**Alguns Triângulos de Auslander-Reiten
em Categorias Derivadas
de Extensões por um Ponto**

Walter Martins Rodrigues

TESE APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU
DE
DOUTOR EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: Álgebra

Orientador: Prof. Dr. Héctor Merklen Goldschmidt

Co-Orientador: Prof. Dr. Eduardo Nascimento Marcos

*Durante a primeira parte da elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro da
Capes.*

-São Paulo, 25 de Fevereiro de 2005-

**Alguns Triângulos de Auslander-Reiten
em
Categorias derivadas de Extensões por um ponto**

Este exemplar corresponde à redação final

da tese devidamente corrigida

defendida por Walter Martins Rodrigues

e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 25 de Fevereiro de 2005.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Héctor Alfredo Merklen Goldschmidt (Orientador) - IME - USP
- Prof. Dr. Eduardo Nascimento Marcos (Co-Orientador)- IME - USP
- Prof. Dr. Viktor Bekkert - UFMG
- Prof. Dr. Edson Ribeiro Alvares - UFPR
- Profa. Dra. Dessislava Hristova Kochloukova - UNICAMP

Aos meus pais,
João e Alcina;
e minha esposa **Célia.**
Com muito amor !

Agradecimentos

A Deus que me fortaleceu e animou-me nos momentos de dificuldade.

Agradeço encarecidamente ao meu orientador, o Prof. Dr. Héctor Merklen Goldschmidt pela paciência que teve comigo durante todo este período.

Desde 1993 tenho recebido apoio, incentivo e ensinamentos fundamentais de diversos professores do instituto. Nesta oportunidade aproveito para manifestar meus sinceros agradecimentos às seguintes pessoas que contribuíram decisivamente para que eu pudesse realizar este trabalho. Estas pessoas especiais são:

Agradeço imensamente ao professor Eduardo Nascimento Marcos, por sua valiosa orientação neste trabalho, pelos cursos e seminários importantíssimos que sempre promove.

Gostaria de dizer que somente tenho palavras de elogios e agradecimentos a Prof. Dra. Gladys Chalom, que vem dando apoio e acompanhamento ao meu trabalho em Matemática desde 1994.

A Prof. Dra. Mary Lilian Lourenço, que foi minha orientadora de iniciação científica, na área de Topologia, no período de 1995 a 1998, e ministrou os cursos que fiz de álgebra linear II e introdução à análise complexa em 1995 e 1997 respectivamente.

Ao Prof. Dr. Flávio Ulhoa Coelho, que também sempre me incentivou a levar a diante o sonho de pesquisar em matemática.

Aos amigos Antônio Ronaldo, José Fidel, Sônia Fernandes, Cecília Tosar, Santos, Joci-rei, Olga, Rudimar, Mariza Kakizaki Daniela Mariz, Hernán Cuti, Ângela, Fidel, Emivan, Ronaldo pela amizade e aos demais colegas de graduação, mestrado e doutorado, gostaria de expressar os meus agradecimentos.

Aos amigos José Fidel, Sônia Fernandes, Rosana, Diane, Cecília, Alexey pelos seminários e pelas discussões sempre proveitosas.

Aos professores Prof. Dr. Viktor Bekkert, Prof. Dr. Maria Izabel Ramalho Martins, Prof. Dr. Michael Dokuchaev, Prof. Dr. José Carlos Simon e Prof. Dr. José Roberto Savóia. Pela extrema dedicação e atenção que mostram a cada dia.

Todas as pessoas que menciono aqui, não apenas elas, são muito especiais para mim. Simplesmente porque cada pessoa que passa em nossa vida é única. Sempre deixa um pouco de si e leva um pouco de nós. Há os que levaram muito, há os que não deixaram nada, mas há os que ficam para sempre, que ficam em nossos corações. São inesquecíveis!

Agradeço à Capes pelo apoio financeiro durante primeira parte da elaboração deste trabalho.

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar alguns triângulos de Auslander-Reiten da categoria derivada de álgebras que são extensões por um ponto de álgebras de dimensão global finita. A motivação para este trabalho foi a seguinte:

Considerando A uma álgebra sobre um corpo k , N um A -módulo finitamente gerado e seja $A[N]$ a extensão por um ponto de A por N . O trabalho [M] permite uma caracterização de todas as seqüências de Auslander-Reiten da categoria dos $A[N]$ -módulos que iniciam ou terminam em módulos provenientes de A -módulos.

Em nosso trabalho partindo de uma álgebra de dimensão finita A descrevemos os triângulos de Auslander-Reiten da categoria derivada de $A[N]$, a qual denotamos por $D(A[N])$, que possuem o primeiro ou o terceiro vértice proveniente da categoria derivada de A , $D(A)$, no caso em que A tem dimensão global finita.

Abstract

Our objective in this work was to study some Auslander-Reiten triangles in derived category of a one point extension. The main motivation is the following:

Let A a algebra over a field k , N a module over A and $A[N]$ a one point extension of A by N . Some results of [M] allow to describe all the Auslander-Reiten Sequences of modules over $A[N]$ whose first or third element are provenient from modules over A .

We suppose A is an algebra over a field k , N a module over A , and $A[N]$ a one point extension of A by N . Furthermore, if A have finite global dimension we present a description of Auslander-Reiten triangles of category $D(A[N])$, called the derived category of $A[N]$, whose first or third vertice are provenient from $D(A)$, the derived category of A .

Sumário

0.1	Introdução:	17
1	Preliminares	21
1.0.1	Álgebras	27
1.0.2	Os funtores Hom e produto tensorial	29
1.1	Morfismos minimais - Dualidade - Transposta	31
1.1.1	Dualidade e Transposta	33
1.2	Álgebras de caminhos	34
1.3	Extensões por um ponto	38
1.4	Seqüências e Aljavas de Auslander-Reiten	40
1.5	Fatos de Álgebra Homológica	43
1.5.1	Complexos e Homotopia.	43
1.5.2	Complexos Duplos	48
2	Categorias Derivadas	53
2.1	Categorias trianguladas	53
2.1.1	Funtores Cohomológicos	57
2.2	Triângulos em $K(\mathcal{A})$	61
2.2.1	Asas em categorias trianguladas	68
2.3	Localização e Categoria Derivada	69
2.3.1	Frações e aditividade de $S^{-1}C$	71

2.4	A categoria $D^+(\mathcal{A})$	77
2.4.1	A inclusão $\mathcal{A} \hookrightarrow D^*(\mathcal{A})$	79
2.5	Funtores Derivados em categorias derivadas	82
2.5.1	Funtores Derivados Clássicos	82
2.5.2	Funtores Derivados	83
2.5.3	Construção de alguns funtores derivados	86
2.6	Alguns resultados de Happel em categorias trianguladas	87
3	Triângulos de Auslander-Reiten e Extensões por um ponto	91
3.1	Extensões por um ponto e Categorias derivadas	92
3.1.1	Funtores exatos e categorias trianguladas	92
3.1.2	Complexos de triplas e Extensões por um ponto	94
3.2	Alguns triângulos de Auslander-Reiten	98
3.3	Exemplos e aplicações	102
4	O Cone e extensões de hereditárias	107
4.1	Uma aplicação da categoria dos morfismos entre projetivos	108
4.1.1	Resultados básicos	109
4.1.2	Estudo da subcategoria $\text{Quad}\Lambda$	114
4.2	Triângulos de Auslander-Reiten em $\text{Quad}\Lambda$	116
4.2.1	Certos triângulos de Auslander-Reiten em $\text{Quad}\Lambda$	116
4.2.2	Aplicação ao caso de álgebras hereditárias	124
4.2.3	Alguns triângulos em extensões por um ponto	128
4.3	Resultados obtidos com o uso do cone_Δ	131
4.4	Uso do funtor cone no estudo de extensões de hereditárias	136
	(*)	

0.1 Introdução:

O desenvolvimento da teoria de representações de álgebras se baseia muito na utilização das técnicas homológicas e os conceitos de seqüências de Auslander-Reiten (quase cindidas) que foram introduzidas por Maurice Auslander e Idun Reiten, em [AuR]. Estes conceitos originaram a noção de aljava de Auslander-Reiten, uma estrutura que permite uma descrição muito boa da categoria de módulos sobre uma álgebra.

Por outro lado, sob inspiração de Grothendieck foram definidas as categorias derivadas, $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ de uma categoria abeliana $\mathcal{A}$, através do conceito de categoria triangulada. Nas últimas décadas diversos resultados importantes têm sido demonstrados para categorias derivadas utilizando fundamentalmente métodos sustentados em técnicas clássicas de teoria de representações de álgebras. Assim, diversos resultados de teoria de representações de álgebras tem sido mostrados para categorias derivadas. Uma referência muito importante neste sentido é o livro de Happel, [H], em que são demonstrados importantes resultados da categoria derivada de álgebras de dimensão finita. Talvez o mais importante teorema de equivalências derivadas para anéis seja o Teorema Fundamental de Rickard, em [Ri], que funciona como um teorema de Morita para categorias derivadas. Este teorema nos fornece as condições necessárias e suficientes para que dois anéis sejam derivadamente equivalentes, a saber, a condição essencial é a existência de um complexo inclinante que relacione os anéis.

No livro de Happel, [H], é apresentada a definição de triângulos de Auslander-Reiten, em analogia com as seqüências de Auslander-Reiten, e ele mostra a existência de triângulos de Auslander-Reiten para uma álgebra de dimensão finita e também apresenta uma descrição da aljava de Auslander-Reiten de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ no caso em que a álgebra é hereditária. Além disso, considerando A uma k -álgebra de dimensão finita, destacamos que Happel mostra neste trabalho que a categoria derivada de A é uma categoria de Krull-Schmidt que tem triângulos de Auslander-Reiten, sempre que A for uma k -álgebra de dimensão global finita. Mostra também que se uma álgebra B é obtida a partir de uma álgebra A por inclinação com relação a um módulo inclinante ${}_A M_B$, ou seja $B = \text{End}_A M$, então A e B são derivadamente equivalentes. Fazendo uso das mesmas técnicas empregadas por Happel e utilizando fortemente o teorema fundamental de Rickard, Barot e Lenzing, ver [BL], determinaram quando duas extensões por um ponto são derivadamente equivalentes.

Tomando contato com estes resultados tivemos a idéia de trabalhar com triângulos de Auslander-Reiten em categorias derivadas. Vimos que uma boa tentativa seria estudar a passagem para categorias derivadas de alguns resultados obtidos em [M].

Sabemos que dadas A e B álgebras de Artin e $M = {}_A M_B$ um B - A -bimódulo, podemos construir o seguinte anel de matrizes triangulares R

$$R = \begin{pmatrix} A & 0 \\ M & B \end{pmatrix}$$

No trabalho [M] é feito um estudo das seqüências de Auslander-Reiten da categoria $\text{mod}R$ cujo primeiro ou último termo são provenientes ou da imersão natural $\text{mod}A$ em $\text{mod}R$, ou da imersão natural de $\text{mod}B$ em $\text{mod}R$. Este trabalho é uma das principais referências de nosso estudo. Queremos verificar quais dos resultados obtidos em [M] podem ser estendidos para categorias derivadas. De antemão queremos ressaltar que não trataremos do assunto em um contexto tão genérico como feito em [M]. Acatando a proposta da banca de meu exame qualificação do doutorado, os professores: Antônio Paques, Eduardo N. Marcos, Hector Merklen, vamos nos ater ao trabalho com extensões por um ponto apenas, ou seja, a situação em que A é um corpo, B uma A -álgebra de dimensão finita e $M = {}_A M_B$.

Nosso objetivo central será estudar os triângulos de Auslander Reiten em $\mathcal{D}(\mathcal{A}[M])$, a categoria derivada da álgebra obtida pela extensão por um ponto de A , que possuem um vértice em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Para isto precisaremos nos apoiar fundamentalmente nos artigos [M], utilizar as técnicas clássicas de categorias derivadas que podem ser encontradas em [V], [H] e [GM], bem como os conceitos básicos da teoria de representações que estudamos nos cursos de Representações de Álgebras I e II e o livro de Auslander, Reiten e Smalø, [ARS]. No fundo nossa estratégia é nos guiar pelo trabalho [M], no caso particular em que a álgebra R é uma extensão por um ponto, e buscar a passagem dos teoremas para categorias derivadas.

No capítulo I tratamos apenas das definições e conceitos preliminares mais importantes que usaremos.

O capítulo II é dedicado ao estudo de categorias derivadas, partimos de um resumo básico dos principais conceitos e os principais resultados a respeito do assunto que serão utilizados no trabalho. Usando o conceito de asas, definido em [ASZ], mostramos que para extensões por um ponto $A[M]$, de uma álgebra A de dimensão finita e dimensão global finita, a imersão natural da categoria derivada $D(A)$ em $D(A[M])$ é sempre uma subcategoria contravariantemente finita.

No capítulo III conseguimos passar dois resultados de [M] para categorias derivadas. Trata-se dos **Teoremas 3.2 e 3.3**. Utilizando os conceitos de triângulos de Auslander-

Reiten demonstramos o **Corolário 3.3** que permite a construção de exemplos álgebras cujas categorias derivadas não são abelianas.

No capítulo IV começamos com o estudo da categoria dos morfismos entre projetivos, e utilizamos alguns resultados de [ARS] para tirarmos algumas conclusões sobre uma subcategoria triangulada da categoria derivada de uma álgebra, que no caso em que a álgebra seja hereditária, coincide com a categoria derivada. Usamos esta estratégia com o objetivo de tentar deixar de forma mais explícita o que ocorre no estudo de morfismos irredutíveis, ao menos em certos casos mais particulares. Em [M], o professor Merklen apresenta uma descrição efetiva dos morfismos que compoem as seqüências de Auslander-Reiten. Mas, infelizmente, em categorias derivadas tivemos bastante dificuldades em conseguir analogias neste sentido.

Concluimos o capítulo IV mostrando que o *Cone* pode ser utilizado em categorias derivadas de extensões por um ponto desempenhando um papel similar ao funtor *cokernel* em [M], apesar de que, em geral, o *Cone* não preserva composições, como verificamos na **Observação 2.8**. Mais precisamente fizemos um estudo da imagem de triângulos da categorias derivadas de extensões por um ponto pelo *Cone*, e desta maneira provamos as **Proposições 4.7 e 4.5** e o **Corolário 4.8**.

Capítulo 1

Preliminares

Categorias e Funtores

Uma categoria $\mathcal{C}$ é uma classe que satisfaz os axiomas:

- (1) Para cada par de objetos de $\mathcal{C}$ A, B , existe um conjunto, possivelmente vazio, que denotamos por $\mathcal{C}(A, B)$ ou $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, o qual chamamos de conjunto dos $\mathcal{C}$ -morfismos de A para B . (Se $A \neq B$, pode ser que este conjunto seja vazio)
- (2) Para cada tripla de objetos A, B, D , está definida uma aplicação de $\mathcal{C}(B, D) \times \mathcal{C}(A, B) \longrightarrow \mathcal{C}(A, D)$ associando $(\beta, \alpha) \longrightarrow \beta\alpha$ chamada composição de morfismos. Requeremos ainda que sejam cumpridas as condições:
 - (a) Se A, B, A', B' são objetos da categoria $\mathcal{C}$ tais que $(A, B) \neq (A', B')$ então $\mathcal{C}(A, B) \cap \mathcal{C}(A', B') = \emptyset$
 - (b) Se A, B, C, D são objetos da categoria $\mathcal{C}$ tais que α, β, γ são morfismos de A para B , B para C e de C para D respectivamente, então $\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha$ (propriedade associativa da composição).
 - (c) Para cada objeto $A \in \mathcal{C}$ existe um morfismo 1_A de A para A tal que para qualquer objeto B de $\mathcal{C}$, para todo $\alpha \in \mathcal{C}(A, B)$ e todo $\beta \in \mathcal{C}(B, A)$ tem-se que $1_A\beta = \beta$ e $\alpha 1_A = \alpha$. A este morfismo 1_A chamamos identidade de A .

A categoria **oposta ou dual**, $\mathcal{C}^{op}$, da categoria $\mathcal{C}$ é definida da seguinte forma: os objetos de $\mathcal{C}^{op}$ são os mesmos de $\mathcal{C}$, o conjunto dos morfismos $\mathcal{C}^{op}(A, B)$ é igual a $\mathcal{C}(B, A)$,

e, se $f \in \mathcal{C}^{op}(A, B)$ e $g \in \mathcal{C}^{op}(B, C)$ a composição em $\mathcal{C}^{op}$, é dada por $g \circ f = fg \in \mathcal{C}(C, A) = \mathcal{C}^{op}(A, C)$.

Em uma categoria $\mathcal{C}$, um morfismo $f \in \mathcal{C}(A, B)$ é chamado de isomorfismo se existir $g \in \mathcal{C}(B, A)$ tal que $fg = 1_B$ e $gf = 1_A$. Quando existe um isomorfismo $f \in \mathcal{C}(A, B)$ diz-se que A é isomorfo a B , e denota-se $A \cong B$.

Um morfismo $f \in \mathcal{C}(A, B)$ é chamado monomorfismo em $\mathcal{C}$ (respectivamente epimorfismo) se quaisquer que sejam $g_1, g_2 \in \mathcal{C}(C, A)$ (respectivamente $\in \mathcal{C}(A, C)$), sempre que $fg_1 = fg_2$ (respectivamente $g_1f = g_2f$) implicar $g_1 = g_2$.

Dizemos que X é objeto zero de uma categoria $\mathcal{C}$ se para qualquer objeto $Y \in \mathcal{C}$, não vazio, tem-se: $\mathcal{C}(X, Y)$ e $\mathcal{C}(Y, X)$ são conjuntos unitários, este objeto é único a menos de isomorfismo e vamos denotá-lo por 0 .

Definição 1.1. Uma categoria $\mathcal{C}$ é aditiva se satisfizer as seguintes condições:

- Existe um objeto zero em $\mathcal{C}$
- Para quaisquer $A, B \in \mathcal{C}$ está definida uma operação binária $(+)$ sobre $\mathcal{C}(A, B)$ tal que $(\mathcal{C}(A, B), +, 0_{A,B})$ é um grupo abeliano, denotamos por $0_{A,B}$ a composição $0_{A,0}0_{0,B}$ onde $0_{A,0}$ representa o único elemento de $\mathcal{C}(A, 0)$ e $0_{0,B}$ representa o único elemento de $\mathcal{C}(0, B)$.
- Se $A, B, C \in \mathcal{C}$, $f_1, f_2, f \in \mathcal{C}(A, B)$, e $g_1, g_2, g \in \mathcal{C}(B, C)$ então:

$$\begin{aligned}(g_1 + g_2)f &= g_1f + g_2f \\ g(f_1 + f_2) &= gf_1 + gf_2\end{aligned}$$

- Para qualquer conjunto finito $\{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \text{Obj}(\mathcal{C})$ existe um objeto $\coprod_{i=1}^n A_i$, que abreviamos com A , e morfismos $p_j : A \rightarrow A_j$, $\iota_j : A_j \rightarrow A$, $j \in \{1, \dots, n\}$ tais que: $p_j \iota_j = 1_{A_j}$, $\sum \iota_j p_j = 1_A$ e $p_k \iota_j = 0$ sempre que $k \neq j$. (Este objeto é chamado soma direta em $\mathcal{C}$ da família $\{A_1, \dots, A_n\}$ e as vezes é denotado por $\oplus_{i=1}^n A_i$)

Definição 1.2. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva e $f \in \mathcal{C}(A, B)$. Chamamos de kernel de f em $\mathcal{C}$ o morfismo $k_f \in \mathcal{C}(K_f, A)$ com as seguintes características.

- k_f é monomorfismo em $\mathcal{C}$
- $f k_f = 0_{K_f, A}$
- Para toda $g \in \mathcal{C}(X, A)$ tal que $fg = 0_{X, A}$ existe $g' \in \mathcal{C}(X, K_f)$ tal que $g = k_f g'$.

A definição de cokernel de um morfismo em uma categoria é feito de forma dual a definição de kernel.

Definição 1.3. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana. Dada uma seqüência de objetos e morfismos em $\mathcal{C}$*

$$\dots \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_i} A_i \xrightarrow{f_{i+1}} \dots$$

Dizemos que a seqüência é exata se $\text{im}(f_i) = \ker(f_{i+1})$

Definição 1.4. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto nulo 0 e na qual está definida uma soma direta $\oplus$. Dizemos que um objeto $X \neq 0$ de $\mathcal{C}$ é indecomponível se a única forma de expressar X na forma $A \oplus B$ é com $A \cong 0$ e $B \cong X$, ou $A \cong X$ e $B \cong 0$*

Definição 1.5. *Dizemos que uma categoria $\mathcal{C}$ é de Krull-Schmidt se todo objeto indecomponível tem anel de endomorfismos local.*

É possível demonstrar que se uma categoria $\mathcal{C}$ é de Krull-Schmidt cada objeto M de $\mathcal{C}$ pode ser expresso na forma: $M = \coprod_i M_i^{\alpha_i}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, onde $M_i^{\alpha_i}$ indica a soma de α_i cópias isomorfas do indecomponível M_i , e esta soma é única salvo permutações.

Definição 1.6. *Uma categoria é abeliana quando é aditiva e satisfaz as seguintes propriedades adicionais:*

- (1) *Para todo morfismo $f \in \mathcal{C}$ existem em $\mathcal{C}$ o kernel e o cokernel de f .*
- (2) *Todo monomorfismo é núcleo de seu conúcleo e qualquer epimorfismo é conúcleo de seu núcleo.*
- (3) *Qualquer morfismo f pode ser fatorado na forma: $e.m = f$, onde e é um epimorfismo e m é um monomorfismo.*

Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias, um funtor (covariante) $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é um par de aplicações, uma, que associa a cada objeto $A \in \mathcal{C}$ um objeto $T(A) \in \mathcal{D}$ e a outra, que para cada morfismo $\alpha \in \mathcal{C}(A, B)$ associa um morfismo $T(\alpha) \in \mathcal{D}(T(A), T(B))$, tal que as duas condições seguintes são satisfeitas:

F_1 : Para cada objeto $A \in \mathcal{C}$, $T(1_A)$ é o morfismo identidade de $T(A)$;

F_2 : Se a composição $\beta\alpha$ de morfismos de $\mathcal{C}$ está definida então a composição $T(\beta)T(\alpha)$ também está definida em $\mathcal{D}$, além disso: $T(\beta)T(\alpha) = T(\beta\alpha)$.

Dada uma categoria $\mathcal{C}$ podemos definir o funtor identidade $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ que associa a cada objeto $X \in \mathcal{C}$ o próprio X , e a cada morfismo $f \in \mathcal{C}$ o próprio morfismo f .

Um funtor contravariante da categoria $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é um funtor (covariante) $T : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}$.

Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorias e $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ um funtor. Dizemos que F é fiel (respectivamente pleno) se para cada par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$ a aplicação de $\mathcal{C}(A, B)$ em $\mathcal{D}(F(A), F(B))$ que associa f a $F(f)$ é injetora (respectivamente sobrejetora). O funtor é dito denso se para todo objeto $A \in \mathcal{D}$ existe $X \in \mathcal{C}$ tal que $F(X) \cong A$.

Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorias e $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ funtores. Uma “aplicação” natural $\eta : F \rightarrow G$ é uma aplicação que a cada objeto A de $\mathcal{C}$ associa um morfismo $\eta(A) \in \mathcal{D}(F(A), G(A))$ tal que para quaisquer objetos $A, B \in \mathcal{C}$ e qualquer $f \in \mathcal{C}(A, B)$ o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\eta(A)} & G(A) \\ \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) \\ F(B) & \xrightarrow{\eta(B)} & G(B) \end{array}$$

Quando, para todo $A \in \mathcal{C}$, $\eta(A)$ é um isomorfismo, dizemos que η é um isomorfismo natural.

Dizemos que duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são equivalentes se existirem funtores $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tais que $FG \cong 1_{\mathcal{D}}$ e $GF \cong 1_{\mathcal{C}}$, onde $\cong$ denota um isomorfismo natural de funtores. É sabido que um funtor é uma equivalência de categorias se e somente se é fiel, pleno e denso.

Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias aditivas, um funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é uma semi-equivalência à direita se existir um funtor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tais que $GF \cong 1_{\mathcal{C}}$

Definição 1.7. Um funtor $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é dito adjunto à esquerda de um funtor $S : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, (ou S é adjunto à direita de T), se para cada objeto $M \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ e $L \in \text{Obj}(\mathcal{D})$ existe uma bijeção: $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(TM, L) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, SL)$ tal que para todo morfismo $f : M \rightarrow M'$, em $\mathcal{C}$, e todo morfismo $g : L \rightarrow L'$, em $\mathcal{D}$, os seguintes diagramas são comutativos

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(TM, L) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, SL) \\ \uparrow (T(f))^* & & \uparrow f^* \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(TM', L) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M', L) \\ \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(TM, L) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, SL) \\ \downarrow g^* & & \downarrow (S(g))^* \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(TM, L') & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, SL') \end{array}$$

Sendo $(T(f))^*$ definida pela composição de $T(f)$ com cada $\gamma \in \text{hom}_D(TM', L)$, e f^* pela composição de f com cada morfismo $\alpha \in \text{Hom}_D(M', L)$. E definidas de forma análoga g^* e $(Sg)^*$

Exemplo 1.1. Por exemplo, dadas duas R -álgebras A e B , R um anel comutativo e um $B - A$ bimódulo P , o funtor $\text{Hom}_A(P, -) : A - \text{mod} \rightarrow B - \text{mod}$ é adjunto à direita do funtor $P \otimes_B - : B - \text{mod} \rightarrow A - \text{mod}$

Lema 1.1. Se $T : C \rightarrow D$ e $S : D \rightarrow C$ são equivalências inversas, então T é adjunto à esquerda e à direita de S

Lema 1.2. Se o funtor $T : C \rightarrow D$ é adjunto à direita de $S : D \rightarrow C$ então existe uma transformação natural entre ST e o funtor identidade.

Definição 1.8. Seja A uma categoria abeliana. Dada seqüência exata curta da forma:

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

dizemos que ela cinde se existir $h : E \rightarrow N$ tal que $fh = 1$

Observação 1.1. É comum utilizar os conceitos de seção e retração para caracterizar as seqüências que cindem. Lembremos que um morfismo $f : X \rightarrow Y$ em uma categoria aditiva é uma seção se existir $h : Y \rightarrow X$ tal que $hf = 1$, e f é uma retração se existir um morfismo $s : Y \rightarrow X$ tal que $fs = 1$. É bem conhecido que dada uma seqüência exata curta da forma:

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

As seguintes condições são equivalentes:

- (1) A seqüência cinde
- (2) f é seção
- (3) g é retração

Definimos uma dualidade entre duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, como um funtor contravariante, $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, tal que o funtor $\mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}$ determinado por T é uma equivalência.

Definição 1.9. *Sejam A e B categorias abelianas, dizemos que um funtor $F : A \longrightarrow B$ é exato à esquerda se, para toda seqüência exata de A*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0 \quad ,$$

a seqüência

$$0 \longrightarrow FN \xrightarrow{Ff} FE \xrightarrow{Fg} FM$$

é exata.

Notações: Seja R um anel. Um R -módulo à esquerda é um grupo abeliano M , que denotaremos aditivamente, sobre o qual existe uma ação linear de R ; isto é, existe uma transformação $(-, -) : R \times M \longrightarrow M$, denotada por $(r, m) = rm$, que satisfaz:

- (1) $(r + s)m = rm + sm$
- (2) $r(m + n) = rm + rn$
- (3) $(r.s)m = r(sm)$
- (4) $1m = m$

para todos $r, s \in R$ e $m \in M$.

Equivalentemente, M é um grupo abeliano junto com um homomorfismo de anéis $\rho : R \longrightarrow \text{End}(M)$, onde $\text{End}(M)$ é o anel dos endomorfismos do grupo abeliano M .

Consideraremos as seguintes notações:

- $\text{Mod}R$ a categoria dos R -módulos à direita;
- $f.l.R$ a subcategoria plena de $\text{Mod}R$ formada pelos R -módulos de comprimento finito;
- $\text{mod}R$ a subcategoria plena de $\text{Mod}R$ formada pelos R -módulos finitamente gerados. Ressaltamos que muitos autores denotam por $\text{mod}(R)$ a categoria dos R -módulos finitamente apresentados.

No caso em que A é uma álgebra de Artin, pode-se mostrar que $f.l.R = \text{mod}A$, veja [ARS] . O exemplo abaixo mostra que em geral $f.l.R \neq \text{mod}A$.

Exemplo 1.2. Considerando $\mathbb{Z}$ como módulo sobre si mesmo, os seus submódulos são os ideais de $\mathbb{Z}$. Seja p um inteiro não nulo, se $p \neq 1$ podemos obter uma seqüência decrescente de submódulos não estacionária,

$$p\mathbb{Z} \supsetneq p^2\mathbb{Z} \supsetneq p^3\mathbb{Z} \supsetneq \cdots \supsetneq p^n\mathbb{Z} \supsetneq p^{n+1}\mathbb{Z} \supsetneq \cdots$$

Portanto, $\mathbb{Z}$ é módulo finitamente gerado que não tem comprimento finito.

Definição 1.10. Seja R um anel. Dizemos que uma subcategoria $\mathcal{C}$ de $\text{Mod}(R)$ é fechada para extensões se, para toda seqüência exata curta $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow T \rightarrow 0$ com $M, T \in \mathcal{C}$, tem-se que $N \in \mathcal{C}$.

Proposição 1.1. [ARS] As seguintes afirmações são verdadeiras:

- (1) A categoria f.l. R é a menor subcategoria de $\text{Mod}(R)$, que é fechada para extensões e contém todos os simples.
- (2) Todo R -módulo M de comprimento finito é finitamente gerado.

1.0.1 Álgebras

Definição 1.11. Seja R um anel comutativo. Uma R -álgebra Λ consiste de um par (Λ, ϕ) , onde Λ é um anel e ϕ um homomorfismo $\phi: R \rightarrow \Lambda$ cuja imagem está contida no centro de Λ .

Observemos que se Λ for uma R -álgebra, então Λ é um R -módulo que possui estrutura de anel.

Normalmente, ϕ é monomorfismo e neste caso identificamos R com a imagem de ϕ e dizemos que R está contido no centro de Λ .

Definição 1.12. Seja R um anel comutativo artiniano. Dizemos que Λ é uma R -álgebra de Artin, ou uma álgebra artiniana, se Λ é finitamente gerada como R -módulo.

Quando R é um corpo, uma base para a R -álgebra A , é uma base para A vista como módulo, ou seja como R espaço vetorial. Se A admite uma base finita dizemos A tem dimensão finita sobre R .

Sejam A e B R -álgebras. Uma transformação $f: A \rightarrow B$ é um homomorfismo de R -álgebras se F for um homomorfismo de R -módulos que também é homomorfismo de anéis; isto é, f satisfaz às condições:

- (1) $f(a + b) = f(a) + f(b) \forall a, b \in A$
- (2) $f(xa) = x.f(a) \forall a \in A, \forall x \in R$
- (3) $f(ab) = f(a).f(b) \forall a, b \in A$
- (4) $f(1) = 1$

Um homomorfismo de R álgebras que for sobrejetor e injetor é um isomorfismo de R -álgebras; neste caso dizemos que A e B são álgebras isomorfas e escrevemos $A \cong B$. Relembramos também que os homomorfismos injetores são monomorfismos e os sobrejetores são epimorfismos.

Definição 1.13. *Seja R um anel comutativo, dizemos que duas R álgebras A e B são Morita-equivalentes se as categorias $\text{mod } A$ e $\text{mod } B$ são equivalentes*

Seja R um anel, um R -módulo M for livre se M é isomorfo a um soma de cópias de R , e dizemos que um R -módulo P (respectivamente I) é projetivo (respectivamente injetivo) quando satisfaz a seguinte condição: dados M, N R -módulos e um epimorfismo (respectivamente um monomorfismo) $f : M \rightarrow N$ para qualquer R -morfismo $g : P \rightarrow N$ (respectivamente $g : M \rightarrow I$) existe $h : P \rightarrow M$ (respectivamente $h : N \rightarrow I$) tal que $fh = g$ (respectivamente $hf = g$). É claro que todo módulo livre é projetivo. A respeito de módulos projetivos temos o seguinte resultado:

Teorema 1.1. *Um R -módulo P é projetivo se e somente se $\text{Hom}_R(P, -)$ é exato*

Dada uma álgebra A com unidade sempre podemos expressá-la como soma de módulos projetivos, isto é, $A = P_1^{b_1} \oplus \dots \oplus P_n^{b_n}$ onde cada P_i é um projetivo indecomponível e $P_i \not\cong P_j$ para $i \neq j$. Dizemos que a álgebra A é básica se $b_i = 1$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, [J].

Lema 1.3. *Toda álgebra de Artin é morita equivalente a uma álgebra básica.*

Esboço da demonstração: Dada uma álgebra $A = P_1^{b_1} \oplus \dots \oplus P_n^{b_n}$, consideremos a álgebra básica $B = \text{Hom}_A(P, P)$, onde $P = P_1 \oplus \dots \oplus P_n$. É possível mostrar que $\text{Hom}_A(P, -) : \text{mod } A \rightarrow \text{mod } B^{\text{op}}$ é uma equivalência de categorias cujo quase inverso é dado por $- \otimes_B P$. Consequentemente A é Morita equivalente a uma álgebra básica. Para mais detalhes veja [J]

□

1.0.2 Os funtores Hom e produto tensorial

Seja R é um anel com unidade. Consideremos M, N e P módulos sobre R . Diremos que $f : M \times N \rightarrow P$ é uma aplicação R -bilinear (para simplificar, as vezes dizemos simplesmente bilinear) se f for R -homomorfismo em cada variável quando a outra está fixa; ou seja, se as transformações $x \rightarrow f(x, y_0)$ e $y \rightarrow f(x_0, y)$ são ambas R -lineares para cada $x_0 \in M$ e cada $y_0 \in N$.

A idéia por trás da definição de produto tensorial é equiparar o trabalho com aplicações bilineares e lineares, que é muito mais fácil.

Sejam M e N R -módulos. O produto tensorial de M e N (sobre R), denotado por $M \otimes_R N$, é caracterizado pela seguinte propriedade universal, que formaliza a idéia de equiparar aplicações bilineares e lineares.

Teorema 1.2. (Propriedade Universal do Produto Tensorial) *Sejam M e N módulos sobre um anel R . Então existe um R -módulo $M \otimes_R N$ e uma aplicação R -bilinear $i : M \times N \rightarrow M \otimes_R N$ que satisfazem a seguinte propriedade universal:*

Dado qualquer R -módulo P e qualquer aplicação bilinear $f : M \times N \rightarrow P$, existe uma única aplicação linear $\hat{f} : M \otimes_R N \rightarrow P$ tal que $f = \hat{f} \circ i$.

$$\begin{array}{ccc} i : M \times N & \longrightarrow & M \otimes_R N \\ \downarrow f & \swarrow \hat{f} & \\ P & & \end{array}$$

Mais ainda, para todo R -módulo S , e para toda aplicação bilinear $j : M \times N \rightarrow S$ satisfazendo a mesma propriedade acima, então existe um isomorfismo $g : M \otimes_R N \rightarrow S$ de modo que $j = g \circ i$; isto é, o produto tensorial é único a menos de isomorfismo.

Retornando ao contexto anterior. Sejam M, N, P R -módulos e $f : M \times N \rightarrow P$ uma transformação R -bilinear. Então para cada $x \in M$ podemos associar uma transformação linear $f_x : N \rightarrow P$ definindo $f_x(y) = f(x, y)$ para todo $y \in N$. É suficiente observar que a transformação que associa a cada $x \in M$ o R -homomorfismo $f_x \in \text{Hom}_R(N, P)$ também é R -linear uma vez que f é linear na segunda variável.

Reciprocamente, qualquer homomorfismo $\phi : M \rightarrow \text{Hom}_R(N, P)$ define uma transformação bilinear $\epsilon_\phi : M \times N \rightarrow P$ da seguinte forma: $\epsilon_\phi(x, y) = (\phi(x))(y)$. Claro que para cada ϕ a transformação ϵ_ϕ é R -bilinear. Portanto o conjunto S das transformações R -bilineares de $M \times N$ em P esta em correspondência bijetora (que é natural) com $\text{Hom}(M, \text{Hom}(N, P))$.

Por outro lado S admite uma correspondência bijetora com $\text{Hom}(M \otimes N, P)$, pela definição de produto tensorial. Logo podemos inferir, e pode ser provado, que existe um isomorfismo canônico entre $\text{Hom}(M, \text{Hom}(N, P))$ e $\text{Hom}(M \otimes N, P)$.

Observemos que quando R for um anel não comutativo, os módulos M e N devem ser R -módulos à direita e à esquerda respectivamente, note que o produto tensorial deles, $(M \otimes_R N)$, está bem definido e possui estrutura de grupo abeliano. Porém $(M \otimes_R N)$ em geral não é um R -módulo. Há dois importantes casos especiais em que o produto tensorial tem estrutura de R -módulo, a saber, quando $M = R_R$ ou $N = {}_R R$. Nestes casos além de $(M \otimes_R N)$ ter estrutura de R -módulo pode-se provar o resultado que enunciaremos a seguir. Para mais detalhes sugerimos [J].

Mais geralmente, se M for um $A - R$ -bimódulo (respectivamente N um $R - A$ -bimódulo), $(M \otimes_R N)$ tem estrutura natural de A -módulo à esquerda (respectivamente de B -módulo direita).

Teorema 1.3. *Sejam R um anel com unidade (não necessariamente comutativo), M e N R -módulos à direita e à esquerda respectivamente. Então o R -módulo à esquerda $((R_R) \otimes_R N)$ é isomorfo à N e o R -módulo à direita $(M \otimes_R ({}_R R))$ é isomorfo à M .*

Qualquer homomorfismo de anéis $\phi : R \rightarrow S$ permite dar uma estrutura de R módulos aos S módulos por intermédio de ϕ . Este processo define um funtor de $\text{mod} S$ em $\text{mod} R$ que possui adjuntos à direita e à esquerda, que são dados por $\text{Hom}_R(S, -)$ e $- \otimes_R S$ respectivamente, os quais são chamados de **mudança de anel**.

Observação 1.2. (*Mudança de anel*) *Seja $\phi : R \rightarrow S$ um homomorfismo de anéis, então todo S módulo M pode ser visto como R -módulo via ϕ . De fato, M está associado a um par (M, λ) , onde $\lambda : S \rightarrow \text{End} M$ é a ação de S em M , a composição de ϕ com λ dá uma ação de R em M , portanto M tem estrutura de R -módulo.*

Dado um homomorfismo de anéis $\phi : R \rightarrow S$, o processo descrito na observação acima permite definir um funtor exato $T_\phi : \text{mod} S \rightarrow \text{mod} R$.

Seja $\phi : R \rightarrow S$ um homomorfismo de anéis, o funtor $F_\phi = {}_R S \otimes_S - : \text{mod} S \rightarrow \text{mod} R$ tem como adjunto à direita o funtor $\text{Hom}({}_R R_S, -) : \text{mod} S \rightarrow \text{mod} R$ e adjunto à esquerda o funtor ${}_S S \otimes_R -$. Os funtores ${}_S S \otimes_R -$ e $\text{Hom}({}_R R_S, -)$ são equivalentes ao funtor de mudança de anel, além disso se ϕ é sobrejetor temos $T_\phi F_\phi = 1$

Seja R um anel e considere e um idempotente não nulo de R . Então $S = eRe$ é anel com identidade. Observe que a cada $M \in \text{mod} R$ podemos associar um S -módulo dado

pelo grupo abeliano $eM = \{ex : x \in M\}$ (subgrupo de M), munido da ação que associa a cada $(ere, ex) \rightarrow erex$ torna-se um módulo à direita, aqui ere denota um elemento qualquer de eRe e ex denota um elemento de eM . A multiplicação à esquerda pelo idempotente e define um funtor (covariante) aditivo de $modR$ em $modS$, bastando para isso definir sobre os R -morfismos, $f : M \rightarrow N$, o morfismo restrição, isto é, $T_e(f) = f|_{eM}$. Pode se verificar que este funtor coincide com o funtor de mudança de base proveniente do homomorfismo de R em S definido pela multiplicação à esquerda por e . Seja ${}_R M_S$ um bimódulo, $\eta : eR \otimes_R M \rightarrow eM_S$ dado por $\eta(e \otimes m) = em$ é isomorfismo, induz uma transformação natural entre os funtores $eR \otimes_R -$ e T_e , dado por $\mu : M \otimes_S f \rightarrow ({}_R M f)_{fSf}$, sendo $\mu(m \otimes f) = mf$, aqui $f = 1 - e$.

