Nilálgebras comutativas de potências associativas

Mary Luz Rodiño Montoya

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: Álgebra

Orientador: **Prof. Dr. Juan Carlos Gutiérrez Fernández**

Na elaboração deste trabalho, a autora obteve apoio financeiro da CAPES

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação de
mestrado devidamente corrigida e defendida por
Mary Luz Rodiño Montoya e aprovada
pela Comissão Julgadora.

São Paulo, 03 de março de 2005.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Juan Carlos Gutiérrez Fernández (orientador)	IME-USP
Prof. Dr. Ivan Paulovich Shestakov	IME-USP
Prof. Dr. Plamen Emilov Koshlukov	IMECC-UNICAMP

*À minha Família,
especialmente à minha Mãe.*

Agradecimentos

Agradeço ao professor Juan Carlos Gutiérrez Fernández, meu orientador, por sua paciência e dedicação, assim como por seus importantes aportes na elaboração desta dissertação, também aos professores da banca de defesa pela valiosa contribuição com suas correções e sugestões. Ao Instituto de Matemática e Estatística pela formação acadêmica e a possibilidade de utilização de seus recursos para meus estudos e à CAPES pelo apoio financeiro.

Abstract

In this work we show the main results that partially solves the Albert's problem, gained by means the study of the nilindex of the nilalgebra or by its dimension.

Resumo

Neste trabalho apresentamos os principais resultados que deram solução parcial ao problema de Albert, obtidos mediante o estudo do nilíndice da nilálgebra ou através de sua dimensão.

Sumário

Notações	1
Introdução	2
1 Conceitos Básicos	5
2 Nilálgebras de Potências Associativas	17
3 Solubilidade segundo seu nilíndice	37
3.1 Nilíndice menor ou igual a 3	38
3.2 Nilíndice maior ou igual a $n - 2$	41
4 Solubilidade segundo sua dimensão	51
4.1 Dimensão menor ou igual a 3	52
4.2 Dimensão 4	54
4.2.1 Nilíndice $k = 3$	54
4.2.2 Nilíndice $k = 4$	56
4.3 Dimensão 5	59
4.3.1 Nilíndice $k = 3$	59
4.3.2 Nilíndice $k = 4$	62
4.3.3 Nilíndice $k = 5$	68

Sumário	ii
4.4 Dimensão 6	72
4.5 Dimensão 7 e 8	74
Referências Bibliográficas	80
Índice Remissivo	83

Notações

A seguinte é a notação que será usado ao longo desta dissertação.

$\mathfrak{A}$	Álgebra
F	Corpo
F^*	Grupo multiplicativo de F
V	Espaço vetorial sobre F
P	Anel de polinômios comutativo, não-associativo nas variáveis x e y
δ	Operador linear de P em P
Λ	Espaço vetorial sobre F de operadores δ
$\langle a_1, \dots, a_n \rangle$	Subespaço linear de $\mathfrak{A}$ gerado por $a_1, \dots, a_n$ sobre F
$\dim(\mathfrak{A})$	Dimensão de $\mathfrak{A}$
$\text{grau}(\mathfrak{A})$	Grau da álgebra $\mathfrak{A}$
$\oplus$	Soma direta
L_a	Operador multiplicação à esquerda por a
R_a	Operador multiplicação à direita por a
$\ker(f)$	Kernel de f
$\mathfrak{R}$ -álgebras	Álgebras pertencentes a classe $\mathfrak{R}$
$\mathfrak{R}(\mathfrak{A})$	Radical de $\mathfrak{A}$
$N(\mathfrak{A})$	Nilradical de $\mathfrak{A}$
$S(\mathfrak{A})$	Radical solúvel de $\mathfrak{A}$
$\text{tr}(M)$	Traço da matriz M

Introdução

Matemáticos, físicos teóricos e biomatemáticos, do século XX, incluem os métodos das álgebras não-associativas dentro de suas ferramentas mais importantes. É suficiente mencionar as álgebras de Jordan que tornaram-se uma ferramenta importante na mecânica quântica e as álgebras de Lie, pertencentes às álgebras não-associativas, que refletem propriedades fundamentais de objetos associativos tais como os grupos de Lie. É importante mencionar também as álgebras de potências associativas, ao redor das quais tem-se feito muitos estudos. A noção de radical é um instrumento fundamental na construção da teoria de estrutura de várias classes de álgebras. Dentro das classes radicais temos para uma álgebra o seu radical solúvel e seu nilradical, os quais estão diretamente relacionados. No caso de álgebras comutativas de potências associativas de dimensão finita, a questão de igualdade destes radicais é um problema aberto, o qual é conhecido como o *Problema de Albert*. No ano de 1948 A. Albert formulou a seguinte conjectura: *Toda nilálgebra comutativa de potências associativas e de dimensão finita é solúvel*. Isto é equivalente a afirmar que não existem álgebras simples de dimensão finita, dentro da classe das nilálgebras comutativas de potências associativas.

Suttles deu, em 1972, um exemplo de uma nilálgebra comutativa de potências associativas de dimensão cinco e nilíndice quatro que é solúvel mas não é nilpotente. Assim, o exemplo de Suttles, mostra que no problema de Albert a condição de solubilidade não pode ser trocada por a condição de

nilpotência.

Resultados importantes que deram solução parcial ao Problema de Albert, foram encontrados estudando as nilálgebras para valores específicos do nilíndice e também para dimensões pequenas.

Assim, nesta dissertação, fizemos um estudo mais detalhado deste fatos, os quais foram desenvolvidos em quatro capítulos. No Capítulo 1, é dada uma introdução as álgebras não-associativas, dando-se a definição de álgebra e definições tais como álgebras comutativas, associativas, subálgebra etc. assim como o conceito de homomorfismo e álgebra de Engel, e uma pequena menção das álgebras de Lie e de Jordan. Também damos os conceitos de nilpotência e solubilidade, classe radical, falando finalmente do nilradical e do radical solúvel de uma álgebra. Por último damos dois resultados sobre espaços vetoriais, necessários para demonstrar resultados do Capítulo 3.

No Capítulo 2, introduzimos as álgebras de potências associativas, e mostramos que uma álgebra comutativa sobre um corpo de característica diferente de 2, 3 e 5 é de potências associativas se e somente se, $x^4 = x^2x^2$ para todo elemento x da álgebra. Apresentamos três exemplos de álgebras que não são de potências associativas, nas quais cumpre-se a identidade $x^4 = x^2x^2$ para todo elemento x da álgebra. Em seguida voltamos a tratar dos radicais solúveis e do nilradical para álgebras de potências associativas, introduzindo assim o Problema de Albert, e apresentando o exemplo de Suttles. Finalmente apresentamos alguns resultados de linearização e operadores sobre identidades, mostrando dois resultados importantes. No primeiro, mostra-se que se $\mathfrak{A}$ é uma nilálgebra comutativa de característica zero e nilíndice t , então $R_a^{2t-3} = 0$ para todo a em $\mathfrak{A}$. No segundo, mostra-se que se $\mathfrak{A}$ é uma álgebra comutativa de potências associativas de característica zero e se para algum $a \in \mathfrak{A}$, $a^t = 0$, então a álgebra gerada por $R_{a^1}, R_{a^2}, \dots$ é nilpotente de índice menor ou igual a $2(t-1)^2 + 1$.

No Capítulo 3 estudamos a nilpotência e solubilidade de uma nilálgebra por meio de seu nilíndice. Para nilálgebras comutativas de dimensão finita de nilíndice menor ou igual a 3, sobre um corpo de característica diferente

de 2, temos a nilpotência (solubilidade). Para nilíndice maior ou igual a $n - 2$, sendo n a dimensão da álgebra, temos a solubilidade da álgebra, ela é tomada sobre um corpo de característica zero ou suficientemente grande comparada com o nilíndice.

No Capítulo 4, o estudo da solubilidade e nilpotência é feito por meio da dimensão da álgebra. Para nilálgebras comutativas de potências associativas sobre um corpo de característica diferente de 2 e 3, temos a nilpotência quando a dimensão é menor ou igual a 4, assim como as classes de isomorfismos. Sobre um corpo de característica diferente de 2, 3 e 5, temos que se a dimensão é 5, a álgebra é nilpotente ou isomorfa à álgebra de Suttles, temos também a solubilidade das nilálgebras comutativas, não necessariamente de potências associativas, de dimensão 6. Finalmente, sobre o mesmo corpo, estudamos a solubilidade para nilálgebras comutativas de potências associativas, de dimensão menor ou igual a 8.

Conceitos Básicos

Um espaço vetorial $\mathfrak{A}$ sobre um corpo F , é denominado uma *álgebra* sobre F , se está definida uma aplicação de $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ em $\mathfrak{A}$, satisfazendo as seguintes relações: $(x + y)z = xz + yz$, $x(y + z) = xy + xz$ e $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$, para todo $x, y, z \in \mathfrak{A}$ e $\alpha \in F$. Se a multiplicação em $\mathfrak{A}$ verifica que $xy = yx$ para todo $x, y \in \mathfrak{A}$, então $\mathfrak{A}$ chama-se *comutativa*, e se cumpre que $(xy)z = x(yz)$ para todo $x, y, z \in \mathfrak{A}$, então $\mathfrak{A}$ é dita *associativa*. O termo, álgebras não-associativas, será usado para fazer referência a álgebras não necessariamente associativas.

Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de uma álgebra $\mathfrak{A}$ de dimensão finita. A multiplicação em $\mathfrak{A}$ está determinada por $e_i e_j = \sum_{k=1}^n \gamma_{ijk} e_k$ com $1 \leq i, j \leq n$. Os escalares $\gamma_{ijk} \in F$ são denominados *constantes de estrutura* da álgebra respeito a dita base. Se V é um espaço vetorial sobre F com base $\{v_1, \dots, v_n\}$ e γ_{ijk} ($1 \leq i, j, k \leq n$) são escalares, a expressão $v_i v_j = \sum_{k=1}^n \gamma_{ijk} e_k$ define a multiplicação $ab = \sum_{k=1}^n (\sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j \gamma_{ijk}) e_k$ em que $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ e $b = \sum_{j=1}^n \beta_j e_j$ e munido desta multiplicação V é uma álgebra sobre F . Observe que V é comutativa se cumpre-se a identidade $\gamma_{ijk} = \gamma_{jik}$ para todo i, j, k .

Um subespaço vetorial S de uma álgebra $\mathfrak{A}$ fechado para a multiplicação, chama-se *subálgebra* de $\mathfrak{A}$. Um subespaço I de $\mathfrak{A}$ fechado para a multi-

plicação por elementos de $\mathfrak{A}$, isto é, $ab \in I$ para todo $a \in \mathfrak{A}$ e $b \in I$, é dito um *ideal* de $\mathfrak{A}$. Note que todo ideal é uma subálgebra, mas o contrário não é válido. A subálgebra $\mathfrak{A}^2$, gerada como espaço vetorial pelos produtos ab tal que $a, b \in \mathfrak{A}$, é um ideal de $\mathfrak{A}$. Uma álgebra $\mathfrak{A}$ é *simples* quando $\mathfrak{A}^2 \neq 0$ e seus únicos ideais são os triviais, isto é, 0 e $\mathfrak{A}$. Seja I um ideal de $\mathfrak{A}$, o conjunto $\mathfrak{A}/I = \{\bar{a} = a + I : a \in \mathfrak{A}\}$ munido das operações $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$, $\bar{a}\bar{b} = \overline{ab}$ e $\alpha\bar{a} = \overline{\alpha a}$ para todo $a, b \in \mathfrak{A}$ e $\alpha \in F$ é dito a *álgebra quociente* de $\mathfrak{A}$ por I . Observe que a álgebra $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^2$ tem multiplicação zero. Se I, J são ideais de $\mathfrak{A}$ tal que $I \cap J = 0$ e sua soma é toda $\mathfrak{A}$, então $\mathfrak{A}$ é *soma direta* de I e J e é denotado por $\mathfrak{A} = I \oplus J$. Note que para cada $a, c \in I$ e $b, d \in J$ temos que $(a + b)(c + d) = ac + bd$, pois $ad, bc \in I \cap J = 0$.

Uma aplicação $h : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ entre F -álgebras, chama-se *homomorfismo*, quando se verifica:

- (i) $h(a + b) = h(a) + h(b)$,
- (ii) $h(\alpha a) = \alpha h(a)$,
- (iii) $h(ab) = h(a)h(b)$,

para todo $a, b \in \mathfrak{A}$ e $\alpha \in F$. O kernel e a imagem de h , são subálgebras de $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ respectivamente. Se I é um ideal de $\mathfrak{A}$, a inclusão $h : I \longrightarrow \mathfrak{A}$, e a projeção $\pi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}/I$, são homomorfismos de álgebras. $\text{End}(\mathfrak{A})$ denotará o conjunto de todos os homomorfismos de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{A}$. $\text{End}(\mathfrak{A})$ é uma álgebra associativa, não comutativa, em geral, com a composição como sua operação multiplicação. Se a é um elemento de $\mathfrak{A}$, então o operador linear $R_a : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$, dado por $R_a(x) = xa$, é denominado *multiplicação à direita* por a . De maneira análoga temos L_a , a *multiplicação à esquerda* por a , isto é, $L_a(x) = ax$ para todo $x \in \mathfrak{A}$. Observe que em geral, R_a não é um homomorfismo de álgebras. Para álgebras comutativas, $L_a = R_a$. Seja A uma subálgebra de $\mathfrak{A}$. Para cada $b \in \mathfrak{A}$ com $bA \subseteq A$ define-se a transformação linear $\bar{L}_b$ no espaço vetorial quociente $\mathfrak{A}/A$ como segue:

$\bar{L}_b(c + \mathfrak{A}) = L_b(c) + \mathfrak{A} = bc + \mathfrak{A}$. Para esta transformação linear, definem-se os seguintes conjuntos, $M_A := \{\bar{L}_b : bA \subseteq A\}$ e $N_A := \{\bar{L}_a : a \in A\}$. Claramente, N_A é um subespaço vetorial de M_A .

Uma transformação linear $f : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ é *nilpotente* se existe um inteiro m tal que $f^m \equiv 0$. O menor m cumprindo esta identidade chama-se *índice de nilpotência*. Uma álgebra $\mathfrak{A}$ chama-se de *Engel* se toda multiplicação à esquerda e à direita de $\mathfrak{A}$ é nilpotente, isto é, os operadores L_a e R_a são nilpotentes para todo $a \in \mathfrak{A}$. Assim, se $\mathfrak{A}$ é uma álgebra de Engel de dimensão n , então existe um inteiro positivo $k \leq n$ tal que $L_a^k = 0$ para todo $a \in \mathfrak{A}$. Dado que o único autovalor de um operador nilpotente é zero, temos o seguinte lema.

Lema 1.1 *Seja $b \in \mathfrak{A}$ tal que o operador L_b é nilpotente. Se para $a \in \mathfrak{A}$ cumpre-se que $ba = \alpha a$ com $a \neq 0$, então $\alpha = 0$.*

É claro que o lema anterior é válido numa álgebra de Engel de dimensão finita.

Dentro da classe das álgebras não-associativas destacam-se duas, são elas as álgebras de Lie e as álgebras de Jordan. Uma álgebra $\mathfrak{L}$ é de *Lie* se sua operação multiplicação é *anticomutativa*, isto é, $x^2 = 0$ ($xy = -yx$) e satisfaz a *identidade de Jacobi*

$$J(x, y, z) \equiv (xy)z + (yz)x + (zx)y = 0.$$

Uma álgebra $\mathfrak{J}$ é de *Jordan* se é comutativa e satisfaz a seguinte lei de associatividade, chamada de *identidade de Jordan*

$$x^2(yx) = (x^2y)x.$$

Outra classe de álgebras muito estudada, é a classe das álgebras alternativas. Uma álgebra é *Alternativa* caso satisfaça as identidades

$$x(xy) = x^2y \quad \text{e} \quad (yx)x = yx^2.$$

Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra não-associativa. Se B e C são subespaços de $\mathfrak{A}$, então BC denota o subespaço linear gerado por todos os produtos bc com $b \in B$ e $c \in C$. As seguintes potências são definidas por indução da seguinte forma:

$$\mathfrak{A}^1 = \mathfrak{A}^{(0)} = \mathfrak{A},$$

e para $r \geq 2$ e $s \geq 0$,

$$\mathfrak{A}^r = \sum_{i+j=r} \mathfrak{A}^i \mathfrak{A}^j \quad \text{e} \quad \mathfrak{A}^{(s+1)} = \mathfrak{A}^{(s)} \mathfrak{A}^{(s)}.$$

Da definição anterior, é fácil ver por indução sobre r , para $r \geq 0$, que

$$(\mathfrak{A}^{(s)})^{(r)} = \mathfrak{A}^{(s+r)}.$$

Em termos destas potências podem-se definir os seguintes conceitos: uma álgebra $\mathfrak{A}$ é *nilpotente* se existe um inteiro r tal que $\mathfrak{A}^r = 0$, e é *solúvel* se existe um inteiro s tal que $\mathfrak{A}^{(s)} = 0$. Os menores r e s cumprindo estas propriedades chamam-se *índice de nilpotência* e *índice de solubilidade*, respectivamente. É fácil ver que uma álgebra $\mathfrak{A}$ é nilpotente de índice m se, e somente se, o produto de m ou mais elementos com qualquer arranjo de parênteses é zero e existe um produto não nulo de $m - 1$ elementos. Definimos também as potências de um elemento $x \in \mathfrak{A}$, assim

$$x^1 = x \quad \text{e} \quad x^{i+1} = x^i x \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \dots$$

Toda álgebra nilpotente é solúvel uma vez que $\mathfrak{A}^{(m)} \subseteq \mathfrak{A}^{2^m}$. Podemos verificar a anterior inclusão por indução sobre m assim: Se $m = 0$, $\mathfrak{A}^{(0)} \subseteq \mathfrak{A}^{2^0}$, e supondo para valores menores ou iguais a $m - 1$ temos para m que $\mathfrak{A}^{(m)} = \mathfrak{A}^{(m-1)} \mathfrak{A}^{(m-1)} \subseteq \mathfrak{A}^{2^{m-1}} \mathfrak{A}^{2^{m-1}} \subseteq \mathfrak{A}^{2^m}$, cumprindo-se assim a inclusão. Por outro lado temos que a solubilidade não implica a nilpotência, basta tomar a álgebra $\mathfrak{A}$ gerada pelo conjunto $\{a, b\}$, onde $a^2 = b^2 = 0$ e $ab = -ba = a$. Como $\mathfrak{A}^2 = \langle a \rangle$, $\mathfrak{A}^2 \mathfrak{A}^2 = 0$ e $\mathfrak{A}^{(2)} = \mathfrak{A}^{(1)} \mathfrak{A}^{(1)} = \mathfrak{A}^2 \mathfrak{A}^2 = 0$. Assim, $\mathfrak{A}$ é solúvel de índice 2, mas $\mathfrak{A} \mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}^2$, logo $\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}^3 = \dots = \mathfrak{A}^m = \dots \neq 0$. Portanto, $\mathfrak{A}$ não é nilpotente.

Lema 1.2 *Se I é um ideal de $\mathfrak{A}$ tal que I e $\mathfrak{A}/I$ são solúveis, então $\mathfrak{A}$ é solúvel.*

Prova: Seja I um ideal de $\mathfrak{A}$ tal que I e $\mathfrak{A}/I$ são solúveis. Então existe um inteiro r tal que $(\mathfrak{A}/I)^{(r)} = \bar{0}$, logo $\mathfrak{A}^{(r)} \subseteq I$. Por hipótese I é solúvel, logo, existe um inteiro s tal que $0 = I^{(s)} \supseteq (\mathfrak{A}^{(r)})^{(s)}$. E já que $(\mathfrak{A}^{(r)})^{(s)} = \mathfrak{A}^{(r+s)}$, segue que, $\mathfrak{A}^{(r+s)} = 0$, isto é, $\mathfrak{A}$ é solúvel. ■

Lema 1.3 *A soma de dois ideais solúveis de uma álgebra $\mathfrak{A}$ é também um ideal solúvel.*

Prova: Observe primeiro que se I é um ideal de $\mathfrak{A}$, então dado que $a \rightarrow \bar{a} = a + I$ é um homomorfismo, a solubilidade de $\mathfrak{A}$ implica a solubilidade de $\bar{\mathfrak{A}}$. Logo, se I e J são ideais solúveis de $\mathfrak{A}$, então $I/(I \cap J)$ é solúvel. Pelo segundo teorema de homomorfismos $I/(I \cap J) \cong (I + J)/J$ e então J e $(I + J)/J$ são solúveis. Segue portanto, do Lema 1.2, que $I + J$ é solúvel. ■

Se $\mathfrak{A}$ tem dimensão finita, então pelos Lemas 1.2 e 1.3, $\mathfrak{A}$ contém um único ideal maximal solúvel $S = S(\mathfrak{A})$. Portanto, a álgebra quociente $\mathfrak{A}/S$ não contém ideais solúveis não nulos. O ideal $S(\mathfrak{A})$ definido anteriormente, chama-se o *radical solúvel* da álgebra $\mathfrak{A}$.

Seja $\mathfrak{M}$ uma classe de álgebras fechadas para imagens por homomorfismos e seja $\mathfrak{R}$ uma subclasse de $\mathfrak{M}$. O termo $\mathfrak{R}$ -álgebras, fará referência as álgebras da classe $\mathfrak{R}$ (igualmente $\mathfrak{R}$ -ideais). A classe $\mathfrak{R}$ é *radical* em $\mathfrak{M}$ se satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $\mathfrak{R}$ é fechada para imagens por homomorfismos; isto é, a imagem por homomorfismos de uma $\mathfrak{R}$ -álgebra é uma $\mathfrak{R}$ -álgebra.
- (ii) Cada álgebra $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}$, tem um $\mathfrak{R}$ -ideal $\mathfrak{R}(\mathfrak{A})$ que contém todos os $\mathfrak{R}$ -ideais de $\mathfrak{A}$.
- (iii) A álgebra quociente $\mathfrak{A}/\mathfrak{R}(\mathfrak{A})$ não contém $\mathfrak{R}$ -ideais não nulos, isto é, $\mathfrak{R}(\mathfrak{A}/\mathfrak{R}(\mathfrak{A})) = 0$.

A noção de radical é um instrumento fundamental no estudo da estrutura de várias classes de álgebras. Depois de escolhido o radical, tudo reduz-se à descrição das álgebras radicais (isto é, $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}(\mathfrak{A})$) e das álgebras semisimples (isto é, $\mathfrak{R}(\mathfrak{A}) = 0$).

Uma classe de álgebras $\mathfrak{R}$ é *fechada para extensões*, se do fato de $\mathfrak{A}/I \in \mathfrak{R}$ e $I \in \mathfrak{R}$ segue que $\mathfrak{A} \in \mathfrak{R}$. Temos então que a classe das álgebras solúveis são fechadas para extensões.

Teorema 1.4 *Toda classe radical $\mathfrak{R}$ é fechada para extensões.*

Prova: Seja $\mathfrak{R}$ uma classe radical e I um ideal de $\mathfrak{A}$ tal que I e $\mathfrak{A}/I \in \mathfrak{R}$. Suponhamos que $\mathfrak{A} \notin \mathfrak{R}$. Então $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{R}(\mathfrak{A})$ e pela hipótese $I \subseteq \mathfrak{R}(\mathfrak{A})$. Pelo primeiro teorema de homomorfismos $\mathfrak{A}/\mathfrak{R}(\mathfrak{A}) \cong (\mathfrak{A}/I)/(\mathfrak{R}(\mathfrak{A})/I)$. Note que $(\mathfrak{A}/I)/(\mathfrak{R}(\mathfrak{A})/I)$ é radical por ser imagem por homomorfismo de $\mathfrak{A}/I$ e que $\mathfrak{R}(\mathfrak{A}/\mathfrak{R}(\mathfrak{A})) = 0$, isto é, $\mathfrak{A}/\mathfrak{R}(\mathfrak{A})$ é semisimples. Assim, temos uma álgebra radical isomorfa a uma álgebra semisimples, o que é uma contradição. Portanto, $\mathfrak{A} \in \mathfrak{R}$, o que mostra que $\mathfrak{R}$ é fechada para extensões. ■

Como exemplo de aplicação da teoria de radicais, temos o famoso *Teorema de estrutura de Wedderburn*.

Teorema 1.5 *Toda álgebra associativa $\mathfrak{A}$ de dimensão finita, sobre um corpo F , contém um único ideal nilpotente N tal que $\mathfrak{A}/N \cong \mathfrak{A}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{A}_n$ onde $\mathfrak{A}_i$ é simples e $\mathfrak{A}_i \cong M_{n_i}(D_i)$, sendo $M_{n_i}(D_i)$ a álgebra das matrizes quadradas de ordem n_i com entradas numa álgebra de divisão D_i de dimensão finita sobre F .*

Corolário 1.6 *Seja F um corpo algébricamente fechado. Então toda álgebra associativa simples de dimensão finita sobre F , é isomorfa à álgebra de matrizes $M_n(F)$, para algum inteiro positivo n .*

Um elemento a em $\mathfrak{A}$ é *nilpotente* se a subálgebra gerada por ele é nilpotente. Uma álgebra $\mathfrak{A}$ é uma *nilálgebra* se todos seus elementos são nilpotentes. Assim, se $\mathfrak{A}$ é uma nilálgebra, então para cada $a \in \mathfrak{A}$ existe um inteiro

m tal que o produto de a , m ou mais vezes, com qualquer associação, é zero. Se m pode ser escolhido independente de a , então diz-se que $\mathfrak{A}$ tem *nilíndice* m , sendo m o menor inteiro satisfazendo dita propriedade.

O menor inteiro m tal que para todo $a \in \mathfrak{A}$, a dimensão da álgebra gerada por a é menor ou igual a m é chamado o *grau* de $\mathfrak{A}$ e é denotado por $\text{grau}(\mathfrak{A})$.

Em geral, para uma classe arbitrária $\mathfrak{M}$ a subclasse de nilálgebras, $\text{Nil}(\mathfrak{M})$, não é radical. Seja $\mathfrak{A}$ a álgebra com base $\{a, b\}$ e multiplicação dada por $a^2 = b^2 = 0$ e $ab = -ba = a$. Se I é o ideal gerado por a , então I e $\mathfrak{A}/I \in \text{Nil}(\mathfrak{M})$, mas $\mathfrak{A} \notin \text{Nil}(\mathfrak{M})$, pois $(a + b)^m = 2a \neq 0$ para todo m . Portanto, $\text{Nil}(\mathfrak{M})$ não é fechado para extensões e pelo Teorema 1.4, $\text{Nil}(\mathfrak{M})$ não é radical.

Para álgebras associativas, tem-se o seguinte resultado para nilpotência, provado primeiro por Dubnov e Ivanov em 1943 e também independentemente por Nagata e Higman. Este resultado é conhecido como o teorema de Dubnov-Ivanov-Nagata-Higman (para mais detalhes ver [22] página 123).

Teorema 1.7 *Seja Nil_m a variedade das álgebras associativas sobre um corpo de característica zero, definida pela identidade $x^m = 0$. Então cada álgebra de Nil_m é nilpotente de índice de nilpotência menor ou igual a $2^m - 1$.*

Em 1974 Razmylov mostrou que o índice de nilpotência $f(m)$ de Nil_m , não excede m^2 . Kuzmin mostrou em 1975 que $f(m)$ é maior ou igual a $m(m+1)/2$ e conjecturou que este valor dá exatamente o índice de nilpotência da variedade Nil_m . A conjectura de Kuzmin é verdadeira para $m = 2, 3$, como já tinha mostrado Higman. Em 1993, Vaughan-Lie verificou a conjectura para $m = 4$, ficando ainda aberta para $m = 5$.

A nilpotência para álgebras de Lie de Engel, foi demonstrada por Zelmanov, no seguinte teorema [21].

Teorema 1.8 *Seja F um corpo de característica zero e $\mathcal{L}$ uma álgebra de Lie sobre F . Se $\mathcal{L}$ é de Engel, então $\mathcal{L}$ é nilpotente.*

Igual ao caso anterior, está aberto o problema de determinar o índice de nilpotência.

A seguir apresentaremos alguns lemas para espaços vetoriais, os quais serão utilizados na demonstração de resultados dos capítulos seguintes. O seguinte resultado foi apresentado por Gerstenhaber em [13].

Lema 1.9 *Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre um corpo com ao menos n elementos, e H um subespaço vetorial de endomorfismos nilpotentes de $\text{End}(V)$. Então $\dim(H) \leq n(n-1)/2$, e se $\dim(H) = n(n-1)/2$, então o espaço vetorial H é de fato uma álgebra nilpotente de índice n .*

Outra prova deste resultado foi dada por Mathes, Omladic e Radjavi em [17]. Nesta prova utilizam-se os seguintes dois lemas, cujas provas são feitas em [17], e o Teorema de Jacobson [15].

