**Hipersuperfícies regradas e de Weingarten
em formas espaciais**

Barbara Corominas Valério

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Geometria Diferencial**
Orientador: **Prof. Dr. Antonio Carlos Asperti**

*Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro da FAPESP
Processo 99/11398-6*

-São Paulo, dezembro de 2004-

Hipersuperfícies regradas e de Weingarten em formas espaciais

Este exemplar corresponde à redação final
da Tese devidamente corrigida e defendida
por **Barbara Corominas Valério**
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, dezembro de 2004.

Comissão Julgadora

- Prof. Dr. Antonio Carlos Asperti (presidente)- IME-USP
- Prof^a Dr^a Rosa Maria S. Barreiro Chaves - IME-USP
- Prof. Dr. Francesco Mercuri -IMECC-UNICAMP
- Prof. Dr. Renato Hyuda de Luna Pedrosa - IMECC-UNICAMP
- Prof. Dr. Ruy Tojeiro de Figueiredo Junior -UFSCar

*À minha mãe, Dolores,
e ao meu companheiro Gilberto.*

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Antonio Carlos Asperti, pela dedicação e paciência com que me orientou. Seus conhecimentos e questionamentos me ajudaram a alcançar mais este objetivo. Só lamento a nossa incompatibilidade futebolística, infelizmente ele é Palmeirense.

Aos professores Fabiano Gustavo Braga Brito, Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves e Francesco Mercuri, muito obrigada pelas sugestões feitas durante todo o meu trabalho. Em especial, quero agradecer novamente à professora Rosa M. B. Chaves e à professora Cláudia Cueva Candido pelo constante apoio, incentivo e carinho.

Aos meus amigos do IME, principalmente os da sala 140 – B, com os quais tenho compartilhado os últimos anos, obrigada por todos os momentos de descontração e por todas as palavras de carinho. Em particular quero agradecer aos meus amigos Cecília, Samuel (quebrei a tradição de um ano), Major, Maite, Mário, Raul, Irene Onnis, Zé e Irene.

Aos meus pais, pelo constante apoio e, em particular, à minha mãe por todas as palavras de conforto. Aos meus irmãos Montserrat e Artur, aos meus cunhados Rogério e Fernanda, e aos meus sobrinhos Natália, Lucas, Paloma e Nicolle que sempre me incentivaram, cada um da sua forma.

Ao meu grande amigo, companheiro, confidente e terapeuta Gilberto, obrigada por tudo, principalmente por estar sempre ao meu lado.

Abstract

In 1865/66 Beltrami [Be] and Dini [Di] classified, independently, the ruled Weingarten surfaces in $\mathbb{R}^3$. More recently, in 1984, Dajczer and Tenenblat [DT] extended this classification in the case of hypersurfaces in $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$. This work generalizes the above/previous results to space form, that is, classify the ruled Weingarten hypersurfaces in $\mathbb{S}^{n+1}$ and $\mathbb{H}^{n+1}$, $n \geq 2$. In $\mathbb{H}^{n+1}$, $n \geq 3$, the results are partial yet.

Resumo

Em 1865/66 Beltrami [Be] e Dini [Di] classificaram, independentemente, as superfícies regradas e de Weingarten em $\mathbb{R}^3$. Mais recentemente, em 1984, Dajczer e Tenenblat [DT] estenderam esta classificação para o caso de hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$. Este trabalho generaliza os resultados anteriores para formas espaciais, isto é, classifica as superfícies regradas e de Weingarten em $\mathbb{S}^{n+1}$ e $\mathbb{H}^{n+1}$, $n \geq 2$. Em $\mathbb{H}^{n+1}$, $n \geq 3$, os resultados ainda são parciais.

Sumário

Introdução	iii
1 Conceitos básicos	1
1.1 Generalidades sobre o espaço de Lorentz	1
1.1.1 Hipersuperfícies em $\mathbb{L}^{n+1}$	3
1.2 Generalidades sobre $\mathbb{Q}^n(c)$	4
1.3 Generalidades sobre o espaço de De Sitter	6
1.3.1 Hipersuperfícies tipo espaço no espaço de De Sitter	6
1.3.2 Geodésicas do espaço de De Sitter	8
1.4 O Triedro de Frenet para curvas em $\mathbb{Q}^3(c)$	9
1.5 Superfícies helicoidais em formas espaciais	12
1.6 Subvariedades regradas em formas espaciais	17
1.7 Superfícies regradas no espaço de De Sitter	19
1.8 Hipersuperfícies de Weingarten	20
1.9 Redução de codimensão	22
2 Superfícies regradas	26
2.1 Superfícies regradas em $\mathbb{Q}^3(c)$	26
2.2 Superfícies regradas tipo espaço em $\mathbb{S}_1^3$	30
2.3 Equação de Codazzi para superfícies em $\mathbb{S}^3$ e $\mathbb{H}^3$	34
2.4 Superfícies regradas com curvatura Gaussiana constante em $\mathbb{Q}^3(c)$ e $\mathbb{S}_1^3$	37

2.4.1	Superfícies regradas desenvolvíveis em $\mathbb{Q}^3(c)$	38
2.4.2	Superfícies regradas tipo espaço desenvolvíveis em $\mathbb{S}_1^3$	42
3	Superfícies regradas helicoidais em formas espaciais	43
3.1	Uma caracterização das hélices em formas espaciais	43
3.2	Uma caracterização das superfícies regradas helicoidais em formas espaciais	47
4	Superfícies regradas e de Weingarten em formas espaciais	54
4.1	Classificação das superfícies regradas e de Weingarten em $\mathbb{S}^3$	54
4.2	Classificação das superfícies regradas e de Weingarten em $\mathbb{H}^3$	60
5	Hipersuperfícies regradas e de Weingarten em formas espaciais	67
5.1	Parametrização de Gauss de uma hipersuperfície em uma forma espacial	67
5.2	Classificação das hipersuperfícies regradas e de Weingarten em $\mathbb{S}^{n+1}$.	73
5.3	Resultados parciais obtidos sobre a classificação das hipersuperfícies regradas e de Weingarten em $\mathbb{H}^{n+1}$	88
	Referências Bibliográficas	95

Introdução

Uma hipersuperfície M^n em uma forma espacial real $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$, $n \geq 2$, é *regrada* quando é folheada por $(n - 1)$ -subvariedades totalmente geodésicas de $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$. M^n é de *Weingarten* quando existe uma relação funcional não trivial entre as suas curvaturas média e escalar.

Em 1865/66 Beltrami [Be] e Dini [Di] classificaram, independentemente, as superfícies regradas e de Weingarten em $\mathbb{R}^3$. Em 1994, Kühnel [K] reescreve os trabalhos de Beltrami e Dini, onde enuncia o seguinte teorema:

Teorema 0.1 *Seja X a parametrização de uma superfície regrada não desenvolvível em $\mathbb{R}^3$. São equivalentes:*

- (i) *X é a parametrização de uma superfície de Weingarten;*
- (ii) *as funções Q , J , F são constantes;*
- (iii) *$2H\sqrt{\pm Q} = \sqrt[4]{-K}(J \mp F\sqrt{-K})$ para constantes Q , J , F onde o sinal é o sinal definido por Q ;*
- (iv) *X é a parametrização de uma superfície regrada helicoidal definida pelo movimento helicoidal ("screw motion") de uma reta.*

No enunciado acima, Q, J, F são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e estão definidas em (2.3). Temos então que as superfícies regradas e de Weingarten em $\mathbb{R}^3$, são exatamente as superfícies regradas helicoidais, ou seja, as superfícies regradas invariantes por um movimento helicoidal, ver definição (1.15).

Seguem-se ainda, da demonstração do teorema anterior, outras características das superfícies regradas e de Weingarten em $\mathbb{R}^3$. Em primeiro lugar, gostaríamos de observar que as superfícies regradas são parametrizadas através da função exponencial, isto é,

$$\begin{aligned} X(s, t) &= \exp_{e_0(s)}(te_1(s)) \\ &= e_0(s) + te_1(s), \end{aligned}$$

onde e_0, e_1 são curvas em $\mathbb{R}^3$ tais que $|\dot{e}_1|^2 = 1$ e $\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle = 0$. Esta parametrização é muito importante para o estudo das superfícies regradas, pois ela permite a visualização das folhas que regram a superfície. As funções mencionadas no teorema anterior, surgem de forma natural quando determinamos uma expressão para as curvaturas Gaussiana e média da superfície, ver (2.4), e elas estão diretamente relacionadas com a parametrização da superfície. Usando-se o fato das funções Q, J, F serem constantes, segue-se que as superfícies regradas e de Weingarten possuem a característica que suas curvaturas Gaussiana e média são constantes em relação ao parâmetro translacional, veja definição (1.19). Além disso, observou-se o fato que as superfícies regradas helicoidais em $\mathbb{R}^3$ possuem curvatura Gaussiana e média constantes em relação a um dos parâmetros usados para a parametrização da superfície.

O primeiro objetivo deste trabalho foi generalizar o resultado obtido por Beltrami e Dini para superfícies regradas em formas espaciais, $\mathbb{Q}^3(c)$, $c \neq 0$. Sem perda de generalidade, supomos que $\mathbb{Q}^3(c)$ é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, se $c = 0$; é a esfera unitária $\mathbb{S}^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \sum_{j=1}^4 x_j^2 = 1\}$, se $c = 1$; ou é o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : -x_1^2 + \sum_{j=2}^4 x_j^2 = -1, x_1 > 1\}$, se $c = -1$. Observando o comportamento das superfícies regradas e de Weingarten em $\mathbb{R}^3$, várias perguntas foram feitas a respeito de qual seria o comportamento das superfícies regradas e de Weingarten em $\mathbb{S}^3$ e $\mathbb{H}^3$, as mais importantes foram:

1. Quais os exemplos mais simples de superfícies regradas e de Weingarten em $\mathbb{Q}^3(c)$?
2. É condição suficiente, para que uma superfície regrada em $\mathbb{S}^3$ e $\mathbb{H}^3$ seja helicoidal, que ela possua curvatura Gaussiana e média constantes em relação a um dos parâmetros?
3. Também é condição necessária que uma superfície regrada em $\mathbb{S}^3$ e $\mathbb{H}^3$ possua curvatura Gaussiana e média constantes em relação a um dos parâmetros para que seja de Weingarten?

A primeira pergunta é facilmente resolvida quando se observa que as curvaturas Gaussiana e média de uma superfície regrada satisfazem uma relação não trivial se, e somente se, satisfazem à igualdade $K_s H_t - K_t H_s = 0$, onde s, t são parâmetros da superfície, ver Proposição (1.21). Segue-se então que os exemplos mais simples de superfícies regradas e de Weingarten, são as superfícies com curvatura Gaussiana ou média constantes, e as superfícies com curvatura Gaussiana e média constantes em relação a um mesmo parâmetro. Convém mencionar que as subvariedades regradas com curvatura média constante em formas espaciais são completamente classificadas nos trabalhos [BDJ] e [BD].

Se a resposta para a segunda questão for afirmativa, temos como no caso euclidiano, que as superfícies regradas helicoidais em $\mathbb{Q}^3(c)$, $c \neq 0$, são exemplos de superfícies regradas e de Weingarten em $\mathbb{Q}^3(c)$, pois pela primeira questão, é condição suficiente para que uma superfície regrada seja de Weingarten, que possua curvatura Gaussiana e média constantes em relação a um dos parâmetros. Se a resposta para a terceira questão for afirmativa, teremos que as superfícies regradas helicoidais são todos os exemplos de superfícies regradas e de Weingarten em $\mathbb{Q}^3(c)$, $c \neq 0$, pois a condição sobre as curvaturas Gaussiana e média passa a ser necessária. Observamos que a segunda e a terceira questão são respondidas de forma afirmativa.

No Capítulo 1 falamos dos conceitos básicos sobre a teoria usada para o desenvolvimento do trabalho.

No Capítulo 2, mais precisamente nas seções 2.1 e 2.3, estudamos as superfícies regradas em formas espaciais, com o objetivo de fornecer as relações geométricas que elas satisfazem. Observamos que as superfícies regradas no caso esférico e hiperbólico, também são parametrizadas através da função exponencial, ver (2.1). Além disso, na seção 2.4 estudamos as superfícies regradas com curvatura Gaussiana constante e estendemos a definição de superfície desenvolvível. Ainda neste capítulo, estudamos algumas propriedades das superfícies regradas no espaço de De Sitter $\mathbb{S}_1^3$, que são usadas no capítulo 5.

No Capítulo 3 estudamos as superfícies regradas helicoidais em formas espaciais e mostramos que é suficiente, para que uma superfície regrada seja helicoidal, que possua curvatura Gaussiana e média constante em relação ao parâmetro translacional. Para mostrar tal característica foi fundamental o estudo das hélices em formas espaciais.

No Capítulo 4 estudamos as superfícies regradas e de Weingarten em formas espaciais, e os teoremas encontrados (4.2) e (4.4) são a extensão natural do resultado obtido por Beltrami e Dini para $\mathbb{S}^3$ e $\mathbb{H}^3$, respectivamente. Observamos, no entanto, que foi preciso adicionar uma hipótese técnica nos teoremas citados.

Feita a classificação das superfícies regradas e de Weingarten em formas espaciais, o passo seguinte foi estudar o caso das hipersuperfícies, M^n em $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$, $n \geq 3$.

Em 1989 Dajczer e Tenenblat [DT] classificaram as hipersuperfícies regradas e de Weingarten em $\mathbb{R}^{n+1}$. Para obter tal classificação, eles usaram como ferramenta a parametrização de Gauss para hipersuperfícies com nulidade relativa constante, descrita por Dajczer e Gromoll em [DG]. As hipersuperfícies com índice de nulidade relativa constante estão relacionadas com as hipersuperfícies regradas, pelo simples resultado de que em um ponto de uma hipersuperfície regrada, a curvatura escalar é diferente da curvatura do ambiente se, e somente se, neste ponto o índice de nulidade

relativa é igual a $n - 2$, ver observações 5.4 e 5.5.

No Capítulo 5, classificamos as hipersuperfícies regradas e de Weingarten em $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$, $c \neq 0$, mais especificamente, na seção 5.1 falamos sobre a parametrização de Gauss descrita por Dajczer e Gromoll, na seção 5.2, mostramos que o resultado obtido por Dajczer e Tenenblat se estende naturalmente para o caso esférico, isto é, para o caso de hipersuperfície em $\mathbb{S}^{n+1}$. Na seção 5.3, estendemos o resultado para o caso de hipersuperfícies em $\mathbb{H}^{n+1}$, no entanto, os resultados obtidos são parciais, isto é, a classificação ainda não está completa. As dificuldades encontradas na seção 5.3, devem-se ao fato que quando tomamos a aplicação de Gauss da hipersuperfície em $\mathbb{H}^{n+1}$, a sua imagem está contida no espaço de De Sitter, $\mathbb{S}_1^{n+1}$, que é uma hipersuperfície tipo tempo do espaço de Lorentz $(n + 2)$ -dimensional.

Por fim, gostaríamos de observar que alguns cálculos feitos nos capítulos 3 e 4 foram realizados com o auxílio do software Mathematica.

Capítulo 1

Conceitos básicos

O objetivo deste primeiro capítulo é fixar a notação e apresentar alguns conceitos que serão usados ao longo deste trabalho.

1.1 Generalidades sobre o espaço de Lorentz

Seja $\mathbb{L}^{n+1}$ o espaço de Lorentz-Minkowski $n + 1$ -dimensional, isto é, o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) / x_i \in \mathbb{R}\}$ munido com a métrica pseudo-Riemanniana $g_{-1}(x, y) = -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i y_i$. Observamos que g_{-1} é uma forma bilinear simétrica, não degenerada de índice 1 sobre $\mathbb{R}^{n+1}$, onde o índice ν de uma forma bilinear simétrica $\mathcal{B}$ sobre um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial V , é a maior dimensão de qualquer subespaço $W \subset V$ no qual se $w \in W$, $w \neq 0$ então $\mathcal{B}(w, w) < 0$, isto é, $\mathcal{B}$ é negativa definida em W .

Segue-se do fato da métrica g_{-1} ter índice 1 que existem três tipos de vetores em $\mathbb{L}^{n+1}$:

Definição 1.1 *Seja $v \in \mathbb{L}^{n+1}$. Dizemos que v é tipo*

*espaço, se $g_{-1}(v, v) > 0$ ou $v = 0$,
tempo, se $g_{-1}(v, v) < 0$,
luz, se $g_{-1}(v, v) = 0$ e $v \neq 0$.*

Baseado no tipo causal de um vetor em $\mathbb{L}^{n+1}$, existe uma generalização natural para o tipo causal de um subespaço vetorial de $\mathbb{L}^{n+1}$. Observe que o tipo causal de um vetor coincide com o tipo causal do subespaço por ele gerado. Seja então W um subespaço vetorial de $\mathbb{L}^{n+1}$. Existem três possibilidades mutuamente exclusivas para W :

- $g_{-1}|_W$ é positiva-definida; W é dito tipo espaço.
- $g_{-1}|_W$ é não-degenerada de índice 1; W é dito tipo tempo.
- $g_{-1}|_W$ é degenerada; W é dito tipo luz.

Figura 1.1: W é um subespaço tipo espaço em 1, tipo tempo em 2 e tipo luz em 3.

A seguir enunciaremos, sem demonstrar, alguns resultados sobre $\mathbb{L}^{n+1}$, ver [O].

Proposição 1.2 *Se W é um k -subespaço de $\mathbb{L}^{n+1}$, então $n + 1 = \dim W + \dim W^\perp$ e $W^{\perp\perp} = W$, onde $W^\perp = \{v \in \mathbb{L}^{n+1} / g_{-1}(v, w) = 0, \forall w \in W\}$.*

Proposição 1.3 *Se v é um vetor tipo tempo no espaço de Lorentz, então o subespaço $v^\perp$ é tipo espaço e $\mathbb{L}^{n+1} = \mathbb{R}v + v^\perp$.*

Proposição 1.4 *Se W é um subespaço de $\mathbb{L}^{n+1}$, então $g_{-1}|_W$ é não-degenerada de índice 1 se, e somente se, $g_{-1}|_{W^\perp}$ é positiva-definida.*

Proposição 1.5 *Seja W um k -subespaço de $\mathbb{L}^{n+1}$, com $k \geq 2$. São equivalentes:*

- i) $g_{-1}|_W$ é não degenerada de índice 1.*
- ii) W contém dois vetores nulos, linearmente independentes.*
- iii) W contém um vetor tipo tempo.*

Por fim lembramos que analogamente ao caso Riemanniano, é possível definir em $\mathbb{L}^{n+1}$ uma única conexão $\bar{\nabla}$ denominada conexão de Levi-Civita de $\mathbb{L}^{n+1}$, melhor dizendo:

Teorema 1.6 *Existe uma única aplicação $\bar{\nabla} : \chi(\mathbb{L}^{n+1}) \times \chi(\mathbb{L}^{n+1}) \rightarrow \chi(\mathbb{L}^{n+1})$ tal que*

- 1. $\bar{\nabla}_V W$ é $\mathcal{F}(\mathbb{L}^{n+1})$ -linear em V .*
- 2. $\bar{\nabla}_V W$ é $\mathbb{R}$ -linear em W .*
- 3. $\bar{\nabla}_V(fW) = V[f]W + f\bar{\nabla}_V W$, para $f \in \mathcal{F}(\mathbb{L}^{n+1})$.*
- 4. $[V, W] = \bar{\nabla}_V W - \bar{\nabla}_W V$.*
- 5. $Xg_{-1}(V, W) = g_{-1}(\bar{\nabla}_X V, W) + g_{-1}(V, \bar{\nabla}_X W)$, $\forall X, V, W \in \chi(\mathbb{L}^{n+1})$.*

$\bar{\nabla}$ é denominada conexão de Levi-Civita de $\mathbb{L}^{n+1}$.

1.1.1 Hipersuperfícies em $\mathbb{L}^{n+1}$

Definição 1.7 *Dizemos que M é uma hipersuperfície em $\mathbb{L}^{n+1}$ de tipo espaço, se a métrica induzida tem índice zero, isto é, se $g_{-1}|_M$ é Riemanniana, e dizemos que é de tipo tempo, se a métrica induzida tem índice 1, isto é, se $g_{-1}|_M$ é Lorentziana.*

Neste trabalho aparecerão duas hipersuperfícies de $\mathbb{L}^{n+1}$ conhecidas como o *espaço hiperbólico*, e o *espaço de De Sitter*.

- Espaço hiperbólico

$$\mathbb{H}^n(c) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} / g_{-1}(x, x) = -c^2, x_1 > 0\}$$

é uma hipersuperfície tipo espaço de $\mathbb{L}^{n+1}$, denominada *espaço hiperbólico de dimensão n* .

- Espaço de De Sitter

$$\mathbb{S}_1^n(c) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} / g_{-1}(x, x) = c^2\}$$

é uma hipersuperfície tipo tempo de $\mathbb{L}^{n+1}$, denominada *espaço de De Sitter de dimensão n* ou *esfera n dimensional de $\mathbb{L}^{n+1}$ de raio c* .

Sabe-se que $\mathbb{H}^n(c)$ e $\mathbb{S}_1^n(c)$ são variedades completas, simplesmente conexas (exceto $\mathbb{S}_1^2(c)$), com curvatura seccional constante $-\frac{1}{c^2}$ e $\frac{1}{c^2}$, respectivamente. Sabe-se ainda, que $\mathbb{H}^n(c)$ juntamente com o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, e a esfera euclidiana $\mathbb{S}^n$, são as únicas variedades Riemannianas completas, simplesmente conexas com curvatura seccional constante. Baseados neste comportamento, estudaremos hipersuperfícies em $\mathbb{Q}^n(c)$ (definido a seguir) e hipersuperfícies em $\mathbb{S}_1^n(c)$.

1.2 Generalidades sobre $\mathbb{Q}^n(c)$

Usaremos a notação $\mathbb{Q}^n(c)$ para indicar a variedade Riemanniana n dimensional, completa, simplesmente conexa com curvatura seccional constante $c = 0, \pm 1$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\mathbb{Q}^n(c)$ é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, se $c = 0$; é a esfera unitária $\mathbb{S}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{j=1}^{n+1} x_j^2 = 1\}$, se $c = 1$; ou é o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : -x_1^2 + \sum_{j=2}^{n+1} x_j^2 = -1, x_1 > 1\}$, se $c = -1$. Será conveniente, em alguns casos, identificarmos o espaço $\mathbb{R}^n$ com o hiperplano $\{(x_1, x_2, \dots, x_n, 1)\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Seja $f : M^m \rightarrow \mathbb{Q}^n(c)$, $2 \leq m < n$, uma imersão isométrica de uma variedade diferenciável em $\mathbb{Q}^n(c)$. Como localmente f é um mergulho, podemos considerar o espaço tangente a M^m em p como um subespaço do espaço tangente a $\mathbb{Q}^n(c)$ em $f(p) = p$, ou seja, $T_p \mathbb{Q}^n(c) = T_p M \oplus T_p M^\perp$, onde $T_p M^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p M$ em $T_p \mathbb{Q}^n(c)$. Desta decomposição obtemos o fibrado normal a M , denotado por $TM^\perp$. Seja ainda TM o fibrado tangente a M .

Denotando-se por ∇ e $\bar{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de M e $\mathbb{Q}^n(c)$, respectivamente, obtemos da decomposição anterior, as fórmulas de Gauss e Weingarten dadas respectivamente, por:

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y),$$

$$\bar{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi,$$

onde $X, Y \in \chi(M)$, $\xi \in \chi(M)^\perp$, $\alpha : T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M^\perp$ é a segunda forma fundamental da imersão f em $p \in M$, A_ξ é o operador forma relativo à segunda forma fundamental de f ao longo de ξ e $\nabla_X^\perp \xi = (\bar{\nabla}_X \xi)^\perp$ é a conexão normal de f .

Denotemos por $R(\bar{R})$ o tensor de curvatura de M ($\mathbb{Q}^n(c)$) e por $R^\perp$ o tensor de curvatura normal de $TM^\perp$, definidos por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

e

$$R^\perp(X, Y)\xi = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi - \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi,$$

onde $X, Y, Z \in \chi(M)$ e $\xi \in \chi(M)^\perp$.

Das duas fórmulas anteriores, derivam-se as equações básicas que uma imersão isométrica deve verificar. Como estamos considerando imersões isométricas em $\mathbb{Q}^n(c)$, isto é, em um espaço com curvatura seccional constante, as equações que se obtêm são:

Equação de Gauss:

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W \rangle &= c(\langle \langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y, Z, W \rangle + \\ &+ \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle - \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle). \end{aligned}$$

Equação de Codazzi:

$$(\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) = (\nabla_Y^\perp \alpha)(X, Z),$$

ou equivalentemente

$$(\nabla_X A)(Y, \xi) = (\nabla_Y A)(X, \xi). \quad (1.1)$$

Equação de Ricci:

$$R^\perp(X, Y)\xi = \alpha(X, A_\xi Y) - \alpha(A_\xi X, Y),$$

ou equivalentemente

$$\langle R^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y \rangle.$$

onde

$$(\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) = \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z),$$

e

$$(\nabla_X A)(Y, \xi) = \nabla_X A_\xi Y - A_\xi \nabla_X Y - A_{\nabla_X^\perp \xi} Y.$$

Observamos que estamos usando $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para representar a métrica induzida de $\mathbb{Q}^n(c)$ em M^m , nos três casos.

Denotando-se, respectivamente, por $K(X, Y) = \langle R(X, Y)X, Y \rangle$ e $\bar{K}(X, Y) = \langle \bar{R}(X, Y)X, Y \rangle$ a curvatura seccional de M e $\mathbb{Q}^n(c)$, em relação ao plano gerado pelos campos ortonormais X e Y , segue-se pela equação de Gauss que

$$K(X, Y) = \bar{K}(X, Y) + \langle \alpha(X, X), \alpha(Y, Y) \rangle - |\alpha(X, Y)|^2.$$

1.3 Generalidades sobre o espaço de De Sitter

1.3.1 Hipersuperfícies tipo espaço no espaço de De Sitter

O espaço de De Sitter admite hipersuperfícies de tipo espaço, tipo tempo e tipo luz, no entanto discutiremos apenas o primeiro caso, pois será com este tipo de hipersuperfície que trabalharemos na seção 5.3. Sem perda de generalidade, consideraremos $\mathbb{S}_1^{n+1}(1) \cong \mathbb{S}_1^{n+1}$ e também usaremos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para representar a métrica lorentziana induzida.

Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ uma imersão isométrica tipo espaço, e denotemos por ∇ , $\bar{\nabla}$ e $\tilde{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de M^n , $\mathbb{S}_1^{n+1}$ e $\mathbb{L}^{n+2}$, respectivamente. Denotemos ainda por N o campo normal unitário de M^n em $\mathbb{S}_1^{n+1}$ e por f o campo unitário (vetor posição) de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ em $\mathbb{L}^{n+2}$, donde segue-se que $\langle f, f \rangle = 1$ e $\langle N, N \rangle = -1$.

Para todo ponto $p \in M^n$, e identificando $f(p) = p$, podemos analogamente ao caso Riemanniano, fazer a seguinte identificação

$$T_p \mathbb{S}_1^{n+1} = T_p M^n \oplus \text{span}\{N(p)\}.$$

Temos então a fórmula de Gauss $\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y)$, onde $X, Y \in \chi(M)$ e α denota a segunda forma fundamental da imersão f . A fórmula de Gauss pode ainda

ser reescrita como

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \langle AX, Y \rangle N,$$

onde A é o operador de Weingarten da imersão f relativo ao campo N . A fórmula de Weingarten é dada pela relação $\bar{\nabla}_X \xi = (\bar{\nabla}_X \xi)^T + (\bar{\nabla}_X \xi)^\perp$, onde ξ é um campo normal a imersão f . Como $\xi = N$ segue-se que a fórmula de Weingarten se reescreve como

$$\bar{\nabla}_X N = (\bar{\nabla}_X N)^T = -AX.$$

Denotando por R ($\bar{R}$) o tensor de curvatura de M ($\mathbb{S}_1^{n+1}$), temos que a equação de Gauss de M é dada por

$$\begin{aligned} \langle R(V, W)X, Y \rangle &= \langle \bar{R}(V, W)X, Y \rangle + \langle \alpha(V, X), \alpha(W, Y) \rangle + \\ &\quad - \langle \alpha(V, Y), \alpha(W, X) \rangle. \end{aligned}$$

Segue-se ainda, denotando-se respectivamente por $K(X, Y) = \langle R(X, Y)X, Y \rangle$ e $\bar{K}(X, Y) = \langle \bar{R}(X, Y)X, Y \rangle$ as curvaturas seccionais de M e $\mathbb{S}_1^{n+1}$, que

$$K(X, Y) = \bar{K}(X, Y) + \langle \alpha(X, X), \alpha(Y, Y) \rangle - \langle \alpha(X, Y), \alpha(X, Y) \rangle,$$

onde X e Y são campos diferenciáveis sobre M que geram um plano não degenerado. Observe que no caso que iremos estudar, não existem subespaços degenerados do espaço tangente.

Denotando por $\nabla^\perp : \chi(M) \times \chi(M)^\perp \rightarrow \chi(M)^\perp$ a conexão normal de M definida por $\nabla_X^\perp \xi = (\bar{\nabla}_X \xi)^\perp$ onde $X \in \chi(M)$ e $\xi \in \chi(M)^\perp$, temos que a equação de Codazzi de M é dada por

$$(\nabla_V^\perp \alpha)(W, X) = (\nabla_W^\perp \alpha)(V, X), \quad V, W, X \in \chi(M),$$

onde

$$(\nabla_V^\perp \alpha)(W, X) = \nabla_V^\perp(\alpha(W, X)) - \alpha(\nabla_V W, X) - \alpha(W, \nabla_V X),$$

ou equivalentemente

$$(\nabla_V A)(W, \xi) = (\nabla_W A)(V, \xi). \quad (1.2)$$

onde

$$(\nabla_V A)(W, \xi) = \nabla_V A_\xi W - A_\xi \nabla_V W - A_{\nabla_V^\perp \xi} W.$$

1.3.2 Geodésicas do espaço de De Sitter

Definição 1.8 Uma geodésica em uma variedade semi-Riemanniana, M , é uma curva $\gamma : I \rightarrow M$ cujo campo vetorial $\dot{\gamma}(s)$ é paralelo, isto é, $\frac{D\dot{\gamma}}{ds} = 0$.

Definição 1.9 Uma curva $\gamma : I \rightarrow M$ em uma variedade semi-Riemanniana, M , é dita de tipo espaço se o vetor velocidade $\dot{\gamma}(s)$ é tipo espaço para todo $s \in I$. De forma análoga, podemos definir uma curva tipo tempo e tipo luz.

Uma curva qualquer em uma variedade semi-Riemanniana, não possui necessariamente um tipo causal, isto é, seu vetor velocidade não possui necessariamente o mesmo tipo causal em todo ponto. As geodésicas, no entanto, possuem um tipo causal, pois o vetor tangente à curva é paralelo, e o transporte paralelo de um vetor preserva o seu tipo causal.

Dependendo do tipo causal de uma geodésica, temos o seguinte resultado:

Figura 1.2: Geodésicas no espaço de De Sitter.

Proposição 1.10 Seja γ a parametrização de uma geodésica em S_1^{n+1} . Então podemos ter:

- i) Se γ é tipo tempo, então γ é a parametrização de um ramo de uma hipérbole em $\mathbb{L}^{n+2}$.
- ii) Se γ é tipo luz, então γ é a parametrização de uma reta, isto é, é uma geodésica em $\mathbb{L}^{n+2}$.
- iii) Se γ é tipo espaço, então γ é a parametrização de uma elipse em $\mathbb{L}^{n+2}$.

Demonstração: Ver [O].

1.4 O Triedro de Frenet para curvas em $\mathbb{Q}^3(c)$

Denotemos genericamente por $\mathbb{F}^4$ os espaços $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{L}^4$. Dados três vetores u_1, u_2, u_3 pertencentes a $\mathbb{F}^4$ existe um único vetor $u_1 \wedge u_2 \wedge u_3$ em $\mathbb{F}^4$ tal que para todo $z \in \mathbb{F}^4$

$$\langle z, u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 \rangle := \det(z, u_1, u_2, u_3),$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a métrica em $\mathbb{F}^4$. O vetor $u_1 \wedge u_2 \wedge u_3$ é chamado *produto vetorial* de u_1, u_2 e u_3 e é obtido da seguinte forma:

$$u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 := \begin{vmatrix} c & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \end{vmatrix},$$

onde $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ denota a base canônica de $\mathbb{F}^4$, $u_i = (u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, u_{i4})$ e $c = -1$, se $\mathbb{F}^4 = \mathbb{L}^4$ e $c = 1$, se $\mathbb{F}^4 = \mathbb{R}^4$.

Com a definição anterior, verifica-se que o produto vetorial $u_1 \wedge u_2 \wedge u_3$ satisfaz as seguintes propriedades:

1. $u_1 \wedge u_2 \wedge u_3$ é simultaneamente ortogonal aos três vetores u_1, u_2, u_3 ;
2. $|u_1 \wedge u_2 \wedge u_3|^2 = c \det(\langle u_i, u_j \rangle)$;
3. é antisimétrico, isto é, a troca de posição entre seus elementos implica na mudança de orientação do vetor;
4. o produto vetorial entre três vetores é nulo se, e somente se, pelo menos dois dos vetores são linearmente dependentes;
5. é bilinear em cada fator.

Ao estudarmos uma curva é fundamental conhecermos o comportamento de suas funções curvatura. Quando estamos em dimensão três, estas funções são as funções

curvatura e torção. Determinemos o triedro de Frenet associado a uma curva em $\mathbb{Q}^3(c)$. Como o caso $c = 0$ é bem conhecido, faremos apenas os casos $c = \pm 1$.

