**Subvariedades mínimas
equivariantes no
espaço hiperbólico
quaterniônico**

Carlos José Matheus

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do grau
de
Doutor em Matemática

Área de concentração: **Matemática**
Orientador: Prof. Dr. **Hector Alfredo Merklen Goldschmidt**

São Paulo - junho - 2005

Subvariedades mínimas equivariantes no espaço hiperbólico quaterniônico

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente
corrigida e defendida por
Carlos José Matheus
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, julho de 2005.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Francisco Rui Tavares de Almeida (Presidente) - IME-USP

Prof. Dr. Ivan de Azevedo Tribuzy - UFAM

Prof. Dr. Luiz Antônio Barrera San Martín - IMECC-UNICAMP

Prof. Dr. Irwen Valle Guadalupe - IMECC-UNICAMP

Profa. Dra. Walcy Santos - UFRJ

Abstract

We prove that, in quaternionic hyperbolic space of real dimension $4n$, as in the case of complex hyperbolic space of real dimension $2n$, there are infinitely many classes of minimal equivariant complete embedded hypersurfaces, generated by the action of subgroups of the isometry group $Sp(1, n)$.

Resumo

Provamos que, no espaço hiperbólico quaterniônico de dimension real $4n$, como no caso do espaço hiperbólico complexo de dimension real $2n$, existem infinitas classes de hipersuperfícies equivariantes mínimas, completas, mergulhadas, geradas pela ação de subgrupos do grupo das isometrias $Sp(1, n)$.

Agradecimentos

Quero registrar meus agradecimentos

à heróica esposa pela bravura e companheirismo durante todo esse tempo

ao Prof. Dr. Francisco Rui Tavares de Almeida, que não mediu esforços para que este programa se realizasse

ao Prof. Dr. Hector Alfredo Merklen Goldschmidt pela nobreza no encaminhamento de todos os problemas que surgiram

aos Profs. Drs. Ivan de Azevedo Tribuzy e Irwen Valle Guadalupe, que vieram duas vezes a São Paulo para que a defesa se realizasse

ao Prof. Dr. Luiz Antônio Barrera San Martin, em cujo livro encontrei as bases da teoria das Álgebras de Lie

à Profa. Dra. Walcy Santos por valiosas sugestões

ao Prof. Dr. Cláudio Possani pela ajuda no curso deste programa

ao Prof. Dr. Alcibiades Rigas, a quem recorri, por vezes, com dúvidas de Geometria

ao inesquecível Prof. Dr. Elon Lages Lima pelo incentivo de longos anos

ao meu sogro e à nossa tia, Madre Maria Eulália Gonçalves de Carvalho, que faleceram sem ver esta tese concluída

aos colegas Hernán, Humberto e Lucas Máximo, pelo apoio durante a preparação deste trabalho

ao nosso falecido amigo Vek que, por duas vezes, salvou a nossa vida.

ÍNDICE

Introdução	i
Capítulo 1	1
§1 Álgebra dos quatérnios	2
§2 O espaço hiperbólico quaterniônico	15
Capítulo 2	30
§1 O caso das órbitas compactas	31
§2 Órbitas hiperbólicas não compactas	56
§3 O caso parabólico	62
Observações finais	71
Referências	72

Introdução

Em anos recentes observa-se um contínuo aumento de interesse, por parte dos matemáticos, nas técnicas da Geometria Equivariante, cujas bases foram lançadas no início dos anos 70 do século passado, com o (hoje clássico) artigo de W.-y. Hsiang e H. B. Lawson Jr. [10], onde se enuncia e prova-se a primeira versão do Teorema de Redução, que é utilizada em seguida para a determinação de subvariedades mínimas invariantes pela ação de grupos de isometrias em um ambiente de grupos (de Lie) de transformações no espaço Euclidiano.

Na década seguinte, com o enfoque da Geometria Equivariante, foram generalizadas as noções de superfícies rotacionais, de modo a incluir, além das rotações esféricas, também as rotações hiperbólicas e parabólicas, e o próprio W. Hsiang generalizou o clássico Teorema de Delaunay ao caso de codimensão 1 em um espaço euclidiano, em que as superfícies rotacionais generalizadas são hipersuperfícies em $\mathbb{R}^n$ cujos "paralelos" são esferas $(n-2)$ -dimensionais; ou seja, são subvariedades invariantes pela ação de um grupo de isometrias cujas órbitas são isométricas à esfera S^{n-2} [11]. Logo a seguir, W. Hsiang estudou o caso em que as órbitas são produtos de duas esferas [12]. Seguem-se, quase que imediatamente após esses resultados, trabalhos similares em que a variedade ambiente é o espaço hiperbólico real n -dimensional [4]. Rotações hiperbólicas e parabólicas são consideradas e as órbitas (ou paralelos) são esferas, espaços hiperbólicos ou horosferas $(n-2)$ -dimensionais. A idéia de catenóide é generalizada e sua relação com helicóides generalizados é estudada. Lembramos que, em [4], M. do Carmo e M. Dajczer obtiveram esses resultados por métodos elementares, com parametrizações explícitas e a equação de curvatura média (que se torna uma equação diferencial ordinária ao notarmos que as curvaturas principais em tais hipersuperfícies são iguais com exceção de uma), sem utilizar a maquinaria da Geometria Equivariante. No entanto os autores não consideram, por exemplo, o caso em que as órbitas são produtos de duas esferas.

O Teorema de Redução é válido para qualquer variedade em que um grupo de Lie age por isometrias. No caso de espaços simétricos, os campos de Killing tangentes às órbitas revelam ações polares, e o espaço das órbitas pode ser identificado localmente com um subconjunto de uma seção (que é totalmente geodésica), se uma métrica orbital for convenientemente escolhida.

Além disso, se tivermos órbitas principais com codimensão 2 na variedade ambiente, teremos também hipersuperfícies invariantes pelo fluxo (que serão uniões dessas órbitas) com cohomogeneidade 1, e logo sua projeção no espaço das órbitas será uma curva, cuja curvatura é determinada por uma equação diferencial ordinária. A partir daí, o Teorema de Redução da Geometria Equivariante, que relaciona a curvatura média da hipersuperfície com a curvatura geodésica da sua curva projeção, e uma escolha adequada de função volume, permitem atacar os problemas de existência e determinação de subvariedades mínimas ou com curvatura média constante por meio da análise de uma equação diferencial ordinária.

A genericidade das órbitas principais é dada pelo Teorema do tipo de órbita principal, da Geometria Equivariante, e sabe-se também que todo ponto em uma variedade sob uma ação isométrica tem uma vizinhança que intersecta finitos tipos de órbitas. Sabe-se ainda que, se a variedade ambiente for conexa, o espaço das órbitas é (obviamente) conexo e, se fizermos abstração das órbitas singulares, o espaço das órbitas permanece conexo [24].

Essas técnicas foram utilizadas, em 2000, por C. Gorodski e N. Gusevski [8], para provar a existência de infinitas classes de hipersuperfícies mínimas completas, mergulhadas no espaço hiperbólico complexo $\mathbb{C}H^n$, de dimensão complexa n , invariantes por grupos de isometrias de $\mathbb{C}H^n$, nesse caso, com cohomogeneidade 1. Os autores tomam a chamada decomposição de Iwasawa de $SU(1, n)$ (o grupo semi-simples de isometrias de $\mathbb{C}H^n$ obtido de $PU(1, n)$ pelo "unimodulamento" de seus elementos, o que a priori tornaria a ação efetiva) e consideram as possibilidades para subgrupos de $SU(1, n)$, em face do Teorema de Redução.

Além disso as ações polares fornecem muitos exemplos de subvariedades totalmente geodésicas, que formam uma classe restrita no contexto geral da Geometria das Subvariedades em que não se tem uma estrutura orbital.

O nosso propósito neste trabalho é investigar a existência de subvariedades mínimas equivariantes no espaço hiperbólico quaterniônico, que indicaremos com $\mathbb{H}H^n$, utilizando as técnicas da Geometria Equivariante, a exemplo do que foi feito em [8], e estudar relações entre as hipersuperfícies e suas projeções.

No capítulo 1 revemos conceitos básicos concernentes ao espaço hiperbólico quaterniônico e estabelecemos a notação. Observamos que o grupo das isometrias $Sp(1, n)$ define uma ação efetiva e verificamos alguns aspectos geométricos, como simetria e curvatura.

No capítulo 2 descrevemos o ambiente e encaixamos as peças de forma a que se possa aplicar o Teorema de Redução nesse novo contexto. Obtemos o primeiro resultado, que enunciamos a seguir.

Teorema 1

Se G é um subgrupo do grupo $Sp(1, n)$ das isometrias de $\mathbb{H}H^n$ da forma

$$\left\{ \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix} \mid A \in Sp(k), B \in Sp(n-k) \right\}, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

existem infinitas subvariedades mínimas G -equivariantes não congruentes, completas, mergulhadas em $\mathbb{H}H^n$, com cohomogeneidade 1 (logo hipersuperfícies em $\mathbb{H}H^n$).

Esse é o chamado caso elítico, em que as órbitas são compactas. Com um raciocínio similar, prova-se o caso hiperbólico, cujo enunciado é como segue.

Teorema 2

Se G é um subgrupo do grupo $Sp(1, n)$ das isometrias de $\mathbb{H}H^n$ da forma

$$\left\{ \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix} / A \in Sp(1, k-1), B \in Sp(n-k) \right\}, \quad k = 2, \dots, n-1,$$

existem infinitas subvariedades mínimas G -equivariantes não congruentes, completas, mergulhadas em $\mathbb{H}^n$, com cohomogeneidade 1 (logo hipersuperfícies em $\mathbb{H}^n$).

Na seção 3 capítulo 2 investigamos os casos chamados parabólicos, em que aparecem as órbitas horosferas. Se $\mathcal{H}^{4n-1}$ indica o grupo de Heisenberg generalizado (quaterniônico), temos o resultado abaixo.

Teorema 3

Se G é um subgrupo de $Sp(1, n)$ da forma

$$\{H_{\zeta, v}B / H_{\zeta, v} \in \mathcal{H}^{4k-1}, B \in Sp(n-k)\}, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

existe uma folheação de $\mathbb{H}^n$ por subvariedades mínimas G -equivariantes, com cohomogeneidade 1 (hipersuperfícies em $\mathbb{H}^n$), cujas folhas têm fronteira ideal homeomorfa a uma variedade de Hopf pinçada em um ponto.

Capítulo 1

Apresentaremos neste capítulo o ambiente em que trabalhamos e fixaremos a notação. Essencialmente, nosso enfoque será sobre preliminares algébricos e geométricos no contexto da geometria hiperbólica quaterniônica. Indicaremos com i, j, k as três unidades imaginárias e escreveremos $\xi = \alpha + i\beta + j\gamma + k\delta$ para representar o quatérnio ξ , com $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. A identificação

$$\xi \sim \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ -\bar{\mu} & \bar{\lambda} \end{bmatrix}, \quad \text{com } \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

será utilizada onde for conveniente.

Na seção 1 veremos alguns fatos sobre a álgebra dos quatérnios e faremos algumas considerações sobre variáveis quaterniônicas. Apresentaremos uma descrição da construção de Dieudonné-Artin para o determinante de uma matriz quaterniônica.

Na seção 2 apresentaremos o espaço hiperbólico quaterniônico, que indicaremos com $\mathbb{HH}^n$, e estudaremos alguns fatos geométricos relevantes. Apresentaremos a métrica de Bergman quaterniônica no espaço hiperbólico quaterniônico $\mathbb{HH}^n$, com a qual trabalharemos no próximo capítulo. Terminaremos com um cálculo da curvatura seccional de $\mathbb{HH}^n$.

§ 1

Se $x = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3$ e $y = y_0 + iy_1 + jy_2 + ky_3$ são quatérnios quaisquer, temos

$$xy = x_0y_0 - \sum_{s=1}^3 x_sy_s + i \left(x_0y_1 + x_1y_0 + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \right) + j \left(x_0y_2 + x_2y_0 + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \right) + \\ + k \left(x_0y_3 + x_3y_0 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Se fizermos

$$\alpha_0 = \alpha_0(xy) = x_0y_0 - \sum_{s=1}^3 x_sy_s \\ \alpha_s = \alpha_s(xy) = x_0y_s + x_sy_0, \quad s = 1, 2, 3 \\ \beta_{sl} = \beta_{sl}(xy) = \begin{vmatrix} x_s & x_l \\ y_s & y_l \end{vmatrix}, \quad s, l = 1, 2, 3$$

teremos

$$xy = \alpha_0 + i(\alpha_1 + \beta_{23}) + j(\alpha_2 + \beta_{31}) + k(\alpha_3 + \beta_{12}) \\ yx = \alpha_0 + i(\alpha_1 - \beta_{23}) + j(\alpha_2 - \beta_{31}) + k(\alpha_3 - \beta_{12}),$$

$\forall x, y \in \mathbb{H}$ (observe-se que $\alpha_s(xy) = \alpha_s(yx)$, $s = 0, 1, 2, 3$ e $\beta_{sl}(xy) = -\beta_{sl}(yx)$, $s, l = 1, 2, 3$, e logo $xy = yx$ sse $\beta_{sl}(xy) = 0$, $s, l = 1, 2, 3$).

Se $x \neq 0$, existe um único $y \in \mathbb{H}$ tal que $xy = yx = 1$. y é a solução de

$$\begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

que é

$$y = y_0 + iy_1 + jy_2 + ky_3 = \frac{x_0 - ix_1 - jx_2 - kx_3}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Se definirmos

$$\bar{x} = x_0 - ix_1 - jx_2 - kx_3 \quad e \quad |x| = \sqrt{\sum_{s=0}^3 x_s^2}$$

teremos

$$x^{-1} = y = \frac{\bar{x}}{|x|^2}, \quad \forall x \neq 0.$$

Além disso, como

$$\alpha_0(\bar{y} \bar{x}) = \alpha_0(xy) = \alpha_0 \\ \alpha_s(\bar{y} \bar{x}) = -\alpha_s(xy) = -\alpha_s, \quad s = 1, 2, 3 \\ \beta_{sl}(\bar{y} \bar{x}) = -\beta_{sl}(xy) = -\beta_{sl}, \quad s, l = 1, 2, 3$$

temos

$$\bar{y} \bar{x} = \alpha_0 - i(\alpha_1 + \beta_{23}) - j(\alpha_2 + \beta_{31}) - k(\alpha_3 + \beta_{12}) = \overline{xy}.$$

Outro fato básico é que se um quatérnio x comuta com dois quatérnios imaginários puros (ou seja, quatérnios

que têm parte real nula) linearmente independentes (sobre os reais), então x é real. Mais precisamente:

se $x \in \mathbb{H}$ e existem $\xi, \eta \in \mathbb{V}$ (subespaço dos "vetores", ou quatérnios imaginários puros), linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$ ($\exists r \in \mathbb{R} / \eta = r\xi$), tais que $x\xi = \xi x$ e $x\eta = \eta x$, então $x \in \mathbb{R}$.

Realmente, se $\xi = i\xi_1 + j\xi_2 + k\xi_3$, segue-se de $x\xi = \xi x$ que

$$\beta_{23}(x\xi) = \beta_{31}(x\xi) = \beta_{12}(x\xi) = 0,$$

e logo

$$\left. \begin{array}{l} x_2\xi_3 = x_3\xi_2 \\ x_1\xi_3 = x_3\xi_1 \\ x_1\xi_2 = x_2\xi_1 \end{array} \right\} \rightarrow (x_1, x_2, x_3) = \lambda_\xi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

e, similarmente,

$$(x_1, x_2, x_3) = \lambda_\eta(\eta_1, \eta_2, \eta_3),$$

e logo $\lambda_\xi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \lambda_\eta(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \rightarrow \lambda_\xi = \lambda_\eta = 0$, e segue-se que $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, e $x = x_0 \in \mathbb{R}$.

Em particular, o centro de $\mathbb{H}$ é $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$.

Observação

Se $\omega = x + iy + jz + kt \in \mathbb{H}$, tem-se

$$-Re(i\omega) = -Re(i(x + iy + jz + kt)) = -Re(ix - y + kz - jt) = -(-y) = y$$

e, similarmente, $-Re(j\omega) = z$, $-Re(k\omega) = t$. Fica definida a parte vetorial de ω por

$$Vet \omega = -iRe(i\omega) - jRe(j\omega) - kRe(k\omega).$$

Observe-se que $Vet \omega = \frac{\omega - \bar{\omega}}{2}$, e que $(Re \omega)^2 + \|Vet \omega\|^2 = |\omega|^2$.

Se definirmos $\langle v, w \rangle = v\bar{w}$, com $v, w \in \mathbb{H}$, teremos

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle &= |v|^2 \geq 0, \forall v \in \mathbb{H} \text{ e } \langle v, v \rangle = 0 \rightarrow v = 0 \\ \langle \xi v, w \rangle &= \xi v \bar{w} = \xi \langle v, w \rangle, \quad \langle v, \xi w \rangle = v \bar{\xi w} = v \bar{w} \bar{\xi} = \langle v, w \rangle \bar{\xi} \\ \langle w, v \rangle &= w \bar{v} = \overline{v \bar{w}} = \overline{\langle v, w \rangle} \end{aligned}$$

e

$$|\xi v|^2 = \langle \xi v, \xi v \rangle = \xi \langle v, v \rangle \bar{\xi} = \xi |v|^2 \bar{\xi} = \xi \bar{\xi} |v|^2 = |\xi|^2 |v|^2 \rightarrow |\xi v| = |\xi| |v|$$

(observe-se que $Re \langle x, y \rangle = \sum_{s=0}^3 x_s y_s$ é o produto interno usual em $\mathbb{R}^4$).

Mais geralmete, se $V = (v_1, \dots, v_n)$, $W = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{H}^n$, define-se

$$\langle V, W \rangle = \sum_{m=1}^n v_m \bar{w}_m.$$

É fácil ver que $\langle, \rangle$ é um produto interno em $\mathbb{H}^n$ e que $\langle V, W \rangle = 0$ sse $\langle W, V \rangle = \overline{\langle V, W \rangle} = 0$. Nesse caso escrevemos $V \perp W$ (observe-se que

$$\|V\| = \sqrt{\langle V, V \rangle} = \sqrt{\sum_{m=1}^n \sum_{s=0}^3 v_{ms}^2}$$

é a norma usual em $\mathbb{R}^{4n}$).

A forma (vetorial) ω definida por

$$\omega(X, Y) = \text{Vet}\langle X, Y \rangle = -i\text{Re}(i\langle X, Y \rangle) - j\text{Re}(j\langle X, Y \rangle) - k\text{Re}(k\langle X, Y \rangle)$$

é uma forma bilinear alternada em $\mathbb{H}^n$, e o produto interno supraHermitiano $\langle, \rangle$ admite a decomposição

$$\langle X, Y \rangle = ((X, Y)) + \omega(X, Y),$$

onde $((X, Y))$ é a forma bilinear simétrica não degenerada definida por

$$((X, Y)) = \text{Re}\langle X, Y \rangle$$

(nesse caso, positiva definida. Observe-se que $((iX, iY)) = ((jX, jY)) = ((kX, kY)) = ((X, Y))$).

Exemplo 1 (*funções holomorfas*)

Se $f = u + iv + jw + k\sigma : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ é uma função, com $u, v, w, \sigma \in C^\infty(\mathbb{H})$, e existe o limite

$$f'(w) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(w+h) - f(w)}{h}$$

(onde convencionamos que $\frac{\sqcup}{\zeta} = \zeta^{-1}\sqcup$) então

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{f(x + \mu + iy + jz + kt) - f(x + iy + jz + kt)}{\mu} &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{f(x + i(y + \eta) + jz + kt) - f(x + iy + jz + kt)}{i\eta} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x + iy + j(z + \rho) + kt) - f(x + iy + jz + kt)}{j\rho} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(x + iy + jz + k(t + \tau)) - f(x + iy + jz + kt)}{k\tau}, \end{aligned}$$

ou seja, $f_x = -if_y = -jf_z = -kf_t$, ou

$$u_x + iv_x + jw_x + k\sigma_x = -i(u_y + iv_y + jw_y + k\sigma_y) = -j(u_z + iv_z + jw_z + k\sigma_z) = -k(u_t + iv_t + jw_t + k\sigma_t).$$

E segue-se que

$$\begin{aligned} u_x &= v_y = w_z = \sigma_t \\ u_y &= -v_x = -w_t = \sigma_z \\ u_z &= v_t = -w_x = -\sigma_y \\ u_t &= -v_z = w_y = -\sigma_x \end{aligned}$$

(em particular, as três funções $u + iv$, $u + jw$ e $u + k\sigma$ são holomorfas complexas).

Observemos que a condição $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(w+h) - f(w)}{h} = f'(w)$ equivale a afirmar que, para todo $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança U da origem tal que $h \in U \rightarrow |h^{-1}(f(w+h) - f(w)) - f'(w)| < \epsilon$. Mas se $h = \mu + i\eta + j\rho + k\tau \in U$, então, por exemplo, $\tilde{h} = i\eta \in U$, e logo $\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{f(x + i(y+\eta) + jz + kt) - f(x + iy + jz + kt)}{i\eta} = \lim_{\tilde{h} \rightarrow 0} \tilde{h}^{-1}(f(w + \tilde{h}) - f(w)) = f'(w)$, etc. (fazemos, sucessivamente, $\tilde{h} = \mu, i\eta, j\rho, k\tau$ e obtemos as equações de Cauchy-Riemann generalizadas acima). Diremos, então, que f é holomorfa quaterniônica se as equações acima forem satisfeitas.

Exemplo 2

Se $H^4 \subseteq \mathbb{R}^4 \sim \mathbb{H}$ é o espaço hiperbólico (com a métrica de Lobatchevski) e $\sqcup = x + iy + jz + kt$, com $t > 0$,

então $-k\sqcup = -kx - jy + iz + t \rightarrow t = \text{Re}(-k\sqcup) = \frac{-k\sqcup + \overline{(-k\sqcup)}}{2} = \frac{\overline{\sqcup}k - k\sqcup}{2}$, e logo

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2}{t^2} = \frac{4d\sqcup d\overline{\sqcup}}{(\overline{\sqcup}k - k\sqcup)^2}.$$

Observação

Se $\varpi = x + iy + jz + kt \sim \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ -\bar{\mu} & \bar{\lambda} \end{bmatrix}$, com $\lambda = x + iy$, $\mu = z + it$, então

$$\bar{\varpi} = x - iy - jz - kt \sim x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - y \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} - z \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - t \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\lambda} & -\mu \\ \bar{\mu} & \lambda \end{bmatrix}.$$

e

$$\varpi \bar{\varpi} \sim \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ -\bar{\mu} & \bar{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\lambda} & -\mu \\ \bar{\mu} & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\lambda|^2 + |\mu|^2 & 0 \\ 0 & |\lambda|^2 + |\mu|^2 \end{bmatrix} \sim |\lambda|^2 + |\mu|^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = |\varpi|^2.$$

(vemos, em particular, que $Sp(1) \cong \mathbb{S}^3$).

A forma $\langle\langle, \rangle\rangle$ definida por $\langle\langle X, Y \rangle\rangle = \text{tr } X^* Y$ é um produto interno a valores reais em relação ao qual a base

$$\mathcal{B} = \{1, i, j, k\} \sim \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

é ortonormal.

Lembremos que $\mathbb{H} \cong \mathbb{C} \oplus i\mathbb{C}$ (se $\varpi = \alpha + i\beta + j\gamma + k\delta \in \mathbb{H}$, sejam $\lambda = \alpha + j\gamma$ e $\mu = \beta + j\delta$, então $\varpi = \lambda + i\mu$, e $\alpha + j\gamma = i(\beta + j\delta) \rightarrow \delta = \gamma = \beta = \alpha = 0$). E logo, quaisquer que sejam $A, B \in Gl(n, \mathbb{C})$, temos

$A + iB \in gl(n, \mathbb{H})$, e define-se $\psi : Gl(n, \mathbb{H}) \rightarrow Gl(2n, \mathbb{C})$ por

$$A + iB \mapsto \begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{bmatrix}.$$

Se, por exemplo,

$$\begin{bmatrix} a_{1s} \\ \vdots \\ a_{ns} \\ -\bar{b}_{1s} \\ \vdots \\ -\bar{b}_{ns} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} b_{1r} \\ \vdots \\ b_{nr} \\ \bar{a}_{1r} \\ \vdots \\ \bar{a}_{nr} \end{bmatrix},$$

então

$$A = \begin{bmatrix} \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1r} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nr} & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & \lambda b_{1r} & \cdots & \frac{-b_{1s}}{\lambda} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \lambda b_{nr} & \cdots & \frac{-b_{ns}}{\lambda} & \cdots \end{bmatrix}$$

e logo (note-se que $\lambda \in \mathbb{C} \rightarrow i\lambda = \lambda i$)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \cdots & a_{1s} + ib_{1s} & \cdots & a_{1r} + ib_{1r} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & a_{ns} + ib_{ns} & \cdots & a_{nr} + ib_{nr} & \cdots \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cdots & \lambda b_{1r} + ib_{1s} & \cdots & \frac{-b_{1s}}{\lambda} + ib_{1r} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \lambda b_{nr} + ib_{ns} & \cdots & \frac{-b_{ns}}{\lambda} + ib_{nr} & \cdots \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cdots & -i\lambda \left(\frac{-b_{1s}}{\lambda} + ib_{1r} \right) & \cdots & \frac{-b_{1s}}{\lambda} + ib_{1r} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & -i\lambda \left(\frac{-b_{ns}}{\lambda} + ib_{nr} \right) & \cdots & \frac{-b_{ns}}{\lambda} + ib_{nr} & \cdots \end{bmatrix} \notin Gl(n, \mathbb{C}), \end{aligned}$$

e, similarmente, $B \notin Gl(n, \mathbb{C})$. E logo $A + iB \notin Gl(n, \mathbb{H})$. É fácil ver que $\psi(Gl(n, \mathbb{H})) \subseteq Gl(2n, \mathbb{C})$.

Obviamente, $\psi \in Hom(Gl(n, \mathbb{H}), Gl(2n, \mathbb{C}))$, e

$$\psi(A + iB) = \psi(\tilde{A} + i\tilde{B}) \rightarrow \begin{cases} A = \tilde{A} \\ B = \tilde{B} \end{cases}.$$

Logo ψ é biunívoca. E $\dim Gl(n, \mathbb{H}) = \dim Gl(2n, \mathbb{C}) \rightarrow \psi_*$ é isomorfismo.

$\psi \in C^\infty$, pois $x_{\alpha\beta} \circ \psi \in C^\infty$, $\forall \alpha, \beta = 1, \dots, 2n$.

E se $w: \begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{bmatrix} \mapsto A + iB$ então

$$\begin{cases} x_{\alpha\beta} \circ Re \circ w : \begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{bmatrix} \mapsto a_{\alpha\beta} \\ x_{\alpha\beta} \circ Im \circ w : \begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{bmatrix} \mapsto b_{\alpha\beta} \end{cases} \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n.$$

Logo $w \in C^\infty$. E como suavidade é propriedade local, ψ é um difeomorfismo sobre a imagem.

Se E é um espaço vetorial real $4n$ -dimensional, uma *estrutura quaterniônica* em E é uma tripla $(\imath, j, k)$, onde $\imath, j$ e k são estruturas complexas tais que $\imath \circ j = k$, $j \circ k = \imath$ e $k \circ \imath = j$.

Um espaço vetorial quaterniônico Q , com dimensão quaterniônica n , é isomorfo a um espaço vetorial real (com dimensão real $4n$) com uma estrutura quaterniônica (considere-se em Q apenas a multiplicação por escalares reais e introduza-se a estrutura $(\imath, j, k)$ definida por $\imath \omega = i\omega$, $j\omega = j\omega$ e $k\omega = k\omega$).

Se $n = 1$, temos

$$\imath: \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ -\bar{\mu} & \bar{\lambda} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ -\bar{\mu} & \bar{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\lambda & i\mu \\ i\bar{\mu} & -i\bar{\lambda} \end{bmatrix},$$

$$j: \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ -\bar{\mu} & \bar{\lambda} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ -\bar{\mu} & \bar{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{\mu} & \bar{\lambda} \\ -\lambda & -\mu \end{bmatrix}$$

e

$$k: \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ -\bar{\mu} & \bar{\lambda} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ -\bar{\mu} & \bar{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\bar{\mu} & i\bar{\lambda} \\ i\lambda & i\mu \end{bmatrix}.$$

Se $\lambda = \alpha + i\beta$, $\mu = \gamma + i\delta$, então

$$\imath: (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \sim \begin{bmatrix} \alpha + i\beta & \gamma + i\delta \\ -\gamma + i\delta & \alpha - i\beta \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -\beta + i\alpha & -\delta + i\gamma \\ \delta + i\gamma & -\beta - i\alpha \end{bmatrix} \sim (-\beta, \alpha, -\delta, \gamma)$$

$$j: (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \sim \begin{bmatrix} \alpha + i\beta & \gamma + i\delta \\ -\gamma + i\delta & \alpha - i\beta \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -\gamma + i\delta & \alpha - i\beta \\ -\alpha - i\beta & -\gamma - i\delta \end{bmatrix} \sim (-\gamma, \delta, \alpha, -\beta)$$

$$k: (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \sim \begin{bmatrix} \alpha + i\beta & \gamma + i\delta \\ -\gamma + i\delta & \alpha - i\beta \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -\delta - i\gamma & \beta + i\alpha \\ -\beta + i\alpha & -\delta + i\gamma \end{bmatrix} \sim (-\delta, -\gamma, \beta, \alpha)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(x, y, z, t) &= (-y, x, -t, z) \\ \mathcal{J}(x, y, z, t) &= (-z, t, x, -y) \\ \mathcal{K}(x, y, z, t) &= (-t, -z, y, x) \end{aligned} \quad \left(\text{observemos que } \begin{aligned} \mathcal{U}(1, 0, 0, 0) &= (0, 1, 0, 0) \\ \mathcal{J}(1, 0, 0, 0) &= (0, 0, 1, 0) \\ \mathcal{K}(1, 0, 0, 0) &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned} \right)$$

e $Q \sim (Q_{\mathbb{R}}, \mathcal{U}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$.

Se S é um espaço vetorial real, a *quaternificação* $S_{\mathbb{H}} = S \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$ de S é o espaço $(S \times S \times S \times S, \sim)$, onde $\sim$ é dada por $\mathcal{U}: \omega \sim i\omega$, $\mathcal{J}: \omega \sim j\omega$, $\mathcal{K}: \omega \sim k\omega$.

Mais precisamente, se $\omega = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n, t_1, \dots, t_n) \in S \times S \times S \times S$, temos

$$\begin{aligned} i\omega \sim \mathcal{U}(\omega) &= \mathcal{U}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n, t_1, \dots, t_n) = \\ &= (-y_1, \dots, -y_n, x_1, \dots, x_n, -t_1, \dots, -t_n, z_1, \dots, z_n) \end{aligned}$$

e, similarmente,

$$j\omega \sim \mathcal{J}(\omega) = (-z_1, \dots, -z_n, t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n, -y_1, \dots, -y_n)$$

$$\text{e } k\omega \sim \mathcal{K}(\omega) = (-t_1, \dots, -t_n, -z_1, \dots, -z_n, y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_n).$$

(observe-se que

$$\mathcal{U}^2 : (x, y, z, t) \mapsto \mathcal{U}(-y, x, -t, z) = (-x, -y, -z, -t) = -(x, y, z, t)$$

$$\mathcal{J}^2 : (x, y, z, t) \mapsto \mathcal{J}(-z, t, x, -y) = -(x, y, z, t)$$

$$\mathcal{K}^2 : (x, y, z, t) \mapsto \mathcal{K}(-t, -z, y, x) = -(x, y, z, t)$$

$$\mathcal{U}\mathcal{J} : (x, y, z, t) \mapsto \mathcal{U}(-z, t, x, -y) = (-t, -z, y, x) = \mathcal{K}(x, y, z, t), \text{ etc.})$$

$Q = S \oplus iS \oplus jS \oplus kS$ e S é forma real (subespaço vetorial totalmente real maximal).

Exemplo 3

Lembremos que $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ é holomorfa (quaterniônica) se existe

$$f'(\omega) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(f(\omega + h) - f(\omega)).$$

Se $f(\omega) = \omega\xi$, com $\xi \in \mathbb{H}$ fixo, então

$$h^{-1}((\omega + h)\xi - \omega\xi) = h^{-1}h\xi = \xi, \quad \forall h.$$

Logo existe $f'(\omega) = \xi$.

Se $f = u + iv + jw + k\sigma$, observemos que

$$\begin{aligned} (u + iv + jw + k\sigma)(x + iy + jz + kt) &= f(\omega) = \omega\xi = \\ &= (x + iy + jz + kt)(\alpha + i\beta + j\gamma + k\delta) = \\ &= \alpha x - \beta y - \gamma z - \delta t + i \left(\beta x + \alpha y + \begin{vmatrix} z & t \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \right) + \\ &+ j \left(\gamma x + \alpha z + \begin{vmatrix} t & y \\ \delta & \beta \end{vmatrix} \right) + k \left(\delta x + \alpha t + \begin{vmatrix} y & z \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

e logo

$$\begin{aligned} u_x &= \alpha = v_y = w_z = \sigma_t \\ u_y &= -\beta = -v_x = -w_t = \sigma_z \\ u_z &= -\gamma = v_t = -w_x = -\sigma_y \\ u_t &= -\delta = -v_z = w_y = -\sigma_x \end{aligned}$$

Exemplo 4

$f : \mathbb{W} \mapsto \mathbb{W}^{-1}$ não é holomorfa quaterniônica.

Realmente,

$$\mathbb{W}^{-1} = \frac{x - iy - jz - kt}{x^2 + y^2 + z^2 + t^2} \rightarrow \begin{cases} u_x = \frac{-x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{|\mathbb{W}|^4} \\ v_y = \frac{-x^2 + y^2 - z^2 - t^2}{|\mathbb{W}|^4} \end{cases}$$

(observe-se que $u_y = -v_x = \frac{-2xy}{|\mathbb{W}|^4}$).

Observação

Indiquemos com f_* a derivada da aplicação $(u, v, w, \sigma) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ associada à função $f = u + iv + jw + k\sigma : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, e com $[f_*]$ a matriz jacobiana de (u, v, w, σ) .

Na identificação $A + iB \sim \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix}$, temos

$$[\mathcal{I}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [j] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [k] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde $[T]$ indica a matriz da transformação T .

Obviamente, $[TS] = [T][S]$, e logo $TS = ST$ sse $[T][S] = [S][T]$.

