$$\lim_n \mu(E_n) = \mu(\cap_{n=1}^{\infty} E_n) = 0.$$

■

Usando o lema anterior, temos a seguinte caracterização dos elementos ordem contínuo de X .

Proposição 2.11 *Seja X um espaço de Banach de funções. Um elemento $f \in X$ é ordem contínuo se, e somente se, $\|f\chi_{E_n}\| \downarrow 0$, para toda sequência decrescente (E_n) satisfazendo $E_n \downarrow \emptyset$.*

Demonstração: Seja f ordem contínuo e considere $E_n \downarrow \emptyset$. Definimos $f_n = f\chi_{E_n}$. Claro que $|f| \geq |f_n| \downarrow 0$ μ -qs, e portanto

$$\|f_n\| = \|f\chi_{E_n}\| \downarrow 0.$$

Por outro lado, seja f como nas hipóteses da proposição e seja $(f_n)_n \subset X$ com $|f| \geq |f_n| \downarrow 0$ μ -qs. Como Ω é σ -finito, tomamos uma sequência (A_n) , que podemos supor crescente, de conjuntos de medida finita cuja união é Ω . Assim, $\Omega \setminus A_n \downarrow \emptyset$. Dado $\varepsilon > 0$, temos por hipótese que

$$\|f\chi_{\Omega \setminus A_N}\| < \varepsilon/2,$$

para algum N arbitrariamente grande.

Seja $\alpha := \frac{\varepsilon}{4\|\chi_{A_N}\|}$, e definimos $E_n := \{x \in A_N : |f_n(x)| > \alpha\}$. Como $|f_n| \downarrow 0$ μ -qs e $\mu(A_n) < \infty$, temos que

$$\lim_n \mu(E_n) = \mu(\cap_{n=1}^{\infty} E_n) = 0,$$

e portanto, $\mu(E_n) \downarrow 0$. Pelo lema 2.10, $E_n \downarrow \emptyset$ e novamente pela hipótese temos que

$$\|f\chi_{E_n}\| < \varepsilon/4,$$

para n suficientemente grande. Para tais valores de n temos

$$\begin{aligned}
 \|f_n\| &\leq \|f_n \chi_{\Omega \setminus A_N}\| + \|f_n \chi_{A_N}\| \\
 &\leq \|f_n \chi_{\Omega \setminus A_N}\| + \|f_n \chi_{E_n}\| + \|f_n \chi_{A_N \setminus E_n}\| \\
 &\leq \|f \chi_{\Omega \setminus A_N}\| + \|f \chi_{E_n}\| + \alpha \|f \chi_{A_N \setminus E_n}\| \\
 &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Logo, $\|f_n\| \downarrow 0$.

■

Vamos usar a caracterização acima para demonstrar que o subespaço dos elementos ordem contínuo de X é fechado em X .

Proposição 2.12 *Seja X um espaço de Banach de funções. Então X_0 é um subespaço fechado de X .*

Demonstração: Resta apenas mostrar que X_0 é fechado. Seja então $(f_n) \subset X_0$ com $f_n \rightarrow f$ em X . Seja (E_m) uma sequência satisfazendo $E_m \downarrow \emptyset$. Dado $\varepsilon > 0$, tomamos N tal que

$$\|f - f_N\| \leq \varepsilon/2.$$

Como f_N é ordem contínuo, pela caracterização anterior existe M tal que

$$\|f_N \chi_{E_m}\| < \varepsilon/2, \quad \forall m \geq M.$$

Assim, para $m \geq M$,

$$\begin{aligned}
 \|f \chi_{E_m}\| &\leq \|(f - f_N) \chi_{E_m}\| + \|f_N \chi_{E_m}\| \\
 &\leq \|f - f_N\| + \|f_N \chi_{E_m}\| \\
 &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Assim, $\|f\chi_{E_m}\| \downarrow 0$ e pela proposição 2.11, $f \in X_0$.

■

Agora vamos considerar o subespaço $S := [\chi_A : \mu(A) < \infty]$ gerado pelas funções características de conjuntos de medida finita e relacioná-lo com o subespaço dos elementos ordem contínuo. Começamos com um lema.

Lema 2.13 *O fecho de S em X coincide com o fecho dos conjuntos das funções limitadas com suporte em conjuntos de medida finita.*

Demonstração: Obviamente, todo elemento de S é limitado, então basta mostrar que toda função limitada com suporte em conjunto de medida finita pode ser aproximada, na norma de X , por elementos de S .

Seja então f limitada com $\mu(\text{supp } f) < \infty$, e vamos supor inicialmente $f \geq 0$. Considere a sequência $(f_n)_n \subset S$ definida por

$$f_n = \sum_{j=1}^n \frac{jM}{n} \chi_{f^{-1}\left(\left[\frac{(j-1)M}{n}, \frac{jM}{n}\right]\right)},$$

onde M é um limitante de f . Assim, $\sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| < \frac{M}{n}$, e portanto

$$\|f_n - f\| = \|(f_n - f)\chi_{\text{supp } f}\| \leq \left\| \frac{M}{n} \chi_{\text{supp } f} \right\| = \frac{M}{n} \|\chi_{\text{supp } f}\|,$$

que converge a zero. Logo, $f \in \overline{S}^X$.

Para o caso geral, basta escrevermos $f = f_1 - f_2 + i(f_3 - f_4)$, onde $f_j \geq 0$ para cada j .

■

A próxima proposição nos mostra a relação entre o conjunto dos elementos ordem contínuos e S .

Proposição 2.14 *Seja X um espaço de Banach de funções. Então $X_0 \subset \overline{S}^X$. Além disso, $X_0 = \overline{S}^X$ se, e somente se, $\chi_A \in X_0$, para todo conjunto A de medida finita.*

Demonstração: Vamos primeiramente mostrar que todo elemento ordem contínuo pertence ao fecho de S . Seja f ordem contínuo, e tomamos uma sequência crescente E_n de conjuntos de medida finita cuja união é Ω . Definimos

$$g_n(x) = \operatorname{sgn}(f(x)) \cdot \min\{|f(x)|, n\chi_{E_n}(x)\}, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Cada g_n é majorada em módulo por f e portanto, pela propriedade ideal, $g_n \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos $f_n = f - g_n \in X$. Temos então que $|f| \geq |f_n| \downarrow 0$ e como f é ordem contínuo, temos

$$\|g_n - f\| = \|f_n\| \downarrow 0,$$

e portanto g_n converge a f em X . Como cada g_n é limitada e tem suporte em E_n que possui medida finita, temos, pelo lema anterior, que $f \in \overline{S}^X$.

Agora, se $X_0 = \overline{S}^X$, é claro que $\chi_A \in X_0$, para todo A de medida finita, já que $\chi_A \in S$. Por outro lado, se todo χ_A com $\mu(A) < \infty$ é ordem contínuo, então $S \subset X_0$, pela proposição 2.9, e como X_0 é fechado, segue que $\overline{S}^X \subset X_0$. A outra inclusão vale sempre, como vimos anteriormente.

■

A seguir, vamos definir o rearranjo decrescente de uma função que será usado na definição do espaço de Marcinkiewicz. No que se segue, convencionamos $\inf \emptyset = +\infty$.

Definição 2.15 *Seja $f \in L_0(I, \mathcal{B}, \lambda)$, onde $I = (0, \infty)$ e λ é a medida de Lebesgue na σ -álgebra $\mathcal{B}$ dos subconjuntos Lebesgue mensuráveis de I . Então,*

(i) *A função distribuição de f é definida para $\theta \geq 0$ por*

$$\mu_f(\theta) = \mu(\{a \in I : |f(a)| > \theta\}).$$

(ii) A função rearranjo decrescente de f é a função f^* definida por

$$f^*(t) = \inf\{\theta > 0 : \mu_f(\theta) \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

Definição 2.16 Se $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de escalares, definimos o rearranjo decrescente de x por

$$[x]_n = f^*(n-1), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\text{onde } f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \chi_{[k-1, k)}(t), \quad t \geq 0.$$

Exemplo 2.17 Se $x \in c_0$, então o rearranjo decrescente de x definido dessa forma coincide com o definido no capítulo anterior para os espaços de Lorentz. Por esse motivo usamos a mesma notação.

Definição 2.18 Seja $\Psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ uma função crescente com $\Psi(0) = 0$, $\Psi(t) > 0$, para $t \geq 1$. Então, o espaço de sequências de Marcinkiewicz m_Ψ é o espaço de Banach dado por

$$m_\Psi = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \|x\|_{m_\Psi} := \sup_{k \geq 1} \frac{\sum_{i=1}^k [x]_i}{\Psi(k)} < \infty\}.$$

Temos as seguintes propriedades imediatas do espaço de sequências de Marcinkiewicz m_Ψ .

Proposição 2.19 O espaço de sequências de Marcinkiewicz m_Ψ é um espaço de Banach de sequências em $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_c)$ com a propriedade de Fatou, e a inclusão $i : m_\Psi \hookrightarrow l_\infty$ é bem definida e contínua.

Demonstração: De maneira análoga ao exemplo 2.6 podemos observar que m_Ψ é um espaço de Banach de sequências em $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_c)$ com a propriedade de Fatou.

Pela convenção $\inf \emptyset = +\infty$, vemos que $m_\Psi \subset l_\infty$, já que se $x \notin l_\infty$, $[x]_i = +\infty$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Temos ainda que, para $x \in m_\Psi$,

$$\|x\|_\infty = [x]_1 = \Psi(1) \frac{[x]_1}{\Psi(1)} \leq \Psi(1) \|x\|_{m_\Psi},$$

e portanto a inclusão $i : m_\Psi \hookrightarrow l_\infty$ é contínua de norma $\Psi(1)$. ■

Em [16], Kamińska e Lee supõe que $\frac{\Psi}{n}$ é decrescente, já que, caso contrário, podemos tomar $\tilde{\Psi}$ com $\frac{\tilde{\Psi}}{n}$ decrescente de modo que os espaços m_Ψ e $m_{\tilde{\Psi}}$ sejam isométricos. Nessas hipóteses, mostram que $\|x\|_{m_\Psi} = \|x\|_\infty$ para todo $x \in l_\infty$ se, e somente se, $\Psi(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Porém, no caso geral, há mais funções que tornam l_∞ isométrico a m_Ψ como mostra a próxima proposição.

