**K-teoria de operadores pseudodiferenciais
na reta com símbolos semiperiódicos**

Cintia Cristina da Silva

**TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTORA
EM
MATEMÁTICA**

Área de Concentração: Análise

Orientador: Prof. Dr. Severino Toscano do Rego Melo

-São Paulo, março de 2005-

Durante a elaboração deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro da CAPES.

K-teoria de operadores pseudodiferenciais na reta com símbolos semiperiódicos

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida
e defendida por Cintia Cristina da Silva
e aprovada pela comissão julgadora.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Severino Toscano do Rego Melo (orientador) - IME-USP
- Profa. Dra. Cristina Cerri - IME-USP
- Prof. Dr. Ruy Exel Filho - UFSC
- Prof. Dr. Antonio Roberto da Silva - UFRJ
- Profa. Dra. Beatriz Abadie - URU

São Paulo, março de 2005.

A minha mãe e irmãs,
Kátia e Andréa
com muito carinho.

Muitos vão orar
E querem encontrar alguém
Que garanta ao máximo
A paz nos corações
Não há o que temer
Embora o medo exista em nós
Mas a fé nos faz mover
Montanhas com poder

Pode um milagre enfim
acontecer
Quando você acreditar
A esperança em ti
Ninguém jamais
Irá matar, depende só
Se tu quiseres crer

O medo acabou
Pois ele agia sempre em vão
A esperança em ti fará aos ares
flutuar
Não posso explicar
O que o coração de alguém
Sente quando encontra a paz
E a fé pra ir além

A coragem te fará vencer
Conquistando o reino em redor
É só assim que enxergarás
Que nada enfim lhe faltará
Ouça a voz a voz que diz
Contigo eu estarei

Letra da música: Se tu quiseres crer (When you believe-Prince of the Egypt)

Stephen Schwartz/Kenneth Edmonds; versão: Ney Gomes

Agradecimentos

Primeiramente a Deus por todas as bênçãos recebidas durante esses anos de doutorado e por saber que sempre o terei ao meu lado.

Ao meu orientador Prof. Dr. Severino Toscano do Rego Melo pela confiança em mim depositada, pela sugestão do tema e orientação.

A minha mãe Lourdes, irmãs Kátia e Andréa e também a Tabatha e Ted pelo amor incondicional e todo apoio nos momentos difíceis.

A todos os professores que contribuíram, diretamente ou indiretamente, para minha formação. Em especial quero agradecer à Profa. Dra. Zara Issa Abud, à Profa. Dra. Roseli Fernandez e ao Prof. Dr. Daniel Tausk.

Ao Prof. Dr. Ruy Exel por todas as dicas e explicações durante a elaboração deste trabalho.

Ao David, Tadeu, Fábio, Bianconi, Toscano e especialmente à Cristina e à Martha pela ajuda nos seminários de C^* -álgebras e Álgebra de Operadores.

A Olga, ao Rudimar e a Vera pelo companheirismo dentro e fora da faculdade.

A todos os amigos do IME, em especial à Andréia, ao Zeca, à Irina, ao Santos, à Neusa e ao Seu Angelo.

★ A todos meu obrigada. ★

Resumo

Seja $\mathcal{A}$ a menor C^* -álgebra de $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$, onde $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ denota a álgebra dos operadores limitados em $L^2(\mathbb{R})$, contendo: (i) todas multiplicações $a(M)$, $a \in C([-\infty, +\infty])$, (ii) todas multiplicações e^{ijM} , $j \in \mathbb{Z}$, e (iii) todos os operadores da forma $F^{-1}b(M)F$, onde F denota a transformada de Fourier e $b \in C([-\infty, +\infty])$. É conhecido que o símbolo principal se estende a um $*$ -homomorfismo sobrejetivo $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow C(M_A)$, onde M_A é uma certa compactificação de $\mathbb{R} \times \{-1, 1\}$. É também conhecido que $\mathcal{E} = \text{Ker } \sigma$ contém o ideal dos operadores compactos $\mathcal{K}$ e que o quociente $\mathcal{E}/\mathcal{K}$ é isomorfo a $C(S^1 \times \{-1, 1\}) \otimes \mathcal{K}$. Usando a forma explícita desses dois isomorfismos, fomos capazes de calcular os “connecting mappings” da sequência exata cíclica de seis termos de K-teoria associada ao homomorfismo σ e então provamos que $K_0(\mathcal{A}) \cong \mathbb{Z}$ e $K_1(\mathcal{A}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

O isomorfismo $\mathcal{E}/\mathcal{K} \cong C(S^1 \times \{-1, 1\}) \otimes \mathcal{K}$ pode ser estendido a um $*$ -homomorfismo $\gamma : \mathcal{A} \rightarrow C(S^1 \times \{-1, 1\}) \otimes \mathcal{L}_{\mathbb{Z}}$, onde $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}$ denota a álgebra dos operadores limitados em $L^2(\mathbb{Z})$. Provamos que a imagem de γ é isomorfa a soma de duas cópias do produto cruzado $C([-\infty, +\infty]) \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ onde α denota um automorfismo em $C([-\infty, +\infty])$ definido por $(\alpha f)(x) = f(x+1)$, $f \in C([-\infty, +\infty])$, $x \in \mathbb{R}$. Usando a sequência exata de Pimsner-Voiculescu, pudemos calcular a K-teoria da imagem de γ . O que nos levou a uma segunda prova de que $K_0(\mathcal{A}) \cong \mathbb{Z}$ e $K_1(\mathcal{A}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Abstract

Let $\mathcal{A}$ denote the smallest C^* -subalgebra of the algebra of all bounded operators on $L^2(\mathbb{R})$ containing: (i) all multiplications $a(M)$ by functions $a \in C([-\infty, +\infty])$, (ii) all multiplications e^{ijM} , $j \in \mathbb{Z}$, and (iii) all operators of the form $F^{-1}b(M)F$, where F denotes the Fourier transform and $b \in C([-\infty, +\infty])$. It is known that the principal symbol mapping extends to a surjective C^* -homomorphism $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow C(M_A)$, onde M_A is a certain compactification of $\mathbb{R} \times \{-1, 1\}$. It is also known that $\mathcal{E} = \text{Ker } \sigma$ contains the compact ideal $\mathcal{K}$ and that the quotient $\mathcal{E}/\mathcal{K}$ is isomorphic to $C(S^1 \times \{-1, 1\}) \otimes \mathcal{K}$. Using the explicit form of these two isomorphisms, we are able to compute the connecting mappings in the cyclic exact sequence in K-theory associated to the homomorphism σ and the prove that $K_0(\mathcal{A}) \cong \mathbb{Z}$ and $K_1(\mathcal{A}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

The isomorphism $\mathcal{E}/\mathcal{K} \cong C(S^1 \times \{-1, 1\}) \otimes \mathcal{K}$ can be extended to a C^* -homomorphism $\gamma : \mathcal{A} \rightarrow C(S^1 \times \{-1, 1\}) \otimes \mathcal{L}_{\mathbb{Z}}$, where $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}$ denotes the algebra of bounded operators on $L^2(\mathbb{Z})$. We prove that the image of γ is isomorphic to the direct sum of two copies of the crossed product $C([-\infty, +\infty]) \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ where α denotes the automorphism on $C([-\infty, +\infty])$ defined by $(\alpha f)(x) = f(x+1)$, $f \in C([-\infty, +\infty])$, $x \in \mathbb{R}$. Using the Pimsner-Voiculescu exact sequence, we then compute the K-theory of the image of γ . That leads to a second proof that $K_0(\mathcal{A}) \cong \mathbb{Z}$ and $K_1(\mathcal{A}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Sumário

Notações	10
Introdução	12
1 A álgebra $\mathcal{A}$	17
1.1 Ideal comutador	18
1.2 A álgebra $\mathcal{A}^\sharp$	23
1.3 A álgebra J_0	26
1.4 O espaço símbolo de $\mathcal{A}$	31
1.5 O quociente $\mathcal{E}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$	34
2 A álgebra $\mathcal{C}$	40
2.1 O espaço símbolo de $\mathcal{C}$	40
2.2 Espaços de Hardy e operadores de Toeplitz	42
2.3 Índice de Fredholm e a K-teoria de $\mathcal{C}$	45
3 K-teoria de $\mathcal{A}$	52
3.1 A K-teoria de $\mathcal{A}/\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$	52
3.2 A K-teoria de $\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ e $\mathcal{A}$	57

Notações

Durante este trabalho adotamos a convenção de que um ideal é sempre um ideal bilateral.

- $\mathcal{L}(E) := \{ \text{operadores limitados sobre o espaço de Banach } E \}.$
- $\mathcal{K}(E) := \{ \text{operadores compactos sobre o espaço de Banach } E \}.$
- $\mathcal{K}_E := \mathcal{K}(L^2(E)).$
- $\mathcal{L}_E := \mathcal{L}(L^2(E)).$
- $S^1 := \text{círculo unitário em } \mathbb{C}.$
- $S_+^1 = S^1 \times \{+\infty\}.$
- $S_-^1 = S^1 \times \{-\infty\}.$
- $C(X) := \{ \text{funções complexas contínuas sobre } X \}.$
- $C^\infty(X) := \{ \text{funções complexas infinitamente diferenciáveis sobre } X \}.$
- $C_c^\infty(X) := \{ \text{funções de } C^\infty(X) \text{ com suporte compacto} \}.$
- $CS(\mathbb{R}) := \{ \text{funções contínuas de } \mathbb{R} \text{ em } \mathbb{C} \text{ com limites em } +\infty \text{ e } -\infty \} \cong C([- \infty, +\infty]),$
 $[-\infty, +\infty]$ denotando a compactificação de $\mathbb{R}$ que se obtém acrescentando os pontos $-\infty$ e $+\infty$.
- $CS(\mathbb{Z}) := \{ \text{seqüências complexas indexadas por } \mathbb{Z} \text{ com limites em } +\infty \text{ e } -\infty \}.$
- $P_{2\pi} := \{ \text{funções contínuas de } \mathbb{R} \text{ em } \mathbb{C} \text{ } 2\pi\text{-periódicas} \}.$

- $C_0(\mathbb{R}) := \{ \text{funções contínuas de } \mathbb{R} \text{ em } \mathbb{C} \text{ com limite zero em } \pm\infty \}.$
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \{ \phi \in C^\infty(\mathbb{R}) : \sup_x |x^\alpha \phi^\beta(x)| < \infty, \alpha, \beta \in \mathbb{N} \}.$
- F denota a Transformada de Fourier em $\mathbb{R}$:
$$Fu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} u(t) dt.$$
- Id denota o operador identidade em um espaço de Hilbert.
- ind denota o índice de um operador de Fredholm.
- w denota o número de rotação de uma curva fechada em $\mathbb{C} \setminus \{0\}.$
- δ_0 é a aplicação exponencial da sequência exata cíclica de seis termos de K-teoria.
- δ_1 é a aplicação do índice da sequência exata cíclica de seis termos de K-teoria.
- $*$ denota a operação convolução.
- T^* denota o operador adjunto de T .
- $\hat{T} = FT$.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota produto interno.
- $a(M)$ denota o operador de multiplicação por a . Neste trabalho utilizamos
 - $a(M) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, isto é $a(M)u(x) = a(x)u(x)$, $a \in L^\infty(\mathbb{R})$.
 - $a(M) \in \mathcal{L}_{\mathbb{Z}}$, isto é $a(M)(u_j)_j = (a(j)u_j)_j$, $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ limitada.
 - $a(M) \in \mathcal{L}_{S^1}$, isto é $a(M)u(x) = a(x)u(x)$, $a \in L^\infty(S^1)$.
- $Aut(A)$ denota o conjunto dos automorfismos de A , A uma C^* - álgebra.
- $GL(A)$ denota o grupo dos elementos inversíveis de A , A uma C^* - álgebra com unidade.
- $\mathcal{U}(A)$ denota o grupo dos elementos unitários de A , A uma C^* - álgebra com unidade.
- $\tilde{A}$ denota a unitização da C^* - álgebra A .
- $\bar{\varphi}$: dado o $*$ -homomorfismo $\varphi : A \rightarrow B$ temos $\bar{\varphi} : \tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$ onde $\bar{\varphi}(a + \alpha 1_{\tilde{A}}) = \varphi(a) + \alpha 1_{\tilde{B}}$, $a \in A$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.

Introdução

Dado o espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$, seja $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ o conjunto dos operadores limitados de $L^2(\mathbb{R})$. É conhecido que $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ é uma C^* -álgebra (veja, por exemplo, [28], exemplo 2.1.3).

Denotemos por $\mathcal{A}$ a C^* -subálgebra de $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ gerada pelas seguintes classes de operadores:

1. As multiplicações $b(M)$ por funções $b \in CS(\mathbb{R})$.
2. As multiplicações e^{ijM} , $j \in \mathbb{Z}$.
3. Os operadores da forma $b(D) := F^{-1}b(M)F$, F denotando a transformada de Fourier e b como no item anterior.

Denotemos por SL a C^* -subálgebra de $\mathcal{L}(L^2(S^1))$ gerada pelos operadores $a(M)$ de multiplicação por funções $a \in C^\infty(S^1)$ e por todos os operadores da forma $b(D_\theta) := F_d^{-1}b(M)F_d$, onde $F_d : L^2(S^1) \rightarrow L^2(\mathbb{Z})$ denota a transformada de Fourier discreta e $b(M) \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{Z}))$ o operador de multiplicação por uma sequência $(b_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ que possua limites quando j tende a $+\infty$ e $-\infty$. É sabido que SL contém o ideal $\mathcal{K}_{S^1}$ dos operadores compactos de $L^2(S^1)$ e que o quociente $SL/\mathcal{K}_{S^1}$ é isomorfo a álgebra das funções contínuas em $S^1 \times \{-1, 1\}$, com isomorfismo determinado por

$$a(M) \mapsto ((z, \pm 1) \mapsto a(z)) \quad \text{e} \quad b(D) \mapsto ((z, \pm 1) \mapsto \lim_{j \rightarrow \pm \infty} b_j).$$

Seja $\mathcal{E}$ o menor ideal fechado contendo todos os comutadores de $\mathcal{A}$. Então $\mathcal{E}$ contém o ideal $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ dos operadores compactos em $L^2(\mathbb{R})$ e é isomorfo [13] ao produto tensorial de C^* -álgebras $SL \otimes \mathcal{K}_{\mathbb{Z}}$, onde $\mathcal{K}_{\mathbb{Z}}$ é o ideal dos operadores compactos em $L^2(\mathbb{Z})$ (a construção explícita de um isomorfismo depende da escolha de um isomorfismo entre

$L^2(\mathbb{R})$ e $L^2(S^1) \otimes L^2(\mathbb{Z})$). Combinando-se esse isomorfismo com o do parágrafo anterior e usando que $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ é isomorfo a $\mathcal{K}_{S^1} \otimes \mathcal{K}_{\mathbb{Z}}$, obtém-se:

$$\mathcal{E}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \cong C(S^1 \times \{-1, 1\}) \otimes \mathcal{K}_{\mathbb{Z}}. \quad (1)$$

Decorre de resultados gerais sobre “álgebras de comparação” , que são certas C^* -álgebras geradas por operadores pseudodiferenciais em variedades, estudadas por Cordes e colaboradores [9], que $\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{E}$ e que existe um isomorfismo

$$\mathcal{A}/\mathcal{E} \cong C(X \times \{-\infty, +\infty\}), \quad (2)$$

(onde $X = \{(x, e^{ix}) : x \in \mathbb{R}\} \cup (\{-\infty, +\infty\} \times S^1)$ é um subconjunto fechado de $[-\infty, +\infty] \times S^1$) determinado por:

1. $[a(M)]_{\mathcal{E}} \mapsto ((x, e^{iy}), \pm\infty) \mapsto a(y), \forall (x, e^{iy}) \in X)$, se a é 2π -periódica.
2. $[b(M)]_{\mathcal{E}} \mapsto ((x, e^{iy}), \pm\infty) \mapsto b(x), \forall (x, e^{iy}) \in X)$, se $b \in CS(\mathbb{R})$.
3. $[b(D)]_{\mathcal{E}} \mapsto ((m, \pm\infty) \mapsto b(\pm\infty), \forall m \in X)$, se $b \in CS(\mathbb{R})$.

Denotamos, acima, por $[A]_{\mathcal{E}}$ a classe de $A \in \mathcal{A}$ no quociente $\mathcal{A}/\mathcal{E}$.

O resultado central deste trabalho é o cálculo da K-teoria de $\mathcal{A}$, e isto é feito nos Capítulos 3 e 4. Nos Capítulos 1 e 2 demonstramos, ou citamos sem demonstrar, os resultados preliminares necessários para esse trabalho. A seguir detalhamos o conteúdo de cada capítulo.

No Capítulo 1, provamos que

$$\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{A}$$

e estabelecemos o isomorfismo (2). O que difere esse capítulo do trabalho de [13] é que para demonstrarmos que $\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{E}$ e a existência do isomorfismo (2) não invocamos resultados sobre álgebras de comparação, embora utilizemos muitas das idéias e técnicas de [9, 10]. Para descrevermos o isomorfismo (1) utilizaremos o Teorema 2.6 de [13], que será enunciado mas não demonstrado.

Denotemos por $\mathcal{C}$ a C^* - subálgebra de $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ gerada pelas seguintes classes de operadores:

1. As multiplicações $a(M)$ por funções $a \in CS(\mathbb{R})$.

2: Os operadores da forma $b(D) := F^{-1}b(M)F$, F denotando a transformada de Fourier e b como no item anterior.

No Capítulo 2 provamos que $\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{C}$ e estabelecemos o isomorfismo

$$\mathcal{C}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \cong C(M_C)$$

(onde $M_C = \{(x, y) \in [-\infty, +\infty] \times [-\infty, +\infty] : |x| + |y| = \infty\}$). Introduzimos, também, nesse capítulo um pouco sobre a teoria de espaços de Hardy (na reta e no círculo). Essa teoria foi utilizada na demonstração de que, se $T \in \mathcal{C}$ é um operador de Fredholm, temos $\text{ind}(T) = w(\sigma_T)$ onde ind é o índice de Fredholm de T , w é o número de rotação e σ é a composição do isomorfismo de Gelfand com a projeção canônica (observamos que, como M_C é homeomorfo ao círculo, faz sentido calcular $w(\sigma_T)$). Utilizaremos os resultados obtidos nesse capítulo nos capítulos que seguem.

A álgebra $\mathcal{C}$ foi estudada por Cordes e Herman [12] e Power [35]. No trabalho de Power foi demonstrado que se $T \in \mathcal{C}$ é um operador de Fredholm então temos $\text{ind}(T) = w(\sigma_T)$, este resultado estava apenas implícito em [12]. Damos aqui uma apresentação detalhada e auto-contida dos resultados de [12, 35], usando a linguagem da K-teoria de álgebra de operadores.

Os isomorfismos (1) e (2) induzem uma sequência exata curta de C^* -álgebras

$$0 \longrightarrow C(S^1 \times \{-1, 1\}) \otimes \mathcal{K}_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \longrightarrow C(X \times \{-\infty, +\infty\}) \longrightarrow 0. \quad (3)$$

No Capítulo 3 calculamos explicitamente os “connecting mappings” da sequência exata cíclica de seis termos associada a (3).

A composição do isomorfismo (1) com a projeção canônica (no quociente) pode ser estendida a um $*$ -homomorfismo, que chamamos γ , da álgebra toda para o conjunto das funções contínuas de $S^1 \times \{-1, 1\}$, tomando valores em $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{Z}))$. No Capítulo 4, calculamos precisamente a imagem de γ e verificamos que a mesma tem estrutura de produto cruzado. Sua K-teoria pôde então ser calculada pela sequência exata cíclica de Pimsner-Voiculescu [34]. Obtivemos então uma nova sequência exata curta de C^* -álgebras,

$$0 \longrightarrow J_0/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \text{Im } \gamma \longrightarrow 0 \quad (4)$$

onde J_0 é a C^* -subálgebra de $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ gerada por todos os operadores da forma

$a(M)b(D)$, onde $a \in C_0(\mathbb{R})$ e $b \in CS(\mathbb{R})$. Calculamos explicitamente os “connecting mappings” da sequência exata cíclica de seis termos associada a (4).

Os resultados obtidos com os cálculos dos “connecting mappings” das sequências exatas cíclicas de seis termos associadas a (3) e (4) nos levaram ao cálculo da K-teoria de $\mathcal{A}$ e a uma descrição explícita da fórmula do índice de Fredholm $ind : K_1(\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) \longrightarrow \mathbb{Z}$.

Seja

$$A = \sum_{j=1}^N a_j(M)b_j(D), \quad (5)$$

onde $a_1, \dots, a_N$ pertencem à álgebra finitamente gerada pelas funções infinitamente diferenciáveis de período 2π e por $s(x) = x(1+x^2)^{-1/2}$ e $b_1, \dots, b_N$ estão na álgebra finitamente gerada por $\{s, 1\}$. Temos que A é um operador pseudodiferencial clássico (isto é, com símbolo poli-homogêneo, veja [18]). As funções $a_1, \dots, a_N$ são chamadas de semiperiódicas. A álgebra gerada pelos operadores do tipo (5) é densa em $\mathcal{A}$. Logo $\mathcal{A}$ também pode ser vista como uma C^* -álgebra gerada por uma certa classe de operadores pseudodiferenciais com símbolos semiperiódicos.

Os resultados descritos acima sobre a estrutura de $\mathcal{A}$ foram estendidos em [23] para uma C^* -álgebra, $\mathcal{B}$, gerada por operadores pseudodiferenciais em variedades riemannianas da forma $B \times \mathbb{R}$, onde B é uma variedade compacta n -dimensional.

Aparentemente para a álgebra $\mathcal{B}$ a $\text{Im } \gamma$ não apresenta estrutura de produto cruzado. Sendo assim, não basta utilizar os recursos descritos no Capítulo 4 para calcular sua K-teoria. Para utilizarmos a estratégia do Capítulo 3, precisamos conhecer explicitamente alguns elementos “básicos” dos grupos $K_i(\mathcal{B}/\mathcal{E})$ e $K_i(\mathcal{E}/\mathcal{K})$, $i = 0, 1$, como por exemplo seus geradores. Estas informações parecem ser bem mais difíceis de obter nessa C^* -álgebra.

Para as álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ temos a seguinte sequência de composição (no sentido de [14], 4.3.2)

$$0 \subset \mathcal{K}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{A},$$

$$0 \subset \mathcal{K}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{K}_B \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{B}.$$

Muitas outras C^* -álgebras geradas por operadores pseudodiferenciais apresentam sequência de composição como acima. Por exemplo, para a C^* -álgebra $\mathcal{U}_M$ gerada pelos operadores

b-pseudodiferenciais de Melrose numa variedade compacta com bordo , Lauter [20] achou a sequência de composição

$$0 \subset \mathcal{K}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{U}_M$$

com $\mathcal{U}_M/\mathcal{E}$ isomorfo (via símbolo principal) a uma álgebra de funções contínuas e $\mathcal{E}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ isomorfo à soma direta (indexada pelas componentes conexas do bordo) da álgebra de funções contínuas de $\mathbb{R}$ com valores em operadores compactos. Para mais exemplos ver [10, 24, 26, 27].

Em 1963, M. Atiyah e I. Singer em [1] publicaram a primeira prova do teorema, que posteriormente passou a chamar-se *Teorema de Atiyah-Singer*, que expressa o índice de Fredholm de um operador elíptico somente em termos topológicos. Outras provas podem ser encontradas em [2, 3, 5, 16].

Em 1995. R. Nest e B .Tsygan em [29, 30, 31] publicaram generalizações do *Teorema de Atiyah-Singer* em um contexto mais algébrico. Para essas generalizações eles utilizaram invariantes algébricos como cohomologia cíclica, K-teoria e caráter de Chern.

V. Nistor em 1997, apresentou em [32] uma nova prova do *Teorema do índice de Connes-Moscovici para recobrimento* [8] usando apenas invariantes algébricos.

Desde então o interesse pelo estudo dos invariantes algébricos para álgebras de operadores pseudodiferenciais tem crescido, veja por exemplo, [21, 22, 24, 25].

Temos também que álgebras de operadores pseudodiferenciais são álgebras não-comutativas naturalmente associadas a situações geométricas singulares, e existem boas razões para esperar que o estudo de invariantes dessas álgebras não-comutativas revelem informações sobre a geometria e ajudem a entender o que vem a ser uma variedade não-comutativa [7].