Lema 1.10 *Se B, C e $B + C$ são matrizes nilpotentes sobre um corpo F , então $\text{tr}(BC) = 0$.*

Lema 1.11 *Seja F um corpo com ao menos três elementos e sejam B e C matrizes sobre F . Se toda combinação linear de B e C é nilpotente, então $\text{tr}(BC^2) = 0$.*

Teorema 1.12 *Seja N um conjunto de matrizes nilpotentes. Se para todo $B, C \in N$ existe $\lambda \in F$ tal que $BC - \lambda CB \in N$, então N é triangularizável.*

Vejamos pois a prova apresentada por Mathes, Omladic e Radjavi.

Lema 1.13 *Seja F um corpo com ao menos três elementos e seja L um subespaço vetorial de matrizes nilpotentes quadradas de ordem n . Então a dimensão de L é menor ou igual a $n(n-1)/2$ e no caso da igualdade temos que L é triangularizável.*

Prova: Seja T o espaço das matrizes estritamente triangulares superiores, isto é, com diagonal principal nula, e sejam $L_1 = L \cap T$ e L_2 um complemento de L_1 em L . Definimos para qualquer conjunto de matrizes quadradas J de ordem n , sobre o corpo F , o seguinte conjunto $J^\perp = \{B \mid \text{tr}(BC) = 0 \text{ para todo } C \in J\}$. Observamos que se J é um subespaço vetorial de $M_n(F)$, então $\dim(J) + \dim(J^\perp) = n^2$, já que a forma bilinear definida por $f(B, C) := \text{tr}(BC^t)$, é um produto escalar em $M_n(K)$. Notemos que $T^\perp$ é o conjunto das matrizes triangulares superiores, logo $T^\perp \cap L_2 = \{0\}$, já que cada matriz na intersecção será nilpotente (pois os elementos de L_2 são nilpotentes), isto é, são matrizes triangulares superiores nilpotentes, logo são matrizes de L estritamente triangulares superiores e portanto pertencem a L_1 , assim $T^\perp \cap L_2 \subset L_1 \cap L_2 = \{0\}$. Já que L é um subespaço vetorial de matrizes nilpotentes, segue pelo Lema 1.10, que $\text{tr}(BC) = 0$ para todo $B \in L_1$ e $C \in L_2$, e como $L_1 \in T$, segue que $\text{tr}(BD) = 0$ para todo $B \in L_1$ e $D \in T^\perp$. Assim, para todo $B \in L_1, C \in L_2$ e $D \in T^\perp$ temos que $\text{Tr}(B(C + D)) = 0$, logo $T^\perp \oplus L_2 \subset L_1^\perp$. Portanto, $\dim(T^\perp) + \dim(L_2) \leq \dim(L_1^\perp)$, mas $\dim(T^\perp) = n(n+1)/2$ e $\dim(L_1^\perp) = n^2 - \dim(L_1)$, logo $n(n+1)/2 + \dim(L_2) \leq n^2 - \dim(L_1)$ e já que $\dim(L) = \dim(L_1) + \dim(L_2)$ segue que $\dim(L) \leq n(n-1)/2$.

Se a dimensão de L é exatamente $n(n-1)/2$, então $T^\perp \oplus L_2 = L_1^\perp$. Segue-se então que $L_1 = (T^\perp \oplus L_2)^\perp = (T^\perp)^\perp \cap L_2^\perp = T \cap L_2^\perp$, isto é, $L_1 = T \cap L_2^\perp$. Agora, como $L_2 \subset L$ temos que $L^\perp \subset L_2^\perp$ e portanto $L^\perp \cap T \subset L_2^\perp \cap T = L_1$. Por outro lado temos do Lema 1.10 que $L \subset L^\perp$, logo $L \cap T \subset L^\perp \cap T$, isto é, $L_1 \subset L^\perp \cap T$, assim $L_1 = L^\perp \cap T$. Seja $B \in L$, escolheremos uma base tal que $B \in T$. É claro que se $B \in T$, então $B^2 \in T$. Por ser L um subespaço vetorial, qualquer combinação linear de B e C está em L para toda $C \in L$ e segue do Lema 1.11 que $B^2 \in L^\perp$, logo $B^2 \in L^\perp \cap T = L_1 \subset L$, assim $B^2 \in L$, para todo $B \in L$. Portanto para todo $B, C \in L$, temos que $(C + D)^2 - C^2 - D^2 = CD - DC \in L$ e segue do Teorema 1.12, que L é triangularizável. ■

Assim, o teorema anterior, mostra que a dimensão de L é menor ou igual

a $n(n-1)/2$, que é a dimensão do espaço das matrizes estritamente triangulares superiores, e que se a dimensão de L é igual a $n(n-1)/2$, então L é triangularizável e portanto, coincide com a álgebra das matrizes triangulares nilpotentes, relativa a alguma base.

O seguinte lema, dado por Gutiérrez Fernández em [14], é utilizado na prova da solubilidade de álgebras de dimensão n e nilíndice $n-2$.

Lema 1.14 *Seja V um espaço vetorial de dimensão 3 sobre um corpo F com ao menos 3 elementos. Se H é um subespaço vetorial de endomorfismos nilpotentes de $\text{End}(V)$, então cumpre-se uma das seguintes possibilidades:*

- (i) *Existe um elemento não nulo $v \in V$ no kernel de todos os $h \in H$.*
- (ii) *$\dim(H) = 2$. Para todo $h \in H$, $\text{posto}(h) = 2$. Se $H = \langle f, g \rangle$, então existe $\{v_1, v_2, v_3\}$ base de V tal que: $f(v_1) = v_2$, $f(v_2) = v_3$, $f(v_3) = 0$ e $g(v_1) = 0$, $g(v_2) = \beta v_1$, $g(v_3) = -\beta v_2$ com $\beta \neq 0$.*

Prova: Seja H um espaço vetorial de aplicações lineares nilpotentes sobre um espaço vetorial V de dimensão 3, que não cumpre a condição (i). Pelo Lema 1.9, $\dim(H) = 2$. Sejam f, g tais que $H = \langle f, g \rangle$. Como f, g são nilpotentes, $\ker(f) \neq \{0\}$ e $\ker(g) \neq \{0\}$; por outro lado, $\dim(V) = 3 = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{im}(f))$ (igualmente para g), logo $\dim(\ker(f)) = 1$ ou $\dim(\ker(g)) = 1$, portanto, $\text{posto}(f) = 2$ ou $\text{posto}(g) = 2$.

Suponhamos que $\text{posto}(f) = 2$. Usando a forma canônica de Jordan de f , o endomorfismo f pode ser representado, relativo a uma base adequada $\Phi = \{v_1, v_2, v_3\}$ de V como $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, 0)$, isto é,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é a matriz de f respeito à base Φ , e então obviamente $v_1 \in \ker(f)$. A anterior representação de f é invariante respeito a bases da forma $\{\gamma v_1, \beta v_1 +$

$\gamma v_2, \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3\}$ com $\alpha, \beta, \gamma \in F$, e $\gamma \neq 0$. Seja $B = [\beta_{ij}]$ a matriz de g respeito á base Φ . Para todo $\lambda \in F$, $\lambda f + g \in H$, e portanto $\lambda f + g : V \rightarrow V$ é nilpotente, e já que $\dim(V) = 3$, temos que seu polinômio característico é $P(\lambda f + g) := t^3$. Por outro lado $P(\lambda f + g) = \det(tI - \lambda A - B) = t^3 + s_2 t^2 + s_1 t + s_0$, onde

$$s_2 = \beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{33},$$

$$s_1 = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \lambda + \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{13} \\ \beta_{31} & \beta_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_{22} & \lambda + \beta_{23} \\ \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix},$$

$$s_0 = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \lambda + \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \lambda + \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix}.$$

Para $i = 0, 1, 2$, podemos exprimir s_i como polinômios em λ da seguinte maneira

$$s_i = s_{i2}\lambda^2 + s_{i1}\lambda + s_{i0},$$

onde

$$s_{22} = s_{21} = 0, \quad s_{20} = \beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{33},$$

$$s_{11} = \beta_{32} + \beta_{21}, \quad s_{10} = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{13} \\ \beta_{31} & \beta_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix},$$

$$s_{02} = \beta_{31}, \quad s_{01} = \beta_{32}\beta_{11} + \beta_{21}\beta_{33} - \beta_{31}\beta_{12} + \beta_{23}\beta_{31},$$

$$s_{00} = -\beta_{33} \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} - \beta_{23} \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{31} & \beta_{32} \end{vmatrix}.$$

Agora, percorrendo λ pelo menos três elementos diferentes de F obtemos que

$s_{ij} = 0$ para todo $i, j \in \{1, 2\}$. Em particular, de $s_{02} = s_{11} = s_{20} = 0$ temos que

$$\beta_{31} = 0, \quad \beta_{21} + \beta_{32} = 0, \quad \beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{33} = 0. \quad (1.1)$$

A seguir, a prova será dividida em dois casos.

Caso 1. Se $\ker(g) \not\subseteq \langle v_1, v_2 \rangle$, podemos assumir que $v_3 \in \ker(g)$. Assim, de (1.1) temos que a matriz B tem a forma

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & 0 \\ \beta_{21} & -\beta_{11} & 0 \\ 0 & -\beta_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que, $s_{01} = 0$ e $\beta_{33} = \beta_{31} = 0$, segue que $\beta_{32}\beta_{11} = 0$, isto é,

$$\beta_{21}\beta_{11} = 0. \quad (1.2)$$

Por outro lado temos que $s_{10} = 0$ e $\beta_{13} = \beta_{23} = \beta_{33} = 0$, logo $\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21} = 0$, isto é,

$$\beta_{11}^2 - \beta_{12}\beta_{21} = 0. \quad (1.3)$$

De (1.2) e (1.3), e usando a hipótese de $v_1 \notin \ker(g)$ obtemos que $\beta_{11} = \beta_{12} = 0$ e $\beta_{21} \neq 0$. Assim, chamando β_{21} de β , temos que g está representado respeito á base Φ como $g(x_1, x_2, x_3) = \beta(0, x_1, -x_2)$ com $\beta \neq 0$.

Caso 2. Se $\ker(g) \subseteq \langle v_1, v_2 \rangle$, então como $v_1 \notin \ker(g)$, podemos assumir $v_2 \in \ker(g)$, logo $\beta_{32} = 0$ e por (1.1) temos que $\beta_{21} = 0$. Portanto a matriz B tem a seguinte forma

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & 0 & \beta_{13} \\ 0 & 0 & \beta_{23} \\ 0 & 0 & -\beta_{11} \end{pmatrix}.$$

Como B é nilpotente e triangular $\beta_{11} = 0$, e isto implica que $v_1 \in \ker(g)$, contradizendo a hipótese. Portanto, este caso não é possível.

Como mostramos que $\text{posto}(f) = \text{posto}(g) = 2$, podemos repetir o processo utilizando primeiro o endomorfismo g e mostrando que f, g podem ser representadas como $f(x_1, x_2, x_3) = \gamma(0, x_1, -x_2)$ com $\gamma \neq 0$ e $g(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, 0)$, para uma base adequada de V . ■

Nilálgebras de Potências Associativas

Uma álgebra $\mathfrak{A}$ é de *potências associativas*, (p.a.) se para todo $x \in \mathfrak{A}$, a subálgebra gerada por x é associativa, assim definidas as potências dos elementos x de $\mathfrak{A}$ por

$$x^1 = x \quad e \quad x^{i+1} = x^i x \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \dots$$

temos que $\mathfrak{A}$ é de potências associativas se para todo $x \in \mathfrak{A}$

$$x^i x^j = x^{i+j} \quad \text{para} \quad i, j = 1, 2, \dots$$

Numa álgebra de p.a temos que

$$(x^r)^s = x^{rs}, \quad x^r x^s = x^{r+s}.$$

Assim definidas as potências de um elemento temos que numa álgebra de p.a. um elemento x é *nilpotente* se $x^m = 0$ para algum m . É claro que as álgebras de Lie são de p.a. pois $x^2 = 0$ implica que $x^i = 0$ para $i = 2, 3, \dots$

Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra comutativa de p.a. sobre um corpo de característica diferente de 2 e 3. Então se satisfaz a identidade

$$x^4 = x^2 x^2, \tag{2.1}$$

e linearizando (2.1) temos que

$$2x(x(xy)) + x(x^2y) + x^3y = 4x^2(xy), \quad (2.2)$$

$$2y(x(xy)) + 2x(y(xy)) + x(xy^2) + y(x^2y) = 4(xy)^2 + 2x^2y^2, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} 2x(x(yz)) + 2x(z(xy)) + 2z(x(xy)) + 2x(y(xz)) \\ + z(x^2y) + 2y(x(xz)) + y(x^2z) = 4x^2(yz) + 8(xy)(xz), \end{aligned} \quad (2.4)$$

para quaisquer elementos x, y, z , em $\mathfrak{A}$.

O seguinte resultado foi apresentado por Albert em [2].

Lema 2.1 *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra comutativa de p.a. sobre um corpo de característica diferente de 2 e 3. Então, para cada $x \in \mathfrak{A}$, a álgebra gerada pelos operadores L_{x^i} com $i \geq 1$, é gerada por L_x e L_{x^2} .*

Prova: Trocando z por x^r em (2.4) temos que

$$\begin{aligned} 2x(x(x^r y)) + 2x(x^r(xy)) + 2x^r(x(xy)) + 2x(x^{r+1}y) \\ + x^r(x^2y) + 3x^{r+2}y = 4x^2(x^r y) + 8x^{r+1}(xy), \end{aligned} \quad (2.5)$$

ou equivalentemente

$$\begin{aligned} 3L_{x^{r+2}} &= 4L_{x^2}L_{x^r} + 8L_{x^{r+1}}L_x - 2L_x^2L_{x^r} - 2L_xL_{x^r}L_x \\ &\quad - 2L_xL_{x^{r+1}} - 2L_{x^r}L_x^2 - L_{x^r}L_{x^2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Assim, usando (2.6) obtemos por indução sobre r que $L_{x^{r+2}} \in \langle L_x, L_{x^2} \rangle$ para $r \geq 1$. ■

Observemos que, usando as identidades (2.2) e (2.4), uma álgebra comutativa sobre um corpo de característica diferente de 2 e 3 que satisfaz a identidade $x^2x^2 = x^4$, verifica as seguintes relações

$$L_{x^3} = 4L_{x^2}L_x - L_xL_{x^2} - 2L_x^3, \quad (2.7)$$

$$L_{x^4} = L_{x^2}^2 + 10L_{x^2}L_x^2 - 6L_xL_{x^2}L_x - 4L_x^4, \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} 3L_{x^5} = & 24L_{x^2}^2L_x - 8L_{x^2}L_xL_{x^2} + 64L_{x^2}L_x^3 - L_xL_{x^2}^2 \\ & - 74L_xL_{x^2}L_x^2 + 6L_x^2L_{x^2}L_x + 4L_x^3L_{x^2} - 12L_x^5. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Usando indução e identidade (2.4), podemos provar o seguinte.

Lema 2.2 *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra comutativa sobre um corpo de característica diferente de 2 e 3 que satisfaz a identidade $x^2x^{\alpha-2} = x^\alpha$ para todo inteiro positivo $\alpha \leq m$, onde m é um inteiro fixo maior do que 2. Então*

$$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta},$$

para todo $x \in \mathfrak{A}$ e $\alpha + \beta \leq m$.

Teorema 2.3 . *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra comutativa sobre um corpo F de característica diferente de 2, 3 e 5. Então $\mathfrak{A}$ é de p.a. se e somente se, $x^4 = x^2x^2$ para todo $x \in \mathfrak{A}$.*

Prova: Obviamente cada álgebra de p.a. satisfaz a identidade $x^4 = x^2x^2$. Portanto somente temos que provar a outra implicação. Suponhamos que $\mathfrak{A}$ é uma álgebra comutativa que satisfaz a identidade $x^4 = x^2x^2$. Vejamos que $\mathfrak{A}$ é de p.a. Por Lema 2.2, temos que é suficiente provar a igualdade

$$x^2x^{m-2} = x^m, \quad (2.10)$$

para todo $x \in \mathfrak{A}$ e m inteiro positivo, $m > 2$. Provaremos a identidade acima por indução em m . Para $m \leq 4$ a identidade (2.10) cumpre-se trivialmente. Para $m = 5$ a igualdade $x^2x^3 = x^5$ segue-se imediatamente de (2.2), trocando y por x^2 e usando o fato de F ter característica diferente de 3. Seja $m > 5$, e suponhamos por hipótese de indução, que $x^2x^\beta = x^{\beta+2}$ para cada inteiro positivo β com $\beta < m - 2$. Por Lema 2.2, temos que

$$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta},$$

para todo $x \in \mathfrak{A}$ e todo par de inteiros positivos (α, β) , com $\alpha + \beta < m$.

Por identidade (2.7) e hipótese de indução temos imediatamente

$$x^3 x^{m-3} = 4x^2 x^{m-2} - 3x^m. \quad (2.11)$$

Por identidade (2.8) e hipótese de indução temos

$$\begin{aligned} x^4 x^{m-4} &= x^2(x^2 x^{m-4}) + 10x^2 x^{m-2} - 6x(x^2 x^{m-3}) - 4x^m \\ &= x^2 x^{m-2} + 10x^2 x^{m-2} - 6x^m - 4x^m \\ &= 11x^2 x^{m-2} - 10x^m, \end{aligned}$$

logo

$$x^4 x^{m-4} = 11x^2 x^{m-2} - 10x^m. \quad (2.12)$$

Analogamente, de (2.9) e hipótese de indução temos

$$\begin{aligned} 3x^5 x^{m-5} &= 24x^2(x^2(x x^{m-5})) - 8x^2(x(x^2 x^{m-5})) + 64x^2 x^{m-2} \\ &\quad - x(x^2(x^2 x^{m-5})) - 74x(x^2 x^{m-3}) + 6x(x(x^2 x^{m-4})) \\ &\quad + 4x(x(x(x^2 x^{m-5}))) - 12x^m \\ &= 24x^2 x^{m-2} - 8x^2 x^{m-2} + 64x^2 x^{m-2} \\ &\quad - x^m - 74x^m + 6x^m + 4x^m - 12x^m \\ &= 80x^2 x^{m-2} - 77x^m, \end{aligned}$$

assim

$$3x^5 x^{m-5} = 80x^2 x^{m-2} - 77x^m. \quad (2.13)$$

Substituindo x por x^2 , y por x e z por x^{m-5} em (2.4), obtemos que

$$\begin{aligned} &2x^2(x^2(x x^{m-5})) + 2x^2(x^{m-5}(x^2 x)) + 2x^{m-5}(x^2(x^2 x)) \\ &\quad + 2x^2(x(x^2 x^{m-5})) + x^{m-5}(x^4 x) + 2x(x^2(x^2 x^{m-5})) \\ &\quad + x(x^4 x^{m-5}) = 4x^4(x x^{m-5}) + 8(x^2 x)(x^2 x^{m-5}), \end{aligned}$$

e da hipótese de indução, a equação acima reduz-se como segue

$$3x^5 x^{m-5} = 4x^4 x^{m-4} + 8x^3 x^{m-3} - 6x^2 x^{m-2} - 3x^m.$$

Substituindo (2.11), (2.12) e (2.13) na anterior equação obtemos que

$$\begin{aligned} 3x^m &= -3(80x^2x^{m-2} - 77x^m) + 4(11x^2x^{m-2} - 10x^m) \\ &\quad + 8(4x^2x^{m-2} - 3x^m) - 6x^2x^{m-2} \\ &= -10x^2x^{m-2} + 13x^m. \end{aligned}$$

Assim, $10x^m = 10x^2x^{m-2}$ e portanto

$$x^m = x^2x^{m-2}$$

já que F tem característica diferente de 5. ■

Em [1], Albert mostrou que toda álgebra de característica zero ou prima com 30 que satisfaz as identidades $xx^2 = x^2x$ e $x^2x^2 = (x^2x)x$ é de potências associativas. Neste caso a álgebra não é necessariamente comutativa. É importante ressaltar que a restrição na característica é necessária. Para observar este fato, apresentamos três exemplos de álgebras comutativas que cumprem a identidade $x^2x^2 = x^4$, embora elas não sejam de potências associativas.

Exemplo 1 Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra comutativa sobre o corpo $\mathbb{Z}_2$ com base $\{a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$ e produtos $a^2a^2 = a^4$, $a^6 = a^5$ e $a^2a^3 = a^2a^4 = a^2a^5 = a^3a^3 = a^3a^4 = a^3a^5 = a^4a^4 = a^4a^5 = a^5a^5 = 0$. É claro que $\mathfrak{A}$ não é de p.a. pois $a^2a^3 \neq a^5$. Se x é um elemento arbitrário de $\mathfrak{A}$, então existem $\alpha_1, \dots, \alpha_5 \in \mathbb{Z}_2$ tais que $x = \alpha_1a + \alpha_2a^2 + \alpha_3a^3 + \alpha_4a^4 + \alpha_5a^5$. Calculando as potências de x obtemos que:

$$x^2 = \alpha_1^2a^2 + \alpha_2^2a^4, \quad x^2x^2 = \alpha_1^4a^4, \quad x^3 = \alpha_1^3a^3 + \alpha_1^2\alpha_2a^4 + \alpha_1\alpha_2^2a^5$$

e $x^4 = \alpha_1^4a^4 + \alpha_1^2\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)a^5 = \alpha_1^4a^4 = x^2x^2$ já que $\alpha_1^2\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$ para todo $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}_2$.

Exemplo 2 Seja F um corpo de característica 3 e $\mathfrak{A}$ uma álgebra comutativa sobre F , com base $\{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^2a^3\}$, tal que $a^2a^2 = a^4$ e todos os

produtos com, seis fatores ou mais iguais a a , são zero. Seja $x \in \mathfrak{A}$. Então $x = \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \alpha_3 a^3 + \alpha_4 a^4 + \alpha_5 a^5 + \alpha_6 a^2 a^3$ com $\alpha_1, \dots, \alpha_6 \in F$, logo

$$\begin{aligned} x^2 &= \alpha_1^2 a^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 a^3 + 2\alpha_1 \alpha_3 a^4 + 2\alpha_1 \alpha_4 a^5 + \alpha_2^2 a^4 + 2\alpha_2 \alpha_3 a^2 a^3, \\ x^2 x^2 &= \alpha_1^4 a^4 + 4\alpha_1^3 \alpha_2 a^3 a^2, \\ x^3 &= \alpha_1^3 a^3 + 2\alpha_1^2 \alpha_3 a^5 + (2\alpha_1 \alpha_2^2 + \alpha_3 \alpha_1^2) a^2 a^3, \\ x^4 &= \alpha_1^4 a^4 + \alpha_1^3 \alpha_2 a^2 a^3. \end{aligned}$$

mas $4\alpha_1^3 \alpha_2 = \alpha_1^3 \alpha_2$, pois F tem característica 3. Assim,

$$x^2 x^2 = \alpha_1^4 a^4 + \alpha_1^3 \alpha_2 a^2 a^3 = x^4.$$

Portanto $x^2 x^2 = x^4$ para todo $x \in \mathfrak{A}$, embora $\mathfrak{A}$ não seja de p.a.

Exemplo 3 Seja F um corpo de característica 5 e $\mathfrak{A}$ uma álgebra comutativa sobre F que satisfaz a identidade $x^2 x^2 = x^4$. Então (2.2) para $y = x^2$ fornece a identidade $x^2 x^3 = x^5$. Por outro lado, notamos que a relação (2.11), é válida numa álgebra de característica diferente de 2 e 3. Em particular, para $m = 6$ verifica-se em $\mathfrak{A}$ a identidade $x^3 x^3 = 4x^2 x^4 - 3x^6$ ou equivalentemente

$$x^6 = -2x^2 x^4 + 3x^3 x^3,$$

já que a característica de $\mathfrak{A}$ é 5.

Definamos agora $\mathfrak{A}$ como uma álgebra comutativa sobre um corpo F de característica 5 com base $\{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^2 a^4, a^3 a^3\}$, tal que $a^2 a^2 = a^4$, $a^2 a^3 = a^5$, $a^6 = 3a^3 a^3 - 2a^4 a^2$, e o produto de sete ou mais fatores iguais do que a , é zero. Seja $x \in \mathfrak{A}$. Existem $\alpha_1, \dots, \alpha_7 \in F$, tais que $x = \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \alpha_3 a^3 + \alpha_4 a^4 + \alpha_5 a^5 + \alpha_6 a^4 a^2 + \alpha_7 a^3 a^3$. Fazendo os produtos obtemos que

$$\begin{aligned} x^2 &= \alpha_1^2 a^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 a^3 + (2\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2^2) a^4 + 2(\alpha_1 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_3) a^5 + \alpha \alpha^3 a^3 \\ &\quad + \beta a^4 a^2, \\ x^2 x^2 &= \alpha_1^4 a^4 + 4\alpha_1^3 \alpha_2 a^5 + 2\alpha_1^2 (\alpha_2^2 + 2\alpha_1 \alpha_3) a^4 a^2 + 4\alpha_1^2 \alpha_2^2 a^3 a^3, \\ x^3 &= \alpha_1^3 a^3 + 3\alpha_1^2 \alpha_2 a^4 + 3(\alpha_1^2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2^2) a^5 + \gamma a^3 a^3 + \lambda a^4 a^2, \\ x^4 &= \alpha_1^4 a^4 + 4\alpha_1^3 \alpha_2 a^5 + (10\alpha_1^3 \alpha_3 + 9\alpha_2^2 \alpha_1^2) a^3 a^3 - 3(\alpha_1^2 \alpha_2^2 + 2\alpha_1^3 \alpha_3) a^4 a^2 \\ &= \alpha_1^4 a^4 + 4\alpha_1^3 \alpha_2 a^5 + 4\alpha_2^2 \alpha_1^2 a^3 a^3 + 2(2\alpha_1^3 \alpha_3 + \alpha_2^2 \alpha_1^2) a^4 a^2. \end{aligned}$$

Assim, provamos que $\mathfrak{A}$ não é de p.a. e cumpre a identidade $x^2x^2 = x^4$ para todo $x \in \mathfrak{A}$.

As álgebras de Jordan estão relacionadas com as álgebras de potências associativas como mostra o seguinte teorema dado em [18].

Teorema 2.4 *Toda álgebra de Jordan é de potências associativas.*

O contrário não é em geral verdadeiro, como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 4 Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra comutativa sobre um corpo de característica diferente de 2 e 3 com base $\{b, a, a^2, a^3, a^4\}$ e produtos não nulos dados por $ab = a^2$, $a^3b = 2a^4$ e $a^i a^j = a^{i+j}$ para $2 \leq i+j \leq 4$. Então $\mathfrak{A}$ é uma nilálgebra comutativa de p.a. de nilíndice 5 que não é de Jordan, pois $(a^2b)a = 0$ e $a^2(ba) = a^2a^2 = a^4 \neq 0$.

No capítulo anterior mostramos que para uma classe arbitrária de álgebras, a subclasse de nilálgebras não é radical. Não obstante, se a dita classe é de p.a. então ela é radical. O seguinte lema e sua prova, estão em [22].

Lema 2.5 *Se $\mathfrak{R}$ é uma classe de álgebras fechada por homomorfismos e fechada para extensões, então a soma de dois $\mathfrak{R}$ -ideais é um $\mathfrak{R}$ -ideal.*

Lema 2.6 *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra comutativa de p.a. Se I é um ideal de $\mathfrak{A}$ tal que I e $\mathfrak{A}/I$ são nilálgebras, então $\mathfrak{A}$ é uma nilálgebra.*

Prova: Seja a um elemento de $\mathfrak{A}$ tal que $\bar{0} \neq \bar{a} \in \mathfrak{A}/I$. Dado que $\mathfrak{A}/I$ é uma nilálgebra, existe um inteiro r tal que $\overline{a^r} = \bar{a}^r = \bar{0}$, logo $a^r \in I$, mas I é também uma nilálgebra, logo existe um inteiro s tal que $(a^r)^s = 0$ e como $\mathfrak{A}$ é de p.a. $0 = (a^r)^s = a^{rs}$. Assim, temos que todo elemento de $\mathfrak{A}$ é nilpotente o que mostra que $\mathfrak{A}$ é uma nilálgebra. ■

Teorema 2.7 *Seja $\mathfrak{M}$ a classe das álgebras comutativas de p.a. A subclasse das nilálgebras, $\text{Nil}(\mathfrak{M})$, é radical.*

Prova: É claro que $Nil(\mathfrak{M})$ é fechada por homomorfismos.