Proposição 2.20 *As seguintes condições são equivalentes:*

- (i) $\|x\|_{m_\Psi} = \|x\|_\infty$ para todo $x \in l_\infty$;
- (ii) $\|x\|_{m_\Psi} = \|x\|_\infty$ para todo $x \in c_0$;
- (iii) $\Psi(1) = 1$ e $\Psi(n) \geq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Vamos mostrar a equivalência entre a primeira e a terceira afirmação. Supomos inicialmente que as normas são iguais para todo $x \in l_\infty$. Então

$$1 = \|e_1\|_\infty = \|e_1\|_{m_\Psi} = 1/\Psi(1),$$

e portanto $\Psi(1) = 1$. Seja agora $n \geq 1$. Temos que

$$1 = \|e_1 + \cdots e_n\|_\infty = \|e_1 + \cdots e_n\|_{m_\Psi} = \sup_{k \leq n} \frac{k}{\Psi(k)} \geq \frac{n}{\Psi(n)},$$

e assim, $\Psi(n) \geq n$.

Vamos supor agora que $\Psi(1) = 1$ e $\Psi(n) \geq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então temos que

$$\|x\|_\infty \leq \Psi(1)\|x\|_{m_\Psi} = \|x\|_{m_\Psi},$$

e por outro lado, como $([x]_i)_i$ decresce,

$$\|x\|_\infty = [x]_1 \geq \sup_n \frac{\sum_{i=1}^n [x]_i}{n} \geq \sup_n \frac{\sum_{i=1}^n [x]_i}{\Psi(n)} = \|x\|_{m_\Psi}.$$

Portanto, $\|x\|_\infty = \|x\|_{m_\Psi}$.

Da mesma maneira mostramos a equivalência entre a segunda e a terceira afirmação, já que os vetores tomados na demonstração anterior também pertencem a c_0 .

■

Iremos considerar agora o seguinte subespaço de m_Ψ :

Definição 2.21 *Seja $\Psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ uma função crescente com $\Psi(0) = 0$, $\Psi(t) > 0$, para $t \geq 1$. Denotamos por m_Ψ^0 o subespaço de m_Ψ consistindo de todas as sequências $x \in m_\Psi$ que satisfazem*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^k [x]_i}{\Psi(k)} = 0.$$

O próximo teorema nos apresenta condições com as quais m_Ψ é um bidual de m_Ψ^0 .

Teorema 2.22 *Seja $\Psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ uma função crescente com $\Psi(0) = 0$, $\Psi(t) > 0$, para $t \geq 1$. Então, são equivalentes:*

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(n) = \infty$;
- (ii) $m_{\Psi}^0 \neq \{0\}$;
- (iii) m_{Ψ}^0 é o subespaço formado por todos os elementos ordem contínuo de m_{Ψ} ;
- (iv) m_{Ψ} é um bidual de m_{Ψ}^0 ;
- (v) $m_{\Psi}^0 = \overline{c_{00}}^{m_{\Psi}}$.

Demonstração: Em [16] são demonstradas as implicações $(i) \Leftrightarrow (ii)$, $(i) \Leftrightarrow (iv)$ e $(i) \Rightarrow (iii)$. Para mostrar a equivalência entre as quatro primeiras afirmações, basta observar que o conjunto dos elementos ordem contínuo de m_{Ψ} é sempre não vazio e portanto temos que $(iii) \Rightarrow (ii)$. Para isso, é suficiente observar que, para cada $i \in \mathbb{N}$, e_i é sempre um elemento ordem contínuo de m_{Ψ} . De fato, se $(x^n) \subset m_{\Psi}$ uma sequência ponto a ponto limitada por e_i e pontualmente convergente a zero, então devemos ter $|x_j^n| = 0$, $\forall j \neq i$ e $|x_i^n| \downarrow 0$, o que implica

$$\|x^n\|_{m_{\Psi}} = \frac{|x_i^n|}{\Psi(1)} \downarrow 0.$$

Logo, as quatro primeiras afirmações são equivalentes.

Obviamente, se $m_{\Psi}^0 = \overline{c_{00}}^{m_{\Psi}}$, $m_{\Psi}^0 \neq \{0\}$. Finalmente, se temos (i), então claramente $c_{00} \subset m_{\Psi}^0$, ou seja, m_{Ψ}^0 contém as funções características de conjuntos de medida finita. Por (iii) e pela proposição 2.14 temos que $m_{\Psi}^0 = \overline{c_{00}}^{m_{\Psi}}$, já que neste caso, $S = c_{00}$.

■

Vamos mostrar agora que m_{Ψ} é isomorfo ao dual do espaço de Lorentz ou a l_{∞} . Usaremos o seguinte lema de [16].

Lema 2.23 *Seja $(\Psi(n))_n$ uma sequência crescente com $\Psi(0) = 0$, $\Psi(t) > 0$, para $t \geq 1$. Definimos a função $\Psi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi(k) \chi_{[k, k+1)}(t)$, $t \geq 0$. Então existe uma função contínua côncava $\tilde{\Psi}$ em $[0, \infty)$, com $\Psi(n) \leq \tilde{\Psi}(n) \leq 3\Psi(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\tilde{\Psi}(0) = 0$.*

Teorema 2.24 *Seja $\Psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ uma função crescente com $\Psi(0) = 0$, $\Psi(t) > 0$, para $t \geq 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(n) = \infty$. Então, o espaço de sequências de Marcinkiewicz m_Ψ é topologicamente isomorfo ou ao dual de um espaço de Lorentz $d(w, 1)$ ou a l_∞ . O subespaço dos elementos ordem contínuo m_Ψ^0 é topologicamente isomorfo ou ao predual de um espaço de Lorentz $d(w, 1)$ ou a c_0 .*

Demonstração: Definimos $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ por $w_n := \Psi(n) - \Psi(n-1)$, e vamos supor inicialmente que Ψ é côncava. Se w converge a zero, sendo $\sum_{i=1}^k w_i = \Psi(k)$, segue que $w \in c_0 \setminus l_1$. Como Ψ é côncava, $(w_n)_n$ decresce e portanto m_Ψ e m_Ψ^0 são o dual e o predual, respectivamente, do espaço de sequência de Lorentz $d(w, 1)$.

Se $w_n \not\rightarrow 0$, seja $L = \inf_n w_n \neq 0$. Dado $x \in l_\infty$, temos que

$$\frac{\sum_{i=1}^k [x]_i}{\Psi(k)} = \frac{\sum_{i=1}^k [x]_i}{\sum_{i=1}^k w_i} \leq \frac{k\|x\|_\infty}{kL} = \frac{\|x\|_\infty}{L},$$

e portanto,

$$\|x\|_{m_\Psi} \leq \frac{\|x\|_\infty}{L} = \frac{[x]_1 \Psi(1)}{L\Psi(1)} \leq \frac{\Psi(1)}{L} \|x\|_{m_\Psi}.$$

Vemos então que $x \in m_\Psi$ e

$$L\|x\|_{m_\Psi} \leq \|x\|_\infty \leq \Psi(1)\|x\|_{m_\Psi}.$$

Se Ψ não for côncava, pelo lema anterior, podemos encontrar uma função côncava e crescente $\tilde{\Psi}$ em $[0, \infty)$, com $\Psi(n) \leq \tilde{\Psi}(n) \leq 3\Psi(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\tilde{\Psi}(0) = 0$. Assim,

$\frac{1}{3}\|\cdot\|_{m_\Psi} \leq \|\cdot\|_{m_{\tilde{\Psi}}} \leq \|\cdot\|_{m_\Psi}$ e a identidade entre m_Ψ e $m_{\tilde{\Psi}}$ é um isomorfismo topológico. Basta então repetir a demonstração anterior para $m_{\tilde{\Psi}}$.

■

Usando a proposição anterior juntamente com os resultados da seção anterior e o teorema 5 de [3], obtemos a mesma caracterização da extensão canônica de polinômios homogêneos nos espaços de Marcinkiewicz.

Proposição 2.25 *Seja $\Psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ uma função crescente com $\Psi(0) = 0$, $\Psi(t) > 0$, para $t \geq 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(n) = \infty$. Se $(\Psi(n) - \Psi(n-1))_n \notin l_p, \forall p > 1$, então, para $P \in P(m_\Psi)$, são equivalentes:*

(i) *P é a extensão canônica de algum polinômio homogêneo em m_Ψ^0 ;*

(ii) *P é w^* -contínuo sobre os limitados.*

Reciprocamente, se (i) e (ii) são equivalentes para $P \in P(m_\Psi)$, então $(\Psi(n) - \Psi(n-1))_n \notin l_p, \forall p \geq 1$.

Demonstração: Se $(\Psi(n) - \Psi(n-1))_n \notin l_p, \forall p \geq 1$, temos duas possibilidades. Se $(\Psi(n) - \Psi(n-1))_n \notin c_0$ então pelo teorema anterior m_Ψ é topologicamente isomorfo a l_∞ e o resultado segue de [3]. Se $(\Psi(n) - \Psi(n-1))_n \in c_0$, novamente pelo teorema anterior temos que m_Ψ é topologicamente isomorfo ao dual do espaço de Lorentz $d^*((\Psi(n) - \Psi(n-1)), 1)$ e portanto o resulta segue do que foi feito na seção anterior.

Reciprocamente, se $(\Psi(n) - \Psi(n-1))_n \in l_p$, para algum $p > 1$, então pelo teorema anterior m_Ψ é isomorfo a $d^*(w, 1)$, onde $w_n = \Psi(n) - \Psi(n-1)$. Temos então que $(w_n) = (\Psi(n) - \Psi(n-1)) \in l_p$, e pelo lema 2.1, $d_*(w, 1) \subset l_p$. Assim, se $N > p$, podemos definir de maneira análoga à proposição 2.3 o polinômio N -homogêneo em $d_*(w, 1)$

$$P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^N.$$

A extensão canônica de P é $\tilde{P}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^N$ em $d^*(w, 1)$. Vemos então que $(e_i) \subset d^*(w, 1)$ converge fraca-estrela para zero, mas $\tilde{P}(e_i) = 1, \forall i \in \mathbb{N}$. Logo as afirmações não são equivalentes.

■

Capítulo 3

Bases em Espaços de Polinômios

Neste capítulo, apresentamos uma caracterização da extensão canônica análoga a do capítulo anterior para polinômios homogêneos definidos em espaços com um determinado tipo de base de Schauder. Tais espaços abrangem os do capítulo anterior.

