Superfícies Riemannianas no $\mathbb{R}^4$

Armando José Maccori

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Geometria Diferencial**
Orientador: **Prof. Dr. Jose Antonio Verderesi**

*Durante a elaboração deste trabalho
o autor recebeu o apoio financeiro do CNPq*

São Paulo - Dezembro - 2004

Superfícies Riemannianas

no $\mathbb{R}^4$

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação de mestrado
devidamente corrigida e defendida por
Armando José Maccori
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, dezembro de 2004.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Jose Antonio Verderesi (Orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Alexandre Augusto Martins Rodrigues - IME-USP
- Prof. Dr. Alcebiades Rigas - IMECC-Unicamp

Agradecimentos

- Ao Prof. e amigo Jose Antonio Verderesi, pela excelente orientação, paciência e seriedade ao longo desses anos de iniciação científica e de mestrado.
- Ao Prof. Alexandre Rodrigues, cujos seminários inspiraram a realização deste trabalho.
- À Prof. Zara Issa Abud, a qual tive a felicidade de conhecer ainda na época da minha graduação e que sempre se prontificou a me ajudar e em muito colaborou para minha formação científica e humana.
- Aos meus amigos do IME e do IFUSP, pelos vários churrascos que fizemos e por aqueles que ainda haveremos de fazer...
- Em especial, gostaria de agradecer a uma pessoa que esteve sempre ao meu lado, me incentivando e apoiando, fossem nos bons ou maus momentos de minha vida, Maria Luísa Brenha Ribeiro, minha mãe.

Resumo

Definimos quatro invariantes algébricos da ação do grupo $SO(2) \times SO(2)$ no espaço das formas bilineares simétricas num espaço vetorial de dimensão dois. A partir deles classificamos as superfícies homogêneas do $\mathbb{R}^4$ e fizemos algumas aplicações para superfícies mínimas e curvas holomorfas.

Abstract

We defined four invariants from the action of the group $SO(2) \times SO(2)$ in the space of symmetric bilinear forms on a vector space of dimension two. In this context, we classified the homogeneous surfaces of $\mathbb{R}^4$ and made some applications for minimal surfaces and holomorphic curves.

Sumário

Introdução	v
Capítulo 1. Invariantes Ortogonais de Formas Quadráticas	1
1. Uma base do espaço $\mathcal{K}$	12
2. Relação entre a forma normal e a elipse de curvatura	12
Capítulo 2. Superfícies no $\mathbb{R}^4$ e suas Equações de Estrutura	14
1. Teorema de congruência para superfícies no $\mathbb{R}^4$	20
Capítulo 3. Exemplos de Superfícies Homogêneas no $\mathbb{R}^4$	23
Capítulo 4. Classificação das Superfícies Homogêneas em $\mathbb{R}^4$	32
1. Superfícies homogêneas no $\mathbb{R}^4$	46
Capítulo 5. Alguns Resultados	47
1. Superfícies mínimas no $\mathbb{R}^4$ com curvatura Gaussiana constante	47
2. Superfícies holomorfas no $\mathbb{R}^4$	50
Referências Bibliográficas	52

Introdução

*What really interests me is whether
God had any choice in the creation of
the world.*

—ALBERT EINSTEIN

As origens deste trabalho remetem a uma série de cinco seminários que o Prof. Alexandre Rodrigues apresentou no IME-USP no ano de 2002. A teoria de *invariantes ortogonais de formas quadráticas* que apresentaremos no presente trabalho (Capítulo 1) constituem os alicerces de todos os demais temas desenvolvidos nesta dissertação. Essa teoria foi desenvolvida em conjunto pelos Prof. Alexandre Rodrigues e Prof. Jose Antonio Verderesi e deram origem a um conjunto de notas manuscritas que não vieram a ser publicadas. Dessa forma, o conteúdo do Capítulo 1 tem caráter original e não é encontrado na literatura matemática.

O objetivo deste trabalho é o de classificar as superfícies homogêneas do $\mathbb{R}^4$, valendo-se da técnica do método do referencial móvel.

Uma superfície imersa no $\mathbb{R}^4$, $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^4$ diz-se homogênea (extrinsecamente) se o subgrupo de isometrias do $\mathbb{R}^4$ que deixa $f(S)$ invariante opera transitivamente.

Associado a uma imersão $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^4$ existem quatro invariantes diferenciais (ρ_3 , ρ_4 , r_1 e r_2) e um referencial de Darboux (e_1, e_2, e_3, e_4) adaptado a S análogo ao referencial de Frenet para curvas. Se a superfície é homogênea os invariantes são constantes e as equações de Gauss, Ricci e Mainardi-Codazzi se simplificam, permitindo sua integração para que se determinem as superfícies homogêneas.

Segue adiante uma breve descrição da abordagem utilizada neste trabalho:

O estudo dos invariantes da ação do grupo $SO(2) \times SO(2)$ no espaço $\mathcal{K}$

Sejam V_1 e V_2 dois $\mathbb{R}$ -espaços vetoriais de dimensão 2 munidos de produtos internos. Consideramos então o conjunto $\mathcal{K}$ das formas bilineares simétricas de $V_1 \times V_1$ a valores de V_2 . Este espaço tem dimensão seis sobre $\mathbb{R}$ e pode ser munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que é a extensão tensorial a $\mathcal{K}$ dos produtos de V_1 e V_2 .

O grupo $G = SO(V_1) \times SO(V_2)$ opera à esquerda em $\mathcal{K}$ do seguinte modo:

$$G \times \mathcal{K} \ni (g, Q) \longmapsto gQ = g_2 Q(g_1^{-1} \cdot, g_1^{-1} \cdot) \in \mathcal{K}, \quad (1)$$

onde $g = (g_1, g_2)$ sendo $g_i \in SO(V_i)$ para $i = 1, 2$.