Seja $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}$ e definamos $Nil(\mathfrak{A}) = \sum \{I \triangleleft \mathfrak{A} : I \in Nil(\mathfrak{M})\}$. $Nil(\mathfrak{A})$ é um ideal de $\mathfrak{A}$ e segue, dos Lemas 2.5 e 2.6, que $Nil(\mathfrak{A}) \in Nil(\mathfrak{M})$.

Vejamos agora que $Nil(\mathfrak{A}/Nil(\mathfrak{A})) = 0$. Seja $\bar{I}$ um nilideal de $\mathfrak{A}/Nil(\mathfrak{A})$. Sabemos que $\bar{I}$ é da forma $I/Nil(\mathfrak{A})$ onde $Nil(\mathfrak{A}) \subseteq I$ e I ideal de $\mathfrak{A}$. Pelo Lema 2.6, I é um nilideal, logo $I \subseteq Nil(\mathfrak{A})$ e portanto $\bar{I} = \bar{0}$. Consequentemente, segue que $Nil(\mathfrak{A}/Nil(\mathfrak{A})) = 0$. Portanto, temos que $Nil(\mathfrak{M})$ é radical. ■

Se $\mathfrak{A}$ é uma álgebra comutativa de p.a. então pelo Teorema 2.7, $\mathfrak{A}$ contém um único nilideal maximal $Nil(\mathfrak{A})$, chamado de *nilradical* da álgebra $\mathfrak{A}$.

Lema 2.8 *Em uma álgebra $\mathfrak{A}$ de p.a. de dimensão finita, tem-se que $S(\mathfrak{A}) \subseteq Nil(\mathfrak{A})$, isto é, o radical solúvel de $\mathfrak{A}$ está contido no nilradical de $\mathfrak{A}$.*

Prova: Vejamos por indução sobre m que $a^{2^m} \in I^{(m)}$ para todo $a \in \mathfrak{A}$ e m inteiro não negativo. Se $m = 0$, então $a^{2^0} = a \in I = I^{(0)}$. Se $m > 0$ e assumindo por hipótese de indução $a^{2^k} \in I^{(k)}$ para $k < m$, temos para m que $a^{2^m} = a^{2^{m-1}} a^{2^{m-1}} \in I^{(m-1)} I^{(m-1)} = I^{(m)}$.

Seja $a \in S(\mathfrak{A})$. Temos que existe um inteiro m tal que $(S(\mathfrak{A}))^{(m)} = 0$, mas $a^{2^m} \in (S(\mathfrak{A}))^{(m)} = 0$, logo $a^{2^m} = 0$ para todo $a \in S(\mathfrak{A})$, portanto $S(\mathfrak{A})$ é nilideal de nilíndice 2^m , logo $S(\mathfrak{A}) \subseteq Nil(\mathfrak{A})$. ■

Dedkov [8], demonstrou que se $\mathfrak{A}$ é uma álgebra de p.a. de dimensão finita sobre um corpo de característica diferente de 2, 3 e 5, e $\mathfrak{A}$ tem uma base tal que todos seus elementos são nilpotentes, então $\mathfrak{A}$ é uma nilálgebra. Shestakov [19], mostrou que se $\mathfrak{A}$ é uma álgebra de p.a. de dimensão finita sobre um corpo de característica diferente de 2, e $\mathfrak{A}$ tem uma base tal que todos seus elementos são nilpotentes, então $\mathfrak{A}$ é nilpotente. Já que toda nilálgebra alternativa é de p.a. [18], tem-se como consequência o seguinte teorema.

Teorema 2.9 *Toda nilálgebra alternativa de dimensão finita, sobre um corpo de característica diferente de 2, é nilpotente.*

Assim, em vista do teorema anterior, temos que os conceitos de álgebra nilpotente, álgebra solúvel e nilálgebra coincidem para álgebras alternativas de dimensão finita. Portanto na classe das álgebras alternativas, temos pelo Teorema 2.9, que se $\mathfrak{A}$ é uma álgebra alternativa de dimensão finita, então existe um único ideal maximal nilpotente $\mathfrak{R}(\mathfrak{A})$. Assim, temos neste caso que, $\mathfrak{R}(\mathfrak{A}) = S(\mathfrak{A}) = Nil(\mathfrak{A})$.

No caso de álgebras comutativas de p.a. de dimensão finita, a questão de igualdade dos radicais é um problema aberto, o qual é conhecido como o *Problema de Albert*. No ano de 1948 A. Albert [2] formulou a seguinte conjectura:

Problema de Albert *É toda nilálgebra comutativa de potências associativas de dimensão finita solúvel?*

Suttles [20] deu, em 1972, o seguinte exemplo.

Exemplo de Suttles Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra comutativa com base $\{e_1, \dots, e_5\}$ e produtos não nulos dados por: $e_1e_2 = e_2e_4 = -e_1e_5 = e_3$, $e_1e_3 = e_4$ e $e_2e_3 = e_5$. Note que $\mathfrak{A}^2 = \langle e_3, e_4, e_5 \rangle$ do que segue que $\mathfrak{A}^{(2)} = \mathfrak{A}^2\mathfrak{A}^2 = 0$, logo $\mathfrak{A}$ é solúvel de índice de solubilidade 2. Porém $\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}^3 = \dots = \mathfrak{A}^m \neq 0$ para todo inteiro m , o que mostra que $\mathfrak{A}$ não é nilpotente. Assim, temos uma nilálgebra comutativa de p.a. de nilíndice 4 a qual é solúvel mas não é nilpotente.

Assim, o exemplo de Suttles, mostra que no problema de Albert a condição de solubilidade não pode ser trocada pela condição de nilpotência.

O primeiro resultado destacável na aproximação à solução do problema de Albert foi obtido por M. Gerstenhaber em [12]. Ele obteve dois resultados importantes. No primeiro, demonstrou que se $\mathfrak{A}$ é uma nilálgebra comutativa de característica zero e nilíndice t , então $R_a^{2t-3} = 0$ para todo a em $\mathfrak{A}$. No segundo, provou que se $\mathfrak{A}$ é uma álgebra comutativa de p.a. de característica

zero e se para algum $a \in \mathfrak{A}$, $a^t = 0$, então a álgebra gerada por $R_{a^1}, R_{a^2}, \dots$ é nilpotente de índice menor ou igual a $2(t-1)^2 + 1$, em particular R_a é nilpotente. A condição da característica zero não é estritamente necessária, pode-se tomar a característica suficientemente grande comparada com t . A continuação faremos um estudo detalhado destes resultados, introduziremos algumas definições e resultados necessários para a prova dos teoremas.

Linearização. Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo F . A soma direta de V , m vezes, será denotada por V^m , e a função $f^m : V^m \rightarrow U$ (a qual, pelo momento, não consideraremos multilinear) dizemos que tem grau m . Seja r um inteiro fixo e $a_1, \dots, a_r$ elementos de V . A soma dos a_i sem os termos $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$, será denotada por $\sum_{i \neq i_1, \dots, i_k} a_i$. Dada uma função $g : V \rightarrow U$ de grau 1, definimos a função $g^{(r)}$ de grau r por

$$g^{(r)}(a_1, \dots, a_r) = g\left(\sum a_i\right) - \sum_{i_1} g\left(\sum_{i \neq i_1} a_i\right) + \sum_{i_1 < i_2} g\left(\sum_{i \neq i_1, i_2} a_i\right) - \dots + (-1)^r g(0). \quad (2.14)$$

Lema 2.10 *Tem-se as seguintes relações:*

- (i) $(g + h)^{(r)} = g^{(r)} + h^{(r)}$;
- (ii) $g^{(r)}(a_1, \dots, a_r)$ é simétrica em $a_1, \dots, a_r$;
- (iii) Se $g(a) = 0$ para todo $a \in V$, então $g^{(r)} = 0$;
- (iv) Se $a_i = 0$ para algum i , então $g^{(r)}(a_1, \dots, a_r) = 0$.

Seja $f(x_1, \dots, x_m)$ uma função de grau m . Então definimos uma função correspondente $\bar{f}$ de grau 1 por $\bar{f}(a) = f(a, \dots, a)$. Para simplificar a notação, dado $X = (x_1, \dots, x_m)$, escreveremos $f(x_1, \dots, x_m)$ por $f(X)$. Para toda permutação $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(m))$ de $1, 2, \dots, m$ escreveremos $X_\sigma = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)})$.

Lema 2.11 *Seja f uma função multilinear de grau m . Então*

$$\bar{f}^{(r)}(x_1, \dots, x_r) = \begin{cases} 0, & \text{se } r > m \\ \sum_{\sigma} f(X_{\sigma}), & \text{se } r = m \text{ com } \sigma \text{ de } 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

Prova: Como f é multilinear, temos que $\bar{f}(\sum a_i) = f(\sum a_i, \dots, \sum a_i) = \sum f(a_{i_1}, \dots, a_{i_m})$, onde cada índice varia de 1 a r . Sejam todos os termos da soma $\bar{f}^{(r)}(a_1, \dots, a_r)$ expandidos similarmente. Então $\bar{f}^{(r)}(a_1, \dots, a_r)$ é expressado como soma de termos da forma $\pm f(a_{i_1}, \dots, a_{i_m})$. Seja $\bar{f}^{(r)}(a_1, \dots, a_r) = f_0$, e para $j > 0$ denotamos por f_j a soma de todos os termos da forma $\pm f(a_{i_1}, \dots, a_{i_m})$ nos quais $a_1, \dots, a_j$ aparecem todos como argumentos. Seja $f_j - f_{j+1} = f'_{j+1}$. Suponhamos por hipótese de indução que f_0 é identicamente igual a f_j para $0 \leq j < r$. Se $a_{j+1} = 0$, então $f_0 = \bar{f}^{(r)}(a_1, \dots, a_r) = 0$ pelo Lema 2.10 parte (iv), logo pela hipótese de indução $0 = f_0 = f_j$. Note que $f_{j+1} = 0$ pela multilinearidade de f . Portanto $f'_{j+1} = 0$, mas em f'_{j+1} não aparece a_{j+1} como argumento, logo f'_{j+1} é identicamente zero e assim f_{j+1} é igual a f_0 . Assim, por indução temos que f_0 é igual a f_r , isto é, $\bar{f}^{(r)}(a_1, \dots, a_r)$ é igual à soma de todos os termos da forma $\pm f(a_{i_1}, \dots, a_{i_m})$ em sua expansão, na qual todos os a_j para $j = 1, \dots, r$ aparecem pelo menos uma vez entre os $a_{i_1}, \dots, a_{i_m}$.

Se $r > m$, então não podem aparecer tais termos, logo $\bar{f}^{(r)} = 0$.

Se $r = m$, então $a_{i_1}, \dots, a_{i_m}$ é uma permutação de $a_1, \dots, a_m$. Seja $A = (a_1, \dots, a_m)$. Todo termo da forma $f(A_{\sigma})$ aparece exatamente uma vez na expansão de $\bar{f}(\sum_{i=1}^n a_i)$ e não pode aparecer de novo na expansão de $\bar{f}^{(m)}(a_1, \dots, a_m)$, já que a expansão de $\bar{f}(\sum_{i \neq i_1, \dots, i_s} a_i)$ não contém os termos $a_{i_1}, \dots, a_{i_s}$ como argumentos. Portanto $\bar{f}^{(m)}(a_1, \dots, a_m)$ é a soma de termos da forma $f(A_{\sigma})$, o que prova o lema. ■

As funções de qualquer grau, em particular as de grau 1, formam um espaço vetorial. Embora f e g sejam funções de graus diferentes, podemos definir $\bar{f} + \bar{g}$ como $(\bar{f} + \bar{g})(a) = \bar{f}(a) + \bar{g}(a)$. Seja $\{f_1, \dots, f_q\}$ um conjunto de funções multilineares tais que $\bar{f}_1 + \dots + \bar{f}_q = 0$. Suponhamos que $f_1, \dots, f_p$

tem grau m e $f_{p+1}, \dots, f_q$ tem grau menor que m . Seja $A = (a_1, \dots, a_m)$. Pelo Lema 2.11, temos que $\bar{f}_{p+1}^{(m)}(A) + \dots + \bar{f}_q^{(m)}(A) = 0$, pois cada f_i para $p+1 \leq i \leq q$ tem grau menor que m e portanto $\bar{f}_i^{(m)} = 0$. Assim dos Lemas 2.10 e 2.11, temos que

$$\begin{aligned}
 \sum_{\sigma} (f_1(A_{\sigma}) + \dots + f_p(A_{\sigma})) &= \sum_{\sigma} f_1(A_{\sigma}) + \dots + \sum_{\sigma} f_p(A_{\sigma}) \\
 &= \bar{f}_1^{(m)}(A) + \dots + \bar{f}_p^{(m)}(A) \\
 &= \bar{f}_1^{(m)}(A) + \dots + \bar{f}_p^{(m)}(A) + \bar{f}_{p+1}^{(m)}(A) + \dots + \bar{f}_q^{(m)}(A) \\
 &= (\bar{f}_1^{(m)} + \dots + \bar{f}_q^{(m)})(A) \\
 &= (\bar{f}_1 + \dots + \bar{f}_q)^{(m)}(A) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{\sigma} (f_1(A_{\sigma}) + \dots + f_p(A_{\sigma})) = 0.$$

Se $a_1 = a_2 = \dots = a_m = a$, então

$$\begin{aligned}
 m!(\bar{f}_1 + \dots + \bar{f}_p)(a) &= m! \sum_{i=1}^p \bar{f}_i(a) = m! \sum_{i=1}^p f_i(A) \\
 &= \sum_{\sigma} (f_1(A_{\sigma}) + \dots + f_p(A_{\sigma})) = 0.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$m!(\bar{f}_1 + \dots + \bar{f}_p) = 0.$$

Portanto se a característica de F é maior que m , então $\bar{f}_1 + \dots + \bar{f}_p = 0$, similarmemente para os outros $\bar{f}_i$, onde o grau de f_i é outro qualquer. Em particular, se F tem característica zero, então em toda identidade da forma $\bar{f}_1 + \dots + \bar{f}_q = 0$, onde as f_i são multilineares, as partes homogêneas são separadamente zero.

Operadores sobre identidades. Seja P um anel de polinômios livre, comutativo, não-associativo, com geradores x e y , sobre um corpo F de característica zero. Cada monómio $f^t(x)$ em P , de x -grau t é produto de um elemento não nulo em F por um produto de t fatores x e todos os outros fatores y . Existe um correspondente monómio multilinear $f^t(x_1, \dots, x_t)$ em t variáveis livres $x_1, \dots, x_t$

Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ elementos de P e $\alpha_{r+1} = \alpha_{r+2} = \dots = \alpha_t = x$ se $t > r$. Existe um vetor correspondente $G = (\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ com coordenadas em P , e fica clara a notação $f^t(G)$ e $f^t(G_\sigma)$. Definimos o operador $\delta(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ de monómios de P em P , como segue

$$f^t(x) \delta(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \begin{cases} 0, & \text{para } t < r \\ \frac{1}{(t-r)!} \sum_{\sigma} f^t(G_{\sigma}), & \text{para } t \geq r. \end{cases}$$

Note que podemos descrever o operador δ assim: $f^t(x) \delta(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ obtém-se fazendo todas as possíveis r substituições de t idênticos argumentos x por $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ e somando os termos resultantes.

O ideal N de todos os elementos de P que anulam-se quando x e y são substituídos por elementos arbitrários a e b de $\mathfrak{A}$ é levado sobre si mesmo por todos os operadores $\delta(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. Assim, os elementos de N anulam-se identicamente em $\mathfrak{A}$. Note que o operador $\delta(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ é simétrico em $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ e linear em cada um dos argumentos.

Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in P$ homogêneos nas variáveis x e y , isto é, cada um dos monómios de α_i tem o mesmo grau, (unicamente consideraremos elementos homogêneos simultaneamente). Então definiremos o grau de $\delta(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ em x e y assim: Seja m_i o grau de α_i em x e n_i o grau em y . Então $\text{grau}_x \delta = (\sum m_i) - r$ e $\text{grau}_y \delta = \sum n_i$. Note que $\text{grau}_x \delta$ pode ser negativo. Se p é um elemento de P homogêneo em x e em y , então $p\delta$ é também homogêneo e $\text{grau}_y(p\delta) = \text{grau}_y p + \text{grau}_y \delta$, igualmente para x , exceto se $\text{grau}_x p + \text{grau}_x \delta < 0$ onde $p\delta = 0$.

Denotaremos por Λ o espaço vetorial sobre F de todas as combinações lineares de operadores da forma $\delta(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. Os elementos de Λ serão consi-

derados homogêneos quando são combinações lineares de δ 's do mesmo grau em x e em y , portanto podemos falar do grau dos elementos de Λ em x e em y . O espaço vetorial Λ é, de fato, um anel associativo, não-comutativo de operadores lineares em P . Note que, o operador δ com $r = 1$, cumpre que para todo $p, q \in P$,

$$(pq)\delta = (p\delta)q + p(q\delta).$$

Como observamos, $f^t(x) \delta(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ obtém-se fazendo todas as possíveis r substituições dos t idênticos argumentos x em $f^t(x)$ pelos $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ e somando as expressões obtidas. Seja $g_i^m(x)$ um monómio obtido neste processo, tal que $f^t(x) \delta(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \sum_i g_i^m(x) = g^m(x)$, o grau m é em geral diferente de t , mas é o mesmo para todos os $g_i(x)$. Consideraremos o argumento x de $g_i(x)$, para um i fixo, como pertencente a dois conjuntos S_1 e S_2 , onde S_1 contem $m - t + r$ fatores x os quais estavam presentes nos $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ e apareceram em $g_i(x)$ pelo fato de $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ ter substituído r fatores x presentes originalmente em $f^t(x)$, e S_2 contém os $t - r$ fatores x que estavam em $f^t(x)$ e não foram substituídos. Se aplicarmos $\delta(\beta_1, \dots, \beta_s)$ a $g_i(x)$, então a substituição de s dos idênticos argumentos x em $g_i(x)$ por s dos β_i pega elementos x de ambos conjuntos, isto é, em todo termo de $g_i(x) \delta(\beta_1, \dots, \beta_s)$, s dos idênticos argumentos x em $g_i(x)$ são substituídos por s dos β_i , mas alguns dos s elementos x substituídos pertencem a S_1 e os outros restantes a S_2 . Devido ao efeito das substituições feitas nos x de S_1 , não é possível saber se as substituições foram feitas nos x que estavam em $f(x)$ antes ou depois das substituições pelos α_i . Portanto, para pegar conjuntamente todos os termos de $g(x) \delta(\beta_1, \dots, \beta_s)$, definem-se os seguintes conjuntos, $B_1 = \{\beta_{11}, \dots, \beta_{1i_1}\}$ dos β 's que substituíram i_1 dos x em α_1 , $B_2 = \{\beta_{22}, \dots, \beta_{2i_2}\}$ dos β 's que substituíram i_2 dos x em α_2 , e assim por diante até B_{r+1} com os restantes β 's que substituíram x do conjunto S_2 , isto é, dos x em $g_i(x)$ que estavam presentes em $f(x)$ e não pela substituição de algum α . Se $B = \{\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_t}\}$ é um subconjunto de $\{\beta_1, \dots, \beta_s\}$, então $\delta(B)$ denotará $\delta(\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_t})$ e $\delta(\dots, B)$ denotará $\delta(\dots, \beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_t})$. Se B é vazio, então $\delta(B)$ é o operador identidade em Λ . Por todo isto, temos que a soma

de todos estes termos é $f(x) \delta(\alpha_1 \delta(B_1), \dots, \alpha_r \delta(B_r), B_{r+1})$. Portanto,

$$f(x) \delta(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \delta(\beta_1, \dots, \beta_s) = f(x) \sum \delta(\alpha_1 \delta(B_1), \dots, \alpha_r \delta(B_r), B_{r+1}),$$

onde $B_1, \dots, B_{r+1}$ é uma partição de $\{\beta_1, \dots, \beta_s\}$ sobre $r + 1$ conjuntos mutuamente disjuntos (em algum ordem), alguns dos quais podem ser vazios. Assim, a regra de multiplicação para os elementos de Λ é, por todo o anterior,

$$\delta(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \delta(\beta_1, \dots, \beta_s) = \sum \delta(\alpha_1 \delta(B_1), \dots, \alpha_r \delta(B_r), B_{r+1}),$$

onde a soma é feita sobre todas as partições $B_1, \dots, B_{r+1}$ de $\{\beta_1, \dots, \beta_s\}$ sobre $r + 1$ conjuntos, mutuamente disjuntos (em algum ordem), incluindo conjuntos vazios. Um caso particular da regra para multiplicação é quando $r = s = 1$. Assim,

$$\delta(\alpha) \delta(\beta) = \delta(\alpha \delta(\beta)) + \delta(\alpha, \beta) \quad \text{e} \quad \delta(\beta) \delta(\alpha) = \delta(\beta \delta(\alpha)) + \delta(\beta, \alpha),$$

mas $\delta(\alpha, \beta) = \delta(\beta, \alpha)$, logo

$$\delta(\alpha) \delta(\beta) - \delta(\beta) \delta(\alpha) = \delta(\gamma)$$

onde $\gamma = \alpha \delta(\beta) - \beta \delta(\alpha)$. Para simplificar a notação, se um elemento α de P , aparece r vezes como argumento no operador δ , então estas r aparições serão denotadas por $\alpha : r$.

Lema 2.12 *Para todo $\alpha \in P$ e todo inteiro não negativo m ,*

$$\delta(x^2 : m) \delta(\alpha) = m \delta(\alpha x + x \alpha, x^2 : m - 1) + \delta(x^2 : m, \alpha).$$

Prova: Usando a regra de multiplicação para elementos de Λ , onde $r = m$, $s = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = x^2$ e $\beta_1 = \alpha$, tem-se

$$\begin{aligned} \delta(x^2 : m) \delta(\alpha) &= \delta(x^2, \dots, x^2) \delta(\alpha) \\ &= \delta(x^2 \delta(\alpha), x^2 : m - 1) + \delta(x^2, x^2 \delta(\alpha), x^2 : m - 2) + \\ &\quad \dots + \delta(x^2 : m - 1, x^2 \delta(\alpha)) + \delta(x^2 : m, \alpha). \end{aligned}$$

Já que $\delta(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ é simétrico e $x^2\delta(\alpha) = \alpha x + x\alpha$, segue que

$$\delta(x^2 : m) \delta(\alpha) = m \delta(\alpha x + x\alpha, x^2 : m - 1) + \delta(x^2 : m, \alpha)$$

e portanto o lema é provado. $\blacksquare$

Observe que, se P é comutativo, então $\alpha x = x\alpha$ e portanto do lema anterior obtém-se que

$$\delta(x^2 : m) \delta(\alpha) = 2m \delta(\alpha x, x^2 : m - 1) + \delta(x^2 : m, \alpha).$$

Consideremos agora uma nilálgebra comutativa não-associativa $\mathfrak{A}$ de nilíndice k sobre um corpo F de característica zero e P o anel de polinômios comutativo não-associativo, em duas variáveis x e y , sobre F .

Lema 2.13 *Seja $\alpha \in P$. Então para todo inteiro m não negativo, existe um elemento homogêneo D_r em Λ , para $r = 0, 1, 2, \dots, m$, de grau r em x e 0 em y tal que*

$$\delta(\alpha R_x^m) = \sum_{r=0}^m D_r \delta(\alpha, x^2 : m - r).$$

Prova: Faremos a prova por indução sobre m . Se $m = 0$ o lema é trivial, já que podemos tomar D_0 como o operador identidade em Λ . Seja $m > 0$. Vamos supor, por hipótese de indução, que o lema é válido para $m = s - 1$. Consideraremos $x\alpha$ em lugar de α . Pela hipótese de indução temos que

$$\delta(x\alpha R_x^{s-1}) = \delta(\alpha R_x^s) = \sum_{r=0}^{s-1} E_r \delta(x\alpha, x^2 : s - 1 - r), \quad (2.15)$$

onde E_r é um elemento homogêneo em Λ de grau r em x e 0 em y . Por Lema 2.12, temos que

$$\delta(x^2 : t) \delta(\alpha) = 2t \delta(x\alpha, x^2 : t - 1) + \delta(x^2 : t, \alpha),$$

logo para $t = s - r$, temos

$$\delta(x^2 : s - r) \delta(\alpha) = 2(s - r) \delta(x\alpha, x^2 : s - r - 1) + \delta(x^2 : s - r, \alpha),$$

logo

$$\delta(x\alpha, x^2 : s - r - 1) = \frac{1}{2(s-r)} (\delta(x^2 : s - r) \delta(\alpha) - \delta(x^2 : s - r, \alpha)),$$

que substituída em (2.15) nos leva a

$$\begin{aligned} \delta(\alpha R_x^s) &= \sum_{r=0}^{s-1} \frac{1}{2(s-r)} E_r (\delta(x^2 : s - r) \delta(\alpha) - \delta(x^2 : s - r, \alpha)) \\ &= \sum_{r=0}^{s-1} \frac{-1}{2(s-r)} E_r \delta(x^2 : s - r, \alpha) \\ &\quad + \sum_{r=0}^{s-1} \frac{1}{2(s-r)} E_r \delta(x^2 : s - r) \delta(\alpha). \end{aligned}$$

Portanto, considerando

$$D_r = \frac{-1}{2(s-r)} E_r \text{ para } r < s \quad \text{e} \quad D_s = \sum_{r=0}^{s-1} \frac{1}{2(s-r)} E_r \delta(x^2 : s - r)$$

o lema fica provado. ■

Da demonstração do lema segue que a identidade do lema também é válida se o corpo F for de característica maior a m .

Teorema 2.14 *Seja $\mathfrak{A}$ uma nilálgebra comutativa de nilíndice k , sobre um corpo F de característica zero, ou maior a $2k - 3$. Então $R_a^{2k-3} = 0$ para todo $a \in \mathfrak{A}$.*

Prova: No lema anterior, seja $\alpha = y$ e observe que $yR_x^m = x\delta(yR_x^m) = \sum_{r=0}^m xD_r \delta(y, x^2 : m - r)$. Como o grau de xD_r em x é $r + 1$ e $\delta(y, x^2 : m - r)$ tem $m - r + 1$ argumentos, temos que $xD_r \delta(y, x^2 : m - r) = 0$ se $m - r + 1 > r + 1$, isto é, se $r < m/2$. Seja $[c]$ o maior inteiro menor ou igual a c . Então

$$yR_x^m = \sum_{r=[(m+1)/2]}^m xD_r \delta(y, x^2 : m - r).$$

Agora, se $m = 2k - 3$, então $(m + 1)/2 = k - 1$, logo $r \geq k - 1$ na soma anterior, e já que o grau de $x D_r$ é maior ou igual que k , segue-se que $x D_r$ pertence sempre ao ideal N de todos os elementos de P que são zero ao substituir x e y por elementos arbitrários a e b de $\mathfrak{A}$, isto é, $x D_r$ é uma identidade em $\mathfrak{A}$. Logo $y R_x^{2k-3} \in N$, portanto $R_a^{2k-3} = 0$ para todo $a \in \mathfrak{A}$. ■

No que segue, P denotará um anel de polinômios comutativo de p.a. em duas variáveis x e y , sobre um corpo F de característica zero, e Λ será o correspondente anel de operadores. O seguinte lema é provado em [12] por M. Gerstenhaber.

Lema 2.15 *Seja $\alpha \in P$ e $m, m_1, \dots, m_r$ inteiros não negativos com $m_1, \dots, m_r \geq 2$. Então $\delta(\alpha x^m, x^{m_1}, \dots, x^{m_r})$ pode-se representar como combinação linear de operadores da forma $\delta(x^2 : n) \delta(\alpha, x^{n_1}, \dots, x^{n_s})$, onde $n_1, \dots, n_s \geq 2$.*

No lema anterior temos que $\sum_{i=1}^r m_i + m - r = \sum_{i=1}^s n_i + n - s$, já que $\delta(\alpha x^m, x^{m_1}, \dots, x^{m_r})$ é combinação linear de operadores do mesmo grau em x e em y . Aplicando reiteradamente o lema anterior, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 2.16 *Dados $\alpha \in P$ e inteiros $m_1, \dots, m_r \geq 0$, $n_1, \dots, n_s \geq 2$, existem elementos D' e D'' em Λ de grau p e q , respectivamente, em x e zero em y tais que*

$$\delta(\alpha x^{m_1} \dots x^{m_r}, x^{n_1}, \dots, x^{n_s}) = \sum_{p+q} D' \delta(\alpha, D'')$$

onde $p + q = \sum m_i + \sum n_j - s - 1$.