3.1 Bases Polinomialmente Contráteis

Nessa seção, apresentamos condições sob as quais um espaço de polinômios homogêneos contínuos possua uma base de Schauder. Lembremos inicialmente alguns conceitos relativos às bases de Schauder. Uma sequência (x_n) em um espaço de Banach E é uma *sequência básica* se (x_n) é uma base de Schauder para $\overline{[(x_n)]}$. Assim, uma sequência básica é uma base se, e só se, $\overline{[(x_n)]} = E$. A constante básica C de (x_n) é o menor real M que cumpre

$$\left\| \sum_{n=1}^m \alpha_n x_n \right\| \leq M \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \right\|, \forall x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \in E, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Equivalentemente, é o menor real M que cumpre:

$$\left\| \sum_{n=1}^{m_1} \alpha_n x_n \right\| \leq M \left\| \sum_{n=1}^{m_2} \alpha_n x_n \right\|, \quad \forall \alpha_1, \dots, \alpha_{m_2} \in \mathbb{K}, \quad \forall m_1 \leq m_2 \in \mathbb{N}.$$

Lembramos também que uma base de Schauder (x_n) para um espaço de Banach E é dita contrátil quando para cada $\varphi \in E'$, $\|\varphi\|_n := \|\varphi|_{\overline{[x_{n+i}:i \in \mathbb{N}]}}\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Equivalentemente, (x_n) é contrátil quando a sequência (x'_n) de seus funcionais coordenados é uma base de Schauder para E' . Dimant e Zalduendo estudaram em [10] uma relação análoga entre norma e a existência de base de Schauder no espaço das aplicações multilineares. A seguir, apresentamos uma condição com a qual é possível obter os mesmos resultados para polinômios homogêneos.

Definição 3.1 *Seja E um espaço de Banach com uma base de Schauder $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Diremos que a base é polinomialmente contrátil se, $\forall m \in \mathbb{N}$ e $\forall P \in P(mE)$, temos*

$$\rho_n(P) := \sup_{\|x\| \leq 1} |\check{P}(\sum_{i=n+1}^{\infty} x'_i(x)x_i, x^{m-1})| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

É imediato da definição de base polinomialmente contrátil o seguinte fato.

Proposição 3.2 *Se $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é uma base polinomialmente contrátil de E , então $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é contrátil.*

Demonstração: Se $\varphi \in E'$, então

$$\|\varphi\|_n = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x = \sum_{i=n+1}^{\infty} x'_i(x)x_i}} |\varphi(\sum_{i=n+1}^{\infty} x'_i(x)x_i)| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(\sum_{i=n+1}^{\infty} x'_i(x)x_i)| \rightarrow 0.$$

Logo, $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é contrátil. ■

A próxima proposição mostra a relação entre base polinomialmente contrátil e a existência de base monomial para polinômios. Lembramos que um monômio de grau m é um polinômio da forma $P_{i_1 i_2 \dots i_m} = x'_{i_1} x'_{i_2} \cdots x'_{i_m}$, onde x'_{i_j} são os funcionais coordenados em relação a base de E .

Teorema 3.3 *Seja E um espaço de Banach com base de Schauder $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Então, são equivalentes:*

- (i) *A base $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é polinomialmente contrátil;*
- (ii) *Para cada $m \in \mathbb{N}$, os monômios de grau m munidos da ordem quadrada de $\mathbb{N}^m$ formam uma base de Schauder para $P(^m E)$;*
- (iii) *A base $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é contrátil e $\overline{P_f(^m E)} = P(^m E)$, para cada $m \in \mathbb{N}$;*
- (iv) *A base $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é contrátil e $P_w(^m E) = P(^m E)$, para cada $m \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii): Por [25], os monômios de grau m são os funcionais coordenados em relação a base canônica do produto tensorial homogêneo $\bigotimes_{\pi, s}^m E$ e portanto formam uma sequência básica em $(\bigotimes_{\pi, s}^m E)' = P(^m E)$. Assim, basta mostrar que $\overline{[P_{i_1 \dots i_m}]} = P(^m E)$. Para tal, é suficiente mostrar que, para cada $P \in P(^m E)$, temos que

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i_1=1}^N \cdots \sum_{i_m=1}^N \check{P}(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) P_{i_1, \dots, i_m},$$

o que será feito por indução no grau do polinômio.

Se $m = 1$, pela proposição 3.2 temos que $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é contrátil e portanto,

$$\varphi = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \varphi(x_i) x'_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \varphi(x_i) P_i,$$

para cada $\varphi \in E'$. Suponhamos então a afirmação válida para polinômios de grau menor que m , e seja $P \in P(mE)$ e $\varepsilon > 0$. Observe inicialmente que, para cada $x \in E$, temos

$$\begin{aligned} P(x) &= \check{P}\left(\sum_{i=1}^{\infty} x'_i(x)x_i\right)^m = \sum_{i_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{i_m=1}^{\infty} \check{P}(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) x'_{i_1}(x) x'_{i_2}(x) \cdots x'_{i_m}(x) \\ &= \sum_{i_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{i_m=1}^{\infty} \check{P}(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) P_{i_1, \dots, i_m}(x). \end{aligned}$$

Como (x_n) é polinomialmente contrátil, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\rho_{N_0}(P) < \frac{\varepsilon}{2(1 + C^m)},$$

onde C é a constante básica de $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Para cada $i_1 = 1, 2, \dots, N_0$, considere os polinômios $(m-1)$ -homogêneos $Q_{i_1} = \check{P}x_{i_1}$. Pela hipótese de indução, existe N_{i_1} tal que

$$\left\| Q_{i_1} - \sum_{i_2=1}^N \cdots \sum_{i_m=1}^N \check{Q}_{i_1}(x_{i_2}, \dots, x_{i_m}) P_{i_2, \dots, i_m} \right\| < \frac{\varepsilon}{2\|x'_{i_1}\|N_0}, \quad \forall N \geq N_{i_1}.$$

Assim, se $N \geq \max\{N_0, N_{i_1} : i_1 = 1, \dots, N_0\}$, para cada $x \in B_E$ temos

$$\begin{aligned} & \left| P(x) - \sum_{i_1=1}^N \cdots \sum_{i_m=1}^N \check{P}(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) P_{i_1, \dots, i_m}(x) \right| = \\ &= \left| \sum_{i_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{i_m=1}^{\infty} \check{P}(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) P_{i_1, \dots, i_m}(x) - \sum_{i_1=1}^N \cdots \sum_{i_m=1}^N \check{P}(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) P_{i_1, \dots, i_m}(x) \right| \\ &\leq \left| \sum_{i_1=1}^{N_0} \sum_{i_2=1}^{\infty} \cdots \sum_{i_m=1}^{\infty} \check{P}(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) P_{i_1, \dots, i_m}(x) - \sum_{i_1=1}^{N_0} \cdots \sum_{i_m=1}^N \check{P}(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) P_{i_1, \dots, i_m}(x) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{i_1=N_0+1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{\infty} \cdots \sum_{i_m=1}^{\infty} \check{P}(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) P_{i_1, \dots, i_m}(x) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{i_1=N_0+1}^N \sum_{i_2=1}^N \cdots \sum_{i_m=1}^N \check{P}(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) P_{i_1, \dots, i_m}(x) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i_1=1}^{N_0} \|x'_{i_1}\| \left| \sum_{i_2=1}^{\infty} \cdots \sum_{i_m=1}^{\infty} \check{P}(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) P_{i_2, \dots, i_m}(x) - \sum_{i_2=1}^N \cdots \sum_{i_m=1}^N \check{P}(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) P_{i_2, \dots, i_m}(x) \right| \\
&\quad + \left| \check{P}\left(\sum_{i=N_0+1}^{\infty} x'_i(x) x_i, x, \dots, x\right) \right| + \left| \check{P}\left(\sum_{i=N_0+1}^N x'_i(x) x_i, \sum_{i=1}^N x'_i(x) x_i, \dots, \sum_{i=1}^N x'_i(x) x_i\right) \right| \\
&= \sum_{i_1=1}^{N_0} \|x'_{i_1}\| \cdot \left| Q_{i_1}(x) - \sum_{i_2=1}^N \cdots \sum_{i_m=1}^N \check{Q}_{i_1}(x_{i_2}, \dots, x_{i_m}) P_{i_2, \dots, i_m}(x) \right| \\
&\quad + \left| \check{P}\left(\sum_{i=N_0+1}^{\infty} x'_i(x) x_i, x, \dots, x\right) \right| + \left| \check{P}\left(\sum_{i=N_0+1}^N \frac{x'_i(x) x_i}{C}, \sum_{i=1}^N \frac{x'_i(x) x_i}{C}, \dots, \sum_{i=1}^N \frac{x'_i(x) x_i}{C}\right) \right| C^m \\
&\leq \sum_{i_1=1}^{N_0} \|x'_{i_1}\| \frac{\varepsilon}{2\|x'_{i_1}\| N_0} + \rho_{N_0}(P) + \rho_{N_0}(P) C^m \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + (1 + C^m) \frac{\varepsilon}{2(1 + C^m)} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo, $\left\| P - \sum_{i_1=1}^N \cdots \sum_{i_m=1}^N \check{P}(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) P_{i_1, \dots, i_m} \right\| < \varepsilon, \forall N \geq N_0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Para $m = 1$, temos que $P_i = x'_i$. Assim, $(x'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é uma base para $P^m E = E'$ e então $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é contrátil.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, como $(P_{i_1, \dots, i_m})$ é base para $P^m E$, temos que $\overline{[P_{i_1, \dots, i_m}]} = P^m E$. Como $[P_{i_1, \dots, i_m}] \subset P_f^m E$, segue que $\overline{P_f^m E} = P^m E$.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv): Sendo $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ contrátil, temos que $(x'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é uma base de Schauder para E' . Assim, E' possui a propriedade de aproximação. Segue então de [6] que $\overline{P_f^m E} = P_w^m E$ e portando as afirmações são equivalentes.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sejam $P \in P^m E$ e $\varepsilon > 0$. Como $\overline{P_f^m E} = P^m E$, existem $k \in \mathbb{N}$ e $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k \in E'$ tais que

$$\left\| P - \sum_{i=1}^k \varphi_i^m \right\| < \frac{\varepsilon 2^m}{m! 2(1 + C)}, \quad (1)$$

onde C é a constante básica de $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Seja $M = \max_{i \leq k} \|\varphi_i\|$.

Como $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é contrátil, existe n_0 tal que

$$\|\varphi_i\|_n \leq \frac{\varepsilon}{2kM^{m-1}(1+C)}, \forall n \geq n_0, \forall i \leq k. \quad (2)$$

Seja $x \in B_E$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=n}^{\infty} x'_i(x)x_i \right\| &\leq \left\| \sum_{i=1}^{\infty} x'_i(x)x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n-1} x'_i(x)x_i \right\| \\ &\leq \|x\| + C\|x\| \leq 1 + C. \end{aligned}$$

Assim, por (2), temos que, para cada $i \leq k$ e $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \left| \varphi_i \left(\sum_{i=n}^{\infty} x'_i(x)x_i \right) \right| &= (1+C) \cdot \left| \varphi_i \left(\frac{1}{1+C} \sum_{i=n}^{\infty} x'_i(x)x_i \right) \right| \\ &\leq (1+C) \|\varphi_i\|_n \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2kM^{m-1}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Então, se $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \left| \check{P} \left(\sum_{i=n}^{\infty} x'_i(x)x_i, x^{m-1} \right) \right| &\leq \left| \check{P} \left(\frac{\sum_{i=n}^{\infty} x'_i(x)x_i}{1+C}, x^{m-1} \right) - \sum_{j=1}^k \varphi_j \left(\frac{\sum_{i=n}^{\infty} x'_i(x)x_i}{1+C} \right) \varphi_j(x)^m \right| (1+C) \\ &\quad + \left| \sum_{j=1}^k \varphi_j \left(\sum_{i=n}^{\infty} x'_i(x)x_i \right) \varphi_j(x)^m \right| \\ &\stackrel{(3)}{\leq} \left\| \check{P} - \sum_{j=1}^k \check{\varphi}_j^m \right\| (1+C) + \sum_{j=1}^k \frac{\varepsilon M^{m-1}}{2kM^{m-1}} \\ &\leq \frac{m!}{2^m} \left\| P - \sum_{j=1}^k \varphi_j^m \right\| (1+C) + \varepsilon/2 \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Usando o teorema anterior é fácil obter exemplos de espaços de Banach com base polinomialmente contrátil.