Seja $\gamma = \gamma(s) : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}^3(c)$ uma curva regular em $\mathbb{Q}^3(c)$ com velocidade unitária. Denotando $T(s) = \dot{\gamma}(s)$, definimos a *curvatura* de γ por

$$\kappa(s) := |\bar{\nabla}_{T(s)} T(s)|, \quad (1.3)$$

onde $\bar{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{Q}^3(c)$. Se $\kappa(s) \neq 0$, definimos

$$N(s) := \frac{\bar{\nabla}_{T(s)} T(s)}{\kappa(s)}, \quad B(s) := T(s) \wedge N(s) \wedge \gamma(s), \quad (1.4)$$

onde em $B(s)$ é usado o produto vetorial definido acima. É imediato verificar que $\{T, N, B\}$ define um referencial ortonormal, o qual é chamado *triedro de Frenet* associado a curva γ .

Denotando por $'$ a derivada em relação a variável s em $\mathbb{F}^4$, e por $\bar{D}$ a derivada covariante em $\mathbb{Q}^3(c)$, segue-se no caso $c = 1$ que

$$\frac{\bar{D}B}{ds} = \dot{B} - \langle \dot{B}, \gamma \rangle \gamma,$$

onde

$$\begin{aligned} \dot{B} &= \dot{T} \wedge N \wedge \gamma + T \wedge \dot{N} \wedge \gamma + T \wedge N \wedge \dot{\gamma} \\ &= \left(\frac{\bar{D}T}{ds} + \langle \dot{T}, \gamma \rangle \gamma \right) \wedge N \wedge \gamma + T \wedge \left(\frac{\bar{D}N}{ds} + \langle \dot{N}, \gamma \rangle \gamma \right) \wedge \gamma \\ &= T \wedge \frac{\bar{D}N}{ds} \wedge \gamma. \end{aligned}$$

Temos então

$$\frac{\bar{D}B}{ds} = T \wedge \frac{\bar{D}N}{ds} \wedge \gamma,$$

isto é, $\frac{\bar{D}B}{ds}$ é ortogonal a B , T e γ . Logo

$$\frac{\bar{D}B}{ds} = -\tau(s)N, \quad (1.5)$$

onde $\tau(s)$ é chamada *torção* de γ .

Das igualdades anteriores, segue-se que

$$\begin{aligned} \langle N, T \rangle = 0 &\Rightarrow \left\langle \frac{\bar{D}N}{ds}, T \right\rangle + \left\langle N, \frac{\bar{D}T}{ds} \right\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \left\langle \frac{\bar{D}N}{ds}, T \right\rangle = -\kappa \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{N}, \mathbf{B} \rangle = 0 &\Rightarrow \left\langle \frac{\overline{D}\mathbf{N}}{ds}, \mathbf{B} \right\rangle + \left\langle \mathbf{N}, \frac{\overline{D}\mathbf{B}}{ds} \right\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \left\langle \frac{\overline{D}\mathbf{N}}{ds}, \mathbf{B} \right\rangle = \tau.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\overline{D}\mathbf{N}}{ds} = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}.$$

No caso $c = -1$, observando-se apenas que $\frac{\overline{D}\mathbf{B}}{ds} = \dot{\mathbf{B}} + \langle \dot{\mathbf{B}}, \gamma \rangle \gamma$, temos que valem as mesmas expressões para $\frac{\overline{D}\mathbf{N}}{ds}$ e $\frac{\overline{D}\mathbf{B}}{ds}$.

Logo dada uma curva regular unitária em $\mathbb{Q}^3(c)$ as seguintes fórmulas, chamadas *fórmulas de Frenet*, verificam-se

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{T} &= \kappa\mathbf{N}, \\ \overline{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{N} &= -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}, \\ \overline{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{B} &= -\tau\mathbf{N}.\end{aligned}$$

Os dois próximos lemas são facilmente verificados.

Lema 1.11 *Seja $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}^3(c)$ uma curva regular em $\mathbb{Q}^3(c)$ com velocidade unitária. As condições seguintes são equivalentes:*

1. $\kappa \equiv c$.
2. γ é uma geodésica em $\mathbb{Q}^3(c)$.

Lema 1.12 *Nas condições do lema anterior, suponha que $\kappa(s) > 0$. São equivalentes:*

1. $\tau \equiv 0$.
2. γ é uma curva plana em $\mathbb{Q}^3(c)$, isto é, $\gamma(I)$ está contida em uma 2-subvariedade totalmente geodésica de $\mathbb{Q}^3(c)$.

Determinemos uma expressão para o cálculo explícito da curvatura e da torção de uma curva regular com velocidade unitária em $\mathbb{Q}^3(c)$. Segue-se por (1.3) que no caso $c = 1$

$$\kappa = |\ddot{\gamma} - \langle \ddot{\gamma}, \gamma \rangle \gamma| = |\ddot{\gamma} + \gamma|,$$

e no caso $c = -1$

$$\kappa = |\ddot{\gamma} + \langle \ddot{\gamma}, \gamma \rangle \gamma| = |\ddot{\gamma} - \gamma|,$$

isto é,

$$\kappa = |\ddot{\gamma} + c\gamma|. \quad (1.6)$$

Além disso, por (1.4) e (1.5) temos que nos casos $c = \pm 1$ vale que

$$\begin{aligned} -\tau &= \left\langle \frac{DB}{ds}, N \right\rangle \\ &= \left\langle T \wedge \frac{DN}{ds} \wedge \gamma, N \right\rangle \\ &= \frac{1}{\kappa^2} \left\langle T \wedge \frac{D}{ds}(\ddot{\gamma} + c\gamma) \wedge \gamma, (\ddot{\gamma} + c\gamma) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\kappa^2} \left\langle \dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma} \wedge \gamma, \ddot{\gamma} \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Apenas para constar, lembremos que no caso $\mathbb{R}^3$, vale que

$$\kappa = |\ddot{\gamma}|, \quad \tau = \langle \dot{B}, N \rangle, \quad (1.8)$$

onde $T = \dot{\gamma}$, $\dot{T} = \kappa N$ e $B = T \times N$.

1.5 Superfícies helicoidais em formas espaciais

Geometricamente, um movimento helicoidal em $\mathbb{Q}^3(c)$ é a composição de um movimento de rotação com um de translação, no sentido que passamos a descrever.

Uma *translação* de passo h em $\mathbb{Q}^3(c)$ é uma isometria $\mathcal{T}_h$ de $\mathbb{Q}^3(c)$ que deixa invariante uma geodésica γ , isto é, se $p \in \gamma$, então $\mathcal{T}_h(p) \in \gamma$ e $d(p, \mathcal{T}_h(p)) = h$, onde d é a distância riemanniana de $\mathbb{Q}^3(c)$.

Uma *rotação* de ângulo k ao redor de uma geodésica γ é a isometria $\mathcal{R}_k$ de $\mathbb{Q}^3(c)$ que fixa ponto a ponto a geodésica γ e se $p \in \mathcal{P}^2$, onde $\mathcal{P}^2$ é um plano totalmente geodésico em $\mathbb{Q}^3(c)$ ortogonal a γ , então $\mathcal{R}_k(p) \in \mathcal{P}^2$ e o ângulo entre as geodésicas que passam por p e q e por $\mathcal{R}_k(p)$ e q é k , onde $q = \gamma \cap \mathcal{P}^2$.

Fixemos uma geodésica γ em $\mathbb{Q}^3(c)$ e consideremos a translação $\mathcal{T}_h$ de passo h ao longo de γ e a rotação $\mathcal{R}_k$ de ângulo k ao redor da mesma geodésica. A composta $\mathcal{H}_\varphi = \mathcal{T}_{h\varphi} \circ \mathcal{R}_{k\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ é denominada movimento *helicoidal ao redor do eixo γ com passo h e velocidade k* .

Como queremos operar explicitamente com tais movimentos, é necessário conhecermos os subgrupos de isometrias a um parâmetro do grupo de isometrias de $\mathbb{Q}^3(c)$, ou movimentos rígidos do ambiente.

Definição 1.13 Um subgrupo de isometrias a um parâmetro do grupo de isometrias de $\mathbb{Q}^3(c)$ é uma família $\{\mathcal{H}_\varphi\}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, onde para cada φ fixo, $\mathcal{H}_\varphi$ é uma isometria de $\mathbb{Q}^3(c)$ e para quaisquer $\varphi, \lambda \in \mathbb{R}$, temos

1. $\mathcal{H}_\varphi \circ \mathcal{H}_\lambda = \mathcal{H}_{\varphi+\lambda}$,
2. $\mathcal{H}_\varphi^{-1} = \mathcal{H}_{-\varphi}$,
3. $\mathcal{H}_0 = Id$.

Teorema 1.14 A menos de conjugação, os elementos dos subgrupos acima definidos têm a seguinte forma:

1. Caso $c = -1$:

(a)

$$\mathcal{H}_\varphi^{h,k} = \begin{pmatrix} \cosh h\varphi & \sinh h\varphi & 0 & 0 \\ \sinh h\varphi & \cosh h\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos k\varphi & \sin k\varphi \\ 0 & 0 & -\sin k\varphi & \cos k\varphi \end{pmatrix};$$

(b)

$$\mathcal{H}_\varphi^{h,1} = \begin{pmatrix} 1 + h^2 \frac{\varphi^2}{2} & -h^2 \frac{\varphi^2}{2} & h\varphi & 0 \\ h^2 \frac{\varphi^2}{2} & 1 - h^2 \frac{\varphi^2}{2} & h\varphi & 0 \\ h\varphi & -h\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

2. Caso $c = 0$:

$$\mathcal{H}_\varphi^{h,k} = \begin{pmatrix} \cos k\varphi & \sin k\varphi & 0 & 0 \\ -\sin k\varphi & \cos k\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

3. Caso $c = 1$:

$$\mathcal{H}_\varphi^{h,k} = \begin{pmatrix} \cos h\varphi & \sin h\varphi & 0 & 0 \\ -\sin h\varphi & \cos h\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos k\varphi & \sin k\varphi \\ 0 & 0 & -\sin k\varphi & \cos k\varphi \end{pmatrix};$$

onde h e k são reais fixados e $\varphi \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Ver [R]. Observamos que a conjugação mencionada é no sentido usual de conjugação de matrizes. ■

O movimento em (1.b) chama-se movimento *parabólico*, e em qualquer um dos outros casos, se $h = 0$ o movimento é denominado *rotacional*, se $k = 0$ é denominado *translacional* e, quando $h \neq 0$ e $k \neq 0$ é denominado *helicoidal*. Claramente temos que se $k \neq 0$, então $\{\mathcal{H}_\varphi^{h,k} : \varphi \in \mathbb{R}\} = \{\mathcal{H}_\lambda^{\frac{h}{k},1} : \lambda \in \mathbb{R}\}$. A constante $\frac{h}{k}$ é chamada *passo* do movimento helicoidal.

No que se segue não usaremos o movimento parabólico, e estaremos sempre supondo que $h \neq 0$ e $k \neq 0$. Para simplificarmos a notação usaremos h ao invés de $\frac{h}{k}$ e denotaremos $\mathcal{H}_\varphi := \mathcal{H}_\varphi^{h,1}$.

Observamos que os eixos (geodésicas) considerados no teorema anterior são:

$$\begin{aligned} &(\cosh s, \sinh s, 0, 0), & \text{se } c = -1 \text{ (caso 1.a),} \\ &(0, 0, s), & \text{se } c = 0, \\ &(\cos s, \sin s, 0, 0), & \text{se } c = 1. \end{aligned}$$

Esses eixos serão chamados *eixos invariantes pelo movimento helicoidal*. Note ainda, que no caso $c = 0$, estamos identificando $\mathbb{R}^3$ com o hiperplano $\{(x_1, x_2, x_3, 1)\}$ de $\mathbb{R}^4$.

Definição 1.15 Uma superfície $M^2 \subset \mathbb{Q}^3(c)$ é dita *helicoidal* se permanece invariante por um movimento helicoidal, isto é, $\mathcal{H}_\varphi(M^2) = M^2$, $\forall \varphi \in \mathbb{R}$. Dizemos também que M^2 é $\{\mathcal{H}_\varphi\}_{\varphi \in \mathbb{R}}$ - *invariante*.

Se $p \in \mathbb{Q}^3(c)$, a curva $\mathcal{H}_\varphi(p)$, $\varphi \in \mathbb{R}$, é chamada de *órbita de p* e está contida na superfície cujos pontos equidistam do eixo invariante pelo movimento helicoidal. É imediato que a órbita de um ponto é uma curva invariante pelo movimento helicoidal que a gerou, e vice versa, isto é, toda curva invariante por um movimento helicoidal é a órbita de um de seus pontos.

Se $M^2 \subset \mathbb{Q}^3(c)$ é uma superfície helicoidal e $\mathcal{P}^2$ é um plano em $\mathbb{Q}^3(c)$, ortogonal ao eixo invariante pelo movimento, cálculos diretos mostram que a órbita de todo ponto $p \in M^2$ intercepta $\mathcal{P}^2$ ao menos uma vez (uma única vez quando $c \leq 0$). Temos então que toda superfície helicoidal é gerada por uma curva plana, isto é, $X(s, t) = \mathcal{H}_s(\alpha(t))$ é uma reparametrização de M^2 , onde $\alpha(t) = M^2 \cap \mathcal{P}^2$. A curva $\alpha(t)$ é chamada *curva geratriz* de M^2 e $\mathcal{P}^2$ o *plano de órbitas*.

Segue-se do parágrafo anterior que conhecer a curva geratriz de uma superfície helicoidal pode ser interessante, já que podemos reduzir o estudo da superfície ao estudo da curva. Este método é conhecido como geometria equivariante. Na demonstração da próxima proposição damos um exemplo do uso da curva geratriz.

Proposição 1.16 *Com a notação anterior, seja $M^2 \subset \mathbb{Q}^3(c)$ uma superfície helicoidal reparametrizada por $X(s, t) = \mathcal{H}_s(\alpha(t))$. Então a curvatura média, H , e a curvatura Gaussiana, K , de M^2 são constantes em relação ao parâmetro s .*

Demonstração:

Faremos a demonstração apenas para o caso $c = -1$, pois nos outros dois casos a demonstração segue-se análoga, guardadas as particularidades de cada ambiente.

A menos de isometria de $\mathbb{H}^3$, seja $\mathcal{P}^2 = \{x \in \mathbb{H}^3 : x_2 = 0\}$ a 2-subvariedade totalmente geodésica de $\mathbb{H}^3$ ortogonal ao eixo $\Gamma(r) = (\cosh r, \sinh r, 0, 0)$ e seja $\alpha(t) = (g_1(t), 0, g_3(t), g_4(t))$ a curva geratriz da superfície, determinada pela intersecção da superfície com o plano $\mathcal{P}^2$. Temos então que

$$\begin{aligned} X(s, t) = \mathcal{H}_s(\alpha(t)) = & (g_1 \cosh hs, g_1 \sinh hs, g_3 \cos s + \\ & + g_4 \sin s, -g_3 \sin s + g_4 \cos s) \end{aligned}$$

é uma reparametrização da superfície helicoidal.

Após cálculos simples, verifica-se que

$$\begin{aligned} |X_s|^2 &= g_1^2 h^2 + g_3^2 + g_4^2, \\ |X_t|^2 &= -\dot{g}_1^2 + \dot{g}_3^2 + \dot{g}_4^2, \\ \langle X_s, X_t \rangle &= -g_3 \dot{g}_4 + g_4 \dot{g}_3 \\ \langle X_{ss}, X_t \rangle &= -g_1 \dot{g}_1 h^2 - g_3 \dot{g}_3 - g_4 \dot{g}_4 \\ \langle X_{ss}, X_{tt} \rangle &= -g_1 \ddot{g}_1 h^2 - g_3 \ddot{g}_3 - g_4 \ddot{g}_4 \\ \langle X_{st}, X_{tt} \rangle &= \ddot{g}_3 \dot{g}_4 - \dot{g}_3 \ddot{g}_4 \\ \langle X_{st}, X_{st} \rangle &= \dot{g}_1^2 h^2 + \dot{g}_3^2 + \dot{g}_4^2. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Consideremos então a base ortonormal $\left\{ \frac{X_t}{|X_t|}, \frac{\tilde{X}_s}{|\tilde{X}_s|} \right\}$, onde $\tilde{X}_s = X_s - \langle X_s, X_t \rangle \frac{X_t}{|X_t|^2}$, e calculemos $K \left(\frac{X_t}{|X_t|}, \frac{\tilde{X}_s}{|\tilde{X}_s|} \right)$ e $H \left(\frac{X_t}{|X_t|}, \frac{\tilde{X}_s}{|\tilde{X}_s|} \right)$. Usando-se a expressão para o cálculo da curvatura Gaussiana e da curvatura média de uma superfície em $\mathbb{H}^3$ segue-se, após vários cálculos, que

$$K = -1 + \frac{1}{|X_t|^4 |\tilde{X}_s|^4} \left(\left\langle \alpha(X_t, X_t), \alpha(\tilde{X}_s, \tilde{X}_s) \right\rangle - |\alpha(X_t, \tilde{X}_s)|^2 \right)$$

e

$$H = \frac{1}{4} \left(\frac{|\alpha(X_t, X_t)|^2}{|X_t|^4} + \frac{|\alpha(\tilde{X}_s, \tilde{X}_s)|^2}{|\tilde{X}_s|^4} + \frac{2 \langle \alpha(X_t, X_t), \alpha(\tilde{X}_s, \tilde{X}_s) \rangle}{|\tilde{X}_s|^2 |X_t|^2} \right),$$

onde

$$\begin{aligned} |\alpha(X_t, \tilde{X}_s)|^2 &= |\alpha(X_t, X_s)|^2 - 2 \frac{\langle X_s, X_t \rangle}{|X_t|^2} \langle \alpha(X_s, X_t), \alpha(X_t, X_t) \rangle + \\ &\quad + \frac{\langle X_s, X_t \rangle^2}{|X_t|^4} |\alpha(X_t, X_t)|^2, \\ |\alpha(X_t, X_s)|^2 &= |X_{st}|^2 + \langle X_{st}, X \rangle^2 - \frac{\langle X_{st}, X_t \rangle^2}{|X_t|^2} + \\ &\quad - \frac{1}{|\tilde{X}_s|^2} \left(\langle X_{st}, X_s \rangle - \frac{\langle X_t, X_s \rangle \langle X_{st}, X_t \rangle}{|X_t|^2} \right)^2, \\ |\alpha(X_t, X_t)|^2 &= |X_{tt}|^2 + \langle X_{tt}, X \rangle^2 - \frac{\langle X_{tt}, X_t \rangle^2}{|X_t|^2} - \frac{\langle X_{tt}, \tilde{X}_s \rangle^2}{|\tilde{X}_s|^2}, \\ |\alpha(\tilde{X}_s, \tilde{X}_s)|^2 &= |\alpha(X_s, X_s)|^2 + \frac{4 \langle X_t, X_s \rangle^2}{|X_t|^4} |\alpha(X_s, X_t)|^2 + \\ &\quad + \frac{\langle X_t, X_s \rangle^4}{|X_t|^8} |\alpha(X_t, X_t)|^2 + \\ &\quad - \frac{4 \langle X_t, X_s \rangle}{|X_t|^2} \langle \alpha(X_s, X_t), \alpha(X_s, X_s) \rangle + \\ &\quad + \frac{2 \langle X_t, X_s \rangle^2}{|X_t|^4} \langle \alpha(X_t, X_t), \alpha(X_s, X_s) \rangle + \\ &\quad - \frac{4 \langle X_t, X_s \rangle^3}{|X_t|^6} \langle \alpha(X_s, X_t), \alpha(X_t, X_t) \rangle, \\ |\alpha(X_s, X_s)|^2 &= |X_{ss}|^2 + \langle X_{ss}, X \rangle^2 - \frac{\langle X_{ss}, X_t \rangle^2}{|X_t|^2} + \\ &\quad - \frac{1}{|\tilde{X}_s|^2} \left(\langle X_{ss}, X_s \rangle - \frac{\langle X_t, X_s \rangle \langle X_{ss}, X_t \rangle}{|X_t|^2} \right)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \alpha(X_s, X_t), \alpha(X_t, X_t) \rangle &= \langle X_{st}, X_{tt} \rangle + \langle X_{tt}, X \rangle \langle X_{st}, X \rangle - \frac{\langle X_{tt}, X_t \rangle \langle X_{st}, X_t \rangle}{|X_t|^2} + \\ &\quad - \frac{1}{|\tilde{X}_s|^2} \left(\langle X_{tt}, X_s \rangle - \frac{\langle X_t, X_s \rangle \langle X_{tt}, X_t \rangle}{|X_t|^2} \right) \\ &\quad \left(\langle X_{ts}, X_s \rangle - \frac{\langle X_t, X_s \rangle \langle X_{st}, X_t \rangle}{|X_t|^2} \right), \\ \langle \alpha(\tilde{X}_s, \tilde{X}_s), \alpha(X_t, X_t) \rangle &= \langle \alpha(X_s, X_s), \alpha(X_t, X_t) \rangle + \\ &\quad - 2 \frac{\langle X_t, X_s \rangle}{|X_t|^2} \langle \alpha(X_s, X_t), \alpha(X_t, X_t) \rangle + \\ &\quad + \frac{\langle X_t, X_s \rangle^2}{|X_t|^4} |\alpha(X_t, X_t)|^2, \\ \langle \alpha(X_s, X_s), \alpha(X_t, X_t) \rangle &= \langle X_{ss}, X_{tt} \rangle + \langle X_{ss}, X \rangle \langle X_{tt}, X \rangle - \frac{\langle X_{tt}, X_t \rangle \langle X_{ss}, X_t \rangle}{|X_t|^2} + \\ &\quad - \frac{1}{|\tilde{X}_s|^2} \left(\langle X_{ss}, X_s \rangle - \frac{\langle X_t, X_s \rangle \langle X_{ss}, X_t \rangle}{|X_t|^2} \right) \\ &\quad \left(\langle X_{tt}, X_s \rangle - \frac{\langle X_t, X_s \rangle \langle X_{tt}, X_t \rangle}{|X_t|^2} \right), \\ \langle \alpha(X_s, X_s), \alpha(X_s, X_t) \rangle &= \langle X_{ss}, X_{st} \rangle + \langle X_{st}, X \rangle \langle X_{ss}, X \rangle - \frac{\langle X_{st}, X_t \rangle \langle X_{ss}, X_t \rangle}{|X_t|^2} + \\ &\quad - \frac{1}{|\tilde{X}_s|^2} \left(\langle X_{st}, X_s \rangle - \frac{\langle X_t, X_s \rangle \langle X_{st}, X_t \rangle}{|X_t|^2} \right) \\ &\quad \left(\langle X_{ss}, X_s \rangle - \frac{\langle X_t, X_s \rangle \langle X_{ss}, X_t \rangle}{|X_t|^2} \right) \end{aligned}$$

Usando-se agora (1.9) não é difícil verificar que K e H dependem apenas da variável t , isto é, são constantes em relação a variável s .

■

Para finalizar esta seção faremos uma observação que será muito importante no capítulo 3:

Observação 1.17 *Duas superfícies M_1, M_2 em $\mathbb{Q}^3(c)$ são ditas congruentes quando existe uma isometria $g \in ISO(\mathbb{Q}^3(c))$ tal que $g(M_1) = M_2$; dois subgrupos H_1, H_2 de $ISO(\mathbb{Q}^3(c))$ são ditos conjugados quando existe $g \in ISO(\mathbb{Q}^3(c))$ tal que $H_1 = g \circ H_2 \circ g^{-1}$.*

Segue-se então da definição (1.15) e desta observação que se M_1 é H_1 -invariante e congruente a M_2 , então existe H_2 conjugado a H_1 tal que M_2 é H_2 -invariante. De fato, como M_1 é congruente a M_2 existe $g \in ISO(\mathbb{Q}^3(c))$ tal que $g(M_2) = M_1$, tomemos $H_2 = g^{-1} \circ H_1 \circ g$. É claro que H_1 e H_2 são conjugados e além disso M_2 é H_2 -invariante, pois se $h_2 \in H_2$ então $h_2(M_2) = h_2(g^{-1}(M_1)) = g^{-1} \circ (g \circ h_2 \circ g^{-1})(M_1) = g^{-1}(M_1) = M_2$, já que $(g \circ h_2 \circ g^{-1}) \in H_1$ e M_1 é H_1 -invariante.

1.6 Subvariedades regradas em formas espaciais

Sejam $\mathbb{Q}^m(c)$ e M^{n+1} uma subvariedade $(n+1)$ -dimensional de $\mathbb{Q}^m(c)$. Dizemos que M^{n+1} é uma subvariedade **regrada** de $\mathbb{Q}^m(c)$ se existe uma folheação n -dimensional de M^{n+1} por subvariedades totalmente geodésicas de $\mathbb{Q}^m(c)$, isto é, dado $p \in M^{n+1}$ e $\mathcal{F}_p$ a folha da folheação passando por p , então $\mathcal{F}_p$ é uma subvariedade totalmente geodésica de $\mathbb{Q}^m(c)$ de dimensão n .

O campo de direções normais à folheação, em M^{n+1} , é localmente integrável. Seja então $\gamma = \gamma(s) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^{n+1}$ uma curva integral do campo normal à folheação, onde s é o parâmetro comprimento de arco. Sejam ainda $e_1(s), e_2(s), \dots, e_n(s)$ n campos ortonormais ao longo de $\gamma(s)$, que geram o espaço tangente à folha ao longo de $\gamma(s)$ para cada s . Denotando por $\langle, \rangle$ a métrica do espaço ambiente, $\mathbb{R}^{m+1}$ ou $\mathbb{L}^{m+1}$, podemos escolher $e_1(s), e_2(s), \dots, e_n(s)$ de forma que $\langle e_j, \dot{e}_i \rangle = 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$, onde $'$ é a derivação usual em relação à variável s no espaço ambiente. A afirmação anterior segue-se do próximo lema, cuja demonstração pode ser encontrada em [BDJ].

Lema 1.18 Dadas uma curva γ em uma variedade Riemanniana N^m e n campos ortonormais $e_1(s), e_2(s), \dots, e_n(s)$ tangentes a N ao longo de γ , com $n < m$, sempre podemos escolher campos ortonormais $f_1(s), f_2(s), \dots, f_n(s)$, ao longo de γ tais que

1. os conjuntos $\{f_i(s), 1 \leq i \leq n\}$ e $\{e_i(s), 1 \leq i \leq n\}$ geram o mesmo subespaço de $T_{\gamma(s)}N$;
2. o campo de vetores $\frac{\overline{D}}{ds}f_i(s)$ é normal ao subespaço gerado por $\{f_j(s), 1 \leq j \leq n\}$, para todo $1 \leq i \leq n$, onde $\frac{\overline{D}}{ds}$ é a derivada covariante em N .

Temos então que uma subvariedade regradada M^{n+1} pode ser localmente parametrizada a partir da curva integral γ e dos n campos ortonormais $e_1(s), e_2(s), \dots, e_n(s)$, isto é, M^{n+1} pode ser localmente parametrizada por

$$X(s, t_1, \dots, t_n) = \exp_{\gamma(s)} \left(\sum_{i=1}^{i=n} t_i e_i(s) \right), \quad (1.10)$$

onde $\exp$ é a aplicação exponencial de $\mathbb{Q}^m(c)$, que pode ser expressa por

$$\exp_p(rv) = f(r)p + g(r)v, \quad (1.11)$$

onde $p \in \mathbb{Q}^m(c)$, $v \in T_p\mathbb{Q}^m(c)$ com $\|v\| = 1$ e as funções f e g são dadas por

$$\begin{cases} f(r) = 1, & g(r) = r, & \text{se } c = 0, \\ f(r) = \cos r, & g(r) = \sin r, & \text{se } c = 1, \\ f(r) = \cosh r, & g(r) = \sinh r, & \text{se } c = -1. \end{cases} \quad (1.12)$$

Utilizando-se (1.11) podemos reescrever (1.10) de uma forma mais simples. De fato,

$$\begin{aligned} X(s, t_1, \dots, t_n) &= \exp_{\gamma(s)} \left(\sum_{i=1}^{i=n} t_i e_i(s) \right) = \\ &= \exp_{\gamma(s)} r(t_1, \dots, t_n) \left(\frac{\sum_{i=1}^{i=n} t_i e_i(s)}{r(t_1, \dots, t_n)} \right), \end{aligned}$$

onde $r(t_1, \dots, t_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} t_i^2}$. Portanto

$$X(s, t_1, \dots, t_n) = f(r(t_1, \dots, t_n))\gamma(s) + \frac{g(r(t_1, \dots, t_n))}{r(t_1, \dots, t_n)} \sum_{i=1}^{i=n} t_i e_i(s).$$

Denotando $\gamma(s) = e_0(s)$, $\varphi_0(t_1, \dots, t_n) = f(r(t_1, \dots, t_n))$ e $\varphi_j(t_1, \dots, t_n) = \frac{g(r(t_1, \dots, t_n))}{r(t_1, \dots, t_n)} t_j$, $1 \leq j \leq n$, podemos reescrever a última igualdade como

$$X(s, t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=0}^{i=n} \varphi_i(t_1, \dots, t_n) e_i(s). \quad (1.13)$$

Definição 1.19 *O parâmetro s , quando usado no sentido anterior, será chamado de parâmetro "translacional".*

A parametrização dada em (1.13) tem a característica que os vetores X_{t_j} , $1 \leq j \leq n$, são tangentes a subvariedade totalmente geodésica de $\mathbb{Q}^m(c)$, ou seja, se α denota a segunda forma fundamental da subvariedade M^{n+1} , temos que $\alpha(X_{t_j}, X_{t_k}) = 0$, $1 \leq j, k \leq n$.

1.7 Superfícies regradas no espaço de De Sitter

De forma análoga ao caso Riemanniano, podemos definir no espaço de De Sitter a noção de superfície regradada, isto é, dizemos que M^2 é uma superfície regradada em $\mathbb{S}_1^3$, se M^2 é folheada por geodésicas de $\mathbb{S}_1^3$, ou seja, se por cada ponto de M^2 passa uma geodésica de $\mathbb{S}_1^3$. Como o espaço de De Sitter admite três tipos de geodésicas, podemos definir três tipos de superfícies regradadas:

1. *Superfície regradada por geodésicas tipo espaço*, que podem se localmente parametrizadas como

$$X(s, t) = e_0(s) \cos t + e_1(s) \sin t$$

onde e_0 é uma curva na superfície e e_1 é um vetor tangente à superfície ao longo de e_0 , tal que $\langle e_1, e_1 \rangle = 1$.

2. *Superfície regradada por geodésicas tipo tempo*, que podem se localmente parametrizadas como

$$X(s, t) = e_0(s) \cosh t + e_1(s) \sinh t$$

onde e_0 é uma curva na superfície e e_1 é um vetor tangente à superfície ao longo de e_0 , tal que $\langle e_1, e_1 \rangle = -1$.

3. *Superfície regradada por geodésicas tipo luz*, que podem se localmente parametrizadas como

$$X(s, t) = e_0(s) + e_1(s)t$$

onde e_0 é uma curva na superfície e e_1 é um vetor tipo luz tangente à superfície ao longo de e_0 .

Nos próximos capítulos, nos resultados de $\mathbb{S}_1^{n+1}$, consideraremos apenas as superfícies regradas por geodésicas tipo espaço. É importante observar, neste caso, que o tipo causal da folha não define o tipo causal da superfície. Se analisarmos as superfícies

$$X(s, t) = (\sinh s \cos t, \cosh s \cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t)$$

e

$$Y(s, t) = (\cosh(\sqrt{2}s) \cos t + \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2}s) \sin t, \sinh(\sqrt{2}s) \cos t + \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh(\sqrt{2}s) \sin t, \\ \sqrt{2} \sin(2s) \cos t + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(2s) \sin t, -\sqrt{2} \cos(2s) \cos t + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(2s) \sin t)$$

é fácil verificar que

$$\langle X_s, X_s \rangle = -\cos^2 t, \quad \langle X_t, X_t \rangle = 1$$

e

$$\langle Y_s, Y_s \rangle = 10 \cos^2 t + \sin^2 t, \quad \langle Y_t, Y_t \rangle = 1,$$

donde segue-se que $X(s, t)$ define uma superfície tipo tempo e $Y(s, t)$ uma superfície tipo espaço, ambas folheadas por geodésicas tipo espaço. Note, no entanto, que se tomarmos uma superfície tipo espaço regrada, ela é necessariamente folheada por geodésicas tipo espaço.

1.8 Hipersuperfícies de Weingarten

Definição 1.20 *Uma hipersuperfície conexa em $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$ é chamada de hipersuperfície de Weingarten ou de W -hipersuperfície, se as suas curvaturas escalar S e média H satisfazem uma relação não trivial, isto é, se existe uma função diferenciável não constante F tal que $F(H, S) = 0$.*

Quando $n = 2$, trocamos na definição anterior, a curvatura escalar pela curvatura Gaussiana, K , já que neste caso estas curvaturas coincidem. Analisando a definição anterior para os casos $n = 2$ e $n \geq 3$ segue-se uma caracterização das superfícies e

hipersuperfícies de Weingarten, que será muito importante no desenvolvimento do Capítulo 3 e 5, respectivamente.

Denotando-se por $H_s = \frac{\partial H}{\partial s}$, $H_t = \frac{\partial H}{\partial t}$, $K_s = \frac{\partial K}{\partial s}$ e $K_t = \frac{\partial K}{\partial t}$ temos, no caso $n = 2$, o seguinte resultado:

Proposição 1.21 *Seja $X(s, t)$ a parametrização de uma superfície conexa em $\mathbb{Q}^3(c)$. $X(s, t)$ parametriza uma superfície de Weingarten se, e somente se, os gradientes de H e K são linearmente dependentes, ou em termos das derivadas parciais, se $H_s K_t - H_t K_s = 0$.*

Segue-se então, pela proposição anterior, que para determinarmos quais são as superfícies de Weingarten em $\mathbb{Q}^3(c)$ basta verificarmos quais são as superfícies que satisfazem a relação $H_s K_t = H_t K_s$. Exemplos triviais de superfícies de Weingarten são as superfícies com curvatura média constante, com curvatura Gaussiana constante e com curvatura média e Gaussiana constantes em relação a um dos parâmetros. Sobre esta última classe de exemplos, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.22 *Seja $X(s, t)$ a parametrização de uma superfície conexa de Weingarten tal que suas curvaturas média e Gaussiana não sejam constantes. Então a curvatura média da superfície é constante em relação a um dos parâmetros se, e somente se, a curvatura Gaussiana também o for.*

Demonstração:

Suponhamos, sem perda de generalidade, que a curvatura média da superfície seja constante em relação ao parâmetro t . Temos então que a superfície verifica a igualdade $H_s K_t = 0$.