No corolário anterior estamos introduzindo a seguinte notação. Dado $\alpha \in P$ e um operador $D = \sum \delta(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{n_i}})$ em Λ , denotamos por $\delta(\alpha, D)$ o operador $\sum \delta(\alpha, \alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{n_i}})$. No seguinte teorema, denotaremos $a R_b R_c \dots R_d$ por $abc \dots d$.

Teorema 2.17 *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra comutativa de p.a. sobre um corpo F de característica zero. Se a é um elemento nilpotente de $\mathfrak{A}$ de índice k , então a álgebra gerada por $R_a, R_{a^2}, R_{a^3}, \dots$ é nilpotente de índice menor ou igual a $2(k-1)^2 + 1$.*

Prova: Vejamos que $ba^{m_1} \dots a^{m_r} = 0$ sempre que $\sum m_i \geq 2(k-1)^2 + 1$. Observe que, pelo corolário anterior

$$yx^{m_1} \dots x^{m_r} = x \delta(yx^{m_1} \dots x^{m_r}) = \sum_{p+q} x D_p \delta(y) D_q.$$

Mostremos que se o elemento $x D_p \delta(y) D_q$ de P tem grau em x maior a $2(k-1)^2 + 1$, então será zero quando x é substituído por a e y é substituído por qualquer elemento de $\mathfrak{A}$. Escreveremos $x = a$ para indicar que x é substituído por a .

Se $x D_p \delta(y) D_q$ não se anula para $x = a$, então $x D_p$ tem grau menor a $2k$. Pois se $x D_p$ tive-se grau maior ou igual a $2k$, então como P é de p.a. poderíamos escrever $x D_p$ como um múltiplo de $x^r x^s$, com $r, s \geq k$. Logo

$$x D_p \delta(y) D_q = x^r x^s \delta(y) D_q = [(x^r \delta(y))x^s + x^r(x^s \delta(y))]D_q.$$

Aplicando D_q que tem grau q em x e zero em y , as potências de x que aparecem aumentarão, portanto todo termo terá um fator x^t com $t \geq k$, mas se $t \geq k$, então x^t anula-se quando $x = a$. Logo, se $x D_p \delta(y) D_q \neq 0$ para $x = a$, então $x D_p$ tem grau menor ou igual a $2k-1$ em x e portanto $x D_p \delta(y)$ tem grau menor ou igual a $2k-2$, pois o grau de $\delta(y)$ em x é -1 .

Se o grau de $x D_p \delta(y) D_q$ é maior ou igual a $2(k-1)^2 + 1 = (2k-2)(k-1) + 1$, então o grau de D_q é maior ou igual a $(2k-2)(k-1) + 1 - (2k-2)$, isto é, o grau de D_q é maior a $(2k-2)(k-2)$ em x . Por outro lado, temos que D_q é combinação linear de operadores da forma $\delta(x^{s_1}, \dots, x^{s_l})$, assim, na verdade estamos aplicando $\delta(x^{s_1}, \dots, x^{s_l})$ a $x D_p \delta(y)$, e como o número de entradas de $\delta(x^{s_1}, \dots, x^{s_l})$ é l , temos que l é menor ou igual ao grau de $x D_p \delta(y)$, isto é, $l \leq 2k-2$, caso contrário $\delta(x^{s_1}, \dots, x^{s_l})$ anularia $x D_p \delta(y)$. Temos também que $s_i \leq k-1$ para todo i , pois se $s_i > k-1$, então x^{s_i} anularia-se

para $x = a$, logo D_q tem grau menor ou igual a $(2k - 2)(k - 1) - (2k - 2)$ em x . Assim todos os termos em $\sum_{p+q} x D_p \delta(y) D_q$ são zero para $x = a$ quando o grau é maior ou igual a $2(k - 1)^2 + 1$. Portanto, $ba^{m_1} \cdots a^{m_r}$ é zero sempre que $\sum m_i \geq 2(k - 1)^2 + 1$, o que mostra o teorema. ■

Solubilidade segundo seu nilíndice

Neste capítulo, estudaremos a solubilidade de uma nilálgebra comutativa em função de seu nilíndice. Para nilíndice 3 temos que a álgebra é de Jordan, seguindo-se sua nilpotência como uma consequência de um teorema dado por Albert em [18]. Quando o nilíndice é maior ou igual à dimensão, Correa e Suazo [7] mostraram a nilpotência da álgebra (este resultado foi uma generalização do método usado por Gerstenhaber e Myung [11] no estudo das nilálgebras de dimensão menor ou igual a 4). Finalmente, Gutiérrez Fernández [14] mostrou a solubilidade da álgebra quando o nilíndice é maior ou igual à dimensão menos dois.

A seguir, será apresentado um estudo detalhado destes resultados incluindo alguns teoremas adicionais, os quais serão referenciados no devido momento.

Seja $\mathfrak{A}$ uma nilálgebra comutativa. Para cada elemento a de $\mathfrak{A}$ existe um inteiro m tal que o produto de a , m ou mais vezes, com qualquer associação é zero. Assim, se $a \in \mathfrak{A}$, então existe um inteiro m tal que $a^m = 0$. Se m pode ser escolhido independente de a , diz-se que $\mathfrak{A}$ tem *nilíndice* m , sendo m o menor inteiro satisfazendo dita propriedade. Se $\mathfrak{A}$ é de p.a. e tem dimensão n , então $a^m = 0$ para todo $m \geq n + 1$, logo segue-se que o nilíndice é menor ou igual a $n + 1$.

3.1 Nilíndice menor ou igual a 3

Nesta seção F denotará um corpo de característica diferente de 2 e $\mathfrak{A}$ uma álgebra comutativa de dimensão finita sobre o corpo F . Para todo $a, b \in \mathfrak{A}$ temos que

$$ab = \frac{1}{2}[(a+b)^2 - a^2 - b^2]. \quad (3.1)$$

Se $\mathfrak{A}$ tem nilíndice 2, então $c^2 = 0$ para todo $c \in \mathfrak{A}$, logo por (3.1) o produto de quaisquer dois elementos de $\mathfrak{A}$ é nulo. Portanto, $\mathfrak{A}^2 = 0$, logo $\mathfrak{A}$ é nilpotente (solúvel), trivialmente.

Vejamos agora alguns resultados para nilíndice três. Linearizando a identidade, $x^3 = 0$, temos que

$$yx^2 + 2x(xy) = 0, \quad (3.2)$$

$$(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0. \quad (3.3)$$

Substituindo y por x^2 em (3.2) obtemos $x^2x^2 = 0$, e portanto

$$x^2(xy) = 0. \quad (3.4)$$

Proposição 3.1 *Se $\mathfrak{A}$ é uma nilálgebra de nilíndice 3, então é de Jordan.*

Prova: Sejam a, b elementos arbitrários de $\mathfrak{A}$ tal que $a^2 \neq 0$. De (3.4) segue-se imediatamente que $a^2(ba) = 0$. Agora, substituindo x por a^2 , y por a e z por b em (3.3), obtemos que $(a^2b)a = -(ba)a^2 - a^3b = 0$. Assim, temos que $a^2(ba) = (a^2b)a$, para todo $a, b \in \mathfrak{A}$, o que mostra que $\mathfrak{A}$ é de Jordan. ■

Para nilálgebras de Jordan, Albert demonstrou o seguinte teorema, a prova é dada em [18].

Teorema 3.2 *Toda nilálgebra de Jordan de dimensão finita, sobre um corpo de característica diferente de 2, é nilpotente.*

Como consequência do teorema e da proposição anterior, temos o seguinte corolário.

Corolário 3.3 *Se $\mathfrak{A}$ é uma nilálgebra de nilíndice menor ou igual a 3, então é nilpotente (solúvel).*

Lema 3.4 . *Seja $\mathfrak{A}$ uma nilálgebra de nilíndice 3. Para cada $a \in \mathfrak{A}$ o operador L_a é nilpotente de índice menor ou igual a 3.*

Prova: Sejam a, b e c elementos arbitrários de $\mathfrak{A}$. Por (3.3), temos que $(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0$, logo,

$$L_b L_c + L_{bc} + L_c L_b = 0, \quad (3.5)$$

substituindo c por b em (3.5) temos que $L_b L_b + L_{b^2} + L_b L_b = 0$, isto é,

$$-2L_b^2 = L_{b^2} \quad (3.6)$$

e multiplicando à direita por L_b , em ambos lados da equação (3.6), obtemos que

$$L_b^3 = L_b^2 L_b = -\frac{1}{2} L_{b^2} L_b = 0.$$

Portanto, o operador L_b é nilpotente de índice menor ou igual a 3. ■

Embora não se tenha provado a solubilidade de uma nilálgebra quando o nilíndice é 4, serão apresentados, a seguir, alguns resultados obtidos a partir da linearização das identidades $x^4 = 0$ e $x^2 x^2 = 0$, os quais, serão válidos para nilálgebras de p.a. de nilíndice 4. A seguir, F será um corpo de característica diferente de 2 e 3.

Linearizando $x^4 = 0$ temos que

$$x^3 y + x(x^2 y) + 2x(x(xy)) = 0, \quad (3.7)$$

$$2y(x(zx)) + y(zx^2) + z(yx^2) + 2x(y(zx)) \quad (3.8)$$

$$+ 2z(x(xy)) + 2x(z(xy)) + 2x(x(zx)) = 0,$$

$$2x(y(xy)) + 2y(x(xy)) + x(xy^2) + y(x^2y) = 0, \quad (3.9)$$

e linearizando a identidade $x^2x^2 = 0$ temos que

$$2(xy)^2 + x^2y^2 = 0, \quad (3.10)$$

$$x^2(yz) + 2(xy)(xz) = 0, \quad (3.11)$$

$$(yz)(xw) + (wy)(xz) + (xy)(wz) = 0. \quad (3.12)$$

Note que, se $x^4 = x^2x^2 = 0$, então $0 = x^4y^2 = (x^2)^2y^2$ e por (3.10), $0 = (x^2)^2y^2 = -2(x^2y)^2$, isto é,

$$(x^2y)^2 = 0. \quad (3.13)$$

Linearizando a anterior identidade temos que

$$(x^2y)(x^2z) = 0. \quad (3.14)$$

Lema 3.5 *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra comutativa sobre F . Se $x^4 = 0$ e $x^2x^2 = 0$ são identidades em $\mathfrak{A}$, então o operador L_x é nilpotente de índice menor ou igual a 5.*

Prova: Sejam x, y elementos não nulos de $\mathfrak{A}$. Substituindo y por xy em (3.7) e usando (3.4) obtemos que $2x(x(x(xy))) = -x^3(xy)$. Por outro lado, substituindo z por x^2 em (3.11) obtemos que $-2x^3(xy) = x^2(x^2y)$, logo, $4x(x(x(xy))) = x^2(x^2y)$ e substituindo y por xy e utilizando (3.4), obtemos que $4x(x(x(x(xy)))) = x^2(x^2(xy)) = 0$. Portanto, o operador L_x é nilpotente de índice menor ou igual a 5. ■

É claro que o lema anterior é válido, em particular, quando $\mathfrak{A}$ é uma nilálgebra de p.a. de nilíndice 4. Note que os Lemas 3.4 e 3.5, são um caso particular do Teorema 2.17, quando trabalhamos com álgebras sobre um corpo de característica zero ou maior do que 5.

3.2 Nilíndice maior ou igual a $n - 2$

Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra comutativa e a um elemento em $\mathfrak{A}$ tal que $a^{k-1} \neq 0$ e $a^k = 0$. Então o conjunto $\{a, a^2, \dots, a^{k-1}\}$ é linearmente independente, pois se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$ são escalares tais que $\alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \dots + \alpha_{k-1} a^{k-1} = 0$, então multiplicando por a , $k - 2$ vezes, obtemos que $\alpha_1 a^{k-1} = 0$ e sendo $a^{k-1} \neq 0$ segue que $\alpha_1 = 0$, logo, $\alpha_2 a^2 + \dots + \alpha_{k-1} a^{k-1} = 0$. Agora multiplicando por a , $k - 3$ vezes, obtemos que $\alpha_2 = 0$, e assim por diante até provar que $\alpha_3 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$. O fato anterior faz trivial o problema da nilpotência de uma nilálgebra de p.a. de dimensão n e nilíndice $n + 1$. Portanto, podemos enunciar, como consequência imediata do anterior, o seguinte.

Lema 3.6 *Seja $\mathfrak{A}$ uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão n e nilíndice $n + 1$. Se a é um elemento em $\mathfrak{A}$ tal que $a^n \neq 0$, então $\{a, a^2, \dots, a^n\}$ é uma base de $\mathfrak{A}$, e cada subálgebra própria de $\mathfrak{A}$ está contida em $\mathfrak{A}^2$.*

Prova: Como $\mathfrak{A}$ tem nilíndice $n + 1$, existe $a \in \mathfrak{A}$ tal que $a^n \neq 0$ e já que $\{a, a^2, \dots, a^n\}$ é um conjunto linearmente independente, é claro que é uma base de $\mathfrak{A}$. Seja D uma subálgebra de $\mathfrak{A}$ tal que $D \not\subseteq \mathfrak{A}^2$. Logo, existe um elemento $d \in D$ tal que $d \notin \mathfrak{A}^2$. O elemento d exprime-se em função da base como $d = \alpha_1 a + \dots + \alpha_n a^n$ com $\alpha_1 \neq 0$. Então $d^s = \alpha_1^s a^s + f_s(a) a^{s+1}$ para $s \geq 1$, onde $f_s(a)$ é uma expressão polinomial em a . Logo, $d^n = \alpha_1^n a^n \neq 0$ e então o conjunto $\{d, d^2, \dots, d^n\}$ é linearmente independente, logo D tem dimensão n e portanto $D = \mathfrak{A}$. ■

Teorema 3.7 *Seja $\mathfrak{A}$ uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão e nilíndice n , sobre um corpo de característica diferente de 2 e de 3. Então $\mathfrak{A}$ é nilpotente de índice n .*

Prova: Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra cumprindo todas as hipóteses do teorema, e seja a um elemento de $\mathfrak{A}$ tal que $a^{n-1} \neq 0$ e $A = \langle a, a^2, \dots, a^{n-1} \rangle$. Vejamos que

$$\mathfrak{A}^s \subseteq A^s$$

para todo inteiro positivo $s \geq 2$. Mostraremos a inclusão, por indução sobre s . Se $s = 2$, então por (3.1) basta mostrar que para todo $b \in \mathfrak{A} \setminus A$, $b^2 \in A^2$. Seja $b \in \mathfrak{A} \setminus A$ e $B = \langle b, b^2, \dots, b^{n-1} \rangle$. Obviamente B é uma subálgebra de $\mathfrak{A}$ de dimensão menor ou igual a $n - 1$. Como $n = \dim(A + B) = n - 1 + \dim(B) - \dim(A \cap B)$, segue que $\dim(A \cap B) = \dim(B) - 1 = \dim(B^2) < \dim(B) \leq \dim(A)$, logo $A \cap B$ é uma subálgebra própria de A e pelo Lema 3.6, $A \cap B$ é subálgebra de A^2 . Analogamente, $A \cap B$ é subálgebra própria de B e portanto, subálgebra de B^2 , mas $\dim(A \cap B) = \dim(B^2)$, logo $b^2 \in B^2 = A \cap B \subseteq A^2$. Assim, podemos concluir que $\mathfrak{A}^2 = A^2$.

Seja agora $s > 2$ e suponhamos por hipótese de indução que $\mathfrak{A}^t = A^t$ para todo t com $2 \leq t < s$. Como A é uma subálgebra associativa de $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}^2 \subseteq A$, temos que para cada elemento $b \in \mathfrak{A}$ e todo inteiro $r \geq 1$, $a^r b \in A$, logo $a(a(a^r b)) = a^2(a^r b)$ e $a(a^r(ab)) = a^{r+1}(ab) = a^r(a(ab))$, assim por (2.5) temos que

$$3a^{r+2}b = 4a^{r+1}(ab) + 2a^2(a^r b) - 2a(a^{r+1}b) - a^r(a^2b). \quad (3.15)$$

Como $\mathfrak{A}^2 = A^2$, temos que $a^2b \in A^2$ e agora podemos provar facilmente usando (3.15) e indução sobre r que $a^r b \in A^r$ para todo $b \in \mathfrak{A}$ e $r \geq 1$. Portanto segue-se que A^r é um ideal de $\mathfrak{A}$. Como $a^2b \in \mathfrak{A}^2 = A^2$, podemos exprimir a^2b da seguinte forma $a^2b = \alpha_2 a^2 + \alpha_3 a^3 + \dots + \alpha_{n-1} a^{n-1}$. Se $\alpha_2 \neq 0$, então podemos assumir sem perda de generalidade que $\alpha_2 = 1$, logo $a^2(b - \alpha_3 a - \dots - \alpha_{n-1} a^{n-3}) = a^2$. Seja $c = b - \alpha_3 a - \dots - \alpha_{n-1} a^{n-3}$. Então $a^2c = a^2$. Agora, fazendo um cálculo direto e tendo em conta que A^4 é um ideal de $\mathfrak{A}$, obtemos que $0 = (c + a^2)^k \equiv c^k + 2a^2 \pmod{A^4}$ para todo k . Em particular

$$0 = (c + a^2)^n \equiv 2a^2 \pmod{A^4},$$

logo $a^2 \in A^4$ que é uma contradição, portanto $\alpha_2 = 0$ e segue que $a^2b \in A^3$. Deste fato, obtemos facilmente por indução sobre r , usando a equação (3.15), que $a^r b \in A^{r+1}$ para todo $b \in \mathfrak{A}$ e $r \geq 1$. Portanto

$$A^r \mathfrak{A} \subseteq A^{r+1}.$$

Da anterior relação e a hipótese de indução temos que:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}^s &= \mathfrak{A}^{s-1}\mathfrak{A} + \mathfrak{A}^{s-2}\mathfrak{A}^2 + \dots + \mathfrak{A}^2\mathfrak{A}^{s-2} + \mathfrak{A}\mathfrak{A}^{s-1} \\ &= A^{s-1}\mathfrak{A} + A^{s-2}A^2 + \dots + A^2A^{s-2} + \mathfrak{A}A^{s-1} \\ &\subseteq A^s.\end{aligned}$$

Assim, $\mathfrak{A}^s = A^s$ para $s \geq 2$. Em particular, $\mathfrak{A}^n = A^n = 0$, logo a álgebra $\mathfrak{A}$ é nilpotente de índice n . ■

Corolário 3.8 *Nas condições do teorema, existe um elemento $b \in \mathfrak{A} \setminus A$ tal que $\{b, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ é uma base de $\mathfrak{A}$ e a álgebra $\mathfrak{A}$ satisfaz as seguintes relações*

$$A^s\mathfrak{A} \subseteq A^{s+1} \quad e \quad \mathfrak{A}^{s+1} = A^{s+1}$$

para todo inteiro positivo s .

No restante do capítulo, F denotará um corpo de característica zero ou suficientemente grande comparada com o nilíndice.

No Capítulo 1 definimos, para cada $b \in \mathfrak{A}$ tal que $bA \subseteq A$, a transformação linear $\bar{L}_b$ no espaço vetorial quociente $\mathfrak{A}/A$ como $\bar{L}_b(c + A) = L_b(c) + A$, e os conjuntos $M_A := \{\bar{L}_b : bA \subseteq A\}$ e $N_A := \{\bar{L}_a : a \in A\}$. N_A é um subespaço vetorial de M_A e este, por sua vez, é um subespaço vetorial dos endomorfismos lineares do espaço quociente $\mathfrak{A}/A$. Nos próximos lemas faremos uso destas definições.

Lema 3.9 *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra de Engel comutativa e A uma subálgebra de codimensão 1. Então:*

(i) A é um ideal de $\mathfrak{A}$.

(ii) $\mathfrak{A}^{(1)} \subseteq A$.

Prova:

- (i) Para todo $a \in A$, $L_a(A) \subseteq A$, portanto definindo $\bar{L}_a : \mathfrak{A}/A \rightarrow \mathfrak{A}/A$ e levando em conta que $\mathfrak{A}$ é de Engel, temos que existe um inteiro m tal que $L_a^m = 0$, logo $\bar{L}_a^m = \bar{0}$, mas $\dim(\mathfrak{A}/A) = 1$, logo $\bar{L}_a(b + A) = ab + A = \bar{0}$ para todo $b \in \mathfrak{A}$, isto é, $ab \in A$ para todo $a \in A$ e $b \in \mathfrak{A}$, o que mostra que A é um ideal de $\mathfrak{A}$.
- (ii) Seja $b \in \mathfrak{A} \setminus A$. Como A é um ideal de $\mathfrak{A}$, temos que $L_b(A) \subseteq A$. Já que $\dim(\mathfrak{A}/A) = 1$ e $\mathfrak{A}$ é de Engel, $\bar{L}_b(c + A) = \bar{0}$ para todo $c \in \mathfrak{A}$, assim $bc \in A$ para todo $b, c \in \mathfrak{A}$ logo $\mathfrak{A}^2 \subseteq A$, portanto $\mathfrak{A}^{(1)} = \mathfrak{A}^2 \subseteq A$.

■

Lema 3.10 *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra de Engel comutativa. Se A é uma subálgebra de codimensão 2, então $\mathfrak{A}^{(2)} \subseteq A$.*

Prova: Seja $\bar{\mathfrak{A}}$ o espaço vetorial quociente $\mathfrak{A}/A$. Como $\mathfrak{A}$ é de Engel, é claro que M_A é um subespaço vetorial de endomorfismo nilpotentes dos endomorfismos de $\bar{\mathfrak{A}}$, e já que $\bar{\mathfrak{A}}$ tem dimensão 2, segue do Lema 1.9, que $\dim(M_A) \leq 1$.

Se $\dim(M_A) = 0$, então o único elemento de M_A é a transformação nula, logo, para todo $a \in A$, $\bar{L}_a(b + A) = ab + A = \bar{0}$, e portanto A é um ideal de $\mathfrak{A}$. Como $cA \subseteq A$ para todo $c \in \mathfrak{A}$, temos que $\bar{L}_c \in M_A$, logo $\bar{L}_c(c + A) = \bar{0}$, isto é, $c^2 \in A$ para todo $c \in \mathfrak{A}$. Desta maneira, $\mathfrak{A}^2 \subseteq A$ e segue que $\mathfrak{A}^{(2)} = \mathfrak{A}^2 \subseteq A$.

Se $\dim(M_A) = 1$, então pelo Lema 1.14, existe um elemento não nulo $b + A \in \bar{\mathfrak{A}}$ tal que $h(b + A) = \bar{0}$ para todo $h \in M_A$, logo se $a \in A$, então $\bar{L}_a(b + A) = ab + A = \bar{0}$, isto é, $ab \in A$ para todo $a \in A$ e $bA \subseteq A$, portanto, $\bar{L}_b \in M_A$. Assim, $\bar{L}_b(b + A) = b^2 + A = \bar{0}$ o que implica que $b^2 \in A$. Seja $B = \langle b \rangle \oplus A$. Observe que B é uma subálgebra de $\mathfrak{A}$, pois $(\alpha b + A)(\beta b + A) = \alpha\beta b^2 + \alpha bA + \beta bA + A \subseteq A$, logo $B^2 = BB \subseteq A$. Como B tem codimensão 1, segue do Lema 3.9, parte (ii), que $\mathfrak{A}^2 \subseteq B$ e portanto $\mathfrak{A}^{(2)} = \mathfrak{A}^2 \subseteq BB \subseteq A$.

■

Nas condições dos lemas anteriores, do fato de $(\mathfrak{A}^{(r)})^{(s)} \subseteq \mathfrak{A}^{(r+s)}$, segue que se a subálgebra A é solúvel, então $\mathfrak{A}$ é solúvel, e temos como consequência o seguinte corolário.

Corolário 3.11 *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra de Engel comutativa. Se A é uma subálgebra solúvel de codimensão menor ou igual a 2, então $\mathfrak{A}$ é solúvel.*

Temos também, pelo Teorema 2.14, que toda nilálgebra comutativa sobre um corpo de característica zero, ou suficientemente grande comparada com o nilíndice, é de Engel. Portanto, temos o seguinte corolário.

Corolário 3.12 *Seja $\mathfrak{A}$ uma nilálgebra comutativa de dimensão n , sobre o corpo F . Então*

- (i) *Se $\mathfrak{A}$ tem grau maior ou igual a $n - 2$, então $\mathfrak{A}$ é solúvel.*
- (ii) *Se $\mathfrak{A}$ tem nilíndice maior ou igual a $n - 1$, então $\mathfrak{A}$ é solúvel.*

No contexto das nilálgebras de dimensão n e nilíndice $n - 1$, temos o seguinte resultado, dado por Elgueta e Suazo [9].

Lema 3.13 *Seja $\mathfrak{A}$ uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão $n \geq 5$ e nilíndice $n - 1$. Se $\dim(\mathfrak{A}^2) = n - 2$ e a é um elemento de $\mathfrak{A}$ tal que $a^{n-2} \neq 0$, então existe um $b \in \mathfrak{A}$ tal que $\{b, b^2, a, a^2, \dots, a^{n-2}\}$ é uma base de $\mathfrak{A}$.*

Prova: Seja $a \in \mathfrak{A}$ tal que $a^{n-2} \neq 0$ e $A = \langle a, a^2, \dots, a^{n-2} \rangle$. Existe um elemento $b \in \mathfrak{A} \setminus A$ tal que $b^2 \notin \langle b, a, a^2, \dots, a^{n-2} \rangle$. De fato, suponhamos que para todo elemento $d \in \mathfrak{A}$, $d^2 \in \langle d, a, a^2, \dots, a^{n-2} \rangle$. Como $\dim(\mathfrak{A}^2) = n - 2$ e o conjunto $\{a^2, \dots, a^{n-2}\}$ é linearmente independente em $\mathfrak{A}^2$, existe um $c \in \mathfrak{A} \setminus A$ tal que $\{c^2, a^2, \dots, a^{n-2}\}$ é uma base para $\mathfrak{A}^2$. Dado que $c \notin A$, o subespaço $C = \langle c, a, a^2, \dots, a^{n-2} \rangle$ tem dimensão $n - 1$. Pela hipótese $c^2 \in C$, logo $\mathfrak{A}^2 \subseteq C$, portanto, C é um ideal de $\mathfrak{A}$. Assim, C é uma nilálgebra de p.a. com dimensão e nilíndice $n - 1$. Pelo Teorema 3.7, $C^r = A^r$ para

todo $r \geq 2$, portanto $c^2 \in C^2 = A^2$, que é uma contradição com a hipótese. Portanto, existe um $b \in \mathfrak{A} \setminus A$ tal que $b^2 \notin \langle b, a, a^2, \dots, a^{n-2} \rangle$, logo o conjunto $\{b, b^2, a, a^2, \dots, a^{n-2}\}$ é linearmente independente e portanto uma base de $\mathfrak{A}$. ■

Teorema 3.14 *Seja $\mathfrak{A}$ uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão n e nilíndice $n - 2$ sobre o corpo F . Então $\mathfrak{A}$ é solúvel.*

Prova: Seja $a \in \mathfrak{A}$ tal que $a^{n-3} \neq 0$ e $A = \langle a, a^2, \dots, a^{n-3} \rangle$. Como o espaço vetorial $\mathfrak{A}/A$ tem dimensão 3, cumpre-se a parte (i) ou (ii) do Lema 1.14, e com N_A pode acontecer que $\dim(N_A) = 0$ ou $\dim(N_A) \geq 1$. Estas possibilidades serão analisadas depuradamente.

Caso 1. Se $\dim(N_A) = 0$, então o único elemento de N_A é a transformação nula e portanto $\bar{L}_c = \bar{0}$ para todo $c \in A$. Logo $\bar{L}_c(b + A) = \bar{0}$ para todo $b \in \mathfrak{A}$, e segue que A é um ideal de $\mathfrak{A}$. Assim, temos uma nilálgebra $\mathfrak{A}/A$ de dimensão três que é solúvel e um ideal A de $\mathfrak{A}$ solúvel, logo $\mathfrak{A}$ é solúvel.

Caso 2. Se verifica-se (i) do Lema 1.14, então existe um elemento não nulo $b + A$ em $\mathfrak{A}/A$ tal que $f(b + A) = \bar{0}$ para todo $f \in M_A$. Logo $bA \subseteq A$ o que implica que $\bar{L}_b \in M_A$ e $\bar{L}_b(b + A) = b^2 + A = \bar{0}$, logo $b^2 \in A$. Seja $B = \langle b \rangle \oplus A$. Então B é uma subálgebra de $\mathfrak{A}$ de dimensão e nilíndice $n - 2$, logo B é solúvel pelo Teorema 3.7. Assim, temos uma subálgebra de $\mathfrak{A}$ solúvel de codimensão 2, e segue de Corolário 3.11, que $\mathfrak{A}$ é solúvel.