Exemplos 3.4 (a) Segue do item (iii) que a base canônica de c_0 é polinomialmente contrátil enquanto a base canônica de l_1 não é, pois não é contrátil.

(b) Considere o predual do espaço de sequências de Lorentz $d(w, 1)$. Segue de [20] que $P_w({}^m d_*(w, 1)) = P({}^m d_*(w, 1))$ se, e somente se, $w \notin l_m$, onde l_m é o espaço das sequências m -somáveis. Assim, pelo item (iv), a base canônica (contrátil) de $d_*(w, 1)$ é polinomialmente contrátil se, e somente se, $w \notin l_p, \forall p > 1$.

(c) O espaço de Tsirelson-James T_J^* possui base contrátil e $P_w({}^m T_J^*) = P({}^m T_J^*)$ (veja [4]). Logo é mais um exemplo de espaço de Banach com base polinomialmente contrátil.

3.2 Caracterização da Extensão Canônica

A seguir, mostramos que a caracterização da extensão canônica por fraca-estrela continuidade é válida para espaços com uma base polinomialmente contrátil. Tal fato generaliza a caracterização obtida no capítulo anterior para espaços de Lorentz.

Proposição 3.5 *Seja E um espaço de Banach com base polinomialmente contrátil. Então, a topologia polinomial-estrela de E'' coincide com a fraca-estrela sobre os subconjuntos limitados.*

Demonstração: Claro que a topologia polinomial-estrela é mais fina que a fraca-estrela. Seja $(z_\alpha)_{\alpha \in I} \subset E''$ uma rede limitada, que podemos supor contida em $B_{E''}$, fraca-estrela convergente para $x \in B_{E''}$.

Sejam $P \in P(^n E)$ e $\epsilon > 0$. Seja (x_i) uma base polinomialmente contrátil de E . Segue do teorema 3.3 que os monômios de grau n com a ordem quadrada formam uma base de Schauder para $P(^n E)$. Seja $\{s_1, s_2, \dots\}$ a ordenação de $\mathbb{N}^n$ segundo a ordem quadrada. Podemos então encontrar um polinômio da forma $Q = \sum_{i=1}^k P_{s_i}$ em E tal que $\|P - Q\| < \frac{\epsilon}{3}$. Como a extensão canônica é uma isometria, temos que $\|\tilde{P} - \tilde{Q}\| < \frac{\epsilon}{3}$. Como (z_α) converge fraca-estrela para x , temos ainda que

$$\tilde{P}_{s_i}(z_\alpha) = \tilde{x}'_{i_1}(z_\alpha) \cdots \tilde{x}'_{i_n}(z_\alpha) = z_\alpha(x'_{i_1}) \cdots z_\alpha(x'_{i_n}) \rightarrow x(x'_{i_1}) \cdots x(x'_{i_n}) = \tilde{x}'_{i_1}(x) \cdots \tilde{x}'_{i_n}(x),$$

ou seja, $\tilde{P}_{s_i}(z_\alpha) \rightarrow \tilde{P}_{s_i}(x)$. Logo

$$\tilde{Q}(z_\alpha) = \sum_{i=1}^k \tilde{P}_{s_i}(z_\alpha) \rightarrow \sum_{i=1}^k \tilde{P}_{s_i}(x) = \tilde{Q}(x).$$

Logo, podemos encontrar $\alpha_0 \in I$ tal que $\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow |\tilde{Q}(z_\alpha) - \tilde{Q}(x)| < \frac{\epsilon}{3}$. Assim,

$$\begin{aligned} |\tilde{P}(z_\alpha) - \tilde{P}(x)| &\leq |\tilde{P}(z_\alpha) - \tilde{Q}(z_\alpha)| + |\tilde{Q}(z_\alpha) - \tilde{Q}(x)| + |\tilde{P}(x) - \tilde{Q}(x)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, a rede limitada $(z_\alpha)_{\alpha \in I} \subset E''$ também converge para x na topologia polinomial-estrela e as duas topologias coincidem sobre os limitados.

■

Usando a proposição anterior, temos a seguinte caracterização da extensão canônica de polinômios definidos em espaços com base polinomialmente contrátil.

Proposição 3.6 *Seja E um espaço de Banach com base polinomialmente contrátil. Então, para $P \in P(^n E'')$ são equivalentes:*

- (i) *P é a extensão canônica de algum polinômio homogêneo em E ,*
- (ii) *P é w^* -contínuo sobre os limitados.*

Demonstração: A demonstração é análoga a da proposição 2.3. Seja $P = \tilde{Q}$, com $Q \in P(^n E)$. Se $(z_\alpha)_{\alpha \in I} \subset E''$ é uma rede limitada fraca-estrela convergente para $x \in E''$, então, pela proposição 3.5, $(z_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge polinomial-estrela para x e portanto $P(z_\alpha) = \tilde{Q}(z_\alpha) \rightarrow \tilde{Q}(x) = P(x)$.

Suponha agora P w^* -contínuo sobre os limitados, e considere $Q = P|_E$. Seja $x \in B_{E''}$. Por [7], a bola unitária de um espaço de Banach é polinomial-estrela densa na bola de seu bidual e portanto, existe uma rede $(z_\alpha)_{\alpha \in I} \subset B_E$ tal que, para todo natural k , e para todo polinômio k -homogêneo R temos $R(z_\alpha) \rightarrow \tilde{R}(x)$, em particular,

$$z_\alpha \xrightarrow{w^*} x \text{ e } Q(z_\alpha) \rightarrow \tilde{Q}(x).$$

Mas como P é w^* -contínuo sobre os limitados, temos que $Q(z_\alpha) = P(z_\alpha) \rightarrow P(x)$. Logo $P(x) = \tilde{Q}(x)$.

■

Capítulo 4

Unicidade da extensão em $c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} l_2^i\right)$

Em [3], Aron, Boyd e Choi demonstraram que todo polinômio 2-homogêneo que atinge sua norma definido em c_0 possui uma única extensão que preserva a norma para l_{∞} . Neste capítulo, mostramos um resultado análogo para polinômios 2-homogêneos definidos em $c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} l_2^i\right)$ que atingem a norma.

4.1 Preliminares

Denotemos por l_2^n o espaço $\mathbb{C}^n$ munido da norma euclidiana. Iremos considerar neste capítulo os espaços de Banach

$$X = c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} l_2^i\right) = \{(\lambda^j)_{j \in \mathbb{N}} : \lambda^j \in l_2^j \text{ e } (\|\lambda^j\|_2)_{j \in \mathbb{N}} \in c_0\}$$

e seu bidual

$$X'' = l_{\infty}\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} l_2^i\right) = \{(\lambda^j)_{j \in \mathbb{N}} : \lambda^j \in l_2^j \text{ e } (\|\lambda^j\|_2)_{j \in \mathbb{N}} \in l_{\infty}\},$$

onde em ambos os casos a norma considerada é $\|(\lambda^j)\| = \sup_j \|\lambda^j\|_2$.

A importância de tais espaços se dá pelo fato de X'' ter sido o primeiro exemplo de um espaço de Banach sem a propriedade de Dunford-Pettis mas com um predual $X' = l_1(\bigoplus_{i=1}^{\infty} l_2^i)$ que possui tal propriedade. Tal exemplo foi dado por C. Stegall em [26].

Denotaremos por (e_j^i) , $j \leq i$, a sequência unitária $(e_j^i) = (0, 0, \dots, \overbrace{\lambda^i}^{i\text{-ésima}}, 0, \dots)$, onde $\lambda^i = (0, \dots, \overbrace{1}^{j\text{-ésima}}, \dots, 0) \in l_2^i$. Tal sequência é uma base de Schauder contrátil para X e portanto são válidos os resultados do capítulo 3.

Em alguns casos, é útil representar os elementos de tais espaços por uma matriz da forma

$$x = (\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \dots) = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \dots \\ & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & \dots \\ & & \lambda_3^3 & \dots \end{pmatrix},$$

onde a i -ésima coluna representa um elemento de l_2^i e o faremos em algumas demonstrações.

4.2 Unicidade da extensão

Como X é um M -ideal em X'' ([14]) segue que todo funcional linear em X possui uma única extensão que preserva a norma para X'' (veja [14], ou [24] para uma demonstração mais detalhada). Vamos mostrar que o mesmo ocorre para polinômios homogêneos de grau 2 que atingem sua norma. Antes, caracterizaremos os polinômios 2-homogêneos que atingem sua norma em $c_0(\bigoplus_{i=1}^{\infty} l_2^i)$.

Um polinômio P definido em um espaço de sequência é denominado *finito* se existe

$n \in \mathbb{N}$ tal que

$$P(x^1, x^2, \dots, x^n, x^{n+1}, x^{n+2}, \dots) = P(x^1, x^2, \dots, x^n, 0, 0, \dots).$$

Vamos mostrar que esses são precisamente os polinômios homogêneos que atingem a norma em $c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} l_2^i\right)$.

Teorema 4.1 *Um polinômio de grau 2 em $X = c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} l_2^i\right)$ atinge a norma se, e somente se é finito.*

Demonstração: Se P é finito, então pode ser visto como um polinômio em $\bigoplus_{i=1}^n l_2^i$, para algum n e é claro que atinge a norma.

Suponha que $P \in P(^2X)$ atinge sua norma em $x^0 = (\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \dots) \in S_X$.

Claro que se $\|P\| = 0$, P é finito. Caso contrário, dividindo pela norma de P , podemos supor que $\|P\| = 1$.

Seja $J = \{j \in \mathbb{N} : \|\lambda^j\|_2 = 1\}$. Como $x_0 \in X$, J é finito. Para facilitar o trabalho com os índices, vamos supor que $J = \{1, 2, \dots, n\}$.