Capítulo 1

A álgebra $\mathcal{A}$

Neste capítulo estudaremos uma subálgebra de $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$, que chamamos $\mathcal{A}$, obtida como o fecho da álgebra gerada por:

- i) operadores de multiplicação por funções em $CS(\mathbb{R})$.
- ii) operadores de multiplicação por e^{ijt} , $j \in \mathbb{Z}$.
- iii) operadores da forma $b(D) := F^{-1}b(M)F$, $b \in CS(\mathbb{R})$ e F denotando a transformada de Fourier.

É fácil verificar que $\mathcal{A}$ é invariante por adjunto, isto é, dado $T \in \mathcal{A}$ temos $T^* \in \mathcal{A}$. Portanto $\mathcal{A}$ é uma $*$ -subálgebra de $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$. Como $\mathcal{A}$ é fechada e tem unidade temos que $\mathcal{A}$ é uma C^* -álgebra com unidade.

Seja $\mathcal{E}$ o ideal comutador de $\mathcal{A}$, isto é, $\mathcal{E}$ é o ideal fechado gerado pelos comutadores $[a, b] = ab - ba$, $a, b \in \mathcal{A}$. É fácil verificar que $\mathcal{A}/\mathcal{E}$ é abeliano. Seja $M_{\mathcal{A}}$ o espectro da C^* -álgebra $\mathcal{A}/\mathcal{E}$, isto é, o conjunto dos homomorfismos não nulos de $\mathcal{A}/\mathcal{E}$ em $\mathbb{C}$ munido da topologia fraca-*. Pelo Teorema 2.1.10, pág. 41 de [28] temos que $\varphi : \mathcal{A}/\mathcal{E} \rightarrow C(M_{\mathcal{A}})$ onde $a \mapsto \hat{a}$ e $\hat{a}(\phi) = \phi(a)$, para todo $a \in \mathcal{A}/\mathcal{E}$ e $\phi \in M_{\mathcal{A}}$, é um $*$ -isomorfismo isométrico. O isomorfismo φ é chamado de isomorfismo de Gelfand.

No Teorema 1.17 apresentaremos uma fórmula explícita para $\varphi : \mathcal{A}/\mathcal{E} \rightarrow C(M_{\mathcal{A}})$. Verificaremos no Lema 1.6 que $\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{E}$ e na Proposição 1.24 estabeleceremos um isomorfismo $\psi : \mathcal{E}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \rightarrow C(S^1 \times \{-1, 1\}, \mathcal{K}_{\mathbb{Z}})$. Estes isomorfismos nos auxiliarão, no Capítulo 3, no cálculo da K-teoria de $\mathcal{A}$.

Vamos considerar também a C^* -álgebra conjugada $\hat{A} = F^{-1}AF$. Os geradores de $\hat{A}$ correspondentes a i), ii) e iii) são dados por:

î) operadores da forma $a(D)$, $a \in CS(\mathbb{R})$.

ïï) operadores translação T_j , onde $T_j(u)(\tau) := u(\tau + j)$ com $u \in L^2(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{Z}$.

ïïï) operadores de multiplicação por funções em $CS(\mathbb{R})$.

1.1 Ideal comutador

O principal resultado desta seção é obtido na Proposição 1.7 onde mostraremos que o ideal comutador, $\hat{\mathcal{E}} = F^{-1}\mathcal{E}F$, da álgebra $\hat{A}$ coincide com o fecho do conjunto:

$$\left\{ \sum_{j=-N}^N b_j(D)a_j(M)T_j + K ; N \in \mathbb{N}, b_j \in CS(\mathbb{R}), a_j \in C_0(\mathbb{R}), K \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}} \right\}.$$

Logo podemos concluir que $\mathcal{E}$ coincide com o fecho do conjunto:

$$\left\{ \sum_{j=-N}^N b_j(M)a_j(D)e^{ijM} + K ; N \in \mathbb{N}, b_j \in CS(\mathbb{R}), a_j \in C_0(\mathbb{R}), K \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}} \right\}.$$

Temos que o comutador $[b(D), T_j]$ é igual a zero e é conhecido que

$$[a(M), b(D)] \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}, \quad \text{para } a, b \in CS(\mathbb{R}) \quad (1.1)$$

(veja por exemplo [10], capítulo III, Lema 9.4). E temos que

$$[T_j, a(M)] = (a(M + j) - a(M))T_j \quad \text{para } a \in CS(\mathbb{R}) \text{ e } j \in \mathbb{Z}. \quad (1.2)$$

Definição 1.1 *Seja H um espaço de Hilbert. Uma C^* -subálgebra A de $\mathcal{L}(H)$ é irreduzível se os únicos subespaços vetoriais fechados de H que são invariantes por A são $\{0\}$ e H .*

No Lema abaixo damos uma condição suficiente para que uma álgebra $A \subset \mathcal{L}(H)$ seja irreduzível.

Lema 1.2 *Se $A \subset \mathcal{L}(H)$ é uma álgebra tal que $\{au : a \in A\}$ é denso em H , para todo $u \in H$ não nulo, então A é irreduzível.*

Demonstração:

Seja $M \subset H$ um subespaço vetorial fechado e invariante por A , onde $M \neq \{0\}$. Vamos provar que $M^\perp = \{0\}$, pois como $H = M \oplus M^\perp$ teremos $M = H$.

Sejam $x \in M^\perp$ e $0 \neq y \in M$. Como $\{ay : a \in A\}$ é denso em H temos que existem $a_j \in A$ tais que $a_j y \rightarrow x$ e $a_j y \perp x$. Então $\langle x, x \rangle = \langle \lim_{j \rightarrow \infty} a_j y, x \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \langle a_j y, x \rangle = 0$.

Logo $x = 0$ o que implica que $M^\perp = \{0\}$. Portanto A é irredutível. ■

Vamos verificar que o ideal comutador $\mathcal{E}$ da C^* -álgebra $\mathcal{A}$ é irredutível e então utilizando o Teorema abaixo teremos $\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{E}$.

Teorema 1.3 *Seja A uma C^* -subálgebra de $\mathcal{L}(H)$ irredutível que tem interseção não nula com $K(H)$. Então $K(H) \subset A$.*

Demonstração: Ver [28], pág. 58. ■

Enunciaremos agora o Teorema de Stone-Weierstrass (caso complexo) que será utilizado na demonstração do próximo resultado.

Teorema 1.4 *Seja B uma subálgebra de $C(X)$, X Hausdorff compacto, com a propriedade de que se $f \in B$ então $\bar{f} \in B$. Se B é fechada na norma do supremo, $\|\cdot\|_\infty$, e separa pontos (isto é, dados $x \neq y$ em X , existe $f \in B$ tal que $f(x) \neq f(y)$), então $B = C(X)$ ou $B = \{f \in C(X) : f(x) = 0\}$ para algum x fixado.*

Demonstração: Ver [36], pág. 266. ■

Lema 1.5 *Seja B a $*$ -álgebra gerada por $\{a(x+j) - a(x) : a \in C_0(\mathbb{R}), j \in \mathbb{Z}\}$ então B é densa em $C_0(\mathbb{R})$.*

Demonstração:

Como $\mathbb{R}$ não é compacto, para utilizarmos o Teorema 1.4 vamos considerar X a compactificação de $\mathbb{R}$ por um ponto, isto é, $X = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Temos que B é uma subálgebra de $C(X)$ e é evidente que se $f \in B$ então $\bar{f} \in B$.

Sejam $a(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e $z, y \in \mathbb{R}$ com $z \neq y$. Então para algum $j \in \mathbb{Z}$, $a(z+j) - a(z) \neq a(y+j) - a(y)$. Consideremos a mesma a , $z = \infty$ e $y \in \mathbb{R}$ temos que $a(z+1) - a(z) = 0$ e

$a(y+1) - a(y) \neq 0$ se $y \neq -1/2$ e $a(y+2) - a(y) \neq 0$ se $y = -1/2$. Logo B separa pontos de X , então pelo Teorema de Stone-Weierstrass temos que $\bar{B} = \{a \in C(X) : a(+\infty) = 0\} = C_0(\mathbb{R})$. ■

Seja $T : CS(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ definida por $T(a) = a(M)$. T é um $*$ -homomorfismo injetivo, logo pelo Teorema 3.1.5 de [28] temos que T é uma $*$ -isometria. Utilizando esta $*$ -isometria temos que a $*$ -álgebra gerada por $\{a(M+j) - a(M) : a \in C_0(\mathbb{R}), j \in \mathbb{Z}\}$ é densa em $\{b(M) : b \in C_0(\mathbb{R})\}$.

Durante este trabalho estaremos muitas vezes identificando a função $b \in CS(\mathbb{R})$ com o operador $b(M)$ através desta $*$ -isometria.

Lema 1.6 *O ideal comutador $\mathcal{E}$ da C^* -álgebra $\mathcal{A}$ é irredutível.*

Demonstração:

Consideremos $\eta(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. É conhecido que

$$F^{-1}\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\delta}}{\sqrt{\delta}} e^{\frac{-|x|^2}{4\delta}} d\delta$$

(veja, por exemplo, [36] pág. 128).

Temos que $|F^{-1}\eta(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\delta}}{\sqrt{\delta}} d\delta$ e sabemos que

$$\int_0^1 \frac{e^{-\delta}}{\sqrt{\delta}} d\delta < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\delta}} d\delta < \infty \quad \text{e} \quad (1.3)$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\delta}}{\sqrt{\delta}} d\delta \leq \int_1^{+\infty} e^{-\delta} d\delta < \infty. \quad (1.4)$$

Logo por (1.3) e (1.4) temos que $F^{-1}\eta$ é limitada. Fazendo $u = \frac{x}{2\sqrt{\delta}}$ temos $du = \frac{dx}{2\sqrt{\delta}}$, logo

$$\int_{\mathbb{R}} F^{-1}\eta(x) dx = \frac{2}{\sqrt{4\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du d\delta < \infty$$

o que implica que $F^{-1}\eta \in L^1(\mathbb{R})$.

Sejam $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e $T = F^{-1}\eta$. Temos que $\eta(D)(\varphi) = F^{-1}(\hat{\varphi}\hat{T})$ e como T é uma distribuição temperada pelo Teorema IX.4 de [36] sabemos que $F^{-1}(\hat{\varphi}\hat{T}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}T * \varphi$. Como $T \in L^1(\mathbb{R})$ e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ podemos escrever

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}T * \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} T(x-y)\varphi(y) dy \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Logo $\eta(D)$ é um operador integral com núcleo $T(x-y) > 0$. Tomemos $0 \neq u \in L^2(\mathbb{R})$ e $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\psi u \neq 0$. Temos que $\eta(D)\psi u \neq 0$, já que $\eta(M)$ é injetor, e vamos verificar agora que $\eta(D)\psi u$ é contínua.

Sabemos que para todo $x \in \mathbb{R}$, $\eta(D)\psi u(x) = \int_{\mathbb{R}} T(x-y)(\psi u)(y) dy$. Já verificamos que $T \in L^1(\mathbb{R})$ e é limitada. Por Holder temos que $\psi u \in L^1(\mathbb{R})$ e como $|T(x-y)(\psi u)(y)| \leq C|(\psi u)(y)|$ segue que $T(x-y)(\psi u)(y)$ é limitada por uma função em $L^1(\mathbb{R})$, independente de x . Então pelo Teorema da Convergência Dominada temos que para cada $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_{\mathbb{R}} T(x-y)(\psi u)(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \lim_{x \rightarrow x_0} T(x-y)(\psi u)(y) dy.$$

Usando novamente o Teorema da Convergência Dominada temos que $\lim_{v \rightarrow v_0} T(v) = T(v_0)$, logo $\int_{\mathbb{R}} \lim_{x \rightarrow x_0} T(x-y)(\psi u)(y) dy = \int_{\mathbb{R}} T(x_0-y)(\psi u)(y) dy$, ou seja, $\eta(D)\psi u$ é contínua.

Como $\eta(D)\psi u \neq 0$ temos que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\eta(D)\psi u(x_0) \neq 0$. Então temos que $\operatorname{Re}(\eta(D)\psi u(x_0)) \neq 0$ ou $\operatorname{Im}(\eta(D)\psi u(x_0)) \neq 0$ ou ambas o são.

Suponhamos que $\operatorname{Re}(\eta(D)\psi u(x_0)) \neq 0$. Então temos que $\operatorname{Re}(\eta(D)\psi u(x_0)) > 0$ ou $\operatorname{Re}(\eta(D)\psi u(x_0)) < 0$. Se $\operatorname{Re}(\eta(D)\psi u(x_0)) > 0$ então pela continuidade de $\eta(D)\psi u$ temos que $\operatorname{Re}(\eta(D)\psi u) > 0$ em um aberto $B \subset \mathbb{R}$ contendo x_0 . Pelo Corolário I.2.2 de [19] existe $\varphi \in C_c^\infty(B)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$ e $\varphi \equiv 1$ em um aberto contido em B .

Portanto $\operatorname{Re}(\varphi \eta(D)\psi u)(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. E como $\eta(D)$ tem núcleo positivo $\operatorname{Re}(\eta(D)\varphi \eta(D)\psi u)(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Se $\operatorname{Re}(\eta(D)\psi u(x_0)) < 0$ devemos proceder como no caso da $\operatorname{Re}(\eta(D)\psi u(x_0)) > 0$. Se $\operatorname{Im}(\eta(D)\psi u(x_0)) \neq 0$ é análogo ao caso da parte real ser diferente de zero. Portanto existe $\varphi \in C_c^\infty(B)$ tal que $[\eta(D)\varphi \eta(D)\psi u](x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Dado $v \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ seja $w = \frac{v}{\eta(D)\varphi(M)\eta(D)\psi(M)u}$. Temos que

$$v = w(M)\eta(D)\varphi(M)\eta(D)\psi(M)u.$$

Como $w(M), \varphi(M), \psi(M) \in \mathcal{A}$ e no Lema 1.5 vimos que $\eta(D) \in \mathcal{E}$ temos que $v \in \{Eu : E \in \mathcal{E}\}$ o que implica que $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \{Eu : E \in \mathcal{E}\}$.

Usando que $C_c^\infty(\mathbb{R})$ é denso em $L^2(\mathbb{R})$ temos que $\{Eu : E \in \mathcal{E}\}$ é denso em $L^2(\mathbb{R})$, para todo $u \neq 0$. Então pelo Lema 1.2 podemos concluir que $\mathcal{E}$ é irredutível. ■

Temos que $[a(M), b(D)] \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}} \cap \mathcal{E}$, para $a, b \in CS(\mathbb{R})$, e vamos verificar agora que $[a(M), b(D)] \neq 0$ para algum $a, b \in CS(\mathbb{R})$. Vamos verificar mais, que a e b podem ser tomados em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Observação 1.6 1/2: $[a(M), b(D)] \neq 0$ para algum $a, b \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

De fato, sejam $a, b \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, é fácil verificar que

$$[a(M), b(D)]u(x) = \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} ((a(x) - a(y))F^{-1}b(x-y))u(y)dy.$$

Logo $[a(M), b(D)]$ é um operador integral com núcleo $K(x, y) = (a(x) - a(y))F^{-1}b(x-y)$.

Seja $T_K = [a(M), b(D)]$, afirmamos que $\|K\|_{L^2} \neq 0$ implica $T_K \neq 0$.

De fato, pelo Teorema VI.23 de [36] temos que a norma Hilbert-Schmidt $\|T_K\|_{HS} = \|K\|_{L^2}$, logo $K = 0$ se, e só se, $T_K = 0$.

Consideremos então $b(x) = e^{-x^2}$ e a não constante. Temos que $F^{-1}b(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-(x-y)^2/4} > 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ logo $\|K(x, y)\|_{L^2} \neq 0$. Segue da afirmação que $T_K \neq 0$.

Portanto pelo Teorema 1.3 temos $\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{E}$.

Proposição 1.7 *O ideal comutador $\hat{\mathcal{E}}$ da C^* -álgebra conjugada $\hat{\mathcal{A}}$ coincide com o fecho de*

$$\hat{\mathcal{E}}_A := \left\{ \sum_{j=-N}^N b_j(D)a_j(M)T_j + K ; N \in \mathbb{N}, b_j \in CS(\mathbb{R}), a_j \in C_0(\mathbb{R}), K \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}} \right\}.$$

Demonstração:

Como já foi provado temos que $\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{E}$, logo

$$\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \subset \hat{\mathcal{E}}. \tag{1.5}$$

Por (1.2) temos que todos operadores da forma $b(D)(a(M+j) - a(M))T_j$ estão em $\hat{\mathcal{E}}$ para $b \in CS(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{Z}$ e $a \in C_0(\mathbb{R})$. Assim, pelo Lema 1.5 temos $\hat{\mathcal{E}}_A \subset \hat{\mathcal{E}}$.

Por outro lado, usando (1.1), (1.2), e (1.5), temos que $\hat{\mathcal{E}}_A$ é uma subálgebra de $\hat{\mathcal{A}}$ que contém os comutadores de todos os geradores de $\hat{\mathcal{A}}$ listados no começo do capítulo. Além disso, $\hat{\mathcal{E}}_A$ é invariante a direita ou a esquerda por multiplicações por estes operadores. Tomando limite, segue que o fecho de $\hat{\mathcal{E}}_A$ é um ideal de $\hat{\mathcal{A}}$ que contém todos os seus comutadores. Logo, $\hat{\mathcal{E}}$ está contido no fecho de $\hat{\mathcal{E}}_A$. ■

1.2 A álgebra $\mathcal{A}^\sharp$

Nesta seção estudaremos $\mathcal{A}^\sharp$ a C^* -álgebra abeliana gerada pelos operadores do tipo i) e ii) da página 17. No Lema 1.10 explicitaremos o espectro, $M_\sharp$, de $\mathcal{A}^\sharp$.

Seja $\mathcal{A}_0^\sharp$ a álgebra finitamente gerada por $CS(\mathbb{R})$ e $P_{2\pi}$. Sejam χ_+ e $\chi_- \in CS(\mathbb{R})$ tais que $\chi_\pm(\pm\infty) = 1$, $\chi_+ + \chi_- = 1$ e $\chi_\pm(t) = 0$ se $\mp t > 1$. É fácil verificar que todo $a \in \mathcal{A}_0^\sharp$ é da forma

$$a = a_+\chi_+ + a_-\chi_- + a_0, \quad a_\pm \in P_{2\pi}, \quad a_0 \in C_0(\mathbb{R}),$$

onde a escolha de a_+ , a_- e a_0 é única. Vamos provar que $\mathcal{A}_0^\sharp$ é fechada e assim teremos $\mathcal{A}^\sharp = \mathcal{A}_0^\sharp$.

Seja $f_n = a_n\chi_+ + b_n\chi_- + c_n \in \mathcal{A}_0^\sharp$ e consideremos a sequência $(f_n)_n$ convergindo uniformemente para d . Vamos provar que $d \in \mathcal{A}_0^\sharp$.

Para cada $y > 10$ temos que $\|a_n\|_\infty = \sup_{x \in [y, y+2\pi]} |a_n(x)| \leq \sup_{x \in [y, y+2\pi]} |a_n(x) + c_n(x)| + \sup_{x \in [y, y+2\pi]} |c_n(x)|$. Fazendo $y \rightarrow \infty$ temos que $\|a_n\|_\infty \leq \sup_{x \geq 1} |a_n(x) + c_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$.

Com isto temos que $(a_n)_n$ é Cauchy e pelo mesmo argumento $(b_n)_n$ é Cauchy. Digamos que $a_n \rightarrow a$ e $b_n \rightarrow b$, $a, b \in P_{2\pi}$. Temos então que $d - a\chi_+ - b\chi_- = \lim c_n \in C_0(\mathbb{R})$, logo $d \in \mathcal{A}_0^\sharp$. Portanto $\mathcal{A}_0^\sharp$ é fechada. Provamos então que:

Proposição 1.8 *Dado $a \in \mathcal{A}^\sharp$ e fixados χ_+ e χ_- como acima, estão unicamente determinados $a_0 \in C_0(\mathbb{R})$ e $a_\pm \in P_{2\pi}$ tais que $a = a_+\chi_+ + a_-\chi_- + a_0$.*

Vamos achar o espectro $M_\sharp$ da C^* -álgebra $\mathcal{A}^\sharp$. Para isto vamos definir duas classes de funcionais lineares multiplicativos.

1) A cada $t \in \mathbb{R}$ vamos definir

$$\begin{aligned} w_t : \mathcal{A}^\sharp &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto f(t) \end{aligned}$$

2) Para $\theta \in \mathbb{R}$,

$$w_{\theta,+} : \mathcal{A}^\sharp \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} f &\longmapsto \lim_{k \rightarrow \infty} f(\theta + 2\pi k) := f_\theta^+ \\ w_{\theta,-} : \mathcal{A}^\# &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \lim_{k \rightarrow \infty} f(\theta - 2\pi k) := f_\theta^- \end{aligned}$$

Usando que para $f \in \mathcal{A}^\#$ temos $f = f_+ \chi_+ + f_- \chi_- + f_0$ com $f_\pm \in P_{2\pi}$ e $f_0 \in C_0(\mathbb{R})$, é fácil verificar que os limites existem e que $\mathbb{R} \ni \theta \longmapsto f_\theta^\pm \in \mathbb{C}$ são funções 2π -periódicas.

Proposição 1.9 *Os funcionais w_t e $w_{\theta,\pm}$, $t, \theta \in \mathbb{R}$ são todos os funcionais lineares multiplicativos de $\mathcal{A}^\#$. E temos que $\mathbb{R}$ é denso em $M_\#$.*

Demonstração:

Temos que $\mathbb{R} \subset M_\#$, pois basta considerarmos a identificação

$$\begin{aligned} i : \mathbb{R} &\longrightarrow M_\# \\ t &\longmapsto w_t. \end{aligned}$$

Vamos verificar que i é contínua e injetora.

▷ injetividade

Sejam $t, s \in \mathbb{R}$ com $t \neq s$ e $\varphi \in CS(\mathbb{R})$ tal que $\varphi(t) \neq 0$ e $\varphi(s) = 0$. Temos que $\varphi \in \mathcal{A}^\#$ e $w_t(\varphi) \neq w_s(\varphi)$, isto é, $i(s) \neq i(t)$.

▷ continuidade

Seja $\{t_\alpha\} \in \mathbb{R}$ uma rede com $t_\alpha \rightarrow t$. Queremos mostrar que $i(t_\alpha) \rightarrow i(t)$.

Temos que $\varphi(t_\alpha) \rightarrow \varphi(t)$ para todo $\varphi \in \mathcal{A}^\#$. Portanto $w_{t_\alpha}(\varphi) \rightarrow w_t(\varphi)$ para todo $\varphi \in \mathcal{A}^\#$, logo i é contínua.

Suponhamos que $w \in M_\#$ e seja $s \in CS(\mathbb{R})$ a função $s(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

Como $-1 \leq s \leq 1$ temos que $-1 \leq w(s) \leq 1$. Vamos provar que se $|w(s)| < 1$ então $w = w_a$ onde $a \in \mathbb{R}$ resolve $s(a) = w(s)$.

Por Stone-Weierstrass temos que os polinômios em s são densos em $CS(\mathbb{R}) = C([-\infty, +\infty])$, logo w e w_a coincidem sobre $CS(\mathbb{R})$.

Seja $\chi \in C_0(\mathbb{R})$ satisfazendo $\chi(a) = 1$, temos $\chi(M)e^{iM} \in CS(\mathbb{R})$ e então $w_a(e^{iM}) = e^{ia} = w_a(\chi(M)e^{iM}) = w(\chi(M)e^{iM}) = w(\chi(M))w(e^{iM}) = w(e^{iM})$. Provando que w e w_a coincidem sobre o conjunto de geradores de $\mathcal{A}^\#$.

Para o caso $w(s) = \pm 1$, seja θ tal que $w(e^{iM}) = e^{i\theta}$. Temos que $w_{\theta,\pm}(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} s(\theta \pm 2\pi k) = \pm 1$. Portanto $w_{\theta,\pm}(s) = w(s)$.

Usando novamente o fato de que os polinômios em s são densos em $CS(\mathbb{R})$ temos que w e $w_{\theta,\pm}$ coincidem em $CS(\mathbb{R})$.

Temos que $w_{\theta,\pm}(e^{iM}) = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{i(\theta \pm 2\pi k)} = e^{i\theta}$. Portanto $w(e^{iM}) = w_{\theta,\pm}(e^{iM})$, logo w e $w_{\theta,\pm}$ coincidem sobre os geradores de $\mathcal{A}^\#$.

Agora só nos falta provar que $\mathbb{R}$, ou melhor, $i(\mathbb{R})$ é denso em $M_\#$.

