Sobre a transformada de Hilbert
no contexto das funções generalizadas

Henrique Salvador Salazar Panzarelli

Tese Apresentada ao
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
da
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
para a obtenção do grau de Doutor em Matemática

Área de concentração: Análise

Orientador: Prof. Dr. Alfredo Jorge Aragona Vallejo

São Paulo, dezembro de 2004.

Este exemplar corresponde à redação final da
tese devidamente corrigida e defendida por
Henrique Salvador Salazar Panzarelli e aprovada pela
Comissão Julgadora.

São Paulo, 29 de março de 2005

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Alfredo Jorge Aragona Vallejo (Presidente)

IME-USP

Profa. Dra. Roseli Fernandez

IME-USP

Prof. Dr. Roberto Luiz Soraggi

UFRJ

Prof. Dr. Francisco Villarreal Alvarado

FEIS

Prof. Dr. Adalberto Panobianco Bergamasco

UFSCar

Para

Andrés,

Adriana

e

Celina.

Para

Juan,

Taís,

Lívia

e

Ana

Para

Esmeralda.

Resumo

Neste trabalho damos uma definição da transformada de Hilbert operando no espaço das funções generalizadas temperadas de Colombeau.

Apresentamos neste contexto alguns teoremas análogos aos verificados no caso clássico, ou em certos subespaços de distribuições.

Abstract

In this work a definition of the Hilbert transformation operating on the Colombeau's tempered generalized functions is given.

Similar results to some theorems that hold in the classical theory or in certain subspaces of Schwartz distributions were obtained in this framework.

Agradecimentos

A lista é enorme. Assim, começo agradecendo a todos, que é para não esquecer ninguém, ni olvidarme de nadie. Desordenadamente pulam rostos, vozes e sorrisos na minha memória. São muitos os motivos para agradecer. Será difícil escolher um só. Pela presença e companhia ao longo do caminho: isso já é mais do que suficiente. Mas por quem começar? Por onde? Quantas páginas posso preencher?

Rápido, sem muita ordem, pois tenho pouco tempo para entregar este exemplar datilografado. Deadline muito próximo.

Ao Jorge, meu orientador, e à Oneyde, pelo suporte. Aberto e ilimitado.

Ao Lyra, presença sempre muito forte. Ao Seiji, meu primeiro amigo em São Paulo. A Edmundo Camero y al Prof. Martínez, el primer matemático que conocí. A mis cinco hermanos: Rafael Enrique, Andrés, Hugo, Esmeralda y Raul. A Luis. A Andrés Enrique. A Yolanda, Amelia, Amalia, Pepina, Teresita y Coto, Oto y Diana. A Rafaelito y Victorio; Luisa y Amalita. A todos mis primos. A Salvador, Humberto y Chepa. A Miyayo, Hilda, Olga y Manuelita. A Horacio, Raul, Luis y Pedro Celestino, los tíos rosacruces. A Alejandro, desde siempre. A Mauricio e Inés, Rafael y Lila. A mis amigos de Mérida. A Oswaldo Araujo; Bandeirantes a caminho do sol! A Yuli. A Aurelio Arreaza. Ao Mario Sanz Anguita.

À Roseli, pelos muitos erros apontados. Ao Fábio Skilnik, que só apontou 14. Ao Edu, Zara, Maria Lúcia, Bel, Élvia, Peresi, Leilá, Marina, Martha, Guzzo, Gladys, Sérgio Alves, Elizabeth, Lúcia Satie, Cláudia, Ângela. A Maxwell e Juaci. Ao Elói, Oscar, Jairo, Paulo, André, Rosa, Iole, Heloísa, Mercklen, Fernanda, Possani, Flávio e Lilian. Ao Hamilton,

Luiz Gonzaga, aos Paulos, Leite e Boulos. Ao Nelsão. Ao Oswaldo, Antonio Luiz e Luiz Augusto: do carrilho. Ao Plínio e à Vera. Ao Kiko, Chico Rui e o Verderesi. Ao Daciberg. A Elisabete, Célia, Elizabeth, Eunice e Tereza. Ao Pinho, à Francisca. Rua do Matão, 1010. Assim fica mais fácil.

Ao Alésio. Modêlo. Ao Roberto Costa. Meu primeiro professor em São Paulo. Aos professores Farah, Ofélia, Chaim e Da. Elza. Ao Galvão, Benedito Moreira Costa e ao Tigrão. A Martínez. Ao Tronca, Pêrsio Porto Pompeu e Roberto Ayer.

Ao Cesar, Sandra, Márcia e Aninha. Ponto. À Valéria. Ao Efraim, Rose, Odécio, Elci, e o Luis, ponho junto, Eduardo, Milton, Guilherme, Rodolfo, Aníbal. À Ivone.

Ao Damato, Chíxaro, Dorival, Trajano, Krusique, Murakami, Setsuko e Paulo.

Ao Pancho, Ernandes, Marcelo e João Toledo. Ao Osnel, pela dica certa no momento certo. À Bárbara Corominas. À Andréia. À Suely, Vera, Joelma, Rosária, Justina, Márcia e ao Henrique. Os últimos serão os primeiros.

São Paulo, dezembro de 2004.

Henrique Salvador Salazar Panzarelli

Conteúdo

1	Preliminares	1
1.1	A transformada de Hilbert clássica	1
1.2	A transformada de Hilbert de distribuições de $\mathcal{D}'_{L^p}$, $1 < p < +\infty$	7
1.3	A álgebra $\mathcal{G}_\tau(\mathcal{R})$ das funções generalizadas temperadas	10
2	A transformada de Hilbert no contexto das funções generalizadas temperadas	14
2.1	Resultados técnicos iniciais prévios. Definição da transformada de Hilbert generalizada	14
2.2	Algumas propriedades da transformada de Hilbert generalizada	21
3	Bibliografia	30

Introdução

A teoria da transformada de Fourier de distribuições temperadas desenvolvida por L. Schwartz [26] é bastante simples e elegante e tem uma ampla variedade de aplicações. A correspondente teoria no contexto das funções generalizadas temperadas de Colombeau foi desenvolvida por Colombeau [9] e por Soraggi [27] também elegantemente.

A teoria da transformada de Hilbert para distribuições em vários subespaços de $\mathcal{D}$ foi investigada por vários autores, como Beltrami e Wohlers [5], Ishikawa [15], Lauwerier [18], Orton [21], Pandey [22], Pandey e Chaudhry [23], Pilipović [24]. O objetivo desse trabalho é desenvolver a teoria da transformada de Hilbert no contexto das funções generalizadas temperadas de Colombeau, comparar algumas de suas propriedades com as obtidas em certos subespaços de $\mathcal{D}'$ e preparar algumas ferramentas apropriadas para a sua aplicação na solução de equações integrais singulares.

No capítulo 1, parágrafo 1, coletamos os principais resultados sobre a transformada de Hilbert clássica que utilizamos na tese e que estão espalhados por diversos artigos e livros, [11], [20], [22], [23] e [25]. Fizemos com detalhes a demonstração da Proposição 1.1.3 e a explicação após a Definição 1.1.4 apresentando algumas propriedades, técnicas e truques que serão muito úteis para contornar dificuldades quando chegar o momento. No parágrafo 2, extraímos de [15], [22], [23] alguns fatos, e suas demonstrações, sobre a transformada de Hilbert em certos subespaços de $\mathcal{D}'$ com o intuito de nortear as idéias e de poder comparar as técnicas usadas. No parágrafo 3, introduzimos o mínimo de noções para definir $\mathcal{G}_\tau(\mathcal{R})$ e as definições de m -moderada e de m -nula, estas apenas para poder quebrar didaticamente em vários itens algumas demonstrações.

Finalmente, no capítulo 2, no parágrafo 1, é feito todo um trabalho prévio cuidadoso para chegar com segurança à definição da transformada de Hilbert em $\mathcal{G}_\tau(\mathcal{R})$. Não foram evitados os detalhes. Depois de incontáveis tentativas falhas para achar o caminho das

pedras, foi o único recurso para ganhar a aprovação do meu orientador. No parágrafo 2, é provada a Proposição 2.2.2, que pela simplicidade de enunciado, e pelo antecedentes que tem, parece um fácil exercício. É um osso duro, mas é uma mina! Ganha-se um método para lidar com a dificuldade do t do denominador. As demonstrações das proposições finais, ecos daquelas do capítulo 1, foram consequência do fortalecimento muscular produzido pelo exercício radical.

Capítulo 1

Preliminares

O problema matemático de estudar as relações entre funções reais $\alpha(x)$ e $\beta(x)$, quando $\phi(x) = \alpha(x) + i\beta(x)$ é a transformada de Fourier de uma função $f(t)$ que é nula para $t < 0$ e absolutamente integrável para $t \geq 0$, aparece naturalmente nas aplicações da análise de sistemas aos circuitos elétricos ao querer achar a função de resposta de frequência $\phi(x)$ quando só é conhecida a parte real $\alpha(x)$ ou a parte imaginária $\beta(x)$. Essas funções $\alpha(x)$ e $\beta(x)$, chamadas funções conjugadas, estão ligadas pela transformada de Hilbert, (ver [7] e [16]) através da relação $\beta = H(\alpha)/\pi$ e $\alpha = -H(\beta)/\pi$. O livro de Hahn [12] dedicado às aplicações da transformada de Hilbert na Engenharia Elétrica.

O estudo dessa transformada é tópico obrigatório da Análise Harmônica. Dynkin [10] é excelente referência e contém muitas notas históricas. Veja também Sadoski [25] e Neri [20].

1.1 A transformada de Hilbert clássica

Apresentaremos a seguir alguns resultados da transformada de Hilbert, no caso clássico, que serão utilizados, no capítulo 2, para podermos defini-la no contexto generalizado.

