**Operadores em subespaços de
Espaços de Banach
Hereditariamente Indecomponíveis**

Robson Rodrigues da Silva

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Análise**

Orientador: **Prof. Dr. Elói Medina Galego**

São Paulo - Outubro - 2004

Operadores em subespaços de Espaços de Banach Hereditariamente Indecomponíveis

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente
corrigida e defendida por
Robson Rodrigues da Silva
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, outubro de 2004

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Elói Medina Galego (Orientador) - IME - USP
- Prof. Dr. Chaim Samuel Hönig - IME - USP
- Prof. Dr. Valentin Ferenczi - PARIS VI

*" A matemática não é uma caminhada cuidadosa através de uma estrada
bem conhecida, é uma jornada por uma terra selvagem e estranha,
onde os exploradores freqüentemente se perdem.
A exatidão deve ser um sinal aos historiadores de que os mapas
já foram feitos e os exploradores se foram para outras terras."*

W.S. Anglin

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Elói Medina Galego, não só pela sua paciente orientação, como também pelo incentivo e força nos momentos em que mais precisei.
- A minha esposa Edna e minha filha Camila pela compreensão, paciência e amor durante todos os momentos em que estava realizando este trabalho.
- Aos meus pais.
- Aos meus irmãos pelas horas dispensadas aos meus estudos.
- Ao Prof. Valentin Ferenczi pelas dúvidas esclarecidas por vários e-mails.
- A Prof. Iracema Martin Bund por ter me colocado no caminho certo e no momento certo, meus profundos e sinceros agradecimentos.
- A todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.
- Ao Senhor, por ter me dado paz e saúde para trilhar essa caminhada.

RESUMO

O objetivo desse trabalho é apresentar em detalhes a demonstração de um resultado fundamental sobre "Operadores em subespaços de espaços de Banach hereditariamente indecomponíveis".

Em 1993, W. T. Gowers e B. Maurey mostraram que sendo X um espaço de Banach complexo hereditariamente indecomponível, todo operador de X em X é da forma $\lambda I_X + S$, onde I_X é a identidade, S um operador estritamente singular e λ um número complexo. Nós apresentaremos uma generalização deste resultado, mostrando que para todo subespaço fechado Y de X , todo operador de Y em X é da forma $\lambda I_Y + S$. Esse último resultado foi provado por V. Ferenczi e publicado em Bull. London Math. Soc. 29 (1996) 338 - 344.

ABSTRACT

The purpose of this work is to present in details, a demonstration of a fundamental result about "Operators on subspaces of hereditarily indecomposable Banach spaces".

In 1993, W. T. Gowers e B. Maurey showed that if X is a complex Banach space hereditarily indecomposable, then every operator from X to X is the form $\lambda I_X + S$, where I_X is the identity map, S is strictly singular operator and λ is a complex number. We present a generalization of this result, showing that for every closed subspace Y of X , every operator from Y to X is the form $\lambda I_Y + S$. It was proved by V. Ferenczi in Bull. London Math. Soc. 29 (1996) 338 - 344.

SUMÁRIO

Introdução	1
1. Preliminares.	3
1.1 Notações.	3
1.2 Definições e Resultados	4
1.3 Espaço Quociente.	8
1.4 Espaços de Banach Hereditariamente Indecomponíveis	10
2. O Teorema de Gelfand – Mazur	15
2.1 Álgebras Normadas	15
2.2 O caso complexo do Teorema de Gelfand– Mazur	16
2.3 O caso real do Teorema de Gelfand– Mazur.	18
3. Operadores Estritamente Singulares. Operadores Compactos. Operadores de Fredholm ..	26
3.1 Operadores Estritamente Singulares.	26
3.2 Operadores Compactos.	30
3.3 Operadores de Fredholm.	31
4. Uma Relação em G_X	33
5. Uma Semi-Norma em $L(Y,X)$	41
6. O Espaço Quociente E_Y	48
6.1 O Espaço Quociente E_Y	48
6.2 Um produto para os elementos de E_Y	53
7. O Espaço Quociente “E”	57
7.1 A construção do espaço quociente E	57
7.2 Um produto para os elementos de E.	63
7.3 Uma isometria entre os espaços E e C	70
8. Operadores em Subespaços de Espaços de Banach Hereditariamente Indecomponíveis ...	81
Referências Bibliográficas.	84

INTRODUÇÃO

Foi provado no artigo “The Unconditional Basic Sequence Problem” de W. T. Gowers e B. Maurey [6], que se X é um Espaço de Banach Complexo Hereditariamente Indecomponível (H.I.), isto é, nenhum subespaço fechado de X pode ser decomposto como soma direta topológica de dois subespaços fechados de dimensão infinita, então todo operador em X é da forma $\lambda I + S$, onde λ é um número complexo, I é identidade em X e S um operador estritamente singular.

Em 1996, V. Ferenczi, no artigo “Operators on subspaces of hereditarily indecomposable Banach spaces”, publicado na Bull. London Math. Soc. [3], generalizou esse resultado, provando que se X é um Espaço de Banach Complexo H.I., então para todo subespaço fechado Y de X , com dimensão infinita, todo operador de Y em X é da forma $\lambda I_Y + S$ onde λ é complexo, I_Y é a inclusão de Y em X e S um operador estritamente singular.

O principal objetivo dessa dissertação é estudar em detalhes a demonstração dada por Ferenczi e como consequência das técnicas desenvolvidas por esse matemático, também apresentamos um resultado importante no caso em que X é um espaço de Banach real [4].

Vale ressaltar, que ainda não sabemos se o resultado anterior é verdadeiro quando X é um espaço de Banach real, embora a maior parte da prova é válida para o caso real ou complexo. Mais precisamente, nós mostraremos que se X é um espaço de Banach complexo H.I., então para todo Y subespaço fechado de X , com dimensão infinita, o espaço quociente $L(Y, X)/S(Y, X)$ com uma norma adequada é isométricamente isomorfo a uma Álgebra de Banach E . O teorema principal segue dessa propriedade e do Teorema de Gelfand – Mazur para o caso complexo (Teorema 2.2.3).

A maior parte dessa dissertação é destinada à construção do espaço E e à demonstração de resultados importantes sobre esse espaço.

A seguir descreveremos os assuntos abordados em cada capítulo.

Inicialmente, no Capítulo 1, apresentaremos algumas definições e resultados básicos sobre Espaço Quociente, Bases de Schauder, Seqüências Básicas em Espaços de Banach, Espaços de Banach Hereditariamente Indecomponíveis e outros.

O Capítulo 2 traz a demonstração do Teorema de Gelfand-Mazur para os casos real e complexo.

A seguir, no Capítulo 3, daremos a definição de Operadores Estritamente Singulares, Operadores Compactos, Operadores de Fredholm e demonstraremos alguns resultados importantes sobre esses operadores que serão utilizados nesta dissertação.

No próximo capítulo, definiremos o que é um $I_Y + S$ – isomorfismo e a partir dessa noção demonstraremos um lema que será fundamental para este trabalho.

A apresentação de uma conveniente semi-norma no espaço $L(Y, X)$ e a demonstração de algumas propriedades dessa semi-norma, será feita no Capítulo 5.

O Capítulo 6 apresenta o espaço quociente E_Y e traz a definição de uma isometria linear entre os espaços E_Y e E_Z . Essa isometria irá desempenhar um papel importante na construção do espaço quociente E .

A definição de “família coerente”, a apresentação do espaço quociente E e a demonstração de que esse espaço possui uma estrutura de Álgebra de Banach, será feita no Capítulo 7.

O último capítulo traz a demonstração do principal teorema dessa dissertação, bem como uma nova caracterização para os espaços de Banach complexo hereditariamente indecomponíveis, obtida por Ferenczi.

PRELIMINARES

1.1 Notações

Denotaremos por $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos, $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}_+$ o conjunto dos números reais não negativos, $\mathbb{R}_+^*$ o conjunto dos números reais estritamente positivos, $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e $\mathbb{K}$ os corpos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Sejam Y e X espaços normados. $L(Y, X)$ denotará o espaço de Banach dos operadores lineares e contínuos de Y em X com a norma $\|T\| = \sup \{\|T(y)\| : \|y\| \leq 1\}$. Lembremos que um operador linear T é contínuo, se e somente se, existe $M > 0$ tal que $\|T(y)\| \leq M \cdot \|y\|$, $\forall y \in Y$.

Denotaremos por $\text{Im}T$ a imagem do operador T , isto é, $\text{Im}T = \{T(y) : y \in Y\}$ e por $\text{Ker}(T)$, o kernel desse operador, ou seja, $\text{Ker}(T) = \{y \in Y : T(y) = 0\}$.

Um operador linear $T : Y \rightarrow X$ é um isomorfismo, se e somente se, existirem M e N números reais positivos, tais que $N\|y\| \leq \|T(y)\| \leq M\|y\|$, $\forall y \in Y$. Nesse caso dizemos que Y e X são isomorfos e denotamos $X = Y$. Sendo W um subespaço de Y , denotaremos por $T|_W$ a restrição do operador T ao subespaço W .

Finalmente, sendo X um espaço vetorial normado, denotaremos a dimensão desse espaço por $\dim X$.

O símbolo ■ denota o fim de uma demonstração.

1.2 Definições e Resultados

No que se segue estaremos apresentando algumas definições e resultados básicos envolvendo Espaços de Banach.

Definição 1.2.1 *Seja X um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, a aplicação $p : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma semi-norma sobre X se :*

- $p(\lambda x) = |\lambda| \cdot p(x) \quad \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K}.$
- $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in X.$

Se $p(x) = 0$ implicar $x = 0$, então p é uma norma em X .

Definição 1.2.2 *Um espaço X é um espaço de Banach se :*

- X é um espaço vetorial.
- X é normado.
- X é completo em relação a essa norma.

Proposição 1.2.3 *Se X é um espaço vetorial normado isomorfo a um espaço de Banach Y , então X é um espaço de Banach.*

Prova. Verificação imediata.

Definição 1.2.4 *Uma seqüência $(x_n)_n$ é uma base de Schauder de um espaço de Banach X se, e somente se, para cada $x \in X$, existe uma única seqüência $(a_n)_n$ de escalares tais que $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$.*

Definição 1.2.5 *Uma seqüência $(x_n)_n$ que é base de Schauder do subespaço fechado gerado por ela, isto é, $[(x_n)_n]$, é chamada seqüência básica.*

Proposição 1.2.6 Se $(x_n)_n$ é base de Schauder de X , então os operadores $P_n : X \rightarrow X$ tais que

$$P_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i x_i \text{ são lineares e contínuos, e mais } \sup_{n \in N} \|P_n\| < \infty.$$

Prova. Sugerimos [10], pág. 1.

Definição 1.2.7 $k = \sup_{n \in N} \|P_n\|$ é chamada constante básica de $(x_n)_n$.

Observação 1.2.8 Nem todo espaço de Banach possui base de Schauder. No entanto neste trabalho iremos trabalhar com seqüências básicas em espaços de Banach.

Proposição 1.2.9 $(x_n)_n$ é base de Schauder de um espaço de Banach X , se e somente se,

- $x_n \neq 0 \quad \forall n \in N$;
- $\exists M \in R_+^*$ tal que $\left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \leq M \left\| \sum_{i=1}^{n+p} a_i x_i \right\|, \quad \forall n, p \in N$;
- $[(x_n)_n] = X$.

Prova. Sugerimos [10], pág. 2.

Teorema 1.2.10 Fixado $k > 1$, todo espaço de Banach de dimensão infinita possui uma seqüência básica com constante k .

Prova. Sugerimos [10], pág. 4.

Definição 1.2.11 Duas bases de Schauder $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ de espaços de Banach X e Y , respectivamente, são ditas equivalentes quando $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge, se e somente se, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ converge.

Proposição 1.2.12 Sejam $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ bases de Schauder dos espaços de Banach X e Y , respectivamente, então são equivalentes :

a) $(x_n)_n$ é equivalente a $(y_n)_n$.

b) Existe um isomorfismo $T : X \rightarrow Y$ tal que $T(x_n) = y_n$, $\forall n \in N$, onde para cada $x \in X$,

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i, \text{ temos } T(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i.$$

Prova. Sugerimos [10], pág. 5.

Proposição 1.2.13 *Seja $(x_n)_n$ uma seqüência básica normalizada de um espaço de Banach X , com constante básica k , e seja $(y_n)_n$ uma seqüência de vetores em X , tal que:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| < \frac{1}{2k}.$$

Então $(y_n)_n$ é uma seqüência básica de X , equivalente a $(x_n)_n$.

Prova. Sugerimos [10], pág. 5.

Definição 1.2.14 *Sejam X um espaço de Banach, $(x_n)_n$ uma seqüência básica em X , $(p_n)_n$ uma seqüência estritamente crescente de inteiros positivos e $(a_n)_n$ uma seqüência de escalares. Uma seqüência $(u_j)_j$ dada por $u_j = \sum_{n=p_j+1}^{p_{j+1}} a_n x_n$, com $u_j \neq 0$, $\forall j \in N$, é chamada de base de bloco de $(x_n)_n$.*

Proposição 1.2.15 *Uma base de blocos $(u_j)_j$ de uma seqüência básica $(x_n)_n$ de um espaço de Banach X , é uma seqüência básica, cuja constante básica é menor ou igual a constante básica de $(x_n)_n$.*

Prova. Sugerimos [10], pág. 6.

Proposição 1.2.16 *Seja Y um subespaço de dimensão infinita de um espaço de Banach X , e $(x_n)_n$ base de Schauder de X . Então para todo inteiro positivo p , existe $y \in Y$, com $\|y\| = 1$ e da forma*

$$y = \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n x_n.$$

Prova. Sugerimos [5], pág. 52.

Proposição 1.2.17 *Seja $(x_n)_n$ base de Schauder, com constante k , de um espaço de Banach X , com $M_1 \leq \|x_n\| \leq M_2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, onde M_1 e M_2 são constantes positivas. Então, dado $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ temos: $|a_n| \leq \frac{2k}{M_1} \|x\|$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Prova. Sugerimos [5], pág. 48.

Proposição 1.2.18 *Se X é um espaço de Banach e $(x_n)_n$ base de Schauder de X , então $(\frac{x_n}{\|x_n\|})_n$ é uma base normalizada de X com a mesma constante básica.*

Prova. Segue diretamente da Proposição 1.2.9.

Proposição 1.2.19 *Seja X um espaço vetorial normado. X é um espaço de Banach, se e somente se, toda série normalmente convergente é convergente em X .*

Prova. Sugerimos [11], pág. 67.

Definição 1.2.20 *Um espaço métrico M chama-se localmente compacto, quando todo $x \in M$ possui uma vizinhança compacta.*

Proposição 1.2.21 *Um espaço métrico M é localmente compacto se, e somente se, para cada $x \in M$, existe $r > 0$ tal que a bola fechada de centro em x e raio r é compacta.*

Prova. Sugerimos [9], pág. 235.

Teorema 1.2.22 (Teorema de Riesz) *Um espaço normado é localmente compacto, se e somente se, for de dimensão finita.*

Prova. Sugerimos [7], pág. 114.

Teorema 1.2.23 (Teorema da Aplicação Aberta) *Seja T uma aplicação linear contínua de um espaço de Banach Y sobre um espaço de Banach X . Para todo conjunto aberto $W \subset Y$, $T(W)$ é aberto em X .*

Prova. Sugerimos [7], pág. 245.

Corolário 1.2.24 *Sejam Y e X espaços de Banach e $T \in L(Y, X)$ bijetora. Então T é bicontínua, isto é, T^{-1} é contínua.*

Prova. Sugerimos [7], pág. 245.

1.3 Espaço Quociente

Nesta seção apresentaremos a definição de espaço quociente e alguns resultados que serão utilizados em capítulos posteriores.

Definição 1.3.1 *Seja X um espaço vetorial sobre um corpo IK e Y um subespaço de X . Vamos construir um novo espaço vetorial, chamado Espaço Quociente, o qual denotaremos por X / Y . Primeiramente vamos definir uma relação de equivalência $\sim$ nos elementos de X :*

$$\text{Dados } u, v \in X, u \sim v \Leftrightarrow u - v \in Y.$$

É fácil verificar que $\sim$ é uma relação de equivalência, e portanto provoca uma partição em X .

Dado $x \in X$ denotaremos por $\overline{x}$ sua classe de equivalência, isto é: $\overline{x} = \{y \in X : y \sim x\}$.

Denotando por $X / Y = \{ \overline{x} / x \in X \}$ é fácil ver que X / Y possui estrutura de espaço vetorial, basta definirmos em X / Y as seguintes operações:

- $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y}, \forall \overline{x}, \overline{y} \in X / Y.$
- $\lambda \overline{x} = \overline{\lambda x}, \forall \overline{x} \in X / Y, \forall \lambda \in IK.$

É fácil provar que essas operações estão bem definidas, isto é, independem da escolha dos representantes.

Proposição 1.3.2 *Dado um espaço vetorial normado X e um subespaço vetorial Y de X , a aplicação $||\cdot||$ dada por $\bar{x} \in X/Y \rightarrow ||\bar{x}|| = \inf\{||z|| : z \in \bar{x}\}$, é uma semi-norma em X/Y .*

Prova. Sugerimos [7], pág. 121.

Observação 1.3.3 *A aplicação definida anteriormente é uma norma em X/Y , se e somente se, Y é subespaço fechado de X .*

Prova. Sugerimos [7], pág. 121.

Proposição 1.3.4 *Seja X um espaço de Banach e Y um subespaço vetorial fechado de X . Então o espaço vetorial X/Y com a norma definida anteriormente é completo.*

Prova. Sugerimos [7], pág. 124.

Proposição 1.3.5 *Seja X um espaço vetorial com semi-norma $||\cdot||$, e $Y = \{x \in X : ||x|| = 0\}$, então Y é um subespaço vetorial de X , e sobre X/Y podemos definir a aplicação $||\bar{x}|| = ||x||$ que é uma norma em X/Y .*

Prova. Primeiramente, vamos provar que Y é subespaço vetorial de X . De fato. É imediato que $0 \in Y$. Agora, sendo x e $y \in Y$, $\lambda \in \mathbb{K}$, e lembrando que $||\cdot||$ é uma semi-norma em X temos:

$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y|| = 0 \Rightarrow ||x+y|| = 0 \Rightarrow x+y \in Y.$$

$$||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x|| = 0 \Rightarrow ||\lambda x|| = 0 \Rightarrow \lambda x \in Y.$$

Vamos agora, mostrar que a aplicação $||\cdot|| : X/Y \rightarrow \mathbb{R}^+$ está bem definida.

$$\bar{x} \rightarrow ||\bar{x}|| = ||x||$$

Seja $z \in \bar{x}$, então temos que $z - x = y \in Y$, ou seja, $z = x + y$. Assim:

$$||\bar{x}|| = ||z|| = ||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| = ||x||, \text{ uma vez que } ||y|| = 0.$$

$$\text{Logo } ||z|| \leq ||x||. \quad (1)$$

Por outro lado, podemos escrever $x = z - y$ e assim segue:

$$||x|| = ||z - y|| \leq ||z|| + ||y|| = ||z||, \text{ ou seja, } ||x|| \leq ||z||. \quad (2)$$

De (1) e (2) segue que $||x|| = ||z||$, ou seja, $||\bar{x}|| = ||x||$ independe da escolha do representante, logo está bem definida.

Finalmente, vamos mostrar que a aplicação definida anteriormente é uma norma em X/Y .

Sendo $\bar{x}$ e $\bar{y} \in X/Y$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e lembrando que $||\cdot||$ é uma semi-norma em X , temos:

$$||\bar{x} + \bar{y}|| = ||\overline{x + y}|| = ||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| = ||\bar{x}|| + ||\bar{y}||. \quad (3)$$

$$||\lambda \bar{x}|| = ||\overline{\lambda x}|| = ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x|| = |\lambda| \cdot ||\bar{x}||. \quad (4)$$

$$||\bar{x}|| = 0 \Rightarrow ||x|| = 0 \Rightarrow x \in Y \Rightarrow 0 - x \in Y \Rightarrow 0 \in \bar{x} \Rightarrow \bar{x} = \bar{0}. \quad (5)$$

De (3), (4) e (5) decorre que $||\cdot||$ é uma norma em X/Y . ■

1.4 Espaços de Banach Hereditariamente Indecomponíveis

O objetivo dessa seção é definir espaços de Banach Hereditariamente Indecomponíveis e demonstrar uma proposição que nos fornece uma caracterização geométrica de tais espaços.

Definição 1.4.1 Sendo X e Y espaços de Banach definimos:

$$X \oplus Y = \{ (x, y) : x \in X \text{ e } y \in Y \}.$$

Observação 1.4.2 A aplicação $|| \cdot ||_{\infty} : X \oplus Y \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida abaixo é uma norma em $X \oplus Y$.

$$||(x,y)||_{\infty} = \max\{ ||x||, ||y|| \}$$

Proposição 1.4.3 Denotando por $X \oplus_{\infty} Y$ o espaço $X \oplus Y$ equipado com a norma definida na observação anterior, temos que $X \oplus_{\infty} Y$ é um espaço de Banach.

Prova. Verificação imediata.

Definição 1.4.4 Sejam X um espaço de Banach e Y um subespaço vetorial de X . Dizemos que Y é complementado em X , se existe um subespaço vetorial W de X tal que :

- a) $Y \cap W = \{0\}$.
- b) $\forall x \in X, \exists! y \in Y \text{ e } \exists! w \in W : x = y + w$.
- c) A aplicação linear $P_1 : X \rightarrow Y$ definida por $P_1(x) = y$ é contínua.
- d) A aplicação linear $P_2 : X \rightarrow W$ definida por $P_2(x) = w$ é contínua.

Observação 1.4.5

- Y e W são chamados suplementares topológicos, e escrevemos $X = Y \oplus W$.
- P_1 é chamada projeção de X sobre Y e vale:

$$a) P_1^2 = P_1 \quad b) ||P_1|| \geq 1 \quad c) (I - P_1)^2 = I - P_1.$$

Proposição 1.4.6 Se o subespaço vetorial Y é complementado em um espaço de Banach X , então Y é fechado.

Prova. Verificação Imediata.

Definição 1.4.7 Seja X um espaço de Banach. X é hereditariamente indecomponível (H.I.), se nenhum subespaço fechado de X pode ser decomposto como soma direta topológica de dois subespaços fechados de dimensão infinita.

Observação 1.4.8 (Teorema de Gowers-Maurey): Em 1993, Gowers e Maurey construíram o primeiro espaço de Banach H.I, veja [6].

Definição 1.4.9 Sejam Y e Z subespaços fechados de dimensão infinita,

$$\gamma(Y, Z) = \inf\{ \|z - y\| : \|z\| = \|y\| = 1, y \in Y \text{ e } z \in Z \},$$

é definido como sendo o ângulo entre os subespaços Y e Z .

Lema 1.4.10 Sejam Y e Z subespaços fechados de dimensão infinita de um espaço de Banach X , tal que $Y \cap Z = \{0\}$. Então $Y + Z$ é fechado, se e somente se, $\gamma(Y, Z) > 0$.

Prova. Vamos definir a seguinte aplicação:

$$T : Y \oplus_{\infty} Z \rightarrow Y + Z \text{ dada por } T(y, z) = y - z.$$

(i) É fácil verificar que T está bem definida.

(ii) T é linear. De fato,

$$T((a, b) + \lambda(c, d)) = T(a + \lambda c, b + \lambda d) = a + \lambda c - (b + \lambda d) = (a - b) - \lambda(c - d) = T(a, b) + \lambda T(c, d)$$

$$\forall (a, b), (c, d) \in Y \oplus_{\infty} Z \text{ e } \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

(iii) T é injetora, pois dado $(y, z) \in \ker(T)$ temos:

$$T(y, z) = 0 \Rightarrow y - z = 0 \Rightarrow y = z. \text{ Mas, por hipótese temos que } Y \cap Z = \{0\}, \text{ logo } y = z = 0.$$

Assim temos que $\ker(T) = \{0\}$, o que implica T ser injetora.

(iv) T é sobrejetora. De fato. Seja $\alpha \in Y + Z$, daí temos: $\alpha \in Y + Z \Rightarrow \alpha = y + z \Rightarrow \alpha = y - (-z)$.

$$\text{Assim, considerando o elemento } (y, -z) \in Y \oplus_{\infty} Z \text{ temos } T(y, -z) = y - (-z) = \alpha.$$

(v) T é contínua. De fato, segue da Observação 1.4.2 e de (ii) que:

$$\|T(y, z)\| = \|y - z\| \leq \|y\| + \|z\| \leq \|(y, z)\|_{\infty} + \|(y, z)\|_{\infty} = 2\|(y, z)\|_{\infty}.$$

$$\text{Logo, } \|T(y, z)\| \leq 2\|(y, z)\|_{\infty}, \forall (y, z) \in Y \oplus_{\infty} Z.$$

(vi) T^{-1} é contínua. De fato. Sendo $Y + Z$ subespaço fechado do espaço de Banach X , segue que $Y + Z$ é um espaço de Banach. Assim por um Corolário do Teorema da Aplicação Aberta (Corolário 1.2.24), temos que T^{-1} é contínua.