Esta ação não é irredutível. Ela admite uma decomposição em subespaços ortogonais e irredutíveis $\mathcal{K} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{H} \oplus \overline{\mathcal{H}}$. Uma forma $Q \in \mathcal{K}$ decompõe-se:

$$Q = Q_0 + Q_1 + Q_2,$$

que por razões geométricas denominamos Q_0 de parte *umbílica*, Q_1 de parte *holomorfa* e Q_2 de parte *anti-holomorfa*. Além disso,

- (i) Q diz-se umbílica se $Q = Q_0$;
- (ii) Q diz-se holomorfa se $Q = Q_1$;
- (iii) Q diz-se anti-holomorfa se $Q = Q_2$;
- (iv) Q diz-se mínima se $Q = Q_1 + Q_2$.

A partir desta decomposição determinamos uma base (e_1, e_2, e_3, e_4) especial e adaptada de modo que

$$\begin{aligned} Q_0 &= \begin{bmatrix} \rho_3 & 0 \\ 0 & \rho_3 \end{bmatrix} e_3 + \begin{bmatrix} \rho_4 & 0 \\ 0 & \rho_4 \end{bmatrix} e_4, \\ Q_1 &= \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & -r_1 \end{bmatrix} e_3 + \begin{bmatrix} 0 & r_1 \\ r_1 & 0 \end{bmatrix} e_4, \\ Q_2 &= \begin{bmatrix} r_2 & 0 \\ 0 & -r_2 \end{bmatrix} e_3 + \begin{bmatrix} 0 & -r_2 \\ -r_2 & 0 \end{bmatrix} e_4, \end{aligned}$$

onde $\rho = \rho_3 e_3 + \rho_4 e_4$, $|\rho| = \frac{1}{\sqrt{2}} \|Q_0\|$, $r_1 = \frac{1}{2} \|Q_1\|$, $r_2 = \frac{1}{2} \|Q_2\|$. As funções ρ, r_1, r_2 são invariantes das órbitas de G em $\mathcal{K}$. Obtivemos então o seguinte resultado.

TEOREMA. As funções ρ_3, ρ_4, r_1 e r_2 definidas no aberto de $\mathcal{K}$ onde $r_1 r_2 \neq 0$ constituem um sistema completo de invariantes das formas Q tais que $r_1 r_2(Q) \neq 0$. No complemento deste aberto as funções ρ, r_1 e r_2 formam um sistema completo de invariantes.

O método para classificar as superfícies homogêneas do $\mathbb{R}^4$

Se $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^4$ é uma imersão, então a segunda forma fundamental Π de f decompõe-se: $\Pi = \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2$. Utilizando o referencial de Darboux (e_1, e_2, e_3, e_4) , as formas de conexão (ω_j^α) , onde $\alpha = 3, 4$, tem, neste referencial, as expressões:

$$\begin{aligned}\omega_1^3 &= (\rho_3 + r_1 + r_2)\omega^1 \\ \omega_2^3 &= (\rho_3 - r_1 - r_2)\omega^2 \\ \omega_1^4 &= \rho_4\omega^1 + (r_1 - r_2)\omega^2 \\ \omega_2^4 &= (r_1 - r_2)\omega^1 + \rho_4\omega^2\end{aligned}$$

onde $(\omega^1, \dots, \omega^4)$ é a base dual de $(e_1, \dots, e_4)$.

Destas equações deduzimos que as curvaturas Gaussiana, normal e média são dadas, respectivamente, por:

$$K = \rho_3^2 + \rho_4^2 - 2(r_1^2 + r_2^2), \quad \mu = 2(r_1^2 - r_2^2), \quad \|H\|^2 = \rho_3^2 + \rho_4^2.$$

TEOREMA. Sejam $f_1 : S \longrightarrow \mathbb{R}^4$ e $f_2 : S \longrightarrow \mathbb{R}^4$ imersões regulares tais que $(df_1)^{-1}(e_i) = (df_2)^{-1}(\tilde{e}_i)$, $1 \leq i \leq 2$ onde (e_1, e_2) e $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ são referenciais naturais de f_1 e f_2 , respectivamente. Além disso, suponhamos também que f_1 e f_2 possuem os mesmos invariantes algébricos ρ_3, ρ_4, r_1, r_2 . Nessas condições f_1 e f_2 diferem por uma isometria do $\mathbb{R}^4$.

Com o intuito de classificar as superfícies homogêneas do $\mathbb{R}^4$, impomos que os invariantes diferenciais são constantes. Desse modo foi possível estabelecer a classe de superfícies homogêneas orientáveis do $\mathbb{R}^4$.

A geometria por trás do problema de classificação

A justificativa geométrica da ação de G em $\mathcal{K}$ ter sido tomada como em (1) está baseada no que se conhece por método de redução de Cartan. Em linhas gerais, o método nos diz que responder questões de congruência, existência e homogeneidade para imersões $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^4$ e $\tilde{f} : S \longrightarrow \mathbb{R}^4$ onde S é uma superfície, consiste em escolher uma “forma normal” do subespaço $f_*T_p S \subset T_{f(p)}\mathbb{R}^4$ na Grassmanniana $G_2^4 = \{2\text{-planos pela origem de } \mathbb{R}^4\}$, no qual a isotropia opera de um “modo óbvio”. Em outras palavras, queremos uma secção transversal das órbitas da ação linear da isotropia na Grassmanniana G_2^4 . Quando aplicamos esse método, concluímos que a representação adjunta é dada por

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1 \ni \omega \longmapsto \text{Ad}_h(\omega) = h\omega h^{-1} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1,$$

onde

$$\mathfrak{h}_1 = \begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{bmatrix}, \quad g_1 \in \mathrm{SO}(T_p S), \quad g_2 \in \mathrm{SO}(T_p S^\perp),$$

sendo que $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de $G = \mathrm{SO}(4)$ (que opera transitivamente em $G_2^4 = \mathrm{SO}(4)/H_1$) e $\mathfrak{h}_1$ é a álgebra de Lie de $H_1 = \mathrm{SO}(4)_{\sigma_0}$ onde $\sigma_0 \in G_2^4$ é um 2-plano fixado.

Verificamos então que do modo como a representação adjunta é dada, ela coincide com a ação $G \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$, portanto trocamos o “problema padrão” por estudar os invariantes ρ_3, ρ_4, r_1, r_2 para cada imersão $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^4$ que se tome.