Dado um homomorfismo de anéis $\phi : R \rightarrow S$. Olhe para os bimódulos ${}_S S_R$ e ${}_R S_S$ com estruturas induzidas por ϕ , então o funtor $T_\phi = {}_S S \otimes_R - : modR \rightarrow modS$ leva projetivos em projetivos, e $H_\phi = Hom_R(S_S, -) : modR \rightarrow modS$ leva injetivos em injetivos

1.1 Morfismos minimais - Dualidade - Transposta

Vamos definir, de acordo com [ARS], morfismos minimais à direita e à esquerda entre módulos. Estes conceitos são especialmente interessantes quando tratamos dos conceitos de cobertura projetiva e envolvente injetiva.

Seja R um anel. Fixemos um R -módulo $C \neq 0$. Consideremos $Mod(R)/C$ a categoria cujos objetos são os R -homomorfismos com imagem em C , isto é, f é um objeto de $Mod(R)/C$ quando $f \in Hom_R(B, C)$. Tomando f, f' em $Obj(Mod(R)/C)$, um morfismo $g : f \rightarrow f'$ é um R -homomorfismo $g : B \rightarrow B'$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & C \\ \downarrow g & \nearrow f' & \\ B' & & \end{array}$$

(Segue que $g : f \rightarrow f'$ é um isomorfismo em $Mod(R)/C$ se e somente se $g : B \rightarrow B'$ é isomorfismo em $Mod(R)$.)

Definição 1.14. Dizemos que $f : B \rightarrow C$ é minimal à direita se $Hom_{ModR/C}(f, f) - \{0\}$ tem apenas isomorfismos.

Fixando um R -módulo A , consideremos $Mod(R) \setminus A$ a categoria cujos objetos são os homomorfismos $f \in Hom_R(A, B)$. Dados f, f' objetos em $Mod(R) \setminus A$ um morfismo

$g : f \longrightarrow f'$, onde $f \in \text{Hom}_R(A, B)$ e $f' \in \text{Hom}_R(A, B')$, é um R -homomorfismo $g : B \longrightarrow B'$ tal que $gf = f'$. Assim, podemos definir morfismo minimal à esquerda da seguinte forma: $f : A \longrightarrow B$ é minimal à esquerda se os únicos homomorfismos que fatoram f por ela mesma são isomorfismos, isto é, sempre que $g : B \longrightarrow B$ é tal que $gf = f$, implica que g é isomorfismo.

Introduzimos uma relação de equivalência sobre os objetos de $\text{Mod}(R)/C$ determinando que $f \sim f'$ se e somente se $\text{Hom}_{\text{Mod}(R)/C}(f, f') \neq 0$ e $\text{Hom}_{\text{Mod}(R)/C}(f', f) \neq 0$. Em [ARS] a Proposição 2.1 do capítulo I mostra que para módulos de comprimento finito cada classe de equivalência desta relação contém um morfismo minimal à direita. O resultado da versão dual da Proposição 2.1 também é válido.

Teorema 1.4. *Sejam R um anel, C um R -módulo e $g : X \longrightarrow C$ em $\text{Obj}(\text{Mod}(R)/C)$ com X de comprimento finito. Então existe uma decomposição $X = X' \amalg X''$ tal que $g|_{X'} : X' \longrightarrow C$ é minimal à direita e $g|_{X''} = 0$.*

Com as notações do teorema acima diz-se que $g|_{X'}$ é uma versão minimal de g

Definição 1.15. *Um epimorfismo $f : M \longrightarrow N$ é chamado essencial se o morfismo $g : X \longrightarrow M$ for epimorfismo sempre que $fg : X \longrightarrow N$ for um epimorfismo.*

Definição 1.16. *Um monomorfismo $f : M \longrightarrow N$ é chamado essencial se $\text{im } f \cap U \neq \{0\}$ para todo U submódulo não nulo de N .*

Quando R é um anel artiniano todo epimorfismo essencial é minimal à direita (a demonstração deste resultado pode ser vista em [ARS])

Definição 1.17. *Seja R um anel artiniano. Dizemos que um epimorfismo $f : P \longrightarrow M$ é uma cobertura projetiva de M se P for projetivo e f for essencial. Dizemos que um monomorfismo $f : M \longrightarrow I$ é uma envolvente injetiva de M se I for injetivo e f for essencial.*

Definição 1.18. *Seja R um anel. Dizemos que $\text{mod } R$ tem suficientes projetivos (respectivamente injetivos) se todo objeto de $\text{mod } R$ admite cobertura projetiva (respectivamente envolvente injetiva).*

Definição 1.19. *Uma resolução livre (respectivamente projetiva) de um R -módulo N é uma seqüência exata*

$$\cdots \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

em que cada F_i é um módulo livre (respectivamente projetivo)

Observação 1.3. *Um fato conhecido é que qualquer R -módulo M admite uma resolução livre. Além disso, sempre admite uma envolvente injetiva, mas pode não admitir uma cobertura projetiva. Porém, pode-se provar que se Λ for uma álgebra de Artin todos os Λ -módulos admitem cobertura projetiva.*

Seja X um R -módulo. Uma apresentação projetiva para X é uma seqüência exata da forma $P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} X \longrightarrow 0$ com P_1, P_0 projetivos. E a apresentação projetiva é dita minimal quando $f_0 : P_0 \longrightarrow X$ e $f_1 : P_1 \longrightarrow \text{Ker}(f_0)$ são coberturas projetivas.

1.1.1 Dualidade e Transposta

Lembramos que se R for um corpo existe uma dualidade associada a ele. Para um anel artiniano comutativo R também existe uma dualidade $d : \text{mod}R \longrightarrow \text{mod}R$, para mais detalhes veja [ARS]. A partir de d é possível definir uma dualidade para qualquer R -álgebra de Artin Λ . A idéia é a seguinte, como cada Λ -módulo é um R módulo e $d(X)$ tem estrutura de Λ^{op} -módulo, d determina um funtor $D : \text{mod}\Lambda \longrightarrow \text{mod}\Lambda^{\text{op}}$ que também é uma dualidade.

Sendo Λ uma R -álgebra de Artin, $\text{mod}\Lambda$ tem apenas um número finito de módulos simples não isomorfos. Seja $\{S_1, \dots, S_n\}$ um conjunto completo de módulos simples não isomorfos de $\text{mod}\Lambda$. Considera-se $J = \coprod_{i=1}^n I(S_i)$, onde $I(S_i)$ é a envolvente injetiva de S_i , definimos $d : \text{mod}R \longrightarrow \text{mod}R$ sendo o funtor $d = \text{Hom}_R(-, J)$, a Proposição 3.1 de [ARS] nos garante que d é uma dualidade. Agora, como todo Λ -módulo tem uma estrutura de R -módulo e para cada $X \in \text{mod}\Lambda$, $\text{Hom}_R(X, J)$ tem uma estrutura natural de Λ^{op} -módulo definida assim: Dada $f \in \text{Hom}_R(X, J)$ e $\lambda \in \Lambda$ definimos $(f\lambda)(x) = f(\lambda x)$ para todo $x \in X$, segue que d define um funtor $D : \text{mod}\Lambda \longrightarrow \text{mod}\Lambda^{\text{op}}$. É importante destacar que se X for finitamente gerado como Λ -módulo, então $\text{Hom}_R(X, J)$ é finitamente gerado como Λ^{op} -módulo.

Teorema 1.5. (3.3 cap 2 [ARS]) *Sempre que Λ for uma R -álgebra de Artin, o funtor $D : \text{mod}\Lambda \longrightarrow \text{mod}\Lambda^{\text{op}}$, induzido pela dualidade $d : \text{mod}R \longrightarrow \text{mod}R$, é uma dualidade.*

Agora iremos definir o funtor $*$: $\text{mod}\Lambda^{\text{op}} \longrightarrow \text{mod}\Lambda^{\text{op}}$. Trata-se de um funtor contra-variante que restrito a subcategoria dos projetivos é uma dualidade.

Dado um Λ -módulo A podemos considerar o grupo abeliano $\text{Hom}_\Lambda(A, \Lambda)$ com a seguinte operação: $(f\lambda)(x) = f(x) \cdot \lambda$, para quaisquer $f \in \text{Hom}_\Lambda(A, \Lambda)$, $\lambda \in \Lambda$ e $x \in A$.

Desta maneira damos $\text{Hom}_\Lambda(A, \Lambda)$ uma estrutura de Λ^{op} -módulo, o qual denotamos por A^* , para um morfismo $f : A \longrightarrow B$, definimos f^* sendo $\text{Hom}_\Lambda(f, \Lambda) : B^* \longrightarrow A^*$ dada por $\text{Hom}_\Lambda(f, \Lambda)(g) = gf$ para todo $g \in B^*$. Verifica-se que $*$: $\text{mod}\Lambda \longrightarrow \text{mod}\Lambda^{\text{op}}$ é um funtor contravariante, e a Proposição 4.2 de [ARS] nos garante que o funtor associado a $\text{Hom}_\Lambda(-, \Lambda)$ restrito a subcategoria dos projetivos é uma dualidade.

Definição 1.20. (*transposta de Auslander-Reiten*) Considere $C \in \text{mod}\Lambda$ e seja

$$P_1 \xrightarrow{f} P_0 \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

a apresentação projetiva minimal. Então $C \cong \text{coker}(f)$. Aplicando a dualidade D ao morfismo f conseguiremos o morfismo: $f^* : P_0^* \xrightarrow{f} P_1^*$. Associado a f^* temos o módulo $\text{coker}(f^*) \in \text{mod}\Lambda^{\text{op}}$ o qual é chamado transposta de C e denotado por $\text{Tr}(C)$.

A composição $D\text{Tr} = \tau$ recebe o nome de translação de Auslander-Reiten e desempenha um papel chave na construção das seqüências de Auslander-Reiten em álgebras de Artin.

1.2 Álgebras de caminhos

Agora vamos introduzir as noções de aljava e de álgebra de caminhos. Uma aljava, Γ , é um sistema $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, o, t)$ onde Γ_0 é um conjunto (cujos elementos são chamados de vértices), Γ_1 é um conjunto (cujos elementos são chamados de flechas), e o, t são aplicações de Γ_1 para Γ_0 portanto, que associam a cada flecha um vértice. Se $\alpha \in \Gamma_1$, $o(\alpha)$ é chamado origem de α e $t(\alpha)$ é chamado término de α . Uma aljava é dita finita se ambos os conjuntos Γ_0 e Γ_1 são finitos.

Definição 1.21. Um caminho γ de comprimento n , $n > 0$, na aljava Γ é uma seqüência não vazia de flechas $\gamma = \alpha_1 \dots \alpha_n$ tal que $t(\alpha_i) = o(\alpha_{i+1})$ para todo $i = 1, \dots, n-1$. A cada vértice $i \in \Gamma_0$ associamos também um objeto e_i , chamado caminho trivial, definimos $o(e_i) = t(e_i) = i$, e diremos que esse caminho tem comprimento nulo.

Definição 1.22. Dado um caminho não trivial $\gamma = \alpha_1 \dots \alpha_n$ definimos $o(\gamma) = o(\alpha_1)$ e $t(\gamma) = t(\alpha_n)$. No caso em que $o(\gamma) = t(\gamma)$ dizemos que γ é um circuito orientado, chamamos de laço um circuito orientado de tamanho 1, ou seja, quando uma flecha tem mesma origem e término.

Definição 1.23. *Dados $i, j \in \Gamma_0$ dizemos que i e j estão unidos por aresta se existir $\alpha \in \Gamma_1$ tal que $o(\alpha_1) = i$ e $t(\alpha_1) = j$ ou $o(\alpha_1) = j$ e $t(\alpha_1) = i$. Uma aljava é conexa quando para quaisquer dois vértices i e j em Γ_0 a seguintes condição for verificada:*

- *Sempre que $i \neq j$ existe uma seqüência de vértices $l_1 = i, \dots, l_n = j$ tais que l_i e l_{i+1} estão unidos por arestas, para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$.*

Seja k um corpo. Consideremos $k\Gamma$ o k -espaço vetorial com base o conjunto de todos os caminhos de Γ . É importante notarmos que $k\Gamma$ tem estrutura de k -álgebra. A multiplicação é induzida por linearidade pela multiplicação de caminhos, definida da seguinte forma:

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} 0 & \text{se } o(\beta) \neq t(\alpha) \\ \alpha\beta & \text{se } o(\beta) = t(\alpha) \end{cases}$$

Observemos que $\alpha \cdot \beta = \beta$ se $\alpha = e_{o(\beta)}$ e $\alpha \cdot \beta = \alpha$ se $\beta = e_{t(\alpha)}$.

Diz-se que um anel é hereditário a direita se todos os seus ideais à direita são projetivos. É sabido que toda álgebra de caminhos é hereditária, uma demonstração deste fato pode ser encontrada em [Gr].

Gostaríamos de ressaltar que neste trabalho quando nos referimos a álgebras hereditárias estamos tratando de álgebras hereditárias bilaterais.

Definição 1.24. *Sejam k um corpo e Γ uma aljava. Denotemos por F o ideal de $k\Gamma$ gerado por todas as flechas de Γ_1 . Dizemos que um ideal X de $k\Gamma$, é admissível quando satisfaz a:*

- $X \subseteq F^2$
- $F^n \subseteq X$ para algum $n \in \mathbb{N}$

Uma relação em $k\Gamma$ é uma combinação linear de caminhos de comprimento maior ou igual à dois com mesma origem e o mesmo término. Um conjunto E contido em um ideal admissível I é um sistema de relações de I se for gerador de I e composto por relações de $k\Gamma$.

Um importante resultado com relação a estes conceitos é a proposição abaixo cuja demonstração pode ser encontrada em [ARS].

Proposição 1.2. *Seja I um ideal admissível da k -álgebra $k\Gamma$. Então existe um conjunto finito de relações $\rho_1, \dots, \rho_t$, $t \in \mathbb{N}$ tal que $I = \langle \rho_1, \dots, \rho_t \rangle$.*

Definição 1.25. *Uma aljava com relações (Γ, ρ) é dada por uma aljava Γ e um sistema de relações ρ de um ideal admissível de $k\Gamma$. A álgebra de caminhos dada por uma aljava com relações (Γ, ρ) é, por definição, álgebra $\frac{k\Gamma}{\langle \rho \rangle}$.*

Lembramos que uma álgebra A é básica quando ${}_A A = P_1 \amalg \dots \amalg P_s$, onde P_i é A -módulo projetivo indecomponível e $P_i \not\cong P_j$ sempre que $i \neq j$ para todo $i, j \in \{1, \dots, s\}$.

Sejam k um corpo algebricamente fechado, e Λ uma k -álgebra básica de dimensão finita. O primeiro **Teorema de Gabriel** nos assegura que existe uma aljava Γ e um conjunto de relações ρ de $k\Gamma$ tal que Λ é isomorfa à álgebra de caminhos da aljava com relações (Γ, ρ) sobre o corpo k , isto é, $\Lambda \cong k \frac{\Gamma}{\langle \rho \rangle}$. Ademais, esta álgebra de caminhos está completamente determinada por Λ . A aljava Γ , assim associada à Λ , recebe o nome de aljava ordinária de Λ .

Queremos ressaltar ainda que se Λ for uma k -álgebra nas condições do teorema de Gabriel apesar da álgebra de caminhos estar determinada, o mesmo não ocorre com o conjunto das relações, como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 1.3. *Sejam k um corpo e Q a aljava apresentada na figura abaixo. Considerando os conjuntos de relações $\rho = \{\beta\alpha - \gamma^2, \alpha\beta, \gamma^3\}$ e $\rho' = \{\beta\alpha - \gamma^2, \alpha\beta - \alpha\gamma\beta, \gamma^3, \gamma^4\}$. Pode-se verificar que os ideais gerados por ρ e ρ' são admissíveis e distintos. Entretanto, as álgebras $\frac{kQ}{\langle \rho \rangle}$ e $\frac{kQ}{\langle \rho' \rangle}$ são isomorfas.*

Figura 1.1: aljava Q

Seja Λ uma k -álgebra de dimensão finita, indecomponível e básica, e tomemos $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ um sistema completo de idempotentes ortogonais e primitivos de Λ . A determinação da aljava ordinária de Λ pode ser realizada tomando um conjunto (de vértices) em bijeção com E , e estipulando que entre os vértices i e j existem exatamente

$$\dim_k[e_j(\text{rad}\Lambda/\text{rad}^2\Lambda)e_i] \quad \text{flechas.}$$

Definição 1.26. *Seja (Γ, ρ) uma aljava com relações. Diz-se que uma relação $\rho = \sum_{1 \leq j \leq m} \lambda_j w_j \in I$ é minimal se $m \geq 2$ e para todo J subconjunto próprio não vazio de $\{1, \dots, m\}$, $\sum_{j \in J} \lambda_j w_j \notin I$, onde $\lambda_j \in k$ e w_j são caminhos.*

Definição 1.27. *Sejam Λ uma k -álgebra de dimensão finita e k algebricamente fechado. Dizemos que Λ é uma álgebra triangular se a aljava ordinária de Λ não possui circuitos orientados.*

Seja Γ uma aljava. Uma **representação finitamente gerada** de Γ é dada por um sistema $V = ((V_i)_{i \in \Gamma_0}, (f_\alpha)_{\alpha \in \Gamma_1})$, onde para cada $i \in \Gamma_0$, V_i é um k -espaço vetorial de dimensão finita e f_α é uma transformação k -linear de $V_{o(\alpha)}$ para $V_{t(\alpha)}$. Dado um caminho não trivial $\gamma = \alpha_1 \dots \alpha_t$, $t \in \mathbb{N}$, de i a j em Γ podemos definir $V(\gamma)$ como a transformação linear de V_i para V_j dada pela composta $f_{\alpha_t} \dots f_{\alpha_1}$ e estendemos esta definição para uma combinação linear de caminhos por linearidade.

Dizemos que uma representação V satisfaz uma relação r se $V(r) = 0$, e dizemos V satisfaz um sistema de relações ρ se V satisfizer cada relação $r \in \rho$. Uma representação de uma aljava com relações (Γ, ρ) é uma representação de Γ que satisfaz as relações de ρ .

Definição 1.28. *Uma representação finitamente gerada de uma aljava com relações (Γ, ρ) é uma representação finitamente gerada de Γ que satisfaz as relações de ρ .*

Definição 1.29. *Sejam $V = ((V_i)_{i \in \Gamma_0}, (f_\alpha)_{\alpha \in \Gamma_1})$ e $W = ((W_i)_{i \in \Gamma_0}, (g_\alpha)_{\alpha \in \Gamma_1})$ duas representações de Γ , um morfismo $\phi : V \rightarrow W$ é um sistema de transformações k -lineares $\phi = (\phi_i)_{i \in \Gamma_0}$ tal que para cada $\alpha \in \Gamma_1$ o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc} V_{o(\alpha)} & \xrightarrow{f_\alpha} & V_{t(\alpha)} \\ \downarrow \phi_{o(\alpha)} & \circlearrowleft & \downarrow \phi_{t(\alpha)} \\ W_{o(\alpha)} & \xrightarrow{g_\alpha} & W_{t(\alpha)} \end{array}$$

A composição de morfismos é definida coordenada a coordenada. Desta forma fica definida a **categoria das representações** finitamente geradas de (Γ, ρ) , a qual denotaremos por $\text{mod}(\Gamma, \rho)$. Dada Λ uma k -álgebra de dimensão finita, indecomponível, básica, e sendo k algebricamente fechado, pelo teorema de Gabriel Λ é isomorfa a uma álgebra de caminhos da forma (Γ, ρ) , nestas condições há um importante resultado que nos assegura que a categoria construída da forma acima e $\text{mod}\Lambda$ são equivalentes.

Teorema 1.6. *Seja $\Lambda \cong \frac{k\Gamma}{\langle \rho \rangle}$, onde k é um corpo algebricamente fechado e (Γ, ρ) uma aljava com relações. Com a notação acima $\text{mod}(\Gamma, \rho)$ e $\text{mod}\Lambda$ são equivalentes como k -categorias.*

1.3 Extensões por um ponto

Nesta seção iremos destacar alguns fatos a respeito de extensões por um ponto de uma álgebra. Os principais resultados mencionados aqui podem ser encontrados na seção 2 do capítulo III do livro de Auslander-Reiten-Smalø.

Dadas A e B álgebras de Artin e $M = {}_B M_A$ um $A - B$ -bimódulo, isto é M é um A -módulo à direita e um B -módulo à esquerda tal que $(bm)a = b(ma)$ para todos os $a \in A, b \in B, m \in M$. Podemos construir o seguinte anel de matrizes triangulares R

$$R = \begin{pmatrix} A & 0 \\ M & B \end{pmatrix}$$

Neste sentido, os elementos de R são matrizes da forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ m & b \end{pmatrix}$ com soma e multiplicação induzidas pelas operações usuais de matrizes.

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ m_1 & b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ m_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ m_1 + m_2 & b_1 + b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ m_1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ m_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ m_1 a_2 + b_1 m_2 & b_1 b_2 \end{pmatrix}$$

Pode-se dar uma descrição dos R módulos em termos de triplas $({}_A N, {}_B H, f)$ onde N é um A -módulo, H é um B -módulo e $f : M \otimes_A N \rightarrow H$ um B -morfismo. No caso em que A for um corpo e B for uma álgebra sobre A o anel R acima é chamado de extensão por um ponto de B pelo módulo M , ver [ARS].

Observação 1.4. Considerando duas triplas $A = (V, X, f)$ e $B = (U, Y, g)$, a soma direta de A e B é dado por

$$A \oplus B = (V \oplus U, X \oplus Y, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix})$$

Assim, uma tripla (V, X, f) é indecomponível se não pode ser expressa na forma

$$(V, X, f) = (V_1 \oplus V_2, X_1 \oplus X_2, \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix})$$

Onde $V = V_1 \oplus V_2$, $X = X_1 \oplus X_2$ e $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ são decomposições não triviais.

Definição 1.30. *Seja k um corpo, B uma k -álgebra de dimensão finita e M um B módulo finitamente gerado. Definimos a extensão por um ponto de B pelo módulo M sendo a seguinte k -álgebra*

$$B[M] = \begin{pmatrix} k & 0 \\ M & B \end{pmatrix}$$

Podemos fazer a seguinte interpretação da extensão por um ponto quando a álgebra B é uma álgebra de caminhos de dimensão finita. Seja $A = B[M]$, fixando uma fonte i na aljava ordinário de A , consideremos e_i o correspondente idempotente em A . Como não há caminhos terminando em i , segue que $e_i B(1 - e_i) = 0$, e $e_i B e_i \cong k$. Observemos que a aljava de B pode ser obtido a partir do quiver de $B[M]$ simplesmente removendo o vértice i e as relações começadas em i , em outras palavras $B \cong (1 - e_i)A(1 - e_i)$. Ou seja, podemos interpretar o quiver ordinário de A sendo obtido adicionando-se ao quiver de B um novo vértice i , junto com as flechas e relações iniciadas neste vértice novo. Assim obtemos

$$B[M] \cong \begin{pmatrix} k & 0 \\ (1 - e_i)Ae_i & B \end{pmatrix}$$

Observação 1.5. *Seja B uma k -álgebra e $N \cong k^n$ um k -espaço vetorial. Uma vez que $M \otimes_k N \cong M^n$, segue que dado um $B[M]$ -módulo (k^n, H, f) podemos interpretar f como um B homomorfismo de M^n em H .*

Proposição 1.3. *Sejam B uma k álgebra de dimensão finita e M um B -módulo. Com relação ao anel $B[M]$, a extensão por um ponto de B por M , temos a seguinte descrição dos módulos simples, projetivos e injetivos.*

- (1) *X é um $B[M]$ -módulo simples, se e somente se, ou $X \cong (0, S, 0)$, ou $X \cong (k, 0, 0)$, onde S é um B -módulo simples.*
- (2) *X é um $B[M]$ -módulo projetivo indecomponível, se e somente se, $X \cong (0, P, 0)$ ou $X \cong (k, M, 1)$, onde P é um B -módulo projetivo indecomponível.*
- (3) *X é um $B[M]$ -módulo injetivo indecomponível, se e somente se, ou $X \cong (k, 0, 0)$, ou $X \cong (Hom_B(M, I), I, e)$, onde I é um B -módulo injetivo indecomponível e $e : M \otimes Hom_B(M, I) \rightarrow I$ é dada por $e(m \otimes g) = g(m)$ para todo $m \in M$ e $g \in Hom_B(M, I)$*

Observação 1.6. *Seja I um B -módulo injetivo indecomponível. Pela proposição acima, se $Hom_B(M, I) = 0$, então $(0, I, 0)$ é injetivo em $mod B[M]$*

1.4 Seqüências e Aljavas de Auslander-Reiten

As seqüências que quase cindem, atualmente conhecidas como seqüências de Auslander-Reiten, desempenham um papel importantíssimo na teoria de representações de álgebras. M. Auslander e I. Reiten desenvolveram estas técnicas na década de 70 e elas influenciaram decisivamente o rumo de toda a teoria.

Apresentaremos sucintamente as definições básicas e enunciaremos alguns dos resultados mais importantes a este respeito. Para mais detalhes recomendamos [ARS].

Definição 1.31. *Seja Λ uma álgebra de Artin. Chamaremos de seqüência de Auslander-Reiten a toda seqüência exata curta de $\text{mod}\Lambda$ da forma:*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

satisfazendo as seguintes condições:

- (1) *A seqüência não cinde*
- (2) *M e N são indecomponíveis*
- (3) *para qualquer morfismo $h : X \longrightarrow M$ em $\text{mod}\Lambda$, que não seja um epimorfismo que cinde, existe $\hat{h} : X \longrightarrow E$ tal que $\hat{g}\hat{h} = h$*

O próximo resultado que enunciaremos nos garante a existência e unicidade, a menos de isomorfismos, de seqüências de Auslander-Reiten em $\text{mod}\Lambda$ quando Λ for uma álgebra de Artin.

Teorema 1.7. (Auslander-Reiten) *Sejam Λ uma álgebra de Artin e M um Λ -módulo indecomponível.*

- (1) *Se M não for projetivo existe uma (única a menos de isomorfismo) seqüência de Auslander-Reiten terminando em M .*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

Nesse caso, temos $N \cong D\text{Tr}(M)$ (veja o resultado 1.5, e a definição 1.20).

- (2) Se M não for injetivo existe uma (única a menos de isomorfismo) seqüência de Auslander-Reiten iniciando em M .

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

Nesse caso, temos $N \cong \text{Tr}D(M)$ (veja o resultado 1.5, e a definição 1.20).

Definição 1.32. Sejam Λ uma álgebra de Artin, M um Λ -módulo indecomponível $g : E \longrightarrow M$ em $\text{mod}\Lambda$. Diremos que g é um morfismo quase cindido à direita se:

- (1) g não for epimorfismo que cinde;
 (2) Se $h : X \longrightarrow M$ em $\text{mod}\Lambda$ e não for epimorfismo que cinde, então existe $h' : X \longrightarrow E$ tal que $gh' = h$

Dualmente um morfismo $f : M \longrightarrow E$, onde M é um indecomponível, é quase cindido à esquerda, se f não for mono que cinde e todo morfismo $h : M \longrightarrow X$ que não for monomorfismo que cinde se fatora através da f .

Definição 1.33. Dado $E \in \text{mod}\Lambda$ indecomponível, dizemos que $f : M \longrightarrow E$ é um morfismo **poço**, ou simplesmente **poço** em M , se f for um morfismo minimal à direita e quase cindido à direita. Analogamente, um morfismo $M \longrightarrow E$, com M indecomponível, é dito **fonte** quando for minimal à esquerda e quase cindido à esquerda.

Definição 1.34. Seja Λ uma álgebra de Artin. Um morfismo $f \in \text{Hom}_\Lambda(X, Y)$ que não cinde é dito **irredutível** se para cada decomposição de $f = gh$ ou g é um epimorfismo que cinde ou h é monomorfismo que cinde.

Um morfismo $f \in \text{Hom}_\Lambda(X, Y)$ que não é monomorfismo nem epimorfismo sempre pode ser fatorado naturalmente (ver [ARS] cap II), pensando em sua imagem. Portanto, se f for irredutível, f será um epimorfismo ou um monomorfismo.

Proposição 1.4. [ARS] Sejam Λ uma álgebra de Artin e M um Λ módulo indecomponível. As seguintes afirmações são verdadeiras:

- (1) Um morfismo $h : M \longrightarrow X$ é irredutível se e somente se existe $h' : M \longrightarrow X'$ tal que $(h, h')^t : M \longrightarrow X \oplus X'$ é uma fonte.
 (2) Um morfismo $h : X \longrightarrow M$ é irredutível se e somente se existe $h' : X' \longrightarrow M$ tal que $(h, h') : X \oplus X' \longrightarrow M$ é um poço.

Proposição 1.5. *Dada um seqüência de Auslander-Reiten:*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

Vale que f é um morfismo fonte e g é um morfismo poço. Ademais qualquer outro morfismo fonte em N (ou poço em M) é isomorfo a f (ou a g).

Proposição 1.6. (1) *Se P for um projetivo indecomponível não simples então a inclusão do radical de P em P é o único morfismo poço, a menos de isomorfismo chegando em P .*

(2) *Se I for um injetivo indecomponível não simples então a projeção natural de I em $I/\text{soc}I$ é o único morfismo fonte, a menos de isomorfismo, saindo de I .*

Definição 1.35. [ARS] *Seja Λ uma álgebra de Artin. A aljava de Auslander-Reiten de Λ , a qual denotamos por Γ_Λ , é definida da seguinte forma:*

- (1) *Os vértices estão em correspondência biunívoca com as classes de isomorfismos dos Λ -módulos, isto é, para cada indecomponível M associamos um vértice $[M]$ e os vértices $[M]$ e $[M']$ são os mesmos se e somente se $M \cong M'$.*
- (2) *Existe uma flecha de $[M]$ para $[N]$, $[M] \rightarrow [N]$, se e somente se, existe um morfismo irredutível de M para N . A flecha $[M] \rightarrow [N]$ tem valuação (a, b) se existir um poço $M^a \oplus X \rightarrow N$, onde M não é somando direto de X , e uma fonte $M \rightarrow N^b \oplus Y$, onde N não é somando direto de Y .*

Definição 1.36. [R3] *Seja Λ uma álgebra de Artin hereditária. Dizemos que um Λ -módulo X é pós-projetivo (respectivamente pré-injetivo) quando existir $r \in \mathbb{N}$ tal que $(\text{Tr}D)^r P = X$ (respectivamente $(D\text{Tr})^r I = X$ para algum Λ -módulo projetivo P (respectivamente Λ -módulo injetivo I).*

Queremos ressaltar que M. Auslander e S. Smalø definiram módulos pré-injetivos e pós-projetivos num contexto mais geral, que eles denominaram pré-projetivos. Contudo, neste trabalho necessitamos apenas deste conceito para álgebras artinianas hereditárias.

Observação 1.7. *Muitos autores chamam os módulos pós-projetivos de pré-projetivos.*

Definição 1.37. [AS] *Seja Λ uma álgebra. Dizemos que uma subcategoria aditiva $\mathcal{C}$ de $\text{mod}\Lambda$ é contravariantemente finita se para todo $X \in \text{mod}\Lambda$ existe $Y \in \mathcal{C}$ e um morfismo $f: Y \rightarrow X$ tal que*

$$\text{Hom}_\Lambda(M, Y) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(M, X) \rightarrow 0$$

é exata para todo $M \in \mathcal{C}$

Lembramos que o conceito de subcategoria covariantemente finita é dual ao de subcategoria covariantemente finita, e que uma subcategoria é funtorialmente finita se for covariantemente finita e covariantemente finita.

1.5 Fatos de Álgebra Homológica

Nesta seção iremos tratar de alguns conceitos de álgebra homológica que serão intensamente utilizados no desenvolvimento de nosso trabalho. Os conceitos aqui apresentados podem ser encontrados em [W] e [R].

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria, um complexo em $\mathcal{A}$ é uma família de objetos $A_n \in \mathcal{A}$ e morfismos $d_n : A_n \rightarrow A_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$

$$A^\bullet = \cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \quad n \in \mathbb{Z}$$

tal que $d_n d_{n+1} = 0$. As aplicações d_n são chamadas diferenciais. Algumas vezes denotamos um complexo como $A^\bullet$ por $(A_n, d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Se $\mathcal{A}$ possui o objeto zero, podemos associar a cada $X \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ um complexo, o qual tem na k -ésima posição o objeto X , em todas as demais o objeto zero, os diferenciais são todos nulos também. A este complexo chamamos complexo concentrado de X no nível k , e denotamos por $X[k]$

1.5.1 Complexos e Homotopia.

Nesta seção começamos com o conceito de complexo (ou complexo de cadeia), para posteriormente definir a categoria $K(\mathcal{A})$.

Definição 1.38. Se $\mathcal{A}$ for uma categoria aditiva, $\text{Com}(\mathcal{A})$ denota a categoria de complexos de $\mathcal{A}$ a qual se define como segue

Objetos: São seqüências de objetos e morfismos de $\mathcal{A}$, da forma

$$C^\bullet : \cdots \longrightarrow C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-2} \longrightarrow \cdots, \text{ tal que } d_{n-1} \circ d_n = 0$$

Morfismos: Um morfismo de complexos está dado por uma seqüência de $\mathcal{A}$ -morfismos

$$\begin{array}{ccccccc} B^\bullet & & \dots \longrightarrow & B_n & \xrightarrow{d_{B_n}} & B_{n-1} & \xrightarrow{d_{B_{n-1}}} & B_{n-2} & \longrightarrow \dots \\ \downarrow \varphi = (\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}} & & & \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_{n-1} & & \downarrow \varphi_{n-2} & \\ C^\bullet & & \dots \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{d_{C_n}} & C_{n-1} & \xrightarrow{d_{C_{n-1}}} & C_{n-2} & \longrightarrow \dots \end{array}$$

Sendo todos os quadrados comutativos.

Dado um complexo $C^\bullet = (C_n, d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ fazendo a reindexação de índices dada por $C^{-n} = C_n$, e $d^{-n} = d_n$ temos o que chama-se de co-complexos (ou co-complexos de cadeia). As noções de morfismos e quase isomorfismos de co-complexos são as mesmas de complexos, e a definição de co-homologia é similar a de homologia.

Teorema 1.8. *Se $\mathcal{A}$ for uma categoria abeliana, então a categoria dos complexos de $\mathcal{A}$, $Com(\mathcal{A})$, também o é.*

Definição 1.39. *Seja (A, d) um complexo, chama-se n -ésimo objeto de homologia de A a $H_n(A) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1}$.*

Definição 1.40. *Dizemos que um complexo (A, d) é acíclico, ou exato, quando $H_n(A) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.*

Definição 1.41. *Seja $f : (A, d) \rightarrow (A', d')$ um morfismo de complexos. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ definimos $H_n(f) : H_n(A) \rightarrow H_n(A')$, que associa $z_n + \operatorname{im}(d_{n+1}) \mapsto f_n(z_n) + \operatorname{im}(d'_{n+1})$.*

Observação 1.8. *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. Note que o n -ésimo funtor de homologia, $H_n : Com(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ é um funtor aditivo (isto é $H_n(f + g) = H_n(f) + H_n(g)$).*

Definição 1.42. *Morfismos Homotópicos: Dois morfismos de complexos φ e ψ de $B^\bullet$ a $C^\bullet$ são ditos homotópicos, e se escreve $\varphi \sim \psi$, se existirem morfismos (diagonais) h_i tais que $\varphi_{n-1} - \psi_{n-1} = h_{n-2}d_{B_{n-1}} + d_{C_n}h_{n-1}$, ou seja, o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \longrightarrow & B_n & \xrightarrow{d_{B_n}} & B_{n-1} & \xrightarrow{d_{B_{n-1}}} & B_{n-2} & \longrightarrow \dots \\ & \downarrow \ell_n & \swarrow h_{n-1} & \downarrow \ell_{n-1} & \swarrow h_{n-2} & \downarrow \ell_{n-2} & \\ \dots \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{d_{C_n}} & C_{n-1} & \xrightarrow{d_{C_{n-1}}} & C_{n-2} & \longrightarrow \dots \end{array}$$

onde $\ell_n = \varphi_n - \psi_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria aditiva e $X^\bullet = (X_n, d_n) \in Com(\mathcal{A})$. Dizemos que $X^\bullet$ é limitado superiormente se existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $X_i = 0$ para todo $i > n$, e $X^\bullet$ é limitado inferiormente se existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $X_i = 0$ para todo $i < m$. Um complexo é limitado se

for limitado inferiormente e superiormente. E dizemos que $X^\bullet$ tem homologia limitada se existem $n, m \in \mathbb{Z}$, $n > m$ tal que $H_i(X^\bullet) = 0$ para todo $i > n$, e $H_i(X^\bullet) = 0$ para todo $i < m$.

Definição 1.43. Dizemos que dois complexos A e B são quase isomorfos se existir $A \xrightarrow{f} B$, morfismo de complexos, tal que $H_n(f)$ é um isomorfismo, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Notação: se $f : A \rightarrow B$ é um quase-isomorfismo denota-se: f é um **qi**

Observação 1.9. Dados morfismos de complexos φ e ψ de $B^\bullet$ a $C^\bullet$, temos:

- (1) $\varphi \sim \psi \Leftrightarrow \varphi - \psi \sim 0$.
- (2) Os morfismos homotópicos a zero formam um ideal da categoria $\text{Com}(\mathcal{A})$.
- (3) A relação $\sim$ em $\text{Hom}_{\text{Com}(\mathcal{A})}(B^\bullet, C^\bullet)$ é uma equivalência. Esta relação de equivalência é chamada relação de equivalência de homotopia.

Observação 1.10. Seja A uma álgebra e $M \in \text{mod} A$. Uma resolução projetiva (respectivamente uma resolução injetiva) de M é um complexo $P^\bullet = (P_n, d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ (respectivamente um co-complexo $I^\bullet = (I^n, d^n)_{n \in \mathbb{Z}}$), junto com uma aplicação $\epsilon : P_0 \rightarrow M$ (respectivamente $\epsilon : M \rightarrow I^0$), sendo que o complexos $P^\bullet$ (respectivamente $I^\bullet$) satisfazem as seguintes condições:

- (1) $P_i = 0$ para $i < 0$ (respectivamente $I^i = 0$ para $i < 0$)
- (2) P_i é projetivo (respectivamente I^i injetivo) para todo $i \in \mathbb{Z}$
- (3) O complexo aumentado

$$\cdots \rightarrow P_n \xrightarrow{d_{n-1}} P_{n-1} \rightarrow \cdots \xrightarrow{d_0} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

é exato

(respectivamente o co-complexo aumentado

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow M \xrightarrow{\epsilon} I^0 \xrightarrow{d_0} I^1 \rightarrow \cdots \rightarrow I^n \xrightarrow{d_n} I^{n+1} \rightarrow \cdots$$

é exato)

Para simplificar denotamos uma resolução projetiva de um módulo M por $\mathbb{P}(M)$. Cada morfismo $f : M \rightarrow N$ induz um morfismo $\mathbb{P}(f) : \mathbb{P}(M) \rightarrow \mathbb{P}(N)$.