Se existe um ponto $p_0 \in M^2$ tal que $H_s(p_0) \neq 0$, então existe uma vizinhança $V \ni p_0$ tal que $H_s(q) \neq 0$, $\forall q \in V$. Logo $K_t(q) = 0$, $\forall q \in V$, donde segue-se que em V vale o desejado.

Consideremos agora $Z(H_s)$ o conjunto dos zeros da função H_s . Como H não é função constante, segue-se que $Z(H_s) \subsetneq M^2$, e portanto existe um ponto $p_0 \in \partial(Z(H_s))$. Logo existe uma sequência $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \notin Z(H_s)$, $\forall n$, convergindo para p_0 , donde segue-se então que $K_t(s_n) = 0$, $\forall n$, e portanto, $K_t(p_0) = 0$. ■

No caso $n \geq 3$, usando-se a notação da Definição (1.20), segue-se que se calcularmos a derivada exterior de F teremos que

$$\frac{\partial F}{\partial H} dH + \frac{\partial F}{\partial S} dS = 0,$$

donde segue-se que

$$\frac{\partial F}{\partial H} dH \wedge dS = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial S} dH \wedge dS = 0,$$

e portanto

$$dH \wedge dS = 0, \tag{1.14}$$

pois as derivadas parciais de F não se anulam simultaneamente.

1.9 Redução de codimensão

Dizemos que uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+p}$ admite redução de codimensão para q se existe uma subvariedade totalmente geodésica $\tilde{M}^{n+q}$ em $\tilde{M}^{n+p}$, com $q < p$, tal que $f(M^n) \subset \tilde{M}^{n+q}$. O fato de podermos reduzir a codimensão de imersões isométricas será fundamental para o desenvolvimento do capítulo 5. A seguir enunciaremos, sem demonstração, uma versão do teorema de redução de codimensão no caso de imersões isométricas em espaço forma, ver [E], [D]. Depois demonstraremos uma versão deste teorema no caso de uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana em $\mathbb{L}^{n+p}$. Não encontramos referência sobre este resultado, apesar de acharmos que ele é bem conhecido. Começamos dando alguns conceitos básicos.

Dada uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+p}$, chamamos de *primeiro espaço normal* da imersão f em $x \in M$ o subespaço $N_1(x) \subset T_x M^\perp$ gerado pela segunda forma fundamental, α , da imersão f , isto é,

$$N_1(x) = \text{span}\{\alpha(X, Y) : X, Y \in T_x M\},$$

ou equivalentemente,

$$N_1(x) = \{\xi \in T_x M^\perp : A_\xi = 0\}^\perp.$$

A imersão f é chamada de *1-regular* se a dimensão de N_1 é constante ao longo de M , e é chamada de *substancial* se a codimensão de f não pode ser reduzida. A menor codimensão à qual a imersão f pode ser reduzida, é chamada de *codimensão substancial*.

Teorema 1.23 *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}^{n+p}(c)$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana em $\mathbb{Q}^{n+p}(c)$. Suponha que existe um subfibrado paralelo L do fibrado normal, de posto $q < p$, tal que $N_1(x) \subset L(x)$ para todo $x \in M^n$. Então podemos reduzir a codimensão da imersão f para q .*

Corolário 1.24 *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}^{n+p}(c)$ uma imersão isométrica 1-regular de uma variedade Riemanniana em $\mathbb{Q}^{n+p}(c)$. Se N_1 é um subfibrado paralelo de posto $q < p$, então f tem codimensão substancial q .*

Teorema 1.25 *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{L}^{n+p}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana conexa em $\mathbb{L}^{n+p}$. Suponha que existe um subfibrado paralelo não degenerado L do fibrado normal, de posto $q < p$, tal que $N_1(x) \subset L(x)$ para todo $x \in M^n$. Então podemos reduzir a codimensão da imersão f para q .*

Demonstração:

Como M^n é uma variedade Riemanniana, a métrica restrita ao espaço tangente a M^n em x é positiva definida, donde segue-se que $T_x \mathbb{L}^{n+p} = T_x M \oplus T_x M^\perp$, $\forall x \in M^n$, onde $T_x M^\perp$ é um subespaço tipo tempo.

Observamos, em primeiro lugar, que segue-se do fato de $T_x M^\perp$ ser um subespaço tipo tempo que $L(x) \subset T_x M^\perp$ pode ser um subespaço tipo tempo ou tipo espaço, já que por hipótese $L(x)$ é não degenerado. Em ambos os casos temos que $T_x M^\perp = L(x) \oplus L^\perp(x)$, com $L^\perp(x)$ tipo espaço ou tipo tempo, respectivamente.

É fácil verificar, nestes dois casos, que o subfibrado $L^\perp$ é paralelo. De fato, se ξ e η são campos em $L^\perp$ e L , respectivamente, temos

$$\begin{aligned} X \langle \xi, \eta \rangle &= 0, \quad \forall X \in \chi(M) \Rightarrow \langle \nabla_X^\perp \xi, \eta \rangle + \langle \xi, \nabla_X^\perp \eta \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle \nabla_X^\perp \xi, \eta \rangle = 0, \end{aligned}$$

logo $\nabla_X^\perp \xi$ é um campo em $L^\perp$, pois L é não degenerado.

Sejam $x_0 \in M$ um ponto arbitrário, $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva arbitrária passando por x_0 , η um vetor em $L^\perp(x_0)$ e η_t o transporte paralelo de η ao longo de γ na conexão normal. Como $L^\perp$ é paralelo, temos que $\eta_t \in L^\perp(\gamma(t))$, $\forall t \in I$. Segue-se então, pela fórmula de Weingarten e do fato que $N_1 \subset L$, que

$$\frac{d\eta_t}{dt}(t) = \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(t)} \eta_t = -A_{\eta_t} \dot{\gamma}(t) + \nabla_{\dot{\gamma}(t)}^\perp \eta_t = 0,$$

onde $\bar{\nabla}$ é a conexão de Levi Civita de $\mathbb{L}^{n+p}$ e $\nabla^\perp$ é a conexão normal de M^n . Portanto $\eta_t = \eta$ é um vetor constante em $\mathbb{L}^{n+p}$.

Segue assim que

$$\frac{d}{dt} \langle f(\gamma(t)) - f(x_0), \eta \rangle = \langle f_*(\dot{\gamma}(t)), \eta \rangle = 0,$$

e portanto $\langle f(\gamma(t)) - f(x_0), \eta \rangle = cte$.

Como γ e η são arbitrários, temos então que

$$f(M) \subset E(x_0),$$

onde $E(x_0) = T_{x_0}M \oplus L(x_0)$ é uma subvariedade totalmente geodésica $(n + q)$ -dimensional de $\mathbb{L}^{n+p}$. Observe que $\mathbb{E}(x_0)$ é isométrico a $\mathbb{R}^{n+q}$ ou a $\mathbb{L}^{n+q}$ conforme $L(x_0)$ seja um subespaço tipo espaço ou tipo tempo, respectivamente.

Logo a codimensão da imersão f pode ser reduzida. ■

Corolário 1.26 *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{L}^{n+p}$ uma imersão isométrica 1-regular de uma variedade Riemanniana conexa em $\mathbb{L}^{n+p}$. Se N_1 é um subfibrado paralelo não degenerado, de posto $q < p$, então f tem codimensão substancial q .*

Corolário 1.27 *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+p}$ uma imersão isométrica 1-regular de uma variedade conexa tipo espaço no espaço de De Sitter. Se N_1 é um subfibrado paralelo não degenerado, de posto $q < p$, então f tem codimensão substancial q .*

Demonstração:

Consideremos a imersão isométrica $\tilde{f} : M^n \rightarrow \mathbb{L}^{n+p+1}$ dada por $\tilde{f} = i \circ f$, onde $i : \mathbb{S}_1^{n+p} \rightarrow \mathbb{L}^{n+p+1}$ é a inclusão canônica do espaço de De Sitter no espaço de Lorentz.

É imediato que $\tilde{T}_x M^\perp = T_x M^\perp \oplus \text{span}\{f(x)\}$, $\forall x \in M$. Além disso, observando-se que $\tilde{T}_x M = T_x M$, $\forall x \in M$, segue-se que

$$\tilde{N}_1(x) \subset N_1(x) \oplus \text{span}\{f(x)\}.$$

Mostremos que o fibrado $\tilde{L}$ com fibra $\tilde{L}(x) = N_1(x) \oplus \text{span}\{f(x)\}$, é paralelo.

Como M^n é uma subvariedade tipo espaço, temos que $T_x M$ é um subespaço riemanniano e portanto $T_x M^\perp$ é um subespaço tipo tempo. Segue-se então do fato de $N_1(x) \subset T_x M^\perp$ que $N_1(x)$ pode ser um subespaço tipo tempo ou tipo espaço. Segue-se, ainda do fato de N_1 ser não degenerado, que se existe $x \in M$ tal que $N_1(x)$ é tipo tempo, então N_1 é tipo tempo. No caso esférico temos um comportamento análogo.

Se $N_1(x)$ for tipo espaço, segue-se que $\tilde{L}(x)$ também é um subespaço tipo espaço, donde temos que $\tilde{T}_x M^\perp = \tilde{L}(x) \oplus \tilde{L}^\perp(x)$ com $\tilde{L}^\perp(x)$ um subespaço tipo tempo.

É fácil verificar que o complementar ortogonal de $\tilde{L}(x)$ em $\tilde{T}_x M^\perp$ coincide com o complementar ortogonal de $N_1(x)$ em $T_x M^\perp$, que é paralelo na conexão $\nabla^\perp = \tilde{\nabla}^\perp|_{TM^\perp}$.

de f . Olhando f como um campo vetorial normal à imersão $\tilde{f}$, temos para cada campo η em $\tilde{L}^\perp$, que

$$X \langle f, \eta \rangle = 0 \Rightarrow \langle \tilde{\nabla}_X f, \eta \rangle + \langle f, \tilde{\nabla}_X \eta \rangle = 0, \quad \forall X \in \chi(M).$$

Mas $\langle f, \tilde{\nabla}_X \eta \rangle = 0$, pois pelo que observamos acima, $\tilde{L}^\perp$ é paralelo. Então $\langle \tilde{\nabla}_X f, \eta \rangle = 0$ implica que $\tilde{\nabla}_X f$ é um campo em $\tilde{L}$, pois $\tilde{L}^\perp$ é um subfibrado não degenerado. Se $v = n + \lambda f$ é um campo em $\tilde{L}$, onde n é um campo em $N_1(x)$ e $\lambda : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função, segue-se que

$$\begin{aligned} X \langle v, \eta \rangle = X \langle n + \lambda f, \eta \rangle = 0, \quad \forall X \in \chi(M) &\Rightarrow \langle \tilde{\nabla}_X n + \lambda \tilde{\nabla}_X f + X[\lambda]f, \eta \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \lambda \langle \tilde{\nabla}_X f, \eta \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \tilde{L} \text{ é paralelo.} \end{aligned}$$

Se $N_1(x)$ for tipo tempo, teremos que $\tilde{L}$ também será um subfibrado tipo tempo, e analogamente, ao caso tipo espaço, mostra-se que $\tilde{L}$ é paralelo.

Pelo teorema (1.25) segue-se, em ambos os casos, que $\tilde{f}$ admite redução de codimensão. Explicitamente temos que

$$\begin{aligned} \tilde{f}(M) \subset \tilde{T}_x M \oplus \tilde{L}(x) &= T_x M \oplus N_1(x) \oplus \text{span}\{f(x)\} \\ &= \mathbb{E}(x), \end{aligned}$$

ou seja, $\tilde{f}(M)$ está contido em uma $(n + q + 1)$ -subvariedade totalmente geodésica de $\mathbb{L}^{n+p+1}$, onde $\mathbb{E}(x)$ é isométrico a $\mathbb{R}^{n+q+1}$, se $N_1(x)$ for tipo espaço, ou a $\mathbb{L}^{n+q+1}$, se $N_1(x)$ for tipo tempo. Em ambos os casos temos que $\mathbb{E}$ é um subespaço de $\mathbb{L}^{n+p+1}$ tal que $\mathbb{E} \cap \mathbb{S}_1^{n+p} \neq \emptyset$. Então

$$M^n \subset \mathbb{E} \cap \mathbb{S}_1^{n+p} \simeq \begin{cases} \mathbb{S}_1^{n+q}, & \text{se } N_1 \text{ for tipo tempo,} \\ \mathbb{S}^{n+q}, & \text{se } N_1 \text{ for tipo espaço.} \end{cases}$$

■

Capítulo 2

Superfícies regradas

O objetivo deste capítulo é fornecer algumas relações geométricas que as superfícies regradas em $\mathbb{Q}^3(c)$ e $\mathbb{S}_1^3$ satisfazem, e que serão usadas nos próximos capítulos. Na seção 2.1 e 2.2 determinamos uma expressão para as curvaturas Gaussiana e média de uma superfície regrada em $\mathbb{Q}^3(c)$ e $\mathbb{S}_1^3$, respectivamente. Na seção 2.2 obtemos, da equação de Codazzi, um sistema que a superfície regrada em $\mathbb{Q}^3(c)$ deve satisfazer e na seção 2.3 falamos sobre as superfícies regradas desenvolvíveis.

2.1 Superfícies regradas em $\mathbb{Q}^3(c)$

Seja $M^2 \subset \mathbb{Q}^3(c)$ uma superfície conexa regrada imersa em $\mathbb{Q}^3(c)$, $c = 0, \pm 1$. De acordo com a seção (1.6), M^2 pode ser localmente parametrizada por

$$\begin{aligned} X(s, t) &= \exp_{e_0(s)}(t e_1(s)) \\ &= e_0(s)f(t) + e_1(s)g(t), \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde as funções $f(t)$ e $g(t)$ são definidas em (1.12), $e_0(s)$ é uma curva em $\mathbb{Q}^3(c)$ e $e_1(s)$ é um campo unitário tangente a $\mathbb{Q}^3(c)$ ao longo de $e_0(s)$, tais que

$$\begin{cases} |\dot{e}_0| = 1, & \langle \dot{e}_j, e_i \rangle = 0 & j, i = 0, 1, & \text{se } c = \pm 1, \\ |\dot{e}_1| = 1, & \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle = 0, & & \text{se } c = 0. \end{cases}$$

Para facilitar a leitura e não deixar o texto carregado, usaremos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para representar tanto a métrica induzida em $\mathbb{S}^3$ como em $\mathbb{H}^3$. Observe que no caso $c = -1$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pode assumir valores negativos mas, por abuso de notação, também usaremos neste caso que $|\cdot|^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle$.

Segue-se de (2.1) que

$$\begin{aligned} X_s &= \dot{e}_0 f(t) + \dot{e}_1 g(t) \\ X_t &= e_0 \frac{df(t)}{dt} + e_1 \frac{dg(t)}{dt} \\ X_{st} &= \dot{e}_0 \frac{df(t)}{dt} + \dot{e}_1 \frac{dg(t)}{dt} \\ X_{ss} &= \ddot{e}_0 f(t) + \ddot{e}_1 g(t) \\ X_{tt} &= -cX \end{aligned}$$

onde $'$ é a derivação usual em relação a variável s em $\mathbb{F}^4$ onde $\mathbb{F}^4 = \mathbb{R}^4$, se $c = 0, 1$, ou $\mathbb{F}^4 = \mathbb{L}^4$, se $c = -1$. É imediato verificar que para $c \neq 0$, temos

$$\begin{cases} \langle X_s, X_t \rangle = 0, \\ |X_t|^2 = 1, \\ |X_s|^2 = f^2(t) + g^2(t) |\dot{e}_1|^2 + 2f(t)g(t) \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle. \end{cases} \quad (2.2)$$

No caso $c = 0$, tomando-se a base ortonormal $\mathcal{B} = \{e_1, \dot{e}_1, e_1 \times \dot{e}_1\}$ de $\mathbb{R}^3$, onde $\times$ denota o produto vetorial em $\mathbb{R}^3$ e usando-se a notação

$$\begin{cases} F(s) = \langle \dot{e}_0, e_1 \rangle, \\ Q(s) = \langle \dot{e}_0, e_1 \times \dot{e}_1 \rangle, \\ J(s) = \langle \dot{e}_1, e_1 \times \dot{e}_1 \rangle, \\ D(s)^2 = Q(s)^2 + t^2, \end{cases} \quad (2.3)$$

segue-se por [K] que

$$K = -\frac{Q^2}{D^4}, \quad H = \frac{1}{2D^3}(Jt^2 - \dot{Q}t + Q(QJ - F)). \quad (2.4)$$

Vale observar que a curvatura Gaussiana de uma superfície regrada em $\mathbb{R}^3$ é sempre menor ou igual a zero.

Nos casos $c = \pm 1$, tomemos a base ortonormal $\mathcal{A} = \left\{ X_t, \frac{X_s}{|X_s|}, X_t \wedge \frac{X_s}{|X_s|} \wedge X, X \right\}$ de $\mathbb{F}^4$, onde os três primeiros campos são tangentes a $\mathbb{Q}^3(c)$, sendo que os dois primeiros são tangentes a M^2 , e o quarto é normal a $\mathbb{Q}^3(c)$.

Se α denota a segunda forma fundamental de M^2 e $\bar{\nabla}, \nabla$ são as conexões de Levi-Civita em $\mathbb{Q}^3(c)$ e $\mathbb{F}^4$, respectivamente, temos que

$$\begin{aligned} \alpha(X_s, X_s) &= (\bar{\nabla}_{X_s} X_s)^\perp = \nabla_{X_s} X_s - (\nabla_{X_s} X_s)^\top - c \langle \nabla_{X_s} X_s, X \rangle X \\ &= X_{ss} - \left\langle X_{ss}, \frac{X_s}{|X_s|} \right\rangle \frac{X_s}{|X_s|} - \langle X_{ss}, X_t \rangle X_t - c \langle X_{ss}, X \rangle X, \\ \alpha(X_t, X_t) &= X_{tt} - \left\langle X_{tt}, \frac{X_s}{|X_s|} \right\rangle \frac{X_s}{|X_s|} - \langle X_{tt}, X_t \rangle X_t - c \langle X_{tt}, X \rangle X \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\alpha(X_s, X_t) = X_{st} - \left\langle X_{st}, \frac{X_s}{|X_s|} \right\rangle \frac{X_s}{|X_s|} - \langle X_{st}, X_t \rangle X_t - c \langle X_{st}, X \rangle X,$$

donde após cálculos simples segue-se que

$$|\alpha(X_s, X_s)|^2 = |X_{ss}|^2 - \frac{\langle X_{ss}, X_s \rangle^2}{|X_s|^2} - \langle X_{ss}, X_t \rangle^2 - c \langle X_{ss}, X \rangle^2 \quad (2.5)$$

e

$$|\alpha(X_s, X_t)|^2 = |X_{st}|^2 - \frac{\langle X_{st}, X_s \rangle^2}{|X_s|^2}. \quad (2.6)$$

Segue-se pelas igualdades anteriores que o vetor curvatura média de uma superfície regradada em $\mathbb{Q}^3(c)$ é dado por

$$\vec{H}(s, t) = \frac{1}{2 |X_s|^2} \alpha(X_s, X_s),$$

e portanto, a função curvatura média da superfície regradada é dada por

$$H = |\vec{H}(s, t)| = \frac{1}{2 |X_s|^2} |\alpha(X_s, X_s)|. \quad (2.7)$$

Além disso, denotando por K e $\overline{K}$ as curvaturas seccionais de M^2 e $\mathbb{Q}^3(c)$, respectivamente, segue-se por Gauss que

$$\begin{aligned} K \left(\frac{X_s}{|X_s|}, X_t \right) &= \overline{K} \left(\frac{X_s}{|X_s|}, X_t \right) + \left\langle \alpha \left(\frac{X_s}{|X_s|}, \frac{X_s}{|X_s|} \right), \alpha(X_t, X_t) \right\rangle + \\ &\quad - \left| \alpha \left(\frac{X_s}{|X_s|}, X_t \right) \right|^2 \\ &= c - \frac{|\alpha(X_s, X_t)|^2}{|X_s|^2}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

O nosso próximo passo é escrever as funções curvatura Gaussiana e média em função da base $\mathcal{A}$. Observando-se que

$$\dot{f}(t) = -cg(t) \quad \text{e} \quad \dot{g}(t) = f(t),$$

é fácil verificar que

$$\begin{aligned} X_t \wedge X_s \wedge X &= \left(\frac{dg(t)}{dt} f(t) - \frac{df(t)}{dt} g(t) \right) e_1 \wedge X_s \wedge e_0 \\ &= \left(\frac{dg(t)}{dt} f^2(t) - g(t) f(t) \frac{df(t)}{dt} \right) e_1 \wedge \dot{e}_0 \wedge e_0 + \\ &\quad + \left(g(t) f(t) \frac{dg(t)}{dt} - g^2(t) \frac{df(t)}{dt} \right) e_1 \wedge \dot{e}_1 \wedge e_0 \\ &= f(t) e_1 \wedge \dot{e}_0 \wedge e_0 + g(t) e_1 \wedge \dot{e}_1 \wedge e_0, \end{aligned}$$

donde segue-se que

$$\begin{aligned}\langle X_{st}, X_t \wedge X_s \wedge X \rangle &= -cg^2(t) \langle \dot{e}_0, e_1 \wedge \dot{e}_1 \wedge e_0 \rangle + f^2(t) \langle \dot{e}_1, e_1 \wedge \dot{e}_0 \wedge e_0 \rangle \\ &= -\langle \dot{e}_0, e_1 \wedge \dot{e}_1 \wedge e_0 \rangle\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\langle X_{ss}, X_t \wedge X_s \wedge X \rangle &= f^2(t) \langle \ddot{e}_0, e_1 \wedge \dot{e}_0 \wedge e_0 \rangle + f(t)g(t) \langle \ddot{e}_0, e_1 \wedge \dot{e}_1 \wedge e_0 \rangle + \\ &+ f(t)g(t) \langle \ddot{e}_1, e_1 \wedge \dot{e}_0 \wedge e_0 \rangle + g^2(t) \langle \ddot{e}_1, e_1 \wedge \dot{e}_1 \wedge e_0 \rangle.\end{aligned}$$

Como X_{st} e X_{ss} pertencem a $\mathbb{F}^4$ temos, usando a base $\mathcal{A}$, que

$$X_{st} = \langle X_{st}, X_s \rangle \frac{X_s}{|X_s|^2} + \langle X_{st}, X_t \wedge X_s \wedge X \rangle X_t \wedge \frac{X_s}{|X_s|^2} \wedge X$$

e

$$\begin{aligned}X_{ss} &= \langle X_{ss}, X_t \rangle X_t + \langle X_{ss}, X_s \rangle \frac{X_s}{|X_s|^2} + \\ &+ \langle X_{ss}, X_t \wedge X_s \wedge X \rangle X_t \wedge \frac{X_s}{|X_s|^2} \wedge X + c \langle X_{ss}, X \rangle X,\end{aligned}$$

donde segue-se que

$$|X_{st}|^2 = \frac{\langle X_{st}, X_s \rangle^2}{|X_s|^2} + \frac{\langle X_{st}, X_t \wedge X_s \wedge X \rangle^2}{|X_s|^2}$$

e

$$|X_{ss}|^2 = \langle X_{ss}, X_t \rangle^2 + \frac{\langle X_{ss}, X_s \rangle^2}{|X_s|^2} + \frac{\langle X_{ss}, X_t \wedge X_s \wedge X \rangle^2}{|X_s|^2} + c \langle X_{ss}, X \rangle^2.$$

Logo por (2.5), (2.6), (2.7) e (2.8) segue-se que

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2|X_s|^3} \langle X_{ss}, X_t \wedge X_s \wedge X \rangle, \\ K &= c - \frac{\langle X_{st}, X_t \wedge X_s \wedge X \rangle^2}{|X_s|^4}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Usando-se a notação

$$\begin{cases} F(s) &= \langle \ddot{e}_0, e_1 \wedge \dot{e}_0 \wedge e_0 \rangle, \\ D(s) &= \langle \ddot{e}_1, e_1 \wedge \dot{e}_1 \wedge e_0 \rangle, \\ G(s) &= \langle \ddot{e}_1, e_1 \wedge \dot{e}_0 \wedge e_0 \rangle, \\ L(s) &= \langle \ddot{e}_0, e_1 \wedge \dot{e}_1 \wedge e_0 \rangle, \\ Q(s) &= \begin{cases} \langle \dot{e}_0, e_1 \wedge \dot{e}_1 \wedge e_0 \rangle, & \text{se } c = 1, \\ \langle \dot{e}_1, e_1 \wedge \dot{e}_0 \wedge e_0 \rangle, & \text{se } c = -1, \end{cases} \end{cases}\tag{2.10}$$

segue-se por (2.9) que as curvaturas Gaussiana e média de uma superfície regrada em $\mathbb{Q}^3(c)$ são dadas por

$$\begin{cases} K = 1 - \frac{Q^2}{|X_s|^4}, & H = \frac{h}{2|X_s|^3}, \text{ se } c = 1, \\ K = -1 - \frac{Q^2}{|X_s|^4}, & H = \frac{h}{2|X_s|^3}, \text{ se } c = -1, \end{cases} \quad (2.11)$$

onde

$$h = h(s, t) = f^2(t)F(s) + g^2(t)D(s) + (L(s) + G(s))f(t)g(t).$$

É imediato por (2.11) a generalização de um resultado de $\mathbb{R}^3$, isto é, a curvatura Gaussiana de uma superfície regrada em $\mathbb{Q}^3(c)$, é sempre menor ou igual a c .

Segue-se pela expressão de $Q(s)$ que

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= c(\langle \ddot{e}_0, e_1 \wedge \dot{e}_1 \wedge e_0 \rangle + \langle \dot{e}_0, e_1 \wedge \ddot{e}_1 \wedge e_0 \rangle) \\ &= c(L - G) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Q^2 &= \left(\det \begin{bmatrix} \dot{e}_0 \\ e_1 \\ \dot{e}_1 \\ e_0 \end{bmatrix} \right)^2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \langle \dot{e}_1, \dot{e}_0 \rangle & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle & 0 & |\dot{e}_1|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= |\dot{e}_1|^2 - \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle^2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.2 Superfícies regradas tipo espaço em $\mathbb{S}_1^3$

Seja $M^2 \subset \mathbb{S}_1^3$ uma superfície conexa, tipo espaço, regrada imersa em $\mathbb{S}_1^3$ que pode ser, de acordo com a seção (1.7), parametrizada localmente por

$$X(s, t) = e_0(s) \cos t + e_1(s) \sin t, \quad (2.13)$$

onde e_0 é uma curva tipo espaço em M^2 e e_1 é um campo tangente à M^2 ao longo de e_0 ($\langle e_0, e_1 \rangle = 0$), tal que $\langle e_1, e_1 \rangle = 1$. Além disso, suponhamos que $\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle = 0$ e $\langle \dot{e}_1, \dot{e}_1 \rangle = 1$, onde $'$ é a derivação usual em relação a variável s em $\mathbb{R}^4$.

Por derivação direta, segue-se de (2.13) que

$$\begin{aligned} X_s &= \dot{e}_0 \cos t + \dot{e}_1 \sin t \\ X_t &= -e_0 \sin t + e_1 \cos t \\ X_{st} &= -\dot{e}_0 \sin t + \dot{e}_1 \cos t \\ X_{ss} &= \ddot{e}_0 \cos t + \ddot{e}_1 \sin t \\ X_{tt} &= -X, \end{aligned} .$$

donde temos que

$$\begin{cases} \langle X_s, X_t \rangle &= \langle \dot{e}_0, e_1 \rangle, \\ \langle X_t, X_t \rangle &= 1, \\ \langle X_s, X_s \rangle &= \langle \dot{e}_0, \dot{e}_0 \rangle \cos^2 t + \sin^2 t. \end{cases}$$

Note que $\langle X_s, X_s \rangle > 0$.

Consideremos a base ortonormal $\mathcal{D} = \left\{ X_t, \frac{\tilde{X}_s}{|\tilde{X}_s|}, X_t \wedge \frac{\tilde{X}_s}{|\tilde{X}_s|} \wedge X, X \right\}$ de $\mathbb{L}^4$, onde $\tilde{X}_s = X_s - \langle X_t, X_s \rangle X_t$. Observe que os dois primeiros campos de $\mathcal{D}$ são tangentes a M^2 , isto é, determinam em cada ponto um vetor tipo espaço e o terceiro campo é tangente a $\mathbb{S}_1^3$ e normal a M^2 , isto é, em cada ponto determina um vetor tipo tempo.