Definição 1.1.1 *Definimos os conjuntos $\mathcal{S}$ e $\mathcal{D}_{L^p}$, sendo $1 < p < +\infty$, por*

$$\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R}) := \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall q > 0, \forall m \in \mathbb{N}, \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|^2)^q |\varphi^{(m)}(x)| < +\infty\};$$

$$\mathcal{D}_{L^p} := \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid \varphi^{(k)} \in L^p := L^p(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

É fácil ver que $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}_{L^p}$, $1 \leq p < +\infty$.

Definição 1.1.2 A transformada de Hilbert clássica $(Hf)(x)$ em todo ponto $x \in \mathbb{R}$ de uma função f definida em $\mathbb{R}$, quase sempre, é dada por

$$Hf(x) := v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt := \lim_{\alpha \downarrow 0} \int_{|t-x|>\alpha} \frac{f(t)}{t-x} dt, \text{ para } x \in \mathbb{R},$$

desde que a última expressão faça sentido e seja um número real.

O operador H definido acima joga um importante papel na análise de Fourier. São fundamentais as seguintes propriedades que nortearão a atenção no desenvolvimento de nosso trabalho.

Seja p um número real tal que $1 < p < +\infty$. Tem-se:

(i) [Existência] Para toda $f \in L^p$ existe Hf e $Hf \in L^p$.

(ii) [Limitação] Existe uma constante $C > 0$, independente de f , tal que

$$\|Hf\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}, \forall f \in L^p.$$

(iii) [Fórmula de inversão] $H(Hf) = -f$, $\forall f \in L^p$.

(iv) [Regra do sinal] $\widehat{Hf} = -i \operatorname{sgn}(x) \hat{f}$, $\forall f \in L^p$, onde $\hat{f}$ denota a transformada de Fourier de f .

As afirmações (i) e (ii) acima, conhecidas como Teorema de M. Riesz, foram provadas usando métodos de uma variável complexa mas seus métodos não se estendem a $\mathbb{R}^n$. Besicovitch e Titchmarsh introduziram técnicas de variável real que foram posteriormente de-

envolvidos por Calderón e Zygmund, permitindo o tratamento de transformada de Hilbert em dimensão n .

Nós trabalharemos principalmente com funções $f \in \mathcal{S}$ e, nesse caso, temos a proposição seguinte em cuja demonstração aparecem já algumas idéias, técnicas e passagens que utilizaremos posteriormente.

Proposição 1.1.3 *Sejam $f \in \mathcal{S}$ e Hf a transformada de Hilbert clássica. Então, tem-se:*

$$(a) \quad (Hf)(x) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \int_{|t| > \alpha} \frac{f(x+t)}{t} dt = \int_{|t| > 1} \frac{f(x+t)}{t} dt + \int_{|t| \leq 1} \psi(x, t) dt, \text{ onde}$$

$$\psi(x, t) = \begin{cases} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} & , \text{ se } t \neq 0 \\ f'(x) & , \text{ se } t = 0 \end{cases};$$

$$(b) \quad \left| v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt \right| \leq v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{f(t)}{t-x} \right| dt;$$

$$(c) \quad \frac{\partial^k \psi}{\partial x^k}(\cdot, t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), \forall k \geq 0 \text{ e } \forall t \in \mathbb{R}, \text{ sendo } \psi \text{ como em (a)};$$

$$(d) \quad \text{Se } 1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \text{ é uma seqüência de números reais tal que } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty, \text{ e } r_n(x) := \int_{|t| \geq a_n} \frac{f(x+t)}{t} dt, \text{ então } \|r_n\|_\infty \leq \|f\|_2 \frac{\sqrt{2}}{a_n^{1/2}}, \forall n \geq 1.$$

$$(e) \quad (Hf)'(x) = (Hf')(x), \forall x \in \mathbb{R}, \text{ e portanto, } (Hf)^{(k)} = Hf^{(k)}, \forall k \in \mathbb{N}^*;$$

$$(f) \quad |(Hf)(x)| \leq C, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ onde } C = C(f) \text{ é um número real } \geq 0 \text{ que depende de } f.$$

Demonstração. (a)

$$\begin{aligned} (Hf)(x) &= \lim_{\alpha \downarrow 0} \int_{|t-x| > \alpha} \frac{f(t)}{t-x} dt = \int_{|t| > 1} \frac{f(x+t)}{t} dt + \lim_{\alpha \downarrow 0} \int_{\alpha < |t| \leq 1} \frac{f(x+t)}{t} dt \\ &= \int_{|t| > 1} \frac{f(x+t)}{t} dt + \lim_{\alpha \downarrow 0} \int_{\alpha < |t| \leq 1} \frac{f(x+t) - f(x) + f(x)}{t} dt \\ &= \int_{|t| > 1} \frac{f(x+t)}{t} dt + \lim_{\alpha \downarrow 0} \int_{\alpha < |t| \leq 1} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} dt + f(x) \lim_{\alpha \downarrow 0} \int_{\alpha < |t| \leq 1} \frac{dt}{t} = \end{aligned}$$

$$= \int_{|t|>1} \frac{f(x+t)}{t} dt + \int_{|t|\leq 1} \psi(x, t) dt,$$

onde $\psi(x, t) = \begin{cases} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} & , se \quad t \neq 0 \\ f'(x) & , se \quad t = 0 \end{cases}$, é tal que $\psi(x, \cdot)$ é contínua $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$(b) \left| v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt \right| = \left| \lim_{\alpha \downarrow 0} \int_{|t-x|>\alpha} \frac{f(t)}{t-x} dt \right| \leq \lim_{\alpha \downarrow 0} \int_{|t-x|>\alpha} \left| \frac{f(t)}{t-x} \right| dt.$$

(c) É imediato, da definição de ψ , que $\frac{\partial^k \psi}{\partial x^k}(\cdot, t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

(d) Dado $n > 1$, $r_n(x) = \int_{|t|>a_n} \frac{f(x+t)}{t} dt$, obtemos, pela desigualdade de Hölder, com $p = p' = 2$, que

$$|r_n(x)| \leq \left(\int_{|t|>a_n} |f(x+t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{|t|>a_n} \frac{1}{t^2} dt \right)^{1/2} \leq \|f\|_2 \frac{\sqrt{2}}{a_n^{1/2}}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

(e) Sejam $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Decorre do anterior que a seqüência $(r_n)_{n \geq 1}$ converge uniformemente para a função nula em $\mathbb{R}$, portanto a seqüência de funções

$$F_n(x) := \int_{1 \leq |t| \leq a_n} \frac{f(x+t)}{t} dt,$$

converge uniformemente para a função

$$J(x) := \int_{|t| \geq 1} \frac{f(x+t)}{t} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Da mesma maneira, substituindo, nas integrais acima, f por $f' \in \mathcal{S}$, temos que a seqüência de funções

$$D_n(x) := \int_{1 \leq |t| \leq a_n} \frac{f'(x+t)}{t} dt,$$

converge uniformemente para a função

$$C(x) := \int_{|t| \geq 1} \frac{f'(x+t)}{t} dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

o que permite derivar sob o sinal de integração em (a) (veja [8]), obtendo

$$\begin{aligned}
(Hf)'(x) &= \int_{|t|>1} \frac{f'(x+t)}{t} dt + \int_{|t|\leq 1} \frac{\partial}{\partial x} \psi(x,t) dt \\
&= \int_{|t|>1} \frac{f'(x+t)}{t} dt + \lim_{\alpha \downarrow 0} \int_{0<\alpha<|t|\leq 1} \frac{f'(x+t) - f'(x)}{t} dt \\
&= \int_{|t|>1} \frac{f'(x+t)}{t} dt + \lim_{\alpha \downarrow 0} \int_{\alpha<|t|\leq 1} \frac{f'(x+t)}{t} dt \\
&= \lim_{\alpha \downarrow 0} \int_{|t|>\alpha} \frac{f'(x+t)}{t} dt = (Hf')(x), \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Portanto $(Hf)' = Hf'$, e disto decorre, por indução, $(Hf)^{(k)} = Hf^{(k)}, \forall k \in \mathbb{N}$.

(f) De (a), vem que

$$|(Hf)(x)| \leq \int_{|t|>1} \left| \frac{f(x+t)}{t} \right| dt + \int_{|t|\leq 1} |\psi(x,t)| dt.$$

Sendo $f \in \mathcal{S}$, existe $C' > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(x+t)}{t} \right| \leq \frac{C'}{|t|(1+|x+t|^2)} \leq \frac{C'}{1+|x+t|^2}, \forall |t| > 1,$$

e como $\psi(x,t) = \begin{cases} f'(\xi), & \text{com } \xi = x + \sigma t, 0 < \sigma < 1, \text{ se } t \neq 0 \\ f'(x), & \text{se } t = 0 \end{cases}$; segue-se que.

$$|(Hf)(x)| \leq \int_{|t|>1} \frac{C'}{1+(x+t)^2} dt + 2 \sup_{x \in \mathbb{R}} \|f'(x)\| \leq \pi C' + 2 \sup_{x \in \mathbb{R}} \|f'(x)\| = C(f),$$

que não depende de x . ■

Definição 1.1.4 Define-se a distribuição temperada valor principal de $\frac{1}{x}$, denotada $v.p.\frac{1}{x}$, como sendo

$$v.p.\frac{1}{x}(\Phi) := \lim_{\alpha \downarrow 0} \int_{|x|>\alpha} \frac{\Phi(x)}{x} dx, \forall \Phi \in \mathcal{S}.$$

Para ver que, de fato, a expressão acima define uma distribuição temperada, observando que é claramente linear, a reescrevemos como

$$v.p.\frac{1}{x}(\Phi) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \int_{\alpha < |x| \leq 1} \frac{\Phi(x)}{x} dx + \int_{|x| > 1} \frac{\Phi(x)}{x} dx.$$

Usando que

$$\int_{|x| > 1} \frac{\Phi(x)}{x} dx = \int_{|x| > 1} (x\Phi(x)) \frac{1}{x^2} dx \text{ e, portanto, } \left| \int_{|x| > 1} \frac{\Phi(x)}{x} dx \right| \leq 2 \|x\Phi\|_\infty,$$

e que

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \downarrow 0} \int_{\alpha < |x| < 1} \frac{\Phi(x)}{x} dx &= \lim_{\alpha \downarrow 0} \int_{\alpha < |x| < 1} \frac{\Phi(x) - \Phi(0) + \Phi(0)}{x} dx \\ &= \lim_{\alpha \downarrow 0} \int_{\alpha < |x| < 1} \frac{\Phi(x) - \Phi(0)}{x} dx + \Phi(0) \lim_{\alpha \downarrow 0} \int_{\alpha < |x| < 1} \frac{1}{x} dx, \end{aligned}$$

sendo esta última integral igual a zero e $\frac{\Phi(x) - \Phi(0)}{x} = \Phi'(\xi)$, $\xi = \sigma x$, $0 < \sigma < 1$, segue-se que existe $C > 0$ tal que

$$\left| v.p.\frac{1}{x}(\Phi) \right| \leq C (\|\Phi'\|_\infty + \|x\Phi\|_\infty).$$

Portanto, $v.p.\frac{1}{x}$ é um funcional linear contínuo definido sobre $\mathcal{S}$, isto é, $v.p.\frac{1}{x} \in \mathcal{S}'$.