Assim, $\exists k > 0$ tal que $k \| (y, z) \|_{\infty} \leq \| T(y, z) \| \quad \forall (y, z) \in Y \oplus_{\infty} Z$.

Logo, $k \cdot \max\{ \| y \|, \| z \| \} \leq \| y - z \|$, em particular, tomando $\| y \| = \| z \| = 1$ temos:

$$\| y - z \| \geq k > 0 \Rightarrow \| y - z \| > 0 \quad \forall y \in Y, \forall z \in Z \text{ tal que } \| y \| = \| z \| = 1.$$

Assim, $\inf \{ \| y - z \| : y \in Y, z \in Z \text{ e } \| y \| = \| z \| = 1 \} > 0$.

Reciprocamente, considerando a mesma aplicação T definida anteriormente temos:

(i) T está bem definida	(ii) T é linear	(iii) T é injetora
(iv) T é sobrejetora	(v) T é contínua.	

(vi) Vamos agora, provar a seguinte afirmação: $\gamma(Y, Z) > 0$ implica T^{-1} contínua.

Suponhamos que T não tem inversa contínua, então:

$$\forall n > 0, \exists (y, z) \in Y \oplus_{\infty} Z \text{ tal que } n \| (y, z) \|_{\infty} > \| T(y, z) \|. \quad (*)$$

Assim, para cada $n > 0$, podemos escolher $(y, z) \in Y \oplus_{\infty} Z$ com norma unitária, satisfazendo

(*). Logo fazendo $n \rightarrow 0$, temos que existe uma seqüência $(y_i, z_i) \in Y \oplus_{\infty} Z$, com norma unitária satisfazendo (*). Assim segue que $\| y_i - z_i \| \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow \infty$.

Agora, como $\| (y_i, z_i) \|_{\infty} = 1, \forall i \in \mathbb{N}$, ou podemos escolher $i_j \in \mathbb{N}$ tal que $\| y_{i_j} \| = 1, \forall j$,

ou existe $i_j \in \mathbb{N}$ tal que $\| z_{i_j} \| = 1, \forall j$. Assim, supondo $\| y_{i_j} \| = 1, \forall j$, temos:

$$1 = \| y_{i_j} \| = \| y_{i_j} - z_{i_j} + z_{i_j} \| \leq \| y_{i_j} - z_{i_j} \| + \| z_{i_j} \| \Rightarrow 1 - \| y_{i_j} - z_{i_j} \| \leq \| z_{i_j} \| \leq 1.$$

Agora, fazendo $j \rightarrow \infty$, temos $\| y_{i_j} - z_{i_j} \| \rightarrow 0$ e portanto $\| z_{i_j} \| \rightarrow 1$. (**)

Sendo assim, podemos supor $\| z_{i_j} \| \neq 0, \forall j \in \mathbb{N}$. Daí segue:

$$\left\| y_{ij} - \frac{z_{ij}}{\|z_{ij}\|} \right\| = \left\| y_{ij} - z_{ij} + z_{ij} - \frac{z_{ij}}{\|z_{ij}\|} \right\| \leq \|y_{ij} - z_{ij}\| + \left\| z_{ij} - \frac{z_{ij}}{\|z_{ij}\|} \right\|.$$

Agora, fazendo $j \rightarrow \infty$, por (**) segue que: $\left\| y_{ij} - \frac{z_{ij}}{\|z_{ij}\|} \right\| \rightarrow 0$.

Assim $\gamma(Y, Z) = 0$, o que é um absurdo, pois por hipótese temos $\gamma(Y, Z) > 0$.

Logo T^{-1} é contínua.

Segue das afirmações anteriores que T é um isomorfismo e portanto: $Y \oplus_{\infty} Z = Y + Z$.

Agora, como $Y \oplus_{\infty} Z$ é um Espaço de Banach (ver Proposição 1.4.3), segue que $Y+Z$ também é Banach e sendo $Y+Z$ subespaço do espaço de Banach X , concluímos que $Y+Z$ é fechado. ■

Proposição 1.4.11 (Caracterização Geométrica dos Espaços de Banach H.I.) *Seja X um espaço de Banach. X é H.I., se e somente se, para quaisquer Y e Z subespaços fechados de dimensão infinita de X , e para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $y \in Y$ e $z \in Z$ com $\|y\| = \|z\| = 1$ tal que $\|y - z\| < \varepsilon$.*

Prova. Suponhamos que existam Y e Z , subespaços fechados de dimensão infinita de X e $\varepsilon > 0$, tal que $\forall y \in Y, \forall z \in Z$, unitários, temos $\|y - z\| \geq \varepsilon > 0$. (*)

Daí segue: (i) $Y \cap Z = \{0\}$, pois dado $x \neq 0, x \in Y \cap Z$ temos:

$$x \in Y \cap Z \Rightarrow x \in Y \text{ e } x \in Z \Rightarrow \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{x}{\|x\|} \right\| = 0.$$

Mas por (*) temos: $\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{x}{\|x\|} \right\| \geq \varepsilon \Rightarrow \varepsilon \leq 0$, o que é um absurdo. Logo, $x = 0$.

(ii) Como $\|y - z\| \geq \varepsilon > 0, \forall y \in Y, \forall z \in Z$, unitários, segue que $\gamma(Y, Z) \geq \varepsilon > 0$. Logo pelo lema anterior temos que $Y + Z$ é fechado e assim considerando $W = Y + Z$ temos que W é subespaço fechado de X e pela primeira parte da demonstração do Lema 1.4.10, segue que $W = Y \oplus_{\infty} Z$, o que é um absurdo pois X é H.I.

Reciprocamente, suponhamos que X não seja H.I. Logo existe W subespaço fechado de X , tal que $W = Y \oplus Z$, onde Y e Z são subespaços fechados de W com dimensão infinita. Assim, pelo Lema 1.4.10 temos que $\gamma(Y, Z) > 0$, o que é um absurdo, pois tomando $\varepsilon = \gamma(Y, Z)$, por hipótese teríamos que existem $y \in Y$ e $z \in Z$, unitários tais que $\|y - z\| < \varepsilon$. ■

O TEOREMA DE GELFAND-MAZUR

Este capítulo tem como objetivo principal demonstrar o Teorema de Gelfand-Mazur sobre Álgebras normadas com divisão para o caso real e complexo. Esse teorema irá desempenhar um papel fundamental nessa dissertação.

2.1 Álgebras Normadas

Definição 2.1.1 *Uma álgebra normada sobre um corpo $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial normado A , sobre $\mathbb{K}$, no qual definimos uma operação de multiplicação interna, satisfazendo os seguintes axiomas:*

- a) $(xy)z = x(yz), \forall x, y, z \in A.$
- b) $x(y+z) = xy + xz$ e $(y+z)x = yx + zx, \forall x, y, z \in A.$
- c) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y), \forall x, y, z \in A$ e $\forall \lambda \in \mathbb{K}.$
- d) $||xy|| \leq ||x|| \cdot ||y||, \forall x, y \in A.$

Observações 2.1.2

- a) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, A é chamada álgebra normada real, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, álgebra normada complexa.
- b) Uma álgebra normada é comutativa se $xy = yx \quad \forall x, y \in A.$
- c) Se A é um espaço vetorial completo em relação à norma $||\cdot||$, então dizemos que A é uma Álgebra de Banach.

Definição 2.1.3 *Um elemento e de uma álgebra normada A é chamado unidade de A se, e somente se, $e \neq 0$, $ex = xe = x, \forall x \in A$ e $||e|| = 1.$*

Observações 2.1.4

- a) Nós dizemos que A é uma álgebra normada com unidade se existe em A o elemento unidade.
- b) É possível mostrar que o elemento unidade quando existe é único.
- c) Sendo A uma álgebra normada com unidade, denotaremos o elemento unidade por $1.$

Definição 2.1.5 *Sejam A uma álgebra normada com unidade e $x \in A$. Dizemos que x é invertível se existe $y \in A$ tal que $xy = 1$ e $yx = 1$. O elemento y será chamado inverso de x e o denotaremos por x^{-1} .*

Definição 2.1.5 *Uma álgebra normada com divisão é uma álgebra normada A com unidade tal que todo elemento não nulo é invertível.*

Definição 2.1.6 *Sejam A e B álgebras sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um homomorfismo de A em B é uma aplicação $\phi \in L(A, B)$ tal que:*

$$\phi(xy) = \phi(x) \cdot \phi(y), \quad \forall x, y \in A.$$

Definição 2.1.7 *Sejam A e B álgebras sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um monomorfismo de A em B é um homomorfismo injetivo de A em B .*

2.2 O Caso Complexo do Teorema de Gelfand - Mazur

Definição 2.2.1 *Seja A uma álgebra normada complexa com unidade e $x \in A$. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{C}$ é valor espectral de x se $x - \lambda 1$ não é invertível. Denotaremos por $\sigma(A, x)$ o conjunto de todos os valores espectrais de x e chamaremos $\sigma(A, x)$ de espectro de x .*

Proposição 2.2.2 *Seja A uma Álgebra de Banach complexa com unidade. Então para todo $x \in A$, $\sigma(A, x)$ é um subconjunto não vazio e compacto de $\mathbb{C}$.*

Prova: Sugerimos [2], pág. 23.

Teorema 2.2.3 (Caso Complexo do Teorema de Gelfand-Mazur) *Seja A uma Álgebra de Banach complexa com divisão, então A é isométricamente isomorfo a $\mathbb{C}$.*

Prova. Para cada $x \in A$, temos pela Proposição 2.2.2 que $\sigma(A, x) \neq \emptyset$. Portanto existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $x - \lambda 1$ não é invertível. Mas por hipótese, A é uma álgebra com divisão, assim temos que todo elemento não nulo de A é invertível, logo segue que $x - \lambda 1 = 0$, ou seja, $x = \lambda 1$.

Logo para cada $x \in A$ corresponde um número complexo λ , tal que $x = \lambda 1$. Afirmamos que tal λ é único. De fato, suponhamos que $x = \lambda 1$ e $x = \mu 1$ então temos $(\lambda - \mu).1 = 0$, mas sendo A uma Álgebra, segue que $\lambda - \mu = 0$, ou seja $\lambda = \mu$.

Dessa forma podemos definir a aplicação $\rho : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\rho(x) = \lambda$, $\forall x \in A$.

Vamos agora mostrar que a aplicação ρ é um isomorfismo que preserva a norma.

$$\forall x, y \in A \text{ temos } \rho(x+y) = \lambda \text{ onde } \lambda \in \mathbb{C} \text{ é tal que } x + y = \lambda 1. \quad (1)$$

Mas sendo $\rho(x) = \lambda_1$ e $\rho(y) = \lambda_2$ temos $x = \lambda_1 1$ e $y = \lambda_2 1$, assim segue que:

$$x + y = (\lambda_1 + \lambda_2).1. \quad (2)$$

Agora pela unicidade de λ , por (1) e (2) segue que $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Logo:

$$\rho(x+y) = \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = \rho(x) + \rho(y), \quad \forall x, y \in A.$$

Seja agora $x \in A$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$ (o caso $\alpha = 0$ é imediato), daí temos:

$$\rho(\alpha x) = \lambda \Rightarrow \alpha x = \lambda 1 \Rightarrow x = \alpha^{-1}(\lambda 1) \Rightarrow x = (\alpha^{-1}\lambda)1. \quad (3)$$

$$\rho(x) = \lambda_1 \Rightarrow x = \lambda_1 1. \quad (4)$$

Pela unicidade de λ_1 , por (3) e (4) segue que $\alpha^{-1}\lambda = \lambda_1 \Rightarrow \lambda = \alpha\lambda_1$. Logo:

$$\rho(\alpha x) = \lambda = \alpha\lambda_1 = \alpha\rho(x) \quad \forall x \in A, \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Assim mostramos que:

$$\rho(x+y) = \rho(x) + \rho(y) \quad \forall x, y \in A \text{ e } \rho(\alpha x) = \alpha\rho(x) \quad \forall x \in A, \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Logo ρ é uma aplicação linear.

ρ é injetora, pois dado $x \in A$, temos que $\rho(x) = 0$ implica $x = 0$.

ρ é sobrejetora, pois dado $\lambda \in \mathbb{C}$, basta considerarmos o elemento $\lambda 1 = x \in A$.

Falta agora, mostrarmos que ρ é uma isometria, isto é: $|\rho(x)| = ||x||, \forall x \in A$.

Seja $x \in A$, então existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $x = \lambda 1$. Assim, pela Observação 2.1.3 temos:

$$||x|| = ||\lambda 1|| = |\lambda| \cdot ||1|| = |\lambda| \cdot 1 = |\lambda|.$$

Assim $|\rho(x)| = |\lambda| = ||x||, \forall x \in A$.

Mostramos então que ρ é uma isometria linear de A sobre $\mathbb{C}$ e, portanto um isomorfismo de A sobre $\mathbb{C}$. Logo, A é isométricamente isomorfo a $\mathbb{C}$. ■

2.3 O Caso Real do Teorema de Gelfand – Mazur

Os conceitos e resultados apresentados na seção anterior, somente são válidos para álgebras complexas. É então necessário encontrarmos algum procedimento para encaixar uma álgebra real numa álgebra complexa. Vamos assim definir o que é uma complexificação de uma álgebra real para em seguida demonstrarmos o caso real do Teorema de Gelfand-Mazur.

Definição 2.3.1 *Seja A uma álgebra real. A complexificação $A_{\mathbb{C}}$ de A é o conjunto $A \times A$ para o qual definimos, para todo $a, b, c, d \in A, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, as seguintes operações:*

- a) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$
- b) $(\alpha + \beta i)(a, b) = (\alpha a - \beta b, \alpha b + \beta a).$
- c) $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Observação 2.3.2 É fácil verificar que A_C possui estrutura de álgebra complexa e que a aplicação $a \rightarrow (a, 0)$ é um monomorfismo de A em A_C .

Proposição 2.3.3 Seja A uma álgebra normada real, então temos:

(i) A tem unidade se e somente se A_C tem unidade. Se 1 é a unidade de A , então $(1, 0)$ é a unidade de A_C .

(ii) $a \in A$ é invertível se e somente se $(a, 0) \in A_C$ é invertível, e $(a, 0)^{-1} = (a^{-1}, 0)$.

Prova. Sugerimos [2], pág. 69.

Observação 2.3.4 Sendo A uma álgebra normada sobre $\mathbf{R}$, e 1 a unidade em A , podemos considerar que $\mathbf{R}$ está contido propriamente em A , pois é fácil verificar que a aplicação $\phi: \mathbf{R} \rightarrow A$, definida por $\phi(\alpha) = 1\alpha$ é um monomorfismo de $\mathbf{R}$ em A . Logo podemos escrever, por abuso de linguagem, $\alpha \in A$ ao invés de $1\alpha \in A$.

Definição 2.3.5 Seja A uma álgebra normada real com unidade e $x \in A$. O espectro de x é o conjunto $Sp(A, x)$ de números complexos definido por: $Sp(A, x) = \sigma(A_C, (x, 0))$.

Proposição 2.3.6 Seja A uma álgebra normada real com unidade e $x \in A$. Então:

(i) Existem ξ e $\eta \in \mathbf{R}$, tal que $\xi + i\eta \in Sp(A, x)$.

(ii) Sejam ξ e $\eta \in \mathbf{R}$. Então $\xi + i\eta \in Sp(A, x)$ se, e somente se, $(\xi - x)^2 + \eta^2 \in A$ não é invertível.

Prova. Sugerimos [2], pág. 70.

Definição 2.3.7 Sejam $1, i, j, k$ a base usual de vetores do $\mathbf{R}^4$, isto é, $1 = (1, 0, 0, 0)$, $i = (0, 1, 0, 0)$, $j = (0, 0, 1, 0)$, $k = (0, 0, 0, 1)$. A álgebra dos quatérnios sobre $\mathbf{R}$, denotada por $\mathbf{H}$ é o espaço vetorial $\mathbf{R}^4$ com o produto interno definido sobre os vetores da base da seguinte forma:

$$1^2 = 1, \quad 1i = i1 = i, \quad 1j = j1 = j, \quad 1k = k1 = k,$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

Observação 2.3.8 Estendendo a multiplicação anterior, por linearidade, para as combinações lineares

dos elementos da base e considerando a norma definida por $|x| = \left(\sum_{m=1}^4 x_m^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, onde $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{H}$,

é possível mostrar através de cálculos rotineiros que $\mathbf{H}$ é uma álgebra sobre $\mathbf{R}$, e que $|xy| = |x| |y|$ $\forall x, y \in \mathbf{H}$, e portanto que $\mathbf{H}$ é uma álgebra normada sobre $\mathbf{R}$.

Observação 2.3.9 O elemento 1 é a unidade de $\mathbf{H}$, pois dado $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{H}$ temos:

$1x = (1, 0, 0, 0) (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 + 0i + 0j + 0k)(x_1 + x_2i + x_3j + x_4k) = x_1 + x_2i + x_3j + x_4k = x$ e de forma análoga podemos mostrar que $x1 = x$.

Observação 2.3.10 Dado $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{H}$, consideremos o elemento $x^* = (x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$, então:

$xx^* = (x_1, x_2, x_3, x_4) (x_1, -x_2, -x_3, -x_4) = (x_1 + x_2i + x_3j + x_4k)(x_1 - x_2i - x_3j - x_4k) = |x|^2 + 0i + 0j + 0k = |x|^2$. Assim, sendo $x \neq 0$, podemos considerar o elemento $x^{-1} = \frac{1}{|x|^2} x^*$ tal que $xx^{-1} = x \left(\frac{1}{|x|^2} x^* \right) =$

$\frac{1}{|x|^2} (xx^*) = 1$. De forma análoga podemos mostrar que $x^{-1}x = 1$. Logo $\mathbf{H}$ é uma álgebra normada sobre $\mathbf{R}$ com divisão.

Vamos agora provar que toda álgebra normada real, com divisão é isomorfa a $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{H}$.

Definição 2.3.11 Seja A uma álgebra normada sobre $\mathbf{R}$, com divisão, definimos então os seguintes subconjuntos de A , $Y = \{x \in A : -x^2 \in \mathbf{R}_+\}$ e $Y_1 = \{x \in A : -x^2 = 1\}$.

Lema 2.3.12 Seja A uma álgebra normada sobre $\mathbf{R}$, com divisão. Então temos:

- (i) $\mathbf{R} \cap Y = \{0\}$ e $\forall a \in A, \exists! y \in Y$ e $\exists! \xi \in \mathbf{R}$, tal que $a = \xi + y$;
- (ii) Y é subespaço vetorial de A e portanto $A = \mathbf{R} \oplus Y$.
- (iii) Se $Y_1 \neq \emptyset$, então $Y = \mathbf{R}Y_1$, isto é, $Y = \{x \in A : x = \alpha y \text{ onde } \alpha \in \mathbf{R} \text{ e } y \in Y_1\}$.

Prova. (i) Seja $a \in A$. Pela Proposição 2.3.6 (i) existem $\xi, \eta \in \mathbf{R}$ tais que $\xi + i\eta \in \text{Sp}(A, a)$ e pela Proposição 2.3.6 (ii) temos ainda que $(\xi - a)^2 + \eta^2$ não é invertível em A . Mas, sendo A uma álgebra com divisão, segue que $(\xi - a)^2 + \eta^2 = 0$, e portanto $-(\xi - a)^2 = \eta^2 \in \mathbf{R}_+$, logo $a - \xi \in Y$.

Assim provamos que $a - \xi = y \in Y$, ou seja, dado $a \in A$, temos $a = \xi + y$ onde $\xi \in \mathbf{R}$ e $y \in Y$.

Vamos agora mostrar que se $a = \xi' + y'$ com $\xi' \in \mathbf{R}$ e $y' \in Y$, então $\xi' = \xi$ e $y' = y$. De fato.

$$a = \xi' + y' \Rightarrow y' = a - \xi', \text{ mas como } a = \xi + y, \text{ segue que } y' = (\xi - \xi') + y, \quad (1)$$

e por tanto $(y')^2 = (\xi - \xi')^2 + 2(\xi - \xi')y + y^2$.

Agora, como $y' \in Y$, temos que $-(y')^2 \in \mathbf{R}_+$, ou seja, $-(\xi - \xi')^2 - 2(\xi - \xi')y - y^2 \in \mathbf{R}_+$. Mas, como $(\xi - \xi')^2 \in \mathbf{R}$ e $-y^2 \in \mathbf{R}_+$, segue que $(\xi - \xi')y \in \mathbf{R}$, portanto $\xi - \xi' = 0$ ou $y \in \mathbf{R}$. Se $y \in \mathbf{R}$, então $y^2 \in \mathbf{R}_+ \cap \mathbf{R}$, ou seja, $y^2 = 0$ e, portanto $y = 0$. Logo temos $\xi = \xi'$ ou $y = 0$. De forma análoga, isolando y em (1) temos que $\xi' = \xi$ ou $y' = 0$, e assim provamos que $a \in A$ se escreve de forma única como soma de um elemento de $\mathbf{R}$ e um elemento de Y e que $\mathbf{R} \cap Y = \{0\}$.

(ii) Vamos agora mostrar que Y é subespaço vetorial de A .

- Seja $\alpha \in \mathbf{R}$ e $y \in Y$, então $\alpha y \in Y$. De fato, $-(\alpha y)^2 = -\alpha^2 y^2 = \alpha^2(-y^2)$ onde $\alpha^2 \in \mathbf{R}_+$ e $-y^2 \in \mathbf{R}_+$, uma vez que $y \in Y$.
- Dados $x, y \in Y$, vamos agora mostrar que $x + y \in Y$.

Sendo $x, y \in Y$, temos que $x, y \in A$, logo $x + y \in A$ e $x - y \in A$, e por (i) podemos escrever:

$$x + y = \alpha + w \text{ e } x - y = \beta + z \text{ onde } \alpha, \beta \in \mathbf{R} \text{ e } w, z \in Y. \quad (2)$$

$$\text{Assim, } 2x^2 + 2y^2 = (x + y)^2 + (x - y)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha w + 2\beta z + w^2 + z^2. \quad (3)$$

Agora, como $x, y, w, z \in Y$ temos que x^2, y^2, z^2 e $w^2 \in \mathbf{R}$ e sendo $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, segue de (3) que $\alpha w + \beta z = \lambda \in \mathbf{R}$, assim $\lambda - \alpha w = 0 + \beta z$.

Mas por (i) segue que $\lambda = 0$, ou seja, $\alpha w + \beta z = 0$. (4)

Portanto, segue de (2) e (4) que:

$(\alpha + \beta)x + (\alpha - \beta)y = \alpha(x + y) + \beta(x - y) = \alpha(\alpha + w) + \beta(\beta + z) = \alpha^2 + \alpha w + \beta^2 + \beta z = \alpha^2 + \beta^2$, ou seja, $0 + (\alpha + \beta)x = (\alpha^2 + \beta^2) + (\beta - \alpha)y$, e então utilizando mais uma o que foi provado em (i), segue que $\alpha^2 + \beta^2 = 0$. Agora, como α e β são números reais, temos $\alpha = \beta = 0$ e portanto por (2) concluímos que $x + y = w \in Y$. Assim temos que Y é subespaço vetorial de A e por (i) segue que $A = \mathbf{R} \oplus Y$.