CAPÍTULO 1

Invariantes Ortogonais de Formas Quadráticas

I want to know how God created this world. I am not interested in this or that phenomenon, in the spectrum of this or that element. I want to know His thoughts; the rest are details.

—ALBERT EINSTEIN

Sejam V_1 e V_2 dois espaços vetoriais Euclidianos orientados de dimensão 2 e denotemos seus produtos escalares respectivamente por $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$. Seja também $\mathcal{K}$ o espaço vetorial das formas bilineares simétricas definidas em V_1 com valores em V_2 , isto é,

$$\mathcal{K} = \{Q : V_1 \times V_1 \rightarrow V_2 : Q(x, y) = Q(y, x), \forall x, y \in V_1\}.$$

Note-se que $\mathcal{K}$ tem estrutura de espaço vetorial com as operações usuais de soma de funções e produto de funções por escalar.

Fixemos bases ortonormais positivamente orientadas (e_1, e_2) de V_1 e (e_3, e_4) de V_2 .

O espaço vetorial $\mathcal{K}$ possui um produto interno natural, denominamo-lo de extensão tensorial a $\mathcal{K}$ dos produtos internos de V_1 e V_2 . Com respeito às bases acima, o produto interno de duas formas $P, Q \in \mathcal{K}$ é dado por:

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{i,j=1}^2 \langle P(e_i, e_j), Q(e_i, e_j) \rangle_2. \quad (2)$$

Seja $SO(V_1)$ e $SO(V_2)$ os grupos ortogonais especiais de V_1 e V_2 , respectivamente. O grupo $G = SO(V_1) \times SO(V_2)$ opera em $\mathcal{K}$ pela usual representação tensorial; se $g = (g_1, g_2) \in G$ e $Q \in \mathcal{K}$, então:

$$(gQ)(x, y) = g_2 Q(g_1^{-1}x, g_1^{-1}y). \quad (3)$$

Proposição 1.1. *O produto interno em $\mathcal{K}$ independe da base (e_1, e_2) de V_1 (portanto é intrínseco).*

Demonstração. O grupo que opera em V_1 é $\text{SO}(V_1)$, logo dada (e_1, e_2) base ortonormal de V_1 , uma nova base (f_1, f_2) é obtida somente por uma rotação, portanto, podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix},$$

Portanto, substituindo $f_1 = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$ e $f_2 = -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2$ na fórmula do produto escalar, mostra-se que ele fica inalterado. $\square$

Proposição 1.2. *O produto interno de $\mathcal{K}$ é invariante pela ação de G , isto é, para todas $P, Q \in \mathcal{K}$ e para toda $g \in G$, tem-se $\langle gP, gQ \rangle = \langle P, Q \rangle$.*

Demonstração. Tendo em vista que g_2 é uma isometria e que $f_k := g_1^{-1}e_k$ forma uma base ortonormal de V_1 segue que

$$\begin{aligned} \langle gP, gQ \rangle &= \langle g_2P(g_1^{-1}e_i, g_1^{-1}e_j), g_2Q(g_1^{-1}e_i, g_1^{-1}e_j) \rangle \\ &= \langle P(f_i, f_j), Q(f_i, f_j) \rangle \\ &= \langle P, Q \rangle, \end{aligned}$$

e portanto o produto interno é invariante. $\square$

O objetivo deste parágrafo é encontrar um conjunto completo de invariantes das órbitas de G em $\mathcal{K}$. Com isso em mente, nós começamos decompondo $\mathcal{K}$ na soma direta de três subespaços invariantes ortogonais irredutíveis de dimensão 2.

Definição 1.1. Seja $Q : V_1 \times V_1 \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilinear simétrica. Dizemos que Q é **umbílica escalar** se ela for invariante pela ação de $\text{SO}(V_1)$, isto é, $Q(g_1^{-1}x, g_1^{-1}y) = Q(x, y)$ para todo $g_1 \in \text{SO}(V_1)$.

Proposição 1.3. *Uma $Q : V_1 \times V_1 \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilinear simétrica é umbílica se, e somente se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Q(x, y) = \lambda \langle x, y \rangle_1$.*

Demonstração. É uma consequência imediata do teorema de representação de Riesz para espaços vetoriais de dimensão finita. $\square$

Definição 1.2. Seja $Q \in \mathcal{K}$. Dizemos que Q é **umbílica** se a forma $Q_z : V_1 \times V_1 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $Q_z(x, y) = \langle Q(x, y), z \rangle_2$ for umbílica escalar para todo $z \in V_2$.

Proposição 1.4. Uma $Q \in \mathcal{K}$ é umbílica se, e somente se existe $u \in V_2$ tal que $Q(x, y) = \langle x, y \rangle_1 u$.

Demonstração. Novamente é uma consequência do teorema de representação de Riesz. $\square$

Definição 1.3. Denotaremos por $\mathcal{U}$ o subespaço vetorial¹ de $\mathcal{K}$ das formas umbílicas.

Por causa da proposição anterior, daqui em diante, denotaremos as formas umbílicas por $Q_u(x, y) = \langle x, y \rangle_1 u$.

Proposição 1.5. Sejam $g = (g_1, g_2) \in G$ e $Q_u \in \mathcal{U}$, então $gQ_u = Q_{g_2u}$.

Demonstração. Temos

$$gQ_u(x, y) = g_2Q_u(g_1^{-1}x, g_1^{-1}y) = g_2\langle g_1^{-1}x, g_1^{-1}y \rangle_1 u = \langle x, y \rangle_1 (g_2u) = Q_{g_2u},$$

e segue o resultado. $\square$

Proposição 1.6. O espaço das formas umbílicas $\mathcal{U}$ é invariante pela ação de G , isto é, $g\mathcal{U} = \mathcal{U}$ para toda $g \in G$.

Demonstração. Segue imediatamente da última proposição. $\square$

Proposição 1.7. A aplicação $V_2 \ni u \mapsto Q_u \in \mathcal{U}$ é um isomorfismo linear de V_2 em $\mathcal{U}$, portanto $\dim \mathcal{U} = 2$.