1.2 A transformada de Hilbert de distribuições de $\mathcal{D}'_{L^p}$, $1 < p < +\infty$.

A teoria da transformada de Fourier de distribuições desenvolvida por L. Schwartz em [26] faz uso de uma relação do tipo de Parseval, da maneira seguinte:

dada $f \in \mathcal{S}'$, a transformada de Fourier Ff , como distribuição temperada, é dada pela relação

$$\langle Ff, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S},$$

onde $\hat{\varphi}$ é a transformada de Fourier clássica de φ .

A transformada clássica de Fourier estabelece um homeomorfismo $\hat{\cdot}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ e em consequência o operador $F: \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ definido acima estabelece também um homeomorfismo em relação à topologia fraca de $\mathcal{S}'$.

Nesta seção faremos um esboço grosseiro da teoria análoga da transformada de Hilbert de distribuições de $\mathcal{D}'_{L^p}$, $1 < p < +\infty$, desenvolvida em [22] e [23], com o objetivo de apreciar algumas diferenças nos métodos e dificuldades com a desenvolvida no capítulo 2.

Seja $f \in L^p$, $1 < p < +\infty$, e seja $g \in L^q$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Prova-se que vale a seguinte relação de Parseval (ver [20]):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (Hf)(x) g(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) (Hg)(x) dx.$$

A transformada de Hilbert $\widetilde{H}$ de uma distribuição $f \in \mathcal{D}'_{L^p}$ é definida através de uma generalização da relação acima, usando a H clássica, colocando

$$\langle \widetilde{H}f, \Phi \rangle := \langle f, -H\Phi \rangle, \quad \forall \Phi \in \mathcal{D}_{L^q}.$$

A transformada $\widetilde{H}$ estabelece um isomorfismo de $\mathcal{D}'_{L^p}$ em $\mathcal{D}'_{L^p}$, $1 < p < +\infty$, tal que

$$\widetilde{H}f = Hf, \text{ quando } f \in L^q \subset \mathcal{D}'_{L^p},$$

e pode-se provar facilmente os seguintes resultados:

1. Dada $f \in \mathcal{D}'_{L^p}$, $1 < p < +\infty$, tem-se $\widetilde{H}^2 f = -f$.

De fato,

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{H}^2 f, \Phi \rangle &= \langle \widetilde{H}(\widetilde{H}f), \Phi \rangle \\ &= \langle \widetilde{H}f, -H\Phi \rangle \\ &= \langle f, -H(-H\Phi) \rangle \\ &= \langle -f, \Phi \rangle, \forall \Phi \in \mathcal{D}_{L^q} \end{aligned}$$

2. $\widetilde{H}\delta = -v.p.\frac{1}{x}$.

De fato,

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{H}\delta, \Phi \rangle &= \langle \delta, -H\Phi \rangle \\ &= \langle \delta, -\lim_{\alpha \downarrow 0} \int_{|t-x|>\alpha} \frac{\Phi(t)}{t-x} dt \rangle \\ &= -\lim_{\alpha \downarrow 0} \int_{|t|>\alpha} \frac{\Phi(t)}{t} dt \\ &= \langle -v.p.\frac{1}{x}, \Phi \rangle \quad \forall \Phi \in \mathcal{D}_{L^q}. \end{aligned}$$

No importante trabalho de Ishikawa [15], são introduzidos certos espaços $L^p_{k,l}(\mathbb{R})$, $\mathcal{D}_{L^p_k}(\mathbb{R})$ com topologias apropriadas, provam-se relações tais como

$$\mathcal{D}_{L^p_k}(\mathbb{R}) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \text{proj} [L^p_{k,l}(\mathbb{R})] \quad , \quad \mathcal{S} \subset \mathcal{D}_{L^p_{k+1}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}_{L^p_k}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}' ,$$

$$\mathcal{S} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \text{proj} [\mathcal{D}_{L^p_k}(\mathbb{R})] \quad , \quad \mathcal{S}' = \lim_{k \rightarrow +\infty} \text{ind} \mathcal{D}'_{L^p_k}(\mathbb{R}) ,$$

define-se a transformada de Hilbert em $\mathcal{D}_{L^p_k}(\mathbb{R})$, para chegar finalmente à definição da transformada de Hilbert em $\mathcal{S}'$.

No capítulo 2 é obtida uma transformada em um espaço maior que $\mathcal{S}'$, são provadas propriedades análogas às propriedades 1. e 2. anteriores, com as devidas restrições, e poderão ser comparadas as dificuldades que aparecem.

1.3 A álgebra $\mathcal{G}_\tau(\mathbb{R})$ das funções generalizadas temperadas

A álgebra $\mathcal{G}_\tau(\mathbb{R})$ das funções generalizadas temperadas foi introduzida por Colombeau [9] para desenvolver a teoria da transformada de Fourier em uma álgebra de funções generalizadas. Soraggi [27] faz um estudo cuidadoso do tema. Aproveitamos esses estudos como referência a ser seguida e apresentamos, agora, os conceitos básicos.

Definição 1.3.1 *Sejam $\mathcal{A}_0 := \mathcal{A}_0(\mathbb{R})$ o conjunto das funções $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tais que φ é par, constante numa vizinhança do zero e $\int_0^{+\infty} \varphi(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2}$; e para $q \geq 1$*

$$\mathcal{A}_q := \mathcal{A}_q(\mathbb{R}) := \{\varphi \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R}) \mid \int_0^{+\infty} \lambda^{j/m} \varphi(\lambda) d\lambda = 0, \text{ se } 1 \leq j, m \leq q\}.$$

Dada $\varphi \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R})$, definimos $\varphi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$; $i(\varphi) := \text{diam supp}(\varphi)$ e $\varphi^\bullet = \varphi_{1/i(\varphi)}$.

Tem-se: $i(\varphi^\bullet) = 1$ e $\varphi = (\varphi^\bullet)_{i(\varphi)}$ e, para todo $\varepsilon > 0$, $i(\varphi_\varepsilon) = \varepsilon i(\varphi)$ e $(\varphi_\varepsilon)^\bullet = \varphi^\bullet$.

Definição 1.3.2 *Sejam*

$$\mathcal{E}(\mathbb{R}) := \{R : \mathcal{A}_0(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \mid R(\varphi, \cdot) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \forall \varphi \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R})\};$$

$$\mathcal{O}_M(\mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall m \in \mathbb{N}, \exists n > 0 \text{ tal que } \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|)^{-n} |f^{(m)}(x)| < +\infty\}.$$

Dizemos que $R \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ é m -moderada, sendo $m \in \mathbb{N}$, se $R(\varphi, \cdot) \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$, $\forall \varphi \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R})$, e se $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall \varphi \in \mathcal{A}_N(\mathbb{R}), \exists C = C(\varphi) > 0, \exists \eta = \eta(\varphi) > 0 \text{ com } |R^{(m)}(\varphi_\varepsilon, x)| \leq C(1 + |x|)^N \varepsilon^{-N}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in]0, \eta[.$$

Dizemos que $R \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ é m -nula, sendo $m \in \mathbb{N}$, se $R(\varphi, \cdot) \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$, $\forall \varphi \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R})$, e se $\exists N \in \mathbb{N}, \exists \gamma \in \Gamma$ tais que $\forall q \geq N$ e $\forall \varphi \in \mathcal{A}_q(\mathbb{R})$, $\exists C = C(\varphi) > 0$, $\exists \eta = \eta(\varphi) > 0$, satisfazendo:

$$|R^{(m)}(\varphi_\varepsilon, x)| \leq C(1 + |x|)^N \varepsilon^{\gamma(q)-N}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in]0, \eta[,$$

sendo Γ o conjunto das seqüências estritamente crescentes de números reais não-negativos não limitadas.

É imediato verificar que o conjunto

$$\mathcal{E}_{M,\tau}(\mathbb{R}) := \{ R \in \mathcal{E}(\mathbb{R}) \mid R \text{ é } m\text{-moderada}, \forall m \in \mathbb{N} \}$$

munido das operações pontuais evidentes é um anel unitário e comutativo, e que o conjunto

$$\mathcal{N}_\tau(\mathbb{R}) := \{ R \in \mathcal{E}(\mathbb{R}) \mid R \text{ é } m\text{-nula}, \forall m \in \mathbb{N} \}$$

é um ideal de $\mathcal{E}_{M,\tau}(\mathbb{R})$.