Para cada $j \in J$, $\lambda^j \neq 0$. Assim, para cada $j \in J$, podemos escolher uma base ortonormal $\mathcal{B}_j$ na qual as coordenadas de λ^j são todas não nulas. Escrevendo os demais λ^j na base canônica de $\mathbb{C}^j$ podemos representar x_0 na forma

$$x^0 = (\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \dots) = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \dots \\ & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & \dots \\ & & \lambda_3^3 & \dots \end{pmatrix}.$$

Para todo $y \in B_X$ da forma $y = (0, 0, \dots, y^{n+1}, y^{n+2}, \dots)$ e para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ com

$|\lambda| = 1 - \sup_{i>n} \|\lambda^i\|_2 > 0$ temos

$$\|x_0 \pm \lambda y\| \leq 1,$$

pois se $i > n$,

$$\|\lambda^i \pm \lambda y^i\|_2 \leq \|\lambda^i\|_2 + |\lambda| \cdot \|y^i\|_2 \leq \|\lambda^i\|_2 + |\lambda| \leq \|\lambda^i\|_2 + (1 - \|\lambda^i\|_2) = 1,$$

e se $i \leq n$,

$$\|\lambda^i \pm \lambda y^i\|_2 = \|\lambda^i\|_2 = 1.$$

Portanto, $|P(x_0 \pm \lambda y)| \leq 1$, e então

$$|P(x_0) \pm 2\lambda\check{P}(x_0, y) + \lambda^2 P(y)| = |1 \pm 2\lambda\check{P}(x_0, y) + \lambda^2 P(y)| \leq 1. \quad (*)$$

Somando as equações e usando a desigualdade triangular, obtemos:

$$|1 + \lambda^2 P(y)| \leq 1.$$

Se $P(y) \neq 0$, poderíamos escolher λ tal que $\lambda^2 P(y)$ tenha parte real positiva, o que seria uma contradição. Segue então que $P(y) = 0$, para todo y da forma acima. Em particular, $P(0, 0, \dots, \lambda^{n+1}, \lambda^{n+2}, \dots) = 0$.

Por (*), segue que $|1 \pm 2\lambda\check{P}(x_0, y)| \leq 1$. Isso significa que o número complexo $2\lambda\check{P}(x_0, y)$ está nas circunferências de centros ± 1 e raio 1. Devemos ter então $2\lambda\check{P}(x_0, y) = 0$, ou seja, $\check{P}(x_0, y) = 0$, para todo y da forma acima.

Tomando $y = (0, 0, \dots, \lambda^{n+1}, \lambda^{n+2}, \dots)$, teremos

$$P(x_0 - y) = P(x_0) - 2\check{P}(x_0, y) + P(y) = 1,$$

e portanto $P(\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n, 0, 0, \dots) = 1$.

Vamos mostrar agora que nos demais pontos P também depende apenas das primeiras n primeiras variáveis.

Sejam $A = \{(i, j) : 1 \leq i \leq n \text{ e } 1 \leq j \leq i\}$ e $A^* = A \setminus \{(1, 1)\}$. Definimos

$$z_1^1 = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^n \\ & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^n \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n^n \end{pmatrix}$$

e para $(i, j) \in A^*$ definimos

$$z_1^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_1^2(1-m) & \cdots & \lambda_1^n \\ & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^n \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n^n \end{pmatrix}$$

$$z_2^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^n \\ & \lambda_2^2(1-m) & \cdots & \lambda_2^n \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n^n \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$z_n^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^n \\ & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^n \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n^n(1-m) \end{pmatrix},$$

onde $m := 1 + 2 + \cdots + n$.

Para cada $x = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & x_n^n \end{pmatrix} \in \bigoplus_{i=1}^n l_2^i$ podemos escrever

$$\begin{pmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & x_n^n \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \sum_{(i,j) \in A} \frac{x_j^i}{\lambda_j^i} z_1^1 + \frac{1}{m} \sum_{(i,j) \in A^*} \left(\frac{x_1^1}{\lambda_1^1} - \frac{x_j^i}{\lambda_j^i} \right) z_j^i.$$

Para cada $(i, j) \in A$, definimos $\tilde{z}_j^i \in X$ por $\tilde{z}_j^i = (z_j^i, 0, 0, \dots)$. Para todo y da forma acima, $\| \tilde{z}_1^1 \pm y \| = 1$. Devemos ter então $|P(\tilde{z}_1^1 \pm y)| \leq 1$. Mas

$$|P(\tilde{z}_1^1 \pm y)| \leq 1 \Rightarrow |P(\tilde{z}_1^1) \pm 2\check{P}(\tilde{z}_1^1, y) + P(y)| \leq 1 \Rightarrow |1 \pm 2\check{P}(\tilde{z}_1^1, y)| \leq 1$$

e portanto $\check{P}(\tilde{z}_1^1, y) = 0$, para todo y dessa forma.

Assim, para todo $(x^1, x^2, \dots, x^n, y^{n+1}, y^{n+2}, \dots) \in X$ podemos escrever

$$\begin{aligned} P(x^1, x^2, \dots, x^n, y^{n+1}, y^{n+2}, \dots) &= P((x^1, x^2, \dots, x^n, 0, 0, \dots) + (0, 0, \dots, 0, y^{n+1}, y^{n+2}, \dots)) \\ &= P(x + y) \\ &= P(x) + 2\check{P}(x, y) + P(y) \\ &= P(x) + 2\check{P}(x, y) \\ &= P(x) + 2\check{P}\left(\frac{1}{m} \sum_{(i,j) \in A} \frac{x_j^i}{\lambda_j^i} \tilde{z}_1^1 + \frac{1}{m} \sum_{(i,j) \in A^*} \left(\frac{x_1^1}{\lambda_1^1} - \frac{x_j^i}{\lambda_j^i} \right) \tilde{z}_j^i, y\right) \\ &= P(x) + \frac{2}{n} \sum_{(i,j) \in A^*} \left(\frac{x_1^1}{\lambda_1^1} - \frac{x_j^i}{\lambda_j^i} \right) \check{P}(\tilde{z}_j^i, y) \\ &= P(x) + \sum_{(i,j) \in A^*} \left(\frac{x_1^1}{\lambda_1^1} - \frac{x_j^i}{\lambda_j^i} \right) \psi_j^i(y), \end{aligned}$$

onde $\psi_j^i = \frac{2}{n} \check{P}(\tilde{z}_j^i, \cdot) \in X'$. Vamos agora mostrar que cada $\psi_j^i = 0$, $\forall (i, j) \in A^*$. Vamos supor $(i, j) = (2, 1)$, pois os demais índices são análogos.

Para cada θ , definimos $\lambda(\theta) \in \bigoplus_{i=1}^n \ell_2^i$ por

$$\lambda(\theta) = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_1^2 e^{i\theta} & \cdots & \lambda_1^n \\ & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^n \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n^n \end{pmatrix}$$

Assim, pela expressão obtida acima,

$$P(\lambda(\theta), y^{n+1}, y^{n+2}, \dots) = P(\lambda(\theta), 0, 0, \dots) + (1 - e^{i\theta})\psi_1^2(y).$$

Como a base $\mathcal{B}_2$ foi escolhida ortonormal, temos que $(\lambda_1^2 e^{i\theta}, \lambda_2^2) \in B_{\ell_2^2}$ e portanto, $\lambda(\theta) \in B_X$. Assim, como $\|P\| = 1$,

$$|P(\lambda(\theta), 0, 0, \dots) + (1 - e^{i\theta})\psi_1^2(y)| \leq 1,$$

para todo y de norma menor ou igual a 1. Escolhendo $\lambda \in \mathbb{C}$ de módulo 1 tal que $P(\lambda(\theta), 0, 0, \dots)$ e $\lambda(1 - e^{i\theta})\psi_1^2(y)$ tenham o mesmo argumento, teremos

$$\begin{aligned} |P(\lambda(\theta), 0, 0, \dots)| + |(1 - e^{i\theta})\psi_1^2(y)| &= |P(\lambda(\theta), 0, 0, \dots) + \lambda(1 - e^{i\theta})\psi_1^2(y)| \\ &\leq |P(\lambda(\theta), 0, 0, \dots) + (1 - e^{i\theta})\psi_1^2(\lambda y)| \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Vemos então que

$$\|\psi_1^2\| \leq \frac{1 - f(\theta)}{g(\theta)},$$

$$\text{onde } f(\theta) = \left| P \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_1^2 e^{i\theta} & \cdots & \lambda_1^n & 0 & \cdots \\ & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^n & 0 & \cdots \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \\ & & & \lambda_n^n & 0 & \cdots \\ & & & & 0 & \cdots \end{pmatrix} \right| \text{ e } g(\theta) = |1 - e^{i\theta}|.$$

Como $f(0) = 1$, f é diferenciável em $\theta = 0$. Como f tem um máximo local em $\theta = 0$ segue que $f'(0) = 0$.

Além disso, para $\theta > 0$,

$$\begin{aligned} g(\theta) &= |1 - (\cos \theta + i \sin \theta)| \\ &= \sqrt{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{2 - 2 \cos \theta} \\ &= \sqrt{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= 2 \sin \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Logo, $g'(\theta) = \cos \frac{\theta}{2}$ e portanto, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \cos \frac{\theta}{2} = 1$. Pela regra de L'Hopital,

$$\|\psi_1^2\| \leq \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1 - f(\theta)}{g(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{-f'(\theta)}{g'(\theta)} = 0.$$

Logo, $\|\psi_1^2\| = 0$.

Assim, para todo $(x^1, x^2, \dots, x^n, y^{n+1}, y^{n+2}, \dots) \in c_0$

$$P(x^1, x^2, \dots, x^n, y^{n+1}, y^{n+2}, \dots) = P(x^1, x^2, \dots, x^n, 0, 0, \dots)$$

e portanto P é finito. ■

Observação 4.2 Um fato sutil importante que nos permite fazer a demonstração do teorema anterior é a existência da base onde as coordenadas possam ser escritas de maneira não nula sem mudar a expressão da norma do espaço. Tal fato não é possível se mudarmos a norma euclidiana de $\mathbb{C}^2$ para a norma $\|\cdot\|_1$ por exemplo. Para ver isso, considere o polinômio 2-homogêneo definido por

$$P(x) = 2(x_1^2)^2 + x_2^2 \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-2}} x_1^j \right),$$

$$\text{onde } x = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots \\ & x_2^2 & x_2^3 & \cdots \\ & & x_3^3 & \cdots \end{pmatrix} \in Z := c_0\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} \ell_1^i\right).$$

Claro que P não é finito. Vamos mostrar que ele atinge sua norma. Observemos inicialmente que $P(e_1^2) = 2$. Se x é um ponto qualquer de B_Z então

$$\begin{aligned} |P(x)| &= \left| 2(x_1^2)^2 + x_2^2 \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-2}} x_1^j \right) \right| \\ &\leq 2|(x_1^2)^2| + |x_2^2|. \end{aligned}$$

Logo, é suficiente mostrar que, dados $0 \leq r \leq 1$, e $a, b \geq 0$ com $a+b = r$, temos $2a^2+b \leq 2$ para que tenhamos $\|P\| = P(e_1^2) = 2$. Mas fazendo $b = r - a$ é fácil ver que $2a^2+r-a \leq 2$, independente da escolha de r . Portanto, P atinge sua norma em e_1^2 .

