**Generalizações do $c_0(\mathbb{N})$ - $l_1(\mathbb{N})$ - $l_\infty(\mathbb{N})$
Teorema de Bessaga e Pełczyński**

Marcelo Correia da Silva

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Área de Concentração:
ANÁLISE MATEMÁTICA

Orientador: **Prof. Dr. ELÓI MEDINA GALEGO**

-São Paulo, Maio de 2005-

Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Doutor Elói Medina Galego, pelo incentivo em estudar o artigo deste trabalho.

Ao Professor Doutor Marek Wójtowicz, pela ajuda na prova do Corolário 4.3.12.

À minha família.

À minha querida Claudia.

Ao colega Santos Alberto Enriquez Remigio pela ajuda com o editor de texto.

Resumo

Sejam X e Y dois espaços de Banach tais que X^* contm um subespaço isomorfo a Y . O objetivo deste trabalho estudar a relao entre X e Y^* .

Abstract

Let X and Y be Banach spaces such that X^* contains a subspace isomorphic to Y . The main aim of this work is to study the relation between X and Y^* .

Sumário

Introdução	1
Notações	3
Preliminares	4
1 Os espaços $c_0(\mathbb{N})$, $l_1(\mathbb{N})$ e $l_\infty(\mathbb{N})$ e o Teorema de Bessaga e Pełczyński	16
2 A propriedade CSPP	26
2.1 Espaços de Banach WCG	26
2.2 Espaços de Banach WCD	29
2.3 A propriedade CSPP	31
3 O lema principal	33
3.1 Sequência normal e sequência fortemente normal	33
3.2 O lema principal	42
4 Os principais resultados	44
4.1 Sequência w^* -básica	44
4.2 O Teorema de M. Gonzalez e V. M. Onieva	48
4.3 Os principais resultados	51
5 Algumas aplicações nos espaços de sequências de Orlicz	60
Referências Bibliográficas	65

Introdução

Um Teorema de C. Bessaga e A. Pełczyński (Ver Teorema 1.13) de 1958 afirma que todo espaço de Banach X , tal que X^* contenha um subespaço isomorfo a $c_0(\mathbb{N})$, também contém um subespaço complementado isomorfo a $l_1(\mathbb{N})$. E consequentemente X^* contém um subespaço isomorfo a $l_\infty(\mathbb{N})$.

Daí surgiu naturalmente o seguinte problema que esteve em aberto por muitos anos.

Problema. Sejam X e Y espaços de Banach tal que X^* contenha um subespaço isomorfo a Y . Qual é a relação entre X e Y^* ?

O Teorema de Bessaga e Pełczyński acima mencionado garante que quando $Y = c_0(\mathbb{N})$ então X contém um subespaço isomorfo a $l_1(\mathbb{N})$.

O nosso trabalho consistirá em apresentar em detalhes a solução desse problema dado por Marek Wójtowicz [22] em 2002. Marek mostrou que sobre algumas condições existe uma relação entre X e Y^* . E para isto ele observou que um Teorema de W. B. Johnson e H. P. Rosenthal [12] de 1972 continha implicitamente uma extensão do Teorema de Bessaga e Pełczyński (Ver Lema 4.3.1).

No espírito desta extensão, na monografia [14] p.104, os autores indicam a impossibilidade de alternar os espaços $c_0(\mathbb{N})$ e $l_1(\mathbb{N})$ no Teorema de Bessaga e Pełczyński e eles consideram o seguinte problema: O que devemos assumir em X para que a condição “ X^* contém uma cópia de $l_1(\mathbb{N})$ ” implique “ X tem $c_0(\mathbb{N})$ como um quociente?”.

Neste contexto, Marek generaliza um resultado de Johnson e Rosenthal (Ver Teorema 4.3.7) que permite, juntamente com um Teorema de M. Gonzalez e V. M. Onieva (Ver Teorema 4.2.2), alternar os espaços $c_0(\mathbb{N})$ e $l_1(\mathbb{N})$ no resultado de Bessaga e Pełczyński (Ver Corolário 4.3.12).

No capítulo final deste trabalho mostraremos como estes resultados generalizados fun-

cionam se trocarmos o espaço $c_0(\mathbb{N})$ no Teorema de Bessaga e Pelczyński para alguns subespaços de espaços de sequências de Orlicz.

Notações

As propriedades topológicas envolvidas no decorrer desta dissertação estarão associadas à topologia dada pela norma em questão. A menos que se mencione algo, vamos utilizar a seguinte notação.

$\mathbf{N}$	O conjunto $\{1, 2, \dots\}$.
$\mathbf{R}$	O corpo dos números reais.
$\mathbf{C}$	O corpo dos números complexos.
$\mathbf{K}$	O corpo $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
X e Y	Espaços normados sobre $\mathbf{K}$.
$B_X(a; r)$	A bola aberta de X de centro a e raio r .
B_X	A bola unitária fechada de X .
S_X	A esfera unitária fechada de X .
$L(X; Y)$	O conjunto das aplicações lineares e contínuas de X em Y .
X^*	O espaço dual de X , o conjunto $L(X; \mathbf{K})$.
X^{**}	O espaço bidual de X , o conjunto $L(L(X; \mathbf{K}); \mathbf{K})$.
$\overline{W}$	O fecho de W , onde $W \subset X$.
$x_n \rightarrow x$	A sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para x .
$x_n \nrightarrow x$	A sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ não converge para x .
$x_n \xrightarrow{w} x$	A sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge fracamente para x .
$J : X \rightarrow X^{**}$	A aplicação canônica de X em X^{**} definida por $J(x)(f) = f(x)$.
$[(x_n)_{n=1}^{\infty}]$	Subespaço fechado de X gerado por $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.
$Y \hookrightarrow X$	X contém um subespaço isomorfo a Y .
$Y \not\hookrightarrow X$	X não contém um subespaço isomorfo a Y .
$Y \xhookrightarrow{c} X$	X contém um subespaço isomorfo e complementado a Y .
$X \twoheadrightarrow Y$	Y é um quociente de X .
δ_{ij}	Símbolo de Kronecher onde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j; \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$

Preliminares

Inicialmente apresentaremos algumas definições e resultados que serão utilizados no decorrer desta dissertação.

Definição 0.1 *Seja X um espaço normado. A topologia fraca de X , denotada por $\sigma(X, X^*)$ é a topologia obtida tomando como base os conjuntos da forma*

$$V(x_0, x_1^*, \dots, x_n^*, \varepsilon) = \{x \in X : \sup |x_i^*(x) - x_i^*(x_0)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\},$$

onde $x_0 \in X$, $x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$ e $\varepsilon > 0$.

Neste trabalho, aberto fraco, fechado fraco, compacto fraco, etc., estão se referindo a conjunto aberto, fechado, compacto, etc., com relação à topologia fraca de X .

Definição 0.2 *Seja X um espaço normado. Uma sequência em X é dita fracamente convergente a $x \in X$, e denotaremos por $x_n \xrightarrow{w} x$, se $x^*(x_n) \rightarrow x^*(x)$, $\forall x^* \in X^*$.*

Definição 0.3 *Seja X um espaço normado. Dizemos que um subconjunto W de X é fracamente sequencialmente compacto se toda sequência de W admite uma subsequência fracamente convergente para algum elemento $x \in W$.*

Definição 0.4 *Seja X um espaço normado. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X é dita fracamente de Cauchy, e denotaremos por w -Cauchy, se para todo $x^* \in X^*$, $(x^*(x_n))_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy.*

Teorema 0.5 ([10], p.140) *Sejam X um espaço normado e Y um espaço de Banach. A aplicação $\|\cdot\| : L(X; Y) \rightarrow \mathbf{R}$ definida para cada $T \in L(X; Y)$ por:*

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|$$

é uma norma em $L(X; Y)$ que o torna completo, ou seja, $L(X; Y)$ é um espaço de Banach.

Teorema 0.6 Hahn-Banach. ([10], p.182) *Sejam X um espaço normado, X_0 um subespaço de X e $f_0 : X_0 \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo. Então existe um funcional linear contínuo $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = f_0(x)$, $\forall x \in X_0$, com $\|f\| = \|f_0\|$.*

Definição 0.7 *Sejam X e Y espaços normados sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que X e Y são isomorfos, e denotaremos por $X \simeq Y$, se existe uma aplicação linear contínua bijetora $T: X \rightarrow Y$ com inversa contínua.*

Definição 0.8 *Uma isometria de X sobre Y é um isomorfismo T de X sobre Y tal que $\|T(x)\| = \|x\|$ para qualquer $x \in X$.*

Proposição 0.9 ([13], Lemas 4.6-1 e 4.6-2) *Sejam X um espaço normado e $J : X \rightarrow X^{**}$ definida por $J(x) = \hat{x}$ para cada $x \in X$, onde para cada $x \in X$, $\hat{x}(f) = f(x)$ para toda $f \in X^*$. Então a aplicação J é uma isometria de X sobre a imagem e é chamada de aplicação canônica de X em X^{**} .*

Definição 0.10 *Seja X um espaço normado. Dizemos que X é reflexivo se J é sobrejetora.*

Exemplo 0.11 ([13], p.242) *Todo espaço de Hilbert é reflexivo.*

Teorema 0.12 ([17], p.97) *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \rightarrow Y$ uma aplicação linear. A aplicação T é contínua se, e somente se, ela é fracamente contínua (ou seja, contínua de $(X, \sigma(X, X^*))$ em $(Y, \sigma(Y, Y^*))$).*

Definição 0.13 *Sejam X um espaço de Banach e $P \in L(X; X)$. Dizemos que P é uma projeção em X se $P^2 = P$.*

Definição 0.14 *Sejam X um espaço de Banach e M um subespaço de X . Dizemos que M é complementado em X se existe uma projeção $P \in L(X; X)$ tal que $P(X) = M$.*

Definição 0.15 *Sejam M e N subconjuntos de um espaço vetorial X . Denotaremos por $M+N$ o conjunto $\{m+n : m \in M, n \in N\}$ que chamaremos soma de M com N . Se $M \cap N = \{0\}$ então $M+N$ é dita uma soma direta em X e é denotada por $M \oplus N$.*

Proposição 0.16 ([8], p.48) *Sejam X um espaço de Banach e M um subespaço fechado de X . Então M é complementado em X se, e somente se, existe um subespaço fechado N de X tal que $X = M \oplus N$.*

Teorema 0.17 *Aplicação aberta.* ([10], p.245) *Seja T uma aplicação linear contínua de um espaço de Banach X sobre um espaço de Banach Y . Então para todo conjunto aberto $U \subset X$, $T(U)$ é aberto em Y .*

Definição 0.18 *Sejam X e Y espaços de Banach. Se $T \in L(X; Y)$ então a aplicação transposta de T , $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ é definida por $(T^*y^*)(x) = y^*(T(x))$, $\forall y^* \in Y^*, \forall x \in X$.*

Definição 0.19 *Sejam X e Y espaços de Banach. Dizemos que Y é um quociente de X , e denotaremos por $X \twoheadrightarrow Y$, se existe uma aplicação linear contínua de X sobre Y .*

Teorema 0.20 ([1]) *Seja X um espaço de Banach. Se $l_1(\mathbb{N}) \hookrightarrow X$ então $X \twoheadrightarrow l_2(\mathbb{N})$.*

Proposição 0.21 *Sejam X e Y espaços de Banach. Se $X \twoheadrightarrow Y$ então $Y^* \hookrightarrow X^*$.*

Prova. Seja $T : X \rightarrow Y$ uma aplicação linear contínua e sobrejetora.

Mostraremos que a aplicação transposta de T é um isomorfismo sobre a imagem.

(i) T^* é linear

Sejam $y^*, \gamma^* \in Y^*$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então $T^*(\alpha y^* + \gamma^*)(x) = (\alpha y^* + \gamma^*)(T(x)) = \alpha y^*(T(x)) + \gamma^*(T(x)) = \alpha(T^*y^*)(x) + (T^*\gamma^*)(x) = (\alpha T^*y^* + T^*\gamma^*)(x)$.

(ii) T^* é contínua

$$\begin{aligned}
 \|T^*\| &= \sup_{\|y^*\| \leq 1} \|T^*(y^*)\| \\
 &= \sup_{\|y^*\| \leq 1} \sup_{\|x\| \leq 1} |(T^*y^*)(x)| \\
 &= \sup_{\|y^*\| \leq 1} \sup_{\|x\| \leq 1} |y^*(T(x))| \\
 &\leq \sup_{\|y^*\| \leq 1} \sup_{\|x\| \leq 1} \|y^*\| \|T(x)\| \\
 &\leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| \\
 &= \|T\|
 \end{aligned}$$

Portanto $\|T^*\| \leq \|T\|$.

(iii) T^* é injetora

Seja $y^* \in Y^*$

$$\begin{aligned}
 T^*y^* = 0 &\Rightarrow (T^*y^*)(x) = 0 \\
 &\Rightarrow y^*(T(x)) = 0, \quad \forall x \in X.
 \end{aligned}$$

Como T é sobrejetora então $y^* = 0$.

(iv) $(T^*)^{-1}$ é contínua

Como T é sobrejetora, então T é aberta (Ver Teorema 0.17). Portanto existe $r > 0$ tal que $B_Y(0, r) \subset T(X)$ e

$$\begin{aligned} \|T^*(y^*)\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|(T^*y^*)(x)\| \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|y^*(T(x))\| \\ &\geq \sup_{\|y\| \leq r} \|y^*\left(\frac{y}{r}\right)\|r \\ &\geq \|y^*\|r \end{aligned}$$

Assim,

$$\|(T^*)^{-1}(T^*y^*)\| = \|y^*\| \leq \frac{1}{r}\|T^*(y^*)\|.$$

Consequentemente $(T^*)^{-1}$ é contínua. E deste modo, T^* é um isomorfismo sobre a imagem. ■

Definição 0.22 Uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em um espaço de Banach X é uma base de Schauder de X se, e somente se, para cada $x \in X$, existe uma única sequência de escalares $(a_n)_{n=1}^\infty$ tal que $x = \sum_{n=1}^\infty a_n x_n$. Se $\|x_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, diremos que a base é normalizada.

Observação 0.23 Seja X um espaço de Banach com base de Schauder $(x_n)_{n=1}^\infty$. Pela Proposição 1.a.2 (Ver [14], p.2), as projeções $P_n : X \rightarrow X$ definidas por

$$P_n\left(\sum_{i=1}^\infty a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i x_i,$$

são contínuas e

$$\sup\{\|P_n\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

O número $\sup\{\|P_n\| : n \in \mathbb{N}\}$ é chamado de constante básica de $(x_n)_{n=1}^\infty$.

Proposição 0.24 ([14], p.2) Seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência num espaço de Banach X . Então $(x_n)_{n=1}^\infty$ é uma base de Schauder de X se, e somente se, as três condições abaixo são verificadas:

1. $(x_n) \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

2. Existe uma constante K , tal que para cada sequência de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ e inteiros $p < q$ têm-se

$$\left\| \sum_{i=1}^p a_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^q a_i x_i \right\|.$$

3. O subespaço fechado gerado por $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é todo o espaço X .

Definição 0.25 Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é chamada de sequência básica se for base de Schauder para o subespaço fechado gerado por ela, isto é, para $[(x_n)_{n=1}^{\infty}]$.

Proposição 0.26 ([14], p.2) Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ um sequência de elementos não nulos em um espaço de Banach X . Então $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência básica se, e somente se, existe um número real positivo K , tal que para qualquer sequência de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ e inteiros $p < q$, têm-se

$$\left\| \sum_{i=1}^p a_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^q a_i x_i \right\|.$$

Proposição 0.27 ([3]) Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em X . Se $x_n \xrightarrow{w} 0$ e $\inf \|x_n\| > 0$, então $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ contém uma subsequência básica.

Proposição 0.28 Seja X um espaço de Banach com uma sequência básica $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e com constante básica K . Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe um funcional linear contínuo x_n^* definido em X satisfazendo $x_n^*(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i) = a_n$.

Prova. De fato, seja y_n^* definido em $[(x_n)_{n=1}^{\infty}]$ por $y_n^*(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i) = a_n$. Logo

$$|y_n^*(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i)| = |a_n| = \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \right\| \frac{1}{\|x_n\|} \leq 2K \frac{\left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\|}{\|x_n\|},$$

isto é, $\|y_n^*\| \leq \frac{2K}{\|x_n\|}$ e pelo Teorema de Hahn-Banach (Ver Teorema 0.6) podemos tomar $x_n^* \in X^*$ que estende y_n^* , $n = 1, 2, \dots$ ■

Observação 0.29 Os funcionais $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ são chamados de funcionais biortogonais associados à base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Note que $x_n^*(x_m) = \delta_{nm}$, $n, m = 1, 2, \dots$

Definição 0.30 Duas bases de Schauder $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ de espaços de Banach X e Y respectivamente, são ditas equivalentes se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge se, e somente se, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ também converge.

Proposição 0.31 ([14], p.5) *Sejam X um espaço de Banach com base de Schauder $(x_n)_{n=1}^\infty$ e Y um espaço de Banach com base de Schauder $(y_n)_{n=1}^\infty$. A base $(x_n)_{n=1}^\infty$ é equivalente a $(y_n)_{n=1}^\infty$ se, e somente se, existe um isomorfismo T de X sobre Y tal que $T(x_n) = y_n, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Proposição 0.32 ([20], p.93) *Sejam $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma base de Schauder de um espaço de Banach X e $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ a sequência de funcionais biortogonais associados a esta base. Se $\sum_{n=1}^\infty \|x_n - y_n\| \|x_n^*\| = \lambda < 1$, então $(x_n)_{n=1}^\infty$ é equivalente a $(y_n)_{n=1}^\infty$.*

Definição 0.33 *Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma base de Schauder de X .*

(a) $(x_n)_{n=1}^\infty$ é contráctil se $\forall x^* \in X^*$, sendo

$$x^*|_{[(x_i)_{i=n}^\infty]} : [(x_i)_{i=n}^\infty] \longrightarrow \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

a restrição de x^* ao fecho do subespaço gerado por $(x_i)_{i=n}^\infty$, têm-se

$$\|x^*|_{[(x_i)_{i=n}^\infty]}\| \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow \infty.$$

(b) $(x_n)_{n=1}^\infty$ é completamente limitada se para qualquer sequência de escalares $(a_i)_{i=1}^\infty$ com

$$\sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\right\| : n \in \mathbb{N}\right\} < \infty,$$

a série $\sum_{i=1}^\infty a_i x_i$ é convergente.

(c) $(x_n)_{n=1}^\infty$ é incondicional se para toda sequência de escalares $(a_i)_{i=1}^\infty$ tal que $\sum_{i=1}^\infty a_i x_i$ converge, então $\sum_{i=1}^\infty a_{\sigma(i)} x_{\sigma(i)}$ também converge para toda permutação σ de inteiros positivos.

(d) $(x_n)_{n=1}^\infty$ é subsimétrica se:

(i) $(x_n)_{n=1}^\infty$ é incondicional,

(ii) Para toda sequência de inteiros $0 < n_1 < n_2 < \dots$ a sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ é equivalente a $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$.

(e) $(x_n)_{n=1}^\infty$ é simétrica se para qualquer permutação σ de inteiros $(x_{\sigma(n)})_{n=1}^\infty$ é equivalente a $(x_n)_{n=1}^\infty$.

Neste trabalho, uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X será chamada de base quando ela for uma base de Schauder para X .

Proposição 0.34 ([20], p.1) *Seja X um espaço de Banach com uma base. Então X é separável.*

Proposição 0.35 ([14], p.8) *Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base de um espaço de Banach X e $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ a sequência de funcionais biortogonais associados à base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. A sequência $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ é base de X^* se, e somente se, a base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é contráctil.*

Proposição 0.36 ([14], p.9) *Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base de um espaço de Banach X e $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ a sequência de funcionais biortogonais associados à base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.*

(a) *Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é contráctil então $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ é uma base de X^* completamente limitada.*

(b) *Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é completamente limitada então X é isomorfo a $[(x_n^*)_{n=1}^{\infty}]^*$.*

Proposição 0.37 ([14], p.9) *Seja X um espaço de Banach com uma base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Então X é reflexivo se, e somente se, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é contráctil e completamente limitada.*

Proposição 0.38 ([20], Proposição 21.4) *Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base subsimétrica de X . Então $0 < \inf \|x_n\| \leq \sup \|x_n\| < \infty$.*

Proposição 0.39 ([20], p.563) *Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base subsimétrica de X . Então, para toda sequência $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ crescente de inteiros positivos, X é isomorfo a $[(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}]$.*

Proposição 0.40 ([20], Proposição 22.2) *Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base simétrica de X . Então $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é subsimétrica.*

Proposição 0.41 ([14], p.21 e p.23) *Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base incondicional de X .*

(a) *$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é contráctil se, e somente se, X não contém um subespaço isomorfo a $l_1(\mathbb{N})$.*

(b) *$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é completamente limitada se, e somente se, X não contém um subespaço isomorfo a $c_0(\mathbb{N})$.*

Observação 0.42 ([14], p.18) Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência básica incondicional de um espaço de Banach X . E considere a aplicação linear M_{θ} em $[(x_n)_{n=1}^{\infty}]$ definida por $M_{\theta}(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \theta_n x_n$, onde $\theta = (\theta_n)_{n=1}^{\infty} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$. Então o número $K = \sup_{\theta} \|M_{\theta}\|$ é finito.