Seja $K = \overline{i(\mathbb{R})} \subset M_\#$ e suponhamos que $K \neq M_\#$. Então existe $w_0 \in M_\# \setminus K$, e pelo Lema de Urysohn temos que existe $\hat{f} \in C(M_\#)$ tal que $\hat{f}(w_0) = 1$ e $\hat{f} \equiv 0$ em K .

Temos que $\mathcal{A}^\#$ é isomorfo a $C(M_\#)$, pelo Teorema de Gelfand. Logo existe $f \in \mathcal{A}^\#$ tal que $\hat{f}$ é a imagem de f por este isomorfismo e temos que $f(x) = w_x(f) = \hat{f}(w_x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, f é nula. Absurdo, pois $\hat{f}$ não é nula. Portanto $\mathbb{R}$ é denso em $M_\#$. ■

Lema 1.10 $M_\#$ é homeomorfo a um subconjunto de $[-\infty, +\infty] \times S^1$ a saber, $M_\# \approx \{(x, e^{ix}) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{-\infty, +\infty\} \times S^1$.

Demonstração:

Pela Proposição acima temos que $M_\# = \{w_t : t \in \mathbb{R}\} \cup \{w_{\theta,\pm} : \theta \in \mathbb{R}\}$ com a topologia fraca-*. Usando as notações acima temos que $f_{\theta+2\pi j}^\pm = f_\theta^\pm$, logo $f_\theta^\pm$ é um par de funções em $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = S^1$.

Consideremos as inclusões

$$\begin{aligned} i_1 : CS(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{A}^\# \\ a &\longmapsto a(M) \\ &e \\ i_2 : P_{2\pi} &\longrightarrow \mathcal{A}^\# \\ a &\longmapsto a(M). \end{aligned}$$

Temos que o espectro de $CS(\mathbb{R})$ é o conjunto $[-\infty, +\infty]$ e que o espectro de $P_{2\pi}$ é S^1 . Consideremos

$$i_1^* : M_\# \longrightarrow [-\infty, +\infty],$$

onde $i_1^*(w) = w \circ i_1$, e também

$$i_2^* : M_{\sharp} \longrightarrow S^1,$$

onde $i_2^*(w) = w \circ i_2$. As aplicações i_1^* e i_2^* são chamadas de aplicações duais de i_1 e i_2 respectivamente.

Seja $j : M_{\sharp} \longrightarrow [-\infty, +\infty] \times S^1$ dada por $j(w) = (i_1^*(w), i_2^*(w))$ para $w \in M_{\sharp}$.

Como $\text{Im } i_1$ e $\text{Im } i_2$ geram $\mathcal{A}^{\sharp}$ é fácil ver que j é injetora. Como $M_{\sharp}$ é compacto (Teorema 1.3.5, [28]), $[-\infty, +\infty] \times S^1$ é Hausdorff e j é contínua temos que j é um homeomorfismo sobre a imagem. Podemos então identificar topologicamente $M_{\sharp}$ com um subconjunto de $[-\infty, +\infty] \times S^1$. Pela definição da aplicação dual, podemos concluir que $M_{\sharp} = \{(x, e^{ix}) : x \in \mathbb{R}\} \cup (\{-\infty, +\infty\} \times S^1)$. ■

Pelo Teorema de Gelfand, temos que $\varphi : \mathcal{A}^{\sharp} \rightarrow C(M_{\sharp})$ definido por $\varphi(a) = \hat{a}$ é um *-isomorfismo isométrico. Mas sabemos quem são os funcionais de $M_{\sharp}$, logo temos

$$\hat{a}(w_t) = w_t(a) = a(t), t \in \mathbb{R} \text{ e}$$

$$\hat{a}(w_{\theta, \pm}) = w_{\theta, \pm}(a) = a_{\theta}^{\pm}, e^{i\theta} \in S^1.$$

1.3 A álgebra J_0

Nesta seção estudaremos $J_0 \subset \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ a C^* - subálgebra gerada por $a(M)b(D)$, $a \in C_0(\mathbb{R})$ e $b \in CS(\mathbb{R})$. No Lema 1.15 mostraremos que $J_0/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \cong C_0(\mathbb{R} \times \{-\infty, +\infty\})$ e daremos uma fórmula explícita para o isomorfismo de Gelfand. E na Proposição 1.16 vamos verificar que $J_0 \cap \mathcal{E} = \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$. Os resultados desta seção serão utilizados na próxima seção e também no Capítulo 4.

Definição 1.11 *O espaço símbolo M_A de uma C^* - álgebra A é o espectro da álgebra A/E , onde E é o ideal comutador de A .*

Definição 1.12 *O σ -símbolo de uma C^* - álgebra A é a composição da projeção canônica π com a transformada de Gelfand da C^* - álgebra A/E , onde E é o ideal comutador.*

Notação: $\sigma : A \rightarrow C(M_A)$ com $a \mapsto \sigma_a = \widehat{\pi(a)}$.

Lema 1.13 A C^* -álgebra J_0 é irredutível.

Demonstração:

Vamos verificar que $\{au : a \in J_0\}$ é denso em $L^2(\mathbb{R})$, para todo u não nulo. Então pelo Lema 1.2 teremos que J_0 é irredutível.

Na demonstração do Lema 1.6, vimos que, dados $v \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ existem $\eta, \varphi, \psi, w, u$ tais que

$$v = w(M)\eta(D)\varphi(M)\eta(D)\psi(M)u.$$

Temos que $w(M)\eta(D)$, $\varphi(M)\eta(D)$ e $\psi(M) \in J_0$, logo $v \in \{au : a \in J_0\}$. Como $v \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ é qualquer temos que $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \{au : a \in J_0\}$. Portanto $\{au : a \in J_0\}$ é denso em $L^2(\mathbb{R})$, para todo u não nulo. ■

Lema 1.14 O comutador $[a(M), b(D)]$ é compacto para $a, b \in C_0(\mathbb{R})$.

Demonstração:

Consideremos $a, b \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. É fácil verificar que

$$a(M)b(D)u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{it(x-y)} b(t)a(x)dt \right) u(y)dy$$

e também que

$$b(D)a(M)u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{it(x-y)} b(t)a(y)dt \right) u(y)dy.$$

Logo $a(M)b(D)$ é um operador integral com núcleo $\hat{b}(y-x)a(x) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ e $b(D)a(M)$ é um operador integral com núcleo $\hat{b}(y-x)a(y) \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Portanto pelo Teorema VI.23 de [36] temos que $a(M)b(D)$ e $b(D)a(M)$ são compactos e assim $[a(M), b(D)]$ é compacto para $a, b \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

O fim da demonstração segue do fato de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ser denso em $C_0(\mathbb{R})$. ■

Observação 1.14 1/2: Também temos que $a(M)b(D) \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ se $a \in C_0(\mathbb{R})$ e $b \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, a demonstração é análoga a do Lema acima.

Pelo Lema 1.14 e pela Observação 1.6 1/2 da página 22 temos que $J_0 \cap \mathcal{K}_{\mathbb{R}} \neq 0$. Logo pelo Teorema 1.3 temos que $\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \subset J_0$ e assim $\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \subset J_0 \cap \mathcal{E}$.

Seja G o ideal comutador de J_0 . Por (1.1) temos que $G \subset \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ e que G é não nulo pela Observação 1.6 1/2 da página 22. Como $\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \subset J_0$ segue que $G = \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$, pois o único ideal não nulo de $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ é $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$.

Lema 1.15 *O espaço símbolo M_J da C^* -álgebra J_0 é dado como:*

$$M_J = \mathbb{R} \times \{-\infty, +\infty\}.$$

O σ -símbolo é dado por:

$$\begin{aligned} \sigma_a(m, \pm\infty) &= a(m), \quad m \in \mathbb{R}, \quad a \in C_0(\mathbb{R}) \quad e \\ \sigma_{b(D)}(m, \pm\infty) &= b(\pm\infty), \quad m \in \mathbb{R}, \quad b \in CS(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Demonstração:

Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} i: C_0(\mathbb{R}) &\longrightarrow J_0/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \\ a &\longmapsto [a(M)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}. \end{aligned}$$

Temos que i é injetora já que $a(M) \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ se, e só se, $a \equiv 0$, logo sua aplicação dual $i^*: M_J \longrightarrow \mathbb{R}$ onde $\mathbb{R}$ é o espectro de $C_0(\mathbb{R})$ é sobrejetora (veja, por exemplo, [10], pág. 314).

Para $w \in M_J$ sejam $t_0 = i^*(w)$, $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, ϕ real, com ϕ igual a um em uma vizinhança de t_0 .

Sejam $A = \phi(M)s(D)$ onde $s(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ e $\xi_0 = \sigma_A(w) = w([\phi(M)s(D)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}})$. Temos que ξ_0 é real, pois $(\phi(M)s(D))^* = s(D)\phi(M)$ que é cômputo módulo compacto a $\phi(M)s(D)$. Logo $[\phi(M)s(D)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}^* = [\phi(M)s(D)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}$, consequentemente $\xi_0 = \bar{\xi}_0$.

Definimos assim o par (t_0, ξ_0) . Vamos verificar que ξ_0 não depende da ϕ considerada.

Sejam ϕ e $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ com ϕ igual a um em uma vizinhança U de t_0 e ψ igual a um em uma vizinhança V de t_0 . Seja $B = \psi(M)s(D)$, seja $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ com suporte contido em $U \cap V$ e igual a um em uma vizinhança de t_0 . Como $(1 - \chi)(\phi - \psi) = \phi - \psi$ temos que $A - B = (1 - \chi)(M)(A - B)$. Logo $\sigma_{A-B}(w) = \sigma_{A-B}(w) - \sigma_{\chi(M)(A-B)}(w) = \sigma_{A-B}(w) - \sigma_{\chi(M)}(w)\sigma_{A-B}(w) = 0$, pois $\sigma_{\chi(M)}(w) = \chi(t_0) = 1$. Portanto $\sigma_A(w) = \sigma_B(w)$.

Temos que $\phi(M)s(D)\phi(M)s(D)$ é cômputo módulo compacto a $\phi^2(M)s^2(D)$ e que $\phi^2(M)(1 - s^2)(D)$ é compacto pelo Lema 1.14. Logo A^2 é cômputo módulo compacto a

$\phi^2(M)$, com isto temos que $\xi_0^2 = w([A]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}^2) = w([\phi(M)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}^2) = \phi^2(i^*(w)) = 1$. Portanto $\xi_0 = \pm 1$.

Definimos então

$$\begin{aligned}\nu: M_J &\longrightarrow \mathbb{R} \times \{-1, 1\} \\ w &\longmapsto (i^*(w), \xi),\end{aligned}$$

onde $\xi = w([\phi(M)s(D)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}})$, $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ com ϕ igual a um em uma vizinhança de $i^*(w)$.

Vamos provar agora que se $a \in C_0(\mathbb{R})$ e $\nu(w) = (t, \xi)$ então $w([a(M)s(D)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}) = a(t)\xi$. De fato, seja $\chi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ com χ_j igual a um em $(-j, j)$ então $\xi = w([\chi_j(M)s(D)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}})$. Temos que $w([\chi_j(M)a(M)s(D)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}) = a(t)\xi$ para todo j suficientemente grande, mas $\chi_j(M)a(M)s(D) \rightarrow a(M)s(D)$. Logo temos o que queríamos.

Vamos verificar que ν é um homeomorfismo.

▷ injetora

Sejam $w, w' \in M_J$ tais que $(t_0, \xi_0) = \nu(w) = \nu(w') = (t, \xi)$. Temos então que $t_0 = i^*(w) = i^*(w') = t$ e $\sigma_\phi(w) = \sigma_\phi(w')$ para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Como $\xi = \xi_0$ temos também $\sigma_{\phi(M)s(D)}(w) = \sigma_{\phi(M)s(D)}(w')$, para todo $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

O conjunto de todos os $\phi(M)s(D)$ como acima geram J_0 , módulo $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$, logo $\sigma_A(w) = \sigma_A(w')$ para todo $A \in J_0$. Portanto $w = w'$.

▷ sobrejetora

Consideremos o operador paridade P , isto é $(Pf)(x) = f(-x)$, $f \in L^2(\mathbb{R})$. É fácil verificar que $Pa(M)P = a(-M)$ e $Pb(D)P = b(-D)$ para $a \in C_0(\mathbb{R})$ e $b \in CS(\mathbb{R})$.

Dado $w \in M_J$ vamos definir $\lambda([A]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}) = w([PAP]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}})$, $A \in J_0$. Seja $\nu(w) = (t_0, \xi_0) = (i^*(w), \xi_0)$ como $\lambda([a(M)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}) = w([a(-M)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}})$ temos que $i^*(\lambda) = -t_0$.

Seja $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ com ψ igual a um em uma vizinhança de $-t_0$. Consideremos $\tilde{\psi}(x) = \psi(-x)$ então $\tilde{\psi}$ é igual a um em uma vizinhança de t_0 . Temos que $\lambda([\psi(M)s(D)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}) = w([\psi(-M)s(-D)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}) = -w([\tilde{\psi}(M)s(D)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}) = -\xi_0$ já que s é uma função ímpar.

Para $t \in \mathbb{R}$ vamos definir $(T_t f)(x) = f(x + t)$, $f \in L^2(\mathbb{R})$. É fácil verificar que $T_t a(M)T_{-t} = (T_t a)(M)$ e $T_t b(D)T_{-t} = b(D)$ para $a \in C_0(\mathbb{R})$ e $b \in CS(\mathbb{R})$.

Dado $w \in M_J$ vamos definir $\tau([A]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}) = w([T_t A T_{-t}]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}})$, $A \in J_0$. Seja $\nu(w) = (t_0, 1)$. Como $\tau([a(M)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}) = w([(T_t a)(M)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}})$ temos que $i^*(\tau) = t_0 + t$.

Seja $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ com ψ igual a um em uma vizinhança de $t_0 + t$. Consideremos $\tilde{\psi}(x) = \psi(x + t)$ então $\tilde{\psi}$ é igual a um em uma vizinhança de t_0 . Temos que $\tau([\psi(M)s(D)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}) = w([(T_t \psi)(M)s(D)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}) = w([\tilde{\psi}(M)s(D)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}) = 1$.

Portanto se $(t_0, 1) \in \text{Im } \nu$ então $(t_0 + t, 1) \in \text{Im } \nu$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto usando a sobrejetividade de i^* e o que foi visto acima temos que ν é sobrejetora.

▷ contínua

Sejam $\{w_\alpha\}_\alpha$ uma rede em M_J e $w \in M_J$ com $w_\alpha \rightarrow w$. Seja também $\nu(w) = (t, \xi)$ e $\nu(w_\alpha) = (t_\alpha, \xi_\alpha)$.

Como $w_\alpha \rightarrow w$ temos que $i^*(w_\alpha) \rightarrow i^*(w)$ logo $t_\alpha \rightarrow t$. Seja $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ com χ igual a um em uma vizinhança de t , temos que $\xi = w([\chi(M)s(D)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}})$. Seja α_0 tal que para todo $\alpha \geq \alpha_0$ temos $t_\alpha \in U$, U aberto de $\mathbb{R}$ onde χ é igual a um. Então para todo $\alpha \geq \alpha_0$ temos que $\xi_\alpha = w_\alpha([\chi(M)s(D)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}) \rightarrow w([\chi(M)s(D)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}) = \xi$. Portanto ν é contínua.

▷ a inversa é contínua

Consideremos $w, w_\alpha, (t, \xi), (t_\alpha, \xi_\alpha)$ como antes e seja $(t_\alpha, \xi_\alpha) \rightarrow (t, \xi)$. Temos que $t_\alpha = i^*(w_\alpha) \rightarrow i^*(w) = t$ logo $w_\alpha([a(M)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}) \rightarrow w([a(M)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}})$ para todo $a \in C_0(\mathbb{R})$.

Então $w_\alpha([a(M)s(D)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}) = a(t_\alpha)\xi_\alpha \rightarrow a(t)\xi = w([a(M)s(D)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}})$. Como $\{[a(M)s(D)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}} : a \in C_0(\mathbb{R})\}$ gera $J_0/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$, segue que $w_\alpha \rightarrow w$. Portanto ν é um homeomorfismo.

Para concluir a demonstração basta usarmos o isomorfismo de $C_0(\mathbb{R} \times \{-1, 1\})$ em $C_0(\mathbb{R} \times \{-\infty, +\infty\})$. Observar que $s(\pm\infty) = \pm 1$ e usar que os polinômios em s são densos em $CS(\mathbb{R})$. ■

Proposição 1.16 *Temos que $J_0 \cap \mathcal{E} = \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$.*

Demonstração:

Já vimos que $\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \subset J_0 \cap \mathcal{E}$, vamos verificar então que $J_0 \cap \mathcal{E} \subset \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$.

Decorre da Proposição 1.7 que $\mathcal{E}$ é o fecho do conjunto $\left\{ \sum_{j=-N}^N b_j(M) a_j(D) e^{ijM} + K : N \in \mathbb{N}, b_j \in CS(\mathbb{R}), a_j \in C_0(\mathbb{R}), K \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}} \right\}$.

Sabemos que $a(D-j)e^{ijM} = e^{ijM}a(D)$, logo $a_j(D)e^{ijM} = e^{ijM}a_j(D+j)$. Portanto $\mathcal{E}$ é o fecho do conjunto

$$\left\{ \sum_{j=-N}^N b_j(M) e^{ijM} a_j(D+j) + K : N \in \mathbb{N}, b_j \in CS(\mathbb{R}), a_j \in C_0(\mathbb{R}), K \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}} \right\}.$$

Seja $A \in (J_0 \cap \mathcal{E})$ e consideremos $\chi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ com $0 \leq \chi_j \leq 1$ e $\chi_j \equiv 1$ em $(-j, j)$ com $j \in \mathbb{N}$. Como $A \in J_0$ podemos calcular o σ -símbolo de A , logo $\sigma_A = \lim_{j \rightarrow \infty} \sigma_{\chi_j A}$. Portanto $[A]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}} = \lim_{j \rightarrow \infty} [\chi_j A]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}$ em $J_0/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$, ou seja $\|[\chi_j A]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}} - [A]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}\| \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$. Logo existem $(K_j)_j$ onde $K_j \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ tais que $\lim_{j \rightarrow \infty} \chi_j A + K_j = A$.

Como $A \in \mathcal{E}$ temos, também, que $A = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=-N_k}^{N_k} b_l^k(M) e^{ilM} a_l^k(D+l) + S_k$ onde $b_l^k \in CS(\mathbb{R})$, $a_l^k \in C_0(\mathbb{R})$ e $S_k \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$.

Logo

$$A = \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=-N_k}^{N_k} \chi_j(M) b_l^k(M) e^{ilM} a_l^k(D+l) + S_k + K_j.$$

Como $\chi_j(M) b_l^k(M) e^{ilM} a_l^k(D+l)$ é compacto, vem que A é o limite de uma soma de compactos, logo compacto. Portanto $(J_0 \cap \mathcal{E}) \subset \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$, assim $J_0 \cap \mathcal{E} = \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$. ■

1.4 O espaço símbolo de $\mathcal{A}$

Nesta seção calcularemos o espaço símbolo, M_A , de $\mathcal{A}$ e daremos uma fórmula explícita para o homomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow C(M_A)$.

Teorema 1.17 *O espaço símbolo M_A da C^* -álgebra $\mathcal{A}$ é dado como:*

$$M_A = M_{\sharp} \times \{-\infty, +\infty\}.$$

O σ -símbolo é dado por:

$$\begin{aligned} \sigma_a(m, \pm\infty) &= a(m), \quad m \in M_{\sharp}, \quad a \in \mathcal{A}^{\sharp} \quad e \\ \sigma_{b(D)}(m, \pm\infty) &= b(\pm\infty), \quad m \in M_{\sharp}, \quad b \in CS(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Demonstração:

Consideremos as aplicações

$$\begin{aligned} i_1: \mathcal{A}^\# &\longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{E} \\ a(M) &\longmapsto [a(M)]_{\mathcal{E}} \\ &\text{e} \\ i_2: CS(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{E} \\ b &\longmapsto [b(D)]_{\mathcal{E}}. \end{aligned}$$

E suas aplicações duais

$$\begin{aligned} i_1^*: M_A &\longrightarrow M_{\sharp} \\ &\text{e} \\ i_2^*: M_A &\longrightarrow [-\infty, +\infty], \end{aligned}$$

onde dado $w \in M_A$ temos $i_j^*(w) = w \circ i_j$, $j = 1$ e 2 .

Consideremos i o produto das duais:

$$i: M_A \longrightarrow M_{\sharp} \times [-\infty, +\infty],$$

com $w \in M_A$ tendo imagem $i(w) = (w \circ i_1, w \circ i_2)$.

Como $\text{Im } i_1$ e $\text{Im } i_2$ geram $\mathcal{A}/\mathcal{E}$ é fácil ver que i é injetora. Como M_A é compacto (Teorema 1.3.5, [28]), $M_{\sharp} \times [-\infty, +\infty]$ é Hausdorff e i é contínua temos que i é um homeomorfismo sobre a imagem.

Usando este homeomorfismo como identificação temos que:

$$\sigma_a(m, t) = \hat{a}(m) \quad \text{e} \quad \sigma_{b(D)}(m, t) = b(t),$$

para $a \in \mathcal{A}^\#$, $b \in CS(\mathbb{R})$ e $(m, t) \in M_{\sharp} \times [-\infty, +\infty]$.

Até aqui temos que $M_A \subset M_{\sharp} \times [-\infty, +\infty]$. Mas demonstraremos nos Lemas 1.20, 1.21 e 1.22 respectivamente que $M_A \cap (\mathbb{R} \times \{-\infty, +\infty\}) \neq \emptyset$; $(x, +\infty) \in M_A \cap (\mathbb{R} \times \{-\infty, +\infty\})$ se, e só se, $(-x, -\infty) \in M_A \cap (\mathbb{R} \times \{-\infty, +\infty\})$; $(x, +\infty) \in M_A \cap (\mathbb{R} \times \{-\infty, +\infty\})$ se, e só se, $(y, +\infty) \in M_A \cap (\mathbb{R} \times \{-\infty, +\infty\})$, para todo $y \in \mathbb{R}$. Logo $\mathbb{R} \times \{-\infty, +\infty\} \subset M_A$ e como $\mathbb{R}$ é denso em $M_{\sharp}$ temos que $M_{\sharp} \times \{-\infty, +\infty\} \subset M_A$. No Lema 1.19 demonstraremos que $(m, t) \notin M_A$ se $|t| < \infty$, logo $M_A = M_{\sharp} \times \{-\infty, +\infty\}$. ■

Lema 1.18 Dado qualquer $x \in M_{\sharp}$ existe $y \in [-\infty, +\infty]$ tal que $(x, y) \in M_A$.

Demonstração:

Dados $a(M) \in \mathcal{E} \cap \mathcal{A}^{\sharp}$ e $\chi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ temos que $\chi(M)a(M) \in (J_0 \cap \mathcal{E}) = \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$, já que $b(M) \in J_0$ se $b \in C_0(\mathbb{R})$ e $\mathcal{E}$ é ideal de $\mathcal{A}$. Temos então que $\chi a(M) = 0$, logo $\chi a \equiv 0$ para todo $\chi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ o que implica que $a \equiv 0$. Portanto $\mathcal{E} \cap \mathcal{A}^{\sharp} = \{0\}$.

Consideremos a aplicação i_1 do teorema acima, como $\mathcal{E} \cap \mathcal{A}^{\sharp} = \{0\}$ temos que i_1 é um isomorfismo sobre a imagem, logo i_1^* é sobrejetora (veja, por exemplo, pág. 314 de [10]).

Então dado $x \in M_{\sharp}$ existe $x' \in M_A$ tal que $i_1^*(x') = x$ e $i(x') = (i_1^*(x'), i_2^*(x')) = (x, i_2^*(x')) \in M_A$. ■

Lema 1.19 $(m, t) \notin M_A$ se $|t| < \infty$.

Demonstração:

Dado $t_0 \in \mathbb{R}$, podemos escolher $a \in C_0(\mathbb{R})$ tal que $a(t_0) \neq 0$. Temos que $a(D) \in \mathcal{E} = \text{Ker} \sigma$, logo $\sigma_{a(D)}(m, t) = a(t) = 0$, para todo $(m, t) \in M_A$. Assim $(m, t_0) \notin M_A$, para qualquer $m \in M_{\sharp}$ já que $a(t_0) \neq 0$. ■

Lema 1.20 $M_A \cap (\mathbb{R} \times \{-\infty, +\infty\}) \neq \emptyset$.