Caso 3. Se $\dim(N_A) \geq 1$ e verifica-se (ii) do Lema 1.14, então $\dim(M_A) = 2$. Por Teorema 2.17 a álgebra gerada por N_A é nilpotente, portanto $N_A \subsetneq M_A$. Assim $\dim(N_A) = 1$.

Seja $f \in N_A$ tal que $N_A = \langle f \rangle$. Como $\text{posto}(f) = 2$, existe um elemento não nulo no kernel de f . Seja $\bar{0} \neq b + A \in \ker(f)$. Já que $f(b + A) = \bar{0}$, $bA \subseteq A$ e portanto $\bar{L}_b \in M_A$, logo $M_A = \langle f, \bar{L}_b \rangle$. Para uma base adequada $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ de $\mathfrak{A}/A$ temos que $f(\lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + \lambda_3 \bar{v}_3) = \beta(\lambda_2 \bar{v}_1 - \lambda_3 \bar{v}_2)$ e $\bar{L}_b(\lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + \lambda_3 \bar{v}_3) = \lambda_1 \bar{v}_2 + \lambda_2 \bar{v}_3$ para todo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in F$, onde $\beta \in F$ é uma constante diferente de zero. Dado que o kernel de f tem dimensão 1,

temos que $\bar{v}_1 \in \langle b + A \rangle$. Podemos assumir sem perda de generalidade que $\bar{v}_1 = b + A$. Notamos que

$$\begin{aligned}\bar{L}_b(\bar{v}_1) &= \bar{L}_b(b + A) = b^2 + A = \bar{v}_2 \neq 0, \\ \bar{L}_b(\bar{v}_2) &= \bar{L}_b(b^2 + A) = b^3 + A = \bar{v}_3 \neq 0, \\ \bar{L}_b(\bar{v}_3) &= \bar{L}_b(b^3 + A) = b^4 + A = \bar{0},\end{aligned}$$

logo $b^4 \in A$,

$$\mathfrak{A} = A \oplus \langle b, b^2, b^3 \rangle = A \oplus B, \quad (3.16)$$

e $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\} = \{b + A, b^2 + A, b^3 + A\}$. Para cada elemento $x \in A$ existe um $\lambda_x \in F$ tal que

$$xb \equiv 0, \quad xb^2 \equiv \lambda_x b, \quad xb^3 \equiv -\lambda_x b^2 \pmod{A}. \quad (3.17)$$

Vejamos agora que $A^2\mathfrak{A} \subseteq A$. Para ver isto, provemos primeiro que $a^i b^2 \in A$ para $i \geq 2$. De (3.17), temos que $bA \subseteq A$ e segue que

$$a(b(ab)), b(a(ab)), (ab)^2 \text{ e } b(a^2b) \in A,$$

também temos que $ab^2 - \lambda_a b \in A$, logo $a(ab^2) - \lambda_a ab \in A$ e como $ab \in A$, segue que

$$a(ab^2) \in A. \quad (3.18)$$

Substituindo x por a e y por b em (2.3) obtemos que

$$2a^2b^2 = a(ab^2) + b(ba^2) + 2a(b(ab)) + 2b(a(ab)) - 4(ab)^2 \in A.$$

Como $a^2b^2, a(ab^2) \in A$, temos que $a^2(a^2b^2), a(a(ab^2)) \in A$. Por (3.17), temos que $ab^2 - \lambda_a b \in A$, logo $a^2(ab^2) - \lambda_a a^2b \in A$, e já que $a^2b \in A$, segue que $a^2(ab^2) \in A$. Assim, substituindo x por a e y por b^2 em (2.2) obtemos que

$$a^3b^2 = 4a^2(ab^2) - 2a(a(ab^2)) - a(a^2b^2) \in A.$$

Finalmente, trocando z por a , y por a^{i-1} e x por b em (2.4), para $i > 3$, temos que

$$\begin{aligned}4a^i b^2 &= a(a^{i-1}b^2) + a^{i-1}(ab^2) + 2b(a^i b) + 2a(b(a^{i-1}b)) + 2a^{i-1}(b(ab)) \\ &\quad + 2b(a(a^{i-1}b)) + 2b(a^{i-1}(ab)) - 8(ab)(a^{i-1}b).\end{aligned}$$

Por indução sobre i , usando a anterior equação, obtemos que $a^i b^2 \in A$ para $i \geq 2$. Portanto, $xb^2 \in A$, para todo $x \in A^2$. Assim por (3.17), temos que $0 \equiv xb^2 \equiv \lambda_x b$ módulo A , e como $b \notin A$, segue que $\lambda_x = 0$ para todo $x \in A^2$, portanto, $0 \equiv xb^3$ módulo A , para todo $x \in A^2$, e segue que $A^2 B \subseteq A$ o que implica por (3.16), que

$$A^2 \mathfrak{A} \subseteq A.$$

Para mostrar que A^2 é um ideal de $\mathfrak{A}$, é suficiente provar que $\langle a^r \rangle \cdot \langle b, b^2, b^3 \rangle \subseteq A^2$, para $r \geq 2$. Como $b^4 \in A$, temos que $b^4 = \alpha_1 a + \dots + \alpha_{n-3} a^{n-3}$, e dado que b tem índice de nilpotência menor ou igual a $n - 2$ e $4(n - 3) > n - 2$, temos que $(b^4)^{n-3} = \alpha_1^{n-3} a^{n-3} = 0$, mas $a^{n-3} \neq 0$ o que implica que $\alpha_1 = 0$, logo $b^4 \in A^2$. Seja $\lambda \in F$ e $i, j \in \{2, 3\}$. Note que, $(\lambda a^i + b^j)^2 = \lambda^2 (a^{2i}) + 2\lambda (a^i b^j) + (b^{2j}) \in A$, pois $a^i b^j \in A^2 \mathfrak{A} \subseteq A$ e por ser $\mathfrak{A}$ de potências associativas, $b^6 = b^4 b^2 \in A^2 \mathfrak{A} \subseteq A$, logo $b^{2j} = b^4, b^6 \in A$. Como $(\lambda a^i + b^j)^2 \in A$ e o índice de nilpotência de $(\lambda a^i + b^j)$ é menor ou igual a $n - 2$, segue que $(\lambda a^i + b^j)^2 \in A^2$ para todo $\lambda \in F$. Portanto,

$$\langle a^2, a^3 \rangle \cdot \langle b^2, b^3 \rangle \subseteq A^2. \quad (3.19)$$

A relação (3.17), implica que $ab^3 + \lambda_a b^2 \in A$ e $ab^2 - \lambda_a b \in A$, logo $b(ab^2) - \lambda_a b^2 \in A$ e segue que $b(ab^2) + ab^3 \in A$. Além disso, temos de (3.18) e de $bA \subseteq A$ que

$$a(a(ab)), a(a^2b), a^3b, a(b(ab)), b(a(ab)), b(a^2b), b(b(ab)), a(ab^2) \in A.$$

Portanto, para todo $\lambda \in F$

$$\begin{aligned} (\lambda a + b)^4 &= [a^4] \lambda^4 + [2a(a(ab)) + a(a^2b) + a^3b] \lambda^3 + [a(ab^2) + \\ &\quad 2a(b(ab)) + 2b(a(ab)) + b(a^2b)] \lambda^2 + [ab^3 + b(ab^2) \\ &\quad + 2b(b(ab))] \lambda + [b^4] \in A. \end{aligned}$$

Já que $(\lambda a + b)$ tem índice de nilpotência menor ou igual a $n - 2$, segue que $(\lambda a + b)^4 \in A^2$, para todo $\lambda \in F$. Assim, fazendo percorrer λ por pelo menos

5 elementos diferentes de F obtemos que $2a(a(ab)) + a(a^2b) + a^3b \in A^2$, e portanto

$$a^3b \in A^2.$$

Se $\lambda_a = 0$, então $ab, ab^2, ab^3 \in A$, o que implica que $\bar{L}_a = \bar{0}$ e como $A^2\mathfrak{A} \subseteq A$, temos que $\bar{L}_{a^2} = \bar{0}$, contradizendo o fato de $\dim(N_A) = 1$, portanto, $\lambda_a \neq 0$. Segundo (3.17) temos que $a^2(ab^2) \equiv \lambda_a a^2b$ módulo A^2 , logo por (2.2) segue que

$$a^2b \equiv \frac{1}{\lambda_a} a^2(ab^2) = \frac{1}{4\lambda_a} [a^3b^2 + a(a^2b^2) + 2a(a(ab^2))] \mod A^2,$$

e como $a(ab^2) \in A$, segue que $a(a(ab^2)) \in A^2$ e portanto podemos concluir por (3.19), que

$$a^2b \in A^2.$$

Assim, provamos que

$$\langle a^2, a^3 \rangle \cdot \langle b, b^2, b^3 \rangle \subseteq A^2. \quad (3.20)$$

Agora, substituindo x por a e y por a^{s-2} , para $s \geq 4$, em (2.4) obtemos que

$$\begin{aligned} 3a^s z &= 3z(a(a^{s-2}a)) \\ &= 4a^2(a^{s-2}z) + 8(az)a^{s-1} - 2a(a(a^{s-2}z)) \\ &\quad - a^{s-2}(za^2) - 2a(za^{s-1}) - 2a(a^{s-2}(az)) - 2a^{s-2}(a(az)). \end{aligned}$$

E segue-se facilmente por indução sobre s , utilizando a igualdade anterior e (3.20), que $a^s z \in A^2$, para $z \in \{b, b^2, b^3\}$ e $s \geq 2$. Assim, temos que

$$\langle a^s : s \geq 2 \rangle \cdot \langle b, b^2, b^3 \rangle \subseteq A^2,$$

o que mostra que A^2 é um ideal de $\mathfrak{A}$.

A nilálgebra $\mathfrak{A}/A^2$ tem dimensão 4. Se seu nilíndice é menor ou igual a 3, então é solúvel pelo Corolário 3.3, e se seu nilíndice é 4, ela é solúvel pelo Teorema 3.7. Assim, temos que $\mathfrak{A}/A^2$ e A^2 são solúveis, logo $\mathfrak{A}$ é solúvel. ■

Podemos finalmente enunciar o seguinte corolário, como consequência dos resultados estudados nesta seção.

Corolário 3.15 *Toda nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão n e nilíndice maior ou igual a $n - 2$ sobre o corpo F , é solúvel.*

Solubilidade segundo sua dimensão

No capítulo anterior estudamos a solubilidade e a nilpotência das nilálgebras para nilíndice $k \leq 3$ e para nilíndice $k \geq n - 2$, sendo n a dimensão da álgebra.

Neste capítulo o estudo será abordado pela dimensão da álgebra, apresentando alguns resultados para dimensão menor ou igual a 8, utilizando, em alguns casos, resultados do capítulo anterior.

Quando a dimensão é menor ou igual a 4, Gerstenhaber e Myung [11] mostraram a nilpotência da álgebra determinando as classes de isomorfismos. Em [9] Elgueta e Suazo fizeram a descrição das nilálgebras comutativas de p.a. de dimensão 5. Para dimensão 6, Gutiérrez Fernández [14] mostrou a solubilidade das nilálgebras comutativas, as quais não são necessariamente de p.a. sendo portanto este resultado mais geral. Finalmente para dimensão menor ou igual a 8 e nilíndice 4, Elgueta e Suazo [10] mostraram a solubilidade da álgebra. Um estudo detalhado dos anteriores resultados, será apresentado neste capítulo. O seguinte teorema foi dado por Elgueta e Suazo em [9], ele dá informação sobre a dimensão de $\mathfrak{A}^2$, dado muito usado ao longo deste capítulo.

Teorema 4.1 *Seja $\mathfrak{A}$ uma nilálgebra comutativa de p.a. de nilíndice k e*

dimensão n com $3 \leq k \leq n$. Se $\mathfrak{A}$ é nilpotente, então $k - 2 \leq \dim(\mathfrak{A}^2) \leq n - 2$.

Prova: Como $\mathfrak{A}$ é nilpotente, existe um inteiro $m \geq k$, tal que $\mathfrak{A}^m = 0$. Se $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^2$, então $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^m = 0$ e portanto $m = 1$, o que contradiz o fato de ser $m \geq k \geq 3$. Logo $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}^2$ e então $\dim(\mathfrak{A}^2) < \dim(\mathfrak{A})$, assim, $\dim(\mathfrak{A}^2) \leq n - 1$. Por outro lado, temos que existe um elemento a de $\mathfrak{A}$ tal que $a^{k-1} \neq 0$, é claro que o conjunto $\{a^2, a^3, \dots, a^{k-1}\} \subseteq \mathfrak{A}^2$ é linearmente independente e tem dimensão $k-2$, logo, $k-2 \leq \dim(\mathfrak{A}^2)$. Assim, $k-2 \leq \dim(\mathfrak{A}^2) \leq n-1$.

Se $\dim(\mathfrak{A}^2) = n - 1$, então existe um elemento b de $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} = Fb + \mathfrak{A}^2$. Logo $\mathfrak{A}^2 = Fb^2 + (Fb)\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{A}^2\mathfrak{A}^2 \subseteq Fb^2 + \mathfrak{A}^3$ e já que $Fb^2 + \mathfrak{A}^3 \subseteq \mathfrak{A}^2$, segue que $\mathfrak{A}^2 = Fb^2 + \mathfrak{A}^3$. Assim, $\mathfrak{A} = Fb + \mathfrak{A}^2 = Fb + Fb^2 + \mathfrak{A}^3 = \langle b, b^2 \rangle + \mathfrak{A}^3$. Como $\mathfrak{A}^3 = \mathfrak{A}\mathfrak{A}^2 = (Fb + \mathfrak{A}^2)(Fb^2 + \mathfrak{A}^3) = Fb^3 + \mathfrak{A}^4$, temos que $\mathfrak{A} = \langle b, b^2, b^3 \rangle + \mathfrak{A}^4$ e usando reiteradamente este processo, chegamos a que $\mathfrak{A} = \langle b, b^2, \dots, b^{m-1} \rangle + \mathfrak{A}^m = \langle b, b^2, \dots, b^{k-1} \rangle$, pois $k \leq m$, logo $\dim(\mathfrak{A}) \leq k - 1 \leq n - 1$, o que é uma contradição. Portanto, $k - 2 \leq \dim(\mathfrak{A}^2) \leq n - 2$. ■

Corolário 4.2 Nas condições do teorema, se o nilíndice $k = n - 1$, com $n \geq 4$, então $n - 3 \leq \dim(\mathfrak{A}^2) \leq n - 2$. Se $\dim(\mathfrak{A}^2) = n - 2$, então $n - 4 \leq \dim(\mathfrak{A}^3) \leq n - 3$.

4.1 Dimensão menor ou igual a 3

Seja $\mathfrak{A}$ uma nilálgebra comutativa de p.a. sobre um corpo F de característica diferente de 2 e de 3. Se $\dim(\mathfrak{A}) = 1$, então dado um elemento não nulo a de $\mathfrak{A}$, temos que $\{a\}$ é uma base de $\mathfrak{A}$ com $a^2 = 0$. Se $\dim(\mathfrak{A}) = 2$, então $\mathfrak{A}^2 = 0$ ou existe uma base da forma $\{a, a^2\}$ onde $a^3 = a^2a^2 = 0$.

Seja $\mathfrak{A}$ de dimensão 3. Então $\mathfrak{A}$ tem nilíndice menor ou igual a 4. Se $\mathfrak{A}$ tem nilíndice 4, então pelo Lema 3.6, $\{a, a^2, a^3\}$ é uma base de $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}$ é nilpotente de índice 4. Se $\mathfrak{A}$ tem nilíndice menor ou igual a 3, então pelo Corolário 3.3, $\mathfrak{A}$ é nilpotente.

Seja $\mathfrak{A}$ de nilíndice 3 e seja a um elemento de $\mathfrak{A}$, tal que $a^2 \neq 0$ e $A = \langle a, a^2 \rangle$. Seja $b \in \mathfrak{A} \setminus A$, tal que $\{a, a^2, b\}$ é uma base de $\mathfrak{A}$. Para descrever $\mathfrak{A}$ completamente, devemos determinar os produtos ab , a^2b , ab^2 e b^2 . Pelo Corolário 3.8, $\mathfrak{A}^2 = A^2$ e $\mathfrak{A}^3 = A^3$, logo $ab, b^2 \in A^2$ e $a^2b, b^2a \in A^3 = 0$. Assim, $a^2b = b^2a = 0$, $ab = \alpha a^2$ e $b^2 = \beta a^2$. Seja $b_1 = b - \alpha a$. É claro que $b_1 \notin A$ e $ab_1 = a^2b_1 = b_1^2a = 0$. Portanto, na base $\{a, a^2, b\}$ de $\mathfrak{A}$, podemos assumir $ab = 0$ e $b^2 = \beta a^2$.

Assim, para dimensão 3, achamos uma álgebra associativa $\mathfrak{A}$ com base $\{a, a^2, a^3\}$ e uma família de álgebras associativas $\mathfrak{A}(\beta)$ com base $\{a, a^2, b\}$, onde $b^2 = \beta a^2$ e os outros produtos são nulos. Pode-se provar facilmente que $\mathfrak{A}(\beta) \cong \mathfrak{A}(\beta')$ se e somente se, existe $\gamma \in F^*$ tal que $\beta' = \gamma^2 \beta$.

Para nilálgebras comutativas, não necessariamente de p.a. de dimensão três, temos o seguinte resultado, que será utilizado na prova de solubilidade de nilálgebras de dimensão 6.

Lema 4.3 *Seja $\mathfrak{A}$ uma nilálgebra comutativa de dimensão 3 sobre um corpo de característica diferente de 2 e 3. Então $\mathfrak{A}$ é nilpotente, $\dim(\mathfrak{A}^3) \leq 1$, $\mathfrak{A}^3\mathfrak{A} = 0$ e $\mathfrak{A}^5 = 0$*

Prova: Como $\mathfrak{A}$ tem dimensão três, $\text{grau}(\mathfrak{A}) \leq 3$.

Se $\text{grau}(\mathfrak{A}) = 1$, então $a^2 = 0$ para todo $a \in \mathfrak{A}$, logo $\mathfrak{A}^2 = 0$ e cumpre-se trivialmente o lema.

Se $\text{grau}(\mathfrak{A}) = 2$, então $x^3 = 0$ para todo $x \in \mathfrak{A}$ e existe $a \in \mathfrak{A}$ tal que $a^2 \neq 0$. Seja $A = \langle a, a^2 \rangle$. Como $x^3 = 0$ para todo $x \in \mathfrak{A}$, temos que $x^2x^2 = 0$ logo $\mathfrak{A}$ tem nilíndice três e portanto $\mathfrak{A}$ é de p.a. Pelo Teorema 3.7, $\mathfrak{A}$ é nilpotente e segue pelo Corolário 3.8 que $\mathfrak{A}A^s \subseteq A^{s+1}$ e $\mathfrak{A}^{s+1} \subseteq A^{s+1}$ para todo $s \geq 1$. Logo $\mathfrak{A}^3 = \mathfrak{A}\mathfrak{A}^2 \subseteq \mathfrak{A}A^2 \subseteq A^3 = 0$.

Se $\text{grau}(\mathfrak{A}) = 3$, então para todo $x \in \mathfrak{A}$, $x^4 = 0$. Se $x^3 = 0$ para todo $x \in \mathfrak{A}$, então $x^2x^2 = 0$, portanto existe $a \in \mathfrak{A}$ tal que $a^3 \neq 0$, e obviamente $\mathfrak{A}$ é gerada por $\{a, a^2, a^3\}$. Como $\mathfrak{A}$ é uma nilálgebra, cada elemento de $\mathfrak{A}$ gera uma subálgebra nilpotente, portanto $\mathfrak{A}$ é nilpotente. Já que $\mathfrak{A}$ é nilpotente $\mathfrak{A}^2 \subsetneq \mathfrak{A}$, logo $\mathfrak{A}^2 = \langle a^2, a^3 \rangle$. Igualmente $\mathfrak{A}^3 \subsetneq \mathfrak{A}^2$ e segue que

$\mathfrak{A}^3 = \langle a^3 \rangle$. Como $\mathfrak{A}^3\mathfrak{A} \subsetneq \mathfrak{A}^3$, temos que $\mathfrak{A}^3\mathfrak{A} = 0$ e $\mathfrak{A}^5 = \mathfrak{A}^4\mathfrak{A} + \mathfrak{A}^3\mathfrak{A}^2 = (\mathfrak{A}^3\mathfrak{A} + \mathfrak{A}^2\mathfrak{A}^2)\mathfrak{A} + \mathfrak{A}^3\mathfrak{A}^2 = (\mathfrak{A}^2\mathfrak{A}^2)\mathfrak{A} + \mathfrak{A}^3\mathfrak{A}^2 \subseteq \mathfrak{A}^3\mathfrak{A} = 0$, logo $\mathfrak{A}^5 = 0$. ■

4.2 Dimensão 4

Se uma nilálgebra tem dimensão 4, então seu nilíndice é menor ou igual a 5. Analisaremos os casos de nilíndice 3 e 4, já que os outros casos foram estudados no Capítulo 3, no Lema 3.6 e no Teorema 3.7.

4.2.1 Nilíndice $k = 3$

Teorema 4.4 *Seja $\mathfrak{A}$ uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão 4 e nilíndice 3, sobre um corpo F de característica diferente de 2. Então $\mathfrak{A}$ é nilpotente de índice menor ou igual a 3 e é associativa.*

Prova: Para mostrar que $\mathfrak{A}^3 = 0$, basta mostrar que $(ab)c = 0$ para todo $a, b, c \in \mathfrak{A}$. Por (3.1), segue imediatamente que $(ab)c = \frac{1}{2}[(a+b)^2c - a^2c - b^2c]$, portanto, é suficiente mostrar que $a^2b = 0$ para todo $a, b \in \mathfrak{A}$. Sejam a, b elementos não nulos de $\mathfrak{A}$ tal que $a^2 \neq 0$ e seja $A = \langle a, a^2 \rangle$. Pelo Lema 3.4, L_a é nilpotente, e dado que $\dim(\mathfrak{A}/A) = 2$, $\overline{L}_a^2(b + A) = \overline{0}$, logo $a(ab) \in A$ para todo $b \in \mathfrak{A}$. Sejam $\alpha, \beta \in F$ tais que $a(ab) = \alpha a + \beta a^2$. Como L_a tem índice de nilpotência menor ou igual a 3, $0 = L_a^3(b) = \alpha a^2$ mas $a^2 \neq 0$, logo $\alpha = 0$ e portanto $a(ab) = \beta a^2$. Por (3.6), segue-se que $-2L_a^2(b) = L_{a^2}(b)$, logo $a^2b = -2\beta a^2$. Temos igualmente que L_b é nilpotente de índice menor ou igual a três, logo $0 = L_b^3(a^2) = b(b(ba^2)) = -8\beta^3 a^2$, mas $a^2 \neq 0$, logo $\beta^3 = 0$ e segue que $\beta = 0$. Assim, $a^2b = 0$ para todo $a, b \in \mathfrak{A}$. Portanto $\mathfrak{A}^3 = 0$, e obviamente $\mathfrak{A}$ é associativa. ■

Seja $\mathfrak{A}$ uma nilálgebra comutativa de p.a. sobre um corpo F de característica diferente de 2. Se $\mathfrak{A}$ tem dimensão 4 e nilíndice 3, então $\mathfrak{A}$ é nilpotente e pelo Teorema 4.1, $\mathfrak{A}^2$ tem dimensão 1 ou 2. Portanto, estudando estes dois casos, obtemos uma classificação para esta classe de álgebras.

Lema 4.5 *Se $\mathfrak{A}$ tem dimensão 4, nilíndice 3 e $\dim(\mathfrak{A}^2) = 1$, então existe uma base $\{a, a^2, b, c\}$ de $\mathfrak{A}$ tal que $b^2 = \alpha a^2$, $c^2 = \beta a^2$ e todos os outros produtos são nulos.*

Prova: Seja $a \in \mathfrak{A}$ tal que $a^2 \neq 0$. Como $\mathfrak{A}^2$ tem dimensão 1, temos que $\mathfrak{A}^2 = \langle a^2 \rangle$. De fato, $\mathfrak{A}^2$ é um ideal de $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^2 = 0$ por teorema anterior. Note que a álgebra quociente $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^2$ tem dimensão 3. Portanto, se definimos a forma simétrica bilinear

$$\begin{aligned} f : \mathfrak{A}/\mathfrak{A}^2 \times \mathfrak{A}/\mathfrak{A}^2 &\longrightarrow F \\ (\bar{u}, \bar{v}) &\longmapsto f(\bar{u}, \bar{v}) \end{aligned}$$

onde $f(\bar{u}, \bar{v}) = \alpha$ sempre que $uv = \alpha a^2$, temos que existe uma base $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^2$ tal que

$$[\mathbf{f}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Assim, existe uma base de $\mathfrak{A}$ da forma $\{a, a^2, b, c\}$ com $b^2 = \alpha a^2$, $c^2 = \beta a^2$ e todos os outros produtos são nulos. ■

Observemos que se F for algébricamente fechado, então podemos assumir que $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$. Caso F seja o corpo dos números reais, então podemos tomar $\alpha, \beta \in \{0, 1, -1\}$.

Lema 4.6 *Se $\mathfrak{A}$ tem dimensão 4, nilíndice 3 e $\dim(\mathfrak{A}^2) = 2$, então existe uma base $\{a, a^2, b, ab\}$ de $\mathfrak{A}$ tal que $b^2 = \alpha a^2$ e todos os outros produtos são nulos.*

Prova: Sejam $a, b \in \mathfrak{A}$ tal que $a^2 \neq 0$ e definamos $B = \{a^2, ab\}$.

Se B é linearmente independente, então como $\dim(\mathfrak{A}^2) = 2$, temos que $\mathfrak{A}^2 = \langle a^2, ab \rangle$. Como $b^2 \in \mathfrak{A}^2$, existem $\alpha, \beta \in F$ tal que $b^2 = \alpha a^2 + \beta ab$. Seja $b_1 = -\frac{1}{2}\beta a + b$. Fazendo o produto, obtemos que $b_1^2 = \gamma a^2$ com $\gamma = \frac{1}{4}\beta^2 + \alpha$. Logo na base $\{a, a^2, b, ab\}$ de $\mathfrak{A}$, podemos assumir $b^2 = \gamma a^2$, ficando provado o lema.

Se B é linearmente dependente para todo $b \in \mathfrak{A}$, então existe $\alpha \in F$ tal que $ab = \alpha a^2$ e o conjunto $\{a^2, b^2\}$ é linearmente independente. Se $\alpha \neq 0$, então $\{ab, b^2\}$ é linearmente independente o que nos leva ao caso anterior. Se $\alpha = 0$, então $ab = 0$. Seja $b_1 = a + b$. Então $ab_1 = a^2$ e $b_1^2 = a^2 + b^2$, portanto, $\{ab_1, b_1^2\}$ é linearmente independente e portanto estamos no caso anterior.

Assim, provamos que existe uma base de $\mathfrak{A}$ da forma $\{a, a^2, b, ab\}$ onde $b^2 = \alpha a^2$ e todos os outros produtos são nulos. ■

O escalar α do Lema 4.6, está determinado de maneira única salvo produto por elementos em $(F^*)^2 := \{\gamma^2 \mid \gamma \in F\}$. Isto é, $\mathfrak{A}(\alpha) \cong \mathfrak{A}(\alpha')$ se e somente se, existe $\gamma \in F^*$ tal que $\alpha' = \gamma^2 \alpha$.

Assim, no lema anterior, achamos uma família de álgebras parametrizada por elementos de $F^*/(F^*)^2$ e 0.

4.2.2 Nilíndice $k = 4$

Seja $\mathfrak{A}$ uma nilálgebra comutativa de p.a. sobre um corpo F de característica diferente de 2 e 3. Como consequência do Teorema 3.7, temos o seguinte resultado.