O número $K = \sup_{\theta} \|M_{\theta}\|$ é chamado de constante incondicional de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Proposição 0.43 ([14], p.19) Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência básica incondicional de um espaço de Banach X com constante incondicional K . Então, para toda escolha de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge e para toda escolha de escalares $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ limitados, temos que

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n x_n \right\| \leq 2K \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n| \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|.$$

Definição 0.44 Seja X um espaço de Banach. Dizemos que X é Schur se para cada sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X com $x_n \xrightarrow{w} x$ para algum $x \in X$ temos que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$.

Exemplo 0.45 ([4])

1. $l_1(\mathbb{N})$ é Schur.
2. $c_0(\mathbb{N})$ não é Schur.
3. Todo subespaço fechado de um espaço de Banach que é Schur também é Schur.

Teorema 0.46 Banach. ([2], p.185) Se X é um espaço de Banach separável, então $C[0, 1]$ contém um subespaço isométrico a X .

Teorema 0.47 ([7]) Se X é um espaço de Banach separável, então $l_{\infty}(\mathbb{N})$ contém um subespaço isométrico a X .

Sejam J, K subconjuntos de $\mathbb{N}$. Denotaremos por $J < K$ se $j < k$ para todo $j \in J$ e $k \in K$.

Definição 0.48 Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ sequências em um espaço de Banach X . Dizemos que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de bloco de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ se $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e se cada y_n pode ser escrito como uma combinação linear

$$y_n = \sum_{j \in J_n} \alpha_j x_j,$$

onde $J_1 < J_2 < J_3 < \dots$

Definição 0.49 Dizemos que uma sequência de bloco $(y_n)_{n=1}^\infty$ é $l_1(\mathbb{N})$ -normalizada se $\sum_{j \in J_n} |\alpha_j| = 1$ para todo n .

Denotaremos por $(y_n)_{n=1}^\infty \prec (x_n)_{n=1}^\infty$ se $(y_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência de bloco de $(x_n)_{n=1}^\infty$ $l_1(\mathbb{N})$ -normalizada.

Proposição 0.50 ([14], p.53) Seja X um dos espaços de Banach $c_0(\mathbb{N})$ ou $l_1(\mathbb{N})$ e $(z_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência básica de bloco normalizada de $(e_n)_{n=1}^\infty$ em X . Então $(z_n)_{n=1}^\infty$ é equivalente a $(e_n)_{n=1}^\infty$ e $[(z_n)_{n=1}^\infty]$ é isométrico a X .

Teorema 0.51 ([14], p.7) Seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma base de um espaço de Banach X com funcionais biortogonais $(x_n^*)_{n=1}^\infty$. Se uma sequência $(y_n)_{n=1}^\infty$ em X satisfaz:

- (a) $\inf\{\|y_n\| : n \in \mathbb{N}\} > 0$,
- (b) $x_j^*(y_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Então existe uma subsequência $(y_{p_n})_{n=1}^\infty$ de $(y_n)_{n=1}^\infty$ que é uma sequência básica equivalente a uma sequência básica de bloco de $(x_n)_{n=1}^\infty$.

Proposição 0.52 ([14], p.11) Sejam X um espaço de Banach e $B \subset X^*$ um subespaço de dimensão finita e $\epsilon > 0$. Então existe $F \subset X$ finito tal que

- (a) $\|x\| = 1, \forall x \in F$.
- (b) $\forall f \in B^*,$ com $\|f\| = 1$, existe $x \in F$ tal que $\|f(x^*) - x^*(x)\| \leq \epsilon \|x^*\|, \forall x^* \in B$.

Teorema 0.53 Rosenthal. ([19]) Toda sequência limitada num espaço de Banach admite uma subsequência w -Cauchy ou admite uma subsequência equivalente à base canônica $(e_n)_{n=1}^\infty$ de $l_1(\mathbb{N})$.

Definição 0.54 Seja X um espaço normado. Uma sequência $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ em X^* converge para $x^* \in X^*$ em $\sigma(X^*, X)$ se $x_n^*(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^*(x), \forall x \in X$. Denotaremos por w^* -convergente.

Definição 0.55 Seja X um espaço normado. Dizemos que um subconjunto $W \subset X^*$ é fracamente sequencialmente compacto em $\sigma(X^*, X)$ se toda sequência de W admite uma subsequência w^* -convergente.

Proposição 0.56 ([17], p.117) Seja X um espaço de Banach separável. Então B_{X^*} é metrizável em $\sigma(X^*, X)$.

Proposição 0.57 ([17], p.119) *Seja X um espaço de Banach separável. Então toda sequência limitada em X^* admite uma subsequência w^* -convergente.*

Proposição 0.58 ([18], p.181) *Seja X um espaço de Banach. Se Y é um subespaço reflexivo de X^* então Y é fechado em $\sigma(X^*, X)$.*

Corolário 0.59 ([18], p.181) *Sejam X e Y espaços de Banach e Y reflexivo. São equivalentes:*

$$(b) Y \hookrightarrow X^*$$

$$(a) X \twoheadrightarrow Y^*$$

Proposição 0.60 ([10], p.268) *Seja X um espaço normado. Então B_{X^*} é um compacto em $\sigma(X^*, X)$.*

Proposição 0.61 ([10], p.271) *Seja X um espaço normado. Então B_X é denso em $B_{X^{**}}$ munido da topologia induzida por $\sigma(X^{**}, X^*)$.*

Teorema 0.62 Eberlein-Smulian. ([5], p.430) *Seja W um subconjunto de um espaço de Banach X . Então W é fracamente sequencialmente compacto se, e somente se o fecho fraco de W é compacto fraco.*

Definição 0.63 *Seja X um espaço de Banach. Dizemos que X é K_{σ_δ} se existe uma sequência $(A_n)_{n=1}^\infty$ de subconjuntos compactos em X tal que $X = \bigcap_{I \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in I} A_n$.*

Definição 0.64 *Seja X um espaço de Banach. Dizemos que X é analítico numa topologia se é imagem contínua de um espaço compacto K_{σ_δ} .*

Proposição 0.65 ([6]) *Seja X um espaço de Banach. Se X é K_{σ_δ} em $\sigma(X^{**}, X^*)$, então X é analítico em $\sigma(X, X^*)$.*

Definição 0.66 *Seja X um espaço de Banach. Dizemos que X munido da topologia $\sigma(X, X^*)$ é determinado contável (CD) de X^{**} munido da topologia $\sigma(X^{**}, X^*)$ se existe uma sequência $(A_n)_{n=1}^\infty$ de subconjuntos compactos em $\sigma(X^{**}, X^*)$ tais que para todo $x \in X$, existe $I \subset \mathbb{N}$ com $x \in \bigcap_{n \in I} A_n \subset X$. Neste caso dizemos que X é determinado por $(A_n)_{n=1}^\infty$ em X^{**} .*

Proposição 0.67 ([6]) *Seja X um espaço de Banach analítico em $\sigma(X, X^*)$. Então X munido da topologia $\sigma(X, X^*)$ é CD em X^{**} munido da topologia $\sigma(X^{**}, X^*)$.*

Proposição 0.68 ([5], p.424) *Seja X um espaço de Banach. Um subconjunto A de X^{**} é compacto em $\sigma(X^{**}, X^*)$ se, e somente se, A é fechado em $\sigma(X^{**}, X^*)$ e limitado na norma de X^{**} .*

Definição 0.69 *Dizemos que um subconjunto A de um espaço vetorial X é convexo se para quaisquer $x, y \in A$ temos $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$ para todo $\lambda \in [0, 1]$.*

Definição 0.70 *Dizemos que um subconjunto A de um espaço vetorial X sobre $\mathbb{C}$ é absolutamente convexo se é convexo e se $\lambda A \subset A$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| \leq 1$.*

Lema 0.71 ([21]) *Seja X um espaço de Banach CD. Então existe uma sequência $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos compactos em $\sigma(X^{**}, X^*)$ absolutamente convexos que determinam X em X^{**} .*

Teorema 0.72 ([21], 4^o Passo) *Sejam X um espaço de Banach CD e $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ uma sequência de subconjuntos compactos em $\sigma(X^{**}, X^*)$ como no Lema 0.71. E sejam E um subespaço separável de X e F um subespaço separável de X^* em $\sigma(X^*, X)$. Então existe uma aplicação linear contínua $T : X^{**} \rightarrow X^{**}$ satisfazendo:*

- (i) $P = T|_X$ é a projeção em X , com $\|P\| = 1$,
- (ii) $E \subset P(X)$,
- (iii) $F \subset P^*(X^*)$,
- (iv) $T(A_i) \subset A_i, \forall i \in \mathbb{N}$,
- (v) $P(X)$ é separável.

Lema 0.73 Riesz. ([13], p.78) *Sejam Y e Z subespaços de um espaço normado X , e suponha que Y é um subespaço fechado próprio de Z . Então para todo número real θ no intervalo $(0, 1)$ existe um $z \in Z$ tal que*

$$\|z\| = 1, \|z - y\| \geq \theta \text{ para todo } y \in Y.$$

Definição 0.74 *Uma ordem parcial em um conjunto D é uma relação $\leq$ em D tal que :*

(a) Se $a \leq b$ e $b \leq c$ então $a \leq c, \forall a, b, c \in D$,

(b) $a \leq a, \forall a \in D$.

Denotaremos por $(D, \leq)$ uma ordem parcial em D .

Observação 0.75 Uma ordem parcial $(D, \leq)$ é dita ser dirigida se para todo subconjunto finito A de D existe $d \in D$ tal que $a \leq d, \forall a \in A$.

Definição 0.76 Uma aplicação $f : D \rightarrow X$ de uma ordem parcial $(D, \leq)$ dirigida em um espaço topológico X é chamada de net. E dizemos que uma net converge para um ponto $p \in X$, se para toda vizinhança N de p existe um $d_0 \in D$ tal que $d \geq d_0$ implica $f(d) \in N$.

Teorema 0.77 ([5], p.55) Sejam X e Y espaços de Banach e $T_\alpha : X \rightarrow Y$ uma net de aplicações lineares contínuas. Se o limite $\lim_\alpha T_\alpha x$ existe para cada $x \in B \subset X$ tal que $\overline{[B]} = X$, e se o conjunto $\{T_\alpha x\}$ é limitado para cada $x \in X$, então o limite $Tx = \lim_\alpha T_\alpha x$ existe para cada $x \in X$, T é linear e contínua.

Definição 0.78 Seja $f : D \rightarrow X$ uma net em um espaço topológico X . Um ponto $p \in X$ é chamado de ponto de aderência de f se para cada vizinhança N de p e $d_0 \in D$ existe um $d \geq d_0$ tal que $f(d) \in N$.

Teorema 0.79 ([5], p.29) Um espaço topológico X é compacto se, e somente se, cada net em X tem um ponto de aderência.

Consequentemente, X é compacto se, e somente se, cada net em X admite uma subnet convergente para algum ponto de X .

Capítulo 1

Os espaços $c_0(\mathbf{N})$, $l_1(\mathbf{N})$ e $l_\infty(\mathbf{N})$ e o Teorema de Bessaga e Pełczyński

O objetivo deste capítulo é apresentar alguns resultados bem conhecidos sobre $c_0(\mathbf{N})$, $l_1(\mathbf{N})$ e $l_\infty(\mathbf{N})$ que serão usados nos próximos capítulos. Faremos também uma demonstração do Teorema de Bessaga e Pełczyński que será generalizado nesta dissertação.

Definição 1.1 Por $l_\infty(\mathbf{N})$ denotaremos o conjunto das sequências $(x_n)_{n=1}^\infty$ limitadas com a norma

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbf{N}\}.$$

Proposição 1.2 $l_\infty(\mathbf{N})$ é um espaço de Banach.

Prova. Tomemos uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ de Cauchy em $l_\infty(\mathbf{N})$. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe um $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que para quaisquer $m, n \geq n_0$ temos que $\|x_m - x_n\|_\infty \leq \epsilon$.

Mas, pela definição da norma $\|\cdot\|_\infty$, para todo $j \in \mathbf{N}$ vem que $|x_j^m - x_j^n| \leq \|x_m - x_n\|_\infty \leq \epsilon$, se $m, n \geq n_0$.

Desta forma, as sequências $(x_j^n), n \in \mathbf{N}$, são de Cauchy em $\mathbf{R}$, que é completo, então $(x_j^n), n \in \mathbf{N}$, são convergentes, ou seja, existe x_j com $j \in \mathbf{N}$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_j^n = x_j$.

Seja $x = (x_j)_{j \in \mathbf{N}}$.

Afirmção 1. $x \in l_\infty(\mathbf{N})$

$$|x_j| = |x_j - x_j^n + x_j^n| \leq |x_j - x_j^n| + |x_j^n|, \quad \forall j, n \in \mathbf{N}.$$

Como $x_j^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_j$ então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ vem que $|x_j - x_j^n| \leq \epsilon$.

Desta forma,

$$|x_j| \leq |x_j - x_j^N| + |x_j^N| \leq \epsilon + |x_j^N| \quad \text{para } n = N,$$

isto é,

$$\sup |x_j| \leq \epsilon + \sup |x_j^N| < \infty.$$

Concluimos que $x \in l_\infty(\mathbb{N})$.

Afirmção 2. $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$

$$\|x_n - x\|_\infty = \|x_j^n - x_j\|_\infty = \sup\{|x_j^n - x_j| : j \in \mathbb{N}\} \leq \epsilon,$$

para todo $n \geq N$.

Desta forma, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. E portanto $l_\infty(\mathbb{N})$ é um espaço de Banach. ■

Definição 1.3 Por $c_0(\mathbb{N})$ e $c(\mathbb{N})$ denotaremos respectivamente o conjunto das seqüências convergentes a zero e o conjunto das seqüências convergentes.

Proposição 1.4 $c(\mathbb{N})$ com a norma $\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$ é um espaço de Banach.

Prova. Demonstraremos que $c(\mathbb{N})$ é um subespaço fechado de $l_\infty(\mathbb{N})$ e como todo subespaço fechado de um espaço de Banach é de Banach, então $c(\mathbb{N})$ é de Banach.

$c(\mathbb{N}) \subset l_\infty(\mathbb{N})$ pois toda seqüência convergente é limitada.

Vamos tomar uma seqüência $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$, com $y_i \in c(\mathbb{N}), \forall i \in \mathbb{N}$, tal que $y_n \rightarrow y_0$ onde $y_0 \in l_\infty(\mathbb{N})$.

Colocando de forma extensa, temos:

$$\begin{aligned} y_1 &= (a_1^1, a_2^1, a_3^1, \dots, a_m^1, \dots) \\ y_2 &= (a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots, a_m^2, \dots) \\ &\vdots \\ y_n &= (a_1^n, a_2^n, a_3^n, \dots, a_m^n, \dots) \\ &\vdots \\ &\downarrow \\ y_0 &= (b_1, b_2, b_3, \dots, b_m, \dots). \end{aligned}$$

Devemos mostrar que $y_0 \in c(\mathbb{N})$.

Como $y_n \rightarrow y_0$ em $l_\infty(\mathbb{N})$, então para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ temos que $\|y_n - y_0\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{4}$, isto é, se $n \geq n_0$,

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \{|a_1^n - b_1|, |a_2^n - b_2|, \dots, |a_j^n - b_j|, \dots\} \leq \frac{\epsilon}{4}.$$

Por outro lado, para $j, k \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} |b_k - b_j| &\leq |b_k - a_k^{n_0}| + |a_k^{n_0} - a_j^{n_0}| + |a_j^{n_0} - b_j| \\ &\leq \frac{\epsilon}{4} + |a_k^{n_0} - a_j^{n_0}| + \frac{\epsilon}{4}. \end{aligned}$$

Como $y_{n_0} \in c(\mathbb{N})$, existe $L \in \mathbb{K}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k^{n_0} = L$. Logo, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_k^{n_0} - a_j^{n_0}| \leq \frac{\epsilon}{4}$, $\forall k, j \geq k_0$. Consequentemente, se $k, j \geq k_0$ então $|b_k - b_j| \leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} \leq \epsilon$.

Logo a sequência $y_0 = (b_n)_{n=1}^\infty$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$, que é completo, então $(b_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência convergente. Portanto $y_0 \in c(\mathbb{N})$.

Concluimos que $c(\mathbb{N})$ é fechado em $l_\infty(\mathbb{N})$. Logo $c(\mathbb{N})$ é completo. ■

Proposição 1.5 $c_0(\mathbb{N})$ com a norma $\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$ é um espaço de Banach.

Prova. Demonstraremos que $c_0(\mathbb{N})$ é um subespaço fechado de $c(\mathbb{N})$. Vamos tomar uma sequência $(y_n)_{n=1}^\infty$ em $c_0(\mathbb{N})$ tal que $y_n \rightarrow y_0$ onde $y_0 \in c(\mathbb{N})$. Temos:

$$\begin{aligned} y_1 &= (a_1^1, a_2^1, a_3^1, \dots, a_m^1, \dots) \\ y_2 &= (a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots, a_m^2, \dots) \\ &\vdots \\ y_n &= (a_1^n, a_2^n, a_3^n, \dots, a_m^n, \dots) \\ &\vdots \\ &\downarrow \\ y_0 &= (b_1, b_2, b_3, \dots, b_m, \dots). \end{aligned}$$

Devemos mostrar que $y_0 \in c_0(\mathbb{N})$.

Como $y_n \rightarrow y_0$ em $c(\mathbb{N})$, então para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ temos que $\|y_n - y_0\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{2}$, isto é, se $n \geq n_0$,

$$\sup\{|a_1^n - b_1|, |a_2^n - b_2|, \dots, |a_j^n - b_j|, \dots\} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Desta forma, para $k \in \mathbf{N}$, temos que

$$|b_k| \leq |b_k - a_k^{n_0}| + |a_k^{n_0}| \leq \frac{\epsilon}{2} + |a_k^{n_0}|.$$

Por outro lado, como $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k^{n_0} = 0$, então existe $k_0 \in \mathbf{N}$ tal que para todo $k \geq k_0$ têm-se que $|a_k^{n_0}| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Portanto

$$|b_k| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \quad \text{se } k \geq k_0.$$

Logo $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$ e a sequência $y_0 = (b_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0(\mathbf{N})$.

Isto prova que $c_0(\mathbf{N})$ é um subespaço fechado de $c(\mathbf{N})$. Logo $c_0(\mathbf{N})$ é um espaço de Banach. ■

Definição 1.6 *Seja $1 \leq p < \infty$, por $l_p(\mathbf{N})$ denotaremos o conjunto das sequências p -somáveis com a norma $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$.*

Proposição 1.7 *$l_p(\mathbf{N})$, $1 \leq p < \infty$, é um espaço de Banach.*

Prova. Tomemos uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de Cauchy em $l_p(\mathbf{N})$. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe um $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que para quaisquer $m, n \geq n_0$ temos que $\|x_m - x_n\|_p \leq \epsilon$. Mas pela definição da norma $\|\cdot\|_p$, para todo $j \in \mathbf{N}$ vem que $|x_m^j - x_n^j| \leq \|x_m - x_n\|_p \leq \epsilon$ se $m, n \geq n_0$.

Desta forma, as sequências $(x_n^j), j \in \mathbf{N}$, são de Cauchy em $\mathbf{R}$, que é completo, então $(x_n^j), j \in \mathbf{N}$, são convergentes, ou seja, existe um $x_j \in \mathbf{R}$ com $j \in \mathbf{N}$, tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m^j = x_j$.

Seja $x = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots)$, sabemos que se $m, n \geq n_0$ então $\|x_m - x_n\|_p \leq \epsilon$, isto é,

$$(|x_m^1 - x_n^1|^p + |x_m^2 - x_n^2|^p + \dots + |x_m^r - x_n^r|^p + \dots)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon$$

para $m, n \geq n_0$.

Quando n tende ao infinito e $m \geq n_0$ temos que

$$\|x_m - x\|_p = \left(\sum_{r=1}^{\infty} |x_m^r - x_r|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon. \quad (1)$$

Então, tomando $m = n_0 + 1$, teremos:

$$\left(\sum_{r=1}^{\infty} |x_{n_0+1}^r - x_r|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon.$$

Portanto $\|x_{n_0+1} - x\|_p \leq \epsilon$, logo $x_{n_0+1} - x \in l_p(\mathbf{N})$. Como $l_p(\mathbf{N})$ é um espaço vetorial e $-x_{n_0+1} \in l_p(\mathbf{N})$ vem que $-x \in l_p(\mathbf{N})$, donde $x \in l_p(\mathbf{N})$.

De (1), para $m \geq n_0$, temos que $\|x_m - x\|_p \leq \epsilon$, então $x_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x$. Daí segue que $l_p(\mathbf{N})$ é espaço de Banach. ■

Proposição 1.8 $c_0(\mathbf{N})$, $l_p(\mathbf{N})$, $1 \leq p < \infty$ são separáveis e $l_\infty(\mathbf{N})$ não é separável.

Prova. Denotamos por $S_0(\mathbf{N})$ o conjunto das seqüências $(x_n)_{n=1}^\infty$, $x_n \in \mathbf{R}$, tal que existe $n_0 \in \mathbf{N}$, com $x_n = 0$ para $n \geq n_0$.

Primeiro demonstraremos que $(S_0(\mathbf{N}), \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p \leq \infty$, são separáveis.

De fato, seja $E = \{r \mid r = (r_1, r_2, \dots, 0, 0, \dots) \text{ onde } r_n \in \mathbf{Q}, \forall n \in \mathbf{N}\}$. Existe uma bijeção entre E e $\cup_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{Q}^n$, logo E é enumerável, pois $\mathbf{Q}^n$ é enumerável.