Naturalmente, associada a uma resolução projetiva de M podemos definir um complexo de projetivos deletando M . Para isso basta associarmos a uma resolução projetiva de M o complexo $P(M)$ dado por $(P(M)_n, d_n)$, onde $P(M)_i = 0, d_n = 0$ para $i < 0$ e $P(M)_n = P_n, d_n : P_{n+1} \rightarrow P_n$ se $n > 0$. Consideremos $P(X), P(Y)$ os complexos de projetivos associados às resoluções projetivas de X e Y . Notemos que qualquer morfismo de X em Y induz um morfismo de $P(X)$ em $P(Y)$.

Além disso, é sabido que este morfismo induzido é único a menos de homotopia

Consideremos Λ um anel, M um Λ -módulo e

$$\cdots \rightarrow P_n \xrightarrow{d_{n-1}} P_{n-1} \rightarrow \cdots \xrightarrow{d_0} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

uma resolução projetiva de M . Sejam $M_0 = M$, $M_i = \text{im}(d_i)$ para $i > 0$, se P_i é uma cobertura projetiva de M_i para todo $i \geq 0$, então é possível mostrar que a resolução dada é essencialmente única. Neste caso dizemos que a resolução dada é a resolução projetiva minimal de M .

Definição 1.44. *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana, define-se a categoria de homotopia $K(\mathcal{A})$ da categoria de complexos $\text{Com}(\mathcal{A})$ como segue;*

Os objetos $K(\mathcal{A})$ são os mesmos objetos de $\text{Com}(\mathcal{A})$. $\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(B^\bullet, C^\bullet) := \frac{\text{Hom}_{\text{Com}(\mathcal{A})}(B^\bullet, C^\bullet)}{\sim}$, onde $\sim$ é a relação de homotopia.

Lema 1.4. *[W] Se $\mathcal{A}$ for abeliana, então a categoria $K(\mathcal{A})$ é aditiva.*

Seja Λ um anel e X um Λ -módulo não nulo. Dizemos que a dimensão projetiva de X é n , se existe uma resolução projetiva de X

$$\cdots \rightarrow P_n \xrightarrow{d_{n-1}} P_{n-1} \rightarrow \cdots \xrightarrow{d_0} P_0 \xrightarrow{\epsilon} X \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

tal que $P_i = 0$ para todo $i > n$, e dada qualquer outra resolução projetiva de X

$$\cdots \rightarrow Q_n \xrightarrow{d'_{n-1}} Q_{n-1} \rightarrow \cdots \xrightarrow{d'_0} Q_0 \xrightarrow{\epsilon'} X \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

necessariamente $Q_i \neq 0$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$. Dizemos que um anel Λ tem dimensão projetiva n se todo Λ -módulo tem dimensão projetiva menor ou igual a n . Dizemos que Λ tem dimensão projetiva infinita se para cada n existe um Λ -módulo X de dimensão

projetiva maior do que n . Procedendo de forma análoga define-se dimensão injetiva de módulos e anéis. Dizemos que Λ tem dimensão global finita se tiver dimensões projetiva e injetiva finitas.

Seja Λ uma álgebra de Artin e consideremos uma seqüência exata curta em $\text{mod } \Lambda$ dada por:

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

Existem projetivos P, Q em $\text{mod } \Lambda$ e epimorfismos $\epsilon_X : P \longrightarrow X$, $\epsilon_Z : Q \longrightarrow Z$ de modo que podemos construir o seguinte diagrama em que as colunas e as linhas são seqüências exatas em $\text{mod } \Lambda$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \text{Ker}(\epsilon_X) & & \text{Ker}(\epsilon_Z) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & P & & Q & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 \rightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & & & \downarrow & \\
 & 0 & & & & 0 &
 \end{array}$$

Note que definindo $P' = P \oplus Q$, $i : P \longrightarrow P'$ por $i(x) = (x, 0)$, $j : P' \longrightarrow Q$ por $j(x, y) = y$. É claro que P' é projetivo e

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{i} P' \xrightarrow{j} Q \longrightarrow 0$$

é uma seqüência exata de projetivos em $\text{mod } \Lambda$.

Por outro lado, como Q é projetivo, existe $\delta : Q \longrightarrow Y$ tal que $g\delta = \epsilon_Z$; assim, pode-se definir o morfismo $\epsilon(x, y) = f\epsilon_X(x) + \delta(y)$ de P' para Y , donde obtemos o seguinte

diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & \text{Ker}(\epsilon_X) & \longrightarrow & \text{Ker}(\epsilon) & \longrightarrow & \text{Ker}(\epsilon_Z) & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & P & \xrightarrow{i} & P' & \xrightarrow{j} & Q & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

Procedendo indutivamente desta forma pode mostrar o seguinte resultado, conhecido como lema da ferradura:

Lema 1.5. *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana com suficientes projetivos, dada uma seqüência exata curta em $\mathcal{A}$*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} Y \longrightarrow 0$$

Se $\mathbb{P}(X), \mathbb{P}(Y)$ são resoluções projetivas de X e Y , então existe uma resolução projetiva de E , digamos $\mathbb{P}(E)$, tal que

$$0 \longrightarrow \mathbb{P}(X) \xrightarrow{\mathbb{P}(f)} \mathbb{P}(E) \xrightarrow{\mathbb{P}(g)} \mathbb{P}(Y) \longrightarrow 0$$

é uma seqüência exata em $\text{Com}(\mathcal{A})$.

Observação 1.11. *Com relação ao lema acima é importante ressaltar que $\mathbb{P}(E)$ não é soma direta de $\mathbb{P}(X)$ e $\mathbb{P}(Y)$.*

1.5.2 Complexos Duplos

Definição 1.45. *Um complexo duplo é uma família bi-indexada $M = \{M_{p,q} : p, q \in \mathbb{Z}\}$ junto com duas famílias de aplicações $d' = (d'_{i,j}), d'' = (d''_{i,j}) : M \longrightarrow M$, sendo que $d'_{i,j} : M_{i,j} \longrightarrow M_{i-1,j}$ e $d''_{i,j} : M_{i,j} \longrightarrow M_{i,j-1}$ respectivamente tais que: $(d')^2 = 0 = (d'')^2$ e $d'd'' + d''d' = 0$*

Observação 1.12. *Seja $M = \{M_{p,q}\}$ um complexo duplo, se definirmos $(\text{Tot}(M))_n = \coprod_{p+q=n} M_{p,q}$, e a seqüência de aplicações $d = (d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, onde $d_n : \text{Tot}(M)_n \longrightarrow \text{Tot}(M)_{n-1}$,*

é dada por $d_n = \sum_{p+q=n} (d'_{p,q} + d''_{p,q})$ temos que $(Tot(M), d)$ forma um complexo, o qual chamamos de complexo total de M

Exemplo 1.4. Seja A uma álgebra de dimensão global finita e $X \in mod A$, consideremos $P(X)$ um complexo de projetivos associados a uma resolução projetiva de X . Sabemos que em $K(A)$ o complexo $P(X)$ é único, além disso, pode-se mostrar, através da imersão de $mod A$ em $K(A)$, que a imersão de X é isomorfo ao complexo $P(X)$ em $K(A)$.

Dados $X, Y \in mod A$, representamos abaixo os complexos $P(X), P(Y)$

$$\begin{array}{ccccccc} P(X) & = \cdots 0 \longrightarrow & P_{m+1} & \xrightarrow{d_{m+1}} & P_m & \cdots P_0 \xrightarrow{d_0} & 0 \longrightarrow \cdots \\ P(Y) & = \cdots 0 \longrightarrow & Q_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & Q_n & \cdots Q_0 \xrightarrow{\partial_0} & 0 \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Definindo $M = \{M_{p,q}\}$, onde $M_{p,q} = P_p \otimes Q_q$, $d'_{p,q} = d_p \otimes 1$ e $d''_{p,q} = (-1)^p 1 \otimes \partial_q$ obtemos um complexo duplo.

Note que $M_{p,q} = 0$ se $p < 0$ ou $q < 0$, ou seja o complexo duplo está concentrado no primeiro quadrante.

Mais geralmente, dados dois complexos $X^\bullet, Y^\bullet$ podemos formar um complexo duplo M dos produtos tensoriais. O qual se chama produto tensorial $X^\bullet \otimes Y^\bullet = Tot(M)$. Desta forma, se $X^\bullet = (X_n, d'_n)$, e $Y^\bullet = (Y_n, \partial_n)$, temos que $(X \otimes Y)_n = \coprod_{p+q=n} X_p \otimes Y_q$, e os diferenciais são dados por $d_n(a_p \otimes b_q) = d'_p a_p \otimes b_q + (-1)^p a_p \otimes \partial_q b_q$, onde $a_p \in X_p$ e $b_q \in Y_q$

Dados dois complexos $X^\bullet, Y^\bullet$, o complexo $Hom(X^\bullet, Y^\bullet)$ é definido de forma similar, mas não pelo complexo total, e sim definido por $Hom(X^\bullet, Y^\bullet)_n = \prod_{p+q=n} Hom(X_{-p}, Y_q)$ com $D_n : Hom(X^\bullet, Y^\bullet)_n \rightarrow Hom(X^\bullet, Y^\bullet)_{n-1}$, dada pela aplicação que leva $f = \{f_{p,q}\}$ em $D_n f = \{g_{p,q}\}$, onde $g_{p,q} = (-1)^{p+q} f_{p+1,q} d'_{-p} + \partial_{q+1} f_{p,q+1}$

Observação 1.13. Dado um complexo

$$A^\bullet = \cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \quad n \in \mathbb{Z}$$

Considerando $P(A_{n,i})$ uma resolução projetiva de A_i , onde $i \in \mathbb{Z}$, podemos construir um complexo duplo cujas colunas são dadas por

$$P(A_i)^\bullet \longrightarrow 0 = \cdots \longrightarrow P_{n+1,i} \xrightarrow{d_{n+1,i}} P_{n,i} \cdots P_{0,i} \xrightarrow{d_{0,i}} 0$$

Considerando $\epsilon_i : P_{0,i} \rightarrow A_i$ a cobertura projetiva de A_i pode-se verificar que $(\epsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ define um morfismo do complexo total associado a esse complexo duplo para $A^\bullet$. Além

disso utilizando o conceito de cone, que será dado posteriormente, pode se mostrar que o complexo duplo obtido tem complexo total quase-isomorfo ao complexo $A^\bullet$. Para isto, verifica-se que existe um morfismo natural entre $A^\bullet$ e o complexo total e que o cone deste morfismo é exato. Desta forma podemos associar a cada complexo de $\text{Com}(\mathcal{A})$, um complexo de projetivos quase isomorfo.

O complexo total associado ao complexo $A^\bullet$ da observação anterior é chamado de resolução de Cartan-Eilenberg, de forma dual define-se também a co-resolução de Cartan-Eilenberg de $A^\bullet$. Note que qualquer morfismo entre dois complexos induz um morfismo entre suas resoluções de Cartan-Eilenberg, para mais detalhes veja capítulo III de [GM].

Observação 1.14. *Seja Λ uma álgebra de dimensão projetiva finita e $X^\bullet$ um complexo limitado de Λ -módulos dado por*

$$X^\bullet = \cdots \longrightarrow X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \quad n \in \mathbb{Z}$$

Sem perda de generalidades podemos supor que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $X_i = 0$ se $i < 0$ ou $i > m+1$. Para cada $n \in \{1, \dots, m\}$ consideremos uma resolução projetiva de X_n , desta forma obtemos uma seqüência exata de Λ módulos:

$$\cdots \longrightarrow P_{i,n+1} \xrightarrow{d_{i,m}} P_{i,m-1} \quad \cdots \xrightarrow{d_{i,2}} P_{i,1} \xrightarrow{d_{i,1}} P_{i,0} \xrightarrow{\epsilon_i} X_i \xrightarrow{0} 0$$

naturalmente, para cada n , $d_n : X_n \longrightarrow X_{n-1}$ induz morfismo entre as resoluções projetivas $\mathbb{P}(X_n)$ e $\mathbb{P}(X_{n-1})$. Como a álgebra é de dimensão projetiva finita existe um inteiro n tal que $P_{i,t} = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ e $t > n$. Assim podemos montar um diagrama comutativo, cujas colunas são seqüências exatas, ilustrado abaixo.

$$\begin{array}{ccccccc}
P_{m,n} & \xrightarrow{d_{m,n}} & \dots & \xrightarrow{d_{3,m}} & P_{2,n} & \xrightarrow{d_{2,n}} & P_{1,n} \xrightarrow{d_{1,n}} P_{0,n} \\
\downarrow h_{m,n} & & & & \downarrow h_{2,n} & & \downarrow h_{1,n} \downarrow h_{0,n} \\
\vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
\downarrow h_{m,3} & & & & \downarrow h_{2,3} & & \downarrow h_{1,3} \downarrow h_{0,3} \\
P_{m,2} & \xrightarrow{d_{m,2}} & \dots & \xrightarrow{d_{3,2}} & P_{2,2} & \xrightarrow{d_{2,2}} & P_{1,2} \xrightarrow{d_{1,2}} P_{0,2} \\
\downarrow h_{m,2} & & & & \downarrow h_{2,2} & & \downarrow h_{1,2} \downarrow h_{0,2} \\
P_{m,1} & \xrightarrow{d_{m,1}} & \dots & \xrightarrow{d_{3,1}} & P_{2,1} & \xrightarrow{d_{2,1}} & P_{1,1} \xrightarrow{d_{1,1}} P_{0,1} \\
\downarrow h_{m,1} & & & & \downarrow h_{2,0} & & \downarrow h_{1,1} \downarrow h_{0,1} \\
P_{m,0} & \xrightarrow{d_{m,0}} & \dots & \xrightarrow{d_{3,0}} & P_{2,0} & \xrightarrow{d_{2,0}} & P_{1,0} \xrightarrow{d_{1,0}} P_{0,0} \\
\downarrow \varepsilon_m & & & & \downarrow \varepsilon_2 & & \downarrow \varepsilon_1 \downarrow \varepsilon_0 \\
X_m & \xrightarrow{d_m} & \dots & \xrightarrow{d_3} & X_2 & \xrightarrow{d_2} & X_1 \xrightarrow{d_1} X_0
\end{array}$$

Note que se definirmos $h'_{i,j} = (-1)^i h_{i,j}$ obtemos um diagrama anticomutativo, e portanto, podemos definir o complexo de projetivos $Q^\bullet = (Q_i, d_{Q_i})$, onde $Q_i = (\bigoplus_{0 \leq t \leq i} P_{t,i-t})$ e $d_{Q_i} : Q_i \rightarrow Q_{i-1}$ é dado pela seguinte matriz.

$$\begin{pmatrix} h'_{0,i} & d_{1,i-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h'_{1,i-1} & d_{2,i-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h'_{i,0} d_{i,0} \end{pmatrix}$$

Observemos que os epimorfismos ε_i do diagrama acima determina um morfismo de complexos $f = (f_i) : Q^\bullet \rightarrow X^\bullet$, onde $f_i = \varepsilon_i$ para $i \in \{1, \dots, m\}$ e zero nas demais posições. Além disso, é possível mostrar que f é um quase isomorfismo.

Por outro lado, o diagrama acima nos permite construir outro complexo, utilizando também a linha do complexo $X^\bullet$, trata-se do complexo $Y^\bullet = (Y_i, \partial_i)$ onde $Y_i = 0$ se $i < 0$, $Y_0 = X_0$, $Y_i = (\bigoplus_{0 \leq t \leq i} P_{t,i-t}) \oplus X_i$ e os morfismos $\partial_i : Y_i \rightarrow Y_{i-1}$, para $i \in \{1, \dots, m+n\}$ são dados pelas matrizes abaixo

$$\begin{pmatrix} h'_{0,1} & d_{1,0} & 0 \\ 0 & \varepsilon & d_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h'_{0,2} & d_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & h'_{1,1} & d_{2,0} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & d_3 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} h'_{0,m+n} & d_{1,m+n-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h'_{1,m+n-1} & d_{2,m+n-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon_{m+n} d_{n+m+1} \end{pmatrix}$$

Usando o conceito de Cone, que será definido no próximo capítulo, por uma verificação direta mostra-se que o complexo $Y^\bullet$ coincide com o $\text{Cone}(f)$, e pelo fato de f ser

quase isomorfismo a Observação 2.7 nos garante que $Y^\bullet$ é exato. Por isso chamaremos o complexo $Y^\bullet$ de exatificação de $X^\bullet$, e denotaremos por $Y_{X^\bullet}$. É de imediata verificação que todo morfismo de complexos $F : X^\bullet \rightarrow M^\bullet$ induz um morfismo de $Y_{X^\bullet} \rightarrow Y_{M^\bullet}$. É importante observar que este processo induz um funtor da categoria dos complexos na subcategoria H formada pelos complexos exatos. Observemos ainda que se $M[0]$ é um complexo concentrado, então o complexo exato associada a ele é exatamente $\mathbb{P}(M)$.

Observação 1.15. Consideremos a subcategoria H formada pelo complexos exatos, e $i : H \rightarrow \text{Com}(\mathcal{A})$ a inclusão natural, o funtor dado na definição acima é adjunto à direita de i . Desta forma podemos ver H como uma subcategoria de $\text{Com}(\mathcal{A})/\sim$ cuja inclusão tem adjunto à direita. Em [ASZ] os autores, a saber: Assem, Souto e Zuazua, definiram o conceito de asas sendo subcategorias de categorias trianguladas tais que o funtor inclusão admite adjunto à direita, e mostraram que estas são subcategorias contravariantemente finitas de uma categoria triangulada.

Portanto, os complexos de homologia nula formam uma subcategoria contravariantemente finita.

Capítulo 2

Categorias Derivadas

Neste capítulo trataremos de alguns conceitos de categorias trianguladas e localização de categorias. Em seguida apresentaremos sucintamente diversos conceitos fundamentais da teoria de categorias derivadas. Para um estudo mais aprofundado destes assuntos, bem como as demonstrações dos principais resultados apresentados neste Capítulo, sugerimos os seguintes trabalhos [GM],[G],[H],[W].

Começaremos o Capítulo com a definição de Categoria Triangulada. Temos sempre em mente os exemplos $K(\mathcal{A})$ e $D(\mathcal{A})$ para uma categoria abeliana $\mathcal{A}$, onde $K(\mathcal{A})$ é a categoria quociente pelo ideal de homotopia da categoria dos complexos em $\mathcal{A}$ e $D(\mathcal{A})$ sua localização. Depois das definições e propriedades mais conhecidas da teoria de categorias trianguladas, passaremos a definir e estudar esses exemplos.

Usando o conceito de asas, definido em [ASZ], montamos o **Exemplo 2.12**, onde mostramos que se dada uma álgebra A de dimensão finita e dimensão global finita, a imersão natural categoria derivada $D(A)$ em $D(A[M])$ é sempre uma subcategoria contravariantemente finita.

2.1 Categorias trianguladas

Seja K uma categoria aditiva, $T : K \longrightarrow K$, um automorfismo, isto é uma auto equivalência, $T^{-1} \circ T = T \circ T^{-1} = id$.

Um triângulo em K é, por definição, uma tripla de objetos (A, B, C) , junto com uma

tripla de morfismos (u, v, w) , com $u : A \longrightarrow B$, $v : B \longrightarrow C$ e $w : C \longrightarrow TA$. As seguintes três notações para triângulos são utilizada na literatura

$$(1) \quad A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} TA$$

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} & C & \\ w \swarrow & & \nwarrow v \\ A & \xrightarrow{u} & B \end{array}$$

$$(3) \quad (A, B, C, u, v, w)$$

Um morfismo de triângulos de (A, B, C, u, v, w) para o (A', B', C', u', v', w') é uma tripla de morfismos (f, g, h) tal que faz o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C & \xrightarrow{w} & TA \\ f \downarrow \circlearrowleft & & g \downarrow \circlearrowleft & & h \downarrow \circlearrowleft & & \downarrow Tf \\ A' & \xrightarrow{u'} & B' & \xrightarrow{v'} & C' & \xrightarrow{w'} & TA' \end{array}$$

Definição 2.1. Diz-se que uma categoria K aditiva é uma categoria triangulada se existir um automorfismo T , chamado de translação, de K e junto com uma família de triângulos $\mathfrak{T}$ (chamados triângulos exatos) tais que os seguintes axiomas são verificados

- *TR 1:*

(1) $\mathfrak{T}$ é fechada para isomorfismos.

(2) Todo $A \xrightarrow{u} B$ forma parte de um triângulo exato, da forma $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} TA$.

(3) $A \xrightarrow{1_A} A \longrightarrow 0 \longrightarrow TA$ é triângulo exato.

- *TR 2: Translações:*

Se $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} TA$ é exato então são exatos os triângulos $B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} TA \xrightarrow{-Tu} TB$ e $T^{-1}C \xrightarrow{-T^{-1}w} A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$.

- *TR 3: A existência de f, g tal que o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ f \downarrow \circlearrowleft & & g \downarrow \\ A' & \xrightarrow{u'} & B' \end{array}$$

implica que existe h tal que o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C & \xrightarrow{w} & TA \\ f \downarrow \circlearrowleft & & g \downarrow \circlearrowleft & & \exists h \downarrow \circlearrowleft & & \downarrow Tf \\ A' & \xrightarrow{u'} & B' & \xrightarrow{v'} & C' & \xrightarrow{w'} & TA' \end{array}$$

- *TR 4 (Axioma do Octaedro)* Consideremos os triângulos exatos (X, Y, Z', u, i, i') , (Y, Z, X', v, j, j') , (X, Z, Y', vu, k, k') , então existem morfismos $f : Z' \rightarrow Y'$ e $g : Y' \rightarrow X'$ tais que o seguinte diagrama comuta e a terceira linha é um triângulo exato

$$\begin{array}{ccccccc} T^{-1}Y' & \xrightarrow{T^{-1}k'} & X & \xrightarrow{1_X} & X & & \\ T^{-1}g \downarrow & & u \downarrow & & \downarrow vu & & \\ T^{-1}X' & \xrightarrow{T^{-1}j'} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{j} & X' \xrightarrow{j'} TY \\ & & i \downarrow & & k \downarrow & & 1_{X'} \downarrow \downarrow Ti \\ & & Z' & \xrightarrow{f} & Y' & \xrightarrow{g} & X' \xrightarrow{j'Ti} TY' \\ & & i' \downarrow & & \downarrow k' & & \\ & & TX & \xrightarrow{1_{TX}} & TX & & \end{array}$$

Observação 2.1. A partir de agora ao nos referirmos a triângulos exatos iremos omitir o termo **exato**, dizendo simplesmente triângulos, sempre que o automorfismo em questão estiver claro.

Observação 2.2. Os seguintes resultados podem ser verificados facilmente:

(1) Se $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} TA$ é um triângulo então $vu = 0 = vw$.

(2) Usando o Lema dos Cinco podemos mostrar:

Se (f, g, h) é um morfismo de triângulos com f, g isomorfismos então h também é isomorfismo.

Proposição 2.1. Sejam K uma categoria triangulada e $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ um triângulo. Então as seguintes seqüências são exatas

$$\begin{array}{l} \dots \rightarrow \text{Hom}_K(U, T^i X) \xrightarrow{\text{Hom}_K(U, T^i u)} \text{Hom}_K(U, T^i Y) \xrightarrow{\text{Hom}_K(U, T^i v)} \text{Hom}_K(U, T^i Z) \xrightarrow{\text{Hom}_K(U, T^i w)} \\ \text{Hom}_K(U, T^{i+1} X) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \text{Hom}_K(T^{i+1} X, U) \xrightarrow{\text{Hom}_K(T^{i+1} X, U)} \text{Hom}_K(T^i Z, U) \xrightarrow{\text{Hom}_K(T^i v, U)} \text{Hom}_K(T^i Y, U) \xrightarrow{\text{Hom}_K(T^i u, U)} \\ \text{Hom}_K(T^i X, U) \rightarrow \dots \end{array}$$

Corolário 2.1. (1) *Todo morfismo $f : A \rightarrow B$ determina um triângulo, no sentido que o seguinte triângulo associado a f*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} TA$$

é único a menos de isomorfismo de triângulos.

(2) *Todo triângulo está determinado por um qualquer dos seus morfismos, no sentido que se dois triângulos tem o mesmo morfismo na mesma posição são isomorfos.*

Proposição 2.2. *Sejam $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ e $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} TX'$ dois triângulos e um morfismo $g : Y \rightarrow Y'$, então $\exists f, h$ tal que (f, g, h) é morfismo de triângulos $\Leftrightarrow v'gu = 0$.*

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\ f \downarrow & \circlearrowleft & g \downarrow & \circlearrowleft & h \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow Tf \\ X' & \xrightarrow[u']{} & Y' & \xrightarrow[v']{} & Z' & \xrightarrow[w']{} & TX' \end{array}$$

Proposição 2.3. *Se K for uma categoria triangulada e $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ um triângulo de K , as seguintes condições são equivalentes:*

(1) $w = 0$

(2) u for seção, isto é existe $u' : Y \rightarrow X$ tal que $u'u = 1_X$.

(3) v for retração, isto é existe $v' : Z \rightarrow Y$ tal que $vv' = 1_Z$.

Proposição 2.4. *Seja K uma categoria triangulada, $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ um triângulo. As seguintes condições são equivalentes:*

(1) *Se $W \xrightarrow{f} Z$ não é retração então existe $f' : W \rightarrow Y$ tal que $vf' = f$.*

(2) *Se $W \xrightarrow{f} Z$ não é retração então $wf = 0$.*

Lema 2.1. *Seja K uma categoria triangulada. Então $X \xrightarrow{u} Y \rightarrow 0 \rightarrow TX$ é um triângulo se e só se u é isomorfismo.*

2.1.1 Funtores Cohomológicos

Definição 2.2. (1) Um morfismo de categorias trianguladas $f : K' \rightarrow K$ é um funtor aditivo que comuta com os automorfismos de translações e transforma triângulos em triângulos.

(2) Diz-se que K' é uma subcategoria triangulada de K se K' for uma subcategoria plena de K , se a inclusão for um morfismo de categorias trianguladas, e se todo triângulo em K com vértices em K' é um triângulo em K'

Definição 2.3. Sejam K uma categoria triangulada, e $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana, dizemos que $H : K \rightarrow \mathcal{A}$ é um funtor cohomológico covariante se para todo triângulo

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} TA$$

obtem-se uma seqüência exata longa em $\mathcal{A}$

$$\dots \xrightarrow{w^*} H(T^i A) \xrightarrow{u^*} H(T^i B) \xrightarrow{v^*} H(T^i C) \xrightarrow{w^*} H(T^{i+1} A) \xrightarrow{u^*} \dots$$

onde $u^* = H(T^i u)$, $v^* = H(T^i v)$ e $w^* = H(T^i w)$

Exemplo 2.1. Se K é uma categoria triangulada $\text{Hom}_K(X,) : K \rightarrow \text{Ab}$, onde X é um objeto fixado em K , é um funtor cohomológico covariante.

Observação 2.3. Se $H : K \rightarrow \mathcal{A}$ é um funtor cohomológico covariante e definimos $K_H = \{A \in \text{Obj} K / H^i(A) = 0, \forall i\}$ onde $H^i(A) = H(T^i A)$ então temos que K_H é subcategoria triangulada.

Lema 2.2. Se $\mathcal{A}$ for abeliana, então a categoria $K(\mathcal{A})$ é aditiva.

Exemplo 2.2. Um Funtor Cohomológico

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ temos um funtor de cohomologia $H^n : \text{Com} \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, definido da forma seguinte:

Nos objetos definimos

$$H^n(C^*) = \frac{\text{Ker} d_{C_n}}{\text{Im} d_{C_{n-1}}}$$

para cada complexo (C^*, d_C) .

Como $d^n \circ d^{n-1} = 0$ então $\text{Im} d^{n-1} \subset \text{Ker} d^n$, logo para um complexo C^* temos a seguinte seqüência exata $0 \rightarrow \text{Im} d_C^{n-1} \xrightarrow{i} \text{Ker} d_C^n \xrightarrow{\pi} H^n(C^*) = \frac{\text{Ker} d_{C_n}}{\text{Im} d_{C_{n-1}}} \rightarrow 0$, onde i é a inclusão e π a projeção no conúcleo de i .

Agora se $f : B^* \rightarrow C^*$ é um morfismo de complexos, este induz os morfismos seguintes $\text{Im}d_B^{n-1} \rightarrow \text{Im}d_C^{n-1}$ e $\text{Ker}d_B^n \rightarrow \text{Ker}d_C^n$, assim temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow & \text{Im}d_B^{n-1} & \xrightarrow{i} & \text{Ker}d_B^n & \xrightarrow{\pi} & H^n(B^*) & \rightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ 0 \rightarrow & \text{Im}d_C^{n-1} & \xrightarrow{i} & \text{Ker}d_C^n & \xrightarrow{\pi} & H^n(C^*) & \rightarrow 0 \end{array}$$

Logo pela propriedade universal do conúcleo existe uma aplicação $H^n(f) : H^n(B^*) \rightarrow H^n(C^*)$, esta aplicação é a imagem de f pelo funtor H^n .

Usaremos as notações $H^*(C^*) = H^n(C^*)_{n \in \mathbb{Z}}$, $H^*(\varphi) = H^n(\varphi)_{n \in \mathbb{Z}}$

Lembremos que um complexo C é exato quando $H^*(C) = 0$.

Observação 2.4. (1) H^n é um funtor, ou seja, $H^n(\varphi \circ \psi) = H^n(\varphi) \circ H^n(\psi)$.

(2) $H^*(\varphi - \psi) = H^*(\varphi) - H^*(\psi)$. Isto é H^n é um funtor aditivo.

(3) $\varphi \sim \psi \Rightarrow H^*(\varphi) = H^*(\psi)$, ou seja H^* leva morfismos homotópicos em igualdades

A família dos $H^n : \text{Com}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ fatora por $K(\mathcal{A})$, ou seja existe $\widehat{H}^n$ tornando o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Com}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{H^n} & \mathcal{A} \\ \text{quoc.} \downarrow & \nearrow \widehat{H}^n & \\ K(\mathcal{A}) & & \end{array}$$

Pode-se ver facilmente o seguinte fato 0^* e B^* são $qi \Leftrightarrow B^*$ é exato.

Definição 2.4. $B^* \xrightarrow{f} C^*$, f é homotopismo (ou equivalência homotópica) se $\exists C^* \xrightarrow{g} B^*$ tal que $g \circ f \sim 1_{B^*}$ e $f \circ g \sim 1_{C^*}$.

Observação 2.5. Usando a definição temos que:

- Duas resoluções projetivas de um objeto são homotópicamente equivalentes.
- Se f homotopismo então f é um qi .

Definição 2.5. Dado um morfismo $B^* \xrightarrow{f} C^*$, define-se o complexo $(\text{Cone}(f), \delta_{\text{cone}})$ da seguinte forma:

$$(Cone(f))_n = C^n \oplus B^{n+1}, n \in \mathbb{Z}$$

$$Cone(f) : \dots \rightarrow C^{n-1} \oplus B^n \xrightarrow{\delta} C^n \oplus B^{n+1} \rightarrow \dots, \text{ onde } \delta_{Cone} = \begin{pmatrix} d_C & -f \\ 0 & -d_B \end{pmatrix}.$$

E definimos *Cone* de um complexo a partir do morfismo identidade, ou seja, $Cone(C^\bullet) = Cone(1_{C^\bullet})$.

Diversas propriedades do cone podem ser encontradas em [W], capítulo I.

Se temos um complexo

$$C^\bullet : \dots \rightarrow C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} C^{n+2} \rightarrow \dots,$$

denotaremos por $C^\bullet[-m]$ ao complexo que resulta ao transladar m lugares à esquerda, isto é $(C^\bullet[-m])_n = C_{n+m}$, e $d^n[-m] = (-1)^m d^n$. É importante notarmos que fixando $m = 1$ temos um automorfismo de categorias, que chamaremos de funtor de deslocamento, este funtor define uma translação natural na categoria dos complexos e será nosso funtor de translação T . Assim $K(\mathcal{A})$ torna-se uma categoria triangulada.

Observação 2.6. Alguns autores denotam por $C^\bullet[m]$ o complexo que nós denotamos por $C^\bullet[-m]$.

Observação 2.7. Abaixo listamos alguns resultados elementares, os quais podem ser encontrados em [W] ou [GM]:

- (1) $Cone(C^\bullet) \sim 0^\bullet$.
- (2) $H_n(Cone(C^\bullet)) = 0$.
- (3) $Cone(C^\bullet)$ “cinde”, isto é existe $h_n : C_{n+1} \rightarrow C_n$ tal que $\delta_n h_n \delta_n = \delta_n$.
- (4) Seja $B^\bullet \xrightarrow{f} C^\bullet$. Existe h que torna f e 0 homotópicas se e só se $(f, -h) : Cone(B^\bullet) \rightarrow C^\bullet$ é morfismo.
- (5) Se $B^\bullet \xrightarrow{f} C^\bullet$, formamos a seqüência exata $0 \rightarrow C^\bullet \rightarrow Cone f \rightarrow B^\bullet[-1] \rightarrow 0$, onde $B^\bullet[-1]$ denota uma translação do complexo $B^\bullet$. Para os funtores de cohomologia temos

$$H^n(C^\bullet) \xrightarrow{H^n(id, 0)} H^n(Cone f) \xrightarrow{H^n(0, -id)} H^n(B^\bullet[-1]) \simeq H^{n+1}(B^\bullet) \xrightarrow{H^{n+1}(f)} H^{n+1}(C^\bullet)$$

Corolário 2.2. $B^\bullet \xrightarrow{f} C^\bullet$ é um *qi* se e só se $Cone(f)$ é exato.

Abaixo vamos verificar que em geral o cone não define um funtor entre categorias trianguladas.

Observação 2.8. *O cone desempenha em $K(\mathcal{A})$ um papel similar ao do cokernel em categorias abelianas. De forma mais geral podemos interpretar o TR1 associado ao TR3 com este significado. Entretanto vamos verificar que o cone não tem as propriedades funtoriais, como mostra a seguinte construção sugerida em [GM]. Mais precisamente mostraremos que, em geral, o Cone não preserva composições.*

Considere $\text{Mor}(K(\mathcal{A}))$ a categoria dos morfismos de $K(\mathcal{A})$. Pelo TR1, podemos associar a cada objeto de $\text{Mor}(K(\mathcal{A}))$ um objeto de $K(\mathcal{A})$. A cada morfismo de $\text{Mor}(K(\mathcal{A}))$, pelo uso do TR3, podemos também associar um morfismo de $\text{Mor}(K(\mathcal{A}))$ esta definição leva isomorfismo em isomorfismo. Mas preserva composição? Veremos que $\text{Cone}(vu) = \text{Cone}(w)[-1]$, onde $w : \text{Cone}(v) \rightarrow T\text{Cone}(u)$ vindo da composição do morfismos canônicos $\text{Cone}(v) \rightarrow TY$ e $TY \rightarrow T\text{Cone}(u)$

Dados os morfismos $u : X \rightarrow Y$ e $v : Y \rightarrow Z$ aplicando o TR1, construímos os triângulos

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{j} & \text{Cone}(u) \xrightarrow{k} TX \\ Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{f} & \text{Cone}(v) \xrightarrow{g} TY \end{array}$$

Seja $w = (Tj)g$, e aplicando o TR1 em vu obtemos o triângulo

$$X \xrightarrow{vu} Z \longrightarrow \text{Cone}(vu) \xrightarrow{k} TX$$

Aplicando o TR4 nestes três triângulos, obtemos o triângulo abaixo:

$$\text{Cone}(u) \xrightarrow{a} \text{Cone}(vu) \xrightarrow{m} \text{Cone}(v) \xrightarrow{T(j)g} T\text{Cone}(u)$$

Donde segue que $\text{Cone}(w)$ é isomorfo a $T\text{Cone}(vu)$, ou seja, $\text{Cone}(vu) = \text{Cone}(w)[-1]$.

Definição 2.6. Cilindro de um morfismo $B^\bullet \xrightarrow{f} C^\bullet$. Defina-se

$$\text{Cil}f : \dots \rightarrow B^{n-1} \oplus C^{n-1} \oplus B^n \xrightarrow{\delta_{\text{cil}}} B^n \oplus C^n \oplus B^{n+1} \rightarrow \dots$$

onde

$$\delta_{\text{cil}} = \begin{pmatrix} d_B & 0 & -1 \\ 0 & d_C & -f \\ 0 & 0 & -d_B \end{pmatrix}$$

Este complexo é chamado cilindro de f . Define-se o cilindro de um complexo $C^\bullet$ a partir do morfismo identidade, por definição $\text{Cil}(C^\bullet)$ é dado por $\text{Cil}(1_C)$.

Observação 2.9. (1) Sejam $f, g : B^\bullet \rightarrow C^\bullet$ são dois morfismos e existe h que torna f e g homotópicos, de forma mais simplificada denotamos $f \stackrel{h}{\sim} g$, se e somente se $(f, g, h) : \text{Cil } B^\bullet \rightarrow C^\bullet$ é um morfismo de complexos.

(2) Seja $B^\bullet \xrightarrow{f} C^\bullet$, consideremos $\alpha : C^\bullet \rightarrow \text{Cil}(f)$, definida por $\alpha(c) = (0, 0, c)$ e $\beta : \text{Cil}(f) \rightarrow C^\bullet$, definida por $\beta(b, c, b') = f(b) + c$, estas α, β são homotopismos, pois $\beta\alpha = \text{id}_{C^\bullet}, \alpha\beta \sim \text{id}_{\text{Cil}(f)}$.

Proposição 2.5. (Propriedade Universal) Consideremos $F : \text{Com}(\mathcal{A}) \rightarrow D$ um funtor que transforme homotopismos em isomorfismos, então F fatora através de $K(\mathcal{A})$, isto é, existe um único $\widehat{F}$ tal que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} \text{Com}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{F} & D \\ \downarrow & \nearrow \exists! \widehat{F} & \\ K(\mathcal{A}) & & \end{array}$$

2.2 Triângulos em $K(\mathcal{A})$

Definiremos agora triângulos em $K(\mathcal{A})$ e faremos dela uma categoria triangulada através de uma escolha particular dos triângulos exatos.

Seja $A^\bullet \xrightarrow{u} B^\bullet$, um morfismo em $K(\mathcal{A})$, temos a seqüência exata em $K(\mathcal{A})$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B^\bullet & \xrightarrow{v} & \text{Cone}(u) & \xrightarrow{\delta} & A^\bullet[-1] \longrightarrow 0 \\ & & b \rightsquigarrow & & (0, b) & & \\ & & & & (a, b) & \rightsquigarrow & a \end{array}$$

Chamaremos de **triângulos puros** aqueles que são obtidos a partir da aplicação do cone em um morfismo, ou seja, dado um morfismo $u : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ associamos o seguinte triângulo, que é chamado de puro.

$$\begin{array}{ccc} & \text{Cone}(u) & \\ \delta \swarrow & & \nwarrow v \\ A^\bullet & \xrightarrow{u} & B^\bullet \end{array}$$

$$\text{ou } A^\bullet \xrightarrow{u} B^\bullet \xrightarrow{v} \text{Cone}(u) \xrightarrow{\delta} A^\bullet[-1]$$

Os triângulos exatos em $K(\mathcal{A})$ são os triângulos isomorfos aos puros. Ou seja, diz-se que o triângulo $A^\bullet \xrightarrow{u} B^\bullet \xrightarrow{v} C^\bullet \xrightarrow{\delta} A^\bullet[-1]$ é exato quando existem isomorfismos f, g, h tais que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccccc} A^\bullet & \xrightarrow{u} & B^\bullet & \xrightarrow{v'} & C^\bullet & \xrightarrow{\delta'} & A^\bullet[-1] \\ f \downarrow & \circlearrowleft & g \downarrow & \circlearrowleft & h \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow f[-1] \\ A^\bullet & \xrightarrow[u]{} & B^\bullet & \xrightarrow[v]{} & Cone(u) & \xrightarrow[\delta]{} & A^\bullet[-1] \end{array}$$

Exemplo 2.3. (1) Observe que o morfismo nulo $A \xrightarrow{0} A$, se completa para o triângulo $A \rightarrow A \rightarrow Cone(0) \rightarrow A[-1]$.