Um elemento de $\mathcal{E}_{M,\tau}(\mathbb{R})$ é chamado moderado e um elemento de $\mathcal{N}_\tau(\mathbb{R})$ é chamado nulo.

A álgebra $\mathcal{G}_\tau(\mathbb{R})$ das funções generalizadas temperadas é definida por

$$\mathcal{G}_\tau(\mathbb{R}) := \mathcal{E}_{M,\tau}(\mathbb{R}) / \mathcal{N}_\tau(\mathbb{R}).$$

Proposição 1.3.3 São verdadeiras as seguintes asserções:

- (a) $\mathcal{S}$ um ideal de $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$.
- (b) $\mathcal{D}_{L^p} \subset \mathcal{G}_\tau(\mathbb{R})$, $\forall 1 < p < +\infty$.
- (c) Se $f \in \mathcal{D}_{L^p}$, então Hf , como um elemento de $\mathcal{G}_\tau(\mathbb{R})$, é a classe da função

$$R_{Hf} : (\varphi, x) \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \mapsto v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt.$$

Demonstração.(a) Provemos que se $f = \psi\varphi$, com $\psi \in \mathcal{S}$ e $\varphi \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$, então $f \in \mathcal{S}$.

Pela regra de Leibnitz,

$$|f^{(m)}(x)| \leq \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} |\psi^{(m-k)}(x)| |\varphi^{(k)}(x)|.$$

Como $\varphi^{(k)} \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$, existem $n_k > 0$ e $C_k > 0$ tais que $\sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|)^{-n_k} |\varphi^{(k)}(x)| \leq C_k$ e como $1 + |x| \leq \frac{3}{2}(1 + |x|^2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|^2)^{-n_k} |\varphi^{(k)}(x)| \leq C_k \left(\frac{3}{2}\right)^{n_k} =: C'_k.$$

Disto decorre, usando que $\varphi \in \mathcal{S}$, que

$$\begin{aligned} (1 + |x|^2)^q |f^{(m)}(x)| &\leq \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (1 + |x|^2)^{q+n_k} |\psi^{(m-k)}(x)| (1 + |x|^2)^{-n_k} |\varphi^{(k)}(x)| \\ &\leq \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} M_k C'_k, \text{ onde } \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|^2)^{q+n_k} |\psi^{(m-k)}(x)| \leq M_k, \end{aligned}$$

o que prova (a).

(b) Dada $f \in \mathcal{D}_{L^p}$ considere a função

$$R_f : (\varphi, x) \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \mapsto f(x) \in \mathbb{R}.$$

É conhecido que, se $f \in \mathcal{D}_{L^p}$, $1 < p < +\infty$, então $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f^{(k)}(x) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ (ver [4]); em conseqüência, f e suas derivadas são limitadas em $\mathbb{R}$, portanto $f \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$. Disto e da definição de R_f , decorre imediatamente que $R_f \in \mathcal{E}_{M,\tau}(\mathbb{R})$. Portanto a cada $f \in \mathcal{D}_{L^p}$ associamos o elemento de $\mathcal{G}_\tau(\mathbb{R})$ que é dado pela classe de R_f em $\mathcal{G}_\tau(\mathbb{R})$.

(c) Decorre imediatamente do fato de $Hf \in \mathcal{D}_{L^p}$, da definição de H e do item (b). ■

Apresentamos a seguir o conceito de associação introduzido por Soraggi em [27].

Definição 1.3.4 *Sejam G_1 e G_2 elementos de $\mathcal{G}_\tau(\mathbb{R})$. Dizemos que G_1 é associado a G_2 no sentido forte (e escrevemos $G_1 \approx G_2$) se existem representantes R_1 e R_2 de G_1 e G_2 , respectivamente, verificando que (ou equivalentemente, se qualquer que sejam os representantes R_1 e R_2 de G_1 e G_2 , respectivamente, se verifica que) para toda $\psi \in \mathcal{S}$, existem $N \in \mathbb{N}$ e $\gamma \in \Gamma$ satisfazendo: para quaisquer $q \geq N$ e $\varphi \in \mathcal{A}_q(\mathbb{R})$ existem $C = C(\varphi) > 0$ e $\eta = \eta(\varphi) > 0$ tais que*

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} [R_1(\varphi_\varepsilon, x) - R_2(\varphi_\varepsilon, x)] \psi(x) \widehat{\varphi}(\varepsilon x) dx \right| \leq C \varepsilon^{\gamma(q)-N}, \forall \varepsilon \in]0, \eta[.$$

Capítulo 2

A transformada de Hilbert no contexto das funções generalizadas temperadas

A generalização da transformada de Hilbert feita nesse capítulo segue os passos da generalização da transformada de Fourier às generalizadas temperadas e, para tanto, são usadas as técnicas e idéias destacadas no capítulo 1.

Mostra-se também que, a transformada de Hilbert assim definida preserva, dentro do contexto, importantes propriedades análogas às do caso clássico.

2.1 Resultados técnicos iniciais prévios. Definição da transformada de Hilbert generalizada

Os Lemas a seguir serão úteis para a definição da transformada de Hilbert generalizada.

Lema 2.1.1 *Sejam $R \in \mathcal{E}_{M,\tau}(\mathbb{R})$ e $\varphi \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R})$. Então,*

$$\text{para todo } x \in \mathbb{R}, \text{ existe v.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi^\bullet}(i(\varphi)t)R(\varphi,t)}{t-x} dt = \text{v.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi}(t)R(\varphi,t)}{t-x} dt.$$

Demonstração. Como $\widehat{\varphi^\bullet} \in \mathcal{S}$ e $R(\varphi, \cdot) \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$, temos pela **Proposição 1.3.3** (a), que

$$(t \mapsto f(t) := \widehat{\varphi^\bullet}(i(\varphi)t)R(\varphi,t)) \in \mathcal{S} \subset L^p(\mathbb{R}), \text{ com } 1 < p < +\infty,$$

e assim, pelo Teorema de M. Riesz, existe $(Hf)(x) = \text{v.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi^\bullet}(i(\varphi)t)R(\varphi,t)}{t-x} dt, \forall x \in \mathbb{R}$. ■

Lema 2.1.2 *Sejam $R \in \mathcal{E}_{M,\tau}(\mathbb{R})$, $\varphi \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R})$ e*

$$\check{R}(\varphi, \cdot) : x \in \mathbb{R} \mapsto \text{v.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi^\bullet}(i(\varphi)t)R(\varphi,t)}{t-x} dt.$$

Então $\check{R}(\varphi, \cdot) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Demonstração. Basta, fazendo uma mudança de variável, observar que

$$\check{R}(\varphi, x) = \text{v.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi^\bullet}(i(\varphi)(x+t))R(\varphi, x+t)}{t} dt$$

e que, pela prova da **Proposição 1.1.3** (e), podemos derivar em relação a x sob o sinal de integração. ■

Lema 2.1.3 *Sejam $R \in \mathcal{E}_{M,\tau}(\mathbb{R})$, $\varphi \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R})$ e $\varepsilon > 0$. Então*

$$(i) \widehat{\varphi^\bullet}(\varepsilon i(\varphi)y) = \widehat{\varphi}(\varepsilon y), \forall y \in \mathbb{R}, \text{ e } \widehat{\varphi^\bullet}^{(m)}(\varepsilon i(\varphi)y) = [i(\varphi)]^{-m} \widehat{\varphi}^{(m)}(\varepsilon y).$$

$$(ii) \check{R}(\varphi_\varepsilon, x) = \text{v.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi}(\varepsilon t)R(\varphi_\varepsilon, t)}{t-x} dt$$

Demonstração. A afirmação (i) decorre imediatamente da própria definição da transformada de Fourier no caso clássico e de uma natural mudança de variáveis, como vemos a seguir:

$$\widehat{\varphi^\bullet}(\varepsilon i(\varphi)y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\varepsilon i(\varphi)y} \varphi^\bullet(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\varepsilon i(\varphi)y} i(\varphi) \varphi(i(\varphi)t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iz\epsilon y} \varphi(z) dz = \widehat{\varphi}(\epsilon y),$$

com a mudança $z = i(\varphi)t$; donde por derivação obtêm-se a outra relação. A segunda afirmação segue de (i), lembrando que $(\varphi_\epsilon)^* = \varphi^*$ e $i(\varphi_\epsilon) = \epsilon i(\varphi)$, $\forall \epsilon > 0$. ■

Utilizando o **Lema 2.1.1** podemos definir a função

$$\check{R}: (\varphi, x) \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \mapsto v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi^*}(i(\varphi)t) R(\varphi, t)}{t-x} dt$$

e, pelo **Lema 2.1.2**, sabemos que $\check{R} \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$. Nosso objetivo, nesta seção, é provar que $\check{R}$ é moderada. Para isto utilizaremos os próximos lemas.

Lema 2.1.4 *Sejam $R \in \mathcal{E}_{M,\tau}(\mathbb{R})$, $m, n \in \mathbb{N}$ e*

$$L_n^m : (\varphi, x) \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \mapsto v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi^{*(m)}}(i(\varphi)t) R^{(n)}(\varphi, t)}{t-x} dt.$$

Então L_n^m é 0-moderada, e se $R \in \mathcal{N}_\tau(\mathbb{R})$, então L_n^m é 0-nula.