Devemos observar que $E \subset S_0(\mathbf{N})$. Mostremos que E é denso em $S_0(\mathbf{N})$.

Sejam $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots) \in S_0(\mathbf{N})$ e a bola aberta $B(x; \delta) \subset S_0(\mathbf{N})$.

Vamos considerar, agora, uma seqüência $r = (r_1, r_2, \dots, r_n, 0, 0, \dots) \in E$ tal que $0 \leq |x_i - r_i| < \frac{\epsilon}{n^{\frac{1}{p}}}$, $1 \leq i \leq n$, então se $1 \leq p < \infty$, vem que $\|x - r\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i - r_i|^p)^{\frac{1}{p}} < (\sum_{i=1}^n (\frac{\epsilon}{n^{\frac{1}{p}}})^p)^{\frac{1}{p}} = \epsilon$.

Se considerarmos, agora $p = \infty$, vem que $\|x - r\|_\infty = \sup\{|x_i - r_i| : 1 \leq i \leq n\} \leq \frac{\epsilon}{n^{\frac{1}{p}}} \leq \epsilon$.

Logo $x \in \overline{E}$ e, portanto, $(S_0(\mathbf{N}), \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p \leq \infty$, são separáveis.

Agora demonstraremos que $(S_0(\mathbf{N}), \|\cdot\|_\infty)$ é denso em $(c_0(\mathbf{N}), \|\cdot\|_\infty)$.

Tomemos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in c_0(\mathbf{N})$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, ou seja, para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que para qualquer $n \geq n_0$ temos que $|x_n| \leq \epsilon$.

Sejam a bola aberta $B(x; \epsilon) \subset c_0(\mathbf{N})$ e $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, 0, 0, \dots) \in S_0(\mathbf{N})$, então

$$\begin{aligned} \|x - x'\|_\infty &= \|(0, 0, \dots, 0, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots)\|_\infty \\ &= \sup\{|x_n| : n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 + 1\} \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Logo $x' \in B(x; \epsilon)$ e, portanto, $S_0(\mathbf{N})$ é denso em $c_0(\mathbf{N})$.

Desta forma, $c_0(\mathbf{N})$ é separável.

Demonstremos que $(S_0(\mathbf{N}), \|\cdot\|_p)$, é denso em $(l_p(\mathbf{N}), \|\cdot\|_p)$ com $1 \leq p < +\infty$.

Tomemos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l_p(\mathbf{N})$, então $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$, ou seja, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |x_n|^p \leq \epsilon^p$.

Sejam a bola aberta $B(x; \epsilon) \subset l_p(\mathbf{N})$ e $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, 0, 0, \dots) \in S_0(\mathbf{N})$, então

$$\begin{aligned} \|x - x'\|_p &= \|(0, 0, \dots, 0, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots)\|_p \\ &= \left(\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq (\epsilon^p)^{\frac{1}{p}} = \epsilon. \end{aligned}$$

Logo $x' \in B(x; \epsilon)$ e, portanto, $(S_0(\mathbf{N}), \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p < +\infty$ é denso em $l_p(\mathbf{N})$. Desta forma, $l_p(\mathbf{N})$ é separável.

Em $l_{\infty}(\mathbf{N})$, tomemos $y = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ uma sequência de 0's e 1's. Então $y \in l_{\infty}(\mathbf{N})$. A este y associamos o número real $\hat{y}$ cuja representação é

$$\frac{a_1}{2^1} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \dots$$

Agora usando os fatos de que o conjunto $[0, 1]$ é não enumerável, cada $\hat{y} \in [0, 1]$ tem uma representação binária e diferentes $\hat{y}$'s tem diferentes representações binárias.

Consequentemente o conjunto de todas as sequências de 0's e 1's é não enumerável.

A métrica de $l_{\infty}(\mathbf{N})$ mostra que a distância entre duas destas sequências distintas é igual a 1. Se cada uma destas sequências for o centro de uma bola de raio $\frac{1}{3}$, então as bolas não se intersectam. Logo o conjunto destas bolas que não se intersectam é não enumerável.

Deste modo, se M é um conjunto denso em $l_{\infty}(\mathbf{N})$, então cada uma destas bolas que não se intersectam deve conter um elemento de M . Consequentemente M não pode ser enumerável.

Desde que M é um conjunto arbitrário denso, isto mostra que $l_{\infty}(\mathbf{N})$ não contém subconjuntos densos enumeráveis. ■

Proposição 1.9 *O dual de $c_0(\mathbf{N})$ é isométrico a $l_1(\mathbf{N})$.*

Prova. Para cada $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_1(\mathbf{N})$, definamos

$$\tilde{x} : c_0(\mathbf{N}) \rightarrow \mathbf{K}$$

por $\tilde{x}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ para todo $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0(\mathbf{N})$. Notemos que a série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ converge absolutamente, pois $|x_n y_n| \leq \|y\| |x_n|$ para todo $n \in \mathbf{N}$. É claro que $\tilde{x}$ é uma

aplicação linear em $c_0(\mathbb{N})$. Como

$$|\tilde{x}(y)| \leq \|x\| \|y\|$$

para todo $y \in c_0(\mathbb{N})$, então $\tilde{x} \in (c_0(\mathbb{N}))^*$, além disso, $\|\tilde{x}\| \leq \|x\|$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $e_n = (0, 0, \dots, \overset{n}{1}, 0, \dots)$. Se $\varphi \in (c_0(\mathbb{N}))^*$, ponhamos $x_n = \varphi(e_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Afirmamos que $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in l_1(\mathbb{N})$. Com efeito, escrevemos $x_n = |x_n|e^{it_n}$ ($t_n \in [0, 2\pi]$).

Para cada $m \in \mathbb{N}$, ponhamos

$$w_{mn} = \begin{cases} e^{-it_n} & , \quad 0 \leq n \leq m; \\ 0 & , \quad n > m. \end{cases}$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $w_m = (w_{mn})_{n \in \mathbb{N}}$, é claro que $w_m \in c_0(\mathbb{N})$ e que $\|w_m\| = 1$. Para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |\varphi(w_m)| &= |\varphi(\sum_{n=0}^m e^{-it_n} e_n)| = |\sum_{n=0}^m e^{-it_n} \varphi(e_n)| \\ &= |\sum_{n=0}^m e^{-it_n} x_n| = \sum_{n=0}^m |x_n| \leq \|\varphi\| \|w_m\| = \|\varphi\|. \end{aligned}$$

Logo, $x \in l_1(\mathbb{N})$ e $\|x\| \leq \|\varphi\|$. Vejamos, agora, que $\tilde{x} = \varphi$. Realmente, fixemos $y = (y_n)_{n=1}^\infty \in c_0(\mathbb{N})$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, ponhamos

$$z_{mn} = \begin{cases} y_n & , \quad 0 \leq n \leq m; \\ 0 & , \quad n > m. \end{cases}$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $z_m = (z_{mn})_{n \in \mathbb{N}}$; $z_m \in c_0(\mathbb{N})$. Como $\|y - z_m\| = \sup\{|y_n| : n \in \mathbb{N}, n > m\}$, resulta que $(z_m)_{m=1}^\infty$ converge para y ; logo, $(\varphi(z_m))_{m=1}^\infty$ converge para $\varphi(y)$, pois $\varphi \in (c_0(\mathbb{N}))^*$.

Por outro lado,

$$\varphi(z_m) = \varphi(\sum_{n=0}^m y_n e_n) = \sum_{n=0}^m y_n \varphi(e_n) = \sum_{n=0}^m x_n y_n.$$

Consequentemente, a série $\sum_{n=0}^\infty x_n y_n$ converge para $\varphi(y)$. Mas, por definição, $\tilde{x}(y) = \sum_{n=0}^\infty x_n y_n$; portanto, $\tilde{x}(y) = \varphi(y)$.

Consideremos então a aplicação linear

$$x \in l_1(\mathbb{N}) \mapsto \tilde{x} \in (c_0(\mathbb{N}))^*.$$

Pelo que vimos acima, esta aplicação é sobrejetiva, e $\|\tilde{x}\| = \|x\|$ para todo $x \in l_1(\mathbb{N})$. ■

Proposição 1.10 *O dual de $l_1(\mathbf{N})$ é isométrico a $l_\infty(\mathbf{N})$.*

Prova. Para cada $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in l_\infty(\mathbf{N})$, definamos

$$\tilde{x} : l_1(\mathbf{N}) \rightarrow \mathbf{K}$$

por $\tilde{x}(y) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$ para todo $y = (y_n)_{n=1}^\infty \in l_1(\mathbf{N})$.

Notemos que a série $\sum_{n=1}^\infty x_n y_n$ converge absolutamente, pois $|x_n y_n| \leq \|x\| |y_n|$ para todo $n \in \mathbf{N}$. É claro que $\tilde{x}$ é uma aplicação linear em $l_1(\mathbf{N})$. Como $|\tilde{x}(y)| \leq \|x\| \|y\|$ para todo $y \in l_1(\mathbf{N})$, então $\tilde{x} \in l_1(\mathbf{N})$, além disso, $\|\tilde{x}\| \leq \|x\|$. Consideremos então a aplicação linear

$$x \in l_\infty(\mathbf{N}) \mapsto \tilde{x} \in (l_1(\mathbf{N}))^*.$$

Se $\varphi \in (l_1(\mathbf{N}))^*$, ponhamos $x_n = \varphi(e_n)$ ($n \in \mathbf{N}$), sendo e_n como na demonstração da Proposição 1.9. Então $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in l_\infty(\mathbf{N})$ e $\|x\| \leq \|\varphi\|$. Realmente

$$|x_n| = |\varphi(e_n)| \leq \|\varphi\| \|e_n\| = \|\varphi\|$$

para todo $n \in \mathbf{N}$. Raciocinando como na demonstração da Proposição 1.9, vemos que $\tilde{x} = \varphi$. Portanto, a aplicação linear

$$x \in l_\infty(\mathbf{N}) \mapsto \tilde{x} \in (l_1(\mathbf{N}))^*$$

é sobrejetiva, e $\|\tilde{x}\| = \|x\|$ para todo $x \in l_\infty(\mathbf{N})$. ■

Teorema 1.11 Banach-Mazur. ([4]) *Seja X um espaço de Banach separável. Então $l_1(\mathbf{N}) \twoheadrightarrow X$.*

Prova. Seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência densa na bola unitária de X e definimos $Q : l_1(\mathbf{N}) \rightarrow X$, pondo $Q(\sum_{n=1}^\infty a_n e_n) = \sum_{n=1}^\infty a_n x_n$ e então facilmente se verifica que Q está bem definida e é uma aplicação linear contínua. Basta demonstrarmos que Q é sobrejetora.

Seja $x \in X$, $\|x\| \leq 1$, então podemos escolher x_{n_1} tal que $\|x - x_{n_1}\| \leq \frac{1}{2^2}$ e então $\|2(x - x_{n_1})\| \leq \frac{1}{2}$.

Agora, escolhemos $n_2 > n_1$ tal que $\|2(x - x_{n_1}) - x_{n_2}\| \leq \frac{1}{2 \cdot 2^2}$ e então $\|4(x - x_{n_1}) - 2x_{n_2}\| \leq \frac{1}{2^2}$.

Continuando podemos obter uma sequência estritamente crescente de inteiros positivos $n_1 < n_2 < \dots$ tais que

$$\|2^{k-1}(x - x_{n_1}) - 2^{k-2}x_{n_2} - \dots - 2x_{n_{k-1}} - x_{n_k}\| \leq \frac{1}{2^k},$$

logo

$$\|x - 2^{1-k}x_{n_k} - 2^{2-k}x_{n_{k-1}} - \cdots - \frac{1}{2}x_{n_2} - x_{n_1}\| \leq \frac{1}{2^k},$$

e portanto y definido por $y = e_{n_1} + \frac{1}{2}e_{n_2} + \frac{1}{4}e_{n_3} + \cdots + \frac{1}{2^k}e_{n_{k+1}}$ está em $l_1(\mathbb{N})$ e $Q(y) = x$. ■

Teorema 1.12 ([4]) *Seja X um espaço de Banach. Se $X \rightarrow l_1(\mathbb{N})$ então $l_1(\mathbb{N}) \xhookrightarrow{c} X$.*

Prova. Suponhamos que $l_1(\mathbb{N})$ é um quociente de um espaço de Banach X . Então existe uma aplicação linear contínua $T : X \rightarrow l_1(\mathbb{N})$ sobre $l_1(\mathbb{N})$. Pelo Teorema da Aplicação aberta (Ver Teorema 0.17), existe $r > 0$ tal que $B_{l_1(\mathbb{N})}(0; r) \subset T(B_X(0; 1))$. Logo $2B_{l_1(\mathbb{N})}(0; 1) \subset T(B_X(0; \frac{2}{r}))$. Como $(e_n)_{n=1}^\infty \in 2B_{l_1(\mathbb{N})}(0; 1)$, segue que existe uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em $B_X(0; \frac{2}{r})$ tal que $T(x_n) = e_n$.

Consideremos a única aplicação linear contínua $S : l_1(\mathbb{N}) \rightarrow X$ que leva e_n em x_n (como no Teorema 1.11), logo $ST : X \rightarrow X$, como $TS(e_n) = e_n, \forall n \in \mathbb{N}$, ST é uma projeção pois $STST = S(TS)T = ST$.

Seja $(t_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de escalares, então

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^p |t_n| &= \left\| \sum_{n=1}^p t_n T(x_n) \right\| = \left\| T \sum_{n=1}^p t_n x_n \right\| \leq \|T\| \left\| \sum_{n=1}^p t_n x_n \right\| \\ &= \|T\| \left\| \sum_{n=1}^p t_n S(e_n) \right\| \leq \|T\| \|S\| \left\| \sum_{n=1}^p t_n e_n \right\| = \|T\| \|S\| \sum_{n=1}^p |t_n|. \end{aligned}$$

Logo a imagem de ST é isomorfa a $l_1(\mathbb{N})$. ■

Teorema 1.13 Bessaga e Pełczyński. ([3]) *Seja X um espaço de Banach. São equivalentes:*

- (a) $c_0(\mathbb{N}) \hookrightarrow X^*$
- (b) $l_1(\mathbb{N}) \xhookrightarrow{c} X$
- (c) $l_\infty(\mathbb{N}) \hookrightarrow X^*$

Prova. Se $c_0(\mathbb{N}) \hookrightarrow l_\infty(\mathbb{N})$ (Ver Teorema 0.47), (c) $\Rightarrow$ (a) segue imediatamente e como $X = l_1(\mathbb{N}) \oplus F$ para algum espaço de Banach F (Ver Proposição 0.16), então $X^* = l_\infty(\mathbb{N}) \oplus F^*$, (b) $\Rightarrow$ (c) também é imediata. Basta provarmos (a) $\Rightarrow$ (b).

Seja $T : c_0(\mathbb{N}) \rightarrow X^*$ um isomorfismo sobre a imagem e denotemos como de costume $(e_n)_{n=1}^\infty$ a base canônica de $c_0(\mathbb{N})$ e $(e_n^*)_{n=1}^\infty$ a base canônica de $l_1(\mathbb{N})$.

Sendo T^* a aplicação transposta de T , consideremos $S = T^*_{|X}$.

Desde que T é um isomorfismo, temos que T^* é sobre $l_1(\mathbb{N})$ (Ver Proposição ??) e portanto pelo Teorema da Aplicação aberta (Ver Teorema 0.17), existe $\delta > 0$ tal que $\delta B_{l_1(\mathbb{N})} \subset T^*_{B_{X^{**}}}$. Como B_X é densa em $B_{X^{**}}$ munido da topologia induzida por $\sigma(X^{**}, X^*)$ (Ver Proposição 0.61), segue que $S(B_X)$ é denso em $T^*(B_{X^{**}})$ na topologia $\sigma((c_0(\mathbb{N}))^*, c_0(\mathbb{N}))$ e como $\frac{\delta}{2}e_n^* \in \delta B_{l_1(\mathbb{N})}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, por indução nós podemos escolher $x_n \in B_X$ tal que $|S(x_n)e_n| \geq \frac{\delta}{4}$ e $S(x_n)e_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \forall k \in \mathbb{N}$.

Agora aplicando o Teorema 0.51, existe uma subsequência $(S(x_{n_k}))_{k=1}^\infty$ que é equivalente a uma sequência básica de bloco de $l_1(\mathbb{N})$, mas pela Proposição 0.50 $[(S(x_{n_k}))_{k=1}^\infty]$ é isomorfo a $l_1(\mathbb{N})$ e complementado em $l_1(\mathbb{N})$, logo compondo S com a projeção que resulta dessa observação, obtemos uma aplicação linear contínua de X sobre $l_1(\mathbb{N})$ e pelo Teorema 1.12, X contém um subespaço complementado que é isomorfo a $l_1(\mathbb{N})$. ■

Capítulo 2

A propriedade CSPP

Neste capítulo temos por objetivo estudar uma propriedade que foi introduzida por Marek em [22] denominada de propriedade CSPP. No desenvolvimento deste trabalho, vamos estudar as relações da propriedade CSPP com outras propriedades de espaços de Banach, tais como: propriedades *WCG* e *WCD*. Também apresentaremos exemplos de espaços de Banach que possuem as propriedades acima mencionadas.

2.1 Espaços de Banach WCG

Definição 2.1.1 *Seja X um espaço de Banach. Dizemos que X é gerado por um compacto fraco (*WCG*) se existe um subconjunto $C \subset X$ compacto fraco com $X = \overline{C}$.*

Proposição 2.1.2 *Seja X um espaço de Banach reflexivo ou separável. Então X é *WCG*.*

Prova. Suponha que X é reflexivo e considere a bola unitária $B_X \subset X$. A bola unitária B_X é um compacto fraco (Ver Proposição 0.60) e $x = \|x\| \frac{x}{\|x\|}$ para todo $x \in X$. Deste modo $X = \overline{B_X}$. Assim, X é *WCG*.

Agora suponha que X é separável. Então existe um subconjunto $\{x_n\}$ enumerável de X com $\overline{\{x_n\}} = X$, e $x_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Tomemos o conjunto $W = \left\{ \frac{1}{n} \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\}_{n=1}^{\infty}$.

Afirmção. W é um compacto fraco.

De fato, pois se $(\frac{1}{n_k} \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|})_{k=1}^\infty$ é uma subsequência de W , então $\frac{1}{n_k} \frac{|x^*(x_{n_k})|}{\|x_{n_k}\|} \leq \frac{1}{n_k} \|x^*\| \frac{\|x_{n_k}\|}{\|x_{n_k}\|}$ e $\frac{1}{n_k} \frac{x^*(x_{n_k})}{\|x_{n_k}\|} \rightarrow 0, \forall x^* \in X^*$. Logo W é fracamente sequencialmente compacto e pelo Teorema 0.62 é um compacto fraco.

Além disso, como $x_n = n\|x_n\| \frac{1}{n} \frac{x_n}{\|x_n\|} \in [W]$, então $\overline{\{x_n\}} \subset \overline{[W]}$. Logo $X = \overline{[W]}$. ■

Exemplo 2.1.3

1. $c_0(\mathbb{N})$, $c(\mathbb{N})$ e $l_p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < +\infty$ são WCG, pois são separáveis (Ver Proposição 1.8).
2. $l_2(\Gamma)$ para Γ não enumerável é WCG, pois é reflexivo (Ver Exemplo 0.11).
3. $l_\infty(\mathbb{N})$ não é WCG. De fato, suponha por contradição que existe um subconjunto $C \subset l_\infty(\mathbb{N})$ compacto fraco tal que $l_\infty(\mathbb{N}) = \overline{[C]}$. Definindo $T : l_\infty(\mathbb{N}) \rightarrow c_0(\mathbb{N})$ pondo $T(a_n) = (\frac{a_n}{n})_{n=1}^\infty$. Então claramente T é uma aplicação linear contínua e injetora. Mais ainda, $T(C)$ é separável fraco pois $c_0(\mathbb{N})$ é separável. Logo C é separável fraco. Portanto $l_\infty(\mathbb{N})$ é separável. Isto é uma contradição (Ver Proposição 1.8).

Teorema 2.1.4 ([15]) *Sejam X e Y espaços de Banach e T uma aplicação linear contínua de X em Y tal que $\overline{T(X)} = Y$. Se X é WCG então Y é WCG.*

Prova. Seja $C \subset X$ compacto fraco tal que $\overline{[C]} = X$. Pelo Teorema 0.12 segue que a aplicação T é fracamente contínua. E deste modo $T(C)$ é compacto fraco.

Mostraremos que $\overline{[T(C)]} = Y$.

Obviamente $\overline{[T(C)]} \subset Y$. Sejam $y \in Y$ e A um aberto fraco de Y com $y \in A$. Então $T^{-1}(A)$ é aberto fraco de X pois T é contínua. Mais ainda, $T^{-1}(A) \cap [C] \neq \emptyset$ pois $\overline{[C]} = X$. Deste modo, existe $c \in T^{-1}(A) \cap [C]$. Logo $T(c) \in A \cap T([C]) \subset A \cap [T(C)] \subset A$, isto é, $A \cap [T(C)] \neq \emptyset$. Portanto $Y \subset \overline{[T(C)]}$. ■

Corolário 2.1.5 *O espaço $c_0(\Gamma)$ é WCG para todo conjunto Γ .*

Prova. Mostraremos que a aplicação identidade de $l_2(\Gamma)$ em $c_0(\Gamma)$ é contínua e tem imagem densa. De fato, seja $i : l_2(\Gamma) \rightarrow c_0(\Gamma)$ definida por $i((a_\delta)_{\delta \in \Gamma}) = (a_\delta)_{\delta \in \Gamma}$. Como $\|i((a_\delta)_{\delta \in \Gamma})\|_\infty = \sup\{|a_\delta| : \delta \in \Gamma\} \leq (\sum_{\delta \in \Gamma} |a_\delta|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$, portanto a aplicação i é contínua.