(2) Ao morfismo identidade podemos associar o seguinte triângulo

$$A \xrightarrow{1_A} A \rightarrow Cone(1_A) = 0^\bullet \rightarrow A[-1]$$

(3) Dado um triângulo exato da forma

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} A[-1]$$

então os triângulos

$$\begin{array}{l} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} A[-1] \xrightarrow{-u[-1]} B[-1] \\ C \xrightarrow{w} A[-1] \xrightarrow{-u[-1]} B[-1] \xrightarrow{-v[-1]} C[-1] \end{array}$$

são exatos. Costuma-se dizer que estes triângulos são rotações de

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} A[-1]$$

Observação 2.10. Se temos dois triângulos $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} Cone(u) \xrightarrow{\delta} A[-1]$ e $A' \xrightarrow{u'} B' \xrightarrow{v'} Cone(u') \xrightarrow{\delta'} A'[-1]$ e dois morfismos $f : A \rightarrow A'$ e $g : B \rightarrow B'$ tais que $u'f = gu$ existe um morfismo $h : Cone(u) \rightarrow Cone(u')$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & Cone(u) & \xrightarrow{\delta} & A[-1] \\ f \downarrow & & g \downarrow & & \exists h \downarrow & & \downarrow f[-1] \\ A' & \xrightarrow[u']{} & B' & \xrightarrow[v']{} & Cone(u') & \xrightarrow[\delta']{} & A'[-1] \end{array}$$

Para essa escolha de triângulos exatos, mais detalhes em [W].

O próximo resultado nos dá um exemplo de categoria triangulada.

Teorema 2.1. [GM] A categoria $K(\mathcal{A})$ é uma categoria triangulada.

Corolário 2.3. Seja $\mathcal{C}$ subcategoria plena de $Com(\mathcal{A})$, se $\mathcal{C}$ for aditiva, fechada para translações e cones então $K' = \mathcal{C}/\sim$ é uma categoria triangulada.

Exemplo 2.4. Algumas subcategorias de $Com(\mathcal{A})$ nas condições do Corolário acima e as correspondentes subcategorias trianguladas de $K(\mathcal{A})$ são as seguintes:

- (1) Com^+ (complexos limitados inferiormente) $\rightsquigarrow K^+$
- (2) Com^- (complexos limitados superiormente) $\rightsquigarrow K^-$
- (3) Com^b (complexos limitados) $\rightsquigarrow K^b$
- (4) $Com^{+,b}$ (complexos limitados inferiormente, com homologia limitada) $\rightsquigarrow K^{+,b}$
- (5) $Com^{-,b}$ (complexos limitados superiormente, com homologia limitada) $\rightsquigarrow K^{-,b}$

Uma interpretação dos triângulos (veja [GM])

Considerando uma seqüência exata em $Com(\mathcal{A})$,

$$0 \rightarrow A^\bullet \xrightarrow{u} B^\bullet \xrightarrow{v} C^\bullet \rightarrow 0$$

podemos definir um morfismo $\varphi : Cone(u) \rightarrow C$ da seguinte forma $\varphi(a, b) = v(b)$ e sendo β a projeção de $Cil(f)$ em B , e obtemos o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & Cone(u) & \longrightarrow & A[-1] \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \hookrightarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & A \longrightarrow & Cil(u) & \xrightarrow{\pi} & Cone(u) & \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel \hookrightarrow & \downarrow \beta & \hookrightarrow & \downarrow \varphi & \\
 0 & \longrightarrow & A \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C & \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Donde obtemos o seguinte

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \dots \rightarrow & H^n(A) & \rightarrow & H^n(Cil(u)) & \rightarrow & H^n(Cone(u)) & \rightarrow & H^{n+1}(A) & \rightarrow & H^{n+1}(Cil(u)) & \rightarrow \dots \\
 & \parallel & & \hookrightarrow \downarrow H^n(\beta) & \hookrightarrow & \downarrow \varphi & & \parallel \hookrightarrow & & \downarrow H^{n+1}(\beta) & \\
 \dots \rightarrow & H^n(A) & \rightarrow & H^n(B) & \rightarrow & H^n(C) & \rightarrow & H^{n+1}(A) & \rightarrow & H^{n+1}(B) & \rightarrow \dots
 \end{array}$$

Pelo Lema dos Cinco φ é um quase isomorfismo. Segue do segundo ítem da última observação da seção anterior que $H^n(\beta)$ é isomorfismo.

Embora $A \xrightarrow{u} B \rightarrow Cone(u) \rightarrow A[-1]$, seja um triângulo e $Cone(u)$ um objeto quase isomorfo a C isto não implica que $\exists C \xrightarrow{w} A[-1]$ de modo que $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} A[-1]$ seja um triângulo.

Utilizando a comutatividade do seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} A & \longrightarrow & Cil(u) & \xrightarrow{\pi} & Cone(u) & \xrightarrow{proj} & A[-1] \\ || \circlearrowleft & & \downarrow \beta & \circlearrowleft & \downarrow 1_{Cone(u)} & \circlearrowleft & || \\ A & \xrightarrow[u]{} & B & \xrightarrow[inc]{} & Cone(u) & \xrightarrow[proj]{} & A[-1] \end{array}$$

onde π e $proj$ indicam as projeções naturais e inc a inclusão natural. Temos que $A \rightarrow Cil(u) \rightarrow Cone(u) \rightarrow A[-1]$ é um triângulo exato.

Definição 2.7. Dizemos que uma seqüência de complexos em $Com(\Lambda)$,

$$0 \rightarrow X^\bullet \rightarrow Y^\bullet \rightarrow Z^\bullet \rightarrow 0$$

é semi-cindida se para todo $i \in \mathbb{Z}$ a seqüência

$$0 \rightarrow X^i \rightarrow Y^i \rightarrow Z^i \rightarrow 0$$

cinde em $mod\Lambda$.

Exemplo 2.5. Considerando a seqüência dada por

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow & A \rightarrow & Cil(u) & \rightarrow & Cone(u) & \rightarrow & 0 \\ & x \rightsquigarrow (0, x, 0) & & & (x, x', y) \rightsquigarrow (x, y) & & \end{array}$$

uma verificação direta mostra que é uma seqüência exata semi-cindida em $Com(\Lambda)$.

Observação 2.11. Vale a pena observar que a existência das aplicações $w_i : Z_i \rightarrow Y_i$ tais que $v_i \circ w_i = 1_{Z_i}$ equivale a existência de aplicações $\lambda_i : Y_i \rightarrow X_i$ tal que $\lambda_i \circ u_i = 1_{X_i}$. A família $(w_i)_{i \in I}$ não tem que ser morfismo de complexos.

Lema 2.3. [GM] Toda seqüência exata semi-cindida em $Com(\mathcal{A})$ pode ser completada a um triângulo exato em $K(\mathcal{A})$. Isto é se $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ é uma seqüência exata quase cindida em $Com(\mathcal{A})$, então existe $h : C \rightarrow A[-1]$ tal que $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[-1]$ é um triângulo exato em $K(\mathcal{A})$.

Dada A uma álgebra consideremos P_A (respectivamente I_A) a subcategoria de $\text{mod} A$ formada pelos módulos projetivos (respectivamente injetivos). Apesar destas subcategorias não serem abelianas a subcategoria dos complexos determinada por elas, $\text{Com}(P_A)$ e $\text{Com}(I_A)$, são localizáveis e suas localizações pelo sistema multiplicativo dos quase isomorfismos são denotados por $K(P_A)$, $K(I_A)$ ou simplesmente $K(P)$, $K(I)$ quando não houver risco de ambigüidade com relação a álgebra que estamos nos referindo, na seção 2.4 será dado mais detalhes a este respeito.

A construção feita na Observação 1.14 nos auxilia na demonstração do próximo resultado.

Lema 2.4. *Sejam Λ uma álgebra de Artin de dimensão global finita e $X^\bullet$ um complexo indecomponível em $K(P_\Lambda)$*

$$X^\bullet \cong \cdots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \cdots P_0 \xrightarrow{d_0} P_{-1} \cdots$$

Então $\text{im}(d_i) \subset \text{rad} P_{i-1}$ para todo i .

Demonstração. Uma vez que Λ é de dimensão global finita as categorias trianguladas $K(P_\Lambda)$ e $D^b(\Lambda)$ são isomorfas, veja Observação 2.17. Portanto, dado um indecomponível $X'^\bullet$ em $K(P_\Lambda)$ podemos identificá-lo com um complexo limitado da categoria derivada, isto é, existe $X^\bullet \in D(\Lambda)$ tal que $X^\bullet \cong X'^\bullet$. Seja $X^\bullet$ dado por

$$X^\bullet = \cdots \longrightarrow X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \quad n \in \mathbb{Z}$$

Sem perda de generalidades podemos supor que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $X_i = 0$ se $i < 0$ ou $i > m + 1$. Para cada $n \in \{1, \dots, m\}$ consideremos a **resolução projetiva minimal** de X_n , desta forma obtemos uma seqüência exata de Λ módulos:

$$\cdots \longrightarrow P_{i,n+1} \xrightarrow{d_{i,m}} P_{i,m-1} \cdots \xrightarrow{d_{i,2}} P_{i,1} \xrightarrow{d_{i,1}} P_{i,0} \xrightarrow{\epsilon_i} X_i \xrightarrow{0} 0$$

Como trata-se da resolução projetiva minimal de X_i é possível mostrar que $\text{im} d_{i,j} \subseteq \text{rad} P_{i,j-1}$.

Fazendo o levantamento dos morfismos $d_i : X_i \longrightarrow X_{i-1}$ às resoluções projetivas e tomando n tal que $P_{i,t} = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ e $t > n$, podemos montar o seguinte

diagrama comutativo, cujas colunas são seqüências exatas.

$$\begin{array}{ccccccc}
 P_{m,n} & \xrightarrow{d_{m,n}} & \cdots & \xrightarrow{d_{3,m}} & P_{2,n} & \xrightarrow{d_{2,n}} & P_{1,n} \xrightarrow{d_{1,n}} P_{0,n} \\
 \downarrow h_{m,n} & & & & \downarrow h_{2,n} & & \downarrow h_{1,n} \downarrow h_{0,n} \\
 \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
 \downarrow h_{m,3} & & & & \downarrow h_{2,3} & & \downarrow h_{1,3} \downarrow h_{0,3} \\
 P_{m,2} & \xrightarrow{d_{m,2}} & \cdots & \xrightarrow{d_{3,2}} & P_{2,2} & \xrightarrow{d_{2,2}} & P_{1,2} \xrightarrow{d_{1,2}} P_{0,2} \\
 \downarrow h_{m,2} & & & & \downarrow h_{2,2} & & \downarrow h_{1,2} \downarrow h_{0,2} \\
 P_{m,1} & \xrightarrow{d_{m,1}} & \cdots & \xrightarrow{d_{3,1}} & P_{2,1} & \xrightarrow{d_{2,1}} & P_{1,1} \xrightarrow{d_{1,1}} P_{0,1} \\
 \downarrow h_{m,1} & & & & \downarrow h_{2,0} & & \downarrow h_{1,1} \downarrow h_{0,1} \\
 P_{m,0} & \xrightarrow{d_{m,0}} & \cdots & \xrightarrow{d_{3,0}} & P_{2,0} & \xrightarrow{d_{2,0}} & P_{1,0} \xrightarrow{d_{1,0}} P_{0,0} \\
 \downarrow \varepsilon_m & & & & \downarrow \varepsilon_2 & & \downarrow \varepsilon_1 \downarrow \varepsilon_0 \\
 X_m & \xrightarrow{d_m} & \cdots & \xrightarrow{d_3} & X_2 & \xrightarrow{d_2} & X_1 \xrightarrow{d_1} X_0
 \end{array}$$

Seja $Q^\bullet = (Q_i, d_{Q_i})$ o complexo de projetivos construído a partir do diagrama acima, como na Observação 1.14. Sabemos que $Q^\bullet$ é isomorfo a $X^\bullet$ em $K(\Lambda)$, logo, resta mostrarmos que os morfismos $d_{j,i} : P_{j,i} \rightarrow P_{j-1,i}$ são equivalentes a morfismos com imagem contida no radical.

Se $\text{im}(d_{j,i})$ não está contida no radical de $P_{j-1,i}$, então existe P um somando direto de $P_{j-1,i}$, contido na imagem de $\text{im}(d_{j,i})$, seja $h = \pi d_{j,i}$, onde $\pi : P_{j-1,i} \rightarrow P$ a projeção canônica. Como P é projetivo indecomponível, e h é epimorfismo segue que P é isomorfo a um somando direto de $P_{j,i}$. Logo, existe um inteiro s tal que $P_{j,i} = P^s \oplus B$, onde P não é isomorfo a qualquer somando de B . Note que, a composição de π com a restrição de $d_{j,i}$ determina um morfismo, digamos a , de P^s em P e que $d_{j,i}$ restrito a B pode ser expresso como uma soma $f + b$, onde $\text{im} f \cap P = 0$ e $\text{im} f \subset \text{rad} P$. Assim, podemos definir o morfismo $\sigma : P^s \oplus B \rightarrow P \oplus P_{j-1,i}$ dado pela matriz $d'_{j,i} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ d & (f + b) \end{pmatrix}$

Sejam $\phi : P^s \oplus B \rightarrow P^s \oplus B \oplus P^s$ dada por, $\phi(x, y) = (x, y, x)$ e $\eta : P^s \oplus B \oplus P^s \rightarrow P^s \oplus P_{j-1,i}$ dado pela matriz $\eta = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & (f + b) & d \end{pmatrix}$

Observe que $d'_{j,i} = \eta\phi$

$$\begin{array}{ccc} & P_{i,j} & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ P_{i,j-1} \oplus P & \xrightarrow[\phi]{} & P^s \oplus B \oplus P^s \end{array}$$

Notemos ainda que $d'_{j,i}$ se fatora pela $d_{j,i}$ através do morfismo $\pi' : P \oplus \frac{P_{i,j-1}}{P} \longrightarrow P_{j-1,i} \oplus P$ dado por $\pi'(x, y) = (x, \pi(x))$.

Agora podemos usar η para finalizarmos a demonstração.

Se a for minimal então consideremos o complexo $Y^\bullet = (Y_i, \partial_i)$, onde $Y_i = 0$ se $i \notin \{i+j-1, i+j\}$, $Y_{i+j} = P^s$, $Y_{i+j-1} = P$, e $\partial_{i+j} = a$. Por uma verificação direta mostra-se que existe um mono que cinde de $Y^\bullet$ em $X^\bullet$, no caso em que a não for um isomorfismo o complexo $Y^\bullet$ é um somando direto de $X^\bullet$, donde segue que $X^\bullet \cong Y^\bullet \cong \ker(a)[i+j]$ em $K(\Lambda)$, pois a é epimorfismo. Finalmente, no caso em a for um isomorfismo, o complexo $Y^\bullet$ é exato, portanto $Y^\bullet \cong 0$ em $K(\Lambda)$, e como $d'_{j,i}$ fatora $d'_{j,i}$ segue que em $K(\Lambda)$ o morfismo $d'_{j,i}$ equivale a um morfismo cuja imagem não contém P , o qual pode expresso por: $\eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (f+b) & d \end{pmatrix}$

Como $P_{j-1,i}$ tem apenas um número finito de somandos diretos indecomponíveis, repetindo este processo sucessivamente, um número finito de vezes, obtém-se um morfismo equivalente a $d_i : P_i \longrightarrow P_{i-1}$ que tem imagem contida no radical P_{i-1} .

Se a não for um morfismo minimal então a se anula sobre algum somando de P^s , como $d_j d_{j+1} = 0$ donde segue que o complexo concentrado $P[i+j]$ é isomorfo a um somando direto de $X^\bullet$ ou complexo $L'^\bullet = (L_i, \ell_i)$ é um somando de $X^\bullet$, onde $L_j = 0$ para $j \notin \{i, i-1\}$, $L_i = L_{i-1} = P$ e $\ell = 1_P$. Como $X^\bullet$ é indecomponível segue que $Q^\bullet \cong P[i+j]$ ou $d_{i,j}$ pode ser reduzida a um morfismo que tem imagem contida no radical. $\square$

Observação 2.12. *É possível mostrar, utilizando alguns exercícios do capítulo I de [W], que em $\mathcal{A} = \text{mod } \mathbb{Z}$ o triângulo $\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \text{Cone}(f) \longrightarrow \mathbb{Z}_2[-1]$, onde f denota o morfismo associado a multiplicação por 2, não pode ser obtido de nenhuma seqüência exata.*

2.2.1 Asas em categorias trianguladas

As definições e os principais resultados apresentados nesta seção podem ser encontrados [ASZ]. Utilizamos o conceito de **asa em categorias trianguladas** e alguns resultados de [ASZ] para construirmos alguns exemplos de subcategorias contravariantemente finita em categorias trianguladas. Ressaltamos ainda que os conceitos de subcategorias contravariantemente finita, covariantemente finita e funtorialmente em categorias trianguladas são definidos de forma similar às definições dadas em categorias de módulos.

Definição 2.8. *Uma subcategoria plena U de uma k -categoria triangulada T é chamada suspensa se:*

- (1) *U é fechada para translações positivas, isto é $X[1] \in U$ para todo $X \in U$.*
- (2) *U é fechada para extensões, isto é, se $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$ é um triângulo em T com $X, Z \in U$, então $Y \in U$.*

Esta noção coincide com a de subcategoria triangulada à direita, onde a restrição da translação é uma semiequivalência à direita. Lembramos que uma subcategoria $\mathcal{C}$ é triangulada à direita se for uma subcategoria plena com a seguinte propriedade: para todo morfismo $f \in \mathcal{C}$ o triângulo associado a f está contido em $\mathcal{C}$, e $TX \in \mathcal{C}$, para todo objeto $X \in \mathcal{C}$.

Lema 2.5. *Seja T uma k -categoria triangulada e U uma subcategoria plena de T . Então U é suspensa se e só se U é uma subcategoria triangulada à direita de T e a restrição da translação de T a U é uma semiequivalência à direita.*

Definição 2.9. *Uma subcategoria suspensa U de uma k -categoria triangulada T é chamada asa se o funtor inclusão $U \rightarrow T$ tem um adjunto à direita $t_U : T \rightarrow U$.*

Exemplo 2.6. *Se A for uma álgebra de Artin, pela última observação do capítulo 1 segue que a subcategoria dos complexos exatos é uma asa.*

De maneira dual definem-se os conceitos de subcategoria co-suspensa e co-asa.

As asas nas categorias trianguladas são o análogo das classes de torção nas categorias abelianas e $t_U : T \rightarrow U$ joga o papel do radical de torção.

Se U for uma subcategoria plena de uma categoria triangulada T , denotaremos por $U^\perp$ (respectivamente, ${}^\perp U$) a subcategoria plena formada pelos objetos $Y \in T$ tais que $\text{Hom}_T(X, Y) = 0$ (respectivamente $\text{Hom}_T(Y, X) = 0$) para todo $X \in U$.

Proposição 2.6. *Seja T de uma k -categoria triangulada e U uma subcategoria suspensiva. As seguintes condições são equivalentes:*

- (1) U for um asa.
- (2) Para cada objeto $X \in T$ existe um triângulo $t_u X \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow t_u X[1]$ em T com $t_u X \in U, Y \in U^\perp$.
Se além disso, T é Krull-Schmidt, estas condições equivalem a:
- (3) U é contravariantemente finita.

2.3 Localização e Categoria Derivada

Nesta seção vamos estudar o conceito de localização de categorias. Um teorema de Gabriel-Zisman nos garantirá que uma categoria aditiva $\mathcal{C}$ que possui um sistema multiplicativo localmente pequeno S admite localização. Além disso, a categoria obtida pela localização é aditiva e triangulada.

Veremos também que no caso particular de uma álgebra A , a família dos quase isomorfismos, denotemos momentaneamente por S , forma um sistema multiplicativo localmente pequeno em $K(A)$ e a categoria obtida pela localização de $K(A)$ por S é, por definição, a categoria derivada de A .

Definição 2.10. *Seja S uma coleção de morfismos na categoria $\mathcal{C}$, uma localização de $\mathcal{C}$ com respeito a S , é uma categoria $S^{-1}\mathcal{C}$ junto com um funtor $q : \mathcal{C} \rightarrow S^{-1}\mathcal{C}$ tal que*

- (1) $q(s)$ é um isomorfismo para todo $s \in S$.
- (2) Todo funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow D$ tal que $F(s)$ é um isomorfismo $\forall s \in S$, se fatora de forma única através de q , isto é, existe um único $S^{-1}F$ tal que $(S^{-1}F)q = F$, ou seja o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & D \\ q \downarrow & \nearrow \exists! S^{-1}F & \\ S^{-1}\mathcal{C} & & \end{array}$$

Definição 2.11. Uma coleção S de morfismos em C é chamada um sistema multiplicativo em C se satisfizer:

- (1) (a) S é fechado para composição.
 (b) Se $X \in \text{Obj}(C)$ então $1_X \in S$
- (2) Condição de existência: Se temos dois morfismos $t : Z \rightarrow Y$ e $g : X \rightarrow Y$, com $g \in S$, existem um objeto W e dois morfismos $f : W \rightarrow Z$ e $s : W \rightarrow X$, com $s \in S$ tal que $tf = gs$, ou seja o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f} & Z \\ s \downarrow \sim & & \sim \downarrow t \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

E procedendo de forma analoga, considera-se a situação dual

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f} & Z \\ s \downarrow \sim & & \sim \downarrow t \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

- (3) Condição de Cancelamento: Dados dois morfismos $f, g : X \rightarrow Y$ as seguintes condições são equivalentes:

- (i) Existe um morfismo $t : X' \rightarrow X$, com $t \in S$ tal que $ft = gt$.
- (ii) Existe um morfismo $s : Y \rightarrow Z$, com $s \in S$ tal que $sf = sg$.

$$X' \xrightarrow[t]{\sim} X \xrightarrow[g]{f} Y \xrightarrow[s]{\sim} Z$$

Onde o símbolo $\sim$ ao lado de um morfismo indica que ele pertence a S

Exemplo 2.7. Seja R um anel comutativo com unidade. Consideremos a seguinte categoria aditiva, a qual denotaremos por $\mathcal{R}$,

$\text{Obj}\mathcal{R} = \bullet$ (um único objeto).

$\text{Hom}_{\mathcal{R}}(\bullet, \bullet) = R$.

Seja S um subconjunto de R fechado para a multiplicação, então $S^{-1}\mathcal{R}$ é a categoria seguinte

$$\text{Obj} S^{-1}\mathcal{R} = \bullet$$

$$\text{Hom}_{S^{-1}\mathcal{R}}(\bullet, \bullet) = S^{-1}R, \text{ o anel localizado.}$$

$$\begin{array}{ccc} x & & R \xrightarrow{F} D \\ \downarrow & & \downarrow q \nearrow S^{-1}F \\ \frac{x}{1} & & S^{-1}R \end{array}$$

$$e \quad S^{-1}F: S^{-1}\mathcal{R} \longrightarrow D$$

$$\frac{x}{s} \rightsquigarrow F(x) F(s)^{-1}$$

A construção do anel $S^{-1}\mathcal{R}$ serve de protótipo para a construção da localização $S^{-1}C$.

Exemplo 2.8. Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana e $K^*(\mathcal{A}), * = +, -$ ou b a categoria dos complexos de $\mathcal{A}$, módulo homotopia. Pode-se provar que o conjunto S^* formado pelas classes dos quase-isomorfismos é um conjunto multiplicativo em $K^*(\mathcal{A})$, para mais detalhes veja teorema 4 do capítulo III de [GM].

2.3.1 Frações e aditividade de $S^{-1}C$

Seja $\mathcal{S}$ um sistema multiplicativo em uma categoria triangulada C . A cada par (s, f) de homomorfismos com o mesmo domínio, $s: X_1 \rightarrow X$ e $f: X_1 \rightarrow Y$, podemos associar o diagrama:

$$X \xleftarrow{s} X_1 \xrightarrow{f} Y$$

No caso em que (s, f) é um par de homomorfismos com o mesmo domínio e $s \in \mathcal{S}$ dizemos (s, f) é uma $\mathcal{S}$ -fração à esquerda, a qual é denotada por fs^{-1} . Neste caso usamos o seguinte diagrama para representá-la:

$$X \xleftarrow[\sim]{s} X_1 \xrightarrow{f} Y$$

Ou representamos pela tripla (X_1, s, f)

Consideremos duas frações fs^{-1} e gt^{-1} representadas pelos seguintes diagramas

$$X \xleftarrow[\sim]{s} X_1 \xrightarrow{f} Y$$

$$X \xleftarrow[\sim]{t} X_2 \xrightarrow{g} Y$$

Dizemos que fs^{-1} e gt^{-1} são frações equivalentes, e denota-se $fs^{-1} \sim gt^{-1}$, se existe uma fração $X \leftarrow X_3 \rightarrow Y$ tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & X_1 & & \\ & s \swarrow & \uparrow & \searrow f & \\ X & \leftarrow & X_3 & \rightarrow & Y \\ & t \nwarrow & \downarrow & \nearrow g & \\ & & X_2 & & \end{array}$$

Observação 2.13. $\sim$ é uma relação de equivalência.

Definição 2.12. $\text{Hom}_S(X, Y)$ denota a família das classes de equivalência de frações.

Observação 2.14. Pode-se mostrar que em geral $\text{Hom}_S(X, Y)$ não é um conjunto.

Definição 2.13. S é chamado localmente pequeno (à esquerda) se para todo X em $\text{Obj}C$, existe um conjunto S_X de morfismos de S , todos com contradomínio X tal que para todo morfismo $X_1 \rightarrow X$ em S existe um morfismo em C , $X_2 \rightarrow X_1$ tal que $X_2 \rightarrow X_1 \rightarrow X$ esta em S_X .

Observação 2.15. Se S é localmente pequeno então $\text{Hom}_S(X, Y)$ é um conjunto.

Seja $X \xleftarrow[\sim]{s} X_1 \xrightarrow{f} Y \in \text{Hom}_S(X, Y)$. Se S é localmente pequeno então $\exists X_2 \xrightarrow{g} X_1$ em C tal que $X_2 \xrightarrow{g} X_1 \xrightarrow{s} X$ está em S_X . Observe que:

$$\left(X \xleftarrow[\sim]{s} X_1 \xrightarrow{f} Y \right) \sim \left(X \xleftarrow[\sim]{sg} X_2 \xrightarrow{fg} Y \right), sg \in S_X.$$

$$\begin{array}{ccccc} & & X_1 & & \\ & s \swarrow \sim & \uparrow g & \searrow f & \\ X & \xleftarrow[\sim]{} & X_2 & \rightarrow & Y \\ & sg \nwarrow \sim & \parallel & \nearrow fg & \\ & & X_2 & & \end{array}$$

Composição de Frações: Dadas duas frações as^{-1} e bt^{-1} pertencentes a $\text{Hom}_S(X, Y)$ e $\text{Hom}_S(Y, Z)$ respectivamente, podemos associar a elas a fração composição de as^{-1} e bt^{-1} da seguinte forma:

Considerando as representações de as^{-1} e bt^{-1} dadas por:

$$X \xleftarrow[\sim]{s} U \xrightarrow{a} Y$$

$$Y \xleftarrow[\sim]{t} V \xrightarrow{b} Z$$

Usando o segundo axioma de sistema multiplicativo obtemos a fração $\beta\alpha^{-1}$ de forma que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & W & & \\ & \alpha \swarrow \sim & & \searrow \beta & \\ & U & & V & \\ s \swarrow \sim & & a \searrow & & t \swarrow \sim \quad \searrow b \\ X & & Y & & Z \end{array}$$

Desta forma podemos definir a composição de as^{-1} e bt^{-1} como sendo a fração $(b\beta)(s^{-1}\alpha^{-1})$

Pode-se mostrar que a composição de frações definida desta forma é associativa e que a fração $X \xleftarrow{1_X} X \xrightarrow{1_X} X$ é a identidade.

Teorema 2.2. (Gabriel-Zisman) *Seja S um sistema multiplicativo localmente pequeno (SMLP) de uma categoria C .*

A categoria $S^{-1}C$ existe e é a localização de C com respeito a S , o funtor universal $q: C \rightarrow S^{-1}C$ leva $f: X \rightarrow Y$ em $X \xleftarrow{1_X} X \xrightarrow{f} Y$ ($X = X \xrightarrow{f} Y$).

Proposição 2.7. *Se C é uma categoria aditiva então $S^{-1}C$ é uma categoria aditiva.*

Observação 2.16. *Faremos o esboço da demonstração num caso particular. Iremos assumir que vale a seguinte propriedade, se $s \in S$ e $su \in S$ então $u \in S$ (no caso em que esta propriedade é satisfeita o sistema é dito Hipersaturado).*

Esboço da demonstração: Sejam $(U, s, a), (V, t, b) \in \text{Hom}(X, Y)$. Definimos a soma de $(U, s, a) + (V, t, b)$ da seguinte forma:

Aplicação do segundo axioma de sistema multiplicativo a $s: U \rightarrow X$ e $t: V \rightarrow X$, obtemos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{u} & V \\ v \downarrow \sim & & \sim \downarrow t \\ U & \xrightarrow{s} & X \end{array}$$

Em seguida construímos o diagrama abaixo, que relaciona as frações dadas ao diagrama acima:

Enfim, definimos $x = sv, y = av + bu$. Como sv pertence ao sistema multiplicativo, segue que (S, x, y) é uma fração de $\text{Hom}(X, Y)$, assim podemos definir

$$(U, s, a) + (V, t, b) = (S, x, y)$$

Definida esta soma de frações pode-se mostrar a proposição

□

Quando C é uma categoria aditiva e S é um sistema multiplicativo, além de $S^{-1}C$ ser uma categoria aditiva pode-se verificar que o funtor de localização, q , é aditivo também.

Definição 2.14. Dada uma categoria abeliana A , consideremos $K(A)$ a categoria dos complexos módulo homotopia e S o conjunto dos quase-isomorfismos. Definimos a categoria derivada de A , $D(A)$, sendo a categoria obtida da localização de $K(A)$ por S , ou seja $D(A) := S^{-1}K(A)$.

Definição 2.15. Localização de Subcategorias Seja B uma subcategoria plena de C e seja S um sistema multiplicativo localmente pequeno em C cuja restrição $S \cap B$ em B é também um sistema multiplicativo, iremos escrever $S^{-1}B$ para $(S \cap B)^{-1}B$. Se o funtor natural $S^{-1}B \rightarrow S^{-1}C$ é fiel e pleno $S^{-1}B$ é chamada subcategoria localizada de C para S .

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{i} & C \xrightarrow{q_C} S^{-1}C \\ q_B \downarrow & \nearrow F_S & \\ S^{-1}B & & \end{array}$$

Proposição 2.8. Suponhamos que para todo $s \in \text{Hom}_C(X, Y) \cap S$ com $Y \in \text{Obj} B$ existe $f \in \text{Hom}_C(Z, X)$ com $Z \in \text{Obj} B$ tal que a composição $Z \xrightarrow{f} X \xrightarrow[s \in S]{\sim} Y$ esta em S , então o funtor $F'_S : S^{-1}B \rightarrow S^{-1}C$, induzido por $q_C F_S$ via a localização, é fiel e pleno.

Exemplo 2.9. Assumamos que $D(\mathcal{A})$ existe, ou seja $(S^{-1}K(\mathcal{A}) \simeq D(\mathcal{A}))$, onde $S = \{qi\}$ em $K(\mathcal{A})$ então $K^-(\mathcal{A}), K^+(\mathcal{A}), K^b(\mathcal{A}), K^{-,b}(\mathcal{A}), K^{+,b}(\mathcal{A})$ são subcategorias localizáveis e suas localizações são $D^-(\mathcal{A}), D^+(\mathcal{A}), D^b(\mathcal{A}), D^b(\mathcal{A}), D^b(\mathcal{A})$. Tem-se

$$\begin{array}{ccc}
 & D^-(\mathcal{A}) & \\
 \nearrow & & \searrow \\
 D^b(\mathcal{A}) & & D(\mathcal{A}) \\
 \searrow & & \nearrow \\
 & D^+(\mathcal{A}) &
 \end{array}$$

Definição 2.16. Seja K uma categoria triangulada com funtor de translação T , dizemos que um sistema de morfismos S provém de um funtor cohomológico se existir uma categoria abeliana $\mathcal{A}$ e um funtor funtor cohomológico $H : K \rightarrow \mathcal{A}$ que determina S da seguinte forma:

$$S = \{f \in \text{Mor}(K) \mid H^i(f) = H(T^i(f)) \text{ é um isomorfismo } \forall i\}$$

Exemplo 2.10. Se $\mathcal{A}$ é ma categoria abeliana. Os quase-isomorfismos em $K^*(\mathcal{A})$, onde $*$ é $+$, $-$, ou b , formam um sistema que provém do funtor cohomologia $H^* : K^*(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$, que é cohomológico.

Proposição 2.9. Seja K uma categoria triangulada e S um sistema de K que provém de um funtor cohomológico, então tem-se

- (1) S é um sistema multiplicativo.
- (2) $S^{-1}K$ é categoria triangulada e o funtor de localização $K \xrightarrow{q} S^{-1}K$ é um morfismo de categorias trianguladas.

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [W]. Vamos relembrar aqui alguns elementos básicos utilizados na demonstração da segunda sentença da proposição. Assumindo que $S^{-1}K$ existe e definindo um funtor de translação em $S^{-1}K$ a partir do funtor de translação $T : K \rightarrow K$. $\bar{T} : S^{-1}K \rightarrow S^{-1}K$, o funtor de translação, é definido como segue

$$\bar{T}(Z) = T(Z), \forall Z \in \text{Obj}(S^{-1}K) = \text{Obj}(K)$$

$$\bar{T}(fs^{-1}) = \bar{T}\left(\xleftarrow{s} \xrightarrow{f}\right) = T(f)T(s^{-1}) = \xleftarrow{T(s)} \xrightarrow{T(f)} \text{ ou seja}$$

$$\begin{array}{ccccc}
X & \xleftarrow{s} & Z & \xrightarrow{f} & Y \\
& & \downarrow \bar{T} & & \\
T(X) & \xleftarrow{T(s)} & T(Z) & \xrightarrow{T(f)} & T(Y)
\end{array}$$

Como são os triângulos em $S^{-1}K$?

Os triângulos exatos em $S^{-1}K$ são definidos como as imagens, através do funtor de localização, dos triângulos em K . Em seguida consideramos a menor família de triângulos fechada por isomorfismos que contém a imagem dos triângulos de K . Isto é, a cada triângulo em K , digamos

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX,$$

corresponde o seguinte triângulo na categoria localizada

$$\begin{array}{ccccccc}
& X & & Y & & Z & \\
1 \swarrow & & \searrow u & 1 \swarrow & & \searrow v & 1 \swarrow & & \searrow w \\
X & & Y & & Z & & \bar{TX} = TX
\end{array}$$

Definição 2.17. *Sejam K e K' categorias trianguladas. Um funtor $F : K \rightarrow K'$ é um morfismo de categorias trianguladas se F é um funtor aditivo que comuta com as translações e leva triângulos em triângulos. E dizemos que as duas categorias trianguladas, K e K' , são equivalentes, e denotamos $K \simeq K'$, se existe entre eles um morfismo de categorias trianguladas que é uma equivalência de categorias*

Definição 2.18. *Dadas duas álgebras A e B , dizemos que A é derivadamente equivalente a B se $D(A)$ e $D(B)$ são categorias trianguladas equivalentes*

Corolário 2.4. Propriedade Universal: *Seja $F : K \rightarrow L$ um morfismo de categorias trianguladas. Se F leva elementos de S em isomorfismos, então F se fatora de modo único através do funtor de localização $q = q_S$. Em outras palavras, se F é tal que $F(s)$ é isomorfismo, $\forall s \in S$. Consideremos a localização $K \xrightarrow{q} S^{-1}K$, então $\exists ! F'$ tal que $F = F'q$ e F' é morfismo de categorias trianguladas. (Este funtor é denotado por $S^{-1}F$)*

$$\begin{array}{ccc}
K & \xrightarrow{F} & L \\
q \downarrow & \nearrow \exists ! S^{-1}F & \\
S^{-1}K & &
\end{array}$$

Exemplo 2.11. *Seja $\mathcal{A}$ abeliana, então $K^-(\mathcal{A}), K^+(\mathcal{A}), K^b(\mathcal{A})$ são categorias trianguladas com sistemas multiplicativos dados pelos quase-isomorfismos. Neste caso, as imersões plenas de categorias trianguladas*

$$K^b \longrightarrow K^+, \quad K^b \longrightarrow K^-, \quad K^+ \longrightarrow K, \quad K^- \longrightarrow K$$

induzem as seguintes imersões plenas de categorias trianguladas

$$D^b(\mathcal{A}) \longrightarrow D^+(\mathcal{A}), \quad D^b(\mathcal{A}) \longrightarrow D^-(\mathcal{A}), \quad D^+(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{A}), \quad D^-(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{A}).$$

2.4 A categoria $D^+(\mathcal{A})$

Seja $I \subset \mathcal{A}$ a subcategoria plena dos objetos injetivos, $Com^+(I)$ a subcategoria plena de $Com^+(\mathcal{A})$ dos complexos inferiormente limitados com todas as entradas sendo objetos injetivos.

Como $Com^+(I)$ é aditiva, fechada para translações e cones segue que $K^+(I) = \frac{Com^+(I)}{\sim}$ é uma categoria triangulada (subcategoria plena triangulada de $K^+(\mathcal{A})$).

Além disso, considerando S o sistema multiplicativo dado pelos quase-isomorfismos pode-se demonstrar que $S \cap K^+(I)$ é um sistema multiplicativo. Ou seja, a restrição dos quase-isomorfismos de $K(\mathcal{A})$ a $K^+(I)$ forma um sistema multiplicativo.

Denotaremos $S^{-1}K^+(I)$, a categoria obtida pela localização $K^+(I)$ pelo sistema multiplicativo $S \cap K^+(I)$, por $D^+(I)$.

Sabemos que $K^+(I) \xrightarrow{q_I^+} D^+(I)$ é morfismo de categorias trianguladas. Então, assumindo que $D^+(\mathcal{A})$ existe, temos

$$\begin{array}{ccc} K^+(I) & \hookrightarrow & K^+(\mathcal{A}) \\ q_I^+ \downarrow & \searrow F & \downarrow q_{\mathcal{A}}^+ \\ D^+(I) & \xrightarrow[\exists! G]{} & D^+(\mathcal{A}) \end{array}$$

Os resultados que listamos a seguir permitem provar que o funtor de localização, $K^+(I) \xrightarrow{q_I^+} D^+(I)$, é um isomorfismo.

Lema 2.6. *[H] Se $X \in K(\mathcal{A})$ é exato e $Y \in K^+(I)$, então $Hom_{K(\mathcal{A})}(X, Y) = 0$.*

Lema 2.7. $[H] f \in \text{Hom}_{K^+(I)}(X, Y)$ é um *qi*, então f é isomorfismo em $K^+(I)$.

Esboço da demonstração: $X \xrightarrow{f} Y \rightarrow \text{Cone}(f) \xrightarrow{\varphi} X[-1]$

Como f é um *qi*, $\text{Cone}(f)$ é exato e portanto $\varphi \sim 0$ (pelo lema anterior). $\square$

Corolário 2.5. $K^+(I) \xrightarrow{q_I^+} D^+(I)$ é um isomorfismo de categorias trianguladas.

$$\begin{array}{ccc} K^+(I) & \hookrightarrow & K^+(\mathcal{A}) \\ \text{iso} \downarrow & & \downarrow q_{\mathcal{A}}^+ \\ D^+(I) & \xrightarrow[\exists! G]{} & D^+(\mathcal{A}) \end{array}$$

Proposição 2.10. O funtor $D^+(I) \xrightarrow{G} D^+(\mathcal{A})$ é fiel e pleno.