Demonstração. Pela **Proposição 1.3.3** (a), $[t \mapsto \widehat{\varphi^{*(m)}}(i(\varphi)t) R^{(n)}(\varphi, t)] \in \mathcal{S}$, e pela **Proposição 1.1.3** (e) e (f), tem-se $|(L_n^m)^{(k)}(\varphi, x)| \leq C = C(\varphi)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \varphi \in \mathcal{A}_0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, e portanto $L_n^m(\varphi, \cdot) \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$, $\forall \varphi \in \mathcal{A}_0$ e que pelo **Lema 2.1.3**, tem-se

$$(*) \quad L_n^m(\varphi_\epsilon, x) = [i(\varphi)]^{-m} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi^{*(m)}}(\epsilon t) R^{(n)}(\varphi_\epsilon, t)}{t-x} dt, \quad \forall \epsilon \in]0, 1].$$

Denotando por g_ϵ a função $[t \mapsto g_\epsilon(t) := \widehat{\varphi^{*(m)}}(\epsilon t) R^{(n)}(\varphi_\epsilon, t)] \in \mathcal{S}$ podemos escrever

$$\begin{aligned} [i(\varphi)]^m L_n^m(\varphi_\epsilon, x) &= (H g_\epsilon)(x) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_\epsilon(t)}{t-x} dt = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi^{*(m)}}(\epsilon t) R^{(n)}(\varphi_\epsilon, t)}{t-x} dt \\ &= v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi^{*(m)}}(\epsilon(x+t)) R^{(n)}(\varphi_\epsilon, x+t)}{t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{|t|>1} \frac{\widehat{\varphi}^{(m)}(\varepsilon(x+t))R^{(n)}(\varphi_\varepsilon, x+t)}{t} dt + \\
&\quad + v.p. \int_{-1}^1 \frac{\widehat{\varphi}^{(m)}(\varepsilon(x+t))R^{(n)}(\varphi_\varepsilon, x+t)}{t} dt.
\end{aligned}$$

Para majorar a primeira das duas últimas integrais, observamos que por ser R moderada existe $N \in \mathbb{N}$ tal que: $\forall \varphi \in \mathcal{A}_N(\mathbb{R})$, $\exists C_1 > 0$, $\exists \eta > 0$ tais que para $n \leq j \leq n+1$, tem-se

$$|R^{(j)}(\varphi_\varepsilon, t)| \leq C_1(1+|t|)^N \varepsilon^{-N}, \forall t \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in]0, \eta[,$$

e como $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, tem-se $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$. Portanto para $q = N+1$, existe $C_2 > 0$ tal que $|\widehat{\varphi}^{(k)}(\varepsilon t)| \leq \frac{C_2}{(1+|\varepsilon t|^2)^q}$, $\forall t \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in]0, \eta[$ e $m \leq k \leq m+1$.

Portanto, usando $1+|t| \leq \frac{3}{2}(1+|t|^2)$, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$|\widehat{\varphi}^{(k)}(\varepsilon t)R^{(j)}(\varphi_\varepsilon, t)| \leq \frac{C_2}{(1+|\varepsilon t|^2)^q} C_1(1+|t|)^N \varepsilon^{-N} \leq \frac{C}{\varepsilon^{2q+N}(1+|t|^2)^{q-N}} = \frac{C}{\varepsilon^{2q+N}(1+|t|^2)},$$

para $m \leq k \leq m+1$, $n \leq j \leq n+1$, $t \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon \in]0, \eta[$, sendo $C = \left(\frac{3}{2}\right)^N C_1 C_2$, donde

$$(\dagger) \quad |\widehat{\varphi}^{(m)}(\varepsilon(x+t))R^{(n)}(\varphi_\varepsilon, x+t)| \leq \frac{C}{\varepsilon^{q_1}(1+|x+t|^2)\varepsilon^N}, \text{ sendo } q_1 = 2q.$$

Portanto, se $q_2 = q_1 + N$, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_{|t|>1} \left| \frac{\widehat{\varphi}^{(m)}(\varepsilon(x+t))R^{(n)}(\varphi_\varepsilon, x+t)}{t} \right| dt &\leq \frac{C}{\varepsilon^{q_2}} \int_{|t|>1} \frac{dt}{(1+|x+t|^2)|t|} \\
&\leq \frac{C}{\varepsilon^{q_2}} \int_{|t|>1} \frac{dt}{1+|x+t|^2} \\
&\leq \frac{C\pi}{\varepsilon^{q_2}}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, sendo $[t \mapsto \widehat{\varphi}^{(m)}(\varepsilon t)R^{(n)}(\varphi_\varepsilon t)] \in \mathcal{S}$, pela **Proposição 1.1.3(a)**,

$$\begin{aligned}
v.p. \int_{-1}^1 \frac{\widehat{\varphi}^{(m)}(\varepsilon(x+t))R^{(n)}(\varphi_\varepsilon, x+t)}{t} dt &= v.p. \left[\int_{-1}^1 \frac{\widehat{\varphi}^{(m)}(\varepsilon(x+t))R^{(n)}(\varphi_\varepsilon, x+t)}{t} dt - \right. \\
&\quad \left. + \int_{-1}^1 \frac{\widehat{\varphi}^{(m)}(\varepsilon x)R^{(n)}(\varphi_\varepsilon, x)}{t} dt \right] \\
&= \int_{-1}^1 \psi(x, t) dt,
\end{aligned}$$

$$\text{onde } \psi(x, t) = \begin{cases} \frac{\widehat{\varphi}^{(m)}(\varepsilon(x+t))R^{(n)}(\varphi_\varepsilon, x+t) - \widehat{\varphi}^{(m)}(\varepsilon x)R^{(n)}(\varphi_\varepsilon, x)}{t} & , se \quad t \neq 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}[\widehat{\varphi}^{(m)}(\varepsilon x)R^{(n)}(\varphi_\varepsilon, x)] & , se \quad t = 0 \end{cases}.$$

E como $\frac{\partial}{\partial x}[\widehat{\varphi}^{(m)}(\varepsilon x)R^{(n)}(\varphi_\varepsilon, x)] = \widehat{\varphi}^{(m+1)}(\varepsilon x)\varepsilon R^{(n)}(\varphi_\varepsilon, x) + \widehat{\varphi}^{(m)}(\varepsilon x)R^{(n+1)}(\varphi_\varepsilon, x)$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\widehat{\varphi}^{(m)}(\varepsilon(x+t))R^{(n)}(\varphi_\varepsilon, x+t) - \widehat{\varphi}^{(m)}(\varepsilon x)R^{(n)}(\varphi_\varepsilon, x)}{t} &= \frac{\partial}{\partial x}[\widehat{\varphi}^{(m)}(\varepsilon x)R^{(n)}(\varphi_\varepsilon, x)]|_{x+\tau t} \\
&= \widehat{\varphi}^{(m+1)}(\varepsilon(x+\tau t))\varepsilon R^{(n)}(\varphi_\varepsilon, x+\tau t) + \\
&\quad + \widehat{\varphi}^{(m)}(\varepsilon(x+\tau t))R^{(n+1)}(\varphi_\varepsilon, x+\tau t),
\end{aligned}$$

para algum $0 < \tau < 1$. E como, para $0 < \varepsilon < 1$,

$$\begin{aligned}
|\widehat{\varphi}^{(m+1)}(\varepsilon(x+\tau t))\varepsilon R^{(n)}(\varphi_\varepsilon, x+\tau t)| &\stackrel{(\dagger)}{\leq} \frac{\varepsilon C}{\varepsilon^{q_1+N}(1+|(x+\tau t)|^2)} \leq \frac{C}{\varepsilon^{q_1+N-1}}, \\
|\widehat{\varphi}^{(m)}(\varepsilon(x+\tau t))R^{(n+1)}(\varphi_\varepsilon, x+\tau t)| &\stackrel{(\dagger)}{\leq} \frac{C}{\varepsilon^{q_1+N}(1+|(x+\tau t)|^2)} \leq \frac{C}{\varepsilon^{q_1+N}},
\end{aligned}$$

temos, $\int_{-1}^1 |\psi(x, t)| dt \leq \frac{2C}{\varepsilon^{q_1+N-1}} + \frac{2C}{\varepsilon^{q_1+N}}$, e assim temos

$$|Hg_\varepsilon(x)| \leq \frac{C\pi}{\varepsilon^{q_1+N}} + \frac{2C}{\varepsilon^{q_1+N-1}} + \frac{2C}{\varepsilon^{q_1+N}} \leq (C\pi + 4C)\varepsilon^{-q_1-N}.$$

Logo L_n^m é 0-moderada.

Suponhamos R nula. Então existem $N \in \mathbb{N}$ e $\gamma \in \Gamma$ tais que: $\forall q \geq N$ e $\forall \varphi \in \mathcal{A}_q(\mathbb{R})$, $\exists C'_1 > 0$, $\exists \eta_2 > 0$ satisfazendo:

$$|R^{(j)}(\varphi_\varepsilon, t)| \leq C'_1 (1+|t|)^N \varepsilon^{\gamma(q)-N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon \in]0, \eta_2[, \quad \text{para } n \leq j \leq n+1.$$

Usando que $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$, existe $C'_2 > 0$ tal que

$$|\varphi^{(k)}(\varepsilon t)| \leq \frac{C'_2}{(1 + |\varepsilon t|^2)^{N+1}}, \forall t \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in]0, \eta_2[, \text{ para } m \leq k \leq m+1.$$

Portanto

$$|\varphi^{(k)}(\varepsilon t) R^{(j)}(\varphi_\varepsilon, t)| \leq \frac{C'_1 C'_2 (1 + |t|)^N \varepsilon^{\gamma(q)-N}}{\varepsilon^{2N+2} (1 + |t|^2)^{N+1}} \leq \frac{C' \varepsilon^{\gamma(q)-3N-2}}{1 + |t|^2},$$

para $m \leq k \leq m+1$, $n \leq j \leq n+1$, $t \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon \in]0, \eta_2[$, sendo $C' = \left(\frac{3}{2}\right)^N C'_1 C'_2$.