Além disto, dado $\epsilon > 0$, existe $F \subset \Gamma$ finito tal que $|f(x)| < \epsilon, \forall x \notin F$. Deste modo, definimos a função:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in F; \\ 0, & \text{se } x \notin F. \end{cases}$$

Então a função $g \in l_2(\Gamma)$ e $\|g - f\|_\infty \leq \epsilon$. ■

Definição 2.1.6 *Um conjunto compacto K é dito Eberlein se existe um espaço de Banach X tal que K é homeomorfo a um compacto fraco de X .*

Teorema 2.1.7 ([15], p.249) *Seja K um compacto. O espaço de Banach $C(K)$ é WCG se, e somente se, K é um compacto Eberlein.*

Teorema 2.1.8 ([15], p.246) *Seja X um espaço de Banach WCG. Então existem um conjunto Γ e uma aplicação linear contínua e injetora de X em $c_0(\Gamma)$.*

Teorema 2.1.9 *Seja Y um espaço de Banach WCG. Então a bola unitária B_{Y^*} de Y^* é fracamente sequencialmente compacta em $\sigma(Y^*, Y)$.*

Prova. Seja K um compacto fraco de Y que gera Y . Definindo $f : Y^* \rightarrow C(K)$ pondo $f(y^*)(k) = y^*(k), \forall y^* \in Y^*$ e $\forall k \in K$. Então claramente f é uma aplicação linear injetora de Y^* para $C(K)$. Mais ainda, f é contínua quando colocamos em Y^* a topologia $\sigma(Y^*, Y)$ e em $C(K)$ a topologia $\sigma(C(K), C^*(K))$ (Ver Teorema 0.77).

Como K é Eberlein, pelo Teorema 2.1.7 o espaço $C(K)$ é WCG. Logo pelo Teorema 2.1.8 existem um conjunto Γ e $g : C(K) \rightarrow c_0(\Gamma)$ uma aplicação linear contínua e injetora de $C(K)$ em $c_0(\Gamma)$. E portanto g é contínua nas topologias $\sigma(C(K), C^*(K))$ e $\sigma(c_0(\Gamma), c_0^*(\Gamma))$ (Ver Teorema 0.12).

Agora tomemos a bola unitária B_{Y^*} em Y^* . Como $g \circ f$ é uma aplicação linear contínua e injetora de $(Y^*, \sigma(Y^*, Y))$ em $(c_0(\Gamma), \sigma(c_0(\Gamma), c_0^*(\Gamma)))$, então $g \circ f(B_{Y^*})$ é um compacto fraco de $c_0(\Gamma)$. Pelo Teorema 0.62 $g \circ f(B_{Y^*})$ é fracamente sequencialmente compacta, portanto B_{Y^*} é fracamente sequencialmente compacta em $\sigma(Y^*, Y)$. ■

Corolário 2.1.10 *Seja X um subespaço fechado de um espaço de Banach Y WCG. Então a bola unitária B_{X^*} é fracamente sequencialmente compacta em $\sigma(X^*, X)$.*

Prova. Seja $i : X \rightarrow Y$ a aplicação inclusão. Então pelo Teorema de Hahn-Banach (Ver Teorema 0.6) $B_{X^*} \subset B_{Y^*}$.

Afirmção. B_{X^*} é fracamente sequencialmente compacta em $\sigma(X^*, X)$.

De fato, seja $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ uma sequência em B_{X^*} , logo existe uma sequência $(y_n^*)_{n=1}^\infty$ em B_{Y^*} tal que $x_n^* = i^*(y_n^*)$. Como B_{Y^*} é fracamente sequencialmente compacta (Ver Teorema 2.1.9), então existe uma subsequência $(y_{n_k}^*)$ em B_{Y^*} tal que $y_{n_k}^* \rightarrow y^*$ em $\sigma(Y^*, Y)$. Logo $x_{n_k}^* = i^*(y_{n_k}^*) \rightarrow i^*(y^*)$ em $\sigma(X^*, X)$. Resta mostrar que $i^*(y^*) \in B_{X^*}$. Como B_{X^*} é fechado em $\sigma(X^*, X)$ (Ver Proposição 0.60) então $i^*(y^*) \in B_{X^*}$. ■

2.2 Espaços de Banach WCD

Definição 2.2.1 *Seja X um espaço de Banach. Dizemos que X munido da topologia $\sigma(X, X^*)$ é determinado por um compacto fraco (WCD) em X^{**} munido da topologia $\sigma(X^{**}, X^*)$ se existe uma sequência $A = (A_n)_{n=1}^\infty$ de subconjuntos absolutamente convexos, fechados e limitados em X^{**} com $X = \bigcup_{I \in J(A)} \bigcap_{n \in I} A_n$, onde $J(A) = \{I \subset \mathbb{N} : \bigcap_{n \in I} A_n \text{ é compacto em } \sigma(X^{**}, X^*)\}$.*

Proposição 2.2.2 *Seja X um espaço de Banach. Então X é WCD se, e somente se, X é CD.*

Prova. Suponha que X é WCD. Então existe uma sequência $(A_n)_{n=1}^\infty$ de subconjuntos absolutamente convexos, fechados e limitados em X^{**} tal que

$$X = \bigcup_{I \in J(A)} \bigcap_{n \in I} A_n,$$

onde $J(A) = \{I \subset \mathbb{N} : \bigcap_{n \in I} A_n \text{ é compacto em } \sigma(X^{**}, X^*)\}$.

Denotemos por $K_I = \bigcap_{n \in I} A_n$, $I \in J(A)$. E consideremos a sequência $(K_I)_{I \in J(A)}$.

Então claramente $K_I, \forall I \in J(A)$ é compacto em $\sigma(X^{**}, X^*)$. E dado $x \in X$, existe $I \in J(A)$ tal que $x \in K_I \subset X$. Logo X é CD.

Reciprocamente, pelo Lema 0.71 existe uma sequência $(A_n)_{n=1}^\infty$ de subconjuntos compactos em $\sigma(X^{**}, X^*)$ absolutamente convexos que determinam X em X^{**} . Logo, dado $x \in X$, existe $I \subset \mathbb{N}$ tal que $x \in \bigcap_{n \in I} A_n \subset X$. Então claramente $X = \bigcup_{I \in J(A)} \bigcap_{n \in I} A_n$ e $\bigcap_{n \in I} A_n, \forall I \subset \mathbb{N}$ é compacto em $\sigma(X^{**}, X^*)$. E mais ainda $A_n, \forall n \in \mathbb{N}$, são fechados em $\sigma(X^{**}, X^*)$ e limitados na norma de X^{**} (Ver Proposição 0.68). Consequentemente X é WCD. ■

Teorema 2.2.3 ([21]) *Seja X um espaço de Banach WCG. Então X é WCD.*

Antes de provar o Teorema 2.2.3 precisaremos do Lema 2.2.4.

Lema 2.2.4 ([21]) *Seja X um espaço de Banach WCG. Então X é K_{σ_δ} em $\sigma(X^{**}, X^*)$.*

Prova. Tomemos os conjuntos $A_{in} = nC + \frac{1}{i}B_{X^{**}}$, onde C é um subconjunto de X compacto fraco absolutamente convexo e $B_{X^{**}}$ é a bola unitária em X^{**} .

Deste modo temos que A_{in} são compactos em $\sigma(X^{**}, X^*)$ e $X = \bigcap_{i=1}^n \bigcup_{n=1}^\infty A_{in}$. ■

Prova do Teorema 2.2.3. Suponha que X é WCG. Pelo Lema 2.2.4 e a Proposição 0.65 segue que X é analítico em $\sigma(X, X^*)$. Logo X é CD (Ver Proposição 0.67). Consequentemente pela Proposição 2.2.2 X é WCD. ■

Exemplo 2.2.5 $c_0(\mathbb{N})$, $C[a, b]$ e $l_p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$ têm a propriedade WCD (Ver Exemplo 2.1.3 e Teorema 2.2.3).

Proposição 2.2.6 *Sejam X um espaço de Banach WCD e Y um subespaço fechado de X . Então Y é WCD.*

Prova. Seja $A = (A_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de subconjuntos em X absolutamente convexos, fechados e limitados com $X = \bigcup_{I \in J(A)} \bigcap_{n \in I} A_n$, onde

$$J(A) = \{I \subset \mathbb{N} : \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \text{ é um compacto em } \sigma(X^{**}, X^*)\}.$$

E tomemos a sequência $B = (A_n \cap Y)_{n=1}^\infty$.

(i) $A_n \cap Y \subset A_n, \forall n \in \mathbb{N}$, é limitado, pois A_n é limitado.

(ii) $A_n \cap Y, \forall n \in \mathbb{N}$, é absolutamente convexo. De fato, o conjunto Y é convexo pois todo subespaço vetorial de X é convexo. A intersecção $A_n \cap Y$ é convexa, pois ambos os conjuntos são convexos. Basta mostrar que $\lambda(A_n \cap Y) \subset A_n \cap Y, \forall \lambda \in \mathbb{C}$ e $|\lambda| \leq 1$. Seja $g \in \lambda(A_n \cap Y)$. Então $g = \lambda k$, com $k \in A_n \cap Y$. Como A_n e Y são absolutamente convexos então $\lambda k \in A_n$ e $\lambda k \in Y, \forall n, \forall \lambda$ tal que $|\lambda| \leq 1$. Deste modo $\lambda k \in A_n \cap Y, \forall \lambda$ tal que $|\lambda| \leq 1$. Portanto $A_n \cap Y$ é absolutamente convexo.

(iii) $A_n \cap Y, \forall n \in \mathbb{N}$, é fechado em $\sigma(X^{**}, X)$, pois ambos são fechados em $\sigma(X^{**}, X^*)$.

(iv) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \cap Y$ é compacto em $\sigma(X^{**}, X^*)$. De fato, o conjunto $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \cap Y$ é fechado em $\sigma(X^{**}, X^*)$ pois $A_n \cap Y$ é fechado. Como $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \cap Y \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ e $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ é compacto em $\sigma(X^{**}, X^*)$, então $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \cap Y$ é compacto em $\sigma(X^{**}, X^*)$.

(v) $Y = \bigcup_{I \in J(A)} \bigcap_{n \in I} A_n \cap Y$. De fato, seja $y \in Y$, então existe $I \in J(A)$ tal que $y \in \bigcap_{n \in I} A_n$. Então $y \in (\bigcap_{n \in I} A_n) \cap Y$, isto é, $y \in \bigcap_{n \in I} (A_n \cap Y)$. Deste modo, $y \in \bigcup_{I \in J(A)} \bigcap_{n \in I} A_n \cap Y$. Por outro lado, seja $y \in \bigcup_{I \in J(A)} \bigcap_{n \in I} A_n \cap Y$, então existe $I \in J(A)$ tal que $y \in \bigcap_{n \in I} A_n \cap Y$. Portanto $y \in Y$, pois $\bigcap_{n \in I} A_n \cap Y \subset Y$.

Deste modo, concluímos de (i)-(v) que o subespaço Y é WCD . ■

2.3 A propriedade CSPP

Definição 2.3.1 ([22]) *Um espaço de Banach X possui a Propriedade da Projeção Controlada Separável (CSPP) se para todo subconjunto enumerável W de X e para todo subconjunto enumerável U de X^* existe uma projeção $P : X \rightarrow X$ tal que*

1. $\|P\| = 1$,
2. $W \subset P(X)$ e $P(X)$ é separável, e
3. $U \subset P^*(X^*)$.

Teorema 2.3.2 ([21]) *Seja X um espaço de Banach WCD . Então X possui a propriedade CSPP.*

Prova. Pela Proposição 2.2.2 X é CD . Então tomemos $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ uma sequência de subconjuntos compactos em $\sigma(X^{**}, X^*)$ como no Lema 0.71.

E sejam W e V subconjuntos enumeráveis de X e X^{**} , respectivamente. Logo os subespaços $\overline{W}$ e $\overline{V}$ são separáveis. Mais ainda, $\overline{V}$ é separável em $\sigma(X^*, X)$. Pelo Teorema 0.72 existe uma aplicação linear contínua $T : X^{**} \rightarrow X^{**}$ tal que:

- (i) $P = T|_X$ é uma projeção em X , com $\|P\| = 1$,
- (ii) $\overline{W} \subset P(X)$ e $P(X)$ é separável,
- (iii) $\overline{V} \subset P^*(X^*)$.

De (ii) segue que $W \subset P(X)$ pois $W \subset \overline{W}$. Analogamente de (iii) segue que $U \subset P^*(X^*)$.

Concluímos que X possui a propriedade CSPP. ■

Corolário 2.3.3 *Seja X um subespaço fechado de um espaço de Banach WCD . Então X possui a propriedade CSPP.*

Prova. Pela Proposição 2.2.6 X é WCD . Deste modo X possui a propriedade CSPP (Ver Teorema 2.3.2). ■

Corolário 2.3.4 *Seja X um subespaço fechado de um espaço de Banach WCG. Então X possui a propriedade CSPP.*

Prova. Segue do Teorema 2.2.3 que X é um subespaço fechado de um espaço de Banach WCD . Deste modo, pelo Corolário 2.3.3 X possui a propriedade CSPP. ■

Capítulo 3

O lema principal

O objetivo deste capítulo é apresentar a prova do Lema 3.2.1 que será útil na prova da Proposição 4.3.9.

3.1 Sequência normal e sequência fortemente normal

Definição 3.1.1 *Seja X um espaço de Banach. Dizemos que uma sequência $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ em X^* é normal se $\|x_n^*\| = 1$, $n = 1, 2, \dots$, e $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ converge para zero em $\sigma(X^*, X)$.*

Teorema 3.1.2 ([16]) *Seja X um espaço de Banach. Então X^* contém uma sequência normal.*

Antes de provar o Teorema 3.1.2 precisaremos de alguns lemas auxiliares.

Definição 3.1.3 *Dizemos que uma sequência $(A_n, B_n)_{n=1}^\infty$ de pares de subconjuntos disjuntos e não vazios de um conjunto S é independente se para cada sequência $(\theta_n)_{n=1}^\infty \in \{-1, 1\}^\mathbb{N}$ e para cada $p \in \mathbb{N}$ têm-se que $\cap_{n=1}^p \theta_n A_n \neq \emptyset$, onde*

$$\theta_n A_n = \begin{cases} A_n, & \text{se } \theta_n = 1 \\ B_n, & \text{se } \theta_n = -1. \end{cases}$$

Lema 3.1.4 ([16]) *Seja $(f_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência limitada em $l_\infty(S; \mathbb{C})$. Sejam C e D subconjuntos não vazios de $\mathbb{C}$ tais que*

$$\operatorname{Re}(z - w) \geq R \text{ e } |\operatorname{Im}(z - w)| \leq r \quad \text{para cada } z \in C \text{ e } w \in D,$$

onde $R > r > 0$. Sejam

$$A_n = f_n^{-1}(C) \text{ e } B_n = f_n^{-1}(D) \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Se a sequência $(A_n, B_n)_{n=1}^{\infty}$ é independente, então $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência básica em $l_{\infty}(S; \mathbb{C})$ que é equivalente à base canônica de $l_1(\mathbb{N})$.

Prova. Para provar o lema mostraremos que

$$\left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j \right\| \geq \frac{R-r}{4} \sum_{j=1}^n |\lambda_j|$$

para toda sequência $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Sejam $\alpha_j = \operatorname{Re} \lambda_j$ e $\beta_j = \operatorname{Im} \lambda_j$ para todo j . Desde que $\left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j \right\| = \left\| \sum_{j=1}^n i \lambda_j f_j \right\|$, nós podemos assumir, sem perda de generalidade que

$$\sum_{j=1}^n |\alpha_j| \geq \sum_{j=1}^n |\beta_j|.$$

Sejam $P = \{j : 1 \leq j \leq n \text{ e } \alpha_j \geq 0\}$ e $N = \{j : 1 \leq j \leq n \text{ e } \alpha_j < 0\}$. Desde que a sequência $(A_j, B_j)_{j=1}^{\infty}$ é independente, nós podemos encontrar $s, t \in S$ tais que $s \in (\cap_{j \in P} A_j) \cap (\cap_{j \in N} B_j)$ e $t \in (\cap_{j \in N} A_j) \cap (\cap_{j \in P} B_j)$.

Deste modo $f_j(s) \in C$ e $f_j(t) \in D$ se $j \in P$, enquanto $f_j(t) \in C$ e $f_j(s) \in D$ se $j \in N$. E segue que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(s) - \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(t) &= \sum_{j=1}^n \operatorname{Re}[\lambda_j(f_j(s) - f_j(t))] \\ &= \sum_{j=1}^n [\alpha_j \operatorname{Re}(f_j(s) - f_j(t)) - \beta_j \operatorname{Im}(f_j(s) - f_j(t))] \\ &= \sum_{j \in P} \alpha_j \operatorname{Re}(f_j(s) - f_j(t)) + \sum_{j \in N} \alpha_j \operatorname{Re}(f_j(s) - f_j(t)) \\ &\quad - \sum_{j=1}^n \beta_j \operatorname{Im}(f_j(s) - f_j(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \sum_{j \in P} |\alpha_j| R + \sum_{j \in N} |\alpha_j| R - \sum_{j=1}^n \beta_j r \\
&= R \sum_{j=1}^n |\alpha_j| - r \sum_{j=1}^n |\beta_j| \\
&\geq (R - r) \sum_{j=1}^n |\alpha_j| \\
&\geq \frac{R - r}{2} \sum_{j=1}^n |\lambda_j|.
\end{aligned}$$

E segue também,

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(s) \geq \frac{R - r}{4} \sum_{j=1}^n |\lambda_j| \quad \text{ou} \quad -\operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(t) \geq \frac{R - r}{4} \sum_{j=1}^n |\lambda_j|.$$

Consequentemente,

$$\left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j \right\| \geq \frac{R - r}{4} \sum_{j=1}^n |\lambda_j|.$$

■

Definição 3.1.5 Dizemos que uma sequência $(S_j)_{j=1}^\infty$ de subconjuntos não vazios de um conjunto S é uma árvore se S_{2j} e S_{2j+1} são disjuntos para todo $j \in \mathbb{N}$.

Lema 3.1.6 ([16]) Seja $(f_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em $l_\infty(S; \mathbf{K})$. Sejam C e D subconjuntos disjuntos e não vazios de $\mathbf{K}$, e sejam

$$A_n = f_n^{-1}(C) \text{ e } B_n = f_n^{-1}(D) \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Suponha que existe uma árvore $(S_j)_{j=1}^\infty$ de subconjuntos de S tais que

$$S_j \subset A_n \text{ para } 2^n \leq j < 2^{n+1}, \quad n \geq 1 \text{ e } j \text{ ímpar}$$

e

$$S_j \subset B_n \text{ para } 2^n \leq j < 2^{n+1}, \quad n \geq 1 \text{ e } j \text{ par}.$$

Então a sequência $(A_n, B_n)_{n=1}^\infty$ é independente.