Demonstração. A aplicação é claramente uma sobrejeção. Note-se então que

$$Q_u(x, y) = \langle x, y \rangle_1 u = 0$$

para todo $x, y \in V_1$ implica, pondo-se $x = y \neq 0$, que $u = 0$, logo a aplicação é uma bijeção. Do teorema do núcleo e da imagem resulta que $\dim \mathcal{U} = 2$. $\square$

Proposição 1.8. Da fórmula do produto interno em $\mathcal{K}$ tem-se que $|Q_u| = \sqrt{2}|u|$. Portanto a aplicação $V_2 \ni u \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}Q_u \in \mathcal{U}$ é uma isometria linear.

¹Claramente $\mathcal{U}$ tem estrutura de espaço vetorial.

Demonstração. Vamos verificar somente que trata-se de uma isometria. Tem-se

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}Q_u, \frac{1}{\sqrt{2}}Q_u \right\rangle = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \langle \langle e_i, e_j \rangle_1 u, \langle e_i, e_j \rangle_1 v \rangle_2 = \langle u, v \rangle_2,$$

e portanto segue o resultado. $\square$

Definição 1.4. O suplementar ortogonal $\mathcal{M} := \mathcal{U}^\perp$ é denominado o espaço das formas *mínimas*. Note que $\dim \mathcal{M} = 4$ pois $\mathcal{U} \oplus \mathcal{M} = \mathcal{K}$.

Definição 1.5. Seja $Q \in \mathcal{K}$. Definimos o **traço** da forma Q por

$$\text{tr}(Q) := Q(e_1, e_1) + Q(e_2, e_2),$$

onde (e_1, e_2) formam uma base ortonormal positiva de V_1 .

Definição 1.6. Seja $Q \in \mathcal{K}$. Definimos o **vetor curvatura média** com sendo a função $H(Q) := \frac{1}{2}\text{tr}(Q)$. A motivação para esse nome tem cunho geométrico.

Proposição 1.9. *Seja $g = (g_1, g_2) \in G$, então $H(gQ) = g_2 H(Q)$.*

Demonstração. Faz-se, de um modo análogo, como na demonstração da proposição (1.5). $\square$

Proposição 1.10. *Para todo $u \in V_2$ e para toda $Q_u \in \mathcal{U}$ tem-se que $H(Q_u) = u$. Portanto a aplicação $\mathcal{K} \ni Q \mapsto H(Q) \in V_2$ é linear sobrejetora.*

Demonstração. A fórmula $H(Q_u) = u$ se verifica trivialmente. A linearidade da aplicação está clara, já a sobrejetividade provém do fato de que, para cada $u \in V_2$ podemos construir $Q_u \in \mathcal{U}$ a partir de uma $Q \in \mathcal{K}$ de modo tal que tenhamos $H(Q_u) = u$. $\square$

Proposição 1.11. *Seja $P \in \mathcal{K}$ e $Q = Q_u \in \mathcal{U}$, então vale que*

$$\langle P, Q_u \rangle = 2 \langle H(P), u \rangle_2.$$

Portanto o suplementar ortogonal de $\mathcal{U}$ em $\mathcal{K}$ é o núcleo da aplicação $\mathcal{K} \ni Q \mapsto H(Q) \in V_2$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}
\langle P, Q_u \rangle &= \sum_{i,j=1}^2 \langle P(e_i, e_j), Q_u(e_i, e_j) \rangle_2 \\
&= \sum_{i,j=1}^2 \langle P(e_i, e_j), \langle e_i, e_j \rangle_1 u \rangle_2 \\
&= \sum_{i=1}^2 \langle P(e_i, e_i), u \rangle_2 \\
&= 2 \langle H(P), u \rangle_2,
\end{aligned}$$

e segue o resultado. $\square$

Definição 1.7. Por razões geométricas, uma $Q \in \mathcal{K}$ que satisfaz $H(Q) = 0$ é denominada **forma mínima**. Note que pelo que já fizemos, resulta que $\mathcal{M} = \{Q \in \mathcal{K} : H(Q) = 0\}$.

O próximo passo é mostrar que o subespaço $\mathcal{M}$ se decompõe como soma direta de dois subespaços de $\mathcal{K}$, cada um deles de dimensão dois. Para tanto vamos introduzir estruturas complexas em V_1 e V_2 . Lembre que (e_1, e_2) é base ortonormal positiva de V_1 e que (e_3, e_4) é base ortonormal positiva de V_2 .

Definição 1.8. Seja $J_1 : V_1 \rightarrow V_1$ operador linear satisfazendo

$$J_1(e_1) = e_2, \quad J_1(e_2) = -e_1, \quad J_1^2 = -\text{id}.$$

Dizemos então que J_1 é a **estrutura complexa** associada a $(V_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$. Defini-se de modo análogo a estrutura complexa $J_2 : V_2 \rightarrow V_2$ de $(V_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$.

Observação. As estruturas complexas J_1 e J_2 não dependem da base escolhida.

Definição 1.9. Seja $Q \in \mathcal{M}$. Dizemos que Q é **bilinear complexa** se satisfaz

$$Q(J_1 x, y) = J_2 Q(x, y), \quad \text{para todo } x, y \in V_1.$$

Observe que isso é equivalente a dizer que $Q(\alpha x, y) = Q(x, \alpha y) = \alpha Q(x, y)$, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ e para todo $x, y \in V_1$.

Definição 1.10. Seja $Q \in \mathcal{M}$. Dizemos que Q é **bilinear anti-complexa** se satisfaz

$$Q(J_1 x, y) = -J_2 Q(x, y), \quad \text{para todo } x, y \in V_1.$$

Observe que isso é equivalente a dizer que $Q(\alpha x, y) = Q(x, \alpha y) = \bar{\alpha}Q(x, y)$, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ e para todo $x, y \in V_1$.

Definição 1.11. Seja $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$ definido por

$$\mathcal{H} = \{Q \in \mathcal{K} : Q(x, J_1 y) = J_2 Q(x, y), \forall x, y \in V_1\}.$$

Claramente $\mathcal{H}$ é subespaço de $\mathcal{K}$ e é denominado espaço das **formas holomorfas**.