Lema 1

Existem pares $(\tau_1, \zeta_1), (\tau_2, \zeta_2), (\tau_3, \zeta_3)$ de operadores $\tau, \zeta : gl(2n, \mathbb{C}) \rightarrow gl(2n, \mathbb{C})$ tais que uma função $f = u + iv + jw + k\sigma : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ é holomorfa quaterniônica sse

$$\begin{cases} \tau_1(f_*\mathcal{I}) = \tau_1(\mathcal{I}f_*) & \begin{cases} \tau_2(f_*j) = \tau_2(jf_*) \\ \zeta_2(f_*j) = \zeta_2(jf_*) \end{cases} & \begin{cases} \tau_3(f_*k) = \tau_3(kf_*) \\ \zeta_3(f_*k) = \zeta_3(kf_*) \end{cases} \\ \zeta_1(f_*\mathcal{I}) = \zeta_1(\mathcal{I}f_*) \end{cases}$$

demonstração.

$$\text{Sejam } \tau_1 \begin{bmatrix} M & N \\ R & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}, \quad \zeta_1 \begin{bmatrix} M & N \\ R & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & N \\ R & 0 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$[f_*\mathcal{I}] = [f_*][\mathcal{I}] = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & u_t \\ v_x & v_y & v_z & v_t \\ w_x & w_y & w_z & w_t \\ \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \sigma_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_y & -u_x & u_t & -u_z \\ v_y & -v_x & v_t & -v_z \\ w_y & -w_x & w_t & -w_z \\ \sigma_y & -\sigma_x & \sigma_t & -\sigma_z \end{bmatrix}$$

enquanto que

$$[\mathcal{I}f_*] = [\mathcal{I}][f_*] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & u_t \\ v_x & v_y & v_z & v_t \\ w_x & w_y & w_z & w_t \\ \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \sigma_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_x & -v_y & -v_z & -v_t \\ u_x & u_y & u_z & u_t \\ -\sigma_x & -\sigma_y & -\sigma_z & -\sigma_t \\ w_x & w_y & w_z & w_t \end{bmatrix},$$

e logo

$$[\tau_1(f_* \mathfrak{z})] = \tau_1[f_* \mathfrak{z}] = \begin{bmatrix} u_y & -u_x & 0 & 0 \\ v_y & -v_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_t & -w_z \\ 0 & 0 & \sigma_t & -\sigma_z \end{bmatrix}, \quad [\tau_1(\mathfrak{z} f_*)] = \begin{bmatrix} -v_x & -v_y & 0 & 0 \\ u_x & u_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_z & -\sigma_t \\ 0 & 0 & w_z & w_t \end{bmatrix},$$

etc. ■

Se f é holomorfa quaterniônica, o jacobiano de (u, v, w, σ) é

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z & u_t \\ v_x & v_y & v_z & v_t \\ w_x & w_y & w_z & w_t \\ \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \sigma_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z & u_t \\ -u_y & u_x & -u_t & u_z \\ -u_z & u_t & u_x & -u_y \\ -u_t & -u_z & u_y & u_x \end{vmatrix} = (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + u_t^2)^2 = |\nabla u|^4.$$

Se A é uma matriz $n \times n$ com entradas quaterniônicas, dizemos que as linhas de A são linearmente independentes à esquerda se existe uma matriz B tal que $BA = I$ (se existe B tal que $AB = I$, dizemos que as colunas de A são linearmente independentes à direita). Nesse caso, A é uma matriz não singular, $A \in Gl(n, \mathbb{H})$.

No que segue, indicaremos com $E_{\alpha\beta}$ a matriz (x_{rs}) tal que $x_{\alpha\beta} = 1$ e $x_{rs} = 0$, se $(r, s) \neq (\alpha, \beta)$.

O subgrupo $Sl(n, \mathbb{H})$ gerado pelas matrizes da forma $I + \xi E_{\alpha\beta}$, com $\alpha \neq \beta$ e $\xi \in \mathbb{H}$, é o grupo unimodular [1]. Toda matriz não singular é da forma $B\Delta(\zeta)$, com B unimodular e $\Delta(\zeta)$ definida por

$$\Delta(\zeta) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \zeta \end{bmatrix} = I + (\zeta - 1)E_{nn}.$$

Em símbolos: $\forall A \in Gl(n, \mathbb{H}) \exists B \in Sl(n, \mathbb{H}), \zeta \in \mathbb{H}$ tais que $A = B\Delta(\zeta)$.

Seja $\hat{h} = \mathbb{H}^*/\Sigma \cup \hat{0}$, onde Σ é o subgrupo dos comutadores

$$\Sigma = [\{\xi\zeta\xi^{-1}\zeta^{-1} / \xi, \zeta \in \mathbb{H}^*\}]$$

e a multiplicação estende-se a $\hat{0}$ da maneira óbvia, ou seja,

$$\hat{0}\hat{\xi} = \hat{\xi}\hat{0} = \hat{0},$$

$\forall \hat{\xi} \in \hat{h}$, onde $\hat{\xi} = \xi\Sigma$ é a classe de ξ em $\mathbb{H}^*/\Sigma$ ou $\hat{\xi} = \hat{0}$. Então $\hat{h}$ é abeliano e existe uma projeção $\mathbb{H} \rightarrow \hat{h}$ tal que $\xi \mapsto \xi\Sigma$, se $\xi \neq 0$, e $0 \mapsto \hat{0}$.

Observe-se que $\hat{1}$ é unidade em $\hat{h}$ ($\hat{\xi}\hat{1} = \hat{\xi}\hat{1} = \hat{\xi}, \forall \xi$). Além disso, $\widehat{-1} = \hat{1}$. Pois, com $\xi = j$ e $\zeta = i$, temos $\xi\zeta = j i = -i j = -\zeta\xi$, e logo

$$\xi\zeta\xi^{-1}\zeta^{-1} = -1 \rightarrow \hat{1} = \widehat{\xi\zeta\xi^{-1}\zeta^{-1}} = \widehat{-1}.$$

Se multiplicarmos uma matriz $A \in gl(n, \mathbb{H})$, à esquerda, pela matriz $I + \xi E_{\alpha\beta}$, obteremos uma matriz $\tilde{A}$ cuja linha α é igual à linha α de A somada com a linha β multiplicada à esquerda por ξ .

Em símbolos: $\tilde{A} = (I + \xi E_{\alpha\beta})A$ é tal que $\tilde{a}_{\alpha\gamma} = a_{\alpha\gamma} + \xi a_{\beta\gamma}$, $\gamma = 1, \dots, n$.

Observe-se que $(I + (\xi - 1)E_{\beta\beta})A$ é a matriz que se obtém de A ao multiplicar-se a linha β , à esquerda, por ξ .

Nesse contexto define-se a função $\det : gl(n, \mathbb{H}) \rightarrow \hat{h}$, que a cada $A \in gl(n, \mathbb{H})$ associa uma classe quaterniônica $\det A$, chamada o *determinante* de A , a partir dos axiomas abaixo.

1. se $\tilde{A} = (I + (\xi - 1)E_{\beta\beta})A$, então $\det \tilde{A} = \xi \det A$
2. se $\tilde{A} = (I + E_{\alpha\beta})A$, então $\det \tilde{A} = \det A$ ($\alpha \neq \beta$)
3. $\det I = 1$

A função $\det$ tem as propriedades abaixo.

1. $\det(I + \xi E_{\alpha\beta})A = \det A$ (se $\alpha \neq \beta$)
2. $Gl(n, \mathbb{H}) = \widetilde{\det^{-1}(\hat{0})}$ (ou seja, A é singular sse $\det A = \hat{0}$)
3. $\det(I - E_{\alpha\alpha} - E_{\beta\beta} + E_{\alpha\beta} + E_{\beta\alpha})A = \det A$
(se duas linhas são transpostas, o determinante não se altera)
4. se $A = B\Delta(\zeta)$, com $B \in Sl(n, \mathbb{H})$, então $\det A = \hat{\zeta}$
(em particular, $\det \Delta(\zeta) = \hat{\zeta}$ e $\det B = \hat{1}$, $\forall B \in Sl(n, \mathbb{H})$)
5. $\det(AB) = \det A \det B$

A existência da função $\det$ é provada em [1] (pg 154). É fácil verificar as propriedades acima, a partir dos axiomas. Por exemplo, um cálculo direto mostra que

$$(I + (\xi^{-1} - 1)E_{\beta\beta})(I + E_{\alpha\beta})(I + (\xi - 1)E_{\beta\beta}) = I + \xi E_{\alpha\beta},$$

e logo

$$\begin{aligned} \det(I + \xi E_{\alpha\beta})A &= \det((I + (\xi^{-1} - 1)E_{\beta\beta})(I + E_{\alpha\beta})(I + (\xi - 1)E_{\beta\beta}))A = \\ &= \widehat{\xi^{-1}} \det((I + E_{\alpha\beta})(I + (\xi - 1)E_{\beta\beta}))A = \widehat{\xi^{-1}} \det(I + (\xi - 1)E_{\beta\beta})A = \widehat{\xi^{-1}} \xi \det A = \det A, \end{aligned}$$

o que demonstra (1).

Se $A \notin Gl(n, \mathbb{H})$, existe α tal que a linha α de A é combinação linear à esquerda das outras linhas (se a_s indica a linha s , temos $a_\alpha = \sum_{\beta \neq \alpha} \xi_\beta a_\beta$, e logo $a_\alpha - \sum_{\beta \neq \alpha} \xi_\beta a_\beta = 0$). Mas então

$$B = (I - \xi_1 E_{\alpha 1})(I - \xi_2 E_{\alpha 2}) \dots (I - \widehat{\xi_\alpha E_{\alpha \alpha}}) \dots (I - \xi_n E_{\alpha n})A = \prod_{\beta \neq \alpha} (I - \xi_\beta E_{\alpha \beta})A$$

é uma matriz com a linha α nula, e segue-se que $(I - E_{\alpha\alpha})B = B$. E logo

$$\hat{0} = \hat{0} \det B = \det(I + (0 - 1)E_{\alpha\alpha})B = \det(I - E_{\alpha\alpha})B = \det B = \det \prod_{\beta \neq \alpha} (I - \xi_\beta E_{\alpha \beta})A = \det A.$$

Reciprocamente, se $A \in Gl(n, \mathbb{H})$, então existem $B \in Sl(n, \mathbb{H})$, $\zeta \neq 0$, tais que $A = B\Delta(\zeta)$, e logo $\det A = \det \Delta(\zeta) = \hat{\zeta} \det I = \hat{\zeta} \neq \hat{0}$.

Isso demonstra (2) e (4).

Se B é obtida de A pela transposição das linhas α e β , então

$$\begin{aligned} \det B &= \det(I - 2E_{\beta\beta})(I + 2E_{\alpha\beta})(I - E_{\beta\alpha})(I + E_{\alpha\beta})(I + E_{\beta\alpha})A = \\ &= \widehat{-1} \det(I + 2E_{\alpha\beta})(I - E_{\beta\alpha})(I + E_{\alpha\beta})(I + E_{\beta\alpha})A = \\ &\quad \widehat{-1} \det A = \hat{1} \det A = \det A, \end{aligned}$$

o que demonstra (3).

Se $A \notin Gl(n, \mathbb{H})$, então $AB \notin Gl(n, \mathbb{H})$ ($AB \in Gl(n, \mathbb{H}) \rightarrow \exists M/A(BM) = (AB)M = I$, e logo

$A \in Gl(n, \mathbb{H})$, absurdo), e logo $\det AB = \hat{0} = \det A \det B$. E se $A = \tilde{B}\Delta(\zeta)$, com $\tilde{B} \in Sl(n, \mathbb{H})$, então $\det A = \det \Delta(\zeta) = \hat{\zeta}$, e logo

$$\begin{aligned} \det AB &= \det \tilde{B}\Delta(\zeta)B = \det \Delta(\zeta)B = \det(I + (\zeta - 1)E_{nn})B = \\ &= \hat{\zeta} \det B = \det A \det B \end{aligned}$$

e isso demonstra (5).

(observe-se que toda matriz unimodular é um produto de matrizes da forma $(I + E_{\alpha\beta})$, $\alpha \neq \beta$, e logo, $\forall A \in Sl(n, \mathbb{H})$, $\det A = \det I = \hat{1}$).

Observemos ainda que, se $\alpha \neq \beta$,

$$(I + \lambda E_{\alpha\beta})(I + \mu E_{\alpha\beta}) = I + (\lambda + \mu)E_{\alpha\beta} + \lambda\mu E_{\alpha\beta}^2 = I + (\lambda + \mu)E_{\alpha\beta} \text{ (pois } E_{\alpha\beta}^2 = \delta_{\alpha\beta}E_{\alpha\beta}) ,$$

e logo

$$I = I + 0E_{\alpha\beta} = I + (\lambda - \lambda)E_{\alpha\beta} = (I + \lambda E_{\alpha\beta})(I - \lambda E_{\alpha\beta}),$$

ou seja, $(I + \lambda E_{\alpha\beta})^{-1} = I - \lambda E_{\alpha\beta}$.

Observação

$\forall A \in gl(n, \mathbb{H})$, $\det A \geq 0$. Em verdade, $\hat{h} \cong \{r \in \mathbb{R} / r \geq 0\}$.

Realmente,

i)

Se $|\eta| = 1, \exists y \neq 0$ tal que $\eta y \eta = y$.

$$\text{Sejam } \eta = \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ -\bar{\mu} & \bar{\lambda} \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} z & \omega \\ -\bar{\omega} & \bar{z} \end{bmatrix}.$$

Se existe, y é solução de

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} z & \omega \\ -\bar{\omega} & \bar{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ -\bar{\mu} & \bar{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & \omega \\ -\bar{\omega} & \bar{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ -\bar{\mu} & \bar{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ -\bar{\mu} & \bar{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda z - \bar{\mu}\omega & \mu z + \bar{\lambda}\omega \\ -\lambda\bar{\omega} - \bar{\mu}\bar{z} & -\mu\bar{\omega} + \bar{\lambda}\bar{z} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \lambda^2 z - \lambda\bar{\mu}\omega - \lambda\mu\bar{\omega} - \mu\bar{\mu}\bar{z} & \mu\lambda z + \lambda\bar{\lambda}\omega - \mu^2\bar{\omega} + \mu\bar{\lambda}\bar{z} \\ -\lambda\bar{\mu}z + \bar{\mu}^2\omega - \lambda\bar{\lambda}\bar{\omega} - \bar{\lambda}\bar{\mu}\bar{z} & -\mu\bar{\mu}z - \bar{\mu}\bar{\lambda}\omega - \mu\bar{\lambda}\bar{\omega} + \bar{\lambda}^2\bar{z} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

que, como $\lambda\bar{\lambda} + \mu\bar{\mu} = |\eta|^2 = 1$, fornece

$$\begin{cases} \lambda^2 z - \lambda\bar{\mu}\omega - \lambda\mu\bar{\omega} + \lambda\bar{\lambda}\bar{z} &= z + \bar{z} \\ \mu\lambda z - \mu\bar{\mu}\omega - \mu^2\bar{\omega} + \mu\bar{\lambda}\bar{z} &= 0 \end{cases}$$

Se $z \in i\mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{cases} \lambda^2 z - \lambda\bar{\mu}\omega - \lambda\mu\omega - \lambda\bar{\lambda}z &= 0 \\ \mu\lambda z - \mu\bar{\mu}\omega - \mu^2\omega - \mu\bar{\lambda}z &= 0 \end{cases}$$

ou seja ,

$$\begin{cases} \lambda(\lambda - \bar{\lambda})z - \lambda(\mu + \bar{\mu})\omega &= 0 \\ \mu(\lambda - \bar{\lambda})z - \mu(\mu + \bar{\mu})\omega &= 0 \end{cases}$$

Se $\lambda \neq 0 \neq \mu$, temos

$$\begin{cases} (\lambda - \bar{\lambda})z = (\mu + \bar{\mu})\omega \\ (\lambda - \bar{\lambda})z = (\mu + \bar{\mu})\omega \end{cases}$$

Se $\text{Im } \lambda \neq 0$, sejam $z = \frac{\mu + \bar{\mu}}{\lambda - \bar{\lambda}}$, $\omega = 1$.

ii)

Se $|\eta| = 1$, existem x, y tais que $yx = \eta^2 xy$.

Seja y tal que $y = \eta y \eta$, e seja $x = \bar{\eta} = \eta^{-1}$.
Então $yx = \eta y \eta x = \eta y \eta \bar{\eta} = \eta y = \eta^2 \bar{\eta} y = \eta^2 xy$.

iii)

Se $|\eta| = 1$, existem x, y tais que $\bar{\eta} = \eta x y x^{-1} y^{-1}$.

Se $yx = \eta^2 xy$, então $\bar{\eta} y x = \eta x y$.

iv)

$\forall \xi \in \mathbb{H}^*, \hat{\xi} = \hat{\xi}$.

Se $\xi = r\eta$, com $r \in \mathbb{R}$ e $|\eta| = 1$, existem x, y tais que
 $\bar{\xi} = \bar{r}\bar{\eta} = r\bar{\eta} = r\eta x y x^{-1} y^{-1} = \xi x y x^{-1} y^{-1}$.

Segue-se que $\hat{h} \cong S \subseteq \mathbb{R}$. Além disso, $\forall \xi \in \mathbb{H}^*$,

$$\widehat{-\xi} = \widehat{(-1)\xi} = \widehat{(-1)}\hat{\xi} = \hat{1}\hat{\xi} = \hat{1}\xi = \hat{\xi}$$

logo $\hat{h} \cong S \subseteq \mathbb{R}^+$.

Exemplo 5

$Sp(n) = \{X \in Gl(n, \mathbb{H}) / X^* X = I\}$ (X^* denota a transposta conjugada de X).

Se $X \in Sp(n)$, então (com $\hat{1} \sim 1 \in \mathbb{R}^+$)

$$1 = \det I = \det X^* X = \det X^* \det X = \det X \det X = (\det X)^2$$

e como $\det X \geq 0$, temos $\det X = 1$.

Segue-se que $Sp(n) \subseteq Sl(n, \mathbb{H})$

(observe-se que $\det X^* = \det X = \hat{0}$ ou $X = B\Delta(\zeta)$, e logo $\det X = \det \Delta(\zeta)$

e, nesse caso, $\det X^* = \det(\Delta(\zeta)^* B^*) = \det \Delta(\zeta)^* = \det \Delta(\bar{\zeta}) = \hat{\bar{\zeta}} = \hat{\zeta} = \det \Delta(\zeta) = \det X$).

Observemos que $Sp(n)$ é um grupo de Lie semi-simples.

Realmente, se $\mathfrak{q} \cong sp(n)$ é a álgebra de Lie de $Sp(n)$, então

$$X \in \mathfrak{q} \rightarrow X^* + X^{**} = X^* + X = X + X^* = 0 \rightarrow X^* \in \mathfrak{q},$$

e segue-se [17] que $\mathfrak{q}$ é redutível (todo ideal se complementa). Mas então $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}' \oplus Z(\mathfrak{q})$, com $\mathfrak{q}' = [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}]$ semi-simples. E, além disso, o centro $Z(\mathfrak{q})$ é trivial, logo $\mathfrak{q} = [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}]$.

Exemplo 6

$$Sp(1, n) = \{X \in Gl(n+1, \mathbb{H}) / X^* I_{1,n} X = I_{1,n}\}, \text{ com } I_{1,n} = \begin{bmatrix} -1 & \\ & I_n \end{bmatrix}$$

Se $X \in Sp(1, n)$ e $q_1, \dots, q_n$ são as colunas de X , sabemos que

$$\langle q_r, q_s \rangle = \begin{cases} \delta_{rs} & , \text{ se } r > 1 \text{ ou } s > 1 \\ -1 & , \text{ se } r = s = 1 \end{cases}$$

e, como no exemplo anterior, temos $\det X \geq 0$. Logo

$$\hat{1} = \widehat{-1} = \det I_{1,n} = \det X^* I_{1,n} X = \det X^* \det I_{1,n} \det X = \det X \hat{1} \det X = (\det X)^2$$

e concluímos que $\det X = 1$. Segue-se que $Sp(1, n) \subseteq Sl(n+1, \mathbb{H})$.

Exemplo 7

$$Se S_{\mathbb{H}} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \in \mathbb{H} / |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} \text{ é a esfera em } \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4,$$

então $X \in S_{\mathbb{H}} \rightarrow \det X = \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1$, e logo $X \in Sl(2, \mathbb{C})$.

Além disso,

$$\left. \begin{aligned} \langle (\alpha, \beta), (-\bar{\beta}, \bar{\alpha}) \rangle &= -\alpha\beta + \beta\alpha = 0 \\ \|(\alpha, \beta)\|^2 &= \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1 = \|(-\bar{\beta}, \bar{\alpha})\|^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow X \in U(2)$$

logo $X \in Sl(2, \mathbb{C}) \cap U(2) = SU(2)$.

E, reciprocamente, se $X = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in SU(2)$, então

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \alpha\bar{\alpha} + \gamma\bar{\gamma} = \beta\bar{\beta} + \delta\bar{\delta} = 1, \quad \alpha\bar{\beta} + \gamma\bar{\delta} = 0.$$

Se $\alpha \neq 0 \neq \gamma$, temos

$$\beta = \frac{\alpha\delta - 1}{\gamma} \rightarrow \frac{-\gamma\bar{\delta}}{\alpha} = \bar{\beta} = \frac{\bar{\alpha}\bar{\delta} - 1}{\bar{\gamma}} \rightarrow (1 - \bar{\alpha}\bar{\delta})\alpha = \gamma\bar{\gamma}\bar{\delta}$$

e logo

$$1 = \beta\bar{\beta} + \delta\bar{\delta} = \frac{(\alpha\delta - 1)(\bar{\alpha}\bar{\delta} - 1)}{\gamma\bar{\gamma}} + \delta\bar{\delta}, \quad \text{e então}$$

$$\begin{aligned} 1 - \alpha\bar{\alpha} &= \gamma\bar{\gamma} = (\alpha\delta - 1)(\bar{\alpha}\bar{\delta} - 1) + \gamma\bar{\gamma}\delta\bar{\delta} = \\ &= 1 + \alpha\bar{\alpha}\delta\bar{\delta} + \gamma\bar{\gamma}\delta\bar{\delta} - \alpha\delta - \bar{\alpha}\bar{\delta} = 1 + \delta\bar{\delta} - \alpha\delta - \bar{\alpha}\bar{\delta} \end{aligned}$$

e portanto $\alpha\bar{\alpha} = \alpha\delta + \bar{\alpha}\bar{\delta} - \delta\bar{\delta} = \alpha\delta + (\bar{\alpha} - \delta)\bar{\delta}$.

Se $\bar{\alpha} \neq \delta$, então $\bar{\delta} = \frac{\alpha(\bar{\alpha} - \delta)}{\bar{\alpha} - \delta} = \alpha \rightarrow \delta = \bar{\alpha}$, absurdo.

Logo $\bar{\alpha} = \delta$, e $X = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \bar{\alpha} \end{bmatrix}$, e $\beta = \frac{\alpha\delta - 1}{\gamma} = \frac{\alpha\bar{\alpha} - 1}{\gamma} = \frac{-\gamma\bar{\gamma}}{\gamma} = -\bar{\gamma}$.

E logo $X = \begin{bmatrix} \alpha & -\bar{\gamma} \\ \gamma & \bar{\alpha} \end{bmatrix}$, com $|\alpha|^2 + |\gamma|^2 = \alpha\bar{\alpha} + \gamma\bar{\gamma} = 1$, ou seja, $X \in S_{\mathbb{H}}$.

E segue-se que $S_{\mathbb{H}} \cong SU(2) \cong S^3 \cong Sp(1)$.

Exemplo 8

O grupo de Heisenberg generalizado $\mathcal{H}^{4n+3}$ é definido pelo espaço $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}^3$ com a operação dada por

$$(\omega, v)(\zeta, w) = (\omega + \zeta, v + w + 2Vet\langle \omega, \zeta \rangle).$$

Se $(\omega, v)(\zeta, w) = (\zeta, w)(\omega, v) \quad \forall (\zeta, w)$, temos

$$Vet\langle \omega, \zeta \rangle = Vet\langle \zeta, \omega \rangle = Vet\overline{\langle \omega, \zeta \rangle} = -Vet\langle \omega, \zeta \rangle \rightarrow Vet\langle \omega, \zeta \rangle = 0, \forall \zeta \rightarrow \omega = 0,$$

ou seja, $(\omega, v) = (0, v) \in \{0\} \times \mathbb{R}^3$.

É fácil ver que $Z(\mathcal{H}) \cong \mathbb{R}^3$.

Veremos no capítulo 2 que $\mathcal{H}^{4n+3}$ age livre e transitivamente nas horosferas de um espaço hiperbólico quaterniônico.

Exemplo 9

Seja φ a ação

$$Sp(n) \times Sp(1) \times \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$$

$$((A, \xi), \omega) \mapsto A\omega\xi$$

e seja $\langle\langle, \rangle\rangle$ o produto interno definido por

$$\langle\langle X, Y \rangle\rangle = \text{Re}\langle X, Y \rangle.$$

Então $\langle\langle, \rangle\rangle$ é invariante pela ação (ou seja, $Sp(n) \times Sp(1)$ é subgrupo de isometrias de $\mathbb{H}^n$). Realmente, como $A \in Sp(n)$ e $\xi \in \mathbb{S}^3$, temos

$$\langle A\omega\xi, A\zeta\xi \rangle = \langle \omega\xi, \zeta\xi \rangle = \langle \omega, \zeta \rangle,$$

e logo

$$\text{Re}\langle A\omega\xi, A\zeta\xi \rangle = \text{Re}\langle \omega, \zeta \rangle,$$

$$\forall \omega, \zeta \in \mathbb{H}^n.$$

Sejam as formas bilineares $\omega_{\mathfrak{i}}$, $\omega_{\mathfrak{j}}$ e $\omega_{\mathfrak{k}}$ definidas por

$$\omega_{\mathfrak{i}}(X, Y) = \text{Re}\langle \mathfrak{i}X, Y \rangle \quad \omega_{\mathfrak{j}}(X, Y) = \text{Re}\langle \mathfrak{j}X, Y \rangle \quad \omega_{\mathfrak{k}}(X, Y) = \text{Re}\langle \mathfrak{k}X, Y \rangle$$

onde $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ é a estrutura quaterniônica. Então [18]

$$\begin{aligned} \omega_{\mathfrak{i}}(\mathfrak{i}X, \mathfrak{i}Y) &= \omega_{\mathfrak{i}}(X, Y) & \omega_{\mathfrak{j}}(\mathfrak{i}X, \mathfrak{i}Y) &= -\omega_{\mathfrak{j}}(X, Y) & \omega_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{i}X, \mathfrak{i}Y) &= -\omega_{\mathfrak{k}}(X, Y) \\ \omega_{\mathfrak{i}}(\mathfrak{j}X, \mathfrak{j}Y) &= -\omega_{\mathfrak{i}}(X, Y) & \omega_{\mathfrak{j}}(\mathfrak{j}X, \mathfrak{j}Y) &= \omega_{\mathfrak{j}}(X, Y) & \omega_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{j}X, \mathfrak{j}Y) &= -\omega_{\mathfrak{k}}(X, Y) \\ \omega_{\mathfrak{i}}(\mathfrak{k}X, \mathfrak{k}Y) &= -\omega_{\mathfrak{i}}(X, Y) & \omega_{\mathfrak{j}}(\mathfrak{k}X, \mathfrak{k}Y) &= -\omega_{\mathfrak{j}}(X, Y) & \omega_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{k}X, \mathfrak{k}Y) &= \omega_{\mathfrak{k}}(X, Y) \end{aligned}$$

$$(\text{exemplo: } \omega_{\mathfrak{i}}(\mathfrak{j}X, \mathfrak{j}Y) = \text{Re}\langle \mathfrak{i}\mathfrak{j}X, \mathfrak{j}Y \rangle = \text{Re}\langle \mathfrak{i}(X\mathfrak{j}), Y\mathfrak{j} \rangle = \text{Re}\langle X\mathfrak{j}\mathfrak{i}, Y\mathfrak{j} \rangle =$$

$$\begin{aligned} &= -\text{Re}\langle X\mathfrak{k}, Y\mathfrak{j} \rangle = -\frac{1}{2} \sum_s (X_s \mathfrak{k}(-\mathfrak{j})\overline{Y_s} - Y_s \mathfrak{j}\mathfrak{k}\overline{X_s}) = -\frac{1}{2} \sum_s (Y_s(-\mathfrak{i})\overline{X_s} + X_s \mathfrak{i}\overline{Y_s}) = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_s (X_s \mathfrak{i}\overline{Y_s} + Y_s \overline{X_s} \mathfrak{i}) = -\text{Re}\langle X\mathfrak{i}, Y \rangle = -\omega_{\mathfrak{i}}(X, Y), \quad \text{etc.}) \end{aligned}$$

Se $\xi = \alpha + \mathfrak{i}\beta + \mathfrak{j}\gamma + \mathfrak{k}\delta$ é um quaternário unitário e ω uma 2-forma, definimos

$$\xi^* \omega(X, Y) = \omega(X\xi, Y\xi)$$

É fácil ver que

$$\begin{aligned} \xi^* \omega_{\mathfrak{i}} &= (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2)\omega_{\mathfrak{i}} + 2(\alpha\delta + \beta\gamma)\omega_{\mathfrak{j}} + 2(\beta\delta - \alpha\gamma)\omega_{\mathfrak{k}} \\ \xi^* \omega_{\mathfrak{j}} &= 2(\beta\gamma - \alpha\delta)\omega_{\mathfrak{i}} + (\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2)\omega_{\mathfrak{j}} + 2(\alpha\beta + \gamma\delta)\omega_{\mathfrak{k}} \\ \xi^* \omega_{\mathfrak{k}} &= 2(\alpha\gamma + \beta\delta)\omega_{\mathfrak{i}} + 2(\gamma\delta - \alpha\beta)\omega_{\mathfrak{j}} + (\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2)\omega_{\mathfrak{k}} \end{aligned}$$

Observação

Se $\omega_{\mathfrak{i}}$, $\omega_{\mathfrak{j}}$ e $\omega_{\mathfrak{k}}$ são como acima, define-se a 4-forma fundamental

$$\Omega = \omega_{\mathfrak{i}} \wedge \omega_{\mathfrak{i}} + \omega_{\mathfrak{j}} \wedge \omega_{\mathfrak{j}} + \omega_{\mathfrak{k}} \wedge \omega_{\mathfrak{k}}$$

Ω é invariante pela ação de $Sp(n) \times Sp(1)$.

§ 2

O espaço das retas quaterniônicas temporais à direita pela origem em $\mathbb{H}^{1,n}$, onde $\mathbb{H}^{1,n}$ indica o espaço das $(n+1)$ -uplas de quatérnios, com a métrica

$$\langle \omega, \eta \rangle = -\omega_1 \bar{\eta}_1 + \omega_2 \bar{\eta}_2 + \dots + \omega_{n+1} \bar{\eta}_{n+1}$$

é o que chamaremos *espaço hiperbólico quaterniônico* de dimensão quaterniônica n , e indicaremos por $\mathbb{H}H^n$. Seus pontos são as classes

$$[\omega] = \pi(\{\omega\xi / \xi \neq 0\}),$$

onde $\omega \in \mathbb{H}^{1,n} \setminus \{0\}$ é um vetor temporal ($\langle \omega, \omega \rangle < 0$), e π é a projeção natural.

Se $\mathcal{T}^{1,n}$ é o cone temporal (aberto) em $\mathbb{H}^{1,n}$, definido como o conjunto de todos os vetores temporais, temos

$$\mathbb{H}H^n = \mathcal{T}^{1,n} / \sim$$

onde a relação $\sim$ identifica dois pontos na mesma reta (quaterniônica) à direita, ou melhor, $\omega \sim \eta$ se existe $\xi \neq 0$ tal que $\eta = \omega\xi$.

$\mathbb{H}H^n$ é uma variedade C^∞ de dimensão real $4n$. Em verdade,

$$\mathbb{H}H^n \rightarrow \mathbb{H}^n \cong \mathbb{R}^{4n}$$

$$[(\omega_1, \dots, \omega_{n+1})] \mapsto (\omega_2 \omega_1^{-1}, \dots, \omega_{n+1} \omega_1^{-1}) \quad \text{é carta global}$$

(segue-se de $-\omega_1 \bar{\omega}_1 + \dots + \omega_{n+1} \bar{\omega}_{n+1} < 0$ e $\sum_{s=2}^{n+1} \omega_s \bar{\omega}_s \geq 0$ que $\omega_1 \neq 0$).

A carta acima sugere que exista um representante canônico $\tilde{\omega}$ em cada classe $[\omega] \in \mathbb{H}H^n$. Realmente, se $\tilde{\omega} = \omega\xi = (\omega_1 \xi, \dots, \omega_{n+1} \xi) \in [\omega]$ e $\tilde{\omega}_1 = 1$ (ou seja, $\omega_1 \xi = 1 = 1 + i0 + j0 + k0$), então $\xi = \omega_1^{-1}$, e $\tilde{\omega} = (1, \omega_2 \omega_1^{-1}, \dots, \omega_{n+1} \omega_1^{-1})$ (em outras palavras, existe um único ponto na interseção de $\pi^{-1}([\omega])$ com o hiperplano $\omega_1 = 1$).

Em conseqüência, a aplicação

$$\begin{aligned} A : \mathbb{H}^n &\rightarrow \mathbb{H}^{1,n} / \sim \\ (\omega_2, \dots, \omega_{n+1}) &\mapsto [(1, \omega_2, \dots, \omega_{n+1})] \end{aligned}$$

é biunívoca (em verdade, A é um mergulho C^∞ de $\mathbb{H}^n$ em $\mathbb{H}^{1,n} / \sim = \mathbb{H}P^{1,n}$).

Figure 1: A classe $[\omega]$ tem um representante canônico $\tilde{\omega}$.

Observemos que $A(\mathbb{H}^n) = \{[(\omega_1, \dots, \omega_{n+1})] / \omega_1 \neq 0\}$. E como $\omega \in \mathbb{H}^{1,n}$, $\omega_1 = 0 \rightarrow \langle \omega, \omega \rangle \geq 0$, temos $\mathbb{H}H^n = \mathcal{T}^{1,n} / \sim \subseteq A(\mathbb{H}^n)$ (note-se que também as retas nulas estão em $A(\mathbb{H}^n)$).

Além disso,

$$\mathbb{H}P^{1,n} \setminus A(\mathbb{H}^n) = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right]^\perp = [e_1]^\perp.$$

(note-se que $e_1 = \tilde{e}_1$, o representante canônico de $[e_1]$, e que o estabilizador de $[e_1]^\perp$ é o subgrupo de Lie $Sp(n) < Sp(1, n)$).

Figure 2: O complementar da imagem de A é o hiperplano no infinito $[e_1]^\perp$.

Se Q^{4n+3} é definido por

$$Q^{4n+3} = \{\omega \in \mathbb{H}^{1,n} / \langle \omega, \omega \rangle = -1\},$$

então, para cada $[\omega] \in \mathbb{H}H^n$, a interseção $\pi^{-1}([\omega]) \cap Q^{4n+3}$ é uma 3-esfera que se corresponde com a reta quaterniônica $\pi^{-1}([\omega]) \cup \{0\}$, e fica determinada, por restrição, uma relação de equivalência $\approx$ em Q^{4n+3} , pela qual $\omega \approx \eta$ sse existe ξ tal que $|\xi| = 1$ e $\eta = \omega\xi$. Q^{4n+3} é o espaço total de um fibrado de esferas $(Q^{4n+3}, \tilde{\pi}, \mathbb{H}H^n, \mathbb{S}^3)$ (onde $\tilde{\pi}$ indica a restrição a Q^{4n+3} da projeção $\pi : \mathcal{T}^{1,n} \rightarrow \mathbb{H}H^n$), com base $\mathbb{H}H^n$ e grupo estrutural $\cong \mathbb{S}^3$. A aplicação

$$F : \mathbb{H}H^n \rightarrow Q^{4n+3} / \approx \\ [\omega] \mapsto [\omega |||\omega|||^{-1}]$$

(onde $[[\omega]]$ denota a classe $\tilde{\pi}(\{\tilde{\omega}\xi / |\xi| = 1\})$) é uma correspondência biunívoca.