Se α denota a segunda forma fundamental de M^2 segue-se, analogamente à seção anterior, que

$$\begin{aligned} \alpha(\tilde{X}_s, \tilde{X}_s) &= \alpha(X_s, X_s) - 2 \langle X_t, X_s \rangle \alpha(X_s, X_t) + \langle X_t, X_s \rangle^2 \alpha(X_t, X_t), \\ \alpha(\tilde{X}_s, X_t) &= \alpha(X_s, X_t) - \langle X_t, X_s \rangle \alpha(X_t, X_t), \end{aligned}$$

onde

$$\alpha(X_s, X_s) = X_{ss} - \left\langle X_{ss}, \tilde{X}_s \right\rangle \frac{\tilde{X}_s}{|\tilde{X}_s|^2} - \langle X_{ss}, X_t \rangle X_t - \langle X_{ss}, X \rangle X,$$

$$\alpha(X_t, X_t) = X_{tt} - \left\langle X_{tt}, \tilde{X}_s \right\rangle \frac{\tilde{X}_s}{|\tilde{X}_s|^2} - \langle X_{tt}, X_t \rangle X_t - \langle X_{tt}, X \rangle X$$

e

$$\alpha(X_s, X_t) = X_{st} - \left\langle X_{st}, \tilde{X}_s \right\rangle \frac{\tilde{X}_s}{|\tilde{X}_s|^2} - \langle X_{st}, X_t \rangle X_t - \langle X_{st}, X \rangle X,$$

donde temos que o vetor curvatura média de uma superfície regrada tipo espaço em $\mathbb{S}_1^3$ é dado por

$$\vec{H}(s, t) = \frac{1}{2 |\tilde{X}_s|^2} \alpha(\tilde{X}_s, \tilde{X}_s),$$

e portanto, a função curvatura média da superfície regradada é dada por

$$\mathcal{H} = \langle \vec{H}, \vec{H} \rangle = \frac{1}{4 |\tilde{X}_s|^4} \langle \alpha(\tilde{X}_s, \tilde{X}_s), \alpha(\tilde{X}_s, \tilde{X}_s) \rangle. \quad (2.14)$$

Observe que $\mathcal{H}$ é um número negativo. Denotando por K e $\bar{K}$ as curvaturas seccionais de M^2 e $\mathbb{S}_1^3$, respectivamente, segue-se por Gauss que

$$K \left(\frac{\tilde{X}_s}{|\tilde{X}_s|}, X_t \right) = 1 - \frac{\langle \alpha(X_s, X_t), \alpha(X_s, X_t) \rangle}{|\tilde{X}_s|^2}. \quad (2.15)$$

Passemos agora a escrever (2.14) e (2.15) em função da base $\mathcal{D}$. Seguindo cálculos análogos à seção anterior, temos que

$$\begin{aligned} X_t \wedge \tilde{X}_s \wedge X &= X_t \wedge X_s \wedge X \\ &= \cos t \, e_1 \wedge \dot{e}_0 \wedge e_0 + \sin t \, e_1 \wedge \dot{e}_1 \wedge e_0 \end{aligned}$$

donde segue-se que

$$\langle X_{st}, X_t \wedge X_s \wedge X \rangle = -\langle \dot{e}_0, e_1 \wedge \dot{e}_1 \wedge e_0 \rangle$$

e

$$\begin{aligned} \langle X_{ss}, X_t \wedge X_s \wedge X \rangle &= \cos^2 t \langle \ddot{e}_0, e_1 \wedge \dot{e}_0 \wedge e_0 \rangle + \cos t \sin t (\langle \ddot{e}_0, e_1 \wedge \dot{e}_1 \wedge e_0 \rangle + \\ &\quad + \langle \ddot{e}_1, e_1 \wedge \dot{e}_0 \wedge e_0 \rangle) + \sin^2 t \langle \ddot{e}_1, e_1 \wedge \dot{e}_1 \wedge e_0 \rangle. \end{aligned}$$

Além disso, como X_{st} e X_{ss} pertencem a $\mathbb{L}^4$, temos usando-se a base $\mathcal{D}$ que

$$\begin{aligned} X_{st} &= \left\langle X_{st}, \tilde{X}_s \right\rangle \frac{\tilde{X}_s}{|\tilde{X}_s|^2} - \langle X_{st}, X_t \wedge X_s \wedge X \rangle X_t \wedge \frac{X_s}{|\tilde{X}_s|^2} \wedge X + \\ &\quad + \langle X_{st}, X \rangle X \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} X_{ss} &= \langle X_{ss}, X_t \rangle X_t + \left\langle X_{ss}, \tilde{X}_s \right\rangle \frac{\tilde{X}_s}{|\tilde{X}_s|^2} + \\ &\quad - \langle X_{ss}, X_t \wedge X_s \wedge X \rangle X_t \wedge \frac{X_s}{|\tilde{X}_s|^2} \wedge X + \langle X_{ss}, X \rangle X, \end{aligned}$$

donde segue-se que

$$|X_{st}|^2 = \frac{\left\langle X_{st}, \tilde{X}_s \right\rangle^2}{|\tilde{X}_s|^2} - \frac{\langle X_{st}, X_t \wedge X_s \wedge X \rangle^2}{|\tilde{X}_s|^2} + \langle X_{st}, X \rangle^2,$$

e

$$|X_{ss}|^2 = \langle X_{ss}, X_t \rangle^2 + \frac{\langle X_{ss}, \tilde{X}_s \rangle^2}{|\tilde{X}_s|^2} - \frac{\langle X_{ss}, X_t \wedge X_s \wedge X \rangle^2}{|\tilde{X}_s|^2} + \langle X_{ss}, X \rangle^2$$

$$\langle X_{st}, X_{ss} \rangle = \frac{\langle X_{st}, \tilde{X}_s \rangle \langle X_{ss}, \tilde{X}_s \rangle}{|\tilde{X}_s|^2} + \langle X_{st}, X \rangle \langle X_{ss}, X \rangle +$$

$$- \frac{\langle X_{st}, X_t \wedge X_s \wedge X \rangle \langle X_{ss}, X_t \wedge X_s \wedge X \rangle}{|\tilde{X}_s|^2}.$$

Após cálculos elementares mostra-se que

$$|\alpha(\tilde{X}_s, \tilde{X}_s)|^2 = |\alpha(X_s, X_s)|^2 + 4 \langle X_t, X_s \rangle^2 |\alpha(X_s, X_t)|^2 +$$

$$- 4 \langle X_t, X_s \rangle \langle \alpha(X_s, X_t), \alpha(X_s, X_s) \rangle,$$

$$|\alpha(X_s, X_s)|^2 = |X_{ss}|^2 - \langle X_{ss}, X \rangle^2 - \langle X_{ss}, X_t \rangle^2 +$$

$$- \frac{1}{|\tilde{X}_s|^2} (\langle X_{ss}, X_s \rangle - \langle X_t, X_s \rangle \langle X_{ss}, X_t \rangle)^2,$$

$$|\alpha(X_t, X_s)|^2 = |X_{st}|^2 - \langle X_{st}, X \rangle^2 +$$

$$- \frac{1}{|\tilde{X}_s|^2} (\langle X_{st}, X_s \rangle - \langle X_t, X_s \rangle \langle X_{st}, X_t \rangle)^2,$$

$$|\alpha(X_t, \tilde{X}_s)|^2 = |\alpha(X_t, X_s)|^2,$$

$$\langle \alpha(X_s, X_s), \alpha(X_s, X_t) \rangle = \langle X_{ss}, X_{st} \rangle - \langle X_{st}, X \rangle \langle X_{ss}, X \rangle +$$

$$- \frac{1}{|\tilde{X}_s|^2} (\langle X_{st}, X_s \rangle$$

$$(\langle X_{ss}, X_s \rangle - \langle X_t, X_s \rangle \langle X_{ss}, X_t \rangle).$$

Logo pelas igualdades anteriores, temos que (2.14) e (2.15) se reescrevem como

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4|\tilde{X}_s|^4} \left(-\frac{\langle X_{ss}, X_t \wedge X_s \wedge X \rangle^2}{|\tilde{X}_s|^2} - 4 \langle X_t, X_s \rangle^2 \frac{\langle X_{ss}, X_t \wedge X_s \wedge X \rangle^2}{|\tilde{X}_s|^2} + \right.$$

$$\left. + 4 \frac{\langle X_s, X_t \rangle \langle X_{ss}, X_t \wedge X_s \wedge X \rangle \langle X_{st}, X_t \wedge X_s \wedge X \rangle}{|\tilde{X}_s|^2} \right)$$

$$= -\frac{1}{4|\tilde{X}_s|^6} (\langle X_{ss}, X_t \wedge X_s \wedge X \rangle +$$

$$- 2 \langle X_s, X_t \rangle \langle X_{st}, X_t \wedge X_s \wedge X \rangle)^2,$$

$$K = 1 + \frac{1}{|\tilde{X}_s|^4} \langle X_{st}, X_t \wedge X_s \wedge X \rangle^2.$$
(2.16)

Usando-se a notação

$$\begin{cases} A(s) &= |\dot{e}_0|^2 - \langle \dot{e}_0, e_1 \rangle^2 \\ B(s) &= 1 - \langle \dot{e}_0, e_1 \rangle^2 \\ P(s, t) &= A(s) \cos^2 t + B(s) \sin^2 t \\ Q(s, t) &= \langle \dot{e}_1, \dot{e}_0 \wedge e_1 \wedge e_0 \rangle \\ h(s, t) &= F(s) \cos^2 t + D(s) \sin^2 t + (L(s) + G(s)) \cos t \sin t, \end{cases} \quad (2.17)$$

onde $F(s)$, $D(s)$, $L(s)$ e $G(s)$ são dados em (2.10), mostramos que as curvaturas Gaussiana e média de uma superfície tipo espaço em $\mathbb{S}_1^3$ são dadas por

$$K = 1 + \frac{Q^2}{P^2}, \quad \mathcal{H} = -\frac{(h - 2Q \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle)^2}{4P^3}. \quad (2.18)$$

Observe que $Q^2 = AB$. De fato,

$$\begin{aligned} Q^2 &= \left(\det \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_0 \\ e_1 \\ e_0 \end{bmatrix} \right)^2 = \\ &= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \langle \dot{e}_1, e_0 \rangle \\ 0 & |\dot{e}_0|^2 & \langle \dot{e}_0, e_1 \rangle & 0 \\ 0 & \langle \dot{e}_0, e_1 \rangle & 1 & 0 \\ \langle \dot{e}_1, e_0 \rangle & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= (|\dot{e}_0|^2 - \langle \dot{e}_0, e_1 \rangle^2) (1 - \langle \dot{e}_0, e_1 \rangle^2) \\ &= AB \end{aligned} \quad (2.19)$$

2.3 Equação de Codazzi para superfícies em $\mathbb{S}^3$ e $\mathbb{H}^3$

Será importante em cálculos futuros, determinarmos a equação de Codazzi de uma superfície regrada em $\mathbb{Q}^3(c)$ em termos dos campos coordenados da parametrização dada em (2.1). Segue-se de (1.1) que a equação de Codazzi de uma superfície parametrizada como em (2.1) é dada por:

$$(\tilde{\nabla}_{X_s} A_\xi) X_t = (\tilde{\nabla}_{X_t} A_\xi) X_s,$$

onde $(\tilde{\nabla}_X A_\xi) Y = \tilde{\nabla}_X (A_\xi Y) - A_\xi \tilde{\nabla}_X Y$, com $\tilde{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita da superfície e X_s , X_t e $\xi = X_t \wedge \frac{X_s}{|X_s|} \wedge X$ definidos como anteriormente.

Os coeficientes da segunda forma fundamental da imersão X são dados por

$$\begin{cases} e &= \langle \alpha(X_t, X_t), \xi \rangle, \\ f &= \langle \alpha(X_t, X_s), \xi \rangle, \\ g &= \langle \alpha(X_s, X_s), \xi \rangle, \end{cases}$$

ou equivalentemente,

$$e = 0, \quad f = -c \frac{Q}{|X_s|}, \quad g = \frac{h}{|X_s|}. \quad (2.20)$$

Com a notação anterior temos que

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\nabla}_{X_t} A_\xi \right) X_s &= \tilde{\nabla}_{X_t} \left(\langle A_\xi X_s, X_t \rangle X_t + \langle A_\xi X_s, X_s \rangle \frac{X_s}{|X_s|^2} \right) + \\ &\quad - \left\langle A_\xi \tilde{\nabla}_{X_t} X_s, X_t \right\rangle X_t - \left\langle A_\xi \tilde{\nabla}_{X_t} X_s, X_s \right\rangle \frac{X_s}{|X_s|^2} \\ &= \tilde{\nabla}_{X_t} \left(f X_t + g \frac{X_s}{|X_s|^2} \right) - \left\langle \alpha \left(\tilde{\nabla}_{X_t} X_s, X_t \right), \xi \right\rangle X_t + \\ &\quad - \left\langle \alpha \left(\tilde{\nabla}_{X_t} X_s, X_s \right), \xi \right\rangle \frac{X_s}{|X_s|^2}, \end{aligned}$$

e analogamente mostra-se que

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\nabla}_{X_s} A_\xi \right) X_t &= \tilde{\nabla}_{X_s} \left(f \frac{X_s}{|X_s|^2} \right) - \left\langle \alpha \left(\tilde{\nabla}_{X_s} X_t, X_t \right), \xi \right\rangle X_t + \\ &\quad - \left\langle \alpha \left(\tilde{\nabla}_{X_s} X_t, X_s \right), \xi \right\rangle \frac{X_s}{|X_s|^2}. \end{aligned}$$

Então a equação de Codazzi de uma superfície regrada em $\mathbb{Q}^3(c)$ se resume a

$$\tilde{\nabla}_{X_t} \left(f X_t + g \frac{X_s}{|X_s|^2} \right) = \tilde{\nabla}_{X_s} \left(f \frac{X_s}{|X_s|^2} \right).$$

Desenvolvendo-se a igualdade anterior temos que

$$f_t X_t + g_t \frac{X_s}{|X_s|^2} + f \tilde{\nabla}_{X_t} X_t + g \tilde{\nabla}_{X_t} \frac{X_s}{|X_s|^2} = f_s \frac{X_s}{|X_s|^2} + f \tilde{\nabla}_{X_s} \frac{X_s}{|X_s|^2}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{cases} f_t + f \left\langle \tilde{\nabla}_{X_t} X_t, X_t \right\rangle + g \left\langle \tilde{\nabla}_{X_t} \frac{X_s}{|X_s|^2}, X_t \right\rangle = f \left\langle \tilde{\nabla}_{X_s} \frac{X_s}{|X_s|^2}, X_t \right\rangle, \\ g_t + f \left\langle \tilde{\nabla}_{X_t} X_t, X_s \right\rangle + g \left\langle \tilde{\nabla}_{X_t} \frac{X_s}{|X_s|^2}, X_s \right\rangle = f_s + f \left\langle \tilde{\nabla}_{X_s} \frac{X_s}{|X_s|^2}, X_s \right\rangle. \end{cases}$$

Observando-se que

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{X_s} \frac{X_s}{|X_s|^2} &= -2 \frac{\langle X_{ss}, X_s \rangle}{|X_s|^4} X_s + \frac{1}{|X_s|^2} (X_{ss} - \langle X_{ss}, X \rangle X + \\ &\quad - \langle X_{ss}, X_t \wedge X_s \wedge X \rangle X_t \wedge \frac{X_s}{|X_s|^2} \wedge X) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{X_t} \frac{X_s}{|X_s|^2} &= -2 \frac{\langle X_{st}, X_s \rangle}{|X_s|^4} X_s + \frac{1}{|X_s|^2} (X_{st} - \langle X_{st}, X \rangle X + \\ &\quad - \langle X_{ss}, X_t \wedge X_s \wedge X \rangle X_t \wedge \frac{X_s}{|X_s|^2} \wedge X) \end{aligned}$$

temos, após algumas simplificações, que

$$f_t = -f \frac{\langle X_s, X_{st} \rangle}{|X_s|^2}, \quad (2.21)$$

$$g_t - f_s = -f \frac{\langle X_s, X_{ss} \rangle}{|X_s|^2} + g \frac{\langle X_s, X_{st} \rangle}{|X_s|^2}. \quad (2.22)$$

Agora segue-se por derivação direta de (2.20) que

$$f_t = c \frac{Q(|X_s|)_t}{|X_s|^2} = c \frac{Q \langle X_s, X_{st} \rangle}{|X_s|^3},$$

ou seja, apenas reobtemos (2.21). Ainda por (2.20) temos que

$$f_s = \frac{c(Q \langle X_s, X_{ss} \rangle - \dot{Q} |X_s|^2)}{|X_s|^3}$$

e

$$g_t = \frac{h_t |X_s|^2 - h \langle X_s, X_{st} \rangle}{|X_s|^3},$$

donde a igualdade (2.22) pode ser reescrita como

$$h_t |X_s|^2 - 2h \langle X_s, X_{st} \rangle - c2Q \langle X_s, X_{ss} \rangle + c\dot{Q} |X_s|^2 = 0, \quad (2.23)$$

ou equivalentemente,

$$c \left(\frac{Q}{|X_s|^2} \right)_s + \left(\frac{h}{|X_s|^2} \right)_t = 0. \quad (2.24)$$

Logo se $M^2 \subset \mathbb{Q}^3(c)$ é uma superfície regrada, então M^2 deve satisfazer a relação dada em (2.24).

Usando-se (2.10) podemos ainda reescrever (2.23) como

$$\begin{aligned} & f^2(t) (2L - 2F \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle) + \\ & g^2(t) (-2 |\dot{e}_1|^2 G + 2D \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle - cQ |\dot{e}_1|^2) + \\ & f(t) g(t) (2D - 2F |\dot{e}_1|^2 - 2(G - L) \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle - 2cQ \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle) = 0, \end{aligned}$$

donde segue-se que se $M^2 \subset \mathbb{Q}^3(c)$ é uma superfície regrada, então M^2 deve verificar

$$\begin{cases} L - F \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle = 0 \\ -2 |\dot{e}_1|^2 G + 2D \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle - cQ |\dot{e}_1|^2 = 0 \\ D - F |\dot{e}_1|^2 - (G - L) \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle - cQ \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle = 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

pois $f^2(t)$, $g^2(t)$ e $f(t) g(t)$ são linearmente independentes como funções de t .

2.4 Superfícies regradas com curvatura Gaussiana constante em $\mathbb{Q}^3(c)$ e $\mathbb{S}_1^3$

Existem vários trabalhos em formas espaciais que estudam o comportamento das superfícies com curvatura média ou curvatura Gaussiana constante. O estudo das superfícies regradas em $\mathbb{Q}^3(c)$ com curvatura média constante pode ser encontrado nos trabalhos [BDJ] e [BD], os quais são sempre citados quando o assunto envolve *regradas com curvatura média constante*. Em relação ao estudo das superfícies regradas em $\mathbb{S}_1^3$ não encontramos nada na literatura.

A seguir mostramos dois resultados, provavelmente conhecidos, que caracterizam as superfícies regradas em $\mathbb{Q}^3(c)$ e $\mathbb{S}_1^3$ com curvatura Gaussiana constante.

Proposição 2.1 *Seja $M^2 \subset \mathbb{Q}^3(c)$ uma superfície regrada com curvatura Gaussiana constante. Se*

1. $c = 0$, então $K = 0$;
2. $c = 1$, então $K = 0$ ou $K = 1$;
3. $c = -1$, então $K = -1$;

Demonstração:

Caso $c = 0$: Ver [St]

Caso $c = 1$: Segue-se por (2.11) que K é constante se, e somente se, $\frac{Q}{|X_s|^2}$ for constante. Se $Q \equiv 0$, então $K \equiv 1$. Se $\frac{Q}{|X_s|^2} = a$, onde a é uma constante real não nula, então

$$\begin{aligned} \left(\frac{Q}{|X_s|^2} \right)_t = 0 &\Leftrightarrow 2Q \langle X_{st}, X_s \rangle = 0 \\ &\Rightarrow 2 \langle X_{st}, X_s \rangle = 0 \\ &\Rightarrow (|\dot{e}_1|^2 - 1) \sin 2t + \\ &\quad + 2 \langle \dot{e}_1, \dot{e}_0 \rangle \cos 2t = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} |\dot{e}_1|^2 = 1 \\ \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow K = 0, \end{aligned}$$

onde a última implicação segue-se de (2.2) e (2.12).

Caso $c = -1$: Analogamente ao caso anterior, segue-se por (2.11) que K é constante se, e somente se, $\frac{Q}{|X_s|^2}$ for constante. Se $Q \equiv 0$, então $K \equiv -1$. Se $\frac{Q}{|X_s|^2} = a$, onde a é uma constante real não nula, então

$$\begin{aligned} \left(\frac{Q}{|X_s|^2}\right)_t = 0 &\Leftrightarrow 2Q \langle X_{st}, X_s \rangle = 0 \\ &\Rightarrow 2 \langle X_{st}, X_s \rangle = 0 \\ &\Rightarrow (|\dot{e}_1|^2 + 1) \sinh 2t + \\ &\quad + 2 \langle \dot{e}_1, \dot{e}_0 \rangle \cosh 2t = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} |\dot{e}_1|^2 = -1, \\ \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Logo se K é constante, então $K \equiv -1$, pois o vetor $\dot{e}_1(s)$ pertence ao espaço tangente a $\mathbb{H}^3$, $\forall s$, isto é, $|\dot{e}_1(s)|^2 > 0, \forall s$. ■

Proposição 2.2 *Se $M^2 \subset \mathbb{S}_1^3$ é uma superfície regrada tipo espaço com curvatura Gaussiana constante, então $K = 1$ ou $K = 2$.*

Demonstração:

Segue-se por (2.18) que K é constante se, e somente se, $\frac{Q}{P}$ for constante. Se $Q \equiv 0$, então $K \equiv 1$. Se $\frac{Q}{P} = a$, onde a é uma constante real não nula, então

$$\begin{aligned} \left(\frac{Q}{P}\right)_t = 0 &\Leftrightarrow P_t Q = 0 \\ &\Rightarrow (B - A) \sin 2t = 0 \\ &\Rightarrow B = A. \end{aligned}$$

Logo por (2.17) e (2.19) temos que $a = 1$, isto é, $K = 2$.

2.4.1 Superfícies regradas desenvolvíveis em $\mathbb{Q}^3(c)$

Seja $X(s, t) = \alpha(s) + t\beta(s)$ a parametrização local de uma superfície regrada em $\mathbb{R}^3$, tal que $|\beta| = |\dot{\beta}| = 1$ e $\langle \dot{\alpha}, \dot{\beta} \rangle = 0$. A superfície regrada $X(s, t)$ é dita desenvolvível se o campo η , normal à superfície, é constante ao longo das folhas, isto é, se η_t é nulo. Não é difícil mostrar que as superfícies regradas desenvolvíveis em $\mathbb{R}^3$ são exatamente as superfícies regradas flat, melhor dizendo, uma superfície

regrada em $\mathbb{R}^3$ é desenvolvível se, e somente se, a curvatura Gaussiana da superfície é identicamente nula.

Segue-se da expressão da curvatura Gaussiana de uma superfície regrada em $\mathbb{R}^3$ que a superfície é flat se, e somente se, os vetores $\dot{\alpha}$, β , $\dot{\beta}$ são linearmente dependentes em todo ponto. Analisando estes vetores não é difícil verificar que localmente uma superfície regrada flat é um pedaço de um cilindro, de um cone, ou de uma superfície tangente.

A seguir definiremos o conceito de superfície desenvolvível em $\mathbb{S}^3$ e $\mathbb{H}^3$ e estudaremos a extensão de alguns dos resultados anteriores. Analogamente ao caso Euclidiano, temos a seguinte definição:

Definição 2.3 *Seja M^2 uma superfície regrada em $\mathbb{Q}^3(c)$, $c = \pm 1$. Dizemos que M^2 é uma superfície desenvolvível se o campo normal à superfície é paralelo ao longo das folhas.*

Segue-se da definição anterior o seguinte resultado

Proposição 2.4 *Seja M^2 uma superfície regrada em $\mathbb{Q}^3(c)$, $c = \pm 1$. Então M^2 é uma superfície desenvolvível se, e somente se, $K_{int} = c$, onde K_{int} é a curvatura intrínseca da superfície.*

Demonstração:

Faremos a demonstração apenas para o caso $c = 1$, visto que a demonstração para o caso $c = -1$ é análoga, guardadas as particularidades de cada ambiente.

Sejam M^2 uma superfície regrada em $\mathbb{S}^3$, parametrizada como em (2.1), e $\eta = X_t \wedge \frac{X_s}{|X_s|} \wedge X$ o campo unitário normal à superfície em $\mathbb{S}^3$. Se M^2 é desenvolvível, então $\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(t)} \eta = 0$, onde $\gamma(t) = X(s_0, t)$ é uma folha da superfície regrada e $\bar{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita em $\mathbb{S}^3$. Mas

$$\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(t)} \eta = \eta_t - \langle \eta_t, X \rangle X = \eta_t,$$

pois

$$\eta_t = X_t \wedge \left(\frac{X_{st}|X_s| - (|X_s|)_t X_s}{|X_s|^2} \right) \wedge X.$$

Segue-se, da expressão de η_t e do fato que η é um campo unitário, que η_t pertence ao espaço tangente à superfície, donde temos por (2.10) que

$$\begin{aligned} \eta_t &= \langle \eta_t, X_t \rangle X_t + \langle \eta_t, X_s \rangle \frac{X_s}{|X_s|^2} \\ &= \langle X_t \wedge X_{st} \wedge X, X_s \rangle \frac{X_s}{|X_s|^3} \\ &= \frac{Q}{|X_s|^3}. \end{aligned}$$

Logo $\overline{\nabla}_{\dot{\gamma}(t)}\eta = 0$ se, e somente se, $Q = 0$, donde segue-se por (2.11) o desejado. ■

A construção de exemplos de superfícies regradas com $K = 1$ e $K = -1$ em $\mathbb{S}^3$ e $\mathbb{H}^3$, respectivamente, é trivial de acordo com a definição e o teorema que passamos a descrever.

Definição 2.5 *Um homeomorfismo $\phi : M_1 \rightarrow M_2$ é chamado uma aplicação geodésica se para toda geodésica $\gamma \in M_1$, $\phi \circ \gamma$ é uma reparametrização de uma geodésica de M_2 .*

Temos então o seguinte resultado, cuja demonstração encontra-se em [S].

Teorema 2.6 *Sejam $\phi : \mathbb{Q}^m(c) \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação geodésica e $M^2 \subset \mathbb{Q}^m(c)$ uma superfície regrada. Então M^2 tem curvatura intrínseca c se, e somente se, $\phi(M^2) \subset \mathbb{R}^m$ é uma superfície flat.*

Segue-se assim que as superfícies com $K = 1$ e $K = -1$ em $\mathbb{S}^3$ e $\mathbb{H}^3$, respectivamente, são localmente a imagem inversa através de uma aplicação geodésica de um cone, de um cilindro ou de uma superfície tangente. Vejamos qual a parametrização de uma aplicação geodésica de $\mathbb{S}^3$ e $\mathbb{H}^3$ em $\mathbb{R}^3$.

No caso esférico, definimos uma aplicação ϕ que associa a cada ponto p , pertencente a $\mathbb{S}_+^3 = \{p = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4 / p_4 > 0\}$, ao ponto obtido pela intersecção de $\mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{R}^3 \times \{1\} \subset \mathbb{R}^4$ com a reta que passa pela origem de $\mathbb{R}^4$ e p . É fácil verificar que $\phi : \mathbb{S}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação geodésica, pois as geodésicas de $\mathbb{S}^3$ são determinadas pela intersecção de $\mathbb{S}^3$ com planos que passam pela origem de $\mathbb{S}^3$. Segue-se ainda que ϕ é dada por

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{S}_+^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{R}^3 \times \{1\} \\ p &\longrightarrow \left(\frac{p_1}{p_4}, \frac{p_2}{p_4}, \frac{p_3}{p_4}, 1 \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \phi^{-1} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{S}^3(\mathbb{S}_+^3) \\ y = (y_1, y_2, y_3) &\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+|y|^2}}(y_1, y_2, y_3, 1). \end{aligned}$$

De forma análoga, podemos definir uma aplicação geodésica no caso hiperbólico, com a diferença que neste caso teremos uma aplicação definida em todo $\mathbb{H}^3$. Seja ϕ a aplicação que associa a cada ponto $p \in \mathbb{H}^3$, o ponto obtido pela intersecção de $\mathbb{R}^3 \equiv \{1\} \times \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$ com a reta que passa pela origem de $\mathbb{R}^4$ e p . Observe que

Figura 2.1: Aplicação geodésica no caso esférico

Figura 2.2: Aplicação geodésica no caso hiperbólico

neste caso a imagem de $\mathbb{H}^3$ é a bola aberta de $\mathbb{R}^3$ limitada pela intersecção de $\mathbb{R}^3$ com o cone $-p_1^2 + \sum_{j=2}^4 p_j^2 = 0$. Segue-se ainda que ϕ é dada por

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{H}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \equiv \{1\} \times \mathbb{R}^3 \\ p &\longrightarrow \left(1, \frac{p_2}{p_1}, \frac{p_3}{p_1}, \frac{p_4}{p_1}\right)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\phi^{-1} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{H}^3 \\ y = (y_2, y_3, y_4) &\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+|y|^2}}(1, y_2, y_3, y_4).\end{aligned}$$

2.4.2 Superfícies regradas tipo espaço desenvolvíveis em $\mathbb{S}_1^3$

Analogamente ao caso Riemanniano, podemos definir em $\mathbb{S}_1^3$ a noção de superfície desenvolvível:

Definição 2.7 *Seja M^2 uma superfície regrada tipo espaço em $\mathbb{S}_1^3$. Dizemos que M^2 é uma superfície desenvolvível se o campo normal à superfície é paralelo ao longo das folhas.*

Segue-se da definição anterior o seguinte resultado:

Proposição 2.8 *Seja M^2 uma superfície regrada tipo espaço em $\mathbb{S}_1^3$. Então M^2 é uma superfície desenvolvível se, e somente se, $K_{int} = 1$.*

Demonstração:

É análoga a demonstração feita na Proposição (2.4). Observe que sendo M^2 uma superfície tipo espaço, o campo normal ao longo da superfície, $\eta = X_t \wedge \frac{\tilde{X}_s}{|\tilde{X}_s|} \wedge X$, determina em cada ponto de M^2 um vetor tipo tempo, isto é, $\langle \eta, \eta \rangle = -1$.

Capítulo 3

Superfícies regradas helicoidais em formas espaciais

O objetivo deste capítulo é caracterizar as superfícies regradas helicoidais em $\mathbb{Q}^3(c)$, isto é, encontrar uma condição necessária e suficiente para que uma superfície regrada seja helicoidal. Tal caracterização é possível pois segue-se da Proposição (3.2) uma caracterização das hélices em $\mathbb{Q}^3(c)$. O resultado da Proposição (3.2) provavelmente é bem conhecido, no entanto, o único lugar que encontramos referência a ele, foi em [BDJ], mas que cuja notação não é adequada aos nossos objetivos. Na seção 3.1 caracterizaremos as hélices em $\mathbb{Q}^3(c)$ e na seção 3.2 caracterizaremos as superfícies regradas helicoidais em $\mathbb{Q}^3(c)$.

3.1 Uma caracterização das hélices em formas espaciais

Utilizando as definições e notações dadas nas seções (1.4) e (1.5) temos que.

Definição 3.1 *Uma curva γ em $\mathbb{Q}^3(c)$ é dita uma hélice se possui curvatura e torção constantes não nulas.*

Note que pela definição anterior, as curvas planas e as geodésicas do ambiente não estão sendo consideradas. Além disso, observamos que as hélices formam uma

classe particular dentro da classe das curvas denominadas *hélices generalizadas*. Ver [Ba].

Proposição 3.2 *Seja $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}^3(c)$ uma curva parametrizada regular em $\mathbb{Q}^3(c)$ com $c = \pm 1$. Então $\gamma(I)$ é invariante por um movimento helicoidal se, e somente se, γ é uma hélice.*

Demonstração:

Caso $c = -1$:

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}^3$ uma curva invariante por um movimento helicoidal. Podemos assumir, a menos de isometria de $\mathbb{H}^3$, que $\mathcal{P}^2 = \{x \in \mathbb{H}^3 : x_2 = 0\}$ é a 2-subvariedade totalmente geodésica de $\mathbb{H}^3$ ortogonal ao eixo invariante $\Gamma(r) = (\cosh r, \sinh r, 0, 0)$. Claramente $\gamma(I)$ é a órbita de um ponto em $\mathcal{P}^2$, suponhamos $p = (x, 0, z, w)$, com $x \neq 1$. Temos então que a reparametrização por comprimento de arco de γ é

$$\gamma(s) = \left(x \cosh \frac{hs}{\theta}, x \sinh \frac{hs}{\theta}, z \cos \frac{s}{\theta} + w \sin \frac{s}{\theta}, -z \sin \frac{s}{\theta} + w \cos \frac{s}{\theta} \right),$$

com $\theta = \sqrt{x^2 h^2 + z^2 + w^2}$.

É imediato verificar que

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(s) &= \left(\frac{hx}{\theta} \sinh \frac{hs}{\theta}, \frac{hx}{\theta} \cosh \frac{hs}{\theta}, -\frac{z}{\theta} \sin \frac{s}{\theta} + \frac{w}{\theta} \cos \frac{s}{\theta}, -\frac{z}{\theta} \cos \frac{s}{\theta} - \frac{w}{\theta} \sin \frac{s}{\theta} \right), \\ \ddot{\gamma}(s) &= \left(\frac{h^2 x}{\theta^2} \cosh \frac{hs}{\theta}, \frac{h^2 x}{\theta^2} \sinh \frac{hs}{\theta}, -\frac{z}{\theta^2} \cos \frac{s}{\theta} - \frac{w}{\theta^2} \sin \frac{s}{\theta}, \frac{z}{\theta^2} \sin \frac{s}{\theta} - \frac{w}{\theta^2} \cos \frac{s}{\theta} \right), \\ \dddot{\gamma}(s) &= \left(\frac{h^3 x}{\theta^3} \sinh \frac{hs}{\theta}, \frac{h^3 x}{\theta^3} \cosh \frac{hs}{\theta}, \frac{z}{\theta^3} \sin \frac{s}{\theta} - \frac{w}{\theta^3} \cos \frac{s}{\theta}, \frac{z}{\theta^3} \cos \frac{s}{\theta} + \frac{w}{\theta^3} \sin \frac{s}{\theta} \right). \end{aligned}$$

Então por (1.6) temos que

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= |\ddot{\gamma}|^2 + 1 \\ &= \frac{-x^2 h^4 + z^2 + w^2}{\theta^4} + 1 \\ &= \frac{(x^2 - 1)(1 + h^2)^2 x^2}{(x^2(h^2 + 1) - 1)^2}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Além disso, após vários cálculos segue-se que

$$\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma} \wedge \gamma = \left\{ \frac{h(1 + h^2)x(w^2 + z^2) \cosh \frac{hs}{\theta}}{\theta^4}, \right.$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{h(1+h^2)x(w^2+z^2)\sinh\frac{hs}{\theta}}{\theta^4}, \\ & \frac{h(1+h^2)x^2(z\cos\frac{s}{\theta}+w\sin\frac{s}{\theta})}{\theta^4}, \\ & \frac{h(1+h^2)x^2(w\cos\frac{s}{\theta}-z\sin\frac{s}{\theta})}{\theta^4} \end{aligned} \right\},$$

e portanto por (1.7) temos que

$$\begin{aligned} \tau &= -\frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{-h(1+h^2)^2 x^2 (w^2+z^2)}{(w^2+z^2+x^2 h^2)^3} \right) \\ &= \frac{h}{w^2+z^2+x^2 h^2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Observe que γ nunca será uma curva plana, pois $\tau = 0$ se, e somente se, $h = 0$.

Segue-se portanto de (3.1) e (3.2) que toda curva invariante por um movimento helicoidal é uma hélice, pois suas funções curvatura e torção são constantes não nulas.

Reciprocamente, usando-se o fato que duas curvas com mesma curvatura e mesma torção são congruente em $\mathbb{H}^3$, queremos, dada uma hélice em $\mathbb{H}^3$, isto é, dados $\kappa > 0$ e $\tau \neq 0$, determinar um ponto $p \in \mathcal{P}^2$ e um passo h , tal que a órbita de p por $\mathcal{H}_\varphi^{h,1}$ possui κ e τ como curvatura e torção, respectivamente.

Como $-x^2 + w^2 + z^2 = -1$, segue-se por (3.2) que

$$w^2 + z^2 = \frac{h(1-h\tau)}{\tau(1+h^2)} \quad (3.3)$$

e substituindo esta igualdade em (3.1), temos

$$h = \frac{-(\kappa^2 + \tau^2 - 1) \pm \sqrt{(\kappa^2 + \tau^2 - 1)^2 + 4\tau^2}}{2\tau}.$$

Observamos que como $(\kappa^2(s) + \tau^2(s) - 1) > 0$, $\forall s$, e por (3.2) τ e h possuem o mesmo sinal, existe apenas uma possibilidade para h , a saber

$$h = \frac{-(\kappa^2 + \tau^2 - 1) + \sqrt{(\kappa^2 + \tau^2 - 1)^2 + 4\tau^2}}{2\tau}. \quad (3.4)$$

Portanto, segue-se diretamente de (3.3) e (3.4), que dada uma hélice é possível determinar um ponto $p = (x, 0, z, w)$ e um passo h tal que a órbita de p possui a mesma curvatura e torção que a hélice dada, donde segue-se o desejado. Observamos

que na realidade determina-se não apenas um ponto, mas uma curva.

Caso $c = 1$:

A demonstração da primeira parte é análoga ao caso anterior, isto é, dados $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^3$ uma curva invariante por um movimento helicoidal, $\mathcal{P}^2 = \{y \in \mathbb{S}^3 : y_2 = 0\}$ uma 2-subvariedade totalmente geodésica de $\mathbb{S}^3$ ortogonal ao eixo invariante $\Gamma(r) = (\cos r, \sin r, 0, 0)$ e $p = (x, 0, z, w) \in \mathcal{P}_+^2 = \{y \in \mathcal{P}^2 : y_1 > 0\}$ com $x \neq 1$, então

$$\kappa^2 = \frac{(1-x^2)(h^2-1)^2x^2}{(x^2(h^2-1)+1)^2}, \quad \tau = -\frac{h}{x^2(h^2-1)+1}.$$

Temos que $\kappa = 0$ se, e somente se, $h = \pm 1$, mas neste caso a órbita de qualquer ponto em $\mathcal{P}_+^2$ se degenera em um grande círculo de S^3 . Consideremos então $h \neq \pm 1$. Observe ainda que $\tau = 0$ se, e somente se, $h = 0$.