Demonstração:

Dado $x \in \mathbb{R} \subset M_{\sharp}$ temos pelo Lema 1.18 que existe $y \in [-\infty, +\infty]$ tal que $(x, y) \in M_A$. E pelo Lema 1.19 temos que se $|y| < \infty$ então $(x, y) \notin M_A$. Portanto $(x, y) \in M_A \cap \mathbb{R} \times \{-\infty, +\infty\}$. ■

Lema 1.21 $(x, +\infty) \in M_A \cap (\mathbb{R} \times \{-\infty, +\infty\}) \iff (-x, -\infty) \in M_A \cap (\mathbb{R} \times \{-\infty, +\infty\})$.

Demonstração:

Consideremos o operador paridade P , isto é, $(Pf)(x) = f(-x)$, $f \in L^2(\mathbb{R})$. É fácil verificar que $Pa(M)P = a(-M)$ e $Pb(D)P = b(-D)$ para $a \in \mathcal{A}^{\sharp}$ e $b \in CS(\mathbb{R})$.

Seja $g : \mathcal{A}/\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{E}$, onde $[a]_{\mathcal{E}} \mapsto [PaP]_{\mathcal{E}}$. Dado $\lambda \in M_A$ definimos $w = \lambda \circ g$. Pode-se verificar sem dificuldades que $w \in M_A$.

Se $i(\lambda) = (x, +\infty)$ então $i(w) = (-x, -\infty)$ e se $i(\lambda) = (-x, -\infty)$ então $i(w) = (x, +\infty)$. Portanto temos o resultado. ■

Lema 1.22 $(x, +\infty) \in M_A \cap (\mathbb{R} \times \{-\infty, +\infty\}) \iff (y, +\infty) \in M_A \cap (\mathbb{R} \times \{-\infty, +\infty\})$, para todo $y \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Dado $t \in \mathbb{R}$ vamos definir $(T_t f)(x) = f(x+t)$, $f \in L^2(\mathbb{R})$. É fácil verificar que $T_t a(M) T_{-t} = (T_t a)(M)$ e $T_t b(D) T_{-t} = b(D)$ para $a \in \mathcal{A}^\#$ e $b \in CS(\mathbb{R})$.

Seja $g : \mathcal{A}/\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{E}$, onde $[a]_\mathcal{E} \mapsto [T_t a T_{-t}]_\mathcal{E}$, a partir daqui a demonstração é análoga a do Lema anterior. ■

1.5 O quociente $\mathcal{E}/\mathcal{K}_\mathbb{R}$

Nesta seção vamos construir o isomorfismo de $\mathcal{E}/\mathcal{K}_\mathbb{R}$ para $C(S^1 \times \{-1, 1\}, \mathcal{K}_\mathbb{Z})$.

Seja SL a C^* -subálgebra de $\mathcal{L}(L^2(S^1))$ gerada pelos operadores $a(M)$ de multiplicação por funções $a \in C^\infty(S^1)$, e por todos os operadores $b(D_\theta) := F_d^{-1} b(M) F_d$, onde

$$\begin{aligned} F_d : L^2(S^1) &\rightarrow L^2(\mathbb{Z}) \\ f &\mapsto (f_j)_j \end{aligned}$$

é a transformada de Fourier discreta, com $f_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-ij\theta} f(e^{i\theta}) d\theta$, $b \in CS(\mathbb{Z})$, $b(M)(u_j)_j = (b(j)u_j)_j$ e $CS(\mathbb{Z})$ é o conjunto das sequências $(b_j)_j$ que possuem limites quando j tende a $+\infty$ e $-\infty$.

Podemos verificar que SL é irredutível (verificação análoga à de $\mathcal{E}$) e que todos os seus comutadores são compactos (veja, por exemplo, [10]), então pelo Teorema 1.2 temos que $\mathcal{K}_{S^1} \subset SL$. Usando a mesma estratégia do Teorema 1.17 podemos verificar que o espaço símbolo de SL é $M_{SL} = S^1 \times \{-1, 1\}$. Logo pelo Teorema de Gelfand temos que $SL/\mathcal{K}_{S^1}$ é isomorfo a $C(S^1 \times \{-1, 1\})$ e que $\sigma_a(z, \pm 1) = a(z)$ e $\sigma_{b(D_\theta)}(z, \pm 1) = b(\pm\infty)$, $a \in C^\infty(S^1)$ e $b \in CS(\mathbb{Z})$.

Logo $A \otimes K \longmapsto \sigma_A \otimes K$ induz um $*$ -isomorfismo

$$\frac{SL \hat{\otimes} \mathcal{K}_{\mathbb{Z}}}{\mathcal{K}_{S^1 \times \mathbb{Z}}} \cong \frac{SL \hat{\otimes} \mathcal{K}_{\mathbb{Z}}}{\mathcal{K}_{S^1} \hat{\otimes} \mathcal{K}_{\mathbb{Z}}} \cong \frac{SL}{\mathcal{K}_{S^1}} \hat{\otimes} \mathcal{K}_{\mathbb{Z}} \cong C(M_{SL}) \hat{\otimes} \mathcal{K}_{\mathbb{Z}} \cong C(M_{SL}, \mathcal{K}_{\mathbb{Z}}). \quad (1.6)$$

(veja [11], para mais detalhes). Acima $\hat{\otimes}$ denota o produto tensorial de C^* -álgebras nucleares. Em particular $SL \hat{\otimes} \mathcal{K}_{\mathbb{Z}}$ denota o fecho do produto tensorial algébrico de $SL \otimes \mathcal{K}_{\mathbb{Z}}$ em $\mathcal{L}(L^2(S^1) \hat{\otimes} L^2(\mathbb{Z}))$.

Dado $u \in L^2(\mathbb{R})$ denotamos:

$$u^\circ(\varphi) = (u(\varphi - j))_{j \in \mathbb{Z}} \text{ para cada } \varphi \in \mathbb{R}.$$

Temos, pelo Teorema de Fubini, que $u^\circ(\varphi) \in L^2(\mathbb{Z})$ para quase todo $\varphi \in \mathbb{R}$.

Para cada $\varphi \in \mathbb{R}$ definimos $Y_\varphi = F_d M^{-\varphi} F_d^{-1}$, onde $M^{-\varphi} \in \mathcal{L}(L^2(S^1))$ é o operador de multiplicação pela função ($z \mapsto z^{-\varphi}$), isto é $(M^{-\varphi} f)(e^{i\theta}) = e^{-i\varphi\theta} f(e^{i\theta})$. Podemos verificar que Y_φ , $\varphi \in \mathbb{R}$, é uma família de operadores unitários de $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}$ com as seguintes propriedades:

$$Y_\varphi Y_w = Y_{\varphi+w}, \quad \varphi, w \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad (Y_k u)_j = u_{j+k}, \quad k \in \mathbb{Z}, u \in L^2(\mathbb{Z}).$$

Podemos então definir o operador unitário (com $S^1 = \{e^{2\pi i\varphi} : \varphi \in \mathbb{R}\}$)

$$\begin{aligned} W : L^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^2(S^1, d\varphi; L^2(\mathbb{Z})) \\ u &\longmapsto (Wu)(\varphi) = Y_\varphi u^\circ(\varphi). \end{aligned}$$

Usando a primeira propriedade de Y_φ verifica-se facilmente que se $b \in CS(\mathbb{R})$, então $\varphi \mapsto Y_\varphi b(\varphi - M) Y_{-\varphi}$ é 1-periódica e pode ser vista, portanto como um elemento de $C(S^1, \mathcal{L}_{\mathbb{Z}})$.

Então pelo Teorema 2.6 de [13], que enunciamos abaixo, podemos definir o isomorfismo ψ .

Teorema 1.23 *Temos que $W \hat{E} W^{-1} = SL \hat{\otimes} \mathcal{K}_{\mathbb{Z}}$.*

Além disso, para $b \in CS(\mathbb{R})$, $a \in C_0(\mathbb{R})$ e $j \in \mathbb{Z}$, temos:

$$Y_\varphi a(\varphi - M) Y_{-\varphi} \in C(S^1, \mathcal{K}_{\mathbb{Z}}) \quad \text{e}$$

$$W(b(D)aT_j)W^{-1} = b(D_\theta)Y_\varphi a(\varphi - M)Y_{-\varphi-j} + K, \quad K \in \mathcal{K}_{S^1 \times \mathbb{Z}}, \quad (1.7)$$

onde denotamos por $f(\varphi)$ funções $S^1 \ni e^{2\pi i\varphi} \mapsto f(\varphi) \in \mathcal{K}_{\mathbb{Z}}$.

Proposição 1.24 *Existe um $*$ -isomorfismo*

$$\psi : \mathcal{E}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \longrightarrow C(M_{SL}, \mathcal{K}_{\mathbb{Z}})$$

tal que se $\tilde{\gamma}$ denota a composição de ψ com a projeção canônica $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$, e se $E \in \mathcal{E}$ satisfaz $F^{-1}EF = b(D)aT_j$, $b \in CS(\mathbb{R})$, $a \in C_0(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{Z}$ então temos:

$$\tilde{\gamma}_E(\varphi, \pm 1) = b(\pm\infty)Y_{\varphi}a(\varphi - M)Y_{-\varphi-j}, \quad (e^{2\pi i\varphi}, \pm 1) \in M_{SL}.$$

Demonstração:

Vamos definir ψ como sendo a composição das aplicações:

$$\mathcal{E}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \hat{\mathcal{E}}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \frac{SL \hat{\otimes} \mathcal{K}_{\mathbb{Z}}}{\mathcal{K}_{S^1 \times \mathbb{Z}}} \longrightarrow C(M_{SL}, \mathcal{K}_{\mathbb{Z}}),$$

onde, a primeira aplicação leva $A + \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ para $F^{-1}AF + \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$, a segunda para $WF^{-1}AFW^{-1} + \mathcal{K}_{S^1 \times \mathbb{Z}}$ e a última é o isomorfismo (1.6). Pelo Teorema 1.23 e pela equação (1.7), temos o resultado para $\tilde{\gamma}_E(\varphi, \pm 1)$. ■

Estenderemos $\tilde{\gamma}$, definida sobre $\mathcal{E}$, para a álgebra inteira $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{E}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ é um ideal de $\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$, todo $A \in \mathcal{A}$ define um operador T_A em $\mathcal{L}(\mathcal{E}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}})$ por

$$T_A(E + \mathcal{K}_{\mathbb{R}}) = AE + \mathcal{K}_{\mathbb{R}}.$$

Assim define-se:

$$T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}).$$

Está claro que $\|T_A\| \leq \|A\|$. Vamos definir

$$\begin{aligned} \gamma : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{L}(C(M_{SL}, \mathcal{K}_{\mathbb{Z}})) \\ A &\longmapsto \psi T_A \psi^{-1}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Para $E \in \mathcal{E}$, γ_E é uma multiplicação por $\tilde{\gamma}_E \in C(M_{SL}, \mathcal{K}_{\mathbb{Z}})$ da Proposição 1.24. Identificando funções de $C(M_{SL}, \mathcal{K}_{\mathbb{Z}})$ com operadores de multiplicação correspondentes em $\mathcal{L}(C(M_{SL}, \mathcal{K}_{\mathbb{Z}}))$, nós podemos então dizer que γ estende $\tilde{\gamma}$.

Proposição 1.25 *Existe um $*$ -homomorfismo*

$$\gamma : \mathcal{A} \longrightarrow C(M_{SL}, \mathcal{L}_{\mathbb{Z}})$$

estendendo $\tilde{\gamma}$ da Proposição 1.24. Sobre os geradores de $\mathcal{A}$, γ é dada por:

$$\gamma_a(\varphi, \pm 1) = a(\pm\infty), \quad a \in CS(\mathbb{R}),$$

$$\gamma_{b(D)}(\varphi, \pm 1) = Y_\varphi b(M - \varphi) Y_{-\varphi}, \quad b \in CS(\mathbb{R}) \text{ e}$$

$$\gamma_{e^{ijM}}(\varphi, \pm 1) = Y_{-j}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração:

É suficiente provar as equações acima para a aplicação γ definida em (1.8). Por continuidade, a imagem de γ estará então contida em $C(M_{SL}, \mathcal{L}_{\mathbb{Z}})$ considerada como uma subálgebra fechada de $\mathcal{L}(C(M_{SL}, \mathcal{K}_{\mathbb{Z}}))$.

Dado $a \in CS(\mathbb{R})$, precisamos calcular $\tilde{\gamma}_{aE}$ em termos de $\tilde{\gamma}_E$, para $E \in \mathcal{E}$. Pela Proposição 1.7, temos que basta considerar E tal que

$$F^{-1}EF = d(D)cT_k, \quad d \in CS(\mathbb{R}), \quad c \in C_0(\mathbb{R}), \text{ e } k \in \mathbb{Z}.$$

Obtemos então $F^{-1}(aE)F = (ad)(D)cT_j$ e portanto, pela Proposição 1.24,

$$\tilde{\gamma}_{aE}(\varphi, \pm 1) = a(\pm\infty)d(\pm\infty)Y_\varphi c(\varphi - M)Y_{-\varphi-j} = a(\pm\infty)\tilde{\gamma}_E(\varphi, \pm 1).$$

Para E como acima e $b \in CS(\mathbb{R})$,

$$F^{-1}(b(D)E)F = b(-M)d(D)cT_j = d(D)b(-M)cT_j + K, \quad K \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}},$$

e, assim,

$$\tilde{\gamma}_{b(D)E}(\varphi, \pm 1) = d(\pm\infty)Y_\varphi b(-\varphi + M)c(\varphi - M)Y_{-\varphi-j} = Y_\varphi b(M - \varphi)Y_{-\varphi}\tilde{\gamma}_E(\varphi, \pm 1).$$

Para o mesmo E temos

$$F^{-1}e^{ijM}EF = T_j d(D)cT_k = d(D)c(M + j)T_{j+k}$$

e, então, usando que $Y_{-j}c(\varphi - M) = c(\varphi - M + j)Y_{-j}$,

$$\tilde{\gamma}_{e^{ijM}E}(\varphi, \pm 1) = d(\pm\infty)Y_\varphi c(\varphi - M + j)Y_{-\varphi-j-k} = Y_{-j}d(\pm\infty)Y_\varphi c(\varphi - M)Y_{-\varphi-k} = Y_{-j}\tilde{\gamma}_E(\varphi, \pm 1). \quad \blacksquare$$

A aplicação preserva $*$, pois preserva $*$ nos geradores.

Proposição 1.26 *Seja $\mathcal{A}^\circ \subset \mathcal{A}$ a subálgebra fechada gerada pelos operadores do tipo*

ii) e iii) da página 17. Se $A \in \mathcal{A}^\circ$ então $f = (WF^{-1})A(WF^{-1})^{-1} \in C(S^1, \mathcal{L}_{\mathbb{Z}})$ e $\gamma_A(z, 1) = f(z) = \gamma_A(z, -1)$ para todo $z \in S^1$. Em particular, $\|\gamma_A\| = \|A\|$ para todo $A \in \mathcal{A}^\circ$.

Demonstração:

Dado $b \in CS(\mathbb{R})$, para cada $\varphi \in \mathbb{R}$, $(b(\varphi - j))_{j \in \mathbb{Z}} \in CS(\mathbb{Z})$; denotamos por $b(\varphi - M) \in \mathcal{L}_{\mathbb{Z}}$ o operador de multiplicação por esta sequência.

Para $j \in \mathbb{Z}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ e $u \in L^2(\mathbb{R})$ temos,

$$(Y_\varphi b(\varphi - M)Y_{-j}Y_{-\varphi})(Y_\varphi u^\circ(\varphi)) = Y_\varphi(b(\varphi - k)u(\varphi - k + j))_{k \in \mathbb{Z}},$$

logo $WbT_jW^{-1} = Y_\varphi b(\varphi - M)Y_{-\varphi-j}$, para $b \in CS(\mathbb{R})$ e $j \in \mathbb{Z}$.

Por outro lado segue das equações da Proposição 1.25 que

$\gamma_{b(D)e^{ijM}}(\varphi, \pm 1) = Y_\varphi b(M - \varphi)Y_{-\varphi-j} = Wb(-M)T_jW^{-1} = WF^{-1}b(D)e^{ijM}FW^{-1}$, o que prova que $\gamma_A(z, 1) = \gamma_A(z, -1)$, para todo $A \in \mathcal{A}^\circ$. Como WF^{-1} é um operador unitário segue que $\|\gamma_A\| = \|A\|$ para todo $A \in \mathcal{A}^\circ$. ■

Proposição 1.27 *Seja J_0 a C^* -álgebra definida na seção 1.3. Temos que $\text{Ker } \gamma = J_0$.*

Demonstração:

Se $A \in J_0$, vimos na demonstração da Proposição 1.16 que $\lim_{j \rightarrow \infty} \chi_j A + K_j = A$ onde $\chi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ com $0 \leq \chi_j \leq 1$ e $\chi_j \equiv 1$ em $(-j, j)$ com $j \in \mathbb{N}$; $K_j \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$.

Agora se $A \in \mathcal{A}$ e $\lim_{j \rightarrow \infty} \chi_j A + K_j = A$ temos que $A \in J_0$, já que

$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=-N_k}^{N_k} b_l^k(M) a_l^k(D) e^{ilM} + C; \quad N_k \in \mathbb{N}, \quad b_l \in CS(\mathbb{R}), \quad a_l \in CS(\mathbb{R}), \quad C \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}} \text{ e}$$

$$a(D - j)e^{ijM} = e^{ijM}a(D).$$

Com isto provamos que $A \in \mathcal{A}$ pertence a J_0 se, e só se, $\lim_{j \rightarrow \infty} \chi_j A + K_j = A$, $K_j \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$.

Podemos então concluir que $A \in \mathcal{A}$ pertence a J_0 se, e só se, $\sigma_A(m, \pm\infty) = 0$ para todo $m \in S_+^1 \cup S_-^1$, onde $S_+^1 = S^1 \times \{+\infty\}$ e $S_-^1 = S^1 \times \{-\infty\}$. Pela Proposição 3.4 de [13] temos que

$$\sup\{|\sigma_A(m, \xi)| : x \in S_+^1 \cup S_-^1, \xi = \pm\infty\} \leq \|\gamma_A\|.$$

Logo se $A \in \text{Ker } \gamma$ então $\sigma_A(m, \pm\infty) = 0$ para $m \in S_+^1 \cup S_-^1$. E vimos acima que isto ocorre se, e só se, $A \in J_0$, portanto $\text{Ker } \gamma = J_0$. ■

Capítulo 2

A álgebra $\mathcal{C}$

Neste capítulo vamos estudar a C^* -subálgebra de $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$, que chamamos $\mathcal{C}$, gerada por operadores de multiplicação $a(M)$ e $b(D) := F^{-1}b(M)F$ com $a, b \in CS(\mathbb{R})$.

Calcularemos sua K - teoria e obteremos uma fórmula para o índice de Fredholm.

Definição 2.1 *Seja $\mathcal{C}$ a C^* -subálgebra de $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ obtida como o fecho da C^* -álgebra gerada por:*

- i) operadores de multiplicação $a(M)$, $a \in CS(\mathbb{R})$.*
- ii) operadores da forma $b(D) := F^{-1}b(M)F$, $b \in CS(\mathbb{R})$.*

É óbvio que $\mathcal{C}$ é uma C^* -subálgebra de $\mathcal{A}$, introduzida no Capítulo 1.

2.1 O espaço símbolo de $\mathcal{C}$

Nesta seção calcularemos o espaço símbolo, $M_{\mathcal{C}}$, de $\mathcal{C}$ e daremos uma fórmula explícita para o homomorfismo $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow C(M_{\mathcal{C}})$.

Proposição 2.2 *A C^* -álgebra $\mathcal{C}$ é irredutível.*

Demonstração:

Temos que $\{au : a \in \mathcal{C}\}$ é denso em $L^2(\mathbb{R})$, para todo u não nulo. Pois do Lema 1.13 temos que $\{au : a \in J_0\}$ é denso em $L^2(\mathbb{R})$, para todo u não nulo e $J_0 \subset \mathcal{C}$. Então pelo Lema 1.2 temos que $\mathcal{C}$ é irredutível ■

Usando o Teorema 1.3, (1.1) e a Observação 1.6 1/2 temos que

$$\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{C}. \quad (2.1)$$

Seja J o ideal comutador de $\mathcal{C}$, temos

$$J \subset \mathcal{K}_{\mathbb{R}} \quad (2.2)$$

já que $[a(M), b(D)] \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$, $a, b \in CS(\mathbb{R})$. Por (2.1), (2.2) e pela Observação 1.6 1/2 temos $J = \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$.

Teorema 2.3 *O espaço símbolo M_C da C^* -álgebra $\mathcal{C}$ é dado como*

$$M_C = \{(x, \xi) \in [-\infty, +\infty] \times [-\infty, +\infty] : |x| + |\xi| = \infty\}.$$

O σ -símbolo é dado por:

$$\sigma_a(x, \xi) = a(x), \quad (x, \xi) \in M_C,$$

$$\sigma_{b(D)}(x, \xi) = b(\xi), \quad (x, \xi) \in M_C.$$

Demonstração:

Consideremos as aplicações

$$\begin{aligned} i_1 : CS(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \\ a &\longmapsto [a(M)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}} \\ &\text{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_2 : CS(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \\ b &\longmapsto [b(D)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}. \end{aligned}$$

Note que i_j , $j = 1, 2$, é injetora já que $a(M) \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ se, e só se, $a \equiv 0$.

Temos que o espectro de $CS(\mathbb{R})$ é o conjunto $[-\infty, +\infty]$. Consideremos as aplicações duais de i_1 e i_2 :

$$\begin{aligned} i_1^* : M_C &\longrightarrow [-\infty, +\infty] \quad \text{e} \\ i_2^* : M_C &\longrightarrow [-\infty, +\infty], \end{aligned}$$

onde dado $w \in M_C$ temos $i_j^*(w) = w \circ i_j$, $j = 1, 2$. Como i_j , $j = 1, 2$ é injetora temos que i_j^* , $j = 1, 2$ é sobrejetora (veja, por exemplo, [3], pág. 314).

Seja i o produto das duais

$$i : M_C \longrightarrow [-\infty, +\infty] \times [-\infty, +\infty],$$

onde $w \in M_C$ tem imagem $i(w) = (w \circ i_1, w \circ i_2)$.

Como $\text{Im } i_1$ e $\text{Im } i_2$ geram $\mathcal{C}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ é fácil ver que i é injetora. Como M_C é compacto, $[-\infty, +\infty] \times [-\infty, +\infty]$ é Hausdorff e i é contínua temos que i é um homeomorfismo sobre a imagem.

Usando este homeomorfismo como identificação temos

$$\sigma_a(x, \xi) = a(x) \quad \text{e} \quad \sigma_{b(D)}(x, \xi) = b(\xi).$$

Sabemos que $A = a(M)b(D) \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}} = \text{Ker } \sigma$ para $a, b \in C_0(\mathbb{R})$ e podemos escolher a e b que nunca se anulam em $\mathbb{R}$. Como

$$\sigma_A(x, \xi) = a(x)b(\xi) = 0 \quad \forall \quad (x, \xi) \in M_C,$$

e $a(x)b(\xi) = 0$ se, e somente se, $|x| = \infty$ ou $|\xi| = \infty$ ou ambos, segue que $M_C \subset \{(x, \xi) \in [-\infty, +\infty] \times [-\infty, +\infty] : |x| + |\xi| = \infty\}$.

Seja $w = (x, \xi) \in M_C$ e vamos definir $\lambda([A]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}) = w([F^{-1}AF]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}})$. Temos que $\lambda([a(M)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}) = w([a(D)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}) = a(\xi)$ e $\lambda([b(D)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}) = w([b(-M)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}) = b(-x)$, logo $\lambda = (\xi, x)$.

Usando o operador translação do Lema 1.22 temos que dado $x \in \mathbb{R}$, $(x, +\infty) \in M_C$ se, e só se, $(y, +\infty) \in M_C$ para todo $y \in \mathbb{R}$. E usando o operador paridade do Lema 1.21 temos que dado $x \in \mathbb{R}$, $(x, +\infty) \in M_C$ se, e só se, $(-x, -\infty) \in M_C$. Usando a sobrejetividade das aplicações duais, temos $M_C = \{(x, \xi) \in [-\infty, +\infty] \times [-\infty, +\infty] : |x| + |\xi| = \infty\}$. ■

2.2 Espaços de Hardy e operadores de Toeplitz

Nesta seção apresentaremos a definição de espaços de Hardy no círculo, $H^2(S^1)$, e na reta, $H^2(\mathbb{R})$, e provaremos que $U(H^2(S^1)) = H^2(\mathbb{R})$ (com $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$), onde U é um

operador unitário. Esta teoria será necessária na próxima seção.