Mais precisamente, temos

$$\begin{array}{ccc} \psi : \mathcal{T}^{1,n} \times \mathbb{H}^* & \rightarrow & \mathcal{T}^{1,n} \\ (\omega, \xi) & \mapsto & \omega\xi \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} \tilde{\psi} : Q^{4n+3} \times \mathbb{S}^3 & \rightarrow & Q^{4n+3} \\ (\omega, \xi) & \mapsto & \omega\xi \end{array}$$

ambas ações à direita, definidas pelas projeções

$$\begin{array}{ccc} \pi : \mathcal{T}^{1,n} & \rightarrow & \mathbb{H}H^n \\ \omega & \mapsto & [\omega] \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} \tilde{\pi} : Q^{4n+3} & \rightarrow & \mathbb{H}H^n \\ \omega & \mapsto & [[\omega]] \end{array}$$

e o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}^{1,n} \times \mathbb{H}^* & \xrightarrow{f \times g} & Q^{4n+3} \times \mathbb{S}^3 \\ \downarrow \psi & & \downarrow \tilde{\psi} \\ \mathcal{T}^{1,n} & \xrightarrow{f} & Q^{4n+3} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \tilde{\pi} \\ \mathcal{T}^{1,n} / \sim & \xrightarrow{F} & Q^{4n+3} / \approx \end{array}$$

é comutativo, com $f : \omega \rightarrow \omega |||\omega|||^{-1}$, $g : \xi \rightarrow |\xi|^{-1}\xi$ e $F : [\omega] \rightarrow [[f(\omega)]]$.

Indiquemos com γ_{ω} a órbita por $\omega \in \mathcal{T}^{1,n}$ da ação Φ ($\gamma_{\omega} = \pi^{-1}([\omega]) \cong \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$) e com $\tilde{\gamma}_{\omega}$ a órbita por $\omega \in Q^{4n+3}$ da ação $\tilde{\Phi}$ ($\tilde{\gamma}_{\omega} = \tilde{\pi}^{-1}([\omega]) \cong \mathbb{S}^3$).

Observação

$$\forall \omega \in \mathcal{T}^{1,n} \exists \xi \neq 0 \text{ tal que } \tilde{\gamma}_{\omega\xi} = \gamma_{\omega} \cap Q^{4n+3}.$$

Realmente, observemos que

i)

$$\forall \omega \in \mathcal{T}^{1,n} \exists \xi \neq 0 / \omega\xi \in Q^{4n+3} \quad (\gamma_{\omega} \cap Q^{4n+3} \neq \emptyset, \forall \omega \in \mathcal{T}^{1,n}).$$

Realmente,

$$\begin{aligned} |||\omega|||^4 &= (|||\omega|||^2)^2 = (||\omega||\overline{||\omega||})^2 = ||\omega||^2 \overline{||\omega||^2} = \\ &= ||\omega||^2 \overline{||\omega||^2} = ||\omega||^2 \overline{||\omega||^2} \rightarrow |||\omega|||^2 = ||\omega||^2 \end{aligned}$$

e logo

$$\langle \omega |||\omega|||^{-1}, \omega |||\omega|||^{-1} \rangle = \frac{\langle \omega, \omega \rangle}{|||\omega|||^2} = \frac{\langle \omega, \omega \rangle}{||\omega||^2} = \frac{||\omega||^2}{-||\omega||^2} = -1$$

(note-se que $||\omega||^2 < 0 \rightarrow \overline{||\omega||^2} < 0$).

Ou seja, $\omega\xi \in Q^{4n+3}$, com $\xi = |||\omega|||^{-1}$.

ii)

$$\forall \omega \in Q^{4n+3}, \tilde{\gamma}_{\omega} = \gamma_{\omega} \cap Q^{4n+3}$$

Realmente, se $\omega\xi \in \tilde{\gamma}_{\omega}$, então, obviamente, $\omega\xi \in \gamma_{\omega}$. E, além disso,

$$\xi \in \mathbb{S}^3 \rightarrow |\xi|^2 = 1 \rightarrow ||\omega\xi||^2 = ||\omega||^2 |\xi|^2 = -1 \rightarrow \omega\xi \in Q^{4n+3} \quad (\text{logo } \tilde{\gamma}_{\omega} \subseteq \gamma_{\omega} \cap Q^{4n+3}).$$

Reciprocamente, se $\omega \in Q^{4n+3}$ e $\tilde{\omega} \in \gamma_{\omega} \cap Q^{4n+3}$, então, por um lado,

$$\tilde{\omega} \in \gamma_{\omega} \rightarrow \exists \xi \in \mathbb{H}^* \text{ tal que } \tilde{\omega} = \omega\xi$$

e, além disso, como $||\tilde{\omega}||^2 = -1$, temos

$$-|\xi|^2 = ||\omega||^2 |\xi|^2 = ||\omega\xi||^2 = ||\tilde{\omega}||^2 = -1 \rightarrow |\xi| = 1$$

e segue-se que $\xi \in \mathbb{S}^3$ e, portanto, $\tilde{\omega} \in \tilde{\gamma}_{\omega}$.

Seja então $\omega \in \mathcal{T}^{1,n}$, qualquer (lembramos que $0 \notin \mathcal{T}^{1,n}$), e seja ξ tal que $\omega\xi \in Q^{4n+3}$. Pelo que vimos,

$$\gamma_{\omega} \cap Q^{4n+3} = \gamma_{\omega\xi} \cap Q^{4n+3} = \tilde{\gamma}_{\omega\xi}.$$

Observe-se, em particular, que se $\tilde{\omega}$ é o representante canônico de $[\omega]$, então

$$\tilde{\omega} |||\tilde{\omega}|||^{-1} \in \gamma_{\tilde{\omega}} \cap Q^{4n+3} = \gamma_{\omega} \cap Q^{4n+3} = \gamma_{\omega |||\omega|||^{-1}} \cap Q^{4n+3} = \tilde{\gamma}_{\omega |||\omega|||^{-1}} = [\omega |||\omega|||^{-1}],$$

e logo a aplicação $F : [\omega] \mapsto [f(\omega)]$ está bem definida. Pois, $\forall \omega \in \mathcal{T}^{1,n}$, tem-se

$$[f(\omega)] = [\omega |||\omega|||^{-1}] = [\tilde{\omega} |||\tilde{\omega}|||^{-1}],$$

onde $\tilde{\omega}$ é o representante canônico de $[\omega]$, e F é a composta das aplicações

$$[\omega] \mapsto \tilde{\omega} \mapsto \tilde{\omega} |||\tilde{\omega}|||^{-1} \mapsto [\tilde{\omega} |||\tilde{\omega}|||^{-1}] = [\omega |||\omega|||^{-1}].$$

Se identificarmos cada classe $[\omega] \in \mathbb{H}H^n$ com o seu representante canônico $\tilde{\omega}$, teremos

$$\begin{aligned} \mathbb{H}H^n &\sim \{\omega = (1, \omega_2 \omega_1^{-1}, \dots, \omega_{n+1} \omega_1^{-1}) \in \mathbb{H}^{1,n} / (\omega_1, \dots, \omega_{n+1}) \in \mathcal{T}^{1,n}\} \cong \\ &\cong \{\omega = (0, \omega_2 \omega_1^{-1}, \dots, \omega_{n+1} \omega_1^{-1}) \in \mathbb{H}^{n+1} / -\omega_1 \bar{\omega}_1 + \dots + \omega_{n+1} \bar{\omega}_{n+1} < 0\} \cong \\ &\cong \{\omega = (\omega_2 \omega_1^{-1}, \dots, \omega_{n+1} \omega_1^{-1}) \in \mathbb{H}^n / \omega_2 \bar{\omega}_2 + \dots + \omega_{n+1} \bar{\omega}_{n+1} < \omega_1 \bar{\omega}_1\} = \\ &= \{\omega = (\omega_2 \omega_1^{-1}, \dots, \omega_{n+1} \omega_1^{-1}) \in \mathbb{H}^n / \omega_2 \bar{\omega}_2 \omega_1^{-1} \bar{\omega}_1^{-1} + \dots + \omega_{n+1} \bar{\omega}_{n+1} \omega_1^{-1} \bar{\omega}_1^{-1} < \omega_1 \bar{\omega}_1 \omega_1^{-1} \bar{\omega}_1^{-1} = 1\} \end{aligned}$$

(observe-se que $(\omega_1 \bar{\omega}_1) \omega_1^{-1} \bar{\omega}_1^{-1} = \omega_1^{-1} (\omega_1 \bar{\omega}_1) \bar{\omega}_1^{-1} = 1$, pois $\omega_1 \bar{\omega}_1 \in \mathbb{R}$)

e, portanto, $\mathbb{H}H^n \cong B^{4n}$ é, a menos de identificações, a bola aberta B^{4n} de raio 1 e centro 0 em $\mathbb{H}^n$. Em termos de nosso mergulho A , temos, precisamente,

$$A(B^{4n}) = \mathbb{H}H^n.$$

Em palavras, A identifica a bola B^{4n} com $\mathbb{H}H^n$. Podemos, portanto, utilizar coordenadas em $\mathbb{H}^n$ para objetos em $\mathbb{H}H^n$, através da aplicação A . Outro exemplo: a estrutura quaterniônica em $\mathbb{H}H^n$ é induzida via A pela estrutura quaterniônica de $\mathbb{H}P^{1,n}$, vendo-se $\mathbb{H}H^n$ como um aberto em $\mathbb{H}P^{1,n}$. Observe-se também que

$$A : S^{4n-1} = \partial B^{4n} \cong \partial \mathbb{H}H^n$$

(ou seja, A identifica a esfera S^{4n-1} com a fronteira ideal homogênea de $\mathbb{H}H^n$). Temos, portanto, um modelo para o espaço hiperbólico quaterniônico, conhecido como o modelo da bola, e a escolha de uma métrica adequada vai fornecer um modelo isométrico, como veremos adiante.

Figure 3: $\mathbb{H}H^n = A(B^{4n})$

Observe-se que

$$S^3 \longrightarrow Q^{4n+3} \longrightarrow \mathbb{H}H^n$$

é um fibrado principal, com grupo estrutural $G \cong S^3$.

Exemplo 10

O espaço hiperbólico complexo $\mathbb{CH}^n$ é definido por um fibrado $\mathbb{S}^1 \rightarrow Q^{2n+1} \rightarrow \mathbb{CH}^n$ cujo espaço total Q^{2n+1} é a variedade definida por

$$-z^2 - w^2 + \sum_{s=1}^n (x_s^2 + y_s^2) = -\lambda_{n+1} \overline{\lambda_{n+1}} + \sum_{s=1}^n \lambda_s \overline{\lambda_s} = -1$$

ou seja,

$$z^2 + w^2 = 1 + \sum_{s=1}^n x_s^2 + \sum_{s=1}^n y_s^2 ,$$

onde $\lambda_s = x_s + iy_s$, $s = 1, \dots, n$, $\lambda_{n+1} = z + iw$.

A ação

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{S}^1 \times Q^{2n+1} &\rightarrow Q^{2n+1} \\ (e^{it}, \omega) &\mapsto \varphi_t(\omega) = e^{it}\omega \end{aligned}$$

fornece

$$(x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n, z + iw) \mapsto (\alpha_1 + i\beta_1, \dots, \alpha_n + i\beta_n, \gamma + i\delta) ,$$

$\alpha_s + i\beta_s = x_s \cos t - y_s \sin t + i(x_s \sin t + y_s \cos t)$, $s = 1, \dots, n$, $\gamma + i\delta = z \cos t - w \sin t + i(z \sin t + w \cos t)$, e vemos que

$$\gamma^2 + \delta^2 = z^2 + w^2 = 1 + \sum_{s=1}^n x_s^2 + \sum_{s=1}^n y_s^2 = 1 + \sum_{s=1}^n \alpha_s^2 + \sum_{s=1}^n \beta_s^2 ,$$

ou seja, $\forall \eta = e^{it} \in \mathbb{S}^1$, tem-se $\varphi_t(Q^{2n+1}) \subset Q^{2n+1}$. Similarmente, $\varphi_t^{-1}(Q^{2n+1}) \subset Q^{2n+1}$, e logo $Q^{2n+1} = \varphi_t \varphi_t^{-1}(Q^{2n+1}) \subset \varphi_t(Q^{2n+1}) = Q^{2n+1}$. Então Q^{2n+1} é invariante por φ .

Q^{2n+1} é espaço total de um fibrado principal sobre $\mathbb{CH}^n$, com grupo estrutural $\cong \mathbb{S}^1$. E como $\mathbb{CH}^n$ é contrátil, qualquer fibrado sobre $\mathbb{CH}^n$ é trivial, e Q^{2n+1} é, topologicamente, um produto $H^{2n} \times \mathbb{S}^1$. Observemos que, quaisquer que sejam $\omega, \bar{\omega}$ na fibra $\mathbb{S}_q^1$, com $q \in Q^{2n+1}$, existe $\eta = e^{it} \in \mathbb{S}^1$ tal que $\varphi_t(\omega) = \eta\omega = \bar{\omega}$.

A situação em $\mathbb{HH}^n$ é similar à do exemplo acima. Cada $\xi \in \mathbb{S}^3$ é identificado com uma isometria que deixa invariante o "hiperbolóide quaterniônico" Q^{4n+3} e a ação $\tilde{\varphi}$ determina uma fibração principal em Q^{4n+3} , sobre $\mathbb{HH}^n$ com fibra típica $\mathbb{S}^3$. E como $\mathbb{HH}^n$ é contrátil, qualquer fibrado sobre $\mathbb{HH}^n$ é trivial e Q^{4n+3} é difeomorfo ao produto $H^{4n} \times \mathbb{S}^3$. Em particular, o fibrado tangente $T\mathbb{HH}^n$ é trivial, e podemos escolher, se necessário, um referencial global

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n}, \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial t_n} \right\} .$$

A ação $\tilde{\varphi} : Q^{4n+3} \times \mathbb{S}^3 \rightarrow Q^{4n+3}$ é isométrica, pois, $\forall \xi \in \mathbb{S}^3$,

$$\langle \omega \xi, \omega \xi \rangle = -\omega_1 \xi \overline{\omega_1 \xi} + \sum_{s=2}^{n+1} \omega_s \xi \overline{\omega_s \xi} = -\omega_1 \xi \bar{\omega}_1 + \sum_{s=2}^{n+1} \omega_s \xi \bar{\omega}_s = -\omega_1 \bar{\omega}_1 + \sum_{s=2}^{n+1} \omega_s \bar{\omega}_s = \langle \omega, \omega \rangle$$

(observe-se que $\langle \omega, \omega \rangle = -\sum_{\nu=0}^3 x_{\nu 1}^2 + \sum_{s=2}^{n+1} \sum_{\nu=0}^3 x_{\nu s}^2 \in \mathbb{R}$, $\forall \omega$).

Em $\mathbb{HH}^n$ consideramos a topologia quociente. $U \subset \mathbb{HH}^n$ é aberto sse $\tilde{\pi}^{-1}(U) \subset Q^{4n+3}$ é aberto. Segue-se que $\tilde{\pi}$ é aberta. Pois se $V \subset Q^{4n+3}$ é aberto, então, para todo $\xi \in \mathbb{S}^3$, a imagem

$$V\xi = \{\omega \xi / \omega \in V\}$$

é aberta em Q^{4n+3} (uma vez que $\omega \mapsto \omega \xi$ é um difeomorfismo de Q^{4n+3}), e logo $\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{\pi}(V)) = \bigcup_{\xi \in \mathbb{S}^3} V\xi$ é aberto em Q^{4n+3} .

Observação

Se definíssemos variedade quaterniônica por exigir que M admita um atlas tal que as mudanças tenham derivada quaterniônica, como definida no §1, então, por exemplo, $\mathbb{H}P^n$ admitiria o atlas $(U_\beta, \varphi_\beta)_{\beta \in I}$ tal que $U_\beta = \{[(\omega_1, \dots, \omega_{n+1})] \mid \omega_\beta \neq 0\}$ e $\varphi_\beta : U_\beta \rightarrow \mathbb{R}^{4n}$ é dada por

$$[(\omega_1, \dots, \omega_{n+1})] \mapsto (\omega_1 \omega_\beta^{-1}, \dots, \omega_{\beta-1} \omega_\beta^{-1}, \dots, \omega_{\beta+1} \omega_\beta^{-1}, \dots, \omega_{n+1} \omega_\beta^{-1}).$$

E teríamos

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1}(\omega_1, \dots, \omega_{\beta-1}, \omega_{\beta+1}, \dots, \omega_\alpha, \dots, \omega_{n+1}) &= \\ = \varphi_\alpha([(\omega_1, \dots, \omega_{\beta-1}, 1, \omega_{\beta+1}, \dots, \omega_\alpha, \dots, \omega_{n+1})]) &= \\ = \varphi_\alpha([(\omega_1 \omega_\alpha^{-1}, \dots, \omega_{\beta-1} \omega_\alpha^{-1}, \omega_\alpha^{-1}, \omega_{\beta+1} \omega_\alpha^{-1}, \dots, 1, \dots, \omega_{n+1} \omega_\alpha^{-1})]) &= \\ = (\omega_1 \omega_\alpha^{-1}, \dots, \omega_{\beta-1} \omega_\alpha^{-1}, \omega_\alpha^{-1}, \omega_{\beta+1} \omega_\alpha^{-1}, \dots, \omega_{\alpha-1} \omega_\alpha^{-1}, \omega_{\alpha+1} \omega_\alpha^{-1}, \dots, \omega_{n+1} \omega_\alpha^{-1}), \end{aligned}$$

que não é "holomorfa" no sentido quaterniônico, pois, por exemplo,

$$(\omega_1, \dots, \omega_{\beta-1}, \omega_{\beta+1}, \dots, \omega_\alpha, \dots, \omega_{n+1}) \mapsto \omega_\alpha^{-1}$$

não tem derivada quaterniônica.

Em geral, não existem atlas biholomorfos no sentido quaterniônico. Portanto, uma teoria de Kähler não existe como no caso complexo. Definem-se as variedades quaterniônicas por um fibrado vetorial que determina uma estrutura quaterniônica em cada espaço tangente e uma variedade M é chamada Kählerian-quaterniônica se existem 1-formas locais α, β, γ tais que

$$\begin{aligned} \nabla_X \mathfrak{z} &= \gamma(X)j - \beta(X)k \\ \nabla_X j &= \alpha(X)k - \gamma(X)\mathfrak{z} \\ \nabla_X k &= \beta(X)\mathfrak{z} - \alpha(X)j \end{aligned} \quad \forall X \in \mathfrak{X}^\infty(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M e $\mathfrak{z}, j, k$ é a estrutura quaterniônica [16]. Alternativamente, $\nabla(\mathfrak{z}, j, k) = -(\alpha, \beta, \gamma) \times (\mathfrak{z}, j, k)$. Prova-se que M é Kählerian-quaterniônica sse a 4-forma fundamental Ω definida na seção anterior satisfaz $\nabla\Omega = 0$.

Observação

Todas as variedades quaterniônicas são orientáveis. Em verdade, uma variedade M é chamada *quase quaterniônica* se admite um atlas $\mathcal{A}$ cujas vizinhanças coordenadas U estão munidas de estruturas quaterniônicas. Ou melhor, existe um fibrado vetorial (E, π, M, V) de posto 3 (definido por $(\mathfrak{z}, j, k)$) sobre M tal que a fibra sobre q é o espaço vetorial V_q gerado por $\{\mathfrak{z}_q, j_q, k_q\}$, a estrutura quaterniônica em $T_q M$, $\forall q \in U, \forall (U, x) \in \mathcal{A}$. Se $q \in U \cap \tilde{U}$, então (lembramos que $\mathfrak{z}_q, j_q, k_q$ são operadores lineares em $T_q M$)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{z}}_q &= s_{11}\mathfrak{z}_q + s_{12}j_q + s_{13}k_q \\ \tilde{j}_q &= s_{21}\mathfrak{z}_q + s_{22}j_q + s_{23}k_q \\ \tilde{k}_q &= s_{31}\mathfrak{z}_q + s_{32}j_q + s_{33}k_q \end{aligned} \quad , \quad s_{\alpha\beta} \in C^\infty(U \cap \tilde{U}) \quad , \alpha, \beta = 1, 2, 3$$

e segue-se da definição de estruturas quaterniônicas em espaços vetoriais que a matriz $(s_{\alpha\beta})$ está em $SO(3)$ (por exemplo,

$$-I = \tilde{\mathfrak{z}}_q^2 = (-s_{11}^2 - s_{12}^2 - s_{13}^2)I \rightarrow s_{11}^2 + s_{12}^2 + s_{13}^2 = 1, \text{ etc}).$$

E como q, U e $\tilde{U}$ são quaisquer, concluímos que o atlas $\mathcal{A}$ é coerente.

Observação

Sabe-se [25] que toda variedade orientável tem holonomia em um grupo ortogonal. Em outras palavras, se M é orientável, existem m, n tais que $\text{hol } M < SO(m, n)$. Em consequência (e pela observação acima), se M é variedade quaterniônica, existem r, s tais que

$$\text{hol } M < SO(4r, 4s).$$

Em particular, $\text{hol } \mathbb{H}^n < SO(4, 4n)$. Mais precisamente, $\text{hol } \mathbb{H}^n < Sp(1, n) \times \mathbb{S}^3$. Observe-se que $\text{hol } \mathbb{H}^n \neq 0$ (como $\mathbb{H}^n$ é simplesmente conexo, a holonomia coincide com a holonomia restrita. Logo a conexão de $\mathbb{H}^n$ não é flat).

Figure 4: $\text{hol } \mathbb{H}^n \neq 0$.

Observação

Se $G = Sp(1, n)$ e $Q = Q^{4n+3}$, a ação $\tilde{\varphi} : G \times \mathbb{H}^{1, n} \rightarrow \mathbb{H}^{1, n}$ é isométrica e induz uma ação isométrica $\varphi : G \times Q \rightarrow Q$. Realmente, se $A \in G$, então, quaisquer que sejam $v, w \in \mathbb{H}^{1, n}$, temos

$$\begin{aligned} \langle Av, Aw \rangle &= -\sum_k \overline{A_{1k} v_k} \sum_l A_{1l} w_l + \sum_{s=2}^{n+1} \sum_k \overline{A_{sk} v_k} \sum_l A_{sl} w_l = \\ &= -\sum_{k,l} \overline{A_{1k} v_k} A_{1l} w_l + \sum_{k,l} \sum_{s=2}^{n+1} \overline{A_{sk} v_k} A_{sl} w_l = -\sum_{k,l} \overline{v_k} \overline{A_{1k}} A_{1l} w_l + \sum_{k,l} \sum_{s=2}^{n+1} \overline{v_k} \overline{A_{sk}} A_{sl} w_l = \\ &= \sum_{k,l} \overline{v_k} \left(-\overline{A_{1k}} A_{1l} + \sum_{s=2}^{n+1} \overline{A_{sk}} A_{sl} \right) w_l = \sum_k \overline{v_k} \left(-\overline{A_{1k}} A_{1k} + \sum_{s=2}^{n+1} \overline{A_{sk}} A_{sk} \right) w_k = \\ &= -\overline{v_1} w_1 + \sum_{k=2}^{n+1} \overline{v_k} w_k = \langle v, w \rangle, \end{aligned}$$

logo $\tilde{\varphi}$ é isométrica.

Obviamente, $\tilde{\varphi}$ deixa Q invariante ($\langle w, w \rangle = -1 \rightarrow \langle Aw, Aw \rangle = -1$). Portanto, $\tilde{\varphi}$ induz uma ação isométrica $\varphi : G \times Q \rightarrow Q$. Afirmamos que φ é transitiva.

Realmente, se $q, \tilde{q} \in Q$, então $\|q\|^2 = \|\tilde{q}\|^2 = -1$. Sejam $r = -\frac{\langle q, \tilde{q} \rangle}{|\langle q, \tilde{q} \rangle|} \tilde{q} = \xi^{-1} \tilde{q}$ e $m = q + r$ (observe-se que $m \notin Q$). Seja ι a inversão

$$\iota : \omega \mapsto -\omega + 2 \frac{\langle \omega, m \rangle}{\|m\|^2} m.$$

Então

$$\begin{aligned} \|\iota(\omega)\|^2 &= \|\omega\|^2 - 2\langle \omega, \frac{\langle \omega, m \rangle}{\|m\|^2} m \rangle - 2\langle \frac{\langle \omega, m \rangle}{\|m\|^2} m, \omega \rangle + 4\langle \frac{\langle \omega, m \rangle}{\|m\|^2} m, \frac{\langle \omega, m \rangle}{\|m\|^2} m \rangle = \\ &= \|\omega\|^2 - \frac{2}{\|m\|^2} \langle \omega, m \rangle \overline{\langle \omega, m \rangle} - \frac{2}{\|m\|^2} \langle \omega, m \rangle \langle m, \omega \rangle + \frac{4|\langle \omega, m \rangle|^2}{\|m\|^2} = \|\omega\|^2 \end{aligned}$$

e logo $\iota \in Sp(1, n)$.

Observemos que $\langle q, r \rangle = -\frac{\langle q, \tilde{q} \rangle}{|\langle q, \tilde{q} \rangle|} \overline{\langle q, \tilde{q} \rangle} = -|\langle q, \tilde{q} \rangle| < 0$, e que

$$\|r\|^2 = \left\langle \frac{-\langle q, \tilde{q} \rangle}{|\langle q, \tilde{q} \rangle|} \tilde{q}, \frac{-\langle q, \tilde{q} \rangle}{|\langle q, \tilde{q} \rangle|} \tilde{q} \right\rangle = \frac{\langle q, \tilde{q} \rangle}{|\langle q, \tilde{q} \rangle|^2} \langle \tilde{q}, \tilde{q} \rangle \overline{\langle q, \tilde{q} \rangle} = -1$$

(ou seja, $r \in Q$), e logo $\|m\|^2 = \|q\|^2 + \|r\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle q, r \rangle = -2 + 2\langle q, r \rangle < 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} \iota(q) &= -q + 2 \frac{\langle q, q+r \rangle}{\langle q+r, q+r \rangle} (q+r) = -q + 2 \frac{-1 + \langle q, r \rangle}{-2 + 2\langle q, r \rangle} q + 2 \frac{-1 + \langle q, r \rangle}{-2 + 2\langle q, r \rangle} r = \\ &= -q + \frac{-q + \langle q, r \rangle q - r + \langle q, r \rangle r}{-1 + \langle q, r \rangle} = -q + \frac{-(q+r) + \langle q, r \rangle (q+r)}{-1 + \langle q, r \rangle} = -q + q + r = r \end{aligned}$$

e, similarmente, $\iota(r) = q$.

E como a multiplicação μ_ξ , definida por $\mu_\xi(\omega) = \xi\omega$ é isometria (pois $\xi \in \mathbb{S}^3$) e satisfaz $\mu_\xi(r) = \tilde{q}$, temos que

$$g = \mu_\xi \iota \in Sp(1, n) \quad e \quad g(q) = \tilde{q}.$$

Segue-se que Q é variedade homogênea.

Se $N \in Q$ e $G_N < G$ é o subgrupo de isotropia de N , então $\overline{G_N} = G_N$ e $Q \cong G/G_N$.

Além disso, como a ação $\varphi : G \times Q \rightarrow Q$ é isométrica, a estrutura $\langle, \rangle$ em Q é G -invariante.

Indiquemos com U uma bola geodésica (fortemente convexa) em Q com centro N . Se U é suficientemente pequena, então por cada $q \in U$ passa uma única geodésica normalizada $\gamma : I \rightarrow Q$ tal que $\gamma(0) = N$ e que realiza a distância de N a q , com o segmento de N a q contido em U .

Seja $t \in I$ tal que $\gamma(t) = q$. Como U é simétrica relativamente a N , temos $\gamma(-t) \in U$, sempre que $q \in U$. É possível demonstrar que a simetria geodésica em N , dada por $q \mapsto \gamma(-t)$, é uma isometria involutiva em U , cujo único ponto fixo em U é N . Realmente, se H é um hiperbolóide 2-dimensional "canônico" mergulhado em $H^{4n} \subset H^{4n} \times \mathbb{S}^3 = Q$, a geometria em H é a geometria hiperbólica plana (em outras palavras, H é um modelo para o plano hiperbólico). E como Q tem curvatura constante (exemplo 11 a seguir), por cada ponto e ortogonalmente a cada direção passa um tal H , com curvatura seccional constante -1 . Sejam então q e r dois pontos em U e sejam γ_q e γ_r as geodésicas que ligam N a q e N a r , respectivamente. Seja L o 2-plano real totalmente geodésico gerado por γ_q e γ_r (L é a imagem pela aplicação exponencial de um 2-plano real tangente em N a ambas as geodésicas). A geometria de L é, então, a geometria hiperbólica plana e, em particular, são válidas em L as leis de congruência de triângulos. Se s_N é a simetria geodésica em N , então os triângulos qNr e $s_N(q)Ns_N(r)$ têm um ângulo igual entre dois lados iguais, respectivamente, e logo são congruentes. E logo a distância de $s_N(q)$ a $s_N(r)$ é igual à distância de q a r .

Segue-se que s_N é isometria local, e como N era qualquer, concluímos que Q é um espaço localmente simétrico (por exemplo, o tensor curvatura R de Q satisfaz $\nabla R = 0$ em uma vizinhança de cada ponto, e logo $\nabla R \equiv 0$).

A ação transitiva $Q \times G \rightarrow Q$ induz uma ação transitiva

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^n \times G &\rightarrow \mathbb{H}^n \\ ([\omega], g) &\mapsto [\omega g] \end{aligned}$$

logo $\mathbb{H}^n$ é uma variedade homogênea. Além disso, $\mathbb{H}^n$ é completo, simplesmente conexo e localmente simétrico (como $\pi : Q \rightarrow \mathbb{H}^n$ é submersão Riemanniana, se X, Y, Z forem paralelos ao longo de $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}^n$, teremos $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ paralelos ao longo do levantamento horizontal $\bar{\gamma}$ de γ e, como Q é localmente simétrico, $\bar{R}(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Z}$ será paralelo ao longo de $\bar{\gamma}$, e logo $R(X, Y)Z$ será paralelo ao longo de γ). E segue-se que $\mathbb{H}^n$ é um espaço (globalmente) simétrico, de tipo não compacto.

Exemplo 11

A 3-variedade $Q^3 \cong H^2 \times \mathbb{S}^1$, fibrado de círculos sobre $\mathbb{C}H^1$, é parametrizada em $\mathbb{C}^{1,1} \sim \mathbb{R}^{2,2}$ por

$$X(u, v, w) = (\cosh u \cosh v \cos w, \cosh u \cosh v \sin w, \cosh u \sinh v, \sinh u)$$

o que fornece a expressão da métrica

$$ds^2 = -dx_1^2 - dy_1^2 + dx_2^2 + dy_2^2 = du^2 + \cosh^2 u dv^2 - \cosh^2 u \cosh^2 v dw^2.$$

A inversa da matriz dos g_{ij} é

$$(g^{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sech}^2 u & 0 \\ 0 & 0 & -\operatorname{sech}^2 u \operatorname{sech}^2 v \end{bmatrix}$$

e os símbolos de Christoffel são

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \tanh u & \Gamma_{22}^1 &= -\sinh u \cosh u \\ \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \tanh v & \Gamma_{33}^1 &= \sinh u \cosh u \cosh^2 v \\ \Gamma_{33}^2 &= \sinh v \cosh v & \Gamma_{ij}^k &= 0, \text{ nos outros casos.} \end{aligned}$$

Segue-se que

$$R_{ijij} = \sum_{s=1}^3 R_{iji}^s g_{sj} = R_{ij1}^1 g_{1j} + R_{ij2}^2 g_{2j} + R_{ij3}^3 g_{3j}$$

e logo

$$R_{i1i1} = R_{i1i}^1 \quad R_{i2i2} = R_{i2i}^2 \cosh^2 u \quad R_{i3i3} = -R_{i3i}^3 \cosh^2 u \cosh^2 v.$$

Temos então

$$\begin{aligned} R_{121}^2 \cosh^2 u &= R_{1212} = R_{2121} = R_{212}^1 & -R_{131}^3 \cosh^2 u \cosh^2 v &= R_{1313} = R_{3131} = R_{313}^1 \\ -R_{232}^3 \cosh^2 u \cosh^2 v &= R_{2323} = R_{3232} = R_{323}^2 \cosh^2 u \end{aligned}$$

e, portanto,

$$R_{212}^1 = -\cosh^2 u \quad R_{313}^1 = R_{323}^2 = \cosh^2 u \cosh^2 v$$

Segue-se que

$$R_{1212} = -\cosh^2 u \quad R_{1313} = \cosh^2 u \cosh^2 v \quad R_{2323} = \cosh^4 u \cosh^2 v$$

e obtemos

$$\begin{aligned} K_{12} &= \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22}} = \frac{-\cosh^2 u}{\cosh^2 u} = -1 \\ K_{13} &= \frac{R_{1313}}{g_{11}g_{33}} = \frac{\cosh^2 u \cosh^2 v}{-\cosh^2 u \cosh^2 v} = -1 \\ K_{23} &= \frac{R_{2323}}{g_{22}g_{33}} = \frac{\cosh^4 u \cosh^2 v}{\cosh^2 u (-\cosh^2 u \cosh^2 v)} = -1 \end{aligned}$$

Observação

Similarmente ao caso complexo, B^{4n} é munida de uma métrica de Bergman quaterniônica $\langle, \rangle$ que é a restrição a $Q^{4n+3}/S^3 \sim \mathbb{H}H^n$ de uma forma suprasimplética que define uma estrutura Kähler-quaterniônica no quociente $\mathbb{H}^{1,n}/\mathbb{H}^* \cong \mathbb{H}P^{1,n}$, e o tensor métrico tem a mesma expressão que o de Bergman, se substituirmos a conjugação complexa pela conjugação quaterniônica. Em verdade, $\mathbb{H}H^n$ pode ser visto como um aberto em $\mathbb{H}P^{1,n}$, obtendo-se a estrutura por restrição de uma métrica de Fubini-Study generalizada. Apresentamos abaixo uma síntese das idéias envolvidas na construção de tal métrica.