Proposição 1.12. Se $Q \in \mathcal{H}$, então $Q(e_2, e_2) = -Q(e_1, e_1)$.

Demonstração. Simplesmente fazemos $Q(e_2, e_2) = Q(J_1 e_1, J_1 e_1) = J_2^2 Q(e_1, e_1) = -Q(e_1, e_1)$, e segue a propriedade. $\square$

Corolário 1.1. Se $Q \in \mathcal{H}$, então $H(Q) = 0$, ou seja, $\mathcal{H} \subset \mathcal{M}$.

Demonstração. Calculamos diretamente, i.e., $H(Q) = \frac{1}{2}[Q(e_1, e_1) + Q(e_2, e_2)] = \frac{1}{2}[Q(e_1, e_1) - Q(e_1, e_1)] = 0$, como queríamos. $\square$

Definição 1.12. Seja $\overline{\mathcal{H}} \subset \mathcal{K}$ definido por

$$\overline{\mathcal{H}} = \{Q \in \mathcal{K} : Q(x, J_1 y) = -J_2 Q(x, y), \forall x, y \in V_1\}.$$

Claramente $\overline{\mathcal{H}}$ é subespaço de $\mathcal{K}$ e é denominado espaço das **formas anti-holomorfas**.

Proposição 1.13. Se $Q \in \overline{\mathcal{H}}$, então $Q(e_2, e_2) = -Q(e_1, e_1)$.

Demonstração. Simplesmente fazemos $Q(e_2, e_2) = Q(J_1 e_1, J_1 e_1) = J_2^2 Q(e_1, e_1) = -Q(e_1, e_1)$, e segue a propriedade. $\square$

Corolário 1.2. Se $Q \in \overline{\mathcal{H}}$, então $H(Q) = 0$, ou seja, $\overline{\mathcal{H}} \subset \mathcal{M}$.

Demonstração. Calculamos diretamente, i.e., $H(Q) = \frac{1}{2}[Q(e_1, e_1) + Q(e_2, e_2)] = \frac{1}{2}[Q(e_1, e_1) - Q(e_1, e_1)] = 0$, como queríamos. $\square$

TEOREMA 1.1. Como consequência das proposições anteriores $\dim \mathcal{H} = \dim \overline{\mathcal{H}} = 2$ e além disso $\mathcal{H}^\perp = \overline{\mathcal{H}}$ em $\mathcal{M}$.

Demonstração. Sejam $Q \in \mathcal{H}$, $e_1 \in V_1$ tal que $\|e_1\| = 1$. Definimos então $u := Q(e_1, e_1) \in V_2$. Dados $x_1, x_2 \in V_1$, existem $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ tais que $x_1 = \alpha_1 e_1$ e $x_2 = \alpha_2 e_1$.

Nessas condições, tem-se $Q(x_1, x_2) = \alpha_1 \alpha_2 Q(e_1, e_1) = \alpha_1 \alpha_2 u$. Portanto, para toda $Q \in \mathcal{H}$ existe $u \in V_2$ tal que Q se escreve como

$$Q(x, y) = \alpha_1 \alpha_2 u,$$

onde α_1 e α_2 são funções de x e y respectivamente.

Reciprocamente, para todo $u \in V_2$ definamos $Q_u(\alpha_1 e_1, \alpha_2 e_1) := \alpha_1 \alpha_2 u$, para todo $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$. Temos então (note que $Q_u \in \mathcal{H}$)

$$\begin{aligned} Q_u(\alpha_1 e_1 + \beta_1 e_1, \alpha_2 e_1) &= (\alpha_1 + \beta_1) \alpha_2 u \\ &= \alpha_1 \alpha_2 u + \beta_1 \alpha_2 u \\ &= Q_u(\alpha_1 e_1, \alpha_2 e_1) + Q_u(\beta_1 e_1, \alpha_2 e_1), \end{aligned}$$

e portanto Q_u é bilinear. Por conseguinte, $V_2 \ni u \mapsto Q_u \in \mathcal{H}$ é um isomorfismo linear, donde segue que $\dim \mathcal{H} = \dim V_2 = 2$.

Afirmamos que $\|Q_u\| = 2\|u\|$. De fato, (lembrando que $Q_u(e_1, e_1) = u$)

$$\begin{aligned} \langle Q_u, Q_u \rangle &= \sum_{i,j=1}^2 \langle Q_u(e_i, e_j), Q_u(e_i, e_j) \rangle_2 \\ &= \langle Q_u(e_1, e_1), Q_u(e_1, e_1) \rangle_2 + \langle Q_u(e_2, e_2), \underbrace{Q_u(e_2, e_2)}_{-Q_u(e_1, e_1)} \rangle_2 + \\ &\quad + \underbrace{\langle Q_u(e_1, e_2), Q_u(e_1, e_2) \rangle_2}_{J_2 Q_u(e_1, e_1)} + \underbrace{\langle Q_u(e_2, e_1), Q_u(e_2, e_1) \rangle_2}_{J_2 Q_u(e_1, e_1)} \\ &= 4 \langle Q_u(e_1, e_1), Q_u(e_1, e_1) \rangle_2 \\ &= 4 \langle u, u \rangle_2. \end{aligned}$$

Resulta, portanto, que a aplicação $V_2 \ni u \mapsto \frac{1}{2} Q_u \in \mathcal{H}$ é uma isometria linear.

Analogamente, seja $Q \in \overline{\mathcal{H}}$ e denote $v = Q(e_1, e_1) \in V_2$. Repetindo os passos como acima, obteremos $Q(\alpha_1 e_1, \alpha_2 e_1) = \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 v$, o que prova que para toda $Q \in \overline{\mathcal{H}}$, existe $v \in V_2$ tal que $Q(x, y) = \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 v$ e reciprocamente para todo $v \in V_2$ constrói-se uma $Q_v \in \overline{\mathcal{H}}$ tal que $Q_v(\alpha_1 e_1, \alpha_2 e_1) = \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 v$. Nessas condições a aplicação $V_2 \ni v \mapsto Q_v \in \overline{\mathcal{H}}$ é um isomorfismo linear e portanto $\dim \overline{\mathcal{H}} = \dim V_2 = 2$. Similarmente também se mostra que $V_2 \ni v \mapsto \frac{1}{2} Q_v \in \overline{\mathcal{H}}$ é uma isometria linear.