Sejam $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ e $H(D)$ a classe de todas as funções analíticas em D . Para $f \in H(D)$ definimos $M_2(f; r) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^2 dt \right\}^{1/2}$, pelo Teorema 17.6 de [38] temos que M_2 é uma função monótona crescente de $r \in [0, 1)$, logo podemos definir para $f \in H(D)$

$$\|f\|_2 = \lim_{r \rightarrow 1} M_2(f; r).$$

Definição 2.4 $H^2(S^1) = \{f \in H(D) : \|f\|_2 < \infty\}$.

Aplicando a desigualdade de Minkowski para $M_2(f; r)$ é fácil verificar que $\|f\|_2$ satisfaz a desigualdade triangular, logo $H^2(S^1)$ é um espaço linear normado. Mais ainda, temos que $H^2(S^1)$ é um espaço de Banach, veja por exemplo na página 331 de [38] uma demonstração de que $H^2(S^1)$ é completo.

Veremos a seguir que $H^2(S^1)$ pode ser identificado com um subespaço de $L^2(S^1)$, $S^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$ munido da medida $\frac{1}{2\pi} d\theta$.

Teorema 2.5 a) Uma função $f \in H(D)$, da forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in D),$$

está em $H^2(S^1)$ se, e somente se, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$; neste caso,

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2.$$

b) Se $f \in H^2(S^1)$, então f tem limite radial $f^*(e^{it}) = \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{it})$ em quase todo ponto de S^1 ; $f^* \in L^2(S^1)$; o n -ésimo coeficiente de Fourier de f^* é a_n se $n \geq 0$ e zero se $n < 0$;

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^*(e^{it}) - f(re^{it})|^2 dt = 0.$$

Além disso f é a integral de Poisson de f^* , isto é, se $z = re^{i\theta}$ então

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f^*(e^{it}) dt$$

onde $P_r(\theta - t)$ é o núcleo de Poisson.

c) A aplicação $f \mapsto f^*$ é uma isometria de $H^2(S^1)$ sobre o subespaço de $L^2(S^1)$ que consiste naquelas $g \in L^2(S^1)$ que tem $\hat{g}(n) = 0$ para todo $n < 0$.

Demonstração: Ver [38], Teorema 17.10. ■

Definição 2.6 $H^2(\mathbb{R})$ é o subespaço de $L^2(\mathbb{R})$ consistindo de todas as funções f cuja extensão harmônica $F(x + iy) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{yf(t)}{y^2 + (x-t)^2} dt$, é analítica no semi - plano superior.

Enunciaremos agora um Teorema de Paley e Wiener que nos mostra que $FH^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}_+)$.

Teorema 2.7 Uma função $f \in L^2(\mathbb{R})$ pertence a $H^2(\mathbb{R})$ se, e somente se, $\hat{f}$ é nula em quase todo o ponto no eixo real negativo.

Demonstração: Ver [17], pág. 101. ■

Provaremos agora um resultado que relaciona $H^2(S^1)$ com $H^2(\mathbb{R})$.

Proposição 2.8 Seja $U : L^2(S^1) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ onde $g \longmapsto (Ug)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(1-it)}g\left(\frac{1+it}{1-it}\right)$, $t \in \mathbb{R}$. Então U é um operador unitário de $L^2(S^1)$ para $L^2(\mathbb{R})$ tal que $U(H^2(S^1)) = H^2(\mathbb{R})$.

Demonstração:

Fazendo alguns cálculos, concluímos que U é inversível e $U^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(S^1)$ é dada por $h \longmapsto (U^{-1}h)(z) = \frac{2\sqrt{\pi}}{z+1}h\left(\frac{i(z-1)}{-z-1}\right)$.

Vamos verificar que U é uma isometria. Temos que

$$\|Ug\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|1-it|^2} \left| g\left(\frac{1+it}{1-it}\right) \right|^2 dt.$$

Seja $e^{i\theta} = \frac{1+it}{1-it}$ então $e^{i\theta} d\theta = \frac{2}{(1-it)^2} dt$ sendo assim $d\theta = \frac{2}{|1-it|^2} dt$. Substituindo esses valores obtemos que $\|Ug\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|g\|_{L^2(S^1)}^2$.

Verificaremos agora que $U(H^2(S^1)) = H^2(\mathbb{R})$. A aplicação conforme $z = \frac{1+iw}{1-iw}$ leva o semi - plano superior sobre o disco unitário, com i sendo levado no zero e o zero sendo levado no um. Sejam $z_1 = re^{i\theta}$ e $z_2 = re^{it}$, $r \in [0, 1)$, temos que $P_r(\theta - t) = \operatorname{Re} \left[\frac{e^{it} + z_1}{e^{it} - z_1} \right]$.

Como a aplicação conforme é bijetora temos que existem $w_1 = x_1 + iy_1$ e $w_2 = x_2 + iy_2$ tais que $z_1 = \frac{1+iw_1}{1-iw_1}$ e $z_2 = \frac{1+iw_2}{1-iw_2}$. Na fronteira temos $e^{it} = \frac{1+ix_2}{1-ix_2}$ logo $\frac{1}{2\pi} dt = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+x_2^2)} dx_2$. Compondo a fórmula do núcleo de Poisson com a aplicação conforme obtemos $\frac{y_1(1+x_2^2)}{y_1^2+(x_1-x_2)^2}$.

Dada $f \in H^2(S^1)$ consideremos $\tilde{f}(z) = f(z) \frac{1+z}{2\sqrt{\pi}}$. Temos que $\tilde{f} \in H^2(S^1)$. Então pelo Teorema 2.5 item b temos que $\tilde{f}(z_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) \tilde{f}^*(e^{it}) dt$. Compondo com a aplicação conforme temos $\tilde{f}(\frac{1+iw_1}{1-iw_1}) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y_1}{y_1^2+(x_1-x_2)^2} \tilde{f}^*(\frac{1+ix_2}{1-ix_2}) dx_2 =$
 $= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y_1}{y_1^2+(x_1-x_2)^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}(1-ix_2)} f^*(\frac{1+ix_2}{1-ix_2}) dx_2 = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y_1}{y_1^2+(x_1-x_2)^2} (Uf^*)(x_2) dx_2$ que é analítica no semi-plano superior.

Portanto $U(H^2(S^1)) \subset H^2(\mathbb{R})$. A demonstração da volta utiliza a mesma estratégia. ■

Definição 2.9 *Seja P a projeção ortogonal de $L^2(S^1)$ sobre $H^2(S^1)$. Se $\varphi \in L^\infty(S^1)$, o operador*

$$T_\varphi : H^2(S^1) \longrightarrow H^2(S^1), \quad \varphi \longmapsto P(\varphi f)$$

é chamado operador de Toeplitz com símbolo φ .

Enunciaremos agora um teorema que será utilizado na próxima seção.

Teorema 2.10 *Se $\varphi \in C(S^1)$, então T_φ é um operador de Fredholm se, e só se, φ nunca se anula. Seja φ um elemento inversível em $C(S^1)$. Então o índice de Fredholm de T_φ é menos o número de rotação de φ , isto é,*

$$\text{ind}(T_\varphi) = -w(\varphi).$$

Demonstração: Ver [28], pág. 103 e 104. ■

2.3 Índice de Fredholm e a K-teoria de $\mathbb{C}$

Nesta seção e nos capítulos que seguem estudaremos a K-teoria de C^* -álgebras. Como referência de um amplo estudo sobre K-teoria para C^* -álgebras recomendamos os livros de B. Blackadar, *K-Theory for Operator Algebras* [4] e M. Rordam, F. Larsen e N. J. Laustisen, *An Introduction to K-Theory for C^* -algebras* [37]. Para um breve resumo

sobre K-teoria para C^* -álgebras recomendamos o Apêndice C de [6]. Utilizaremos neste trabalho as notações e resultados de [4] e [37].

A K-teoria foi desenvolvida por Atiyah e Hirzebruch por volta de 1960, baseada no trabalho de Grothendieck em geometria algébrica. Ela foi introduzida como uma ferramenta na teoria de C^* -álgebras por volta de 1970.

Resumidamente, K-teoria (para C^* -álgebras) é um par de funtores, chamados K_0 e K_1 , que a cada C^* -álgebra A associa dois grupos abelianos $K_0(A)$ e $K_1(A)$. Temos que K_0 é um grupo de diferenças formais de classes de projeções (matrizes) de tamanho arbitrário e K_1 é o grupo de classes de homotopias de matrizes unitárias de tamanho arbitrário. Uma das propriedades dos funtores K_0 e K_1 é que dada uma sequência exata curta de C^* -álgebras

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

podemos associar uma sequência exata cíclica de seis termos de grupos abelianos

$$\begin{array}{ccccc} K_0(A) & \xrightarrow{\varphi_*} & K_0(B) & \xrightarrow{\psi_*} & K_0(C) \\ \uparrow \delta_1 & & & & \downarrow \delta_0 \\ K_1(C) & \xleftarrow{\psi_*} & K_1(B) & \xleftarrow{\varphi_*} & K_1(A) \end{array}$$

onde as setas horizontais são homomorfismos induzidos functorialmente e a seta de conexão de K_1 para K_0 é chamada aplicação do índice e a seta de conexão de K_0 para K_1 é chamada aplicação exponencial.

Vimos na seção 1 que $\mathcal{C}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ é isomorfo a $C(M_C)$. Usando que M_C é homeomorfo a S^1 temos que $K_i(\mathcal{C}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) \cong K_i(C(S^1))$, $i = 0, 1$. Pelo exemplo 11.3.3 de [37] sabemos que $K_i(C(S^1)) \cong \mathbb{Z}$, $i = 0, 1$, onde a classe $[.]_1$ da função $f : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = z$ gera $K_1(C(S^1))$ e a classe $[.]_0$ da função $g : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(z) = 1$ gera $K_0(C(S^1))$. Pelo exemplo 11.3.4 de [37] temos que

$$\begin{aligned} \Delta : K_1(C(S^1)) &\longrightarrow \pi^1(S^1) \\ [u]_1 &\longmapsto \langle \text{Det}(u) \rangle, \end{aligned}$$

onde $\pi^1(S^1)$ é o grupo fundamental de S^1 e u é um unitário é um isomorfismo. Pelo

exemplo 8.3.2 de [37] temos que

$$\begin{aligned} w : \pi^1(S^1) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \langle \lambda \rangle &\longmapsto w(\lambda), \end{aligned}$$

onde $\lambda \in C(S^1, S^1)$ é um isomorfismo e satisfaz a seguinte propriedade u é homotópico a v se, e só se, $w(u) = w(v)$, u e $v \in C(S^1, S^1)$.

Logo

$$\begin{aligned} w \circ \Delta : K_1(C(S^1)) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ [u]_1 &\longmapsto w(Det(u)) \end{aligned}$$

é um isomorfismo. Com isto temos que a classe de qualquer $f \in C(S^1, S^1)$ que tenha $w(f) = 1$ ou -1 gera $K_1(C(S^1))$.

Fixando um homeomorfismo h de M_C para S^1 temos que $[1]_0$ gera $K_0(C(M_C))$ e $[h]_1$ gera $K_1(C(M_C))$.

Usando o σ -símbolo temos que $[[Id]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}]_0$ gera $K_0(\mathcal{C}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}})$ e $[[e^{2\pi ic(M)}b(D) + c(D)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}]_1$ onde $b, c \in CS(\mathbb{R})$ são tais que b é crescente com $b(x) = 0$, se $x \leq -1$ e $b(x) = 1$, se $x \geq 1$ e c é decrescente com $c(x) = 0$, se $x \geq 1$ e $c(x) = 1$, se $x \leq -1$, $b + c \equiv 1$ gera $K_1(\mathcal{C}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}})$, isto é,

$$\begin{aligned} K_0(\mathcal{C}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) &= \mathbb{Z}[[Id]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}]_0 \quad \text{e} \\ K_1(\mathcal{C}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) &= \mathbb{Z}[[e^{2\pi ic(M)}b(D) + c(D)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}]_1. \end{aligned}$$

Lema 2.11 *Seja $T \in \mathcal{C}$. Então T é um operador de Fredholm se, e somente se, σ_T é inversível.*

Demonstração:

Como $\mathcal{C}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ é uma C^* -subálgebra de $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$, segue do Teorema 2.1.11 de [28] que $[T]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}} \in \mathcal{C}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ é inversível se, e somente se, $[T]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ é inversível. Pelo Teorema 1.4.16 de [28] temos que $[T]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ é inversível se, e somente se, T é de Fredholm. Por outro lado, segue do Teorema 2.3 que $[T]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}} \in \mathcal{C}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ é inversível se, e só se, $\sigma_T(x, \xi) \neq 0$ para todo $(x, \xi) \in M_C$. ■

Sejam χ a função característica da semi-reta real positiva e $\phi \in CS(\mathbb{R})$ tal que $\phi(+\infty) = \phi(-\infty) = 1$, ϕ não nula e $w(\phi) = -1$. Pelo Teorema 2.7 temos que $\chi(D)\phi(M)\chi(D)$

é equivalente a um operador de Toeplitz em $H^2(\mathbb{R})$, logo unitariamente equivalente a um operador de Toeplitz em $H^2(S^1)$, pela Proposição 2.8. Então pelo Teorema 2.10 temos que $\chi(D)\phi(M)\chi(D)$ é um operador de Fredholm com índice 1. Logo $\chi(D)\phi(M)\chi(D) \oplus Id_{H^2(\mathbb{R})^\perp} = \chi(D)\phi(M)\chi(D) + (Id - \chi(D))$ é um operador de Fredholm com índice 1.

Lema 2.12 *O operador $(Id - \chi(D))\phi(M)\chi(D)$ é compacto.*

Demonstração:

Pela Proposição 2.8 e pelo Teorema 2.7 temos que $U^{-1}\chi(D)U = P$ onde P é a projeção ortogonal em $H^2(S^1)$. Temos também que $U^{-1}\phi(M)U = \tilde{\phi}(M)$ onde $\tilde{\phi}(z) = \phi\left(\frac{z-1}{i(z+1)}\right)$.

Suponha $\phi(t) = 1$ se $|t| > 1$, então $\tilde{\phi}(z) \equiv 1$ em uma vizinhança de -1 . Portanto $\tilde{\phi} \in C^\infty(S^1)$. Logo, $U^{-1}(Id - \chi(D))\phi(M)\chi(D)U = (Id - P)\tilde{\phi}(M)P$ com P a projeção sobre $H^2(S^1)$ e $\tilde{\phi} \in C^\infty(S^1)$.

Consideremos $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ base ortonormal de $L^2(S^1)$ onde $e_k(z) = z^k$. Temos que

$$(Id - P)e_n(M)Pe_k = 0 \quad \text{se } k < 0 \quad \text{e} \quad (Id - P)e_n(M)Pe_k = (Id - P)e_{k+n} \quad \text{se } k \geq 0.$$

Mas $(Id - P)e_{k+n} = 0$ se $k + n \geq 0$. Vamos estudar então o que acontece para $n \geq 0$ e $n < 0$.

Se $n \geq 0$ então $k + n \geq 0$ para todo $k \geq 0$, logo $(Id - P)e_{k+n} = 0$.

Se $n < 0$ teremos $k + n \geq 0$ se, e somente se, $k \geq -n$. Então $(Id - P)e_{k+n} = 0$ para todo $k \geq -n$ e $(Id - P)e_{k+n} = e_{k+n}$ caso contrário. Logo para n fixo $\text{Im}[(Id - P)e_n P]$ é gerada por $\{e_k : 0 \leq k \leq -n\}$.

Com isto temos que $(Id - P)p_n(M)P$ é um operador de posto finito, logo compacto. Logo se p é um polinômio temos que $(Id - P)p(M)P$ é compacto. Pelo Teorema de Stone-Weierstrass temos que existem polinômios p_n convergindo uniformemente para $\tilde{\phi}$ então

$$\|(Id - P)\tilde{\phi}(M)P - (Id - P)p_n(M)P\| \leq \|\tilde{\phi}(M) - p_n(M)\| = \|\tilde{\phi} - p_n\|_\infty \longrightarrow 0.$$

Como $\mathcal{K}(L^2(S^1))$ é fechado em $\mathcal{L}(L^2(S^1))$ temos que $(Id - P)\tilde{\phi}(M)P$ é compacto em $L^2(S^1)$. Logo $(Id - \chi(D))\phi(M)\chi(D)$ é compacto em $L^2(\mathbb{R})$. ■

Teorema 2.13 *Seja $T \in \mathcal{C}$ um operador de Fredholm, temos que $\text{ind}(T) = \delta_1([T]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}})_1 = w(\sigma_T)$, onde δ_1 é a aplicação do índice da sequência de K -teoria associada a sequência exata curta abaixo.*

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_{\mathbb{R}} \xrightarrow{i} \mathcal{C} \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \longrightarrow 0$$

Demonstração:

Vamos considerar as seguintes sequências exatas curtas

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_{\mathbb{R}} \xrightarrow{i} \mathcal{C} \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_{\mathbb{R}} \xrightarrow{i} \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R})) \xrightarrow{\pi} \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \longrightarrow 0$$

onde i é a inclusão e π a projeção canônica.

Sabemos pela Proposição 9.4.2 de [37] que o índice, $\bar{\delta}_1$, para a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_{\mathbb{R}} \xrightarrow{i} \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R})) \xrightarrow{\pi} \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \longrightarrow 0$$

é o índice de Fredholm, isto é $\text{ind}(T) = \bar{\delta}_1([T]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}})_1$.

Consideremos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{K}_{\mathbb{R}} & \xrightarrow{i} & \mathcal{C} & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{C}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow i & & \downarrow i \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{K}_{\mathbb{R}} & \xrightarrow{i} & \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R})) & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Pela naturalidade da aplicação do índice, veja Proposição 9.1.5 de [37], temos que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} K_1(\mathcal{C}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) & \xrightarrow{\delta_1} & \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \parallel \\ K_1(\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) & \xrightarrow{\bar{\delta}_1} & \mathbb{Z} \end{array}$$

Logo δ_1 é o índice de Fredholm, ou seja $\text{ind}(T) = \delta_1([T]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}})_1$. Vamos verificar agora que $\text{ind}(T) = w(\sigma_T)$.

Consideremos $S = \chi(D)\phi(M)\chi(D) + (Id - \chi(D)) + (Id - \chi(D))\phi(M)\chi(D) = \phi(M)\chi(D) + (Id - \chi(D))$. Como vimos no Lema 2.12 que $(Id - \chi(D))\phi(M)\chi(D)$ é compacto, temos que S é um operador de Fredholm com índice 1, pela observação antes do Lema 2.12.

Seja $T' = \phi(M)b(D) + (Id - b(D))$ com b contínua crescente com $b(x) = 0$ para $x \leq -1$ e $b(x) = 1$ para $x \geq 1$. Temos $T' \in \mathcal{C}$ e $T' - S = (\phi - 1)(M)(b - \chi)(D)$ logo $T' - S$ é compacto pela Observação 1.14 1/2. Portanto $T' = S + K$, K compacto, logo T' é Fredholm e $ind(T') = 1$ e temos também que $w(\sigma_{T'}) = 1$. Concluimos assim que $ind(T) = \delta_1([T]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}) = w(\sigma_T)$, $T \in \mathcal{C}$ um operador de Fredholm. ■

Proposição 2.14 *Seja $\pi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ a projeção canônica. Então $\pi_* : K_0(\mathcal{C}) \longrightarrow K_0(\mathcal{C}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}})$ é um isomorfismo. Além disso, $K_1(\mathcal{C}) = 0$.*

Demonstração:

Consideremos a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_{\mathbb{R}} \xrightarrow{i} \mathcal{C} \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \longrightarrow 0$$

e sua sequência exata cíclica de seis termos

$$\begin{array}{ccccccc} K_0(\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) & \xrightarrow{i_*} & K_0(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\pi_*} & K_0(\mathcal{C}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) & & \\ \uparrow \delta_1 & & & & \downarrow \delta_0 & & \\ K_1(\mathcal{C}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) & \xleftarrow{\pi_*} & K_1(\mathcal{C}) & \xleftarrow{i_*} & K_1(\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) & & \end{array}$$

Pelo corolário 6.4.2 e pelo exemplo 8.2.9 de [37] temos que $K_0(\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) = \mathbb{Z}$ e $K_1(\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) = 0$. Substituindo então as K -teorias conhecidas temos

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{i_*} & K_0(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\pi_*} & \mathbb{Z} & & \\ \uparrow \delta_1 & & & & \downarrow \delta_0 & & \\ \mathbb{Z} & \xleftarrow{\pi_*} & K_1(\mathcal{C}) & \xleftarrow{i_*} & 0 & & \end{array}$$

Seja $T' = \phi(M)b(D) + (Id - b(D))$ o operador do Teorema 2.13, temos que $[[T']_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}]_1 \in K_1(\mathcal{C}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}})$ e já vimos que $\delta_1([T']_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}})_1 = 1$, logo δ_1 é um isomorfismo. Portanto $\pi_* : K_0(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ é isomorfismo e $K_1(\mathcal{C}) = 0$. ■

Capítulo 3

K-teoria de $\mathcal{A}$

Neste capítulo calcularemos a K-teoria da C^* -álgebra $\mathcal{A}$ utilizando a seguinte estratégia. Primeiro calcularemos a K-teoria de $\mathcal{A}/\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ e para isto utilizaremos os isomorfismos $\varphi : \mathcal{A}/\mathcal{E} \longrightarrow C(M_A)$ e $\gamma : \mathcal{E}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \longrightarrow C(M_{SL}, \mathcal{K}_{\mathbb{Z}})$, estudados no Capítulo 1. De posse dessas K-teorias e utilizando a seguinte sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{E} \longrightarrow 0$$

calcularemos a K-teoria de $\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$. Por último utilizamos a sequência exata curta abaixo para o cálculo da K-teoria de $\mathcal{A}$

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \longrightarrow 0 .$$

3.1 A K-teoria de $\mathcal{A}/\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$

Começaremos o nosso trabalho por descrever geradores para $K_i(C(M_{\sharp}))$, $i = 0, 1$, já que pelo Teorema 1.17 $M_A = M_{\sharp} \times \{-\infty, +\infty\}$ e pelo Teorema de Gelfand temos $\varphi : \mathcal{A}/\mathcal{E} \longrightarrow C(M_A)$ isomorfismo. Pelo Lema 1.10 podemos considerar $M_{\sharp} = S^1_- \cup \mathbb{R} \cup S^1_+$, onde $S^1_+ = S^1 \times \{+\infty\}$ e $S^1_- = S^1 \times \{-\infty\}$.

Proposição 3.1 *Seja $\psi : C(M_{\sharp}) \longrightarrow C(S^1 \times \{-\infty, +\infty\})$ a restrição das $f \in C(M_{\sharp})$ a $S^1_+ \cup S^1_-$. Para $i = 0, 1$ $\psi_* : K_i(C(M_{\sharp})) \longrightarrow K_i(C(S^1 \times \{-\infty, +\infty\}))$ é injetora. A*

imagem de $\psi_* : K_0(C(M_\sharp)) \longrightarrow K_0(C(S^1 \times \{-\infty, +\infty\}))$ é isomorfa a $\mathbb{Z}$ e a imagem de $\psi_* : K_1(C(M_\sharp)) \longrightarrow K_1(C(S^1 \times \{-\infty, +\infty\}))$ é isomorfa a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Assim $K_0(C(M_\sharp)) \cong \mathbb{Z}$ e $K_1(C(M_\sharp)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Demonstração:

Consideremos a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow C_0(\mathbb{R}) \xrightarrow{\varphi} C(M_\sharp) \xrightarrow{\psi} C(S^1 \times \{-\infty, +\infty\}) \longrightarrow 0$$

onde φ é a inclusão e ψ é a restrição.

Sabemos que esta sequência exata curta induz a sequência exata cíclica de seis termos em K-teoria

$$\begin{array}{ccccc} K_0(C_0(\mathbb{R})) & \xrightarrow{\varphi_*} & K_0(C(M_\sharp)) & \xrightarrow{\psi_*} & K_0(C(S^1 \times \{-\infty, +\infty\})) \\ \uparrow \delta_1 & & & & \downarrow \delta_0 \\ K_1(C(S^1 \times \{-\infty, +\infty\})) & \xleftarrow{\psi_*} & K_1(C(M_\sharp)) & \xleftarrow{\varphi_*} & K_1(C_0(\mathbb{R})) \end{array}$$

Pelo exemplo 11.3.2 de [37] sabemos que $K_0(C_0(\mathbb{R})) = 0$ e $K_1(C_0(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}$. Assim como pelo exemplo 11.3.3 de [37] e o fato de $C(S^1 \times \{-\infty, +\infty\})$ ser isomorfo a $C(S^1) \oplus C(S^1)$ temos para $i = 0, 1$ que $K_i(C(S^1 \times \{-\infty, +\infty\})) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ onde a classe $[\cdot]_0$ das funções $k, \tilde{k} : S^1 \times \{-\infty, +\infty\} \rightarrow \mathbb{C}$ com $k(z, +\infty) = 1$; $k(z, -\infty) = 0$; $\tilde{k}(z, +\infty) = 0$; $\tilde{k}(z, -\infty) = 1$ geram $K_0(C(S^1 \times \{-\infty, +\infty\}))$. E a classe $[\cdot]_1$ das funções $l, \tilde{l} : S^1 \times \{-\infty, +\infty\} \rightarrow \mathbb{C}$ com $l(z, +\infty) = z$; $l(z, -\infty) = 1$; $\tilde{l}(z, +\infty) = 1$; $\tilde{l}(z, -\infty) = z$ geram $K_1(C(S^1 \times \{-\infty, +\infty\}))$.