Teorema 2.3. Se $\mathcal{A}$ tem suficientes injetivos então $K^+(I) \simeq D^+(I) \xrightarrow{G} D^+(\mathcal{A})$ é um isomorfismo de categorias trianguladas.

Observação 2.17. Valem os resultados duais.

(1) $K^-(P)$ é subcategoria localizável de $K^-(\mathcal{A})$.

$$K^-(P) \simeq D^-(P).$$

Se $\mathcal{A}$ tem suficientes projetivos, então $K^-(P) \simeq D^-(P) \simeq D^-(\mathcal{A})$.

(2) Se $\mathcal{A}$ tem suficientes injetivos (projetivos) então $D^+(\mathcal{A})$ ($D^-(\mathcal{A})$) existem (embora $D(\mathcal{A})$ possa não existir).

(3) E no caso em que $\text{gl dim } \mathcal{A} < \infty$ temos: $K^b(I) \simeq K^b(P) \simeq D^b(\mathcal{A})$.

Observação 2.18. Sendo $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana, consideremos a categoria derivada de $\mathcal{A}$, $D(\mathcal{A})$. Como já sabemos, $D(\mathcal{A})$ é triangulada e temos o seguinte

(1) *Uma Interpretação de Triângulos:*

Vimos na seção 2.2 que se $0 \rightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \rightarrow 0$ for uma seqüência exata em $\text{Com}(\mathcal{A})$ semi cindida então $\exists w : Z \rightarrow TX$ tal que $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \rightarrow X[-1]$ é um triângulo exato.

- (2) Um fato importante é o seguinte: Toda seqüência exata $0 \rightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \rightarrow 0$ em $\text{Com}(\mathcal{A})$ pode ser completada a um triângulo exato em $D^+(\mathcal{A})$. Entretanto, é claro que este fato não é válido em $K(\mathcal{A})$, uma vez que em $K(\mathcal{A})$ os triângulos estão associados às seqüências semi-cindidas.

Agora em $D^+(\mathcal{A})$ é possível associar um triângulo a cada seqüência exata $0 \rightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \rightarrow 0$ em $\text{Com}(\mathcal{A})$, pois existe um quase isomorfismo entre o $\text{Cone}(u)$ e o complexo Z . Assim podemos conseguir o seguinte triângulo em $D^+(\mathcal{A})$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & X & & Y & & \text{Cone}(u) & \\
 & \swarrow 1 & \searrow u & \swarrow 1 & \searrow v & \swarrow 1 & \searrow w \\
 X & & Y & & Z & & X[-1]
 \end{array}$$

- (3) Em decorrência de (1) e (2) podemos garantir que: Todo triângulo exato em $D^+(\mathcal{A})$ “provém” (a menos de isomorfismo) de uma seqüência exata em $\text{Com}(\mathcal{A})$.

2.4.1 A inclusão $\mathcal{A} \hookrightarrow D^*(\mathcal{A})$.

Definição 2.19. Um complexo concentrado na posição j é um complexo X tal que $X_i = 0, \forall i \neq j$ e $X_j = X \in \text{Obj}\mathcal{A}$.

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow X_j \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

Definição 2.20. Chamaremos de complexo H -concentrado na posição j é um complexo X tal que $H^i(X) = 0, \forall i \neq j$.

Todo complexo concentrado na posição j é um complexo H -concentrado na posição j .

Dada uma categoria abeliana $\mathcal{A}$ podemos definir um funtor $\mathcal{A} \xrightarrow{i} \text{Com}^*(\mathcal{A})$ que associa a cada objeto um complexo concentrado na posição 0. Consideremos $\text{Com}^*(\mathcal{A}) \xrightarrow{\pi} K^*(\mathcal{A})$ o funtor projeção natural definido pelo quociente de homotopias e seja $K^*(\mathcal{A}) \xrightarrow{q^*} D^*(\mathcal{A})$ o funtor de localização pelos quase-isomorfismos. Podemos olhar $\mathcal{A}$ em $D^*(\mathcal{A})$ via o funtor $Q : \mathcal{A} \rightarrow D^*(\mathcal{A})$, definido pela composição $q^* \circ \pi \circ i$, o esquema abaixo ilustra esta composição:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{A} & \xrightarrow{i} & \text{Com}^*(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\pi} & K^*(\mathcal{A}) & \xrightarrow{q^*} & D^*(\mathcal{A}) \\
X & & X^0 & & & & X^0 \\
\downarrow f & \rightsquigarrow & \downarrow f & & \rightsquigarrow & & \downarrow f \\
Y & & Y^0 & & f & & Y^0
\end{array}$$

Como $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \simeq \text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(\pi i X, \pi i Y)$ segue que πi é fiel e pleno.

Proposição 2.11. *O funtor $Q : \mathcal{A} \longrightarrow D^*(\mathcal{A})$, onde $Q = q^* \circ \pi \circ i$, é uma equivalência entre $\mathcal{A}$ e a subcategoria plena de $D^*(\mathcal{A})$ determinada pelos complexos H -concentrados em 0.*

Esboço da demonstração: $\text{Hom}_{K^*(\mathcal{A})}(X^*, Y^*) \xrightleftharpoons[b]{a} \text{Hom}_{D^*(\mathcal{A})}(X^*, Y^*)$

$$a : f^* \rightsquigarrow q_{\mathcal{A}}(f^*), X^* \xleftarrow{1} X^* \xrightarrow{f^*} Y^*$$

$$b : \begin{array}{ccc} \tilde{f} & \xrightarrow{s} & f \\ X & \searrow & Y \end{array} \quad \pi i \left(\overline{H}^0(f) \overline{H}^0(s)^{-1} \right)$$

Demonstra-se que a, b são inversas e portanto Q é fiel e pleno. $\square$

Definição 2.21. $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, Y) = \text{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(X[0], Y[-i]) = \text{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(X, Y[-i])$

A definição acima é motivada pelo seguinte fato. Sabemos que quando i é um inteiro positivo, cada elemento de $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, Y)$ pode ser identificado com uma seqüência exata da forma

$$0 \rightarrow Y \rightarrow K^{-i+1} \rightarrow \dots \rightarrow K^0 \rightarrow X \rightarrow 0,$$

o qual, naturalmente, podemos identificar a um complexo acíclico $\mathcal{K}$

$$\mathcal{K} : \dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow Y \rightarrow K^{-i+1} \rightarrow \dots \rightarrow K^0 \rightarrow X \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

Agora, vamos definir o complexo $\overline{\mathcal{K}}$ associado a $\mathcal{K}$ da seguinte forma:

$$\overline{\mathcal{K}} : \dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow Y \rightarrow K^{-i+1} \rightarrow \dots \rightarrow K^0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

Claramente $\bar{\mathcal{K}}$ é quase-isomorfo a $X[0]$.

Portanto construir a seguinte fração em $D(\mathcal{A})$

$$\begin{array}{ccc} & \bar{\mathcal{K}} & \\ s \swarrow & & \searrow f \\ X[0] & & Y[-i] \end{array}$$

A fração acima representa um morfismo $Y(\mathcal{K}) \in \text{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(X[0], Y[-i])$, como a inclusão $\mathcal{A} \hookrightarrow D^*(\mathcal{A})$ é fiel e plena, obtemos $Y(\mathcal{K}) \in \text{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(X, Y[-i])$

Observação 2.19. Usando o funtor de translação T definido pelo funtor de deslocamento (“shift”) podemos identificar $\text{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(X[-k], Y[-i-k])$ com $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, Y)$ para todo k inteiro. (Para mais detalhes veja capítulo III de [GM]).

Com a identificação $\text{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(X[-k], Y[-i-k]) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, Y)$ tratada acima pode-se definir a composição de morfismos em $D(\mathcal{A})$. Basta procedermos assim, dadas $f \in \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, Y)$ e $g \in \text{Ext}_{\mathcal{A}}^j(Y, Z)$ identificamos f em $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X[0], Y[-i])$ e g em $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^j(Y[0], Z[-j]) \simeq \text{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(Y[-i], Z[-i-j])$ o que permite definir a composição gf .

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, Y) & \times & \text{Ext}_{\mathcal{A}}^j(Y, Z) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{i+j}(X, Z) \\ f & & g & & gf \\ \text{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(X[0], Y[-i]) & & \text{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(Y[0], Z[-j]) & & \\ & & \text{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(Y[-i], Z[-i-j]) & & \end{array}$$

Teorema 2.4. (1) (a) $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, Y) = 0$ se $i < 0$.

(b) $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^0(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$.

(c) Qualquer elemento de $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, Y)$, $i > 0$ é da forma $Y(\mathcal{K})$ para algum complexo acíclico $\mathcal{K}$ e se $Y(\mathcal{K}) \in \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, Y)$, $Z(\mathcal{L}) \in \text{Ext}_{\mathcal{A}}^j(Y, Z)$ temos $Z(\mathcal{M}) = Z(\mathcal{L} \circ \mathcal{K}) = Z(\mathcal{L}) \circ Y(\mathcal{K}) \in \text{Ext}_{\mathcal{A}}^{i+j}(X, Z)$.

Observação 2.20. Se $\mathcal{A} = \text{mod} R$, podemos considerar $\mathcal{A} \hookrightarrow D^b(\mathcal{A})$, e pode-se provar que neste caso as duas definições de $\text{Ext}^i(X, Y)$, para $X, Y \in \mathcal{A}$ coincidem. A demonstração é feita usando o fato que X é quase isomorfo a sua resolução projetiva.

2.5 Funtores Derivados em categorias derivadas

Agora vamos estudar os funtores derivados em categorias derivadas. Estes conceitos permitem estender um funtor exato à esquerda (ou à direita) entre categorias abelianas a um funtor entre as respectivas categorias derivadas. Desta forma alguns dos principais funtores utilizados no estudo das categorias de módulos, tais como $\text{Hom}(-, M)$, $- \otimes M$, admitirão funtores derivados.

2.5.1 Funtores Derivados Clássicos

A noção de funtor derivado em categorias de módulos sobre uma álgebra é o que chamaremos de funtores derivados clássicos.

Sejam A, B álgebras. Dado um funtor aditivo covariante $F : \text{mod}A \rightarrow \text{mod}B$ vamos relembrar a construção dos funtores derivados à esquerda de F . Fazendo as modificações naturais são construídos os funtores derivados à direita.

Dado $M \in \text{mod}A$, consideremos uma resolução projetiva de M

$$\cdots \rightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \rightarrow \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

deletando M e aplicando F obtemos o complexo:

$$\cdots \rightarrow F(P_n) \xrightarrow{F(d_{n-1})} F(P_{n-1}) \rightarrow \cdots \xrightarrow{F(d_1)} F(P_0) \xrightarrow{0} 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

A imagem de M pelo n -ésimo funtor covariante derivado à esquerda de F , $L_n F(M)$, é por definição isomorfa a n -enésima homologia do complexo acima. Dado um morfismo $f : M \rightarrow N$, consideremos

$$\cdots \rightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \rightarrow \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

$$\cdots \rightarrow P'_n \xrightarrow{d'_n} P'_{n-1} \rightarrow \cdots \xrightarrow{d'_1} P'_0 \xrightarrow{\epsilon'} N \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

coberturas projetivas de M e N respectivamente. Seja $\varphi = (\varphi_n)$ um morfismo induzido por f

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \rightarrow & P_n & \rightarrow & \cdots & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \rightarrow & M \\ & \downarrow \varphi_n & & & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_0 & & \downarrow f \\ \cdots \rightarrow & P'_n & \rightarrow & \cdots & \xrightarrow{d'_2} & P'_1 & \xrightarrow{d'_1} & P'_0 & \rightarrow & N \end{array}$$

$L_n F(f)$ é definido pela passagem a n -énésima homologia do seguinte morfismo de complexos

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots \longrightarrow & F(P_n) & \longrightarrow & \dots & \xrightarrow{F(d_2)} & F(P_1) & \xrightarrow{F(d_1)} & F(P_0) & \longrightarrow & 0 \dots \\
 & \downarrow F(\varphi_n) & & & & \downarrow F(\varphi_1) & & \downarrow F(\varphi_0) & & \downarrow 0 \\
 \dots \longrightarrow & F(P'_n) & \longrightarrow & \dots & \xrightarrow{F(d'_2)} & F(P'_1) & \xrightarrow{F(d'_1)} & F(P'_0) & \longrightarrow & 0 \dots
 \end{array}$$

Pode-se mostrar que a n -ésima homologia é única a menos de isomorfismo, assim a definição de $L_n F(f)$ independe da escolha da resolução projetiva.

Quando tomamos $F = M \otimes -$ o funtor derivado $L_n F$ é o funtor $Tor_n(M, -)$. Procedendo de forma similar podemos obter o funtor $Ext^n(-, M)$ como derivado de $Hom(M, -)$. Ressaltamos ainda que usando resoluções injetivas podemos obter $Ext^n(M, -)$ como derivado à direita de $Hom(M, -)$. Para mais detalhes, veja [R].

Com relação aos funtores derivados clássicos é sabido que para qualquer sequência exata curta em A

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

está associada a sequência longa exata associada a LF

$$\dots \longrightarrow L^i F(A) \longrightarrow L^i F(B) \longrightarrow L^i F(C) \longrightarrow L^{i+1} F(A) \longrightarrow \dots$$

De modo similar obtém-se uma sequência longa correspondente a RF

$$\dots \longrightarrow R^i F(A) \longrightarrow R^i F(B) \longrightarrow R^i F(C) \longrightarrow R^{i+1} F(A) \longrightarrow \dots$$

2.5.2 Funtores Derivados

Considerando A e B álgebras, e dado um funtor $F : \text{mod} A \longrightarrow \text{mod} B$, em que condições F induz a construção de um funtor entre a categoria derivada de A e a categoria derivada de B ? O estudo de funtores derivados em categorias derivadas é importante para tratar desta questão. Nesta subseção definiremos funtores derivados em categorias derivadas, verifica-se que este conceito generaliza o de funtores derivados clássicos.

É claro que a maneira mais natural de tentar estender F às categorias derivadas é definir um novo funtor, $\widehat{F}$, a partir de F componente a componente, ou seja $\widehat{F}(X^\bullet) = (F(X^i))_{i \in \mathbb{Z}}$. Para que este processo elementar funcione é necessário que o funtor F satisfaça as condições:

- levar complexos em complexos
- homotopia em homotopia

Em particular, se F é um funtor exato é claro que o referido processo determina um funtor de $K^*(A) \rightarrow K^*(B)$, onde, $*$ pode ser $\emptyset, +, -, b$, que leva quase-isomorfismos em quase-isomorfismos e, pela propriedade universal da localização, existe um funtor $G : D^*(A) \rightarrow D^*(B)$ tal que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} K^*(A) & \xrightarrow{F} & K^*(B) \\ q_A \downarrow & & \downarrow q_B \\ D^*(A) & \xrightarrow[\exists! G]{} & D^*(B) \end{array}$$

Entretanto, alguns dos mais importantes funtores para o estudo das categorias de módulos, tais como $M \otimes -$ e $\text{Hom}_A(M, -)$, não são exatos. Por isso é preciso definir um processo mais elaborado que permita estender uma gama maior de funtores.

Em [W] este assunto é tratado com riqueza de detalhes, mas o tratamento é feito com o conteúdo diluído em diversos capítulos.

Agora vamos definir o conceito de funtor derivado para categorias derivadas.

Definição 2.22. *Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ categorias abelianas, consideremos $q_A : K^*(\mathcal{A}) \rightarrow D^*(\mathcal{A})$, $q_B : K^*(\mathcal{B}) \rightarrow D^*(\mathcal{B})$ os funtores de localização com relação aos quase-isomorfismos e $F : K^*(\mathcal{A}) \rightarrow K^*(\mathcal{B})$ um morfismo de categorias trianguladas, sendo que $*$ pode ser $\emptyset, +, -, b$. Um funtor derivado à direita de F é um par (RF, ϵ_F) , onde $RF : D^*(\mathcal{A}) \rightarrow D^*(\mathcal{B})$ é um morfismo de categorias trianguladas e ϵ_F é uma transformação natural de $q_B F$ para $(RF)q_A$ que satisfaz a seguinte condição:*

Dado um morfismo de categorias trianguladas $G : D^(\mathcal{A}) \rightarrow D^*(\mathcal{B})$ e uma transformação natural $\epsilon_G : q_B F \rightarrow Gq_A$, então existe uma única transformação natural η de RF em G tal que $\epsilon_G = (\eta \cdot q_A) \circ \epsilon_F$.*

Observação 2.21. *Note que as condições da definição acima não chegam a exigir que o diagrama abaixo comute. Trata-se de uma condição mais fraca que a comutatividade.*

$$\begin{array}{ccc} K^*(\mathcal{A}) & \xrightarrow{F} & K^*(\mathcal{B}) \\ q_A \downarrow & & \downarrow q_B \\ D^*(\mathcal{A}) & \xrightarrow{RF} & D^*(\mathcal{B}) \end{array}$$

Agora que a definição formal do conceito está feita vamos tratar de uma construção mais prática dos funtores derivados. A idéia básica usada na construção dos funtores derivados RF e LF é aplicar F componente a componente, mas não em qualquer complexo. Seleccionam-se alguns representantes especiais nas classes de equivalência de complexos quase-isomorfos. As próximas definições expressam com mais precisão estas idéias.

Definição 2.23. *Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ categorias abelianas e $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ um funtor covariante aditivo exato à esquerda (ou à direita). Dizemos que uma classe de objetos $\mathcal{R}$ de $\mathcal{A}$ é adaptada ao funtor se as seguintes condições são satisfeitas*

- *F preserva somas diretas finitas de objetos de $\mathcal{R}$*
- *No caso em que F é exato à esquerda: F preserva complexos acíclicos de $\text{Com}^+(\mathcal{R})$*
No caso em que F é exato à direita: F preserva complexos acíclicos de $\text{Com}^-(\mathcal{R})$
- *No caso em que F é exato à esquerda: Para todo objeto X de $\mathcal{A}$, existe $Y \in \mathcal{R}$ e um monomorfismo $X \hookrightarrow Y$*
No caso em que F é exato à direita: Para todo objeto X de $\mathcal{A}$, existe $Y \in \mathcal{R}$ e um epimorfismo $Y \twoheadrightarrow X$

Observação 2.22. *Se F é um funtor exato, então qualquer classe de objetos $\mathcal{R}$ que satisfaz uma das condições abaixo é adaptada a F*

- *Para todo objeto X de $\mathcal{A}$, existe $Y \in \mathcal{R}$ e um monomorfismo $X \hookrightarrow Y$*
- *Para todo objeto X de $\mathcal{A}$, existe $Y \in \mathcal{R}$ e um epimorfismo $Y \twoheadrightarrow X$*

Observação 2.23. *Supondo que A é uma álgebra de Artin sabemos que a categoria dos A -módulos tem suficientes projetivos e suficientes injetivos. Neste caso temos:*

- (1) *a classe de objetos injetivos é adaptada a qualquer funtor covariante aditivo exato à esquerda que preserva soma diretas finitas de injetivos;*
- (2) *a classe dos objetos projetivos é adaptada a qualquer funtor covariante aditivo exato à direita que preserva soma diretas finitas de projetivos.*

Proposição 2.12. *[GM] Seja $\mathcal{R}$ uma classe de objetos adaptada a um funtor exato à esquerda $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, e denotemos por $S_{\mathcal{R}}$ a classe dos quase-isomorfismos em $K^+(\mathcal{R})$. Então $S_{\mathcal{R}}$ é uma classe de morfismos localizante em $K^+(\mathcal{R})$, além disso a localização de $K^+(\mathcal{R})$ por $S_{\mathcal{R}}$ é derivadamente equivalente a $D^+(A)$, isto é, o funtor canônico*

$S_{\mathcal{R}}^{-1}K^+(\mathcal{R}) \longrightarrow D^+(A)$ é uma equivalência de categorias. (o resultado análogo vale para funtores exatos à direita)

A demonstração da proposição é feita mostrando que a inclusão natural $i : K^+(\mathcal{R}) \longrightarrow K^+(A)$ é um morfismo de categorias trianguladas. Portanto, induz um morfismo de categorias trianguladas $G : S^{-1}K^+(\mathcal{R}) \longrightarrow D^+(A)$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} K^+(\mathcal{R}) & \xrightarrow{i} & K^*(A) \\ q_{K^+(\mathcal{R})} \downarrow & & \downarrow q_B \\ S^{-1}K^+(\mathcal{R}) & \xrightarrow[G]{} & D^*(A) \end{array}$$

onde $*$ pode ser $+$, $-$ ou b .

Finaliza-se a demonstração mostrando que G é uma equivalência.

2.5.3 Construção de alguns funtores derivados

A definição de funtores derivados não deixa claro como podemos construí-los. Estamos interessados em construir o funtor derivado associado a um funtor exato à esquerda $F : \text{mod} A \longrightarrow \text{mod} B$ no caso em que A e B são álgebras de Artin, e A de dimensão global finita.

Seja $\mathcal{R}$ uma classe de objetos adaptada a um funtor exato à esquerda F . Podemos definir um funtor $F' : K^+(\mathcal{R}) \longrightarrow K^*(B)$, onde $*$ pode ser $+$, $-$ ou b , componente a componente. Ou seja, $F'(X^*)^i = F(X^i) \quad \forall X^* \in K^+(\mathcal{R})$. Pois, F restrito a $\mathcal{R}$, leva acíclicos em acíclicos e preserva quase-isomorfismos de $K^+(\mathcal{R})$. Pela propriedade universal das localizações, existe $G' : S^{-1}K^+(\mathcal{R}) \longrightarrow D^+(B)$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} K^+(\mathcal{R}) & \xrightarrow{F'} & K^*(B) \\ q_{K^+(\mathcal{R})} \downarrow & & \downarrow q_B \\ S^{-1}K^+(\mathcal{R}) & \xrightarrow[G']{} & D^*(B) \end{array}$$

Escolhemos uma equivalência de categorias triângulada, a qual denotaremos por ϕ , que é quase inversa do funtor $G : K^+(\mathcal{R}) \longrightarrow K(A)$ induzido pela imersão natural $i : K^+(\mathcal{R}) \longrightarrow K^+(A)$. Então, pode-se mostrar que $F' \circ \phi : D(A) \longrightarrow D(B)$ é um funtor derivado associado a F .

É interessante notar que esta construção passa por certos fatos, tais como a independência da escolha de ϕ , que dificulta a definição formal de funtores derivados via este

processo de composições. Por isso que a definição do funtor derivado foi feita via uma propriedade universal.

Teorema 2.5. *[Hd] Sejam F um funtor exato à esquerda e $\mathcal{R}$ uma classe de objetos adaptada a F . Então o funtor derivado RF existe, é único e pode ser definido de acordo com a construção acima.*

Relacionando os conceitos de funtores derivados, asas em categorias trianguladas e as propriedades básicas de extensões por um ponto montamos próximo exemplo ilustra uma forma de determinar algumas subcategorias trianguladas contravariantemente finita na categoria derivada da extensão por um ponto de certas álgebras de Artin.

Exemplo 2.12. *Seja B uma álgebra de dimensão finita sobre o corpo k . Seja D uma álgebra de divisão, de dimensão finita sobre o corpo k , isto é D é uma extensão algébrica de K . Seja M um $D - B$ -bimódulo finitamente gerado.*

Assim podemos formar a álgebra $A = \begin{pmatrix} D & 0 \\ M & B \end{pmatrix}$. Escrevamos $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $f = 1 - e$, seja J o ideal $\begin{pmatrix} D & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix} \simeq Ae$, assim $B = \frac{A}{J}$. Então temos que o funtor inclusão $D(B) \rightarrow D(A)$ tem adjunto à direita dado por $RHom_A(B_A, -)$, o funtor derivado à direita de $Hom_A(B_A, -)$, e adjunto à esquerda é $-\otimes_A^L B$, o funtor derivado à esquerda de $-\otimes_A B$ (na seção 2.5 estudamos o conceito de funtores derivados em categorias derivadas). Em particular $D(B)$ pode ser vista como uma asa de $D(A)$, no caso da dimensão global de A ser finita. Segue que a inclusão de $D(B)$ é uma subcategoria contravariantemente finita.

2.6 Alguns resultados de Happel em categorias trianguladas

Todos os resultados desta seção são apresentados em [H]. Gostaríamos de ressaltar ainda que as noções de morfismo irredutível e quase cindidos em categorias trianguladas são as mesmas de categorias de módulos, detalhes a este respeito também podem ser encontrados em [H].

Lema 2.8. *Seja C uma categoria triangulada, temos:*

$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$, é um triângulo, se e somente se

$Y \xrightarrow{\varphi} Z \xrightarrow{w} TX \xrightarrow{-Tu} TY$ é um triângulo.

Lema 2.9. *Seja C uma categoria triangulada, temos:*

$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} TX$, é um triângulo, se e somente se u é um isomorfismo.

Lema 2.10. *Seja C uma categoria triangulada. Dado um triângulo*

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX,$$

as seguintes condições são equivalentes.

- (1) $w = 0$
- (2) u é seção.
- (3) v é retração.

Lema 2.11. *Seja C uma categoria triangulada. Dado um triângulo $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$, as seguintes condições são equivalentes.*

- Se $f : W \rightarrow Z$ não é retração, então existe $f' : W \rightarrow Y$ tal que $vf' = f$.
- Se $f : W \rightarrow Z$ não é retração, então $wf = 0$.
- Se $X \xrightarrow{h} W$ não é seção, então existe $f' : Y \rightarrow W$ tal que $f = f'u$

Observação 2.24. *A categoria $D(A)$ é um exemplo de uma categoria triangulada, e no caso em que A é uma k -álgebra de dimensão global finita $D(A)$ é derivadamente equivalente a $K(P_A)$ (e também a $K(I_A)$). (Nestes casos se pode provar que a localização é uma equivalência de categorias que leva triângulos em triângulos).*

Definição 2.24. *Seja C uma categoria triangulada tal que $\text{Hom}_C(X, Y)$ é um k -espaço vetorial de dimensão finita, para todos os objetos de C , e tal que o anel de endomorfismos de todo indecomponível é local. Assim C é uma categoria de Krull – Schmidt. Nestas condições dizemos que um triângulo*

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

em C é triângulo de Auslander-Reiten se satisfizer as seguintes condições:

- *AR1* X e Z são indecomponíveis
- *AR2* $w \neq 0$
- *AR3* todo morfismo de U em Z que não é epi que cinde se fatora pela v

Observação 2.25. *Em foi demonstrado que a terceira condição da definição acima é equivalente às seguintes formulações:*

- AR3'* $\forall X \xrightarrow{f} U$ que não é mono que cinde se fatora pela u
- AR3''* $\forall U \xrightarrow{f} Z$ que não é epi que cinde, tem-se $wf = 0$

Capítulo 3

Triângulos de Auslander-Reiten e Extensões por um ponto

Neste capítulo vamos apresentar dois resultados que expressam alguns triângulos de Auslander-Reiten na categoria derivada de $R = B[M]$, a extensão por um ponto da álgebra B . Estudamos os triângulos de Auslander-Reiten que cujo primeiro vértice pode ser identificado com um objeto de $D^b(B)$, e os triângulos cujo terceiro vértice provém de $D^b(B)$. No primeiro caso não conseguimos obter resultados que caracterizam completamente os morfismos que une os vértices dos triângulos de Auslander Reiten. Mas, no caso dos triângulos que terminam em complexos provindos de $D^b(B)$, obtivemos uma descrição bastante boa do triângulo como um todo, tanto os vértices e quanto os morfismos que os une, ficaram bem determinados.

Felizmente, em ambos os casos fica bem claro um procedimento que permite o cálculo dos triângulos de Auslander-Reiten. Desta maneira podemos usar estes resultados para construir exemplos bastante interessantes.

Gostaríamos de ressaltar que em [M] foi feito um estudo das álgebras de matrizes da forma

$$\Lambda = \begin{pmatrix} K & {}_K M_A \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

Sendo K e A álgebras de Artin, e M um K - A bimódulo, foram caracterizados todos os morfismos quase cindidos iniciados e terminados em módulos da forma $(0, N, 0)$, onde N é um A -módulo indecomponível.

O primeiro teorema descreve as seqüências de Auslander-Reiten terminadas em módulos

da forma $(0, N, 0)$, descrevendo em detalhes cada termo da seqüência. O segundo teorema caracteriza as seqüências de Auslander-Reiten de $\text{mod} A$ cuja imersão em $\text{mod} \Lambda$ são seqüências de Auslander-Reiten também. Foi demonstrado que isto ocorre quando $\text{Hom}_A(M, N) = 0$ e N não é injetivo.

Em seguida foram estudados os morfismos quase cindidos iniciados em Λ -módulos da forma $(0, N, 0)$, onde N é injetivo em $\text{mod} A$, foram estudados dois casos, o caso em que $\text{Hom}_A(M, N) = 0$ e o módulo $(0, N, 0)$ é injetivo (neste caso a imersão natural do morfismo quase cindido de $\text{mod} A$ iniciado em N passa diretamente a um morfismo quase cindido de $\text{mod} \Lambda$); e o caso em $\text{Hom}_A(M, N) \neq 0$, N injetivo.

Para completar, foi estudado o caso em que N não é injetivo e $\text{Hom}_A(M, N) \neq 0$. Foram descritas todas as seqüências de Auslander-Reiten de $\text{mod} \Lambda$ iniciadas em módulos da forma $(0, N, 0)$, onde N não é injetivo e $\text{Hom}_A(M, N) \neq 0$.

Neste capítulo nosso objetivo é tratar da passagem dos resultados mencionados acima para categorias derivadas. Tivemos que fazer diversas restrições sobre o anel de matrizes, supondo desde início k um corpo algebricamente fechado, B uma k -álgebra de dimensão finita e de dimensão global também finita. Neste ambiente conseguimos descrever os triângulos de Auslander-Reiten da extensão por um ponto, iniciados e terminados em complexos provindos da álgebra que foi estendida.

3.1 Extensões por um ponto e Categorias derivadas

Consideremos R a k -álgebra de matrizes apresentada abaixo.

$$R = B[M] = \begin{pmatrix} k & {}_k M_B \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Sabemos que há uma identificação dos R -módulos com as triplas. Vamos mostrar que podemos fazer um processo análogo no estudo da categoria derivada de R .

3.1.1 Funtores exatos e categorias trianguladas

No capítulo anterior vimos que a categoria dos complexos módulo homotopia de qualquer categoria abeliana é uma categoria triangulada. Mais precisamente vimos que dada uma categoria abeliana $\mathcal{A}$ podemos utilizar o Cone para dar a $K(\mathcal{A})$ uma estrutura triangulada.

Dadas duas categorias abelianas $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ vamos denotar simplesmente por T os funtores de translações de $K(\mathcal{A})$ e de $K(\mathcal{B})$. Nosso objetivo nesta subseção é estudar as equivalências de categorias abelianas que comuta com o funtor de translação T .

Seja $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ um funtor exato entre categorias abelianas. Vamos denotar por F também o funtor natural, de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$, induzido por F . Ou seja, dado um complexo

$$X^\bullet = \left\{ \dots \rightarrow X_n \xrightarrow{\partial_n} X_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \rightarrow X_j \rightarrow \dots \xrightarrow{\partial_1} X_0 \rightarrow \dots \right.$$

temos:

$$FX^\bullet = \dots \rightarrow FX_n \xrightarrow{F\partial_n} FX_{n-1} \xrightarrow{F\partial_{n-1}} \dots \rightarrow FX_j \rightarrow \dots \xrightarrow{F\partial_1} FX_0 \rightarrow \dots$$

E dado um morfismo de complexos, digamos $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$

$$\begin{array}{ccccccc} X^\bullet & \dots \rightarrow & X_n & \xrightarrow{\partial_n} & X_{n-1} & \dots & \xrightarrow{\partial_1} X_0 \rightarrow \\ \downarrow f^\bullet & = & \downarrow f^n & & \downarrow f^{n-1} & & \downarrow f^n \\ Y^\bullet & \dots \rightarrow & Y_n & \xrightarrow{\beta_n} & Y_{n-1} & \dots & \xrightarrow{\beta_1} Y_0 \rightarrow \end{array}$$

Definimos $F(f)$ componente a componente, isto é,

$$\begin{array}{ccccccc} F(X^\bullet) & \dots \rightarrow & F(X_n) & \xrightarrow{F(\partial_n)} & F(X_{n-1}) & \dots & \xrightarrow{F(\partial_1)} F(X_0) \rightarrow \\ \downarrow F(f^\bullet) & = & \downarrow F(f^n) & & \downarrow F(f^{n-1}) & & \downarrow F(f^0) \\ F(Y^\bullet) & \dots \rightarrow & F(Y_n) & \xrightarrow{F(\beta_n)} & F(Y_{n-1}) & \dots & \xrightarrow{F(\beta_1)} F(Y_0) \rightarrow \end{array}$$

Observação 3.1. *Através de uma verificação direta pode-se mostrar que qualquer funtor aditivo entre categorias abelianas preserva homotopia.*

Proposição 3.1. *Seja $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ um funtor exato entre categorias abelianas. Se F comuta com o funtor de translação T , então as seguintes condições são satisfeitas:*

- (1) F preserva triângulos
- (2) F preserva Cones
- (3) F preserva quase isomorfismos

Demonstração. (1) Vimos na Seção 2.2 que na categoria dos complexos módulos homotopia as seqüência exatas semi-cindidas de complexos estão em correspondência biunívoca

com os triângulos. Como F é um funtor exato, segue que F preserva seqüências exatas módulos, segue que F preserva seqüência exatas semi-cindidas. Conseqüentemente preserva triângulos.

Para mostrarmos (2) vamos estudar um pouco mais o triângulo obtido via F . Dado um triângulo

$$A^\bullet \xrightarrow{u} B^\bullet \xrightarrow{v} \text{Cone}(u) \xrightarrow{w} TA^\bullet$$

Vamos mostrar que o triângulo abaixo

$$FA^\bullet \xrightarrow{F(u)} FB^\bullet \xrightarrow{F(v)} F\text{Cone}(u) \xrightarrow{F(w)} FTA^\bullet$$

é isomorfo ao triângulo obtido pela aplicação do axioma $TR1$, ao morfismo $F(u)$:

$$FA^\bullet \xrightarrow{F(u)} FB^\bullet \longrightarrow \text{Cone}(F(u)) \longrightarrow TFA^\bullet$$

Como F comuta com T , ou seja $FTA^\bullet = TFA^\bullet$, podemos construir o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} FA^\bullet & \xrightarrow{F(u)} & FB^\bullet & \longrightarrow & \text{Cone}(F(u)) & \longrightarrow & TFA^\bullet \\ 1 \downarrow & \circlearrowleft & 1 \downarrow & & & & T(1) \downarrow \\ FA^\bullet & \xrightarrow{F(u)} & FB^\bullet & \xrightarrow{F(v)} & F(\text{Cone}(u)) & \xrightarrow{F(w)} & FTA^\bullet \end{array}$$

Pelo axioma $TR3$ segue que existe $h : \text{Cone}(F(u)) \longrightarrow F\text{Cone}(u)$. Além disso, como os dois morfismos do diagrama acima são isomorfismos segue que h é um isomorfismo, veja Observação 2.2. Logo, $T\text{Cone}(u) \cong \text{Cone}(T(u))$, portanto, a afirmação (2) é verdadeira.

Para mostrarmos (3) tomemos $u : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ um quase isomorfismo. Pela Observação 2.7 temos que $\text{Cone}(u)$ é exato, como o funtor F é exato segue que $F\text{Cone}(u)$ é um complexo exato. Pelo item anterior temos que $F\text{Cone}(u) \cong \text{Cone}(T(u))$, portanto $\text{Cone}(T(u))$ é exato. Aplicando novamente a Observação 2.7 segue que $T(u)$ é quase isomorfismo. $\square$

Observação 3.2. Se $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ for uma equivalência de categorias abelianas, então F é exato.

3.1.2 Complexos de triplas e Extensões por um ponto

Agora definiremos um funtor que permite a identificação dos R -módulos com as triplas. Uma vez que este funtor é exato, seu derivado coincide com ele mesmo, assim ele se estende

naturalmente a um funtor de categorias derivadas. Para isto é preciso definir o funtor que associa complexos de R a complexos de triplas.

Seja $\text{rep}({}_k M_B)$ a categorias das triplas, ou seja, a categoria determinada da seguinte forma:

Os objetos de $\text{rep}({}_k M_B)$ são da forma: $(X'_k, X''_B, \gamma : X'_k \otimes M \rightarrow X''_B)$

Os morfismos de $\text{rep}({}_k M_B)$: Um morfismo de (X'_k, X''_B, γ) em (Y'_k, Y''_B, ϕ) é dado por um par (f', f'') onde $f' \in \text{Hom}_k(X'_k, Y'_k)$ e $f'' \in \text{Hom}_B(X''_B, Y''_B)$ tais que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} X'_k \otimes_k M & \xrightarrow{f' \otimes 1} & Y'_k \otimes_k M \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \phi \\ X''_B & \xrightarrow{f''} & Y''_B \end{array}$$

Sabendo que $1 = e_B + e_k$, onde $e_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $e_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Definimos:

$$F : \text{mod} R \rightarrow \text{rep}({}_k M_B)$$

sobre os objetos:

$X_R \rightarrow (X e_k, X e_B, \gamma)$, sendo γ definida da seguinte forma:

$$\gamma : X e_k \otimes M \rightarrow X_B$$

$$x' \otimes m \rightarrow x' \begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e_B$$

sobre os morfismos:

dada $f : X_R \rightarrow Y_R \in \text{Hom}_R(X_R, Y_R)$

definimos $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$, sendo $F(f) = (f', f'')$

Onde $f' : X e_k \rightarrow Y e_k$ associa cada $x e_k$ ao elemento $f'(x e_k) = f(x e_k) e_k$

$f'' : X e_B \rightarrow Y e_B$ associa cada elemento $x e_B$ ao elemento $f''(x e_B) = f(x e_B) e_B$

O funtor F definido acima é uma equivalência de categorias que permite a identificação dos R -módulos com as triplas, veja [ARS]. Considerando o funtor natural induzido por F na categoria dos complexos sobre R e os resultados tratados na subseção anterior podemos segue que o funtor F permite uma identificação de $\text{Com}(R)$ com $\text{repr}({}_k M_B)$.

Corolário 3.1. *O funtor $F : \text{mod} R \rightarrow \text{rep}({}_k M_B)$ é uma equivalência de categorias*

triânguladas.

Demonstração. Segue direto da Proposição 3.1 □

Observação 3.3. O funtor $\text{Hom}(M, -) : \text{Com}(k) \rightarrow \text{Com}(B)$ é exato à esquerda. Por isso sua extensão a um funtor de categorias derivadas é dado pelo seu derivado à direita $R\text{Hom}(M, -) : D^b(k) \rightarrow D^b(B)$.

Desde que M é um k -módulo livre, podemos interpretar o funtor $- \otimes M$ como um funtor de $D^b(k) \rightarrow D^b(B)$, que tem como adjunto à direita o funtor $R\text{Hom}(M, -) : D^b(B) \rightarrow D^b(k)$ (veja seção 2.5).

Teorema 3.1. Os objetos em $\text{Com}(B[M])$ são dados por triplas (V, X, f) , com $V \in \text{Com}(k)$, $X \in \text{Com}(B)$ e $f \in \text{Hom}_{C(B)}(V \otimes M, X)$. Um morfismo $h : (V, X, f) \rightarrow (W, Y, g)$ é dado por um par $(h_0, h_1) \in \text{Hom}_{\text{Com}(k)}(V, W) \times \text{Hom}_{\text{Com}(B)}(X, Y)$ tal que $(1 \otimes h_1)f = gh_0 \in \text{Com}(B)$.