Por fim, resta vermos que $\mathcal{H}^\perp = \overline{\mathcal{H}}$ em $\mathcal{M}$. Com efeito, dada $Q \in \overline{\mathcal{H}}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\langle Q_u, Q \rangle &= \sum_{i,j=1}^2 \langle Q_u(e_i, e_j), Q(e_i, e_j) \rangle_2 \\
&= \langle u, Q(e_1, e_1) \rangle_2 + \langle -u, Q(e_2, e_2) \rangle_2 + \\
&\quad + \langle J_2 Q_u(e_1, e_1), -J_2 Q_u(e_1, e_1) \rangle_2 + \langle J_2 Q_u(e_1, e_1), -J_2 Q_u(e_1, e_1) \rangle_2 \\
&= \langle u, Q(e_1, e_1) \rangle_2 + \langle u, Q(e_1 e_1) \rangle_2 - \langle u, Q(e_1, e_1) \rangle_2 - \langle u, Q(e_1, e_1) \rangle_2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como $Q \in \overline{\mathcal{H}}$ é arbitrária, resulta $\mathcal{H}^\perp = \overline{\mathcal{H}}$ em $\mathcal{M}$. □

Corolário 1.3. *Temos a decomposição em soma direta $\mathcal{K} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{H} \oplus \overline{\mathcal{H}}$.*

Demonstração. É consequência imediata do último teorema. □

Seja Q forma bilinear simétrica. Pelo Corolário (1.3), podemos escrever $Q = Q_0 + Q_1 + Q_2$ onde $Q_0 \in \mathcal{U}$, $Q_1 \in \mathcal{H}$ e $Q_2 \in \overline{\mathcal{H}}$. Portanto, de acordo com a Proposição (1.8) e com o Teorema (1.1), as aplicações

$$V_2 \ni u \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2}} Q_0 \in \mathcal{U}, \quad V_2 \ni u \longmapsto \frac{1}{2} Q_1 \in \mathcal{H}, \quad V_2 \ni u \longmapsto \frac{1}{2} Q_2 \in \overline{\mathcal{H}},$$

são isomorfismos lineares. Definimos então as seguintes funções escalares reais

$$\rho := \frac{1}{\sqrt{2}} \|Q_0\|, \quad r_1 := \frac{1}{2} \|Q_1\|, \quad r_2 := \frac{1}{2} \|Q_2\|.$$

Segue adiante um resultado importante que envolve as funções r_1 e r_2 associadas a uma forma $Q \in \mathcal{K}$. Uma vez demonstrado o teorema que segue, iremos introduzir duas novas funções escalares ρ_3 e ρ_4 , que são as componentes da função ρ de uma $Q \in \mathcal{K}$ numa base especial, a que chamamos de base natural. Temos então o seguinte resultado.

TEOREMA 1.2 (Base natural). *Seja Q forma bilinear simétrica. Se $r_1 r_2 \neq 0$, então existe $e \in V_1$ unitário tal que*

$$\frac{1}{r_1} Q_1(e, e) = \frac{1}{r_2} Q_2(e, e).$$

Além disso se e' é outro vetor de V_1 satisfazendo as hipóteses anteriores, então $e' = -e$, $e' = J_1(e)$ ou $e' = -J_1(e)$.

Demonstração. Tomemos $e \in V_1$ vetor unitário qualquer. Afirmamos que existe $\zeta \in \mathbb{C}$ tal que vale

$$\zeta \frac{1}{r_1} Q_1(e, e) = \frac{1}{r_2} Q_2(e, e).$$

Para tanto, vamos procurar por um $z \in \mathbb{C}$ tal que tenhamos

$$\frac{1}{r_1} Q_1(ze, ze) = \frac{1}{r_2} Q_2(ze, ze).$$

Isso é possível pois estamos supondo $r_1 r_2 \neq 0$, caso contrário, não teríamos definido um vetor não nulo em V_2 a partir do e em V_1 . Continuando com o raciocínio, nós temos

$$\frac{1}{r_1} Q_1(ze, ze) = \frac{1}{r_2} Q_2(ze, ze) \iff \frac{z^2}{r_1} Q_1(e, e) = \zeta \left(\frac{\bar{z}^2}{r_2} \right) Q_2(e, e),$$

mas isto acarreta

$$(z^2 - \zeta \bar{z}^2) \frac{Q_1(e, e)}{r_1} = 0 \Rightarrow z^2 - \zeta \bar{z}^2 = 0.$$

Supondo, sem perda de generalidade, que $|z| = 1$, então $z\bar{z} = 1$, donde $\bar{z} = \frac{1}{z}$, logo a equação acima torna-se

$$z^4 = \zeta.$$

Essa equação admite quatro soluções distintas:

$$z_1 = z_0, \quad z_2 = iz_0, \quad z_3 = -z_0, \quad z_4 = -iz_0 \quad \text{com } z_0 \text{ raiz de } z^4 = \zeta,$$

portanto

$$\frac{1}{r_1} Q_1(ze, ze) = \frac{1}{r_2} Q_2(ze, ze), \quad \text{para } z \in \{z_0, iz_0, -z_0, -iz_0\},$$

onde z_0 é uma raiz da equação $z^4 = \zeta$. Desse modo, se $e \in V_1$ é um vetor que satisfaz as hipóteses do teorema, então também satisfarão as hipóteses os seguintes vetores $J_1(e)$, $-e$ e $-J_1(e)$. Finalmente, definimos, para este $e \in V_1$ o seguinte vetor

$$V_2 \ni e_3 := \frac{1}{r_1} Q_1(e, e) \equiv \frac{1}{r_2} Q_2(e, e).$$

Mudando a notação, chamamos $e_1 := e \in V_1$ e completamos para uma base de V_1 , ou seja, tome, e.g., $e_2 := J_1(e_1)$. Por outro lado, tome $e_3 \in V_2$ definido acima e complete para uma base de V_2 , ou seja, tome, e.g., $e_4 := J_2(e_3)$. Resulta então (e_1, e_2, e_3, e_4) a qual

denominamos *base natural* de $V_1 \times V_2$. É importante ressaltar o fato de que há quatro possíveis bases naturais, visto que há quatro soluções distintas da equação $z^4 = \zeta$. $\square$