Substituindo na sequência exata cíclica de seis termos as informações acima temos que $\delta_1 \equiv 0$. Só nos falta calcular δ_0 para obter a K-teoria de $C(M_\sharp)$.

Pela Proposição 12.2.2 de [37] sabemos que precisamos de funções g e $\tilde{g} \in C(M_\sharp)$ reais tais que $\psi(g) = k$ e $\psi(\tilde{g}) = \tilde{k}$.

Consideremos $b : M_\sharp \rightarrow \mathbb{R}$ com $b \equiv 0$ em S_-^1 ; $b \equiv 1$ em S_+^1 ; $b(x) = 0$ para $x \leq -1$ e $b(x) = 1$ para $x \geq 1$.

E também $c : M_\sharp \rightarrow \mathbb{R}$ com $c \equiv 1$ em S_-^1 ; $c \equiv 0$ em S_+^1 ; $c(x) = 1$ para $x \leq -1$ e $c(x) = 0$

para $x \geq 1$. As funções b e c são extensões contínuas das funções b e c definidas na página 47, mas utilizaremos a mesma notação.

Temos que $\psi(b) = k$ e $\psi(c) = \tilde{k}$, então pela Proposição 12.2.2 de [37] temos que existem (e são únicos) elementos u e $\tilde{u} \in \mathcal{U}(\widetilde{C_0(\mathbb{R})})$ tais que $\bar{\varphi}(u) = e^{2\pi ib}$ e $\bar{\varphi}(\tilde{u}) = e^{2\pi ic}$. Mas como $\widetilde{C_0(\mathbb{R})} \subset C(M_\#)$ temos que $\varphi = \bar{\varphi}$, logo $u = e^{2\pi ib}$ e $\tilde{u} = e^{2\pi ic}$.

Portanto $\delta_0([k]_0) = -[u]_1$ e $\delta_0([\tilde{k}]_0) = -[\tilde{u}]_1$ onde $[u]_1$ e $[\tilde{u}]_1$ pertencem a $K_1(C_0(\mathbb{R}))$. Sabemos que $K_1(C_0(\mathbb{R}))$ é isomorfo a $K_1(C(S^1))$ e temos que o número de rotação induz um isomorfismo de $K_1(C(S^1))$ para $\mathbb{Z}$.

Calculando o número de rotação de u e $\tilde{u}$ temos que $w(u) = 1$ e $w(\tilde{u}) = -1$. Logo com respeito aos isomorfismos $K_0(C(S^1 \times \{-\infty, +\infty\})) = \mathbb{Z}[k]_0 \oplus \mathbb{Z}[\tilde{k}]_0$ e $K_1(C(S^1 \times \{-\infty, +\infty\})) = \mathbb{Z}[l]_1 \oplus \mathbb{Z}[\tilde{l}]_1$ discutidos acima, podemos escrever $\delta_0(1, 0) = -1$ e $\delta_0(0, 1) = 1$, consequentemente δ_0 é sobrejetora e $\delta_0(x, y) = -x + y$.

Segue da exatidão da sequência exata cíclica de seis termos que $\text{Im } \psi_* = \text{Ker } \delta_0 \cong \mathbb{Z}$, $\text{Ker } \psi_* = \text{Im } \varphi_* = 0$, $\text{Im } \psi_* = \text{Ker } \delta_1 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $\text{Ker } \psi_* = \text{Im } \varphi_* = 0$. Portanto $K_0(C(M_\#)) \cong \mathbb{Z}$ e $K_1(C(M_\#)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. ■

Usando os isomorfismos da Proposição acima podemos verificar que

$$K_0(C(M_\#)) = \mathbb{Z}[1]_0.$$

Sejam $S^1 = \{e^{ix} : x \in \mathbb{R}\}$, L e $\tilde{L} \in C(M_\#)$ tais que:

$L(e^{ix}, +\infty) = e^{ix}$ em S^1_+ ; $L(e^{ix}, -\infty) = 1$ em S^1_- ; $L(x) = e^{ix}$, se $x \geq 0$ e $L(x) = 1$, se $x < 0$ e,

$\tilde{L}(e^{ix}, +\infty) = 1$ em S^1_+ ; $\tilde{L}(e^{ix}, -\infty) = e^{ix}$ em S^1_- ; $\tilde{L}(x) = 1$, se $x > 0$ e $\tilde{L}(x) = e^{ix}$, se $x \leq 0$.

Consideremos a restrição de L à reta. Então temos que $b(x)e^{ix} + c(x) - L(x) \in C_0(\mathbb{R})$, onde $b, c \in CS(\mathbb{R})$ são tais que b é crescente com $b(x) = 0$, se $x \leq -1$ e $b(x) = 1$, se $x \geq 1$ e c é decrescente com $c(x) = 0$, se $x \geq 1$ e $c(x) = 1$, se $x \leq -1$, $b + c \equiv 1$. Logo $L(M) = b(M)e^{iM} + c(M) - a_0(M)$, onde $a_0 \in C_0(\mathbb{R})$. O mesmo vale para $\tilde{L}$, logo $\tilde{L}(M) = b(M) + c(M)e^{iM} - b_0(M)$.

Com o que acabamos de provar, concluímos que $L, \tilde{L}$ estão em $\mathcal{A}^\sharp$ (veja definição na seção 1.2). Usando novamente o isomorfismo da Proposição acima concluímos que

$$K_1(C(M_\sharp)) = \mathbb{Z}[L]_1 \oplus \mathbb{Z}[\tilde{L}]_1.$$

Proposição 3.2 $K_0(C(M_A))$ é isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $K_1(C(M_A))$ é isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Demonstração:

Sabemos pelo Teorema 1.17 que $M_A = M_\sharp \times \{-\infty, +\infty\}$, então consideremos o isomorfismo

$$\begin{aligned} C(M_\sharp \times \{-\infty, +\infty\}) &\longrightarrow C(M_\sharp) \oplus C(M_\sharp) \\ f(z, \pm\infty) &\longmapsto (f(z, +\infty), f(z, -\infty)). \end{aligned}$$

Logo temos que $K_i(C(M_A)) \cong K_i(C(M_\sharp) \oplus C(M_\sharp))$, $i = 0, 1$.

Pelas Proposições 4.3.4 e 8.2.6 de [37] temos que $K_i(C(M_\sharp) \oplus C(M_\sharp)) \cong K_i(C(M_\sharp)) \oplus K_i(C(M_\sharp))$, logo $K_i(C(M_A)) \cong K_i(C(M_\sharp)) \oplus K_i(C(M_\sharp))$, $i = 0, 1$. Consideremos as funções:

$$\begin{aligned} f : M_\sharp \times \{-\infty, +\infty\} &\longrightarrow \mathbb{C} \text{ com } f(z, +\infty) = 1 \text{ e } f(z, -\infty) = 0, \\ \tilde{f} : M_\sharp \times \{-\infty, +\infty\} &\longrightarrow \mathbb{C} \text{ com } \tilde{f}(z, +\infty) = 0 \text{ e } \tilde{f}(z, -\infty) = 1, \\ w_i : M_\sharp \times \{-\infty, +\infty\} &\longrightarrow \mathbb{C}, i = 1, \dots, 4, \text{ com} \\ w_1(z, +\infty) &= L(z) \text{ e } w_1(z, -\infty) = 1, \\ w_2(z, +\infty) &= \tilde{L}(z) \text{ e } w_2(z, -\infty) = 1, \\ w_3(z, +\infty) &= 1 \text{ e } w_3(z, -\infty) = L(z), \\ w_4(z, +\infty) &= 1 \text{ e } w_4(z, -\infty) = \tilde{L}(z), z \in M_\sharp. \end{aligned}$$

Utilizando o isomorfismo acima temos que

$$K_0(C(M_A)) = \mathbb{Z}[f]_0 \oplus \mathbb{Z}[\tilde{f}]_0 \quad \text{e}$$

$$K_1(C(M_A)) = \mathbb{Z}[w_1]_1 \oplus \mathbb{Z}[w_2]_1 \oplus \mathbb{Z}[w_3]_1 \oplus \mathbb{Z}[w_4]_1.$$

■

Agora utilizando o σ -símbolo definido no Teorema 1.17 concluímos que

$$K_0(\mathcal{A}/\mathcal{E}) = \mathbb{Z}[[b(D)]_\mathcal{E}]_0 \oplus \mathbb{Z}[[c(D)]_\mathcal{E}]_0 \quad \text{e} \tag{3.1}$$

$$K_1(\mathcal{A}/\mathcal{E}) = \mathbb{Z}[[A_1]_{\mathcal{E}}]_1 \oplus \mathbb{Z}[[A_2]_{\mathcal{E}}]_1 \oplus \mathbb{Z}[[A_3]_{\mathcal{E}}]_1 \oplus \mathbb{Z}[[A_4]_{\mathcal{E}}]_1 \quad (3.2)$$

onde $A_1 = L(M)b(D) + c(D)$, $A_2 = \tilde{L}(M)b(D) + c(D)$, $A_3 = b(D) + L(M)c(D)$ e $A_4 = b(D) + \tilde{L}(M)c(D)$ com b, c as mesmas funções definidas na página 54.

Proposição 3.3 *O isomorfismo da Proposição 1.24, $\gamma : \mathcal{E}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \longrightarrow C(M_{SL}, \mathcal{K}_{\mathbb{Z}})$, induz o isomorfismo $K_i(\mathcal{E}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $i = 0, 1$.*

Demonstração:

Usando o isomorfismo $\gamma : \mathcal{E}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \longrightarrow C(M_{SL}, \mathcal{K}_{\mathbb{Z}})$ temos que $K_i(\mathcal{E}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}})$ é isomorfo a $K_i(C(M_{SL}, \mathcal{K}_{\mathbb{Z}}))$, $i = 0, 1$ onde $M_{SL} = S^1 \times \{-1, 1\}$.

Então vamos calcular a K-teoria de $C(M_{SL}, \mathcal{K}_{\mathbb{Z}})$ para conhecermos a K-teoria de $\mathcal{E}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$. Começaremos por calcular a K-teoria de $C(S^1, \mathcal{K}_{\mathbb{Z}})$, por isso consideremos a seguinte sequência exata curta cindida

$$0 \longrightarrow S\mathcal{K}_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\mu} C(S^1, \mathcal{K}_{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\nu} \mathcal{K}_{\mathbb{Z}} \longrightarrow 0$$

onde $\nu(f(z)) = f(1)$ e $S\mathcal{K}_{\mathbb{Z}}$ denota a suspensão de $\mathcal{K}_{\mathbb{Z}}$, isto é $S\mathcal{K}_{\mathbb{Z}} = \{f : S^1 \rightarrow \mathcal{K}_{\mathbb{Z}} : f(1) = 0\}$.

E sua sequência exata cíclica de seis termos

$$\begin{array}{ccccc} K_0(S\mathcal{K}_{\mathbb{Z}}) & \xrightarrow{\mu_*} & K_0(C(S^1, \mathcal{K}_{\mathbb{Z}})) & \xrightarrow{\nu_*} & K_0(\mathcal{K}_{\mathbb{Z}}) \\ \uparrow \delta_1 & & & & \downarrow \delta_0 \\ K_1(\mathcal{K}_{\mathbb{Z}}) & \xleftarrow{\nu_*} & K_1(C(S^1, \mathcal{K}_{\mathbb{Z}})) & \xleftarrow{\mu_*} & K_1(S\mathcal{K}_{\mathbb{Z}}) \end{array}$$

Como a sequência é cindida temos que $\delta_0 = \delta_1 = 0$. Segue da exatidão da sequência exata cíclica de seis termos que $\nu_* : K_0(C(S^1, \mathcal{K}_{\mathbb{Z}})) \rightarrow K_0(\mathcal{K}_{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}[E]_0$, onde E é qualquer projeção de posto 1 em $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{Z}))$ é isomorfismo e que $\mu_* : K_1(S\mathcal{K}_{\mathbb{Z}}) \rightarrow K_1(C(S^1, \mathcal{K}_{\mathbb{Z}}))$ é isomorfismo.

Usando o isomorfismo da periodicidade de Bott temos que $K_1(S\mathcal{K}_{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}[1 + (z-1)E]_1$ logo $K_1(C(S^1, \mathcal{K}_{\mathbb{Z}})) = \mathbb{Z}[1 + (z-1)E]_1$, z denotando a função identidade em S^1 .

Considerando o isomorfismo

$$\begin{aligned} C(S^1 \times \{-1, 1\}, \mathcal{K}_{\mathbb{Z}}) &\longrightarrow C(S^1, \mathcal{K}_{\mathbb{Z}}) \oplus C(S^1, \mathcal{K}_{\mathbb{Z}}) \\ f(z, \pm 1) &\longmapsto (f(z, 1), f(z, -1)), \end{aligned}$$

temos que $K_0(C(M_{SL}, \mathcal{K}_{\mathbb{Z}})) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e

$$K_1(C(M_{SL}, \mathcal{K}_{\mathbb{Z}})) = \mathbb{Z}[u_1]_1 \oplus \mathbb{Z}[u_2]_1,$$

onde

$$u_1(z, 1) = 1 + (z - 1)E \quad \text{e} \quad u_2(z, -1) = 1$$

e

$$u_2(z, 1) = 1 \quad \text{e} \quad u_1(z, -1) = 1 + (z - 1)E.$$

Pelo isomorfismo γ temos que $K_0(\mathcal{E}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $K_1(\mathcal{E}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. ■

3.2 A K-teoria de $\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ e $\mathcal{A}$

Vamos calcular agora a K-teoria de $\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ e então estaremos prontos para calcular a K-teoria de $\mathcal{A}$. Enunciaremos e demonstraremos antes um Lema que será utilizado no cálculo da aplicação do índice da sequência exata cíclica de seis termos de $\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$. Nesta seção e nas que seguem estaremos utilizando as definições de K_0 e K_1 de [4], isto é K_0 é um grupo de diferenças formais de classes de idempotentes (matrizes) de tamanho arbitrário e K_1 é o grupo de classes de homotopias de matrizes inversíveis de tamanho arbitrário. A demonstração de que as definições apresentadas em [4] e [37] (que usa diferenças formais de classes de projeções ortogonais (matrizes) para K_0 e de unitários para K_1) são equivalentes encontra-se em [4].

Lema 3.4 *Sejam A uma C^* -álgebra e J um ideal de A . Consideremos a sequência exata curta :*

$$0 \longrightarrow J \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/J \longrightarrow 0$$

onde i é a inclusão e π é a projeção canônica.

Se $u \in M_n(A/J)$ é inversível, $\pi(a) = u$ e $\pi(b) = u^{-1}$ então:

$$\delta_1([u]_1) = \left[\begin{pmatrix} 2ab - (ab)^2 & a(2 - ba)(1 - ba) \\ (1 - ba)b & (1 - ba)^2 \end{pmatrix} \right]_0 - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_0.$$

Demonstração:

Seja $w \in M_{2n}(A)$ definido por

$$w = \begin{pmatrix} 2a - aba & ab - 1 \\ 1 - ba & b \end{pmatrix}$$

É fácil verificar que w é inversível e

$$w^{-1} = \begin{pmatrix} b & 1 - ba \\ ab - 1 & 2a - aba \end{pmatrix}.$$

Temos também que

$$\pi \begin{pmatrix} 2a - aba & ab - 1 \\ 1 - ba & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}.$$

Pela definição 8.3.1 de [4] segue que

$$\begin{aligned} \delta_1([u]_1) &= \left[\begin{pmatrix} 2a - aba & ab - 1 \\ 1 - ba & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 1 - ba \\ ab - 1 & 2a - aba \end{pmatrix} \right]_0 - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_0 \\ &= \left[\begin{pmatrix} 2ab - (ab)^2 & a(2 - ba)(1 - ba) \\ (1 - ba)b & (1 - ba)^2 \end{pmatrix} \right]_0 - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_0. \end{aligned}$$

■

Teorema 3.5 *Seja $\psi : \mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{E}$ onde $[a]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}} \mapsto [a]_{\mathcal{E}}$, $a \in \mathcal{A}$. Temos que $\psi_* : K_0(\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) \rightarrow K_0(\mathcal{A}/\mathcal{E})$ é injetora e a imagem de ψ_* é isomorfa a $\mathbb{Z}$. Assim, $K_0(\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) \cong \mathbb{Z}$ e temos também que $K_1(\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.*

Demonstração:

Consideremos a sequência exata curta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\psi} \mathcal{A}/\mathcal{E} \longrightarrow 0$$

onde φ é a inclusão e $\psi : [a]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}} \mapsto [a]_{\mathcal{E}}$, $a \in \mathcal{A}$.

E também sua sequência exata cíclica de seis termos para K-teoria

$$\begin{array}{ccccc} K_0(\mathcal{E}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) & \xrightarrow{\varphi_*} & K_0(\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) & \xrightarrow{\psi_*} & K_0(\mathcal{A}/\mathcal{E}) \\ \uparrow \delta_1 & & & & \downarrow \delta_0 \\ K_1(\mathcal{A}/\mathcal{E}) & \xleftarrow{\psi_*} & K_1(\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) & \xleftarrow{\varphi_*} & K_1(\mathcal{E}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) \end{array}$$

Substituindo as K-teorias que conhecemos temos

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\varphi_*} & K_0(\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) & \xrightarrow{\psi_*} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ \uparrow \delta_1 & & & & \downarrow \delta_0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xleftarrow{\psi_*} & K_1(\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) & \xleftarrow{\varphi_*} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \end{array}$$

Precisamos calcular δ_0 e δ_1 para conhecermos então a K-teoria de $\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$.

Vamos primeiro calcular $\delta_0([b(D)]_{\mathcal{E}})_0$, onde $[b(D)]_{\mathcal{E}})_0$ foi descrito na página 55 equação (3.1). Pela Proposição 12.2.2 de [37] sabemos que precisamos de um elemento $x \in \mathcal{A}$ tal que $[x]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}$ seja auto-adjunto e $\psi([x]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}) = [b(D)]_{\mathcal{E}}$.

Como $b(D)$ já é auto-adjunto em $\mathcal{A}$ basta então tomarmos $x = b(D)$. Pela Proposição 12.2.2 de [37] temos que existe um único elemento $u \in \mathcal{U}(\widetilde{\mathcal{E}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}})$ tal que $\bar{\varphi}(u) = e^{2\pi i[b(D)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}}$. Como $\widetilde{\mathcal{E}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}} \subset \mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ temos $\varphi = \bar{\varphi}$, logo pela definição de φ temos que $u = e^{2\pi i[b(D)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}}$. Portanto o gerador $[b(D)]_{\mathcal{E}})_0$ de $K_0(\mathcal{A}/\mathcal{E})$ é levado em $-[e^{2\pi i[b(D)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}}]_1 \in K_1(\mathcal{E}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}})$ pela aplicação δ_0 . Utilizando o isomorfismo γ da Proposição 1.24 e homotopias verificamos em seguida que $[e^{2\pi i[b(D)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}}]_1$ corresponde ao elemento $(-1, -1)$ de $K_1(C(M_{SL}, \mathcal{K}_{\mathbb{Z}}))$.

Usando o isomorfismo da Proposição 1.24 temos que $[e^{2\pi i[b(D)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}}]_1$ é levado em $[h]_1$ onde h é a função:

$$\begin{aligned} h : M_{SL} &\longrightarrow \mathcal{K}_{\mathbb{Z}} \\ (e^{2\pi i\varphi}, \pm 1) &\longmapsto Y_{\varphi}(e^{2\pi i b(M-\varphi)})Y_{-\varphi}. \end{aligned}$$

Com respeito ao isomorfismo da Proposição 3.3, sabemos que o elemento que corresponde a $(1, 1) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ em $K_1(C(M_{SL}, \mathcal{K}_{\mathbb{Z}}))$ é dado pela classe em K_1 de

$$\begin{aligned} l : M_{SL} &\longrightarrow \mathcal{K}_{\mathbb{Z}} \\ (z, \pm 1) &\longmapsto 1 + (z - 1)E, \end{aligned}$$

onde $E((a_n)_n) = a_0 e_0$. Seja $a \in CS(\mathbb{R})$ então,

$$Y_{\varphi+1}a(M - (\varphi + 1))Y_{-(\varphi+1)} = Y_{\varphi}Y_1a(M - (\varphi + 1))Y_{-1}Y_{-\varphi} = Y_{\varphi}a(M - \varphi)Y_{-\varphi}$$

logo $Y_{\varphi}(e^{2\pi ib(M-\varphi)})Y_{-\varphi}$ é periódica de período 1. Consideremos então $Y_{\varphi}(e^{2\pi ib(M-\varphi)})Y_{-\varphi}$ para $\varphi \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Sem perda de generalidade podemos supor que a função b é constante em $(-\infty, -1/5]$ e em $[1/5, +\infty)$. Se $1/5 \leq |\varphi| \leq 1/2$ então $|j - \varphi| \geq \frac{1}{5}$ para todo j . Se $|\varphi| < 1/5$ então $|j - \varphi| \geq \frac{1}{5}$ para todo j não nulo.

Logo para todo $\varphi \in [-1/2, 1/2]$ temos que

$$e^{2\pi ib(j-\varphi)} = \begin{cases} e^{2\pi ib(-\varphi)} & \text{se } j = 0, \\ 1 & \text{se } j \neq 0. \end{cases}$$

Portanto $e^{2\pi ib(M-\varphi)} = Id + (e^{2\pi ib(-\varphi)} - Id)E$ para todo $|\varphi| \leq 1/2$. Seja $g(\varphi) = e^{2\pi ib(-\varphi)} - Id$ temos que $g \in C_c^\infty([-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}])$ e $e^{2\pi ib(M-\varphi)} = g(\varphi)E + Id$ logo $Y_{\varphi}(e^{2\pi ib(M-\varphi)})Y_{-\varphi} = Y_{\varphi}(g(\varphi)E + Id)Y_{-\varphi}$, para todo $|\varphi| \leq 1/2$.

Seja $Z_t = Y_{h(t)}$ onde $h : [-1/2, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}$ com $h \equiv 0$ em $[-1/4, 1/4]$. Logo $Z_t = Id$ se $t \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.

Seja $v : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}(C([-1/2, 1/2]), \mathcal{K}_{\mathbb{Z}}))$ onde $x \mapsto v_x$ definida por $v_x(t) = Y_{(1-x)t+xh(t)}(g(t)E + 1)Y_{-(1-x)t+xh(t)}$. Se $|t| \geq 1/5$ temos $g(t)E + Id = Id$. Logo para todo x , v_x pode ser encarado como um elemento de $\mathcal{U}(C(S^1, \mathcal{K}_{\mathbb{Z}}))$ e $v_0(t) = Y_t(g(t)E + 1)Y_{-t}$ e $v_1(t) = Y_{h(t)}(g(t)E + 1)Y_{-h(t)} = Z_t(g(t)E + 1)Z_{-t}$. Portanto $Y_t(g(t)E + 1)Y_{-t}$ e $Z_t(g(t)E + 1)Z_{-t}$ são elementos homotópicos de $C(S^1, \mathcal{K}_{\mathbb{Z}})$.

Como $Z_t = Id$ se $t \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ e g tem suporte contido em $[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}]$ temos que $Z_t(g(t)E + 1)Z_{-t} = g(t)E + 1$ para todo $t \in [-1/2, 1/2]$. Então pela Proposição 8.1.4 de [37] e pelos resultados acima temos

$$[Y_t(g(t)E + 1)Y_{-t}]_1 = [Z_t(g(t)E + 1)Z_{-t}]_1 = [g(t)E + 1]_1,$$

onde $F(t)$ denota a função $(e^{2\pi it}, \pm 1) \ni M_{SL} \mapsto F(t) \in \mathcal{K}_{\mathbb{Z}}$.