Na demonstração da segunda parte existe uma diferença. Analogamente ao caso anterior, é fácil verificar que

$$x^2 = \frac{-(h+\tau)}{\tau(h^2-1)}, \quad h = \frac{-(\kappa^2 + \tau^2 + 1) \pm \sqrt{(\kappa^2 + \tau^2 + 1)^2 - 4\tau^2}}{2\tau}.$$

No entanto, não é possível descartarmos uma das alternativas para h , pois para todo s vale que $\sqrt{(\kappa^2 + \tau^2 + 1)^2 - 4\tau^2} < (\kappa^2 + \tau^2 + 1)$.

Segue-se então que neste caso é possível determinar dois passos, e portanto dois pontos em $\mathcal{P}_+^2$, cada um associado a um passo. Na realidade determinamos duas curvas. É possível, no entanto, verificar com cálculos diretos que as respectivas funções de curvatura são iguais e portanto as duas órbitas encontradas são curvas congruentes em $\mathbb{R}^4$, donde segue-se que são curvas congruentes em S^3 . ■

Uma simples, mas importante, consequência da proposição anterior é que toda hélice pode ser parametrizada como a órbita de um ponto $p \in \mathcal{P}^2$, $\mathcal{P}_+^2$ no caso $c = 1$, e tem, a menos de uma isometria de $\mathbb{Q}^3(c)$, a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \left(x \cosh \frac{hs}{\theta}, x \sinh \frac{hs}{\theta}, z \cos \frac{s}{\theta}, -z \sin \frac{s}{\theta}\right), & \text{se } c = -1, \\ \gamma(s) &= \left(x \cos \frac{s}{\theta_1}, -x \sin \frac{s}{\theta_1}, \frac{hs}{\theta_1}\right), & \text{se } c = 0, \\ \gamma(s) &= \left(x \cos \frac{hs}{\theta}, -x \sin \frac{hs}{\theta}, z \cos \frac{s}{\theta}, -z \sin \frac{s}{\theta}\right), & \text{se } c = 1, \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde $\theta = \sqrt{x^2h^2 + z^2}$ e $\theta_1 = \sqrt{x^2 + h^2}$. O caso $c = 0$ não foi feito na proposição anterior, pois pode ser facilmente encontrado nos livros de geometria básica.

3.2 Uma caracterização das superfícies regradas helicoidais em formas espaciais

Mostraremos no próximo teorema, que uma condição suficiente para que uma superfície regradada seja helicoidal, é que suas curvaturas Gaussiana e média sejam constantes em relação ao parâmetro translacional.

Teorema 3.3 *Seja $X(s, t)$ a parametrização local de uma superfície regradada em $\mathbb{Q}^3(c)$ dada por (2.1). Se $X(s, t)$ possui curvatura Gaussiana e curvatura média constantes em relação ao parâmetro translacional, então $X(s, t)$ é a parametrização de uma superfície regradada helicoidal.*

Demonstração:

Caso $c = 0$:

Tomando-se a base ortonormal $\mathcal{B} = \{e_1, \dot{e}_1, e_1 \times \dot{e}_1\}$ de $\mathbb{R}^3$ e usando-se a notação dada em (2.3), segue-se por (1.8) que

$$\kappa_{e_1}^2 = 1 + J^2, \quad \tau_{e_1} = \frac{J}{1 + J^2}, \quad (3.6)$$

onde κ_{e_1} e τ_{e_1} denotam, respectivamente, a curvatura e a torção da curva e_1 .

Por hipótese e usando-se (2.4), temos

$$\begin{aligned} K_s = 0 & \Leftrightarrow \left(\frac{Q}{D^2} \right)_s = 0 \\ & \Leftrightarrow Q\dot{t}^2 - \dot{Q}Q^2 = 0 \\ & \Rightarrow Q = cte. \end{aligned}$$

Como Q é função constante segue-se então que

$$\begin{aligned} H_s = 0 & \Leftrightarrow \left(\frac{Jt^2 + Q(QJ - F)}{2D^3} \right)_s = 0 \\ & \Leftrightarrow J\dot{t}^2 + Q(Q\dot{J} - \dot{F}) = 0 \\ & \Rightarrow \begin{cases} J = cte \\ F = cte. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Segue-se então de (3.6) e (3.7) que e_1 é uma curva esférica plana, isto é, está contida na intersecção de $\mathbb{S}^2$ com um plano de $\mathbb{R}^3$. Observamos que este plano conterá a origem se, e somente se, $J = 0$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que a curva e_1 está contida no plano xy , isto é,

$$e_1(s) = (d \sin s, -d \cos s, \sqrt{1-d^2}),$$

onde d é uma constante real não nula. Usando-se a base $\mathcal{B}$, é fácil verificar que $\dot{e}_0 = F e_1 + Q e_1 \times \dot{e}_1$ e, usando-se o fato que

$$e_1 \times \dot{e}_1 = (-d\sqrt{1-d^2} \sin s, d\sqrt{1-d^2} \cos s, d^2),$$

temos

$$e_0(s) = (a \cos s, a \sin s, bs),$$

onde a, b são constantes reais, que dependem do valor das constantes F, Q , e d .

Logo $X(s, t) = e_0(s) + t e_1(s)$ é a parametrização local de uma superfície regrada helicoidal em $\mathbb{R}^3$.

Caso $c = -1$:

Mostraremos, em primeiro lugar, que a curva e_0 é uma hélice em $\mathbb{H}^3$, isto é, κ_{e_0} e τ_{e_0} são funções constantes.

Como e_0 é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, segue-se respectivamente de (1.6) e (1.7) que

$$\kappa_{e_0} = |\ddot{e}_0 - e_0|, \quad \tau_{e_0} = \frac{-1}{\kappa_{e_0}^2} \langle \dot{e}_0 \wedge \ddot{e}_0 \wedge e_0, \ddot{e}_0 \rangle.$$

Tomando-se a base ortonormal $\{\dot{e}_0, e_1, \dot{e}_0 \wedge e_1 \wedge e_0, e_0\}$ de $\mathbb{L}^4$ ao longo de e_0 , e utilizando-se a notação dada em (2.10), é fácil verificar que

$$\ddot{e}_0 = -\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle e_1 - F \dot{e}_0 \wedge e_1 \wedge e_0 + e_0,$$

donde segue-se que

$$\kappa_{e_0}^2 = \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle^2 + F^2.$$

Temos ainda que

$$\dot{F} = \langle \ddot{e}_0, e_1 \wedge \dot{e}_0 \wedge e_0 \rangle + \langle \ddot{e}_0, \dot{e}_1 \wedge \dot{e}_0 \wedge e_0 \rangle,$$

mas pela expressão de $\ddot{e}_0$

$$\begin{aligned} \langle \ddot{e}_0, \dot{e}_1 \wedge \dot{e}_0 \wedge e_0 \rangle &= -\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle \langle e_1, \dot{e}_1 \wedge \dot{e}_0 \wedge e_0 \rangle - F \langle \dot{e}_0 \wedge e_1 \wedge e_0, \dot{e}_1 \wedge \dot{e}_0 \wedge e_0 \rangle \\ &= \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle Q \end{aligned}$$

donde temos que,

$$\dot{F} = \langle \ddot{e}_0, e_1 \wedge \dot{e}_0 \wedge e_0 \rangle + \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle Q.$$

Portanto mostra-se que

$$\begin{aligned} \langle \dot{e}_0 \wedge \ddot{e}_0 \wedge e_0, \ddot{e}_0 \rangle &= -\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle \langle e_1, \dot{e}_0 \wedge \ddot{e}_0 \wedge e_0 \rangle + \\ &\quad -F \langle \dot{e}_0 \wedge \ddot{e}_0 \wedge e_0, \dot{e}_0 \wedge e_1 \wedge e_0 \rangle \\ &= -\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (\dot{F} - \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle Q) + \\ &\quad + F (2 \langle \ddot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle + \langle \dot{e}_1, \ddot{e}_0 \rangle) \end{aligned}$$

donde segue-se que,

$$\tau_{e_0} = \frac{-1}{\kappa_{e_0}^2} \left(-\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (\dot{F} - \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle Q) + F(2 \langle \ddot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle + \langle \dot{e}_1, \ddot{e}_0 \rangle) \right).$$

Temos ainda por (2.11) que

$$\begin{aligned} K_s = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{Q}{|X_s|^2} \right)_s = 0 \\ &\Leftrightarrow \dot{Q} |X_s|^2 - 2 \langle X_{ss}, X_s \rangle Q = 0. \end{aligned}$$

Em particular, para $t = 0$, vale que

$$\langle X_{ss}, X_s \rangle = 0 \Rightarrow \dot{Q} = 0,$$

donde segue-se que

$$\langle X_{ss}, X_s \rangle = 0 \quad \forall s, t \Rightarrow \begin{cases} |\dot{e}_1|^2 = cte \\ \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle = cte, \end{cases} \quad (3.8)$$

isto é, $|X_s|^2$ não depende da variável s .

Usando-se (3.8) temos por (2.11) que

$$\begin{aligned} H_s = 0 &\Leftrightarrow h_s = 0 \\ &\Leftrightarrow \dot{F} \cosh^2 t + \dot{D} \sinh^2 t + (\dot{G} + \dot{L}) \cosh t \sinh t = 0. \end{aligned}$$

Como $\cosh^2 t$, $\sinh^2 t$ e $\cosh t \sinh t$ são linearmente independentes, como funções de t , segue-se que F , D e $(G + L)$ são funções constantes. Observando que $\dot{Q} = G - L = 0$ e $\dot{G} + \dot{L} = 0$ segue-se que G e L são funções constantes, o que completa a primeira parte da demonstração.

Mostraremos agora que $X(s, t)$ é uma superfície regrada helicoidal em $\mathbb{H}^3$. Seja T a isometria de $\mathbb{H}^3$ tal que $T(e_0) = \beta_0$, onde β_0 é a órbita do ponto $p = (x, 0, z, 0)$, isto é, β_0 é dada como em (3.5). Afirmamos que

$$\begin{aligned} Y(s, t) = T(X(s, t)) &= T(e_0) \cosh t + T(e_1) \sinh t \\ &= \beta_0 \cosh t + \beta_1 \sinh t. \end{aligned}$$

é uma superfície regrada helicoidal.

Observamos que sendo T uma isometria de $\mathbb{H}^3$, $Y(s, t)$ herda todas as propriedades geométricas de $X(s, t)$. É fácil ver que as curvas β_0 e β_1 têm as mesmas propriedades que as curvas e_0 e e_1 . Além disso, segue-se que $Y(s, t)$ é uma superfície regrada com $H_s^Y = 0$ e $K_s^Y = 0$. Determinemos β_1 .

Sabendo-se que $\beta_1(s) \in T_{\beta_0(s)}Y \ \forall s$ e denotando-se por $\{T_{\beta_0}, N_{\beta_0}, B_{\beta_0}\}$ o triedro de Frenet da curva β_0 , não é difícil verificar, usando-se a observação anterior, que $\beta_1(s) = aN_{\beta_0} + bB_{\beta_0}$, onde

$$a = \frac{\langle \beta_1, \ddot{\beta}_0 - \beta_0 \rangle}{\kappa_{\beta_0}} = -\frac{\langle \dot{\beta}_0, \dot{\beta}_1 \rangle}{\kappa_{\beta_0}} = cte$$

e

$$b = \frac{\langle \beta_1, \dot{\beta}_0 \wedge \ddot{\beta}_0 \wedge \beta_0 \rangle}{\kappa_{\beta_0}} = \frac{F}{\kappa_{\beta_0}} = cte,$$

com $a^2 + b^2 = 1$. Após alguns cálculos, segue-se ainda que

$$\begin{aligned} N_{\beta_0}(s) &= \frac{\ddot{\beta}_0 - \beta_0}{\kappa_{\beta_0}} \\ &= \frac{1}{\kappa} \left(\left(\frac{xh^2}{\theta^2} - x \right) \cosh \frac{hs}{\theta}, \left(\frac{xh^2}{\theta^2} - x \right) \sinh \frac{hs}{\theta}, \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{z}{\theta^2} + z \right) \cos \frac{s}{\theta}, \left(\frac{z}{\theta^2} + z \right) \sin \frac{s}{\theta} \right) \\ &= \left(-z \cosh \frac{hs}{\theta}, -z \sinh \frac{hs}{\theta}, -x \cos \frac{s}{\theta}, x \sin \frac{s}{\theta} \right), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B_{\beta_0}(s) &= \frac{\dot{\beta}_0 \wedge \ddot{\beta}_0 \wedge \beta_0}{\kappa_{\beta_0}} \\ &= \frac{1+h^2}{\kappa\theta^3} \left(xz^2 \sinh \frac{hs}{\theta}, xz^2 \cosh \frac{hs}{\theta}, hx^2z \sin \frac{s}{\theta}, hx^2z \cos \frac{s}{\theta} \right) \\ &= \left(\frac{z}{\theta} \sinh \frac{hs}{\theta}, \frac{z}{\theta} \cosh \frac{hs}{\theta}, \frac{hx}{\theta} \sin \frac{s}{\theta}, \frac{hx}{\theta} \cos \frac{s}{\theta} \right). \end{aligned}$$

Agora é fácil verificar que

$$\beta_1(s) = \left(-az \cosh \frac{hs}{\theta} + \frac{bz}{\theta} \sinh \frac{hs}{\theta}, -az \sinh \frac{hs}{\theta} + \frac{bz}{\theta} \cosh \frac{hs}{\theta}, \right.$$

$$\left(-ax \cos \frac{s}{\theta} + \frac{bhx}{\theta} \sin \frac{s}{\theta}, ax \sin \frac{s}{\theta} + \frac{bhx}{\theta} \cos \frac{s}{\theta} \right)$$

é uma curva invariante pelo mesmo movimento helicoidal que deixa β_0 invariante, isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\varphi(\beta_1(s)) = & \left(-az \cosh \left(\frac{hs}{\theta} + h\varphi \right) + \frac{bz}{\theta} \sinh \left(\frac{hs}{\theta} + h\varphi \right), \right. \\ & -az \sinh \left(\frac{hs}{\theta} + h\varphi \right) + \frac{bz}{\theta} \cosh \left(\frac{hs}{\theta} + h\varphi \right), \\ & -ax \cos \left(\frac{s}{\theta} + \varphi \right) + \frac{bhx}{\theta} \sin \left(\frac{s}{\theta} + \varphi \right), \\ & \left. ax \sin \left(\frac{s}{\theta} + \varphi \right) + \frac{bhx}{\theta} \cos \left(\frac{s}{\theta} + \varphi \right) \right). \end{aligned}$$

Logo $Y(s, t)$ é uma superfície regrada helicoidal, e portanto, pelo comentário feito após a Observação (1.17), temos que $X(s, t)$ também é uma superfície regrada helicoidal, como queríamos mostrar.

Caso $c = 1$:

A demonstração segue de forma análoga ao caso $c = -1$, guardadas as particularidades de cada ambiente. ■

Observando-se que pela Proposição (1.16), toda superfície helicoidal, em particular regrada helicoidal, possui curvatura Gaussiana e curvatura média constantes em relação a um dos parâmetros podemos fornecer uma recíproca para o teorema anterior.

Teorema 3.4 *Seja X a parametrização de uma superfície regrada em $\mathbb{Q}^3(c)$. São equivalentes:*

- (i) *X possui curvaturas Gaussiana e média constantes em relação ao parâmetro translacional;*
- (ii) *X é a parametrização de uma superfície regrada helicoidal definida pelo movimento helicoidal de uma geodésica em $\mathbb{Q}^3(c)$.*

Note que se M^2 é uma superfície regrada helicoidal em $\mathbb{Q}^3(c)$ definida pelo movimento helicoidal de uma geodésica, então a parametrização local de M^2 dada por $X(s, t) = \mathcal{H}_s(\gamma(t))$ é uma parametrização do tipo (2.1), onde $\gamma(t)$ é uma geodésica de M^2 , e portanto de $\mathbb{Q}^3(c)$, e $\mathcal{H}_s$ é o movimento helicoidal definido no Teorema (1.14) que deixa M^2 invariante. Vejamos o que ocorre em cada caso.

- caso $c = 0$:

Tomemos $\gamma(t) = a + tb$, onde $a = (a_1, a_2, a_3)$ e $b = (b_1, b_2, b_3)$ são vetores em $\mathbb{R}^3$ com $|b|^2 = 1$. Cálculos simples mostram que

$$\begin{aligned} X(s, t) &= \mathcal{H}_s(\gamma(t)) \\ &= \alpha(s) + t \beta(s), \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde

$$\alpha(s) = (a_1 \cos s + a_2 \sin s, -a_1 \sin s + a_2 \cos s, hs + a_3)$$

e

$$\beta(s) = (b_1 \cos s + b_2 \sin s, -b_1 \sin s + b_2 \cos s, b_3).$$

- caso $c = -1$:

Tomemos $\gamma(t) = a \cosh t + b \sinh t$, onde $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ e $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ são vetores em $\mathbb{L}^4$ tais que $|a|^2 = -1$, $|b|^2 = 1$ e $\langle a, b \rangle = 0$. Após cálculos simples mostra-se que

$$\begin{aligned} X(s, t) &= \mathcal{H}_s(\gamma(t)) \\ &= \alpha(s) \cosh t + \beta(s) \sinh t \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= (a_1 \cosh hs + a_2 \sinh hs, a_1 \sinh hs + a_2 \cosh hs, \\ &\quad a_3 \cos s + a_4 \sin s, -a_3 \sin s + a_4 \cos s) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \beta(s) &= (b_1 \cosh hs + b_2 \sinh hs, b_1 \sinh hs + b_2 \cosh hs, \\ &\quad b_3 \cos s + b_4 \sin s, -b_3 \sin s + b_4 \cos s), \end{aligned}$$

com $|\alpha(s)|^2 = -1$, $|\beta(s)|^2 = 1$ e $\langle \alpha(s), \beta(s) \rangle = 0$.

- caso $c = 1$:

Tomemos $\gamma(t) = a \cos t + b \sin t$, onde $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ e $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ são vetores em $\mathbb{R}^4$ tais que $|a|^2 = |b|^2 = 1$ e $\langle a, b \rangle = 0$. Analogamente, após cálculos simples mostra-se que

$$\begin{aligned} X(s, t) &= \mathcal{H}_s(\gamma(t)) \\ &= \alpha(s) \cos t + \beta(s) \sin t \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= (a_1 \cos hs + a_2 \sin hs, -a_1 \sin hs + a_2 \cos hs, \\ &\quad a_3 \cos s + a_4 \sin s, -a_3 \sin s + a_4 \cos s) \end{aligned}$$

e

$$\beta(s) = (b_1 \cos hs + b_2 \sin hs, -b_1 \sin hs + b_2 \cos hs, \\ b_3 \cos s + b_4 \sin s, -b_3 \sin s + b_4 \cos s),$$

com $|\alpha(s)|^2 = |\beta(s)|^2 = 1$ e $\langle \alpha(s), \beta(s) \rangle = 0$.

Capítulo 4

Superfícies regradas e de Weingarten em formas espaciais

Como já mencionado na introdução, generalizamos neste capítulo, a menos de uma hipótese técnica, um resultado obtido separadamente por Beltrami e Dini em 1865/66 e mais tarde reescrito por Kühnel. Mais especificamente, classificamos as superfícies regradas de Weingarten em $\mathbb{Q}^3(c)$. De acordo com a seção (1.8), para fazermos tal classificação, basta verificarmos quais são as superfícies regradas em $\mathbb{Q}^3(c)$ que satisfazem a relação $K_t H_s = K_s H_t$. Como as superfícies com curvatura Gaussiana constante ou curvatura média constante são exemplos de superfícies de Weingarten, não as estaremos considerando neste capítulo. Na seção (4.1) classificaremos as superfícies regradas de Weingarten em $\mathbb{S}^3$ e na seção (4.2) classificaremos as em $\mathbb{H}^3$.

4.1 Classificação das superfícies regradas e de Weingarten em $\mathbb{S}^3$

Para fazermos tal classificação, como já citado, basta verificarmos quais são as características que uma superfície deve ter, afim de que ela satisfaça a equação $H_s K_t - H_t K_s = 0$. No que se segue estaremos usando todas as definições e resultados dados nos Capítulos 2 e 3, com o objetivo de resolver tal equação.

Lema 4.1 *Seja $M^2 \subset \mathbb{S}^3$ uma superfície conexa regrada não desenvolvível e parame-*

trizada como em (2.1). Se a equação $K_t H_s - K_s H_t = 0$ é satisfeita, então a função $F(s) = \frac{1 + |\dot{e}_1|^2}{Q}$ é constante.

Demonstração:

Como M^2 é uma superfície não desenvolvível, existe um ponto $p \in M^2$ tal que $K(p) \neq 1$, o que é equivalente a dizer que $Q(s_0) \neq 0$, onde $p = (s_0, t_0)$. Logo existe um intervalo $\tilde{V} \subset \mathbb{R}$ contendo s_0 , tal que $Q(s) \neq 0 \forall s \in \tilde{V}$, ou equivalentemente, existe uma vizinhança $V \subset M^2$ de p tal que $K(q) \neq 1 \forall q \in V$.

Após derivação direta de (2.11) segue-se que

$$\begin{cases} K_s = \frac{-2Q}{|X_s|^6} \left(\dot{Q} |X_s|^2 - 2Q \langle X_{ss}, X_s \rangle \right), \\ K_t = \frac{4Q^2 \langle X_{st}, X_s \rangle}{|X_s|^6}, \\ H_s = \frac{h_s |X_s|^2 - 3h \langle X_{ss}, X_s \rangle}{2|X_s|^5}, \\ H_t = \frac{h_t |X_s|^2 - 3h \langle X_{st}, X_s \rangle}{2|X_s|^5}. \end{cases} \quad (4.1)$$

Então na vizinhança V vale que

$$H_s K_t - H_t K_s = 0 \Leftrightarrow -h_t |X_s|^2 \left(\dot{Q} |X_s|^2 - 2Q \langle X_{ss}, X_s \rangle \right) + \\ -2Q h_s |X_s|^2 \langle X_{st}, X_s \rangle + 3h \dot{Q} |X_s|^2 \langle X_{st}, X_s \rangle = 0,$$

ou equivalentemente,

$$-h_t |X_s|^2 \left(\frac{Q}{|X_s|^2} \right)_s + h \dot{Q} \langle X_{st}, X_s \rangle + (|X_s|^2)_t h^2 \left(\frac{Q}{h} \right)_s = 0. \quad (4.2)$$

O estudo das soluções da equação (4.2), da forma como ela esta apresentada, mostrou-se muito complicado devido a quantidade de funções envolvidas na mesma. A solução para este problema, foi encontrada substituindo algumas funções por sua expressão em termos da parametrização dada.

Após cálculos demorados, mas no entanto elementares, mostra-se que na vizinhança V vale a equação

$$H_s K_t - H_t K_s = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} Q |X_s|^2 \mathcal{J}(s, t) = 0 \\ \Leftrightarrow \mathcal{J}(s, t) = 0,$$

onde

$$\mathcal{J}(s, t) = g_1(s) \sin 2t + g_2(s) \sin 4t + g_3(s) \cos 2t + g_4(s) \cos 4t + g_5(s),$$

com

$$\begin{aligned} g_1(s) = & -2Q((-1 + |\dot{e}_1|^2) \dot{D} + (F - D)|\dot{e}_1|^2 + (-1 + |\dot{e}_1|^2)\dot{F}) + \\ & + (D(-5 + |\dot{e}_1|^2) + (-1 + 5|\dot{e}_1|^2)F)\dot{Q}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} g_2(s) = & 2Q((-1 + |\dot{e}_1|^2) \dot{D} + 2(G + L)\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle + (F - D)|\dot{e}_1|^2 - \\ & - (-1 + |\dot{e}_1|^2) \dot{F} - 2 \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (\dot{G} + \dot{L})) + \\ & + (-D(-1 + |\dot{e}_1|^2) + (-1 + |\dot{e}_1|^2)F + \\ & + 2 \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (G + L)) \dot{Q}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} g_3(s) = & (G + L)(Q|\dot{e}_1|^2 - (1 + |\dot{e}_1|^2) \dot{Q}) + \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (-2Q(\dot{D} + \dot{F}) + \\ & + 3(D + F) \dot{Q}), \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} g_4(s) = & 2Q(2(F - D)\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle - (G + L)|\dot{e}_1|^2 + 2 \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (\dot{D} - \\ & - \dot{F}) + (-1 + |\dot{e}_1|^2)(\dot{G} + \dot{L})) - (2 \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (D - \\ & - F) + (-1 + |\dot{e}_1|^2)(G + L)) \dot{Q}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} g_5(s) = & 2Q(2(D - F)\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle - (G + L)|\dot{e}_1|^2 + 2 \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (\dot{D} - \\ & - \dot{F}) - (-1 + |\dot{e}_1|^2)(\dot{G} + \dot{L})) - 5(2 \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (D - \\ & - F) - (-1 + |\dot{e}_1|^2)(G + L)) \dot{Q}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Segue-se então que na vizinhança de um ponto onde $K \neq 1$ a equação $K_t H_s - K_s H_t = 0$ é satisfeita se, e somente se, $\mathcal{J}(s, t) = 0$, $\forall s, t$. Observamos no entanto, que as funções $\sin 2t$, $\sin 4t$, $\cos 2t$ e $\cos 4t$ são linearmente independentes como funções de t , o que implica que a equação é satisfeita se, e somente se, $g_1(s) = g_2(s) = g_3(s) = g_4(s) = g_5(s) = 0$. Passemos então ao estudo destas cinco EDO's.

É fácil ver que as EDO's anteriores verificam a seguinte relação matricial

$$[X]_{5 \times 5} \cdot [Y]_{5 \times 1} = [W]_{5 \times 1},$$

onde

$$[X] = \begin{bmatrix} -2gQ & -2gQ & 0 & 0 & -2Q(F-D) \\ 2gQ & -2gQ & -4Q \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle & 4Q(G+L) & 2Q(F-D) \\ -2Q \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle & -2Q \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle & 0 & 0 & Q(G+L) \\ 4Q \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle & -4Q \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle & 2gQ & 4Q(F-D) & -2Q(G+L) \\ 4Q \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle & -4Q \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle & -2gQ & 4Q(D-F) & -2Q(G+L) \end{bmatrix},$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} \dot{D} \\ \dot{F} \\ \dot{G} + \dot{L} \\ \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle \\ |\dot{e}_1|^2 \end{bmatrix}$$

e

$$[W] = \begin{bmatrix} (G-L)(4(F-|\dot{e}_1|^2-D) + (D+F)g) \\ (G-L)((F-D)g + 2 \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (G+L)) \\ (G-L)(3 \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (D+F) - (1+|\dot{e}_1|^2)(G+L)) \\ (G-L)(-2 \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (D-F) - g(G+L)) \\ 5(L-G)(2 \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (D-F) - g(G+L)) \end{bmatrix},$$

com

$$g = (-1 + |\dot{e}_1|^2), \quad \dot{Q} = L - G.$$

Após alguns cálculos, verifica-se que

$$\det [X] = -256 Q^5 \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (2 \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (F-D) + g(G+L))^2,$$

donde temos duas situações para analisar: quando a matriz $[X]$ é inversível e quando não é. Antes de analisarmos cada situação, observamos que por (2.25) segue-se que

$$\begin{aligned} \det [X] &= -256 Q^5 \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (2 \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (F-D) + g(G+L))^2 \\ &= -256 Q^5 \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle ((G+L)(-1+|\dot{e}_1|^2) + 2L + \\ &\quad -2|\dot{e}_1|^2 G - Q|\dot{e}_1|^2)^2 \\ &= -256 Q^5 \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (\dot{Q}(1+|\dot{e}_1|^2) - Q|\dot{e}_1|^2)^2. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Denotando por $[X](s_j)$ a matriz $[X]$ aplicada no ponto s_j , temos que se existe um ponto s_1 em $\tilde{V}$ tal que $\det [X](s_1) \neq 0$, então por continuidade, existe um intervalo

$\tilde{U} \subset \tilde{V}$ contendo s_1 tal que $\det[X](s) \neq 0$, $\forall s \in \tilde{U}$. Nesta vizinhança é possível calcularmos explicitamente $[X]^{-1}$, dada por

$$[X]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{G+L}{2\lambda_1} & 0 & \frac{-\lambda_2}{4\langle\dot{e}_0, \dot{e}_1\rangle\lambda_1} & \frac{1}{16Q\langle\dot{e}_0, \dot{e}_1\rangle} & \frac{1}{16Q\langle\dot{e}_0, \dot{e}_1\rangle} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{4Q\langle\dot{e}_0, \dot{e}_1\rangle} & \frac{-1}{16Q\langle\dot{e}_0, \dot{e}_1\rangle} & \frac{-1}{16Q\langle\dot{e}_0, \dot{e}_1\rangle} \\ \frac{-(A-F)}{2\lambda_1} & \frac{-(A-F)}{2\lambda_1} & \frac{g(A-F)}{2\langle\dot{e}_0, \dot{e}_1\rangle\lambda_1} & \frac{\lambda_3}{8\langle\dot{e}_0, \dot{e}_1\rangle\lambda_1} & \frac{\lambda_4}{8\langle\dot{e}_0, \dot{e}_1\rangle\lambda_1} \\ \frac{-g}{4\lambda_1} & \frac{-g}{4\lambda_1} & \frac{g^2}{4\langle\dot{e}_0, \dot{e}_1\rangle\lambda_1} & \frac{-(4\langle\dot{e}_0, \dot{e}_1\rangle^2 + g^2)}{16\langle\dot{e}_0, \dot{e}_1\rangle\lambda_1} & \frac{-(-4\langle\dot{e}_0, \dot{e}_1\rangle^2 + g^2)}{16\langle\dot{e}_0, \dot{e}_1\rangle\lambda_1} \\ \frac{\langle\dot{e}_0, \dot{e}_1\rangle}{\lambda_1} & 0 & \frac{-g}{\lambda_1} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

onde

$$\begin{aligned} \lambda_1(s) &= Q(2\langle\dot{e}_0, \dot{e}_1\rangle(D-F) - g(G+L)), \\ \lambda_2(s) &= 2\langle\dot{e}_0, \dot{e}_1\rangle(D-F) + g(G+L), \\ \lambda_3(s) &= (D-F)g - 2(G+L)\langle\dot{e}_0, \dot{e}_1\rangle, \\ \lambda_4(s) &= (D-F)g + 2(G+L)\langle\dot{e}_0, \dot{e}_1\rangle. \end{aligned}$$

Da igualdade $[Y] = [X]^{-1} \cdot [W]$, obtém-se que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{D} & = & \frac{(L-G)(3D\langle\dot{e}_0, \dot{e}_1\rangle + G+L)}{2Q\langle\dot{e}_0, \dot{e}_1\rangle}, \\ \dot{F} & = & \frac{-(L-G)(-3F\langle\dot{e}_0, \dot{e}_1\rangle + G+L)}{2Q\langle\dot{e}_0, \dot{e}_1\rangle}, \\ (\dot{G} + \dot{L}) & = & \frac{(L-G)(2(F-D) + 3\langle\dot{e}_0, \dot{e}_1\rangle(G+L))}{2Q\langle\dot{e}_0, \dot{e}_1\rangle}, \\ \langle\dot{e}_0, \dot{e}_1\rangle & = & \frac{(L-G)(1 + 2\langle\dot{e}_0, \dot{e}_1\rangle^2 - |\dot{e}_1|^2)}{2Q\langle\dot{e}_0, \dot{e}_1\rangle}, \\ |\dot{e}_1|^2 & = & \frac{(L-G)(1 + |\dot{e}_1|^2)}{Q}, \end{array} \right. \quad (4.9)$$

onde $Q = \sqrt{|\dot{e}_1|^2 - \langle\dot{e}_0, \dot{e}_1\rangle^2}$.

Denotando-se por U a vizinhança correspondente ao intervalo $\tilde{U}$ segue-se que, neste caso, para determinarmos quais são as condições que a superfície M^2 deve satisfazer na vizinhança U para que a equação $K_t H_s - K_s H_t = 0$ seja satisfeita basta, fixadas condições iniciais, resolver o sistema de equações diferenciais dado em (4.9). Observamos no entanto, que a última equação de (4.9) é equivalente ao $\det[X] = 0$ em U , o que é uma contradição. Portanto $\det[X] \equiv 0$ em $\tilde{V}$.

Denotando $f(s) = (2 \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (F - D) + g(G + L))$, temos que

$$\det [X](s) = 0 \Leftrightarrow \langle \dot{e}_0(s), \dot{e}_1(s) \rangle f^2(s) = 0.$$

Suponhamos que existe um ponto s_2 em $\tilde{V}$ tal que $f(s_2) \neq 0$, então $\langle \dot{e}_0(s_2), \dot{e}_1(s_2) \rangle = 0$. Como (4.5) + (4.6) + (4.7) = 0, isto é,

$$2 \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle Q \dot{F} + (-2 \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle F + G) \dot{Q} = 0, \quad (4.10)$$

temos que no ponto s_2 vale que $G(s_2) \dot{Q}(s_2) = 0$. Além disso, segue-se por (2.25) que $L(s_2) = 0$, então usando-se o fato que $\dot{Q} = L - G$ segue-se que também $G(s_2) = 0$, o que gera uma contradição, pois neste caso teríamos que $f(s_2) = 0$. Logo,

$$\det [X](s) = 0 \Leftrightarrow f(s) = 0,$$

donde por (4.8) segue-se que na vizinhança $\tilde{V}$

$$\begin{aligned} \det [X] = 0 &\Leftrightarrow (2 \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (F - D) + g(G + L))^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \dot{Q}(1 + |\dot{e}_1|^2) - Q|\dot{e}_1|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{|\dot{e}_1|^2}{(1 + |\dot{e}_1|^2)} = \frac{\dot{Q}}{Q} \\ &\Leftrightarrow \log(1 + |\dot{e}_1|^2) = \log Q + \log \lambda \\ &\Leftrightarrow \frac{1 + |\dot{e}_1|^2}{Q} = \lambda, \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde λ é uma constante real positiva não nula. Logo em uma vizinhança de cada ponto onde $K \neq 1$ vale que a função $F(s)$ é constante.