Definição 1.13. Seja Q forma bilinear simétrica. Escrevemos o vetor curvatura média de Q como

$$H(Q) = \rho_3 e_3 + \rho_4 e_4,$$

onde (e_3, e_4) são os vetores da base natural que construímos no último teorema. Note que como Q se decompõe em $Q_0 + Q_1 + Q_2$ e que $H(Q_1) = H(Q_2) = 0$, então resulta

$$\rho_3 = ||Q_0(e_1, e_1)|| \quad \text{e} \quad \rho_4 = ||Q_0(e_2, e_2)||,$$

sendo (e_1, e_2) vetores da base natural $(e_1, \dots, e_4)$.

A seguir vamos determinar as componentes de $Q \in \mathcal{K}$ na base natural. Para tanto, vamos fazer uso de uma notação na forma matricial que facilita a representação de Q . Dados $x, y \in V_1$, então $x = x^1 e_1 + x^2 e_2 \cong [x^1 \ x^2]$ e $y = y^1 e_1 + y^2 e_2 \cong [y^1 \ y^2]$, logo escrevemos

$$Q(x, y) = \sum_{\alpha=3}^4 \begin{bmatrix} x^1 & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11}^\alpha & b_{12}^\alpha \\ b_{21}^\alpha & b_{22}^\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix} e_\alpha,$$

e quando não fizermos menção do ponto em quem estamos aplicando Q escreveremos simplesmente

$$Q = \begin{bmatrix} b_{11}^3 & b_{12}^3 \\ b_{21}^3 & b_{22}^3 \end{bmatrix} e_3 + \begin{bmatrix} b_{11}^4 & b_{12}^4 \\ b_{21}^4 & b_{22}^4 \end{bmatrix} e_4.$$

Decompondo $Q = Q_0 + Q_1 + Q_2$ e seguindo a notação matricial que utilizaremos daqui em diante, tem-se que a *forma umbilica* Q_0 é dada por

$$Q_0 = \begin{bmatrix} \rho_3 & 0 \\ 0 & \rho_3 \end{bmatrix} e_3 + \begin{bmatrix} \rho_4 & 0 \\ 0 & \rho_4 \end{bmatrix} e_4.$$

Resta ver como ficam Q_1 e Q_2 . Para tanto, sejam $x, y \in V_1$ e $(e_1, \dots, e_4)$ base natural de $V_1 \times V_2$. Levando-se em consideração a estrutura complexa J_1 de V_1 , existem $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tais que $x = \alpha e_1$ e $y = \beta e_1$. Escrevendo $\alpha = a + ib$ e $\beta = c + id$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ então $x = ae_1 + be_2$ e $y = ce_1 + de_2$. Portanto para a forma Q_1 temos

$$Q_1(x, y) = Q_1(\alpha e_1, \beta e_1) = \alpha \beta Q_1(e_1, e_1), \quad \text{sendo que} \quad e_3 := \frac{Q_1(e_1, e_1)}{r_1},$$

ou seja $Q_1(x, y) = \alpha\beta r_1 e_3$. Ora, $\alpha\beta = (ac - bd) + i(ad + bc)$, logo pondo-se: $a = c = 1$ e $b = d = 0$ implica $x = y = e_1$ e portanto $Q_1(e_1, e_1) = r_1 e_3$, para $a = d = 1$ e $b = c = 0$ implica $x = e_1$ e $y = e_2$ e portanto $Q_1(e_1, e_2) = r_1 i e_3 = r_1 e_4$, para $a = d = 0$ e $b = c = 1$ implica $x = e_2$ e $y = e_1$ e portanto $Q_1(e_2, e_1) = r_1 i e_3 = r_1 e_4$ e finalmente para $a = c = 0$ e $b = d = 1$ implica $x = y = e_2$ e portanto $Q_1(e_2, e_2) = -r_1 e_3$. Segue que a *forma holomorfa* Q_1 é dada por

$$Q_1 = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & -r_1 \end{bmatrix} e_3 + \begin{bmatrix} 0 & r_1 \\ r_1 & 0 \end{bmatrix} e_4.$$

No caso da forma Q_2 , nós temos

$$Q_2(x, y) = Q_2(\alpha e_1, \beta e_1) = \bar{\alpha}\bar{\beta} Q_2(e_1, e_1), \quad \text{sendo que} \quad e_3 := \frac{Q_2(e_1, e_1)}{r_2},$$

ou seja $Q_2(x, y) = \bar{\alpha}\bar{\beta} r_2 e_3$. Lembrando que $\bar{\alpha}\bar{\beta} = (ac - bd) - i(ad + bc)$ e repetindo o procedimento que fizemos no caso de Q_1 , determina-se que $Q_2(e_1, e_1) = r_2 e_3$, $Q_2(e_1, e_2) = -r_2 i e_3 = -r_2 e_4 = Q_2(e_2, e_1)$ e $Q_2(e_2, e_2) = -r_2 e_3$ e portanto a *forma anti-holomorfa* Q_2 é dada por

$$Q_2 = \begin{bmatrix} r_2 & 0 \\ 0 & -r_2 \end{bmatrix} e_3 + \begin{bmatrix} 0 & -r_2 \\ -r_2 & 0 \end{bmatrix} e_4.$$

Resulta finalmente que $Q = Q_0 + Q_1 + Q_2$ é, na forma matricial, dada por

$$Q = \begin{bmatrix} \rho_3 + r_1 + r_2 & 0 \\ 0 & \rho_2 - r_1 - r_2 \end{bmatrix} e_3 + \begin{bmatrix} \rho_4 & r_1 - r_2 \\ r_1 - r_2 & \rho_4 \end{bmatrix} e_4. \quad (4)$$

A fórmula acima, a qual denominamos **decomposição canônica de Q** (ou forma normal de Q), é de importância fundamental para o desenvolvimento do resto da teoria. Nos capítulos seguintes ficará evidente como utilizaremos tal decomposição. Como resultado de tudo que fizemos no presente capítulo, enunciamos o seguinte teorema central.