Usando o que foi visto na página 47 sobre número de rotação temos que as funções $\bar{z} = (z \mapsto \bar{z})$ e $(e^{2\pi i\varphi} \mapsto e^{2\pi ib(-\varphi)}) = \tilde{g}(\varphi)$ são homotópicas em $\mathcal{U}(C(S^1))$. Seja então $l : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}(C(S^1))$ tal que $l(0) = \bar{z}$ e $l(1) = \tilde{g}(\varphi)$ e seja $v : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}(C(S^1, \mathcal{K}_{\mathbb{Z}}))$ dada por $x \mapsto (l(x) - 1)E + 1$. Temos que $v(0) = (\tilde{g}(\varphi) - 1)E + 1 = g(\varphi)E + 1$ e $v(1) = (\bar{z} - 1)E + 1$. E sabemos que $(\bar{z} - 1)E + 1$ é o -1 em $K_1(C(S^1, \mathcal{K}_{\mathbb{Z}}))$. (veja demonstração da Proposição 3.3)

Portanto pela Proposição 8.1.4 de [37] temos $[g(\varphi)E + 1]_1 = [(\bar{z} - 1)E + 1]_1$, logo $\delta_0((1, 0)) = (1, 1)$.

Com uma demonstração análoga podemos mostrar que $\delta_0((0, 1)) = (-1, -1)$. Então temos que $\delta_0((x, y)) = (x - y)(1, 1)$. Com isto segue que $\text{Ker } \delta_0 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} : x = y\} \cong \mathbb{Z}$ e $\text{Im } \delta_0 = \{(a, a) : a \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$.

Com isso encerramos o cálculo de δ_0 e passaremos agora a calcular a aplicação δ_1 .

Já sabemos pela Proposição 3.2 que os quatro geradores de $K_1(\mathcal{A}/\mathcal{E})$ são $[[A_1]_{\mathcal{E}}]_1$, $[[A_2]_{\mathcal{E}}]_1$, $[[A_3]_{\mathcal{E}}]_1$, $[[A_4]_{\mathcal{E}}]_1$, onde $A_1 = L(M)b(D) + c(D)$, $A_2 = \tilde{L}(M)b(D) + c(D)$, $A_3 = b(D) + L(M)c(D)$, $A_4 = b(D) + \tilde{L}(M)c(D)$.

É obvio que $a = [A_1]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}$ é uma pré-imagem de $u = [A_1]_{\mathcal{E}}$. Como $[A_1]_{\mathcal{E}} = u$ é unitário temos que $b = a^*$ é uma pré-imagem de u^{-1} . Pelo Lema 3.4 temos que

$$\delta_1([A_1]_{\mathcal{E}})_1 = \left[\begin{pmatrix} 2aa^* - (aa^*)^2 & a(2 - a^*a)(1 - a^*a) \\ (1 - a^*a)a^* & (1 - a^*a)^2 \end{pmatrix} \right]_0 - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_0$$

onde $\delta_1([A_1]_{\mathcal{E}})_1 \in K_0(\mathcal{E}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) \xrightarrow{\gamma_*} K_0(C(M_{SL}, \mathcal{K}_{\mathbb{Z}})) \xrightarrow{\nu_*} K_0(\mathcal{K}_{\mathbb{Z}}) \oplus K_0(\mathcal{K}_{\mathbb{Z}})$ (veja Proposição 3.3). Seja $\eta = \nu_* \circ \gamma_*$ então considerando $\alpha = \gamma_{A_1}(1, 1)$, $\alpha' = \gamma_{A_1}(1, -1)$, $\beta = \gamma_{A_1^*}(1, 1)$ e $\beta' = \gamma_{A_1^*}(1, -1)$ temos

$$\eta \circ \delta_1([A_1]_{\mathcal{E}})_1 = \left(\left[\begin{pmatrix} 2\alpha\beta - (\alpha\beta)^2 & \alpha(2 - \beta\alpha)(1 - \beta\alpha) \\ (1 - \beta\alpha)\beta & (1 - \beta\alpha)^2 \end{pmatrix} \right]_0 - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_0 \right),$$

$$\left[\begin{pmatrix} 2\alpha'\beta' - (\alpha'\beta')^2 & \alpha'(2 - \beta'\alpha')(1 - \beta'\alpha') \\ (1 - \beta'\alpha')\beta' & (1 - \beta'\alpha')^2 \end{pmatrix} \right]_0 - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_0$$

Vamos observar que $\gamma_{A_1}(1, \pm 1) \notin \mathcal{K}_{\mathbb{Z}}$, já que $A_1 \in \mathcal{A}$ e $A_1 \notin \mathcal{E}$. Observemos também que $A_1^*A_1 - Id \in \mathcal{E}$ então $\gamma_{A_1^*A_1}(1, \pm 1) - \gamma_{Id}(1, \pm 1) \in \mathcal{K}_{\mathbb{Z}}$. Portanto $[\gamma_{A_1}(1, 1)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{Z}}}$ e

$[\gamma_{A_1}(1, -1)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{Z}}}$ são inversíveis em $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{Z}))/\mathcal{K}_{\mathbb{Z}}$.

Temos então pelo Lema 3.4 que

$$\bar{\delta}_1([\gamma_{A_1}(1, 1)]_1) = \left[\begin{pmatrix} 2\alpha\beta - (\alpha\beta)^2 & \alpha(2 - \beta\alpha)(1 - \beta\alpha) \\ (1 - \beta\alpha)\beta & (1 - \beta\alpha)^2 \end{pmatrix} \right]_0 - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_0$$

e

$$\bar{\delta}_1([\gamma_{A_1}(1, -1)]_1) = \left[\begin{pmatrix} 2\alpha'\beta' - (\alpha'\beta')^2 & \alpha'(2 - \beta'\alpha')(1 - \beta'\alpha') \\ (1 - \beta'\alpha')\beta' & (1 - \beta'\alpha')^2 \end{pmatrix} \right]_0 - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_0$$

onde $\bar{\delta}_1$ é o índice da sequência de K-teoria associada a sequência exata curta abaixo

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{i} \mathcal{L}(L^2(\mathbb{Z})) \xrightarrow{\pi} \mathcal{L}(L^2(\mathbb{Z}))/\mathcal{K}_{\mathbb{Z}} \longrightarrow 0.$$

Mas o índice para esta sequência é o índice de Fredholm por 9.4.2 de [37]. Por 19.1.14 de [18] temos que

$$\text{ind} \gamma_{A_1}(1, \pm 1) = \text{Tr}((Id - \gamma_{A_1^*}(1, \pm 1)\gamma_{A_1}(1, \pm 1))^N) - \text{Tr}((Id - \gamma_{A_1}(1, \pm 1)\gamma_{A_1^*}(1, \pm 1))^N)$$

para algum $N > 0$ natural para o qual se tenha

$$(Id - \gamma_{A_1^*}(1, \pm 1)\gamma_{A_1}(1, \pm 1))^N \text{ e } (Id - \gamma_{A_1}(1, \pm 1)\gamma_{A_1^*}(1, \pm 1))^N \text{ trace-class.}$$

O mesmo raciocínio vale para A_2, A_3, A_4 .

Utilizando a Proposição 1.25 temos que

$$\begin{aligned} \gamma_{A_1}(1, -1) &= Id \text{ e } \gamma_{A_1^*}(1, -1) = Id, \\ \gamma_{A_1}(1, 1) &= b(M-1)Y_{-1} + Y_1c(M-1)Y_{-1} \text{ e } \gamma_{A_1^*}(1, 1) = Y_1b(M-1) + Y_1c(M-1)Y_{-1}, \\ \gamma_{A_2}(1, -1) &= b(M-1)Y_{-1} + Y_1c(M-1)Y_{-1} \text{ e } \gamma_{A_2^*}(1, -1) = Y_1b(M-1) + Y_1c(M-1)Y_{-1}, \\ \gamma_{A_2}(1, 1) &= Id \text{ e } \gamma_{A_2^*}(1, 1) = Id, \\ \gamma_{A_3}(1, -1) &= Id \text{ e } \gamma_{A_3^*}(1, -1) = Id, \\ \gamma_{A_3}(1, 1) &= Y_1b(M-1)Y_{-1} + c(M-1)Y_{-1} \text{ e } \gamma_{A_3^*}(1, 1) = Y_1b(M-1)Y_{-1} + Y_1c(M-1), \\ \gamma_{A_4}(1, -1) &= Y_1b(M-1)Y_{-1} + c(M-1)Y_{-1} \text{ e } \gamma_{A_4^*}(1, -1) = Y_1b(M-1)Y_{-1} + Y_1c(M-1), \\ \gamma_{A_4}(1, 1) &= Id \text{ e } \gamma_{A_4^*}(1, 1) = Id. \end{aligned}$$

Construindo as matrizes desses operadores podemos verificar que para $N = 1$ temos que $(Id - \gamma_{A_i^*}(1, \pm 1)\gamma_{A_i}(1, \pm 1))$ e $(Id - \gamma_{A_i}(1, \pm 1)\gamma_{A_i^*}(1, \pm 1))$, para $i = 1, \dots, 4$, são de posto finito.

Apresentamos a seguir as matrizes dos operadores $(Id - \gamma_{A_1^*}(1, 1)\gamma_{A_1}(1, 1))$ e $(Id - \gamma_{A_1}(1, 1)\gamma_{A_1^*}(1, 1))$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & -1/2 & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & -1/2 & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & -1/4 & -1/4 & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & -1/4 & -1/4 & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Obtemos então:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_1(\gamma_{A_1}(1, 1)) &= Tr(Id - \gamma_{A_1^*}(1, 1)\gamma_{A_1}(1, 1)) - Tr(Id - \gamma_{A_1}(1, 1)\gamma_{A_1^*}(1, 1)) = 1, \\ \bar{\delta}_1(\gamma_{A_1}(1, -1)) &= Tr(Id - \gamma_{A_1^*}(1, -1)\gamma_{A_1}(1, -1)) - Tr(Id - \gamma_{A_1}(1, -1)\gamma_{A_1^*}(1, -1)) = 0, \\ \bar{\delta}_1(\gamma_{A_2}(1, 1)) &= Tr(Id - \gamma_{A_2^*}(1, 1)\gamma_{A_2}(1, 1)) - Tr(Id - \gamma_{A_2}(1, 1)\gamma_{A_2^*}(1, 1)) = 0, \\ \bar{\delta}_1(\gamma_{A_2}(1, -1)) &= Tr(Id - \gamma_{A_2^*}(1, -1)\gamma_{A_2}(1, -1)) - Tr(Id - \gamma_{A_2}(1, -1)\gamma_{A_2^*}(1, -1)) = 1, \\ \bar{\delta}_1(\gamma_{A_3}(1, 1)) &= Tr(Id - \gamma_{A_3^*}(1, 1)\gamma_{A_3}(1, 1)) - Tr(Id - \gamma_{A_3}(1, 1)\gamma_{A_3^*}(1, 1)) = -1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\delta}_1(\gamma_{A_3}(1, -1)) &= Tr(Id - \gamma_{A_3^*}(1, -1)\gamma_{A_3}(1, -1)) - Tr(Id - \gamma_{A_3}(1, -1)\gamma_{A_3^*}(1, -1)) = 0, \\ \bar{\delta}_1(\gamma_{A_4}(1, 1)) &= Tr(Id - \gamma_{A_4^*}(1, 1)\gamma_{A_4}(1, 1)) - Tr(Id - \gamma_{A_4}(1, 1)\gamma_{A_4^*}(1, 1)) = 0, \\ \bar{\delta}_1(\gamma_{A_4}(1, -1)) &= Tr(Id - \gamma_{A_4^*}(1, -1)\gamma_{A_4}(1, -1)) - Tr(Id - \gamma_{A_4}(1, -1)\gamma_{A_4^*}(1, -1)) = -1.\end{aligned}$$

Portanto podemos concluir que

$$\begin{aligned}\eta \circ \delta_1([A_1]_{\mathcal{E}})_1 &= (1, 0), \\ \eta \circ \delta_1([A_2]_{\mathcal{E}})_1 &= (0, 1), \\ \eta \circ \delta_1([A_3]_{\mathcal{E}})_1 &= (-1, 0), \\ \eta \circ \delta_1([A_4]_{\mathcal{E}})_1 &= (0, -1).\end{aligned}$$

Segue da exatidão da sequência exata cíclica de seis termos da página 59 que $\text{Im } \delta_1 = \text{Ker } \varphi_* \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$; $\text{Im } \varphi_* = \text{Ker } \psi_* = 0$ e $\text{Im } \psi_* = \text{Ker } \delta_0 = \mathbb{Z}(1, 1)$ onde $(1, 1) \in K_0(\mathcal{A}/\mathcal{E}) = \mathbb{Z}[[b(D)]_{\mathcal{E}}]_0 \oplus \mathbb{Z}[[c(D)]_{\mathcal{E}}]_0$ (veja página 55, (3.1)). Portanto

$$K_0(\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) = \mathbb{Z}[[Id]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}]_0.$$

Pelos cálculos acima temos que $\text{Ker } \delta_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} : y = w \text{ e } x = z\}$ logo $(1, 0, 1, 0)$ e $(0, 1, 0, 1) \in K_1(\mathcal{A}/\mathcal{E}) = \mathbb{Z}[[A_1]_{\mathcal{E}}]_1 \oplus \mathbb{Z}[[A_2]_{\mathcal{E}}]_1 \oplus \mathbb{Z}[[A_3]_{\mathcal{E}}]_1 \oplus \mathbb{Z}[[A_4]_{\mathcal{E}}]_1$ (veja página 56, (3.2)) geram $\text{Ker } \delta_1$.

Novamente pela exatidão da sequência exata cíclica de seis termos temos que $\text{Im } \psi_* = \text{Ker } \delta_1 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Pelo Teorema do homomorfismo e exatidão da sequência exata cíclica temos que $\text{Ker } \psi_* = \text{Im } \varphi_* \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}(1, 1) \cong \mathbb{Z}(1, 0)$ onde $(1, 0) \in K_1(\mathcal{E}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}})$.

Podemos então construir a seguinte sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} K_1(\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) \xrightarrow{\psi_*} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

onde i é a inclusão.

Pela Proposição 1.25 e demonstração do Teorema 3.5 temos que $[b(M)e^{2\pi ic(D)} + c(M)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}$, b e c como na página 54, corresponde ao $(1, 0)$ de $K_1(\mathcal{E}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}})$. Então usando a sequência exata acima temos que

$$K_1(\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) = \mathbb{Z}[[L(M)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}]_1 \oplus \mathbb{Z}[[\tilde{L}(M)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}]_1 \oplus \mathbb{Z}[[b(M)e^{2\pi ic(D)} + c(M)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}]_1.$$

■

Agora já estamos prontos para calcular a K-teoria da C^* -álgebra $\mathcal{A}$.

Teorema 3.6 *Seja $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ a projeção canônica. Então $\pi_* : K_i(\mathcal{A}) \longrightarrow \text{Im } \pi_*$ é um isomorfismo. Logo $K_0(\mathcal{A}) \cong \mathbb{Z}$ e $K_1(\mathcal{A}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.*

Demonstração:

Consideremos a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_{\mathbb{R}} \xrightarrow{i} \mathcal{A} \xrightarrow{\pi} \mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \longrightarrow 0$$

e sua sequência exata cíclica de seis termos para K-teoria

$$\begin{array}{ccccccc} K_0(\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) & \xrightarrow{i_*} & K_0(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\pi_*} & K_0(\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) & & \\ \uparrow \delta_1 & & & & \downarrow \delta_0 & & \\ K_1(\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) & \xleftarrow{\pi_*} & K_1(\mathcal{A}) & \xleftarrow{i_*} & K_1(\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) & & \end{array}$$

Substituindo as K-teorias conhecidas temos

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{i_*} & K_0(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\pi_*} & \mathbb{Z} & & \\ \uparrow \delta_1 & & & & \downarrow \delta_0 & & \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xleftarrow{\pi_*} & K_1(\mathcal{A}) & \xleftarrow{i_*} & 0 & & \end{array}$$

Sabemos pela Proposição 9.4.4 de [37] que o índice para esta sequência é o índice de Fredholm. Vamos calcular δ_1 nos geradores de $K_1(\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}})$.

Temos que $b(M)e^{2\pi ic(D)} + c(M) \in \mathcal{C}$, logo $[b(M)e^{2\pi ic(D)} + c(M)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}} \in \mathcal{C}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ e como foi visto no Capítulo 2, Teorema 2.13, $\delta_1([T]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}})_1 = \text{ind}(T) = w(\sigma_T)$ nesta álgebra.

Logo $\delta_1([b(M)e^{2\pi ic(D)} + c(M)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}})_1 = w(\sigma_{b(M)e^{2\pi ic(D)} + c(M)}) = -1$. Sabemos também que $\text{ind}(L(M)) = \text{ind}(\tilde{L}(M)) = 0$, pois são operadores de multiplicação. Portanto δ_1 é sobrejetora e $\delta_1(x, y, z) = -z$.

Pela exatidão da sequência exata cíclica de seis termos temos que $\text{Im } i_* = \text{Ker } \pi_* = 0$; $\text{Im } \pi_* = \text{Ker } \delta_0 = \mathbb{Z}$; $\text{Im } i_* = \text{Ker } \pi_* = 0$ e $\text{Im } \pi_* = \text{Ker } \delta_1 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, logo

$$K_0(\mathcal{A}) = \mathbb{Z}[Id]_0 \quad \text{e} \quad K_1(\mathcal{A}) = \mathbb{Z}[L(M)]_1 \oplus \mathbb{Z}[\tilde{L}(M)]_1. \quad \blacksquare$$

Capítulo 4

K-teoria de $\mathcal{A}$ por produto cruzado

Neste capítulo calcularemos, novamente, a K-teoria de $\mathcal{A}$ utilizando a seguinte estratégia. Primeiro provaremos que a $\text{Im } \gamma$, onde γ é a aplicação da Proposição 1.25 tem estrutura de produto cruzado e então usando a sequência exata de Pimsner-Voiculescu [34] calcularemos sua K-teoria. Utilizando então a sequência exata curta induzida por γ

$$0 \longrightarrow J_0/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \text{Im } \gamma \longrightarrow 0$$

calculamos a K-teoria de $\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$. De posse desta K-teoria e usando a sequência exata curta abaixo calculamos a K-teoria de $\mathcal{A}$.

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \longrightarrow 0 \quad .$$

O que diferencia a estratégia deste capítulo para o anterior é que no Capítulo 3 utilizamos uma sequência exata curta induzida pelo σ -símbolo para calcular a K-teoria de $\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$.

Um estudo geral sobre produto cruzado de C^* -álgebras pode ser encontrado no Capítulo 7 de [33]. Aqui, trabalharemos apenas em casos onde a C^* -álgebra A tem unidade e o grupo é $\mathbb{Z}$ com a topologia discreta.

Dados uma C^* -álgebra A com unidade, o grupo $\mathbb{Z}$ com a topologia discreta, e uma ação α de $\mathbb{Z}$ em A , define-se uma nova C^* -álgebra $A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ como sendo a C^* -álgebra envolvente de $l_1(\mathbb{Z}, A)$ (seção (2.7) de [14]), esta vista como uma álgebra de Banach com a involução, o produto e a norma definidos respectivamente por:

$$y^*(n) = \alpha^n(y_{-n}^*), \quad \alpha \in \text{Aut}(A),$$

$$y \times z(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k \alpha^k(z_{n-k}) \quad \text{e}$$

$$\|y\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |y_n|$$

para todo $y = (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ e $z = (z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ em $l_1(\mathbb{Z}, A)$ e $n \in \mathbb{Z}$. Temos que $k(\mathbb{Z}, A)$, funções de $l_1(\mathbb{Z}, A)$ que tem suporte finito, é um subconjunto fortemente denso de $l_1(\mathbb{Z}, A)$.

Sejam $a \in A$ e $n \in \mathbb{Z}$. Denote por $a\delta_n$ o elemento de $l_1(\mathbb{Z}, A)$ dado por

$$a\delta_n(k) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq n, \\ a & \text{se } k = n. \end{cases}$$

Note que $(a\delta_n)^* = \alpha^{-n}(a^*)\delta_{-n}$ e que $(a\delta_n) \times (b\delta_m) = a\alpha^n(b)\delta_{n+m}$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$ e todo $a, b \in A$. E não é difícil mostrar que o conjunto $\{x\delta_0, 1\delta_1 : x \in A\}$ gera $l_1(\mathbb{Z}, A)$ como álgebra de Banach.

4.1 A estrutura de produto cruzado de $\mathcal{A}^\diamond$

Seja $A = CS(\mathbb{R})$, e consideremos a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow C(\mathbb{C}) \xrightarrow{i} C([0, 1]) \xrightarrow{\psi} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

onde $C(\mathbb{C})$ é o cone da álgebra $\mathbb{C}$, isto é $C(\mathbb{C}) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} : f(0) = 0\}$; $\psi(f) = f(0)$ e i é a inclusão. Aplicando a sequência exata cíclica de seis termos para K-teoria na sequência acima e usando que $K_0(C(\mathbb{C})) = K_1(C(\mathbb{C})) = 0$, veja exemplos 4.1.5 e 8.3 de [37], obtemos $K_0(C([0, 1])) = \mathbb{Z}[1]_0$ e $K_1(C([0, 1])) = 0$. Como A é isomorfo a $C([0, 1])$ temos que $K_1(A) = 0$ e $K_0(A) = \mathbb{Z}[1]_0$.

Consideremos $\alpha : \mathbb{Z} \longrightarrow \text{Aut}(A)$ onde $n \longmapsto [\alpha(n)a](x) = a(x - n)$. A aplicação α está bem definida e temos que $[\alpha(n + m)(a)](x) = a(x - n - m) = [\alpha(n) \circ \alpha(m)(a)](x)$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$. Logo α é um homomorfismo de grupo. Como $\mathbb{Z}$ é um grupo discreto temos que α é contínua, logo α é uma ação.

Usando a sequência exata de Pimsner-Voiculescu [34] temos

$$\begin{array}{ccccc}
K_0(A) & \xrightarrow{id - \alpha_*^{-1}} & K_0(A) & \xrightarrow{i_*} & K_0(A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}) \\
\uparrow \delta'_1 & & & & \downarrow \delta'_0 \\
K_1(A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}) & \xleftarrow{i_*} & K_1(A) & \xleftarrow{id - \alpha_*^{-1}} & K_1(A)
\end{array}$$

Como $\alpha(n)(1)(x) = 1(x-n) = 1$, segue que α_* é igual a identidade de $K_0(A)$. Usando que $K_1(A) = 0$ e que $K_0(A) = \mathbb{Z}[1]_0$ ficamos com a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow K_1(A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta'_1} \mathbb{Z}[1]_0 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}[1]_0 \xrightarrow{i_*} K_0(A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

Podemos concluir então que

$$\begin{aligned}
K_1(A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z} \quad \text{e} \\
K_0(A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}[1]_0.
\end{aligned}$$

Se B é uma C^* -álgebra e $\alpha \in \text{Aut}(B)$ sempre existe um unitário $u \in B \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ tal que $\alpha(a) = uau^*$ para todo $a \in B$ (veja, por exemplo, [6], pág. 49). Diz-se que um tal u implementa a ação α e que α é o automorfismo induzido por u . No nosso caso, temos que $\alpha(n)a = \delta_1^n a(M)(\delta_1^*)^n$ para todo $a \in A$ e $n \in \mathbb{Z}$, isto é α é o automorfismo induzido pelo unitário $\delta_1 \in A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$.

Pela equação apresentada no começo da página 102 de [34] temos que $\delta'_1([(1 \otimes 1_n - F) + Fx(u^* \otimes 1_n)F]_1) = [F]_0$, onde $F, x \in A \otimes M_n$, $n \in \mathbb{N}$; F é uma projeção e u é o unitário que implementa a ação. Consideremos $F = 1_A = x$ e $n = 1$, pela equação acima temos que $\delta'_1([\delta_{-1}]_1) = [1]_0$. E como foi visto acima que δ'_1 é um isomorfismo temos que

$$K_1(A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\delta_{-1}]_1.$$

Consideremos a C^* -álgebra $\mathcal{A}^\circ$ definida na Proposição 1.26. Vamos verificar na Proposição abaixo que $\mathcal{A}^\circ$ é isomorfo a $A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$.

Proposição 4.1 *Seja $A = CS(\mathbb{R})$, então existe $\varphi : A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{A}^\circ$ isomorfismo.*

Demonstração:

Seja B o fecho do conjunto $B_0 = \{ \sum_{j \in F} a_j(M)T_j : a_j \in CS(\mathbb{R}) \}$, onde $F \subset \mathbb{Z}$ finito.