Lema 4.7 *Se $\mathfrak{A}$ tem dimensão e nilíndice 4, e a é um elemento de $\mathfrak{A}$ tal que $a^3 \neq 0$ e $A = \langle a, a^2, a^3 \rangle$, então $\mathfrak{A}^2 = \langle a^2, a^3 \rangle$, $\mathfrak{A}^3 = \langle a^3 \rangle$ e $\mathfrak{A}^4 = 0$.*

Lema 4.8 *Nas condições do lema anterior, existe um elemento $b \in \mathfrak{A} \setminus A$ tal que $b\mathfrak{A}^2 = 0$.*

Prova: Seja a um elemento de $\mathfrak{A}$ tal que $a^3 \neq 0$ e $A = \langle a, a^2, a^3 \rangle$. Se $b_1 \in \mathfrak{A} \setminus A$, então temos que $b_1 a^3 \in \mathfrak{A}^4 = 0$ e $b_1 a^2 \in \mathfrak{A}^3 = A^3$, logo $b_1 a^2 = \beta a^3$ para algum $\beta \in F$. Portanto, $0 = b_1 a^2 - \beta a^3 = a^2(b_1 - \beta a)$. Assim, se $b = b_1 - \beta a$, então $b \notin A$ e $ba^2 = ba^3 = 0$. O que mostra a existência de um elemento $b \in \mathfrak{A} \setminus A$ tal que $b\mathfrak{A}^2 = 0$. ■

Dos resultados anteriores, temos que existe uma base de $\mathfrak{A}$ da forma $\{a, a^2, a^3, b\}$, com $b\mathfrak{A}^2 = 0$. Assim, conhecendo os produtos ab e b^2 , determinamos completamente a álgebra $\mathfrak{A}$. Notamos que a álgebra $\mathfrak{A}$ será associativa se e somente se, $a(ab) = 0$ e $b(ba) = b^2a$, já que $\mathfrak{A}^4 = 0$ e $a^2b = 0$.

Para o produto ab temos uma das seguintes duas possibilidades:

Caso 1. Podemos escolher os elementos a e b da base anterior de tal maneira que

$$ab = 0.$$

Se $b^2 = 0$, então temos uma álgebra associativa com base $\{a, a^2, a^3, b\}$, sendo seus outros produtos nulos.

Se $b^2 \neq 0$, então como $b^2 \in \mathfrak{A}^2$, podemos escrever $b^2 = \alpha a^2 + \beta a^3$ com $\alpha, \beta \in F$.

Se $\alpha = 0$, então $b^2 = \beta a^3$ com $\beta \neq 0$. Sejam $a_1 = \beta a$ e $b_1 = \beta b$. Como $b_1^2 = a_1^3$, podemos assumir, na base $\{a, a^2, a^3, b\}$, que $b^2 = a^3$. Note que $\mathfrak{A}$ é associativa, pois $ab^2 = a^4 = 0$. Assim, temos uma álgebra $\mathfrak{A}$ com base $\{a, a^2, a^3, b\}$, tal que $b^2 = a^3$ e todos os outros produtos são nulos. Se $\alpha \neq 0$, então podemos definir $a_1 = a + \frac{\beta}{2\alpha}a^2$. Fazendo o produto obtemos que $\alpha a_1^2 = \alpha a^2 + \beta a^3 = b^2$ e $ba_1 = ab + 2\frac{\beta}{\alpha}a^2b = 0$. Portanto, podemos assumir, na base $\{a, a^2, a^3, b\}$ de $\mathfrak{A}$ que $b^2 = \alpha a^2$ e é claro que $\mathfrak{A}$ não é associativa. Assim temos que $\{a, a^2, a^3, b\}$ é uma base de $\mathfrak{A}$, com $b^2 = \alpha a^2$ e todos os outros produtos nulos.

Caso 2. Não podemos escolher a e b na base, tais que $ab = 0$. Como $ab \in \mathfrak{A}^2$, temos que $ab = \lambda a^2 + \delta a^3$. Se $\lambda = 0$, então $ab = \delta a^3$ e $ab - \delta a^3 = a(b - \delta a^2) = 0$. Logo, se $b_1 = b - \delta a^2$, então $b_1 \in \mathfrak{A} \setminus A$ e $b_1 a^2 = b_1 a^3 = 0$. Assim, b_1 cumpre as condições do lema e $ab_1 = 0$, o que é uma contradição. Portanto, $\lambda \neq 0$. Seja $a_1 = \lambda a + \frac{\delta}{2}a^2$. Então $a_1^2 = \lambda^2 a^2 + \lambda \delta a^3$ e $a_1^3 = \lambda^3 a^3$. É claro que $a_1^2 b = a_1^3 b = 0$ e $a_1 b = \lambda ab + \frac{\delta}{2}a^2 b = \lambda ab = \lambda^2 a^2 + \lambda \delta a^3 = a_1^2$, logo, podemos assumir sem perda de generalidade que $\delta = 0$ e $\lambda = 1$, isto é

$$ab = a^2.$$

Note que, $a(ab) = a^3 \neq 0$, logo, neste caso, $\mathfrak{A}$ não é associativa.

Se $b^2 = 0$, então o conjunto $\{a, a^2, a^3, b\}$ é uma base de $\mathfrak{A}$, com $ab = a^2$ e todos os outros produtos nulos.

Se $b^2 \neq 0$, então como $b^2 \in \mathfrak{A}^2$, $b^2 = \alpha a^2 + \beta a^3$.

Se $\alpha = 0$, então $b^2 = \beta a^3$ e se $a_1 = \beta a$ e $b_1 = \beta b$, então $b_1^2 = a_1^3$ e $a_1 b_1 = a_1^2$.

Se $\alpha \neq 0$, então $b^2 = \alpha a^2 + \beta a^3$ e $b^3 = 0$. Como $b^2 - \alpha ab = b(b - \alpha a) = \beta a^3$, fazendo $a_1 = b - \alpha a$ temos que $a_1^2 = b^2 - 2\alpha ab + \alpha^2 a^2 = \beta a^3 - \alpha(1 - \alpha)a^2$ e $a_1^3 = \beta a^3 b - \alpha(1 - \alpha)a^2 b - \alpha\beta a^4 + \alpha^2(1 - \alpha)a^3$, isto é, $a_1^3 = \alpha^2(1 - \alpha)a^3$, logo se $0 \neq \gamma := \alpha^2(1 - \alpha)$, então $ba_1 = \beta a^3 = \frac{\beta}{\gamma} a_1^3$ e portanto $a_1(b - \frac{\beta}{\gamma} a_1^2) = 0$, assim, fazendo $b_1 = b - \frac{\beta}{\gamma} a_1^2$ obtemos $a_1 b_1 = 0$. Portanto estaríamos nas condições do caso 1, o que é uma contradição, logo $\gamma = 0$, isto é, $\alpha^2(1 - \alpha) = 0$ e dado que $\alpha \neq 0$, então $\alpha = 1$, deste modo $b^2 = a^2 + \beta a^3$. Se $a_2 = a + \frac{\beta}{2} a^2$ e $b_2 = b + \beta a^2$, então $a_2^2 = a^2 + \beta a^3$, $a_2 b_2 = ab + \beta a^3$ e $b_2^2 = b^2$, logo $a_2^2 = a_2 b_2 = b_2^2$ e podemos assumir $a^2 = ab = b^2$. Assim, $\{a, a^2, a^3, b\}$ é uma base de $\mathfrak{A}$ com $a^2 = ab = b^2$ e todos os outros produtos nulos.

Assim, achamos uma família de álgebras não associativas com base $\{a, a^2, a^3, b\}$ tal que $b\mathfrak{A}^2 = 0$ e

$$ab = 0 \text{ e } b^2 = \alpha a^2,$$

parametrizada por elementos de $F^*/(F^*)^2$ e cinco álgebras individuais com base $\{a, a^2, a^3, b\}$ tal que $b\mathfrak{A}^2 = 0$ e os produtos ab e b^2 são dados por uma das seguintes listas:

1. $ab = b^2 = 0$,
2. $ab = 0$ e $b^2 = a^3$,
3. $ab = a^2$ e $b^2 = 0$,
4. $ab = a^2$ e $b^2 = a^3$,
5. $a^2 = ab = b^2$.

Note que só são associativas as álgebras determinadas pelos produtos 1 e 2.

4.3 Dimensão 5

Lembremos que pelo Teorema 2.14, toda nilálgebra comutativa de nilíndice t sobre um corpo de característica zero ou maior do que $2t - 3$ é de Engel. Por outro lado, Elgueta, Suazo e Fernández provaram recentemente que toda nilálgebra comutativa de nilíndice t sobre um corpo de característica maior do que t é de Engel. Portanto toda nilálgebra comutativa de dimensão 5 sobre um corpo de característica diferente de 2, 3 e 5 é de Engel.

Lema 4.9 *Seja $\mathfrak{A}$ uma nilálgebra comutativa não necessariamente de potências associativas, de dimensão 5 sobre um corpo de característica diferente de 2, 3 e 5. Então $\mathfrak{A}$ é solúvel.*

Prova: Se $\text{grau}(\mathfrak{A}) \leq 2$, então $\mathfrak{A}$ tem nilíndice menor ou igual a 3, e pelo Corolário 3.3, $\mathfrak{A}$ é nilpotente, portanto solúvel. Se $\text{grau}(\mathfrak{A}) \geq 3$, então $\mathfrak{A}$ é solúvel pelo Corolário 3.12. ■

Vejamos a continuação uma descrição destas álgebras.

4.3.1 Nilíndice $k = 3$

No que resta, desta seção, $\mathfrak{A}$ denotará uma nilálgebra comutativa de p.a. sobre um corpo F de característica diferente de 2 e 3. Note que sob estas condições, se $\mathfrak{A}$ tem nilíndice 2 ou 3, então é de Engel.

Lema 4.10 *Se $\mathfrak{A}$ tem dimensão 5, nilíndice 3 e $\mathfrak{A}^3 \neq 0$, então existe uma base $\{a, c, ac, a^2, a^2c\}$ de $\mathfrak{A}$ tal que $a(ac) = -\frac{1}{2}a^2c$ e todos os outros produtos são nulos.*

Prova: Como $\mathfrak{A}^3 \neq 0$, existem elementos $a, b \in \mathfrak{A}$ tal que $a^2b \neq 0$, logo $b \notin \langle a, a^2 \rangle$ e portanto o conjunto $\{a, a^2, b\}$ é linearmente independente. Se $ab \in \langle a, a^2, b \rangle$, então $ab = \alpha_1a + \alpha_2a^2 + \alpha_3b$. Por (3.4), $0 = a^2(ab) = \alpha_3a^2b$, logo $\alpha_3 = 0$ e $ab = \alpha_1a + \alpha_2a^2$, assim $a(b - \alpha_2a) = \alpha_1a$ e segue, do Lema 1.1,

que $\alpha_1 = 0$, logo $ab = \alpha_2 a^2$ e $a(ab) = 0$, mas por (3.2) $a(ab) = -\frac{1}{2}a^2b \neq 0$ que é uma contradição, logo $ab \notin \langle a, a^2, b \rangle$.

Vejamos agora que o conjunto $\{a, b, ab, a^2, a^2b\}$ é linearmente independente. Caso contrário, $a^2b = \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \alpha_3 b + \alpha_4 ab$ para escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in F$ e já que $\mathfrak{A}$ é de Jordan, por ter nilíndice três, temos por (3.4) que

$$(a^2b)a = a^2(ba) = 0, \quad (4.1)$$

logo $0 = a(a(a^2b)) = \alpha_3 a(ab) + \alpha_4 a(a(ab)) = \alpha_3 a(ab)$, pois pelo Lema 3.4, $a(a(ab)) = 0$, portanto $\alpha_3 = 0$ e segue que $a^2b = \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \alpha_4 ab$, logo $0 = a(a^2b) = \alpha_1 a^2 + \alpha_4 a(ab)$, o que implica que $\alpha_1 a^2 = -\alpha_4 a(ab) = -\frac{\alpha_4}{2}a^2b$. Assim, $\alpha_1 = \alpha_4 = 0$ e $a^2b = \alpha_2 a^2$. Agora o Lema 1.1 implica que $\alpha_2 = 0$, o que mostra que o conjunto $\{a, a^2, b, ab, a^2b\}$ é linearmente independente e portanto uma base de $\mathfrak{A}$.

Como $\mathfrak{A}^2$ tem dimensão menor ou igual a 3 pelo Teorema 4.1, e temos que $\{ab, a^2, a^2b\} \subseteq \mathfrak{A}^2$, concluímos que $\mathfrak{A}^2 = \langle ab, a^2, a^2b \rangle$ e $b^2 = \alpha a^2b + \beta a^2 + \gamma ab$. Levando em conta (3.4) e o fato de $a^2(a^2b) = -\frac{1}{2}a^4b = 0$, obtemos que $a^2b^2 = \gamma a^2(ab) + \alpha a^2(a^2b) = 0$. De novo por (3.2) e (3.4), temos que $2ab^2 = 2\alpha a(a^2b) + 2\gamma a(ab) = 2\gamma a(ab) = -\gamma a^2b$ e $b(ba^2) = -\frac{1}{2}a^2b^2 = 0$, logo $0 = b^3 = \alpha b(a^2b) + \beta a^2b + \gamma b(ab)$ e $0 = 4\beta a^2b + 4\gamma b(ab) = 4\beta a^2b - 2\gamma b^2a = 4\beta a^2b + \gamma^2 a^2b = (4\beta + \gamma^2)a^2b$, isto é $(4\beta + \gamma^2)a^2b = 0$, mas $a^2b \neq 0$ o que obriga $4\beta = -\gamma^2$ e assim $b^2 = \alpha a^2b - \frac{1}{4}\gamma^2 a^2 + \gamma ab$.

Seja $c = b - \frac{1}{2}\alpha a^2 - \frac{1}{2}\gamma a$. Então $ac = ab - \frac{1}{2}\gamma a^2$, $a^2c = a^2b \neq 0$ e $a(ac) = a(ab) = -\frac{1}{2}a^2b = -\frac{1}{2}a^2c$. Assim $\{a, a^2, c, ac, a^2c\}$ é linearmente independente e é fácil ver por um cálculo direto que todos os outros produtos são nulos. Portanto, temos uma única álgebra $\mathfrak{A}$, com base $\{a, a^2, c, ac, a^2c\}$ e produto não nulo dado por $a(ac) = -\frac{1}{2}a^2c$. ■

Se $\mathfrak{A}$ tem nilíndice 3, então pela Proposição 3.1, $\mathfrak{A}$ é de Jordan e pelo Teorema 4.1, $1 \leq \dim(\mathfrak{A}^2) \leq 3$. Portanto, estudando estes três casos temos uma descrição completa de $\mathfrak{A}$.

Lema 4.11 *Se $\mathfrak{A}$ tem dimensão 5, nilíndice 3 e $\mathfrak{A}^3 = 0$, então cumpre-se*

que:

- (i) Se $\dim(\mathfrak{A}^2) = 3$, então existe uma base $\{a, b, ab, a^2, b^2\}$ de $\mathfrak{A}$ com os outros produtos nulos.
- (ii) Se $\dim(\mathfrak{A}^2) = 2$, então existe uma base $\{a, b, c, ab, a^2\}$ de $\mathfrak{A}$ tal que $bc = \alpha a^2 + \beta ab$, $c^2 = \gamma a^2 + \lambda ab$, $b^2 = \mu a^2$ e todos os outros produtos são nulos.
- (iii) Se $\dim(\mathfrak{A}^2) = 1$, então existe uma base $\{a, b, c, d, a^2\}$ de $\mathfrak{A}$ tal que $b^2 = \beta a^2$, $c^2 = \gamma a^2$, $d^2 = \delta a^2$ e todos os outros produtos são nulos.

Prova:

- (i) Seja $\mathfrak{A}^3 = 0$ e $\dim(\mathfrak{A}^2) = 3$. Então $\mathfrak{A}^2$ é um ideal de $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}^2\mathfrak{A} = 0$. Portanto se $a, b \in \mathfrak{A}$ tais que $\langle a, b \rangle \oplus \mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}$, então $\{a, b, ab, a^2, b^2\}$ é uma base de $\mathfrak{A}$.
- (ii) Seja $\mathfrak{A}^3 = 0$ e $\dim(\mathfrak{A}^2) = 2$. Então existem elementos $a, b \in \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A}^2 = \langle a^2, ab \rangle$. Sejam $\alpha, \beta, \gamma, \theta \in F$ tal que $\alpha a + \beta b + \gamma ab + \theta a^2 = 0$. Como $\mathfrak{A}^3 = 0$, $\alpha a^2 + \beta ab = 0$, logo $\alpha = \beta = 0$. Assim, $\gamma ab + \theta a^2 = 0$, portanto, $\gamma = \theta = 0$, o que mostra que $\{a, b, ab, a^2\}$ é linearmente independente, logo existe um $c \in \mathfrak{A}$ tal que o conjunto $B = \{a, b, c, ab, a^2\}$ é uma base de $\mathfrak{A}$. Como $b^2 \in \mathfrak{A}^2 = \langle a^2, ab \rangle$, $b^2 = \epsilon ab + \delta a^2$ e fazendo $b_1 = b - \frac{1}{2}\epsilon a$ obtemos que $b_1^2 = b^2 - \epsilon ab + \frac{1}{4}\epsilon^2 a^2 = (\delta + \frac{1}{4}\epsilon^2)a^2$, isto é, $b_1^2 = \mu a^2$ com $\mu = \delta + \frac{1}{4}\epsilon^2$, portanto, podemos supor na base B , que $b^2 = \mu a^2$. Igualmente, $ac \in \mathfrak{A}^2$, logo $ac = \alpha a^2 + \beta ab$ e fazendo $c_1 = c - \alpha a - \beta b$, temos que $ac_1 = ac - \alpha a^2 - \beta ab = 0$, e podemos supor também que $ac = 0$, na base B . Assim, $\{a, b, c, ab, a^2\}$ é uma base de $\mathfrak{A}$, com produtos não nulos dados por $b^2 = \mu a^2$, $bc = \alpha a^2 + \beta ab$ e $c^2 = \gamma a^2 + \theta ab$.
- (iii) Seja $\mathfrak{A}^3 = 0$ e $\dim(\mathfrak{A}^2) = 1$. Então existe $a \in \mathfrak{A}$ tal que $a^2 \neq 0$ e $\mathfrak{A}^2 = \langle a^2 \rangle$. A aplicação $f : \mathfrak{A}/\mathfrak{A}^2 \times \mathfrak{A}/\mathfrak{A}^2 \rightarrow F$, definida por

$f(\bar{u}, \bar{v}) = \alpha$, quando $uv = \alpha a^2$, é uma forma bilinear simétrica, logo existe uma base $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^2$ tal que

$$[\mathbf{f}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}.$$

Portanto, existe uma base $\{a, b, c, d, a^2\}$ de $\mathfrak{A}$, com produtos não nulos dados por $b^2 = \beta a^2$, $c^2 = \gamma a^2$ e $d^2 = \delta a^2$. ■

4.3.2 Nilíndice $k = 4$

Provaremos a continuação que, sob isomorfismos, cada nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão 5 e nilíndice 4, é de Jordan ou é isomorfa à álgebra de Suttles.

Note que, se o nilíndice é 4 cumpre-se que $x^4 = 0$ e $x^2x^2 = 0$, e então pelo Lema 3.5, temos as seguintes identidades

$$x(x(x(x(xy)))) = 0 \quad e \quad -x^3(xy) = 2x(x(x(xy))) = \frac{1}{2}x^2(x^2y). \quad (4.2)$$

É claro da identidade anterior que, nestas condições, o operador L_x é nilpotente de índice menor ou igual a 5.

Lema 4.12 *Se $\mathfrak{A}$ é uma nilálgebra comutativa de p.a. de nilíndice 4 e dimensão 5, então são válidas as seguintes identidades em $\mathfrak{A}$,*

$$x(x(x(xy))) = 0, \quad (4.3)$$

$$x^2(x^2y) = 0, \quad (4.4)$$

e também $(\mathfrak{A}^2)^2 = 0$.

Prova: Suponhamos que existem elementos $a, b \in \mathfrak{A}$ tal que

$$a(a(a(ab))) \neq 0.$$

Como $\mathfrak{A}$ tem nilíndice 4, temos que $a(a(a(ab))) = 0$ e $a^3 \neq 0$, por (4.2). Vejamos que o conjunto $\{a, b, ab, a(ab), a(a(ab)), a(a(a(ab)))\}$ é linearmente independente. Se $\alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 ab + \alpha_4 a(ab) + \alpha_5 a(a(ab)) + \alpha_6 a(a(a(ab))) = 0$, então multiplicando por a , quatro vezes, obtemos que $\alpha_2 a(a(a(ab))) = 0$, logo $\alpha_2 = 0$. Assim, $\alpha_1 a + \alpha_3 ab + \alpha_4 a(ab) + \alpha_5 a(a(ab)) + \alpha_6 a(a(a(ab))) = 0$. Multiplicando por a^2 e utilizando (3.4), obtemos que $\alpha_1 a^3 = 0$ e já que $a^3 \neq 0$, $\alpha_1 = 0$. Logo $\alpha_3 ab + \alpha_4 a(ab) + \alpha_5 a(a(ab)) + \alpha_6 a(a(a(ab))) = 0$. Agora multiplicando por a , três vezes, obtemos $\alpha_3 a(a(ab)) = 0$ o que obriga $\alpha_3 = 0$, e repetindo este processo (multiplicando em cada caso por um número adequado de a 's) obtemos que $\alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0$. Portanto, temos um subconjunto de $\mathfrak{A}$, linearmente independente, de seis elementos, absurdo. Logo $x(x(x(xy))) = 0$ e por (4.2), $x^2(x^2y) = 0$, para todo $x, y \in \mathfrak{A}$.

Vejamos agora que $(\mathfrak{A}^2)^2 = 0$. Para isto, basta mostrar que $x^2y^2 = 0$ para todo $x, y \in \mathfrak{A}$. Suponhamos que existem elementos $a, b \in \mathfrak{A}$ tal que $a^2b^2 \neq 0$. Logo, por (3.10), $(ab)^2 \neq 0$ e portanto $ab \neq 0$. Nestas condições, o conjunto $\{ab, a^2, b^2, a^2b^2\}$ é linearmente independente, pois se $\alpha_1 ab + \alpha_2 a^2 + \alpha_3 b^2 + \alpha_4 a^2b^2 = 0$, então multiplicando por a^2 e utilizando (3.4) e (4.4), obtemos que $\alpha_3 a^2b^2 = 0$, logo $\alpha_3 = 0$ e $\alpha_1 ab + \alpha_2 a^2 + \alpha_4 a^2b^2 = 0$. Igualmente, multiplicando por b^2 , obtemos que $\alpha_2 = 0$, logo, $0 = \alpha_1 ab + \alpha_4 a^2b^2 = \alpha_1 ab - 2\alpha_4(ab)^2$ por (3.10), e segue que $\alpha_1 = \alpha_4 = 0$, o que mostra que o anterior conjunto é linearmente independente.

Vejamos agora que $b \notin \langle ab, a^2, b^2, a^2b^2 \rangle$. Substituindo y por a^2 e x por ab em (3.7), obtemos que $0 = a^2(ab)^3 + (ab)((ab)^2a^2) + 2(ab)((ab)((ab)a^2)) = a^2(ab)^3 - \frac{1}{2}(ab)((a^2b^2)a^2) = a^2(ab)^3$ por (3.4), (3.10) e (4.4), logo $a^2(ab)^3 = 0$. Seja $b = \beta_1 a^2 + \beta_2 b^2 + \beta_3 ab + \beta_4 a^2b^2$. Então $b^2 = 2\beta_1\beta_2 a^2b^2 + \beta_3^2(ab)^2 + 2\beta_3\beta_4(ab)(a^2b^2) + \beta_4^2(a^2b^2)^2$, por (4.4) e (3.4). De (3.10), temos que $(ab)(a^2b^2) = -2(ab)^3$ e $(a^2b^2)^2 = 4(ab)^4 = 0$, logo $b^2 = 2\beta_1\beta_2 a^2b^2 - \frac{1}{2}\beta_3^2 a^2b^2 - 4\beta_3\beta_4(ab)^3$ e multiplicando por a^2 e utilizando (4.4), obtemos que $a^2b^2 = -4\beta_3\beta_4 a^2(ab)^3 = 0$, logo $a^2b^2 = 0$, o que é um absurdo. Assim, o conjunto $\{b, ab, a^2, b^2, a^2b^2\}$ é linearmente independente e portanto uma base de $\mathfrak{A}$. Como $a \in \mathfrak{A}$, podemos escrever $a = \gamma_1 b + \gamma_2 a^2 + \gamma_3 b^2 + \gamma_4 ab + \gamma_5 a^2b^2$, logo $(a - \gamma_1 b)^2 =$

$2\gamma_2\gamma_3a^2b^2 - \frac{1}{2}\gamma_4^2a^2b^2 - 4\gamma_4(ab)^3$, por (4.4), (3.10) e (3.4). Mas, $(a - \gamma_1b)^2 = a^2 - 2\gamma_1ab + \gamma_1^2b^2$, logo $a^2b^2 = -4\gamma_4b^2(ab)^3 = 0$. Portanto, $a^2b^2 = 0$ o que é uma contradição. Assim, para todo $x, y \in \mathfrak{A}$, $x^2y^2 = 0$, o que mostra que $(\mathfrak{A}^2)^2 = 0$. ■

Lema 4.13 *Se $\mathfrak{A}$ é uma nilálgebra de p.a. de nilíndice 4 e dimensão 5, e não é de Jordan, então $\dim(\mathfrak{A}^2) = 3$.*

Prova: Como $\mathfrak{A}$ não é de Jordan, existem elementos $a, b \in \mathfrak{A}$ tal que $a^2(ba) \neq (a^2b)a$. Por (3.4), $a^2(ab) = 0$, logo $(a^2b)a \neq 0$. Por (3.7), $a(a^2b) = -2a(a(ab)) - a^3b$, logo $2a(a(ab)) + a^3b \neq 0$. Analisemos as seguintes duas possibilidades:

Se $a(a(ab)) \neq 0$, então $ab, a(ab) \neq 0$. Seja $\alpha_1a + \alpha_2b + \alpha_3ab + \alpha_4a(ab) + \alpha_5a(a(ab)) = 0$. Multiplicando por a , três vezes, obtemos que $\alpha_2a(a(ab)) = 0$, o que implica que $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_1a + \alpha_3ab + \alpha_4a(ab) + \alpha_5a(a(ab)) = 0$. Multiplicando por ab , e tendo em conta que $(\mathfrak{A}^2)^2 = 0$, obtemos que $\alpha_1a(ab) = 0$, portanto $\alpha_1 = 0$. Finalmente, fazendo as respectivas multiplicações por a , obtemos que $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$. Logo, o conjunto $\{a, b, ab, a(ab), a(a(ab))\}$ é linearmente independente e portanto é uma base de $\mathfrak{A}$. Para qualquer elemento $c \in \mathfrak{A}$, $c^2 = \beta_1a + \beta_2b + \beta_3ab + \beta_4a(ab) + \beta_5a(a(ab))$. Substituindo x por a e y por c^2 em (3.7) e tendo em conta que $(\mathfrak{A}^2)^2 = 0$, obtemos que $0 = 2a(a(ac^2)) = \beta_2a(a(ab))$, logo $\beta_2 = 0$ e $c^2 = \beta_1a + \beta_3ab + \beta_4a(ab) + \beta_5a(a(ab))$. Novamente, do fato de $(\mathfrak{A}^2)^2 = 0$, segue que $0 = c^2(ab) = \beta_1a(ab)$, logo $\beta_1 = 0$. Assim, para todo $c \in \mathfrak{A}$, $c^2 = \beta_3ab + \beta_4a(ab) + \beta_5a(a(ab))$, logo $\mathfrak{A}^2 = \langle ab, a(ab), a(a(ab)) \rangle$, isto é, $\mathfrak{A}^2$ tem dimensão 3.