Consideremos o conjunto $A = \{p \in M^2 : K(p) \neq 1\}$ e mostremos que $A = M^2$. Suponhamos que A seja conexo. Se $A \subsetneq M^2$, então existe pelo menos um ponto, q , no bordo de A tal que $K(q) = 1$, o que é uma contradição. De fato, como $\text{int} A \neq \emptyset$ existe uma seqüência, de valor constante não nulo, tendendo para q , mas em q temos que $Q(s_i) = 0$, onde $q = (s_i, t_i)$, o que implica $F(s_i) = \infty$. Portanto $A = M^2$ e a função $F(s)$ é constante em M^2 . Se A não é conexo, chegamos a mesma contradição repetindo o raciocínio anterior em cada componente conexa de A . ■

Observamos que é imediato da última equivalência em (4.11) que $|\dot{e}_1|^2$ é constante se, e somente se, $\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle$ for constante, mas estas funções não precisam ser constantes para que o quociente o seja.

Usando-se de toda a notação anterior temos que

Teorema 4.2 *Seja $M^2 \subset \mathbb{S}^3$ uma superfície conexa, regrada não desenvolvível parametrizada como em (2.1). Suponha que se a função $F(s)$ for constante em M^2 , então $Q(s)$ também é uma função constante em M^2 . São equivalentes:*

- i) M^2 é de Weingarten;
- ii) as funções $|\dot{e}_1|^2$, $\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle$, F , D , L e G são constantes em M^2 ;
- iii) M^2 é uma superfície helicoidal;

Demonstração:

$i) \Rightarrow ii)$

Como M^2 é uma superfície de Weingarten segue-se, pelo Lema (4.1), que a função $F(s)$ é constante em M^2 e portanto por hipótese as funções $|\dot{e}_1|^2$ e $\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle^2$ são funções constantes distintas em M^2 .

Temos então por (2.11) que $K_s \equiv 0$ em M^2 e portanto pela Proposição (1.22), $H_s \equiv 0$ em M^2 . Mas como $|X_s|^2$ é constante em relação a s , $H_s \equiv 0$ se, e somente se, $h_s \equiv 0$, ou equivalentemente, se as funções F , D , G e L são constantes em M^2 .

A demonstração que (ii) implica (i) é imediata. Os outros casos seguem diretamente do teorema (3.3). ■

4.2 Classificação das superfícies regradas e de Weingarten em $\mathbb{H}^3$

Como já mencionado, nesta seção estaremos classificando as superfícies regradas de Weingarten em $\mathbb{H}^3$. Apesar do raciocínio usado ser exatamente o mesmo da seção anterior, não unimos as duas seções, como já feito em outros casos, pois existe a troca de sinal em vários lugares. Por este motivo, para não tornarmos a leitura repetitiva iremos apenas escrever o fundamental.

Lema 4.3 *Seja $M^2 \subset \mathbb{H}^3$ uma superfície conexa regrada não desenvolvível e parametrizada como em (2.1). Se a equação $K_t H_s - K_s H_t = 0$ é satisfeita, então a função $F(s) = \frac{-1 + |\dot{e}_1|^2}{Q}$ é constante em cada componente conexa onde $K \neq -1$.*

Demonstração:

Como M^2 é uma superfície não desenvolvível, existe um ponto $p \in M^2$ tal que $K(p) \neq -1$, o que é equivalente a dizer que $Q(s_0) \neq 0$, onde $p = (s_0, t_0)$. Logo existe

um intervalo $\tilde{V} \subset \mathbb{R}$ contendo s_0 tal que $Q(s) \neq 0 \forall s \in \tilde{V}$, ou equivalentemente, existe uma vizinhança $V \subset M^2$ de p tal que $K(q) \neq -1, \forall q \in V$.

Não é difícil mostrar, que na vizinhança V vale que

$$H_s K_t - H_t K_s = 0 \Leftrightarrow -h_t |X_s|^2 \left(\dot{Q} |X_s|^2 - 2Q \langle X_{ss}, X_s \rangle \right) + \\ - 2Q h_s |X_s|^2 \langle X_{st}, X_s \rangle + 3h \dot{Q} |X_s|^2 \langle X_{st}, X_s \rangle = 0,$$

ou equivalentemente,

$$-h_t |X_s|^2 \left(\frac{Q}{|X_s|^2} \right)_s + h \dot{Q} \langle X_{st}, X_s \rangle + (|X_s|^2)_t h^2 \left(\frac{Q}{h} \right)_s = 0.$$

É natural que aqui valha o mesmo comentário feito sobre a equação (4.2), isto é, o estudo da equação anterior mostrou-se muito complicado devido a forma como ela esta apresentada. Fazendo-se as alterações necessárias, mostra-se após vários cálculos, que na vizinhança V vale a equação

$$H_s K_t - H_t K_s = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} Q |X_s|^2 \mathcal{J}(s, t) = 0 \\ \Leftrightarrow \mathcal{J}(s, t) = 0,$$

onde

$$\mathcal{J}(s, t) = g_1(s) \sinh 2t + g_2(s) \sinh 4t + g_3(s) \cosh 2t + g_4(s) \cosh 4t + g_5(s),$$

com

$$g_1(s) = 2Q(-(1+|\dot{e}_1|^2) \dot{D} + (F+D)|\dot{e}_1|^2 + (1+|\dot{e}_1|^2)\dot{F}) + \\ + (D(5+|\dot{e}_1|^2) - (1+5|\dot{e}_1|^2)F)\dot{Q}, \quad (4.12)$$

$$g_2(s) = 2Q((1+|\dot{e}_1|^2) \dot{D} - 2(G+L)\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle - (F+D)|\dot{e}_1|^2 + \\ + (1+|\dot{e}_1|^2) \dot{F} + 2 \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (\dot{G} + \dot{L})) + \\ - (D(1+|\dot{e}_1|^2) + (1+|\dot{e}_1|^2)F + \\ + 2 \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (G+L)) \dot{Q}, \quad (4.13)$$

$$g_3(s) = (G+L)(Q|\dot{e}_1|^2 - (-1+|\dot{e}_1|^2) \dot{Q}) + \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (2Q(-\dot{D} + \dot{F}) + \\ + 3(D-F) \dot{Q}), \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}
g_4(s) = & 2Q(-2(F+D)\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle - (G+L)|\dot{e}_1|^2 + 2\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (\dot{D} + \\
& + \dot{F}) + (1+|\dot{e}_1|^2)(\dot{G} + \dot{L})) - (2\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (D + \\
& + F) + (1+|\dot{e}_1|^2)(G+L)) \dot{Q},
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
g_5(s) = & 2Q(2(D+F)\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle - (G+L)|\dot{e}_1|^2 + 2\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (\dot{D} + \\
& + \dot{F}) - (1+|\dot{e}_1|^2)(\dot{G} + \dot{L})) + 5(-2\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (D + \\
& + F) + (1+|\dot{e}_1|^2)(G+L)) \dot{Q}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Analogamente ao caso esférico, temos que na vizinhança de um ponto onde $K \neq -1$ a equação $K_t H_s - K_s H_t = 0$ é satisfeita se, e somente se, $g_1(s) = g_2(s) = g_3(s) = g_4(s) = g_5(s) = 0$. Passemos então ao estudo destas cinco EDO's.

É fácil ver que as EDO's anteriores verificam a seguinte relação matricial

$$[X]_{5 \times 5} \cdot [Y]_{5 \times 1} = [W]_{5 \times 1},$$

onde

$$[X] = \begin{bmatrix} -2gQ & 2gQ & 0 & 0 & 2Q(F+D) \\ 2gQ & 2gQ & 4Q\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle & -4Q(G+L) & -2Q(F+D) \\ -2Q\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle & 2Q\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle & 0 & 0 & Q(G+L) \\ 4Q\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle & 4Q\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle & 2gQ & -4Q(F+D) & -2Q(G+L) \\ 4Q\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle & 4Q\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle & -2gQ & 4Q(D+F) & -2Q(G+L) \end{bmatrix},$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} \dot{D} \\ \dot{F} \\ \dot{G} + \dot{L} \\ \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle \\ |\dot{e}_1|^2 \end{bmatrix}$$

e

$$[W] = \begin{bmatrix} -(G-L)(4(-F|\dot{e}_1|^2 + D) + (D-F)g) \\ (G-L)((F+D)g + 2\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (G+L)) \\ -(G-L)(3\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (D-F) - (-1+|\dot{e}_1|^2)(G+L)) \\ (G-L)(2\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (D+F) + g(G+L)) \\ 5(L-G)(-2\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (D+F) + g(G+L)) \end{bmatrix},$$

com

$$g = (1 + |\dot{e}_1|^2), \quad \dot{Q} = G - L.$$

Após alguns cálculos, verifica-se que

$$\det [X] = -256 Q^5 \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (2 \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (F + D) - g(G + L))^2,$$

donde temos novamente duas situações para analisar: quando a matriz $[X]$ é inversível e quando não é. Observamos que por (2.25) segue-se que

$$\begin{aligned} \det [X] &= -256 Q^5 \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (2 \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (F + D) - g(G + L))^2 \\ &= -256 Q^5 \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (-(G + L)(-1 + |\dot{e}_1|^2) + 2L + \\ &\quad + 2|\dot{e}_1|^2 G - Q|\dot{e}_1|^2)^2 \\ &= -256 Q^5 \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (\dot{Q}(-1 + |\dot{e}_1|^2) - Q|\dot{e}_1|^2)^2. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Se existe um ponto s_1 em $\tilde{V}$ tal que $\det [X](s_1) \neq 0$, então por continuidade, existe um intervalo $\tilde{U} \subset \tilde{V}$ contendo s_1 tal que $\det [X](s) \neq 0$, $\forall s \in \tilde{U}$. Nesta vizinhança é possível calcular explicitamente $[X]^{-1}$, isto é,

$$[X]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{G+L}{2\lambda_1} & 0 & \frac{-\lambda_2}{4\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle \lambda_1} & \frac{1}{16Q\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle} & \frac{1}{16Q\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4Q\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle} & \frac{1}{16Q\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle} & \frac{1}{16Q\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle} \\ \frac{A+F}{2\lambda_1} & \frac{A+F}{2\lambda_1} & \frac{-g(A+F)}{2\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle \lambda_1} & \frac{-\lambda_3}{8\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle \lambda_1} & \frac{-\lambda_4}{8\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle \lambda_1} \\ \frac{g}{4\lambda_1} & \frac{g}{4\lambda_1} & \frac{-g^2}{4\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle \lambda_2} & \frac{-(4\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle^2 + g^2)}{16\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle \lambda_1} & \frac{-(-4\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle^2 + g^2)}{16\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle \lambda_1} \\ \frac{\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle}{\lambda_1} & 0 & \frac{g}{-\lambda_1} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

onde

$$\begin{aligned} \lambda_1(s) &= Q(2 \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (D + F) - g(G + L)), \\ \lambda_2(s) &= 2 \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (D + F) + g(G + L), \\ \lambda_3(s) &= (D + F)g + 2(G + L) \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle, \\ \lambda_4(s) &= (D + F)g - 2(G + L) \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle. \end{aligned}$$

Da igualdade $[Y] = [X]^{-1} \cdot [W]$, obtém-se que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{D} & = & \frac{-(L-G)(3D \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle - G-L)}{2Q \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle} , \\ \dot{F} & = & \frac{-(L-G)(6F \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle - 2(G+L))}{2Q \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle} , \\ (\dot{G} + \dot{L}) & = & \frac{-(L-G)(-2(F+D)+3 \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (G+L))}{2Q \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle} , \\ \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle & = & \frac{-(L-G)(-1+2\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle^2 - |\dot{e}_1|^2)}{2Q \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle} , \\ |\dot{e}_1|^2 & = & \frac{-(L-G)(-1+|\dot{e}_1|^2)}{Q} , \end{array} \right. \quad (4.18)$$

onde $Q = \sqrt{|\dot{e}_1|^2 - \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle^2}$.

Denotando-se por U a vizinhança correspondente ao intervalo $\tilde{U}$, segue-se analogamente ao caso esférico, que para determinarmos quais são as condições que a superfície M^2 deve satisfazer na vizinhança U para que a equação $K_t H_s - K_s H_t = 0$ seja satisfeita basta, fixadas condições iniciais, resolver o sistema de equações diferenciais em (4.18). Observamos no entanto, que a última equação de (4.18) é equivalente ao $\det[X] = 0$ em U , o que é uma contradição. Portanto $\det[X] \equiv 0$ em $\tilde{V}$.

Denotando agora $f(s) = (2 \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle (F + D) - g(G + L))$, temos que

$$\det[X](s) = 0 \Leftrightarrow \langle \dot{e}_0(s), \dot{e}_1(s) \rangle f^2(s) = 0.$$

Se supormos, analogamente ao caso esférico, que existe um ponto s_2 em $\tilde{V}$ tal que $f(s_2) \neq 0$, chegaremos novamente em uma contradição Logo,

$$\det[X](s) = 0 \Leftrightarrow f(s) = 0,$$

donde segue-se por (4.17) que

$$\det[X] = 0 \Leftrightarrow \dot{Q}(-1 + |\dot{e}_1|^2) - Q|\dot{e}_1|^2 = 0.$$

Se $(-1 + |\dot{e}_1|^2) > 0$, então

$$\begin{aligned} \det[X] = 0 & \Leftrightarrow \frac{|\dot{e}_1|^2}{(-1+|\dot{e}_1|^2)} = \frac{\dot{Q}}{Q} \\ & \Leftrightarrow \log(-1 + |\dot{e}_1|^2) = \log Q + \log \lambda_1 \\ & \Leftrightarrow \frac{-1 + |\dot{e}_1|^2}{Q} = \lambda_1, \end{aligned}$$

onde λ_1 é uma constante real positiva não nula. Se $(-1 + |\dot{e}_1|^2) < 0$, então

$$\begin{aligned} \det [X] = 0 &\Leftrightarrow -\dot{Q}(1 - |\dot{e}_1|^2) - Q|\dot{e}_1|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-|\dot{e}_1|^2}{(1 - |\dot{e}_1|^2)} = \frac{\dot{Q}}{Q} \\ &\Leftrightarrow \log(1 - |\dot{e}_1|^2) = \log Q + \log \lambda_2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1 - |\dot{e}_1|^2}{Q} = \lambda_2, \end{aligned}$$

onde λ_2 é uma constante real positiva não nula.

Logo em uma vizinhança de cada ponto onde $K \neq -1$, vale o desejado. Observe que $F(s) = 0$ quando $|\dot{e}_1|^2 = 1$. ■

Usando-se de toda a notação anterior, segue-se no caso hiperbólico um teorema análogo ao Teorema (4.2):

Teorema 4.4 *Seja $M^2 \subset \mathbb{H}^3$ uma superfície regrada não desenvolvível parametrizada como em (2.1). Suponha ainda que se a função $F(s)$ for localmente constante, então $Q(s)$ também é uma função localmente constante. São equivalentes:*

- i) M^2 é de Weingarten;
- ii) as funções $|\dot{e}_1|^2$, $\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle$, F , D , L e G são constantes em M^2 ;
- iii) M^2 é uma superfície helicoidal;

Demonstração:

Consideremos o conjunto aberto $A = \{p \in M^2 : K(p) \neq -1\}$. Como M^2 é uma superfície de Weingarten temos pelo Lema (4.3) que a função $F(s)$ é constante em cada componente conexa de A , e portanto por hipótese as funções $|\dot{e}_1|^2$ e $\langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle^2$ são funções constantes distintas em cada componente conexa de A .

Segue-se, ainda por (2.11), que em cada componente conexa de A , $K_s \equiv 0$ e portanto pela Proposição (1.22), $H_s \equiv 0$ em cada componente. Mas como $|X_s|^2$ é constante em relação a s , $H_s \equiv 0$ se, e somente se, $h_s \equiv 0$, ou equivalentemente, se as funções F , D , G e L são constantes em cada componente conexa de A .

Mostremos que $A = M^2$. Suponhamos que A seja conexo. Se $A \subsetneq M^2$, então existe pelo menos um ponto no bordo de A onde a função Q se anula, o que é um absurdo, pois como $\text{int}A \neq \emptyset$ existiria uma sequência, de valor constante não nulo, tendendo para zero. Portanto $A = M^2$. Se A não é conexo, chegamos a mesma contradição repetindo o raciocínio anterior em cada componente conexa de A .

Logo se M^2 é uma superfície regrada não desenvolvível e de Weingarten, então Q é função constante não nula em M^2 . Observe, no entanto, que $Q = 0$ se, e somente

se, $K = -1$, portanto se existe um ponto onde $K \neq -1$, então K nunca assumirá o valor -1 em M^2 .

Segue-se ainda que F , D , G e L são funções constantes em M^2 , pois M^2 é conexo e estas funções são constantes em A .

A demonstração que (ii) implica (i) é imediata. Os outros casos seguem diretamente do teorema (3.3). ■

Antes de terminarmos este capítulo, gostaríamos de dizer que o ideal seria ter conseguido demonstrar os teoremas (4.2) e (4.4) sem a hipótese adicional de que se a função $F(s)$ for localmente constante, então a função $Q(s)$ também é constante.

Vários cálculos foram feitos com o intuito de se entender qual seria o comportamento de uma superfície regrada em $\mathbb{Q}^3(c)$, $c \neq 0$, que satisfaz a condição de que a função $F(s)$ é localmente constante mas a função $Q(s)$ não é localmente constante, no entanto quase nada conseguimos. Não conseguimos garantir, por exemplo, nem que as funções $g_j(s)$ dadas em (4.3)-(4.7), no caso esférico, e (4.12)-(4.16), no caso hiperbólico, são nulas.

Como não conseguimos encontrar exemplos de superfícies regradas em $\mathbb{Q}^3(c)$, $c \neq 0$, que satisfaçam esta condição, nem contra exemplos, esperamos que ainda possam ser encontrados resultados nesta direção.

Capítulo 5

Hipersuperfícies regradas e de Weingarten em formas espaciais

Neste capítulo estenderemos a classificação feita no capítulo anterior para o caso de hipersuperfícies, ou seja, classificaremos as hipersuperfícies regradas e de Weingarten em $\mathbb{S}^{n+1}$ e $\mathbb{H}^{n+1}$, $n \geq 3$. O caso euclidiano foi resolvido por Dajczer e Tenenblat em [DT]. Para classificarmos tais hipersuperfícies é fundamental alguns resultados descritos por Dajczer e Gromoll [DG] que parametrizam, pelo menos localmente, as hipersuperfícies em formas espaciais com índice de nulidade relativa constante. Na seção 5.1 daremos algumas definições básicas e discutiremos os resultados descritos por Dajczer e Gromoll. Nas seções 5.2 e 5.3 discutiremos a classificação das hipersuperfícies regradas e de Weingarten em $\mathbb{S}^{n+1}$ e $\mathbb{H}^{n+1}$, respectivamente.

5.1 Parametrização de Gauss de uma hipersuperfície em uma forma espacial

A definição usual de aplicação de Gauss em $\mathbb{R}^{n+1}$ estende-se naturalmente para formas espaciais, isto é, seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}^{n+1}(c)$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana conexa orientável em $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$. Então o campo unitário normal a M^n

em $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$ induz uma aplicação

$$\begin{aligned} \eta : M^n &\rightarrow \mathbb{S}^n, & \text{se } c = 0, \\ x &\longrightarrow \eta_x \\ \eta : M^n &\rightarrow \mathbb{S}^{n+1}, & \text{se } c = 1, \\ x &\longrightarrow \eta_x \\ \eta : M^n &\rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}, & \text{se } c = -1, \\ x &\longrightarrow \eta_x \end{aligned}$$

chamada apenas de *aplicação de Gauss* se $c = 0$, e de *aplicação de Gauss esférica ou hiperbólica* se $c = 1$ ou $c = -1$, respectivamente. Geometricamente, nos três casos, a aplicação η associa a cada ponto $x \in M^n$ o ponto η_x , obtido fazendo-se o transporte paralelo do vetor $\eta_x \in T_x M^\perp$ até a origem de $\mathbb{R}^{n+1}$, se $c = 0$, de $\mathbb{R}^{n+2}$, se $c = 1$, ou de $\mathbb{L}^{n+2}$, se $c = -1$.

Em geral, a aplicação de Gauss em $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$ não é inversível, no entanto, quando colocamos uma hipótese adicional sobre a hipersuperfície (índice de nulidade relativa constante) tal inversão é possível. No que se segue, parametrizaremos uma hipersuperfície em $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$, pelo menos localmente, usando-se a inversa da aplicação de Gauss (no fibrado normal à sua imagem), que será chamada de *parametrização de Gauss*.

Sejam agora $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}^{n+1}(c)$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana conexa em $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$ e α a sua segunda forma fundamental.

Denotando-se por x um ponto em M^n , temos que o subespaço de $T_x M$ dado por

$$\Delta(x) = \{X \in T_x M : \alpha(X, Y) = 0, \quad \forall Y \in T_x M\}$$

é chamado de *subespaço de nulidade relativa de f em x* . Note que $\Delta(x) = \text{Ker } \alpha$. Seja ainda, $\nu(x) = \dim \Delta(x)$ o *índice de nulidade relativa de f em x* e ν_0 o mínimo do índice de nulidade relativa de f , definido por $0 \leq \nu_0 = \min_{x \in M} \nu(x) \leq n$.

É bem conhecido (veja-se [D] e [F]) que o conjunto $M_0 = \{x \in M : \nu(x) = \nu_0\}$ é não vazio e aberto em M , Δ é uma distribuição diferenciável e involutiva em M_0 e cada folha da distribuição é totalmente geodésica em M^n e em $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$.

Suponhamos, no que se segue, que a imersão f tem índice de nulidade relativa constante, isto é, $M = M_0$ com $\nu_0 = n - k$. Tomemos U um subconjunto aberto de M e seja $\pi : U \rightarrow V$ a projeção de U em V , onde V é o espaço quociente das folhas da distribuição em U . Segue-se direto do fato que $\nu(x) = n - k, \forall x \in M$, que V é uma variedade diferenciável de dimensão k . Toda vez que falarmos sobre as "folhas", estaremos nos referindo as folhas da distribuição da nulidade relativa.

Seja η o campo normal unitário definido sobre o aberto U . Observe que, a menos de sinal, η é único. É imediato mostrar que η é paralelo ao longo das folhas, na conexão normal. De fato

$$(\bar{\nabla}_X \eta)^T = -A_\eta X = 0, \quad (5.1)$$

para todo $X \in \Delta(x)$ e todo $x \in U$, onde $\bar{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$.

Utilizando-se estes conceitos é possível caracterizar localmente as hipersuperfícies em formas espaciais com índice de nulidade relativa constante. Os próximos resultados e suas respectivas demonstrações encontram-se em [DG]. Observamos apenas que a aplicação de Gauss, η , induz uma imersão g de V em $\mathbb{S}^n$, se $c = 0$, em $\mathbb{S}^{n+1}$, se $c = 1$ ou em $\mathbb{S}_1^{n+1}$, se $c = -1$, tal que $\eta = g \circ \pi$.

Teorema 5.1 *Sejam $g : V^k \rightarrow \mathbb{S}^n$ uma imersão isométrica e γ uma função em V^k . Considere a aplicação $\psi : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ definida no fibrado normal, Λ , ao longo da imersão g , dada por*

$$\psi(y, w) = \gamma g + \nabla \gamma + w.$$

Então, no subconjunto aberto de pontos regulares, ψ determina uma hipersuperfície imersa com índice de nulidade relativa constante $n - k$. Reciprocamente, qualquer hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$ com índice de nulidade relativa constante pode ser obtida desta forma, pelo menos localmente.

Proposição 5.2 *Com a notação do teorema anterior, temos:*

(i) *ψ tem posto máximo n em (y, w) se, e somente se, o operador autoadjunto*

$$P = \gamma(y)I + H_{\gamma(y)} - B_w$$

é não singular no espaço tangente a V^k em y , onde H_γ é o hessiano em V^k e B_w é a matriz da segunda forma fundamental de g em y relativa a w .

(ii) *Em tais pontos, g é o campo normal unitário à imersão ψ , a matriz da segunda forma fundamental, $A = A_g$, em $\mathbb{R}^{n+1}$ tem posto k e*

$$A = -P^{-1} \quad \text{em } \Delta^\perp,$$

onde $\Delta^\perp$ é o complemento ortogonal do subespaço de nulidade relativa.

Corolário 5.3 *Seja $g : V^k \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão isométrica. Considere a aplicação $\psi : \Lambda^1 \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ definida no fibrado normal unitário, Λ^1 , ao longo da imersão g , dada por*

$$\psi(y, w) = w. \quad (5.2)$$

Então:

(i) No subconjunto aberto de pontos regulares, ψ determina uma hipersuperfície imersa com índice de nulidade relativa constante $n - k$.

(ii) Reciprocamente, qualquer hipersuperfície de $\mathbb{S}^{n+1}$ com índice de nulidade relativa constante pode ser obtida desta forma, pelo menos localmente.

(iii) ψ possui posto máximo n no ponto (y, w) se, e somente se, a matriz da segunda forma fundamental da imersão g na direção w é não-singular. Em tais pontos, g é vetor normal unitário à imersão ψ , a matriz da segunda forma fundamental, A , da imersão ψ em $\mathbb{S}^{n+1}$ tem posto k e

$$A(y, w) = A_g(y, w) = B_w^{-1}(y) \quad \text{em} \quad \Delta^\perp, \quad (5.3)$$

onde $\Delta^\perp$ é o complemento ortogonal da nulidade relativa e B é a segunda forma fundamental da imersão g .

O caso hiperbólico pode ser estudado de forma análoga ao caso esférico, isto é, seja $g : V^k \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana no espaço de De Sitter. Considerando o fibrado normal unitário, Λ^1 , ao longo da imersão g , isto é, o conjunto de pares (y, w) , onde $y \in V^k$ e w é um vetor normal a V^k em y de comprimento -1 ($\langle w, w \rangle = -1$), então $\psi : \Lambda^1 \rightarrow \mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ dada por $\psi(y, w) = w$, determina, nos pontos regulares, uma hipersuperfície imersa com índice de nulidade relativa constante $\nu = n - k$. Segue-se então, que podemos enunciar para o caso hiperbólico um corolário análogo ao anterior, melhor dizendo: Seja $g : V^k \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ uma imersão isométrica tipo espaço. Considere a aplicação $\psi : \Lambda^1 \rightarrow \mathbb{H}_1^{n+1}$ definida no fibrado normal unitário, Λ^1 , ao longo da imersão g , dada por

$$\psi(y, w) = w. \quad (5.4)$$

Então:

(i) No subconjunto aberto de pontos regulares, ψ determina uma hipersuperfície imersa com índice de nulidade relativa constante $n - k$;

(ii) Reciprocamente, qualquer hipersuperfície de $\mathbb{H}_1^{n+1}$ com índice de nulidade relativa constante pode ser obtida desta forma, pelo menos localmente;

(iii) ψ possui posto máximo n no ponto (y, w) se, e somente se, a matriz da segunda forma fundamental da imersão g na direção w é não-singular. Em tais pontos, g é vetor normal unitário à imersão ψ , a matriz da segunda forma fundamental, A , da imersão ψ em $\mathbb{H}_1^{n+1}$ tem posto k e

$$A(y, w) = A_g(y, w) = B_w^{-1}(y) \quad \text{em} \quad \Delta^\perp, \quad (5.5)$$

onde $\Delta^\perp$ é o complemento ortogonal da nulidade relativa e B é a segunda forma fundamental da imersão g .

Antes de terminarmos esta seção, faremos algumas observações que serão usadas nas próximas seções.

Observação 5.4 Sejam M^n , $n \geq 3$, uma hipersuperfície conexa regrada em $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$ e $\overline{M} = \{p \in M^n : S(p) \neq c\}$, onde S é a curvatura escalar de M . Como M é uma hipersuperfície regrada, segue-se que a curvatura seccional em pontos de $\overline{M}$, em relação a algum subespaço bi-dimensional do espaço tangente a M^n , não é igual a c . Observe que para qualquer hipersuperfície vale a afirmação anterior, mas sendo M^n regrada temos que estes dois conjuntos coincidem, isto é, em todo ponto onde existe um subespaço bi-dimensional do espaço tangente a M^n tal que a curvatura seccional não é igual a c , a curvatura escalar é diferente de c . De fato, seja $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ uma base ortonormal para o espaço tangente a M^n em p , tal que Y_j , $1 \leq j \leq n-1$, são tangentes à folha que rege a hipersuperfície. Lembrando-se que $\alpha(Y_j, Y_i) = 0$, $1 \leq i, j \leq n-1$, onde α é a segunda forma fundamental da imersão, segue-se pela equação de Gauss que

$$\begin{aligned} K(Y_i, Y_j) &= c + \langle \alpha(Y_i, Y_i), \alpha(Y_j, Y_j) \rangle - |\alpha(Y_i, Y_j)|^2 \\ &= c, \quad 1 \leq i, j \leq n-1 \end{aligned} \quad e \quad (5.6)$$

$$K(Y_k, Y_n) = c - |\alpha(Y_k, Y_n)|^2, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Portanto se p é um ponto em M^n onde a curvatura seccional é menor do que c , então $S(p) \neq c$, pois

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j=1, i \neq j}^n \langle R(Y_i, Y_j)Y_i, Y_j \rangle \\ &= c + \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j=1}^n (\langle \alpha(Y_i, Y_i), \alpha(Y_j, Y_j) \rangle - |\alpha(Y_i, Y_j)|^2). \end{aligned}$$

Observe que a curvatura seccional em relação a qualquer subespaço bi-dimensional de qualquer ponto em uma hipersuperfície regrada em $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$ é sempre menor ou igual a c . De fato, seja $\sigma = \text{span}\{X, Z\}$ um subespaço bi-dimensional de $T_p M^n$, tal que $X = \sum_{i=1}^n a_i Y_i$ e $Z = \sum_{i=1}^n b_i Y_i$ formam uma base ortonormal para σ , então

$$\begin{aligned} K(X, Z) &= c + \langle \alpha(X, X), \alpha(Z, Z) \rangle - |\alpha(X, Z)|^2 \\ &= c - \sum_{j=1}^{n-1} (a_j b_n - a_n b_j)^2 |\alpha(Y_j, Y_n)|^2 \\ &\quad + \sum_{j,i=1, j \neq i}^{n-1} 2(-a_j a_i b_n^2 + a_j a_n b_i b_n + a_i a_n b_j b_n - a_n^2 b_i b_j) \langle \alpha(Y_j, Y_n), \alpha(Y_i, Y_n) \rangle \\ &= c - \left| \sum_{j=1}^{n-1} (a_j b_n - a_n b_j) \alpha(Y_j, Y_n) \right|^2 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Observação 5.5 Sejam M^n , $n \geq 3$, uma hipersuperfície conexa regrada em $\mathbb{Q}^{n+1}(c)$ e p um ponto qualquer em M^n . A curvatura seccional da hipersuperfície em p é diferente de c se, e somente se, o índice de nulidade relativa em p é igual a $n - 2$.

Verifiquemos o fato anterior para o caso $c = 1$, já que nos outros dois casos o raciocínio é análogo.

Tomemos novamente $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ uma base ortonormal para o espaço tangente a M^n em p , tal que Y_j , $1 \leq j \leq n-1$, são tangentes à folha que rege a hipersuperfície. Denotando por A a matriz da segunda forma fundamental da hipersuperfície M^n , temos que

$$A = \begin{pmatrix} \langle AY_1, Y_1 \rangle & \langle AY_1, Y_2 \rangle & \langle AY_1, Y_3 \rangle & \cdots & \langle AY_1, Y_n \rangle \\ \langle AY_2, Y_1 \rangle & \langle AY_2, Y_2 \rangle & \langle AY_2, Y_3 \rangle & \cdots & \langle AY_2, Y_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle AY_n, Y_1 \rangle & \langle AY_n, Y_2 \rangle & \langle AY_n, Y_3 \rangle & \cdots & \langle AY_n, Y_n \rangle \end{pmatrix}.$$

ou equivalentemente, usando-se o fato que os $\alpha(Y_i, Y_j) = 0$, $1 \leq i, j \leq n-1$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \langle AY_1, Y_n \rangle \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \langle AY_2, Y_n \rangle \\ \vdots & & & & \\ \langle AY_n, Y_1 \rangle & \langle AY_n, Y_2 \rangle & \langle AY_n, Y_3 \rangle & \cdots & \langle AY_n, Y_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Logo o posto A é menor ou igual a 2, com

$$\text{posto } A = \begin{cases} 2 & \text{se } \nu = n - 2, \\ 1 & \text{se } \nu = n - 1, \\ 0 & \text{se } \nu = n. \end{cases} \quad (5.8)$$

A igualdade anterior segue-se do fato que $\text{posto } A = n - \dim(\text{Ker } A)$ e $\dim(\text{Ker } A) = \dim(\text{Ker } \alpha)$.

Suponhamos então que p seja um ponto em M^n tal que a curvatura seccional da hipersuperfície em p seja diferente de 1, isto é, existe pelo menos um subespaço, σ , bi-dimensional do espaço tangente a M^n em p tal que a curvatura extrínseca da hipersuperfície calculada em σ é diferente de zero, isto é, usando-se (5.6) e (5.7) temos que existe pelo menos um Y_j tal que $|\alpha(Y_j, Y_n)|^2 \neq 0$, ou equivalentemente, $\langle AY_j, Y_n \rangle^2 \neq 0$. Logo neste caso, temos que $\text{posto } A = 2$, donde segue-se o desejado.

Reciprocamente, seja M^n uma hipersuperfície regrada conexa com $\nu = n - 2$ e tomemos $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$ uma base ortonormal para o espaço tangente a M^n em p , tal que Z_j , $1 \leq j \leq n - 2$ geram a nulidade relativa de M^n em p , isto é,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \langle AZ_{n-1}, Z_{n-1} \rangle & \langle AZ_{n-1}, Z_n \rangle \\ 0 & 0 & \cdots & \langle AZ_n, Z_{n-1} \rangle & \langle AZ_n, Z_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Como o posto $A = 2$, segue-se o desejado.