Se definirmos o potencial $f : \mathbb{H}^{1,n} \rightarrow \mathbb{H}$ por

$$f(X) = -\langle X, X \rangle$$

(onde $\langle, \rangle$ é a estrutura supraHermitiana em $\mathbb{H}^{1,n}$), teremos $Q^{4n+3} = f^{-1}(1)$ e

$$A(B^{4n}) = \mathbb{H}H^n \sim Q^{4n+3}/\approx = f^{-1}(1)/\approx \subseteq A(\mathbb{H}^n).$$

Obtemos, então, $\mathbb{H}H^n$ como o quociente suprasimplético de um nível de f (nível 1) por um subgrupo de isometrias. Escrevendo $\hat{\omega} = (\omega_2 \omega_1^{-1}, \dots, \omega_{n+1} \omega_1^{-1})$ para $\omega \in \mathcal{T}^{1,n} \subseteq (\mathbb{H}^{1,n})$, temos

$$A(\hat{\omega}) = [\hat{\omega}],$$

onde $\hat{\omega} = (1, \hat{\omega})$. Com a identificação da classe $[\omega] = [\hat{\omega}]$ com o representante canônico $\hat{\omega}$, vemos que

$$f \circ A(\hat{\omega}) \sim f(\hat{\omega}) = f(1, \hat{\omega}) = -\langle (1, \hat{\omega}), (1, \hat{\omega}) \rangle = 1 - \|\omega\|^2$$

A álgebra graduada $\Omega^*(\mathbb{H}H^n)$ das formas diferenciais em $\mathbb{H}H^n$ admite a decomposição

$$\Omega^* = \bigoplus_k \Omega^k = \bigoplus_k \bigoplus_{r+s+t+\tau=k} \Omega^{r,s,t,\tau}$$

e a derivada exterior satisfaz

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \eta_3) &= d\omega \wedge \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \eta_3 + \omega \wedge d\eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \eta_3 + \omega \wedge \eta_1 \wedge d\eta_2 \wedge \eta_3 + \omega \wedge \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge d\eta_3 = \\ &= \partial(\omega \wedge \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \eta_3) + ({}^1\partial + {}^2\partial + {}^3\partial)(\omega \wedge \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \eta_3) = (\partial + \bar{\partial})(\omega \wedge \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \eta_3) \end{aligned}$$

(onde ${}^1\partial : \Omega^{r,s,t,\tau} \rightarrow \Omega^{r,s+1,t,\tau}$, etc.) Temos

$$\partial \langle \omega, \omega \rangle = \partial \left(\sum g_{rs} \varphi_r \otimes \varphi_s \right) (\omega, \omega) = \sum d(g_{rs} \varphi_r) \otimes \varphi_s (\omega, \omega) = \langle d\omega, \omega \rangle.$$

Similarmente,

$$\bar{\partial} \langle \omega, \omega \rangle = \langle \omega, d\omega \rangle.$$

Observemos então que $(X, Y) \mapsto -\text{Re}(i\langle X, Y \rangle)$ é estrutura simplética (complexa) em $TM \otimes (\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R})$ (onde $M = \mathbb{H}H^n \sim f^{-1}(1)/\approx$ e $TM \sim ((TM)_{\mathbb{R}}, \imath, j, k)$), que é um somando (não direto) da quaternificação

$$TM \otimes \mathbb{H} = TM \otimes (\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R} \oplus j\mathbb{R} \oplus k\mathbb{R}).$$

E logo, pelo que sabemos do caso complexo, temos

$$\left. \begin{aligned} i \partial {}^1\partial f &: (X, Y) \mapsto -\text{Re}(i\langle X, Y \rangle) \\ j \partial {}^2\partial f &: (X, Y) \mapsto -\text{Re}(j\langle X, Y \rangle) \\ k \partial {}^3\partial f &: (X, Y) \mapsto -\text{Re}(k\langle X, Y \rangle) \end{aligned} \right\} \rightarrow \partial \bar{\partial} f = -i(i\partial {}^1\partial f) - j(j\partial {}^2\partial f) - k(k\partial {}^3\partial f) = \text{Vet}\langle X, Y \rangle.$$

Figure 5: A quaternificação é soma (não direta) de três complexificações.

Similarmente ao caso complexo, temos que a estrutura suprasimplética $\partial\bar{\partial}\ln f$ coincide com a estrutura $\partial\bar{\partial}f$ no nível 1 de f (ou seja, as duas estruturas são iguais, se restritas a $f^{-1}(1)$) e, portanto, para $\omega \in f^{-1}(1)$,

$$\begin{aligned} \text{Ver} \langle \omega, \omega \rangle &= \partial\bar{\partial}f(\omega) = \partial\bar{\partial}\ln(f \circ A) = \partial\bar{\partial}\ln(1 - \|\omega\|^2) = \partial \left(\frac{-\langle \omega, d\omega \rangle}{1 - \|\omega\|^2} \right) = \\ &= \frac{-(1 - \|\omega\|^2)\langle d\omega, d\omega \rangle - \langle \omega, d\omega \rangle \wedge \langle d\omega, \omega \rangle}{(1 - \|\omega\|^2)^2}. \end{aligned}$$

Em coordenadas, o tensor métrico é

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{(1 - \langle \omega, \omega \rangle)\langle d\omega, d\omega \rangle + \langle \omega, d\omega \rangle \wedge \langle d\omega, \omega \rangle}{(1 - \langle \omega, \omega \rangle)^2} = \\ &= \frac{1}{(1 - \|\omega\|^2)^2} \left((1 - \|\omega\|^2) \sum_{s=1}^n d\omega_s \wedge d\bar{\omega}_s + \sum_{r=1}^n d\omega_r \bar{\omega}_r \wedge \sum_{s=1}^n \omega_s d\bar{\omega}_s \right) \end{aligned}$$

(onde $\langle , \rangle$ é a estrutura supraHermitiana em $\mathbb{H}^{1,n}$).

Observação

A métrica de Bergman (complexa) é a métrica que define a estrutura Kähleriana em $\mathbb{C}H^n$. Realmente, seja

$$\Phi(X, Y) = \text{Im} \langle X, Y \rangle$$

onde $\langle , \rangle$ é a estrutura Hermitiana canônica em $\mathbb{C}^{1,n}$, e seja $f(X) = -\frac{1}{2}\langle X, X \rangle$. Então $\Phi = 2i\partial\bar{\partial}f$. Segue-se [5] que

$$\partial\bar{\partial}\ln f = \frac{\partial\bar{\partial}}{f} - \frac{\partial f}{f} \wedge \frac{\bar{\partial}f}{f}$$

e logo, com $\tilde{\Phi} = 2i\partial\bar{\partial}\ln f$, temos $\Phi = k\tilde{\Phi}$ em $f^{-1}(k)$, $\forall k > 0$. E portanto, em $f^{-1}(k)$,

$$\Phi = 2ki\partial\bar{\partial}\ln(1 - \|z\|^2) = 2ki\partial\bar{\partial}\frac{-\langle z, dz \rangle}{1 - \|z\|^2} = -2ki\frac{(1 - \|z\|^2)\langle dz, dz \rangle + \langle z, dz \rangle \wedge \langle dz, z \rangle}{(1 - \|z\|^2)^2},$$

o que fornece o tensor métrico de Bergman em $f^{-1}(k)/\mathbb{S}^1 \sim \mathbb{C}H^n$.

Observação

No caso do espaço hiperbólico real $\mathbb{R}H^n$, como se sabe, a bola B^n é a imagem pela projeção estereográfica hiperbólica do (modelo do) hiperbolóide $H^n \subseteq \mathbb{R}^{1,n}$, definido pela equação

$$\langle x, x \rangle = -1,$$

onde

$$\langle x, y \rangle = -x_{n+2}y_{n+2} + \sum_{s=1}^{n+1} x_s y_s.$$

Se $n=2$, temos o hiperbolóide $H^2 : z^2 - x^2 - y^2 = 1$ em $\mathbb{R}^{1,2}$ e a bola $B^2 : u^2 + v^2 < 1$. Se H^2 tem a métrica induzida (pull back da métrica do espaço ambiente) pela parametrização

$$\varphi(r, \theta) = (\sinh r \cos \theta, \sinh r \sin \theta, \cosh r)$$

então temos

$$g_{11} = \langle \varphi_r, \varphi_r \rangle = 1, \quad g_{12} = g_{21} = \langle \varphi_r, \varphi_\theta \rangle = 0, \quad g_{22} = \langle \varphi_\theta, \varphi_\theta \rangle = \sinh^2 r$$

e

$$ds^2 = g_{11}dr^2 + g_{22}d\theta^2 = dr^2 + \sinh^2 r d\theta^2.$$

Em seguida, passando ao modelo da bola pela substituição

$$X = \tanh r \cos \theta, \quad Y = \tanh r \sin \theta,$$

temos (note-se que $r = \operatorname{arctanh} \sqrt{X^2 + Y^2}$, $\theta = \arctan \frac{Y}{X}$, se $X \neq 0$, etc.)

$$dr^2 = \frac{1}{(1 - X^2 - Y^2)^2} \left(\frac{X^2 dX^2 + Y^2 dY^2 + 2XY dX dY}{X^2 + Y^2} \right),$$

$$d\theta^2 = \frac{X^2 dY^2 + Y^2 dX^2 - 2XY dX dY}{(X^2 + Y^2)^2}$$

e

$$\sinh^2 r = \frac{X^2 + Y^2}{1 - X^2 - Y^2}.$$

Segue-se que

$$ds^2 = dr^2 + \sinh^2 r d\theta^2 = \frac{(1 - Y^2)dX^2 + (1 - X^2)dY^2 + 2XY dX dY}{(1 - X^2 - Y^2)^2}.$$

Essa é a métrica conhecida como a métrica de Beltrami-Klein. Historicamente, ela foi a primeira métrica em um modelo de plano hiperbólico [26]. Com essa métrica no disco B^2 , identificado com o plano hiperbólico real $\mathbb{R}H^2$, a fibração canônica torna-se uma submersão Riemanniana e o plano hiperbólico pode ser identificado com um quociente de qualquer um dos níveis $f^{-1}(k)$, com $k > 0$, da função f dada por

$$f(X) = -\frac{1}{2}\langle X, X \rangle$$

(notemos que o nível $k = \frac{1}{2}$ é o hiperbolóide H^2). Observe-se que, para todo ponto (x, y, z) em qualquer nível k , o ponto $(-x, -y, -z)$ tem a mesma imagem na bola B^2 e é, portanto, conveniente identificar o plano hiperbólico com o quociente $f^{-1}(k)/\mathbf{T}$, onde $\mathbf{T} \cong \mathbb{Z}_2$ é o centro do grupo $SO((1, 1), \mathbb{R})$ (isso é como ver o hiperbolóide H^2 como um espaço de recobrimento de duas folhas). A métrica de Beltrami-Klein generaliza-se naturalmente ao modelo da bola B^n para o espaço hiperbólico real $\mathbb{R}H^n$, qualquer que seja n . Mais que isso: a métrica de Beltrami-Klein (generalizada) estende-se naturalmente à métrica de Bergman no espaço hiperbólico complexo $\mathbb{C}H^n$, tornando a projeção $Q^{2n+1} \rightarrow B^{2n}$ uma submersão Riemanniana, e realiza a ação isométrica de $SU(1, n)$. Alternativamente, podemos dizer que a bola $B^{2n} \subseteq \mathbb{C}^n$ é um modelo para o espaço hiperbólico complexo $\mathbb{C}H^n$, visto como o quociente simplético

$$f^{-1}(k)/\mathbf{T}$$

onde $\mathbf{T} \cong \mathbb{S}^1$ é o centro do grupo $SU(1, n)$ (isso é como ver o "hiperbolóide complexo" $Q^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{1, n}$ como o espaço total de um fibrado (principal) com base $\mathbb{C}H^n$ e grupo estrutural $\mathbb{S}^1$). Em coordenadas,

a métrica de Bergman $\langle\langle, \rangle\rangle$ tem a expressão

$$ds^2 = \frac{1}{(1 - \|z\|^2)^2} \left((1 - \|z\|^2) \sum_{s=1}^n |dz_s|^2 + \sum_{s=1}^n \bar{z}_s dz_s \sum_{r=1}^n z_r d\bar{z}_r \right),$$

e é, essencialmente (a menos de renormalizações), a métrica que torna a ação $SU(1, n) \times \mathbb{C}H^n \rightarrow \mathbb{C}H^n$ uma ação isométrica. É razoável pensar, portanto, que, pela restrição de $\langle\langle, \rangle\rangle$ a uma subvariedade totalmente geodésica totalmente real de $\mathbb{C}H^n \sim \mathbb{B}^{2n}$, reobtenha-se a métrica de Beltrami-Klein para o modelo da bola no espaço hiperbólico real n-dimensional $\mathbb{R}H^n$. E, realmente, $\mathbb{R}H^n$ é caracterizado como o conjunto dos pontos fixos em $\mathbb{C}H^n$ de uma isometria involutiva (antiholomorfa), que é a estrutura real canônica ρ em $\mathbb{C}H^n$ (a conjugação), e logo $\mathbb{R}H^n$ é, em particular, uma subvariedade totalmente geodésica totalmente real maximal em $\mathbb{C}H^n$ (cada espaço tangente $T_z \mathbb{R}H^n$ é forma real de um espaço tangente $T_z \mathbb{C}H^n$, $z \in \mathbb{R}H^n$). Um cálculo simples fornece

$$\begin{aligned} (1 - \|z\|^2) \sum_{s=1}^n |dz_s|^2 + \sum_{s=1}^n \bar{z}_s dz_s \sum_{r=1}^n z_r d\bar{z}_r &= \sum_{s=1}^n |dz_s|^2 - \sum_{s,r} |z_r|^2 |dz_s|^2 + \sum_{s=1}^n |z_s|^2 |dz_s|^2 + \sum_{s \neq r} z_s d\bar{z}_s \bar{z}_r dz_r = \\ &= \sum_{s=1}^n |dz_s|^2 - \sum_{s \neq r} |z_r|^2 |dz_s|^2 + \sum_{s \neq r} z_s d\bar{z}_s \bar{z}_r dz_r = \sum_{s=1}^n (1 - \sum_{s \neq r} |z_r|^2) |dz_s|^2 + \sum_{s < r} (z_s d\bar{z}_s \bar{z}_r d\bar{z}_r + z_r d\bar{z}_r \bar{z}_s d\bar{z}_s), \end{aligned}$$

e logo a métrica de Bergman $\langle\langle, \rangle\rangle$ tem a expressão

$$ds^2 = \frac{1}{(1 - \|z\|^2)^2} \left(\sum_{s=1}^n \left(1 - \sum_{s \neq r} |z_r|^2 \right) |dz_s|^2 + 2 \operatorname{Re} \sum_{s < r} (z_s d\bar{z}_s \bar{z}_r dz_r) \right).$$

No modelo de Beltrami-Klein para o espaço hiperbólico real n-dimensional, a expressão da métrica é

$$ds^2 = \frac{1}{(1 - \sum x_s^2)^2} \left(\sum_{s=1}^n \left(1 - \sum_{s \neq r} x_r^2 \right) dx_s^2 + 2 \sum_{s < r} (x_s x_r dx_s dx_r) \right),$$

que é, obviamente, a restrição de $\langle\langle, \rangle\rangle$ ao conjunto dos pontos $z \in \mathbb{B}^{2n} \sim \mathbb{C}H^n$ tais que $\rho(z) = \bar{z} = z$.

Vamos concluir este capítulo com algumas palavras sobre a curvatura de $\mathbb{H}H^n$. Indiquemos com π a restrição a Q^{4n+3} da projeção $\mathcal{T}^{1,n} \rightarrow \mathcal{T}^{1,n}/\sim$ e identifiquemos $\mathcal{T}^{1,n}/\sim$ com $Q^{4n+3}/\approx$, que chamaremos $\mathbb{H}H^n$. Então temos $\pi : Q^{4n+3} \rightarrow \mathbb{H}H^n$ (uma fibração de Hopf generalizada).

Lembremos que, $\forall [\omega] \in \mathbb{H}H^n$, $\exists \tilde{\omega} = \omega / \|\omega\|^{-1} \in Q^{4n+3}$ (com $\omega \in \pi^{-1}([\omega])$) tal que $\pi(\tilde{\omega}) = \pi(\omega) = [\omega]$. Logo π é sobre.

Se $w \in T_{[\omega]} \mathbb{H}H^n$, seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}H^n$ tal que $\gamma(0) = [\omega]$, $\gamma'(0) = w$, e seja $\beta : I \rightarrow Q^{4n+3}$ levantamento de γ por $\omega \in \pi^{-1}([\omega])$ (observemos que a fibra típica e o espaço total da fibração $(Q^{4n+3}, \pi, \mathbb{H}H^n, \mathbb{S}^3)$ são variedades conexas por caminhos, e logo β existe). Então, com $w = \beta'(0) \in T_{\omega} Q^{4n+3}$, temos

$$\pi'(\omega)w = \pi'(\beta(0))\beta'(0) = \gamma'(0) = w,$$

e segue-se que $\pi'(\omega)$ é sobre, $\forall \omega \in Q^{4n+3}$, ou seja, π é submersão. A seguir definamos, $\forall \omega \in \mathcal{T}^{1,n}$, $\forall V, W \in T_{\omega} \mathcal{T}^{1,n}$,

$$\langle\langle V, W \rangle\rangle_{\omega} = \frac{\operatorname{Re} \langle V, W \rangle_{\omega}}{\|\omega\|^2}$$

(onde $\langle V, W \rangle_{\omega} = -v_1 \bar{w}_1 + \sum_{s=2}^{n+1} v_s \bar{w}_s$).

Se $\omega \in Q^{4n+3}$, temos $\langle\langle V, W \rangle\rangle_{\omega} = -\operatorname{Re} \langle V, W \rangle_{\omega}$.

A restrição de $\langle\langle, \rangle\rangle$ a Q^{4n+3} coincide com a métrica induzida em Q^{4n+3} pela métrica canônica de $\mathbb{R}^{4n+4}$. Se $[\omega] \in \mathbb{H}H^n$, $X, Y \in T_{[\omega]}\mathbb{H}H^n$, seja $\omega \in \pi^{-1}([\omega]) (\subseteq Q^{4n+3})$ e sejam $\bar{X}, \bar{Y}$ os levantamentos horizontais de X e Y a $T_{\omega}Q^{4n+3}$. Então definimos

$$\langle\langle X, Y \rangle\rangle_{[\omega]} = \langle\langle \bar{X}, \bar{Y} \rangle\rangle_{\omega} = -Re\langle\bar{X}, \bar{Y}\rangle_{\omega}.$$

Se $\tilde{\omega} \in \pi^{-1}([\omega])$ e $\tilde{X}, \tilde{Y}$ são os levantamentos horizontais de X e Y a $T_{\tilde{\omega}}Q^{4n+3}$, então $\exists \xi \in \mathbb{S}^3$ tal que $\tilde{\omega} = \omega\xi = \psi_{\xi}(\omega)$, onde indicamos com ψ_{ξ} a isometria $\omega \mapsto \tilde{\omega}(\omega, \xi)$ definida pela ação $\tilde{\omega}$, e logo

$$\pi'(\tilde{\omega})\tilde{X} = X = \pi'(\omega)\bar{X} = (\pi \circ \psi_{\xi})'(\omega)\bar{X} = \pi'(\psi_{\xi}(\omega))\psi'_{\xi}(\omega)\bar{X} = \pi'(\omega\xi)\psi'_{\xi}(\omega)\bar{X} = \pi'(\tilde{\omega})\psi'_{\xi}(\omega)\bar{X}$$

e, como $\tilde{X}$ e $\psi'_{\xi}(\omega)\bar{X}$ são ambos horizontais (pois $\psi'_{\xi}(\omega)$ é isometria linear), temos, pela unicidade do levantamento horizontal, que $\psi'_{\xi}(\omega)\bar{X} = \tilde{X}$. E, similarmente, $\psi'_{\xi}(\omega)\bar{Y} = \tilde{Y}$.

E segue-se que

$$\langle\langle \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle\rangle_{\tilde{\omega}} = \langle\langle \psi'_{\xi}(\omega)\bar{X}, \psi'_{\xi}(\omega)\bar{Y} \rangle\rangle_{\psi_{\xi}(\omega)} = \langle\langle \bar{X}, \bar{Y} \rangle\rangle_{\omega}.$$

Logo $\langle\langle, \rangle\rangle$ está bem definida, e π (com $\langle\langle, \rangle\rangle$) é uma submersão Riemanniana.

A seguir, seja ω o campo vetorial $(\omega_1, \dots, \omega_{n+1}) \mapsto (\omega_1, \dots, \omega_{n+1})$ (então, para qualquer curva $\gamma : I \rightarrow Q^{4n+3}$, tem-se $\omega \circ \gamma = \dot{\gamma}$).

Se $\omega \in Q^{4n+3}$, sejam $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : I \rightarrow Q^{4n+3}$ dadas por

$$\gamma_1(t) = \omega e^{it}, \quad \gamma_2(t) = \omega e^{jt}, \quad \gamma_3(t) = \omega e^{kt}, \quad \forall t \in I$$

(observe-se que $\langle \omega e^{it}, \omega e^{it} \rangle = \|\omega e^{it}\|^2 = \|\omega\|^2 |e^{it}|^2 = -1$). Então

$$\omega i = \frac{\partial}{\partial t}(\omega e^{it})|_{t=0} = \gamma'_1(0)$$

e, similarmente, $\omega j = \gamma'_2(0)$, $\omega k = \gamma'_3(0)$. E, como $|e^{it}| = |e^{jt}| = |e^{kt}| = 1, \forall t$, temos $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : I \rightarrow \tilde{\gamma}_{\omega}$.

Logo $\omega i, \omega j, \omega k \in T_{\omega}Q^{4n+3}$ são vetores verticais (tangentes às órbitas), linearmente independentes (sobre $\mathbb{R}$) e são, em verdade, uma base ortonormal do subespaço vertical de $T_{\omega}Q^{4n+3}$ ($T_{\omega}\tilde{\gamma}_{\omega} \prec T_{\omega}Q^{4n+3}$).

Se $X, Y \in T_{[\omega]}\mathbb{H}H^n$, então $[\bar{X}, \bar{Y}]^v \in (T_{\omega}Q^{4n+3})^v$, e logo $\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} / [\bar{X}, \bar{Y}]^v = \alpha\omega i + \beta\omega j + \gamma\omega k$. E então

$$\langle [\bar{X}, \bar{Y}]^v, \omega i \rangle = \langle \alpha\omega i + \beta\omega j + \gamma\omega k, \omega i \rangle = \alpha\langle \omega i, \omega i \rangle = -\alpha$$

(observe-se que $\langle \lambda\omega i, \mu\omega j \rangle = \lambda\langle \omega i, \omega j \rangle \bar{\mu} = 0$, etc.) e, similarmente,

$$\langle [\bar{X}, \bar{Y}]^v, \omega j \rangle = -\beta, \quad \langle [\bar{X}, \bar{Y}]^v, \omega k \rangle = -\gamma.$$

E logo

$$\begin{aligned} \|[\bar{X}, \bar{Y}]^v\|^2 &= \langle\langle [\bar{X}, \bar{Y}]^v, [\bar{X}, \bar{Y}]^v \rangle\rangle = \langle\langle \alpha\omega i + \beta\omega j + \gamma\omega k, \alpha\omega i + \beta\omega j + \gamma\omega k \rangle\rangle = \\ &= \alpha i \langle \omega, \omega \rangle \bar{\alpha} (-i) + \beta j \langle \omega, \omega \rangle \bar{\beta} (-j) + \gamma k \langle \omega, \omega \rangle \bar{\gamma} (-k) = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \|\omega\|^2 = \\ &= -\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 = -(-\alpha)^2 - (-\beta)^2 - (-\gamma)^2 = \\ &= -\langle\langle [\bar{X}, \bar{Y}]^v, \omega i \rangle\rangle^2 - \langle\langle [\bar{X}, \bar{Y}]^v, \omega j \rangle\rangle^2 - \langle\langle [\bar{X}, \bar{Y}]^v, \omega k \rangle\rangle^2. \end{aligned}$$

Se $\eta : I \rightarrow Q^{4n+3}$ é tal que $\eta(0) = \omega$, $\eta'(0) = \bar{X}$, então

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}} \omega i(\omega) = \bar{\nabla}_{\eta'(0)} \omega \circ \eta(\eta(0)) i = \frac{\bar{\nabla}(\omega \circ \eta)}{\partial t} \Big|_{t=0} i = \eta'(0) i = \bar{X} i$$

e, similarmente,

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}} \omega j(\omega) = \bar{X} j, \quad \bar{\nabla}_{\bar{X}} \omega k(\omega) = \bar{X} k.$$

Observemos, então, que

$$\begin{aligned} \langle [\bar{X}, \bar{Y}]^v, \omega i \rangle &= \langle [\bar{X}, \bar{Y}], \omega i \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}, \omega i \rangle = \\ &= \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, \omega i \rangle - \langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}, \omega i \rangle = -\langle \bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}} \omega i \rangle + \langle \bar{X}, \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \omega i \rangle = \\ &= -\langle \bar{Y}, \bar{X} i \rangle + \langle \bar{X}, \bar{Y} i \rangle \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} -\langle \bar{Y}, \bar{X} i \rangle &= -(-\operatorname{Re} \langle \bar{Y}, \bar{X} i \rangle) = \operatorname{Re} \langle \bar{Y}, \bar{X} i \rangle = -\operatorname{Re} \langle \bar{Y} i, \bar{X} \rangle = \\ &= -\operatorname{Re} \langle \bar{Y} i, \bar{X} \rangle = -\operatorname{Re} \langle \bar{X}, \bar{Y} i \rangle = \langle \bar{X}, \bar{Y} i \rangle \end{aligned}$$

e logo

$$\begin{aligned} \langle [\bar{X}, \bar{Y}]^v, \omega i \rangle &= 2\langle \bar{X}, \bar{Y} i \rangle && \text{e, similarmente,} \\ \langle [\bar{X}, \bar{Y}]^v, \omega j \rangle &= 2\langle \bar{X}, \bar{Y} j \rangle && \text{e} \\ \langle [\bar{X}, \bar{Y}]^v, \omega k \rangle &= 2\langle \bar{X}, \bar{Y} k \rangle \end{aligned}$$

e segue-se

$$\|[\bar{X}, \bar{Y}]^v\|^2 = -4(\langle \bar{X}, \bar{Y} i \rangle^2 + \langle \bar{X}, \bar{Y} j \rangle^2 + \langle \bar{X}, \bar{Y} k \rangle^2).$$

Se fizermos

$$\langle \bar{X}, \bar{Y} i \rangle = \cos \varphi, \quad \langle \bar{X}, \bar{Y} j \rangle = \cos \psi, \quad \langle \bar{X}, \bar{Y} k \rangle = \cos \zeta,$$

teremos

$$\|[\bar{X}, \bar{Y}]^v\|^2 = -4(\cos^2 \varphi + \cos^2 \psi + \cos^2 \zeta)$$

e, como π é submersão Riemanniana, sabemos que a curvatura seccional K_σ de $\mathbb{H}^n$ em $[\omega]$, relativamente a um 2-plano σ gerado por vetores unitários X e Y é dada por

$$\begin{aligned} K_\sigma &= \bar{K}_\sigma + \frac{3}{4} \|[\bar{X}, \bar{Y}]^v\|^2 = \\ &= \bar{K}_\sigma + \frac{3}{4} (-4(\cos^2 \varphi + \cos^2 \psi + \cos^2 \zeta)) = \\ &= -1 - 3(\cos^2 \varphi + \cos^2 \psi + \cos^2 \zeta), \end{aligned}$$

onde $\bar{K}_\sigma \equiv -1$ é a curvatura seccional de Q^{4n+3} .

Capítulo 2

Neste capítulo aplicaremos a técnica de redução para provar a existência de subvariedades mínimas equivariantes com codimensão real 1 no espaço hiperbólico quaterniônico. Consideraremos, como no caso complexo, a ação de subgrupos de isometrias (que indicaremos com G) que definam órbitas principais de codimensão real 2.

Na seção 1 investigaremos o caso elítico, em que as órbitas definidas pela ação de G são compactas.

Na seção 2 trataremos o caso hiperbólico, em que as órbitas são produtos de espaços hiperbólicos por esferas.

Na seção 3 estudaremos o caso parabólico, em que as órbitas são produtos de esferas por horosferas, definidas pela ação de um subgrupo nilpotente (isomorfo a um grupo de Heisenberg generalizado) do grupo das isometrias de $\mathbb{H}^n$.

§ 1

A ação

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}: Sp(1, n) \times \mathbb{H}^{1, n} &\rightarrow \mathbb{H}^{1, n} \\ (g, \varpi) &\mapsto \varpi^t g \end{aligned} \quad , \quad \varpi \sim \varpi^t = [\varpi_1 \dots \varpi_{n+1}]$$

é, obviamente, isométrica (lembramos que, se $\mathfrak{H}_s$ indica a coluna s de $g \in gl(n+1, \mathbb{H})$, então

$$\begin{aligned} g \in Sp(1, n) \text{ sse } g^* I_{1, n} g = I_{1, n} \text{ sse } \langle \mathfrak{H}_s, \mathfrak{H}_r \rangle &= \begin{cases} -1, & s = r = 1 \\ \delta_{sr}, & \text{caso contrário} \end{cases} \\ \text{sse } \langle \varpi^t g, \tilde{\varpi}^t g \rangle = \langle \varpi^t, \tilde{\varpi}^t \rangle = \langle \varpi, \tilde{\varpi} \rangle &= -\varpi_1 \overline{\tilde{\varpi}_1} + \dots + \varpi_{n+1} \overline{\tilde{\varpi}_{n+1}}, \quad \forall \varpi, \tilde{\varpi} \in \mathbb{H}^{1, n}, \end{aligned}$$

e a restrição de $\bar{\varphi}$ a $Sp(1, n) \times Q^{4n+3}$ define ação em Q^{4n+3} , necessariamente isométrica.

Logo, se considerarmos em $\mathbb{H}H^n$ a métrica de Bergman quaterniônica

$$\frac{1}{(1 - \sum_s |\varpi_s|^2)^2} \left((1 - \sum_s |\varpi_s|^2) \left(\sum_s d\varpi_s d\overline{\varpi}_s \right) + \left(\sum_s \varpi_s d\overline{\varpi}_s \right) \left(\sum_s \overline{\varpi}_s d\varpi_s \right) \right)$$

que torna a projeção $\tilde{\pi}: Q^{4n+3} \rightarrow \mathbb{H}H^n$ uma submersão Riemanniana, teremos a ação isométrica

$$\begin{aligned} \varphi: Sp(1, n) \times \mathbb{H}H^n &\rightarrow \mathbb{H}H^n \\ (g, [\varpi]) &\mapsto [\varpi^t g] \end{aligned} \quad (\varpi^t \sim \varpi)$$

Observação

Se $[\varpi^t g] = [\varpi]$, $\forall \varpi \in Q^{4n+3}$, então

$$g = \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{bmatrix}$$

é uma matriz escalar, e $g \in Sp(1, n) \subseteq Sl(n+1, \mathbb{H}) \rightarrow \lambda^n = 1$. Mas se $M \in gl(n, \mathbb{H})$ e $\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \in Sp(1, n)$ então $M \in Sp(1, n-1)$, e logo $|M| = 1$. No caso em que $M = \text{diag}(\lambda)$, temos $\lambda^{n-1} = 1$ e, portanto, $\lambda = \frac{\lambda^n}{\lambda^{n-1}} = \frac{1}{1} = 1$. Segue-se que φ é efetiva.

A ação φ pode ser identificada com $\varphi: \mathcal{B}^{4n} \times Sp(1, n) \rightarrow \mathcal{B}^{4n}$ (onde $\mathcal{B}^{4n}$ é munida da métrica de Bergman, como no capítulo 1) e passamos a considerar subgrupos compactos de $Sp(1, n)$. Então as órbitas são compactas e a origem de $\mathcal{B}^{4n}$ é um ponto fixo.

Recordemos alguns resultados fundamentais da Geometria Equivariante.

Sejam M^n variedade conexa e

$$G \times M \rightarrow M$$

ação isométrica (φ_g é isometria, $\forall g \in G$).

i)

O teorema do tipo de órbita principal afirma que o stratum principal

$$M_r = \{x \in M / \gamma_x \text{ é principal} \}$$

é aberto e denso em M .

Logo, se considerarmos órbitas principais com codimensão real 2, teremos hipersuperfícies invariantes com cohomogeneidade 1.

ii)

O teorema da slice afirma que, localmente, o fibrado normal de uma órbita principal é isomorfo a um fibrado vetorial associado ao fibrado principal

$$G_x \rightarrow G \rightarrow G/G_x \cong \gamma_x$$

onde G_x indica o subgrupo de isotropia em $x \in M$.

Logo, em uma vizinhança tubular invariante Υ gerada por uma slice normal em x , temos a ação $G_x \times \nu_x \gamma_x \rightarrow \nu_x \gamma_x$ (representação na slice) e $T_y M = T_y \gamma_x \oplus \nu_y \gamma_x$, para $y \in \gamma_x$. Se γ_x é principal, a representação na slice é trivial. Se as órbitas principais têm codimensão real 2, a slice normal é um aberto em um plano real e o aberto $\Upsilon/G \subseteq M/G$ é difeomorfo à slice normal S . Portanto o espaço das órbitas é, em torno de γ_x , a projeção $\bar{\pi}(S)$ de uma slice normal S . Se $\bar{\pi}$ for uma submersão Riemanniana, o aberto Υ/G no espaço das órbitas pode ser identificado (localmente) com um subconjunto S de um plano real contido em M , que intersecta a vizinhança tubular Υ transversalmente às órbitas.

Se a ação for polar, o espaço das órbitas pode ser identificado com um subconjunto de uma seção Σ , que será um domínio fundamental (uma câmara de Weyl generalizada) isometricamente mergulhado em Σ .

iii)

Todo $x \in M$ tem uma vizinhança W_x tal que o conjunto dos tipos de órbitas associados a órbitas que intersectam W_x é finito.

Figure 6: Se π é submersão Riemanniana existe uma slice normal isométrica a um aberto em M/G

iv)

Se $M_s = M \setminus M_r$ é o conjunto singular, o quociente M_s/G não desconecta localmente o espaço das órbitas ($M/G \setminus M_s/G$ é conexo e localmente conexo).

v)

Se uma subvariedade S de uma G -variedade é uma união de órbitas singulares (não principais), então S é uma subvariedade mínima. Em verdade, o conjunto singular é uma subvariedade mínima estratificada por subvariedades mínimas [10].

Segue-se, em particular, que as órbitas isoladas são subvariedades (homogêneas) mínimas.

Se as órbitas principais têm codimensão real 2, uma hipersuperfície G -equivariante M tem cohomogeneidade 1, e logo $\pi(M)$ é uma curva em X , que, a priori, pode ser obtida a partir de equações diferenciais ordinárias. Vamos então considerar órbitas principais com codimensão real 2 em $\mathbb{H}^n \sim \mathbb{B}^{4n}$.