■

Vamos agora mostrar que ao menos para os polinômios 2-homogêneos que atingem a norma temos uma única extensão que preserva a norma.

Teorema 4.3 *Seja P um polinômio de grau 2 em X que atinge a norma. Então existe uma única extensão que preserva a norma de P para X'' .*

Demonstração: Seja $P \in P(^2X)$ um polinômio homogêneo de grau 2 que atinge sua norma em $x_0 = (\lambda^j)_{j \in \mathbb{N}} \in X$. Considere $\bar{P}$, uma extensão que preserva a norma de P . Por ser uma extensão que preserva a norma, temos que $\bar{P}$ também atingirá sua norma em $x_0 = (\lambda^j)_{j \in \mathbb{N}} \in X \subset X''$. Com argumentos análogos aos da demonstração do teorema 4.1, mas tomando y da forma $(0, 0, \dots, y^{n+1}, y^{n+2}, \dots)$ na bola unitária de X'' no lugar da

bola unitária de X , concluímos que,

$$\bar{P}(x^1, x^2, \dots, y^{n+1}, y^{n+2}, \dots) = \bar{P}(x^1, x^2, \dots, 0, 0, \dots) = P(x^1, x^2, \dots, 0, 0, \dots),$$

para todo $(x^1, x^2, \dots, y^{n+1}, y^{n+2}, \dots)$ em X'' . Evidentemente, qualquer outra extensão que preserve a norma de P coincidirá com $\bar{P}$.

■

O fato acima não é válido para polinômios homogêneos de grau maior que 2. Ou seja, para cada $n \geq 3$, existe um polinômio n -homogêneo que atinge sua norma mas que possui ao menos duas extensões que preservam a norma. Para ver isso, consideramos o seguinte lema.

Lema 4.4 *Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Então*

$$|1 + w|^n + 2|1 - w|^{n-1} \leq 2^n,$$

$\forall w \in \mathbb{C}$, com $|w| = 1$

Demonstração: Sejam $w = a + ib$, $x = |1 + w|$ e $y = |1 - w|$. Então $0 \leq x \leq 2$ e

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (1 + a)^2 + b^2 + (1 - a)^2 + b^2 \\ &= 2 + 2a^2 + 2b^2 \\ &= 2 + 2|w|^2 \\ &= 4. \end{aligned}$$

Assim,

$$|1 + w|^n + 2|1 - w|^{n-1} = x^n + 2(4 - x^2)^{\frac{n-1}{2}}.$$

É suficiente então mostrar que

$$x^n + 2(4 - x^2)^{\frac{n-1}{2}} \leq 2^n,$$

ou ainda, dividindo a desigualdade por 2^n e fazendo $t = \frac{x}{2}$, é o mesmo mostrar que

$$f(t) = t^n + (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}} \leq 1, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Como $0 \leq t \leq 1$, temos que $1 - t^2 \leq 1$ e portanto $t^n \leq t^3$ e $(1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}} \leq 1 - t^2$, já que $n \geq 3$. Assim

$$f(t) \leq t^3 - t^2 + 1, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Mas $\max_{t \in [0, 1]} (t^3 - t^2 + 1) = 1$. Então $f(t) \leq 1, \quad \forall t \in [0, 1]$.

■

Vamos usar o lema para encontrar, para cada $n \geq 3$, um polinômio n -homogêneo que atinge sua norma mas que possui ao menos duas extensões que preservam a norma.

Considere $P \in P(^n X)$ definido por

$$P(x) = (x_1^1 + x_1^2)^n, \quad x = (x^1, x^2, x^3, \dots), \quad x^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_i^i)$$

É fácil ver que $\|P\| = 2^n$.

Definimos $P_1 \in P(^n X'')$ por

$$P_1(x) = (x_1^1 + x_1^2)^n, \quad x = (x^1, x^2, x^3, \dots), \quad x^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_i^i).$$

Claro que P_1 é uma extensão que preserva a norma de P .

Tomando $x_0 = (\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4, \dots)$, onde $\lambda^j = ((-1)^{j+1}, 0, 0, \dots)$, e um funcional linear $\varphi \in X'$ tal que

$$\|\varphi\| = 1, \quad \varphi(X) \equiv 0 \quad \text{e} \quad \varphi(x_0) = d(x_0, X) = 1.$$

definimos o polinômio homogêneo em X''

$$P_2(x) = (x_1^1 + x_1^2)^n + 2(x_1^1 - x_1^2)^{n-1} \cdot \varphi(x).$$

Como $\varphi(X) \equiv 0$, $P_2|_X = P$. Além disso, $P_1 \neq P_2$ em X'' pois $P_1(x_0) = 0$ e $P_2(x_0) = 2^n$. Resta portanto mostrar que $\|P_2\| \leq 2^n$.

Para tal, observemos inicialmente que para y e z complexos de módulo no máximo 1 e para x da forma $\begin{pmatrix} 0 & 0 & x_1^3 & \dots \\ x_2^2 & x_2^3 & \dots \\ x_3^3 & \dots \end{pmatrix} \in B_{X''}$ temos que

$$\begin{aligned} \left| P_2 \begin{pmatrix} y & z & x_1^3 & \dots \\ x_2^2 & x_2^3 & \dots \\ x_3^3 & \dots \end{pmatrix} \right| &= \left| (y+z)^n + 2(y-z)^{n-1} \cdot \varphi \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_1^3 & \dots \\ x_2^2 & x_2^3 & \dots \\ x_3^3 & \dots \end{pmatrix} \right| \\ &\leq |(y+z)|^n + 2|(y-z)|^{n-1}, \end{aligned}$$

onde na igualdade acima usamos que φ se anula em X e na desigualdade, que a norma de φ é 1. Assim, pelo Teorema do Módulo Máximo, para cada $x \in B_{X''}$ da forma acima fixado temos

$$\begin{aligned} \sup_{|y|,|z| \leq 1} \left| P_2 \begin{pmatrix} y & z & x_1^3 & \dots \\ x_2^2 & x_2^3 & \dots \\ x_3^3 & \dots \end{pmatrix} \right| &= \sup_{|y|=|z|=1} \left| P_2 \begin{pmatrix} y & z & x_1^3 & \dots \\ x_2^2 & x_2^3 & \dots \\ x_3^3 & \dots \end{pmatrix} \right| \\ &\leq \sup_{|y|=|z|=1} (|(y+z)|^n + 2|(y-z)|^{n-1}) \\ &= \sup_{|y|=|z|=1} \left(\frac{|(y+z)|^n}{|y|^n} + 2 \frac{|(y-z)|^{n-1}}{|y|^{n-1}} \right) \\ &= \sup_{|y|=|z|=1} \left(\left| 1 + \frac{z}{y} \right|^n + 2 \left| 1 - \frac{z}{y} \right|^{n-1} \right) \\ &= \sup_{|w|=1} (|1+w|^n + 2|1-w|^{n-1}) \\ &\leq 2^n, \end{aligned}$$

pelo lema anterior. Vemos então que $\|P_2\| \leq 2^n$.

Capítulo 5

Funções Holomorfas em $d_*(w, 1)$

Seja E um espaço de Banach com base de Schauder (x_i) . Consideremos a função restrição $R : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ definida por $R(f) = (f(x_i))_{i \in \mathbb{N}}$, onde $\mathcal{F}$ é um certo conjunto de funções escalares definidas em E . Jaramillo estudou em [15] esta função com o objetivo de relacionar a reflexividade do seu domínio com a sua imagem. Em [5], Aron e Globevnik determinaram a imagem de R sendo $E = c_0$ e $\mathcal{F}$ determinados espaços de funções holomorfas. Neste capítulo, iremos determinar $R(\mathcal{F})$ quando $E = d_*(w, 1)$ e mostraremos que neste caso R se comporta de maneira diferente que em c_0 .

5.1 Polinômios

Aron e Globevnik mostraram em [5] que se $E = c_0$, então $R(P(^n c_0)) = l_1 = c'_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Surge então a pergunta que se para todo espaço de Banach E com base possuindo propriedades análogas a de c_0 (como contrátil ou incondicional por exemplo) sempre teríamos $R(P(^n E)) = E'$. Iremos mostrar que apesar da base de $d_*(w, 1)$ possuir tais propriedades, a função restrição se comporta de maneira diferente. Começamos com

um lema cuja demonstração pode ser encontrada em [5].

Lema 5.1 [5] *Para cada $n = 2, 3, \dots$, as respectivas funções de Rademacher $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ satisfazem as seguintes propriedades:*

(a) $|s_k(t)| = 1, \forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1]$.

(b) *Para quaisquer $k_1, \dots, k_n$, temos*

$$\int_0^1 s_{k_1}(t) \cdots s_{k_n}(t) dt = \begin{cases} 1, & \text{se } k_1 = k_2 = \cdots = k_n; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Usando o lema anterior obtemos o seguinte resultado.

Proposição 5.2 *Seja $P \in P({}^n d_*(w, 1))$. Temos então que*

$$\|(P(e_i))_i\|_{d(w^n, 1)} \leq \|P\|,$$

onde w^n denota a sequência $(w_n^n)_n$.

Demonstração: Seja $P \in P({}^n d_*(w, 1))$. Considere uma permutação $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Definimos

$$\lambda_i = \begin{cases} \frac{|P(e_i)|}{P(e_i)}, & \text{se } P(e_i) \neq 0; \\ 1, & \text{se } P(e_i) = 0. \end{cases}$$

Assim, $\lambda_i P(e_i) = |P(e_i)|$.