(iii) Seja $a \in \mathbf{R}Y_1$, então $a = \alpha y_1$ onde $\alpha \in \mathbf{R}$ e $y_1 \in Y_1$. Assim, $a^2 = \alpha^2(y_1)^2$ onde $-(y_1)^2 = 1$, logo $a^2 = -\alpha^2$, ou seja, $-a^2 = \alpha^2 \in \mathbf{R}_+$, portanto $a \in Y$. Por outro lado, seja $y \in Y$, então $-y^2 = \beta^2 \in \mathbf{R}_+$. Supondo $\beta \neq 0$, temos $-y^2(\beta^2)^{-1} = 1$, ou seja, $y\beta^{-1} = y_1 \in Y_1$ e por tanto $y = \beta y_1 \in \mathbf{R}Y_1$. O caso onde $\beta = 0$ é imediato, uma vez que se $\beta = 0$ então $y = 0$ e assim $y = 0y_1 \forall y_1 \in Y_1$. ■

Lema 2.3.13 *Sejam $u \in Y_1$ e $W(u) = \{x \in Y : ux \in Y\}$. Então $Y = \mathbf{R}u \oplus W(u)$, onde $\mathbf{R}u = \{\alpha u : \alpha \in \mathbf{R}\}$.*

Prova. Seja $x \in Y$, pelo Lema 2.3.12 temos que $ux = \lambda + y$ ou $ux - \lambda = y$ com $\lambda \in \mathbf{R}$ e $y \in Y$. (1)

Agora, lembrando que $u^2 = -1$ segue de (1): $u(x + \lambda u) = ux + \lambda u^2 = ux - \lambda = y \in Y$, e sendo Y subespaço linear, como $u = 1u \in Y$, pois $Y = \mathbf{R}Y_1$, temos que $x + \lambda u \in Y$ e por tanto $x + \lambda u \in W(u)$, ou seja $x + \lambda u = w \in W(u)$, isto é, $x = w + (-\lambda u)$. Assim mostramos que $x \in \mathbf{R}u + W(u)$. Suponha agora que $x = w' + \beta u$ para algum $\beta \in \mathbf{R}$ e $w' \in W(u)$, então temos:

$$x = w + (-\lambda u) \Rightarrow ux = uw + \lambda \quad \text{e} \quad x = w' + (-\beta u) \Rightarrow ux = uw' + \beta.$$

Mas, novamente pelo Lema 2.3.12 temos que ux se escreve de forma única como soma de um elemento de $\mathbf{R}$ e um elemento de Y , logo $\lambda = \beta$ e $uw = uw'$, ou seja, $\lambda = \beta$ e $w = w'$. Por tanto mostramos que $Y = \mathbf{R}u \oplus W(u)$. ■

Lema 2.3.14 *Sejam $u, v \in Y_1$ e $v \in W(u)$. Então $uv \in Y_1$ e $vu = -uv$.*

Prova. Sendo $v \in W(u)$, nos temos que $uv \in Y$, assim $(uv)(uv) = -\lambda$ com $\lambda \in \mathbf{R}_+$, e lembrando que $u^2 = -1$ e $v^2 = -1$, temos: $vu = u^2(vu)v^2 = u(uvuv)v = u(-\lambda)v = -\lambda uv$. (1)

Agora, como $u, v \in Y_1$ temos que $1u, 1v$ e $-1v \in Y$ pois $Y = \mathbf{R}Y_1$. Assim, sendo Y um subespaço vetorial (ver Lema 2.3.12) segue que $u + v, u - v \in Y$ e portanto $(u + v)^2$ e $(u - v)^2 \in \mathbf{R}$. (2)

E verificando que $2(uv + vu) = (u + v)^2 - (u - v)^2$, segue de (1) e (2) que:

$$(1 - \lambda)uv \in \mathbf{R}. \quad (3)$$

Por outro lado, $uv \neq 0$. De fato, como $u^2 = v^2 = -1$ temos $u^2v^2 = 1$, ou seja, $u(uv)v = 1$, daí, se $uv = 0$ teríamos $0 = 1$, o que é um absurdo. Assim, como $Y \cap \mathbf{R} = \{0\}$ (ver Lema 2.3.12) e $uv \neq 0$, temos que $uv \notin \mathbf{R}$, daí segue de (3) que $1 - \lambda = 0$, ou seja, $\lambda = 1$. Logo temos por (1) que $uv = -vu$ e $(uv)^2 = -1$, e portanto $uv \in Y_1$. ■

Teorema 2.3.15 (O caso real do Teorema de Gelfand – Mazur) *Seja A uma álgebra normada real, com divisão. Então A é isomorfo a $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{H}$.*

Prova. Sendo $Y = \{x \in A : -x^2 \in \mathbf{R}_+\}$ e $Y_1 = \{x \in A : -x^2 = 1\}$, consideremos os seguintes casos:

(i) Suponha que $Y = \{0\}$, então lembrando que $A = \mathbf{R} \oplus Y$ (ver Lema 2.3.12), segue imediatamente que $A = \mathbf{R}$, ou seja, A é isomorfo a $\mathbf{R}$.

(ii) Supondo que $\dim Y = 1$, como $Y = \mathbf{R}Y_1$ (ver Lema 2.3.12), podemos tomar $i \in Y_1$ tal que $Y = \mathbf{R}i$, onde $i^2 = -1$, e como $A = \mathbf{R} \oplus Y$ (Lema 2.3.12) temos que $A = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}i$, ou seja, A é isomorfo a $\mathbf{C}$, uma vez que $\mathbf{C} = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}i$.

(iii) Vamos agora supor que $\dim Y \geq 2$.

Dado $i \in Y_1$ e $W(i) = \{x \in Y : ix \in Y\}$, pelo Lema 2.3.13 temos que $Y = \mathbf{R}i \oplus W(i)$, logo $W(i) \neq \{0\}$, pois caso contrário, teríamos $Y = \mathbf{R}i$ e portanto $\dim Y = 1$, o que contraria nossa hipótese inicial de que $\dim Y \geq 2$. Assim, podemos escolher $w \in W(i)$ com $w \neq 0$ e $w \neq i$. Mas como $w \in W(i) \Rightarrow w \in Y$ e $Y = \mathbf{R}Y_1$ (Lema 2.3.12) então $w = ry_1$ onde $r \in \mathbf{R}, r \neq 0$ e $y_1 \in Y_1$, assim podemos escrever $r^{-1}w = y_1$. Agora, como $iw \in Y$, pois $w \in W(i)$, e Y é subespaço

vetorial (Lema 2.3.12), podemos concluir que $i(r^{-1}w) = r^{-1}(iw) \in Y$, ou seja $y_1 = r^{-1}w \in W(i)$. Logo mostramos que $W(i) \cap Y_1 \neq \emptyset$.

Seja então $j \in W(i) \cap Y_1$, daí temos: $i, j \in Y_1$ e $j \in W(i)$, assim segue pelo Lema 2.3.14, que $ij = k \in Y_1$ e $ji = -k$. E também:

$$jk = j(ij) = -j(ji) = -j^2i = i, \quad kj = (ij)j = ij^2 = -i. \quad (1)$$

Similarmente temos $ki = -ik = j$. Nós provaremos agora que se $L = W(i) \cap W(j) \cap W(k)$, então $Y = Ri \oplus Rj \oplus Rk \oplus L$.

De fato, pelo Lema 2.3.13, $Y = Ri \oplus W(i) = Rj \oplus W(j) = Rk \oplus W(k)$.

Assim, dado $y \in Y$ temos:

- a) $y = \alpha i + a$ onde $\alpha \in \mathbf{R}$ e $a, ia \in Y$;
- b) $a = \beta j + b$ onde $\beta \in \mathbf{R}$ e $b, jb \in Y$;
- c) $b = \gamma k + c$ onde $\gamma \in \mathbf{R}$ e $c, kc \in Y$.

Logo, segue por (a), (b) e (c) que $y = \alpha i + \beta j + \gamma k + c$, onde $c = b - \gamma k = a - \beta j - \gamma k$. (2)

Assim, por (2) e (1) temos:

$ic = ia - \beta ij - \gamma ik = ia - \beta k + \gamma j$ com $ia, \beta k$ e $\gamma j \in Y$, ou seja, $c \in W(i)$;

$jc = jb - \gamma jk = jb - \gamma i$ com $jb, -\gamma i \in Y$, ou seja, $c \in W(j)$;

$kc \in Y$, ou seja, $c \in W(k)$.

Logo, $c \in L$, e portanto mostramos que $Y = Ri + Rj + Rk + L$.

Vamos agora mostrar que a soma acima, é uma soma direta. Suponha que existam λ, μ, η e $c' \in \mathbf{R}$, tais que $y = \lambda i + \mu j + \eta k + c'$. Por (2) podemos escrever:

$$(\alpha - \lambda)i + (\beta - \mu)j + (\gamma - \eta)k + (c - c') = 0. \quad (3)$$

Assim, multiplicando a igualdade (3) por i , e utilizando (1), temos:

$(\lambda - \alpha) + (\beta - \mu)k - (\gamma - \eta)j + (c - c')i = 0$, ou seja, $(\lambda - \alpha) = -(\beta - \mu)k + (\gamma - \eta)j - (c - c')i \in Y$, uma vez que $(\beta - \mu)k$, $(\gamma - \eta)j$ e $(c - c')i \in Y$.

Logo, $\lambda - \alpha \in Y \cap \mathbf{R}$, e então pelo Lema 2.3.12 segue que $\lambda - \alpha = 0$, isto é, $\lambda = \alpha$.

De forma análoga, podemos mostrar que $\beta = \mu$, $\gamma = -\eta$ e $c = c'$.

Por tanto $Y = \mathbf{R}i \oplus \mathbf{R}j \oplus \mathbf{R}k \oplus L$. (4)

Provaremos agora que $L = \{0\}$.

De fato, pois caso contrário, podemos escolher $x \in L \cap Y_1$, e então pelo Lema 2.3.14, teremos:

$$ix, jx, kx \in Y_1, ix = -xi, jx = -xj \text{ e } kx = -xk.$$

Assim, $xk = x(ij) = (xi)j = -(ix)j = -i(xj) = i(jx) = (ij)x = kx = -xk$, ou seja, $2xk = 0$, e portanto $xk = 0$, o que contradiz a hipótese de que $xk \in Y_1$.

Logo, $L = \{0\}$ e então segue diretamente por (4) que $Y = \mathbf{R}i \oplus \mathbf{R}j \oplus \mathbf{R}k$. Agora, lembrando que $A = \mathbf{R} \oplus Y$ (Lema 2.3.12) temos $A = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}i \oplus \mathbf{R}j \oplus \mathbf{R}k$, ou seja, $A = \mathbf{H}$, isto é, A é isomorfo a álgebra dos quatérnios.

Assim, provamos em (i), (ii) e (iii) que sendo A , uma álgebra normada real, com divisão, então A será isomorfa a $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{H}$. ■

OPERADORES ESTRITAMENTE SINGULARES

OPERADORES COMPACTOS

OPERADORES DE FREDHOLM

Neste capítulo daremos algumas definições e resultados envolvendo operadores estritamente singulares, operadores compactos e operadores de Fredholm.

3.1 Operadores Estritamente Singulares

Definição 3.1.1 *Sejam X e Y espaços normados com dimensão infinita. Seja $T : X \rightarrow Y$ linear e contínua. Dizemos que T é estritamente singular se a restrição de T a qualquer subespaço fechado W de X , W de dimensão infinita, não é um isomorfismo sobre a imagem.*

Observações 3.1.2

- Denotaremos por $S(X, Y)$ o espaço das aplicações lineares e contínuas $S : X \rightarrow Y$, que são estritamente singulares.
- Depois da Proposição 3.1.4 será fácil demonstrar que $S(X, Y)$ é subespaço de $L(X, Y)$.

Vamos agora fazer uma caracterização dos operadores estritamente singulares.

Proposição 3.1.3 *Sejam X e Y espaços normados com dimensão infinita. Um operador $T : X \rightarrow Y$ é estritamente singular se e somente se, $\forall \varepsilon > 0$, para qualquer W subespaço de dimensão infinita de X , existe $x \in W$ tal que $\|T(x)\| < \varepsilon \|x\|$.*

Prova. Sabemos que se $T : X \rightarrow Y$ é um isomorfismo então existem números reais $M, N > 0$ tais que:

$$M \|x\| \leq \|T(x)\| \leq N \|x\|, \forall x \in X. \quad (1)$$

Seja W um subespaço de X com dimensão infinita. Então $T|_W$ é contínua, logo:

$$\exists N > 0 : ||T(x)|| \leq N ||x||, \forall x \in W. \quad (2)$$

Agora como por hipótese T é estritamente singular, $T|_W$ não é um isomorfismo. Assim por (1) e (2) temos:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in W : \varepsilon ||x|| > ||T(x)||.$$

Reciprocamente, suponhamos que T não seja estritamente singular, logo existe W subespaço de dimensão infinita de X , tal que $T : W \rightarrow T(W)$ é isomorfismo. Assim por (1)

$$\exists M > 0 : M ||x|| \leq ||T(x)||, \forall x \in W,$$

o que é um absurdo, pois por hipótese $\forall M > 0, \exists x \in W : ||T(x)|| < M ||x||$. ■

Proposição 3.1.4 *Sejam X e Y espaços de Banach com dimensão infinita. Seja $S : X \rightarrow Y$ linear e contínua. S é estritamente singular se, e somente se, para todo subespaço de dimensão infinita W de X e para todo $\varepsilon > 0$, existe W' subespaço de dimensão infinita de W , tal que $||S|_{W'}|| \leq \varepsilon$.*

Prova. Sugerimos [10], pág. 76.

Corolário 3.1.5 *Sejam S_1 e $S_2 \in S(X, Y)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então temos:*

- a) $S_1 + S_2 \in S(X, Y)$;
- b) $\alpha S_1 \in S(X, Y)$.

Prova. (a) Sejam W subespaço de X de dimensão infinita e $\varepsilon > 0$. Por hipótese S_1 é estritamente singular, logo pela Proposição 3.1.4, existe W' subespaço de W , de dimensão infinita, tal que:

$$||S|_{W'}|| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1)$$

Agora, dado W' subespaço de X e o mesmo $\varepsilon > 0$, como S_2 também é estritamente singular, pela Proposição 3.1.4, existe W'' subespaço de W' , de dimensão infinita, tal que:

$$\|S_{2|_{W''}}\| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2)$$

Assim, lembrando que $W'' \subseteq W'$, segue de (1) e (2) que:

$$\|(S_1 + S_2)|_{W''}\| \leq \|S_{1|_{W''}}\| + \|S_{2|_{W''}}\| \leq \|S_{1|_{W'}}\| + \|S_{2|_{W''}}\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, dado W subespaço de X , de dimensão infinita e $\varepsilon > 0$, mostramos que existe W'' subespaço de W , de dimensão infinita, tal que $\|(S_1 + S_2)|_{W''}\| \leq \varepsilon$. Assim, segue da Proposição 3.1.4 que $S_1 + S_2 \in S(X, Y)$.

Deixamos como exercício a prova da afirmação (b). ■

Proposição 3.1.6 *Seja S um operador estritamente singular. Sejam T e U operadores lineares e contínuos, para os quais TS e SU estão definidas. Então TS e SU são operadores estritamente singulares.*

Prova. Suponha que SU não seja estritamente singular. Então existe W subespaço fechado de X , W de dimensão infinita, tal que $SU : W \rightarrow SU(W)$ é isomorfismo. Logo:

$$\exists M, N > 0: N \|x\| \leq \|SU(x)\| \leq M \|x\|, \forall x \in W. \quad (1)$$

Sendo U linear e contínua $\exists K > 0: \|U(x)\| \leq K \|x\| \forall x \in X$.

$$\text{Em particular } \|U(x)\| \leq K \|x\|, \forall x \in W \text{ implica } \frac{\|U(x)\|}{K} \leq \|x\|, \forall x \in W. \quad (2)$$

$$\text{De (1) e (2) segue que } \frac{N}{K} \|U(x)\| \leq N \|x\| \leq \|SU(x)\| \quad \forall x \in W. \quad (3)$$

$$\text{Por outro lado, } \|SU(x)\| = \|S(U(x))\| \leq \|S\| \|U(x)\|, \forall x \in W. \quad (4)$$

Assim pondo $K_1 = \frac{N}{K}$, $K_2 = \|S\|$ e $U(x) = y$, por (3) e (4) temos:

$$\exists K_1, K_2 > 0: K_1 \|y\| \leq \|S(y)\| \leq K_2 \|y\| \quad \forall y \in Y_1, \text{ onde } Y_1 = U(W).$$

Logo $S : Y_1 \rightarrow S(Y_1)$ é um isomorfismo. (5)

Afirmção: Y_1 é subespaço fechado de Y e tem dimensão infinita.

De fato. Suponha que $Y_1 = U(W)$ seja de dimensão finita. Por (5) teríamos que $S(Y_1)$ também teria dimensão finita, o que é um absurdo, pois $S(Y_1) = S(U(W)) = SU(W)$ e $S : W \rightarrow SU(W)$ é isomorfismo onde W é fechado e tem dimensão infinita, logo $SU(W)$ também é fechado e com dimensão infinita. Agora sendo $S(Y_1) = S(U(W))$ fechado, segue também de (5), que Y_1 é fechado.

Logo, exibimos Y_1 , subespaço fechado de Y , com dimensão infinita, tal que $S : Y_1 \rightarrow S(Y_1)$ é um isomorfismo, o que contraria nossa hipótese inicial de que S é estritamente singular.

Portanto SU é um operador estritamente singular.

A demonstração de que TS é estritamente singular é feita de forma análoga. ■

Proposição 3.1.7 $S(X, Y)$ é um subespaço fechado de $L(X, Y)$.

Prova. Como o Corolário 3.1.5 já nos garante que $S(X, Y)$ é um subespaço de $L(X, Y)$, basta mostrarmos que $S(X, Y)$ é fechado, isto é, que $S(X, Y)$ contém o limite de toda sequência convergente em $S(X, Y)$.

Seja $T_n \in S(X, Y)$ e suponhamos que $T_n \rightarrow T$. Então:

$$\text{Dado } \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow \|T_n - T\| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1)$$

Pela Proposição 3.1.4, $\forall X'$ subespaço de X , existe X'' subespaço de X' tal que:

$$\|T_n|_{X''}\| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2)$$

Assim, para todo $n \geq n_0$, segue de (1) e (2) que:

$$||T|_{X''}|| = ||T|_{X''} + T_{n|X''} - T_{n|X''}|| \leq ||T|_{X''} - T_{n|X''}|| + ||T_{n|X''}|| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo $\forall \varepsilon > 0, \forall X'$ subespaço de X , conseguimos X'' subespaço de X' tal que $||T|_{X''}|| \leq \varepsilon$.

Assim pela Proposição 3.1.4 segue que T é estritamente singular. ■

3.2 Operadores Compactos

Proposição 3.2.1 *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \rightarrow Y$ uma aplicação linear. São equivalentes as seguintes propriedades:*

- a) *T leva a bola unitária B de X num conjunto relativamente compacto de Y , isto é, $\overline{T(B)}$ é compacto.*
- b) *T leva os conjuntos limitados de X em conjuntos relativamente compactos de Y .*
- c) *Toda seqüência limitada de pontos $x_n \in X$ contém uma subseqüência x_{n_k} tal que a seqüência $T(x_{n_k})$ é convergente em Y .*

Prova. Sugerimos [8], pág.302.

Definição 3.2.2 *Dizemos que uma aplicação linear $T : X \rightarrow Y$ é compacta se satisfaz as condições equivalentes citadas na proposição anterior.*

Proposição 3.2.3 *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \rightarrow Y$ linear e contínua, cuja imagem tem dimensão finita. Então T é compacto.*

Prova. Sugerimos [8], pág. 303.

Proposição 3.2.4 *Sejam X um espaço normado, Y um espaço de Banach e $T_n : X \rightarrow Y$ uma seqüência de operadores compactos tal que $T_n \rightarrow T$. Então T é compacto.*

Prova. Sugerimos [8], pág.312.

Proposição 3.2.5 *Sejam X e Y espaços normados com dimensão infinita. Se $K : X \rightarrow Y$ é um operador compacto, então K é estritamente singular.*

Prova. Suponhamos que K não seja estritamente singular. Então, existe Z , subespaço fechado de X , com dimensão infinita, tal que $K|_Z$ é isomorfismo sobre a imagem.

Sejam B_Z uma bola unitária e fechada em Z , e $(x_n)_n$ uma seqüência em B_Z . Como K é compacto, pela Proposição 3.2.1, existe $(x_{n_k})_k$ subsequência de $(x_n)_n$, tal que $K(x_{n_k})$ é convergente em $K(Z)$.

Logo, existe $z \in Z$ tal que $K(x_{n_k}) \rightarrow K(z) \Rightarrow K|_Z^{-1} K(x_{n_k}) \rightarrow K|_Z^{-1} K(z) \Rightarrow (x_{n_k})_k \rightarrow z$.

Assim, mostramos que toda seqüência em B_Z possui uma subsequência convergente, isto é, B_Z é compacto. Logo pela Proposição 1.2.21 e pelo Teorema 1.2.22 (Teorema de Riesz), segue que Z tem dimensão finita, o que é um absurdo.

Portanto, K é estritamente singular. ■

3.3 Operadores de Fredholm

Definição 3.3.1 *Sejam X e Y espaços de Banach e $T \in L(Y, X)$ um operador com imagem fechada. Definimos o índice do núcleo e o índice de deficiência de T , respectivamente, por:*

$$n(T) = \dim(\ker(T)) \quad e \quad m(T) = \dim(X/\text{Im}T).$$

Definição 3.3.2 *Sejam X e Y espaços de Banach. Um operador $T \in L(Y, X)$ é dito semi-Fredholm superior se sua imagem $\text{Im}T$ é fechada e $n(T) < \infty$. Um operador $T \in L(Y, X)$ é dito semi-Fredholm inferior se $m(T) < \infty$.*

Definição 3.3.3 *Sejam X e Y espaços de Banach e $T \in L(Y, X)$ um operador semi-Fredholm superior ou semi-Fredholm inferior. Definiremos o índice de T por: $i(T) = n(T) - m(T)$.*

Definição 3.3.4 *Sejam X e Y espaços de Banach e $T \in L(Y, X)$. T é chamado operador de Fredholm se $i(T) < \infty$, ou equivalentemente, se T é um operador semi-Fredholm superior e semi-Fredholm inferior.*

Proposição 3.3.5 *Sejam X e Y espaços de Banach e $T \in L(Y, X)$ um operador com imagem fechada para o qual $n(T) < \infty$. Seja $S : Y \rightarrow X$ um operador estritamente singular. Então $n(T + S) < \infty$.*

Prova. Seja $Y_1 \subset Y$ tal que $Y = Y_1 \oplus \text{Ker}(T)$. Então $T|_{Y_1}$ é um isomorfismo. Suponhamos que $\dim(\text{ker}(T + S)) = \infty$, então existe um subespaço de dimensão infinita Z de Y_1 sobre o qual $(T + S)|_Z = 0$, isto é, $S|_Z = -T|_Z$. Assim podemos concluir que $S|_Z$ é um isomorfismo, o que é um absurdo pois S é estritamente singular. Logo $n(T + S) < \infty$. ■

UMA RELAÇÃO EM G_X

Neste capítulo daremos a definição de um $I_Y + S$ – isomorfismo para em seguida definirmos uma importante relação no conjunto formado pelos subespaços fechados de dimensão infinita de um espaço de Banach X , o qual denotaremos por G_X . Terminamos este capítulo com a demonstração de um lema que será fundamental para o nosso trabalho.

No que segue X será um espaço de Banach com dimensão infinita.

Definição 4.1 *Seja X um espaço de Banach, e sejam Y e Z dois subespaços X com dimensão infinita. Nós dizemos que um operador T de Y em Z é um “ $I_Y + S$ – isomorfismo” se é um isomorfismo da forma $I_Y + S$, onde I_Y é inclusão de Y em X e S um operador estritamente singular de Y em X . Os subespaços Y e Z são então chamados $I_Y + S$ – isomorfos.*

Observações 4.2

- O conjunto dos subespaços fechados de dimensão infinita, de um espaço de Banach X , será denotado por G_X .
- No que se segue um $I_Y + S$ – isomorfismo será chamado de “isomorfismo bom”.

Proposição 4.3 *Sejam Y e Z dois subespaços de dimensão infinita de um espaço de Banach X . Se $T : Y \rightarrow Z$ é um $I_Y + S$ – isomorfismo, então T^{-1} também é.*

Prova. Por hipótese temos que $T : Y \rightarrow Z$ é um isomorfismo bom, logo existe $S : Y \rightarrow X$ estritamente singular tal que $T = I_Y + S$.

Sendo $T : Y \rightarrow Z$ um isomorfismo podemos considerar o operador $T^{-1} : Z \rightarrow Y$.

Vamos mostrar que T^{-1} também é um isomorfismo bom.

$$I_Z = TT^{-1} = (I_Y + S)T^{-1} = I_Y T^{-1} + ST^{-1} = T^{-1} + ST^{-1} \Rightarrow T^{-1} = I_Z + (-ST^{-1})$$

onde $-ST^{-1}$, pela Proposição 3.1.6, é um operador estritamente singular.

Assim pondo $S' = -ST^{-1}$ temos que $T^{-1} = I_Z + S'$, onde S' é estritamente singular.

Portanto, T^{-1} é um isomorfismo bom. ■

Proposição 4.4 *Sejam T e U dois isomorfismos bons. Então TU quando definido, também é um isomorfismo bom.*

Prova. Consideremos os seguintes isomorfismos bons $T : Z' \rightarrow W$ e $U : Y \rightarrow Z$ onde $Z \subseteq Z'$.