5.2 Classificação das hipersuperfícies regradas e de Weingarten em $\mathbb{S}^{n+1}$

Consideraremos, no que se segue, $M^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície conexa regrada orientada com índice de nulidade relativa constante, $\nu = n - 2$, ou seja, existe uma imersão isométrica $g : V^2 \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ bem definida e M^n pode ser parametrizada com em (5.2). Tomemos ainda, $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$, $n + 1$ campos ortonormais localmente definidos em V^2 , tais que $e_1(y)$ e $e_2(y)$ são tangentes à imersão g em y e $e_3(y), e_4(y), \dots, e_{n+1}(y)$ geram o espaço normal à imersão g em $\mathbb{S}^{n+1}$. A seguir demonstraremos alguns resultados que são fundamentais para o teorema principal desta seção.

Observamos, em primeiro lugar, que se a imersão $f : M^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ define uma hipersuperfície regrada conexa e de Weingarten com $\nu = n - 2$ então mostra-se que o cone sobre f , isto é, a hipersuperfície N^{n+1} definida através da imersão

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}_+ \times M^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+2} \\ (t, p) &\longrightarrow tf(p) \end{aligned}$$

é uma hipersuperfície regrada conexa com $\nu = (n + 1) - 2$. Observamos ainda, que a aplicação de Gauss de N^{n+1} em $\mathbb{S}^{n+1}$ coincide com a aplicação de Gauss de M^n em $\mathbb{S}^{n+1}$, pois em ambos os casos a aplicação de Gauss é paralela ao longo da nulidade relativa, o que significa que ela depende apenas do que não pertence à nulidade relativa, e estes subespaços coincidem em $f(p)$ e $F(t, p) \forall t \in \mathbb{R}_+$.

Pela observação anterior, usando-se o lema

Lema 5.6 *Seja $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície regrada com índice de nulidade relativa $\nu = n - 2$. Então a imersão g define uma superfície regrada em $\mathbb{S}^n$.*

cuja demonstração encontra-se em [DT] e observando-se que a imersão g parametriza a aplicação de Gauss, fica demonstrada a seguinte proposição.

Proposição 5.7 *Seja $M^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície regrada conexa orientada com $\nu = n - 2$. Então a imersão g é uma superfície regrada em $\mathbb{S}^{n+1}$.*

Segue-se pela proposição anterior, que os $n + 1$ campos ortonormais escolhidos, localmente definidos em V^2 , podem ser tomados de forma que $e_1(y)$ seja tangente à folha da imersão g passando por y , isto é, $\theta(e_1, e_1) = 0$ onde θ é a segunda forma fundamental da imersão g . Com relação a esta base temos que

$$B_{e_j}(y) = B_j = \begin{pmatrix} 0 & \langle \theta(e_1, e_2), e_j \rangle \\ \langle \theta(e_1, e_2), e_j \rangle & \langle \theta(e_2, e_2), e_j \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_j \\ \beta_j & \lambda_j \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

com $3 \leq j \leq (n + 1)$.

Tomando-se $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ uma base ortonormal para o espaço tangente a M^n no ponto (y, w) , tal que Y_j , $1 \leq j \leq n - 2$ geram a nulidade relativa de M^n em (y, w) , segue-se por (5.3) que a curvatura média, H , e a curvatura escalar, S , de M^n em (y, w) são dadas por:

$$H(y, w) = \frac{1}{n} \text{tr} A = \frac{1}{n} \text{tr} B_w^{-1}(y) = \frac{1}{n} \frac{\text{tr} B_w(y)}{\det B_w(y)}. \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} S(y, w) &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j=1, i \neq j}^n \langle R(Y_i, Y_j) Y_i, Y_j \rangle \\ &= 1 + \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j=1}^n (\langle \alpha(Y_i, Y_i), \alpha(Y_j, Y_j) \rangle - |\alpha(Y_i, Y_j)|^2) \\ &= 1 + \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j=n-1}^n (\langle \alpha(Y_i, Y_i), \alpha(Y_j, Y_j) \rangle - |\alpha(Y_i, Y_j)|^2) \\ &= 1 + \frac{2}{n(n-1)} (\det B_w^{-1}(y)) \\ &= 1 + \frac{2}{n(n-1)} \left(\frac{1}{\det B_w(y)} \right). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Observação 5.8 Sejam $M^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície regrada e de Weingarten com índice de nulidade relativa constante $\nu = n - 2$ e $(y, w) \sim (y_1, y_2, l_3, l_4, \dots, l_{n+1})$ uma parametrização local de M^n onde y_1 e y_2 são as coordenadas de y e $w = \sum_{j=3}^{n+1} l_j e_j$ é um campo normal unitário à imersão g . Note que $l_j = l_j(y, w)$ e $\sum_{j=3}^{n+1} l_j^2 = 1$, e $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$, são $n + 1$ campos tomados como anteriormente. Usando-se a notação dada em (5.9), mostra-se que

$$d \left(\sum_{j=3}^{n+1} l_j \lambda_j \right) \wedge d \left(\sum_{j=3}^{n+1} l_j \beta_j \right) = 0. \quad (5.12)$$

De fato, segue-se por (1.14) que se M^n é de Weingarten então $dH \wedge dS = 0$. Utilizando-se (5.10) e (5.11) e escrevendo $B_w(y) = B$, temos

$$\begin{aligned} dH \wedge dS = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{d(\text{tr} B) \det B - d(\det B) \text{tr} B}{n(\det B)^2} \right) \wedge \left(\frac{-2d(\det B)}{(n(n-1))(\det B)^2} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow d(\text{tr} B) \det B \wedge (-2)d(\det B) = 0 \\ &\Leftrightarrow d(\text{tr} B) \wedge d(\det B) = 0. \end{aligned}$$

Agora ainda por (5.9) temos que

$$B_w(y) = \begin{pmatrix} 0 & \sum_{j=3}^{n+1} l_j \beta_j(y) \\ \sum_{j=3}^{n+1} l_j \beta_j(y) & \sum_{j=3}^{n+1} l_j \lambda_j(y) \end{pmatrix},$$

donde segue-se o desejado.

Lema 5.9 *Seja $M^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície regrada e de Weingarten com $\nu = n - 2$. Então a dimensão do primeiro espaço normal da imersão g é constante igual a 1.*

Demonstração:

Como M^n é uma hipersuperfície regrada segue-se, pela Proposição (5.7), que g define uma superfície regrada em $\mathbb{S}^{n+1}$.

Consideremos, como antes, $e_1, e_2, e_3, \dots, e_{n+1}$, $n + 1$ campos ortonormais tais que $e_1(y), e_2(y)$ geram o espaço tangente à imersão g em y com $\theta(e_1, e_1) = 0$ e $e_3(y), \dots, e_{n+1}(y)$ geram o espaço normal a imersão g em $\mathbb{S}^{n+1}$. Denotando por $N_1^g(y)$ o primeiro espaço normal da imersão g em y , temos que $N_1^g(y) = \text{span}\{\theta(e_1, e_2), \theta(e_2, e_2)\}$, isto é, $\dim N_1^g \leq 2$.

Suponhamos que $\dim N_1^g(y) = 2$, portanto em uma vizinhança de y vale que $\dim N_1^g = 2$. Suponhamos ainda que nesta vizinhança e_3, e_4 geram N_1^g com e_4 ortogonal a $\theta(e_1, e_2)$. Temos então, neste caso, que a segunda forma fundamental da imersão g é dada por

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & \beta_3 \\ \beta_3 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_4 \end{pmatrix},$$

e

$$B_j = 0, \quad 5 \leq j \leq n + 1.$$

Como, por hipótese, M^n é de Weingarten, segue-se por (5.12) que

$$d(l_3 \lambda_3 + l_4 \lambda_4) \wedge d(l_3 \beta_3) = 0$$

ou seja,

$$(\lambda_3 dl_3 + l_3 d\lambda_3 + \lambda_4 dl_4 + l_4 d\lambda_4) \wedge (\beta_3 dl_3 + l_3 d\beta_3) = 0.$$

Observando-se que $\beta_{j'}$ s e $\lambda_{j'}$ s são funções apenas da variável y segue-se, aplicando a última igualdade ao par $\left(\frac{\partial}{\partial l_4}, \frac{\partial}{\partial l_3}\right)$, que $\lambda_4 \beta_3 = 0$. Se $\beta_3 = 0$, então $\theta(e_1, e_2) = 0$, o que implica que $\dim N_1^g < 2$; se $\lambda_4 = 0$, então $B_4 = 0$ o que implica novamente que $\dim N_1^g < 2$. Logo $\dim N_1^g \leq 1$.

Suponhamos agora que $\dim N_1^g(y) = 0$, isto é, g determina uma imersão totalmente geodésica em y . Neste caso, temos que

$$B_j = 0, \quad 3 \leq j \leq n+1,$$

donde segue-se que B_v é singular na direção de qualquer $v = \sum_{j=3}^{n+1} l_j e_j$ e portanto pelo Corolário (5.3) ψ não determina uma imersão em y , o que gera uma contradição.

Logo, $\dim N_1^g = 1$ em todo ponto.

■

Proposição 5.10 *Seja $M^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície conexa regrada de Weingarten com $\nu = n - 2$. Então existe uma subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{S}^{n+1}$, tal que $g(V^2) \subset \mathbb{S}^3$ é uma superfície regrada e de Weingarten não desenvolvível e satisfaz $4H^2 + a^2(K - 1) = 0$, onde a é uma constante real, e K e H são as curvaturas Gaussiana e média da superfície, respectivamente.*

Demonstração:

Por hipótese e usando a Proposição (5.7) e o Lema (5.9), segue-se que g determina uma superfície regrada em $\mathbb{S}^{n+1}$ tal que $\dim N_1^g = 1$ em todo ponto. Tomando-se como antes, $e_1, \dots, e_{n+1}$ uma base ortonormal ao longo de V^2 , suponhamos que e_3 gera N_1^g , ou seja

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta & \lambda \end{pmatrix}, \quad B_j = 0, \quad 4 \leq j \leq n+1. \quad (5.13)$$

Queremos mostrar que N_1^g é paralelo, pois neste caso teremos pelo Corolário (1.24) que a imersão g reduz codimensão como desejado. Para isso basta mostrar que $(N_1^g)^\perp$ é paralelo. De fato, se $(N_1^g)^\perp$ é paralelo então denotando $\eta = \sum_{k=4}^{n+1} t_k e_k$ segue-se que

$$\begin{aligned} \langle \eta, e_3 \rangle = 0 &\Rightarrow \langle \eta, \nabla_{e_j}^\perp e_3 \rangle = 0, \quad j = 1, 2 \\ &\Rightarrow \nabla_{e_j}^\perp e_3 \in N_1^g \\ &\Rightarrow N_1^g \text{ é paralelo,} \end{aligned}$$

onde ∇ é a conexão de Levi-Civita em M^n . Mostremos então que $(N_1^g)^\perp$ é paralelo.

Como estamos trabalhando em um espaço de curvatura constante, temos por (1.1) que a equação de Codazzi se reduz a

$$(\nabla_{e_1} B)(e_2, \eta) = (\nabla_{e_2} B)(e_1, \eta),$$

onde

$$(\nabla_{e_i} B)(e_j, \eta) = \nabla_{e_i} B_\eta e_j - B_\eta \nabla_{e_i} e_j - B_{\nabla_{e_i}^\perp \eta} e_j.$$

Em nosso caso, segue-se por (5.13) que

$$B_{\nabla_{e_1}^\perp \eta} e_2 = B_{\nabla_{e_2}^\perp \eta} e_1,$$

ou equivalentemente,

$$\langle B_{\nabla_{e_1}^\perp \eta} e_2, e_1 \rangle e_1 + \langle B_{\nabla_{e_1}^\perp \eta} e_2, e_2 \rangle e_2 - \langle B_{\nabla_{e_2}^\perp \eta} e_1, e_2 \rangle e_2 = 0,$$

isto é,

$$\begin{cases} \langle B_{\nabla_{e_1}^\perp \eta} e_2, e_1 \rangle = 0, \\ \langle B_{\nabla_{e_1}^\perp \eta} e_2, e_2 \rangle - \langle B_{\nabla_{e_2}^\perp \eta} e_1, e_2 \rangle = 0. \end{cases}$$

Observando-se que para $i, j, k = 1, 2$

$$\begin{aligned} \langle B_{\nabla_{e_j}^\perp \eta} e_i, e_k \rangle &= \langle \theta(e_i, e_k), \nabla_{e_j}^\perp \eta \rangle \\ &= \langle \theta(e_i, e_k), \sum_{l=3}^n \langle \nabla_{e_j}^\perp \eta, e_l \rangle e_l \rangle \\ &= \langle \theta(e_i, e_k), e_3 \rangle \langle \nabla_{e_j}^\perp \eta, e_3 \rangle, \end{aligned}$$

temos que o sistema anterior é equivalente a

$$\begin{cases} \beta \langle \nabla_{e_1}^\perp \eta, e_3 \rangle = 0, \\ \lambda \langle \nabla_{e_1}^\perp \eta, e_3 \rangle - \beta \langle \nabla_{e_2}^\perp \eta, e_3 \rangle = 0, \end{cases}$$

donde segue-se que

$$\langle \nabla_{e_1}^\perp \eta, e_3 \rangle = \langle \nabla_{e_2}^\perp \eta, e_3 \rangle = 0,$$

pois caso contrário, B_v seria singular na direção de qualquer v , o que geraria uma contradição pelo Corolário (5.3). Logo $(N_1^g)^\perp$ é paralelo, e portanto pelo Corolário (1.24) existe uma subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{S}^{n+1}$, tal que $g(V^2) \subset \mathbb{S}^3$.

Como M^n é de Weingarten, segue-se por (5.12) e (5.13) que

$$d(l\lambda) \wedge d(l\beta) = 0.$$

Aplicando-se este produto exterior ao par $(e_j, \frac{\partial}{\partial l})$, $j = 1, 2$, temos que

$$l(\beta d\lambda(e_j) - \lambda d\beta(e_j)) = 0 \quad \forall l \in \mathbb{R}.$$

Portanto

$$\beta d\lambda - \lambda d\beta = 0,$$

donde segue-se que existe uma constante real, a , tal que

$$\lambda = a \beta. \quad (5.14)$$

Temos por (5.13) que as curvaturas Gaussiana e média da imersão g verificam, respectivamente,

$$K = 1 - \beta^2, \quad H = \frac{1}{2}\lambda,$$

donde segue-se por (5.14) que a imersão g satisfaz a relação

$$4H^2 + a^2(K - 1) = 0.$$

■

A próxima proposição pode ser encontrada em [DT].

Proposição 5.11 *Seja $g : V^2 \rightarrow \mathbb{S}^3$ uma superfície regrada conexa não desenvolvível em $\mathbb{S}^3$ tal que $4H^2 + a^2(K - 1) = 0$. Então $H = 0$ ou $H = \frac{a}{2} \neq 0$ e $K = 0$. No segundo caso, temos que a superfície está contida no produto de dois círculos.*

Demonstração:

Se a constante a for nula, então $H = 0$. Caso contrário, mostraremos que $H = \frac{a}{2}$ e $K = 0$.

Como $g(V^2) \subset \mathbb{S}^3$ é uma superfície regrada, podemos parametrizá-la localmente por

$$Y(s, t) = \beta_0(s) \cos t + \beta_1(s) \sin t$$

onde β_0 e β_1 são vetores em $\mathbb{R}^4$ tais que

$$|\beta_0| = |\beta_1| = 1, \quad \langle \beta_0, \beta_1 \rangle = 0, \quad \langle \dot{\beta}_0, \dot{\beta}_1 \rangle = 0.$$

Além disso, podemos tomar s o parâmetro comprimento de arco de β_1 , isto é, $|\dot{\beta}_1| = 1$. Observe que esta parametrização não coincide com a parametrização usada por nós nos capítulos anteriores.

Tomemos a base ortonormal $\left\{ Y_t, \frac{\tilde{Y}_s}{|\tilde{Y}_s|}, Y_t \wedge \frac{\tilde{Y}_s}{|\tilde{Y}_s|} \wedge Y, Y \right\}$ de $\mathbb{R}^4$, onde $\tilde{Y}_s = Y_s - \langle Y_t, Y_s \rangle Y_t$. Usando-se cálculos análogos aos feitos na seção (2.2) e denotando

$$\begin{cases} A(s) &= |\dot{\beta}_0|^2 - \langle \dot{\beta}_0, \beta_1 \rangle^2 \\ B(s) &= 1 - \langle \dot{\beta}_0, \beta_1 \rangle^2 \\ P(s, t) &= A(s) \cos^2 t + B(s) \sin^2 t \\ Q(s, t) &= \langle \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_0 \wedge \beta_1 \wedge \beta_0 \rangle \\ h(s, t) &= F(s) \cos^2 t + D(s) \sin^2 t + (L(s) + G(s)) \cos t \sin t, \end{cases} \quad (5.15)$$

onde $F(s)$, $D(s)$, $L(s)$ e $G(s)$ são dados em (2.10), mostramos que as curvaturas Gaussiana e média da superfície são dadas por

$$K = 1 - \frac{Q^2}{P^2}, \quad H = \frac{h + 2Q \langle \dot{\beta}_0, \beta_1 \rangle}{2P^{\frac{3}{2}}}. \quad (5.16)$$

Observa-se que $Q^2 = AB$. De fato,

$$\begin{aligned} Q^2 &= \left(\det \begin{bmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_0 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} \right)^2 = \\ &= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \langle \dot{\beta}_1, \beta_0 \rangle \\ 0 & |\dot{\beta}_0|^2 & \langle \dot{\beta}_0, \beta_1 \rangle & 0 \\ 0 & \langle \dot{\beta}_0, \beta_1 \rangle & 1 & 0 \\ \langle \dot{\beta}_1, \beta_0 \rangle & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \left(|\dot{\beta}_0|^2 - \langle \dot{\beta}_0, \beta_1 \rangle^2 \right) \left(1 - \langle \dot{\beta}_0, \beta_1 \rangle^2 \right) \\ &= AB. \end{aligned}$$

Segue-se então que na vizinhança de um ponto onde $K \neq 1$, $A(s) \neq 0$ e $B(s) \neq 0$ (observe que tal vizinhança existe, pois g é uma superfície regrada não desenvolvível).

Por hipótese, temos que a superfície satisfaz a relação $4H^2 + a^2(K - 1) = 0$, ou seja,

$$4 \left(\frac{h + 2Q \langle \dot{\beta}_0, \beta_1 \rangle}{2P^{\frac{3}{2}}} \right)^2 = \frac{a^2 Q^2}{P^2}, \quad \forall s, t$$

donde segue-se, sem perda de generalidade, que

$$h + 2Q \left\langle \dot{\beta}_0, \beta_1 \right\rangle - aQ P^{\frac{1}{2}} = 0, \quad \forall s, t. \quad (5.17)$$

Derivando-se a igualdade (5.17) em t , segue-se que

$$\frac{\partial h}{\partial t} - aQ \frac{1}{2P^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial P}{\partial t} = 0, \quad (5.18)$$

onde

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \sin 2t(D - F) + \cos 2t(L + G)$$

e

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \sin 2t(B - A).$$

Como as funções $\sin 2t$ e $\cos 2t$ são linearmente independentes como funções de t , segue-se por (5.18) que $L + G = 0$, ou seja, a equação (5.18) se reduz a

$$\sin 2t(D - F) - aQ \frac{1}{2P^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial P}{\partial t} = 0.$$

Suponhamos que na vizinhança, V , de um ponto onde $K \neq 1$, existe um ponto tal que $\frac{\partial P}{\partial t} \neq 0$. Então em uma vizinhança, $U \subset V$, deste ponto tal que $\frac{\partial P}{\partial t} \neq 0$ em U , vale que

$$\frac{1}{B - A}(D - F) - aQ \frac{1}{2P^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

ou equivalentemente,

$$\frac{1}{P^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{aQ(B - A)}(D - F). \quad (5.19)$$

O segundo termo da igualdade anterior é função apenas do parâmetro s . Derivando-se esta igualdade em t na vizinhança U , segue-se que $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$ em U , contradição. Logo

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 0, \quad \forall s, t \text{ em } V \Rightarrow A(s) = B(s), \text{ em } V.$$

Portanto por (5.15) e (5.16) temos que $K = 0$ em V , donde segue-se que $H = \frac{a}{2}$ em V . Seja $W = \{p \in g(V^2) : K(p) \neq 1\}$. Pelo o que foi feito anteriormente, temos que $H = \frac{a}{2}$ em W , mostremos que $W = g(V^2)$. Suponhamos que W é conexo e $W \subsetneq g(V^2)$, então existe um ponto $q \in \partial W$ tal que $K(q) = 1$, o que é um absurdo pois neste caso existiria um sequência constante não nula tendendo para zero, observe que

$H(q) = 0$. Se W não for conexo, chegamos a mesma contradição em cada componente conexa de W . Logo $H = \frac{a}{2}$ em toda a superfície, como queríamos demonstrar.

Para a segunda parte da proposição ver [S].

■

Neste ponto convém observar que decorre das proposições (5.10) e (5.11) o seguinte: Se $M^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ é uma hipersuperfície regrada conexa e de Weingarten com $\nu = n - 2$, então existe uma subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{S}^{n+1}$ tal que $g(V^2) \subset \mathbb{S}^3$ é uma superfície regrada mínima ou está contida no produto de dois círculos.

Vamos fornecer agora, em cada caso, parametrizações explícitas para $g(V^2)$ e M^n , que serão utilizadas no teorema principal.

• Primeiro caso:

Suponha que $g(V^2)$ é uma superfície regrada mínima em $\mathbb{S}^3$. Então segue-se por [L] que $g(V^2)$ pode ser localmente parametrizada por

$$g(t_1, t_2) = \beta_1(t_2) \cos t_1 + \beta_2(t_2) \sin t_1$$

onde, sem perda de generalidade, podemos tomar

$$\beta_1(t_2) = (\cos at_2, \sin at_2, 0 \dots 0)$$

e

$$\beta_2(t_2) = (0, 0, \cos t_2, \sin t_2, 0 \dots 0),$$

com a uma constante real positiva.

Consideremos $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_{n+1}\}$ uma base ortonormal ao longo de $g(V^2)$ onde e_1, e_2 são tangentes à superfície, e_3 é normal à superfície e tangente a $\mathbb{S}^3$ e e_j , $4 \leq j \leq n+1$, são normais à superfície mas tangentes a $\mathbb{S}^{n+1}$. Explicitamente, tomemos:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\partial g}{\partial t_1} = -\beta_1(t_2) \sin t_1 + \beta_2(t_2) \cos t_1, \\ e_2 &= \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial g}{\partial t_2} = \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\dot{\beta}_1(t_2) \cos t_1 + \dot{\beta}_2(t_2) \sin t_1 \right), \\ e_3 &= \frac{1}{\sqrt{E}} \left(-\frac{\dot{\beta}_1(t_2)}{a} \sin t_1 + a \dot{\beta}_2(t_2) \cos t_1 \right), \\ e_4 &= (0, 0, 0, 0, 1, 0 \dots 0), \\ e_5 &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0 \dots 0), \\ e_{n+1} &= (0 \dots 0, 1), \end{aligned} \tag{5.20}$$

onde

$$\begin{aligned} E &= a^2 \cos^2 t_1 + \sin^2 t_1, \\ \dot{\beta}_1(t_2) &= a (-\sin at_2, \cos at_2, 0 \dots 0), \\ \dot{\beta}_2(t_2) &= (0, 0, -\sin t_2, \cos t_2, 0 \dots 0). \end{aligned} \tag{5.21}$$

Denotando por $\bar{\nabla}$ e ∇ as conexões de Levi-Civita de $\mathbb{S}^{n+1}$ e $\mathbb{R}^{n+2}$, respectivamente, determinemos a matriz da segunda forma fundamental da imersão g com relação a base dada. Temos

$$\begin{aligned}\theta(e_1, e_1) &= (\bar{\nabla}_{e_1} e_1)^\perp = \nabla_{e_1} e_1 - \langle \nabla_{e_1} e_1, e_1 \rangle e_1 + \\ &\quad - \langle \nabla_{e_1} e_1, e_2 \rangle e_2 - \langle \nabla_{e_1} e_1, g \rangle g.\end{aligned}$$

Como $\nabla_{e_1} e_1 = \frac{\partial^2 g}{\partial t_1^2}$, então

$$\theta(e_1, e_1) = \vec{0},$$

onde $\vec{0}$ é o vetor nulo em $\mathbb{R}^{n+2}$. Temos também que

$$\theta(e_2, e_2) = \nabla_{e_2} e_2 - \langle \nabla_{e_2} e_2, e_1 \rangle e_1 - \langle \nabla_{e_2} e_2, e_2 \rangle e_2 - \langle \nabla_{e_2} e_2, g \rangle g,$$

e como $\nabla_{e_2} e_2 = \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial^2 g}{\partial t_2^2} + \frac{\partial}{\partial t_2} \left[\frac{1}{\sqrt{E}} \right] \frac{\partial g}{\partial t_2} \right)$ segue-se que,

$$\begin{aligned}\theta(e_2, e_2) &= \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial t_2^2} - \left\langle \frac{\partial^2 g}{\partial t_2^2}, e_1 \right\rangle e_1 - \left\langle \frac{\partial^2 g}{\partial t_2^2}, e_2 \right\rangle e_2 - \left\langle \frac{\partial^2 g}{\partial t_2^2}, g \right\rangle g \right) \\ &= \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial t_2^2} - \left\langle \frac{\partial^2 g}{\partial t_2^2}, e_1 \right\rangle e_1 - \left\langle \frac{\partial^2 g}{\partial t_2^2}, g \right\rangle g \right) \\ &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Analogamente temos ainda que

$$\begin{aligned}\theta(e_1, e_2) &= \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial t_1 \partial t_2} - \left\langle \frac{\partial^2 g}{\partial t_1 \partial t_2}, e_1 \right\rangle e_1 - \left\langle \frac{\partial^2 g}{\partial t_1 \partial t_2}, e_2 \right\rangle e_2 - \left\langle \frac{\partial^2 g}{\partial t_1 \partial t_2}, g \right\rangle g \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial t_1 \partial t_2} - \left\langle \frac{\partial^2 g}{\partial t_1 \partial t_2}, e_2 \right\rangle e_2 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{E}} \left(-\dot{\beta}_1(t_2) \sin t_1 + \dot{\beta}_2(t_2) \cos t_1 + \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{E} \left(\left(\dot{\beta}_1(t_2) \cos t_1 + \dot{\beta}_2(t_2) \sin t_1 \right) \cos t_1 \sin t_1 (1 - a^2) \right) \right),\end{aligned}$$

donde segue-se que

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{E} \\ \frac{a}{E} & 0 \end{pmatrix}, \quad B_j = 0, \quad 4 \leq j \leq n+1.$$

Pelo Corolário (5.3) temos que M^n pode ser parametrizada por $\psi(y, w) = w$ onde $y \in g(V^2)$ e $w \in \Lambda^1$, melhor dizendo, podemos parametrizar M^n por

$$X(t_1, t_2, s_1, \dots, s_{n-2}) = \sum_{j=3}^{n+1} \varphi_j(s_1, \dots, s_{n-2}) e_j(t_1, t_2), \quad (5.22)$$

onde $w = \sum_{j=3}^{n+1} \varphi_j e_j$ e $\sum_{j=3}^{n+1} \varphi_j^2 = 1$. Observe que X define um fibrado normal de $n - 2$ esferas unitárias sobre $g(V^2)$.

Segue-se ainda, pelo Corolário (5.3), que a matriz da segunda forma fundamental da imersão X no ponto (y, w) restrito ao complemento ortogonal da nulidade relativa é dada por $B_w^{-1}(y)$, isto é,

$$A_g = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a\varphi_3}{E} \\ \frac{a\varphi_3}{E} & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Temos então por (5.10) e (5.11) que as curvaturas média e escalar da hipersuperfície são dadas, respectivamente, por

$$H = 0, \quad S = 1 + \frac{-2}{n(n-1)} \frac{E^2}{a^2\varphi_3^2}, \quad (5.23)$$

isto é, M^n é uma hipersuperfície regrada mínima em $\mathbb{S}^{n+1}$.

• Segundo caso:

Suponha agora que $g(V^2)$ é uma superfície regrada contida no produto de dois círculos em $\mathbb{S}^3$. Sem perda de generalidade, $g(V^2)$ pode ser localmente parametrizada por

$$g(t_1, t_2) = r_1 \left(\sin \frac{t_1}{r_1}, \cos \frac{t_1}{r_1}, 0, \dots, 0 \right) + r_2 \left(0, 0, \sin \frac{t_2}{r_2}, \cos \frac{t_2}{r_2}, 0, \dots, 0 \right), \quad (5.24)$$

com $r_1^2 + r_2^2 = 1$, $r_1 \neq 0$ e $r_2 \neq 0$.

Consideremos, analogamente ao caso anterior, $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ uma base ortonormal ao longo de $g(V^2)$ onde e_1, e_2 são tangentes à superfície, e_3 é normal à superfície e tangente a $\mathbb{S}^3$ e e_j , $4 \leq j \leq n+1$, são normais à superfície mas tangentes a $\mathbb{S}^{n+1}$. Explicitamente tomemos:

$$\begin{aligned} e_1 &= r_1 \frac{\partial g}{\partial t_1} - r_2 \frac{\partial g}{\partial t_2} \\ &= \left(r_1 \cos \frac{t_1}{r_1}, -r_1 \sin \frac{t_1}{r_1}, -r_2 \cos \frac{t_2}{r_2}, r_2 \sin \frac{t_2}{r_2}, 0, \dots, 0 \right), \\ e_2 &= r_2 \frac{\partial g}{\partial t_1} + r_1 \frac{\partial g}{\partial t_2} \\ &= \left(r_2 \cos \frac{t_1}{r_1}, -r_2 \sin \frac{t_1}{r_1}, r_1 \cos \frac{t_2}{r_2}, -r_1 \sin \frac{t_2}{r_2}, 0, \dots, 0 \right), \\ e_3 &= \left(-r_2 \sin \frac{t_1}{r_1}, -r_2 \cos \frac{t_1}{r_1}, r_1 \sin \frac{t_2}{r_2}, r_1 \cos \frac{t_2}{r_2}, 0, \dots, 0 \right), \\ e_4 &= (0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0), \\ e_5 &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0), \\ e_{n+1} &= (0, \dots, 0, 1). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Observe que $e_j \in \mathbb{R}^{n+2}$, $1 \leq j \leq n+1$. Determinemos a matriz da segunda forma fundamental da imersão g com relação a esta base, onde $\bar{\nabla}$ e ∇ denotam as conexões de Levi-Civita de $\mathbb{S}^{n+1}$ e $\mathbb{R}^{n+2}$, respectivamente. Temos

$$\begin{aligned} \theta(e_1, e_1) &= (\bar{\nabla}_{e_1} e_1)^\perp = \nabla_{e_1} e_1 - \langle \nabla_{e_1} e_1, e_1 \rangle e_1 \\ &\quad - \langle \nabla_{e_1} e_1, e_2 \rangle e_2 - \langle \nabla_{e_1} e_1, g \rangle g, \end{aligned}$$

onde $\nabla_{e_1} e_1 = \left(r_1^2 \frac{\partial^2 g}{\partial t_1^2} + r_2^2 \frac{\partial^2 g}{\partial t_2^2} \right)$, então

$$\theta(e_1, e_1) = \vec{0}.$$

Temos ainda que $\nabla_{e_2} e_2 = r_2^2 \frac{\partial^2 g}{\partial t_1^2} + r_1^2 \frac{\partial^2 g}{\partial t_2^2}$ e $\nabla_{e_1} e_2 = r_1 r_2 \left(\frac{\partial^2 g}{\partial t_1^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial t_2^2} \right)$, donde segue-se que

$$\begin{aligned} \theta(e_2, e_2) &= \frac{-r_2^2}{r_1} \left(\sin \frac{t_1}{r_1}, \cos \frac{t_1}{r_1}, 0, \dots, 0 \right) + \\ &\quad - \frac{-r_1^2}{r_2} \left(0, 0, \sin \frac{t_2}{r_2}, \cos \frac{t_2}{r_2}, 0, \dots, 0 \right) + g \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \theta(e_1, e_2) &= -r_2 \left(\sin \frac{t_1}{r_1}, \cos \frac{t_1}{r_1}, 0, \dots, 0 \right) + \\ &\quad + r_1 \left(0, 0, \sin \frac{t_2}{r_2}, \cos \frac{t_2}{r_2}, 0, \dots, 0 \right). \end{aligned}$$

Temos então que

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1 r_2} \end{pmatrix}, \quad B_j = 0, \quad 4 \leq j \leq n+1.$$

Seguindo novamente raciocínio análogo ao caso anterior, podemos parametrizar M^n por

$$X(t_1, t_2, s_1, \dots, s_{n-2}) = \sum_{j=3}^{n+1} \varphi_j(s_1, \dots, s_{n-2}) e_j(t_1, t_2), \quad (5.26)$$

onde $w = \sum_{j=3}^{n+1} \varphi_j e_j$ e $\sum_{j=3}^{n+1} \varphi_j^2 = 1$. Observe, novamente, que X define um fibrado normal de $n-2$ esferas sobre $g(V^2)$.

Segue-se ainda, que a segunda forma fundamental da imersão X no ponto (y, w) restrito ao complemento ortogonal da nulidade relativa é dada por

$$A_g = \begin{pmatrix} 0 & \varphi_3 \\ \varphi_3 & \frac{(r_2^2 - r_1^2)\varphi_3}{r_1 r_2} \end{pmatrix}^{-1}.$$

Temos então por (5.10) e (5.11) que as curvaturas média e escalar da hipersuperfície são dadas, respectivamente, por

$$H = \frac{1}{n} \frac{(r_1^2 - r_2^2)}{\varphi_3 r_1 r_2}, \quad S = 1 + \frac{-2}{n(n-1)} \frac{1}{\varphi_3^2}, \quad (5.27)$$

isto é, M^n possui curvatura média e escalar constantes em relação a dois de seus parâmetros.