Seja $G \subseteq Sp(1, n)$ o subgrupo

$$G = \left\{ g = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & A & \\ & & B \end{bmatrix} / A \in Sp(k), B \in Sp(n-k) \right\}$$

Se $g \in G$, temos

$$g : \omega \sim \omega^t = [\omega_1 \ q_1 \ q_2] \mapsto [\omega_1 \ q_1 \ q_2] \begin{bmatrix} 1 & & \\ & A & \\ & & B \end{bmatrix} = [\omega_1 \ q_1 A \ q_2 B].$$

Se A percorre $Sp(k)$, $q_1 A$ descreve uma esfera $S_{\|q_1\|}^{4k-1} \subseteq \mathbb{H}^k \cong \mathbb{R}^{4k}$, com centro em $\{q_1 = 0\}$, e $[\omega_1 \ q_1 A \ q_2 B]$ descreve uma subórbita

$$\{[\omega_1 \ q_1 A \ q_2 B] / A \in Sp(k)\} \cong \{\omega_1\} \times S_{\|q_1\|}^{4k-1} \times \{q_2 B\} \subseteq \{\omega_1\} \times \mathbb{H}^k \times \{q_2 B\}.$$

E vê-se (similarmente com $B \in Sp(n-k)$) que

$$\gamma_\omega = \{[\omega_1 \ q_1 A \ q_2 B] / A \in Sp(k), B \in Sp(n-k)\} \cong \{\omega_1\} \times S_{\|q_1\|}^{4k-1} \times S_{\|q_2\|}^{4n-4k-1}.$$

Se $k \in \{1, \dots, n-1\}$, G é um subgrupo que fixa a origem $0 \in \mathbb{B}^{4n}$, ou melhor, G é um subgrupo de Lie do subgrupo de isotropia da origem, que, como sabemos, é isomorfo ao $SO(3) \times Sp(n)$ e, em particular, é compacto. E como π é submersão Riemanniana (como a ação é isométrica, pode-se definir, como foi feito no capítulo 1, uma métrica adequada em $\mathbb{B}^{4n}/G$), temos que, $\forall q \neq 0$ em $\mathbb{B}^{4n}$, o espaço tangente $T_q \mathbb{B}^{4n}$ admite a decomposição (de O'Neill)

$$T_q \mathbb{B}^{4n} = T_q \gamma_q \oplus \nu_q \gamma_q$$

onde se definem $\mathcal{H}_q = \nu_q \gamma_q$, o espaço dos vetores horizontais em q , e $\mathcal{V}_q = T_q \gamma_q$, o espaço dos vetores verticais. Aqui $\nu_q \gamma_q$ é o fibrado normal à órbita γ_q (vista como subvariedade) e $T_q \gamma_q$ é o fibrado tangente de γ_q . Como sabemos, $T_q \gamma_q$ é gerado por campos (de Killing)

$$X_s^*, s = 1, \dots, 4n-2 \quad (\text{pois } \text{codim } \gamma_q = 2)$$

que são os push forward de campos (invariantes à esquerda) básicos $X_1, \dots, X_{4n-2}$ na álgebra de Lie de G (identificada com o espaço $T_e G$ tangente a G no elemento neutro $e = I$) pela aplicação de órbitas $\gamma_q : G \rightarrow \mathbb{B}^{4n}$ definida por

$$\gamma_q : g \mapsto gG_q \sim q^t g = \varphi_g(q)$$

Então $\mathcal{H} : q \mapsto \mathcal{H}_q = \nu_q \gamma_q$ é subfibrado horizontal e $\mathcal{T}(q) = \exp(\nu_q \gamma_q)$ é normal a toda órbita que encontra. Realmente, esferas de centro 0 são normais a planos pela origem nos espaços Euclidianos, e esse fato "passa" aos espaços hiperbólicos. Como existe um difeomorfismo conforme e equivariante entre uma subvariedade H de Q^{4n+3} difeomorfa ao hiperbolóide H^{4n} (uma seção do fibrado de esferas) e a bola Euclidiana B^{4n} , e como a ação de $SO(4n)$ em $\mathbb{R}^{4n}$ é polar (em verdade, hiperpolar), o difeomorfismo inverso leva órbitas sobre órbitas e, por conformalidade, determina uma seção em H , que é levada pela submersão Riemanniana em uma seção na bola $\mathbb{B}^{4n} \cong \mathbb{H}^n$. O mesmo raciocínio com produtos de esferas (ambas de centro na origem) vai permitir concluir que a ação de G é polar.

Uma seção $\Sigma = \mathcal{T}(q) = \exp(\nu_q \gamma_q)$ contém uma slice normal (com $T_q \Sigma = \nu_q \gamma_q$) e é uma subvariedade totalmente geodésica. Pois se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{B}^{4n}$ é uma geodésica tal que $\alpha(0) = q \in \Sigma$ e $\alpha'(0)$ é tangente a Σ , sejam V_s , $s = 1, \dots, 4n-2$, as restrições a α dos campos de Killing X_s^* , $s = 1, \dots, 4n-2$, tangentes às órbitas em cada ponto. Então cada V_s é normal a α ao longo de α (ou seja, α é horizontal), logo $\alpha : I \rightarrow \Sigma$. E como $G \cong Sp(k) \times Sp(n-k)$ é compacto, sabemos [24] que $\mathcal{T}(q)$ intersecta todas as órbitas.

Segue-se, em particular, que $\mathcal{H}$ é integrável (e $\Sigma = \mathcal{T}(q)$ é variedade integral).

Observação

As órbitas da ação de G em $\mathbb{H}^{1,n}$ são produtos de esferas normais ao eixo temporal, que é fixo ponto a ponto. Um esfera normal ao eixo temporal é caracterizada como o conjunto dos pontos ω cuja

Figure 7: $\Sigma = \tau(q)$ é normal às órbitas

distância a um ponto q na interseção de Q^{4n+3} com o eixo temporal satisfaz $d(\omega, q) = r$, para algum $r > 0$ (na dimensão apropriada, que, em geral, não é máxima), onde d é a distância em $\mathbb{H}^{1,n}$. Se a órbita tem um ponto em Q^{4n+3} , como Q^{4n+3} é invariante pela ação, a órbita está contida em Q^{4n+3} , e logo a esfera está na interseção de Q^{4n+3} com um hiperplano quaterniônico normal ao eixo temporal. Pela simetria de Q^{4n+3} relativa ao eixo temporal, a mesma esfera é o conjunto dos pontos ω tais que a distância δ ao ponto q satisfaz $\delta(\omega, q) = \rho$, para algum $\rho > 0$, onde δ é a distância em Q^{4n+3} . Então, como π é submersão Riemanniana, obtemos que a imagem da esfera na bola B^{4n} é o conjunto dos pontos cuja distância à origem (imagem do ponto q) é constante igual a ρ . Ou seja, é uma esfera de centro 0. Em consequência, um produto de esferas de centro na origem também é levado em um produto de esferas com centro na origem. Logo as órbitas da ação de G em $B^{4n} \sim \mathbb{H}H^n$ são produtos de esferas.

Figure 8: O espaço das órbitas mergulha em Σ , com a métrica induzida.

Escolhemos, portanto, a métrica em B^{4n}/G tal que a projeção $\bar{\pi}$ se torne uma submersão Riemanniana e vemos que o espaço das órbitas $X = B^{4n}/G$ pode ser identificado (isometricamente) com um subconjunto de uma seção $\Sigma = \mathcal{T}(q)$, e a métrica orbital pode ser identificada com a restrição a Σ da métrica de Bergman em B^{4n} . Em outras palavras, o quociente B^{4n}/G é identificado com um subconjunto de um 2-plano real totalmente geodésico $\Sigma = \mathcal{T}(q)$, que mergulha em B^{4n} passando pela origem, com a métrica induzida pela métrica (ambiente) de Bergman na bola aberta B^{4n} .

Se u, v indicam escalares reais, podemos parametrizar Σ com o mergulho

$$(u, v) \mapsto (u, 0, \dots, 0, v, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{4n},$$

onde os invariantes orbitais $u = \sqrt{\sum_{s=2}^{4k} |\omega_s|^2}$ e $v = \sqrt{\sum_{s=4k+2}^{4n} |\omega_s|^2}$ estão associados aos raios das esferas em que se decompõe cada órbita, e satisfazem $u^2 + v^2 < 1$.

E se $W = N(\Sigma)/Z(\Sigma)$ é o grupo de Weyl associado a Σ , tem-se $\mathbb{R}^{4n}/G \cong \Sigma/W \cong \mathbb{R}^2/W$. Como as órbitas são produtos de duas esferas, temos [12] que

$$X = \{(u, 0, \dots, 0, v, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{4n} / u^2 + v^2 < 1, u \geq 0, v \geq 0\}$$

é um domínio fundamental, identificado com uma câmara de Weyl generalizada.

Uma curva no espaço das órbitas é, portanto, uma curva na câmara de Weyl generalizada X , que pode ser dada por $t \mapsto (u(t), v(t))$ ou $s \mapsto (r(s), \theta(s))$.

Figure 9: γ é uma curva de órbitas em uma câmara de Weyl generalizada.

Exemplo 12

Seja $G \cong O(2) \times O(2) < O(4)$ tal que

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix} \in O(4) / A, B \in O(2) \right\}.$$

Um elemento típico $g \in G$ é

$$g = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos s & -\sin s \\ 0 & 0 & \sin s & \cos s \end{bmatrix}$$

e, $\forall x, y, z, w \in \mathbb{R}^4$, a órbita $\gamma_{(x,y,z,w)}$ é

$$\gamma_{(x,y,z,w)} = \left\{ \begin{pmatrix} x \cos t - y \sin t \\ x \sin t + y \cos t \\ z \cos s - w \sin s \\ z \sin s + w \cos s \end{pmatrix} / t, s \in [0, 2\pi) \right\} \cong T^2 \subseteq \mathbb{R}^4, \text{ logo } \text{codim } \gamma = 2.$$

É fácil visualizar o toro em $\mathbb{R}^4$ observando suas interseções com hiperplanos.

E vemos que toda órbita passa pela câmara $X = \{(u, 0, v, 0) / u, v \geq 0\}$ uma única vez. Realmente, se $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$, sejam (u, v, θ, ϕ) tais que

Figure 10: $T^2 \subseteq \mathbb{R}^4$

$$(x, y, z, w) = q = (u \cos \theta, u \sin \theta, v \cos \phi, v \sin \phi) .$$

A órbita $\gamma_q = \{(u \cos \theta, u \sin \theta, v \cos \phi, v \sin \phi) / \theta, \phi \in [0, 2\pi)\}$ intersecta qualquer hiperplano h pela origem. Pois se $q \notin h$, então q e

$$-q = (-x, -y, -z, -w) = (u \cos(\theta + \pi), u \sin(\theta + \pi), v \cos(\phi + \pi), v \sin(\phi + \pi))$$

estão em lados opostos de h e, como γ é conexa, existem $\xi, \eta \in [0, 2\pi)$ tais que

$$(u \cos \xi, u \sin \xi, v \cos \eta, v \sin \eta) \in h .$$

Logo $\gamma_{(x,y,z,w)} \cap h \neq \emptyset, \forall h$ tal que $0 \in h, \forall (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$.

Figure 11: A órbita γ intersecta qualquer hiperplano pela origem.

Em particular, $\forall (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$, tem-se $\gamma_{(x,y,z,w)} \cap e_4^\perp \neq \emptyset$, onde $e_4 = (0, 0, 0, 1)$. E

$$\begin{aligned} \gamma \cap e_4^\perp &= \{(u \cos \theta, u \sin \theta, v \cos \phi, v \sin \phi) / \theta, \phi \in [0, 2\pi), v \sin \phi = 0\} = \\ &= \{(u \cos \theta, u \sin \theta, v, 0) / \theta \in [0, 2\pi)\} \cup \{(u \cos \theta, u \sin \theta, -v, 0) / \theta \in [0, 2\pi)\} . \end{aligned}$$

Figure 12: Toda órbita passa por X uma única vez.

A ação é efetiva ($q \neq 0, g.q = q \rightarrow g = I$), e $\gamma_q \cong G/G_q \cong T^2$, se $u \neq 0 \neq v$. Observe-se também que

$$\|(u \cos \theta, u \sin \theta, v \cos \phi, v \sin \phi)\| = \sqrt{u^2 + v^2},$$

ou seja, $\gamma \cong T^2 \subseteq \mathbb{S}^3_{\sqrt{u^2+v^2}}$.

Observemos que $\Sigma = e_4^\perp \cap e_1^\perp$ é uma seção flat, e $O(2) \times O(2) \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ é hiperpolar.

Observação

As órbitas no exemplo acima são toros contidos em 3-esferas com centro na origem, o que se sabia, pois $O(2) \times O(2)$ é subgrupo de $O(4)$. Além disso, a restrição da ação à esfera unitária em $\mathbb{R}^4$ define uma ação (como $O(2) \times O(2)$ age por isometrias, a esfera unitária fica invariante) $\psi : O(2) \times O(2) \times \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ que determina uma folheação com duas órbitas singulares (uma com $u = 0$ e outra com $v = 0$), como ilustrado a seguir.

Se $u \neq 0 \neq v$, temos as órbitas principais, difeomorfas a um 2-toro, enquanto que $u = 0$ e $v = 0$ fornecem as duas órbitas singulares, difeomorfas a uma 1-esfera (ou a um 1-toro).

Figure 13: $T^2 \subseteq \mathbb{S}^3$

Note-se ainda que (na esfera unitária) $u = 0$ sse $v = 1$ e $u = 1$ sse $v = 0$. Em palavras, as duas órbitas singulares, necessariamente isoladas, são geodésicas (e portanto subvariedades mínimas) na 3-esfera unitária ([10], teorema do conjunto singular).

Observação

Em $\mathbb{R}^n$, a situação é similar. Os eixos são todos espaciais, as órbitas são compactas, e a ação isométrica de G está associada a um grupo cristalográfico. Apenas quatro possibilidades existem para as câmaras de Weyl [24].

Em verdade, sabe-se [12] que, no caso em que G é redutível, ficam apenas duas possibilidades para as câmaras, e as órbitas serão esferas ou produtos de duas esferas (no caso que consideramos, o grupo das isometrias é semi-simples, logo redutível).

Exemplo 13

Em $\mathbb{R}^7 \cong \mathbb{R}^4 \oplus \mathbb{R}^3$, temos

$$\gamma(x_1, \dots, x_7) =$$

$\{(u \sin \zeta \sin \phi \cos \theta, u \sin \zeta \sin \phi \sin \theta, u \sin \zeta \cos \phi, u \cos \zeta, v \sin \psi \cos \varphi, v \sin \psi \sin \varphi, v \cos \psi)\}$, com $\zeta, \phi, \psi \in [0, \pi], \theta, \varphi \in [0, 2\pi)\} \cong \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^2$, e $X = \{(u, v) / u \geq 0, v \geq 0\}$, como antes.

Se $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de G e $K = G_q$ é a isotropia em um ponto $q \in B^{4n}$, seja $\mathfrak{m} \prec \mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \text{Lie } K$ ($\mathfrak{m}$ é o complemento ortogonal da álgebra de Lie de K em $\mathfrak{g}$). Então $\gamma_q \cong G/K$ e, para $X \in \mathfrak{m}$, define-se

$$X_q^* = (\gamma_q)_* X \in T_q \gamma_q$$

(X_q^* é o push forward de X por γ_q).

Se $\{X_1, \dots, X_{4n-2}\}$ é base ortonormal de $\mathfrak{m}$, então $\{X_1^*, \dots, X_{4n-2}^*\}$ é referencial equivariante ao longo de γ_q (observe-se que X_s^* é equivariante por construção, $s = 1, \dots, 4n-2$) e o coeficiente da forma volume em γ_q é

$$V = \|X_1^* \times \dots \times X_{4n-2}^*\| = \sqrt{\det(\langle X_r^*, X_s^* \rangle)}.$$

Mais precisamente, tem-se o

Lema (Hsiang, W-t & Hsiang, W-y)

Se γ_q é órbita principal, o elemento de volume de γ_q é dado por

$$V^2 = |X_1^* \times \dots \times X_m^*|^2 d\omega$$

onde $d\omega$ é o elemento de volume de G/K .

A demonstração está em [14]. Observemos que $|X_1^* \times \dots \times X_m^*|$ é o Jacobiano de

$$\begin{aligned} \alpha : G/K &\rightarrow \gamma_q \\ gK &\mapsto \varphi_g(q) \end{aligned}$$

Recordemos aqui o Teorema de Redução.

Teorema (Back, Carmo, Hsiang, Lawson)

Se $G \times M \rightarrow M$ é ação isométrica, $N \subseteq M$ uma hipersuperfície G -equivariante, $\tilde{N} = \pi(N)$ a imagem de N pela projeção $\pi : M \rightarrow X = M/G$ e $H(q)$ e $\tilde{H}(\pi(q))$ indicam as curvaturas médias de N em q e de $\tilde{N}$ em $\pi(q)$, então

$$H(q) = \tilde{H}(\pi(q)) - \nabla_\eta \ln V(\pi(q)),$$

onde ∇_η é a derivada na direção η , normal a $\tilde{N}$.

No caso em que as órbitas principais têm codimensão 2, uma hipersuperfície equivariante $N \subseteq M$ tem cohomogeneidade 1, ou seja, $\tilde{N}$ é uma curva γ em X (pois a cohomogeneidade de N é precisamente a dimensão de $\pi(N)$ no espaço das órbitas) e $\tilde{H}$ é, então, a curvatura geodésica k_γ de γ . Nesse caso, temos $H = k_\gamma - \nabla_\eta \ln V$.

Segue-se que N é mínima sse $k_\gamma = \nabla_\eta \ln V$.

Além disso, a métrica em $X \subseteq B^{4n}$ será dada por

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(1-u^2-v^2)^2} \left(\sum_{1 \neq s \neq k+1} (1-u^2-v^2)(dx_s^2 + dy_s^2 + dz_s^2 + dt_s^2) + \right. \\ &+ (1-v^2)(dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 + dt_1^2) + (1-u^2)(dx_{k+1}^2 + dy_{k+1}^2 + dz_{k+1}^2 + dt_{k+1}^2) + \\ &\left. + 2uv(dx_1 dx_{k+1} + dy_1 dy_{k+1} + dz_1 dz_{k+1} + dt_1 dt_{k+1}) \right), \end{aligned}$$

se identificarmos X com um subconjunto de uma seção $\Sigma \ni 0$ e fizermos

$$x_1 = u, \quad x_{k+1} = v, \quad x_s = 0 \quad \forall s \neq 1, k+1, \quad y_s = z_s = t_s = 0 \quad \forall s$$

obtendo

$$\varpi = (\varpi_1, \dots, \varpi_n) = (x_1 + iy_1 + jz_1 + kt_1, \dots, x_n + iy_n + jz_n + kt_n) \sim (x_1, \dots, t_n) = (u, 0, \dots, 0, v, \dots, 0), \quad \varpi \in \Sigma.$$

E se w, ζ são vetores tangentes em ϖ , com

$$w_s = \alpha_s + i\beta_s + j\gamma_s + k\delta_s, \quad \zeta_s = \mu_s + i\nu_s + j\rho_s + k\tau_s, \quad s = 1, \dots, n,$$

temos

$$\begin{aligned} \langle\langle w, \zeta \rangle\rangle_{\varpi} &= \frac{1}{(1-u^2-v^2)^2} \left((1-u^2-v^2) \sum_{s=1}^n w_s \overline{\zeta_s} + \sum_{r=1}^n w_r \overline{\varpi_r} \sum_{s=1}^n \varpi_s \overline{\zeta_s} \right) = \\ &= \frac{1}{(1-u^2-v^2)^2} \left((1-u^2-v^2) \sum_{s=1}^n (\alpha_s + i\beta_s + j\gamma_s + k\delta_s)(\mu_s - i\nu_s - j\rho_s - k\tau_s) + \right. \\ &\quad \left. + \left(u(\alpha_1 + i\beta_1 + j\gamma_1 + k\delta_1) + v(\alpha_{k+1} + i\beta_{k+1} + j\gamma_{k+1} + k\delta_{k+1}) \right) \right. \\ &\quad \left. \left(u(\mu_1 - i\nu_1 - j\rho_1 - k\tau_1) + v(\mu_{k+1} - i\nu_{k+1} - j\rho_{k+1} - k\tau_{k+1}) \right) \right) = \\ &= \frac{1}{(1-u^2-v^2)^2} \left((1-u^2-v^2) \sum_{1 \neq s \neq k+1} (\alpha_s + i\beta_s + j\gamma_s + k\delta_s)(\mu_s - i\nu_s - j\rho_s - k\tau_s) + \right. \\ &\quad + (1-v^2)(\alpha_1 + i\beta_1 + j\gamma_1 + k\delta_1)(\mu_1 - i\nu_1 - j\rho_1 - k\tau_1) + \\ &\quad + (1-u^2)(\alpha_{k+1} + i\beta_{k+1} + j\gamma_{k+1} + k\delta_{k+1})(\mu_{k+1} - i\nu_{k+1} - j\rho_{k+1} - k\tau_{k+1}) + \\ &\quad + uv \left((\alpha_1 + i\beta_1 + j\gamma_1 + k\delta_1)(\mu_{k+1} - i\nu_{k+1} - j\rho_{k+1} - k\tau_{k+1}) + \right. \\ &\quad \left. \left. + (\alpha_{k+1} + i\beta_{k+1} + j\gamma_{k+1} + k\delta_{k+1})(\mu_1 - i\nu_1 - j\rho_1 - k\tau_1) \right) \right). \end{aligned}$$

Se

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n}, \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial t_n} \right\}$$

é um referencial em $\mathbb{B}^{4n}$ tal que $\frac{\partial}{\partial x_1}(\varpi)$ e $\frac{\partial}{\partial x_{k+1}}(\varpi)$ geram o 2-plano tangente a Σ nos pontos $\varpi = (u, 0, \dots, 0, v, \dots, 0) \in \Sigma$, e

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_k}, \frac{\partial}{\partial y_{k+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_n} \right\}$$

é um referencial para o subfibrado vertical (tangente às órbitas), o elemento de volume Ω , associado ao referencial, é dado por

$$\Omega = \left\| \frac{\partial}{\partial y_1} \times \dots \times \widehat{\frac{\partial}{\partial x_{k+1}}} \times \dots \times \frac{\partial}{\partial t_n} \right\| = \sqrt{\det(\langle\langle w, \zeta \rangle\rangle)},$$

onde $w, \zeta = \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_k}, \frac{\partial}{\partial y_{k+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_n}$ e $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ é a métrica de Bergman quaterniônica.

Observe-se que, como os X_s^* (tangentes às órbitas) são múltiplos de campos vetoriais básicos, o elemento de volume de uma órbita é, em cada ponto ϖ , um múltiplo de $\Omega(\varpi)$. Além disso, como a ação é polar,

temos $\Sigma \perp \gamma_{\mathbb{W}}$ (na métrica de Bergman). Em verdade, $T\mathcal{B}_r^{4n} = T\Sigma \oplus T\gamma_{\mathbb{W}}$ é decomposição de O'Neill, onde $T\Sigma = \mathcal{H}$ e $T\gamma_{\mathbb{W}} = \mathcal{V} = \ker \pi_*$, com $\pi : \mathcal{B}_r^{4n} \rightarrow X$ submersão Riemanniana ($\mathcal{B}_r^{4n}$ é o stratum principal).

Temos

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial}{\partial \xi_s}, \frac{\partial}{\partial y_1} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi_s}, \frac{\partial}{\partial z_1} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi_s}, \frac{\partial}{\partial t_1} \right\rangle = 0, \quad \forall s \neq 1, k+1, \quad \xi = x, y, z, t \\
\left\langle \frac{\partial}{\partial \xi_s}, \frac{\partial}{\partial y_{k+1}} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi_s}, \frac{\partial}{\partial z_{k+1}} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi_s}, \frac{\partial}{\partial t_{k+1}} \right\rangle = 0, \quad \forall s \neq 1, k+1, \quad \xi = x, y, z, t \\
\left\langle \frac{\partial}{\partial \xi_s}, \frac{\partial}{\partial \eta_r} \right\rangle &= 0, \quad r, s \neq 1, k+1, \quad r \neq s, \quad \xi, \eta = x, y, z, t \\
(1-u^2-v^2) \left\langle \frac{\partial}{\partial x_s}, \frac{\partial}{\partial \eta_s} \right\rangle &= \begin{cases} 1, & \eta = x \\ -i, & \eta = y \\ -j, & \eta = z \\ -k, & \eta = t \end{cases} \quad s \neq 1, k+1 \\
(1-u^2-v^2) \left\langle \frac{\partial}{\partial y_s}, \frac{\partial}{\partial \eta_s} \right\rangle &= \begin{cases} 1, & \eta = y \\ -k, & \eta = z \\ j, & \eta = t \end{cases} \quad s \neq 1, k+1 \\
(1-u^2-v^2) \left\langle \frac{\partial}{\partial z_s}, \frac{\partial}{\partial \eta_s} \right\rangle &= \begin{cases} 1, & \eta = z \\ -i, & \eta = t \end{cases} \quad s \neq 1, k+1 \\
(1-u^2-v^2) \left\langle \frac{\partial}{\partial t_s}, \frac{\partial}{\partial t_s} \right\rangle &= 1 \quad s \neq 1, k+1 \\
(1-u^2-v^2)^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial y_r}, \frac{\partial}{\partial y_s} \right\rangle &= \begin{cases} 1-v^2, & r=s=1 \\ 1-u^2, & r=s=k+1 \\ uv, & r=1, s=k+1 \end{cases} \\
(1-u^2-v^2)^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial y_r}, \frac{\partial}{\partial z_s} \right\rangle &= -k(1-u^2-v^2)^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial y_r}, \frac{\partial}{\partial y_s} \right\rangle \\
(1-u^2-v^2)^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial y_r}, \frac{\partial}{\partial t_s} \right\rangle &= j(1-u^2-v^2)^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial y_r}, \frac{\partial}{\partial y_s} \right\rangle \\
(1-u^2-v^2)^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial z_r}, \frac{\partial}{\partial z_s} \right\rangle &= \begin{cases} 1-v^2, & r=s=1 \\ 1-u^2, & r=s=k+1 \\ uv, & r=1, s=k+1 \end{cases} \\
(1-u^2-v^2)^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial z_r}, \frac{\partial}{\partial t_s} \right\rangle &= -i(1-u^2-v^2)^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial z_r}, \frac{\partial}{\partial z_s} \right\rangle \\
(1-u^2-v^2)^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial t_r}, \frac{\partial}{\partial t_s} \right\rangle &= \begin{cases} 1-v^2, & r=s=1 \\ 1-u^2, & r=s=k+1 \\ uv, & r=1, s=k+1 \end{cases}
\end{aligned}$$

e a matriz de Gramm é a matriz

$$\left(\left\langle \frac{\partial}{\partial \xi_r}, \frac{\partial}{\partial \eta_s} \right\rangle \right)$$

onde $\xi_r, \eta_s \neq x_1, x_{k+1}$.

Em coordenadas, temos

$\frac{(1-v^2)}{r^2}$	$-\frac{k(1-v^2)}{r^2}$	$\frac{j(1-v^2)}{r^2}$	0	0	0	0	0	...	0	$\frac{uv}{r^2}$	$-\frac{kuv}{r^2}$	$\frac{juv}{r^2}$	...	0	0	0	0
$\frac{k(1-v^2)}{r^2}$	$\frac{(1-v^2)}{r^2}$	$-\frac{i(1-v^2)}{r^2}$	0	0	0	0	0	...	0	$\frac{kuv}{r^2}$	$\frac{uv}{r^2}$	$-\frac{juv}{r^2}$	...	0	0	0	0
$-\frac{j(1-v^2)}{r^2}$	$\frac{i(1-v^2)}{r^2}$	$\frac{(1-v^2)}{r^2}$	0	0	0	0	0	...	0	$-\frac{juv}{r^2}$	$\frac{juv}{r^2}$	$\frac{uv}{r^2}$	...	0	0	0	0
0	0	0	$\frac{1}{r}$	$-\frac{i}{r}$	$-\frac{j}{r}$	$-\frac{k}{r}$	0	...	0	0	0	0	...	0	0	0	0
0	0	0	$\frac{i}{r}$	$\frac{1}{r}$	$-\frac{k}{r}$	$\frac{j}{r}$	0	...	0	0	0	0	...	0	0	0	0
0	0	0	$\frac{j}{r}$	$\frac{k}{r}$	$\frac{1}{r}$	$-\frac{i}{r}$	0	...	0	0	0	0	...	0	0	0	0
0	0	0	$\frac{k}{r}$	$-\frac{j}{r}$	$\frac{i}{r}$	$\frac{1}{r}$	0	...	0	0	0	0	...	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{r}$	...	0	0	0	0	...	0	0	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	0	0	0	0	0	0	...	$\frac{1}{r}$	0	0	0	...	0	0	0	0
$\frac{uv}{r^2}$	$-\frac{kuv}{r^2}$	$\frac{juv}{r^2}$	0	0	0	0	0	...	0	$\frac{(1-u^2)}{r^2}$	$-\frac{k(1-u^2)}{r^2}$	$\frac{j(1-u^2)}{r^2}$	...	0	0	0	0
$\frac{kuv}{r^2}$	$\frac{uv}{r^2}$	$-\frac{juv}{r^2}$	0	0	0	0	0	...	0	$\frac{k(1-u^2)}{r^2}$	$\frac{(1-u^2)}{r^2}$	$-\frac{i(1-u^2)}{r^2}$	...	0	0	0	0
$-\frac{juv}{r^2}$	$\frac{juv}{r^2}$	$\frac{uv}{r^2}$	0	0	0	0	0	...	0	$-\frac{j(1-u^2)}{r^2}$	$\frac{i(1-u^2)}{r^2}$	$\frac{(1-u^2)}{r^2}$	...	0	0	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...	$\frac{1}{r}$	$-\frac{i}{r}$	$-\frac{j}{r}$	$-\frac{k}{r}$
0	0	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...	$\frac{i}{r}$	$\frac{1}{r}$	$-\frac{k}{r}$	$\frac{j}{r}$
0	0	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...	$\frac{j}{r}$	$\frac{k}{r}$	$\frac{1}{r}$	$-\frac{i}{r}$
0	0	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	...	$\frac{k}{r}$	$-\frac{j}{r}$	$\frac{i}{r}$	$\frac{1}{r}$

onde $r = 1 - u^2 - v^2$.

Indiquemos com R a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -i & -j & -k \\ i & 1 & -k & j \\ j & k & 1 & -i \\ k & -j & i & 1 \end{bmatrix}$$

e com Γ a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -k & j \\ k & 1 & -i \\ -j & i & 1 \end{bmatrix},$$

obtida da matriz R pela supressão da primeira linha e da primeira coluna. A matriz de Gramm escreve-se, então,

$$\begin{bmatrix} \frac{(1-v^2)}{r^2}\Gamma & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{uv}{r^2}\Gamma & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}R & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r}R & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{r}R & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{uv}{r^2}\Gamma & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{(1-u^2)}{r^2}\Gamma & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{r}R \end{bmatrix},$$

com $4n - 2 - 6 = 4n - 8$ colunas relativas aos blocos R (portanto $n - 2$ blocos) e, a menos de reordenação dos blocos, é soma direta de uma matriz 6×6 e a soma direta de $n - 2$ blocos iguais a $\frac{1}{r}R$, cujo determinante é

$$= \left(\frac{1}{r}\right)^4 \det R = \left(\frac{1}{1 - u^2 - v^2}\right)^4 \det R.$$

É fácil ver que $\det R \neq 0$. Realmente, se indicarmos com w a primeira coluna de R , $w = [1 \ i \ j \ k]^t$, observamos que as três últimas colunas são $-wi$, $-wj$ e $-wk$. E, portanto, $\det R$ é o volume de um tetracubo (gerado pelos vetores dois a dois ortogonais w , $-wi$, $-wj$ e $-wk$), logo $\det R = 2^4$ (note-se que $|w| = 2$). Similarmente, obtém-se $\det \Gamma = 3\sqrt{3}$ e, a menos de uma renormalização (multiplicação da forma volume por uma constante, o que não altera os resultados), podemos trabalhar com $\det R = 1$, $\det \Gamma = 1$ (esboçamos uma justificativa algébrica ao final desta seção). Segue-se que

$$\Omega^2 = \begin{vmatrix} \frac{(1-v^2)}{r^2}\Gamma & & \cdots & & \frac{uv}{r^2}\Gamma \\ & \frac{1}{r}R & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & \frac{1}{r}R & \\ \frac{uv}{r^2}\Gamma & & \cdots & & \frac{(1-u^2)}{r^2}\Gamma \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \frac{1}{r}R \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{r^2}\right)^6 \left(\left(\frac{1}{r}\right)^4\right)^{n-2} \left| \begin{array}{cccc} (1-v^2)\Gamma & \cdots & uv\Gamma & \\ & R & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ uv\Gamma & \cdots & R & (1-u^2)\Gamma \\ & & & \ddots \\ & & & R \end{array} \right| = \\
&= \left(\frac{1}{r^2}\right)^6 \left(\frac{1}{r}\right)^{4n-8} \left| \begin{array}{cc} (1-v^2)\Gamma & uv\Gamma \\ uv\Gamma & (1-u^2)\Gamma \end{array} \right| = \\
&= \left(\frac{1}{r}\right)^{4n+4} (|(1-v^2)\Gamma| |(1-u^2)\Gamma| - |uv\Gamma|^2) = \\
&= \left(\frac{1}{r}\right)^{4n+4} ((1-v^2)^3(1-u^2)^3 - (uv)^6) = \\
&= \frac{(1-u^2)^3(1-v^2)^3 - u^6v^6}{(1-u^2-v^2)^{4n+4}}
\end{aligned}$$

Temos o

Lema 2

O elemento de volume Ω , associado ao referencial, em um ponto regular $[\omega] \sim \gamma_\omega \in X$, com

$$\omega = (u, \dots, 0, v, \dots, 0) \in \Sigma$$

é dado por

$$\Omega = \frac{\sqrt{(1-u^2)^3(1-v^2)^3 - u^6v^6}}{(1-u^2-v^2)^{2n+2}}$$

A seguir demonstraremos um resultado mencionado na introdução.

Teorema 1

Se G é um subgrupo do grupo $Sp(1, n)$ das isometrias de $\mathbb{H}^n$ da forma

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}, \quad A \in Sp(k), \quad B \in Sp(n-k) \right\}, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

então existem infinitas classes de congruência de subvariedades mínimas G -equivariantes, completas, mergulhadas em $\mathbb{H}^n$ com cohomogeneidade 1 (logo hipersuperfícies em $\mathbb{H}^n$).

Sejam $N \subseteq \mathbb{B}^{4n}$ hipersuperfície G -equivariante e $\gamma = \pi(N)$ a projeção de N no espaço das órbitas X . Então γ é uma curva C^∞ em X e sabemos, pelo teorema de redução, que se γ está normalizada e a curvatura geodésica de γ satisfizer $k_\gamma = \nabla_\eta \ln V$, N será uma hipersuperfície mínima.

Vamos, portanto, procurar uma curva $\gamma : I \rightarrow X$ tal que

$$\|\gamma'\| \equiv 1 \quad e \quad k_\gamma = \nabla_\eta \ln V.$$

Seja

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n}, \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial t_n} \right\}$$

referencial em B^{4n} tal que

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_{k+1}} \right\}$$

gere o fibrado real normal às órbitas e tal que os campos

$$\frac{\partial}{\partial x_s}, s = 2, \dots, n, s \neq k+1, \quad \frac{\partial}{\partial y_s}, \frac{\partial}{\partial z_s}, \frac{\partial}{\partial t_s}, s = 1, \dots, n,$$

sejam tangentes às órbitas.

A órbita γ_ω por um ponto $\omega = (q_1, q_2) \sim (u, 0, \dots, 0, v, \dots, 0) \in \Sigma$ é o produto de uma esfera $S_{\|q_1\|}^{4k-1}$ de raio $\|q_1\|$ por uma esfera $S_{\|q_2\|}^{4n-4k-1}$ de raio $\|q_2\|$.

Além disso, o push forward de uma base ortonormal da álgebra de Lie $\mathfrak{m}$ é uma base de $T_\omega \gamma_\omega$, onde os $4k-1$ primeiros vetores tangentes têm norma $\|X_s^*\| = \frac{u}{1-u^2-v^2}$ e os últimos $4n-4k-1$ vetores tangentes têm norma $\|X_s^*\| = \frac{v}{1-u^2-v^2}$. Realmente, os $4n-2$ campos X_s^* que geram $T\gamma_\omega$ são dados pela ação isométrica de G e, portanto, cada um deles tem norma definida pelo raio da esfera à qual ele é tangente (esferas euclidianas com centro na origem de $\mathbb{H}^n$ são esferas geodésicas e coincidem com esferas hiperbólicas).