Usando as desigualdades acima obtemos, de modo análogo ao caso da 0-moderação, que

$$|Hg_\varepsilon(x)| \leq C' \pi \varepsilon^{\gamma(q)-3N-2} + 2C' \varepsilon^{\gamma(q)-3N-1} + 2C' \varepsilon^{\gamma(q)-3N-2} \leq (C' \pi + 4C') \varepsilon^{\gamma(q)-3N-2},$$

e assim para $N_2 \in \mathbb{N}$ com $N_2 \geq 3N+2$ e $\gamma(N_2) \geq 3N+2$ temos que, se $q \geq N_2$ e $\varphi \in \mathcal{A}_q(\mathbb{R})$, então $|Hg_\varepsilon(x)| \leq (C' \pi + 4C') \varepsilon^{\gamma(q)-N_2}$, $\forall \varepsilon \in]0, \eta_2[$, ou seja, L_n^m é 0-nula. ■

Teorema 2.1.5 *Seja $R \in \mathcal{E}_{M,\tau}(\mathbb{R})$. A função*

$$\check{R}: (\varphi, x) \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \mapsto v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi^\bullet}(i(\varphi)t) R(\varphi, t)}{t-x} dt \in \mathbb{C}$$

é moderada. Se $R \in \mathcal{N}_\tau(\mathbb{R})$, então $\check{R}$ é nula.

Demonstração. Seja $g : (\varphi, t) \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \mapsto \widehat{\varphi^\bullet}(i(\varphi)t) R(\varphi, t)$. Como $\varphi \in \mathcal{S}$, $\widehat{\varphi^\bullet} \in \mathcal{S}$ e $R(\varphi, \cdot) \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$, pela **Proposição 1.3.3** (a), tem-se que $g(\varphi, \cdot) \in \mathcal{S} \subset L^p(\mathbb{R})$, $\forall 1 < p < +\infty$. Portanto existe $H(g(\varphi, \cdot))$ e

$$H(g(\varphi, x)) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\varphi, t)}{t-x} dt = \check{R}(\varphi, x).$$

Em consequência

$$\check{R}^{(k)}(\varphi, x) = (H(g(\varphi, x)))^{(k)} \stackrel{(***)}{=} H(g^{(k)}(\varphi, x)) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g^{(k)}(\varphi, t)}{t-x} dt,$$

onde a igualdade (***) foi obtida pela **Proposição 1.1.3** (e).

Pelo **Lema 2.1.3** (i), $g(\varphi_\varepsilon, t) = \widehat{\varphi}(\varepsilon t) R(\varphi_\varepsilon, t)$, portanto

$$\begin{aligned}
\check{R}^{(k)}(\varphi_\varepsilon, x) &= v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\widehat{\varphi}(\varepsilon t) R(\varphi_\varepsilon, t)]^{(k)}}{t-x} dt \\
&= v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\widehat{\varphi}(\varepsilon(x+t)) R(\varphi_\varepsilon, x+t)]^{(k)}}{t} dt \\
&= \sum_{r+s=k} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi}^{(r)}(\varepsilon(x+t)) R^{(s)}(\varphi_\varepsilon, x+t)}{t} dt \\
&= \sum_{r+s=k} [i(\varphi)]^r L_s^r(\varphi_\varepsilon, x);
\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue de (*) da prova do **Lema 2.1.4**.

Em vista do **Lema 2.1.4**, a prova está completa. ■

Decorre do **Teorema 2.1.5** que a seguinte definição faz sentido.

Definição 2.1.6 *Chama-se transformada de Hilbert generalizada a função*

$$\mathcal{H} : G \in \mathcal{G}_\tau(\mathbb{R}) \longmapsto \mathcal{H}G := cl(\check{R}) \in \mathcal{G}_\tau(\mathbb{R}),$$

onde

$$\check{R}: (\varphi, x) \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \longmapsto v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi}^\bullet(i(\varphi)t) R(\varphi, t)}{t-x} dt$$

e R é um representante qualquer de G .

2.2 Algumas propriedades da transformada de Hilbert generalizada

Veremos agora que a introdução do termo $\widehat{\varphi}^\bullet(i(\varphi)t)$ que permite a prova da moderação na definição da transformada generalizada, ao mesmo tempo pode dificultar consideravelmente a demonstração de certas propriedades.

Lema 2.2.1 *São verdadeiras as seguintes asserções:*

(a) *Dados $q \in \mathbb{N}$ e $\varphi \in \mathcal{A}_q(\mathbb{R})$, existe $C = C(\varphi) > 0$ tal que*

$$|\widehat{\varphi}(\varepsilon(x+t)) - 1| \leq C\varepsilon^{q+1} \left[|x|^{q+1} + \sum_{i=1}^{q+1} \binom{q+1}{i} |x|^{q+1-i} |t|^i \right];$$

$$|\widehat{\varphi}^{(k)}(\varepsilon(x+t))| \leq C\varepsilon^{q+1} \left[|x|^{q+1} + \sum_{i=1}^{q+1} \binom{q+1}{i} |x|^{q+1-i} |t|^i \right];$$

para $x, t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in]0, 1]$ e $1 \leq k \leq q$.

(b) *Se $f \in \mathcal{S}$, então, para todo $s \in \mathbb{N}$, existe um polinômio P tal que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\tau)(\tau - x)^s| d\tau \leq |P(|x|)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Sejam $q \in \mathbb{N}$ e $\varphi \in \mathcal{A}_q(\mathbb{R})$. Fazendo o desenvolvimento por Taylor da expressão $\widehat{\varphi}(\varepsilon(x+t)) - 1 = \widehat{\varphi}(\varepsilon(x+t)) - \widehat{\varphi}(0)$, temos

$$\widehat{\varphi}(\varepsilon(x+t)) - \widehat{\varphi}(0) = \sum_{j=1}^q \frac{\widehat{\varphi}^{(j)}(0)[\varepsilon(x+t)]^j}{j!} + \frac{\widehat{\varphi}^{(q+1)}(\xi)[\varepsilon(x+t)]^{q+1}}{(q+1)!},$$

onde $\xi = \sigma\varepsilon(x+t)$, para algum $0 < \sigma < 1$.

Usando que $\widehat{\varphi}^{(q+1)}$ é uma função limitada e que $\widehat{\varphi}^{(p)}(0) = 0$, para $1 \leq p \leq q$, temos

$$|\widehat{\varphi}(\varepsilon(x+t)) - 1| \leq \frac{\varepsilon^{q+1}}{(q+1)!} \sup_{z \in \mathbb{R}} |\widehat{\varphi}^{(q+1)}(z)| (|x| + |t|)^{q+1}$$

$$= \frac{\varepsilon^{q+1}}{(q+1)!} \sup_{z \in \mathbb{R}} |\widehat{\varphi}^{(q+1)}(z)| \left[|x|^{q+1} + \sum_{i=1}^{q+1} \binom{q+1}{i} |x|^{q+1-i} |t|^i \right]$$

o que prova uma das afirmações de (a). Para concluir (a) basta repetir o processo anterior substituindo $\widehat{\varphi}$ por $\widehat{\varphi}^{(k)}$ e observando que $\widehat{\varphi}^{(k)}(0) = 0$, se $1 \leq k \leq q$.

Para (b) basta observar que, se $f \in \mathcal{S}$ e $s \in \mathbb{N}$, então existe $C_1 > 0$ tal que $|f(z)| \leq \frac{C_1}{(1+|z|^2)^{s+1}}$, para todo $z \in \mathbb{R}$, e assim

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\tau)(\tau - x)^s| d\tau &\leq C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+|\tau|^2)^{s+1}} (|x| + |\tau|)^s d\tau \\ &\leq C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+|\tau|^2)^{s+1}} \left[|x|^{s+1} + \sum_{i=1}^{s+1} \binom{s+1}{i} |x|^{s+1-i} |\tau|^i \right] d\tau, \end{aligned}$$

obtendo, após o cálculo da integral, o resultado desejado. ■

O próximo resultado é análogo ao encontrado no caso clássico substituindo a igualdade pela associação.

Proposição 2.2.2 *Seja δ a função de Dirac. Então $\mathcal{H}\delta \approx -v.p. \frac{1}{x}$.*

Demonstração. Seja $R_1 : (\varphi, x) \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \mapsto \varphi(x) \in \mathbb{C}$ um representante de δ em $\mathcal{E}_{M,\tau}(\mathbb{R})$, então um representante $\check{R}_1$ de $\mathcal{H}\delta \in \mathcal{G}_\tau(\mathbb{R})$ é dado por

$$\check{R}_1 (\varphi, x) \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \mapsto v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi^\bullet}(i(\varphi)t)\varphi(t)}{t-x} dt.$$

Consideremos também o representante R_2 de $-v.p. \frac{1}{x}$ em $\mathcal{E}_{M,\tau}(\mathbb{R})$, dado por

$$R_2 : (\varphi, x) \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \mapsto v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t-x} dt.$$

Temos, então que

$$\check{R}_1 (\varphi_\varepsilon, x) - R_2(\varphi_\varepsilon, x) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_\varepsilon(x+t)[\widehat{\varphi}(\varepsilon(x+t)) - 1]}{t} dt$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\frac{x+t}{\varepsilon})[\widehat{\varphi}(\varepsilon(x+t)) - 1]}{t} dt.$$

Usando o **Lema 2.2.1** (a), dados $q \in \mathbb{N}$ e $\varphi \in \mathcal{A}_q(\mathbb{R})$, existe $C > 0$ tal que

$$\left| \frac{\varphi(\frac{x+t}{\varepsilon})[\widehat{\varphi}(\varepsilon(x+t)) - 1]}{t} \right| \leq \varepsilon^{q+1} C \left[\left| \varphi\left(\frac{x+t}{\varepsilon}\right) \sum_{i=1}^{q+1} \binom{q+1}{i} |x|^{q+1-i} |t|^{i-1} \right| + |x|^{q+1} \left| \frac{\varphi(\frac{x+t}{\varepsilon})}{t} \right| \right].$$