Prova. Sejam $\theta_1, \dots, \theta_p \in \{-1, 1\}$. Seja T_1 o único S_j tal que $2 \leq j < 2^2$ e $S_j \subset \theta_1 A_1$. Seja T_2 o único S_j tal que $2^2 \leq j < 2^3$ e $S_j \subset T_1 \cap \theta_2 A_2$. Em geral, se $1 < n \leq p$, seja T_n o único S_j tal que $2^n \leq j < 2^{n+1}$ e $S_j \subset T_{n-1} \cap \theta_n A_n$. E segue que

$$\cap_{n=1}^p \theta_n A_n \supset \cap_{n=1}^p T_n = T_p \neq \emptyset.$$

■

Lema 3.1.7 ([16]) *Sejam $\delta > 0$ e $0 < \epsilon < \frac{1}{6}\delta$. Sejam*

$$C = \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq \delta + \epsilon \text{ e } \operatorname{Re} z \geq \delta - \epsilon\}$$

e

$$D = \{w \in \mathbf{C} : |w| \leq \delta + \epsilon \text{ e } \operatorname{Re} w \leq -\delta + \epsilon\}.$$

Então

$$(a) \operatorname{Re}(z - w) \geq 2(\delta - \epsilon) \text{ e } |\operatorname{Im}(z - w)| \leq 4\sqrt{\delta\epsilon};$$

$$(b) 2(\delta - \epsilon) > 4\sqrt{\delta\epsilon}.$$

Prova. Dados $z \in C$ e $w \in D$, temos que

$$\operatorname{Re}(z - w) \geq 2(\delta - \epsilon) \text{ e } |\operatorname{Im}(z - w)| \leq 2h$$

onde $(\delta - \epsilon, h)$ e $(\delta - \epsilon, -h)$ são pontos de intersecção da circunferência $x^2 + y^2 = (\delta + \epsilon)^2$ e a linha vertical $x = \delta - \epsilon$. Consequentemente $h = 2\sqrt{\delta\epsilon}$, e segue (a). A inequação em (b) é equivalente a inequação $\delta^2 + \epsilon^2 > 6\delta\epsilon$, que é verificada se $0 < \epsilon < \frac{1}{6}\delta$. ■

Lembrando que $(y_n)_{n=1}^\infty \prec (x_n)_{n=1}^\infty$ se $(y_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência de bloco de $(x_n)_{n=1}^\infty$ $l_1(\mathbf{N})$ -normalizada, temos

Lema 3.1.8 ([16]) *Seja $(\phi_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência limitada no dual X^* de um espaço de Banach X . Então existe uma sequência $(\psi_n)_{n=1}^\infty \prec (\phi_n)_{n=1}^\infty$ tal que*

$$\delta((\theta_n)_{n=1}^\infty) = \delta((\psi_n)_{n=1}^\infty)$$

para cada sequência $(\theta_n)_{n=1}^\infty \prec (\psi_n)_{n=1}^\infty$, onde

$$\delta((\theta_n)_{n=1}^\infty) = \sup_{x \in S_X} \limsup_{n \rightarrow \infty} |\theta_n(x)|.$$

Teorema 3.1.9 ([16]) *Seja X um espaço de Banach, cujo dual X^* contém uma sequência limitada $(\phi_n)_{n=1}^\infty$ tal que $\psi_n \not\rightarrow 0$ em $\sigma(X^*, X)$ para cada sequência $(\psi_n)_{n=1}^\infty \prec (\phi_n)_{n=1}^\infty$. Então X contém um subespaço isomorfo a $l_1(\mathbb{N})$.*

Prova. Sem perda de generalidade nós podemos assumir que $(\phi_n)_{n=1}^\infty \subset B_{X^*}$. Pelo Lema 3.1.8 existe uma sequência $(\psi_n)_{n=1}^\infty \prec (\phi_n)_{n=1}^\infty$ tal que

$$\delta((\theta_n)_{n=1}^\infty) = \delta((\psi_n)_{n=1}^\infty)$$

para cada sequência $(\theta_n)_{n=1}^\infty \prec (\psi_n)_{n=1}^\infty$. Segue da hipótese que $\psi_n(x) \not\rightarrow 0$ para algum $x \in S_X$, e portanto $\delta((\psi_n)_{n=1}^\infty) > 0$. Seja $\delta = \delta((\psi_n)_{n=1}^\infty)$ e seja $0 < \epsilon < \frac{1}{6}\delta$.

Sejam $0 < \epsilon' < \frac{1}{5}\epsilon$ e $N_1 = \mathbb{N}$. Sejam $A = (m_j)_{j=1}^\infty$ e $B = (n_j)_{j=1}^\infty$ subconjuntos de N_1 tais que $m_j < n_j < m_{j+1}$ para todo j . Desde que $\frac{1}{2}(\psi_{m_j} - \psi_{n_j})_{j=1}^\infty \prec (\psi_n)_{n=1}^\infty$, segue que

$$\delta\left(\frac{1}{2}(\psi_{m_j} - \psi_{n_j})_{j=1}^\infty\right) = \delta((\psi_n)_{n=1}^\infty) = \delta.$$

Consequentemente, existe $x_1 \in S_X$ e um subconjunto $J \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{1}{2}(\psi_{m_j} - \psi_{n_j})(x_1)\right| \geq \delta - \epsilon' \text{ para todo } j \in J.$$

Então, pelo Teorema 0.79, a sequência $(\frac{1}{2}(\psi_{m_j} - \psi_{n_j})(x_1))_{j=1}^\infty$ admite um ponto de aderência $c_1 \in \mathbb{C}$, com $|c_1| \geq \delta - \epsilon'$. Depois multiplicando x_1 por um $\gamma \in \mathbb{C}$ conveniente, com $|\gamma| = 1$, nós podemos assumir que c_1 é real, e $c_1 \geq \delta - \epsilon'$. Depois passando a uma subsequência nós podemos assumir que

$$\frac{1}{2}(\psi_{m_j} - \psi_{n_j})(x_1) \geq \delta 2\epsilon', \text{ para todo } j \in J.$$

Desde que $(\psi_{m_j})_{j=1}^\infty \prec (\psi_n)_{n=1}^\infty$ e $(\psi_{n_j})_{j=1}^\infty \prec (\psi_n)_{n=1}^\infty$, segue que

$$\delta((\psi_{m_j})_{j=1}^\infty) = \delta((\psi_{n_j})_{j=1}^\infty) = \delta((\psi_n)_{n=1}^\infty) = \delta,$$

e portanto

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} |\psi_{m_j}(x_1)| \leq \delta \text{ e } \limsup_{j \rightarrow \infty} |\psi_{n_j}(x_1)| \leq \delta.$$

Consequentemente existe $j_0 \in J$ tal que

$$|\psi_{m_j}(x_1)| \leq \delta + \epsilon' \text{ e } |\psi_{n_j}(x_1)| \leq \delta + \epsilon' \text{ para todo } j \in J, j \geq j_0.$$

E temos que

$$\operatorname{Re}\psi_{m_j}(x_1) \geq \delta - 5\epsilon' \text{ e } \operatorname{Re}\psi_{n_j}(x_1) \leq -\delta + 5\epsilon' \text{ para todo } j \in J, j \geq j_0.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\psi_{m_j}(x_1) &= \operatorname{Re}(\psi_{m_j} - \psi_{n_j})(x_1) + \operatorname{Re}\psi_{n_j}(x_1) \\ &\geq \operatorname{Re}(\psi_{m_j} - \psi_{n_j})(x_1) - |\psi_{n_j}(x_1)| \geq \\ &\geq 2(\delta - 2\epsilon') - (\delta + \epsilon') \\ &= \delta - 5\epsilon', \end{aligned}$$

e a outra inequação é provada similarmente.

Deste modo nós encontramos dois subconjuntos disjuntos N_2 e N_3 de N_1 tais que

$$\begin{aligned} |\psi_n(x_1)| &\leq \delta + \epsilon \quad \text{para todo } n \in N_2 \cup N_3; \\ \operatorname{Re}\psi_n(x_1) &\geq \delta - \epsilon \quad \text{para todo } n \in N_2; \\ \operatorname{Re}\psi_n(x_1) &\leq -\delta + \epsilon \quad \text{para todo } n \in N_3. \end{aligned}$$

Seja $0 < \epsilon'' < \frac{1}{11}\epsilon$. Sejam $P = (p_k)_{k=1}^\infty$, $Q = (q_k)_{k=1}^\infty$, $R = (r_k)_{k=1}^\infty$ e $S = (s_k)_{k=1}^\infty$ subconjuntos de $\mathbb{N}$ tais que $P \cup Q \subset N_2$, $R \cup S \subset N_3$ e $p_k < q_k < r_k < s_k < p_{k+1}$ para todo k . Desde que $\frac{1}{4}(\psi_{p_k} - \psi_{q_k} + \psi_{r_k} - \psi_{s_k})_{k=1}^\infty \prec (\psi_n)_{n=1}^\infty$, segue que

$$\delta\left(\frac{1}{4}(\psi_{p_k} - \psi_{q_k} + \psi_{r_k} - \psi_{s_k})_{k=1}^\infty\right) = \delta((\psi_n)_{n=1}^\infty) = \delta.$$

Consequentemente o argumento precedente produz um ponto $x_2 \in S_X$ e um subconjunto $K \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{4}\operatorname{Re}(\psi_{p_k} - \psi_{q_k} + \psi_{r_k} - \psi_{s_k})(x_2) \geq \delta - 2\epsilon''$$

para todo $k \in K$.

O argumento precedente produz também $k_0 \in K$ tal que

$$\begin{aligned} |\psi_{p_k}(x_2)| &\leq \delta + \epsilon'' \quad ; \quad |\psi_{q_k}(x_2)| \leq \delta + \epsilon''; \\ |\psi_{r_k}(x_2)| &\leq \delta - \epsilon'' \quad \text{e} \quad |\psi_{s_k}(x_2)| \leq \delta + \epsilon'', \end{aligned}$$

para todo $k \in K, k \geq k_0$. Como antes nós podemos mostrar que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\psi_{p_k}(x_2) &\geq \delta - 11\epsilon'' \quad : \quad \operatorname{Re}\psi_{q_k}(x_2) \leq -\delta + \epsilon''; \\ \operatorname{Re}\psi_{r_k}(x_2) &\geq \delta - 11\epsilon'' \quad \text{e} \quad \operatorname{Re}\psi_{s_k}(x_2) \leq -\delta + 11\epsilon'', \end{aligned}$$

para todo $k \in K, k \geq k_0$. Deste modo nós encontramos dois subconjuntos disjuntos N_4 e N_5 de N_2 e dois subconjuntos disjuntos N_6 e N_7 de N_3 tais que

$$\begin{aligned} |\psi_n(x_2)| &\leq \delta + \epsilon && \text{para todo } n \in N_4 \cup N_5 \cup N_6 \cup N_7; \\ \operatorname{Re}\psi_n(x_2) &\geq \delta - \epsilon && \text{para todo } n \in N_4 \cup N_6; \\ \operatorname{Re}\psi_n(x_2) &\leq -\delta + \epsilon && \text{para todo } n \in N_5 \cup N_7. \end{aligned}$$

Sejam

$$C = \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq \delta + \epsilon \text{ e } \operatorname{Re} z \geq \delta - \epsilon\}$$

e

$$D = \{w \in \mathbf{C} : |w| \leq \delta + \epsilon \text{ e } \operatorname{Re} w \leq -\delta + \epsilon\}.$$

Procedendo por indução nós podemos encontrar uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty \subset S_X$, e uma árvore $(N_j)_{j=1}^\infty$ de subconjuntos de $\mathbf{N}$ tais que

$$\psi_k(x_n) \in C \text{ para } k \in N_j, 2^n \leq j < 2^{n+1}, n \geq 1$$

e

$$\psi_k(x_n) \in D \text{ para } k \in N_j, 2^n \leq j < 2^{n+1}, n \geq 2.$$

Sejam

$$A_n = \{\psi \in B_{X^*} : \psi(x_n) \in C\}$$

e

$$B_n = \{\psi \in B_{X^*} : \psi(x_n) \in D\}$$

para todo $n \in \mathbf{N}$, e seja

$$\psi_j = \{\psi_k : k \in N_j\}, \text{ para todo } j \in \mathbf{N}.$$

Então $(\psi_j)_{j=1}^\infty$ é uma árvore de subconjuntos de B_{X^*} tal que

$$\psi_j \subset A_n \text{ para } 2^n \leq j < 2^{n+1}, n \geq 1 \text{ e } j \text{ ímpar}$$

$$\psi_j \subset B_n \text{ para } 2^n \leq j < 2^{n+1}, n \geq 1 \text{ e } j \text{ par}.$$

Pelo Lema 3.1.6 a sequência $(A_n, B_n)_{n=1}^\infty$ é independente. Pelo Lema 3.1.7 os conjuntos C e D verificam as hipóteses do Lema 3.1.4. Deste modo segue do Lema 3.1.4 que $(x_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência básica em X que é equivalente à base canônica de $l_1(\mathbf{N})$. ■

Corolário 3.1.10 ([16]) *Seja X um espaço de Banach que não contém subespaço isomorfo a $l_1(\mathbb{N})$. Então*

(a) *cada subespaço M de X de dimensão infinita contém uma sequência normalizada que converge a zero em $\sigma(X, X^*)$;*

(b) *cada subespaço N de X^* de dimensão infinita contém uma sequência normalizada que converge a zero em $\sigma(X^*, X)$.*

Prova. (a) Pelo Lema de Riesz (Ver Lema 0.73) existe uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty \subset S_M$ tal que $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ quando $n \neq m$. Pelo Teorema 0.53 nós podemos assumir que $(x_n)_{n=1}^\infty$ é w -Cauchy. Consequentemente $x_{n+1} - x_n \xrightarrow{w} 0$ e $\|x_{n+1} - x_n\| \geq \frac{1}{2}$ para todo n . Deste modo é suficiente normalizar a sequência $(x_{n+1} - x_n)_{n=1}^\infty$.

(b) Seja N um subespaço de X^* de dimensão infinita, e seja $(\phi_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em S_N tal que $\|\phi_n - \phi_m\| \geq \frac{1}{2}$ quando $n \neq m$. Pelo Teorema 0.53 nós podemos assumir que $(\phi_n)_{n=1}^\infty$ é $\sigma(X^*, X^{**})$ -Cauchy, ou senão $(\phi_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência básica que é equivalente à base canônica de $l_1(\mathbb{N})$.

No primeiro caso $\phi_{n+1} - \phi_n \rightarrow 0$ em $\sigma(X^*, X^{**})$ e $\|\phi_{n+1} - \phi_n\| \geq \frac{1}{2}$ para todo n . Deste modo é suficiente normalizar a sequência $(\phi_{n+1} - \phi_n)_{n=1}^\infty$.

No segundo caso, pelo Teorema 3.1.9 existe uma sequência $(\psi_n)_{n=1}^\infty \prec (\phi_n)_{n=1}^\infty$ que converge a zero em $\sigma(X^*, X)$. Desde que $(\phi_n)_{n=1}^\infty$ é equivalente à base canônica de $l_1(\mathbb{N})$, então $(\psi_n)_{n=1}^\infty$ também o é. Consequentemente $\|\psi_n\| > a > 0$ para todo n , e é suficiente normalizar a sequência $(\psi_n)_{n=1}^\infty$. ■

Corolário 3.1.11 ([16]) *Seja X um espaço de Banach cujo dual X^* não contém subespaço isomorfo a $l_1(\mathbb{N})$. Então*

(a) *cada subespaço M de X de dimensão infinita contém uma sequência normalizada que converge a zero em $\sigma(X, X^*)$;*

(b) *cada subespaço N de X^* de dimensão infinita contém uma sequência normalizada que converge a zero em $\sigma(X^*, X^{**})$.*

Prova. Aplicando o Corolário 3.1.10 (b) para X^* , nós obtemos (a). E aplicando o Corolário 3.1.10 (a) para X^* nós obtemos (b). ■

Prova do Teorema 3.1.2 Se X não contém subespaço isomorfo a $l_1(\mathbb{N})$, então é uma consequência direta do Corolário 3.1.10 (b). Se X contém um subespaço isomorfo a $l_1(\mathbb{N})$,

então $l_2(\mathbb{N})$ é um quociente de X (Ver Teorema 0.20). Desde que $l_2(\mathbb{N})$ é separável, a conclusão segue imediatamente. ■

A seguir daremos exemplos de sequências normais.

Exemplo 3.1.12 Em $l_1(\mathbb{N})$ a sequência $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ é normal. De fato, seja $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ em $c_0(\mathbb{N})$. Como $e_n(x) = x_n$ e $x_n \rightarrow 0$, concluímos que $e_n(x) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, $\forall x \in c_0(\mathbb{N})$. Além disso, $\|e_n\| = 1, (n \in \mathbb{N})$. Logo a sequência $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ é normal.

Exemplo 3.1.13 Em $l_{\infty}(\mathbb{N})$ a sequência $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ é normal. De fato, seja $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ em $l_1(\mathbb{N})$. Como $e_n(x) = x_n$ e $|x_n| \rightarrow 0$, concluímos que $e_n(x) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, $\forall x \in l_1(\mathbb{N})$. Além disso, $\|e_n\| = 1, (n \in \mathbb{N})$. Logo a sequência $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ é normal.

Definição 3.1.14 ([22]) Seja X um espaço de Banach. Dizemos que uma sequência $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ em X^* é fortemente normal se $\|x_n^*\| = 1, n = 1, 2, \dots$, e o subespaço vetorial de X definido por

$$X_0 = \{x \in X : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^*(x)| < \infty\}$$

é denso em X .

Proposição 3.1.15 Seja X um espaço de Banach. Então toda sequência fortemente normal em X^* é normal.

Prova. Seja $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência fortemente normal em X^* . Temos que $\|x_n^*\| = 1, (n \in \mathbb{N})$ e o subespaço

$$X_0 = \{x \in X : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^*(x)| < \infty\}$$

é denso em X .

Tomemos $x \in X$. Então existe uma sequência $(x^{(j)})_{j=1}^{\infty}$ em X_0 tal que $x^{(j)} \rightarrow x$ quando $j \rightarrow \infty$. Seja $n \in \mathbb{N}$ fixo. Então $x_n^*(x^{(j)}) \rightarrow x_n^*(x)$ quando $j \rightarrow \infty$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^*(x^{(j)})| < \infty, (j \in \mathbb{N})$, concluímos que $x_n^*(x^{(j)}) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty, \forall j \in \mathbb{N}$. Logo $x_n^*(x) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty, \forall x \in X$. ■

Exemplo 3.1.16 Em $l_{\infty}(\mathbb{N})$ a sequência $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ é fortemente normal. De fato, seja $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ em $l_1(\mathbb{N})$. Como $e_n(x) = x_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$, concluímos que $x \in X_0 := \{x \in X : \sum_{n=1}^{\infty} |e_n(x)| < \infty\}$. Logo $X_0 = l_1(\mathbb{N})$. Além disso, $\|e_n\| = 1, (n \in \mathbb{N})$. Portanto $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ é fortemente normal.

3.2 O lema principal

Lema 3.2.1 ([22]) *Seja X um espaço de Banach possuindo a propriedade CSPP. Então toda sequência normal em X^* contém uma subsequência fortemente normal.*

Prova. Seja $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ uma sequência normal em X^* , que existe pelo Teorema 3.1.2. E consideremos dois casos:

1º Caso. X é separável.

Seja $\{x_i\}$ um subconjunto enumerável de X com $\overline{\{x_i\}} = X$. Por hipótese $x_n^* \rightarrow 0$ em $\sigma(X^*, X)$, então podemos escolher indutivamente uma subsequência $(x_{n_k}^*)_{k=1}^\infty$ de $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ tal que $|x_{n_k}^*(x_i)| < (\frac{1}{k})^2$, onde $i = 1, 2, \dots, k$. Desde que $\sum_{k=1}^\infty (\frac{1}{k})^2 < \infty$, temos

$$\{x_i\} \subset X_0 = \{x \in X : \sum_{k=1}^\infty |x_{n_k}^*(x)| < \infty\}$$

e portanto $\overline{X_0} = X$. Consequentemente $(x_{n_k}^*)_{k=1}^\infty$ é fortemente normal.

2º Caso. X não é separável.

Seja W_0 um subconjunto enumerável de X com $\dim W = \infty$, onde $W = \overline{W_0}$. Por hipótese X possui a propriedade CSPP, então existe uma projeção P em X tal que $\|P\| = 1$, $W \subset F := P(X)$ e F é separável, e $P^*(X^*)$ contém a sequência $(x_n^*)_{n=1}^\infty$.

Agora, seja J o operador inclusão $J : F \rightarrow X$ e define $T : X \rightarrow F$ como $T(x) = P(x)$, $x \in X$. Veja que $P = JoT$, consequentemente $P^*(X^*) = T^*(J^*(X^*))$. Deste modo, $J^*(X^*) = F^*$ por Hahn-Banach (Ver Teorema 0.6), pois dado $f^* \in F^*$ existe $x^* \in X^*$ tal que $x^*(f) = f^*(f)$, $\forall f \in F$. Portanto $P^*(X^*) = T^*(F^*)$. Segue que $(x_n^*)_{n=1}^\infty \subset T^*(F^*)$. Desde que T^* é uma isometria, para $n = 1, 2, \dots$, existe $f_n^* \in F^*$ com $\|f_n^*\| = 1$ e $T^*(f_n^*) = x_n^*$.

Como F é separável e $(f_n^*)_{n=1}^\infty$ é normal, pois $f_n^*(f) = f_n^*(Tf) = x_n^*(f)$, pelo 1º Caso $(f_n^*)_{n=1}^\infty$ contém uma subsequência $(f_{n_k}^*)_{k=1}^\infty$ fortemente normal. Assim,

$$F_0 := \{f \in F : \sum_{k=1}^\infty |f_{n_k}^*(f)| < \infty\}$$

é denso em F . Segue que o subespaço

$$X_0 := F_0 + \text{Ker } T$$

é denso em X , e conseqüentemente

$$X = \overline{\left\{x \in X : \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k}^*(T(x))| < \infty\right\}} = \overline{\left\{x \in X : \sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_k}^*(x)| < \infty\right\}}.$$

Deste modo, $(x_{n_k}^*)_{k=1}^{\infty}$ é uma subsequência fortemente normal. ■

Capítulo 4

Os principais resultados

Apresentaremos a prova do Teorema de Johnson e Rosenthal (Ver Teorema 4.1.10). Este Teorema implica no principal resultado desta dissertação (Ver Lema 4.3.1) que generaliza o Teorema 1.13 de Bessaga e Pelczyński.