Por hipótese temos que T é um isomorfismo bom, logo existe $S_1 : Z' \rightarrow X$ estritamente singular tal que $T = I_{Z'} + S_1$. (1)

Por outro lado, temos que U também é um isomorfismo bom, logo existe $S_2 : Y \rightarrow X$ estritamente singular, tal que $U = I_Y + S_2$. (2)

Assim por (1) e (2) temos :

$$TU = (I_{Z'} + S_1)(I_Y + S_2) = I_{Z'}I_Y + I_{Z'}S_2 + S_1I_Y + S_1S_2 = I_Y + S_2 + S_1 + S_1S_2.$$

Agora, pondo $S = S_2 + S_1 + S_1S_2$ temos pelo Corolário 3.1.5 e Proposição 3.1.6 que S é estritamente singular.

Logo $TU = I_Y + S$ onde S é estritamente singular.

Portanto, TU é um isomorfismo bom. ■

Definição 4.5 *Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita. Sejam Y e Z em G_X . Definimos então a seguinte relação: $Z \leq Y$ se, e somente se, Z é $I_Z + S$ – isomorfo a um subespaço de Y , ou seja, existe um isomorfismo bom entre Z e um subespaço de Y .*

Lema 4.6 *Seja X um espaço de Banach hereditariamente indecomponível (H.I.). Então a relação $\leq$ define um filtro em G_X , isto é, se Y e $Z \in G_X$, então existe $W \in G_X$ tal que $W \leq Y$ e $W \leq Z$.*

Prova. Sejam Y e Z em G_X , pelo Teorema de Mazur (Teorema 1.2.10) existem $(e'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seqüências básicas de Y e Z , respectivamente, com constante $k' = 2$.

Consideremos então os seguintes subespaços de Y e Z , respectivamente: $Y' = [(e'_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ e $Z' = [(e_n)_{n \in \mathbb{N}}]$.

A partir daqui a demonstração será dividida em quatro partes.

Parte I. Sendo X Hereditariamente Indecomponível, pela Proposição 1.4.11, temos:

$$\exists y \in Y' \text{ e } z \in Z' \text{ com } ||y|| = ||z|| = 1 \text{ tais que } ||y - z|| \leq \frac{1}{32} \quad (1)$$

$$\text{onde } y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e'_n \text{ e } z = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n.$$

Como y e z não são finitamente suportados, faremos o seguinte:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i e'_i \text{ converge, logo: } \forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N} : n \geq n_2 \Rightarrow ||\sum_{i=1}^{\infty} a_i e'_i - \sum_{i=1}^n a_i e'_i|| < \varepsilon.$$

$$\text{Tomando } \varepsilon = \frac{1}{64} \text{ temos, } ||\sum_{i=n_3}^{\infty} a_i e'_i|| < \frac{1}{64} \text{ onde } n_3 = n + 1 \text{ e } n \geq n_2.$$

De forma análoga temos $\sum_{i=1}^{\infty} b_i e_i$ converge, logo para $\varepsilon = \frac{1}{64}$, temos:

$$\exists n_4 \in \mathbb{N} : n \geq n_4 \Rightarrow ||\sum_{i=1}^{\infty} b_i e_i - \sum_{i=1}^n b_i e_i|| < \frac{1}{64} \Rightarrow ||\sum_{i=n_5}^{\infty} b_i e_i|| < \frac{1}{64} \text{ onde}$$

$$n_5 = n + 1.$$

Agora considerando $n_1 = \max\{n_3, n_5\}$ temos:

$$||\sum_{i=n_1}^{\infty} a_i e'_i|| < \frac{1}{64} \text{ e } ||\sum_{i=n_1}^{\infty} b_i e_i|| < \frac{1}{64}. \quad (2)$$

Denotando por $r_1 = \sum_{i=n_1}^{\infty} a_i e_i'$, $r_2 = \sum_{i=n_1}^{\infty} b_i e_i$ e considerando os vetores $y_0' = y - r_1$ e $z_0 = z - r_2$

temos :

$$a) \quad y_0' = \sum_{i=1}^{n_0} a_i e_i' \quad e \quad z_0 = \sum_{i=1}^{n_0} b_i e_i \quad \text{onde } n_0 = n_1 - 1, \text{ logo possuem suporte finito.}$$

Agora, utilizando (1) e (2) temos:

$$\begin{aligned} b) \quad ||y_0' - z_0|| &= ||(y - r_1) - (z - r_2)|| \leq ||y - z|| + ||r_2 - r_1|| \leq \frac{1}{32} + ||r_2 - r_1|| \\ &\leq \frac{1}{32} + ||r_1|| + ||r_2|| < \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Assim conseguimos $y_0' \in Y'$ e $z_0 \in Z'$ finitamente suportados e tais que $||y_0' - z_0|| < \frac{1}{16}$.

Notemos ainda que : $||y_0'|| \cong 1$ e $||z_0|| \cong 1$.

De fato, $y_0' = y - r_1 \Rightarrow ||y_0'|| = ||y - r_1|| \leq ||y|| + ||r_1|| < 1 + \frac{1}{64}$.

Por outro lado, como $y = y_0' + r_1$ temos :

$$1 = ||y|| = ||y_0' + r_1|| \leq ||y_0'|| + ||r_1|| < ||y_0'|| + \frac{1}{64} \Rightarrow ||y_0'|| > 1 - \frac{1}{64}.$$

Assim, $1 - \frac{1}{64} < ||y_0'|| < 1 + \frac{1}{64}$ e de forma análoga temos $||z_0|| \cong 1$. (3)

Parte II. Consideremos agora Y_1 (respectivamente Z_1) subespaço de Y' (respectivamente Z') ,

constituído por elementos da forma $\sum_{i=n_1}^{\infty} a_i e_i'$ (respectivamente $\sum_{i=n_1}^{\infty} b_i e_i$).

Sendo $\{(e'_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ base de Y' segue que $\left\{ (e'_n)_{n=n_1}^{\infty} \right\}$ é uma base de Y_1 , logo $\dim Y_1 = \infty$, e por definição segue que Y_1 é um subespaço fechado de Y' .

As afirmações anteriores também são válidas para o subespaço Z_1 de Z' .

Daí, utilizando o mesmo argumento da parte I, encontraremos vetores $y'_1 \in Y_1$ e $z_1 \in Z_1$, de suporte finito, tais que :

$$||y'_1 - z_1|| < \frac{1}{32}, \quad 1 - \frac{1}{128} < ||y'_1|| < 1 + \frac{1}{128} \quad \text{e} \quad 1 - \frac{1}{128} < ||z_1|| < 1 + \frac{1}{128}.$$

Repetindo esse procedimento iteradamente, teremos duas seqüências de base de blocos: $(y'_n)_n$ em Y e $(z_n)_n$ em Z , e portanto pela Proposição 1.2.15, duas seqüências básicas de constante $k \leq 2$.

$$\text{Essas duas seqüências básicas são tais que } ||y'_n - z_n|| < \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Pela Proposição 1.2.18, temos que $\left\{ \frac{y'_n}{||y'_n||} \right\}_n$ é seqüência básica de Y com a mesma constante básica de $(y'_n)_n$. E ainda temos:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{y'_n}{||y'_n||} - z_n \right\| &= \left\| \frac{y'_n}{||y'_n||} - z_n + y'_n - y'_n \right\| \leq ||y'_n - z_n|| + \left\| \frac{y'_n}{||y'_n||} - y'_n \right\| < \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2^n} + ||y'_n|| \cdot \left| \frac{1}{||y'_n||} - 1 \right| \\ &= \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2^n} + ||y'_n|| \cdot \frac{|1 - ||y'_n|||}{||y'_n||} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2^n} + |1 - ||y'_n|||. \end{aligned} \quad (6)$$

Agora lembrando, que por construção temos $1 - \varepsilon_n < ||y'_n|| < 1 + \varepsilon_n$ onde $\varepsilon_n = \frac{1}{2^{n+6}}$

(ver (3)), segue que: $|1 - ||y'_n||| < \varepsilon_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. (7)

$$\text{Assim, de (6) e (7) resulta que, } \left\| \frac{y'_n}{||y'_n||} - z_n \right\| < \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+6}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Logo, por (4), temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{y'_n}{||y'_n||} - z_n \right\| < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+6}} \right) = \frac{1}{16} + \frac{1}{64} = \frac{5}{64} < \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2k}.$$

$$\text{Daí, colocando } y_n = \frac{y'_n}{||y'_n||} \text{ temos, } \sum_{n=1}^{\infty} ||y_n - z_n|| < \frac{1}{2k}, \quad (9)$$

onde $(y_n)_n$ é uma seqüência básica normalizada de Y e portanto de X .

Logo pela Proposição. 1.2.13, segue que $(z_n)_n$ é sequência básica de X , equivalente a $(y_n)_n$. (10)

Parte III. Consideremos agora os seguintes subespaços de X : $Y'' = [(y_n)_n]$ e $Z'' = [(z_n)_n]$, segue de (10) e da Proposição 1.2.12, que existe $T : Y'' \rightarrow Z''$, isomorfismo tal que $T(y_n) = z_n$ onde T é definida da seguinte forma :

$$T\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n.$$

Vamos agora mostrar que $T = I_{Y''} + K$ onde $I_{Y''}$ é a inclusão Y'' em X , e K um operador compacto.

$$T\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z_n - y_n).$$

Definindo, $K : Y'' \rightarrow X$ por $K\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z_n - y_n)$, temos $T = I_{Y''} + K$.

Vamos então provar as seguintes afirmações a respeito do operador K :

- a) K está bem definido;
- b) K é linear;
- c) K é contínuo;
- d) K é compacto.

Prova de (a): K está bem definida, uma vez que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z_n - y_n)$ converge, pois as séries

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ são convergentes, e como X é um espaço de Banach, segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z_n - y_n) \in X.$$

Prova de (b): K é linear. De fato, $\forall x, y \in Y''$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$, $y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n y_n$, e $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ temos :

$$K(x + \lambda y) = K\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} b_n y_n\right) = K\left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + \lambda b_n) y_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + \lambda b_n) (z_n - y_n) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z_n - y_n) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z_n - y_n) = K(x) + \lambda K(y).$$

Prova de (c): K é contínuo. De fato, pois sendo k a constante básica, segue da Proposição 1.2.17 e de (9) que:

$$\begin{aligned} ||K(\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n)|| &= ||\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z_n - y_n)|| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| (||z_n - y_n||) \leq 2k ||y|| \sum_{n=1}^{\infty} (||z_n - y_n||) < \\ k ||y|| \frac{1}{2k} &= ||y|| \text{ onde } y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \Rightarrow ||K(y)|| \leq ||y||. \end{aligned}$$

Prova de (d): Para provarmos que K é compacto, iremos considerar a seguinte sequência de operadores:

$$\{K_p\}_{p \in \mathbb{N}} \text{ onde } K_p: Y'' \rightarrow X \text{ e } K_p(\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n) = \sum_{n=1}^p a_n (z_n - y_n).$$

A respeito desses operadores provaremos as seguintes afirmações, $\forall p \in \mathbb{N}$:

- i) K_p está bem definida;
- ii) K_p é linear;
- iii) K_p é contínua;
- iv) K_p é compacta;
- v) $K_p \rightarrow K$.

Prova de (i): é imediato.

Prova de (ii): demonstração análoga a prova de (b).

Prova de (iii): Sendo $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ e k a constante básica, segue da Proposição 1.2.17 e de (8)

$$\text{que: } ||K_p(y)|| = ||\sum_{n=1}^p a_n (z_n - y_n)|| \leq \sum_{n=1}^p |a_n| (||z_n - y_n||) \leq 2k ||y|| \cdot \sum_{n=1}^p (||z_n - y_n||) <$$

$$2k ||y|| \sum_{n=1}^p \left(\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+6}} \right) = 2k ||y|| \cdot \left(\frac{1}{16} \sum_{n=1}^p \left(\frac{1}{2^n} \right) + \frac{1}{64} \sum_{n=1}^p \left(\frac{1}{2^n} \right) \right).$$

Agora, como para cada $p \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^p \left(\frac{1}{2^n} \right) < 1$, segue que, $||K_p(y)|| \leq \frac{5k}{32} ||y||$.

Portanto, K_p é contínuo.

Prova de (iv) : Seja $y \in \text{Im}(K_p)$, então $y = \sum_{n=1}^p a_n(z_n - y_n)$. Logo a dimensão da imagem de K_p é finita ($\leq p$). Assim pela Proposição 3.2.3 segue que K_p é compacto.

Prova de (v): Vamos agora mostrar que $K_p \rightarrow K$. Dado $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ temos:

$$\begin{aligned} ||K(y) - K_p(y)|| &= ||\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z_n - y_n) - \sum_{n=1}^p a_n(z_n - y_n)|| = ||\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n(z_n - y_n)|| \leq \\ &\sum_{n=p+1}^{\infty} |a_n| (||z_n - y_n||) \leq 2 ||y|| k \sum_{n=p+1}^{\infty} ||z_n - y_n|| < 2k ||y|| \sum_{n=p+1}^{\infty} \left(\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+6}} \right), \forall p \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Logo, $||K(y) - K_p(y)|| \leq 2k ||y|| \sum_{n=p+1}^{\infty} \left(\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+6}} \right) \rightarrow 0$, quando $p \rightarrow \infty$.

Assim, $||K(y) - K_p(y)|| \rightarrow 0$, quando $p \rightarrow \infty$. Por tanto, $K_p \rightarrow K$.

Estamos agora com a seguinte situação: $K_p \in L(Y'', X)$ é uma seqüência de operadores compactos e $K \in L(Y'', X)$ é tal que $K_p \rightarrow K$. Assim pela Proposição 3.2.4, segue que K é um operador compacto, o que prova a afirmação (d).

Parte IV. Agora estamos prontos para finalizar a demonstração do nosso lema.

Pela parte III vimos que existe $T: Y'' \rightarrow Z''$, isomorfismo da forma $T = I_{Y''} + K$, onde K é um operador compacto. Mas pela Proposição 3.2.5 temos que K compacto, implica K estritamente singular.

Logo T é um "isomorfismo bom" entre Y'' e Z'' (subespaço de Z). Assim $Y'' \leq Z$.

Agora como $Y'' \subset Y$ temos que $Y'' \leq Y$, pois $T': Y'' \rightarrow Y''$ dada por $T' = I_{Y''} + 0$, onde 0 é o operador nulo, é um isomorfismo bom (já que o operador nulo é estritamente singular).

Finalmente, pondo $W = Y''$ temos: $W \leq Z$ e $W \leq Y$, o que prova nosso lema.

UMA SEMI-NORMA EM $L(Y, X)$

Neste capítulo apresentaremos uma semi-norma no espaço $L(Y, X)$ e demonstraremos alguns resultados relativos a essa semi-norma.

No que segue, todos os subespaços considerados serão fechados e de dimensão infinita.

Definição 5.1 *Seja X um espaço de Banach. Para cada $Y \in G_X$, considere a aplicação $|| \cdot ||_Y$ definida sobre $L(Y, X)$ por: $||T||_Y = \sup_{Z \subset Y} \inf_{Z' \subset Z} ||T|_{Z'}||$.*

Observação 5.2 $|| \cdot ||_Y$ está bem definida pois o conjunto $\{ ||T|_{Z'}|| / Z' \subset Z \}$ é não vazio e limitado inferiormente por 0, pois $||T|_{Z'}|| \geq 0$, logo possui ínfimo; e o conjunto $\{ \inf_{Z' \subset Z} ||T|_{Z'}|| / Z \subset Y \}$ é não vazio e limitado superiormente por $||T||$, logo possui supremo.

Proposição 5.3 *Seja X um espaço de Banach e $Y \in G_X$. Então temos:*

- a) $||T||_Y = 0$ se, e somente se, T é estritamente singular.
- b) A aplicação $|| \cdot ||_Y : L(Y, X) \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma semi-norma em $L(Y, X)$.

Prova. (a) Utilizando a definição de ínfimo, segue da Proposição 3.1.4 que:

$$||T||_Y = 0 \Leftrightarrow \inf_{Z' \subset Z} ||T|_{Z'}|| = 0, \forall Z \subset Y \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall Z \subset Y, \exists Z' \subset Z : ||T|_{Z'}|| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

T é estritamente singular. ■

Parte (b) Vamos agora mostrar que a aplicação $|| \cdot ||_Y$ é um semi-norma em $L(Y, X)$.

Para tanto devemos provar que $|| \cdot ||_Y$ satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $||T + U||_Y \leq ||T||_Y + ||U||_Y \quad \forall T, U \in L(Y, X)$.
- ii) $||\lambda T||_Y = |\lambda| \cdot ||T||_Y \quad \forall T \in L(Y, X), \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Prova de (i) : Sejam $T, U \in L(Y, X)$ e $\varepsilon > 0$.

Por definição $\|T + U\|_Y = \sup_{Z \subset Y} \inf_{Z' \subset Z} \|(T + U)|_{Z'}\|$.

Assim, dado $\varepsilon > 0$, $\exists Z_0 \subset Y$ tal que $\inf_{Z' \subset Z_0} \|(T + U)|_{Z'}\| > \|T + U\|_Y - \varepsilon$, daí segue que:

$$\|(T + U)|_{Z'}\| > \|T + U\|_Y - \varepsilon, \forall Z' \subset Z_0 \Rightarrow \|T + U\|_Y < \|(T + U)|_{Z'}\| + \varepsilon, \forall Z' \subset Z_0.$$

Agora, como $\|\cdot\|$ é uma norma em $L(Y, X)$ temos :

$$\|T + U\|_Y < \|T|_{Z'}\| + \|U|_{Z'}\| + \varepsilon \quad \forall Z' \subset Z_0, \quad (1)$$

$$\text{e pondo } Z = Z' \text{ segue, } \|T + U\|_Y < \|T|_Z\| + \|U|_Z\| + \varepsilon \quad \forall Z \subset Z_0. \quad (2)$$

Olhemos agora para $\inf_{Z \subset Z_0} \|T|_Z\|$, pela definição de ínfimo:

$$\exists Z_1 \subset Z_0 \text{ tal que } \|T|_{Z_1}\| < \inf_{Z \subset Z_0} \|T|_Z\| + \varepsilon,$$

e lembrando que $\forall Z \subset Z_1$ temos $\|T|_Z\| \leq \|T|_{Z_1}\|$ segue que :

$$\|T|_Z\| < \inf_{Z \subset Z_0} \|T|_Z\| + \varepsilon \quad \forall Z \subset Z_1. \quad (3)$$

Assim, sendo $Z \subset Z_1 \subset Z_0$, por (2) e (3) temos :

$$\|T + U\|_Y < \inf_{Z \subset Z_0} \|T|_Z\| + \|U|_Z\| + 2\varepsilon \Rightarrow \|T + U\|_Y < \|T\|_Y + \|U|_Z\| + 2\varepsilon \Rightarrow \|U|_Z\| >$$

$$\|T + U\|_Y - \|T\|_Y - \varepsilon, \forall \varepsilon > 0, \forall Z \subset Z_1.$$

E utilizando novamente a definição de ínfimo, segue que :

$$\inf_{Z \subset Z_1} \|U|_Z\| \geq \|T + U\|_Y - \|T\|_Y - 2\varepsilon \Rightarrow \|T + U\|_Y \leq \inf_{Z \subset Z_1} \|U|_Z\| + \|T\|_Y + 2\varepsilon,$$

o que implica $\|T + U\|_Y \leq \|T\|_Y + \|U\|_Y + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$.

Como ε é arbitrário temos, $\|T + U\|_Y \leq \|T\|_Y + \|U\|_Y$.

Prova de (ii): Sejam $T \in L(Y, X)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\|\lambda T\|_Y = \sup_{Z \subset Y} \inf_{Z' \subset Z} \|(\lambda T)|_{Z'}\| = \sup_{Z \subset Y} \inf_{Z' \subset Z} |\lambda| \|T|_{Z'}\| = |\lambda| \sup_{Z \subset Y} \inf_{Z' \subset Z} \|T|_{Z'}\| = |\lambda| \|T\|_Y.$$

Assim, por (i) e (ii) temos que $\|\cdot\|_Y$ é um semi-norma em $L(Y, X)$. ■

Verifiquemos agora, que adicionando a hipótese de que X é um espaço de Banach Hereditariamente Indecomponível, a semi-norma $\|\cdot\|_Y$ ganhará uma propriedade que irá nos ajudar muito na obtenção dos próximos resultados. Para a demonstração da próxima proposição iremos utilizar o Lema 4.6.

Proposição 5.4 *Seja X um espaço de Banach Hereditariamente Indecomponível (H.I.). Sejam $Y \in G_X$ e $T \in L(Y, X)$, então a quantidade $\inf_{Z' \subset Z} \|T|_{Z'}\|$ não depende da escolha do subespaço Z de Y .*

Prova. Sejam Z_1 e Z_2 dois subespaços de Y . Vamos mostrar que sendo $\alpha = \inf_{Z' \subset Z_1} \|T|_{Z'}\|$ e

$\beta = \inf_{Z' \subset Z_2} \|T|_{Z'}\|$ então $\alpha = \beta$. Para tanto é suficiente provar que para todo $\varepsilon > 0$ temos:

a) Dado $Z_2' \subset Z_2$, $\exists Z_1'' \subset Z_1$ tal que $\|T|_{Z_1''}\| \leq \|T|_{Z_2'}\| + \varepsilon$.

b) Dado $Z_1' \subset Z_1$, $\exists Z_2'' \subset Z_2$ tal que $\|T|_{Z_2''}\| \leq \|T|_{Z_1'}\| + \varepsilon$.

De fato, suponha que $\alpha > \beta$, então $\exists Z_2' \subset Z_2$ tal que $\beta < \|T|_{Z_2'}\| < \alpha$.

Agora, dado $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, teremos: $\|T|_{Z_2'}\| + \varepsilon < \alpha$, mas por (a)

$\exists Z_1'' \subset Z_1$ tal que $\|T|_{Z_1''}\| \leq \|T|_{Z_2'}\| + \varepsilon \Rightarrow \|T|_{Z_1''}\| < \alpha$, o que é um absurdo, pois

$\alpha = \inf_{Z' \subset Z_1} \|T|_{Z'}\|$. Logo $\alpha \leq \beta$.

Mostraremos agora que não pode ocorrer $\alpha < \beta$.

De fato, suponha que $\alpha < \beta$, então $\exists Z_1' \subset Z_1$ tal que $\alpha < \|T|_{Z_1'}\| < \beta$, e assim para algum

$\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, teremos: $\|T|_{Z_1'}\| + \varepsilon < \beta$. Mas por (b) segue que $\exists Z_2'' \subset Z_2$

tal que $\|T|_{Z_2''}\| \leq \|T|_{Z_1'}\| + \varepsilon \Rightarrow \|T|_{Z_2''}\| < \beta$, o que é um absurdo, pois $\beta = \inf_{Z' \subset Z_2} \|T|_{Z'}\|$.

Logo, só nos resta uma única possibilidade, que é $\alpha = \beta$.

Vamos então provar a afirmação (a).

Seendo Z_1 e Z_2 dois subespaços de Y , dado $\varepsilon' > 0$ e $Z_2' \subset Z_2$, utilizando o Lema 4.6, segue que existe um isomorfismo bom entre um subespaço W de Z_2' e um subespaço Z_1' de Z_1 , o qual denotaremos por $I_W + S$, onde S é um operador estritamente singular de W em X e I_W é a inclusão de W em X , isto é: $I_W + S : W \rightarrow Z_1'$.

Agora, passando para subespaços, podemos assumir que $\|(I_W + S)^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon'$. (1)

De fato, como S é estritamente singular, pela Proposição 3.1.4, dado $\varepsilon' > 0$, conseguimos W' subespaço de W tal que:

$$\|S|_{W'}\| \leq \frac{\varepsilon'}{k}, \text{ onde } k = \|(I_W + S)^{-1}\|, \quad (2)$$

e segue da Proposição 4.3 que: $(I_W + S)^{-1} = I_{Z_1'} - S(I_W + S)^{-1}$.

Agora sendo $Z_1'' = (I_W + S)(W')$ e restringindo $(I_W + S)^{-1}$ ao subespaço Z_1'' de Z_1 temos:

$$\|(I_W + S)^{-1}|_{Z_1''}\| = \|(I_{Z_1'} - S(I_W + S)^{-1})|_{Z_1''}\| \leq \|I|_{Z_1''}\| + \|S|_{W'}\| \cdot \|(I_W + S)^{-1}|_{Z_1''}\|.$$

Como $Z_1'' \subset Z_1'$, temos, $\|(I_W + S)^{-1}|_{Z_1''}\| \leq \|(I_W + S)^{-1}\|$, assim

$$\|(I_W + S)^{-1}|_{Z_1''}\| \leq \|I|_{Z_1''}\| + \|S|_{W'}\| \cdot \|(I_W + S)^{-1}\|,$$

e por (2) segue que $\|(I_W + S)^{-1}|_{Z_1''}\| \leq 1 + \frac{\varepsilon'}{k} \cdot k = 1 + \varepsilon'$.