Então, se $\text{supp } \varphi \subset [-r, r]$, com $r > 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| |t|^{i-1} \varphi\left(\frac{x+t}{\varepsilon}\right) \right| dt &\leq \int_{-r}^r \varepsilon |\varphi(\tau)| |\varepsilon\tau - x|^{i-1} d\tau \\ &\leq \varepsilon \sup_{z \in \mathbb{R}} |\varphi(z)| \int_{-r}^r (|\tau| + |x|)^{i-1} d\tau \\ &\leq \varepsilon \sup_{z \in \mathbb{R}} |\varphi(z)| \int_{-r}^r (|x| + r)^{i-1} d\tau \\ &\leq 2r \varepsilon \sup_{z \in \mathbb{R}} |\varphi(z)| (|x| + r)^{i-1} \leq 2r \sup_{z \in \mathbb{R}} |\varphi(z)| (|x| + r)^{i-1}. \end{aligned}$$

Usando a prova da **Proposição 1.1.3** (f), existe $C_1 = C_1(\varphi) > 0$ tal que

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{q+1} \left| \frac{\varphi(\frac{x+t}{\varepsilon})}{t} \right| dt = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{q+1} \left| \frac{\varphi(\frac{x}{\varepsilon} + \tau)}{\tau} \right| d\tau \leq C_1 |x|^{q+1}.$$

Das desigualdades acima concluímos que existe um polinômio Q tal que

$$|\overset{\vee}{R}_1(\varphi_\varepsilon, x) - R_2(\varphi_\varepsilon, x)| \leq \varepsilon^q |Q(|x|)|, \forall x \in \mathbb{R}$$

e portanto, para todo $\psi \in \mathcal{S}$ tem-se

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} [\overset{\vee}{R}_1(\varphi_\varepsilon, x) - R_2(\varphi_\varepsilon, x)] \psi(x) \widehat{\varphi}(\varepsilon x) dx \right| \leq \varepsilon^q \sup_{z \in \mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(z)| \int_{-\infty}^{+\infty} |Q(|x|)| |\psi(x)| dx,$$

verificando a **Definição 1.3.4** com $\gamma(q) = q$, $N = 0$ e $\eta = 1$,

e assim $\mathcal{H}\delta \approx -v.p.\frac{1}{x}$. ■

Proposição 2.2.3 *Seja f um elemento de $\mathcal{S}$ e sejam Hf e $\mathcal{H}f$ as transformadas de Hilbert clássica e generalizada de f , respectivamente. Então $\mathcal{H}f \approx Hf$.*

Demonstração. Um representante de f em $\mathcal{E}_{M,\tau}(\mathbb{R})$ é dado por

$$R_f : (\varphi, x) \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \mapsto f(x) \in \mathbb{R},$$

e um representante de $\mathcal{H}f$ é dado por

$$\check{R}_f : (\varphi, x) \mapsto v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi^\bullet}(i(\varphi)t)f(t)}{t-x} dt.$$

Por outro lado, Hf pertence a $\mathcal{G}_\tau(\mathbb{R})$, **Proposição 1.3.3** (c), e admite como representante a função

$$R_{Hf} : (\varphi, x) \mapsto v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt.$$

Pelo **Lema 2.2.1** (a), dados $q \in \mathbb{N}$ e $\varphi \in \mathcal{A}_q(\mathbb{R})$, existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \left| \check{R}_f(\varphi_\varepsilon, x) - R_{Hf}(\varphi_\varepsilon, x) \right| &\leq v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{f(x+t)[\widehat{\varphi}(\varepsilon(x+t)) - 1]}{t} \right| dt \\ &\leq C\varepsilon^{q+1} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{f(x+t)}{t} \right| \left[|x|^{q+1} + \sum_{i=1}^{q+1} \binom{q+1}{i} |x|^{q+1-i} |t|^i \right] dt \\ &\leq C\varepsilon^{q+1} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{f(x+t)}{t} \right| |x|^{q+1} dt + \\ &\quad + C\varepsilon^{q+1} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\tau)| \sum_{i=1}^{q+1} \binom{q+1}{i} |x|^{q+1-i} |\tau - x|^{i-1} d\tau. \end{aligned}$$

Usando a **Proposição 1.1.3** (f) e o **Lema 2.2.1** (b) existe um polinômio Q tal que

$$\left| \check{R}_f(\varphi_\varepsilon, x) - R_{Hf}(\varphi_\varepsilon, x) \right| \leq \varepsilon^{q+1} |Q(|x|)|, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Seja $\psi \in \mathcal{S}$, então

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} [\check{R}_f(\varphi_\varepsilon, x) - R_{Hf}(\varphi_\varepsilon, x)] \psi(x) \widehat{\varphi}(\varepsilon x) dx \right| \leq \varepsilon^{q+1} \sup_{z \in \mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(z)| \int_{-\infty}^{+\infty} |Q(|x|)| |\psi(x)| dx,$$

donde segue a tese. ■

Corolário 2.2.4 *Seja $f \in \mathcal{S}$ tal que $Hf \in \mathcal{S}$. Então $\mathcal{H}(Hf) \approx -f$.*

Demonstração. Da **Proposição 2.2.3** temos: $\mathcal{H}(Hf) \approx H(Hf) = H^2(f) = -f$. ■

No caso clássico vimos, **Proposição 1.1.3** (e), que $(Hf)' = Hf'$, $\forall f \in \mathcal{S}$. No próximo resultado apresentamos, sob certas condições, um resultado semelhante para o caso generalizado substituindo a igualdade pela associação.

Proposição 2.2.5 *São verdadeiras as seguintes asserções:*

- (i) $(\mathcal{H}\delta)^{(k)} \approx \mathcal{H}\delta^{(k)}$, para $k \in \mathbb{N}^*$, sendo δ a função de Dirac;
- (ii) se G é um elemento de $\mathcal{G}_\tau(\mathbb{R})$ que possui um representante R satisfazendo: para cada $\varphi \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R})$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ existem $f_n \in \mathcal{S}$ e $\eta \in]0, 1]$ tais que $|R^{(n)}(\varphi_\varepsilon, \cdot)| \leq |f_n|$, $\forall \varepsilon \in]0, \eta[$, então $(\mathcal{H}G)^{(k)} \approx \mathcal{H}G^{(k)}$, para $k \in \mathbb{N}^*$.

Demonstração. Considere o representante $\check{R}$ de $\mathcal{H}G_1$, sendo $G_1 = \delta$ ou $G_1 = G$, dado por

$$\check{R}: (\varphi, x) \in \mathcal{A}_0 \times \mathbb{R} \mapsto v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi}^*(i(\varphi)(x+t)) R(\varphi, x+t)}{t} dt,$$

Obtem-se a partir de $\check{R}$, derivando sob o sinal de integração, um representante R_1 de $\mathcal{H}G_1^{(k)}$ tal que

$$R_1(\varphi_\varepsilon, x) = \frac{d^k}{dx^k} \left(v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi}(\varepsilon(x+t)) R(\varphi_\varepsilon, x+t)}{t} dt \right)$$

$$\begin{aligned}
&= v.p. \sum_{i=0}^{k-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \binom{k}{i} \frac{\varepsilon^{k-i} \widehat{\varphi}^{(k-i)}(\varepsilon(x+t)) R^{(i)}(\varphi_\varepsilon, x+t)}{t} dt \\
&\quad + v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\varphi}(\varepsilon(x+t)) R^{(k)}(\varphi_\varepsilon, x+t)}{t} dt,
\end{aligned}$$

onde separamos o último termo, que é precisamente um representante R_2 de $(\mathcal{H}G_1)^{(k)}$ calculado em (φ_ε, x) .

Portanto

$$\begin{aligned}
|R_1(\varphi_\varepsilon, x) - R_2(\varphi_\varepsilon, x)| &= \left| v.p. \sum_{i=0}^{k-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \binom{k}{i} \frac{\varepsilon^{k-i} \widehat{\varphi}^{(k-i)}(\varepsilon(x+t)) R^{(i)}(\varphi_\varepsilon, x+t)}{t} dt \right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\varepsilon^{k-i} \widehat{\varphi}^{(k-i)}(\varepsilon(x+t)) R^{(i)}(\varphi_\varepsilon, x+t)}{t} \right| dt \\
&\leq \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\widehat{\varphi}^{(k-i)}(\varepsilon(x+t)) R^{(i)}(\varphi_\varepsilon, x+t)}{t} \right| dt,
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R})$ e $\varepsilon \in]0, 1]$.

Seja $N \in \mathbb{N}$ com $N \geq k$. Usando o Lema 2.2.1 (a), dados $q \in \mathbb{N}$ com $q \geq N$ e $\varphi \in \mathcal{A}_q(\mathbb{R})$, existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
(\diamond) \left| \frac{\widehat{\varphi}^{(k-i)}(\varepsilon(x+t)) R^{(i)}(\varphi_\varepsilon, x+t)}{t} \right| &\leq C\varepsilon^{q+1} \left[\left| R^{(i)}(\varphi_\varepsilon, x+t) \right| \sum_{i=1}^{q+1} \binom{q+1}{i} |x|^{q+1-i} |t|^{i-1} \right] \\
&\quad + C\varepsilon^{q+1} \left| \frac{R^{(i)}(\varphi_\varepsilon, x+t)}{t} \right| |x|^{q+1},
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^*$, $\varepsilon \in]0, 1]$ e $0 \leq i \leq k-1$.