Figure 14: $\|X_s^*\|$ cresce com u , se $s \leq 4k$, e com v , se $s > 4k$

Em termos de nosso referencial, temos

$$X_1^* = u \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad X_2^* = u \frac{\partial}{\partial z_1}, \quad X_3^* = u \frac{\partial}{\partial t_1}, \quad X_4^* = u \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad X_{4k-1}^* = u \frac{\partial}{\partial t_k},$$

$$X_{4k}^* = v \frac{\partial}{\partial y_{k+1}}, \quad X_{4k+1}^* = v \frac{\partial}{\partial z_{k+1}}, \quad \dots, \quad X_{4n-2}^* = v \frac{\partial}{\partial t_n}.$$

Segue-se que

$$V^2 = \|X_1^* \times \dots \times X_{4n-2}^*\|^2 = \begin{vmatrix} \langle u \frac{\partial}{\partial y_1}, u \frac{\partial}{\partial y_1} \rangle & \dots & \langle u \frac{\partial}{\partial y_1}, v \frac{\partial}{\partial t_n} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v \frac{\partial}{\partial t_n}, u \frac{\partial}{\partial y_1} \rangle & \dots & \langle v \frac{\partial}{\partial t_n}, v \frac{\partial}{\partial t_n} \rangle \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= u^{4k-1} v^{4n-4k-1} \left| \begin{array}{ccc} \langle \frac{\partial}{\partial y_1}, u \frac{\partial}{\partial y_1} \rangle & \cdots & \langle \frac{\partial}{\partial y_1}, v \frac{\partial}{\partial t_n} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \frac{\partial}{\partial t_n}, u \frac{\partial}{\partial y_1} \rangle & \cdots & \langle \frac{\partial}{\partial t_n}, v \frac{\partial}{\partial t_n} \rangle \end{array} \right| = u^{8k-2} v^{8n-8k-2} \left| \begin{array}{ccc} \langle \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_1} \rangle & \cdots & \langle \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial t_n} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \frac{\partial}{\partial t_n}, \frac{\partial}{\partial y_1} \rangle & \cdots & \langle \frac{\partial}{\partial t_n}, \frac{\partial}{\partial t_n} \rangle \end{array} \right| = \\
&= u^{8k-2} v^{8n-8k-2} \Omega^2 = u^{8k-2} v^{8n-8k-2} \frac{(1-u^2)^3(1-v^2)^3 - u^6 v^6}{(1-u^2-v^2)^{4n+4}}.
\end{aligned}$$

Logo o elemento de volume da órbita por $\omega = (u, 0, \dots, 0, v, \dots, 0) \in \Sigma$ é

$$V = \frac{u^{4k-1} v^{4n-4k-1} \sqrt{(1-u^2)^3(1-v^2)^3 - u^6 v^6}}{(1-u^2-v^2)^{2n+2}}.$$

Se fizermos $u = \tanh r \cos \theta$, $v = \tanh r \sin \theta$, $\rho = \tanh r$, $\sigma = \operatorname{sech} r$, $\zeta = \sin \theta \cos \theta$, então (observe-se que $\sigma^2 = 1 - \rho^2$ e $2\zeta = \sin 2\theta$)

$$\begin{aligned}
(1-u^2)^3(1-v^2)^3 - u^6 v^6 &= (1-\rho^2 + \rho^4 \zeta^2)^3 - \rho^{12} \zeta^6 = \\
&= (1-\rho^2)^3 + 3\rho^4 \zeta^2 (1-\rho^2)^2 + 3\rho^8 \zeta^4 (1-\rho^2) = \\
&= \sigma^6 + 3\rho^4 \sigma^4 \zeta^2 + 3\rho^8 \sigma^2 \zeta^4,
\end{aligned}$$

e logo

$$\frac{\sqrt{(1-u^2)^3(1-v^2)^3 - u^6 v^6}}{(1-u^2-v^2)^{2n+2}} = \frac{\sqrt{\sigma^2(\sigma^4 + 3\rho^4 \sigma^2 \zeta^2 + 3\rho^8 \zeta^4)}}{\sigma^{4n+4}} = \frac{\sqrt{\sigma^4 + 3\rho^4 \zeta^2(\sigma^2 + \rho^4 \zeta^2)}}{\sigma^{4n+3}}$$

e segue-se que

$$\begin{aligned}
V &= \frac{\rho^{4n-2} \cos^{4k-1} \theta \sin^{4n-4k-1} \theta \sqrt{\sigma^4 + 3\rho^4 \zeta^2(\sigma^2 + \rho^4 \zeta^2)}}{\sigma^{4n+3}} = \\
&= \frac{(1-\sigma^2)^{2n} \zeta^{4k-1} \sin^{4n-8k} \theta \sqrt{\sigma^4 + 3\rho^4 \zeta^2(\sigma^2 + \rho^4 \zeta^2)}}{(\sigma^2)^{2n} \sigma^3 \rho^2} = \\
&= \sinh^{4n-2} r \cosh^5 r \sin^{4k-1} 2\theta \sin^{4n-8k} \theta \sqrt{\sigma^4 + 3\rho^4 \zeta^2(\sigma^2 + \rho^4 \zeta^2)} = \\
&= \sinh^{4n-7} r \sinh^5 2r \sin^{4n-8k} \theta \sin^{4k-1} 2\theta \sqrt{\sigma^4 + 3\rho^4 \zeta^2(\sigma^2 + \rho^4 \zeta^2)} = \\
&= \frac{\sinh^{4n-7} r \sinh^5 2r \sin^{4(n-2k)} \theta \sin^{4k-1} 2\theta \sqrt{\cosh^4 r + 3 \sinh^4 r \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\cosh^2 r + \sinh^4 r \sin^2 \theta \cos^2 \theta)}}{\cosh^4 r}
\end{aligned}$$

(a menos de uma constante $= 2^{4k+4}$)

e então

$$\begin{aligned}
\ln V &= (4n-7) \ln \sinh r + 5 \ln \sinh 2r + 4(n-2k) \ln \sin \theta + (4k-1) \ln \sin 2\theta + \\
&\frac{1}{2} \ln(\cosh^4 r + 3 \sinh^4 r \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\cosh^2 r + \sinh^4 r \sin^2 \theta \cos^2 \theta)) - 4 \ln \cosh r.
\end{aligned}$$

Temos, portanto,

$$\begin{aligned}\partial_r(\ln V) &= (4n - 7) \coth r + 10 \coth 2r - 4 \tanh r + \\ &+ \frac{\sinh r \cosh r (2 \cosh^2 r + 3 \sinh^2 r \sin^2 \theta \cos^2 \theta (3 \sinh^2 r + 2) + 12 \sinh^6 r \sin^4 \theta \cos^4 \theta)}{\cosh^4 r + 3 \sinh^4 r \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\cosh^2 r + \sinh^4 r \sin^2 \theta \cos^2 \theta)}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\partial_\theta(\ln V) &= 4(n - 2k) \cot \theta + 2(4k - 1) \cot 2\theta + \\ &+ \frac{3 \sinh^4 r \sin \theta \cos \theta \cos 2\theta (\cosh^2 r + 2 \sinh^4 r \sin^2 \theta \cos^2 \theta)}{\cosh^4 r + 3 \sinh^4 r \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\cosh^2 r + \sinh^4 r \sin^2 \theta \cos^2 \theta)}\end{aligned}$$

Indiquemos com $\varphi = \varphi(s)$ o ângulo entre o campo vetorial $\frac{\partial}{\partial r}$ e a velocidade $\gamma'(s)$ da curva $\gamma = \gamma(s)$, onde s é o comprimento de arco. Se γ está normalizada, a curvatura k_γ de γ em $\gamma(s)$ é dada [8] por $k_\gamma = \varphi'(s)$. E se $\gamma = \gamma(s) = (r(s), \theta(s))$, então $\gamma'(s) = (r'(s), \theta'(s))$, e o campo vetorial $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ deve satisfazer $\|\eta(s)\| \equiv 1$ e $\langle \gamma', \eta \rangle \equiv 0$.

Logo, se encontrarmos γ tal que $\|\gamma'(s)\|^2 \equiv 1$, teremos k_γ e η .

Além disso, γ é uma curva em X e X mergulha em Σ . Logo $\gamma'(s) \in T_{\gamma(s)}\Sigma$, $\forall s$, e existem funções α_1, α_{k+1} tais que

$$\gamma' = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_{k+1} \frac{\partial}{\partial x_{k+1}}.$$

E logo, para $\gamma(s) = (u(s), v(s))$, temos

$$\|\gamma'\|^2 = \langle \gamma', \gamma' \rangle = \frac{(1 - v^2)\alpha_1^2 + (1 - u^2)\alpha_{k+1}^2 + 2uv\alpha_1\alpha_{k+1}}{(1 - u^2 - v^2)^2},$$

ou melhor,

$$\|\gamma'\|^2 = \frac{(1 - v^2)du^2 + (1 - u^2)dv^2 + 2uvdudv}{(1 - u^2 - v^2)^2}.$$

E, como $u = u(r, \theta) = \tanh r \cos \theta$, $v = v(r, \theta) = \tanh r \sin \theta$, temos

$$\begin{aligned}\|\gamma'\|^2 &= \frac{1}{(1 - u^2 - v^2)^2} ((1 - v^2)u'^2 + 2uvu'v' + (1 - u^2)v'^2) = \\ &= \frac{1}{(1 - \tanh^2 r)^2} \left((1 - \tanh^2 r \sin^2 \theta) \left(\begin{bmatrix} \operatorname{sech}^2 r \cos \theta & -\tanh r \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r' \\ \theta' \end{bmatrix} \right)^2 + \right. \\ &+ 2 \tanh^2 r \cos \theta \sin \theta \left(\begin{bmatrix} \operatorname{sech}^2 r \cos \theta & -\tanh r \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r' \\ \theta' \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} \operatorname{sech}^2 r \sin \theta & \tanh r \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r' \\ \theta' \end{bmatrix} \right) + \\ &\left. + (1 - \tanh^2 r \cos^2 \theta) \left(\begin{bmatrix} \operatorname{sech}^2 r \sin \theta & \tanh r \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r' \\ \theta' \end{bmatrix} \right)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{\operatorname{sech}^4 r} \left(\operatorname{sech}^4 r \cdot r'^2 + \tanh^2 r \cdot \theta'^2 - \tanh^2 r \sin^2 \theta (\operatorname{sech}^2 r \cos \theta \cdot r' - \tanh r \sin \theta \cdot \theta')^2 + \right. \\ &+ 2 \tanh^2 r \sin \theta \cos \theta (\operatorname{sech}^2 r \cos \theta \cdot r' - \tanh r \sin \theta \cdot \theta') (\operatorname{sech}^2 r \sin \theta \cdot r' - \tanh r \cos \theta \cdot \theta') - \\ &\left. - \tanh^2 r \cos^2 \theta (\operatorname{sech}^2 r \sin \theta \cdot r' + \tanh r \cos \theta \cdot \theta')^2 \right) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\operatorname{sech}^4 r} \left(\operatorname{sech}^4 r \cdot r'^2 + \tanh^2 r \cdot \theta'^2 + 2 \tanh^3 r \operatorname{sech}^2 r (\sin^3 \theta \cos \theta - \sin \theta \cos^3 \theta + \sin \theta \cos^3 \theta - \sin^3 \theta \cos \theta) r' \theta' - \right. \\
&\quad \left. - \tanh^4 r (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \theta'^2 \right) = \frac{1}{\operatorname{sech}^4 r} (\operatorname{sech}^4 r \cdot r'^2 + \tanh^2 r \cdot \theta'^2 - \tanh^4 r \cdot \theta'^2) = \\
&= r'^2 + \frac{\tanh^2 r}{\operatorname{sech}^4 r} (1 - \tanh^2 r) \theta'^2 = r'^2 + \frac{\tanh^2 r}{\operatorname{sech}^2 r} \theta'^2 = (r')^2 + (\sinh r \cdot \theta')^2
\end{aligned}$$

e, portanto, queremos que

$$(r')^2 + (\sinh r \cdot \theta')^2 \equiv 1.$$

Sejam r, θ tais que

$$\begin{cases} r' &= \cos \varphi \\ \theta' &= \frac{\sin \varphi}{\sinh r} \end{cases}$$

Então $\gamma = (r, \theta)$ é uma curva normalizada em X (localmente, a existência de γ está assegurada pelos teoremas de equações diferenciais) e

$$\eta = \left(-\sin \varphi, \frac{\cos \varphi}{\sinh r} \right)$$

$$\begin{aligned}
&\text{é unitário e normal a } \gamma \quad (\text{pois } (r')(\eta_1) + (\sinh r \cdot \theta')(\eta_2) = \\
&= -\cos \varphi \sin \varphi + \sinh^2 r \frac{\sin \varphi}{\sinh r} \frac{\cos \varphi}{\sinh r} = 0, \text{ etc.})
\end{aligned}$$

Observação

Se considerarmos a métrica de Bergman que se torna a métrica de Poincaré nas retas complexas, teremos

$$\|\gamma'\|^2 = \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2} ((1 - v^2)u'^2 + 2uvu'v' + (1 - u^2)v'^2)$$

e a equação de γ será

$$(2r')^2 + (2 \sinh r \cdot \theta')^2 \equiv 1.$$

Nesse caso, as equações acima são $r' = \frac{\cos \varphi}{2}$, $\theta' = \frac{\sin \varphi}{2 \sinh r}$, e fazemos $\eta = \left(-\frac{\sin \varphi}{2}, \frac{\cos \varphi}{2 \sinh r} \right)$.

Segue-se que

$$\begin{aligned}
&\nabla_\eta \ln V = \partial_r (\ln V) \eta_1 + \partial_\theta (\ln V) \eta_2 = \\
&= \left[(4n - 7) \coth r + 10 \coth 2r - 4 \tanh r + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sinh r \cosh r (2 \cosh^2 r + 3 \sinh^2 r \sin^2 \theta \cos^2 \theta (3 \sinh^2 r + 2) + 12 \sinh^6 r \sin^4 \theta \cos^4 \theta)}{\cosh^4 r + 3 \sinh^4 r \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\cosh^2 r + \sinh^4 r \sin^2 \theta \cos^2 \theta)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{4(n - 2k) \cot \theta + 2(4k - 1) \cot 2\theta + \frac{3 \sinh^4 r \sin \theta \cos \theta \cos 2\theta (\cosh^2 r + 2 \sinh^4 r \sin^2 \theta \cos^2 \theta)}{\cosh^4 r + 3 \sinh^4 r \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\cosh^2 r + \sinh^4 r \sin^2 \theta \cos^2 \theta)}}{2} \right] \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \frac{\cos \varphi}{\sinh r} \end{bmatrix} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \tanh r \sin \varphi - 10 \coth 2r \sin \varphi - (4n-7) \coth r \sin \varphi - \\
&- 2 \sinh 2r \sin \varphi \frac{2 \cosh^2 r + \frac{3}{4} \sinh^2 r \sin^2 2\theta (2 + 3 \sinh^2 r + \sinh^4 r \sin^2 2\theta)}{4 \cosh^4 r + 3 \sinh^4 r \sin^2 2\theta (\cosh^2 r + \sinh^4 r \frac{\sin^2 2\theta}{4})} + \\
&+ 4(n-2k) \cot \theta \cos \varphi \operatorname{csch} r + 2(4k-1) \cot 2\theta \cos \varphi \operatorname{csch} r + \frac{3 \sinh^3 r \sin 4\theta \cos \varphi (\cosh^2 r + \sinh^4 r \frac{\sin^2 2\theta}{4})}{4 \cosh^4 r + 3 \sinh^4 r \sin^2 2\theta (\cosh^2 r + \sinh^4 r \frac{\sin^2 2\theta}{4})}.
\end{aligned}$$

Figure 15: $\eta \perp \gamma$

Observação

Se M é variedade Riemanniana e $f \in C^\infty(M)$, define-se o gradiente ∇f pela igualdade

$$\langle \nabla f, \eta \rangle = f_* \eta (= \nabla_\eta f), \quad \forall \eta \in \mathfrak{X}^\infty(M).$$

No caso presente, considerando o referencial local

$$X_1 = \partial_r = \frac{\partial}{\partial r}, \quad X_2 = \frac{\partial_\theta}{\sinh r} = \frac{1}{\sinh r} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

temos

$$\nabla f = \sum_{s=1}^2 X_s(f) X_s = \partial_r(f) \partial_r + \frac{\partial_\theta(f)}{\sinh r} \frac{\partial_\theta}{\sinh r} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\sinh^2 r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Em termos de ∇f , tem-se

$$\begin{aligned}
\nabla_\eta f &= \langle \nabla f, \eta \rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial r} \partial_r + \frac{1}{\sinh^2 r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \partial_\theta, \eta \right\rangle = \\
&= \left[\frac{\partial f}{\partial r} \quad \frac{1}{\sinh^2 r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sinh^2 r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial r} \eta_1 + \frac{\partial f}{\partial \theta} \eta_2 = \begin{bmatrix} \partial_r(f) & \partial_\theta(f) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

em conformidade com

$$\nabla_\eta f = f_* \eta = \eta(f) = (\eta_1 \partial_r + \eta_2 \partial_\theta)(f) = \eta_1 \partial_r(f) + \eta_2 \partial_\theta(f) = \begin{bmatrix} \partial_r(f) & \partial_\theta(f) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}.$$

E, com $f = \ln V$, $\eta = (\eta_1, \eta_2) = (-\sin \varphi, \frac{\cos \varphi}{\sinh r}) = -\sin \varphi \partial_r + \frac{\cos \varphi}{\sinh r} \partial_\theta$, temos

$$\nabla_\eta \ln V = \partial_r(\ln V)(-\sin \varphi) + \partial_\theta(\ln V) \left(\frac{\cos \varphi}{\sinh r} \right) = \begin{bmatrix} \partial_r(\ln V) & \partial_\theta(\ln V) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \frac{\cos \varphi}{\sinh r} \end{bmatrix}.$$

Temos então o sistema

$$\begin{cases} r' &= \cos \varphi \\ \theta' &= \frac{\sin \varphi}{\sinh r} \\ \varphi' &= 4 \tanh r \sin \varphi - 10 \coth 2r \sin \varphi - (4n-7) \coth r \sin \varphi - \\ &\quad - 2 \sinh 2r \sin \varphi \frac{2 \cosh^2 r + \frac{3}{4} \sinh^2 r \sin^2 2\theta (2+3 \sinh^2 r + \sinh^4 r \sin^2 2\theta)}{4 \cosh^4 r + 3 \sinh^4 r \sin^2 2\theta (\cosh^2 r + \sinh^4 r \frac{\sin^2 2\theta}{4})} + \\ &\quad + 4(n-2k) \cot \theta \cos \varphi \operatorname{csch} r + 2(4k-1) \cot 2\theta \cos \varphi \operatorname{csch} r + \frac{3 \sinh^3 r \sin 4\theta \cos \varphi (\cosh^2 r + \sinh^4 r \frac{\sin^2 2\theta}{4})}{4 \cosh^4 r + 3 \sinh^4 r \sin^2 2\theta (\cosh^2 r + \sinh^4 r \frac{\sin^2 2\theta}{4})} \end{cases}$$

Uma solução, se existir, fornecerá uma curva $\gamma \sim (r, \theta)$ no espaço das órbitas X que, pelo teorema de redução, será a projeção de uma hipersuperfície em $\mathbb{H}^n$ com curvatura média $H \equiv 0$. Por outro lado, sabe-se [14] que de cada ponto de $\partial X = \{\theta = 0\} \cup \{\theta = \frac{\pi}{2}\}$ parte uma solução, perpendicularmente a ∂X . Vamos, portanto, impor as condições iniciais $r(0) = r_0 > 0$, $\theta(0) = 0$ e $\varphi(0) = \frac{\pi}{2}$. Uma alternativa é escrever as fórmulas para V com $k = \cosh r$ e $z = \sinh r$. Mantemos as convenções sobre ρ , ζ , σ , u e v , e acrescentamos ξ tal que

$$\sinh \xi = kuv = \rho \zeta z = \sinh r \tanh r \sin \theta \cos \theta.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \frac{(1-u^2)^3(1-v^2)^3 - u^6v^6}{(1-u^2-v^2)^{4n+4}} &= \frac{((1-u^2)(1-v^2))^3 - (u^2v^2)^3}{(1-u^2-v^2)^{4n+4}} = \\ &= \frac{((1-u^2)(1-v^2))^2 + (1-u^2)(1-v^2)u^2v^2 + u^4v^4}{(1-u^2-v^2)^{4n+3}} = \\ &= \frac{(1-\rho^2+u^2v^2)^2 + (1-\rho^2+u^2v^2)u^2v^2 + u^4v^4}{(1-\rho^2)^{4n+3}} = \\ &= \frac{(\sigma^2+u^2v^2)^2 + (\sigma^2+u^2v^2)u^2v^2 + u^4v^4}{\sigma^{8n+6}} = \frac{\sigma^4 + 3\sigma^2u^2v^2 + 3u^4v^4}{\sigma^{8n+6}} = \\ &= k^{8n+2} + 3k^{8n+4}u^2v^2 + 3k^{8n+6}u^4v^4 = k^{8n+2}(1 + 3(kuv)^2 + 3(kuv)^4), \end{aligned}$$

e que

$$3(kuv)^2 + 3(kuv)^4 = 3(kuv)^2(1 + (kuv)^2) = 3 \sinh^2 \xi \cosh^2 \xi = \frac{3}{4} \sinh^2(2\xi).$$

Logo

$$\frac{(1-u^2)^3(1-v^2)^3 - u^6v^6}{(1-u^2-v^2)^{4n+4}} = k^{8n+2} \left(1 + \frac{3}{4} \sinh^2 2\xi \right),$$

e

$$\frac{\sqrt{(1-u^2)^3(1-v^2)^3 - u^6v^6}}{(1-u^2-v^2)^{2n+2}} = \frac{k^{4n+1} \sqrt{4 + 3 \sinh^2(2\xi)}}{2} = \frac{k^{4n+1} \sqrt{1 + 3 \cosh^2(2\xi)}}{2}.$$

Temos então

$$V = u^{4k-1} v^{4n-4k-1} k^{4n+1} \frac{\sqrt{1 + 3 \cosh^2(2\xi)}}{2}$$

e logo

$$\ln V = (4k - 1) \ln u + (4n - 4k - 1) \ln v + (4n + 1) \ln k - \ln 2 + \frac{1}{2} \ln(1 + 3 \cosh^2(2\xi)) .$$

As derivadas de ξ são

$$\xi_r = \frac{\sen \theta \cos \theta (\cosh r \tanh r + \sinh r \operatorname{sech}^2 r)}{\sqrt{1 + \sinh^2 r \tanh^2 r} \sen^2 \theta \cos^2 \theta} = \frac{\sen \theta \cos \theta \sinh r (1 + \operatorname{sech}^2 r)}{\cosh \xi} = \frac{\zeta z (2 - \rho^2)}{\cosh \xi}$$

e

$$\xi_\theta = \frac{\rho z \cos(2\theta)}{\cosh \xi} .$$

Seguem-se (uma vez que $\frac{u_r}{u} = \frac{v_r}{v} = \frac{1}{kz}$)

$$\begin{aligned} \partial_r(\ln V) &= (4k - 1) \frac{u_r}{u} + (4n - 4k - 1) \frac{v_r}{v} + (4n + 1) \frac{k_r}{k} + \frac{6 \cosh 2\xi \sinh 2\xi \zeta z (2 - \rho^2)}{1 + 3 \cosh^2(2\xi) \cosh \xi} = \\ &= \frac{4n - 2}{kz} + (4n + 1)\rho + \frac{3 \sinh 4\xi \zeta z (2 - \rho^2)}{(1 + 3 \cosh^2 2\xi) \cosh \xi} \end{aligned}$$

e (uma vez que $\frac{u_\theta}{u} = -\tan \theta$, $\frac{v_\theta}{v} = \cot \theta$)

$$\partial_\theta(\ln V) = (1 - 4k) \tan \theta + (4n - 4k - 1) \cot \theta + \frac{3 \sinh 4\xi \rho z \cos 2\theta}{(1 + 3 \cosh^2 2\xi) \cosh \xi} .$$

E então, com $\sqcup = \frac{3 \sinh 4\xi}{(1 + 3 \cosh^2 2\xi) \cosh \xi}$, obtemos

$$\begin{aligned} \nabla_\eta \ln V &= \\ &= \left[\frac{4n-2}{kz} + (4n+1)\rho + \sqcup \zeta z (2 - \rho^2) \quad \frac{(1-4k) \tan \theta + (4n-4k-1) \cot \theta + \sqcup \rho z \cos 2\theta}{z^2} \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sen \varphi \\ \frac{\cos \varphi}{z} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{8n-4}{\sinh(2r)} (-\sen \varphi) - (4n+1) \tanh r \sen \varphi + (1-4k) \tan \theta \cos \varphi \operatorname{csch} r + (4n-4k-1) \cot \theta \cos \varphi \operatorname{csch} r + \\ &\quad + \sqcup (\tanh r \cos 2\theta \cos \varphi - \sen \theta \cos \theta \sen \varphi \sinh r (2 - \tanh^2 r)) . \end{aligned}$$

Ou, equivalentemente,

$$\left(\frac{2-4n}{zk} - (1+4n)\rho \right) \sen \varphi + \sqcup \zeta (z(\rho^2-2)) \sen \varphi + ((1-4k) \tan \theta + (4n-4k-1) \cot \theta) \operatorname{csch} r \cos \varphi + \sqcup \rho \cos(2\theta) \cos \varphi .$$

E como

$$\begin{aligned} \sinh 2\xi &= 2\rho \zeta z \sqrt{1 + \rho^2 \zeta^2 z^2} \\ \cosh 2\xi &= 1 + 2 \sinh^2 \xi = 1 + 2\rho^2 \zeta^2 z^2 \\ \sinh 4\xi &= 4\rho \zeta z \sqrt{1 + \rho^2 \zeta^2 z^2} (1 + 2\rho^2 \zeta^2 z^2) \end{aligned}$$

tem-se

$$\sqcup = \frac{3 \sinh 4\xi}{(1 + 3 \cosh^2 2\xi) \cosh \xi} = \frac{12\rho \zeta z(1 + 2\rho^2 \zeta^2 z^2) \sqrt{1 + \rho^2 \zeta^2 z^2}}{(1 + 3(1 + 2\rho^2 \zeta^2 z^2)^2) \sqrt{1 + \rho^2 \zeta^2 z^2}} = \frac{12\rho \zeta z(1 + 2\rho^2 \zeta^2 z^2)}{1 + 3(1 + 2\rho^2 \zeta^2 z^2)^2}$$

Se fizermos

$$g(r) = \frac{2 - 4n}{zk} - (1 + 4n)\rho \quad , \quad g_1(r) = z(\rho^2 - 2)$$

$$f(\theta) = (1 - 4k) \tan \theta + (4n - 4k - 1) \cot \theta \quad , \quad f_1(\theta) = \cos(2\theta) \quad ,$$

teremos o sistema acima na forma

$$\begin{cases} r' &= \cos \varphi \\ \theta' &= \frac{\sin \varphi}{\sinh r} \\ \varphi' &= (g(r) + \sqcup \zeta g_1(r)) \sin \varphi + (f(\theta) \operatorname{csch} r + \sqcup \rho f_1(\theta)) \cos \varphi \end{cases} \quad , \quad \text{com } r > 0, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) .$$

Segue-se que

$$\varphi' \sin \theta = (g(r) + \sqcup \zeta g_1(r)) \sin \varphi \sin \theta + \left(\frac{f(\theta)}{z} + \sqcup \rho f_1(\theta) \right) \cos \varphi \sin \theta$$

e, logo, que

$$\begin{aligned} & \varphi'' \sin \theta + \varphi' \cos \theta \theta' = \\ & (g'(r)r' + (\partial_r \sqcup) r' \sin \theta \cos \theta g_1(r) + (\partial_\theta \sqcup) \theta' \sin \theta \cos \theta g_1(r) + \sqcup \sin \theta \cos \theta g_1'(r) r' + \sqcup \cos(2\theta) \theta' g_1(r)) \sin \varphi \sin \theta + \\ & + (g(r) + \sqcup \sin \theta \cos \theta g_1(r)) (\cos \varphi \varphi' \sin \theta + \sin \varphi \cos \theta \theta') + \\ & + f'(\theta) \theta' \sinh r \cos \varphi \sin \theta + f(\theta) \cosh r r' \cos \varphi \sin \theta - f(\theta) \sinh r \sin \varphi \varphi' \sin \theta + f(\theta) \sinh r \cos \varphi \cos \theta \theta' + \\ & + (\partial_r \sqcup) r' \tanh r f_1(\theta) \cos \varphi \sin \theta + (\partial_\theta \sqcup) \theta' \tanh r f_1(\theta) \cos \varphi \sin \theta + \\ & + \sqcup \operatorname{sech}^2 r r' f_1(\theta) \cos \varphi \sin \theta + \\ & + \sqcup \tanh r f_1'(\theta) \theta' \cos \varphi \sin \theta - \sqcup \tanh r f_1(\theta) \sin \varphi \varphi' \sin \theta + \\ & + \sqcup \tanh r f_1(\theta) \cos \varphi \cos \theta \theta' + \\ & + \frac{f(\theta)}{\sinh r} (\cos \varphi \cos \theta \theta' - \sin \varphi \varphi' \sin \theta) . \end{aligned}$$

Se $s = 0$, temos

$$\varphi'(0) \theta'(0) = g(r) \theta'(0)$$

e logo (observe-se que $\theta'(0) = \frac{1}{\sinh r_0} \neq 0$)

$$\varphi'(0) = g(r) = \frac{4 - 8n}{\sinh 2r} - (1 + 4n) \tanh r < 0 .$$

Além disso, observemos que

$$\sqcup \zeta = \frac{12\rho \zeta^2 z(1 + 2\rho^2 \zeta^2 z^2)}{1 + 3(1 + 2\rho^2 \zeta^2 z^2)^2} \geq 0,$$

e logo

$$\varphi(s) = \frac{\pi}{2} \rightarrow \varphi'(s) = g(r) + \sqcup \zeta g_1(r) < 0$$

e

$$\varphi(s) = -\frac{\pi}{2} \rightarrow \varphi'(s) = -g(r) - \sqcup \zeta g_1(r) > 0$$

e, como $\varphi(0) = \frac{\pi}{2}$, temos que $\varphi(s) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \forall s > 0$ e existem $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ (com δ suficientemente pequeno) tais que

$$\varphi(s) \in \left(-\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right), \quad \forall s > \delta.$$

Em particular, $r' = \cos \varphi > 0$, $\forall s > 0$, e logo r é estritamente crescente.

Em verdade, se fizermos $\epsilon_0 = \cos(\frac{\pi}{2} - \varepsilon)$, teremos $\cos \varphi \geq \epsilon_0 \forall s \geq \delta$, e

$$r(s) = \int_0^s r'(\tau) d\tau = \int_0^s \cos \varphi(\tau) d\tau \geq \int_\delta^s \cos \varphi(\tau) d\tau \geq \epsilon_0 \int_\delta^s d\tau = \epsilon_0 s - \epsilon_0 \delta \rightarrow \infty, \text{ se } s \rightarrow \infty.$$

E como $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \forall s$, concluímos que existe uma curva solução (global) γ em X , sem autointerseções (uma vez que $r' > 0$), cujo ω -limite é vazio (ou seja, $\gamma \rightarrow \partial\Sigma$).

O teorema de redução afirma, então, que o levantamento de γ é uma hipersuperfície G -equivariante mínima M , em $\mathbb{H}^n$, e podemos concluir que tal hipersuperfície é também completa e mergulhada.

Realmente, M é uma união de órbitas de dimensão real $4n - 2$, indexadas por uma curva γ , e logo $\dim M = 4n - 2 + 1 = 4n - 1$, ou seja, M é uma hipersuperfície em $\mathbb{H}^n$, e $\text{coh } M = 1$.

Além disso, como duas órbitas coincidem ou são disjuntas, uma autointerseção ou acumulação em M corresponderia a uma autointerseção ou acumulação em γ , o que vimos que não existe. Logo M é mergulhada.

E, como γ é curva em X e $r \rightarrow \infty$ se $s \rightarrow \infty$, vemos que M é completa.

Mais precisamente: seja γ_n a restrição de γ a $[0, s_n]$, com $s_n \rightarrow \infty$, fixe-se um ponto $q \in \pi^{-1}(\gamma_0) \subseteq M$ e definam-se K_n , $n \in \mathbb{N}$, por $K_n = \pi^{-1}(\gamma_n)$. Como as órbitas são compactas, cada K_n é compacto (teorema de Tychonoff). Obviamente, $\cup \gamma_n = \gamma \rightarrow \cup K_n = M$. E como K_n é precisamente a união das órbitas que se projetam em γ_n , temos

$$q_n \in M \setminus K_n \forall n \rightarrow \pi(q_n) \in \gamma \setminus \gamma_n \forall n.$$

E então $\pi(q_n) \rightarrow \partial\Sigma$, e logo $d(\pi(q_n), \pi(q)) \rightarrow \infty$. E, como π é submersão Riemanniana, temos $d(q_n, q) \rightarrow \infty$.

Finalmente, como $r_0 > 0$ era qualquer, obtemos uma família a um parâmetro de tais hipersuperfícies mínimas, uma para cada $(r_0, 0, \frac{\pi}{2}) \in (0, 1) \times \{0\} \times \{\frac{\pi}{2}\}$.

Está demonstrado o teorema.

Figure 16: γ é projeção de uma hipersuperfície mínima

Observação

No caso complexo, com a bola B^{2n} munida da métrica de Bergman

$$\langle\langle V, W \rangle\rangle_z = \frac{4}{(1 - \|z\|^2)^2} \left((1 - \|z\|^2) \sum_{s=1}^n v_s \overline{w_s} + \sum_{s=1}^n \overline{z_s} v_s \sum_{r=1}^n z_r \overline{w_r} \right),$$

que provém da restrição ϕ_k a $Q^{2n+1}/Z(U(1, n)) \sim \mathbb{C}H^n$ da forma simplética

$$\phi = 2i\partial\bar{\partial}f : (X, Y) \mapsto \text{Im}\langle X, Y \rangle$$

em $\mathbb{C}^{1,n}$ e define uma estrutura Kähleriana em $\mathbb{C}H^n$ (onde $\langle, \rangle$ é a métrica Hermitiana em $\mathbb{C}^{1,n}$, $Z(U(1, n))$ é o centro de $U(1, n)$ e f é a 0-forma $f(z) = -\frac{1}{2}\langle z, z \rangle$), a situação é similar.