Seja $\beta_i \in \mathbb{C}$ tal que $\beta_i^n = \lambda_i$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m w_{\pi(i)}^n |P(e_i)| &= \sum_{i=1}^m w_{\pi(i)}^n \lambda_i P(e_i) \\
&= \sum_{i,i_2,\dots,i_n=1}^m \left(\int_0^1 s_i(t) \cdots s_{i_n}(t) dt \right) w_{\pi(i)}^n \lambda_i \check{P}(e_i, \dots, e_{i_n}) \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{i,i_2,\dots,i_n=1}^m \lambda_i w_{\pi(i)}^n s_i(t) \cdots s_{i_n}(t) \check{P}(e_i, \dots, e_{i_n}) \right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{i,i_2,\dots,i_n=1}^m \beta_i^n w_{\pi(i)}^n s_i(t) \cdots s_{i_n}(t) \check{P}(e_i, \dots, e_{i_n}) \right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{i,i_2,\dots,i_n=1}^m \beta_i w_{\pi(i)} s_i(t) \cdots \beta_{i_n} w_{\pi(i_n)} s_{i_n}(t) \check{P}(e_i, \dots, e_{i_n}) \right) dt \\
&= \int_0^1 \check{P} \left(\sum_{i=1}^m \beta_i w_{\pi(i)} s_i(t) e_i, \dots, \sum_{i_n=1}^m \beta_{i_n} w_{\pi(i_n)} s_{i_n}(t) e_{i_n} \right) dt \\
&= \int_0^1 P \left(\sum_{i=1}^m \beta_i w_{\pi(i)} s_i(t) e_i \right) dt. \quad (*)
\end{aligned}$$

Para cada $t \in [0, 1]$, definimos

$$z(t) = \sum_{i=1}^m \beta_i w_{\pi(i)} s_i(t) e_i = (\beta_1 w_{\pi(1)} s_1(t), \dots, \beta_m w_{\pi(m)} s_m(t), 0, 0, \dots).$$

Assim, $|z(t)_i| = |\beta_i w_{\pi(i)} s_i(t)| = 1 \cdot w_{\pi(i)} \cdot 1 = w_{\pi(i)}$, se $i \leq m$, e $|z(t)_i| = 0$, se $i > m$.

Logo,

$$\|z(t)\|_{d_*(w,1)} = \sup_l \frac{\sum_{i=1}^l |z(t)_i|}{\sum_{i=1}^l w_i} \leq \sup_l \frac{\sum_{i=1}^l w_{\pi(i)}}{\sum_{i=1}^l w_i} \leq \sup_l \frac{\sum_{i=1}^l w_i}{\sum_{i=1}^l w_i} = 1,$$

onde na última desigualdade usamos que a sequência (w_i) é decrescente. Assim, para cada $t \in [0, 1]$, $|P(z(t))| \leq \|P\|$ e portanto, por (*) temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m w_{\pi(i)}^n |P(e_i)| &= \int_0^1 P(z(t)) dt \\ &\leq \int_0^1 |P(z(t))| dt \\ &\leq \|P\|. \end{aligned}$$

Como m é arbitrário, $\sum_{i=1}^{\infty} w_{\pi(i)}^n |P(e_i)| \leq \|P\|$, e portanto

$$\|(P(e_i))_i\|_{d(w^n, 1)} = \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} w_{\pi(i)}^n |P(e_i)| \leq \|P\|.$$

■

Segue da proposição anterior que $R((P^n d_*(w, 1))) \subset d(w^n, 1)$. Vamos mostrar agora que na verdade temos $R(P^n d_*(w, 1)) = d(w^n, 1)$. Começaremos com um lema.

Lema 5.3 *Sejam $p \geq 1$ e $k \in \mathbb{N}$. Então, dados $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ reais positivos, existe uma permutação $\pi^0 \in S_k$ tal que para todo $x \in B_{d_*(w, 1)}$ temos*

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j |x_j|^p \leq \sum_{j=1}^k \alpha_j w_{\pi^0(j)}^p.$$

Na demonstração do lema, usaremos o seguinte resultado de [8]. Lembramos que um ponto e de um subconjunto convexo A de um espaço vetorial é chamado *extremal* se $e = tx + (1-t)y$ para $x, y \in A$ e algum $t \in (0, 1)$ então temos obrigatoriamente $e = x = y$. Denotaremos por $\text{ext}(A)$ o conjunto dos pontos extremais de A e $B_{d_*(w, 1)}^k$ denotará a bola unitária de $\mathbb{C}^k$ segundo a norma de $d_*(w, 1)$.

Proposição 5.4 [8] *Os pontos extremais de $B_{d_*(w,1)}^k$ são os da forma $(x_1, \dots, x_k, 0, 0, \dots)$ onde existe $\pi \in S_k$ tal que $|x_i| = w_{\pi(i)}$.*

Demonstração do lema 5.3: Dentre todas as permutações $\pi \in S_k$, seja π^0 a que maximiza a soma $\sum_{j=1}^k \alpha_j w_{\pi(j)}^p$. Seja $x \in B_{d_*(w,1)}$. Definimos $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_k, 0, 0, \dots)$. Claro que $\tilde{x} \in B_{d_*(w,1)}^k$. Pelo teorema de Krein - Milman, $B_{d_*(w,1)}^k = \overline{\text{co}}(\text{ext}B_{d_*(w,1)}^k)$. Então, $\tilde{x} \in \overline{\text{co}}(\text{ext}B_{d_*(w,1)}^k)$. Vamos supor inicialmente que $\tilde{x} \in \text{co}(\text{ext}B_{d_*(w,1)}^k)$. Então, $\tilde{x} = \sum_{i=1}^m \lambda^i x^i$, onde $\lambda^i > 0$, $\sum_{i=1}^m \lambda^i = 1$, e x^i é ponto extremal de $B_{d_*(w,1)}^k$, ou seja, para cada $1 \leq i \leq m$, existe $\pi^i \in S_k$ tal que $|x_j^i| = w_{\pi^i(j)}$, $\forall j \leq k$. Assim, para cada $j \leq k$, como a função $t \mapsto t^p$, $t \geq 0$ é convexa, temos que

$$|x_j|^p = \left| \sum_{i=1}^m \lambda^i x_j^i \right|^p \leq \left(\sum_{i=1}^m \lambda^i |x_j^i| \right)^p \leq \sum_{i=1}^m \lambda^i |x_j^i|^p.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \alpha_j |x_j|^p &\leq \sum_{j=1}^k \alpha_j \sum_{i=1}^m \lambda^i |x_j^i|^p \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda^i \sum_{j=1}^k \alpha_j |x_j^i|^p \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda^i \sum_{j=1}^k \alpha_j w_{\pi^i(j)}^p \\ &\leq \sum_{i=1}^m \lambda^i \sum_{j=1}^k \alpha_j w_{\pi^0(j)}^p = \sum_{j=1}^k \alpha_j w_{\pi^0(j)}^p. \end{aligned}$$

Para o caso em que $\tilde{x} \in \overline{\text{co}}(\text{ext}B_{d_*(w,1)}^k) \setminus \text{co}(\text{ext}B_{d_*(w,1)}^k)$, basta considerar uma sequência em $\text{co}(\text{ext}B_{d_*(w,1)}^k)$ convergindo para $\tilde{x}$ e tomar o limite.

■

No próximo teorema usaremos o lema anterior para determinar $R(P(n, d_*(w, 1)))$.

Teorema 5.5 Para cada $n \in \mathbb{N}$, $R(P^n d_*(w, 1)) = d(w^n, 1)$.

Demonstração: Pela proposição 5.2, $R(P^n d_*(w, 1)) \subset d(w^n, 1)$. Por outro lado, seja $y = (y_i) \in d(w^n, 1)$. Considere o polinômio em $d_*(w, 1)$ definido por

$$P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i x_i^n, \quad x = (x_i).$$

Observe que P está bem definido pois, pelo lema anterior, para cada $x \in B_{d_*(w, 1)}$,

$$\sum_{i=1}^k |y_i| |x_i|^n \leq \sum_{i=1}^k |y_i| w_{\pi^0(i)}^n \leq \|y\|_{d(w^n, 1)},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo $\sum_{i=1}^{\infty} |y_i x_i^n| < \infty$. Claro que $R(P) = y$.

■

Observação 5.6 O lema 5.3 pode ser usado para dar uma outra demonstração do lema 2.1. De fato, basta tomarmos os α_j 's iguais a 1 e assim obtemos

$$\sum_{j=1}^k |x_j|^p \leq \sum_{j=1}^k w_{\pi^0(j)}^p \leq \|w\|_p^p < \infty.$$

5.2 Funções Holomorfas

Nessa seção, vamos analisar o que acontece com a imagem da função R nos seguintes espaços de Banach de funções holomorfas:

$$\mathcal{A}^\infty(B_E) = \{f : B_E \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ é holomorfa em } \overset{\circ}{B}_E, \text{ contínua e limitada em } B_E\}$$

e

$$\mathcal{A}_U(B_E) = \{f \in \mathcal{A}^\infty(B_E) : f \text{ é uniformemente contínua}\}.$$

Em [5] é demonstrado que qualquer sequência de 0 e 1 pode ser interpolada por uma função em $\mathcal{A}^\infty(B_{c_0})$ de norma 1. Mais precisamente, se $S \subset \mathbb{N}$ é um conjunto arbitrário, então existe uma função de norma 1 em $\mathcal{A}^\infty(B_{c_0})$ tal que $f(e_n) = 1$, se $n \in S$ e $f(e_n) = 0$, se $n \notin S$. Além disso, se S é finito, f pode ser tomada em $\mathcal{A}_U(B_{c_0})$.

Observe que se $x \in d_*(w, 1)$, então

$$\|x\|_\infty = [x]_1 = \frac{[x]_1}{w_1} \leq \sup_k \frac{\sum_{n=1}^k [x_n]}{\sum_{n=1}^k w_n} = \|x\|_{d_*(w,1)},$$

e portanto a inclusão $i : d_*(w, 1) \rightarrow c_0$ é contínua e conseqüentemente uniformemente contínua e holomorfa.

Pelos fatos acima, é imediato o seguinte lema.

Lema 5.7 *Sejam S e S' subconjuntos disjuntos de $\mathbb{N}$. Então:*

(i) *Existe uma função $f \in \mathcal{A}^\infty(B_{d_*(w,1)})$ de norma no máximo 2 tal que*

$$f(e_n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \in S; \\ -1, & \text{se } n \in S'; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(ii) *Se os conjuntos S e S' forem ambos finitos, então a função f acima pode ser tomada em $\mathcal{A}_U(B_{d_*(w,1)})$.*

Usando o lema anterior, obtemos as seguintes propriedades de $R(\mathcal{F})$ sendo $\mathcal{F}$ os espaços em questão.

Proposição 5.8 (i) Dado $x \in l_\infty$, existe $f \in \mathcal{A}^\infty(B_{d_*(w,1)})$ tal que $R(f) = x$ e $\|f\| \leq 4\|x\|_\infty$ e portanto, $R(\mathcal{A}^\infty(B_{d_*(w,1)})) = l_\infty$.

(ii) Dado $x \in c$, existe $f \in \mathcal{A}_U(B_{d_*(w,1)})$ tal que $R(f) = x$ e $\|f\| \leq 10\|x\|_\infty$ e portanto $c \subset R(\mathcal{A}_U(B_{d_*(w,1)}))$.