Seja agora $T \in L(Y, X)$ e, considerando a restrição de T ao subespaço Z_1' de Z_1 , e portanto subespaço de Y , temos :

$$T|_{Z_1'} = T(I_W + S)(I_W + S)^{-1}. \quad (3)$$

Agora lembrando que W e Z_1' são subespaços de Y e que $I_W + S : W \rightarrow Z_1'$ é um isomorfismo, segue que, dado $w \in W$, $(I_W + S)(w) = I_W(w) + S(w)$ implica $S(w) \in Y$.

Assim S toma valores em Y , e portanto, TS está bem definida. Daí podemos reescrever (3) como :

$$T|_{Z_1'} = (TI_W + TS)(I_W + S)^{-1} = (T|_W + TS)(I_W + S)^{-1},$$

e restringindo T ao subespaço Z_1'' de Z_1' temos :

$$\|T|_{Z_1''}\| \leq \|(T|_W + TS)|_{W'}\| \|(I_W + S)^{-1}|_{Z_1''}\| \leq (\|T|_{W'}\| + \|T|_{S(W')}\| \cdot \|S|_{W'}\|) \|(I_W + S)^{-1}|_{Z_1''}\|.$$

Como $W' \subset Z_2'$ e $S(W') \subset Y$ segue que: $\|T|_{Z_1''}\| \leq (\|T|_{Z_2'}\| + \|T\| \cdot \|S|_{W'}\|) \cdot \|(I_W + S)^{-1}|_{Z_1''}\|.$

Agora, por (1) e (2) temos :

$$\|T|_{Z_1''}\| \leq (\|T|_{Z_2'}\| + \|T\| \cdot \frac{\varepsilon}{k}) \cdot (1 + \varepsilon') = \|T|_{Z_2'}\| + \varepsilon' \cdot \|T|_{Z_2'}\| + \|T\| \cdot \frac{\varepsilon'}{k} \cdot (1 + \varepsilon') \leq$$

$$\|T|_{Z_2'}\| + \varepsilon' \cdot \|T\| + \|T\| \cdot \frac{\varepsilon'}{k} \cdot (1 + \varepsilon').$$

Agora, pondo $\varepsilon = \varepsilon' \cdot \|T\| + \|T\| \cdot \frac{\varepsilon'}{k} \cdot (1 + \varepsilon')$ e sendo $\varepsilon' > 0$ arbitrário segue que:

$$\|T|_{Z_1''}\| \leq \|T|_{Z_2'}\| + \varepsilon.$$

De forma análoga provamos a afirmação (b). ■

Corolário 5.5 *Seja X um espaço de Banach H.I. e $Y \in G_X$. Então para todo $T \in L(Y, X)$ e para todo $Z \subset Y$ temos :*

$$\|T\|_Y = \inf_{Z' \subset Z} \|T|_{Z'}\|.$$

Prova. Decorre diretamente da proposição anterior. ■

Proposição 5.6 *Seja X um espaço de Banach H.I. Sejam $Y, Z \in G_X$, $T \in L(Y, X)$ e $U \in L(Z, Y)$. Então:*

$$\|TU\|_Z \leq \|T\|_Y \cdot \|U\|_Z.$$

Prova. Vamos fazer essa demonstração em duas partes, primeira supondo que U seja estritamente singular, e segunda, supondo que U não seja estritamente singular.

Parte (a) - Se U é estritamente singular, então pela Proposição 3.1.6 temos que TU também é estritamente singular. Assim pela Proposição 5.3 segue que $\|TU\|_Z = 0$, logo vale:

$$\|TU\|_Z \leq \|T\|_Y \cdot \|U\|_Z.$$

Parte (b) - Agora, se U não é estritamente singular temos:

$$\exists Z' \subset Z \text{ tal que } U : Z' \rightarrow U(Z') \text{ é um isomorfismo.} \quad (1)$$

$$\text{Por definição: } \|TU\|_Z = \inf_{W' \subset W} \|(TU)|_{W'}\|, \forall W \subset Z, \text{ em particular } \forall W \subset Z'. \quad (2)$$

Mas $\|(TU)|_{W'}\| \leq \|T|_{U(W')}\| \cdot \|U|_{W'}\| \forall W' \subset W$, e como $U(W') \subset U(W)$ temos :

$$\|(TU)|_{W'}\| \leq \|T|_{U(W)}\| \cdot \|U|_{W'}\|, \forall W' \subset W \subset Z'.$$

Logo, $\inf_{W' \subset W} (\|T|_{U(W)}\| \cdot \|U|_{W'}\|) \geq \inf_{W' \subset W} \|(TU)|_{W'}\|$ e por (2) segue que:

$$\inf_{W' \subset W} (\|T|_{U(W)}\| \cdot \|U|_{W'}\|) \geq \|TU\|_Z \quad \forall W' \subset W \subset Z'.$$

Assim, $\|T_{|_{U(W)}}\| \cdot \inf_{W' \subset W} (\|U_{|_{W'}}\|) \geq \|TU\|_Z$.

Agora, lembrando que $\inf_{W' \subset W} \|U_{|_{W'}}\| = \|U\|_Z$, temos:

$$\|TU\|_Z \leq \|U\|_Z \|T_{|_{U(W)}}\| \quad \forall W \subset Z'. \quad (3)$$

Denotando por $V = U(W)$, temos que $V \subset U(Z')$ e por (1) segue que existe uma bijeção entre o conjunto dos subespaços de Z' e o conjunto dos subespaços de $U(Z')$ logo, podemos reescrever (3) da seguinte forma: $\|TU\|_Z \leq \|U\|_Z \|T_{|_V}\| \quad \forall V \subset U(Z')$.

Assim, $\inf_{V \subset U(Z')} \|U\|_Z \|T_{|_V}\| \geq \|TU\|_Z \Rightarrow \|TU\|_Z \leq \|U\|_Z \inf_{V \subset U(Z')} \|T_{|_V}\|, \forall U(Z') \subset Y$,

e finalmente, lembrando que $\inf_{V \subset U(Z')} \|T_{|_V}\| = \|T\|_Y$ temos: $\|TU\|_Z \leq \|T\|_Y \|U\|_Z$. ■

O ESPAÇO QUOCIENTE E_Y

6.1 O Espaço Quociente E_Y

Na presente seção daremos início a construção do espaço quociente E_Y e definiremos nesse espaço uma importante aplicação que será denotada por P_{YZ} .

No que se segue, X será um espaço de Banach Hereditariamente Indecomponível.

Definição 6.1.1 Para cada $Y \in G_X$, denotaremos por E_Y o espaço quociente de $L(Y, X)$ pelo kernel da aplicação $\| \cdot \|_Y$, isto é, $E_Y = L(Y, X) / S(Y, X)$.

Observações 6.1.2

- a) Vimos na Proposição 5.3 que $\| \cdot \|_Y$ é uma semi-norma no espaço $L(Y, X)$, logo segue diretamente da Proposição 1.3.5 que $S(Y, X)$ é subespaço de $L(Y, X)$.
- b) Denotaremos por α_Y um elemento de E_Y , e para todo $T \in L(Y, X)$, denotaremos por $\bar{T}$ a classe de T em E_Y , isto é: $\bar{T} = \{ U \in L(Y, X) : U - T \in S(Y, X) \}$.
- c) Podemos mostrar que $E_Y = \{ \bar{T} : T \in L(Y, X) \}$.
- d) O espaço E_Y não é necessariamente completo, pois a norma que será definida em E_Y não é uma norma como definida na Proposição 1.3.2.

Proposição 6.1.3 Considere a seguinte aplicação $\| \cdot \|_Y : E_Y \rightarrow \mathbf{R}_+$ dada por $\| \alpha_Y \|_Y = \| T \|_Y$, $\forall T \in \alpha_Y$. $\| \cdot \|_Y$ está bem definida e é uma norma em E_Y .

Prova. Segue diretamente da Proposição 1.3.5. ■

Definição 6.1.4 Sejam $Z, Y \in G_X$ tal que $Z \leq Y$. Existe Y' subespaço de Y tal que $Y' = (I_Z + S)(Z)$ onde $I_Z + S$ é um isomorfismo bom. Definimos então a seguinte aplicação de E_Y em E_Z :

$$\begin{aligned} P_{YZ} : E_Y &\rightarrow E_Z \\ \bar{T} &\rightarrow \overline{T(I_Z + S)}. \end{aligned}$$

Observação 6.1.5 *Vamos agora mostrar que a aplicação P_{YZ} está bem definida.*

Parte (a) - Como $I_Z + S : Z \rightarrow Y' \subset Y$ e $T : Y \rightarrow X$ temos que $T(I_Z + S)$ está bem definida e $T(I_Z + S) : Z \rightarrow X$, logo :

$$T(I_Z + S) \in L(Z, X) \Rightarrow \overline{T(I_Z + S)} \in E_Z.$$

Parte (b) - Mostraremos agora que P_{YZ} não depende da escolha dos representantes, isto é:

$$\overline{T_1} = \overline{T_2} \Rightarrow P_{YZ}(\overline{T_1}) = P_{YZ}(\overline{T_2}).$$

$$\text{Sabemos que, } \overline{T_1} = \overline{T_2} \Rightarrow T_1 \in \overline{T_2} \Rightarrow T_1 - T_2 \in S(Y, X). \quad (1)$$

$$\text{Por definição: } P_{YZ}(\overline{T_1}) = \overline{T_1(I_Z + S)} \text{ e } P_{YZ}(\overline{T_2}) = \overline{T_2(I_Z + S)}.$$

Assim, para mostrarmos que $P_{YZ}(\overline{T_1}) = P_{YZ}(\overline{T_2})$ é suficiente provarmos que :

$$T_1(I_Z + S) \in \overline{T_2(I_Z + S)}.$$

O que de fato ocorre, pois utilizando (1) e a Proposição 3.1.6 temos:

$$T_1(I_Z + S) - T_2(I_Z + S) = (T_1 - T_2)(I_Z + S) \in S(Y, X).$$

Parte (c) - Mostraremos agora, que a aplicação P_{YZ} também não depende da escolha do operador S , isto é:

$$P_{YZ}(\overline{T_1}) = \overline{T_1(I_Z + S_1)} \text{ e } P_{YZ}(\overline{T_1}) = \overline{T_1(I_Z + S_2)} \Rightarrow \overline{T_1(I_Z + S_1)} = \overline{T_1(I_Z + S_2)}.$$

O que de fato ocorre, pois:

$$T_1(I_Z + S_1) - T_1(I_Z + S_2) = T_1(I_Z + S_1 - I_Z - S_2) = T_1(S_1 + (-S_2)) \in S(Y, X).$$

Proposição 6.1.6 *Sejam W, Z e Y em G_X tal que $W \leq Z \leq Y$. Então $P_{YW} = P_{ZW} P_{YZ}$.*

Prova. Por hipótese temos que existem os seguintes isomorfismos:

$$I_W + S_1 : W \rightarrow Z' \subset Z \quad \text{e} \quad I_Z + S_2 : Z \rightarrow Y' \subset Y.$$

Assim podemos definir a seguinte composição $(I_Z + S_2)(I_W + S_1) : W \rightarrow Y'$, que pela Proposição 4.4 é um isomorfismo bom entre W e Y' .

Logo podemos escrever, $(I_Z + S_2)(I_W + S_1) = I_W + S$.

Consideremos agora $\bar{T} \in E_Y$. Daí segue:

$$\begin{aligned} P_{ZW} P_{YZ}(\bar{T}) &= P_{ZW}(P_{YZ}(\bar{T})) = P_{ZW}(\overline{T(I_Z + S_2)}) = \overline{(T(I_Z + S_2))(I_W + S_1)} = \overline{T((I_Z + S_2)(I_W + S_1))} \\ &= \overline{T(I_W + S)} = P_{YW}(\bar{T}). \end{aligned}$$

Como $\bar{T} \in E_Y$ é arbitrário, temos $P_{ZW} P_{YZ} = P_{YW}$. ■

Lema 6.1.7 *Sejam Y e Z em G_X tal que $Z \leq Y$. Então P_{YZ} é uma isometria linear.*

Prova. **Parte (a) :** P_{YZ} é linear. De fato, dados $\bar{T}_1, \bar{T}_2 \in E_Y$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos:

$$\begin{aligned} P_{YZ}(\bar{T}_1 + \lambda \bar{T}_2) &= P_{YZ}(\overline{T_1 + \lambda T_2}) = \overline{(T_1 + \lambda T_2)(I_Z + S)} = \overline{[T_1(I_Z + S)] + [\lambda T_2(I_Z + S)]} = \\ &= \overline{[T_1(I_Z + S)]} + \lambda \overline{[T_2(I_Z + S)]} = \overline{T_1(I_Z + S)} + \lambda \overline{T_2(I_Z + S)} = P_{YZ}(\bar{T}_1) + \lambda P_{YZ}(\bar{T}_2). \end{aligned}$$

Parte (b) : Vamos agora mostrar que $|||P_{YZ}(\alpha_Y)|||_Z \leq |||\alpha_Y|||_Y, \forall \alpha_Y \in E_Y$.

Seja T um representante de α_Y . Assim, pelas Proposições 6.1.3, 5.6 e 5.3 temos:

$$\begin{aligned} |||P_{YZ}(\alpha_Y)|||_Z &= |||P_{YZ}(\overline{T})|||_Z = |||\overline{T(I_Z + S)}|||_Z = |||T(I_Z + S)|||_Z \leq |||T|||_Y |||I_Z + S|||_Z \\ &\leq |||T|||_Y (|||I_Z|||_Z + |||S|||_Z) = |||T|||_Y (1 + 0) = |||T|||_Y = |||\alpha_Y|||_Y. \end{aligned}$$

Logo, $|||P_{YZ}(\alpha_Y)|||_Z \leq |||\alpha_Y|||_Y \quad \forall \alpha_Y \in E_Y$, e portanto $|||P_{YZ}||| \leq 1$. (1)

Vamos agora analisar as seguintes situações:

Parte (c) : Suponhamos que Z e Y são $(I_Z + S)$ – isomorfos, então existe um isomorfismo bom entre Z e Y . Mas, como a inversa de um isomorfismo bom é um isomorfismo bom (ver proposição 4.3) temos:

Existe $I_Y + S': Y \rightarrow Z$ isomorfismo bom, onde $I_Y + S' = (I_Z + S)^{-1}$. Logo $Y \leq Z$.

Assim podemos definir a aplicação $P_{ZY} : E_Z \rightarrow E_Y$ e de forma análoga ao que foi provado na parte b teremos, $|||P_{ZY}||| \leq 1$. (2)

Mas, dado $\alpha_Y \in E_Y$ e T um representante de α_Y temos:

$$P_{ZY} P_{YZ}(\alpha_Y) = P_{ZY}(\overline{T(I_Z + S)}) = \overline{T(I_Z + S)(I_Y + S')} = \overline{T(I_Z + S)(I_Z + S)^{-1}} = \overline{TI_Y} = \overline{T} = \alpha_Y.$$

Logo, $P_{ZY} P_{YZ}(\alpha_Y) = \alpha_Y, \forall \alpha_Y \in E_Y$.

Assim, utilizando o fato de que P_{ZY} é linear e que $|||P_{ZY}||| \leq 1$ temos:

$$\begin{aligned} |||\alpha_Y|||_Y &= |||P_{ZY}P_{YZ}(\alpha_Y)|||_Y = |||P_{ZY}(P_{YZ}(\alpha_Y))|||_Y \leq |||P_{ZY}||| \cdot |||P_{YZ}(\alpha_Y)|||_Z \\ &\leq |||P_{YZ}(\alpha_Y)|||_Z. \end{aligned}$$

$$|||\alpha_Y|||_Y \leq |||P_{YZ}(\alpha_Y)|||_Z \quad \forall \alpha_Y \in E_Y. \quad (3)$$

Logo por (1) e (3) segue que $|||P_{YZ}(\alpha_Y)|||_Z = |||\alpha_Y|||_Y \quad \forall \alpha_Y \in E_Y$, ou seja, mostramos que se Z e Y são $(I_Z + S)$ – isomorfos então a aplicação linear P_{YZ} é uma isometria.

Parte (d) : Suponhamos agora que $Z \subset Y$. Pela Proposição 5.4 segue que:

$$\forall T \in L(Y, X), \text{ vimos que } |||T|||_Y = \inf \{ |||T|_{W'}||| : W' \subset W \}, \quad \forall W \subset Y. \quad (4)$$

Restringindo T a um subespaço $Z \subset Y$ temos:

$$|||T|||_Z = \inf \{ |||T|_{W'}||| : W' \subset W \}, \quad \forall W \subset Z \text{ e como } Z \subset Y \text{ segue que } |||T|||_Z = |||T|||_Y. \quad (5)$$

Agora, sendo $Z \subset Y$ temos que $Z \leq Y$ onde $I_Z + 0 : Z \rightarrow Y$ é um isomorfismo bom entre Z e um subespaço de Y . Assim dado $\alpha_Y \in E_Y$ e T um representante de α_Y temos:

$$|||P_{YZ}(\alpha_Y)|||_Z = |||\overline{T(I_Z + 0)}|||_Z = |||\bar{T}|_Z|||_Z = |||\bar{T}|||_Y = |||\alpha_Y|||_Y.$$

Logo, P_{YZ} é uma isometria.

O caso geral é então consequência de (c) e (d) e da definição da relação $\leq$. Observe:

Parte (e) : $Z \leq Y$ implica que existe um isomorfismo bom entre Z e um subespaço de Y' de Y .

Assim, Z é $(I_Z + S)$ – isomorfo a Y' e então pela parte (c) teremos que a aplicação

$$P_{Y'Z} : E_{Y'} \rightarrow E_Z \text{ é uma isometria.} \quad (6)$$

Mas, $Y' \leq Y$ pois $Y' \subset Y$, logo pela parte (d) temos que a aplicação

$$P_{YY'} : E_Y \rightarrow E_{Y'} \text{ é uma isometria.} \quad (7)$$

Agora, como $Z \leq Y' \leq Y$ pela Proposição 6.1.6 temos : $P_{Y'Z} P_{YY'} = P_{YZ}$.

Assim dado $\alpha_Y \in E_Y$ segue de (6) e (7) que:

$$P_{YZ}(\alpha_Y) = P_{Y'Z} P_{YY'}(\alpha_Y) \Rightarrow ||| P_{YZ}(\alpha_Y) |||_Z = ||| P_{Y'Z}(P_{YY'}(\alpha_Y)) |||_Z = ||| P_{YY'}(\alpha_Y) |||_Z = ||| \alpha_Y |||_Y$$

Logo, $||| P_{YZ}(\alpha_Y) |||_Z = ||| \alpha_Y |||_Y, \forall \alpha_Y \in E_Y$. ■

6.2 Um produto para os elementos de E_Y

Nesta seção daremos a definição de um produto para os elementos de E_Y , similar a composição de operadores lineares.

Definição 6.2.1 *Sejam Y e Z em G_X , denotaremos por E_{ZY} o espaço dos elementos de E_Z que possuem um representante T tal que $\text{Im} T \subset Y$, isto é :*

$$E_{ZY} = \{ \alpha_Z \in E_Z / \exists T \in \alpha_Z, T : Z \rightarrow X \text{ com } \text{Im} T \subset Y \}.$$

Definição 6.2.2 *Sejam Y e Z em G_X , definimos então a seguinte aplicação*

$$\begin{aligned} \otimes : E_Y \times E_{ZY} &\rightarrow E_Z \\ (\overline{T}, \overline{U}) &\rightarrow \otimes(\overline{T}, \overline{U}) = \overline{T} \otimes \overline{U} = \overline{TU} \end{aligned}$$

onde T é um representante em $L(Y, X)$, e U um representante em $L(Z, X)$ tal que $\text{Im} U \subset Y$.

Observação 6.2.3 *Vamos agora mostrar que a aplicação $\otimes$ está bem definida.*

Como $U : Z \rightarrow Y \subset X$ e $T : Y \rightarrow X$, então TU está bem definida e $TU : Z \rightarrow X$.

Logo $\overline{TU} \in E_Z$.

Verifiquemos agora que $\otimes$ não depende da escolha dos representantes, isto é:

$$\overline{T_1} = \overline{T_2} \text{ e } \overline{U_1} = \overline{U_2} \Rightarrow \overline{T_1} \otimes \overline{U_1} = \overline{T_2} \otimes \overline{U_2}.$$

De fato, por hipótese temos: $\overline{T_1} = \overline{T_2} \Rightarrow T_1 - T_2 \in S(Y, X)$ e $\overline{U_1} = \overline{U_2} \Rightarrow U_1 - U_2 \in S(Z, Y)$.

Vamos então mostrar que $\overline{T_1 U_1} = \overline{T_2 U_2}$.

$$T_1 U_1 - T_2 U_2 = T_1 U_1 - T_2 U_2 - T_1 U_2 + T_1 U_2 = T_1(U_1 - U_2) + (T_1 - T_2)U_2.$$

Daí pelo Corolário 3.1.5 e pela Proposição 3.1.6 segue que:

$$T_1 U_1 - T_2 U_2 \in S(Z, X) \Rightarrow T_1 U_1 \in \overline{T_2 U_2} \Rightarrow \overline{T_1 U_1} = \overline{T_2 U_2} \Rightarrow \overline{T_1} \otimes \overline{U_1} = \overline{T_2} \otimes \overline{U_2}.$$

Proposição 6.2.4 A aplicação $\otimes$ definida anteriormente é bilinear e $||\otimes|| \leq 1$.

Prova. Sejam $\overline{T} \in E_Y$ e $\overline{U_1}, \overline{U_2} \in E_{ZY}$.

$$\begin{aligned} \otimes(\overline{T}, \overline{U_1} + \overline{U_2}) &= \overline{T} \otimes (\overline{U_1} + \overline{U_2}) = \overline{T(U_1 + U_2)} = \overline{TU_1 + TU_2} = \overline{TU_1} + \overline{TU_2} = \overline{T} \otimes \overline{U_1} + \overline{T} \otimes \overline{U_2} \\ &= \otimes(\overline{T}, \overline{U_1}) + \otimes(\overline{T}, \overline{U_2}). \end{aligned}$$

Sejam $\overline{T} \in E_Y$, $\overline{U} \in E_{ZY}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, assim:

$$\otimes(\overline{T}, \lambda \overline{U}) = \overline{T} \otimes \lambda \overline{U} = \overline{T(\lambda U)} = \overline{\lambda(TU)} = \lambda \overline{TU} = \lambda \overline{T} \otimes \overline{U} = \lambda \otimes(\overline{T}, \overline{U}).$$

Logo, $\otimes$ é linear na segunda variável.

De forma análoga provamos que $\otimes$ é linear na primeira variável.

Portanto, $\otimes$ é uma aplicação bilinear.

Vamos agora mostrar que $||\otimes|| \leq 1$.

Lembrando que $||\otimes|| = \sup \{ ||\otimes(\overline{T}, \overline{U})|| : ||\overline{T}||_Y \leq 1 \text{ e } ||\overline{U}||_Z \leq 1 \}$ temos:

$|||\otimes(\bar{T}, \bar{U})|||_Z = |||\bar{T}\bar{U}|||_Z = ||TU||_Z \leq ||T||_Y ||U||_Z \Rightarrow |||\otimes(\frac{\bar{T}}{\|T\|_Y}, \frac{\bar{U}}{\|U\|_Z})|||_Z \leq 1$. Assim segue que $||\otimes|| \leq 1$. ■

Proposição 6.2.5 *Sejam Y e Z em G_X e $Y' \leq Y$. Então $E_{ZY'} \subset E_{ZY}$.*

Prova. Seja $\alpha_Z \in E_{ZY'}$, daí temos:

- a) Existe T representante de α_Z com $T : Z \rightarrow X$ e $\text{Im} T \subset Y'$;
- b) Por hipótese, existe um isomorfismo bom, entre Y' e um subespaço Y'' de Y , $I_{Y'} + S : Y' \rightarrow Y''$.

Logo por (a) e (b) segue, $(I_{Y'} + S)T : Z \rightarrow X$ está bem definida e portanto $\overline{(I_{Y'} + S)T} \in E_Z$ e como $\text{Im}(I_{Y'} + S)T \subset Y$ segue que $\overline{(I_{Y'} + S)T} \in E_{ZY}$. (♦)

Vamos agora mostrar que $\overline{(I_{Y'} + S)T} = \bar{T} = \alpha_Z$. De fato:

$(I_{Y'} + S)T - T = I_{Y'}T + ST - T = T + ST - T = ST \in S(Z, X)$. Logo, $(I_{Y'} + S)T \in \bar{T} \Rightarrow \overline{(I_{Y'} + S)T} = \bar{T} = \alpha_Z$.

Assim por (♦) temos que $\alpha_Z \in E_{ZY}$. Logo mostramos que $\alpha_Z \in E_{ZY'} \Rightarrow \alpha_Z \in E_{ZY}$.

Portanto, $E_{ZY'} \subset E_{ZY}$. ■

Proposição 6.2.6 *Sejam Y e Z em G_X , e seja $\alpha_Y \in E_Y$. Então existe $Y_1 \leq Y$ tal que $P_{Y_1}(\alpha_Y) \in E_{Y_1Z}$.*

Prova.