Se $z = (z_1, \dots, z_n) = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)$ está na seção Σ , com

$x_1 = u$, $x_{k+1} = v$, $x_s = 0 \forall s \neq 1, k+1$, $y_s = 0 \forall s$ e $v_s = \alpha_s + i\beta_s$, $w_s = \gamma_s + i\delta_s$, $s = 1, \dots, n$ temos

$$\begin{aligned} \langle\langle V, W \rangle\rangle_z &= \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2} \left((1 - u^2 - v^2) \sum_{s=1}^n (\alpha_s + i\beta_s)(\gamma_s - i\delta_s) + \right. \\ &\quad \left. + (u(\alpha_1 + i\beta_1) + v(\alpha_{k+1} + i\beta_{k+1}))(u(\gamma_1 - i\delta_1) + v(\gamma_{k+1} - i\delta_{k+1})) \right). \end{aligned}$$

Em particular,

$$\begin{aligned} \langle\langle V, V \rangle\rangle_z &= \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2} \left((1 - u^2 - v^2) \sum_{1 \neq s \neq k+1} (\alpha_s^2 + \beta_s^2) + \right. \\ &\quad \left. + (1 - v^2)(\alpha_1^2 + \beta_1^2) + (1 - u^2)(\alpha_{k+1}^2 + \beta_{k+1}^2) + 2uv(\alpha_1\alpha_{k+1} + \beta_1\beta_{k+1}) \right). \end{aligned}$$

Se $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n} \right\}$ é referencial em B^{2n} tal que

$$\frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_{k+2}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}$$

são tangentes às órbitas e, nos pontos $z = (u, 0, \dots, 0, v, \dots, 0)$ da seção Σ (identificada localmente com o espaço das órbitas) tem-se

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \text{ e } \frac{\partial}{\partial x_{k+1}}$$

tangentes a Σ , então, para $s \neq 1, k+1$, temos

$$\begin{aligned} \left\langle\left\langle \frac{\partial}{\partial x_s}, \frac{\partial}{\partial x_r} \right\rangle\right\rangle &= \left\langle\left\langle \frac{\partial}{\partial x_s}, \frac{\partial}{\partial y_r} \right\rangle\right\rangle = 0 \quad \forall r \neq s, \quad \left\langle\left\langle \frac{\partial}{\partial x_s}, \frac{\partial}{\partial x_s} \right\rangle\right\rangle = \frac{4}{1 - u^2 - v^2}, \quad \left\langle\left\langle \frac{\partial}{\partial x_s}, \frac{\partial}{\partial y_s} \right\rangle\right\rangle = \frac{-4i}{1 - u^2 - v^2} \\ \left\langle\left\langle \frac{\partial}{\partial y_s}, \frac{\partial}{\partial x_r} \right\rangle\right\rangle &= \left\langle\left\langle \frac{\partial}{\partial y_s}, \frac{\partial}{\partial y_r} \right\rangle\right\rangle = 0 \quad \forall r \neq s, \quad \left\langle\left\langle \frac{\partial}{\partial y_s}, \frac{\partial}{\partial x_s} \right\rangle\right\rangle = \frac{4i}{1 - u^2 - v^2}, \quad \left\langle\left\langle \frac{\partial}{\partial y_s}, \frac{\partial}{\partial y_s} \right\rangle\right\rangle = \frac{4}{1 - u^2 - v^2}. \end{aligned}$$

Se $s = 1$, tem-se

$$\begin{aligned} \left\langle\left\langle \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_1} \right\rangle\right\rangle &= \frac{4(1 - v^2)}{(1 - u^2 - v^2)^2}, \quad \left\langle\left\langle \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_{k+1}} \right\rangle\right\rangle = \frac{4uv}{(1 - u^2 - v^2)^2}, \\ \left\langle\left\langle \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial x_r} \right\rangle\right\rangle &= \left\langle\left\langle \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_r} \right\rangle\right\rangle = 0, \quad r \neq 1, k+1 \end{aligned}$$

e, para $s = k + 1$,

$$\begin{aligned} \left\langle \left\langle \frac{\partial}{\partial y_{k+1}}, \frac{\partial}{\partial y_1} \right\rangle \right\rangle &= \frac{4uv}{(1-u^2-v^2)^2} \quad , \quad \left\langle \left\langle \frac{\partial}{\partial y_{k+1}}, \frac{\partial}{\partial y_{k+1}} \right\rangle \right\rangle = \frac{4(1-u^2)}{(1-u^2-v^2)^2} \quad , \\ \left\langle \left\langle \frac{\partial}{\partial x_s}, \frac{\partial}{\partial x_r} \right\rangle \right\rangle &= \left\langle \left\langle \frac{\partial}{\partial x_s}, \frac{\partial}{\partial x_r} \right\rangle \right\rangle = 0 \quad , \quad r \neq 1, k+1. \end{aligned}$$

A matriz de Gramm associada à órbita é

$$\begin{bmatrix} \frac{4(1-v^2)}{(1-u^2-v^2)^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{4uv}{(1-u^2-v^2)^2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{1-u^2-v^2} & \frac{-4i}{1-u^2-v^2} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4i}{1-u^2-v^2} & \frac{4}{1-u^2-v^2} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{4}{1-u^2-v^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{4uv}{(1-u^2-v^2)^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{4(1-u^2)}{(1-u^2-v^2)^2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \frac{4}{1-u^2-v^2} & \frac{-4i}{1-u^2-v^2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \frac{4i}{1-u^2-v^2} & \frac{4}{1-u^2-v^2} \end{bmatrix} \quad ,$$

que tem determinante

$$\Omega^2 = \frac{16(1-u^2)(1-v^2)}{(1-u^2-v^2)^{4+2n-4}} - \frac{16u^2v^2}{(1-u^2-v^2)^{4+2n-4}} = \frac{16(1-u^2-v^2)}{(1-u^2-v^2)^{2n}} = \frac{16}{(1-u^2-v^2)^{2n-1}}$$

(uma vez que $\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{vmatrix}} = 2 = \text{área do paralelogramo gerado pelos vetores } (1, i), (-i, 1) \in \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$, que fica unitária, com renormalização).

Figure 17: $(1, i)$ e $(-i, 1)$ são linearmente independentes em dimensão real.

O elemento de volume associado é, portanto,

$$\Omega = \Omega(z) = \frac{4}{(1-u^2-v^2)^{\frac{2n-1}{2}}} \quad , \quad z = (u, 0, \dots, 0, v, \dots, 0) \in \Sigma \quad .$$

Uma justificativa algébrica pode ser feita com as identificações

$$(x + iy, u + iv) \sim ((x, y), (u, v)) \sim (x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4.$$

Temos

$$(1, i) \sim (1, 0, 0, 1) \text{ e } (-i, 1) \sim (0, -1, 1, 0)$$

e logo

$$\begin{vmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \langle (1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 1) \rangle & \langle (1, 0, 0, 1), (0, -1, 1, 0) \rangle \\ \langle (0, -1, 1, 0), (1, 0, 0, 1) \rangle & \langle (0, -1, 1, 0), (0, -1, 1, 0) \rangle \end{vmatrix} = 2^2$$

(em outras palavras, os vetores $(1, i)$ e $(-i, 1)$ têm norma $\|(1, i)\| = \|(-i, 1)\| = \sqrt{2}$, que renormalizamos).

No caso quaterniônico, temos $(-i, 1, k, -j) \sim (0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0) \in \mathbb{H}^4 \cong \mathbb{R}^{16}$, etc. E renormalizamos a forma volume Ω , observando que

$$\begin{vmatrix} 1 & -i & -j & -k \\ i & 1 & -k & j \\ j & k & 1 & -i \\ k & -j & i & 1 \end{vmatrix} = 4^4 \text{ e que } \begin{vmatrix} 1 & -k & j \\ k & 1 & -i \\ -j & i & 1 \end{vmatrix} = 3^3.$$

(caso contrário, teríamos

$$\Omega = \left(\frac{1}{r^2}\right)^3 \left(\frac{2}{r}\right)^{4n-8} \left| \begin{matrix} (1-v^2)\Gamma & uv\Gamma \\ uv\Gamma & (1-u^2)\Gamma \end{matrix} \right| = 2^{2n-4} 3\sqrt{3} \frac{\sqrt{(1-u^2)^3(1-v^2)^3 - u^6v^6}}{(1-u^2-v^2)^{2m+2}}).$$

Voltando ao caso complexo, temos que os campos de Killing tangentes à órbita por $z \in \Sigma$ são

$$X_1^* = u \frac{\partial}{\partial y_1}, X_2^* = u \frac{\partial}{\partial x_2}, X_3^* = u \frac{\partial}{\partial y_2}, \dots, X_{2k-1}^* = u \frac{\partial}{\partial y_k}, X_{2k}^* = v \frac{\partial}{\partial y_{k+1}}, \dots, X_{2n-2}^* = v \frac{\partial}{\partial y_n}$$

e logo o elemento de volume da órbita é

$$\begin{aligned} \|X_1^* \times \dots \times X_{2n-1}^*\| &= \sqrt{\begin{vmatrix} \langle X_1^*, X_1^* \rangle & \dots & \langle X_1^*, X_{2n-2}^* \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle X_{2n-2}^*, X_1^* \rangle & \dots & \langle X_{2n-2}^*, X_{2n-2}^* \rangle \end{vmatrix}} = \\ &= \sqrt{u^{4k-2} v^{4n-4k-2} \Omega^2} = \sqrt{\frac{16u^{4k-2} v^{4n-4k-2}}{(1-u^2-v^2)^{2n-1}}} = \frac{4u^{2k-1} v^{2n-2k-1}}{(1-u^2-v^2)^{\frac{2n-1}{2}}}. \end{aligned}$$

§ 2

No caso do espaço hiperbólico complexo, temos, conforme a última observação na seção anterior, a fórmula

$$\Omega^2 = \frac{16}{(1 - u^2 - v^2)^{2n-1}}$$

que fornece o elemento de volume associado às órbitas $\cong G/G_z$, onde G é um subgrupo de isometrias de tipo compacto, e a métrica de Bergman restrita a uma seção Σ escreve-se

$$\frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2} ((1 - v^2)du^2 + 2uvdu dv + (1 - u^2)dv^2)$$

em um ponto $z = (u, 0, \dots, 0, v, \dots, 0) \in \Sigma$. As órbitas são difeomorfas a um produto $\mathbb{S}^{2k-1} \times \mathbb{S}^{2n-2k-1}$.

Se considerarmos a ação $G \times \mathbb{C}H^n \rightarrow \mathbb{C}H^n \sim \mathbb{B}^{2n}$, com

$$G = \left\{ g = \begin{bmatrix} A & & \\ & I & \\ & & B \end{bmatrix} / A \in U(1, k-1), B \in U(n-k), \det A \det B = 1 \right\},$$

teremos órbitas isométricas ao produto $Q^{2k-1} \times \mathbb{S}^{2n-2k-1}$ e, como antes, uma ação polar. As órbitas serão ortogonais a uma seção Σ e os campos de Killing X_s^* que geram a ação serão paralelos a um referencial $\{\frac{\partial}{\partial \zeta_s} / \zeta = x \text{ ou } y, s \in \{1, \dots, n\}\}$. Com $z = (0, \dots, 0, u, v, 0, \dots, 0) \in \Sigma$ obtém-se, para a subórbita $\cong Q^{2k-1}$, os campos tangentes

$$X_1^* = u \frac{\partial}{\partial x_1}, X_2^* = \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, X_{2k-1}^* = \frac{\partial}{\partial x_k}$$

e, para a subórbita $\cong \mathbb{S}^{2n-2k-1}$,

$$X_{2k}^* = v \frac{\partial}{\partial y_{k+1}}, \dots, X_{2n-2}^* = v \frac{\partial}{\partial y_n}.$$

A forma volume é dada, então, por

$$\begin{aligned} V^2 &= \begin{vmatrix} \langle u \frac{\partial}{\partial x_1}, u \frac{\partial}{\partial x_1} \rangle & \langle u \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1} \rangle & \dots & \langle u \frac{\partial}{\partial x_1}, v \frac{\partial}{\partial y_n} \rangle \\ \langle \frac{\partial}{\partial y_1}, u \frac{\partial}{\partial x_1} \rangle & \langle \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_1} \rangle & \dots & \langle \frac{\partial}{\partial y_1}, v \frac{\partial}{\partial y_n} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v \frac{\partial}{\partial y_n}, u \frac{\partial}{\partial x_1} \rangle & \langle v \frac{\partial}{\partial y_n}, \frac{\partial}{\partial y_1} \rangle & \dots & \langle v \frac{\partial}{\partial y_n}, v \frac{\partial}{\partial y_n} \rangle \end{vmatrix} = \\ &= u^2 v^{4n-4k-2} \begin{vmatrix} \langle \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_1} \rangle & \langle \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \rangle & \dots & \langle \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_n} \rangle \\ \langle \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial y_1} \rangle & \langle \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_2} \rangle & \dots & \langle \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial y_n} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \frac{\partial}{\partial y_n}, \frac{\partial}{\partial y_1} \rangle & \langle \frac{\partial}{\partial y_n}, \frac{\partial}{\partial x_2} \rangle & \dots & \langle \frac{\partial}{\partial y_n}, \frac{\partial}{\partial y_n} \rangle \end{vmatrix} = u^2 v^{4n-4k-2} \frac{16}{(1 - u^2 - v^2)^{2n-1}}, \end{aligned}$$

e segue-se que

$$V = \frac{4uv^{2n-2k-1}}{(1 - u^2 - v^2)^{\frac{2n-1}{2}}}.$$

Observemos que, nas subórbitas de tipo $\cong Q^{2k-1} \cong H^{2k-2} \times \mathbb{S}^1$, o raio da fibra $\mathbb{S}^1$ é um invariante orbital. No espaço hiperbólico real $\mathbb{R}H^n$, com a parametrização $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}) = \varphi(t_1, \dots, t_n)$, dada por

$$-\varphi_1^2 + \sum_{s=2}^{n+1} \varphi_s^2 = -1$$

temos a distância (semi-Euclidiana) ao vértice como invariante orbital.

Se $n = 2$, temos $\varphi(t, \theta) = (\rho \cosh t, \rho \sinh t \cos \theta, \rho \sinh t \sin \theta)$, onde ρ é a distância da origem ao vértice, e (com θ fixo) $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{-\rho^2 \sinh^2 t + \rho^2 \cosh^2 t} = \rho$.

Exemplo 14

No plano real hiperbólico $\mathbb{RH}^2$, definido no espaço Lorentziano tridimensional $\mathbb{R}^{1,2}$ pela equação $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ (modelo do hiperbolóide), considerem-se as órbitas hiperbólicas $\gamma_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{RH}^2$, definida em $\mathbb{RH}^2$ pela equação $z \equiv 0$, e $\gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{RH}^2$, dada por $z \equiv 1$. É fácil ver que os traços de γ_1 e γ_2 (órbitas da ação de um grupo de translações hiperbólicas) são hipérboles equiláteras definidas pelas equações

$$y^2 = x^2 - 1, \quad z = 0$$

e

$$y^2 = x^2 - 2, \quad z = 1.$$

Mais geralmente, se $\gamma_r, \gamma_s : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{RH}^n \subseteq \mathbb{R}^{1,n}$ são dadas por

$$x_{n+1} = r, \quad x_{n+1} = s,$$

então seus gráficos são órbitas hiperbolóides rotacionais.

Uma distinção entre o caso elítico e o caso hiperbólico, além da compacidade, é que, enquanto órbitas esferas com centro comum são obtidas uma da outra por homotetia, órbitas espaços hiperbólicos estão relacionadas por uma dilatação. No caso do espaço hiperbólico complexo, por exemplo, as órbitas hiperbólicas são fibrados de círculos, e a passagem de uma órbita para outra se faz por uma dilatação na direção dos raios dos círculos. Espera-se, portanto, que o elemento de volume de uma órbita dependa apenas do raio do círculo.

Figure 18: Órbitas não compactas.

Exemplo 15

A ação $O(1, 1) \times O(2) \times \mathbb{RH}^4 \rightarrow \mathbb{RH}^4$ define órbitas que são produtos $\mathbb{RH}^1 \times \mathbb{S}^1$, e uma análise dessa situação é similar à que fizemos no §1 para a ação de grupo compacto $O(2) \times O(2) \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$. Um elemento típico em $G = O(1, 1) \times O(2)$ é da forma

$$\begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos s & -\sin s \\ 0 & 0 & \sin s & \cos s \end{bmatrix} \quad t, s \in \mathbb{R}$$

e se $q = (r \cosh \alpha, r \sinh \alpha, \rho \cos \beta, \rho \sin \beta) \in \mathbb{RH}^4$, temos

$$g \cdot q = (r \cosh(t + \alpha), r \sinh(t + \alpha), \rho \cos(s + \beta), \rho \sin(s + \beta)).$$

A isotropia em q é

$$G_q = \left\{ g \in O(1, 1) \times O(2) \quad / \quad \begin{array}{l} \cosh(t + \alpha) = \cosh \alpha \\ \sinh(t + \alpha) = \sinh \alpha \\ \cos(s + \beta) = \cos \beta \\ \sin(s + \beta) = \sin(\beta) \end{array} \right\} = \{g \mid t = 0, s \in 2\pi\mathbb{Z}\} = \langle I \rangle$$

e logo

$$\gamma_q \cong G/G_q \cong G \cong H^1 \times \mathbb{S}^1$$

e, como no exemplo 12, se $e_N^\perp$ é o hiperplano ortogonal ao último eixo, temos

$$\gamma \cap e_N^\perp = \{(r \cosh \alpha, r \sinh \alpha, \rho, 0)\} \cup \{(r \cosh \alpha, r \sinh \alpha, -\rho, 0)\} \neq \emptyset.$$

Exemplo 16 As órbitas da ação $U(1, 1) \times \mathbb{C}H^2 \rightarrow \mathbb{C}H^2$ são as 3-variedades determinadas por

$$-x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 \equiv -k, \quad k > 0,$$

uma vez que $U(1, 1)$ preserva a métrica semi-Riemanniana complexa $-dz_1 \overline{dz_1} + dz_2 \overline{dz_2}$. No caso da ação $U(1, k-1) \times U(n-k) \times \mathbb{C}H^n \rightarrow \mathbb{C}H^n$, as órbitas $Q_u^{2k-1} \times \mathbb{S}_v^{2n-2k-1}$ estão associadas aos invariantes orbitais u e v , com $-|z_k|^2 + \sum_{s=1}^{k-1} |z_s|^2 \equiv -u^2$ e $\sum_{s=k+1}^{n-1} |z_s|^2 \equiv v^2$.

Observação

Similarmente ao caso elítico, o espaço das órbitas X é identificado com um subconjunto de uma seção Σ (que é um plano real totalmente geodésico), e podemos escrever

$$X = \{(u, v) \in \Sigma \mid u \geq 0, v \geq 0, u^2 + v^2 < 1\}.$$

Temos, como antes, quatro câmaras de Weyl generalizadas, cada uma das quais caracteriza o espaço X .

Figure 19: Órbitas e câmaras de Weyl generalizadas no caso elítico e no caso hiperbólico.

Em termos de um referencial, como na seção anterior, temos que os campos tangentes às órbitas são múltiplos escalares de campos básicos $\frac{\partial}{\partial \xi_s}$. As subórbitas hiperbólicas ($\cong Q^{2k-1}$) são obtidas uma da outra por uma dilatação em uma única direção e, podemos, portanto, escolher $X_1^*, \dots, X_{2n-2}^*$ como acima, com u igual ao raio do círculo associado à subórbita hiperbólica e v igual ao raio da subórbita esférica.

Então, com $u = \tanh r \cos \theta$, $v = \tanh r \sin \theta$ (como antes), obtém-se

$$\Gamma = \frac{4uv^{2n-2k-1}}{(1-u^2-v^2)^{\frac{2n-1}{2}}} = 4 \cosh^{2n-1} r \frac{\sinh^{2n-2k} r}{\cosh^{2n-2k} r} \cos \theta \sin^{2n-2k-1} \theta =$$

$$= 4 \sinh^{2n-4k+1} r \sinh^{2k-1} 2r \sin^{2n-2k-2} \theta \sin 2\theta$$

e, como antes, o procedimento de redução vai levar a um sistema de equações diferenciais que, se integrado, fornecerá as projeções em X de hipersuperfícies mínimas G -equivariantes, completas, mergulhadas em $\mathbb{C}H^n$, desta vez uniões de órbitas não compactas. Mais explicitamente: temos o sistema [8]

$$\begin{cases} r' &= \frac{\cos \varphi}{2} \\ \theta' &= \frac{\sinh \varphi}{2 \sinh r} \\ \varphi' &= ((n-k-1) \cot \theta + \cot 2\theta) \operatorname{csch} r \cos \varphi - ((n-2k+\frac{1}{2}) \coth r + (2k-1) \coth 2r) \sin \varphi \end{cases}$$

No caso quaterniônico, a situação é similar. Consideramos a ação $G \times \mathbb{H}H^n \rightarrow \mathbb{H}H^n \sim \mathbb{B}^{4n}$, com

$$G = \left\{ g = \begin{bmatrix} A & & \\ & I & \\ & & B \end{bmatrix} / A \in Sp(1, k-1), B \in Sp(n-k) \right\},$$

identificamos o espaço das órbitas X com um subconjunto de uma seção $\Sigma = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \sim (x_1, \dots, t_n) = (0, \dots, u, v, \dots, 0)\}$, onde

$$\begin{aligned} t_k &= u, & x_{k+1} &= v \\ x_s &= y_s = z_s = t_s = 0 \quad \forall s \neq k, k+1 \\ x_k &= y_k = z_k = y_{k+1} = z_{k+1} = t_{k+1} = 0, \end{aligned}$$

e a métrica orbital, induzida pela métrica de Bergman quaterniônica em $X \subseteq \mathbb{B}^{4n}$ será dada por

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1-u^2-v^2)^2} \left(\sum_{k \neq s \neq k+1} (1-u^2-v^2)(dx_s^2 + dy_s^2 + dz_s^2 + dt_s^2) + \right. \\ & + (1-v^2)(dx_k^2 + dy_k^2 + dz_k^2 + dt_k^2) + (1-u^2)(dx_{k+1}^2 + dy_{k+1}^2 + dz_{k+1}^2 + dt_{k+1}^2) + \\ & \left. + 2uv(dx_k dx_{k+1} + dy_k dy_{k+1} + dz_k dz_{k+1} + dt_k dt_{k+1}) \right). \end{aligned}$$

Observamos, no entanto, que nesse caso as subórbitas hiperbólicas são fibrados de 3-esferas, obtidas uma da outra por uma dilatação em três direções. Escolhemos um referencial

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n}, \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial t_n} \right\}$$

em $\mathbb{B}^{4n}$ tal que

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t_k}, \frac{\partial}{\partial x_{k+1}} \right\}$$

gere o fibrado real normal às órbitas (tangente a Σ) e tal que os campos vetoriais

$$\frac{\partial}{\partial x_s}, s = 1, \dots, n, s \neq k+1, \quad \frac{\partial}{\partial t_s}, s = 1, \dots, n, s \neq k, \quad \frac{\partial}{\partial y_s}, \frac{\partial}{\partial z_s}, s = 1, \dots, n,$$

sejam tangentes às órbitas, e temos que a órbita γ_ω por um ponto $\omega = (q_1, q_2) \sim (0, \dots, u, v, \dots, 0) \in \Sigma$ é o produto de um espaço hiperbólico $Q_{\|q_1\|}^{4k-1}$ de "raio" $\|q_1\|$ por uma esfera $S_{\|q_2\|}^{4n-4k-1}$ de raio $\|q_2\|$.

O push forward de uma base ortonormal da álgebra complementar à álgebra de Lie de $K = G_\omega$ na álgebra de Lie de G é uma base de $T_\omega \gamma_\omega$, onde três vetores tangentes tem norma (hiperbólica) $\|q_1\| = \frac{u}{1-u^2-v^2}$ e os últimos $4n-4k-1$ vetores tangentes têm norma $\|q_2\| = \frac{v}{1-u^2-v^2}$. Realmente, os $4n-2$ campos X_s^* que geram T_{γ_ω} são dados pela ação isométrica de G e, portanto, cada um deles é o próprio campo vetorial referencial ou tem norma definida pelo raio da $(4n-4k-1)$ -esfera, ou pelo raio da 3-esfera associada ao $(4k-1)$ -espaço hiperbólico $\cong Q^{4k-1} \cong H^{4k-4} \times \mathbb{S}^3$

Figure 20: $\|X_s^*\|$ cresce com u se $s \leq 3$ e com v se $s > 4k$.

Temos

$$X_1^* = u \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_2^* = u \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad X_3^* = u \frac{\partial}{\partial z_1}, \quad X_4^* = \frac{\partial}{\partial t_1}, \quad \dots, \quad X_{4k-1}^* = \frac{\partial}{\partial z_k},$$

$$X_{4k}^* = v \frac{\partial}{\partial y_{k+1}}, \quad X_{4k+1}^* = v \frac{\partial}{\partial z_{k+1}}, \quad \dots, \quad X_{4n-2}^* = v \frac{\partial}{\partial t_n}$$

e segue-se que

$$\begin{aligned} V^2 = \|X_1^* \times \dots \times X_{4n-2}^*\|^2 &= \begin{vmatrix} \langle u \frac{\partial}{\partial x_1}, u \frac{\partial}{\partial x_1} \rangle & \langle u \frac{\partial}{\partial x_1}, u \frac{\partial}{\partial y_1} \rangle & \dots & \langle u \frac{\partial}{\partial x_1}, v \frac{\partial}{\partial t_n} \rangle \\ \langle \frac{\partial}{\partial y_1}, u \frac{\partial}{\partial x_1} \rangle & \langle \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_1} \rangle & \dots & \langle \frac{\partial}{\partial y_1}, v \frac{\partial}{\partial t_n} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v \frac{\partial}{\partial t_n}, u \frac{\partial}{\partial x_1} \rangle & \langle v \frac{\partial}{\partial t_n}, \frac{\partial}{\partial y_1} \rangle & \dots & \langle v \frac{\partial}{\partial t_n}, v \frac{\partial}{\partial t_n} \rangle \end{vmatrix} = \\ &= u^6 v^{8n-8k-2} \begin{vmatrix} \langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1} \rangle & \dots & \langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial t_n} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \frac{\partial}{\partial t_n}, \frac{\partial}{\partial x_1} \rangle & \dots & \langle \frac{\partial}{\partial t_n}, \frac{\partial}{\partial t_n} \rangle \end{vmatrix} = \\ &= u^6 v^{8n-8k-2} \Omega^2 = u^6 v^{8n-8k-2} \frac{(1-u^2)^3(1-v^2)^3 - u^6 v^6}{(1-u^2-v^2)^{4n+4}}. \end{aligned}$$

Logo, o elemento de volume da órbita por $\omega = (0, \dots, u, v, \dots, 0) \in \Sigma$ é

$$V = \frac{u^3 v^{4n-4k-1} \sqrt{(1-u^2)^3(1-v^2)^3 - u^6 v^6}}{(1-u^2-v^2)^{2n+2}}$$

e, com as convenções feitas no §1, temos

$$V = u^3 v^{4n-4k-1} k^{4n+1} \frac{\sqrt{1+3 \cosh^2(2\xi)}}{2}$$

e logo

$$\ln V = 3 \ln u + (4n-4k-1) \ln v + (4n+1) \ln k - \ln 2 + \frac{1}{2} \ln(1+3 \cosh^2(2\xi)).$$

Seguem-se

$$\begin{aligned}\partial_r(\ln V) &= 3\frac{u_r}{u} + (4n - 4k - 1)\frac{v_r}{v} + (4n + 1)\frac{k_r}{k} + \frac{6 \cosh 2\xi \sinh 2\xi \zeta z(2 - \rho^2)}{1 + 3 \cosh^2(2\xi) \cosh \xi} = \\ &= \frac{4n - 4k + 2}{kz} + (4n + 1)\rho + \frac{3 \sinh 4\xi \zeta z(2 - \rho^2)}{(1 + 3 \cosh^2 2\xi) \cosh \xi}\end{aligned}$$

e

$$\partial_\theta(\ln V) = -3 \tan \theta + (4n - 4k - 1) \cot \theta + \frac{3 \sinh 4\xi \rho z \cos 2\theta}{(1 + 3 \cosh^2 2\xi) \cosh \xi}.$$

E, portanto,

$$\begin{aligned}\nabla_\eta \ln V &= \\ &= \left[\frac{4n-4k+2}{kz} + (4n+1)\rho + \frac{3 \sinh 4\xi \zeta z(2-\rho^2)}{(1+3 \cosh^2 2\xi) \cosh \xi} \quad \frac{-3 \tan \theta + (4n-4k-1) \cot \theta + \frac{3 \sinh 4\xi \rho z \cos 2\theta}{(1+3 \cosh^2 2\xi) \cosh \xi}}{z^2} \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sin \varphi}{z} \\ \frac{\cos \varphi}{z} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{8n-8k+4}{\sinh(2r)} (-\sin \varphi) - (4n+1) \tanh r \sin \varphi - 3 \tan \theta \cos \varphi \operatorname{csch} r + (4n-4k-1) \cot \theta \cos \varphi \operatorname{csch} r + \\ &\quad + \frac{3 \sinh 4\xi \rho z \cos 2\theta}{(1+3 \cosh^2 2\xi) \cosh \xi} \cos \varphi + \frac{3 \sinh 4\xi \rho z \cos 2\theta}{(1+3 \cosh^2 2\xi) \cosh \xi} \sin \varphi \tanh r\end{aligned}$$

(veja-se observação sobre gradiente na pg. 48).

E, similarmente ao caso elítico, fazemos

$$\begin{aligned}g(r) &= \frac{4n-4k+2}{zk} + (4n+1)\rho, & g_1(r) &= z(2-\rho^2) \\ f(\theta) &= -3 \tan \theta + (4n-4k-1) \cot \theta, & f_1(\theta) &= \cos(2\theta),\end{aligned}$$

e obtemos o sistema

$$\begin{cases} r' &= \cos \varphi \\ \theta' &= \frac{\sin \varphi}{\sinh r} \\ \varphi' &= -(g(r) + \frac{3 \sinh 4\xi \rho z \cos 2\theta}{(1+3 \cosh^2 2\xi) \cosh \xi} \sin \varphi + (f(\theta) \operatorname{csch} r + \frac{3 \sinh 4\xi \rho z \cos 2\theta}{(1+3 \cosh^2 2\xi) \cosh \xi} \sin \varphi) \cos \varphi \end{cases}, \quad \text{com } r > 0, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Obviamente, o sistema acima admite a mesma análise que o do caso elítico, e segue-se essencialmente a mesma conclusão. Enunciamos esse resultado como o

Teorema 2

Se G é um subgrupo do grupo $Sp(1, n)$ das isometrias de $\mathbb{H}^n$ da forma

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}, \quad A \in Sp(1, k-1), \quad B \in Sp(n-k) \right\}, \quad k = 2, \dots, n-1$$

existem infinitas classes de subvariedades mínimas G -equivariantes, completas, mergulhadas em $\mathbb{H}^n$ com cohomogeneidade 1 (hipersuperfícies em $\mathbb{H}^n$).

§ 3

Se considerarmos a ação do fator nilpotente na decomposição de Iwasawa de $Sp(1, n)$, teremos um outro tipo de isometrias do espaço hiperbólico quaterniônico, em que as órbitas são horosferas ou produtos de horosferas por esferas. Esses casos são conhecidos como parabólicos.

Na geometria hiperbólica real, por exemplo, as rotações ideais "em torno" de um ponto ideal q_∞ definem órbitas horosferas. No caso de subvariedades rotacionais (rotações parabólicas) em $\mathbb{R}H^n$, temos parametrizações explícitas [4], com a escolha de uma base semiortonormal $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ tal que

$$\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_n, e_n \rangle = 0, \quad \langle e_1, e_n \rangle = 1, \quad \langle e_r, e_s \rangle = \delta_{rs}, \quad \text{nos outros casos}$$

e a aplicação

$$f(t_1, \dots, t_{n-1}, s) = \left(x_1(s), x_1(s)t_1, \dots, x_1(s)t_{n-1}, \frac{1 + x_n^2(s) + x_1^2(s) \sum t_r^2}{2x_1(s)}, x_{n+1}(s) \right)$$

é parametrização de uma hipersuperfície gerada pela rotação (parabólica) de uma curva γ , dada por

$$\gamma(s) = (x_1(s), x_n(s), x_{n+1}(s)).$$

Observação

Em [4] generaliza-se a definição de catenóide. Um catenóide é o levantamento de uma solução de

$$xx'' + (n-1)x'^2 - nx^2 - \delta(n-1) = 0,$$

onde $\delta = 1, -1$ ou 0 , se as rotações forem esféricas, hiperbólicas ou parabólicas.

Um catenóide parabólico é, portanto, o levantamento de uma solução de $xx'' + (n-1)x'^2 = nx^2$.

Na geometria hiperbólica quaterniônica, como na geometria hiperbólica complexa, um modelo conveniente para os casos parabólicos é obtido com o domínio de Siegel

$$\mathbb{H}^n = \{(w_1, \hat{w}) / 2\operatorname{Re} w_1 > \|\hat{w}\|^2\}, \quad \text{onde } \hat{w} = (w_2, \dots, w_n),$$

que se corresponde com a bola $\mathbb{B}^{4n}$ através da transformada de Cayley

$$\mathcal{C} : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$$

$$(\varpi_1, \dots, \varpi_n) \mapsto \left(\frac{1}{2}(1 - \varpi_1)(1 + \varpi_1)^{-1}, \varpi_2(1 + \varpi_1)^{-1}, \dots, \varpi_n(1 + \varpi_1)^{-1} \right).$$

Observe-se que

$$\mathcal{C}^{-1} : (w_1, \dots, w_n) \mapsto ((1 - 2w_1)(1 + 2w_1)^{-1}, (2w_2)(1 + 2w_1)^{-1}, \dots, (2w_n)(1 + 2w_1)^{-1})$$

e que $\mathcal{C}$ é um difeomorfismo C^∞ $\mathbb{B}^{4n} \cong \mathbb{H}^n$. Realmente,

$$\begin{aligned} (\varpi_1, \dots, \varpi_n) \in \mathbb{B}^{4n} &\rightarrow \sum_{s=1}^n |\varpi_s|^2 < 1 \rightarrow 2\operatorname{Re} w_1 = 2\operatorname{Re} (2^{-1}(1 - \varpi_1)(1 + \varpi_1)^{-1}) = \\ &= \operatorname{Re}((1 - \varpi_1)(1 + \varpi_1)^{-1}) = \operatorname{Re}((1 - \varpi_1)(1 + \overline{\varpi_1})(1 + \overline{\varpi_1})^{-1}(1 + \varpi_1)^{-1}) = \\ &= \operatorname{Re}((1 + \overline{\varpi_1} - \varpi_1 - |\varpi_1|^2)((1 + \varpi_1)(1 + \overline{\varpi_1}))^{-1}) = \operatorname{Re} \left(\frac{1 + \overline{\varpi_1} - \varpi_1 - |\varpi_1|^2}{|1 + \varpi_1|^2} \right) = \\ &= \frac{1}{|1 + \varpi_1|^2} \operatorname{Re}(1 - |\varpi_1|^2 + (\overline{\varpi_1} - \varpi_1)) = \frac{1 - |\varpi_1|^2}{|1 + \varpi_1|^2} > \frac{\sum_{s=2}^n |\varpi_s|^2}{|1 + \varpi_1|^2} = \sum_{s=2}^n \left| \frac{\varpi_s}{1 + \varpi_1} \right|^2 = \langle \hat{w}, \hat{w} \rangle \end{aligned}$$

e, reciprocamente,

$$\begin{aligned}
(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{h}^n &\rightarrow 2\operatorname{Re} w_1 > \langle \hat{w}, \hat{w} \rangle = \sum_{s=2}^n |w_s|^2 \rightarrow \sum_{s=1}^n |\omega_s|^2 = \left| \frac{1-2w_1}{1+2w_1} \right|^2 + \sum_{s=2}^n \left| \frac{2w_s}{1+2w_1} \right|^2 = \\
&= \frac{4 \sum_{s=2}^n |w_s|^2 + (1-2w_1)(1-2\bar{w}_1)}{|1+2w_1|^2} = \frac{1+4|w_1|^2 + 4 \sum_{s=2}^n |w_s|^2 - 4\operatorname{Re} w_1}{1+4|w_1|^2 + 4\operatorname{Re} w_1} < \\
&< \frac{1+4|w_1|^2 + 4 \sum_{s=2}^n |w_s|^2 - 2 \sum_{s=2}^n |w_s|^2}{1+4|w_1|^2 + 4\operatorname{Re} w_1} = \frac{1+4|w_1|^2 + 2 \sum_{s=2}^n |w_s|^2}{1+4|w_1|^2 + 4\operatorname{Re} w_1} < 1.
\end{aligned}$$

A fronteira de $\mathbb{h}^n$

$$\partial \mathbb{h}^n = \mathcal{C}(\mathbb{S}^{4n-1}) = \{2\operatorname{Re} w_1 = \|\hat{w}\|^2\}$$

é um parabolóide em $\mathbb{H}^n$. O modelo de Siegel é conhecido como o modelo do parabolóide.