Observação 3.4. Algumas vezes é conveniente representar a componente estrutural $f \in \text{Hom}_B(V \otimes M, X)$ por sua adjunta $f_* \in \text{Hom}_{C(k)}(V, \text{Hom}_A(M, X))$

Observação 3.5. Sempre que é dado um morfismo de complexos de triplas, digamos:

$f^\bullet = (f^1, f^2) : (V^\bullet, X^\bullet, \gamma^\bullet) \rightarrow (L^\bullet, Y^\bullet, \Psi^\bullet)$, temos os seguintes diagramas comutativos

$$\begin{array}{ccccc} V^n \otimes M & \xrightarrow{\gamma^n} & X_n & V^n \otimes M & \xrightarrow{\gamma^n} & X^n & L^n \otimes M & \xrightarrow{\Psi} & Y^n \\ \downarrow f_n^1 \otimes 1 & & \downarrow f_n^2 & \downarrow \partial \otimes 1 & & \downarrow d & \downarrow d \otimes 1 & & \downarrow d \\ L^n \otimes M & \xrightarrow{\Psi_n} & Y_n & V^{n+1} \otimes M & \xrightarrow{\gamma^{n+1}} & X^{n+1} & L^{n+1} \otimes M & \xrightarrow{\Psi} & Y^{n+1} \end{array}$$

$$\text{Cone}(f^1) = \dots \rightarrow V^{n-1} \oplus L^n \xrightarrow{\begin{pmatrix} \partial_{n-1} & f_n^1 \\ 0 & d_{n-2} \end{pmatrix}} V^n \oplus L^{n+1} \rightarrow \dots$$

$$\text{Cone}(f^2) = \dots \rightarrow X^{n-1} \oplus Y^n \xrightarrow{\begin{pmatrix} \partial_{n-1} & f_n^2 \\ 0 & d_{n-2} \end{pmatrix}} X^n \oplus Y^{n+1} \rightarrow \dots$$

$\text{Cone}(f^1, f^2)$ é o complexo com entradas: $(V^{n-1} \oplus L^n, Y^{n-1} \oplus X^n, \begin{pmatrix} \gamma_n \\ \Psi_n \end{pmatrix})$.

cujos diferenciais são $((\begin{pmatrix} \partial_{n-1} & -f_n^1 \\ 0 & d_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_{n-1} & -f_n^2 \\ 0 & d_n \end{pmatrix}))$.

Logo, $\text{Cone}(f)$, está dado pelos cones das componentes.

Agora vamos aproveitar os resultados acima para mostrarmos a passagem de alguns triângulos terminados em complexos de $D^b(B)$ a triângulos de $D^b(R)$

Proposição 3.2. *Se $X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet \xrightarrow{g} Z^\bullet \xrightarrow{w} TX^\bullet$ é um triângulo em $D^b(B)$, então*

$$(X^\bullet \otimes M, X^\bullet, 1) \xrightarrow{(1,f)} (X^\bullet \otimes M, Y^\bullet, |f|) \xrightarrow{(0,g)} (0, Z^\bullet, 0) \xrightarrow{(0,w)} T(X^\bullet \otimes M, X^\bullet, 1),$$

onde $|f| = (- \otimes M)(f)$ e T é o funtor de deslocamento (“shift”), é um triângulo em $D^b(R)$.

Demonstração. Primeiramente, notemos que $X^\bullet$ sendo um complexo, então $(X^\bullet \otimes M, X^\bullet, 1)$ é um complexo de triplas. E que se $X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet$ é um morfismo de complexos, então $(X^\bullet \otimes M, Y^\bullet, |f|)$ é um complexo de triplas, além disso

$(1, f) : (X^\bullet \otimes M, X^\bullet, 1) \rightarrow (X^\bullet \otimes M, Y^\bullet, |f|)$ é um morfismo de triplas.

Pela observação precedente, temos: $\text{cone}(1, f) \cong ((\text{cone}(1), \text{cone}(f)))$. Agora, como $\text{cone}(1)$ é um complexo exato, portanto quase isomorfo ao complexo nulo.

Logo $\text{cone}(1, f) \cong (0, \text{cone}(f)) \cong (0, Z^\bullet, 0)$. O que demonstra a proposição. □

A seguir vamos mostrar que:

Teorema 3.2. *Se $X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet \xrightarrow{g} Z^\bullet \xrightarrow{w} TX^\bullet$ é um triângulo de Auslander-Reiten em $D^b(B)$, então*

$$(X^\bullet \otimes M, X^\bullet, 1) \xrightarrow{(1,f)} (X^\bullet \otimes M, Y^\bullet, |f|) \xrightarrow{(0,g)} (0, Z^\bullet, 0) \xrightarrow{(0,w)} T(X^\bullet \otimes M, X^\bullet, 1),$$

onde $|f| = (- \otimes M)(f)$. é um triângulo de Auslander-Reiten em $D^b(R)$.

Demonstração. Notemos que $X^\bullet$ indecomponível $\implies (X^\bullet \otimes M, X^\bullet, 1)$ é indecomponível. Pois, $(a, b) : (X^\bullet \otimes M, X^\bullet, 1) \rightarrow (X^\bullet \otimes M, X^\bullet, 1)$ é um homomorfismo de triplas $\iff a \otimes 1 = b$.

Portanto, se a é idempotente implica b é idempotente. Desta maneira (a, b) idempotente $\iff a \otimes 1$ e b são idempotentes. Logo $X^\bullet$ decomponível implica $(X^\bullet \otimes M, X^\bullet, 1)$ decomponível.

Notemos também que se $(X^\bullet \otimes M, X^\bullet, 1)$ for decomponível $X^\bullet$ seria decomponível, uma vez que $(X^\bullet \otimes M, X^\bullet, 1)$ teria que admitir uma decomposição da forma

$$(X^\bullet \otimes M, X^\bullet, 1) = (X_1^\bullet \otimes M \oplus X_2^\bullet \otimes M, X_1^\bullet \oplus X_2^\bullet, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

donde segue que $X \cong X_1 \oplus X_2$.

Agora se $(a, b) : (X^\bullet \otimes M, X^\bullet, 1) \longrightarrow (V^\bullet, L^\bullet, t)$ um morfismo que não é um monomorfismo que cinde, a não é um mono que cinde, e portanto, a se fatora pela f , $a = sf$. Segue que $(a, b) = (f, 1)(s, b)$.

Assim obtivemos a fatoração num dos vértices do triângulo. A fatoração no outro lado segue de 2.11. $\square$

Agora dispondo do resultado anterior podemos transladar duas vezes o triângulo de Auslander-Reiten obtido em $D^b(R)$ iniciado em um indecomponível de $D^b(B)$ e podemos analisar o que dispomos. Dado um triângulo de Auslander-Reiten em $D^b(B)$

$$X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet \xrightarrow{g} Z^\bullet \xrightarrow{w} X^\bullet[1]$$

pelo teorema acima, temos o seguinte triângulo de Auslander-Reiten em $D^b(R)$

$$(X^\bullet \otimes M, X^\bullet, 1) \xrightarrow{(1,f)} (X^\bullet \otimes M, Y^\bullet, |f|) \xrightarrow{(0,g)} (0, Z^\bullet, 0) \xrightarrow{(0,w)} (X^\bullet \otimes M, X^\bullet, 1)[1]$$

Se $(X^\bullet \otimes M, Y^\bullet, |f|)$ for indecomponível, transladando duas vezes o triângulo acima, obtemos:

$$(0, Z^\bullet, 0) \xrightarrow{(0,w)} (X^\bullet \otimes M, X^\bullet, 1)[1] \xrightarrow{-(1,f)[-1]} (X^\bullet \otimes M, Y^\bullet, |f|)[1] \xrightarrow{(0,-g)[-1]} (0, Z^\bullet, 0)[1]$$

Podemos perguntar em que condições o triângulo acima é de Auslander-Reiten. É claro que este último triângulo tem o primeiro e o terceiro vértices indecomponíveis, e um de seus morfismos é irredutível. Portanto, será um triângulo de Auslander-Reiten apenas sob certas condições. De qualquer forma ainda não conseguimos demonstrar que é um triângulo de Auslander-Reiten.

3.2 Alguns triângulos de Auslander-Reiten

Tanto no livro [H] sobre categorias derivadas, quanto no artigo [ASZ] que estuda “triângulos de Auslander Reiten em subcategorias trianguladas”, é usada a mesma estratégia para mostrar a existência de triângulos de Auslander-Reiten em categorias derivadas de uma álgebra de dimensão finita e subcategorias trianguladas de Krull-Schmidt, respectivamente. A idéia se baseia nos seguintes três fatos:

- Determina-se uma equivalência de categorias trianguladas $\Psi : C \rightarrow C$ para a qual existe uma transformação natural invertível $\epsilon_{XY} : D\text{Hom}_C(X, Y) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_C(Y, \Psi X)$, onde D indica a dualidade com relação ao corpo k .
- Dado um indecomponível X , usando que $\text{End}_C X$ é local, determina-se uma forma bilinear $\phi : \text{End}_C X \rightarrow k$ tal que $\phi(1_X) \neq 0$ e que se anula sobre o radical de $\text{End}_C X$.
- Para completar a construção, toma-se $f = \epsilon_{XX}(\phi) \in \text{Hom}_C(X, \Psi X)$ e, usando o axioma $TR1$ se obtém um triângulo iniciado em X . Após rotacioná-lo duas vezes obtém-se um triângulo que é possível mostrar que é de Auslander-Reiten.

Vamos usar esta mesma estratégia para construir os triângulos de Auslander-Reiten iniciados com vértices em $D^b(B)$

Sabemos que o funtor de Nakayama é uma equivalência entre as categorias dos módulos projetivos e os injetivos. Por outro lado sabemos que existe uma equivalência de categorias trianguladas entre $D^b(A)$, $K^b(P_A)$ e $K^b(I_A)$, sempre que A tenha dimensão global finita. Assim, no caso da álgebra ter dimensão global finita podemos identificar os objetos de $D^b(A)$ com complexos de projetivos ou de injetivos. Em nosso caso estamos considerando $R = B[M]$. Como pode ser visto no livro de Auslander-Reiten-Smalø, se a dimensão global de B for finita, a dimensão global de R é finita. Consideremos a extensão natural do funtor de Nakayama $\nu = D\text{Hom}_R(-, R) : K^b(P_R) \rightarrow K^b(I_R)$, isto é:

A cada complexo $(X^\bullet, \partial)$, associamos o complexo

$$\nu X^\bullet = \left\{ \dots \rightarrow \nu X_n \xrightarrow{\nu \partial_n} \nu X_{n-1} \xrightarrow{\nu \partial_{n-1}} \dots \rightarrow \nu X_j \rightarrow \dots \xrightarrow{\nu \partial_1} \nu X_0 \rightarrow \dots \right\}$$

Denotemos por $\ell : K^b(I_R) \rightarrow K^b(P_R)$ a equivalência triangulada natural, e por F a restrição do funtor $F : \text{mod } R \rightarrow \text{rep}({}_A M_B)$ definido na seção 3.1.

Definimos $\wp = F \circ \ell \circ \nu : K^b(P_R) \rightarrow K^b(P_{\text{rep}({}_B M_k)})$

Usando o fato de F e ν serem equivalências trianguladas existe $\widehat{\nu}$ de modo que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} P_{B[M]} & \xrightarrow{\nu} & I_{B[M]} \\ \downarrow F & \circlearrowleft & \downarrow F \\ P_{\text{rep}({}_B M_k)} & \xrightarrow{\widehat{\nu}} & I_{\text{rep}({}_B M_k)} \end{array}$$

Permanecendo com a identificação de $D^b(A)$ com $K^b(P_A)$ o funtor $\widehat{\nu}$ será definido com base no diagrama acima. Ou seja $\widehat{\nu} = F\nu F^{-1}$

Observação 3.6. *Existe um isomorfismo*

$$\epsilon_{PX} : D\text{Hom}_R(P, X) \rightarrow \text{Hom}_R(X, D\text{Hom}_R(P, R)),$$

onde $P \in P_R$ e $X \in \text{mod} R$.

De fato, se $X = R$, temos $D\text{Hom}(R, \nu P) = \text{Hom}(R, D\text{Hom}(P, R)) \cong D\text{Hom}(P, R)$, como os funtores envolvidos são aditivos, a mesma propriedade vale se X é um módulo projetivo.

Se X é um módulo qualquer, considere sua apresentação projetiva minimal:

$$P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

Aplicando $\text{Hom}(P, -)$ obtem-se:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow D\text{Hom}(P, X) & \longrightarrow & D\text{Hom}(P, P_0) & \longrightarrow & D\text{Hom}(P, P_1) \\ \downarrow \exists & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ 0 \rightarrow \text{Hom}(X, \nu P) & \longrightarrow & \text{Hom}(P_0, \nu P) & \longrightarrow & \text{Hom}(P_1, \nu P) \end{array}$$

Pelo lema dos cinco, o morfismo da esquerda no diagrama acima, é um isomorfismo.

Usando a observação acima e o fato do funtor de Nakayama ser exato em P_R podemos concluir o seguinte resultado.

Lema 3.1. *Seja B uma k -álgebra de dimensão finita e dimensão global finita. Então existe uma transformação natural invertível*

$$\epsilon_{PX} : D\text{Hom}_{P_R}(P^\bullet, X^\bullet) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{I_R}(X^\bullet, \nu X),$$

para todo $X^\bullet, P^\bullet \in K^b(P_R)$

E deste lema obtemos o seguinte corolário:

Corolário 3.2. *Nas condições acima. Dados $L = (P, V, \phi)$ e $N = (Q, T, \delta) \in P_{\text{rep}(B M_k)}$, temos $D\text{Hom}_{P_{\text{rep}(B M_k)}}(L, N) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{P_{\text{rep}(B M_k)}}(N, \ell \widehat{\nu}(L))$*

Demonstração. De fato, pelo lema anterior $D\text{Hom}(P', X') \cong \text{Hom}(X', \nu P')$, como F^{-1} é uma equivalência, segue que existem $P' = F^{-1}(L)$ e $X' = F^{-1}(N)$, portanto, $D\text{Hom}(P', X') \cong \text{Hom}(X', \nu P') \cong \text{Hom}(F^{-1}(N), \nu F^{-1}(L))$. Como F é obviamente fiel, obtemos: $\text{Hom}(F^{-1}(N), \nu F^{-1}(L)) \cong \text{Hom}(FF^{-1}(N), F\nu F^{-1}(L)) \cong \text{Hom}(N, \widehat{\nu}(L))$, donde resulta a fórmula do corolário. $\square$

Lembremos se $R = B[M]$ podemos associar cada complexo de B -módulos $X^\bullet$ ao complexo de R -módulos $(0, X^\bullet, 0)$. Antes tratarmos de nosso próximo resultado vamos simplificar um pouco a notação. Até o término da demonstração do próximo resultado, o Teorema 3.3, vamos omitir o símbolo $\bullet$ dos complexos e denotaremos simplesmente por X o complexo de R -módulos associado ao complexo de B -módulos X . Agora temos os requisitos suficientes para provarmos o seguinte teorema:

Teorema 3.3. *Sejam B uma k -álgebra de dimensão finita e dimensão global finita, e $R = B[M]$ uma extensão por um ponto de B . Então para cada indecomponível $X \in D^b(B)$ temos o seguinte triângulo de Auslander-Reiten em $D^b(R)$ iniciado em X :*

$$X \longrightarrow \text{Cone}(\epsilon(\Psi_X)) \longrightarrow \ell\widehat{\nu}^{-1}TX \xrightarrow{\epsilon(\Psi_X)} TX$$

Demonstração. Dado um indecomponível da forma $X = (X^\bullet, 0, 0)$, então $Y = \widehat{\nu}^{-1}TX$ é também indecomponível, portanto seu anel de endomorfismos é local. Como espaço vetorial $\text{rad} \text{End} Y$ é somando direto de $\text{End} Y$. Pelo corolário acima temos: $D\text{Hom}(Y, Y) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(Y, \ell\widehat{\nu}(Y))$, consideremos $\alpha \in D\text{Hom}(Y, Y)$ um funcional linear que não se anula sobre o morfismo identidade, mas que se anula sobre o radical. Denotemos por $w \in \text{Hom}(Y, \ell\widehat{\nu}(Y))$ a imagem de α pela transformação natural.

Consideremos o triângulo obtido a partir de w pela aplicação do axioma $TR1$:

$$Y \xrightarrow{w} \ell\widehat{\nu}(Y) \longrightarrow \text{Cone}(w) \longrightarrow TY$$

Transladando duas vezes o triângulo acima obtemos

$$(*) : X \longrightarrow \text{Cone}(w) \longrightarrow Y \xrightarrow{w} TX$$

Pois $T^{-1}\widehat{\nu}Y = X$.

Afirmamos que este último triângulo é de Auslander-Reiten. De fato, o primeiro e o terceiro vértice são indecomponíveis; é um triângulo que não cinde pois $w \neq 0$, uma vez que foi obtido de α e $\alpha(1_X) \neq 0$. Finalmente, dado qualquer morfismo $f : U \longrightarrow Y$ que não sejam epi que cinde, temos que a imagem de f está no radical de Y , portanto $wf = 0$. Portanto temos o seguinte diagrama de triângulos:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & \text{Cone}(w) & \xrightarrow{g} & Y & \xrightarrow{w} & TX \\ & & & & \uparrow f & & \uparrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & U & \xrightarrow{1} & U & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Do $TR3$, segue que f é fatorada pela g . Portanto o triângulo $(*)$ é de Auslander-Reiten. $\square$

Lembremos que no final da seção anterior mencionamos que dado um triângulo de Auslander-Reiten

$$X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet \xrightarrow{g} Z^\bullet \xrightarrow{w} TX^\bullet,$$

mesmo supondo que $(X^\bullet \otimes M, Y^\bullet, |f|)$ é indecomponível não dispúnhamos de uma maneira elementar de mostrar que o triângulo abaixo é de Auslander-Reiten

$$(0, Z^\bullet, 0) \xrightarrow{(0,w)} (X^\bullet \otimes M, X^\bullet, 1)[1] \xrightarrow{-(1,f)[-1]} (X^\bullet \otimes M, Y^\bullet, |f|)[1] \xrightarrow{(0,-g)[-1]} (0, Z^\bullet, 0)[1]$$

Agora tendo em vista a demonstração acima podemos notar que a dificuldade estava em mostrar o morfismo $(-g, 0)[-1] : (Y^\bullet, X^\bullet \otimes M, |f|)[1] \rightarrow (Z^\bullet, 0, 0)[1]$ se anula sobre o radical.

3.3 Exemplos e aplicações

Vamos mostrar agora que em geral $D^b(A)$ não é uma categoria abeliana.

Lema 3.2. *Seja A uma k -álgebra de dimensão finita e de dimensão global finita. E considere um triângulo de Auslander-Reiten*

$$X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet \xrightarrow{g} Z^\bullet \xrightarrow{w} TX^\bullet,$$

onde $Y^\bullet$ é indecomponível. Se o morfismo g possuir kernel em $D^b(A)$, este é necessariamente $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$

Demonstração. Sejam f e g na situação indicada. Vamos mostrar que, se g possuir kernel, então este deve ser $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$.

De fato, supondo que $\iota : K^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ é o kernel da g , como $gf = 0$ pela propriedade universal do kernel f se fatora pela ι . Ou seja, existe $\theta : X^\bullet \rightarrow K^\bullet$ tal que $f = \iota\theta$

$$\begin{array}{ccccc} X^\bullet & \xrightarrow{f} & Y^\bullet & \xrightarrow{g} & Z^\bullet \rightarrow X^\bullet[-1] \\ \downarrow \theta & & \downarrow \iota & \swarrow 1 & \\ K^\bullet & \xrightarrow{\iota} & Y^\bullet & & \end{array}$$

Certamente, como θ é mono, f é mono.

Pelo TR1 podemos completar ι a um triângulo, e pelo TR3 obtemos um morfismo de triângulos $(\theta, 1_Y, m)$

$$\begin{array}{ccccccc} X^\bullet & \xrightarrow{f} & Y^\bullet & \xrightarrow{g} & Z^\bullet & \longrightarrow & X^\bullet[-1] \\ \theta \downarrow & & \downarrow 1 & & \downarrow m & & \downarrow \\ K^\bullet & \xrightarrow{\iota} & Y^\bullet & \longrightarrow & \text{cone}(\iota) & \longrightarrow & K^\bullet[-1] \end{array}$$

Como f é irredutível e ι não cinde, segue que θ é mono que cinde. E consequentemente o morfismo de triângulos cinde (ou seja m também cinde).

Por outro lado, como $g\iota = 0$, pelo TR3, existe λ tal que $(\lambda, \iota, 0)$ é um morfismo de triângulos, como ilustra o diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccccccc} X^\bullet & \xrightarrow{f} & Y^\bullet & \xrightarrow{g} & Z^\bullet & \longrightarrow & X^\bullet[-1] \\ \uparrow \lambda & & \uparrow \iota & & \uparrow & & \uparrow \\ K^\bullet & \xrightarrow{1} & K^\bullet & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & K^\bullet[-1] \end{array}$$

Portanto $f\lambda = \iota$. Utilizando esta fatoração de ι pela f temos que todo morfismo h tal que $gh = 0$ se fatora pela f , portanto f é o kernel de g . $\square$

Corolário 3.3. *Seja A uma k -álgebra de dimensão finita e de dimensão global finita. Se existe um triângulo de Auslander-Reiten*

$$X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet \xrightarrow{g} Z^\bullet \xrightarrow{w} TX^\bullet$$

Sendo $Y^\bullet$ um indecomponível em $D^b(A)$. Então $D^b(A)$ não é abeliana.

Demonstração. De fato, se existir um triângulo nas condições acima vamos mostrar que g não admite kernel em $D^b(A)$.

Observemos que aplicando o funtor de translação, shift $[-1]$, no triângulo dado e rotacionado duas vezes temos o seguinte triângulo,

$$Z[+1] \xrightarrow{w[+1]} X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet \xrightarrow{g} Z^\bullet$$

donde segue que $fw[+1] = 0$ em $D^b(A)$.

Agora observemos o seguinte diagrama representando um morfismo de triângulos

$$\begin{array}{ccccccc} X^\bullet & \xrightarrow{f} & Y^\bullet & \xrightarrow{g} & Z^\bullet & \xrightarrow{w} & X^\bullet[-1] \\ \uparrow^{h[+1]} & & \uparrow^f & & \uparrow^g & & \uparrow^h \\ Z^\bullet[+1] & \xrightarrow{w[+1]} & X^\bullet & \xrightarrow{f} & Y^\bullet & \xrightarrow{g} & Z^\bullet \end{array}$$

Notemos que se o diagrama acima comuta, tanto se tomarmos $h = 0$ quanto se tomarmos $h = w$, e pelo fato de w fazer parte de triângulo de Auslander-Reiten segue que $w \neq 0$. Portanto, o morfismo $fw[+1]$ admite duas fatorações distintas através da f em $D^b(A)$, o que contradiz o fato de f ser o kernel da g . Logo, $D^b(A)$ não é abeliana. $\square$

Exemplo 3.1. A álgebra $\Lambda = kQ/I$ dada pela quiver abaixo satisfaz as condições do lema precedente.

$$Q \quad 2 \bullet \xrightarrow{\beta} 3 \bullet \xrightarrow{\gamma} \bullet^4$$

com $I = \text{rad}^2$

Demonstração. Notemos que o complexo $Z^\bullet = P_4 \xrightarrow{\gamma} P_3 \xrightarrow{\beta} P_2$ é indecomponível, pois é quase-isomorfo ao complexo concentrado $S_2[0]$ em $\text{Com}(A)$. Vamos construir o triângulo de Auslander-Reiten terminado em Z .

$\text{Hom}_A(Z^\bullet, A) = D(Z^\bullet)^* = I_4 \xrightarrow{\gamma} I_3 \xrightarrow{\beta} I_2 \in K(I_A)$. Notemos que a partir da resolução de Cartan-Eilenberg $D(Z^\bullet)^*$ obtemos o seguinte complexo:

$$\cdots 0 \rightarrow P_3 \oplus P_4 \xrightarrow{\partial_4} P_2 \oplus P_3 \xrightarrow{\partial_3} 0 \oplus P_2 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

$$\text{onde } \partial_4 = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ -1 & \gamma \end{pmatrix} \text{ e } \partial_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$$

Que por sua vez é quase isomorfo ao complexo $P_4 \rightarrow 0 \rightarrow 0$ (Note que, $H^0(D(Z^\bullet)^*) = H^{-1}(D(Z^\bullet)^*) = 0$). Portanto $P_4 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \cong \text{Hom}(Z^\bullet, A)$ em $K(P_A)$.

Desta forma o morfismo $w : Z^\bullet \rightarrow \nu Z^\bullet$, que não é nulo e se anula sobre o radical, é dado pelo seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} P_2 & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow \\ P_3 & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow \\ P_4 & \xrightarrow{1} & P_4 \end{array}$$

Segue que, $\text{cone}(w) \cong P_3 \rightarrow P_2 \rightarrow 0 \in \text{Ind}K(P_A)$. Donde obtemos o seguinte

triângulo de Auslander-Reiten em $K(P_\Lambda)$:

$$\delta = \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ P_4 & \longrightarrow & P_3 & \longrightarrow & P_3 & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_4 & \longrightarrow & P_4 \end{array}$$

O corolário acima é aplicável. Portanto $K(P_\Lambda)$ não é abeliana, como a álgebra é de dimensão global finita, segue que $K(P_\Lambda) \cong D^b(\Lambda)$. Logo $D^b(\Lambda)$ não é abeliana. $\square$

Agora vamos exemplificar como podemos utilizar o Teorema 3.3 para determinarmos alguns triângulos de Auslander-Reiten na categoria derivadas da extensão por um ponto.

Exemplo 3.2. Consideremos $R = \Lambda[M]$, onde Λ é a álgebra do exemplo anterior e M é o simples S_2 . Ou seja R é a álgebra de caminhos dada pelo quiver:

$$Q_R : 1 \bullet \xrightarrow{\alpha} 2 \bullet \xrightarrow{\beta} 3 \bullet \xrightarrow{\gamma} 4 \bullet$$

com $\text{rad}^2 = 0$ Vamos dar exemplo de como construir um triângulo de Auslander-Reiten na categoria derivada de R partindo de um indecomponível de $D^b(\Lambda)$.

Seja $Z^\bullet$ um complexo em $D^b(\Lambda)$ isomorfo ao complexo concentrado $S_2[0]$. Podemos construir em $D^b(R)$ um triângulo de Auslander-Reiten iniciado em $(0, Z^\bullet, 0)$.

De fato, para construirmos o triângulo de Auslander-Reiten iniciado com o complexo indecomponível $(0, Z^\bullet, 0) = (0, P_4, 0) \xrightarrow{\gamma} (0, P_3, 0) \xrightarrow{\beta} (0, P_2, 0) \cong (0, S_2, 0)$ em $D^b(R)$, aplicamos o funtor ν em $(0, Z^\bullet, 0)$ obtemos:

$$D(0, P_4, 0)^* \xrightarrow{D(\gamma)^*} D(0, P_3, 0)^* \xrightarrow{D(\beta)^*} D(0, P_2, 0)^*$$

Como $(0, P, 0)^* = (P^* \otimes M, P^*, 1)$, para cada $P \in \text{ind} R$, temos que:

$$\nu(0, Z^\bullet, 0) = I_4 \xrightarrow{D(\gamma)^*} I_3 \xrightarrow{D(\beta)^*} I_2 \cong P_3 \xrightarrow{\beta} P_2 \xrightarrow{\alpha} P_1 \in K(P_R)$$

(Note que $\nu(0, Z^\bullet, 0)$ não é isomorfo a um complexo concentrado)

Logo o homomorfismo $w : (0, Z^\bullet, 0) \longrightarrow \nu(0, Z^\bullet, 0)$ é dado por:

$$\begin{array}{ccc} P_2 & \xrightarrow{\alpha} & P_1 \\ \uparrow \beta & & \uparrow \alpha \\ P_3 & \xrightarrow{\beta} & P_2 \\ \uparrow \gamma & & \uparrow \beta \\ P_4 & \xrightarrow{\gamma} & P_3 \end{array}$$

Logo, $\text{Cone}(w) \cong P_4 \longrightarrow P_3 \oplus P_3 \longrightarrow P_2 \oplus P_2 \longrightarrow P_1$

Considerando o morfismo natural $i : (0, Z^\bullet, 0) \longrightarrow \text{Cone}(w)$, representado no diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccccccc} P_4 & \xrightarrow{f} & P_3 & \xrightarrow{g} & P_2 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \downarrow 0 \\ P_4 & \longrightarrow & P_3 \oplus P_3 & \xrightarrow{f} & P_2 \oplus P_2 & \xrightarrow{g} & P_1 \end{array}$$

Como vimos na demonstração do Teorema 3.3 o triângulo determinado por i é de Auslander-Reiten. Logo o seguinte diagrama representa o triângulo de Auslander-Reiten em $D^b(R)$ iniciado em $(0, Z^\bullet, 0)$:

$$\delta = \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ P_2 & \longrightarrow & P_2 \oplus P_2 & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & P_1 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ P_3 & \longrightarrow & P_3 \oplus P_3 & \longrightarrow & P_3 & \longrightarrow & P_2 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ P_4 & \longrightarrow & P_4 & \longrightarrow & P_4 & \longrightarrow & P_3 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_4 & \longrightarrow & P_3 \end{array}$$

A construção feita no último exemplo ilustra o processo de construção de triângulos de Auslander-Reiten na categoria derivada da extensão por um ponto. Observemos que podemos usar este tipo de construção para criar mais exemplos de álgebras cujas categorias derivadas não são abelianas, a partir de uma álgebra A cuja categoria derivada não é abeliana. Basta conseguir um objeto $Z^\bullet$ em $D^b(A)$ para o qual o triângulo iniciado em $(0, Z^\bullet, 0)$ satisfaça as condições do Corolário 3.3.

Capítulo 4

O Cone e extensões de hereditárias

Considerando Λ uma álgebra de Artin de dimensão global finita definimos $\text{Quad}\Lambda$ sendo a menor subcategoria triangulada de $K(P_\Lambda)$ que contém os complexos que possui no máximo duas posições sucessivas não nulas. A idéia de definir a subcategoria $\text{Quad}\Lambda$ foi de transferir o estudo de certos morfismos complexos de $K(P_\Lambda)$ ao estudo de quadrados comutativos. Conseguimos apresentar alguns triângulos de Auslander-Reiten em $\text{Quad}\Lambda$ associados à seqüências de Auslander-Reiten de $\text{mod}\Lambda$.

Em nosso estudo mostramos também que quando Λ for uma álgebra hereditária $\text{Quad}\Lambda$ coincide com $K(P_\Lambda)$, este fato permitiu usar o estudo de $\text{Quad}\Lambda$ no estudo da categoria derivada de extensões por um ponto de Λ .

Em analogia com o trabalho [M] em que o funtor cokernel sobre as triplas permite uma sucinta e clara interpretação dos resultados obtidos sobre seqüências de Auslander-Reiten. Vamos trabalhar com o cone e faremos uma interpretação similar. Vale a pena lembrarmos que em geral o *Cone* não é um funtor, como mostramos na observação 2.8. Mostraremos que a utilização do Cone em comparação ao trabalho [M] nos dá uma função que apesar de não ser um morfismo de categorias trianguladas associa um triângulo

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{w} TX$$

a uma quádrupla

$$X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{w'} TX'$$

que não é um triângulo. Mas com uma simples troca do sinal em w' tem-se um triângulo. Ou seja,

$$X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{-w'} TX'$$

é um triângulo. Verificaremos também que restrito a uma certa subcategoria o Cone é um funtor.

Concluimos nosso trabalho passando mais dois teoremas de [M] para categorias derivadas, a saber, o teorema que permite exprimir quais os triângulos de Auslander-Reiten da categoria derivada da extensão por um ponto que inicia com um objeto proveniente da álgebra que sofreu o processo de extensão, e o uso do Cone desempenhando papel análogo ao papel do funtor cok de [M].

4.1 Uma aplicação da categoria dos morfismos entre projetivos

De acordo com [ARS] (veja capítulo IV), seja $P(\Lambda)$ a categoria formada pelos Λ -módulos projetivos. Consideremos $\text{Morph}(P(\Lambda))$ a categoria cujos objetos são os morfismos de $P(\Lambda)$. Ou seja, os objetos de $\text{Morph}(P(\Lambda))$ são morfismos $P_1 \xrightarrow{f} P_2$ de $P(\Lambda)$. Os morfismos de $P_1 \xrightarrow{f} P_2$ para $P'_1 \xrightarrow{f'} P'_2$ são pares de morfismos (g_1, g_2) , onde $g_i : P_i \rightarrow P'_i$, $i \in \{1, 2\}$ tais que o seguinte quadrado comuta:

$$\begin{array}{ccc} P'_1 & \xrightarrow{f'} & P'_2 \\ \downarrow g_1 & \circlearrowleft & \downarrow g_2 \\ P_1 & \xrightarrow{f} & P_2 \end{array}$$

A composição e adição de morfismos são feitas componente a componente, não é difícil verificar que $\text{Morph}(P(\Lambda))$ é uma categoria aditiva de Krull-Schmidt.

Definimos o funtor $\text{Cok} : \text{Morph}(P(\Lambda)) \rightarrow \text{mod } \Lambda$ da seguinte forma:

$\text{Cok}(P_1 \xrightarrow{f} P_2) = \text{coker}(f)$ para todo objeto $P_1 \xrightarrow{f} P_2$ em $\text{Morph}(P(\Lambda))$, e sobre os morfismos o funtor é definido pela passagem aos cokernéis, ou seja definimos $\text{Cok}(g_1, g_2) : \text{coker}(f) \rightarrow \text{coker}(f')$ sendo o único morfismo que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccccccc} P'_1 & \xrightarrow{f'} & P'_2 & \longrightarrow & \text{coker}(f') & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow g_1 & \circlearrowleft & \uparrow g_2 & \circlearrowleft & \uparrow \text{Cok}(g_1, g_2) & & \\ P_1 & \xrightarrow{f} & P_2 & \longrightarrow & \text{coker}(f) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

O funtor Cok definido acima é pleno e denso, entretanto não é fiel uma vez que $\text{Cok}(g_1, g_2) = 0 \iff \exists h : P'_2 \rightarrow P_1$ tal que $fh = g_2$.

Definimos uma relação de equivalência, R , em $\text{Morph}(P(\Lambda))$. Dados $f, f' \in \text{Morph}(P(\Lambda))$ $R(f', f)$ consiste dos morfismos (g_1, g_2) com a propriedade de que existe algum $h : P'_2 \rightarrow P_1$ tal que $f'h = g_2$. Ou seja, (g_1, g_2) é equivalente a (g'_1, g'_2) em $\text{Morph}(P(\Lambda))$, e denotamos por $(g_1, g_2) \approx (g'_1, g'_2)$, se $\text{Cok}(g_1 - g'_1, g_2 - g'_2) = 0$. Pode ser encontrado na página 102 de [ARS] é apresentado o seguinte resultado.

Proposição 4.1. [ARS] O funtor $\text{Cok} : \text{Morph}(P(\Lambda)) \rightarrow \text{mod}\Lambda$, definido acima, induz uma equivalência de categorias $\text{Morph}(P(\Lambda))/R \rightarrow \text{mod}\Lambda$.

Observação 4.1. A construção feita em [ARS], para escrever a demonstração da proposição acima, mostra que a categoria $\text{Morph}(P(\Lambda))/R$ é equivalente a subcategoria plena de $\text{Morph}(P(\Lambda))$ cujos objetos $P_1 \xrightarrow{a} P_2$ são tais que $\text{ima} \subset \text{rad}P_2$ e $\text{kera} \subset \text{rad}P_1$

Lembremos que uma seqüência exata $0 \rightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \rightarrow 0$ em $\text{Com}(\mathcal{A})$ é semi-cindida quando para todo i existe $w_i : Z_i \rightarrow Y_i$ tal que $v_i \circ w_i = 1_{Z_i}$.

Como toda seqüência exata $0 \rightarrow K^\bullet \rightarrow \text{Cil}(f)^\bullet \rightarrow \text{Cone}(f)^\bullet \rightarrow 0$ é sempre uma seqüência semi-cindida, temos que qualquer triângulo distinguido em $K(P_\Lambda)$ é isomorfo a um triângulo $X^\bullet \rightarrow Y^\bullet \rightarrow Z^\bullet \rightarrow TX^\bullet$ onde $0 \rightarrow X^\bullet \rightarrow Y^\bullet \rightarrow Z^\bullet \rightarrow 0$ é uma seqüência que semi-cinde. Observemos que o Lema 2.3 nos garante que a recíproca é verdadeira.

Uma vez em $\text{Com}(P_\Lambda)$ todas as seqüências exatas são semi-cindidas, segue que para álgebras de dimensão global finita, o fato de termos $D^b(\Lambda) \cong K^b(P_\Lambda)$, permite uma correspondência entre seqüências exatas de complexos complexos e triângulos da categoria derivada.

4.1.1 Resultados básicos

Lema 4.1. Seja A uma álgebra de Artin e M um A -módulo, considere uma apresentação projetiva de M dada por $P_1 \xrightarrow{\alpha} P_0$, ou seja, temos um diagrama comutativo da forma:

$$\begin{array}{ccccc} P_1 & \xrightarrow{\alpha} & P_0 & \xrightarrow{\epsilon_0} & M \\ \epsilon_1 \downarrow & \nearrow t & & & \\ M_1 & & & & \end{array}$$

onde $M_1 = \ker \epsilon_0$, t a inclusão natural. As seguintes condições são válidas:

(1) $\text{ima} \alpha \subset \text{rad}P_0 \iff \epsilon_0$ é cobertura projetiva de M

- (2) $\text{im}\alpha \subset \text{rad}P_0 \iff P_1 \xrightarrow{\alpha} P_0$ não tem somando direto da forma $P \xrightarrow{\text{iso}} P$ em $\text{Moph}(P(A))$
- (3) Assume que $\text{im}\alpha \subset \text{rad}P_0$, então $\text{ker}\alpha \subset \text{rad}P_1 \iff P_1 \xrightarrow{\alpha} P_0$ não tem somando direto da forma $P \rightarrow 0$ em $\text{Moph}(P(A))$
- (4) $\text{im}\alpha \subset \text{rad}P_0$ e $\text{ker}\alpha \subset \text{rad}P_1 \iff$ a apresentação projetiva acima é minimal

Demonstração. Notemos que (2) equivale a (1), e (4) é uma consequência óbvia, além disso a afirmação (3) tem demonstração similar a (1). Portanto, é suficiente mostrarmos a validade de (1).

Supondo que a imagem de α está contida no radical de P_0 , como $\text{ker}\epsilon_0$ coincide com a imagem de α ,

$$\text{top}M = \frac{M}{\text{rad}M} \cong \frac{P_0/\text{ker}\epsilon_0}{\text{rad}P_0/\text{ker}\epsilon_0} \cong P_0/\text{rad}P_0 \cong \text{top}P_0$$

Portanto, ϵ_0 é cobertura projetiva de M .

Reciprocamente, se ϵ_0 é cobertura projetiva de M , então $\text{ker}\epsilon_0 \subset \text{rad}P_0$, portanto $\text{im}\alpha = \text{ker}\epsilon_0 \subset \text{rad}P_0$. $\square$

Observação 4.2. Dada uma seqüência exata em $\text{mod}A$

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \longrightarrow N \longrightarrow 0,$$

consideremos apresentações projetivas de M e N dadas por

$$\begin{array}{ccccc} P_1 & \xrightarrow{\alpha_M} & P_0 & \xrightarrow{\epsilon_M} & M \\ \epsilon_{M_1} \downarrow & \nearrow t_{M_1} & & & \\ M_1 & & & & \end{array}$$

Aqui $M_1 = \text{ker}\epsilon_M$ e t_{M_1} é a inclusão natural.

$$\begin{array}{ccccc} Q_1 & \xrightarrow{\alpha_N} & Q_0 & \xrightarrow{\epsilon_N} & N \\ \epsilon_{N_1} \downarrow & \nearrow t_{N_1} & & & \\ N_1 & & & & \end{array}$$

Aqui $N_1 = \text{ker}\epsilon_N$ e t_{N_1} é a inclusão natural.