- (a) Se $\alpha_Y = \bar{0}$, isto é, $\alpha_Y = S(Y, X)$, basta tomarmos $Y_1 = Y$ pois daí teremos:

$$Y_1 \leq Y \text{ e } P_{Y_1}(\bar{0}) = \bar{0} \in E_{Y_1Z}.$$

- (b) Suponhamos agora que $\alpha_Y \neq \bar{0}$.

Seja $T \in L(Y, X)$ um representante de α_Y . Como $\alpha_Y \neq \bar{0}$, segue que T não é estritamente singular, logo existe Y_2 subespaço fechado de Y , com dimensão infinita, tal que:

$T : Y_2 \rightarrow T(Y_2)$ é um isomorfismo. (1)

Logo dados $T(Y_2)$ e Z em G_X , pelo Lema 4.6 temos que existe um isomorfismo bom entre W subespaço de $T(Y_2)$ e Z' subespaço de Z .

Consideremos então Y_1 subespaço de Y_2 , tal que $T(Y_1) = W$. (possível por (1)).

Assim temos:

i) $Y_1 \leq Y$ pois $Y_1 \subset Y_2 \subset Y$

$$\begin{array}{ccccc}
 & T|_{Y_1} & & I_W + S & \\
 \text{ii) } Y_1 & \xrightarrow{\quad} & W & \xrightarrow{\quad} & Z' \subset Z \\
 & \downarrow & & & \uparrow \\
 & & & (I_W + S)T|_{Y_1} &
 \end{array}$$

Logo $(I_W + S)T|_{Y_1} : Y_1 \rightarrow X$ está bem definida e $\text{Im}[(I_W + S)T|_{Y_1}] \subset Z' \subset Z$.

Portanto: $\overline{(I_W + S)T|_{Y_1}} \in E_{Y_1 Z}$.

Agora, pela proposição anterior é fácil mostrar que $\overline{(I_W + S)T|_{Y_1}} = \overline{T|_{Y_1}}$.

Assim, $\overline{T|_{Y_1}} \in E_{Y_1 Z}$. (2)

Mas, por outro lado como $Y_1 \subset Y$ temos o seguinte: $P_{Y_1}(\alpha_Y) = P_{Y_1}(\overline{T}) = \overline{T(I_{Y_1} + 0)} = \overline{T|_{Y_1}}$.

Segue então por (2) que $P_{Y_1}(\alpha_Y) \in E_{Y_1 Z}$.

Assim exibimos $Y_1 \leq Y$ tal que $P_{Y_1}(\alpha_Y) \in E_{Y_1 Z}$. ■

O ESPAÇO QUOCIENTE “E”

7.1 A construção do espaço quociente “E”

Nesta seção faremos o seguinte: dado X um espaço de Banach H.I., para cada $Y \in G_X$, tomaremos um elemento $\alpha_Y \in E_Y$, teremos assim uma família no espaço $l_\infty((E_Y)_{Y \in G_X})$. Definiremos então o que é uma família “coerente” para em seguida construirmos o espaço E .

Definição 7.1.1 *Seja X um espaço de Banach hereditariamente indecomponível. Definimos:*

$$l_\infty((E_Y)_{Y \in G_X}) = \{ (\alpha_Y)_{Y \in G_X} / \exists M \in \mathbb{R}_+^* : |||\alpha_Y|||_Y \leq M, \forall Y \in G_X \}.$$

Observação 7.1.2 *É fácil verificar que $l_\infty((E_Y)_{Y \in G_X})$ é um espaço vetorial normado onde*

$$||(\alpha_Y)_Y|| = \sup_{Y \in G_X} |||\alpha_Y|||_Y.$$

Definição 7.1.3 *Um elemento $(\alpha_Y)_{Y \in G_X} \in l_\infty((E_Y)_{Y \in G_X})$ é chamado coerente se existe $Y_0 \in G_X$ tal que para todo $Y \leq Y_0$ temos $\alpha_Y = P_{Y_0 Y}(\alpha_{Y_0})$.*

Observação 7.1.4 *Denotaremos por Ω o conjunto dos elementos coerentes de $l_\infty((E_Y)_{Y \in G_X})$.*

Proposição 7.1.5 *Ω é um espaço linear.*

Prova. Basta mostrarmos que Ω é um subespaço de $l_\infty((E_Y)_{Y \in G_X})$.

(i) $0 \in \Omega$, pois sendo $P_{Y_0 Y}$ linear, segue que $\forall Y_0 \in G_X, \forall Y \leq Y_0$ temos $P_{Y_0 Y}(0) = 0$.

(ii) Sejam $(\alpha_Y)_Y \in \Omega$ e λ um escalar.

$$(\alpha_Y)_Y \in \Omega \Rightarrow \exists Y_0 \in G_X : \forall Y \leq Y_0, \alpha_Y = P_{Y_0 Y}(\alpha_{Y_0}). \quad (1)$$

Afirmação : $\lambda(\alpha_Y)_Y \in \Omega$. De fato, como $\lambda(\alpha_Y)_Y = (\lambda\alpha_Y)_Y$, utilizando (1) e do fato de que $P_{Y_0 Y}$ é linear temos:

$$P_{Y_0 Y}(\lambda\alpha_{Y_0}) = \lambda P_{Y_0 Y}(\alpha_{Y_0}) = \lambda\alpha_Y \quad \forall Y \leq Y_0.$$

Assim exibimos $Y_0 \in G_X$ tal que $\forall Y \leq Y_0, \lambda\alpha_Y = P_{Y_0 Y}(\lambda\alpha_{Y_0})$, logo $\lambda(\alpha_Y)_Y \in \Omega$.

(iii) Vamos agora mostrar que dado $(\alpha_Y)_Y \in \Omega$ e $(\beta_Y)_Y \in \Omega$ temos $(\alpha_Y)_Y + (\beta_Y)_Y \in \Omega$.

$$(\alpha_Y)_Y \in \Omega \Rightarrow \exists Y_1 \in G_X : \forall Y \leq Y_1, \alpha_Y = P_{Y_1 Y}(\alpha_{Y_1}). \quad (2)$$

$$(\beta_Y)_Y \in \Omega \Rightarrow \exists Y_2 \in G_X : \forall Y \leq Y_2, \beta_Y = P_{Y_2 Y}(\beta_{Y_2}). \quad (3)$$

Agora, dados Y_1 e $Y_2 \in G_X$, pelo Lema 4.6 temos que $\exists Y_0 \in G_X$ tal que $Y_0 \leq Y_1$ e $Y_0 \leq Y_2$.

$$\text{Assim segue de (2) e (3) que } \alpha_{Y_0} = P_{Y_1 Y_0}(\alpha_{Y_1}) \text{ e } \beta_{Y_0} = P_{Y_2 Y_0}(\beta_{Y_2}). \quad (4)$$

Logo, dado $\forall Y \leq Y_0$, decorre de (4), da Proposição 6.1.6, de (2) e (3) que:

$$P_{Y_0 Y}(\alpha_{Y_0} + \beta_{Y_0}) = P_{Y_0 Y}(\alpha_{Y_0}) + P_{Y_0 Y}(\beta_{Y_0}) = P_{Y_0 Y}(P_{Y_1 Y_0}(\alpha_{Y_1})) + P_{Y_0 Y}(P_{Y_2 Y_0}(\beta_{Y_2})) =$$

$$P_{Y_0 Y}P_{Y_1 Y_0}(\alpha_{Y_1}) + P_{Y_0 Y}P_{Y_2 Y_0}(\beta_{Y_2}) = P_{Y_1 Y}(\alpha_{Y_1}) + P_{Y_2 Y}(\beta_{Y_2}) = \alpha_Y + \beta_Y.$$

Assim exibimos $Y_0 \in G_X$ tal que $\forall Y \leq Y_0$ temos $P_{Y_0 Y}(\alpha_{Y_0} + \beta_{Y_0}) = \alpha_Y + \beta_Y$.

Logo, $(\alpha_Y)_Y + (\beta_Y)_Y \in \Omega$.

Por (i), (ii) e (iii) segue que Ω é um subespaço de $l_\infty((E_Y)_{Y \in G_X})$. ■

Vamos agora definir uma semi-norma no espaço Ω .

Definição 7.1.6 Dado $(\alpha_Y)_{Y \in G_X} \in \Omega$ segue do Lema 6.1.7 que $\| \alpha_Y \|_Y = \| \alpha_{Y_0} \|_{Y_0} \forall Y \leq Y_0$, pois $\alpha_Y = P_{Y_0 Y}(\alpha_{Y_0})$ e $P_{Y_0 Y}$ é uma isometria. Assim podemos definir a seguinte aplicação em Ω :

$$\begin{aligned} \psi : \Omega &\rightarrow R_+ \\ (\alpha_Y)_Y &\rightarrow \psi((\alpha_Y)_Y) = \| \alpha_{Y_0} \|_{Y_0}. \end{aligned}$$

Observação 7.1.7 Vamos mostrar que a aplicação ψ está bem definida.

$$(\alpha_Y)_Y \in \Omega \Rightarrow \exists Y_0 \in G_X : \forall Y \leq Y_0, \alpha_Y = P_{Y_0 Y}(\alpha_{Y_0}). \quad (1)$$

$$\text{Suponhamos então que exista } Y_1 \in G_X \text{ tal que } \forall Y \leq Y_1 \text{ temos } \alpha_Y = P_{Y_1 Y}(\alpha_{Y_1}). \quad (2)$$

Vamos mostrar que $\| \alpha_{Y_0} \|_{Y_0} = \| \alpha_{Y_1} \|_{Y_1}$. De fato, dados Y_0 e $Y_1 \in G_X$ pelo Lema 4.6 temos que $\exists W \in G_X$ tal que $W \leq Y_0$ e $W \leq Y_1$.

Assim segue de (1), (2) e do Lema 6.1.7 que:

$$\begin{aligned} P_{Y_0 W}(\alpha_{Y_0}) = \alpha_W &\Rightarrow \| \alpha_W \|_W = \| P_{Y_0 W}(\alpha_{Y_0}) \|_W = \| \alpha_{Y_0} \|_{Y_0}. \\ &e \\ P_{Y_1 W}(\alpha_{Y_1}) = \alpha_W &\Rightarrow \| \alpha_W \|_W = \| P_{Y_1 W}(\alpha_{Y_1}) \|_W = \| \alpha_{Y_1} \|_{Y_1}. \end{aligned}$$

Logo, $\| \alpha_{Y_0} \|_{Y_0} = \| \alpha_{Y_1} \|_{Y_1}$.

Proposição 7.1.8 A aplicação ψ definida anteriormente é uma semi norma em Ω .

Prova. (i) Sejam $(\alpha_Y)_Y \in \Omega$ e λ um escalar. Assim temos:

$$\lambda(\alpha_Y)_Y \in \Omega \text{ e } \Psi(\lambda(\alpha_Y)_Y) = \| \lambda \alpha_{Y_0} \|_{Y_0} = |\lambda| \cdot \| \alpha_{Y_0} \|_{Y_0} = |\lambda| \cdot \Psi((\alpha_Y)_Y).$$

Logo, $\Psi(\lambda(\alpha_Y)_Y) = |\lambda| \cdot \Psi((\alpha_Y)_Y)$.

(ii) Sejam $(\alpha_Y)_Y$ e $(\beta_Y)_Y \in \Omega$. Pela Proposição 7.1.5 segue que $\exists Y_0 \in G_X$ tal que $\forall Y \leq Y_0$ temos $\alpha_Y = P_{Y_0 Y}(\alpha_{Y_0})$, $\beta_Y = P_{Y_0 Y}(\beta_{Y_0})$ e portanto $P_{Y_0 Y}(\alpha_{Y_0} + \beta_{Y_0}) = \alpha_Y + \beta_Y$. Assim temos que $(\alpha_Y)_Y + (\beta_Y)_Y \in \Omega$ e vale:

$$\Psi((\alpha_Y)_Y + (\beta_Y)_Y) = ||| \alpha_{Y_0} + \beta_{Y_0} |||_{Y_0} \leq ||| \alpha_{Y_0} |||_{Y_0} + ||| \beta_{Y_0} |||_{Y_0} = \Psi((\alpha_Y)_Y) + \Psi((\beta_Y)_Y).$$

Logo, $\Psi((\alpha_Y)_Y + (\beta_Y)_Y) \leq \Psi((\alpha_Y)_Y) + \Psi((\beta_Y)_Y)$.

Assim, por (i) e (ii) segue que Ψ é uma semi-norma em Ω . ■

Observação 7.1.9 Denotaremos por $\Gamma = \{ (\alpha_Y)_{Y \in G_X} \in \Omega : \Psi((\alpha_Y)_Y) = 0 \}$.

Proposição 7.1.10 Γ é um subespaço fechado de Ω .

Prova. Primeiramente vamos mostrar que Γ é subespaço de Ω .

- $0 \in \Gamma$ pois $0 = (\alpha_Y)_Y$ onde $\alpha_Y = S(Y, X) \forall Y \in G_X$ e portanto segue que:

$$\Psi(0) = ||| \alpha_Y |||_Y = ||| S |||_Y = 0 \quad \forall S \in \alpha_Y.$$

- Dados $(\alpha_Y)_Y \in \Gamma$ e λ um escalar, segue da Proposição 7.1.8 (i) que:

$$\Psi(\lambda(\alpha_Y)_Y) = |\lambda| \cdot \Psi((\alpha_Y)_Y) = 0, \text{ pois } \Psi((\alpha_Y)_Y) = 0. \text{ Logo } \lambda(\alpha_Y)_Y \in \Gamma.$$

- Sejam $(\alpha_Y)_Y$ e $(\beta_Y)_Y \in \Gamma$, então $\Psi((\alpha_Y)_Y) = 0$ e $\Psi((\beta_Y)_Y) = 0$. Assim, segue da Proposição 7.1.8 (ii) que:

$$\Psi((\alpha_Y)_Y + (\beta_Y)_Y) \leq \Psi((\alpha_Y)_Y) + \Psi((\beta_Y)_Y) = 0 \Rightarrow \Psi((\alpha_Y)_Y + (\beta_Y)_Y) = 0 \Rightarrow (\alpha_Y)_Y + (\beta_Y)_Y \in \Gamma.$$

Vamos agora mostrar que Γ é fechado.

Para tanto é suficiente provar que a aplicação Ψ é contínua em Ω , pois assim Γ será a imagem inversa de um fechado ($\Gamma = \Psi^{-1}(\{0\})$) por uma aplicação contínua, sendo portanto fechado.

Afirmção: Ψ é contínua em Ω . De fato, seja $(\beta_Y)_Y \in \Omega$. Vamos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que:

$$||(\alpha_Y)_Y - (\beta_Y)_Y|| < \delta \Rightarrow |\Psi((\alpha_Y)_Y) - \Psi((\beta_Y)_Y)| < \varepsilon.$$

De fato, basta tomarmos $\delta = \varepsilon$, pois sendo Ψ uma semi-norma, segue da desigualdade triangular e do fato de que $||(\alpha_Y)_Y|| = \sup_{Y \in G_X} ||\alpha_Y||_Y$:

$$|\Psi((\alpha_Y)_Y) - \Psi((\beta_Y)_Y)| \leq \Psi((\alpha_Y)_Y - (\beta_Y)_Y) = ||\alpha_{Y_0} - \beta_{Y_0}||_{Y_0} \leq ||(\alpha_Y - \beta_Y)_Y|| < \delta.$$

Agora, como $(\beta_Y)_Y \in \Omega$ é arbitrário, segue que Ψ é contínua em Ω . ■

Definição 7.1.11 Sendo $\Gamma = \{(\alpha_Y)_{Y \in G_X} \in \Omega : \psi((\alpha_Y)_Y) = 0\}$ subespaço fechado de Ω , definimos então o seguinte espaço quociente: $E = \Omega/\Gamma$.

Observações 7.1.12

Denotaremos por $\alpha = \overline{(\alpha_Y)_{Y \in G_X}}$ um elemento de E .

Proposição 7.1.13 Considere a seguinte aplicação $||\cdot||: E \rightarrow \mathbf{R}_+$ dada por $||\alpha|| = \psi((\alpha_Y)_Y)$, $\forall (\alpha_Y)_Y \in \alpha$. $||\cdot||$ está bem definida e é uma norma em E .

Prova. Segue diretamente das Proposições 7.1.8 e 1.3.5. ■

Observação 7.1.14 Decorre das Proposições 7.1.13 e 6.1.3 que $||\alpha|| = ||\alpha_{Y_0}||_{Y_0} = ||T||_{Y_0}$ $\forall T \in \alpha_{Y_0}$.

Observação 7.1.14 Decorre das Proposições 7.1.13 e 6.1.3 que $||\alpha|| = ||\alpha_{Y_0}||_{Y_0} = ||T||_{Y_0}$
 $\forall T \in \alpha_{Y_0}$.

Observação 7.1.15 Denotaremos por $(\alpha_Y)_{Y \leq Z}$ a família definida por
$$\begin{cases} \alpha_Y \in E_Y & \text{se } Y \leq Z \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Proposição 7.1.16 Considere o elemento $\alpha = \overline{(\alpha_Y)_{Y \in G_X}} \in E$. Então $(\alpha_Y)_{Y \leq Z} \in \alpha$, isto é ,
 $\overline{(\alpha_Y)_{Y \in G_X}} = \overline{(\alpha_Y)_{Y \leq Z}}$.

Prova. Como $\alpha = \overline{(\alpha_Y)_{Y \in G_X}} \in E$, segue que $(\alpha_Y)_{Y \in G_X} \in \Omega$, logo existe $Z \in G_X$ tal que:

$$\alpha_Y = P_{ZY}(\alpha_Z) \quad \forall Y \leq Z.$$

Consideremos então o seguinte elemento de Ω : $(\alpha_Y)_{Y \leq Z}$.

Vamos mostrar que $(\alpha_Y)_{Y \leq Z} \in \alpha$.

Considere a família $(\beta_Y)_{Y \in G_X}$, onde
$$\beta_Y = \begin{cases} \alpha_Y \in E_Y & \text{se } Y \leq Z \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

É fácil verificar que $(\beta_Y)_{Y \in G_X} = (\alpha_Y)_{Y \leq Z} \in \Omega$, e portanto $(\alpha_Y)_{Y \in G_X} - (\beta_Y)_{Y \in G_X} \in \Omega$, e mais,
 $Z \in G_X$ é tal que $\alpha_Y - \beta_Y = P_{ZY}(\alpha_Z - \beta_Z)$, $\forall Y \leq Z$.

Assim, lembrando que $\beta_Y = \alpha_Y \quad \forall Y \leq Z$, temos:

$$\Psi((\alpha_Y)_{Y \in G_X} - (\beta_Y)_{Y \in G_X}) = |||\alpha_Z - \beta_Z|||_Z = |||\alpha_Z - \alpha_Z|||_Z = |||0|||_Z = 0.$$

Logo, $(\alpha_Y)_{Y \in G_X} - (\beta_Y)_{Y \in G_X} \in \Gamma \Rightarrow (\beta_Y)_{Y \in G_X} \in \alpha \Rightarrow (\alpha_Y)_{Y \leq Z} \in \alpha \Rightarrow \overline{(\alpha_Y)_{Y \in G_X}} = \overline{(\alpha_Y)_{Y \leq Z}}$. ■

7.2 Um produto para os elementos de E

Nesta seção, utilizando o produto definido para os elementos de E_Y (ver definição 6.2.1) vamos definir um produto para os elementos de E . Veremos que esse produto satisfaz algumas propriedades importantes para nossa teoria.

Definição 7.2.1 *Sejam $\alpha = \overline{(\alpha_Y)}_{Y \in G_X}$ e $\beta = \overline{(\beta_Z)}_{Z \in G_X}$ elementos de E . Definimos o elemento $\alpha\beta$ de E por $\alpha\beta = \overline{(\alpha_{Y_0} \otimes \beta_Z)}_{Z \leq Z_1}$ onde $Y_0, Z_1 \in G_X$ são tais que $\alpha_Y = P_{Y_0 Y}(\alpha_{Y_0})$, $\forall Y \leq Y_0$ e $\beta_Z \in E_{Z Y_0}$ $\forall Z \leq Z_1$.*

Observação 7.2.2 *Mostraremos agora que o elemento $\alpha\beta \in E$ está bem definido, e que esse produto não depende da escolha dos representantes de α e β .*

Parte (a) Sejam $\alpha = \overline{(\alpha_Y)}_{Y \in G_X}$ e $\beta = \overline{(\beta_Z)}_{Z \in G_X}$ em E , então $(\alpha_Y)_{Y \in G_X}$ e $(\beta_Z)_{Z \in G_X}$ são duas famílias coerentes, logo existem Y_0 e $Z_0 \in G_X$ tais que:

$$\forall Y \leq Y_0 \text{ e } \forall Z \leq Z_0 \text{ temos } \alpha_Y = P_{Y_0 Y}(\alpha_{Y_0}) \text{ e } \beta_Z = P_{Z_0 Z}(\beta_{Z_0}). \quad (1)$$

Agora, dado Y_0 e $Z_0 \in G_X$ e $\beta_{Z_0} \in E_{Z_0}$, segue da Proposição 6.2.6:

$$\exists Z_1 \leq Z_0 \text{ tal que } \beta_{Z_1} = P_{Z_0 Z_1}(\beta_{Z_0}) \in E_{Z_1 Y_0}. \quad (2)$$

Logo, existe T um representante de β_{Z_1} tal que $T : Z_1 \rightarrow X$ com $\text{Im} T \subset Y_0$. (3)

Assim, $\forall Z \leq Z_1$, segue de (2), da Proposição 6.1.6 e de (1) que:

$$P_{Z_1 Z}(\beta_{Z_1}) = P_{Z_1 Z}(P_{Z_0 Z_1}(\beta_{Z_0})) = P_{Z_0 Z}(\beta_{Z_0}) = \beta_Z.$$

Agora, segue de (3) que:

$$\beta_Z = P_{Z_1 Z}(\beta_{Z_1}) = P_{Z_1 Z}(\bar{T}) = \overline{T(I_Z + S)} \text{ onde } T(I_Z + S) : Z \rightarrow Y_0. \quad (4)$$

Assim dado $\alpha_{Y_0} \in E_{Y_0}$, para todo $Z \leq Z_1$, temos $\beta_Z \in E_{ZY_0}$, logo o produto $\alpha_{Y_0} \otimes \beta_Z$ está bem definido.

Parte (b) Vamos agora mostrar que $(\alpha_{Y_0} \otimes \beta_Z)_{Z \leq Z_1} \in \Omega$. De fato, seja U um representante de α_{Y_0} e T um representante de β_{Z_1} tal que $\text{Im} T \subset Y_0$, então temos $U : Y_0 \rightarrow X$ e $T : Z_1 \rightarrow Y_0$.

Assim para todo $Z \leq Z_1$ segue que:

$$P_{Z_1 Z}(\alpha_{Y_0} \otimes \beta_{Z_1}) = P_{Z_1 Z}(\bar{U} \otimes \bar{T}) = P_{Z_1 Z}(\overline{UT}) = \overline{(UT)(I_Z + S)} = \overline{U(T(I_Z + S))}. \quad (5)$$

Agora, denotando por $F = T(I_Z + S)$ e lembrando que $I_Z + S : Z \rightarrow Z' \subset Z_1$ temos:

$F : Z \rightarrow Y_0$, e portando $\bar{F} \in E_{ZY_0}$, e por (4) temos que $\bar{F} = \beta_Z$, assim segue de (5) que:

$$P_{Z_1 Z}(\alpha_{Y_0} \otimes \beta_{Z_1}) = \overline{UF} = \bar{U} \otimes \bar{F} = \alpha_{Y_0} \otimes \beta_Z \quad \forall Z \leq Z_1.$$

Portanto, $(\alpha_{Y_0} \otimes \beta_Z)_{Z \leq Z_1} \in \Omega \Rightarrow \alpha\beta = \overline{(\alpha_{Y_0} \otimes \beta_Z)_{Z \leq Z_1}} \in E$.

Parte (c) Mostraremos agora que para todo $Y \leq Y_0$, $\exists Z_1$ tal que $\forall Z \leq Z_1$, temos $\alpha_Y \otimes \beta_Z = \alpha_{Y_0} \otimes \beta_Z$.

Seja $Y \leq Y_0$. Pela parte (a) sabemos que existe $Z \in G_X$ tal que $\beta_Z \in E_{ZY}$. Daí, segue da Proposição 6.2.5 que $E_{ZY} \subset E_{ZY_0}$, logo $\beta_Z \in E_{ZY_0}$ e portanto os elementos $\alpha_Y \otimes \beta_Z$ e $\alpha_{Y_0} \otimes \beta_Z$ estão bem definidos.