4.1 Sequência w^* -básica

Notação 4.1.1 *Seja $A \subset X^*$. Por A^T denotaremos o anulador de A em X , isto é, $A^T = \{x \in X : a(x) = 0, \forall a \in A\}$.*

Definição 4.1.2 *Seja X um espaço de Banach. Uma sequência $(y_n)_{n=1}^\infty$ em X^* é chamada de w^* -básica se existe uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em X cujos funcionais biortogonais são $(y_n)_{n=1}^\infty$ e para cada $y \in [(y_n)_{n=1}^\infty]$ fechado em $\sigma(X^*, X)$ temos $\sum_{i=1}^n y(x_i)y_i \rightarrow y$ em $\sigma(X^*, X)$.*

Observação 4.1.3 *A sequência w^* -básica $(y_n)_{n=1}^\infty$ é chamada de w^* -base de Schauder se para cada $y \in X^*$ temos $\sum_{i=1}^n y(x_i)y_i \rightarrow y$ em $\sigma(X^*, X)$.*

Proposição 4.1.4 ([20], p.155) *Seja X um espaço de Banach. Uma sequência $(y_n)_{n=1}^\infty$ em X^* é w^* -base de Schauder se, e somente se, X tem uma base $(x_n)_{n=1}^\infty$ cujos funcionais biortogonais são $(y_n)_{n=1}^\infty$.*

Proposição 4.1.5 *Sejam X um espaço de Banach, $(y_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em X^* e T a aplicação quociente de X sobre o quociente de X por $[(y_n)_{n=1}^\infty]^T$. Então*

(a) $(y_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência w^* -básica se, e somente se, o quociente de X por $[(y_n)_{n=1}^\infty]^T$ contém uma base $(x_n)_{n=1}^\infty$ associada aos funcionais biortogonais $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ tal que $T^*(x_n^*) = y_n$, $n = 1, 2, \dots$. Deste modo se $(y_n)_{n=1}^\infty$ é w^* -básica, então $(y_n)_{n=1}^\infty$ é básica.

(b) $(y_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência w^* -básica contrátil se, e somente se, o quociente de X por $[(y_n)_{n=1}^\infty]^T$ contém uma base $(x_n)_{n=1}^\infty$ completamente limitada associada aos funcionais biortogonais $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ tal que $T^*(x_n^*) = y_n$, $n = 1, 2, \dots$.

Prova. (a) Como $(y_n)_{n=1}^\infty \subset X^*$ então o subespaço fechado $[(y_n)_{n=1}^\infty]$ em $\sigma(X^*, X)$ pode ser identificado com o dual do quociente de X por $[(y_n)_{n=1}^\infty]^T$ via a aplicação T^* , pois T^* é uma isometria em $\sigma(X^*, X)$ (Ver Proposição 0.21). Disto segue que $(y_n)_{n=1}^\infty$ é w^* -básica se, e somente se, $(T^{*-1}y_n)_{n=1}^\infty$ é w^* -base de Schauder para o dual do quociente de X por $[(y_n)_{n=1}^\infty]^T$. Portanto, segue da Proposição 4.1.4, que o quociente de X por $[(y_n)_{n=1}^\infty]^T$ contém uma base $(x_n)_{n=1}^\infty$ cujos funcionais biortogonais são $(T^{*-1}y_n)_{n=1}^\infty$. E fazendo $x_n^* = T^{*-1}y_n$, temos que $T^*(x_n^*) = y_n$, para $n = 1, 2, \dots$.

(b) Segue de (a) e da Proposição 0.36. ■

Proposição 4.1.6 ([12]) *Seja $(b_n)_{n=1}^\infty$ uma base em um espaço de Banach Y com funcionais biortogonais $(b_n^*)_{n=1}^\infty$, seja $(y_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência w^* -básica em X^* e suponha que $(y_n)_{n=1}^\infty$ é equivalente a $(b_n^*)_{n=1}^\infty$. Então o quociente de X por $[(y_n)_{n=1}^\infty]^T$ é isomorfo a Y .*

Proposição 4.1.7 ([12]) *Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em X . Se X^* é separável, $x_n \xrightarrow{w} 0$ e $\limsup \|x_n\| > 0$, então $(x_n)_{n=1}^\infty$ contém uma subsequência básica contrátil.*

Prova. Podemos assumir que $\|x_n\| = 1$ para $n = 1, 2, \dots$. E pela Proposição 0.27 podemos assumir que $(x_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência básica.

Sejam $0 < \lambda < 1$ e $(f_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em X^* tal que $\overline{\{f_n\}} = X^*$ e $f_1 = 0$. Por indução podemos escolher uma sequência $n_1 < n_2 < \dots$ de inteiros positivos e uma sequência $(z_n)_{n=1}^\infty$ em X satisfazendo, para $i = 1, 2, \dots$

$$(i) \ z_i \in [(f_j)_{j=1}^i]^T,$$

$$(ii) \ \|z_i - x_{n_i}\| < \lambda 2^{-i}.$$

De fato, tomemos $z_1 = x_1$, $n_1 = 1$. Suponha que $z_1, \dots, z_{i-1}$ e $n_1 < \dots < n_{i-1}$ estão definidos. Como $x_n \xrightarrow{w} 0$, podemos escolher $n_i > n_{i-1}$ suficientemente grande tal que

$$d(x_{n_i}, [(f_j)_{j=1}^i]^T) = \sup\{|f(x_{n_i})| : f \in [(f_j)_{j=1}^i], \|f\| \leq 1\} < \lambda 2^{-i}.$$

Então escolha z_i satisfazendo (i) e (ii). Consequentemente $\sum_{i=1}^{\infty} \|z_i - x_{n_i}\| < \lambda$ e pela Proposição 0.32 $(z_i)_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência básica equivalente a $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$.

Suponha que $f \in [(z_i)_{i=1}^{\infty}]^*$ e pelo Teorema de Hahn-Banach (Ver Teorema 0.6) seja $\tilde{f} \in X^*$ uma extensão de f . Então existe uma subsequência $(f_{m_i})_{i=1}^{\infty}$ de $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ tal que $\|f_{m_i} - \tilde{f}\| \rightarrow 0$. Agora $f_{m_i}|_{[(z_j)_{j=m_i}^{\infty}]} = 0$. Consequentemente

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\tilde{f}|_{[(z_j)_{j=m_i}^{\infty}]}\| = 0 \quad \text{e} \quad \|f|_{[(z_j)_{j=i}^{\infty}]}\| \rightarrow 0.$$

Deste modo $(z_i)_{i=1}^{\infty}$, e consequentemente $(x_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência básica contráctil. ■

Teorema 4.1.8 ([12]) *Seja X um espaço de Banach separável. Se $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência em X^* tal que $y_n \rightarrow 0$ em $\sigma(X^*, X)$ e $\limsup \|y_n\| > 0$ então $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ contém uma sub-sequência w^* -básica $(y_{n_i})_{i=1}^{\infty}$. Além disso, $(y_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ pode ser escolhida tal que se $(z_{n_i})_{i=1}^{\infty} \subset X$ cujos funcionais biortogonais são $(y_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ e $S_m : [(y_{n_i})_{i=1}^{\infty}] \rightarrow [(y_{n_i})_{i=1}^{\infty}]$, onde $[(y_{n_i})_{i=1}^{\infty}]$ é um fechado em $\sigma(X^*, X)$, é definida (para $m = 1, 2, \dots$) por $S_m(y) = \sum_{i=1}^m y(z_{n_i})y_{n_i}$ para todo $y \in [(y_{n_i})_{i=1}^{\infty}]$, então $\|S_m\| \rightarrow 1$.*

Prova. Podemos assumir que $\|y_n\| = 1$ para $n = 1, 2, \dots$. E seja $(\epsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de inteiros positivos menores que um tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < \infty$, consequentemente $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-\epsilon_n} < 1$.

Agora usando a Proposição 0.52 e a separabilidade de X , podemos escolher uma sequência crescente $k_1 < k_2 < \dots$ de inteiros positivos e subconjuntos finitos $F_1 \subset F_2 \subset \dots$ de elementos de X com norma igual a um tais que

$$(i) \quad X = \overline{[\cup_{n=1}^{\infty} F_n]}.$$

(ii) para toda $f \in [(y_{k_i})_{i=1}^n]^*$ com $\|f\| = 1$, existe $x \in F_n$ tal que $|y(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon_n}{3} \|y\|$, para todo $y \in [(y_{k_i})_{i=1}^n]$.

$$(iii) \quad |y_{k_{n+1}}(x)| < \frac{\epsilon_n}{3}, \quad \forall x \in F_n.$$

Mostraremos que $(y_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência w^* -básica.

Fixamos n e sejam escalares $a_1, \dots, a_n$ tais que $\|\sum_{i=1}^n a_i y_{k_i}\| = 1$, escolha $f \in [(y_{k_i})_{i=1}^n]^*$ tal que $f(\sum_{i=1}^n a_i y_{k_i}) = 1 = \|f\|$, e escolha $x \in F_n$ satisfazendo (ii) para esta f .

Segue que $|(\sum_{i=1}^n a_i y_{k_i})(x)| \geq 1 - \frac{\epsilon_n}{3}$. Então para qualquer escalar λ ,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n a_i y_{k_i} + \lambda y_{k_{n+1}} \right\| &\geq \left| \sum_{i=1}^n a_i y_{k_i}(x) + \lambda y_{k_{n+1}}(x) \right| \\ &\geq 1 - \frac{\epsilon_n}{3} - 2\frac{\epsilon_n}{3} \quad \text{se } |\lambda| \leq 2, \\ &\geq 1 \quad \text{caso contrário.} \end{aligned}$$

Deste modo $\|\sum_{i=1}^n a_i y_{k_i}\| \leq \frac{1}{1-\epsilon_n} \|\sum_{i=1}^{n+1} a_i y_{k_i}\|$ para todos os escalares $a_1, \dots, a_{n+1}$. Mas então para qualquer k e escalares $a_1, \dots, a_{n+k}$,

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i y_{k_i} \right\| \leq \left(\prod_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{1-\epsilon_j} \right) \left\| \sum_{i=1}^{n+k} a_i y_{k_i} \right\|,$$

daí segue pela Proposição 0.26 que $(y_{k_i})_{i=1}^\infty$ é uma sequência básica. Além disso sejam $(f_i)_{i=1}^\infty$ os funcionais em $[(y_{k_i})_{i=1}^\infty]^*$ biortogonais a $(y_{k_i})_{i=1}^\infty$ e definindo $P_m : [(f_i)_{i=1}^\infty] \rightarrow [(f_i)_{i=1}^\infty]$ pondo $P_m f = \sum_{i=1}^m f(y_{k_i}) f_i$, então $\|P_m\| \leq \prod_{n=m}^\infty \left(\frac{1}{1-\epsilon_n}\right)$ e consequentemente $\|P_m\| \rightarrow 1$ quando $m \rightarrow \infty$.

Agora defina $T : X \rightarrow [(y_{k_i})_{i=1}^\infty]^*$ por $(Tx)(y) = y(x)$ para todo $y \in [(y_{k_i})_{i=1}^\infty]$. Para completar a prova é suficiente mostrar que $T(X) = [(f_i)_{i=1}^\infty]$ (isto mostra que $(y_{k_i})_{i=1}^\infty$ é uma sequência w^* -básica) e que T^* é uma isometria (isto mostra que $\|P_m^*\| = \|S_m\|$ para todo m e consequentemente $\|S_m\| \rightarrow 1$ quando $m \rightarrow \infty$). Se $x \in F_n$ para algum n , então $\sum_{i=1}^\infty |y_{k_i}(x)| < \infty$, daí $Tx = \sum_{j=1}^\infty y_{k_j}(x) f_j \in [(f_i)_{i=1}^\infty]$ e deste modo $T(X) \subset [(f_i)_{i=1}^\infty]$.

Afirmção. Para toda $g \in [(f_i)_{i=1}^\infty]$ com $\|g\| = 1$ e $\epsilon > 0$, existe um $x \in X$ com $\|x\| = 1$ e $\|T(x) - g\| < 4\epsilon$.

De fato, seja $0 < \epsilon < 1$, escolha N tal que $\sum_{j=n}^\infty \epsilon_j < \epsilon$ e $\|P_n\| \leq 1 + \epsilon$ para todo $n > N$ e deixa fixo $n > N$. Por conveniência, defina $\|f\|_1 = \|f|_{[(y_{k_i})_{i=1}^\infty]}\|$ para $f \in [(f_j)_{j=1}^\infty]$. Segue que $\|f\|_1 \leq \|f\| \leq \|P_n\| \|f\|_1 \leq 2\|f\|_1$ para toda f . Agora fixa $g \in [(f_j)_{j=1}^\infty]$ com $\|g\| = 1$ e considere $f = \frac{g}{\|g\|_1}$. Então escolhendo $x \in F_n$ satisfazendo (ii) para f , temos que

$$\left\| \sum_{j=1}^\infty y_{k_j}(x) f_j - f \right\|_1 \leq \frac{\epsilon_n}{3}.$$

Consequentemente, $\|\sum_{j=1}^\infty y_{k_j}(x) f_j - f\| \leq 2(\frac{\epsilon_n}{3}) < \frac{2}{3}\epsilon$, além disto $\|f_j\| = \|P_j - P_{j-1}\| \leq 4$ para todo $j > n$, e consequentemente por (iii), $\|\sum_{j=n+1}^\infty y_{k_j}(x) f_j\| < 4 \sum_{j=n}^\infty \frac{\epsilon_j}{3} < \frac{4}{3}\epsilon$. Deste modo $\|Tx - f\| < 2\epsilon$. Mas finalmente $\|f - g\| \leq \epsilon(1 + \epsilon)$ desde que $1 = \|g\| \leq \|P_n\| \|g\|_1 \leq (1 + \epsilon)\|g\|_1$, daí $\|Tx - g\| < 4\epsilon$. Isto prova a Afirmção.

E segue da Afirmção que T^* é uma isometria e $\overline{T(X)} = [(f_i)_{i=1}^\infty]$. Logo $T(X) = [(f_i)_{i=1}^\infty]$. ■

Observação 4.1.9 O Teorema 4.1.8 revela que dado um espaço de Banach X , possivelmente não separável, dada uma sequência $(y_n)_{n=1}^\infty \subset X^*$ com $y_n \rightarrow 0$ em $\sigma(X^*, X)$ e $\limsup \|y_n\| > 0$ então $(y_n)_{n=1}^\infty$ contém uma subsequência $(y_{n_i})_{i=1}^\infty$ tal que se $(f_i)_{i=1}^\infty$ é uma sequência de funcionais biortogonais a $(y_{n_i})_{i=1}^\infty$ em $[(y_{n_i})_{i=1}^\infty]^*$ e $T : X \rightarrow [(y_{n_i})_{i=1}^\infty]^*$ é definida por $(Tx)(y) = y(x)$ para todo $y \in [(y_{n_i})_{i=1}^\infty]$ e $x \in X$, então $T(X) \supset [(f_i)_{i=1}^\infty]$.

De fato a separabilidade de X foi usada somente para pegar $(F_i)_{i=1}^{\infty}$ tal que $X = \overline{[\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i]}$, do qual segue que $T(X) \subset [(f_i)_{i=1}^{\infty}]$.

Quando X é não separável e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência como citada acima, podemos escolher $(F_i)_{i=1}^{\infty}$ e uma sequência $(k_i)_{i=1}^{\infty}$ de inteiros positivos crescentes satisfazendo (ii) e (iii) (Ver Proposição 0.52). E procedendo exatamente como na prova do Teorema 4.1.8, obtemos que a Afirmação feita acima é verdadeira.

Teorema 4.1.10 ([12]) *Sejam X e Y espaços de Banach. Suponha que $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset Y \subset X^*$, Y^* é separável, $y_n \xrightarrow{w} 0$ e $\limsup \|y_n\| > 0$. Então $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ contém uma subsequência w^* -básica contrátil.*

Prova. Podemos assumir pela Proposição 4.1.7 que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência básica contrátil. Pelo Teorema 4.1.8 (Ver Observação 4.1.9) podemos escolher uma subsequência básica $(y_{k_i})_{i=1}^{\infty}$ de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que se $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência em $[(y_{k_i})_{i=1}^{\infty}]^*$ de funcionais biortogonais a $(y_{k_i})_{i=1}^{\infty}$ e $T : X \rightarrow [(y_{k_i})_{i=1}^{\infty}]^*$ definida por $Tx(y) = y(x)$ para todo $x \in X$ e $y \in [(y_{k_i})_{i=1}^{\infty}]$, então $T(X) \supset [(f_i)_{i=1}^{\infty}]$.

Mas desde que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é contrátil segue que $(y_{k_i})_{i=1}^{\infty}$ é contrátil. Portanto $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ é base de $[(y_{k_i})_{i=1}^{\infty}]^*$ (Ver Proposição 0.35) e $[(f_i)_{i=1}^{\infty}] = [(y_{k_i})_{i=1}^{\infty}]^*$. Deste modo T é uma aplicação sobrejetora. Além disto, T é linear e contínua, pois $T(\lambda x + \bar{x})y = y(\lambda x + \bar{x}) = y(\lambda x) + y(\bar{x}) = \lambda(Tx)y + (T\bar{x})y$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall y \in [(y_{k_i})_{i=1}^{\infty}]$, $\forall x, \bar{x} \in X$ e $|Tx(y)| = |y(x)| \leq \|y\|\|x\|$, $\forall y \in [(y_{k_i})_{i=1}^{\infty}]$, isto é, $\|Tx\| \leq \|x\|$.

Daí segue da Proposição 4.1.5 (b) que $(y_{k_i})_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência w^* -básica contrátil. ■

4.2 O Teorema de M. Gonzalez e V. M. Onieva

O objetivo desta seção é apresentar a prova do Teorema 4.2.2 (Gonzalez e Onieva) que será muito útil na prova do Corolário 4.3.12. Antes apresentaremos a prova de um resultado de Johnson e Rosenthal.

Teorema 4.2.1 Johnson e Rosenthal. ([14], p.104) *Sejam X um espaço de Banach separável e Y um subespaço de X^* . Se Y é isomorfo a $l_1(\mathbb{N})$, então $c_0(\mathbb{N})$ é um quociente de X .*

Prova. Seja $(y_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência básica em X^* equivalente à base canônica $(e_n)_{n=1}^\infty$ de $l_1(\mathbb{N})$. Como X é separável, $(y_n)_{n=1}^\infty$ contém uma subsequência $(y_{n_k})_{k=1}^\infty$ w^* -convergente (Ver Proposição 0.57).

Tomemos a sequência $y_k = y_{n_{2k+1}} - y_{n_{2k}}$, $k = 1, 2, \dots$. Então temos que $(y_k)_{k=1}^\infty$ é equivalente à base canônica de $l_1(\mathbb{N})$ e w^* -convergente a zero. Deste modo, pelo Teorema 4.1.8 $(y_k)_{k=1}^\infty$ contém uma subsequência w^* -básica $(z_{k_j})_{j=1}^\infty$.

Consequentemente, segue das Proposições 4.1.5 (a) e 4.1.6 que o quociente de X por $[(z_{k_j})_{j=1}^\infty]^T$ é isomorfo a $c_0(\mathbb{N})$. ■

A caracterização dos espaços duais contendo $l_1(\mathbb{N})$ em termos de seus preduais foi obtida em 1989 por Gonzalez e Onieva [9].

Teorema 4.2.2 Gonzalez e Onieva. *Seja X um espaço de Banach. São equivalentes:*

- (a) $l_1(\mathbb{N}) \hookrightarrow X^*$
- (b) $X \rightarrow c_0(\mathbb{N})$ ou B_{X^*} não é fracamente sequencialmente compacta em $\sigma(X^*, X)$.

A prova deste Teorema será feita através da Proposição 4.2.3 e do Corolário 4.2.4.

Proposição 4.2.3 *Seja X um espaço de Banach. São equivalentes:*

- (a) $X \not\rightarrow c_0(\mathbb{N})$
- (b) Toda sequência w^* -convergente em X^* contém uma subsequência w -Cauchy.

Prova. Suponha que $X \not\rightarrow c_0(\mathbb{N})$. Se uma sequência $(y_n)_{n=1}^\infty$ de X^* w^* -convergente não contém uma subsequência w -Cauchy, então $(y_n)_{n=1}^\infty$ possui uma subsequência equivalente à base canônica $(e_n)_{n=1}^\infty$ de $l_1(\mathbb{N})$ (Ver Teorema 0.53). Tomemos esta subsequência como sendo $(y_n)_{n=1}^\infty$.

A sequência $g_n := y_{2n} - y_{2n+1}$, $n = 1, 2, \dots$ é também equivalente à base canônica $(e_n)_{n=1}^\infty$ de $l_1(\mathbb{N})$ e w^* -convergente a zero.

Considere a aplicação $T : X \rightarrow c_0(\mathbb{N})$ definida por $Tx := g_n(x)$, $\forall x \in X$.

- (i) T está bem definida

Se $(g_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência em X^* w^* -convergente a zero, então $g_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ para todo $x \in X$. Deste modo, $T(x) \in c_0(\mathbb{N})$ para todo $x \in X$.

- (ii) T é linear e contínua

Sejam $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbf{K}$,

$$T(\lambda x + y) = g_n(\lambda x + y) = g_n(\lambda x) + g_n(y) = \lambda g_n(x) + g_n(y) = \lambda T x + T y.$$

Além disto,

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} |Tx| = \sup_{x \in B_X} |g_n(x)| < \epsilon,$$

pois existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, $|g_n(x)| < \epsilon$, $\epsilon > 0$. Portanto T é contínua.

(iii) T é sobrejetora

Considere a aplicação transposta de T , $T^* : l_1(\mathbf{N}) \rightarrow X^*$ dada por $(T^*y^*)(x) = y^*(T(x))$, $\forall y^* \in l_1(\mathbf{N})$, $\forall x \in X$.

Temos que $T^*e_n = g_n$, $n \in \mathbf{N}$. Deste modo, como T^* é injetora então T é sobrejetora.