Utilizando o lema da ferradura podemos construir o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & & 0 & & 0 \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 M & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & N \\
 \uparrow \epsilon_M & & \uparrow \epsilon_E & & \uparrow \epsilon_N \\
 P_0 & \xrightarrow{(1,0)} & P_0 \oplus Q_0 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & Q_0 \\
 \uparrow \alpha_M & & \uparrow \alpha_E & & \uparrow \alpha_N \\
 P_1 & \xrightarrow{(1,0)} & P_1 \oplus Q_1 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & Q_1
 \end{array}$$

em que a segunda coluna é uma cobertura projetiva de E , α_E é tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 P_1 \oplus Q_1 & \xrightarrow{\alpha_E} & P_0 \oplus Q_0 & \xrightarrow{\epsilon_E} & E \\
 \epsilon_{E_1} \downarrow & & \nearrow t_{E_1} & & \\
 E_1 & & & &
 \end{array}$$

Aqui $E_1 = \ker \epsilon_E$ e t_{E_1} é a inclusão natural.

Lema 4.2. Com as notações da observação acima, consideremos a seguinte seqüência em $\text{Morph}(P(A))$

$$\begin{array}{ccccc}
 P_0 & \xrightarrow{(1,0)} & P_0 \oplus Q_0 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & Q_0 \\
 \uparrow \alpha_M & & \uparrow \alpha_E & & \uparrow \alpha_N \\
 P_1 & \xrightarrow{(1,0)} & P_1 \oplus Q_1 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & Q_1
 \end{array}$$

Então as seguintes condições são verdadeiras

- (1) $\text{im} \alpha_E \subset \text{rad}(P_0 \oplus Q_0) \iff \text{im} \alpha_M \subset \text{rad} P_0, \text{im} \alpha_N \subset \text{rad} Q_0$
- (2) $\text{im} \alpha_E \subset \text{rad}(P_0 \oplus Q_0)$ e $\ker \alpha_E \subset \text{rad}(P_1 \oplus Q_1) \iff \text{im} \alpha_M \subset \text{rad} P_0, \ker \alpha_M \subset \text{rad} P_1, \text{im} \alpha_N \subset \text{rad} Q_0$ e $\ker \alpha_N \subset \text{rad} Q_1$

Demonstração. Para obtermos a validade da primeira assertiva consideremos $\epsilon_E : P_0 \oplus Q_0 \rightarrow E$, construído como na observação acima. Sabemos que ϵ_E é cobertura projetiva se e somente se $\text{top} E \cong \text{top}(P_0 \oplus Q_0) \cong \text{top} P_0 \oplus \text{top} Q_0 \cong \text{top} M \oplus \text{top} N$, portanto vale (1). De forma similar obtemos (2). $\square$

Observação 4.3. Notemos que para cada inteiro n podemos fazer uma imersão natural, denotada por i_n , dos objetos da forma $P_1 \xrightarrow{f} P_2$ em $\text{Com}(P_\Lambda)$, simplesmente associando

cada objeto de $\text{Morph}(P(\Lambda))$ a um complexo em que P_2 está na n -ésima posição:

$$\dots \longrightarrow 0 \xrightarrow{0} P_1 \xrightarrow{f} P_2 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Entretanto, é claro que as relações $\approx$ e $\sim$, não definem as mesmas categorias. Isto quer dizer que a simples identificação dos objetos de $\text{Morph}(P(\Lambda)) / R$ com os objetos da categoria derivada não forma uma subcategoria.

O conceito de n -complexo permite esclarecer qual é a subcategoria da categoria derivada associada a $\text{Morph}(P(\Lambda))$.

Definição 4.1. Dizemos que um complexo indecomponível X é um n complexo se existir um inteiro j tal que $H^m(X) = 0$ para todo $m \in \mathbb{Z} - \{j, \dots, j+n-1\}$. No caso em que $X = (X_i)$ é um n complexo tal que $X_m = 0$ para todo $m \in \mathbb{Z} - \{j, \dots, j+n-1\}$ representaremos X da seguinte forma

$$0 \longrightarrow P_j \xrightarrow{d_j} P_{j-1} \xrightarrow{d_{j-1}} \dots \longrightarrow P_{j-n+1} \xrightarrow{d_{j-n+1}} P_{j-n} \longrightarrow 0$$

Em casos que não houver ambigüidade de entendimento, simplesmente:

$$P_j \xrightarrow{d_j} P_{j-1} \xrightarrow{d_{j-1}} \dots \longrightarrow P_{j-n+1} \xrightarrow{d_{j-n+1}} P_{j-n}$$

Definição 4.2. Seja Λ uma álgebra de Artin, e $\text{Morph}(P(\Lambda))$ a categoria dos morfismos entre projetivos. Definimos a subcategoria dos 2-complexos, a qual denotaremos por $\text{Quad}\Lambda$, a menor subcategoria triangulada de $K(P_\Lambda)$ contendo a imagem da família de imersões naturais i_n de $\text{Morph}(P(\Lambda)) / R$ em $K(P_\Lambda)$.

Observação 4.4. Sempre que formos nos referir a categoria dos morfismos entre projetivos vamos usar a notação de $[ARS]$, que é a notação usada em $\text{Morph}(P(\Lambda))$. Note que ao fazermos isto, em certo sentido, estamos denotando por $P(\Lambda)$ a subcategoria dos projetivos, mas não há qualquer risco de ambigüidade.

O resultado abaixo trata justamente da comparação entre a subcategoria de $K(P_A)$ determinada pela associação de objetos de $\text{Morph}(P(\Lambda))$, isto é a subcategoria dos 2-complexos, e a categoria $\text{Morph}(P(\Lambda)) / R$.

Proposição 4.2. As relações $\sim$ e $\approx$ são compatíveis no seguinte sentido. Dado $(g_1, g_2) \in \text{Morph}(P(\Lambda))$, Temos $(g_1, g_2) \approx 0 \Rightarrow \exists$ representante da classe tal que $i_n(g_1, g_2) \sim 0$ em $i_n(\text{Morph}(P(\Lambda)))$, onde $i_n(g_1, g_2)$ indica a simples inclusão de (g_1, g_2) como morfismo de complexos. Consequentemente, temos:

$$(1) (g_1, g_2) \approx t \neq 0 \implies i(g_1, g_2) \approx 0$$

$$(2) i_n(g_1, g_2) \sim 0 \implies (g_1, g_2) \approx 0$$

Demonstração. Consideremos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & \xrightarrow{f} & P_2 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow^{g_1} & \circlearrowleft & \downarrow^{g_2} & \circlearrowleft & \downarrow^\gamma & \circlearrowleft & \downarrow \\ P'_1 & \xrightarrow{f'} & P'_2 & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$\gamma = \text{Cok}(g_1, g_2)$$

Temos: $(g_1, g_2) \approx 0 \iff \exists h : P_2 \longrightarrow P'_1$ tal que $g_2 = f'h$ e isto implica $g_2 f = f'h f = f'g \iff f'(hf - g_1) = 0$. Logo, obtemos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{f} & P_2 & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\ & \swarrow & \downarrow^{hf} & \swarrow_h & \downarrow^{g_2} & \swarrow & \downarrow^0 \swarrow \\ 0 & \longrightarrow & P'_1 & \xrightarrow{f'} & P'_2 & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \end{array}$$

Portanto, $(hf, g_2) \sim 0$.

Por outro lado, notemos que $(hf - g_1, 0) \approx 0$, e que

$$(g_1, g_2) \approx (g_1, g_2) + (hf - g_1, 0) = (hf, g_2).$$

Portanto, na classe de equivalência de (g_1, g_2) dada pela relação $\sim$ existe um representante (hf, g_2) nulo homotópico. □

Corolário 4.1. *Seja A uma álgebra de Artin e $X^\bullet = \cdots 0 \rightarrow P_1 \xrightarrow{a} P_0 \rightarrow 0 \cdots$ um 2-complexo de $K(P_A)$. Se $f = (f_i)_{i \in \mathbb{Z}} : X^\bullet \longrightarrow X^\bullet$ é um idempotente, então $(f_1, f_0) : (P_1 \xrightarrow{a} P_0) \longrightarrow (P_1 \xrightarrow{a} P_0)$ é idempotente em $\text{Morph}(P(A))/R$. Além disso se f for idempotente não trivial em $K(P_A)$, então (f_1, f_0) também é não trivial.*

Demonstração. De fato se f é idempotente podemos escolher um representante da classe de f , a qual denotaremos por f também, de modo que existe $h = (h_i)$ nulo homotópica tal que $f^2 = f + h$, isto equivale a dizer que, $f_i^2 = f_i + h_i$. Pelo resultado anterior temos que $h \approx 0$, em particular, $(f_1, f_0) \approx (f_1^2, f_0^2)$. Notemos que se f é idempotente trivial, podemos assumir que ou $f_i = 0$ para todo i , ou $f_i = 1$ para todo i , em qualquer caso (f_1, f_0) também é não trivial. □

Corolário 4.2. *Seja A uma álgebra de Artin e $X^\bullet = \cdots 0 \rightarrow P_1 \xrightarrow{a} P_0 \rightarrow 0 \cdots$ um 2-complexo de $K(A)$. Para que $X^\bullet$ seja indecomponível em $K(A)$ é suficiente que $(P_1 \xrightarrow{a} P_0)$ seja indecomponível em $\text{Morph}(P(A))/R$.*

Demonstração. Segue do corolário anterior que se $X^\bullet$ é decomponível, então $(P_1 \xrightarrow{a} P_0)$ também o é. Portanto se $(P_1 \xrightarrow{a} P_0)$ for indecomponível implica que $X^\bullet$ será indecomponível. $\square$

Exemplo 4.1. *Consideremos a álgebra*

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & & \bullet & & \bullet \\ & \xrightarrow{c} & & \xrightarrow[a]{b} & \\ 3 & & 2 & & 1 \end{array}$$

com as relações $ca - cb = 0$, temos:

$$\begin{array}{ccccc} P_1 & \xrightarrow{a} & P_2 & & \\ \downarrow b & \swarrow h & \downarrow c & & \\ P_2 & \xrightarrow{c} & P_3 & & \end{array}$$

É possível mostrar que todo morfismo h que fatore c é um isomorfismo. Entretanto, b não é fatorável por a uma vez que são morfismos irreduzíveis distintos.

Logo este morfismo é equivalente a zero na relação $\approx$, e não o é com relação a $\sim$.

Com as Proposições 4.1 e 4.2 podemos tirar algumas importantes conclusões, as quais trataremos a seguir.

4.1.2 Estudo da subcategoria $\text{Quad}\Lambda$

A idéia de definir a subcategoria $\text{Quad}\Lambda$ foi de transferir o estudo de certos morfismos complexos de $K(P_\Lambda)$ ao estudo de quadrados comutativos.

Observação 4.5. *Dada uma subcategoria C de uma categoria D , denotamos por $\text{add}(C)$ a menor subcategoria aditiva de D que contém C . Nnotemos que a subcategoria definida pela imagem imersão $i : \text{add}(\text{Morph}(P(\Lambda))) \rightarrow K^b(\Lambda)$ não é fechada para o Cone, logo não é triangulada. Na verdade $\text{Quad}\Lambda$ coincide com a menor subcategoria triangulada de $K^b(\Lambda)$ fechada para isomorfismo que contém a imagem de i . Portanto, a imagem de i contém um esqueleto da categoria triangulada $\text{Quad}\Lambda$.*

Proposição 4.3. *Seja $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ uma seqüência de Auslander-Reiten em $\text{mod}\Lambda$, consideremos $P_1 \xrightarrow{\alpha} P_0 \rightarrow X \rightarrow 0$ e $Q_1 \xrightarrow{\beta} Q_0 \rightarrow Z \rightarrow 0$ apresentações projetivas minimais de X e Z respectivamente, denotemos por (f_1, f_0) e (g_1, g_0) os morfismos obtidos pelos levantamentos de f e g em $\text{Morph}(P(\Lambda))/R$. Então as seguintes assertivas são verdadeiras.*

- (1) $P_1 \xrightarrow{\alpha} P_0$ e $Q_1 \xrightarrow{\beta} Q_0$ são indecomponíveis em $\text{Morph}(P(\Lambda))/R$
- (2) Qualquer morfismo $(h_1, h_0) : (P_1 \rightarrow P_0) \rightarrow (W_1 \rightarrow W_0)$ em $\text{Morph}(P(\Lambda))/R$ que não é mono que cinde se fatora pela (f_1, f_0)
- (3) qualquer morfismo $(h_1, h_0) : (W_1 \rightarrow W_0) \rightarrow (Q_1 \rightarrow Q_0)$ em $\text{Morph}(P(\Lambda))/R$ que não é epi que cinde se fatora pela (g_1, g_0)

Demonstração. (1) Como $P_1 \xrightarrow{\alpha} P_0$ e $Q_1 \xrightarrow{\beta} Q_0$ foram obtidos de apresentações projetivas minimais, segue do lema 4.2 que $\text{im}\alpha \subset \text{rad}P_0$, $\text{im}\beta \subset \text{rad}Q_0$, $\text{ker}\alpha \subset \text{rad}P_1$, e $\text{ker}\beta \subset \text{rad}Q_1$. Usando estes fatos e o funtor Cok podemos verificar que se $P_1 \xrightarrow{\alpha} P_0$ é decomponível, então X é decomponível, similarmente, se $Q_1 \xrightarrow{\beta} Q_0$ é decomponível, então Z é decomponível.

(2) Utilizaremos as construções feitas na subseção 4.1.1 para mostrar este fato. Como vimos podemos construir o seguinte diagrama comutativo que ilustra quais são os morfismos (f_1, f_0) e (g_1, g_0) , dados pelos levantamentos de f e g respectivamente.

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & & 0 & & 0 \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\
 \uparrow \epsilon_X & & \uparrow \epsilon_Y & & \uparrow \epsilon_Z \\
 P_0 & \xrightarrow{(1,0)} & P_0 \oplus Q_0 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & Q_0 \\
 \uparrow \alpha & & \uparrow \gamma & & \uparrow \beta \\
 P_1 & \xrightarrow{(1,0)} & P_1 \oplus Q_1 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & Q_1
 \end{array}$$

Agora aplicando as propriedades do funtor Cok mostraremos a validade de (2). Dado um objeto indecomponível $W_1 \xrightarrow{\phi} W_0$ de $\text{Morph}(P(\Lambda))$ em que $\phi \neq 0$, consideremos $L = \text{Cok}(\phi)$, qualquer morfismo $(h_1, h_0) : (P_1 \xrightarrow{f} P_0) \rightarrow (W_1 \xrightarrow{\phi} W_0)$ induz um

morfismo $h : X \rightarrow L$ pela passagem aos cokernels, como ilustra o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & \xrightarrow{\alpha} & P_0 & \rightarrow & X & \rightarrow & 0 \\ \downarrow^{h_1} & \circlearrowleft & \downarrow^{h_0} & \circlearrowleft & \downarrow^h & \circlearrowleft & \downarrow \\ W_1 & \xrightarrow{\gamma} & W_0 & \rightarrow & L & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Portanto, temos o seguinte diagrama comutativo em $\text{mod}\Lambda$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \rightarrow 0 \\ & \downarrow^h & \circlearrowleft & \downarrow^{\widehat{h}_0} & \circlearrowleft & \downarrow^0 & \\ 0 \rightarrow & L & \xrightarrow{1_L} & L & \rightarrow & 0 & \rightarrow 0 \end{array}$$

Usando o teorema 6.24 de [R], obtemos um diagrama comutativo para resoluções projetivas:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow & P(X) & \xrightarrow{P(f)} & P(Y) & \xrightarrow{P(g)} & P(Z) & \rightarrow 0 \\ & \downarrow^{P(h)} & \circlearrowleft & \downarrow^{P(\widehat{h}_0)} & \circlearrowleft & \downarrow^0 & \\ 0 \rightarrow & P(L) & \xrightarrow{P(1_L)} & P(L) & \rightarrow & 0 & \rightarrow 0 \end{array}$$

Notemos que h_0, h_1 são as duas primeiras componentes de $P(h)$, denotemos $\widehat{h}_0, \widehat{h}_1$ as duas primeiras componentes de $P(\widehat{h})$ temos: $(\widehat{h}_1, \widehat{h}_0)(f_1, f_0) = (h_1, h_0)$, f_0, f_1 são as duas primeiras componentes de $P(f)$.

Agora consideremos a situação em que $W_1 \xrightarrow{\phi} W_0$ é indecomponível e $\phi = 0$, ou seja, pode ser expresso na forma $P \rightarrow 0$ onde $P \in \text{ind}\Lambda$. Neste caso $(h_1, h_0) = (h_1, 0) : (P_1 \xrightarrow{\alpha} P_0) \rightarrow (P \rightarrow 0)$. Para obtermos uma fatoração de (h_1, h_0) pela (f_1, f_0) basta definirmos $\widehat{h} = (\widehat{h}_1, \widehat{h}_0) : (P_1 \oplus Q_1 \xrightarrow{\gamma} P_0 \oplus Q_0) \rightarrow (P \rightarrow 0)$ com $\widehat{h}_0 = 0$ e $\widehat{h}_1 = \begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, assim temos que $(\widehat{h}_1, \widehat{h}_0)(f_1, f_0) = (h_1, h_0)$. (3) Se demonstra de forma similar a (2) $\square$

4.2 Triângulos de Auslander-Reiten em $\text{Quad}\Lambda$

Agora vamos estudar alguns de triângulos de Auslander-Reiten em seguida vamos usar a categoria $\text{Quad}\Lambda$ para descrevermos os triângulos de Auslander-Reiten da categoria derivada de álgebras hereditárias.

4.2.1 Certos triângulos de Auslander-Reiten em $\text{Quad}\Lambda$

Nesta seção vamos utilizar os resultados da seção anterior para apresentarmos uma descrição detalhada dos triângulos de Auslander-Reiten da categoria derivada de uma

álgebra hereditária.

Proposição 4.4. *Seja Λ uma k -álgebra de dimensão finita. Suponhamos que a seqüência $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ é de Auslander-Reiten em $\text{mod}\Lambda$, com X não simples, suponhamos $P_1 \xrightarrow{\alpha} P_0 \rightarrow X \rightarrow 0$ e $Q_1 \xrightarrow{\beta} Q_0 \rightarrow Z \rightarrow 0$ apresentações projetivas minimais de X e Z . Então o triângulo abaixo é um triângulo de Auslander Reiten em $\text{Quad}\Lambda$.*

$$(*) = \left\{ \begin{array}{ccccccc} 0 & & 0 & & 0 & & \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ P_0 & \xrightarrow{(1,0)} & P_0 \oplus Q_0 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & Q_0 & \rightarrow & 0 \\ \uparrow_{\alpha} & & \uparrow_{\gamma} & & \uparrow_{\beta} & & \uparrow_0 \\ P_1 & \xrightarrow{(1,0)} & P_1 \oplus Q_1 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & Q_1 & \xrightarrow{\gamma'} & P_0 \\ \uparrow \circlearrowleft & & \uparrow \circlearrowleft & & \uparrow \circlearrowleft & & \uparrow_{\alpha} \\ 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_1 \\ & & & & & & \uparrow \\ & & & & & & 0 \end{array} \right.$$

(Aqui γ e as três primeiras colunas são construídas como na seção anterior (lema da ferradura) e $\gamma' = \pi_{P_0} \gamma \text{inc}_{Q_1}$, onde π_{P_0} é a projeção canônica de $P_0 \oplus Q_0$ em P_0 , e inc_{Q_1} é inclusão natural de Q_1 em $P_1 \oplus Q_1$).

Demonstração. Segue da proposição 4.3 e do corolário 4.1 que os complexos

$$P^{\bullet} = \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow 0 \dots$$

e

$$Q^{\bullet} = \dots \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_0 \rightarrow 0 \dots$$

são indecomponíveis em $\text{Quad}\Lambda$.

Da observação 2.25, para mostrarmos que $(*)$ é um triângulo de Auslander-Reiten suficiente mostrarmos que dado qualquer homomorfismo $h : P^{\bullet} \rightarrow W^{\bullet}$, com $W^{\bullet}$ indecomponível, que não é isomorfismo, se fatora pela $f = (f_i)$, onde $f_0 = (1, 0)$, $f_1 = (1, 0)$ e $f_i = 0 \forall i \notin \{0, 1\}$.

Seja

$$W^{\bullet} = \dots \rightarrow W_n \xrightarrow{\partial_n} W_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \rightarrow W_j \rightarrow \dots \xrightarrow{\partial_1} W_0 \rightarrow \dots$$

Como h é não nulo e $W^\bullet$ é indecomponível então podemos supor que existe $t \in \{2, 1, 0\}$ de modo que $W_j = 0 \ \forall j \notin \{t, t-1\}$.

Vamos analisar separadamente os diferentes casos.

Primeiro, seja $t = 1$. O resultado decorre imediatamente da proposição 4.3.

Seja $t = 2$. Temos o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longleftarrow & P_0 & \longrightarrow & P_0 \oplus Q_0 & \longrightarrow & P_0 \\
 \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \\
 W_1 & \xleftarrow{h_1} & P_1 & \longrightarrow & P_1 \oplus Q_1 & \longrightarrow & P_1 \\
 \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \\
 W_2 & \longleftarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Considerando o seguinte morfismo em $\text{Quad}\Lambda$

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \xleftarrow{0} & P_0 \\
 \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \\
 W_1 & \xleftarrow{h_1} & P_1
 \end{array}$$

E utilizando a proposição 4.3 segue que existe $t_1 : P_1 \oplus Q_1 \longrightarrow W_1$ tal que $h_1 = t_1 f_1$, e portanto definindo $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ com $t_i = 0 \ \forall i \neq 1$, obtemos o morfismo desejado.

Finalmente seja $t = 0$. Podemos considerar o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 W_{-1} & \longleftarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 \uparrow \partial_0 & \circlearrowleft & \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \\
 W_0 & \xleftarrow{h_0} & P_0 & \longrightarrow & P_0 \oplus Q_0 & \longrightarrow & Q_0 \\
 \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \\
 0 & \longleftarrow & P_1 & \longrightarrow & P_1 \oplus Q_1 & \longrightarrow & Q_1
 \end{array}$$

Note que $\partial_0 h_0 = 0$, assim a imagem de h_0 está contida no núcleo de ∂_0 , onde $\partial = (\partial_i)$ é o bordo de $W^\bullet$. Seja $\epsilon : P \longrightarrow \ker \partial_0$ a cobertura projetiva do núcleo de ∂_0 . Como P_0 é projetivo segue que existe $\widehat{h}_0 : P_0 \longrightarrow P$ tal que $h_0 = \epsilon \widehat{h}_0$. Agora consideremos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 P & \xleftarrow{\widehat{h}_0} & P_0 \\
 \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \\
 0 & \longleftarrow & P_1
 \end{array}$$

Utilizando a proposição 4.3 obtemos uma fatoração do morfismo representado no diagrama acima e, pelo fato de P ser a cobertura projetiva do kernel de ∂_0 , o extendemos a uma fatoração de h pela f .

□

Observação 4.6. *Dada uma seqüência de Auslander-Reiten iniciada em um módulos simples S :*

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \text{Tr}DS \longrightarrow 0$$

Podemos construir um triângulo de Auslander-Reiten em $\text{Quad}\Lambda$ associada a ela.

Para construirmos um triângulo a partir da seqüência exata acima consideremos a apresentação projetiva minimal de S

$$\oplus P^{n_i} \xrightarrow{h} P \longrightarrow S \longrightarrow 0$$

e a apresentação projetiva minimal de $N = \text{Tr}D(S)$:

$$P \xrightarrow{a} \oplus P^{m_i} \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

Uma vez que pode-se demonstrar que o morfismo $g : Y \longrightarrow \text{Tr}DS$ é essencial, segue que a fatoração da cobertura projetiva de N pela g é um epimorfismo. Portanto, as apresentações projetivas da seqüência exata acima não formam uma seqüência exata em $\text{Com}(\Lambda)$, pois a cobertura projetiva de Y coincide com a de N . (Para mais detalhes veja capítulo V de [ARS].) Temos:

$$\begin{array}{ccccc} \oplus P^{n_i} & \xrightarrow{(1,0)} & P^{n_i} \oplus P & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & P \\ \downarrow h & & \downarrow \gamma & & \downarrow a \\ P & \xrightarrow{b} & \oplus P^{m_i} & \xrightarrow{1} & \oplus P^{m_i} \end{array}$$

onde $\oplus P^{n_i}$ é a cobertura projetiva do radical de P e $\oplus P^{n_i} \xrightarrow{\gamma} \oplus P^{m_i} \longrightarrow Y$ é uma apresentação projetiva de Y .

Por outro lado, é importante observar que $P \xrightarrow{a} \oplus P^{m_i}$ é quase isomorfo ao Cone do morfismo

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{b} & P^{m_i} \\ \uparrow h & & \uparrow \epsilon_j \\ P^{n_i} & \xrightarrow{1} & P^{n_i} \end{array}$$

por isso o diagrama abaixo representa um triângulo em $\text{Quad}\Lambda$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & & 0 & & 0 & & \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 P & \xrightarrow{b} & \oplus P^{m_i} & \xrightarrow{1} & \oplus P^{m_i} & \longrightarrow & 0 \\
 \uparrow_h & & \uparrow_\gamma & & \uparrow_a & & \uparrow_0 \\
 \oplus P^{n_i} & \xrightarrow{(1,0)} & P^{n_i} \oplus P & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & \oplus P^{n_i} & \xrightarrow{h} & P \\
 \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow_h \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \oplus P^{n_i} \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & 0
 \end{array}$$

Através uma verificação direta mostra-se que o triângulo acima é um triângulo de Auslander-Reiten em $\text{Quad}\Lambda$.

No caso de uma álgebra hereditária $\oplus P_i$ é o radical de P . Neste caso é fácil mostrar que o triângulo acima é de Auslander-Reiten em $K(P_\Lambda)$.

Lema 4.3. *Seja Λ uma álgebra de Artin. Considere a seguinte seqüência quase cindida em $\text{Quad}\Lambda$*

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & & 0 & & 0 & & \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 P_0 & \xrightarrow{(1,0)} & P_0 \oplus Q_0 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & Q_0 & \longrightarrow & 0 \\
 \uparrow_\alpha & & \uparrow_\beta & & \uparrow_\gamma & & \uparrow_0 \\
 P_1 & \xrightarrow{(1,0)} & P_1 \oplus Q_1 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & Q_1 & \xrightarrow{\gamma'} & P_0 \\
 \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow_\alpha \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_1 \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & 0
 \end{array}$$

Então o morfismo $f = (f_i)_i$, onde $f_0 = (1, 0) : P_0 \longrightarrow P_0 \oplus Q_0$, $f_1 = (1, 0) : P_1 \longrightarrow P_1 \oplus Q_1$, e $f_i = 0 \ \forall i \in \mathbb{Z} - \{0, 1\}$ é um morfismo quase cindido à esquerda em $K(P_\Lambda)$

Demonstração. Dado um complexo $X^\bullet = (X_i, d_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ e um morfismo $h = (h_i) : P^\bullet \longrightarrow X^\bullet$, onde $P^\bullet$ denota o 2-complexo

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha} P_0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

É claro que par $h_i = 0$ para $i \in \mathbb{Z} - \{0, 1\}$, vamos denotar $h_1 = \tau$, $h_0 = \beta$ representados pelo diagram abaixo

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & P_1 & \xrightarrow{\alpha} & P_0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \circlearrowleft & \downarrow^\tau & \circlearrowleft & \downarrow^{\beta \circlearrowleft} & \downarrow & & \\ \cdots & \rightarrow & X_2 & \rightarrow & X_1 & \xrightarrow{d_1} & X_0 & \xrightarrow{d_0} & X_{-1} & \rightarrow & \cdots \end{array}$$

Temos que $\text{im}\beta \subseteq \ker d_0$. Considerando a cobertura projetiva do kernel de d_0 e denotando por ι a inclusão canônica, obtemos os morfismos η e δ como ilustra o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \xrightarrow{d'_1} & \ker d_0 & \xrightarrow{\iota} & X_0 \\ \eta \downarrow & \nearrow \text{cobert} & & & \\ P(\ker d_0) & & & & \\ \\ P_0 & \xrightarrow{\beta'} & \ker d_0 & \xrightarrow{\iota} & X_0 \\ \delta \downarrow & \nearrow \text{cobert} & & & \\ P(\ker d_0) & & & & \end{array}$$

Onde *cobert* indica cobertura projetiva de $\ker d_0$ e $\iota\beta' = \beta$ e $\iota d'_1 = d_1$

A partir daí conseguimos os dois seguintes morfismos de complexos

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & P_1 & \xrightarrow{\alpha} & P_0 & \rightarrow & 0 \\ n = \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow^\tau & \circlearrowleft & \downarrow^\delta & \circlearrowleft & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & X_1 & \xrightarrow{\eta} & P(\ker d_0) & \rightarrow & 0 \\ \\ 0 & \rightarrow & X_1 & \xrightarrow{\eta} & P(\ker d_0) & \rightarrow & 0 \\ t = \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow^1 & \circlearrowleft & \downarrow^{\text{cobert}} & \circlearrowleft & \downarrow \\ X_2 & \rightarrow & X_1 & \xrightarrow{d_1} & X_0 & \xrightarrow{d_0} & X_{-1} \end{array}$$

Ora, como o morfismo (f_1, f_0) é quase cindido em $\text{Morph}(P(\Lambda))$, existe (l_1, l_0) que fatora (τ, δ) pela (f_1, f_0) . Ou seja $l_1(1, 0) = \tau$ e $l_2(1, 0) = \delta$. Portanto temos o seguinte morfismo de complexos,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & P_1 \oplus Q_1 & \xrightarrow{\alpha} & P_0 \oplus Q_0 & \rightarrow & 0 \\ l = \downarrow & & \downarrow^{l_1} & & \downarrow^{l_0} & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & X_1 & \xrightarrow{\eta} & P(\ker d_0) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Observe que δ realiza uma fatoração de β' pela cobertura projetiva de $\ker d_0$, pois $\text{im}\beta' \subset \ker d_0$

$$\begin{array}{ccccc} P(\ker d_0) & & \xrightarrow{\text{cobert}} & \ker d_0 & \hookrightarrow X_0 \\ & \searrow \exists \delta & \uparrow \beta & \nearrow \beta' & \\ & & P_0 & & \end{array}$$

Assim obtém-se a fatoração desejada.

□

O próximo resultado ilustra uma situação em que a apresentação projetiva de uma seqüência de Auslander-Reiten, que já fornece um triângulo de Auslander-Reiten em $\text{Quad}\Lambda$, é também um triângulo de Auslander-Reiten em $K(\Lambda)$

Lema 4.4. *Consideremos a seguinte seqüência quase cindida em $\text{Morph}(P(\Lambda))$*

$$\begin{array}{ccccccc} P_0 & \xrightarrow{(1,0)} & P_0 \oplus Q_0 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & Q_0 & & \\ \uparrow \alpha & \circlearrowleft & \uparrow \beta & \circlearrowleft & \uparrow \gamma & & \\ P_1 & \xrightarrow{(1,0)} & P_1 \oplus Q_1 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & Q_1 & & \end{array}$$

Se o morfismo β for um monomorfismo, então o triângulo associado a esta seqüência exata é um triângulo de Auslander Reiten em $K^b(P_\Lambda)$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 0 & & 0 & & \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ P_0 & \xrightarrow{(1,0)} & P_0 \oplus Q_0 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & Q_0 & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow \alpha & & \uparrow \beta & & \uparrow \gamma & & \uparrow 0 \\ P_1 & \xrightarrow{(1,0)} & P_1 \oplus Q_1 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & Q_1 & \xrightarrow{\gamma'} & P_0 \\ \uparrow \circlearrowleft & & \uparrow \circlearrowleft & & \uparrow \circlearrowleft & & \uparrow \alpha \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_1 \\ & & & & & & \uparrow \\ & & & & & & 0 \end{array}$$

(onde $\gamma' : Q_1 \longrightarrow P_0$ é o morfismo induzido pelo fato pela semi-cindência da seqüência de complexos).

Demonstração. Pelo, lema anterior, o morfismo $f = (f_i)$ de $\text{Quad}\Lambda$ associado ao morfismo (f_1, f_0) dado pelo diagrama abaixo é quase cindido à esquerda,

$$\begin{array}{ccc} P_0 & \xrightarrow{(1,0)} & P_0 \oplus Q_0 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ P_1 & \xrightarrow{(1,0)} & P_1 \oplus Q_1 \end{array}$$

Pelo corolário 4.2 temos que $0 \rightarrow P_1 \xrightarrow{\alpha} P_0 \rightarrow 0$ e $0 \rightarrow Q_1 \xrightarrow{\gamma} Q_0 \rightarrow 0$ são indecomponíveis.

Portanto, resta apenas mostrar que, se β é mono, então o morfismo induzido em $\text{Quad}\Lambda$, s , que é representado pelo diagrama abaixo, é quase cindido à direita.

$$s = \begin{array}{ccc} P_0 \oplus Q_0 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & Q_0 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ P_1 \oplus Q_1 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & Q_1 \end{array}$$

dado um complexo $X^\bullet = \dots \rightarrow X_2 \xrightarrow{d_2} X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \rightarrow \dots$ e um morfismo em $K^b(\Lambda)$ representado pelo diagrama abaixo

$$h = \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Q_1 & \xrightarrow{\gamma} & Q_0 & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow^{h_1} & & \uparrow^{h_0} & & \uparrow \\ X_2 & \xrightarrow{d_2} & X_1 & \xrightarrow{d_1} & X_0 & \longrightarrow & X_{-1} \end{array}$$

segue que $\text{im } d_2 \subseteq \ker h_1$.

Considere o morfismo em $\text{Morph}(P(\Lambda))/R$ associado a h

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{d_1} & X_0 \\ h' \downarrow^{h_1} & & \downarrow^{h_0} \\ Q_1 & \xrightarrow{\gamma} & Q_0 \end{array}$$

Como s é quase cindido à direita em $\text{Morph}(P(\Lambda))/R$ segue que h' se fatora pela s . Ou seja, existe $r' = (r_1, r_0) : (X_1 \xrightarrow{d_1} X_0) \rightarrow (P_1 \oplus Q_1 \xrightarrow{\beta} P_0 \oplus Q_0)$ tal que $sr' = h'$.

$$r' = \begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{d_1} & X_0 \\ \downarrow^{r_1} & & \downarrow^{r_0} \\ P_1 \oplus Q_1 & \xrightarrow{\beta} & P_0 \oplus Q_0 \end{array}$$

Da comutatividade do diagrama acima segue que r_1 restrita ao kernel de d_1 se fatora pelo kernel de β e, como β é mono, segue que o diagrama abaixo é comutativo, e isto permite definir o homomorfismo de complexos r de $X^\bullet$ ao 2-complexo $0 \rightarrow P_1 \oplus Q_1 \xrightarrow{\beta} P_0 \oplus Q_0 \rightarrow 0$

$$r = \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P_1 \oplus Q_1 & \xrightarrow{\beta} & P_0 \oplus Q_0 & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow^{r_1} & & \uparrow^{r_0} & & \uparrow \\ X_2 & \xrightarrow{d_2} & X_1 & \xrightarrow{d_1} & X_0 & \longrightarrow & X_{-1} \end{array}$$

Desta forma temos que r dá uma fatoração de h pelo homomorfismo de complexos associado a s . $\square$

4.2.2 Aplicação ao caso de álgebras hereditárias

Nesta subseção vamos recuperar, de forma mais conveniente para nosso trabalho, o conhecido resultado que caracteriza todos os triângulos de Auslander-Reiten no caso das álgebras hereditárias.

Corolário 4.3. *Seja Λ uma álgebra de Artin hereditária. Então cada seqüência de Auslander-Reiten*

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$$

determina um triângulo de Auslander-Reiten em $K^b(\Lambda)$.

Demonstração. Se Λ é hereditária cada indecomponível de $K^b(\Lambda)$ é isomorfo a um complexo concentrado, veja [H], portanto dado um indecomponível $X^\bullet$ de $K^b(\Lambda)$ podemos supor $X^\bullet \simeq 0 \rightarrow X \rightarrow 0$.

Se X não for simples o levantamento da seqüência de Auslander-Reiten iniciada em X determina um triângulo de Auslander-Reiten em $\text{Quad}\Lambda$, pela Proposição 4.4.

E como a álgebra é hereditária, o kernel da cobertura projetiva é projetivo. Portanto, o morfismo β referido no lema anterior é monomorfismo, donde obtemos um triângulo de Auslander-Reiten iniciado em $X^\bullet$. Vale a pena observar que, no caso em que $X^\bullet$ for simples, o levantamento da seqüência de Auslander-Reiten iniciada em X não dá uma seqüência exata em $\text{Com}(\Lambda)$, mas dá um triângulo de Auslander-Reiten em $\text{Quad}\Lambda$, veja Observação 4.6. $\square$

Observação 4.7. *A demonstração do Corolário acima pode ser feita de um modo mais sucinto simplesmente observando que quando a álgebra é hereditária, então $\text{Quad}\Lambda = K(P_\Lambda)$.*

Assim, para descrevermos todos os triângulos de Auslander-Reiten no caso de uma álgebra hereditária está faltando apenas o caso em que o triângulo se inicia com um indecomponível de $K^b(\Lambda)$ que é isomorfo a um complexo concentrado associado a um módulo injetivo.

Seja $I = I(0)$ um injetivo indecomponível, associado ao simples S_0 . Consideremos a apresentação projetiva minimal de S_0 :

$$\oplus P_j^{m_{ij}} \xrightarrow{h} P_0 \longrightarrow S_0 \longrightarrow 0$$

E a apresentação projetiva minimal de $N = DTr(S_0)$:

$$\oplus P_j^{m_{ji}} \longrightarrow P_i \xrightarrow{a} N \longrightarrow 0$$

Existe um morfismo quase cindido à esquerda $I \xrightarrow{\pi} \frac{I}{\text{soc}(S_i)} \longrightarrow 0$, para cada simples S_i . Em particular, tomemos o simples S_0 , utilizando o morfismo quase cindido à esquerda associado a ele podemos construir, através de uma construção similar a da resolução projetiva minimal, o seguinte diagrama comutativo :

$$\text{Diag}_I = \left\{ \begin{array}{ccccccc} P_1 & \xrightarrow{a} & P_1 \oplus P_0 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & P_0 & & \\ \downarrow \epsilon_I & & \downarrow \epsilon' & & \downarrow \epsilon_S & & \\ \ker \epsilon & \xrightarrow{j} & \ker \epsilon_I / \text{soc} I & \xrightarrow{a'} & S_0 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \iota & & \downarrow j' & & \downarrow & & \\ P(I) & \xrightarrow{1} & P(I) & \longrightarrow & 0 & & \\ \downarrow \epsilon_I & \circlearrowleft & \downarrow \pi \epsilon_I & \circlearrowleft & \downarrow & & \\ I & \longrightarrow & I / \text{soc} I & \longrightarrow & 0 & & \end{array} \right.$$

onde $P(I)$ indica cobertura projetiva de I .