Se $G_1 = \delta$ temos que $R^{(i)}(\varphi_\varepsilon, x+t) = \frac{1}{\varepsilon^{i+1}} \varphi^{(i)}\left(\frac{x+t}{\varepsilon}\right)$. Substituindo essa expressão em cada parcela do segundo membro da desigualdade $(\diamond)$ temos, como vimos na prova da Proposição 2.2.2 substituindo $\varphi\left(\frac{x+t}{\varepsilon}\right)$ por $\varphi^{(i)}\left(\frac{x+t}{\varepsilon}\right)$, que existe um polinômio Q_i tal que

$$\begin{aligned}
v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\widehat{\varphi}^{(k-i)}(\varepsilon(x+t)) R^{(i)}(\varphi_\varepsilon, x+t)}{t} \right| dt &\leq \frac{\varepsilon^{q+1} |Q_i(|x|)|}{\varepsilon^{i+1}} \\
&= \varepsilon^{q-i} |Q_i(|x|)| \\
&\leq \varepsilon^{q-k} |Q_i(|x|)|.
\end{aligned}$$

Portanto existe um polinômio Q tal que

$$|R_1(\varphi_\varepsilon, x) - R_2(\varphi_\varepsilon, x)| \leq \varepsilon^{q-k} |Q(|x|)|, \forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in]0, 1],$$

e portanto dada $\psi \in \mathcal{S}$ tem-se

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} [R_1(\varphi_\varepsilon, x) - R_2(\varphi_\varepsilon, x)] \psi(x) \widehat{\varphi}(\varepsilon x) dx \right| \leq \varepsilon^{q-k} \sup_{z \in \mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(z)| \int_{-\infty}^{+\infty} |Q(|x|)| \psi(x) |dx|,$$

e assim definindo $\gamma(s) := s + N - k$ para $s \in \mathbb{N}$ existe $C_1 > 0$ tal que

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} [R_1(\varphi_\varepsilon, x) - R_2(\varphi_\varepsilon, x)] \psi(x) \widehat{\varphi}(\varepsilon x) dx \right| \leq C_1 \varepsilon^{\gamma(q)-N}, \quad \forall \varepsilon \in]0, 1],$$

donde segue que $(\mathcal{H}\delta)^{(k)} \approx \mathcal{H}\delta^{(k)}$.

Se $G_1 = G$ temos que, para cada $0 \leq i \leq k-1$, existem $f_i \in \mathcal{S}$ e $\eta_i \in]0, 1]$ tais que

$$|R^{(i)}(\varphi_\varepsilon, x+t)| \leq |f_i(x+t)|, \quad \forall x, t \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \varepsilon \in]0, \eta_i].$$

Usando essa informação no segundo membro da desigualdade ($\diamond$) temos

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\widehat{\varphi}^{(k-i)}(\varepsilon(x+t)) R^{(i)}(\varphi_\varepsilon, x+t)}{t} \right| &\leq C \varepsilon^{q+1} \left[|f_i(x+t)| \sum_{i=1}^{q+1} \binom{q+1}{i} |x|^{q+1-i} |t|^{i-1} \right] + \\
&\quad + C \varepsilon^{q+1} \left| \frac{f_i(x+t)}{t} \right| |x|^{q+1},
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^*$, $\varepsilon \in]0, \eta_i[$ e $0 \leq i \leq k - i$, e assim

$$\begin{aligned} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\widehat{\varphi}^{(k-i)}(\varepsilon(x+t)) R^{(i)}(\varphi_\varepsilon, x+t)}{t} \right| dt &\leq C \varepsilon^{q+1} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_i(\tau)| \sum_{i=1}^{q+1} \binom{q+1}{i} |x|^{q+1-i} |\tau - x|^{i-1} d\tau \\ &\quad + C \varepsilon^{q+1} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{f_i(x+t)}{t} \right| |x|^{q+1} dt. \end{aligned}$$

Usando a **Proposição 1.1.3** (f) e o **Lema 2.2.1** (b), existe um polinômio P_i tal que

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\widehat{\varphi}^{(k-i)}(\varepsilon(x+t)) R^{(i)}(\varphi_\varepsilon, x+t)}{t} \right| dt \leq \varepsilon^{q+1} |P_i(|x|)|, \forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in]0, \eta_i].$$

Portanto existe um polinômio P tal que

$$|R_1(\varphi_\varepsilon, x) - R_2(\varphi_\varepsilon, x)| \leq \varepsilon^{q+1} |P(|x|)|, \forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in]0, \eta],$$

sendo $\eta = \min\{\eta_i \mid 0 \leq i \leq k - 1\}$, portanto dada $\psi \in \mathcal{S}$ tem-se

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} [R_1(\varphi_\varepsilon, x) - R_2(\varphi_\varepsilon, x)] \psi(x) \widehat{\varphi}(\varepsilon x) dx \right| \leq \varepsilon^{q+1} \sup_{z \in \mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(z)| \int_{-\infty}^{+\infty} |P(|x|)| \psi(x) dx,$$

e assim definindo $\gamma_1(s) := s + 1 + N$ para $s \in \mathbb{N}$, existe $C_2 > 0$ tal que

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} [R_1(\varphi_\varepsilon, x) - R_2(\varphi_\varepsilon, x)] \psi(x) \widehat{\varphi}(\varepsilon x) dx \right| \leq C_2 \varepsilon^{\gamma_1(q)-N}, \forall \varepsilon \in]0, \eta],$$

ou seja $(\mathcal{H}G)^{(k)} \approx \mathcal{H}G^{(k)}$. ■

Decorre da **Proposição 2.2.5(ii)** que

- (1) Se $f \in \mathcal{S}$, então $(\mathcal{H}f)^{(k)} = \mathcal{H}f^{(k)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
- (2) Se $\alpha_r^\circ := [\varphi \in \mathcal{A}_0 \mapsto (i(\varphi))^r]$ e $f \in \mathcal{S}$, então $(\mathcal{H}\alpha_r^\circ f)^{(k)} \approx \mathcal{H}(\alpha_r^\circ f)^{(k)}$.

A propriedade da limitação

$$\|Hf\|_p \leq C \|f\|_p, \quad \forall f \in L^p,$$

do caso clássico não faz sentido no contexto generalizado, por enquanto. Acreditamos que num futuro muito próximo com os trabalhos de J. Aragona, R. Fernandez e O.S. Juriaans, sobre a topologia de $\mathcal{G}(\Omega)$ e sobre $\tilde{\Omega}_c$, ver [3], possam ser pesquisados alguns resultados semelhantes à desigualdade acima.

Bibliografia

- [1] J. ARAGONA, *Introdução à Teoria das Funções Generalizadas de Colombeau*, IME-USP, São Paulo, 1989(Notas de aula da disciplina MAT829, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo).
- [2] J. ARAGONA and H. BIAGIONI, Intrinsic definition of the Colombeau algebra of generalized functions, *Anal. Math.*, 17(1991), 75-132.
- [3] J. ARAGONA, R.FERNANDEZ and O. S. JURIAANS, A discontinuous Colombeau differential calculus, *Monatsh. Math.* 144 (2005), 13-29.
- [4] J. BARROS-Neto, *An introduction to the theory of distributions*, Marcel Dekker, New York, 1973.
- [5] B. J. BELTRAMI and M. R. WOHLERS, Distributional boundary problems and Hilbert transforms, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 18(1965), 304-309.
- [6] H. A. BIAGIONI, *A nonlinear theory of generalized functions*, Lecture Notes in Math. 1421, Springer, New York, 1990.
- [7] R. N. BRACEWELL, *The Fourier transform and its applications*, McGraw-Hill, New York, 1965.
- [8] B. M. BUDAK and S. V. FOMIN, *Multiple integrals, field theory and series*, Mir, Moscou, 1973.

- [9] J. F. COLOMBEAU, *Elementary introduction to new generalized functions*, North Holland, Amsterdam, 1985.
- [10] E. M. DYNKIN, *Methods of the theory of singular integrals: Hilbert transform and Calderón-Zygmund theory*, In: V. P. Khavin and N. K. Nikolskij (eds.), *Commutative Harmonic Analysis I*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [11] J. DUOANDIKOETXEA, *Fourier Analysis*, American Math. Soc., Providence, 2001.
- [12] G. HAHN, *Hilbert transforms in signal processing*, Artech House, Boston, 1996.
- [13] G. HÖRMANN, Integration and microlocal analysis in Colombeau algebras of generalized functions, *J. Math. Anal. Appl.*, 239(1999), 332-348.
- [14] G. HÖRMANN and M. KUNZINGER, Microlocal properties of basic operations in Colombeau algebras, *J. Math. Anal. Appl.*, 261(2001), 254-270.
- [15] S. ISHIKAWA, Generalized Hilbert transforms in tempered distributions, *Tokyo J. Math.*, 10(1987), 119-132.
- [16] W. KAPLAN, *Operational methods for linear systems*, Addison-Wesley, Reading, 1962.
- [17] M. KUNZINGER, *Lie transformation groups in Colombeau algebras*, Ph.D. thesis, University of Vienna, 1996.
- [18] H. A. LAUWERIER, The Hilbert problem for generalized functions, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 13(1963), 157-166.
- [19] M. NEDELJKOV, S. PILIPOVIĆ and D. SCARPALÉZOS, *The linear theory of Colombeau generalized functions*, Pitman Research Notes in Mathematics, vol.385, Longman, Harlow, 1998.
- [20] U. NERI, *Singular integrals*, Lecture Notes in Math. 200, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

- [21] M. ORTON, Hilbert transforms, Plemelj relations and Fourier transforms of distributions, *SIAM J. Math. Anal.*, 4(1973), 656-670.
- [22] J. N. PANDEY, The Hilbert transform of Schwartz distributions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 89(1983), 86-90.
- [23] J. N. PANDEY and M. A. CHAUDHRY, The Hilbert transform of generalized functions and applications, *Can. J. Math.*, 35(1983), 478-495.
- [24] S. PILIPOVIĆ, Hilbert transformation of Beurling ultradistributions, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 77(1987), 1-13.
- [25] C. SADOSKY, *Interpolation of operators and singular integrals*, Marcel Dekker, New York, 1979.
- [26] L. SCHWARTZ, *Théorie des Distributions*, 2nd. ed., Hermann, Paris, 1957.
- [27] R. L. SORAGGI, Fourier analysis on Colombeau's algebra of generalized functions, *J. d'Anal. Math.*, 69(1996), 201-227.