Se $a(a(ab)) = 0$, então $a^3b \neq 0$, portanto $a^3 \neq 0$. Como $(a^2b)a \neq 0$, então $a^2b \neq 0$. Vejamos que o conjunto $\{b, a, a^3, a^2b, a(a^2b)\}$ é linearmente independente. Seja $\gamma_1b + \gamma_2a + \gamma_3a^3 + \gamma_4a^2b + \gamma_5a(a^2b) = 0$. Do fato de $(\mathfrak{A}^2)^2 = 0$ temos que $\gamma_1a^2b + \gamma_2a^3 = 0$, logo $\gamma_1a(a^2b) = 0$ o que obriga $\gamma_1 = 0$, logo $\gamma_2a^3 = 0$ e segue que $\gamma_2 = 0$. Assim, $\gamma_3a^3 + \gamma_4a^2b + \gamma_5a(a^2b) = 0$. Se $\gamma_5 \neq 0$, então $a(a(a^2b)) = -\frac{\gamma_4}{\gamma_5}a(a^2b)$, e já que o operador L_a é nilpotente e $a(a^2b) \neq 0$, segue do Lema 1.1 que $\gamma_4 = 0$. Assim, $\gamma_3a^3 + \gamma_5a(a^2b) = 0$ e

utilizando a equação (3.7) e o fato de $a(a(ab)) = 0$, obtemos que $a^3b = -\frac{\gamma_3}{\gamma_5}a^3$ e segue de novo do Lema 1.1, que $\gamma_3 = 0$, pois $a^3 \neq 0$, logo $\gamma_5 = 0$, que é uma contradição. Portanto, $\gamma_5 = 0$ e $\gamma_3a^3 + \gamma_4a^2b = 0$, logo $\gamma_4a(a^2b) = 0$, o que obriga $\gamma_4 = 0$, sendo portanto $\gamma_3a^3 = 0$, do que segue que $\gamma_3 = 0$. Assim, o conjunto $\{a, b, a^3, a^2b, a(a^2b)\}$ é uma base de $\mathfrak{A}$. Dado $c \in \mathfrak{A}$, podemos escrever $c^2 = \beta_1b + \beta_2a + \beta_3a^3 + \beta_4a^2b + \beta_5a(a^2b)$, e como $(\mathfrak{A}^2)^2 = 0$, temos que $0 = c^2a^2 = \beta_1a^2b + \beta_2a^3$, logo $\beta_1a(a^2b) = 0$, do que segue que $\beta_1 = 0$. Assim, $\beta_2a^3 = 0$, o que implica que $\beta_2 = 0$. Portanto, para todo $c \in \mathfrak{A}$, $c^2 = \beta_3a^3 + \beta_4a^2b + \beta_5a(a^2b)$, logo $\mathfrak{A}^2 = \langle a^3, a^2b, a(a^2b) \rangle$, isto é, $\mathfrak{A}^2$ tem dimensão 3. ■

Lema 4.14 *Seja $\mathfrak{A}$ uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão 5 e nilíndice 4. Se existe uma base de $\mathfrak{A}$ da forma $\{a, a^2, a^3, b, b^2\}$, onde $a^3b = 0$ e $\dim(\mathfrak{A}^2) = 3$, então $\mathfrak{A}^4 = 0$ e portanto $\mathfrak{A}$ é de Jordan.*

Prova: Seja $A = \langle a, a^2, a^3 \rangle$. Pelo Lema 4.12, $(\mathfrak{A}^2)^2 = 0$, logo $b^2a^3 = 0$ e como por hipótese $ba^3 = 0$, segue que $\mathfrak{A}A^3 = 0$, logo A^3 é um ideal de $\mathfrak{A}$. Seja $\overline{\mathfrak{A}}$ a nilálgebra $\mathfrak{A}/A^3$. Como $\overline{\mathfrak{A}}$ tem dimensão 4, seu nilíndice é 3 ou 4. Se o nilíndice é 3, então pelo Teorema 4.4, $\overline{\mathfrak{A}}^3 = 0$, isto é, $\mathfrak{A}^3 \subseteq A^3$ e como $(\mathfrak{A}^2)^2 = 0$, $\mathfrak{A}^4 \subseteq \mathfrak{A}A^3 = 0$, portanto, $0 = (c^2d)c = c^2(dc)$ para todo $c, d \in \mathfrak{A}$, logo $\mathfrak{A}$ é de Jordan.

Se o nilíndice é 4, então existe um $\overline{d} \in \overline{\mathfrak{A}}$ tal que $\overline{d}^3 \neq \overline{0}$. Se $\overline{a} \in \langle \overline{d}, \overline{d}^2, \overline{d}^3 \rangle$, então $\overline{a} = \gamma_1\overline{d} + \gamma_2\overline{d}^2 + \gamma_3\overline{d}^3$. Como $\overline{a}^2 = \gamma_1^2\overline{d}^2 + 2\gamma_1\gamma_2\overline{d}^3$, temos que $0 = \overline{a}^3 = \gamma_1^3\overline{d}^3$ e já que $\overline{d}^3 \neq 0$, segue que $\gamma_1 = 0$, logo $\overline{a}^2 = 0$, o que implica que $a^2 \in A^3$, absurdo. Portanto, $\overline{a} \notin \langle \overline{d}, \overline{d}^2, \overline{d}^3 \rangle$ e temos que $\{\overline{a}, \overline{d}, \overline{d}^2, \overline{d}^3\}$ é uma base para $\overline{\mathfrak{A}}$. Como $\overline{\mathfrak{A}}$ tem dimensão e nilíndice 4, decorre do Teorema 3.7, que $\overline{\mathfrak{A}}^2 = \langle \overline{d}^2, \overline{d}^3 \rangle$, $\overline{\mathfrak{A}}^3 = \langle \overline{d}^3 \rangle$ e $\overline{\mathfrak{A}}^4 = 0$. Já que $\overline{ad} \in \overline{\mathfrak{A}}^2$, podemos escrever $\overline{ad}$ como $\overline{ad} = \alpha_0\overline{d}^2 + \beta_0\overline{d}^3$, logo $ad - \alpha_0d^2 - \beta_0d^3 \equiv 0$ módulo A^3 . Assim, na base $\{a, a^3, d, d^2, d^3\}$ de $\mathfrak{A}$ temos que $ad = \alpha_0d^2 + \beta_0d^3 + \gamma_0a^3$, e analogamente podemos provar que a^2 e ad^2 são da forma, $a^2 = \alpha_1d^2 + \beta_1d^3 + \gamma_1a^3$ e $ad^2 = \epsilon_0d^3 + \delta_0a^3$. Agora, substituindo x por d e y por a em (3.7) e levando em conta que $d(d(da)) = \gamma_0d(da^3) = 0$ e $d(d^2a) = \epsilon_0da^3 = 0$, obtemos que

$d^3a = 0$. Assim, temos que $\mathfrak{A}^2 = \langle d^2, d^3, a^3 \rangle$, $\mathfrak{A}^3 = \langle d^3, a^3 \rangle$ e $\mathfrak{A}^4 = 0$. Logo $(\mathfrak{A}^2)^2 = \mathfrak{A}^4 = 0$, o que implica que $\mathfrak{A}$ é de Jordan. ■

Teorema 4.15 *Se $\mathfrak{A}$ é uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão 5 e nilíndice 4, e não é de Jordan, então existe uma base $\{a, b, a^2, a^2b, a^3\}$ de $\mathfrak{A}$ tal que $a^3b = a^2$, $a(a^2b) = -a^2$ e todos os outros produtos são nulos.*

Prova: Pelo Lema 4.13 e o Lema 3.13, existem elementos $a, b \in \mathfrak{A}$ tal que $\{b, b^2, a, a^2, a^3\}$ é uma base de $\mathfrak{A}$, onde $\mathfrak{A}^2 = \langle b^2, a^2, a^3 \rangle$. Seja $B = \langle a, a^2, a^3, b^2 \rangle$ um subespaço de $\mathfrak{A}$. Como $\mathfrak{A}^2 \subseteq B$, B é um ideal de $\mathfrak{A}$, logo B é uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão e nilíndice 4. Seja $A = \langle a, a^2, a^3 \rangle$. Pelo Corolário 3.8, $B^r = A^r$ para $r \geq 2$. Por (3.7), $a^3b = -2a(a(ab)) - a(a^2b)$ e já que $a(a(ab)) \in B^3 = A^3 \subseteq A^2$ e $a(a^2b) \in B^2 = A^2$, temos que $a^3b \in A^2$, logo $a^3b = \alpha a^2 + \beta a^3$, com $\alpha \neq 0$, pois se $\alpha = 0$, então $a^3b = \beta a^3$ e segue do Lema 1.1 que $\beta = 0$, pois por (4.3), L_b é nilpotente e tínhamos que $a^3 \neq 0$, portanto $a^3b = 0$ e decorre do Lema 4.14, que $\mathfrak{A}$ é de Jordan, absurdo. Como $a^3b = \alpha a^2 + \beta a^3$ com $\alpha \neq 0$, temos que $\alpha^{-1}b(a + \frac{\beta}{2\alpha}a^2)^3 = \alpha^{-1}ba^3 = a^2 + \frac{\beta}{\alpha}a^3 = (a + \frac{\beta}{2\alpha}a^2)^2$. Assim, se $a_1 = a + \frac{\beta}{2\alpha}a^2$, então $a_1^3b = \alpha a_1^2$, com $\alpha \neq 0$, e se $a_2 = \frac{1}{\alpha}a_1$, então $\alpha^3 a_2^3 b = a_1^3 b = \alpha a_1^2 = \alpha^3 a_2^2$, logo $a_2^3 b = a_2^2$ e podemos supor $\alpha = 1$. Portanto, podemos assumir, na base $\{b, b^2, a, a^2, a^3\}$ de $\mathfrak{A}$, que

$$a^3b = a^2. \quad (4.5)$$

Substituindo x por a e y por b em (3.7) e multiplicando por a , obtemos que $2(a(a(a(ab)))) + a(a(a^2b)) + a(a^3b) = 0$, e por (4.3) e (4.5), temos que

$$a(a(a^2b)) = -a^3,$$

logo $a^2b \notin \langle a^2, a^3 \rangle$, e como $\mathfrak{A}^2$ tem dimensão 3, temos que $\mathfrak{A}^2 = \langle a^2, a^3, a^2b \rangle$, sendo portanto, o conjunto $\{a, a^2, a^3, b, a^2b\}$ uma base de $\mathfrak{A}$. Como $(\mathfrak{A}^2)^2 = 0$, só precisamos determinar, na base anterior, os produtos ab , $a(a^2b)$, $b(a^2b)$ e b^2 . Substituindo x por b e y por a^2 em (3.7), e levando em conta que

$(\mathfrak{A}^2)^2 = 0$, obtemos que $b(b(ba^2)) = 0$. Por outro lado, $b(ba^2) \in \mathfrak{A}^2$, logo $b(ba^2) = \alpha_1 a^2 b + \alpha_2 a^2 + \alpha_3 a^3$ e $0 = b(b(ba^2)) = \alpha_1 b(a^2 b) + \alpha_2 a^2 b + \alpha_3 a^2 = (\alpha_1^2 + \alpha_2) a^2 b + (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3) a^2 + \alpha_1 \alpha_3 a^3$ o que implica que $\alpha_1^2 + \alpha_2 = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_1 \alpha_3 = 0$, portanto, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Assim,

$$b(ba^2) = 0.$$

Seja $D = \langle a^2 b, a, a^2, a^3 \rangle$. É claro que D é uma nilálgebra comutativa de p.a. de nilíndice e dimensão 4, e segue pelo Corolário 3.8, que $D^2 = \langle a^2, a^3 \rangle$. Como $a(a^2 b) \in D^2 = A^2$ e $a(a(a^2 b)) = -a^3$, temos que $a(a^2 b) = -a^2 + \epsilon a^3$, e já que $ab \in \mathfrak{A}^2$, escrevemos $ab = \alpha_1 a^2 b + \alpha_2 a^2 + \alpha_3 a^3$, logo $a(a(ab)) = \alpha_1 a(a(a^2 b)) = -\alpha_1 a^3$, assim em (3.7), temos que $0 = 2a(a(ab)) + a(a^2 b) + a^3 b = -2\alpha_1 a^3 - a^2 + \epsilon a^3 + a^2 = (\epsilon - 2\alpha_1) a^3$, do que segue que $\epsilon = 2\alpha_1$. Como $b^2 \in \mathfrak{A}^2$, $b^2 = \beta_1 a^2 b + \beta_2 a^2 + \beta_3 a^3$, logo $0 = b^4 = \beta_3 b(ba^3) = \beta_3 a^2 b$ e segue que $\beta_3 = 0$, portanto

$$b^2 = \beta_1 a^2 b + \beta_2 a^2.$$

De (3.9) e de $b(ba^2) = 0$, temos que $2b(a(ab)) + 2a(b(ab)) + a(ab^2) = 0$, mas $a(ab^2) = \beta_1 a(a(a^2 b)) = -\beta_1 a^3$, $2a(b(ab)) = 2\alpha_1 a(b(a^2 b)) + 2\alpha_2 a(ba^2) + 2\alpha_3 a(a^3 b) = 2\alpha_2(-a^2 + \epsilon a^3) + 2\alpha_3 a^3 = -2\alpha_2 a^2 + 2(2\alpha_2 \alpha_1 + \alpha_3) a^3$ e $2b(a(ab)) = 2\alpha_1 b(a(a^2 b)) + 2\alpha_2 ba^3 = 2\alpha_1(-a^2 + \epsilon a^3)b + 2\alpha_2 a^3 b = -2\alpha_1 a^2 b + (4\alpha_1^2 + 2\alpha_2) a^2$, logo $(-\beta_1 + 4\alpha_2 \alpha_1 + 2\alpha_3) a^3 + (-2\alpha_2 + 4\alpha_1^2 + 2\alpha_2) a^2 - 2\alpha_1 a^2 b = 0$, portanto $\alpha_1 = 0$, o que implica que $\epsilon = 0$ e $\beta_1 = 2\alpha_3$. Assim,

$$ab = \alpha_2 a^2 + \alpha_3 a^3 \quad \text{e} \quad a(a^2 b) = -a^2.$$

Seja $d = b - \alpha_2 a - \alpha_3 a^2 - \frac{1}{2}(\beta_2 - \alpha_2^2) a^3$. Então $a^2 d = a^2 b - \alpha_2 a^3$ e podemos verificar com um cálculo direto que o conjunto $\{a, a^2, a^3, d, a^2 d\}$ é linearmente independente, portanto uma base de $\mathfrak{A}$. Como $(\mathfrak{A}^2)^2 = 0$, só precisamos determinar os produtos ad , $a(a^2 d)$, $d(a^2 d)$ e d^2 . É imediato verificar que $ad = 0$ e $a(a^2 d) = -a^2$. Levando em conta que $(\mathfrak{A}^2)^2 = 0$ e $b(a^2 b) = 0$, temos que $d(a^2 d) = -\alpha_2 a^3 b - \alpha_2 a(a^2 b) = -\alpha_2 a^2 + \alpha_2 a^2 = 0$. Temos também que, $d^2 = b^2 - 2\alpha_2 ab - 2\alpha_3 a^2 b - (\beta_2 - \alpha_2^2) a^3 b + \alpha_2^2 a^2 + 2\alpha_2 \alpha_3 a^3 = 2\alpha_3 a^2 b + \beta_2 a^2 - 2\alpha_2^2 a^2 - 2\alpha_2 \alpha_3 a^3 - 2\alpha_3 a^2 b - \beta_2 a^3 b + \alpha_2^2 a^3 b + \alpha_2^2 a^2 + 2\alpha_2 \alpha_3 a^3 =$

$\beta_2 a^2 - 2\alpha_2^2 a^2 - 2\alpha_2 \alpha_3 a^3 - \beta_2 a^2 + \alpha_2^2 a^2 + \alpha_2^2 a^2 + 2\alpha_2 \alpha_3 a^3 = 0$. Assim, temos de todo o anterior que $\{a, a^2, a^3, d, a^2 d\}$ é uma base de $\mathfrak{A}$ com $a^3 d = a^2$, $a(a^2 d) = -a^2$ e todos os outros produtos nulos. ■

4.3.3 Nilíndice $k = 5$

Lema 4.16 *Seja $\mathfrak{A}$ uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão e nilíndice 5, sobre um corpo de característica diferente de 2 e 3. Se existe $b \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}^2$ tal que $b\mathfrak{A}^2 = 0$, então $\mathfrak{A}$ é de Jordan.*

Prova: Seja $b \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}^2$ tal que $b\mathfrak{A}^2 = 0$ e seja $a \in \mathfrak{A}$ tal que $a^4 \neq 0$ e definamos $A = \langle a, a^2, a^3, a^4 \rangle$. Pelo Corolário 3.8, temos que A é um ideal de $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}^s = A^s$ para $s \geq 2$. Note que $b \notin A$, pois se $b = \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \alpha_3 a^3 + \alpha_4 a^4$, então $a^2 b = \alpha_1 a^3 + \alpha_2 a^4 = 0$, logo $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e portanto $b \in \mathfrak{A}^2$, que não é possível. Como $xb \in A$ para todo $x \in A$ e A é associativa, segue que, $x(xb) = x^2(b)$ e já que $x^2 b = x^3 b = 0$, temos de (2.2) que, $x^2(xb) = 0$ e portanto

$$xb \in A^3, \quad (4.6)$$

para todo $x \in A$. É claro que $(ab)b = b(a(ab)) = a^2 b = 0$, pois $ab \in \mathfrak{A}^2$. Temos também que $b^2 \in \mathfrak{A}^2 = A^2 \subset A$ e segue da associatividade de A que $a(ab^2) = a^2 b^2$, dos fatos anteriores e de $(ab)^2 \in A^3 A^3 = 0$, obtemos por (2.3) que, $a^2 b^2 = 0$ e portanto

$$b^2 \in A^3. \quad (4.7)$$

Obviamente, temos $\mathfrak{A} = Fb \oplus A$. Sejam $c = \alpha b + x$ e $d = \beta b + y$ com $x, y \in A$ arbitrários. Temos que $c^2 = \alpha^2 b^2 + 2\alpha bx + x^2$ e $dc = \alpha\beta b^2 + \alpha by + \beta bx + xy$. Como $c^2 b \in b\mathfrak{A}^2 = 0$, temos que $c^2 d = c^2 y$, também $(c^2 d)c = (c^2 y)x$, pois $(c^2 y)b = 0$, mas, $(b^2 y)x, ((bx)y)x \in A^5 = 0$ por (4.6) e (4.7), logo $(c^2 d)c = (x^2 y)x$. Por outro lado temos que, $c^2(dc) = (2\alpha bx + x^2)(\alpha by + \beta bx + xy)$, pois $b^2 c^2, b^2(cd) \in A^5 = 0$ e já que $(bx)A^2 \subset A^5 = 0$ e $(by)A^2 \subset A^5 = 0$ por (4.6), temos que $c^2(dc) = x^2(xy)$. Assim, $(c^2 d)c - c^2(dc) = (x^2 y)x - x^2(yx) =$

0, pois A é associativa. Temos portanto que $c^2(dc) = (c^2d)c$ para todo $c, d \in \mathfrak{A}$, o que mostra que $\mathfrak{A}$ é de Jordan. ■

Teorema 4.17 *As seguintes condições são equivalentes:*

- (i) $\mathfrak{A}$ é uma nilálgebra comutativa, de p.a. de dimensão e nilíndice 5, que não é de Jordan.
- (ii) Existe uma base $\{b, a, a^2, a^3, a^4\}$ de $\mathfrak{A}$ tal que $b^2 = -a^2 + \alpha a^3 + \beta a^4$, $a^2b = a^3 + \gamma a^4$, $a^3b = -a^4$ e todos os outros produtos são nulos.

Prova:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Suponhamos (i) válido. Então pelo Corolário 3.8, existem elementos $a, b \in \mathfrak{A}$ tal que $\{b, a, a^2, a^3, a^4\}$ é uma base de $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}^s = A^s$ para $s \geq 2$ onde $A = \langle a, a^2, a^3, a^4 \rangle$. Logo $ab = \lambda_0 a^2 + \alpha_0 a^3 + \beta_0 a^4$, $a^2b = \mu a^3 + \gamma a^4$, $a^3b = \delta a^4$, $a^4b = 0$ e $b^2 = \lambda a^2 + \alpha a^3 + \beta a^4$. Como $a(b - \lambda_0 a - \alpha_0 a^2 - \beta_0 a^3) = 0$, podemos supor na base $\{b, a, a^2, a^3, a^4\}$ de $\mathfrak{A}$ que

$$ab = 0.$$

De (2.2), temos que $a(a^2b) + a^3b = 0$ e já que $a(a^2b) = \mu a^4$, segue que $(\mu + \delta)a^4 = 0$, logo $\mu = -\delta$. De (2.3), temos que $a(ab^2) + b(a^2b) - 2a^2b^2 = 0$, mas $a(ab^2) = \lambda a^4$, $b(a^2b) = \mu \delta a^4$ e $a^2b^2 = \lambda a^4$, logo $(\mu \delta - \lambda)a^4 = 0$, e como $\mu = -\delta$, segue que $\lambda = -\delta^2$. Se $\lambda = 0$, então $a^3b = 0$ e $a^2b = \gamma a^4$. Seja $d = b - \gamma a^2$. É claro que $d \notin \mathfrak{A}^2$ e $d\mathfrak{A}^2 = 0$, o que implica pelo Lema 4.16, que $\mathfrak{A}$ é de Jordan, absurdo. Portanto $\lambda \neq 0$ e segue que $\delta \neq 0$. Agora, fazendo $a_1 = -\delta a$, temos que $ba_1^3 = -\delta^3 ba^3 = -\delta^4 a^4 = -a_1^4$, portanto, podemos supor $\delta = -1$, isto é, $\lambda = -1$. Assim, $a^2b = a^3 + \gamma a^4$, $a^3b = -a^4$ e $b^2 = -a^2 + \alpha a^3 + \beta a^4$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Suponhamos (ii) válido. Note que, $\mathfrak{A}$ não é de Jordan, pois $a^2(ba) = 0$ e $(a^2b)a = a^4 \neq 0$. Seja $c \in \mathfrak{A}$ tal que $c = \gamma_0 b + \gamma_1 a + \gamma_2 a^2 + \gamma_3 a^3 +$

$\gamma_4 a^4$. Logo:

$$\begin{aligned}
 c^2 &= \gamma_0^2 b^2 + 2\gamma_0\gamma_2 a^2 b + 2\gamma_0\gamma_3 a^3 b + \gamma_1^2 a^2 + 2\gamma_1\gamma_2 a^3 + 2\gamma_1\gamma_3 a^4 + \gamma_2^2 a^4 \\
 &= \gamma_0^2(-a^2 + \alpha a^3 + \beta a^4) + 2\gamma_0\gamma_2(a^3 + \gamma a^4) + 2\gamma_0\gamma_3(-a^4) + \gamma_1^2 a^2 \\
 &\quad + 2\gamma_1\gamma_2 a^3 + (2\gamma_1\gamma_3 + \gamma_2^2) a^4 \\
 &= (\gamma_1^2 - \gamma_0^2) a^2 + (\alpha\gamma_0^2 + 2\gamma_0\gamma_2 + 2\gamma_1\gamma_2) a^3 + \lambda_0 a^4, \\
 c^2 c^2 &= (\gamma_1^2 - \gamma_0^2)^2 a^4, \\
 c^3 &= (\gamma_0\gamma_1^2 - \gamma_0^3) a^2 b + (\gamma_0^3 \alpha + 2\gamma_0^2 \gamma_2 + 2\gamma_0\gamma_1\gamma_2) b a^3 + (\gamma_1^3 - \gamma_0^2 \gamma_1) a^3 \\
 &\quad + \lambda_1 a^4 \\
 &= (\gamma_0\gamma_1^2 - \gamma_0^3)(a^3 + \gamma a^4) + (\gamma_0^3 \alpha + 2\gamma_0^2 \gamma_2 + 2\gamma_0\gamma_1\gamma_2)(-a^4) \\
 &\quad + (\gamma_1^3 - \gamma_0^2 \gamma_1) a^3 + \lambda_1 a^4 \\
 &= (\gamma_0\gamma_1^2 - \gamma_0^2 \gamma_1 + \gamma_1^3 - \gamma_0^3) a^3 + \lambda_2 a^4, \\
 c^4 &= (\gamma_0^2 \gamma_1^2 - \gamma_0^3 \gamma_1 + \gamma_0 \gamma_1^3 - \gamma_0^4)(-a^4) + (\gamma_0 \gamma_1^3 - \gamma_0^2 \gamma_1^2 + \gamma_1^4 - \gamma_1 \gamma_0^3) a^4 \\
 &= (\gamma_1^4 - 2\gamma_1^2 \gamma_0^2 + \gamma_0^4) a^4 \\
 &= (\gamma_1^2 - \gamma_0^2)^2 a^4.
 \end{aligned}$$

Assim, $c^4 = c^2 c^2$ e $c^5 = 0$ para todo $c \in \mathfrak{A}$, logo $\mathfrak{A}$ é de p.a. de nilíndice 5. $\blacksquare$

Observação Nas condições do Teorema 4.15, temos que $\{a, b, a^2 b, a^2, a^3\}$ é uma base de $\mathfrak{A}$ com $a^3 b = a^2$, $a(a^2 b) = -a^2$ e todos os outros produtos nulos. Seja $e_1 = a + \frac{1}{2}a^2 b + a^3$, $e_2 = b$, $e_3 = a^2$, $e_4 = a^3$ e $e_5 = a^2 b$. Temos que:

$$\begin{aligned}
 e_1^2 &= a^2 + a(a^2 b) + \frac{1}{4}(a^2 b)^2 + a^3(a^2 b) + a^6 = a^2 - a^2 = 0, \\
 e_1 e_2 &= ab + \frac{1}{2}b(a^2 b) + a^3 b = a^3 b = a^2 = e_3,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_1 e_3 &= a^3 + \frac{1}{2} a^2 (a^2 b) + a^5 = a^3 = e_4, \\
e_1 e_4 &= a^4 + \frac{1}{2} a^3 (a^2 b) + a^6 = 0, \\
e_1 e_5 &= a(a^2 b) + \frac{1}{2} (a^2 b)^2 + a^3 (a^2 b) = -a^2 = -e_3, \\
e_2^2 &= b^2 = 0, \\
e_2 e_3 &= b a^2 = e_5, \\
e_2 e_4 &= a^3 b = a^2 = e_3, \\
e_2 e_5 &= b(a^2 b) = 0, \\
e_3^2 &= a^4 = 0, \\
e_3 e_4 &= a^2 a^3 = 0, \\
e_3 e_5 &= a^2 (a^2 b) = 0, \\
e_4^2 &= a^6 = 0, \\
e_4 e_5 &= a^3 (a^2 b) = 0.
\end{aligned}$$

Assim, $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ é uma base de $\mathfrak{A}$ com $e_1 e_2 = e_3$, $e_1 e_3 = e_4$, $e_1 e_5 = -e_3$, $e_2 e_3 = e_5$, $e_2 e_4 = e_3$ e todos os outros produtos nulos. Esta álgebra é a conhecida como *Álgebra de Suttles* a qual é solúvel, mas não é nilpotente.

Teorema 4.18 *Seja $\mathfrak{A}$ uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão 5 sobre um corpo F de característica diferente de 2 e 3. $\mathfrak{A}$ é nilpotente ou $\mathfrak{A}$ é isomorfa à álgebra de Suttles.*

Prova: Como $\mathfrak{A}$ tem dimensão 5, seu nilíndice é menor ou igual a 6. Se o nilíndice é menor ou igual a 3, então pelo Corolário 3.3, $\mathfrak{A}$ é nilpotente. Se o nilíndice é maior ou igual a 5, então pelo Lema 3.6 e o Teorema 3.7, $\mathfrak{A}$ é nilpotente. Finalmente, se o nilíndice é 4, então pela observação anterior $\mathfrak{A}$ é de Jordan ou $\mathfrak{A}$ é isomorfa à álgebra de Suttles. ■

4.4 Dimensão 6

Nesta seção, F denotará um corpo de característica diferente de 2, 3 e 5. A prova do seguinte teorema, tem alinhamentos similares aos da prova do Teorema 3.14.

Teorema 4.19 *Toda nilálgebra comutativa, não necessariamente de p.a. de dimensão 6 sobre o corpo F , é solúvel.*

Prova: Seja $\mathfrak{A}$ uma nilálgebra comutativa, não necessariamente de p.a. de dimensão 6 sobre o corpo F . Como toda nilálgebra de Jordan é solúvel, temos que se $\text{grau}(\mathfrak{A}) \leq 2$, então $\mathfrak{A}$ é solúvel. Note também que $\mathfrak{A}$ é solúvel se tem uma subálgebra de codimensão menor ou igual a 2, isto é, subálgebras de dimensão 4 ou 5, assim, se $\text{grau}(\mathfrak{A}) \geq 4$, então $\mathfrak{A}$ é solúvel.

Analisaremos então o caso em que $\text{grau}(\mathfrak{A}) = 3$ e $\mathfrak{A}$ não é de Jordan. Como $\text{grau}(\mathfrak{A}) = 3$, temos que para todo $x \in \mathfrak{A}$, $x(x(xx)) = 0$, logo em $\mathfrak{A}$ cumpre-se (3.7) e portanto

$$L_x^3 + L_x L_{x^2} + 2L_x^3 = 0. \quad (4.8)$$

Como $\mathfrak{A}$ não é de Jordan, existe um $a \in \mathfrak{A}$ tal que $a^3 \neq 0$. Seja A a subálgebra de $\mathfrak{A}$ gerada por a . Pelo Teorema 4.3, $\dim(A^3) \leq 1$, logo $a^2 a^2 \in \langle a^3 \rangle$, mostrando que $A = \langle a, a^2, a^3 \rangle$. Sejam N_A e M_A definidos como na Seção 3.2. Dividiremos a prova nos seguintes casos:

Caso 1. $\dim(N_A) = 0$. Então A é um ideal de $\mathfrak{A}$, portanto $\mathfrak{A}$ é solúvel.

Caso 2. Existe um elemento não nulo $b + A \in \mathfrak{A}/A$ tal que $b + A$ está no kernel de todos os endomorfismos de M_A . Então $B = \langle b \rangle \oplus A$ é uma subálgebra de $\mathfrak{A}$ de dimensão 4, isto é, de codimensão 2, sendo portanto $\mathfrak{A}$ solúvel, pelo Corolário 3.11.