Sendo T um representante de α_{Y_0} e lembrando que $\alpha_Y = P_{Y_0 Y}(\alpha_{Y_0})$, $\forall Y \leq Y_0$, segue:

$$P_{Y_0 Y}(\bar{T}) = \overline{T(I_Y + S)} \text{ onde } I_Y + S : Y \rightarrow Y' \subset Y_0.$$

Assim $T(I_Y + S)$ é um representante de α_Y , e considerando U , um representante de β_Z tal que $\text{Im}U \subset Y$ temos:

$$\alpha_Y \otimes \beta_Z = \overline{T(I_Y + S)} \otimes \overline{U} = \overline{(T(I_Y + S))U} = \overline{T((I_Y + S)U)} = \overline{T} \otimes \overline{(I_Y + S)U}, \quad (\diamond)$$

onde $(I_Y + S)U : Z \rightarrow Y' \subset Y_0$.

Agora, como $(I_Y + S)U - U = I_Y U + SU - U = U + SU - U = SU$ segue da Proposição 3.1.6 que $(I_Y + S)U - U$ é estritamente singular, logo $(I_Y + S)U \in \overline{U} = \beta_Z$.

Assim, segue de $(\diamond)$ que $\forall Y \leq Y_0, \exists Z_1$ tal que $\forall Z \leq Z_1 \quad \alpha_Y \otimes \beta_Z = \alpha_{Y_0} \otimes \beta_Z$.

Parte (d) Vamos mostrar agora que se existem Y_1 e $Z_2 \in G_X$ tais que $\alpha\beta = \overline{(\alpha_{Y_1} \otimes \beta_Z)}_{Z \leq Z_2}$ então

$$\overline{(\alpha_{Y_1} \otimes \beta_Z)}_{Z \leq Z_2} = \overline{(\alpha_{Y_0} \otimes \beta_Z)}_{Z \leq Z_1}.$$

Dados Y_0 e $Y_1 \in G_X$, pelo Lema 4.6 sabemos que existe $Y_2 \in G_X$ tal que $Y_2 \leq Y_0$ e $Y_2 \leq Y_1$. Assim pelo que foi provado na parte (c) temos:

$$\exists Z'_1, \text{ tal que } \forall Z \leq Z'_1, (\alpha_{Y_2} \otimes \beta_Z) = (\alpha_{Y_0} \otimes \beta_Z)$$

$$\exists Z'_2, \text{ tal que } \forall Z \leq Z'_2, (\alpha_{Y_2} \otimes \beta_Z) = (\alpha_{Y_1} \otimes \beta_Z)$$

Seja Z_3 tal que $Z_3 \leq Z'_1$ e $Z_3 \leq Z'_2$, então $\forall Z \leq Z_3$ temos $(\alpha_{Y_1} \otimes \beta_Z) = (\alpha_{Y_0} \otimes \beta_Z)$.

Portanto, segue da Proposição 7.1.16 que $\overline{(\alpha_{Y_1} \otimes \beta_Z)}_{Z \leq Z_2} = \overline{(\alpha_{Y_0} \otimes \beta_Z)}_{Z \leq Z_1}$.

Parte (e) Finalmente, vamos mostrar que $\alpha\beta$ não depende da escolha dos representantes de α e β .

Sejam $(\delta_Y)_{Y \in G_X} \in \alpha = \overline{(\alpha_Y)}_{Y \in G_X}$ e $(\omega_Z)_{Z \in G_X} \in \beta = \overline{(\beta_Z)}_{Z \in G_X}$, daí temos:

$$(\delta_Y)_{Y \in G_X} - (\alpha_Y)_{Y \in G_X} \in \Gamma \Rightarrow \Psi((\delta_Y)_{Y \in G_X} - (\alpha_Y)_{Y \in G_X}) = 0 \Rightarrow ||| \delta_{Y_0} - \alpha_{Y_0} |||_{Y_0} = 0 \Rightarrow \delta_{Y_0} = \alpha_{Y_0}.$$

Assim, $\exists Y_0$ tal que $\omega_Y = \beta_Y, \forall Y \leq Y_0$. (6)

De forma análoga, sabendo que $(\omega_Z)_{Z \in G_X} \in \beta = \overline{(\beta_Z)_{Z \in G_X}}$ teremos $\omega_{Z_0} = \beta_{Z_0}$.

Assim, $\exists Z_0$ tal que $\omega_Z = \beta_Z, \forall Z \leq Z_0$. (7)

Afirmção: $(\delta_{Y_0} \otimes \omega_Z)_{Z \leq Z_2} \in \overline{(\alpha_{Y_0} \otimes \beta_Z)_{Z \leq Z_1}}$. De fato.

$(\delta_{Y_0} \otimes \omega_Z)_{Z \leq Z_2} - (\alpha_{Y_0} \otimes \beta_Z)_{Z \leq Z_1} \in \Omega$ e portanto:

$$\Psi((\delta_{Y_0} \otimes \omega_Z)_{Z \leq Z_2} - (\alpha_{Y_0} \otimes \beta_Z)_{Z \leq Z_1}) = ||| \delta_{Y_0} \otimes \omega_Z - \alpha_{Y_0} \otimes \beta_Z |||_Z, \forall Z \leq Z_0.$$

Logo de (6) e (7) segue que $\Psi((\delta_{Y_0} \otimes \omega_Z)_{Z \leq Z_2} - (\alpha_{Y_0} \otimes \beta_Z)_{Z \leq Z_1}) = 0$.

Assim, $(\delta_{Y_0} \otimes \omega_Z)_{Z \leq Z_2} - (\alpha_{Y_0} \otimes \beta_Z)_{Z \leq Z_1} \in \Gamma \Rightarrow (\delta_{Y_0} \otimes \omega_Z)_{Z \leq Z_2} \in \overline{(\alpha_{Y_0} \otimes \beta_Z)_{Z \leq Z_1}}$.

Proposição 7.2.3 *Sejam α e β em E . Então $||\alpha\beta|| \leq ||\alpha|| \cdot ||\beta||$.*

Prova. Dados α e $\beta \in E$, segue das Proposições 7.1.13 e 6.2.4:

$$||\alpha\beta|| = ||\overline{(\alpha_{Y_0} \otimes \beta_Z)_{Z \leq Z_1}}|| = \Psi((\alpha_{Y_0} \otimes \beta_Z)_{Z \leq Z_1}) = ||| \alpha_{Y_0} \otimes \beta_{Z_1} |||_{Z_1} \leq$$

$$||\otimes|| \cdot ||\alpha_{Y_0}||_{Y_0} \cdot ||\beta_{Z_1}||_{Z_1} \leq ||\alpha_{Y_0}||_{Y_0} \cdot ||\beta_{Z_1}||_{Z_1} = ||\alpha|| \cdot ||\beta||.$$

Portanto, $||\alpha\beta|| \leq ||\alpha|| \cdot ||\beta||$. ■

Proposição 7.2.4 *O espaço E com a multiplicação dada na definição 7.2.1 e com a norma definida na Proposição 7.1.13 possui estrutura de álgebra normada com unidade.*

Prova. Como E já possui estrutura de um espaço vetorial, basta então verificarmos as seguintes propriedades:

P1. $(\alpha\beta)\omega = \alpha(\beta\omega)$, $\forall \alpha, \beta, \omega \in E$.

P2. $\alpha(\beta + \omega) = \alpha\beta + \alpha\omega$ e $(\beta + \omega)\alpha = \beta\alpha + \omega\alpha$, $\forall \alpha, \beta, \omega \in E$.

P3. $\lambda(\alpha\beta) = (\lambda\alpha)\beta = \alpha(\lambda\beta)$, $\forall \alpha, \beta \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

P4. $\exists 1 \in E$: $\|1\| = 1$ e $\alpha 1 = 1\alpha = \alpha$, $\forall \alpha \in E$.

P5. $\|\alpha\beta\| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$, $\forall \alpha, \beta \in E$.

Verificação das propriedades:

P1. Sejam α, β e $\omega \in E$.

$$(\alpha\beta)\omega = \overline{(\alpha_{Y_0} \otimes \beta_{Z_1})_{Z \leq Z_1}} \overline{(\omega_Y)_{Y \in G_X}} = \overline{((\alpha_{Y_0} \otimes \beta_{Z_1}) \otimes \omega_Y)_{Y \leq Y_1}}.$$

Considerando agora, $T_1: Y_0 \rightarrow X$, $T_2: Z_1 \rightarrow X$ e $T_3: Y \rightarrow X$ representantes de α_{Y_0} , β_{Z_1} e ω_Y , respectivamente, tais que $\text{Im} T_2 \subset Y_0$ e $\text{Im} T_3 \subset Z_1$ temos:

$$(\alpha_{Y_0} \otimes \beta_{Z_1}) \otimes \omega_Y = (\overline{T_1} \otimes \overline{T_2}) \otimes \overline{T_3} = \overline{(T_1 T_2)} \otimes \overline{T_3} = \overline{(T_1 T_2) T_3} = \overline{T_1 (T_2 T_3)} = \overline{T_1} \otimes (\overline{T_2} \otimes \overline{T_3}) = \alpha_{Y_0} \otimes (\beta_{Z_1} \otimes \omega_Y)$$

Assim: $(\alpha\beta)\omega = \overline{((\alpha_{Y_0} \otimes \beta_{Z_1}) \otimes \omega_Y)_{Y \leq Y_1}} = \overline{(\alpha_{Y_0} \otimes (\beta_{Z_1} \otimes \omega_Y))_{Y \leq Y_1}} = \alpha(\beta\omega).$ ■

P2. Sejam α, β e $\omega \in E$. Utilizando o fato de que $\otimes$ é linear na segunda variável, temos:

$$\alpha(\beta + \omega) = \overline{(\alpha_{Y_0} \otimes \beta_Y)_{Y \leq Y_1}} + \overline{(\alpha_{Y_0} \otimes \omega_Y)_{Y \leq Y_1}} = \overline{(\alpha_{Y_0} \otimes \beta_Y)_{Y \leq Y_1}} + \overline{(\alpha_{Y_0} \otimes \omega_Y)_{Y \leq Y_1}} = \alpha\beta + \alpha\omega.$$

De forma análoga podemos mostrar que $(\beta + \omega)\alpha = \beta\alpha + \omega\alpha.$ ■

P3. Sejam $\alpha, \beta \in E$ e λ um escalar. Utilizando o fato de $\otimes$ é bilinear, temos:

$$\lambda(\alpha\beta) = \overline{\lambda(\alpha_{Y_0} \otimes \beta_Y)}_{Y \leq Y_1} = \overline{\lambda(\alpha_{Y_0} \otimes \beta_Y)}_{Y \leq Y_1} = \overline{(\lambda(\alpha_{Y_0} \otimes \beta_Y))}_{Y \leq Y_1} = \overline{((\lambda\alpha_{Y_0}) \otimes \beta_Y)}_{Y \leq Y_1} = (\lambda\alpha)\beta.$$

De forma análoga podemos mostrar que $\lambda(\alpha\beta) = \alpha(\lambda\beta)$. ■

P4. Seja $\mathbf{1} = \overline{(\bar{I}_Z)}_{Z \in G_X}$. Vamos mostrar que $\mathbf{1} \in E$ e que $\mathbf{1}\alpha = \alpha\mathbf{1} = \alpha, \forall \alpha \in E$.

Para mostrarmos que $\mathbf{1} \in E$, basta provarmos que $(\bar{I}_Z)_{Z \in G_X} \in \Omega$, o que de fato ocorre pois dado $Z \in G_X$ temos que $Z \leq X$ e assim segue que:

$$P_{XZ}(\bar{I}_X) = \overline{I_X I_Z} = \bar{I}_Z \quad \forall Z \leq X.$$

Logo $(\bar{I}_Z)_{Z \in G_X}$ é uma família coerente $\Rightarrow (\bar{I}_Z)_{Z \in G_X} \in \Omega \Rightarrow \mathbf{1} = \overline{(\bar{I}_Z)}_{Z \in G_X} \in E$.

Vamos agora mostrar que $\mathbf{1}\alpha = \alpha, \forall \alpha = \overline{(\alpha_Y)}_{Y \in G_X}$.

$$\mathbf{1}\alpha = \overline{(\bar{I}_X \otimes \alpha_Y)}_{Y \leq Y_1}. \quad (1)$$

Agora, sendo $T : Y \rightarrow X$ um representante de α_Y , temos:

$$\bar{I}_X \otimes \alpha_Y = \bar{I}_X \otimes \bar{T} = \overline{I_X T} = \bar{T} = \alpha_Y. \quad (2)$$

Assim, segue de (1), (2) e da Proposição 7.1.16 que $\mathbf{1}\alpha = \overline{(\alpha_Y)}_{Y \leq Y_1} = \overline{(\alpha_Y)}_{Y \in G_X} = \alpha$.

Vamos agora, mostrar que $\alpha\mathbf{1} = \alpha, \forall \alpha \in E$.

$$\alpha\mathbf{1} = \overline{(\alpha_{Y_0} \otimes \bar{I}_Z)}_{Z \leq Z_1} \quad (3)$$

Considerando $T : Y_0 \rightarrow X$ um representante de α_{Y_0} e $F : Z \rightarrow X$ um representante de $\bar{I}_Z$ tal que $\text{Im} F \subset Y_0$ temos $F \in \bar{I}_Z \Rightarrow F - I_Z = S \in S(Z, X) \Rightarrow F = I_Z + S \Rightarrow Z \leq Y_0$.

$$\text{Assim, } \alpha_{Y_0} \otimes \bar{I}_Z = \bar{T} \otimes \bar{F} = \overline{TF} = \overline{T(I_Z + S)} = P_{Y_0 Z}(\bar{T}) = \alpha_Z \quad \forall Z \leq Y_0. \quad (4)$$

Logo, segue de (3), (4) e também da Proposição 7.1.16, que:

$$\alpha 1 = \overline{(\alpha_{Y_0} \otimes \bar{I}_Z)_{Z \leq Z_1}} = \overline{(\alpha_Z)_{Z \leq Z_1}} = \overline{(\alpha_Y)_{Y \in G_X}} = \alpha.$$

Finalmente, falta mostrarmos que $||1|| = 1$, o que de fato ocorre, pois, segue das proposições 7.1.13 e 6.1.3 que:

$$||1|| = ||\overline{(\bar{I}_Z)_{Z \in G_X}}|| = \Psi((\bar{I}_Z)_{Z \in G_X}) = ||\bar{I}_X||_X = ||I_X||_X = 1. \quad \blacksquare$$

P5. Ver demonstração da Proposição 7.2.3. $\blacksquare$

7.3 Uma isometria entre os espaços E e C

O objetivo desta seção é provar através de alguns conceitos novos e do Teorema de Gelfand-Mazur (Teorema 2.2.3) que o espaço E construído anteriormente é isométricamente isomorfo ao espaço C dos números complexos.

Definição 7.3.1 *Seja X um espaço de Banach H.I. Para cada $Y \in G_X$ definimos a seguinte aplicação:*

$$\begin{aligned} e : L(Y, X) &\rightarrow E \\ T &\rightarrow e(T) = \overline{(P_{YZ}(\overline{T}))}_{Z \leq Y}. \end{aligned}$$

Observação 7.3.2 *Vamos mostrar que a aplicação “e” está bem definida.*

Dado $T \in L(Y, X)$, denotando a classe $\overline{T}$ por α_Y e por α_Z a classe $P_{YZ}(\overline{T})$, temos:

$$(\alpha_Z)_{Z \leq Y} \in \Omega \text{ pois, } \forall Z \leq Y, \alpha_Z = P_{YZ}(\alpha_Y), \text{ logo } \overline{(P_{YZ}(\overline{T}))}_{Z \leq Y} \in E.$$

Proposição 7.3.3 *A aplicação “e” definida anteriormente é linear.*

Prova. Decorre diretamente do fato de que a aplicação P_{YZ} é linear, ver Lema 6.1.7. ■

Proposição 7.3.4 *Todo elemento de E é da forma $e(T)$ para algum T definido sobre algum $Y \in G_X$.*

Prova. Seja $\alpha = \overline{(\alpha_Z)}_{Z \in G_X} \in E$.

Existe $Y \in G_X$, tal que $\forall Z \leq Y$ temos $\alpha_Z = P_{YZ}(\alpha_Y)$. (1)

Consideremos então o seguinte elemento de E: $(\alpha_Z)_{Z \leq Y}$.

Pela Proposição 7.1.16 segue que: $\overline{(\alpha_Z)}_{Z \in G_X} = \overline{(\alpha_Z)}_{Z \leq Y}$.

Logo $\alpha = \overline{(\alpha_Z)}_{Z \leq Y} \in E$ e por (1) temos: $\alpha = \overline{(\alpha_Z)}_{Z \leq Y} = \overline{(P_{YZ}(\alpha_Y))}_{Z \leq Y} \in E$.

Agora, sendo T um representante de α_Y , segue que $\alpha = \overline{(P_{YZ}(\overline{T}))}_{Z \leq Y} = e(T)$.

Como $\alpha \in E$ é arbitrário, segue que todo elemento de E é da forma $e(T)$. ■

Observação 7.3.5 Sendo $\mathbf{1} = \overline{(\bar{I}_Z)}_{Z \in G_X}$ e lembrando que $P_{XZ}(\bar{I}_X) = \bar{I}_Z$, $\forall Z \leq X$, segue da Proposição 7.1.16 que $\mathbf{1} = \overline{(P_{XZ}(\bar{I}_X))}_{Z \leq X}$. Assim temos que $\mathbf{1} = e(I_X)$. De forma análoga também podemos mostrar que fixado $Y \in G_X$, temos $\mathbf{1} = e(I_Y)$.

Observação 7.3.6 Decorre da Observação 7.1.14 que $||e(T)|| = ||T||_Y$.

Lema 7.3.7 Seja $Y \in G_X$ e $T \in L(Y, X)$ tal que $\alpha = e(T)$. Se $F = T|_W$ onde W é subespaço de Y , então $\alpha = e(F)$.

Prova. Primeiramente, notemos que se $\alpha = e(T)$, então $\alpha = \overline{(P_{YZ}(\overline{T}))}_{Z \leq Y}$. Assim temos que $\alpha_Z = P_{YZ}(\overline{T}) \forall Z \leq Y$. Em particular sendo W subespaço de Y , temos:

$$W \leq Y \text{ e } \alpha_W = P_{YW}(\overline{T}) = \overline{T}|_W = \overline{T}|_W = \overline{F}. \quad (1)$$

Agora, dado $Z \leq W \leq Y$, segue de (1) que:

$$P_{WZ}(\overline{F}) = P_{WZ}(P_{YW}(\overline{T})) = P_{YZ}(\overline{T}). \quad (2)$$

Assim, segue de (2) e da Proposição 7.1.16 que:

$$e(F) = \overline{(P_{WZ}(\overline{F}))}_{Z \leq W} = \overline{(P_{YZ}(\overline{T}))}_{Z \leq W} = \overline{(P_{YZ}(\overline{T}))}_{Z \leq Y} = \alpha. \quad \blacksquare$$

Lema 7.3.8 *Seja $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em G_X tal que $Y_{n+1} \subset Y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Suponha ainda que Y_0 tenha base de Schauder $(x_n)_n$. Então, Y_0 possui uma seqüência básica $(y_n)_n$ tal que $y_n \in Y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Prova. Seja $y_0 \in Y_0$ tal que $\|y_0\| = 1$, como $(x_n)_n$ é base de Schauder de Y_0 com constante básica $k \geq 1$, segue que $y_0 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x_i$. Logo dado $\varepsilon = \frac{1}{8k}$, temos:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tal que } n \geq n_0 \Rightarrow \left\| \sum_{i=0}^{\infty} a_i x_i - \sum_{i=0}^n a_i x_i \right\| < \frac{1}{8k}.$$

Agora, denotando por $b_0 = \sum_{i=0}^n a_i x_i$ segue que $\|y_0 - b_0\| < \frac{1}{8k}$.

Por hipótese temos que $Y_1 \subset Y_0$ e $(x_n)_n$ é base de Schauder de Y_0 , logo segue da Proposição 1.2.16 que dado $n_0 \in \mathbb{N}$, existe $y_1 \in Y_1$, com $\|y_1\| = 1$ tal que $y_1 = \sum_{i=n_0+1}^{\infty} a_i x_i$.

Assim, dado $\varepsilon = \frac{1}{16k}$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq n_1 \Rightarrow \|y_1 - b_1\| < \frac{1}{16k}$, onde $b_1 = \sum_{i=n_0+1}^{n_1} a_i x_i$.

Procedendo de forma análoga, iremos obter duas seqüências $(y_n)_n$ e $(b_n)_n$ tais que:

(i) $(b_n)_n$ é uma base de blocos de $(x_n)_n$. Logo pela Proposição 1.2.15, temos que $(b_n)_n$ é uma seqüência básica com constante básica k' , menor ou igual a k .

(ii) $(y_n)_n$ é tal que $y_n \in Y_n$ e $\|y_n - b_n\| < \frac{1}{2^{n+3} \cdot k}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Agora, por (i) e pela Proposição 1.2.18 segue que $\left\{ \frac{b_n}{\|b_n\|} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ é seqüência básica

normalizada de Y_0 com a mesma constante básica k' . E mais:

$$\left\| y_n - \frac{b_n}{\|b_n\|} \right\| = \left\| y_n - b_n + b_n - \frac{b_n}{\|b_n\|} \right\| \leq \|y_n - b_n\| + \left\| b_n - \frac{b_n}{\|b_n\|} \right\| \leq \|y_n - b_n\| + \|b_n\| - 1.$$

Mas por construção temos:

$$\|b_n\| = \|b_n - y_n + y_n\| \leq \|b_n - y_n\| + \|y_n\| \leq 1 + \frac{1}{2^{n+3} \cdot k}.$$

E de forma análoga podemos mostrar que $\|b_n\| \geq 1 - \frac{1}{2^{n+3} \cdot k}$.

Assim, $|\|b_n\| - 1| \leq \frac{1}{2^{n+3} \cdot k}$ e portanto $\|y_n - \frac{b_n}{\|b_n\|}\| < \frac{2}{2^{n+3} \cdot k}$.

Logo, $\sum_{n=0}^{\infty} \|y_n - \frac{b_n}{\|b_n\|}\| < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+2} \cdot k} = \frac{1}{2k} \leq \frac{1}{2k'}$. Daí segue, da Proposição 1.2.13 que $(y_n)_n$ é uma seqüência básica de Y_0 e por (ii) temos ainda que $y_n \in Y_n, \forall n \in \mathbb{N}$. ■

Definição 7.3.9 Seja $\alpha \in E$, dado $Y \in G_X$, nós dizemos que um elemento $T \in L(Y, X)$ é um 2 - representante minimal de α sobre Y se $\alpha = e(T)$ e $||T|| \leq 2 ||\alpha||$.

Proposição 7.3.10 Dado $\alpha \in E$, $\exists Y_0 \in G_X$ e $T_0 \in L(Y_0, X)$ tal que $\alpha = e(T_0)$ e $||T_0|| \leq 2 ||\alpha||$, ou seja α possui um 2 - representante minimal.

Prova. Seja $\alpha \in E, \alpha \neq 0$, pela Proposição 7.3.4 sabemos que $\alpha = e(T)$ para algum $Y \in G_X$ e para algum $T \in L(Y, X)$ daí, pela Observação 7.1.14 segue que,

$$||\alpha|| = ||e(T)|| = ||(\overline{P_{YZ}(\bar{T})})_{Z \leq Y}|| = \Psi((P_{YZ}(\bar{T}))_{Z \leq Y}) = ||\bar{T}||_Y = ||T||_Y = \inf_{Y' \subset Y} ||T|_{Y'}||.$$

Assim, decorre da definição de ínfimo, que dado $\varepsilon = ||\alpha|| > 0, \exists Y_0 \subset Y$ tal que :

$$||T|_{Y_0}|| < ||\alpha|| + \varepsilon, \text{ ou seja, } \exists Y_0 \subset Y \text{ tal que } ||T|_{Y_0}|| < 2 ||\alpha||.$$

Agora, segue do Lema 7.3.7, que $e(T|_{Y_0}) = \alpha$. Assim, denotando $T_0 = T|_{Y_0}$ temos:

$$\exists Y_0 \in G_X \text{ e } T_0 \in L(Y_0, X) \text{ tal que } \alpha = e(T_0) \text{ e } ||T_0|| < 2 ||\alpha||.$$

A igualdade se dá quando $\alpha = 0$. ■

Lema 7.3.11 *Seja $(\alpha_n)_n$ uma seqüência, tal que $\alpha_n \in E$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Então dado T_{n-1} um 2 - representante minimal de α_{n-1} sobre Y_{n-1} , existe T_n um 2 - representante minimal de α_n sobre Y_n subespaço de Y_{n-1}*

Prova. (i) Dado $\alpha_0 \in E$, pela Proposição anterior sabemos que existe $Y_0 \in G_X$ e $T_0 \in L(Y_0, X)$ tal que $\alpha_0 = e(T_0)$ e $||T_0|| \leq 2||\alpha_0||$.