Seguem de (i), (ii) e (iii) que $X \twoheadrightarrow c_0(\mathbf{N})$, uma contradição.

Reciprocamente, se $X \twoheadrightarrow c_0(\mathbf{N})$ então $f_n := T^*e_n$, para $n = 1, 2, \dots$, é uma sequência w^* -convergente em X^* equivalente à base canônica $(e_n)_{n=1}^\infty$ de $l_1(\mathbf{N})$. E Portanto $(f_n)_{n=1}^\infty$ não admite uma subsequência w -Cauchy (Ver Teorema 0.53). ■

Corolário 4.2.4 *Seja X um espaço de Banach e suponha que B_{X^*} é fracamente sequencialmente compacta em $\sigma(X^*, X)$. São equivalentes:*

(a) $X \not\hookrightarrow c_0(\mathbf{N})$

(b) $l_1(\mathbf{N}) \not\hookrightarrow X^*$

Prova. (b) $\Rightarrow$ (a). Suponha que $l_1(\mathbf{N}) \not\hookrightarrow X^*$. Pela Proposição 0.21 segue que $X \not\hookrightarrow c_0(\mathbf{N})$.

(a) $\Rightarrow$ (b) Suponha que $X \not\hookrightarrow c_0(\mathbf{N})$. Pela Proposição 4.2.3 segue que toda sequência w^* -convergente em X^* contém uma subsequência w -Cauchy. Logo $l_1(\mathbf{N}) \not\hookrightarrow X^*$. ■

Prova do Teorema 4.2.2 (Gonzalez e Onieva).

(b) $\Rightarrow$ (a) Suponha por contradição que $l_1(\mathbf{N}) \not\hookrightarrow X^*$. Pela Proposição 0.21 segue que $X \not\hookrightarrow c_0(\mathbf{N})$. E segue do Teorema 0.53 que B_{X^*} é fracamente sequencialmente compacta, pois qualquer sequência w -Cauchy em B_{X^*} é w^* -convergente.

(a) $\Rightarrow$ (b) Suponha por contradição que $X \not\hookrightarrow c_0(\mathbf{N})$ e que a bola unitária B_{X^*} é fracamente sequencialmente compacta. Então, segue do Corolário 4.2.4 que $l_1(\mathbf{N}) \not\hookrightarrow X^*$. ■

Proposição 4.2.5 *Seja X um espaço de Banach separável. Então a bola unitária B_{X^*} é fracamente sequencialmente compacta em $\sigma(X^*, X)$.*

Prova. Seja X separável. Então a bola unitária B_{X^*} é metrizável em $\sigma(X^*, X)$ (Ver Proposição 0.56) e toda sequência em B_{X^*} admite uma subsequência w^* -convergente (Ver Proposição 0.57). Deste modo, B_{X^*} é fracamente sequencialmente compacta em $\sigma(X^*, X)$. ■

Observação 4.2.6 *O Teorema 4.2.2 (Gonzalez e Onieva) estende o Teorema 4.2.1 (Johnson e Rosenthal), veja a Proposição 4.2.5 acima.*

4.3 Os principais resultados

A seguir enunciamos os resultados mais importantes deste trabalho.

Lema 4.3.1 ([22]) *Sejam X um espaço de Banach e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência básica contráctil em X^* com $0 < \inf \|y_n\| \leq \sup \|y_n\| < \infty$. Fazendo $Y = [(y_n)_{n=1}^{\infty}]$, seja $(y_n^*)_{n=1}^{\infty}$ a sequência básica de funcionais biortogonais para $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ em Y^* . Então existe uma subsequência $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que a aplicação:*

$$\begin{aligned} T : X &\rightarrow [(y_{n_k}^*)_{k=1}^{\infty}] = [(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}]^* \\ x &\mapsto (Tx)(y) = y(x), \quad \forall y \in [(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}], \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

é linear, contínua e sobrejetora. Consequentemente, $[(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}]^$ é um quociente de X e X^* contém um subespaço isomorfo a $[(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}]^{**}$.*

Prova. Como $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma base contráctil de Y , então a sequência $(y_n^*)_{n=1}^{\infty}$ é uma base de Y^* (Ver Proposição 0.35). Deste modo, Y^* é um espaço separável.

Mostraremos que

(i) $\limsup \|y_n\| > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Segue do fato de $\inf \|y_n\| > 0$.

(ii) $y_n \xrightarrow{w} 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Tomemos $y \in Y^*$. Então existe uma sequência de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n^*$ e $y(y_n) = a_n, \quad \forall n$. Basta mostrar que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Temos que $y_n^*(\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i) = a_n$ e $y_n^*(y_n) = 1$. Logo $y_n^*(\frac{y_n}{\|y_n\|}) = \frac{1}{\|y_n\|}$ e $\|y_n^*\| \geq \frac{1}{\|y_n\|} \geq \frac{1}{K}$, $K > 0$, pois $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é limitada.

Deste modo,

$$|a_n| \frac{1}{K} \leq |a_n| \|y_n^*\| = \|a_n y_n^*\|, \forall n$$

e dado que $\|a_n y_n^*\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, concluímos que $|a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Então $y(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \forall y \in Y^*$. Consequentemente $y_n \xrightarrow{w} 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Pela prova do Teorema 4.1.10 podemos escolher uma subsequência $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que a aplicação

$$\begin{aligned} T : X &\rightarrow [(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}]^* \\ x &\mapsto (Tx)(y) = y(x), \forall y \in [(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}], \forall x \in X \end{aligned}$$

é linear, contínua e sobrejetora. Consequentemente $[(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}]^*$ é um quociente de X (Ver Definição 0.19) e X^* contém um subespaço isomorfo a $[(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}]^{**}$ (Ver Proposição 0.21). ■

Observação 4.3.2 *Se a base $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ no Lema 4.3.1 acima é também subsimétrica, então este resultado torna-se mais simples (Ver Teorema 4.3.3).*

Teorema 4.3.3 ([22]) *Sejam X e Y espaços de Banach e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base contráctil e subsimétrica em Y . Então as três condições seguintes são equivalentes:*

- (a) $Y \hookrightarrow X^*$
- (b) $X \twoheadrightarrow Y^*$
- (c) $Y^{**} \hookrightarrow X^*$

Prova. (a) $\Rightarrow$ (b) Seja $Y = [(y_n)_{n=1}^{\infty}]$ e suponha que $Y \hookrightarrow X^*$. Como $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma base subsimétrica, então $0 < \inf \|y_n\| \leq \sup \|y_n\| < \infty$ (Ver 0.38). Pela prova do Lema 4.3.1 existe uma subsequência $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que a aplicação

$$\begin{aligned} T : X &\rightarrow [(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}]^* \\ x &\mapsto (Tx)(y) = y(x), \forall y \in [(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}], \forall x \in X \end{aligned}$$

é linear, contínua e sobrejetora.

Como $[(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}]$ é isomorfo a Y (Ver Proposição 0.39), então $T(X) \simeq Y^*$. Consequentemente $X \twoheadrightarrow Y^*$ (Ver Definição 0.19).

(b) $\Rightarrow$ (c) Suponha que $X \twoheadrightarrow Y^*$. Segue da prova da Proposição 0.21 que $Y^{**} \hookrightarrow X^*$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Suponha que $Y^{**} \hookrightarrow X^*$. Considere a aplicação canônica $J : Y \rightarrow Y^{**}$ tal que $J(y) = \hat{y}$, onde $\hat{y}(f) = f(y)$, $\forall f \in Y^*$. Como J é linear, contínua e injetora (Ver Proposição 0.9), então $Y \hookrightarrow Y^{**}$. Consequentemente $Y \hookrightarrow X^*$. ■

Observação 4.3.4 O Teorema 4.3.3 generaliza o Teorema de Bessaga e Pelczyński, veja o Corolário 4.3.5 abaixo.

Corolário 4.3.5 Seja X um espaço de Banach. São equivalentes:

- (a) $c_0(\mathbb{N}) \hookrightarrow X^*$
- (b) $X \twoheadrightarrow l_1(\mathbb{N})$
- (c) $l_1(\mathbb{N}) \xhookrightarrow{c} X$
- (d) $l_\infty(\mathbb{N}) \hookrightarrow X^*$

Prova. (a) $\Rightarrow$ (b) Basta aplicar o Teorema 4.3.3 para $Y = c_0(\mathbb{N})$ e sua base canônica subsimétrica e contrátil $(e_n)_{n=1}^\infty$ consistindo dos vetores unitários.

(b) $\Rightarrow$ (c) Segue imediatamente do Teorema 1.12.

(c) $\Rightarrow$ (d) e (d) $\Rightarrow$ (a) Seguem imediatamente do Teorema 1.13. ■

Observação 4.3.6 Não podemos alternar os espaços $c_0(\mathbb{N})$ e $l_1(\mathbb{N})$ no Teorema 1.13 (Bessaga e Pelczyński). Por exemplo, não vale a implicação: $l_1(\mathbb{N}) \hookrightarrow X^* \Rightarrow c_0(\mathbb{N}) \xhookrightarrow{c} X$. De fato, se $X = l_1(\mathbb{N})$ então X^* contém $l_1(\mathbb{N})$ (Ver Teorema 0.47), mas X não contém $c_0(\mathbb{N})$ como um subespaço, pois X é Schur e $c_0(\mathbb{N})$ não é Schur. Deste modo, pelo Exemplo 0.45, $c_0(\mathbb{N})$ não está contido em X .

Neste contexto o Teorema 4.2.1 (Johnson e Rosenthal) cita uma resposta parcial para a questão da alternância dos espaços $c_0(\mathbb{N})$ e $l_1(\mathbb{N})$ no Teorema de Bessaga e Pelczyński : O que devemos assumir em X para que a condição “ X^* contém uma cópia de $l_1(\mathbb{N})$ ” implica “ $c_0(\mathbb{N})$ é um quociente de X ?”. É suficiente que X seja separável.

No que segue apresentaremos o Teorema 4.3.7 que generaliza o Teorema 4.2.1 (Johnson e Rosenthal) para o caso em que Y não é isomorfo a $l_1(\mathbb{N})$.

Teorema 4.3.7 ([22]) *Sejam X e Y espaços de Banach tais que X possui a propriedade CSPP e Y tem uma base subsimétrica $(y_n)_{n=1}^\infty$. Se Y não é isomorfo a $l_1(\mathbb{N})$, então as três condições seguintes são equivalentes:*

- (a) $Y \hookrightarrow X^*$
- (b) $X \twoheadrightarrow [(y_n^*)_{n=1}^\infty]$
- (c) $[(y_n^*)_{n=1}^\infty]^* \hookrightarrow X^*$

A prova deste Teorema será feita através das Proposições 4.3.9 e 4.3.10.

Lema 4.3.8 *Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência básica incondicional normalizada de X . E suponha que $(x_n)_{n=1}^\infty$ não admite uma subsequência equivalente à base canônica de $l_1(\mathbb{N})$. Então $(x_n)_{n=1}^\infty$ converge para zero em $\sigma(X, X^*)$.*

Prova. Suponha, por contradição, que existe $x^* \in X^*$ tal que $x^*(x_n) \not\rightarrow 0$. Então existem $\epsilon > 0$ e $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ uma subsequência de $(x_n)_{n=1}^\infty$ tal que $|x^*(x_{n_k})| \geq \epsilon$. Passando para uma subsequência de $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ e eventualmente trocando x^* por $-x^*$ podemos supor que $x^*(x_{n_k}) \geq 0$.

Afirmção. $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ é equivalente à base canônica $(e_k)_{k=1}^\infty$ de $l_1(\mathbb{N})$.

De fato, temos que mostrar

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_{n_k} \text{ convergente} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ convergente.}$$

Por um lado, como $(x_n)_{n=1}^\infty$ é normalizada, então $|x_{n_k}| = 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Deste modo,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_{n_k}| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| |x_{n_k}| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < +\infty,$$

pois $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ é convergente. Logo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_{n_k}$ é convergente.

Por outro lado, observemos inicialmente que se $b_k \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, então

$$x^*\left(\sum_{k=1}^n b_k x_{n_k}\right) = \sum_{k=1}^n b_k x^*(x_{n_k}) \geq \epsilon \sum_{k=1}^n b_k,$$

pois $x^*(x_{n_k}) \geq \epsilon$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Em particular,

$$\begin{aligned}
 \epsilon \sum_{k=1}^n |a_k| &\leq x^* \left(\sum_{k=1}^n |a_k| x_{n_k} \right) \leq \|x^*\| \sum_{k=1}^n |a_k| x_{n_k} \\
 &\leq \|x^*\| \sum_{k=1}^n \theta_k a_k x_{n_k} \\
 &\leq \|x^*\| 2K \sup_{k \in \mathbb{N}} |\theta_k| \sum_{k=1}^n a_k x_{n_k} \\
 &= \|x^*\| 2K \left| \sum_{k=1}^n a_k x_{n_k} \right|,
 \end{aligned}$$

onde K é a constante incondicional de $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ e $(\theta_k)_{k=1}^\infty \in \{-1, 1\}^\mathbb{N}$ é definida por $\theta_k = 1$ se $a_k > 0$ e $\theta_k = -1$ se $a_k < 0$ (Ver Proposição 0.43).

Deste modo,

$$\epsilon \sum_{k=1}^n |a_k| \leq \|x^*\| 2K \left| \sum_{k=1}^n a_k x_{n_k} \right| < +\infty$$

quando $n \rightarrow \infty$, pois $\sum_{k=1}^\infty a_k x_{n_k}$ é convergente. Logo $\sum_{k=1}^\infty |a_k|$ é convergente. ■

Proposição 4.3.9 ([22]) *Sejam X um espaço de Banach e Y um subespaço fechado de X^* com uma base incondicional normalizada $(y_n)_{n=1}^\infty$. E sejam os funcionais biortogonais $(y_n^*)_{n=1}^\infty$ em Y^* associados a $(y_n)_{n=1}^\infty$. Se as duas condições seguintes são satisfeitas:*

- (i) $(y_n)_{n=1}^\infty$ não contém subsequência equivalente à base canônica de $l_1(\mathbb{N})$.
- (ii) X possui a propriedade CSPP.

Então $(y_n)_{n=1}^\infty$ contém uma subsequência $(y_{n_k})_{k=1}^\infty$ tal que a aplicação:

$$\begin{aligned}
 T : X &\rightarrow ((y_{n_k})_{k=1}^\infty)^* \\
 x &\mapsto (Tx)(y) = y(x), \quad \forall y \in [(y_{n_k})_{k=1}^\infty], \quad \forall x \in X
 \end{aligned}$$

é linear, contínua e $T(X) = [(y_{n_k}^*)_{k=1}^\infty]$.

Prova. Como a base $(y_n)_{n=1}^\infty$ é incondicional normalizada e satisfaz a condição (i), então aplicando o Lema 4.3.8 para X^* obtemos que $y_n \rightarrow 0$ em $\sigma(X^*, X^{**})$ e consequentemente $(y_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência normal em X^* .

Por (ii) e pelo Lema 3.2.1 podemos assumir que $(y_n)_{n=1}^\infty$ é fortemente normal, isto é, para o espaço vetorial $X_0 := \{x \in X : \sum_{n=1}^\infty |y_n(x)| < \infty\}$ temos que

$$\overline{X_0} = X. \quad (1)$$

Além disso, segue da prova do Teorema 4.1.10 que $(y_n)_{n=1}^\infty$ contém uma subsequência $(y_{n_k})_{k=1}^\infty$ tal que a aplicação $T : X \rightarrow [(y_{n_k})_{k=1}^\infty]^*$ definida por $(Tx)(y) = y(x)$, onde $x \in X$ e $y \in [(y_{n_k})_{k=1}^\infty]$, é linear, contínua e

$$T(X) \supset [(y_{n_k}^*)_{k=1}^\infty]. \quad (2)$$

Para o subespaço X_1 de X definido por $X_1 := \{x \in X : \sum_{k=1}^\infty |y_{n_k}(x)| < \infty\}$ temos que $X_0 \subset X_1$.

Observe que se $x \in X_1$, então $Tx = \sum_{k=1}^\infty y_{n_k}(x)y_{n_k}^*(x) \in [(y_{n_k}^*)_{k=1}^\infty]$. Deste modo $T(X_1) \subset [(y_{n_k}^*)_{k=1}^\infty]$. Agora de (1) e (2) nós obtemos que $T(X) = [(y_{n_k}^*)_{k=1}^\infty]$. ■

Proposição 4.3.10 *Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma base de X . Então X é isomorfo a um subespaço fechado de $[(x_n^*)_{n=1}^\infty]^*$.*

Prova. Seja $Z = [(x_n^*)_{n=1}^\infty]$ e considere a aplicação de X em Z^* definida por $J(x)(z) = z(x)$.

Mostraremos que J é um isomorfismo de X sobre a imagem.

Obviamente J é linear. Agora, seja $Jx = 0$, isto é, $z(x) = 0, \forall z$. Como $z \in [(x_n^*)_{n=1}^\infty]$ então $z = \sum_{n=1}^\infty a_n x_n^*$. Deste modo, $\sum_{n=1}^\infty a_n x_n^*(x) = 0$ e disto segue que $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, pois $x_n^* \neq 0$. Portanto $x = 0$ e J é injetora. Além disto,

$$\|J(x)(z)\| = \|z(x)\| \leq \|z\|\|x\|,$$

isto é, J é contínua e $\|J(x)\| \leq \|x\|$. (1)

Resta mostrar que J^{-1} é contínua.

Seja $x \in [(x_i)_{i=1}^n]$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Por Hahn-Banach (Ver Teorema 0.6) existe $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| = 1$ e $x^*(x) = \|x\|$.

E consideremos as aplicações transpostas das projeções $P_n : X \rightarrow X$ definidas por $P_n(\sum_{i=1}^\infty a_i x_i) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$.

Afirmamos que:

- (i) $P_n^* x^*(x) = x^*(x)$.
- (ii) $P_n^* x^* \in Z$.
- (iii) $\|P_n^* x^*\| \leq K$, onde K é a constante básica de $(x_n^*)_{n=1}^\infty$.

De fato:

$$(i) P_n^* x^*(x) = P_n^* x^*(\sum_{i=1}^n a_i x_i) = x^*(P_n(\sum_{i=1}^n a_i x_i)) = x^*(x).$$

$$(ii) \text{ Como } x = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \text{ então } x_i^*(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^*(x_i) = a_i, \forall i \in \mathbb{N}. \text{ Deste modo,}$$

$$P_n^* x^*(x) = x^*(\sum_{i=1}^n a_i x_i) = \sum_{i=1}^n a_i x^*(x_i) = \sum_{i=1}^n x_i^*(x) x^*(x_i) = (\sum_{i=1}^n x^*(x_i) x_i^*)(x),$$

isto é,

$$P_n^* x^* = \sum_{j=1}^n x^*(x_j) x_j^* \in Z.$$

$$(iii) \text{ Segue da Observação 0.23 que } \|P_n^* x^*\| \leq K.$$

E também temos,

$$\begin{aligned} \|J(x)\| &= \sup_{\|z\| \leq 1} \|J(x)(z)\| \geq \frac{|J(x)(P_n^* x^*)|}{K} \\ &= \frac{|P_n^*(x^*)(x)|}{K} \\ &= \frac{|x^*(x)|}{K} = \frac{\|x\|}{K}, \end{aligned} \quad (2)$$

pois $\frac{P_n^* x^*}{K} \in Z$ e $\frac{\|P_n^* x^*\|}{K} \leq 1$.

De (1) e (2) segue que

$$\frac{\|x\|}{K} \leq \|J(x)\| \leq \|x\|, \quad \forall x \in [(x_i)_{i=1}^n], n \in \mathbb{N}.$$

Tomemos $x \in X$. Como o subespaço fechado gerado por $(x_n)_{n=1}^\infty$ é o espaço X , então existe uma sequência $(d_n)_{n=1}^\infty$ em $[(x_n)_{n=1}^\infty]$ tal que $d_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$.

Deste modo,

$$\frac{\|d_n\|}{K} \leq \|J(d_n)\| \leq \|d_n\|, n \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente,

$$\frac{\|x\|}{K} \leq \|J(x)\| \leq \|x\|,$$

pois $\|d_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|x\|$ e $\|J(d_n)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|J(x)\|$. Disto segue que $\|J^{-1}(x)\| \leq \|x\|K$, isto é, J^{-1} é contínua. ■

Prova do Teorema 4.3.7

(a) $\Rightarrow$ (b) Como $(y_n)_{n=1}^\infty$ é subsimétrica, pela Proposição 0.38 temos que $0 < \inf \|y_n\| < \sup \|y_n\| < \infty$. Deste modo podemos assumir que $\|y_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e que Y é um subespaço fechado de X^* .

Temos que $(y_n)_{n=1}^\infty$ não contém subsequência equivalente à base canônica $(e_n)_{n=1}^\infty$ de $l_1(\mathbb{N})$, pois se existisse uma subsequência $(y_{n_k})_{k=1}^\infty$ de $(y_n)_{n=1}^\infty$ tal que $(y_{n_k})_{k=1}^\infty$ é equivalente à $(e_n)_{n=1}^\infty$, então pela Proposição 0.39, $Y = [(y_n)_{n=1}^\infty] \simeq [(y_{n_k})_{k=1}^\infty]$. E portanto Y é isomorfo a $l_1(\mathbb{N})$, contradição.

Agora a implicação (a) $\Rightarrow$ (b) segue da Proposição 4.3.9.

(b) $\Rightarrow$ (c) Segue imediatamente da Proposição 0.21.