Demonstração: (i): Se $x = 0$, basta tomarmos $f \equiv 0$. Seja então $x = (x_n) \neq 0$, e vamos supor inicialmente que cada $x_n \in \mathbb{R}$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\frac{x_n}{\|x\|_\infty} \in [-1, 1]$. Escrevemos cada $\frac{x_n}{\|x\|_\infty}$ em sua representação binária, ou seja, $\frac{x_n}{\|x\|_\infty} = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \alpha_{n_j}$, onde cada α_{n_j} é 0, 1 ou -1 . Para cada j , sejam $S_j = \{n \in \mathbb{N} : \alpha_{n_j} = 1\}$ e $S'_j = \{n \in \mathbb{N} : \alpha_{n_j} = -1\}$, e considere a função F_j obtida usando o lema 5.7, ítem (i). Seja $f = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \|x\|_\infty F_j \in \mathcal{A}^\infty(B_E)$. Vemos então que

$$f(e_n) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \|x\|_\infty F_j(e_n) = \|x\|_\infty \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \alpha_{n_j} = \|x\|_\infty \frac{x_n}{\|x\|_\infty} = x_n,$$

e que neste caso

$$\|f\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \|x\|_\infty \|F_j\| \leq 2\|x\|_\infty.$$

Para o caso geral, escrevemos cada x_n na forma $p_n + iq_n$, onde $p_n, q_n \in \mathbb{R}$. Repetimos a demonstração para cada uma destas parcelas e obtemos as funções f_p e f_q . A função procurada é $f = f_p + if_q$ e neste caso, $\|f\| \leq \|f_p\| + \|f_q\| \leq 4\|x\|_\infty$.

(ii): Seja $x = (x_n) \in c$, e como no ítem anterior vamos supor que cada $x_n \in \mathbb{R}$. Seja $l = \lim_n x_n$ e definimos $\beta_n = x_n - l$ e $\beta = (\beta_n)_n$. Assim, $x_n = l + \beta_n$. Observe que $\|\beta\| \leq 2\|x\|_\infty$. Repetimos a demonstração do ítem anterior com β_n no lugar de x_n e como $\beta_n \rightarrow 0$, os conjuntos $S_j = \{n \in \mathbb{N} : \alpha_{n_j} = 1\}$ e $S'_j = \{n \in \mathbb{N} : \alpha_{n_j} = -1\}$ são todos finitos e as respectivas funções F_j obtidas podem ser tomadas em $\mathcal{A}_U(B_{d_*(w,1)})$, de acordo com o

lema 5.7 (ii). Assim, $f = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \|\beta\| F_j + l$ é a função procurada, e neste caso

$$\|f\| \leq 2\|\beta\|_{\infty} + |l| \leq 4\|x\| + \|x\| = 5\|x\|.$$

O caso geral é tratado de maneira análoga ao item anterior escrevendo cada β_n na forma $p_n + iq_n$, onde $p_n, q_n \in \mathbb{R}$. Neste caso, obtemos $\|f\| \leq 10\|x\|_{\infty}$.

■

A proposição anterior nos diz apenas que $c \subset R(\mathcal{A}_U(B_{d_*(w,1)}))$. Mas sob algumas hipóteses sobre w podemos determinar precisamente $R(\mathcal{A}_U(B_{d_*(w,1)}))$, como mostra o próximo teorema.

Teorema 5.9 *Seja $w \in c_0 \setminus l_1$ uma sequência decrescente de números reais positivos. Então, $R(\mathcal{A}_U(B_{d_*(w,1)})) = c$ se, e somente se, $w \notin l_p$, $\forall p > 1$. Se $w \in l_p$ para algum $p > 1$, então $R(\mathcal{A}_U(B_{d_*(w,1)})) = l_{\infty}$*

Demonstração: Suponhamos que $w \notin l_p$, $\forall p > 1$, e seja $f \in \mathcal{A}_U(B_{d_*(w,1)})$. Dado $\varepsilon > 0$, pela continuidade uniforme, existe $\delta > 0$ tal que $\|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$. Assim, tomando $1 - \delta < r < 1$ temos que para todo $x \in B_{d_*(w,1)}$, $\|x - rx\| < 1 - r < \delta$ e portanto,

$$|f(rx) - f(x)| < \varepsilon/3, \quad \forall x \in B_{d_*(w,1)}.$$

A função $x \mapsto f(rx)$ é analítica e limitada em $\frac{1}{r} \overset{\circ}{B}_{d_*(w,1)}$. Assim, a série de potências de $f(r \cdot)$ em zero converge uniformemente em $\frac{1}{r} \overset{\circ}{B}_{d_*(w,1)}$ (veja teorema 7.13 de [19]). Então, existem $m \in \mathbb{N}$ e $P_k \in P({}^k d_*(w,1))$, $k = 0, 1, \dots, m$, tais que

$$|f(rx) - \sum_{k=0}^m P_k(x)| < \varepsilon/3, \quad \forall x \in B_{d_*(w,1)}.$$

Como $w \notin l_p$, $\forall p \geq 1$, para cada $k = 1, \dots, m$ existe um polinômio de tipo finito Q_k tal que $\|Q_k - P_k\| < \varepsilon/3m$. Então, definindo $Q_0 = P_0 = f(0)$, temos que

$$\left| \sum_{k=0}^m P_k(x) - \sum_{k=0}^m Q_k(x) \right| \leq \sum_{k=0}^m |P_k(x) - Q_k(x)| = \sum_{k=1}^m |P_k(x) - Q_k(x)| < \varepsilon/3.$$

e portanto, para todo $x \in B_{d_*(w,1)}$,

$$|f(x) - \sum_{k=0}^m Q_k(x)| < |f(x) - f(rx)| + |f(rx) - \sum_{k=0}^m P_k(x)| + \left| \sum_{k=0}^m P_k(x) - \sum_{k=0}^m Q_k(x) \right| < \varepsilon,$$

em particular, $|f(e_n) - \sum_{k=0}^m Q_k(e_n)| < \varepsilon$. Como (e_n) converge fracamente para zero, temos que, para cada $k = 1, \dots, m$, $Q_k(e_n)$ converge a zero e portanto,

$$\lim_n |f(e_n) - \sum_{k=0}^m Q_k(e_n)| = |\lim_n f(e_n) - f(0)| \leq \varepsilon.$$

Logo, $f(e_n) \rightarrow f(0)$ e portanto $R(\mathcal{A}_U(B_{d_*(w,1)})) \subset c$. A outra inclusão segue da proposição anterior.

Por outro lado, se $w \in l_p$ para algum $p > 1$, pelo lema 2.1 temos que $d_*(w, 1) \subset l_N$, para $N > p$. Assim, dada qualquer sequência $y = (y_n) \in l_\infty$, podemos definir o polinômio em $P({}^N d_*(w, 1))$ por

$$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n^N, \quad x = (x_n).$$

Assim, $R(P) = y$. ■

Observação 5.10 Os resultados anteriores permanecem válidos para os espaços de Marcinkiewicz m_Ψ^0 , desde que tenhamos $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(n) = \infty$. De fato, basta fazermos $w_n = \Psi(n) - \Psi(n-1)$ e aplicarmos as demonstrações para $d_*(w, 1)$.

Referências Bibliográficas

- [1] R. Alencar & M.L. Lourenço, *On tensor product bases Gelbaum-De Lamadrid's result*, Int. J. Pure Appl. Math. **14**(2004),1-13.
- [2] R.M. Aron & P. Berner, *A Hahn-Banach extension theorem for analytic mappings*, Bull. Math. Soc. France, **106** (1978), 3-24.
- [3] R.M. Aron, C. Boyd & Y.S. Choi, *Unique Hahn-Banach theorems for spaces of homogeneous polynomials*, J. Austral. Math. Soc, **70** (2001), 387-400.
- [4] R.M. Aron & S. Dineen, *Q -reflexive Banach spaces*, Rocky Mountain J. Math., **27**, 4, (1997), 1009-102.
- [5] R.M. Aron & J. Globevnik, *Analytic functions on c_0* , Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid, **2** (1989), 27-33.
- [6] R.M. Aron & J.B. Prolla, *Polynomial approximation of differentiable functions on Banach spaces*, J. Reine Angew. Math., **313** (1990), 195-216.
- [7] A.M. Davie & T.W. Gamelin, *A theorem on polynomial star approximation*, Proc. Amer. Math. Soc., **106** (1989), 351-356.
- [8] Y.S. Choi, K.H. Han & H.G. Song, *Extensions of polynomials on preduals of Lorentz sequence spaces*, Preprint, 2003.

-
- [9] V. Dimant & S. Dineen, *Banach subspaces of spaces of holomorphic functions and related topics*, Math. Scand., **83** (1998), 142-160.
- [10] V. Dimant & I. Zalduendo, *Bases in spaces of multilinear forms over Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., **200** (1996), 548-566.
- [11] S. Dineen, *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, London, 1999.
- [12] D.J.H. Garling, *On symmetric sequence spaces*, Proc. London Math. Soc., **16** (1966), 85-106.
- [13] G.H. Hardy, J.E. Littlewood & G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge, 1934.
- [14] P. Harmand, D. Werner & W. Werner, *M-ideals in Banach Spaces and Banach Algebras*, Springer-Verlag Math. Notes **1547**, (1993).
- [15] J.A. Jaramillo, *Álgebras de funciones continuas y diferenciables*, Tese de Doutorado, Univ. Complutense de Madrid, 1988.
- [16] A. Kamińska & H.J. Lee, *M-ideal properties in Marcinkiewicz spaces*, Comment. Math. Prace Mat., 2004, 123-144.
- [17] A. Kamińska & H.J. Lee, *On uniqueness of extension of homogeneous polynomials*, Preprint.
- [18] R.E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Graduate Texts in Mathematics **183**, Springer-Verlag, 1998.
- [19] J. Mujica, *Complex Analysis in Banach Spaces*, Math. Studies **120**, North Holland, 1986.
- [20] R. Payá & M.J. Sevilla, *Norm attaining multilinear forms and polynomials on pre-duals of Lorentz sequence spaces*, Studia Math., **127** (1998), 99-112.
-

- [21] L. Pellegrini, *Polinômios homogêneos nos espaços de Marcinkiewicz*, Atas do 61º Seminário Brasileiro de Análise (2005), 223-230.
- [22] L. Pellegrini, *Bases em espaço de polinômios homogêneos*, Atas do 59º Seminário Brasileiro de Análise (2004), 192-198.
- [23] L. Pellegrini, *Uma caracterização da extensão canônica de polinômios nos preduais dos espaços de Lorentz*, Atas do 58º Seminário Brasileiro de Análise (2003), 593-597.
- [24] L. Pellegrini, *Um teorema de Hahn-Banach para polinômios homogêneos*, Dissertação de Mestrado, IME-USP, 2001.
- [25] R.A. Ryan, *Applications of topological tensor products to infinite dimensional holomorphy*, Tese de Doutorado, Trinity College Dublin, 1980.
- [26] C. Stegall, *Duals of certain spaces with the Dunford-Pettis propertis*, Notices Amer. Math. Soc., **19** (1972), 799.