(ii) Considere agora $\alpha_1 \in E$. Pela Proposição 7.3.4 sabemos que existe $T \in L(Y, X)$ para algum $Y \in G_X$ tal que, $\alpha_1 = e(T)$. (1)

Agora, dado Y_0 e $Y \in G_X$, pelo Lema 4.6, sabemos que existe $W \in G_X$, W subespaço de Y_0 tal que $W \leq Y_0$ e $W \leq Y$.

Como $W \leq Y$, então existe um $I_W + S_1$ - isomorfismo entre W e Y' subespaço de Y .

Consideremos então o seguinte operador de W em X : $F = T(I_W + S_1)$. (2)

(iii) Vamos agora mostrar que $\alpha_1 = e(F)$.

Primeiramente observemos que dado $Z \leq W$, como $W \leq Y$ temos $Z \leq Y$ e assim utilizando (2) temos que:

$$P_{WZ}(\overline{F}) = \overline{F(I_Z + S_2)} = \overline{T(I_W + S_1)(I_Z + S_2)} = \overline{T(I'_Z + S)} = P_{YZ}(\overline{T}), \quad (3)$$

onde $I'_Z + S = (I_W + S_1)(I_Z + S_2)$, pela Proposição 4.4, é um isomorfismo bom entre Z e um subespaço de Y .

Assim segue de (1) e (3) que $e(F) = \overline{(P_{WZ}(\overline{F}))}_{Z \leq W} = \overline{(P_{YZ}(\overline{T}))}_{Z \leq Y} = e(T) = \alpha_1$.

Logo segue que, $||\alpha_1|| = ||e(F)|| = ||\overline{F}||_W = ||F||_W = \inf_{W' \subset W} ||F|_{W'}||$.

Assim, pela definição de ínfimo, segue que dado $\varepsilon = ||\alpha_1|| > 0$ temos que:

$$\exists W'' \subset W, \text{ tal que } ||F|_{W''}|| \leq 2||\alpha_1||,$$

e como $\alpha_1 = e(F)$, segue pelo Lema 7.3.7, que $\alpha_1 = e(F|_{W''})$.

Logo, denotando por $T_1 = F|_{W''}$ e $Y_1 = W''$ conseguimos:

$$Y_1 \subset Y_0 \text{ e } T_1 \in L(Y_1, X) \text{ com } \alpha_1 = e(T_1) \text{ e } ||T_1|| \leq 2||\alpha_1||.$$

Procedendo de forma análoga obteremos uma seqüência $(T_n)_n$, tal que, $\forall n \in \mathbf{N}$, temos: $T_n \in L(Y_n, X)$, $Y_{n+1} \subset Y_n$, $\alpha_n = e(T_n)$ e $||T_n|| \leq 2||\alpha_n||$. ■

Lema 7.3.12 *O espaço E é completo.*

Prova. Pela Proposição 1.2.19, é suficiente mostrarmos que toda série normalmente convergente em E, converge em E.

Seja $(\alpha_n)_n$ uma série normalmente convergente em E, isto é:

$$\alpha_n \in E, \forall n \in \mathbf{N} \text{ e } \sum_{n=0}^{\infty} ||\alpha_n|| < \infty. \quad (1)$$

Vamos mostrar que $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ converge em E.

Dado $(\alpha_n)_n \in E$, pelo Lema 7.3.11, existe $(T_n)_n$ uma seqüência de 2-representantes minimais, tais que:

$$T_n \in L(Y_n, X) \text{ onde } Y_{n+1} \subset Y_n, \forall n \in \mathbf{N}. \quad (2)$$

$$\alpha_n = e(T_n) \text{ e } ||T_n|| \leq 2||\alpha_n||, \forall n \in \mathbf{N}. \quad (3)$$

Suponhamos agora que Y_0 tenha base de Schauder. Daí pelo Lema 7.3.8 segue:

$$\exists (y_n)_n \text{ seqüência básica de } Y_0, \text{ tal que } y_n \in Y_n, \forall n \in \mathbf{N}. \quad (4)$$

Caso Y_0 não tenha base de Schauder, pelo Teorema de Mazur (Teorema 1.2.10) segue que Y_0 possui uma seqüência básica $(x_n)_n$. Considerando então o espaço gerado $Y'_0 = [(x_n)_n]$, temos:

$$Y'_0 \subset Y_0 \text{ e } T_{0|Y'_0}, \text{ tal que } \alpha_0 = e(T_{0|Y'_0}) \text{ e } || T_{0|Y'_0} || \leq || T_0 || \leq 2 || \alpha_0 ||.$$

E assim, partindo de Y'_0 , pelo Lema 7.3.11 conseguiremos uma seqüência $(Y'_n)_n$ satisfazendo (i) e (ii) e tal que Y'_0 possui base de Schauder.

Consideremos agora os seguintes espaços gerados: $Y = [(y_n)_n]$, $Y_{>n} = [(y_k)_{k>n}]$ e $Y_{\leq n} = [(y_k)_{k \leq n}]$.

Agora, dado $y \in Y$, temos que $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k y_k$, e assim podemos definir a seguinte seqüência de aplicações:

$$P_{>n} : Y \rightarrow Y_{>n} \text{ onde } P_{>n}(y) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k y_k. \quad (5)$$

Observando que $P_{>n} = I_Y - P_n$, onde $P_n : Y \rightarrow Y$ são as projeções contínuas definidas por $P_n(y) = \sum_{k=0}^n a_k y_k$ e que $\sup_{n \in \mathbb{N}} || P_n || = k$, onde $k \in \mathbb{R}$ e $k \geq 1$ (ver Proposição 1.2.6), podemos facilmente verificar que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ a aplicação } P_{>n} \text{ é linear, contínua e } || P_{>n} || \leq 1 + k \leq 2k. \quad (6)$$

Vamos agora definir a seguinte seqüência de aplicações:

$$(F_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ onde } \forall n \in \mathbb{N}, F_n : Y \rightarrow X \text{ e } F_n(y) = T_n(P_{>n}(y)).$$

Por (2), (4) e (5) é fácil verificar que $\forall n \in \mathbb{N}$, F_n está bem definida, e mais:

- (i) F_n é linear, pois é a composta de aplicações lineares.
- (ii) F_n é contínua, pois é a composta de aplicações contínuas.

Assim, podemos concluir que: $F_n \in L(Y, X)$. (7)

Agora, utilizando (2), (3) e (6) temos:

$$\|F_n(y)\| = \|T_n(P_{>n}(y))\| \leq \|T_n\| \cdot \|P_{>n}(y)\| \leq 2\|\alpha_n\| \cdot \|P_{>n}\| \cdot \|y\| \leq 2\|\alpha_n\| \cdot 2k \|y\|.$$

Assim, $\|F_n(y)\| \leq 4k \|\alpha_n\| \|y\| \Rightarrow \|F_n\| \leq 4k \|\alpha_n\|, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, $\sum_{n=0}^{\infty} \|F_n\| < 4k \sum_{n=0}^{\infty} \|\alpha_n\|$. Mas por (1) temos $\sum_{n=0}^{\infty} \|\alpha_n\| < \infty$, assim:

$\sum_{n=0}^{\infty} \|F_n\| < \infty$ implica $(F_n)_n$ é normalmente convergente em $L(Y, X)$, e como $L(Y, X)$ é um

espaço de Banach, pela Proposição 1.2.19 segue que $\sum_{n=0}^{\infty} F_n$ converge em $L(Y, X)$.

Por tanto, existe $F \in L(Y, X)$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} F_n = F$. (8)

Agora, lembrando que $\alpha_n = e(T_n)$ e observando que $F_n = T_n|_{Y_{>n}}$, segue do Lema 7.3.7, que $\alpha_n = e(F_n)$, e denotando por $\alpha = e(F) \in E$, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue da Proposição 7.3.3, Observação 7.3.6 e de (8):

$$\|\alpha - \sum_{k=0}^n \alpha_k\| = \|e(F) - \sum_{k=0}^n e(F_k)\| = \|e(F - \sum_{k=0}^n F_k)\| = \|F - \sum_{k=0}^n F_k\|_Y \leq$$

$$\|F - \sum_{k=0}^n F_k\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Logo $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ converge em E para α .

Assim mostramos que dado $(\alpha_n)_n \in E$, $\exists \alpha \in E$: $\sum_{n=0}^{\infty} \|\alpha_n\| < \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \alpha$. Portanto, E é completo. ■

Lema 7.3.13 *Todo elemento não nulo de E é invertível em relação ao produto definido em 7.2.1, isto é, dado $\alpha \in E$, $\alpha \neq 0$, existe $\beta \in E$ tal que $\alpha\beta = \beta\alpha = 1$, onde 1 é a unidade em E .*

Prova. Seja $\alpha \in E$, $\alpha \neq 0$, pela Proposição 7.3.4, sabemos que existe $Y \in G_X$ e $T \in L(Y, X)$ tal que $\alpha = e(T)$.

Afirmção: T não é estritamente singular. (1)

De fato. Se T fosse estritamente singular, teríamos $\overline{T} = \overline{0}$, onde $\overline{0} = S(Y, X)$ e assim como P_{YZ} é linear, segue que $P_{YZ}(\overline{T}) = \overline{0} \ \forall Z \leq Y$, logo $\alpha = e(T) = \overline{(P_{YZ}(\overline{T}))}_{Z \leq Y} = 0$ o que contraria nossa hipótese inicial de que $\alpha \neq 0$.

Logo por (1) segue: $\exists Y_0$ subespaço fechado de Y , com dimensão infinita, tal que $T|_{Y_0}$ é isomorfismo sobre a imagem.

Agora, denotando por $F = T|_{Y_0}$ e $W = F(Y_0)$ temos que $F: Y_0 \rightarrow W$ é um isomorfismo.

Assim para todo $Z \leq W$, podemos considerar o elemento $\beta_Z = P_{WZ}(\overline{F^{-1}})$.

Logo, considerando $\beta = (\beta_Z)_{Z \leq W}$ é imediato que $\beta = e(F^{-1})$, e portanto $\beta \in E$.

Vamos agora mostrar que $\alpha\beta = 1$.

Primeiramente, observemos que $W \in G_X$ é tal que $\beta_Z \in E_{ZY}$, $\forall Z \leq W$.

$$\beta_Z = P_{WZ}(\overline{F^{-1}}) = \overline{F^{-1}(I_Z + S)} \text{ onde } I_Z + S: Z \rightarrow W' \subset W \text{ e } F^{-1}: W \rightarrow Y_0 \subset Y.$$

Logo, $F^{-1}(I_Z + S): Z \rightarrow Y_0 \subset Y$. Assim temos, $\beta_Z \in E_{ZY}$ e $\alpha\beta = \overline{(\alpha_Y \otimes \beta_Z)}_{Z \leq W}$ onde:

$$\alpha_Y \otimes \beta_Z = \overline{T \otimes F^{-1}(I_Z + S)} = \overline{T[F^{-1}(I_Z + S)]} = \overline{(TF^{-1})(I_Z + S)}.$$

e lembrando que $F = T|_{Y_0}$, temos $TF^{-1} = I_W$, assim segue que:

$$\alpha_Y \otimes \beta_Z = \overline{I_W(I_Z + S)} = \overline{(I_Z + S)} = \overline{I_Z}, \ \forall Z \leq W.$$

$$\text{Logo, } \alpha\beta = \overline{(\overline{I_Z})}_{Z \leq W} = \overline{(\overline{I_Z})}_{Z \in G_X} = 1.$$

Finalmente, vamos mostrar que $\beta\alpha = 1$.

Primeiramente observemos que $\beta_W = \overline{F^{-1}}$, $e(T) = \alpha$, e sendo $F = T|_{Y_0}$, segue do Lema 7.3.7

que $e(F) = \alpha$, isto é, $\alpha = \overline{(P_{Y_0 Z}(\overline{F}))}_{Z \leq Y_0}$ assim, $\forall Z \leq Y_0$ temos:

$$\beta_W \otimes \alpha_Z = \overline{F^{-1}} \otimes P_{Y_0 Z}(\overline{F}) = \overline{F^{-1}} \otimes \overline{F(I_Z + S)} = \overline{F^{-1}[F(I_Z + S)]} = \overline{(F^{-1}F)(I_Z + S)} = \overline{I_{Y_0}(I_Z + S)} = \overline{I_Z}.$$

$$\text{Logo, } \beta\alpha = \overline{(\beta_W \otimes \alpha_Z)_{Z \leq Y_0}} = \overline{(I_Z)_{Z \leq Y_0}} = 1. \quad \blacksquare$$

Proposição 7.3.14 *Seja X um espaço de Banach complexo, hereditariamente indecomponível. Então o espaço E com a multiplicação dada na definição 7.2.1 é uma Álgebra de Banach com unidade.*

Prova. Sendo X um espaço de Banach complexo, segue da própria definição, que o espaço E , dado na Definição 7.1.11, com a norma definida na Proposição 7.1.13, possui estrutura de um espaço vetorial normado e complexo. Agora, sendo E completo (ver lema 7.3.12), segue que E é um espaço de Banach complexo. Assim utilizando o resultado da Proposição 7.2.4 segue que E é uma Álgebra de Banach complexa com unidade. $\blacksquare$

Proposição 7.3.15 *Seja X um espaço de Banach complexo hereditariamente indecomponível. Então o espaço E dado na definição 7.1.11 é isométrico a $\mathbb{C}$.*

Prova. Pela proposição anterior vimos que E é uma Álgebra de Banach complexa com unidade, e pelo Lema 7.3.13 temos que todo elemento não nulo de E , é invertível em relação ao produto dado na definição 7.2.1, assim pelo caso complexo do Teorema de Gelfand – Mazur (Teorema 2.2.3) segue que E é isométricamente isomorfo a $\mathbb{C}$. $\blacksquare$

Corolário 7.3.16 *Seja X um espaço de Banach complexo hereditariamente indecomponível, então E é possui dimensão 1.*

Prova. Como $E = \mathbb{C}$ e $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ temos que $\dim_{\mathbb{C}} E = 1$. $\blacksquare$

Proposição 7.3.17 *Sejam X um espaço de Banach H.I. e Y um subespaço fechado qualquer de X , com dimensão infinita. Então o espaço E_Y é isométrico a um subespaço de E .*

Prova. Vamos mostrar que dado $Y \in G_X$, a aplicação θ dada abaixo está bem definida e é uma isometria linear.

$$\begin{aligned}\theta : E_Y &\rightarrow E \\ \alpha_Y &\rightarrow \overline{(P_{YZ}(\alpha_Y))}_{Z \leq Y}.\end{aligned}$$

Segue da Definição 7.3.1 e da Proposição 7.3.3 que θ está bem definida e é linear.

Vamos agora, mostrar que θ é uma isometria. De fato, segue da Observação 7.1.14 que

$$||\theta(\alpha_Y)|| = ||\overline{(P_{YZ}(\alpha_Y))}_{Z \leq Y}|| = ||\alpha_Y||_Y, \forall \alpha_Y \in E_Y.$$

Assim, temos que θ é uma isometria linear entre E_Y e um subespaço de E . ■

Corolário 7.3.18 *No caso complexo, temos $\dim_{\mathbb{C}}(E_Y) = 1$.*

Prova. Segue da Proposição anterior que E_Y é isométrico a um subespaço de E , e como no caso complexo E possui dimensão 1 (ver Corolário 7.3.16), temos que $\dim_{\mathbb{C}}(E_Y) = 0$ ou $\dim_{\mathbb{C}}(E_Y) = 1$, mas o caso $\dim_{\mathbb{C}}(E_Y) = 0$, implica $S(Y, X) = L(Y, X)$ o que é um absurdo, pois por exemplo, a inclusão de Y em X não é estritamente singular. ■

OPERADORES EM SUBESPAÇOS DE ESPAÇOS DE BANACH HEREDITARIAMENTE INDECOMPONÍVEIS

Neste último capítulo faremos a demonstração do principal teorema da nossa dissertação, daremos uma nova caracterização para os espaços de Banach H.I. e ainda estudaremos o que acontece quando X é um Espaço de Banach Real.

Teorema 8.1 *Sejam X um espaço de Banach complexo H.I. e Y um subespaço fechado qualquer de X com dimensão infinita. Então todo operador de Y em X é da forma $\lambda I_Y + S$, onde I_Y é a inclusão de Y em X , S um operador estritamente singular e λ um número complexo.*

Prova. (a) Seja X um Espaço de Banach Complexo, Hereditariamente Indecomponível e considere o espaço E dado na Definição 7.1.11. Pela Proposição 7.3.15, temos que E é isométrico ao espaço $\mathbb{C}$ dos números complexos, e assim, pelo Teorema 2.2.3 segue que a aplicação ρ definida abaixo é uma isometria linear entre E e $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \rho : E &\rightarrow \mathbb{C} \\ \alpha &\rightarrow \lambda \end{aligned}$$

onde λ é um número complexo tal que $\alpha = \lambda \mathbf{1}$, e $\mathbf{1}$ é a unidade em E .

(b) Sejam $Y \in G_X$ e $T \in L(Y, X)$ arbitrários. Consideremos agora o elemento $\alpha = e(T)$. Pela Definição 7.3.1 temos que $\alpha \in E$, e assim por (a) segue que: $\exists \lambda \in \mathbb{C} / \alpha = \lambda \mathbf{1}$.

Assim, $e(T) = \lambda \mathbf{1}$ implica $e(T) - \lambda \mathbf{1} = 0$. Agora, lembrando que e é uma aplicação linear e que $\mathbf{1} = e(I_Y)$ temos, $e(T) - \lambda e(I_Y) = 0 \Rightarrow e(T - \lambda I_Y) = 0$.

Logo, segue da Observação 7.3.6 que $0 = || e(T - \lambda I_Y) || = || T - \lambda I_Y ||_Y$.

Assim, pela Proposição 5.3 temos que $T - \lambda I_Y$ é um operador estritamente singular, ou seja, $T - \lambda I_Y = S$ onde $S \in S(Y, X)$.

Logo, $T = \lambda I_Y + S$ onde I_Y é a inclusão de Y em X e S um operador estritamente singular.

Como $Y \in G_X$ e $T \in L(Y, X)$ são arbitrários, o teorema está provado. ■

O próximo corolário nos fornece uma nova caracterização para os espaços de Banach complexo hereditariamente indecomponível. Observe.

Corolário 8.2 *Seja X um espaço de Banach complexo de dimensão infinita. X é H.I. se, e somente se, dado $Y \in G_X$, todo operador $T: Y \rightarrow X$, é da forma $\lambda I_Y + S$, onde I_Y é a inclusão de Y em X , S um operador estritamente singular e λ um número complexo.*

Prova. Supondo que X seja H.I., a demonstração é dada pelo Teorema 8.1.

Reciprocamente, suponhamos por absurdo que X não seja H.I., então existe W subespaço fechado de X , tal que $W = Y \oplus Z$, onde Y e Z são subespaços fechados de X , com dimensão infinita tais que $Y \cap Z = \{0\}$.

Considere agora a projeção canônica de $Y \oplus Z$ em Y , isto é:

$$P: W \rightarrow Y$$

$$w \rightarrow P(w) = P(y+z) = y$$

Por hipótese temos que $P = \lambda I_W + S$, onde I_W é a inclusão de W em X , S um operador estritamente singular e λ um número complexo. Assim, pela Proposição 3.3.5 segue que $\dim(\text{Ker } P) < \infty$, o que é um absurdo, pois dado $\forall z \in Z$, temos que $P(z) = 0$, ou seja, $\text{ker } P = Z$ e portando $\dim(\text{Ker } P) = \infty$.

Logo, X é hereditariamente indecomponível. ■

Observação 8.3 *A hipótese de X ser um espaço vetorial complexo e não real, foi essencial para assim, podermos utilizar o caso complexo do Teorema de Gelfand – Mazur (Teorema 2.2.3), contudo observem que sendo X um espaço de Banach H.I., real ou complexo, segue da Proposição 7.2.4 e do Lema 7.3.13 que o espaço E construído anteriormente possui uma estrutura de álgebra normada com unidade, onde todo elemento não nulo é invertível em relação ao produto definido em E , ou seja, E possui estrutura de álgebra normada com divisão.*

Observação 8.4 *Vimos que no caso complexo, $\dim_{\mathbb{C}}(E_Y) = 1$, (ver Corolário 7.3.18).*

O último resultado deste trabalho foi obtido por Ferenczi em [4], onde é provado que no caso real o espaço E_Y possui dimensão menor ou igual a 4.

Teorema 8.5 *Seja X um espaço de Banach real H.I. Então, para todo $Y \in G_X$, temos que $\dim(E_Y) \leq 4$.*

Prova. Decorre da Observação 8.3 que o espaço E , dado na Definição 7.1.11, possui estrutura de uma álgebra normada real, com divisão, assim segue do caso real do Teorema de Gelfand - Mazur (Teorema 2.3.15), que E é isomorfo a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, onde $\mathbb{H}$ denota a álgebra dos quatérnios. Agora como E_Y é isomorfo a um subespaço de E (ver Proposição 7.3.17), segue então que a dimensão do espaço E_Y será 1, 2, 3 ou 4. ■

Finalmente destacamos que ainda permanece em aberto o seguinte problema:

“Sendo X um espaço de Banach real H.I. e $Y \in G_X$, qual será a dimensão do espaço E_Y ?”

Observações 8.6 A seguir faremos algumas considerações sobre o problema em aberto.

i) *Vale destacar que o espaço X_{GM} construído por Gowers e Maurey (ver [6]), no caso real, satisfaz $\dim E_Y = 1$, $\forall Y$, e que também $\dim E_Y = 1$, $\forall Y$, implica que X_{GM} hereditariamente indecomponível, (prova do Corolário 8.2 também válido para o caso real).*

ii) *Segue dos resultados de “Hereditarily finitely decomposable Banach spaces”(ver [4]), que se $X = X_{GM} \oplus X_{GM}$, temos $\dim E_Y \leq 4$, $\forall Y$. Mas, X não é H.I.*

iii) *E_Y é isométrico uma subespaço vetorial de E , mas não necessariamente é uma sub-álgebra de E , pois não podemos necessariamente compor $T \in L(Y, X)$ com $U \in L(Y, X)$. A exceção é quando $E_X = L(X)/S(X)$, pois E_X tem estrutura de álgebra, e $\theta: E_X \rightarrow E$ é um isomorfismo de álgebras sobre a imagem, portanto E_X é uma sub-álgebra normada com divisão de E , isométrica a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$. Então temos as isometria $P_{XY}: E_X \rightarrow E_Y$ e $\theta: E_Y \rightarrow E$, e portanto, $\dim E_X \leq \dim E_Y \leq \dim E$. Não se sabe nada sobre o que pode acontecer a partir disso. $\dim E_Y = 3$ é possível? $\dim E_X < \dim E_Y < \dim E$ é possível?*

iv) *De fato, parece ser possível construir uma versão real do espaço H.I. de Gowers e Maurey, onde $\dim E_X = 2$ e provavelmente $\dim E_Y = 2$, mas até o momento isso nunca foi escrito.*

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Cristina, C., *O primeiro espaço de Banach hereditariamente indecomponível*.
IME-USP, 2000 (Dissertação de Mestrado).
- [2] Bonsall F.F. e Duncan J. , *Complete Normed Agebras*. Springer – Verlag, New York, 1973.
- [3] Ferenczi, V. , *Operators on subspaces of hereditarily indecomposable Banach spaces*.
Bull. London Math. Soc. 29, (1996), 338 – 344.
- [4] Ferenczi, V., *Hereditarily finitely decomposable Banach spaces*. Studia Mathematica 123 (2)
(1997), 135 – 149.
- [5] Galego, E.M., *Alguns aspectos da teoria geométrica de espaços de Banach através de $c_0(N)$* .
43º Seminário Brasileiro de Análise, IME-USP, 1996.
- [6] Gowers, W. T. e Maurey, B., *The unconditional basic sequence problem*. J. Amer. Math. Soc. 6
(1993), 851 – 874.
- [7] Hönig, C.S., *Análise Funcional e Aplicações*. V.1, IME-USP, 1970.
- [8] Hönig, C.S., *Análise Funcional e Aplicações*. V.2, IME-USP, 1970.
- [9] Lima, E.L., *Espaços Métricos*. IMPA. Rio de Janeiro, 1993.
- [10] Lindenstrauss, J.e Tzafriri , L., *Classical Banach Spaces* , V.1, New York , Springer, 1977.
- [11] Taylor, A.E., *Introduction to Functional Analysis*. Wiley & Sons, New York, 1958.
- [12] Vieira, D.M.S., *Operadores de Composição entre as Álgebras Clássicas de Funções Analíticas*.
IME-USP, 2000 (Dissertação de Mestrado).