(c) $\Rightarrow$ (a) Basta aplicar a Proposição 4.3.10 para $Y = [(y_n)_{n=1}^\infty]$. ■

Observação 4.3.11

(i) Se a base $(y_n)_{n=1}^\infty$ de um espaço de Banach é completamente limitada, então os espaços Y e $[(y_n^*)_{n=1}^\infty]^*$ são isomorfos (Ver Proposição 0.36 (b)). E neste caso as condições (a) e (b) no Teorema 4.3.7 tornam-se idênticas.

(ii) Desde que a inclusão contínua $[(y_n^*)_{n=1}^\infty] \subseteq [(y_n)_{n=1}^\infty]^* = Y^*$ é própria, em geral as condições (b) no Teorema 4.3.3 e no Teorema 4.3.7 não são as mesmas. Apesar que é possível que os espaços $[(y_n^*)_{n=1}^\infty]^*$ e Y^{**} sejam isomorfos. Este é o caso, por exemplo para uma base $(y_n)_{n=1}^\infty$ contrátil, que é uma condição mais forte que a hipótese no Teorema 4.3.7 de Y não ser isomorfo a $l_1(\mathbb{N})$.

(iii) O Teorema 4.3.3 e o Teorema 4.3.7 estendem parcialmente um resultado de Rosenthal (Ver Proposição 0.58) que afirma que todo subespaço reflexivo Y de X^* é um fechado em $\sigma(X^*, X)$. E isto implica que Y^* é um quociente de X (Ver Corolário 0.59).

Deste modo, os Teoremas 4.3.3 e 4.3.7 produzem uma nova informação para o caso Y não reflexivo.

No que segue, juntando o Teorema 4.3.7 com o Teorema de Gonzalez e Onieva (Ver Teorema 4.2.2), para o caso Y isomorfo a $l_1(\mathbb{N})$, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 4.3.12 ([22]) *Sejam X e Y espaços de Banach tais que X é um subespaço fechado de um espaço de Banach WCG e Y tem uma base $(y_n)_{n=1}^\infty$ subsimétrica. Então as seguintes condições são equivalentes:*

- (a) $Y \hookrightarrow X^*$
- (b) $X \twoheadrightarrow [(y_n^*)_{n=1}^\infty]$
- (c) $[(y_n^*)_{n=1}^\infty]^* \hookrightarrow X^*$

Prova. Seja X um subespaço fechado de um espaço de Banach WCG . Então X possui a propriedade CSPP (Ver Corolário 2.3.4). E Também a bola unitária B_{X^*} de X^* é fracamente sequencialmente compacta em $\sigma(X^*, X)$ (Ver Corolário 2.1.10).

(i) Se Y não é isomorfo a $l_1(\mathbf{N})$, então podemos aplicar o Teorema 4.3.7.

(ii) Se Y é isomorfo a $l_1(\mathbf{N})$, então segue do Teorema de Gonzalez e Onieva (Ver Teorema 4.2.2) que $c_0(\mathbf{N})$ é um quociente de X .

Afirmção. $c_0(\mathbf{N})$ é isomorfo a $[(y_n^*)_{n=1}^\infty]$.

De fato, sejam $T : l_1(\mathbf{N}) \rightarrow Y$ um isomorfismo de $l_1(\mathbf{N})$ sobre Y tal que $y_n = T(e_n), \forall n \in \mathbf{N}$. Logo $T^*(y_n^*) = e_n \in l_\infty(\mathbf{N})$. Pois se $(b_n)_{n=1}^\infty$ está em $l_1(\mathbf{N})$, então $T^*(y_n^*)((b_n)_{n=1}^\infty) = y_n^*T((b_n)_{n=1}^\infty) = y_n^*T(\sum_{n=1}^\infty b_n e_n) = y_n^*(\sum_{n=1}^\infty b_n y_n) = b_n$.

Consequentemente $[(T^*(y_n^*))_{n=1}^\infty] = [(e_n)_{n=1}^\infty] = c_0(\mathbf{N})$. Em particular $[(y_n^*)_{n=1}^\infty]$ é isomorfo a $c_0(\mathbf{N})$.

Agora a implicação $(a) \Rightarrow (b)$ segue da Afirmção acima.

$(b) \Rightarrow (c)$ Segue imediatamente da Proposição 0.21.

$(c) \Rightarrow (a)$ Basta aplicar a Proposição 4.3.10 para $Y = [(y_n)_{n=1}^\infty]$. ■

Capítulo 5

Algumas aplicações nos espaços de sequências de Orlicz

Nesta última parte do trabalho nós mostraremos como o Teorema 4.3.3 e o Corolário 4.3.12 podem ser aplicados em alguns subespaços Y de um espaço de sequências de Orlicz. Para isso precisaremos recordar algumas definições e resultados sobre os espaços de sequências de Orlicz (Ver [14]).

Definição 5.1 *Uma função $M : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ é chamada de convexa se o seu domínio $D(M)$ é um conjunto convexo e para todo $u, v \in D(M)$, $M(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda M(u) + (1 - \lambda)M(v)$ onde $0 \leq \lambda \leq 1$.*

Definição 5.2 *Uma função M de Orlicz é uma função contínua não decrescente e convexa, definida para $t \geq 0$ tal que $M(0) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = \infty$.*

Definição 5.3 *Seja M uma função de Orlicz. Denotaremos por l_M o espaço de Banach de todas as sequências de escalares $x = (\alpha_n)_{n=1}^\infty$ tal que $\sum_{n=1}^\infty M(\frac{|\alpha_n|}{t}) < \infty$ para algum $t > 0$, com a norma $\|x\|_M = \inf\{t > 0 : \sum_{n=1}^\infty M(\frac{|\alpha_n|}{t}) < 1\}$. O espaço l_M com a norma $\|x\|_M$ é chamado de espaço de sequências de Orlicz.*

Definição 5.4 *Seja M uma função de Orlicz. Dizemos que M satisfaz a condição Δ_2 em 0 (ou $M \in \Delta_2$) se $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{M(2t)}{M(t)} < \infty$.*

Definição 5.5 *Seja M uma função de Orlicz. A função M^* definida por $M^*(s) = \sup\{ts - M(t) : 0 < t < \infty\}$, para qualquer $s \geq 0$, é chamada de complementar de M .*

Proposição 5.6 ([14], p.147). *Seja M uma função de Orlicz. Então M^* é uma função de Orlicz e $M^{**} = M$.*

Observação 5.7 ([14], p.147) *Seja M uma função de Orlicz. A aplicação $\|\cdot\| : l_M \rightarrow \mathbf{R}$ definida para cada $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in l_M$ por:*

$$\|x\| = \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n b_n : \sum_{n=1}^{\infty} M^*(|b_n|) \leq 1\right\}$$

é uma norma em l_M .

Definição 5.8 *Seja M uma função de Orlicz. Definimos h_M como sendo o conjunto das seqüências $x = (\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} M(\frac{|\alpha_n|}{t}) < \infty$ para todo $t > 0$.*

Proposição 5.9 ([14], p.138) *Seja M uma função de Orlicz. Então h_M é um subespaço fechado de l_M e os vetores unitários $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ formam uma base simétrica de h_M .*

Prova. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência em h_M convergindo para x_0 na norma $\|\cdot\|_M$.

Seja $x_0 = (\alpha_i^0)_{i=1}^{\infty}$. É necessário mostrar que $\sum_{i=1}^{\infty} M(\frac{\alpha_i^0}{t}) < \infty$ para todo $t > 0$. Como a seqüência $(\frac{1}{t}x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para $\frac{1}{t}x_0$ para $t > 0$ e $(\frac{1}{t}x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência de h_M , é suficiente mostrar que $\sum_{i=1}^{\infty} M(\alpha_i^0) < \infty$.

Para cada n , seja $x_n = (\alpha_i^n)_{i=1}^{\infty}$. Escolhe N tal que para $n \geq N$, $\|x_n - x_0\|_M \leq \frac{1}{2}$.

Segue que

$$\sum_{i=1}^{\infty} M(2|\alpha_i^n - \alpha_i^0|) \leq \sum_{i=1}^{\infty} M\left(\frac{|\alpha_i^n - \alpha_i^0|}{\|x_n - x_0\|_M}\right) = 1,$$

para todo $n \geq N$.

Portanto, usando a convexidade de M ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} M(\alpha_i^0) &= \sum_{i=1}^{\infty} M\left(\frac{2\alpha_i^n - 2(\alpha_i^n - \alpha_i^0)}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} M(2\alpha_i^n) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} M(2|\alpha_i^n - \alpha_i^0|). \end{aligned}$$

Consequentemente h_M é fechado em l_M .

Seja $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ a seqüência dos vetores unitários. Esta seqüência é uma base para h_M se para cada seqüência $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ em h_M , $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ converge na norma $\|\cdot\|_M$ para $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$.

Tomemos uma sequência $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ em h_M e $0 < \epsilon < 1$. Como $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ está em h_M , seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N}^\infty M(\frac{\alpha_n}{\epsilon}) \leq 1$.

Agora para $n \geq N$,

$$\begin{aligned} \|(\alpha_n)_{n=1}^\infty - \sum_{n=1}^\infty \alpha_n e_n\|_M &= \inf\{t > 0 : \sum_{i=n+1}^\infty M(\frac{\alpha_i}{t}) \leq 1\} \\ &\leq \inf\{t > 0 : \sum_{i=N}^\infty M(\frac{\alpha_i}{t}) \leq 1\} \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Consequentemente $(e_n)_{n=1}^\infty$ forma uma base para h_M .

O fato de $(e_n)_{n=1}^\infty$ ser uma base simétrica na norma $\|\cdot\|_M$ segue da observação que para qualquer sequência $(\epsilon_n)_{n=1}^\infty$, $|\epsilon_n| = 1$ e qualquer que seja a permutação de inteiros positivos, p ,

$$\|(\alpha_n)_{n=1}^\infty\|_M = \left\| \sum_{n=1}^\infty \epsilon_n \alpha_{p(n)} e_n \right\|_M.$$

A última igualdade segue do fato que

$$\sum_{n=1}^\infty M(\frac{\epsilon_n \alpha_{p(n)}}{r}) = \sum_{n=1}^\infty M(\frac{\alpha_{p(n)}}{r}) = \sum_{n=1}^\infty M(\frac{\alpha_n}{r}).$$

■

Proposição 5.10 ([14], p.138) *Seja M uma função de Orlicz. São equivalentes*

- (a) $M \in \Delta_2$.
- (b) $l_M = h_M$.
- (c) Os vetores unitários $(e_n)_{n=1}^\infty$ formam uma base completamente limitada de l_M .
- (d) l_M é separável.
- (e) l_M não contém subespaço isomorfo a $l_\infty(\mathbb{N})$.

Proposição 5.11 *Seja M uma função de Orlicz. Então o espaço dual h_M^* é isomorfo a l_{M^*} , e se $M^* \in \Delta_2$ então h_M^{**} é isomorfo a l_M .*

Prova. Considere a aplicação:

$$\begin{aligned} T : h_M^* &\rightarrow l_{M^*} \\ x^* &\mapsto T(x^*) = (x^*(e_1), x^*(e_2), \dots), \end{aligned}$$

onde os vetores $(e_n)_{n=1}^\infty$ são os vetores unitários de h_M .

Temos

(i) T é linear

$$\begin{aligned}
 T(\lambda x^* + y^*) &= ((\lambda x^* + y^*)(e_1), (\lambda x^* + y^*)(e_2), \dots) \\
 &= (\lambda x^*(e_1) + y^*(e_1), \lambda x^*(e_2) + y^*(e_2), \dots) \\
 &= (\lambda x^*(e_1), \lambda x^*(e_2), \dots) + (y^*(e_1), y^*(e_2), \dots) \\
 &= \lambda(x^*(e_1), x^*(e_2), \dots) + (y^*(e_1), y^*(e_2), \dots) \\
 &= \lambda T(x^*) + T(y^*), \quad \forall x^*, y^* \in h_M^*, \lambda \in \mathbb{K}.
 \end{aligned}$$

(ii) T é contínua

$$\begin{aligned}
 \|T(x^*)\| &= \|(x^*(e_1), x^*(e_2), \dots)\| \\
 &= \sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^*(e_n) : \sum_{n=1}^{\infty} M(|a_n|) \leq 1\right\} \\
 &= \sup\left\{x^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right) : \|(a_1, a_2, \dots)\|_M \leq 1\right\} \\
 &= \|x^*\|.
 \end{aligned}$$

(iii) T é isometria

Segue do item (ii).

Portanto a aplicação T é um isomorfismo de h_M^* sobre l_{M^*} (Ver Definição 0.8).

Além disso, como M^* é uma função de Orlicz (Ver Proposição 5.6), então segue da Proposição 5.10 que $h_{M^*} = l_{M^*}$.

Consequentemente,

$$h_M^{**} \simeq (l_{M^*})^* = (h_{M^*})^* = l_{M^{**}} = l_M.$$

■

Proposição 5.12 *Seja M uma função de Orlicz. Os vetores unitários $(e_n)_{n=1}^\infty$ formam uma base contráctil de h_M se, e somente se, $M^* \in \Delta_2$.*

Prova. Suponhamos que $(e_n)_{n=1}^\infty$ é uma base contráctil de h_M . Então $(e_n^*)_{n=1}^\infty$ é uma base completamente limitada de h_M^* (Ver Proposição 0.36(a)). Logo $(e_n^*)_{n=1}^\infty$ é uma

base completamente limitada de l_{M^*} (Ver Proposição 5.11). Consequentemente, pela Proposição 5.10 $M^* \in \Delta_2$.

Agora suponha que $M^* \in \Delta_2$. Então $(e_n^*)_{n=1}^\infty$ é uma base completamente limitada de l_{M^*} (Ver Proposição 5.10). Logo $(e_n^*)_{n=1}^\infty$ é uma base completamente limitada de h_M^* .

Consequentemente $(e_n)_{n=1}^\infty$ é uma base contráctil de h_M (Ver Proposição 0.35). ■

Proposição 5.13 *Seja M uma função de Orlicz. Então h_{M^*} é isomorfo a $[(e_n^*)_{n=1}^\infty]$, e consequentemente $[(e_n^*)_{n=1}^\infty]^* = l_M$.*

Prova. Considere a aplicação:

$$\begin{aligned} T : h_M^* &\rightarrow l_{M^*} \\ x^* &\mapsto T(x^*) = (x^*(e_1), x^*(e_2), \dots), \end{aligned}$$

onde os vetores $(e_n)_{n=1}^\infty$ são os vetores unitários de h_M .

Temos,

$$\begin{aligned} T(e_1^*) &= (e_1^*(e_1), e_1^*(e_2), \dots) = f_1 = (1, 0, \dots) \\ T(e_2^*) &= (e_2^*(e_1), e_2^*(e_2), \dots) = f_2 = (0, 1, \dots) \\ &\vdots \\ T(e_n^*) &= (e_n^*(e_1), e_n^*(e_2), \dots, e_n^*(e_n), \dots) = f_n = (0, 0, \dots, \overset{n}{1}, \dots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Segue da Proposição 5.11 que T é um isomorfismo e $T([(e_n^*)_{n=1}^\infty]) = [(f_n)_{n=1}^\infty]$. Mas $[(f_n)_{n=1}^\infty] = h_{M^*}$ (Ver Proposição 5.9).

Portanto h_{M^*} é isomorfo a $[(e_n^*)_{n=1}^\infty]$. Além disto, segue da Proposição 5.11 que

$$[(e_n^*)_{n=1}^\infty]^* = (h_{M^*})^* = l_{M^{**}}.$$

Mas $M^{**} = M$ (Ver Proposição 5.6), então $[(e_n^*)_{n=1}^\infty]^* = l_M$. ■

Agora já estamos em condições de aplicar o Teorema 4.3.3 e o Corolário 4.3.12 para $Y = h_M$ (Veja Corolário 5.14).

Corolário 5.14 *Seja X um espaço de Banach e seja M uma função de Orlicz. Se uma das duas condições seguintes é satisfeitas:*

(a) M^* satisfaz a condição Δ_2 em 0, ou

(b) X é um subespaço fechado de um espaço de Banach WCG .

Então as três condições seguintes são equivalentes

- (i) $h_M \hookrightarrow X^*$ (ii) $X \twoheadrightarrow h_{M^*}$ (iii) $l_M \hookrightarrow X^*$

Prova. (a) Suponha que $M^* \in \Delta_2$. Então $(e_n)_{n=1}^\infty$ é uma base contráctil de h_M (Ver Proposição 5.12). Além disto, $(e_n)_{n=1}^\infty$ é uma base subsimétrica de h_M (Ver Proposições 5.9 e 0.40). E também temos, pela Proposição 5.10 que

$$M^* \in \Delta_2 \Rightarrow l_{M^*} = h_{M^*}. \quad (*)$$

Então segue da Proposição 5.11 que

$$(h_M)^* \simeq l_{M^*} \stackrel{(*)}{=} h_{M^*} \text{ e } h_M^{**} \simeq l_M.$$

Agora basta aplicarmos o Teorema 4.3.3 para $Y = h_M$ e teremos que as três condições (i), (ii) e (iii) são equivalentes.

(b) Seja X um subespaço fechado de um espaço de Banach WCG . Temos que $(e_n)_{n=1}^\infty$ é uma base subsimétrica de h_M (Ver Proposições 5.9 e 0.40). Além disto, pela Proposição 5.13

$$h_{M^*} \simeq [(e_n^*)_{n=1}^\infty] \text{ e } [(e_n^*)_{n=1}^\infty]^* = l_M.$$

Agora basta aplicarmos o Corolário 4.3.12 para $Y = h_M$ e teremos que as três condições (i), (ii) e (iii) são equivalentes. ■

Corolário 5.15 *Sejam M e N duas funções de Orlicz. Então o espaço l_M contém uma cópia de h_N se, e somente se, l_M contém uma cópia de l_N .*

Prova. Desde que $l_M = (h_M)^*$ (Veja Proposição 5.11), tomemos $X = h_{M^*}$. Segue da Proposição 5.9 que X tem uma base. Então X é separável (Ver Proposição 0.34) e pela Proposição 2.1.2 X é WCG .

Portanto pelo Corolário 5.14 são equivalentes:

(i) $h_N \hookrightarrow X^* = l_M$

(ii) $l_N \hookrightarrow X^*.$ ■

Referências Bibliográficas

- [1] Aron, R. and Diestel, J. and Rajappa, A., Weakly continuous functions on Banach spaces containing l_1 in Banach spaces (Columbia, Mo., 1984) (Kalton, N. and Saab, E., eds.). Lecture notes in Math., 1166, p.p. 13, (1985).
- [2] Banach, S., Théorie des opérations linéaires, (1993), Warszawa.
- [3] Bessaga C. and Pelczyński A., On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces, Studia Math., 17 (1958), 151-164.
- [4] Diestel, J., Sequences and series in Banach spaces, Spring-Verlag, New York (1984).
- [5] Dunford, N. and Schwartz, J. J., Linear operators, vol. 1, New York Interscience, (1957).
- [6] Frolík, Z., A contribution to the descriptive theory of sets and spaces, General topology and its relations to the modern analysis and algebra, Proc. Symp. Prague 1961, Publishing House of CSAV and Academic Press, (1962), 157-173.
- [7] Galego, E. M., Alguns aspectos de geometria de espaços de Banach através de $c_0(\mathbb{N})$, 43. Seminário brasileiro de análise, IME-USP, (1996).
- [8] Goldberg, S., Unbounded linear operators, theory and applications, McGraw-Hill, inc., (1966).
- [9] Gonzalez M. and Onieva V. M., Lifting results for sequences in Banach spaces, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 105 (1989), 117-121.
- [10] Honig, C. S., Análise funcional e aplicações, vol.1, IME-USP, (1970).
- [11] John, K. and Zizler V., Projections in dual weakly compactly generated Banach spaces, Studia Math., 49 (1973), 41-50.

- [12] Johnson W. B. and Rosenthal H. P., On w^* -basic sequences and their applications to the study of Banach spaces, *Studia Math.*, 43 (1972), 77-92.
- [13] Kreyszig, E., *Introductory functional analysis with applications*, New York, (1978).
- [14] Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L., *Classical Banach spaces*, vol. 1, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1977).
- [15] Lindenstrauss, J., Weakly compact sets - their topological properties and the Banach spaces they generate, *Proc. Symp. Infinite dimensional topology*, (1967), *Ann. of Math. Studies*, Princeton Univ. Press, Princeton N.J.
- [16] Mujica J., Banach spaces not containing l_1 , *Ark. Mat.*, 41 (2003), 363-374.
- [17] Pombo Júnior, Dinamérico P., *Introdução à análise funcional*, UFF, (1999).
- [18] Rosenthal H. P., On quasi-complemented subspaces of Banach spaces, *J. Funct. Anal.*, 4 (1969), 176-214.
- [19] Rosenthal H. P., A characterization of Banach spaces containing l_1 , *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 1 (1974), 2411-2413.
- [20] Singer, I., *Bases in Banach spaces I*, Springer Verlag, Berlin (1970).
- [21] Vařak, L., On one generalization of weakly compactly generated Banach spaces, *Studia Math.*, 70 (1981), 11-19.
- [22] Wójtowicz, Marek., Generalizations of the c_0 - l_1 - l_∞ Theorem of Bessaga and Pełczyński, *Bull. Polish. Acad. Sci. Math.*, 4 (2002), 373-382.