Considerando os morfismos $f = \iota \epsilon_I : P \longrightarrow P(I)$ e $g = j' \epsilon' : P_1 \oplus P_0 \longrightarrow P(I)$, extraímos o triângulo abaixo, o qual mostraremos que é de Auslander-Reiten

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_1 \\
\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\
P_1 & \xrightarrow{a} & P_1 \oplus P_0 & \xrightarrow{a} & P_0 & \longrightarrow & P(I) \\
\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\
P(I) & \xrightarrow{1} & P(I) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Usando as coberturas projetivas I e $\frac{I}{\text{soc}(S_i)}$, e o morfismo ϕ , obtemos um diagrama da forma

$$\begin{array}{ccc}
P(I) & & P(I) \\
\downarrow & & \downarrow \\
I & \xrightarrow{\pi} & \frac{I}{\text{soc}(S_i)}
\end{array}$$

fazendo a passagem aos kernéis podemos montar o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccc}
\ker(\epsilon_I) & \xrightarrow{j} & \ker(\pi\epsilon_I) \\
\downarrow \iota & & \downarrow j \\
P(I) & \xrightarrow{1} & P(I) \\
\downarrow \epsilon_I & & \downarrow \pi\epsilon_I \\
I & \xrightarrow{\pi} & \frac{I}{\text{soc}(S_i)}
\end{array}$$

Notemos que j é um monomorfismo. Utilizando a segunda coluna do diagrama acima e a sequência exata

$$0 \longrightarrow S_0 \longrightarrow I \xrightarrow{\pi} I/\text{soc}I \longrightarrow 0$$

montamos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & S_0 & \xrightarrow{i} & I & \xrightarrow{\pi} & I/\text{soc}I \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow \exists \theta & & \uparrow \epsilon_I & & \uparrow 1 \\
0 & \longrightarrow & \text{Ker}(\pi\epsilon) & \xrightarrow{\iota} & P_0 & \xrightarrow{\pi\epsilon} & I/\text{soc}I \longrightarrow 0
\end{array}$$

onde θ é uma passagem de ϵ_I aos kernéis. É claro que $\iota\epsilon_I \neq 0$, pois $\text{Ker}(\pi\epsilon) \not\cong \text{Ker}(\pi)$. Finalmente o próximo diagrama vai nos permitir esclarecer que $\text{coker}(j) = S_0$

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \ker(\pi) & \longrightarrow & P(I) & \longrightarrow & I \longrightarrow 0 \\
\downarrow \circlearrowleft & & \downarrow^j \circlearrowleft & & \downarrow^\epsilon \circlearrowleft & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \ker(\pi\epsilon) & \longrightarrow & P(I) & \longrightarrow & I/\text{soc} I \longrightarrow 0 \\
\downarrow \circlearrowleft & & \downarrow \circlearrowleft & & \downarrow \circlearrowleft & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & S_0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & I/\text{soc} I \longrightarrow 0
\end{array}$$

Daqui segue que $\text{im}(j) \subseteq \text{Ker}(\theta)$. Também, para cada $x \in \text{Ker}(\theta)$, temos: $i(x) = x\epsilon \text{im}(i')$, e portanto a primeira coluna do diagrama acima dá uma seqüência exata

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\pi) \xrightarrow{j} \text{Ker}(\pi\epsilon) \xrightarrow{\theta} S_0 \longrightarrow 0, \text{ logo } S_0 \simeq \text{Coker}(j).$$

Proposição 4.5. *Seja $I = I(S_0)$ um injetivo indecomponível não simples, consideremos as apresentações projetivas minimais de S e $\text{Tr} D(S_0) = N$. Usando as notações anteriores, temos que o seguinte diagrama é um triângulo de Auslander-Reiten em $\text{Quad } \Lambda$*

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_1 \\
\downarrow \circlearrowleft & & \downarrow \circlearrowleft & & \downarrow \circlearrowleft & & \downarrow^{\epsilon_1} \\
P_1 & \xrightarrow{(1,0)} & P_1 \oplus P_i & \longrightarrow & P_0 & \xrightarrow{\epsilon} & P_0 \\
\downarrow^{\epsilon_1} \circlearrowleft & & \downarrow^{\epsilon_j} \circlearrowleft & & \downarrow \circlearrowleft & & \downarrow \\
P(I) & \xrightarrow{1} & P(I) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow \circlearrowleft & & \downarrow \circlearrowleft & & \downarrow \circlearrowleft & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

(aqui ϵ denota ϵ_j restrita a P_i)

Demonstração. Primeiramente, notemos que o diagrama acima descreve um triângulo, ou seja, o cone do homorfismo de complexos definido pelos homomorfismos entre a primeira e a segunda coluna é quase isomorfo ao complexo concentrado $P_0[1]$. Também é claro que $0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\epsilon_I} P(I) \longrightarrow 0$ e $0 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$ são indecomponíveis.

Seja u o primeiro morfismo do triângulo acima, ou seja, $u = (u_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ onde $u_i = 0$ se $i \notin \{1, 2\}$, $u_1 = (1, 0)$ e $u_2 = 1_{P(I)}$. De acordo com a Observação 2.25, resta apenas provar que dado um morfismo f que não é mono que cinde, de $0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\epsilon_I} P(I) \longrightarrow 0$ em $W^\bullet$, então f se fatora pelo morfismo u .

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P(I) & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \\
\downarrow & & \downarrow^{f_1} & & \downarrow^{f_2} & & \downarrow \\
W_0 & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_2 & \longrightarrow & W_3 \longrightarrow
\end{array}$$

Para isto, definimos $g = (g_i)$, de $0 \rightarrow P_1 \oplus P_i \xrightarrow{\epsilon_j} P(I) \rightarrow 0$ em $W^\bullet$ dada por: $g_i = 0$ para $i \notin \{1, 2\}$, $g_1 = (f_1, 0)$ e $g_2 = f_2$, e segue que $f = gu$. $\square$

4.2.3 Alguns triângulos em extensões por um ponto

Seja Δ uma k -álgebra de dimensão finita, onde k é um corpo algebricamente fechado. Considerando $\Lambda = \Delta[M]$ uma extensão por um ponto de Δ , digamos

$$\Lambda = \begin{pmatrix} k & 0 \\ {}_k M_\Delta & \Delta \end{pmatrix}.$$

Lembremos que se Δ tem dimensão global finita e M for finitamente gerado então Λ tem dimensão global finita também.

Vamos estudar alguns triângulos de Auslander-Reiten de $D^b(\Delta)$ que podem ser obtidos pela aplicação do Cone_Δ em triângulos de Auslander-Reiten de $D^b(\Lambda)$. Mais precisamente analisaremos a associação entre triângulos de $K(P_\Lambda)$ e de $K(P_\Delta)$, através da aplicação cone_Δ .

Para efetuarmos nosso estudo procederemos de forma análoga processo desenvolvido pelo Prof. Merklen, no trabalho em [M] com o funtor Cok.

Cada complexo de Λ -módulos tem a forma $(X^\bullet, Y^\bullet, f^\bullet)$, onde $X^\bullet$ é um complexo de k -espaços vetoriais, $Y^\bullet \in \text{Com}(\Delta)$, e $f^\bullet : X^\bullet \otimes M \rightarrow Y^\bullet$ é um morfismo de complexos em $\text{Com}(\Delta)$, assim temos que $\text{cone}_\Delta(X^\bullet, Y^\bullet, f^\bullet) := \text{cone}(f^\bullet)$ é um complexo em $\text{Com}(\Delta)$.

Dado um morfismo $(v, v') : (A^\bullet, B^\bullet, a^\bullet) \rightarrow (C^\bullet, D^\bullet, b^\bullet)$, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} A^\bullet \otimes M & \xrightarrow{a^\bullet} & B^\bullet & & \\ \downarrow v \otimes 1 & \circlearrowleft & \downarrow v' & & \\ C^\bullet \otimes M & \xrightarrow{b^\bullet} & D^\bullet & & \end{array}$$

Aplicando o TR1 e em seguida TR3 aos morfismos $a^\bullet : A^\bullet \otimes M \rightarrow B^\bullet$ e $b^\bullet : C^\bullet \otimes M \rightarrow D^\bullet$

obtemos o seguinte morfismo de triângulos:

$$\begin{array}{ccccccc} A^\bullet \otimes M & \xrightarrow{a^\bullet} & B^\bullet & \rightarrow & \text{Cone}(a^\bullet) & \rightarrow & T(A^\bullet \otimes M) \\ \downarrow v \otimes 1 & \circlearrowleft & \downarrow v' & & \exists \downarrow h & & \downarrow T v \\ C^\bullet \otimes M & \xrightarrow{b^\bullet} & D^\bullet & \rightarrow & \text{Cone}(b^\bullet) & \rightarrow & T(C^\bullet \otimes M) \end{array}$$

Proposição 4.6. *Com as notações acima, cone_Δ tem as seguintes propriedades*

- (1) *Dado $(X^\bullet, Y^\bullet, f^\bullet)$, temos $\text{cone}(f^\bullet)$ é exato se, e somente se $f^\bullet$ é quase isomorfismo*
- (2) *Dado um morfismo $(v, v') : (A^\bullet, B^\bullet, a^\bullet) \rightarrow (C^\bullet, D^\bullet, b^\bullet)$, temos que (v, v') é quase isomorfismo se, e somente se $\text{cone}_\Delta(v, v')$ é quase isomorfismo*
- (3) *Se um morfismo $g = (v, v') : (A^\bullet, B^\bullet, a^\bullet) \rightarrow (C^\bullet, D^\bullet, b^\bullet)$ é mono que cinde, então $\text{cone}_\Delta(g)$ também o é.*
- (4) *Dado $(X^\bullet, Y^\bullet, f^\bullet)$, se $f^\bullet$ é nulo homotópica, então $\text{cone}(f)$ é quase isomorfo a $Y^\bullet$*

Lema 4.5. *Seja Λ uma extensão por um ponto de uma k -álgebra A . Consideremos em $\text{Com}(\Lambda)$ um morfismo de triplas de complexos $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) : (A'^\bullet, B^\bullet, a) \rightarrow (P'^\bullet, D^\bullet, a')$, se $\text{Hom}(A'^\bullet \otimes M, D) = 0$ então $\text{cone}_\Delta(\sigma)$ está unicamente determinada.*

Demonstração. Consideremos o diagrama comutativo determinado por σ

$$\begin{array}{ccc} A'^\bullet \otimes M & \xrightarrow{a} & B^\bullet \\ \downarrow \sigma_1 \otimes 1 & & \downarrow \sigma_2 \\ P'^\bullet \otimes M & \xrightarrow{a'} & D^\bullet \end{array}$$

Aplicando o TR1 nos morfismos a e a' os triângulos abaixo, e pela comutatividade do primeiro quadrado o TR3 nos garante a existência do terceiro morfismo, induzido pelo cone.

$$\begin{array}{ccccccc} A'^\bullet \otimes M & \xrightarrow{a} & B^\bullet & \xrightarrow{f} & \text{Cone}(a) & \rightarrow & T(A'^\bullet \otimes M) \\ \downarrow \sigma_1 \otimes 1 & \cup & \downarrow \sigma_2 & & \exists \downarrow h & & \downarrow \\ P'^\bullet \otimes M & \xrightarrow{a'} & D^\bullet & \xrightarrow{g} & \text{Cone}(a') & \rightarrow & T(P'^\bullet \otimes M) \end{array}$$

Agora supondo que $\text{Hom}(A'^\bullet \otimes M, D) = 0$, vamos mostrar que h é único.

Notemos que tomando $\alpha = \text{Hom}(f, D)$, $\delta = \text{Hom}(B, g)$, $\gamma = \text{Hom}(\text{Cone}(a), g)$ e $\beta = \text{Hom}(g, \text{Cone}(a'))$ conseguimos o seguinte diagrama comutativo :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(\text{Cone}(a), D^\bullet) & \xrightarrow{\alpha} & \text{Hom}(B^\bullet, D^\bullet) \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \delta \\ \text{Hom}(\text{Cone}(a), \text{Cone}(a')) & \xrightarrow[\beta]{} & \text{Hom}(B^\bullet, \text{Cone}(a')) \end{array}$$

Como $\text{Hom}(-, D^\bullet)$ é um funtor cohomológico contravariante e $\text{Hom}(A'^\bullet \otimes M, D^\bullet) = 0$ por hipótese, veremos que α é um isomorfismo. Para isto, basta aplicar este funtor ao primeiro triângulo

$$A'^\bullet \otimes M \rightarrow B^\bullet \rightarrow \text{Cone}(a) \rightarrow T(A'^\bullet \otimes M)$$

Olhando para a seqüência obtida pela aplicação do funtor a este triângulo, e o fato de $\text{Hom}(A'^\bullet \otimes M, Q^\bullet) = 0$, segue que α é um isomorfismo. Similarmente δ é um isomorfismo.

Agora provemos que h é univocamente determinada por σ . Para isto é suficiente verificar a validade da seguinte afirmação.

Se ϵ é um morfismo tal que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccccc} B^\bullet & \rightarrow & \text{Cone}(a) & \rightarrow & T(A'^\bullet \otimes M) \\ 0 \downarrow & & \epsilon \downarrow & & \downarrow 0 \\ D^\bullet & \rightarrow & \text{Cone}(a') & \rightarrow & T(P'^\bullet \otimes M) \end{array}$$

então, $\epsilon = 0$.

Notemos que a afirmação acima é suficiente pois, se temos $\Phi_1(\sigma)$ e $\Phi_2(\sigma)$ associadas ao morfismo de triplas $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$, então significa que ambos foram obtidos a partir da aplicação do TR3 ao seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} A'^\bullet \otimes M & \xrightarrow{a} & B^\bullet & \xrightarrow{f} & \text{Cone}(a) & \longrightarrow & T(A^\bullet \otimes M) \\ \downarrow \sigma_1 \otimes 1 & \circlearrowleft & \downarrow \sigma_2 & \exists \downarrow \Phi_i(\sigma) & & & \downarrow \\ P'^\bullet \otimes M & \xrightarrow{a'} & D^\bullet & \xrightarrow{g} & \text{Cone}(a') & \longrightarrow & T(P'^\bullet \otimes M) \end{array}$$

onde $i = 1$ ou $i = 2$. Assim, $\epsilon = \Phi_1(\sigma) - \Phi_2(\sigma)$ estão nas condições da afirmação acima. Portanto, da validade da afirmação acima, segue que $\Phi_1(\sigma) - \Phi_2(\sigma)$ é homotópica zero, ou seja, associado a σ existe um único morfismo a menos de homotopia.

Para finalizar vamos demonstrar a validade da afirmação acima. Seja ϵ tal que

$$\begin{array}{ccccc} B^\bullet & \rightarrow & \text{Cone}(a) & \rightarrow & TA'^\bullet \otimes M \\ 0 \downarrow & & \epsilon \downarrow & & \downarrow 0 \\ D^\bullet & \rightarrow & \text{Cone}(a') & \rightarrow & TP'^\bullet \otimes M \end{array}$$

Como γ é sobrejetora, segue que $\epsilon = \gamma(\epsilon')$ para $\epsilon' \in \text{Hom}(\text{Cone}(a), D^\bullet)$, logo $\delta\alpha(\epsilon') = \beta\gamma(\epsilon') = 0$.

Como α, δ são isomorfismo, então $\epsilon' = 0$, logo $\epsilon = 0$. □

Corolário 4.4. *Cone_Δ pode ser visto como um funtor de categorias derivadas, quando restrito à menor subcategoria triângulada de $D(\Lambda)$ que contém a imersão de $D(\Delta)$.*

4.3 Resultados obtidos com o uso do cone_Δ

Dado um triângulo $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ em $D(\Lambda)$, em nosso primeiro resultado veremos que sua imagem pelo Cone_Δ não é um triângulo, ou seja, a seqüência

$$\text{Cone}_\Delta(X) \xrightarrow{\text{Cone}_\Delta(u)} \text{Cone}_\Delta(Y) \xrightarrow{\text{Cone}_\Delta(v)} \text{Cone}_\Delta(Z) \xrightarrow{\text{Cone}_\Delta(w)} \text{Cone}_\Delta(TX)$$

não é um triângulo em $D^b(\Delta)$. Mas, trocando o sinal do último morfismo da seqüência cima obtemos um triângulo, ou seja

$$\text{Cone}_\Delta(X) \xrightarrow{\text{Cone}_\Delta(u)} \text{Cone}_\Delta(Y) \xrightarrow{\text{Cone}_\Delta(v)} \text{Cone}_\Delta(Z) \xrightarrow{-\text{Cone}_\Delta(w)} \text{Cone}_\Delta(TX)$$

é um triângulo.

Isto ocorre pelo fato do transladado do triângulo dado ser o seguinte triângulo:

$$Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \xrightarrow{-Tu} TY$$

Logo, podemos trabalhar com o Cone_Δ para estudar triângulos de $D^b(\Delta)$ a partir de triângulos de $D^b(\Lambda)$, desde que estejamos atentos a este detalhe.

Proposição 4.7. *Consideremos $\Lambda = \begin{pmatrix} k & {}_k M_\Delta \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$ uma extensão por um ponto da k -álgebra de dimensão finita Δ , e um triângulo $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ em $D(\Lambda)$. Então*

$$\text{Cone}_\Delta(X) \xrightarrow{\text{Cone}_\Delta(u)} \text{Cone}_\Delta(Y) \xrightarrow{\text{Cone}_\Delta(v)} \text{Cone}_\Delta(Z) \xrightarrow{\text{Cone}_\Delta(w)} \text{Cone}_\Delta(TX),$$

não é um triângulo em $D^b(\Delta)$, porém

$$\text{Cone}_\Delta(Y) \xrightarrow{\text{Cone}_\Delta(v)} \text{Cone}_\Delta(Z) \xrightarrow{\text{Cone}_\Delta(w)} \text{Cone}_\Delta(TX) \xrightarrow{\text{Cone}_\Delta(Tu)} \text{Cone}_\Delta(TY)$$

é triângulo em $D(\Delta)$

(ou, equivalentemente, $\text{Cone}(X) \xrightarrow{\text{Cone}(u)} \text{Cone}Y \xrightarrow{\text{Cone}(v)} \text{Cone}Z \xrightarrow{-\text{Cone}(Tw)} \text{Cone}TX$ é um triângulo em $D(\Delta)$)

Demonstração. Dado um triângulo,

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

em $D(\Lambda)$, podemos supor que ele é puro, ou seja foi obtido do morfismo $X \xrightarrow{u} Y \in D(\Lambda)$ por aplicação do TR1. Sendo u um morfismo de triplas, digamos $X = (\hat{A}^\bullet, \hat{B}^\bullet, i) \xrightarrow{(u, u')}$ $Y = (\hat{A}'^\bullet, B'^\bullet, i')$, ao qual está associado um quadrado comutativo da forma:

$$\begin{array}{ccc} \hat{A}^\bullet \otimes M & \xrightarrow{i} & B^\bullet \\ \downarrow u & \circlearrowleft & \downarrow u' \\ \hat{A}'^\bullet \otimes M & \xrightarrow{i'} & B'^\bullet \end{array}$$

Para simplificar a notação, sejam $A = \hat{A}^\bullet \otimes M$, $A' = \hat{A}'^\bullet \otimes M$

Notemos que aplicando o TR1 aos morfismo (u, u') , o triângulo obtido coincide com o triângulo dado acima.

Aplicando o TR1 em i e u obtemos os triângulos:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & \text{Cone}_\Delta X & \xrightarrow{k} & TA \\ & & A \xrightarrow{u} & A' \xrightarrow{v} & A'' \xrightarrow{w} & & TA \end{array}$$

Aplicando o TR1 em u' e i' obtemos os triângulos:

$$\begin{array}{ccccc} A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{j'} & \text{Cone}_\Delta Y & \xrightarrow{k'} & TA \\ & & B \xrightarrow{u'} & B' \xrightarrow{v'} & B'' \xrightarrow{w'} & & TB \end{array}$$

Desta forma obtemos o seguinte diagrama comutativo em $D(\Delta)$

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \xrightarrow{k} & TA \\ u \downarrow & \circlearrowleft & u' \downarrow & \circlearrowleft & h \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow Tu \\ A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{j'} & C' & \xrightarrow{k'} & TA' \\ v \downarrow & \circlearrowleft & v' \downarrow & & & & \\ A'' & \xrightarrow{i''} & B'' & & & & \\ w \downarrow & \circlearrowleft & w' \downarrow & & & & \\ TA'' & \xrightarrow{Ti} & TB'' & & & & \end{array}$$

Aqui i'' foi obtido pelo TR3, e, para simplificar a notação, denotamos $C' = \text{Cone}(i')$, $h = \text{Cone}_\Delta(u)$ e $B'' = \text{Cone}(u')$.

Agora, aplicando o axioma do octaedro três vezes vamos obter o triângulo desejado. Para tanto vamos ajustar as hipóteses.

Aplicando TR1 em i'' obtemos o triângulo

$$A'' \xrightarrow{i''} B'' \xrightarrow{j''} C'' \xrightarrow{k''} TA''$$

Aqui $C'' \cong \text{cone}_\Delta(A'', B'', i'')$ Aplicando TR1 na composição $A \xrightarrow{u'i} B'$ obtemos o triângulo:

$$A \xrightarrow{u'i} B' \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} TA$$

Aplicando TR4 nos triângulos:

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \xrightarrow{k} TA$$

$$A \xrightarrow{u'i} B' \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} TA$$

$$A'' \xrightarrow{i''} B'' \xrightarrow{j''} C'' \xrightarrow{k''} TA''$$

obtemos os morfismos $C \xrightarrow{a} D, D \xrightarrow{b} B''$, e o triângulo:

$$C \xrightarrow{a} D \xrightarrow{b} B'' \xrightarrow{Tjw'} TC$$

e as seguintes identidades que seguem da comutatividade do diagrama: $bf = v'$, $ga = k$, $-aj = fu'$ e $w'b = Tig$.

Por outro lado, ao aplicarmos TR4 aos seguintes triângulos:

$$A \xrightarrow{u} A' \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} TA$$

$$A' \xrightarrow{i'} B' \xrightarrow{j'} C' \xrightarrow{k'} TA'$$

$$A \xrightarrow{u'i} B' \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} TA$$

obtemos os morfismos $A'' \xrightarrow{c} D, D \xrightarrow{d} C'$, e o triângulo:

$$A'' \xrightarrow{c} D \xrightarrow{d} C' \xrightarrow{Tk'v} TA$$

e as seguintes identidades que seguem da comutatividade do diagrama: $df = j'$, $gc = w$, $cv = fi'$ e $k'd = Tug$.

Observação 4.8. Podemos supor que $i'' = bc$

De fato, o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{i} & A' & \xrightarrow{v} & A'' & \xrightarrow{w} & TA \\ i \downarrow \circlearrowleft & & i' \downarrow \circlearrowleft & & bc \downarrow \circlearrowleft & & \downarrow Ti \\ B & \xrightarrow{u'} & B' & \xrightarrow{v'} & B'' & \xrightarrow{w'} & TB \end{array}$$

Pois, $i'u = u'i$, por hipótese, além disso $bcv = bfi'$, e $cv = fi'$. Logo $bcv = bfi' = v'i'$, já que $bf = v'$ (pela primeira aplicação de TR4). Temos também a identidade $w'bc = (Tig)c = Ti(gc) = Tiw$, pois $w'b = Tig$, ainda em virtude da primeira aplicação de TR4 e $gc = w$ (pela segunda aplicação de TR4). Portanto o diagrama acima comuta.

Logo, considerando o triângulo (obtido pelo TR4, na última etapa)

$$A'' \xrightarrow{c} D \xrightarrow{d} C'' \xrightarrow{Tv k'} TA,$$

a rotação do triângulo obtido no primeiro uso do TR4,

$$C \xrightarrow{a} D \xrightarrow{b} B'' \xrightarrow{Tjw'} TC$$

e o triângulo obtido pela aplicação de TR1 no morfismo $A'' \xrightarrow{i''} B''$, que é dado por :

$$A'' \xrightarrow{i''} B'' \xrightarrow{j''} C'' \xrightarrow{k''} TA'',$$

podemos aplicar TR4 novamente, e assim obtermos o triângulo

$$C' \xrightarrow{p} C'' \xrightarrow{q} TC \xrightarrow{Td(-Ta)} TC'$$

e as identidades $qj'' = Tjw'$, $k''p = Tv k'$, $pd = j''b$ e $-Tag = Tck''$. Lembrando que $C' = \text{Cone}_\Delta Y$, $C'' = \text{Cone}_\Delta(\text{Cone}(u, u'))$ e $TC = \text{Cone}_\Delta TX$, $Z \cong \text{Cone}(u, u')$. Temos que

$$\text{Cone}_\Delta(Y) \xrightarrow{\text{cone}_\Delta(v)} \text{Cone}_\Delta(Z) \xrightarrow{\text{Cone}_\Delta(w)} \text{Cone}_\Delta(TX) \xrightarrow{\text{Cone}_\Delta(Tu)} \text{Cone}_\Delta(TY)$$

é um triângulo em $D(\Delta)$

□

Corolário 4.5. Nas condições da proposição acima, dado um morfismo $(X, X', i) \xrightarrow{(u, u')} (Y, Y', i')$, temos o seguinte diagrama, no qual todos os quadrados, exceto o assinalado por $\boxtimes$, são comutativos, o quadrado assinalado por $\boxtimes$ é anticomutativo.

$$\begin{array}{ccccccc} X \otimes M & \xrightarrow{i} & X' & \xrightarrow{j} & X'' & \xrightarrow{k} & TX \otimes M \\ u \downarrow & \circlearrowleft & u' \downarrow & \circlearrowleft & u'' \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow Tu \\ Y \otimes M & \xrightarrow[m]{} & Y' & \xrightarrow[j']{} & C' & \xrightarrow[k']{} & TY \otimes M \\ v \downarrow & \circlearrowleft & v' \downarrow & \circlearrowleft & v'' \downarrow & \circlearrowleft & Tv \downarrow \\ Z \otimes M & \xrightarrow[t]{} & Z' & \xrightarrow[j'']{} & C'' & \xrightarrow[j'']{} & TZ \otimes M \\ w \downarrow & \circlearrowleft & w' \downarrow & \circlearrowleft & w'' \downarrow & \boxtimes & \downarrow w \\ TX \otimes M & \xrightarrow[T(i)]{} & TX' & \xrightarrow[T_1]{} & TX' & \xrightarrow[T(k)]{} & T^2X \otimes M \end{array}$$

Demonstração. Segue diretamente da demonstração da última proposição. $\square$

Corolário 4.6. *Seja Λ é uma extensão por um ponto de uma k -álgebra de dimensão finita Δ . Suponhamos ainda que Δ tenha dimensão global finita Δ , dado um triângulo em $D(\Lambda)$*

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

Onde $X = (0, X', 0), Y = (Y'', Y', m), Z = (Z'', Z', t)$. Temos:

- (1) $X \in \text{ind}D(\Lambda)$, se e somente se $\text{Cone}_\Delta X \in \text{ind}\Delta$
- (2) Se u é minimal, então $\text{Cone}_\Delta(u)$ é minimal.
- (3) Se o triângulo acima não cinde, então o triângulo $X' \xrightarrow{u} Y' \xrightarrow{v} Z' \xrightarrow{w} TX'$ não cinde em $D(\Delta)$

Demonstração. Aplicando o processo da demonstração anterior ao triângulo do enunciado temos o seguinte diagrama comutativo, do qual decorrem todas as afirmações do corolário.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \xrightarrow{0} & X' & \xrightarrow{1} & X' & \xrightarrow{0} & 0 \\
 0 \downarrow & \circlearrowleft & u \downarrow & \circlearrowleft & u \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow 0 \\
 Y'' \otimes M & \xrightarrow{m} & Y' & \xrightarrow{j'} & C' & \xrightarrow{k'} & TY' \\
 v \downarrow & \circlearrowleft & v' \downarrow & \circlearrowleft & v'' \downarrow & \circlearrowleft & Tv \downarrow \\
 Z'' \otimes M & \xrightarrow{t} & Z' & \xrightarrow{j''} & C'' & \xrightarrow{j''} & TZ' \\
 0 \downarrow & \circlearrowleft & w' \downarrow & \circlearrowleft & w'' \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow 0 \\
 0 & \xrightarrow{0} & TX' & \xrightarrow{T1} & TX' & \xrightarrow{0} & 0
 \end{array}$$

$\square$

Proposição 4.8. *Considere $\Lambda = \begin{pmatrix} k & {}_K M_\Delta \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$ uma extensão por ponto da k -álgebra de dimensão finita Δ e seja*

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

um triângulo de Auslander-Reiten $D(\Lambda)$ e com $X = (0, X', 0)$, $Y = (Y'', Y', m)$, $Z = (Z'', Z', t)$. Então

$$\text{Cone}(X) \xrightarrow{\text{Cone}(u)} \text{Cone}(Y) \xrightarrow{\text{Cone}(v)} \text{Cone}(Z) \xrightarrow{\text{Cone}(Tw)} \text{Cone}(TX)$$

é triângulo de Auslander-Reiten em $D(A)$

Demonstração. Pelo teorema de Happel, é suficiente mostrar que $Cone_{\Delta}(u)$ é uma fonte. Usando o corolário anterior, resta mostrar apenas que todo morfismo $f : X \rightarrow W$ que não é mono que cinde se fatora pelo morfismo $Cone_{\Delta}(u)$. Dada $f : X \rightarrow W \in D(\Delta)$ que não é mono que cinde temos que o morfismo $(0, f) \in D(\Lambda)$. Como o triângulo

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

é um triângulo de Auslander-Reiten, donde segue que $(0, f)$ se fatora pelo morfismo $(0, u)$, segue que f se fatora por $cone_{\Delta}(u)$. $\square$

4.4 Uso do funtor cone no estudo de extensões de hereditárias

Nesta seção continuaremos estudando aplicações do funtor cone, com o objetivo de fazer uma descrição melhor de alguns triângulos de Auslander-Reiten se supormos que a álgebra A é hereditária. Continuamos trabalhando com uma extensão por um ponto $\Lambda = A[M]$. Dada uma seqüência exata iniciada em $(0, X, 0) \in \text{mod } \Lambda$

$$0 \longrightarrow (0, X, 0) \xrightarrow{(0, u)} (V, Y, h) \xrightarrow{(v, t)} (V, Z, f) \longrightarrow 0$$

temos um triângulo em $K(P_{\Lambda})$ dado pelo levantamento das coberturas projetivas. Vimos que se a álgebra $\Lambda = A[M]$ é hereditária os levantamentos das seqüências de Auslander-Reiten produzem triângulos de Auslander-Reiten.

O resultado da seção anterior permite concluir para cada triângulo de Auslander-Reiten de $K(P_{\Lambda})$ iniciada em objetos da forma $(0, X, 0)$ obtemos um triângulo de Auslander-Reiten $K(P_A)$, usando o funtor $cone_A$. Este triângulo de $K(P_A)$ está bem descrito no caso da álgebra A ser hereditária. Entretanto, o funtor $cone_{\Delta}$ pode levar dois triângulos não isomorfos em $K(P_{\Lambda})$ a um mesmo triângulo em $K(P_A)$.

Seja $X \in \text{ind } A$ tal que $(0, X, 0)$ não é injetivo em $\text{mod } \Lambda$. Consideremos $P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow X$ e $Q_2 \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_0 \rightarrow DTr(0, X, 0)$, apresentações projetivas minimais. É fácil verificar que Q_2 é da forma $\cong (0, Q, 0)$, com $Q \in \text{Proj } A$. No trabalho [M] é dada uma descrição precisa de todos os morfismos envolvidos na seguinte seqüência de Auslander-Reiten iniciada em $(0, X, 0)$, fazendo os levantamentos às coberturas projetivas podemos explicitar todos os morfismos que aparecem no seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Q_2 & \xrightarrow{1=c_2} & Q_2 & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & \circlearrowleft & i \downarrow & \circlearrowleft & i \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{a_1} & P_1 \oplus Q_1 & \xrightarrow{c_1} & Q_1 & \longrightarrow & 0 \\
& & \alpha \downarrow & \circlearrowleft & b \downarrow & \circlearrowleft & v'' \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & P_0 & \xrightarrow{a_0} & P_0 \oplus Q_0 & \xrightarrow{c_0} & Q_0 & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & \circlearrowleft & w' \downarrow & \circlearrowleft & w'' \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & (0, X, 0) & \xrightarrow{(0, u)} & (V, Y, h) & \xrightarrow{(v, t)} & DTr(0, X, 0) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

onde i é a inclusão natural.

Proposição 4.9. *Com relação ao diagrama acima temos:*

- (1) *o morfismo $(c_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ é quase cindido à direita.*
- (2) *o morfismo $(d_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ é quase cindido à esquerda.*

Demonstração. Consideremos os complexos

$$\begin{aligned}
P^\bullet &= \cdots 0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0 \cdots \\
X^\bullet &= \cdots \longrightarrow X_n \xrightarrow{\partial_n} X_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \longrightarrow X_j \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\partial_1} X_0 \longrightarrow \cdots
\end{aligned}$$

E um morfismo $h : P^\bullet \rightarrow X^\bullet$, que não é epi que cinde, representado pelo diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{\alpha} & P_0 & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & \circlearrowleft & \tau \downarrow & \circlearrowleft & \beta \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & X_2 & \xrightarrow{d_2} & X_1 & \xrightarrow{d_1} & X_0 & \xrightarrow{d_0} & X_{-1}
\end{array}$$

Como $d_0\beta = 0$ e $\text{im}d_1 \subseteq \ker(d_0)$ temos que o morfismo h é fatorável se, e somente se, o morfismo h' , representado a seguir, é fatorável.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{\alpha} & P_0 & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & \circlearrowleft & \tau \downarrow & \circlearrowleft & \beta' \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & X_2 & \xrightarrow{d_2} & X_1 & \xrightarrow{d_1} & \ker(d_0) & \xrightarrow{0} & 0
\end{array}$$

onde β' é o único morfismo que fatora β pelo kernel de d_0 . Procedendo de forma análoga ao que fizemos na seção 1, obtemos morfismos t'_0, t_1 tais que os seguintes diagramas comutam.

$$\begin{array}{c}
(1) \quad \begin{array}{ccc} & P_1 & \\ a_1 \swarrow & & \searrow \tau \\ P_1 \oplus Q_1 & \xrightarrow{t_1} & X_1 \end{array} \\
(2) \quad \begin{array}{ccc} & P_0 & \\ a_0 \swarrow & & \searrow \beta' \\ P_0 \oplus Q_0 & \xrightarrow{t'_0} & \ker(d_0) \end{array} \\
(3) \quad \begin{array}{ccccc} X_1 & \xrightarrow{d_1} & \ker(d_0) & & \\ t_1 \uparrow & \circlearrowleft & t'_0 \uparrow & & \\ P_1 \oplus Q_1 & \xrightarrow{b} & P_0 \oplus Q_0 & & \end{array}
\end{array}$$

Aqui estamos usando fato da primeira seqüência de quadrados ser de Auslander-Reiten em $Quad_\Lambda$. (Lembrando que o morfismo t_1 é dado pela restrição de t'_0 ao levantamento do kernel da cobertura projetiva, que Q_2 é o kernel de b , e que α é a inclusão natural, uma vez que A é hereditária). Combinando os diagramas (1),(2) e (3) com o diagrama que representa o morfismo h' , podemos obter a fatoração de h' via o homomorfismo de $Com(P_\Lambda)$ que levanta $(0, u)$ da seguinte forma:

Fazendo a passagem aos keres ao quadrado comutativo (3) obtemos um morfismo $t'_2 : Q_2 \rightarrow \ker(d_1)$, pois Q_2 o kernel de b . Assim, usando a composio da incluso natural de $\ker(d_1)$ e t'_2 conseguimos um morfismo $t_2 : Q_2 \rightarrow X_2$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & Q_2 & \longrightarrow & P_1 \oplus Q_1 & \xrightarrow{b} & P_0 \oplus Q_0 \longrightarrow 0 \\
& & t_2 \downarrow & \circlearrowleft & t_1 \downarrow & \circlearrowleft & t'_0 \downarrow \circlearrowleft \downarrow \\
0 & \longrightarrow & X_2 & \xrightarrow{d_2} & X_1 & \xrightarrow{d_1} & \ker(d_0) \xrightarrow{0} 0
\end{array}$$

 fcil ver que o morfismo representado acima permite uma fatoro de h' pelo levantamento de (o, u) . Finalmente definimos t_0 sendo a composio da incluso natural do kernel de d_0 com t'_0 , e nas demais posioes podemos definir $t_i = 0$. Desta forma obtemos o morfismo $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ que permite uma fatoro de h pelo levantamento de (o, u) , o qual denotamos por $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, ou seja, $h' = (t_i a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Portanto $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ quase cindido.

De forma similar se mostra o segundo tem da proposio.

Referências Bibliográficas

- [ASZ] I. Assem, M. J. Souto, R. Zuazua, *Aisles in a Triangulated Category with a Duality*, Université de Sherbrooke, Faculté des sciences, Département de mathématiques et d'informatique. Rapport 292, Octobre 2002.
- [AF] F.W. Anderson and K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Graduate texts in Mathematics 13, Springer-Verlag, Heildeberg-Berlin, 1973.
- [Ad] I.T. Adamson, *Rings, Modules and Algebras*, Oliver & Boyd - Edinburgh - 1971
- [ARS] M. Auslander, I. Reiten, S. Smalø, *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge studies in advanced mathematics, Cambridge University Press
- [AuR] M. Auslander, I. Reiten *Representation Theory of Artin Algebras V. Methods for computing almost split sequences* Comm.in Algebra, 5 p 239-294 (1975)
- [Aus] M. Auslander, *Representation of artin algebras I*, Comm. Algebra 1 (1974), 177-268
- [AS] M. Auslander, S. Smalø, *Almost Split Sequences in Subcategories*, J. Algebra, 69 (1981) P.426-454. Addendum. J. Algebra, 71 (1981) P. 592-594
- [BL] M. Barot, H.Lenzing, *One-Point Extension and Derived Equivalence*, Journal of Algebra, 264 (2003), 1-5.
- [DF] B. Farb, R.K. Dennis, *Noncommutative Algebra*, Graduate texts in Mathematics 144, Springer-Verlag, 1981.
- [FM] J. Freyd, B. Mitchel, *Abelian Categories*, New York: Harper & Row, 1970
- [G] P. Grivel *Catégories Dérivées et Foncteurs Dérivées*, édité par Armand Borel, Academy Press.
- [GM] I. Gelfand, Y. Manin, *Methods of Homological Algebra*, Springer, 1996.

- [GZ] P. Gabriel, M. Zisman, *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1967 Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1986
- [Gr] E. L. Grenn *Multiplicative bases, Gröbner bases, and right Gröbner bases*, Preprint Virginia Polytechnic Institute and State University (1998)- Blacksburg, Virginia 24061, USA
- [J] N. Jacobson, *Basic Algebra II*, W.H Freeman and Company (1980) - San Francisco, U.S.A
- [H] D. Happel, *Triangulate categories in the representation theory of finite-dimensional algebras* in Lecture Notes London Math. Soc., 1988
- [Hd] R. Hartshorne, *Residues and Duality* Lecture Notes in Math. no. 20. Berlin Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1966
- [Mac] S. Mac Lane, *Homology*, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1963
- [Mat] Y. Matsumura, *Commutative Algebra*, New York: Benjamin, 1970
- [M] H. Merklen, *Auslander Reiten Sequences for Triangular Matrix Algebras*, Canada Mathematical Society Conference Proceedings, p 231- 247, 1991.
- [M1] H. Merklen, A. Jones, *Introdução à teoria de representação de álgebras*, IME-USP (1984)
- [R] C.M. Ringel, *Hall polynomial for the representation-finite hereditary algebras*, Adv. in Math. 84(1990), 137- 178
- [Ri] Rickard, Jeremy. *Morita Theory for Derived Categories* J. London Math. Soc (1989), 436-456
- [R2] C.M. Ringel, *Tame Algebras and Integral Quadratic forms*, Lecture Notes in Math. No. 1099, Springer-Verlag, (1984), 1- 371
- [RD] C.M. Ringel, V. Dlab, *On Algebras of finite representations type*. J. Algebra 33(1975), 306 - 394.
- [R3] C.M. Ringel, *Report on the Thrall Conjectures*, in Lecture Notes in Math. No. 831, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York-Tokyo, (1980), pp. 137 - 287

-
- [R] J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, New York: Academy Press, 1979
 - [S] D. Simpson, *Linear Representations of Partially ordered Sets and Vector Space Categories*, Algebra, Logic and Applications Series, Volume 4 - Gordon and Breach Science Publishers, 1992
 - [V] J. Verdier, *Catégories dérivées* Lecture Notes in Math. 569. Berlin Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1977
 - [W] C. Weibel, *An introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, 1994