Figure 21: O modelo de Siegel é o interior de um parabolóide.

A interseção do hiperplano quaterniônico $\omega_{n+1} = 1$ com o cone de luz é uma esfera (isométrica), identificada com a fronteira ideal homogênea de $\mathbb{H}\mathbb{H}^n$. Se escolhermos um ponto $[\omega]_\infty \in \partial \mathbb{H}\mathbb{H}^n$ (a homogeneidade permite uma escolha arbitrária) e $\tilde{\omega}$ for o representante canônico para $[\omega]_\infty$ (então $\|\tilde{\omega}\| = 0$ e $[\omega]_\infty = [\tilde{\omega}] \cong \tilde{\omega}\mathbb{H}^*$), existe um único $\mathbb{H}$ -hiperplano, que denotaremos H_∞ , tangente a $\partial \mathbb{H}\mathbb{H}^n$ em $[\omega]_\infty$, correspondente ao hiperplano $\tilde{\omega}^\perp$ em $\mathbb{H}^{1,n}$. Fica definida uma aplicação $B : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}P^{1,n}$ que é, analogamente ao mergulho $A : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}P^{1,n}$ que exhibe $\mathbb{H}\mathbb{H}^n$ como imagem da bola B^{4n} , um mergulho que exhibe $\mathbb{H}\mathbb{H}^n$ como imagem de $\mathbb{h}^n$.

Os pontos $(1, \hat{0})$ e $(-1, \hat{0})$, em ∂B^{4n} , correspondem à origem e ao ponto ω_∞ , via transformada de Cayley (ou seja, $\mathcal{C} : (1, \hat{0}) \mapsto 0$, $(-1, \hat{0}) \mapsto \omega_\infty$).

Observação

Escolhemos, por conveniência, $\tilde{\omega} = (1, -1, 0)$, ou, equivalentemente, $[\omega]_\infty = [(1, -1, 0)]$. Então $H_\infty = \{(-\omega_1, \omega_1, \hat{\omega}) / (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{H}^n\}$, onde $\hat{\omega} = (\omega_2, \dots, \omega_n)$. Temos

$$\begin{aligned}
B : \mathbb{H}^n &\rightarrow \mathbb{H}P^{1,n} \setminus H_\infty \\
(\omega_1, \hat{\omega}) &\mapsto \left[\left(\frac{1}{2} + \omega_1, \frac{1}{2} - \omega_1, \hat{\omega} \right) \right]
\end{aligned}$$

Realmente, para todo $(\omega_1, \hat{\omega}) \in \mathbb{h}^n$, temos

$$\left\| \left(\frac{1}{2} + \omega_1, \frac{1}{2} - \omega_1, \hat{\omega} \right) \right\|^2 = -\left| \frac{1}{2} + \omega_1 \right|^2 + \left| \frac{1}{2} - \omega_1 \right|^2 + \|\hat{\omega}\|^2 = -\omega_1 - \bar{\omega}_1 + \|\hat{\omega}\|^2 = -2\operatorname{Re} \omega_1 + \|\hat{\omega}\|^2 < 0,$$

ou seja, $B(\omega_1, \hat{\omega}) \in \mathbb{H}\mathbb{H}^n$. É fácil ver que $B(\mathbb{h}^n) = \mathbb{H}\mathbb{H}^n$.

Se $w = (w_1, \dots, w_n) = (w_1, \hat{w}) \in \mathbb{h}^n$, as coordenadas horosféricas de w são dadas por

$$\alpha + i\beta + j\gamma + k\delta = 2w_1 - \|\hat{w}\|^2, \quad \omega = \hat{w},$$

e escrevemos $w = (\alpha, \xi, \omega)$, com $\xi \sim Vet(2w_1) \sim (\beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^3$.

Observemos que

$$\alpha = Re(2w_1 - \|\dot{w}\|^2) > 0 \text{ sse } w = (w_1, \dot{w}) \in \mathbb{H}^n.$$

α é chamada a função altura horosférica e fornece um invariante orbital, se considerarmos a ação do grupo de Heisenberg generalizado $\mathcal{H}^{4n-1} \times \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ dada por

$$H_{\zeta, v}(\alpha, \xi, \omega) = (\alpha, \xi + v + 2Vet(\zeta, \omega), \zeta + \omega).$$

Realmente, as órbitas de $\mathcal{H}$ são caracterizadas pelo fato de terem α constante e a ação é transitiva em cada horosfera (pois v percorre $\mathbb{R}^3$ e ζ percorre $\mathbb{H}^{n-1}$). Além disso,

$$(\alpha, \xi + v + 2Vet(\zeta, \omega), \zeta + \omega) = (\alpha, \xi, \omega) \rightarrow \zeta = v = 0,$$

ou seja, a ação é livre, e logo efetiva.

Uma caracterização das horosferas, no espaço hiperbólico complexo, é fornecida pelas funções de Busemann associadas a geodésicas γ cujo ω -limite é $[\omega]_\infty$. Se γ é uma tal geodésica, que suporemos normalizada,

Figure 22: Construção de uma função de Busemann.

indiquemos com ρ a distância (hiperbólica) entre dois pontos x e y na bola B^{2n} . Restrita à geodésica complexa que contém x e y , a métrica de Bergman é a métrica de Poincaré, dada por $ds^2 = \frac{4dr^2}{(1-r^2)^2}$, e logo

$$ds = \frac{2dr}{1-r^2} = d(2 \operatorname{arctanh} r) \rightarrow \rho = 2 \operatorname{arctanh} r \rightarrow r = \tanh \frac{\rho}{2}.$$

Segue-se que

$$\cosh^2 \left(\frac{\rho}{2} \right) = \frac{1}{1 - \tanh^2 \left(\frac{\rho}{2} \right)} = \frac{1}{1 - r^2}.$$

A função de Busemann h associada a γ define-se por

$$h(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\rho(\omega, \gamma(t)) - t),$$

e prova-se que $e^{-h} = f$, onde $f(w) = 2Re w_1 - \|\dot{w}\|^2$. Segue-se que $h(w)$ é constante sse $f(w)$ é constante, ou seja, sse w percorre uma horosfera. Portanto, as horosferas com "centro" $[\omega]_\infty$ são os níveis da função de Busemann e da função f .

Esboçamos uma demonstração da igualdade acima. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}^n$ dada por

$$t \mapsto \left[\left(1, -\tanh \frac{t}{2}, 0, \dots, 0 \right) \right]$$

e seja

$$\tilde{\omega} = (1, \omega_1, \dots, \omega_n).$$

Então, como

$$\begin{aligned} \cosh^2 \frac{\rho}{2} &= \frac{|\langle \tilde{\omega}, \gamma(t) \rangle|^2}{\|\tilde{\omega}\|^2 \|\gamma(t)\|^2} = \\ &= \frac{(-1 - \omega_1 \tanh \frac{t}{2})(-1 - \overline{\omega_1} \tanh \frac{t}{2})}{(-1 + \tanh^2 \frac{t}{2})(-1 + \|\omega\|^2)} = \frac{1}{1 - \|\omega\|^2} \frac{\left(\cosh \frac{t}{2} + \omega_1 \sinh \frac{t}{2} \right) \left(\cosh \frac{t}{2} + \overline{\omega_1} \sinh \frac{t}{2} \right)}{\cosh^2 \frac{t}{2} - \sinh^2 \frac{t}{2}} = \\ &= \frac{|\cosh \frac{t}{2} + \omega_1 \sinh \frac{t}{2}|^2}{1 - \|\omega\|^2}, \end{aligned}$$

e logo

$$\begin{aligned} \rho(\omega, \gamma(t)) &= 2 \operatorname{arccosh} \sqrt{\frac{|\cosh \frac{t}{2} + \omega_1 \sinh \frac{t}{2}|^2}{1 - \|\omega\|^2}} = \\ &= 2 \operatorname{arccosh} \frac{|\cosh \frac{t}{2} + \omega_1 \sinh \frac{t}{2}|}{\sqrt{1 - \|\omega\|^2}} \approx \\ &\approx 2 \operatorname{arccosh} \frac{|1 + \omega_1| e^{\frac{t}{2}}}{2 \sqrt{1 - \|\omega\|^2}} \approx 2 \ln \frac{|1 + \omega_1| e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{1 - \|\omega\|^2}} = \\ &= \ln \frac{|1 + \omega_1|^2}{1 - \|\omega\|^2} e^t = t + \ln \frac{|1 + \omega_1|^2}{1 - \|\omega\|^2}, \end{aligned}$$

temos

$$h(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\rho(\omega, \gamma(t)) - t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \frac{|1 + \omega_1|^2}{1 - \|\omega\|^2} = \ln \frac{|1 + \omega_1|^2}{1 - \|\omega\|^2}.$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} e^{-h(\omega)} &= \frac{1 - \|\omega\|^2}{|1 + \omega_1|^2} = \frac{1 - \|\omega\|^2}{\left|1 + \frac{1 - 2w_1}{1 + 2w_1}\right|^2} = \frac{1 - \sum_{s=1}^n |\omega_s|^2}{\frac{4}{|1 + 2w_1|^2}} = \frac{|1 + 2w_1|^2 - \sum_{s=2}^n |2w_s|^2 - |1 - 2w_1|^2}{\frac{4}{|1 + 2w_1|^2}} = \\ &= \frac{(1 + 2w_1)(1 + 2\overline{w_1}) - (1 - 2w_1)(1 - 2\overline{w_1}) - 4 \sum_{s=2}^n |w_s|^2}{4} = 2 \operatorname{Re} w_1 - \|\hat{w}\|^2 = f(w). \end{aligned}$$

Observação

O espaço de Heisenberg obtido com $\alpha = 0$ pode ser identificado com $\partial \mathbb{H}^n \setminus \omega_\infty$, a horosfera de altura 0 e "centro" ω_∞ . A fronteira ideal $\partial \mathbb{H}^n$ é vista, portanto, como a compactificação de Aleksandrov do grupo de Heisenberg generalizado $\mathcal{H}^{4n-1}$. Em verdade, cada horosfera tem uma estrutura de espaço de Heisenberg, como acontece no caso complexo com o grupo de Heisenberg de centro unidimensional.

Em símbolos: $\partial \mathcal{H}^n \setminus \omega_\infty \cong \mathcal{N}_n \cong \mathbb{H}^n \times \operatorname{Vet}(\mathbb{H}) \cong \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^{4n+3}$ (lembramos que $\partial \mathbb{H}^n = \{[\omega] \in PH^{1,n} / \|\tilde{\omega}\| = 0\}$, e que $\mathcal{H}^{4n-1} \times \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ é livre). Observe-se também que a ação é polar, e as seções são geodésicas que intersectam ortogonalmente as horosferas acima.

A dimensão real máxima para as órbitas do grupo de Heisenberg é $4n - 1$ e as seções, nesse caso, são geodésicas reais. Se quisermos órbitas com codimensão real 2, teremos que compor, como nos outros casos, com algum subgrupo de isometrias da parte compacta ou da parte abeliana na decomposição de Iwasawa de $Sp(1, n)$.

Exemplo 17 No caso complexo, a função $z \mapsto \ln(1 - \|z\|^2)$ é, como sabemos, um potencial de Kähler (note-se que

$$\partial \bar{\partial}(\ln(1 - \|z\|^2)) = \frac{\langle z, dz \rangle \langle dz, z \rangle - (1 - \|z\|^2) \langle dz, dz \rangle}{(1 - \|z\|^2)^2})$$

Figure 23: Órbitas de H e geodésicas seções.

e logo, como a correspondência (de Cayley) entre os modelos da bola e do parabolóide fornece

$$1 - \|z\|^2 = -\frac{4f(w)}{|1 + 2w_1|^2},$$

temos a métrica de Bergman na forma

$$\begin{aligned} -\partial\bar{\partial}(\ln(1 - \|z\|^2)) &= \partial\bar{\partial}\left(\ln \frac{4f(w)}{|1 + 2w_1|^2}\right) = \\ &= \frac{4}{f(w)^2} ((dw_1 - \langle d\hat{w}, \hat{w} \rangle)(d\bar{w}_1 - \langle \hat{w}, d\bar{w} \rangle) + f(w)\langle d\hat{w}, d\bar{w} \rangle) \end{aligned}$$

No caso quaterniônico, não é difícil ver que a transformada de Cayley que definimos fornece, a partir da métrica de Bergman quaterniônica no modelo da bola, a mesma expressão (tipográfica) acima para a métrica "canônica" no modelo de Siegel. Com essa métrica definem-se ações polares de subgrupos nilpotentes de $Sp(1, n)$ e mergulha-se isometricamente o espaço das órbitas X em uma seção, similarmente ao que foi feito anteriormente.

Seja G o grupo

$$G = \{AH_{\zeta, v} / A \in Sp(n - k), \zeta \in \mathbb{H}^{k-1}, v \in \mathbb{R}^3\} \cong Sp(n - k) \times \mathcal{H}^{4k-1}.$$

As órbitas da ação de G são produtos $\cong \Gamma^{4k-1} \times S^{4n-4k-1}$ de horosferas por esferas. As horosferas (com "centro" ω_∞) são caracterizadas pela altura α e as esferas estão associadas ao raio ρ . Construímos, com esses invariantes orbitais, uma seção $\Sigma \cong \mathbb{R}^2$, totalmente geodésica, onde o espaço das órbitas $X = \mathbb{H}^n/G$ mergulha em $\mathbb{H}^n$, como antes, com a métrica induzida. Temos

$$\Sigma = \{\omega = (\alpha, 0, \dots, 0, \rho, 0, \dots, 0) / \alpha > 0, \rho \geq 0\}$$

e a métrica orbital é dada por

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_\omega &= \frac{4}{\alpha^2} \left((u_1 - \sum_{s=2}^n \bar{\omega}_s u_s)(\bar{v}_1 - \sum_{s=2}^n \omega_s \bar{v}_s) + \alpha \sum_{s=2}^n u_s \bar{v}_s \right) = \frac{4}{\alpha^2} \left((u_1 - \rho u_{k+1})(\bar{v}_1 - \rho \bar{v}_{k+1}) + \alpha \sum_{s=2}^n u_s \bar{v}_s \right) = \\ &= \frac{4}{\alpha^2} \left((a_1 + ib_1 + j\gamma_1 + k\delta_1 - \rho(a_{k+1} + ib_{k+1} + j\gamma_{k+1} + k\delta_{k+1})) \right. \\ &\quad \left. (\mu_1 - i\nu_1 - j\sigma_1 - k\tau_1 - \rho(\mu_{k+1} - i\nu_{k+1} - j\sigma_{k+1} - k\tau_{k+1})) + \right. \\ &\quad \left. + \alpha \sum_{s=2}^n (a_s + ib_s + j\gamma_s + k\delta_s)(\mu_s - i\nu_s - j\sigma_s - k\tau_s) \right). \end{aligned}$$

Escolhendo, como antes, um referencial

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n}, \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial t_n} \right\}$$

tal que $\frac{\partial}{\partial x_1}(\omega)$ e $\frac{\partial}{\partial x_{k+1}}(\omega)$ gerem o 2-plano tangente a Σ no ponto $\omega = (\alpha, 0, \dots, 0, \rho, 0, \dots, 0)$ e

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_k}, \frac{\partial}{\partial y_{k+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_n} \right\}$$

seja um referencial para o subfibrado tangente às órbitas, temos a matriz de Gramm

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{\alpha^2} & \frac{-4k}{\alpha^2} & \frac{4j}{\alpha^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{-4\rho}{\alpha^2} & \frac{4k\rho}{\alpha^2} & \frac{-4j\rho}{\alpha^2} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4k}{\alpha^2} & \frac{4}{\alpha^2} & \frac{-4i}{\alpha^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{-4k\rho}{\alpha^2} & \frac{-4\rho}{\alpha^2} & \frac{4i\rho}{\alpha^2} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-4j}{\alpha^2} & \frac{4i}{\alpha^2} & \frac{4}{\alpha^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{4j\rho}{\alpha^2} & \frac{-4i\rho}{\alpha^2} & \frac{-4\rho}{\alpha^2} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{\alpha} & \frac{-4i}{\alpha} & \frac{-4j}{\alpha} & \frac{-4k}{\alpha} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4i}{\alpha} & \frac{4}{\alpha} & \frac{-4k}{\alpha} & \frac{4j}{\alpha} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4j}{\alpha} & \frac{4k}{\alpha} & \frac{4}{\alpha} & \frac{-4i}{\alpha} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4k}{\alpha} & \frac{-4j}{\alpha} & \frac{4i}{\alpha} & \frac{4}{\alpha} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{\alpha} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{4}{\alpha} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-4\rho}{\alpha^2} & \frac{4k\rho}{\alpha^2} & \frac{-4j\rho}{\alpha^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{4(\alpha+\rho^2)}{\alpha^2} & \frac{-4k(\alpha+\rho^2)}{\alpha^2} & \frac{4j(\alpha+\rho^2)}{\alpha^2} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-4k\rho}{\alpha^2} & \frac{-4\rho}{\alpha^2} & \frac{4i\rho}{\alpha^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{4k(\alpha+\rho^2)}{\alpha^2} & \frac{4(\alpha+\rho^2)}{\alpha^2} & \frac{-4i(\alpha+\rho^2)}{\alpha^2} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4j\rho}{\alpha^2} & \frac{-4i\rho}{\alpha^2} & \frac{4\rho}{\alpha^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{-4j(\alpha+\rho^2)}{\alpha^2} & \frac{4i(\alpha+\rho^2)}{\alpha^2} & \frac{4(\alpha+\rho^2)}{\alpha^2} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{4}{\alpha} & \frac{-4i}{\alpha} & \frac{-4j}{\alpha} & \frac{-4k}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{4i}{\alpha} & \frac{4}{\alpha} & \frac{-4k}{\alpha} & \frac{4j}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{4j}{\alpha} & \frac{4k}{\alpha} & \frac{4}{\alpha} & \frac{-4i}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{4k}{\alpha} & \frac{-4j}{\alpha} & \frac{4i}{\alpha} & \frac{4}{\alpha} \end{bmatrix}$$

que assume a forma

$$\begin{vmatrix} \frac{4}{\alpha^2}\Gamma & & \cdots & & \frac{-4\rho}{\alpha^2}\Gamma \\ & \frac{4}{\alpha}R & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & \frac{4}{\alpha}R & \\ \frac{-4\rho}{\alpha^2}\Gamma & & \cdots & \frac{4(\alpha+\rho^2)}{\alpha^2}\Gamma & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \frac{4}{\alpha}R \end{vmatrix}$$

e, como antes, fornece o elemento de volume das órbitas.

Lema 3

No caso parabólico, o elemento de volume associado ao referencial é

$$\Omega = \alpha^{-2n+\frac{5}{2}}$$

Observemos, a seguir, que podemos identificar os campos de Killing tangentes à subórbita horosfera com os próprios campos básicos do referencial, pois duas horosferas quaisquer são congruentes e, logo, têm o mesmo elemento de volume. Portanto, o referencial tangente à órbita é dado por

$$X_1^* = \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad X_2^* = \frac{\partial}{\partial z_1}, \quad X_3^* = \frac{\partial}{\partial t_1}, \quad X_4^* = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad X_{4k-1}^* = \frac{\partial}{\partial t_k},$$

$$X_{4k}^* = \rho \frac{\partial}{\partial y_{k+1}}, \quad X_{4k+1}^* = \rho \frac{\partial}{\partial z_{k+1}}, \quad \dots, \quad X_{4n-2}^* = \rho \frac{\partial}{\partial t_n}.$$

E o elemento de volume da órbita é

$$V = \alpha^{-2n+\frac{5}{2}} \rho^{4n-4k-1}.$$

Segue-se que

$$\ln V = \left(\frac{5}{2} - 2n \right) \ln \alpha + (4n - 4k - 1) \ln \rho$$

e, logo,

$$\partial_\alpha \ln V = \frac{\frac{5}{2} - 2n}{\alpha} \quad e \quad \partial_\rho \ln V = \frac{4n - 4k - 1}{\rho}.$$

Se $\gamma = (\alpha, \rho) : I \rightarrow X$ é uma curva C^∞ , o campo velocidade de γ é identificado com um campo vetorial em Σ e, com a métrica orbital induzida (veja-se [8], pg. 232), temos que

$$\|\gamma'\| \equiv 1 \quad \text{sse} \quad \frac{1}{\alpha^2} (\alpha'^2 + 4\alpha\rho'^2) \equiv 1,$$

o que sugere

$$\alpha' = \alpha \cos \sigma, \quad \rho' = \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \sin \sigma.$$

Temos, então, as equações

$$\begin{cases} \alpha' &= \alpha \cos \sigma \\ \rho' &= \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \sin \sigma \end{cases}$$

Além disso, se

$$\eta = (\eta_1, \eta_2) = \left(-\alpha \sin \sigma, \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \cos \sigma \right),$$

é fácil ver que

$$\|\eta\|^2 = \frac{1}{\alpha^2} ((\eta_1)^2 + 4\alpha\eta_2^2) \equiv 1$$

e que

$$\langle \gamma', \eta \rangle = \frac{1}{\alpha^2} (\alpha' \eta_1 + 4\alpha \rho' \eta_2) = 0,$$

em todo ponto da seção Σ , ou seja, $\|\eta\| \equiv 1$ e $\eta \perp \gamma'$ em $T\Sigma$.

Fazendo $\sigma = \hat{\text{ângulo}}$ que a velocidade da curva γ faz com o campo vetorial "canônico" $\frac{\partial}{\partial \alpha}$ ao longo de γ temos, com σ' , o valor da curvatura geodésica de γ . O teorema de redução então fornece a equação

$$\sigma' = \nabla_{\eta} \ln V = \partial_{\alpha}(\ln V) \eta_1 + \partial_{\rho}(\ln V) \eta_2 = \left(2n - \frac{5}{2} \right) \sin \sigma + \frac{4n - 4k - 1}{2} \frac{\sqrt{\alpha}}{\rho} \cos \sigma$$

e obtemos o sistema

$$\begin{cases} \alpha' &= \alpha \cos \sigma \\ \rho' &= \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \sin \sigma \\ \sigma' &= \left(2n - \frac{5}{2} \right) \sin \sigma + \left(2n - 2k - \frac{1}{2} \right) \frac{\sqrt{\alpha}}{\rho} \cos \sigma \end{cases}$$

A análise desse sistema é similar à que fizemos no caso elítico. Procuramos uma solução $\gamma = (\alpha, \rho)$ com as condições iniciais

$$\begin{cases} \alpha(0) &= a \\ \rho(0) &= 0 \\ \sigma(0) &= \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Suporemos que $n > 1$ (ou seja, $\dim \mathbb{H}^n \geq 8$). Então $\sigma'(0) > 0$. Realmente, temos

$$\begin{aligned} L &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sigma}{\rho} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{-\sin \sigma \sigma'}{\rho'} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{-\sin \sigma \left(\left(2n - 2k - \frac{1}{2} \right) \frac{\sqrt{\alpha}}{\rho} \cos \sigma + \left(2n - \frac{5}{2} \right) \sin \sigma \right)}{\frac{\sqrt{\alpha}}{2} \sin \sigma} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{-2 \left(\left(2n - 2k - \frac{1}{2} \right) \frac{\sqrt{\alpha} \cos \sigma}{\rho} + \left(2n - \frac{5}{2} \right) \sin \sigma \right)}{\sqrt{\alpha}} = (1 + 4k - 4n) \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sigma}{\rho} - 2 \left(2n - \frac{5}{2} \right) \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sigma}{\sqrt{\alpha}} = \\ &= (1 + 4k - 4n)L + (5 - 4n) \frac{1}{\sqrt{a}} \end{aligned}$$

e logo

$$4(n - k)L = \frac{5 - 4n}{\sqrt{a}},$$

o que acarreta

$$L = \frac{5 - 4n}{4(n - k)\sqrt{a}}$$

e segue-se que

$$\begin{aligned} \sigma'(0) &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \sigma'(s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \left(\left(2n - \frac{5}{2} \right) \sin \sigma + \left(2n - 2k - \frac{1}{2} \right) \frac{\sqrt{\alpha}}{\rho} \cos \sigma \right) = \\ &= 2n - \frac{5}{2} + \left(2n - 2k - \frac{1}{2} \right) \sqrt{a}L = 2n - \frac{5}{2} + \left(2n - 2k - \frac{1}{2} \right) \frac{5 - 4n}{4(n - k)} = \\ &= \frac{4(4n - 5)(n - k) + (4n - 4k - 1)(5 - 4n)}{8(n - k)} = \frac{4n - 5}{8(n - k)} > 0. \end{aligned}$$

Sabemos, portanto, que o ângulo σ é, inicialmente, estritamente crescente. Afirmamos que σ é estritamente crescente, ou, equivalentemente, $\sigma'(s) > 0 \ \forall s \geq 0$. Realmente, observemos que $\alpha' < 0$, $\rho' > 0$ e, se $\sigma' = 0$, então

$$\sigma'' = (2n - 2k - \frac{1}{2}) \frac{(\alpha' \rho - 2\alpha \rho') \cos \sigma}{2\rho^2 \sqrt{\alpha}} > 0.$$

Logo, se s é a primeira singularidade de σ em $(\frac{\pi}{2}, \pi]$, temos $\sigma'' \leq 0$, pois σ é inicialmente crescente, e $\sigma'' > 0$, um absurdo. Segue-se que σ não tem singularidades em $\sigma^{-1}(\frac{\pi}{2}, \pi]$. Além disso, $\sigma(s) = \pi \rightarrow \sigma'(s) < 0$, e logo, se existe algum s com $\sigma(s) \geq \pi$, tome-se $s_1 = \inf\{s/\sigma(s) = \pi\}$ e teremos $\sigma'(s_1) \geq 0$ (pois σ é estritamente crescente até s_1) e $\sigma'(s_1) < 0$, absurdo. Segue-se a afirmação, e vemos também que $\sigma < \pi \ \forall s \geq 0$. Em consequência, σ tem um limite $\sigma_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$. A seguir, concluímos de $\alpha > 0$ e $\alpha' < 0$ que $\alpha' \rightarrow 0$. Da mesma forma concluímos de $\sigma < \pi$ e $\sigma' > 0$ que $\sigma' \rightarrow 0$. E como σ é estritamente crescente, $\sigma < \pi \ \forall s > 0$ e $\sigma(0) = \frac{\pi}{2}$, concluímos que $\cos \sigma$ não se aproxima de 0, se $s \rightarrow \infty$. Segue-se, então, de $\alpha' \rightarrow 0$, que $\alpha \rightarrow 0$. Além disso, como ρ é estritamente crescente e $\rho(0) = 0$, temos que ρ não se aproxima de 0. Ou melhor, existe $\epsilon > 0$ tal que $\rho \geq \epsilon \ \forall s$ e logo $\frac{|\cos \sigma|}{\rho} \leq \frac{1}{\rho} \leq \frac{1}{\epsilon}$, $\forall s$. E como $\alpha \rightarrow 0$ temos

$$0 = \lim_{s \rightarrow \infty} \sigma'(s) = \left(2n - \frac{5}{2}\right) \lim_{s \rightarrow \infty} \sin \sigma$$

e logo, necessariamente, $\sigma \rightarrow \pi$. É possível construir uma função f tal que $f \equiv a$ ao longo da curva solução γ_a , e com isso prova-se que $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$, $\forall \gamma_1 \neq \gamma_2$. Portanto $\{\gamma_a / a > 0\}$ determina uma folheação de X . Finalmente, um argumento como em [8] mostra que ρ é limitado acima e abaixo por constantes positivas.

Figure 24: γ é projeção de uma folha.

Então, fazendo a percorrer o conjunto $\{\rho = 0\}$, obtemos uma folheação do espaço das órbitas X , que levantamos a uma folheação de $\mathbb{H}^n$, cujas folhas são hipersuperfícies equivariantes mínimas. Como cada ponto de uma curva solução é projeção de um produto de uma esfera por uma horosfera com centro em ω_∞ , a fronteira ideal de uma folha da folheação de $\mathbb{H}^n$ é, topologicamente, uma variedade de Hopf pinçada em um ponto (correspondente ao ω_∞). Enunciamos abaixo o último resultado deste capítulo.

Teorema 3

Se G é um subgrupo de $Sp(1, n)$ da forma

$$G = \{H_{\zeta, v} B / H_{\zeta, v} \in \mathcal{H}^{4k-1}, B \in Sp(n-k)\}$$

então existe uma folheação de $\mathbb{H}^n$ por subvariedades mínimas G -equivariantes, com cohomogeneidade 1 (hipersuperfícies em $\mathbb{H}^n$), com fronteira ideal homeomorfa a uma variedade de Hopf pinçada em um ponto.

Observações finais

i)

No problema de determinação de mínimas via redução no espaço hiperbólico complexo, existe um caso conhecido como caso hiperbólico especial, em que se considera a ação do grupo das translações hiperbólicas, parte abeliana na decomposição de Iwasawa de $SU(1, n)$, grupo das isometrias em $\mathbb{C}H^n$,

$$SU(1, n) \cong U(n) \times \mathbb{R} \times \mathcal{H}^{2n-1}$$

Mais precisamente [8], define-se

$$G = \{\psi_t B / t \in \mathbb{R}, B \in U(n-1)\}.$$

Como $\dim U(n-1)/U(n-2) = 2n-3$, obtemos codimensão real 2. As órbitas são produtos

$$\gamma_x \cong H^1 \times \mathbb{S}^{2n-3} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{2n-3}$$

No caso quaterniônico essa construção (com dois invariantes orbitais) não fornece órbitas com codimensão real 2.

ii)

Outros casos de ações isométricas surgem no espaço hiperbólico quaterniônico, a partir da decomposição de Iwasawa [15]

$$Sp(1, n) \cong SO(3) \times Sp(n) \times \mathbb{R} \times \mathcal{H}^{4n-1}$$

mas também não obtemos codimensão real 2, com dois invariantes orbitais.

Referências

- [1] Artin, E. *Geometric algebra* Interscience - NY - 1966
- [2] Back, A. & Carmo, M. & Hsiang, W-y. *The fundamental equations of equivariant geometry* unpublished
- [3] Carmo, M. *Riemannian geometry* Birkäuser - Boston - 1992
- [4] Carmo, M. & Dajczer, M. *Rotation hypersurfaces in hyperbolic spaces* Trans. AMS Vol. 277 2 - 1983 685-709
- [5] Goldman, W. *Complex hyperbolic geometry* Oxford Clarendon Press - 1999
- [6] Goldman, W. & Parker, J. *Dirichlet polyhedra for dihedral groups acting on complex hyperbolic space* J. Geom. Anal. 2 1992 517-554
- [7] Goldman, W. & Parker, J. *Complex hyperbolic ideal triangle groups* J. reine angew. Math. 425 - 1992 71-86
- [8] Gorodski, C. & Gusevski, N. *Complete minimal hypersurfaces in complex hyperbolic space* manuscripta math. 103 - 2000 221-240
- [9] Helgason, S. *Differentiable manifolds, Lie groups and symmetric spaces* Academic Press - NY - 1978
- [10] Hsiang, W-y. & Lawson, Jr., H. B. *Minimal submanifolds of low cohomogeneity* J. Diff. Geometry 5 - 1971 1-38
- [11] Hsiang, W-t. & Yu, W-c. *A generalization of a theorem of Delaunay* J. Diff. Geometry 16 - 1981 161-177
- [12] Hsiang, W-y. *Generalized rotational hypersurfaces of constant mean curvature in the Euclidean spaces* J. Diff. Geometry 17 - 1982 337-356
- [13] Hsiang, W-t. & Hsiang, W-y. & Tomter, P. *On the existence of minimal hyperspheres in compact symmetric spaces* Ann. Scient. ENS 4^e série t.21 - 1988 287-305
- [14] Hsiang, W-t. & Hsiang, W-y. *On the construction of constant mean curvature imbeddings of exotic and/or knotted spheres into $S^n(1)$* Invent. Math. 82 1985 423-445
- [15] Inkang, K. & Parker, J. *The geometry of quaternionic hyperbolic manifolds* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 135 2 2003 291-320
- [16] Ishihara, S. *Quaternionic Kählerian manifolds* J. Diff. Geometry 9 1974 483-500
- [17] Knapp, A. *Lie groups beyond an introduction* Birkhäuser - Boston - 1996
- [18] Kraines, V. *Topology of quaternionic manifolds* Trans. AMS 122 - 1966 357-367
- [19] Lawson Jr., H. B. *Rigidity theorems in rank-1 symmetric spaces* J. Diff. Geometry 4 - 1970 349-357

-
- [20] Lima, E. L. *Grupo fundamental e espaços de recobrimento* Proj. Euclides - RJ - 1998
- [21] Mostow, G. *On a remarkable class of polyhedra in complex hyperbolic space* Pac. J. Math. 86 - 1980
171-276
- [22] O'Neill, B. *The fundamental equations of a submersion* Michigan Math. J. 13 - 1966 459-469
- [23] O'Neill, B. *Semi Riemannian geometry* Academic Press - San Diego - 1983
- [24] Palais, R. & Terng, C-l. *Critical point theory and submanifold geometry* Springer LNM 1353 - 1988
- [25] Poor, W. *Differential geometric structures* McGraw-Hill - NY - 1981
- [26] Ramsey, A. & Richtmyer, R. *Introduction to hyperbolic geometry* Springer - NY - 1994
- [27] Tribuzy, I. *Convexity in Riemannian manifolds* An. Acad. Bras. Cincias 50 3 1978 269-271
- [28] Warner, F. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups* Springer GTM - NY - 1983
- [29] Weil, A. *Introduction à l'étude des variétés Kälériennes* Hermann - Paris - 1971
- [30] Wolf, J. *Complex homogeneous contact manifolds and quaternionic symmetric spaces* J. Math. Mech. 14 - 1965 1033-1047
- [31] Wolf, J. *Spaces of constant curvature* Publish or Perish - Wilmington - 1984
-