Observação 5.12 Os dois casos estudados anteriormente tratam de hipersuperfícies regradas e de Weingarten, ou seja, para cada caso existe uma aplicação não trivial, F , tal que $F(H, S) = 0$. No primeiro caso a aplicação $F(p, q) = p$ satisfaz à condição dada. Já no segundo caso, cálculos simples nos levam à aplicação $F(p, q) = \frac{(nr_1r_2)^2}{(r_1^2 - r_2^2)^2} p^2 + \frac{n(n-1)}{2} (q - 1)$.

Pelo segundo caso estudado, fica fácil darmos exemplos de hipersuperfícies regradas de Weingarten em $\mathbb{S}^{n+1}$ que não sejam exemplos triviais, melhor dizendo, exemplos que não possuem curvatura escalar ou média constante.

Exemplo 5.13 Mostremos que a hipersuperfície em $\mathbb{S}^4$ parametrizada por

$$X(t_1, t_2, t_3) = e_1(t_1, t_2) \cos t_3 + e_2(t_1, t_2) \sin t_3$$

define uma hipersuperfície regrada de Weingarten, $M^3 \subset \mathbb{S}^4$ com índice de nulidade relativa constante igual a 1, onde

$$e_1 = \left(-r_2 \sin \frac{t_1}{r_1}, -r_2 \cos \frac{t_1}{r_1}, r_1 \sin \frac{t_2}{r_2}, r_1 \cos \frac{t_2}{r_2}, 0 \right),$$

$$e_2 = (0, 0, 0, 0, 1),$$

com $r_1^2 + r_2^2 = 1$, $r_1 \neq 0$ e $r_2 \neq 0$.

Consideremos $\{f_1, f_2, f_3\}$ o referencial ortonormal tangente a M^3 , dado por:

$$f_1 = \frac{r_1 X_{t_1} - r_2 X_{t_2}}{|r_1 X_{t_1} - r_2 X_{t_2}|} = \left(-r_2 \cos \frac{t_1}{r_1}, r_2 \sin \frac{t_1}{r_1}, -r_1 \cos \frac{t_2}{r_2}, r_1 \sin \frac{t_2}{r_2}, 0 \right),$$

$$f_2 = \frac{\frac{r_1^2}{r_2} X_{t_1} + \frac{r_2^2}{r_1} X_{t_2}}{|\frac{r_1^2}{r_2} X_{t_1} + \frac{r_2^2}{r_1} X_{t_2}|} = \left(-r_1 \cos \frac{t_1}{r_1}, r_1 \sin \frac{t_1}{r_1}, r_2 \cos \frac{t_2}{r_2}, -r_2 \sin \frac{t_2}{r_2}, 0 \right),$$

$$f_3 = X_{t_3}.$$

Calculemos a matriz da segunda forma fundamental, com relação a este referencial. A normal à hipersuperfície é dada por

$$\begin{aligned} \eta &= f_1 \wedge f_3 \wedge f_2 \wedge X \\ &= \left(r_1 \sin \frac{t_1}{r_1}, r_1 \cos \frac{t_1}{r_1}, r_2 \sin \frac{t_2}{r_2}, r_2 \cos \frac{t_2}{r_2}, 0 \right). \end{aligned}$$

Observe que se considerarmos a aplicação g , dada em (5.24), com imagem em $\mathbb{S}^4$ teremos como esperado que $\eta = g$. Denotando por $\bar{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{S}^4$, temos que:

$$\begin{aligned}\alpha(f_1, f_1) &= \frac{1}{|r_1 X_{t_1} - r_2 X_{t_2}|^2} (r_1^2 \bar{\nabla}_{X_{t_1}} X_{t_1} + r_2^2 \bar{\nabla}_{X_{t_2}} X_{t_2})^\perp = \\ &= \frac{1}{\cos^2 t_3} (r_1^2 X_{t_1 t_1} + r_2^2 X_{t_2 t_2} + \\ &\quad - (\cos t_3 \sin t_3) f_3 + (\cos^2 t_3) X) \\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha(f_2, f_2) &= \frac{1}{|\frac{r_1^2}{r_2} X_{t_1} + \frac{r_2^2}{r_1} X_{t_2}|^2} \left(\frac{r_1^4}{r_2^2} \bar{\nabla}_{X_{t_1}} X_{t_1} + \frac{r_2^4}{r_1^2} \bar{\nabla}_{X_{t_2}} X_{t_2} \right)^\perp = \\ &= \frac{1}{\cos^2 t_3} \left(\frac{r_1^4}{r_2^2} X_{t_1 t_1} + \frac{r_2^4}{r_1^2} X_{t_2 t_2} + \right. \\ &\quad \left. - (\cos t_3 \sin t_3) f_3 + (\cos^2 t_3) X \right) \\ &= \frac{1}{\cos^2 t_3} \left(\frac{1}{r_2} (r_1^2 - r_2^2) \cos t_3 \sin \frac{t_1}{r_1}, \right. \\ &\quad \frac{1}{r_2} (r_1^2 - r_2^2) \cos t_3 \cos \frac{t_1}{r_1}, \\ &\quad \frac{1}{r_1} (r_1^2 - r_2^2) \cos t_3 \sin \frac{t_2}{r_2}, \\ &\quad \left. \frac{1}{r_1} (r_1^2 - r_2^2) \cos t_3 \cos \frac{t_2}{r_2}, 0 \right) \\ &= \frac{1}{\cos t_3} \left(\frac{1}{r_2} (r_1^2 - r_2^2) \sin \frac{t_1}{r_1}, \frac{1}{r_2} (r_1^2 - r_2^2) \cos \frac{t_1}{r_1}, \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{r_1} (r_1^2 - r_2^2) \sin \frac{t_2}{r_2}, \frac{1}{r_1} (r_1^2 - r_2^2) \cos \frac{t_2}{r_2}, 0 \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha(f_3, f_3) &= (\bar{\nabla}_{X_{t_3}} X_{t_3})^\perp \\ &= X_{t_3 t_3} - \sum_{j=1}^3 \langle X_{t_3 t_3}, f_j \rangle f_j - \langle X_{t_3 t_3}, X \rangle X \\ &= X_{t_3 t_3} + X \\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha(f_1, f_2) &= \frac{1}{|\frac{r_1^2}{r_2} X_{t_1} + \frac{r_2^2}{r_1} X_{t_2}| |r_1 X_{t_1} - r_2 X_{t_2}|} \left(\frac{r_1^3}{r_2} \bar{\nabla}_{X_{t_1}} X_{t_1} - \frac{r_2^3}{r_1} \bar{\nabla}_{X_{t_2}} X_{t_2} \right)^\perp = \\ &= \frac{1}{\cos^2 t_3} \left(\frac{r_1^3}{r_2} X_{t_1 t_1} - \frac{r_2^3}{r_1} X_{t_2 t_2} \right) \\ &= \frac{1}{\cos^2 t_3} \left(r_1 \cos t_3 \sin \frac{t_1}{r_1}, r_1 \cos t_3 \cos \frac{t_1}{r_1}, \right. \\ &\quad \left. r_2 \cos t_3 \sin \frac{t_2}{r_2}, r_2 \cos t_3 \cos \frac{t_2}{r_2}, 0 \right) \\ &= \frac{1}{\cos t_3} \left(r_1 \sin \frac{t_1}{r_1}, r_1 \cos \frac{t_1}{r_1}, r_2 \sin \frac{t_2}{r_2}, r_2 \cos \frac{t_2}{r_2}, 0 \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha(f_1, f_3) &= \frac{1}{|r_1 X_{t_1} - r_2 X_{t_2}|} (r_1 \bar{\nabla}_{X_{t_1}} X_{t_3} - r_2 \bar{\nabla}_{X_{t_2}} X_{t_3})^\perp = \\ &= \frac{1}{\cos t_3} (r_1 X_{t_1 t_3} - r_2 X_{t_2 t_3} + (\sin t_3) f_1) \\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha(f_2, f_3) &= \frac{1}{|\frac{r_1^2}{r_2} X_{t_1} + \frac{r_2^2}{r_1} X_{t_2}|} \left(\frac{r_1^2}{r_2} \bar{\nabla}_{X_{t_1}} X_{t_3} + \frac{r_2^2}{r_1} \bar{\nabla}_{X_{t_2}} X_{t_3} \right)^\perp = \\ &= \frac{1}{\cos t_3} \left(\frac{r_1^2}{r_2} X_{t_1 t_3} + \frac{r_2^2}{r_1} X_{t_2 t_3} + (\sin t_3) f_2 \right) \\ &= \vec{0}.\end{aligned}$$

isto é, f_3 gera a nulidade relativa e f_1 e f_3 geram o espaço tangente à folha que rege a hipersuperfície. Segue-se ainda, por cálculos diretos, que

$$\langle \alpha(f_2, f_2), g \rangle = \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1 r_2} \frac{1}{\cos t_3}, \quad \langle \alpha(f_1, f_2), g \rangle = \frac{1}{\cos t_3},$$

donde segue-se o desejado, ou seja, as curvaturas média e escalar da hipersuperfície são dadas, respectivamente, por

$$H = \frac{1}{2} \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1 r_2} \frac{1}{\cos t_3}, \quad S = 1 - \frac{1}{3 \cos^2 t_3}.$$

Dos resultados até agora obtidos, decorre o:

Teorema 5.14 *Seja M^n , $n \geq 3$, uma hipersuperfície conexa, regrada e de Weingarten em $\mathbb{S}^{n+1}$. Então*

1. *ou M^n tem curvatura seccional constante igual a um;*
2. *ou M^n é um subconjunto aberto de um fibrado normal unitário sobre uma superfície regrada mínima em $\mathbb{S}^3$, ou sobre um produto de dois círculos em $\mathbb{S}^3$.*

Demonstração:

Suponha que existe $p \in M$ tal que $S(p) \neq 1$ e considere o aberto não vazio $\bar{M} = \{q \in M : S(q) \neq 1\}$. Seja W uma componente conexa de $\bar{M}$.

Temos pela Observação (5.4) que a curvatura seccional de M em pontos de $\bar{M}$ não é igual a 1, donde segue-se pela Observação (5.5) que W é um aberto de M com a propriedade que $\nu = n - 2$ e portanto pelo Corolário (5.3) temos bem definido

uma imersão $g : V^2 \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ e uma aplicação $\psi : \Lambda^1 \longrightarrow W \subset \mathbb{S}^{n+1}$, que é a parametrização de Gauss de W .

Pelo Lema (5.9), temos que o primeiro espaço normal da imersão g , N_1 , em cada ponto da imagem da aplicação de Gauss tem dimensão constante igual a 1.

Por cálculos feitos na Proposição (5.10), segue-se que existe uma subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{S}^{n+1}$ tal que $g(V^2) \subset \mathbb{S}^3$ é uma superfície regrada de Weingarten que satisfaz a relação $4H^2 + a^2(K-1) = 0$. Segue-se ainda pela Proposição (5.11) que g determina uma imersão mínima em $\mathbb{S}^3$, ou $K = 0$ e $H = \frac{1}{2}a$.

Se g determina uma imersão mínima em $\mathbb{S}^3$, temos por (5.22) que W verifica a primeira parte de (2), se g está contida no produto de dois círculos, então segue-se por (5.26) que W verifica a segunda parte de (2).

Vamos mostrar que se $\overline{M} \neq \emptyset$ então $\overline{M} = M$. Suponhamos que $\overline{M} \subset M$ não seja fechado e tomemos $q \in M$ tal que $q \in \partial\overline{M}$ e $q \notin \overline{M}$, isto é, $S(q) = 1$. Seja W a componente conexa de $\overline{M}$ tal que $q \in \partial W$. Então existe uma seqüência, $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, de pontos pertencentes a W convergindo para q . Mas segue-se por (5.23), (5.27) e do fato que $\sum_{j=3}^{n+1} \varphi_j^2 = 1$, que a curvatura escalar em W é limitada por um valor diferente de 1, o que gera uma contradição.

Logo $\overline{M}$ é fechado e portanto segue-se o desejado. ■

5.3 Resultados parciais obtidos sobre a classificação das hipersuperfícies regradas e de Weingarten em $\mathbb{H}^{n+1}$

Consideraremos, como antes, $M^n \subset \mathbb{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície conexa orientada com índice de nulidade relativa constante, $\nu = n-2$, ou seja, existe uma imersão isométrica $g : V^2 \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ bem definida e M^n pode ser parametrizada como em (5.4). Tomemos ainda, $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$, $n+1$ campos ortonormais localmente definidos em V^2 , tais que $e_1(y)$ e $e_2(y)$ são tangentes a imersão g em y e $e_3(y), e_4(y), \dots, e_{n+1}(y)$ geram o espaço normal a imersão g em $\mathbb{S}_1^{n+1}$.

Proposição 5.15 *Seja $M^n \subset \mathbb{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície regrada conexa orientada com $\nu = n-2$. Então a imersão g é uma superfície regrada tipo espaço em $\mathbb{S}_1^{n+1}$.*

Demonstração:

Por hipótese que podemos parametrizar M^n localmente por

$$X(s, t_1, \dots, t_{n-1}) = \varphi_0(t_1, \dots, t_{n-1})\bar{e}_0(s) + \varphi_1(t_1, \dots, t_{n-1})\bar{e}_1(s) + \sum_{i=2}^{n-1} \varphi_i(t_1, \dots, t_{n-1})\bar{e}_i(s), \quad (5.28)$$

onde $\bar{e}_j$, $2 \leq j \leq n-1$, geram a nulidade relativa e $\bar{e}_j$, $1 \leq j \leq n-1$, geram o espaço tangente à folha que regra a hipersuperfície. Temos que a aplicação de Gauss hiperbólica, η , é paralela ao longo das folhas da nulidade relativa.

Denotando $\eta = \frac{\bar{\eta}}{|\bar{\eta}|}$, onde $\bar{\eta} = X_s \wedge X_{t_1} \wedge \dots \wedge X_{t_{n-1}} \wedge X$, é fácil verificar novamente que

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= X_s \wedge X_{t_1} \wedge \dots \wedge X_{t_{n-1}} \wedge X \\ &= \sum_j C_j X_s \wedge \bar{e}_0 \wedge \bar{e}_1 \wedge \dots \wedge \bar{e}_{n-1}, \end{aligned}$$

onde cada C_j depende apenas dos φ_j 's, isto é, apenas dos t_j 's. Temos então, que fixado $s = s_0$, a imagem pela aplicação de Gauss hiperbólica em $\mathbb{S}_1^{n+1}$, da folha que regra a hipersuperfície por s_0 , é ortogonal ao n -plano, Π , gerado por $\bar{e}_j$, $0 \leq j \leq n-1$, portanto está contida em um 2-plano, $\mathcal{P}$.

Como $\bar{e}_0(s_0)$ é um vetor tipo tempo, temos que $\langle, \rangle_{\Pi}$ é não-degenerada de índice 1, portanto $\langle, \rangle_{\mathcal{P}}$ é positiva-definida.

Logo fixado $s = s_0$, a imagem da folha pela aplicação de Gauss hiperbólica, está contida em uma geodésica de tipo espaço, $\mathcal{P} \cap \mathbb{S}_1^{n+1}$. Como g parametriza a aplicação de Gauss, temos que g é a parametrização de uma superfície regrada tipo espaço em $\mathbb{S}_1^{n+1}$. ■

Segue-se pela proposição anterior, que os $n+1$ campos ortonormais, localmente definidos em V^2 , podem ser tomados de forma que $e_1(y)$ seja tangente à folha da imersão g em y , isto é, $\theta(e_1, e_1) = 0$ onde θ é a segunda forma fundamental da imersão g . Com relação a esta base temos que

$$B_{e_j}(y) = B_j = \begin{pmatrix} 0 & \langle \theta(e_1, e_2), e_j \rangle \\ \langle \theta(e_1, e_2), e_j \rangle & \langle \theta(e_2, e_2), e_j \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_j \\ \beta_j & \lambda_j \end{pmatrix}, \quad (5.29)$$

onde $3 \leq j \leq (n+1)$.

Analogamente ao caso esférico, tomando-se $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ uma base ortonormal para o espaço tangente a M^n no ponto (y, w) , tal que Y_j , $1 \leq j \leq n-2$ geram a nulidade relativa de M^n em (y, w) , segue-se por (5.5) que a curvatura média, H , e a curvatura escalar, S , de M^n em (y, w) são dados por:

$$H(y, w) = \frac{1}{n} \text{tr} A = \frac{1}{n} \text{tr} B_w^{-1}(y) = \frac{1}{n} \frac{\text{tr} B_w(y)}{\det B_w(y)}, \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned}
S(y, w) &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j=1, i \neq j}^n \langle R(Y_i, Y_j) Y_i, Y_j \rangle \\
&= -1 + \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j=1}^n (\langle \alpha(Y_i, Y_i), \alpha(Y_j, Y_j) \rangle + \\
&\quad - \langle \alpha(Y_i, Y_j), \alpha(Y_i, Y_j) \rangle) \\
&= -1 + \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j=n-1}^n (\langle \alpha(Y_i, Y_i), \alpha(Y_j, Y_j) \rangle + \\
&\quad - \langle \alpha(Y_i, Y_j), \alpha(Y_i, Y_j) \rangle) \\
&= -1 + \frac{2}{n(n-1)} (\det B_w^{-1}(y)) \\
&= -1 + \frac{2}{n(n-1)} \left(\frac{1}{\det B_w(y)} \right).
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Observação 5.16 Analogamente ao caso esférico, sejam $M^n \subset \mathbb{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície regrada de Weingarten com índice de nulidade relativa constante $\nu = n - 2$ e $(y, w) \sim (y_1, y_2, l_3, l_4, \dots, l_{n+1})$ uma parametrização local de M^n onde y_1 e y_2 são as coordenadas de y e $w = \sum_{j=3}^{n+1} \varepsilon_j l_j e_j$ é um campo normal unitário à imersão g , onde $\varepsilon_j = \langle e_j, e_j \rangle$. Note que $l_j = l_j(y, w)$ tal que $\sum_{j=3, k \neq j}^{n+1} l_j^2 - l_k^2 = -1$ e $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$, $n + 1$ campos ortonormais tomados como anteriormente. Usando-se a notação dada em (5.29), mostra-se que

$$d \left(\sum_{j=3}^{n+1} l_j \lambda_j \right) \wedge d \left(\sum_{j=3}^{n+1} l_j \beta_j \right) = 0. \tag{5.32}$$

Temos que o primeiro espaço normal da imersão g em y é gerado por $\theta(e_1, e_2)$ e $\theta(e_2, e_2)$, isto é, $N_1^g(y) = \text{span}\{\theta(e_1, e_2), \theta(e_2, e_2)\}$. Segue-se então que $\dim N_1^g \leq 2$. Observe que a $\dim N_1^g(y) \neq 0$, para todo y , pois caso contrário, g determinaria uma imersão totalmente geodésica em y , ou seja, $B_j = 0$, $3 \leq j \leq n + 1$. Logo, neste caso, B_v seria singular na direção de qualquer $v = \sum_{j=3}^{n+1} \varepsilon_j l_j e_j$ e por (5.5) teríamos que ψ não determina uma imersão em y , o que geraria uma contradição.

Vejamos o que ocorre quando supomos que $\dim N_1^g = 1$.

Proposição 5.17 *Seja $M^n \subset \mathbb{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície conexa regrada e de Weingarten com $\nu = n - 2$. Suponha que a dimensão do primeiro espaço normal da imersão g é constante igual a 1. Então existe uma subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{J}^3 \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$ tal que $g(L^2) \subset \mathbb{J}^3$ é uma superfície regrada tipo espaço e de Weingarten não desenvolvível e satisfaz $4\mathcal{H} + a^2(K - 1) = 0$, onde a é uma constante real, K é a curvatura Gaussiana da superfície e $\mathcal{H} = \langle \vec{H}, \vec{H} \rangle$, onde $\vec{H}$ é o vetor curvatura média da superfície.*

Demonstração:

Usando-se a proposição (5.15), segue-se que g determina uma superfície regrada tipo espaço em $\mathbb{S}_1^{n+1}$. Tomemos, como antes, e_1, e_2 campos ortonormais tangentes à imersão g , isto é, $N_1^g = \text{span}\{\theta(e_1, e_2), \theta(e_2, e_2)\}$. Por hipótese temos que $\dim N_1^g = 1$, suponhamos então que e_3 gera N_1^g .

Como o espaço normal da imersão g em todo ponto é um espaço de Lorentz, segue-se que o vetor $e_3(y)$ pode ser tipo luz, tipo tempo ou tipo espaço. Observamos, no entanto, que se $e_3(y)$ for tipo luz, a matriz da segunda forma fundamental da imersão g em y na direção $e_3(y)$ é uma matriz nula e portanto ψ , definida em (5.4), não determina uma imersão em y . Logo e_3 é tipo tempo ou tipo espaço, donde segue-se que N_1^g é um subespaço tipo tempo ou tipo espaço, respectivamente. Observe que se e_3 for tipo tempo em um ponto, então ele permanece tipo tempo em uma vizinhança deste ponto. O mesmo ocorre se e_3 for tipo espaço. Logo, o tipo causal do subespaço N_1^g não muda na vizinhança de um ponto.

Queremos mostrar que N_1^g é paralelo, pois pelo Corolário (1.27) teremos que a imersão g reduz codimensão como desejado. Analogamente à Proposição (5.10), basta mostrar que $(N_1^g)^\perp$ é paralelo. De fato, como $Tg(V^2)^\perp = (N_1^g) \oplus (N_1^g)^\perp$ se $(N_1^g)^\perp$ é paralelo então denotando $\eta = \sum_{k=4}^n \varepsilon_k t_k e_k$ segue-se que

$$\begin{aligned} \langle \eta, e_3 \rangle = 0 &\Rightarrow \langle \eta, \nabla_{e_j}^\perp e_3 \rangle = 0, \quad j = 1, 2 \\ &\Rightarrow \nabla_{e_j}^\perp e_3 \in N_1^g \\ &\Rightarrow N_1^g \text{ é paralelo,} \end{aligned}$$

pois caso contrário, como η é qualquer, $(N_1^g)^\perp$ seria degenerado. Mostremos então que $(N_1^g)^\perp$ é paralelo.

Como $\mathbb{S}_1^{n+1}$ é um espaço de curvatura constante, temos por (1.2) que a equação de Codazzi para a imersão g é dada por

$$(\nabla_{e_1} B)(e_2, \eta) = (\nabla_{e_2} B)(e_1, \eta),$$

onde

$$(\nabla_{e_i} B)(e_j, \eta) = \nabla_{e_i} B_\eta e_j - B_\eta \nabla_{e_i} e_j - B_{\nabla_{e_i}^\perp \eta} e_j.$$

Após cálculos análogos aos feitos na Proposição (5.10), mostra-se que

$$\langle \nabla_{e_1}^\perp \eta, e_3 \rangle = \langle \nabla_{e_2}^\perp \eta, e_3 \rangle = 0,$$

e portanto $(N_1^g)^\perp$ é paralelo. Logo existe uma subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{J}^3 \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$ tal que $g(L^2) \subset \mathbb{J}^3$, onde $\mathbb{J}^3$ é isométrico a $\mathbb{S}_1^3$, se e_3 for tipo tempo, ou é isométrico a $\mathbb{S}^3$, se e_3 for tipo espaço.

Como M^n é de Weingarten, segue-se por (5.32) que

$$d(l\lambda) \wedge d(l\beta) = 0.$$

Aplicando-se este produto exterior ao par $(e_j, \frac{\partial}{\partial l})$, $j = 1, 2$, temos que

$$l(\beta d\lambda(e_j) - \lambda d\beta(e_j)) = 0 \quad \forall l \in \mathbb{R}.$$

Portanto

$$\beta d\lambda - \lambda d\beta = 0,$$

donde segue-se que existe uma constante real, a , tal que

$$\lambda = a \beta. \quad (5.33)$$

Observe que $\beta \neq 0$, pois caso contrário B_3 seria uma matriz singular.

Temos então que as curvaturas Gaussiana e média da imersão g verificam, respectivamente,

$$K = 1 - \varepsilon \beta^2 \quad \mathcal{H} = \frac{\varepsilon}{4} \lambda^2,$$

onde $\varepsilon = -1$, se e_3 for um vetor tipo tempo, ou $\varepsilon = 1$, se e_3 for um vetor tipo espaço. Segue-se então de (5.33) que a imersão g satisfaz a relação

$$4\mathcal{H} + a^2(K - 1) = 0$$

■

Proposição 5.18 *Seja $g : V^2 \longrightarrow \mathbb{S}_1^3 \subset \mathbb{L}^4$ uma superfície regrada tipo espaço não desenvolvível em $\mathbb{S}_1^3$ tal que $4\mathcal{H} + a^2(K - 1) = 0$. Então $\mathcal{H} = 0$ ou $\mathcal{H} = \frac{-a^2}{4} \neq 0$ e $K = 2$.*

Demonstração:

Se a constante a for nula, então $\mathcal{H} = 0$. Caso contrário, mostraremos que $\mathcal{H} = \frac{-a^2}{4}$ e $K = 2$.

Como $g(V^2) \subset \mathbb{S}_1^3$ é uma superfície regrada tipo espaço, podemos parametrizá-la localmente como em (2.13), isto é, por

$$X(s, t) = e_0(s) \cos t + e_1(s) \sin t,$$

onde e_0 e e_1 são vetores em $\mathbb{L}^4$ tais que

$$|e_0| = |e_1| = 1, \quad \langle e_0, e_1 \rangle = 0, \quad \langle \dot{e}_0, \dot{e}_1 \rangle = 0, \quad \langle \dot{e}_1, \dot{e}_1 \rangle = 1.$$

Segue-se ainda por (2.18) que as curvaturas Gaussiana e média da superfície são dadas por

$$K = 1 + \frac{Q^2}{P^2}, \quad \mathcal{H} = -\frac{(h - 2Q \langle \dot{e}_0, e_1 \rangle)^2}{4P^3}. \quad (5.34)$$

Por hipótese, temos que a superfície satisfaz a relação $4\mathcal{H} + a^2(K - 1) = 0$, ou seja,

$$\frac{(h - 2Q \langle \dot{e}_0, e_1 \rangle)^2}{P^3} = \frac{a^2 Q^2}{P^2}, \quad \forall s, t$$

donde, sem perda de generalidade, segue-se que

$$h - 2Q \langle \dot{e}_0, e_1 \rangle - aQP^{\frac{1}{2}} = 0, \quad \forall s, t. \quad (5.35)$$

Repetindo-se o raciocínio utilizado na Proposição (5.11), mostra-se que $A(s) = B(s)$, $\forall s$, onde A e B estão definidos em (2.17). Portanto por (2.17) e (2.18) temos que $K = 2$ e $\mathcal{H} = \frac{-a^2}{4}$, como queríamos demonstrar. ■

Proposição 5.19 *Seja $M^n \subset \mathbb{H}_1^{n+1}$ uma hipersuperfície regrada conexa orientada de Weingarten com $\nu = n - 2$. Se a imagem da aplicação de Gauss $g(V^2)$ é uma superfície mínima em $\mathbb{S}_1^3$ então M^n é uma hipersuperfície mínima em $\mathbb{H}^{n+1}$.*

Demonstração:

Usando-se (5.5) temos que a demonstração é imediata. De fato, como por hipótese $g(V^2) \subset \mathbb{S}_1^3 \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$ é uma superfície regrada tipo espaço podemos escolher, como antes, $n + 1$ campos ortonormais localmente definidos em V^2 com a característica adicional de que e_3 é um campo tangente a $\mathbb{S}_1^3$, isto é, em cada ponto determina um vetor tipo tempo. Nesta base, temos que a matriz da segunda forma fundamental da imersão g em y é dada por

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta & \lambda \end{pmatrix}, \quad B_j = 0, \quad 4 \leq j \leq (n + 1).$$

Observe, no entanto, que $\lambda \equiv 0$, pois por hipótese segue-se ainda que $g(V^2)$ é uma superfície mínima.

Logo usando-se (5.5) temos que o traço da matriz da segunda forma fundamental da imersão ψ é zero, e portanto M^n é uma hipersuperfície mínima em $\mathbb{H}^{n+1}$.

Proposição 5.20 *Seja $M^n \subset \mathbb{H}_1^{n+1}$ uma hipersuperfície regradada conexa orientada de Weingarten com $\nu = n - 2$. Se $g(V^2)$ determina uma superfície em $\mathbb{S}_1^3$ tal que $K = 2$ e $\mathcal{H} = \frac{-a^2}{4} \neq 0$, então M^n possui curvatura média e escalar constante em relação a dois de seus parâmetros.*

Demonstração:

Analogamente à proposição anterior, podemos tomar $n + 1$ campos ortonormais, tais que a matriz da segunda forma fundamental da imersão g em y é dada por

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta & \lambda \end{pmatrix}, \quad B_j = 0, \quad 4 \leq j \leq (n + 1).$$

onde e_3 é um campo tangente a $\mathbb{S}_1^3$.

Usando-se o fato que $K = 2$ e $\mathcal{H} = \frac{-a^2}{4}$, podemos supor sem perda de generalidade, que $\beta = -1$ e $\lambda = -a$. Então segue-se por (5.4) que M^n pode ser parametrizada localmente por

$$X(t_1, t_2, s_1, \dots, s_{n-2}) = \sum_{j=3}^{n+1} \varphi_j(s_1, \dots, s_{n-2}) e_j(t_1, t_2),$$

onde $w = \sum_{j=3}^{n+1} \varphi_j e_j$ e $-\varphi_3^2 + \sum_{j=4}^{n+1} \varphi_j^2 = -1$. Além disso, temos que a matriz da segunda forma fundamental da imersão X no ponto (y, w) restrito ao complemento ortogonal da nulidade relativa é dada por $B_w^{-1}(y)$, isto é,

$$A_g = \begin{pmatrix} 0 & -\varphi_3 \\ -\varphi_3 & -a\varphi_3 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Temos então por (5.30) e (5.31) que as curvaturas média e escalar da hipersuperfície são dadas, respectivamente, por

$$H = \frac{1}{n} \frac{a}{\varphi_3}, \quad S = -1 - \frac{2}{n(n-1)} \frac{1}{\varphi_3^2}.$$

Observação 5.21 Ao contrário do caso esférico, não conseguimos controlar o comportamento do primeiro espaço normal da imersão g , $N_1^g = \text{span}\{\theta(e_1, e_2), \theta(e_2, e_2)\}$, quando supomos que sua dimensão é constante igual a 2. Temos que o subespaço N_1^g pode ser positivo definido, não degenerado de índice 1 e degenerado. Mostra-se que o primeiro caso não pode ocorrer, mas pouco se pode afirmar sobre os outros dois casos.

Referências Bibliográficas

- [BDJ] Barbosa, J.L.M., Dajczer, M., Jorge, L.P., *Minimal Ruled Submanifolds in Spaces of Constant Curvature*, Indiana University Mathematics Journal, vol. 33, n° 4 (1984).
- [BD] Barbosa, J.L.M., Delgado, J.A., *Ruled Submanifolds of Spaces Forms With Mean Curvature of Nonzero Constant Length*, Amer. J. Math., 106 (1984) n° 4, 763-780.
- [B] Barrientos, J.O., *Superfícies helicoidais com curvatura constante no espaço de formas tridimensionais*, Tese de Doutorado, PUC, Rio de Janeiro, 1995.
- [Ba] Barros, M., *General Helices and a Theorem of Lancret*. Proc. of the Am. Math. Society 125, 1503-1509 (1997).
- [Be] Beltrami, E., *Risoluzione di un Problema relativo alla teoria Delle Superficie Gobbe*, Ann. Mat. Pura Appl. 7, 139-150 (1865).
- [BK] Blair, D.E., Koufogiorgos, Th., *Ruled Surfaces with Vanishing Second Gaussian Curvature*, Mh. Math. 113, 177-181 (1992).
- [BL] Brito, F.G.B., Leite, M.L., *A remark on rotational hypersurfaces of S^n* , Bull. Soc. Math. Belg., Ser. B, 42 (1990), 303-318.
- [D] Dajczer, M., *Submanifolds and isometric immersions. Based on the notes prepared by Mauricio Antonucci, Gilvan Oliveira, Paulo Lima-Filho and Rui Tojeiro*. Mathematics Lecture Series, 13. Publish or Perish, Inc., Houston, TX, 1990.
- [DG] Dajczer, M., Gromoll, D., *Gauss parametrizations and rigidity aspects of submanifolds*. J. Differential Geometry 22 (1985), 1-12.
- [DT] Dajczer, M., Tenenblat, K., *Rigidity for complete Weingarten hypersurfaces*. Trans. Amer. Math. Soc. 312 (1989), n° 1, 129-140.

- [Di] Dini, U., *Sulle Superficie Gobbe nelle quali Uno Dei Due Raggi di Curvatura Principale e una funzione dell' altro*. Ann. Mat. Pura Appl. 7, 205-210 (1865).
- [E] Erbacher, J., *Reduction of Codimension of Isometric Immersions*. J. Diff. Geometry. (1971), 333-340.
- [F] Ferus, D., *On the completeness of nullity foliations*. Mich. Math. J. 18 (1971), 61-64.
- [K] Kuhnel, W., *Ruled W-surfaces*, Arch. Math., vol 62, 475-480 (1994).
- [LS1] Langer, J; Singer, D. *The total squared curvature of closed curves*. J. Differential Geom. 20 (1984), no. 1, 1-22.
- [LS2] Langer, J; Singer, D., *Knotted elastic curves in R^3* . J. London Math. Soc. (2) 30 (1984), no. 3, 512-520.
- [L] Lawson, B., *Complete minimal surfaces in S^3* . Ann. of Math. 92 (1970), 335-374.
- [O] O'Neill., *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. Academic Press, New York, 1983.
- [P] Pinkall, U., *Hopf tori in S^3* Invent. Math. 81,379-386 (1985).
- [R] Ripoll, J., *Superfícies invariantes de curvatura média constante.*, Tese de Doutorado, IMPA, Rio de Janeiro, 1986.
- [S] Spivak, M., *Comprehensive introduction to differential geometry*. vol 4.
- [St] Struik, D.J., *Lectures on classical Differential Geometry*. Addison-Wesley Press, Inc., Cambridge, Mass., 1950.