Daqui até o fim dessa demonstração estaremos considerando $T_j u(x) = u(x - j)$.

Consideremos $f : k(\mathbb{Z}, A) \longrightarrow B_0$ onde $(a_j)_j \longmapsto \sum_{j \in F} a_j(M) T_j$, $F \subset \mathbb{Z}$ finito. Vamos verificar que f é um $*$ - homomorfismo contínuo:

▷ Produto

$f((a_j)_j) f((b_j)_j) = \sum_j \sum_k a_j(M) T_j b_k(M) T_k$. Temos que $T_j b_k(M) = b_k(M - j) T_j$, então
 $f((a_j)_j) f((b_j)_j) = \sum_j \sum_k a_j(M) b_k(M - j) T_{j+k}$. Fazendo mudanças de variáveis e usando a definição de α temos $f((a_j)_j) f((b_j)_j) = \sum_j (\sum_l a_l \alpha^l(b_{j-l})) T_j = f((a_j * b_j)_j)$.

▷ Involução

$f((a_j)_j)^* = \sum_j T_{-j} a_j^*(M) = \sum_j T_{j'} a_{-j'}^*(M) = \sum_j \alpha^{j'}(a_{-j'}^*) T_{j'} = f((a_j)^*)$.

▷ Continuidade

$\|f((a_j)_j)\| = \|\sum_j a_j(M) T_j\| \leq \sum_j \|a_j(M)\| \|T_j\| = \sum_j \|a_j(M)\| = \|(a_j)_j\|_1$.

Como f é contínua, $k(\mathbb{Z}, A)$ é denso em $l_1(\mathbb{Z}, A)$ e B_0 é denso em B temos que existe $*$ - homomorfismo $\tilde{f} : l_1(\mathbb{Z}, A) \longrightarrow B$ extensão contínua de f .

$$\begin{array}{ccc} k(\mathbb{Z}, A) & \xrightarrow{f} & B_0 \\ \cap & & \cap \\ l_1(\mathbb{Z}, A) & \xrightarrow{\tilde{f}} & B \end{array}$$

Por 2.7.4 de [14] temos que existe $\varphi : A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z} \longrightarrow B$ $*$ - homomorfismo contínuo estendendo $\tilde{f}$.

$$\begin{array}{ccc} l_1(\mathbb{Z}, A) & \xrightarrow{\tilde{f}} & B \\ \cap & \nearrow \varphi & \\ A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z} & & \end{array}$$

Vamos verificar agora que φ é um isomorfismo.

▷ φ é sobrejetora

Como $\text{Im } \varphi$ é fechada e contém B_0 que é denso em B temos que φ é sobrejetora.

Para provar a injetividade de φ vamos utilizar a Proposição 2.9 de [15], que enunciaremos abaixo,

Proposição 4.2 *Sejam C e C' C^* -álgebras e sejam α e α' ações de S^1 em C e C' respectivamente. Suponha que $\psi : C \longrightarrow C'$ é um homomorfismo covariante. Se a restrição de ψ à subálgebra dos pontos fixos C_0 é injetiva, então ψ é injetiva.*

Então vamos definir ações γ e β de S^1 em $A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ e B respectivamente tal que $\beta_z(\varphi(x)) = \varphi(\gamma_z(x))$, para todo $z \in S^1$ e para todo $x \in A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$.

Dado $z \in S^1$ e $a = (a_j)_j \in l_1(\mathbb{Z}, A)$ vamos definir $\gamma_z(a) = (z^j a_j)_j$. Temos que γ é uma ação de S^1 em $l_1(\mathbb{Z}, A)$. Seja $i : l_1(\mathbb{Z}, A) \longrightarrow A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ a inclusão. Então $i \circ \gamma_z : l_1(\mathbb{Z}, A) \longrightarrow A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ é um $*$ -homomorfismo contínuo. Por 2.7.4 de [14] temos que γ é uma ação de S^1 em $A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$.

Dado $z \in S^1$ vamos definir o operador U em $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ por $(U_z f)(t) = z^t f(t)$. Temos que U é um operador unitário. Dado $z \in S^1$ vamos definir $\beta_z(A) = U_z A (U_z)^{-1}$ para todo $A \in B$. Temos então que β é uma ação de S^1 em B .

Agora vamos verificar que φ é um homomorfismo covariante, ou seja, vamos mostrar que $\beta_z(\varphi(x)) = \varphi(\gamma_z(x))$, para todo $x \in l_1(\mathbb{Z}, A)$. Como $\{x\delta_0, 1\delta_1 : x \in A\}$ gera $l_1(\mathbb{Z}, A)$, é suficiente verificarmos a equação nesses geradores de $l_1(\mathbb{Z}, A)$. Para $x\delta_0$ temos que $\gamma_z(x\delta_0) = x\delta_0$ e $\varphi(x\delta_0) = f(x\delta_0) = x(M)$, logo

$$\varphi(\gamma_z(x\delta_0)) = x(M) = \beta_z(\varphi(x\delta_0)).$$

Para $1\delta_1$ temos $\gamma_z(1\delta_1) = z\delta_1$ e $\varphi(1\delta_1) = f(1\delta_1) = T_1$, logo

$$\varphi(\gamma_z(1\delta_1)) = zT_1 = \beta_z(\varphi(1\delta_1)).$$

Vamos verificar agora quem é a álgebra dos pontos fixos de $A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$. Seja C a álgebra dos pontos fixos de $A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$, temos que $C \cap l_1(\mathbb{Z}, A) = A$. De fato, consideremos a inclusão $i : A \longrightarrow l_1(\mathbb{Z}, A)$ onde $x \longmapsto x\delta_0$. Se $x \in A$ então pela inclusão temos que $x \in l_1(\mathbb{Z}, A)$ e com isso $\gamma_z(x) = x$, logo $x \in C \cap l_1(\mathbb{Z}, A)$. Seja $x \in C \cap l_1(\mathbb{Z}, A)$, temos que $x = \sum a_j \delta_j$ então $\gamma_z(x) = \sum z^j a_j \delta_j$ e como $x \in C$ também temos $\gamma_z(x) = x$. Logo $\sum z^j a_j \delta_j = \sum a_j \delta_j$, para todo $z \in S^1$, o que implica que $a_j \delta_j = 0$ ou $z^j - 1 = 0$, para todo $z \in S^1$. O segundo caso acontece se, e somente se, $j = 0$. Portanto $a_j = 0$ para $j \neq 0$, logo $x = a_0 \delta_0$, isto é, $x \in A$.

Consideremos agora a aplicação $E : A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z} \longrightarrow A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ definida por

$$E(b) = \int_0^{2\pi} \gamma_z(b) dz, \quad b \in A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z} \text{ e } dz = \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Se b é tal que $\gamma_z(b) = b$ para todo $z \in S^1$ então $E(b) = \int_0^{2\pi} b \, dz = b$, logo $C \subset \text{Im } E$.
Seja $b = (b_j)_j \in l_1(\mathbb{Z}, A)$ então

$$E(b) = \int_0^{2\pi} \gamma_z(b) \, dz = \int_0^{2\pi} (z^j b_j)_j \, dz = (b_j \int_0^{2\pi} z^j \, dz)_j = b_0 \delta_0 \in A.$$

Então para todo $a \in l_1(\mathbb{Z}, A)$ temos que $E(a) \in A$. Como $l_1(\mathbb{Z}, A)$ é uma subálgebra densa em $A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$, temos a imagem de E contida em A . Portanto temos $C \subset \text{Im } E \subset A = C \cap l_1(\mathbb{Z}, A)$, logo $C = A$.

Resta-nos provar que φ é injetora na álgebra dos pontos fixos. Consideremos a inclusão $i : A \longrightarrow A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ onde $a \longmapsto a\delta_0$. Temos que $\varphi(a\delta_0) = f(a\delta_0) = a(M)$ e $\varphi(a\delta_0) = \varphi(b\delta_0) \Leftrightarrow a(M)^{\alpha} = b(M) \Leftrightarrow a = b$.

Portanto φ é injetora na álgebra dos pontos fixos, logo pela Proposição 4.2 temos que φ é injetora. Logo $\varphi : A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z} \longrightarrow B$ é um isomorfismo.

Como $\mathcal{A}^{\circ} = FBF^{-1}$ temos que $A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ é isomorfo a $\mathcal{A}^{\circ}$. ■

Na página 68 vimos que $K_0(A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[1]_0$ e que $K_1(A \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\delta_{-1}]_1$, logo

$$K_0(\mathcal{A}^{\circ}) = \mathbb{Z}[Id]_0 \quad \text{e}$$

$$K_1(\mathcal{A}^{\circ}) = \mathbb{Z}[e^{iM}]_1.$$

4.2 A K-teoria de $\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ e $\mathcal{A}$

Temos que o conjunto

$$\mathcal{A}_0 = \left\{ \sum_{j=-N}^N a_j(M) b_j(D) e^{ijM} + K; N \in \mathbb{N}, a_j \in CS(\mathbb{R}), b_j \in CS(\mathbb{R}), K \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}} \right\} \quad (4.1)$$

é denso em $\mathcal{A}$. Dado $A = \sum_{j=-N}^N a_j(M) b_j(D) e^{ijM} \in \mathcal{A}_0$, sejam $A^{\pm} = \sum_{j=-N}^N a_j(\pm\infty) b_j(D) e^{ijM}$.

Temos que A^+ e $A^- \in \mathcal{A}^{\circ}$ logo pela demonstração da Proposição 1.26 e pela definição de γ temos que $\gamma_A = (WF^{-1}A^+(WF^{-1})^{-1}, WF^{-1}A^-(WF^{-1})^{-1})$.

Como isso vale para todo A em uma subálgebra densa de $\mathcal{A}$, segue que a aplicação

$$\mathcal{A}_0 \ni A \longmapsto (A^+, A^-) \in \mathcal{A}^{\circ} \oplus \mathcal{A}^{\circ}$$

se estende a um $*$ -homomorfismo

$$\psi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}^\circ \oplus \mathcal{A}^\circ$$

tal que, para todo $A \in \mathcal{A}$, e com $U = \begin{pmatrix} WF^{-1} & 0 \\ 0 & WF^{-1} \end{pmatrix}$ temos $U\psi(A)U^{-1} = \gamma(A)$. Segue então que $\text{Ker } \psi = \text{Ker } \gamma = J_0$ (veja Proposição 1.27).

Proposição 4.3 $K_0(\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}})$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$ e $K_1(\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}})$ é isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Demonstração:

Consideremos a seguinte sequência exata curta:

$$0 \longrightarrow J_0 \xrightarrow{\iota} \mathcal{A} \xrightarrow{\psi} \mathcal{A}^\circ \oplus \mathcal{A}^\circ \longrightarrow 0$$

onde $\psi(A) = (A^+, A^-)$ com A e $A^\pm$ como acima.

Podemos tomar então a seguinte sequência exata curta

$$0 \longrightarrow J_0/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\iota} \mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\psi} \mathcal{A}^\circ \oplus \mathcal{A}^\circ \longrightarrow 0.$$

Como $J_0/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ é isomorfo a $C_0(\mathbb{R} \times \{-\infty, +\infty\})$ (Lema 1.15) e $C_0(\mathbb{R} \times \{-\infty, +\infty\})$ é isomorfo a $C_0(\mathbb{R}) \oplus C_0(\mathbb{R})$ temos que $K_1(J_0/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $K_0(J_0/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) = 0$.

Usando o isomorfismo definido no Lema 1.15 temos que

$$K_1(J_0/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) = \mathbb{Z}[[U]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}]_1 \oplus \mathbb{Z}[[V]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}]_1$$

onde $U = e^{2\pi i b(M)}b(D) + c(D)$ e $V = e^{2\pi i b(M)}c(D) + b(D)$ com b e c as funções definidas na página 54.

Observemos que U e V pertencem a $J_0 \oplus \mathbb{C}Id \subset \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$, pois (como $b + c \equiv 1$) $Id - U = (e^{2\pi i b(M)} - Id)b(D) = \tilde{b}(M)b(D)$ com $\tilde{b} \in C_0(\mathbb{R})$, e analogamente para V . Como, por definição, $K_1(J_0/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) = K_1(\widehat{J_0/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}})$, segue que, de fato, $[[U]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}]_1$ e $[[V]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}]_1$ são elementos de $K_1(J_0/\mathcal{K}_{\mathbb{R}})$.

Aplicando a sequência exata cíclica de seis termos para K-teoria na sequência acima obtemos

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \xrightarrow{\iota_*} & K_0(\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) & \xrightarrow{\psi_*} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\
\uparrow \delta_1 & & & & \downarrow \delta_0 \\
\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xleftarrow{\psi_*} & K_1(\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) & \xleftarrow{\iota_*} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}
\end{array}$$

Logo $\text{Im } \delta_1 = 0$ e $\text{Ker } \delta_1 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Seja $\mathcal{C}$ a C^* -álgebra do Capítulo 2, neste capítulo vimos que $\mathcal{C}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \cong C(M_c)$ onde $M_c = \{(x, \xi) \in [-\infty, +\infty] \times [-\infty, +\infty] : |x| + |\xi| = \infty\}$ e que $K_1(\mathcal{C}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) = \mathbb{Z}[[e^{2\pi i c(M)}b(D) + c(D)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}]_1$.

Consideremos as inclusões

$$J_0/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \xrightarrow{i} \mathcal{C}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \xrightarrow{j} \mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}.$$

Temos que $\iota = j \circ i$. Pela definição de ψ temos que $\psi_*([Id]_0) = ([Id]_0, [Id]_0)$. Logo com respeito ao isomorfismo $K_0(\mathcal{A}^\circ \oplus \mathcal{A}^\circ) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ podemos escrever que $(1, 1) \in \text{Im } \psi_* = \text{Ker } \delta_0$ e $\delta_0(1, 1) = 0$.

Seja $W = e^{2\pi i c(M)}c(D) + b(D)$. Calculando o número de rotação de σ_U e σ_W temos que $w(\sigma_U) = w(\sigma_W) = -1$. Logo pelo o que vimos na página 47 sobre o número de rotação temos que $i_*([[U]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}]_1) = i_*([[W]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}]_1) = [[e^{2\pi i c(D)}b(M) + c(M)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}]_1$. Portanto com respeito ao isomorfismo $K_1(J_0/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) = \mathbb{Z}[[U]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}]_1 \oplus \mathbb{Z}[[V]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}]_1$ temos que $\iota_*((1, 0) - (0, -1)) = j_* \circ i_*((1, 0) - (0, -1)) = 0$. Logo $(1, 1) \in \text{Ker } \iota_* = \text{Im } \delta_0$.

Suponhamos que $\delta_0(1, 0) = (m, n)$, como $(x, y) = (x - y)(1, 0) + y(1, 1)$ temos que $\delta_0(x, y) = (x - y)(m, n)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Como $(1, 1) \in \text{Im } \delta_0$ temos que existe $(x, y) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ tal que $(x - y)(m, n) = (1, 1)$, isto é, $(x - y)m = 1$ e $(x - y)n = 1$. Logo $m = n \neq 0$ e com isto $\text{Im } \delta_0 = \mathbb{Z}(m, n)$ e $\text{Ker } \delta_0 = \mathbb{Z}(1, 1)$. Sabemos que $(1, 1) \in \text{Ker } \iota_* = \text{Im } \delta_0 \cong \mathbb{Z}$. Logo, $\text{Im } \delta_0 = \text{Ker } \iota_* = (1, 1)\mathbb{Z}$.

Podemos então concluir pelo Teorema do homomorfismo que $\text{Im } \iota_* \cong \mathbb{Z}(1, 0)$, onde $(1, 0) \in K_1(J_0/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) = \mathbb{Z}[[U]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}]_1 \oplus \mathbb{Z}[[V]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}]_1$.

Pela exatidão da sequência exata cíclica de seis termos temos que $\psi_* : K_0(\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) \rightarrow \text{Im } \psi_* = \mathbb{Z}(1, 1)$ é um isomorfismo. Logo $K_0(\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) = \mathbb{Z}[[Id]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}]_0$.

Como $\delta_1 \equiv 0$ temos que $\text{Im } \psi_* \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong K_1(\mathcal{A}^\circ \oplus \mathcal{A}^\circ)$. Então podemos construir a seguinte sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}(1, 0) \xrightarrow{i} K_1(\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) \xrightarrow{\psi_*} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Logo $K_1(\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) = \mathbb{Z}[[A]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}]_1 \oplus \mathbb{Z}[[B]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}]_1 \oplus \mathbb{Z}[[U]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}]_1$ onde A e B são elementos de $\mathcal{A}$ tal que $\psi(A) = (e^{iM}, 1)$ e $\psi(B) = (1, e^{iM})$. Podemos tomar, por exemplo, $A = L(M)$ e $B = \tilde{L}(M)$, L e $\tilde{L}$ definidas na página 54. ■

Agora já é possível calcular a K-teoria da C^* -álgebra $\mathcal{A}$.

Teorema 4.4 *Seja $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ a projeção canônica. Então $\pi_* : K_i(\mathcal{A}) \longrightarrow \text{Im } \pi_*$ é um isomorfismo.*

Demonstração:

Consideremos a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_{\mathbb{R}} \xrightarrow{i} \mathcal{A} \xrightarrow{\pi} \mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}} \longrightarrow 0$$

e sua sequência exata cíclica de seis termos para K-teoria

$$\begin{array}{ccccc} K_0(\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) & \xrightarrow{i_*} & K_0(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\pi_*} & K_0(\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) \\ \uparrow \delta_1 & & & & \downarrow \delta_0 \\ K_1(\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) & \xleftarrow{\pi_*} & K_1(\mathcal{A}) & \xleftarrow{i_*} & K_1(\mathcal{K}_{\mathbb{R}}) \end{array}$$

Substituindo as K-teorias conhecidas temos

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{i_*} & K_0(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\pi_*} & \mathbb{Z} \\ \uparrow \delta_1 & & & & \downarrow \delta_0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xleftarrow{\pi_*} & K_1(\mathcal{A}) & \xleftarrow{i_*} & 0 \end{array}$$

Sabemos pela Proposição 9.4.4 de [37] que o índice para esta sequência é o índice de Fredholm.

Vamos calcular δ_1 nos três geradores de $K_1(\mathcal{A}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}})$. Temos que $\delta_1([L(M)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}]_1) = \delta_1([\tilde{L}(M)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}]_1) = 0$ já que eles são operadores de multiplicação.

É fácil ver que $e^{2\pi ib(M)}b(D) + c(D) \in \mathcal{C}$ logo $[e^{2\pi ib(M)}b(D) + c(D)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}} \in \mathcal{C}/\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ e como foi visto no Capítulo 2, Teorema 2.13, $\delta_1([T]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}]_1) = \text{ind}(T) = w(\sigma_T)$ nesta álgebra. Logo $\delta_1([e^{2\pi ib(M)}b(D) + c(D)]_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}}]_1) = w(\sigma_{e^{2\pi ib(M)}b(D)+c(D)}) = -1$. Portanto δ_1 é sobrejetora e $\delta_1(x, y, z) = -z$.

Usando a sequência exata cíclica de seis termos temos

$$K_0(\mathcal{A}) = \mathbb{Z}[Id]_0 \quad \text{e}$$

$$K_1(\mathcal{A}) = \mathbb{Z}[L(M)]_1 \oplus \mathbb{Z}[\tilde{L}(M)]_1.$$

■

Referências Bibliográficas

- [1] M. Atiyah, I. Singer, *The index of elliptic operators on compact manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. 69, 422-433, 1963.
- [2] M. Atiyah, I. Singer, *The index of elliptic operators I*, Ann. of Math 87, 2, 484-530, 1968.
- [3] M. Atiyah, I. Singer, *The index of elliptic operators III*, Ann. of Math 87, 2, 546-604, 1968.
- [4] B. Blackadar, *K-theory for operator algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [5] D. Bleeker, B. Booss-Bavnbek, *Topology and analysis: The Atiyah-Singer index formula and Gauge-theoretic physics*, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [6] C. Cerri, *Certas deformações não-comutativas do toro e sua k-teoria*, Tese (doutorado), IME-USP, 1993.
- [7] A. Connes, *Gravity coupled with matter and the foundation of non-commutative geometry*, Comm. Math. Phys. 182, 155-176, 1996.
- [8] A. Connes e H. Moscovici, *Cyclic cohomology, the Novikov conjecture and hyperbolic groups*, Topology 29, 345-388, 1990.
- [9] H. O. Cordes, *Spectral theory of linear differential operators and comparison algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series 76, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

- [10] H. O. Cordes, *Elliptic pseudodifferential operators—an abstract theory*, Lecture Notes in Mathematics 756, Springer, Berlin, 1979.
- [11] H. O. Cordes e M. Breuer, *On Banach algebras with σ symbol II*, J. Math. Mech. 14, 299-313, 1965.
- [12] H. O. Cordes e E. A. Herman, *Gelfand theory of pseudo differential operators*, Amer. J. Math. 90, 681-717, 1968.
- [13] H. O. Cordes e S. T. Melo, *An algebra of singular integral operators with kernels of bounded oscillation and application to periodic differential operators*, Journal of Differential Equations 75-2, 216-238, 1987.
- [14] J. Dixmier, *Les C^* -algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [15] R. Exel, *Circle actions on C^* -algebras, partial automorphisms and a generalized Pimsner-Voiculescu exact sequence*, J. Funct. Anal. 122, no. 2, 361-401, 1994.
- [16] P. Gilkey, *Invariance theory, the heat equation, and the Atiyah-Singer index theorem*, Mathematics Lecture Series 11, Publish or Perish, 1984.
- [17] H. Helson, *Harmonic analysis*, Addison-Wesley, Mass., 1983.
- [18] L. Hormander, *The analysis of linear partial differential operators III*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [19] J. Hounie, *Teoria elementar das distribuições*, Colóquio Brasileiro de Matemática, Impa, Rio de Janeiro, 1979.
- [20] R. Lauter, *Holomorphic functional calculus in several variables and Ψ^* -álgebras of totally characteristic operators on manifolds with boundary*, Thesis, Mainz, 1996.
- [21] R. Lauter e S. Moroianu, *Homology of pseudodifferential operators on manifolds with fibered cusps*, Trans. Amer. Math. Soc. 355, no. 8, 3009–3046, 2003.
- [22] R. Lauter e S. Moroianu, *The index of cups operators on manifolds with corners*, Ann. Global Anal. Geom. 21, 31-39, 2002.
- [23] S. T. Melo, *A compararison algebra on a cylinder with semi-periodic multiplications*, Pacific J. Math. 146-2, 281-304, 1990.

-
- [24] S. T. Melo, R. Nest e E. Schrohe, *C^* - structure and K -theory of Boutet de Monvel's algebra*, J. Reine Angew. Math. 561, 145-175, 2003.
- [25] R. Melrose e V. Nistor, *K -theory of C^* -algebras of b -pseudodifferential operators*, Geom. Funct. Anal. 8, no. 1, 88-122, 1998.
- [26] B. Monthubert, *Groupeïdes et calcul pseudo-différentiel sur les variétés à coins*, Thesis, Paris 7, 1998.
- [27] B. Monthubert, *Pseudodifferential calculus on manifolds with corners and groupoids*, Proc. Amer. Math. Soc. 127, no. 10, 2871-2881, 1999.
- [28] G. J. Murphy, *C^* -algebras and operator theory*, Academic Press, Boston, 1990.
- [29] R. Nest e B. Tsygan, *Algebraic index theorem*, Comm. Math Phys. 172, 2, 223-262, 1995.
- [30] R. Nest e B. Tsygan, *Algebraic index theorem for families*, Adv. Math. 113, 2, 151-205, 1995.
- [31] R. Nest e B. Tsygan, *Formal versus analytic index theorem*, Internat. Math. Res. Notices 11, 557-564, 1996.
- [32] V. Nistor, *Higher index theorems and the boundary map in cyclic cohomology*, Documenta Math. 2, 263-295, 1997.
- [33] G. Pedersen, *C^* algebras and their automorphism groups*, Academic Press, London, 1979.
- [34] M. Pimsner e D. Voiculescu, *Exact sequences for K -groups and Ext -groups of certain cross-product C^* -algebras.*, J. Operator Theory 4, no. 1, 93-118, 1980.
- [35] S. C. Power, *Commutator ideals and pseudodifferential C^* -algebras*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 31, no. 124, 467-489, 1980.
- [36] M. Reed e B. Simon, *Methods of modern mathematical physics*, Academic Press, New York, 1972.
- [37] M. Rørdam, F. Larsen, N. Laustsen, *An introduction to K -theory for C^* -algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[38] W. Rudin, *Real and complex analysis*, Tata McGraw-Hill, New Delhi, 1981.