Caso 3. Se $\dim(N_A) \geq 1$ e verifica-se (ii) do Lema 1.14, então $\dim(M_A) = 2$. Como $\mathfrak{A}/A$ tem dimensão 3 e $\mathfrak{A}$ é de Engel, temos que $\overline{L}_x^3 = 0$ para todo $x \in \mathfrak{A}$ com $xA \subset A$, portanto temos por (4.8) que

$$\overline{L}_{a^3} = -\overline{L_a L_{a^2}}, \quad (4.9)$$

logo por Lema 1.14, $\dim(N_A) = 1$ e $\bar{L}_a = 0$ ou $\bar{L}_{a^2} = 0$, portanto, $\bar{L}_{a^3} = 0$ e segue que $a^3\mathfrak{A} \subseteq A$. Seja $0 \neq \lambda \in F$ tal que $a^3 + \lambda a^2 a^2 \neq 0$. Então $a_1 = a + \lambda a^2$ é um gerador de A e $a_1^3 \neq 0$ já que $a_1^2 = a^2 + 2\lambda a^3 + \lambda^2 a^2 a^2$ e $a_1^3 = a^3 + \lambda a^2 a^2$. Portanto podemos provar analogamente que $\bar{L}_{a_1} = 0$ ou $\bar{L}_{a_1^2} = 0$, onde $\bar{L}_{a_1} = \bar{L}_a + \lambda \bar{L}_{a^2}$ e $\bar{L}_{a_1^2} = \bar{L}_{a^2}$. Se $\bar{L}_a = 0$, então $\bar{L}_{a_1} = \lambda \bar{L}_{a^2} = \lambda \bar{L}_{a_1^2}$, logo $\bar{L}_{a^2} = 0$, pois $\lambda \neq 0$. Assim provamos que $\bar{L}_{a^2} = 0$, logo

$$a^2\mathfrak{A}, a^3\mathfrak{A} \subseteq A.$$

Seja f não nulo, tal que $f \in N_A$. Pelo Lema 1.14, f tem posto 2 e portanto o kernel de f tem dimensão 1, assim, temos que existe um elemento não nulo $b+A$ no kernel de f , isto é, $f(b+A) = 0$, portanto $bA \subseteq A$, o que mostra que $\bar{L}_b \in M_A$, logo $M_A = \langle f, \bar{L}_b \rangle$. Igual que na prova do Teorema 3.14, obtemos que

$$\mathfrak{A} = A \oplus B, \quad (4.10)$$

onde $B = \langle b, b^2, b^3 \rangle$ é subálgebra de $\mathfrak{A}$, já que o grau de $\mathfrak{A}$ é 3. Portanto, existe $\lambda \in F$ tal que

$$ab \equiv 0, \quad ab^2 \equiv \lambda b, \quad ab^3 \equiv -\lambda b^2 \mod A. \quad (4.11)$$

Sem perda de generalidade podemos assumir que $\dim(N_B) = 1$ e que não existe um vetor não nulo no kernel de todos os endomorfismos de M_B . Assim como provamos que $A^2\mathfrak{A} \subseteq A$, podemos mostrar analogamente que $B^2\mathfrak{A} \subseteq B$, logo $a^i b^j \in A \cap B = 0$ para $i, j \in \{2, 3\}$. Como $B^2\mathfrak{A} \subseteq B$, temos que $ab^2, ab^3 \in B$, logo $ab^2 - \lambda b, ab^3 + \lambda b^2 \in B$ e segue de (4.11) que $ab^2 = \lambda b$ e $ab^3 = -\lambda b^2$. Assim

$$\begin{aligned} (a + b^3)^3 &= (a + b^3)(a^2 + 2ab^3) = (a + b^3)(a^2 - 2\lambda b^2) \\ &= a^3 - 2\lambda ab^2 + a^2 b^3 - 2\lambda b^2 b^3 \\ &= a^3 - 2\lambda ab^2 \\ &= a^3 - 2\lambda^2 b, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 ((a + b^3)^2)^2 &= (a^2 + 2ab^3)^2 = (a^2 - 2\lambda b^2)^2 \\
 &= a^2a^2 - 4\lambda a^2b^2 + 4\lambda^2b^2b^2 \\
 &= a^2a^2 - 4\lambda^2b^2b^2.
 \end{aligned}$$

Como $\text{grau}(\mathfrak{A}) = 3$, temos que $(a + b^3)^3$ e $((a + b^3)^2)^2$ são linearmente dependentes e já que $a^2a^2 \in \langle a^3 \rangle$, $b^2b^2 \in \langle b^3 \rangle$, obtemos, comparando os coeficientes, que $\lambda = 0$ que nos leva, por (4.11), a que $AB \subseteq A$, e segue de (4.10) que $\overline{L}_a = 0$, portanto $\dim(N_A) = 0$, que contradiz o fato de $\dim(N_A) = 1$. Assim, temos que o caso 3 leva a uma contradição, portanto só podem acontecer os casos 1 e 2, o que prova o teorema. ■

4.5 Dimensão 7 e 8

Seja $\mathfrak{A}$ é uma nilálgebra comutativa de p.a. sobre um corpo F de característica diferente de 2 e 3. Mostraremos nesta seção, que se a dimensão de $\mathfrak{A}$ é menor ou igual a 8 e $x^4 = 0$ para todo $x \in \mathfrak{A}$, então $((\mathfrak{A}^2)^2)^2 = 0$, isto é, $\mathfrak{A}$ é solúvel. Lembremos que pelo Lema 3.5, o operador L_x é nilpotente de índice menor ou igual a 5, para todo $x \in \mathfrak{A}$.

Lema 4.20 *Se $\dim(\mathfrak{A}) \leq 8$ e $x^4 = 0$ para todo $x \in \mathfrak{A}$, então as seguintes identidades são válidas em $\mathfrak{A}$.*

$$x(x(x(xy))) = x^2(x^2y) = x^3(xy) = 0. \quad (4.12)$$

$$(xy)^3 = 0. \quad (4.13)$$

Prova: Suponhamos que existem elementos $a, b \in \mathfrak{A}$ tal que $a(a(a(ab))) \neq 0$. Então por (4.2), $a^2(a^2b) \neq 0$ e $a^3 \neq 0$. Seja $A = \langle a, a^2, a^3 \rangle$. Vejamos que se $a(a(a(ab))) \notin A$, então o conjunto

$$B = \{b, ab, a(ab), a(a(ab)), a(a(a(ab))), a, a^2, a^3, a^2b\}$$

é linearmente independente. Note que se $a^2(a^2b) = \sigma a^3$, então por (4.2), $a^3(ab) = -\frac{1}{2}\sigma a^3$ e decorre do Lema 1.1, que $\sigma = 0$, logo o conjunto $\{a^3, a^2(a^2b)\}$ é linearmente independente. Seja

$$\alpha_1 b + \alpha_2 ab + \alpha_3 a(ab) + \alpha_4 a(a(ab)) + \alpha_5 a(a(a(ab))) + \alpha_6 a + \alpha_7 a^2 + \alpha_8 a^3 + \alpha_9 a^2 b = 0.$$

Multiplicando por a^2 e levando em conta (3.4), obtemos que $\alpha_1 a^2 b + \alpha_6 a^3 + \alpha_9 a^2(a^2 b) = 0$, logo por (3.4) e (4.2), $0 = \alpha_1 a^2(a^2 b) + \alpha_9 a^2(a^2(a^2 b)) = \alpha_1 a^2(a^2 b) + 4\alpha_9 a^2(a(a(a(ab)))) = \alpha_1 a^2(a^2 b)$, isto é, $\alpha_1 a^2(a^2 b) = 0$ e segue que $\alpha_1 = 0$. Portanto, $\alpha_6 a^3 + \alpha_9 a^2(a^2 b) = 0$ e segue que $\alpha_6 = \alpha_9 = 0$. Assim, $\alpha_2 ab + \alpha_3 a(ab) + \alpha_4 a(a(ab)) + \alpha_5 a(a(a(ab))) + \alpha_7 a^2 + \alpha_8 a^3 = 0$. Multiplicando por a , três vezes, e tendo em conta (4.2), obtemos que $\alpha_2 a(a(a(ab))) = 0$ o que obriga $\alpha_2 = 0$, igualmente multiplicando por a , duas vezes, obtemos que $\alpha_3 = 0$, assim $\alpha_4 a(a(ab)) + \alpha_5 a(a(a(ab))) + \alpha_7 a^2 + \alpha_8 a^3 = 0$. Agora, multiplicando por a e utilizando (4.2), obtemos que, $0 = \alpha_4 a(a(a(ab))) + \alpha_7 a^3 = \frac{1}{4}\alpha_4 a^2(a^2 b) + \alpha_7 a^3$, e segue que $\alpha_4 = \alpha_7 = 0$. Logo $\alpha_5 a(a(a(ab))) + \alpha_8 a^3 = 0$ e é claro que $\alpha_5 = \alpha_8 = 0$. Assim, temos um subconjunto B de $\mathfrak{A}$ com 9 elementos que é linearmente independente, absurdo, logo $a(a(a(ab))) \in A$.

Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in F$, tais que $a(a(a(ab))) = \alpha a + \beta a^2 + \gamma a^3$. Logo $\alpha a^2 + \beta a^3 = 0$ e segue que $\alpha = \beta = 0$. De (4.2) temos que $\gamma a^3 = a(a(a(ab))) = -\frac{1}{2}a^3(ab)$, e segue do Lema 1.1, que $\gamma = 0$, assim $a(a(a(ab))) = 0$ o que contradiz o suposto de $a(a(a(ab))) \neq 0$. Portanto, $a(a(a(ab))) = 0$ e segue deste fato e de (4.2) que, $\tilde{a}^3(ab) = a^2(a^2 b) = 0$. Linearizando $x^2(x^2 y) = 0$, obtemos que, $2x^2(y(xz)) + 2(xz)(x^2 y) = 0$. Substituindo x por a , y por b^2 e z por b , na anterior equação e levando em conta (3.4) e (3.10), obtemos que, $0 = (ab)(a^2 b^2) = -2(ab)(ab)^2 = -2(ab)^3$, isto é, $(ab)^3 = 0$. ■

Observação Como veremos a continuação, o lema anterior não é válido quando a dimensão é 9. De fato, seja $\mathfrak{V}$ uma álgebra comutativa de dimensão 9, com base $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$ e produtos não nulos dados por: $v_1 v_6 = v_2$, $v_1 v_7 = v_9$, $v_1 v_8 = -(2 + \beta)v_4 - \gamma v_5$, $v_2 v_6 = v_3$, $v_2 v_8 = -2v_5$, $v_3 v_6 = v_4$, $v_4 v_6 = v_5$, $v_6^2 = v_7$, $v_6 v_7 = v_8$, $v_6 v_9 = \beta v_4 + \gamma v_5$ e $v_7 v_9 = 4v_5$.

Então temos que:

$$\begin{aligned} v_6(v_6(v_6(v_6v_1))) &= v_6(v_6(v_6v_2)) = v_6(v_6v_3) = v_6v_4 = v_5 \neq 0, \\ v_6^2(v_6^2v_1) &= v_6^2(v_1v_7) = v_6^2v_9 = v_7v_9 = 4v_5 \neq 0, \\ v_6^3(v_1v_6) &= v_6^3v_2 = v_2(v_6v_7) = v_2v_8 = -2v_5 \neq 0. \end{aligned}$$

Não se cumprindo (4.12).

Teorema 4.21 *Se $\mathfrak{A}$ tem dimensão menor o igual a 8 e $x^4 = 0$ para todo $x \in \mathfrak{A}$, então $((\mathfrak{A}^2)^2)^2 = 0$.*

Prova: Suponhamos que $((\mathfrak{A}^2)^2)^2 \neq 0$, isto é, existem elementos $a, b, c, d \in \mathfrak{A}$ tal que $(a^2b^2)(c^2d^2) \neq 0$. Por (3.10),

$$(a^2b^2)(c^2d^2) = 4(ab)^2(cd)^2 = -8((ab)(cd))^2 \neq 0.$$

Vejamos que o conjunto $B = \{ab, a^2, b^2, a^2b^2, cd, c^2, d^2, c^2d^2\}$ é linearmente independente. Para ver isto, mostremos primeiro que o conjunto $\{ab, a^2, b^2, a^2b^2\}$ é linearmente independente. Se

$$\alpha_1ab + \alpha_2a^2 + \alpha_3b^2 + \alpha_4a^2b^2 = 0,$$

então por (3.4) e (4.12), $\alpha_3a^2b^2 = 0$, e segue que $\alpha_3 = 0$, logo $\alpha_1ab + \alpha_2a^2 + \alpha_4a^2b^2 = 0$. Igualmente, $\alpha_2a^2b^2 = 0$, e portanto $\alpha_2 = 0$. Por (3.10), $0 = \alpha_1ab + \alpha_4a^2b^2 = \alpha_1ab - 2\alpha_4(ab)^2$, o que implica que $\alpha_1 = \alpha_4 = 0$. Seja

$$\beta_1a^2 + \beta_2b^2 + \beta_3ab + \beta_4a^2b^2 + \beta_5c^2 + \beta_6d^2 + \beta_7cd + \beta_8c^2d^2 = 0.$$

Multiplicando por d^2 e levando em conta (3.4) e (4.12), obtemos que

$$\beta_1a^2d^2 + \beta_2b^2d^2 + \beta_3(ab)d^2 + \beta_4(a^2b^2)d^2 + \beta_5c^2d^2 = 0.$$

Multiplicando agora por a^2b^2 , temos que

$$\begin{aligned} \beta_1(a^2d^2)(a^2b^2) + \beta_2(b^2d^2)(a^2b^2) + \beta_3((ab)d^2)(a^2b^2) + \\ + \beta_4((a^2b^2)d^2)(a^2b^2) + \beta_5(c^2d^2)(a^2b^2) = 0. \end{aligned}$$

Por (3.14) temos que $(a^2b^2)(a^2d^2) = (a^2b^2)(b^2d^2) = 0$, por (3.4) e (3.10) temos que $(d^2(ab))(a^2b^2) = -2(d^2(ab))(ab)^2 = 0$ e que $(a^2b^2)(d^2(a^2b^2)) = 4(d^2(ab)^2)(ab)^2 = 0$, logo $\beta_5(a^2b^2)(c^2d^2) = 0$ e segue que $\beta_5 = 0$. Igualmente, multiplicando por c^2 e depois por a^2b^2 , obtemos que $\beta_6 = 0$. Assim, temos que

$$\beta_1a^2 + \beta_2b^2 + \beta_3ab + \beta_4a^2b^2 = -(\beta_7cd + \beta_8c^2d^2).$$

Por (3.4), (3.10), (4.12) e (4.13) segue que

$$\begin{aligned} (\beta_1a^2 + \beta_2b^2 + \beta_3ab + \beta_4a^2b^2)^2 &= 2\beta_1\beta_2a^2b^2 + 2\beta_1\beta_3a^2(ab) + 2\beta_1\beta_4a^2(a^2b^2) \\ &\quad + 2\beta_2\beta_3b^2(ab) + 2\beta_2\beta_4b^2(a^2b^2) + \beta_3^2(ab)^2 \\ &\quad + 2\beta_3\beta_4(ab)(a^2b^2) + \beta_4^2(a^2b^2)^2 \\ &= 2\beta_1\beta_2a^2b^2 - \frac{1}{2}\beta_3^2a^2b^2 - 4\beta_3\beta_4(ab)^3 \\ &\quad + 4\beta_4^2((ab)^2)^2 \\ &= (2\beta_1\beta_2 - \frac{1}{2}\beta_3^2)a^2b^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$(\beta_1a^2 + \beta_2b^2 + \beta_3ab + \beta_4a^2b^2)^2 = (2\beta_1\beta_2 - \frac{1}{2}\beta_3^2)a^2b^2.$$

Por outro lado, temos de (3.10) e (4.13) que

$$\begin{aligned} (\beta_7cd + \beta_8c^2d^2)^2 &= \beta_7^2(cd)^2 + 2\beta_7\beta_8(cd)(c^2d^2) + \beta_8^2(c^2d^2)^2 \\ &= -\frac{1}{2}\beta_7^2c^2d^2 - 4\beta_7\beta_8(cd)^3 + 4\beta_8^2((cd)^2)^2 \\ &= -\frac{1}{2}\beta_7^2c^2d^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$(\beta_7cd + \beta_8c^2d^2)^2 = -\frac{1}{2}\beta_7^2c^2d^2.$$

Assim,

$$(2\beta_1\beta_2 - \frac{1}{2}\beta_3^2)a^2b^2 = -\frac{1}{2}\beta_7^2c^2d^2$$

e multiplicando por a^2b^2 obtemos que

$$(2\beta_1\beta_2 - \frac{1}{2}\beta_3^2)(a^2b^2)^2 = -\frac{1}{2}\beta_7^2(c^2d^2)(a^2b^2),$$

mas, $(a^2b^2)^2 = 4((ab)^2)^2 = 0$, logo

$$-\frac{1}{2}\beta_7^2(c^2d^2)(a^2b^2) = 0$$

e segue que $\beta_7 = 0$. Assim,

$$\beta_1a^2 + \beta_2b^2 + \beta_3ab + \beta_4a^2b^2 + \beta_8c^2d^2 = 0$$

e de novo, multiplicando por a^2b^2 e levando em conta (3.10), (4.12) e (4.13), obtemos que $\beta_8(a^2b^2)(c^2d^2) = 0$ o que obriga $\beta_8 = 0$. Temos então que

$$\beta_1a^2 + \beta_2b^2 + \beta_3ab + \beta_4a^2b^2 = 0$$

e como estes elementos são linearmente independente, segue que $\beta_1 = \dots = \beta_4 = 0$, logo, B é linearmente independente.

Como B é um conjunto linearmente independente de 8 elementos, temos que B é uma base de $\mathfrak{A}$, e já que $B \subseteq \mathfrak{A}^2$, segue que $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^2$. Agora, fazendo os produtos e utilizando as identidades (3.10), (4.12) e (4.13) obtemos que $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^2 = \langle \phi \rangle$ onde

$$\begin{aligned} \phi = \{ & a^2b^2, a^2c^2, a^2d^2, a^2(cd), a^2(c^2d^2), b^2c^2, b^2d^2, b^2(cd), \\ & b^2(c^2d^2), (ab)c^2, (ab)d^2, (ab)(cd), (ab)(c^2d^2), (a^2b^2)c^2, \\ & (a^2b^2)d^2, (a^2b^2)(cd), (a^2b^2)(c^2d^2), c^2d^2 \}. \end{aligned}$$

Seja $J = \langle (a^2b^2)(c^2d^2) \rangle$. Por (3.10), $((a^2b^2)(c^2d^2))^2 = 2^6((ab)(cd))^4 = 0$, logo $J^2 = 0$. Por (3.14), é claro que o produto de a^2b^2 com qualquer elemento de ϕ , que tenha a^2 como fator, é zero, igualmente com os que tenham como fator b^2 . Por (3.4) e (3.10), $(a^2b^2)((ab)c^2) = -2(ab)^2((ab)c^2) = 0$, logo o produto de a^2b^2 com qualquer outro elemento de ϕ , que tenha ab como fator, é zero. Também são zero os produtos de a^2b^2 , com os que tem como fator a^2b^2 , pois $(a^2b^2)((a^2b^2)c^2) = 4(ab)^2((ab)^2c^2) = 0$ por (3.10) e (4.12). Assim, o único produto não nulo ao multiplicar a^2b^2 por elementos de ϕ é $(a^2b^2)(c^2d^2)$. O mesmo resultado é obtido ao multiplicar os elementos de ϕ

por c^2d^2 . Portanto, $(a^2b^2)\mathfrak{A}^2 = J$ e $(c^2d^2)\mathfrak{A}^2 = J$ e já que $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^2$, temos que

$$(a^2b^2)\mathfrak{A} = J \quad e \quad (c^2d^2)\mathfrak{A} = J. \quad (4.14)$$

Vejamos agora que $((a^2b^2)(c^2d^2))\mathfrak{A} = 0$. Como $\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}$, é suficiente mostrar que $((a^2b^2)(c^2d^2))(xy) = 0$, para todos os elementos $x, y \in \mathfrak{A}$. Por (3.12), $((a^2b^2)(c^2d^2))(xy) = -((a^2b^2)x)((c^2d^2)y) - ((a^2b^2)y)((c^2d^2)x) \in J^2 = 0$. Assim, $((a^2b^2)(c^2d^2))(xy) = 0$ para todo $x, y \in \mathfrak{A}$, isto é,

$$\mathfrak{A}J = 0. \quad (4.15)$$

Vejamos agora que o conjunto $\{a^2b^2, c^2d^2, (a^2b^2)(c^2d^2)\}$ é linearmente independente. Seja $\alpha a^2b^2 + \beta c^2d^2 + \theta(a^2b^2)(c^2d^2) = 0$. Multiplicando por a^2b^2 , obtemos por (3.10), (4.12) e (4.15) que, $\alpha(a^2b^2)^2 + \beta(a^2b^2)(c^2d^2) + \theta(a^2b^2)((a^2b^2)(c^2d^2)) = 4\alpha((ab)^2)^2 + \beta(a^2b^2)(c^2d^2) - 8\theta(ab)^2((ab)^2(cd)^2) = \beta(a^2b^2)(c^2d^2) = 0$, e segue que $\beta = 0$. Assim, $\alpha a^2b^2 + \theta(a^2b^2)(c^2d^2) = 0$ e multiplicando por c^2d^2 e utilizando (3.10), (4.12) e (4.15), obtemos que, $\alpha(a^2b^2)(c^2d^2) + 4\theta((a^2b^2)(cd)^2)(cd)^2 = \alpha(a^2b^2)(c^2d^2) = 0$, portanto $\alpha = 0$ o que implica que $\theta = 0$.

Seja $I = \langle a^2b^2, c^2d^2, (a^2b^2)(c^2d^2) \rangle$. Por (4.14) e (4.15), temos que $I\mathfrak{A} \subset J \subset I$, logo I é um ideal de $\mathfrak{A}$. Consideremos a álgebra quociente $\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}/I$ a qual é uma nilálgebra comutativa de p.a. de dimensão 5. Se $\overline{\mathfrak{A}}$ é de Jordan, então é nilpotente e pelo Teorema 4.1, $\dim(\overline{\mathfrak{A}}^2) < 5$, agora se $\overline{\mathfrak{A}}$ não é de Jordan então pelo Lema 4.13, $\dim(\overline{\mathfrak{A}}^2) < 5$. Como $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^2$, temos que $\overline{\mathfrak{A}}^2 = \mathfrak{A}^2/I = \mathfrak{A}/I = \overline{\mathfrak{A}}$, absurdo. Portanto $((\mathfrak{A}^2)^2)^2 = 0$, provando o teorema. ■

Como consequência dos Corolários 3.3 e 3.15 e do Teorema 4.21, temos os seguintes corolários.

Corolário 4.22 *Seja $\mathfrak{A}$ uma nilálgebra comutativa de p.a. sobre um corpo de característica diferente de 2, 3 e 5. Se $\mathfrak{A}$ tem dimensão menor ou igual a 7, então $\mathfrak{A}$ é solúvel.*

Seja F um corpo de característica zero, ou maior a 7.

Corolário 4.23 *Seja $\mathcal{A}$ uma nilálgebra comutativa de p.a. sobre o corpo F . Se $\mathcal{A}$ tem dimensão 8 e nilíndice menor ou igual a 4 e maior ou igual a 6, então $\mathcal{A}$ é solúvel.*

Referências Bibliográficas

- [1] Albert, A.A. On the Power-associativity of Rings. *Summ. Bras. Math.* **1948**, 2 (2), 21-33.
- [2] Albert, A.A. Power-associative Rings. *Trans Am. Math. Soc.* **1948**, 64, 552-593.
- [3] Correa, I.; Hentzel, I.R. On Solvability of Noncommutative Power-associative Nilalgebras. *J. Algebra.* **2001**, 240, 98-102.
- [4] Correa, I.; Hentzel, I.R.; Julca, P.P.; Peresi, L.A. Nilpotent Linear Transformations and the Solvability of Power-associative Nilalgebras. *Linear Algebra Appl.* **2005**, 396, 35-53.
- [5] Correa, I.; Hentzel, I.R.; Peresi, L.A. On the Solvability of the Commutative Power-associative Nilalgebras of Dimension 6. *Linear Algebra Appl.* **2003**, 369, 185-192.
- [6] Correa, I.; Peresi, L.A. On the Solvability of the Five Dimensional Commutative Power-associative Nilalgebras. *Result. Math.* **2001**, 39, 23-27.
- [7] Correa, I.; Suazo, A. On a Class of Commutative Power-associative Nilalgebras. *J. Algebra.* **1999**, 215, 412-417.

- [8] Dedkov, A.I. Power-associative Algebras having a Nil-basis. *Algebra and Logic*. **1985**, 24 (3), 163-170.
- [9] Elgueta, L.; Suazo, A. Jordan Nilalgebras of Nilindex n and Dimension $n+1$. *Comm. Algebra*. **2002**, 30, 5547-5561.
- [10] Elgueta, L.; Suazo, A. Solvability of Commutative Power-associative Nilalgebras of Nilindex 4 and Dimension ≤ 8 . *Proyecciones*. **2004**, 23 (2), 123-129.
- [11] Gerstenhaber, M.; Myung, H.C. On Commutative Power-associative Nilalgebras of Low Dimension. *Proc. Amer. Math. Soc.* **1975**, 48, 29-32.
- [12] Gerstenhaber, M. On Nilalgebras and Linear Varieties of Nilpotent Matrices. II, *Duke Math. J.* **1960**, 27, 21-31.
- [13] Gerstenhaber, M. On Nilalgebras and Linear Varieties of Nilpotent Matrices. III. *Ann. of Math.* **1959**, 70 (1), 167-205.
- [14] Gutiérrez Fernández, J.C. On Commutative Power-associative Nilalgebras. *Comm. Algebra*. **2004**, 32 (6), 2243-2250.
- [15] Jacobson, N. *Lie Algebras*; Interscience: New York, 1962.
- [16] Kuzmin, E.N.; Shestakov, I.P. Nonassociative structures, in: A.I. Kostrikin, I.R. Shafarevich (Eds.), *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, vol. 57, 197-280, 1994.
- [17] Mathes, B.; Omladic, M.; Radjavi, H. Linear Spaces of Nilpotent Matrices. *Linear Algebra Appl.* **1991**, 149, 215-225.
- [18] Schafer, R.D. *An introduction to Nonassociative Algebras*; Academic Press: New York/London, 1966.
- [19] Shestakov, I.P. Finite-dimensional Algebras with a Nil-basis. *Algebra and Logic*. **1971**, 10, 58-65.

- [20] Suttles, D. A Counterexample to a Conjecture of Albert. Notices Amer. Math. Soc. **1972**, 19, A-566.
- [21] Zelmanov, E.I. On Engel Lie Algebras. Siberian Math. J. **1988**, 29 (5), 777-781.
- [22] Zhevlakov, K.A; Slinko, A.M.; Shestakov, I.P; Shirshov, A.I. *Rings that are Nearly Associative*; Academic Press: New York/London, 1992.

Índice Remissivo

Álgebra, 5

- alternativa , 7
- associativa, 5
- comutativa, 5
- de potências associativas, 17
- Engel, 7
- homomorfismo de, 6
- Jordan, 7
- Lie, 7
- não-associativa, 5
- nilpotente, 8
- quociente, 6
- radical, 10
- semisimples, 10
- simples, 6
- solúvel, 8

Índice

- de nilpotência
 - de uma álgebra, 8
 - de uma transformação linear, 7

- de solubilidade, 8

Anel de polinômios, 29

Classe

- fechada para extensões, 10
- radical, 9

Constantes de estrutura, 5

Grau

- de um operador, 29
- de uma álgebra , 11
- de uma função, 26

Ideal, 6

Identidade

- de Jacobi, 7
- de Jordan, 7

Linearização, 26

Nilálgebra, 10

Nilíndice, 11, 37

Nilpotente

- elemento, 10, 17
- transformação linear, 7
- Nilradical, 24
- Operador
 - multiplicação à direita, 6
 - multiplicação à esquerda, 6
 - sobre identidades, 29
- Potências
 - de um elemento, 8
 - de uma álgebra, 8
- Problema de Albert, 25
- Radical solúvel, 9
- Soma direta, 6
- Subálgebra, 5
- Suttles
 - álgebra, 71
 - exemplo, 25
- Teorema
 - de Dubnov-Ivanov-Nagata-Higman,
11
 - de estrutura de Wedderburn, 10