TEOREMA 1.3 (Invariantes algébricos). *As funções ρ_3, ρ_4, r_1 e r_2 definidas no aberto de $\mathcal{K}$ onde $r_1 r_2 \neq 0$ constituem um sistema completo de invariantes das formas Q tais que $r_1 r_2(Q) \neq 0$. No complemento deste aberto as funções ρ, r_1 e r_2 formam um sistema completo de invariantes.*

1. Uma base do espaço $\mathcal{K}$

Nesta seção apresentamos uma base do espaço $\mathcal{K}$ que iremos utilizar com frequência no capítulo que contém os exemplos de superfícies homogêneas do $\mathbb{R}^4$.

Considere (f_1, f_2) base ortonormal positiva de V_1 e (f_3, f_4) uma base ortonormal positiva do espaço V_2 . Não é difícil de verificar que os vetores de $\mathcal{K}$ (representados na forma matricial)

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} f_3, & E_2 &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} f_4, \\ E_3 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} f_3 + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} f_4, & E_4 &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} f_3 + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} f_4, \\ E_5 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} f_3 + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} f_4, & E_6 &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} f_3 + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} f_4 \end{aligned}$$

são tais que $\text{span}(E_1, E_2) = \mathcal{U}$, $\text{span}(E_3, E_4) = \mathcal{H}$, $\text{span}(E_5, E_6) = \overline{\mathcal{H}}$ e $\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}$. Nessas condições, em função da decomposição $\mathcal{K} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{H} \oplus \overline{\mathcal{H}}$, resulta que $(E_1, \dots, E_6)$ forma uma base ortonormal de $\mathcal{K}$. A importância de apresentar, explicitamente, uma base para o espaço das formas bilineares simétricas ficará evidente no Capítulo 4, onde calcularemos os invariantes algébricos para uma série de superfícies homogêneas do $\mathbb{R}^4$.

2. Relação entre a forma normal e a elipse de curvatura

Veremos a seguir como os invariantes algébricos ρ_3, ρ_4, r_1, r_2 de uma superfície S do $\mathbb{R}^4$ se relacionam com a *elipse de curvatura* de S .

A elipse de curvatura de uma superfície é definida como sendo a imagem do círculo $\{x \in TS : \|x\| = 1\}$ pela segunda forma fundamental Π de S . Escrevendo $x = (\cos t, \sin t)$, nós temos que

$$\begin{aligned} \Pi(x, x) &= \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} e_3 + \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} e_4 \\ &= [\rho_3 + (r_1 + r_2) \cos 2t] e_3 + [\rho_4 + (r_1 - r_2) \sin 2t] e_4 \\ &\cong \{[\rho_3 + (r_1 + r_2) \cos 2t] + i[\rho_4 + (r_1 - r_2) \sin 2t]\} e_3, \end{aligned}$$

onde $a := \rho_3 + r_1 + r_2$, $b := \rho_3 - r_1 - r_2$, $\alpha := \rho_4$ e $\beta := r_1 - r_2$. Nota-se, portanto, que a expressão acima dá uma parametrização de uma elipse no plano $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} x(t) = \rho_3 + (r_1 + r_2) \cos 2t \\ y(t) = \rho_4 + (r_1 - r_2) \sin 2t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

Vemos que as *direções principais* (semi-eixos) dessa elipse são

$$\lambda_1 = r_1 + r_2, \quad \lambda_2 = r_1 - r_2,$$

portanto tem-se que

$$r_1 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \quad r_2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}.$$

Nota-se então os seguinte casos interessantes:

- (i) Se $\Pi \in \mathcal{M}$, então a elipse de curvatura tem centro na origem.
- (ii) Se $\Pi \in \mathcal{H}$ ou $\Pi \in \overline{\mathcal{H}}$, então a elipse de curvatura é uma circunferência de raio r_1 (ou raio r_2) e centro (ρ_3, ρ_4) , mas percorrida no sentido horário (ou anti-horário).
- (iii) Se $\Pi \in \mathcal{U}$, então a elipse de curvatura degenera-se para o ponto (ρ_3, ρ_4) .

CAPÍTULO 2

Superfícies no $\mathbb{R}^4$ e suas Equações de Estrutura

*God made the bulk;
surfaces were invented
by the devil.*

--WOLFGANG PAULI

Neste capítulo $S \subset \mathbb{R}^4$ é uma superfície conexa orientável com uma orientação fixada.

Seja $S \subset \mathbb{R}^4$ superfície imersa em $\mathbb{R}^4$. Fixado $x \in S$ denotamos $T_x S$ o espaço tangente a S em x e $T_x S^\perp$ o espaço normal a S em x . Note que $\dim_{\mathbb{R}} T_x S = \dim_{\mathbb{R}} T_x S^\perp = 2$.

Seja $\Pi_x : T_x S \times T_x S \rightarrow T_x S^\perp$ a segunda forma fundamental de S em x . Tem-se então que

$$\Pi_x(X, Y) = (D_X Y)^\perp, \quad X, Y \in T_x S,$$

onde D denota a derivada covariante de S .

Orientemos $T_x S^\perp$ do seguinte modo: tomamos ν uma orientação de $T_x S^\perp$ de modo que a orientação induzida em $T_x S \oplus T_x S^\perp \cong \mathbb{R}^4$ coincida com a orientação do $\mathbb{R}^4$. Portanto os subespaços invariantes de $\mathcal{K}_x$ independem da orientação de $T_x S$.

Denotaremos $\mathcal{K}_x = \mathcal{U}_x \oplus \mathcal{H}_x \oplus \overline{\mathcal{H}}_x$ e pelo que foi visto anteriormente

$$\Pi_x = \Pi_{0,x} + \Pi_{1,x} + \Pi_{2,x}$$

e

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \|\Pi_{0,x}\|, \quad r_1(x) = \frac{1}{2} \|\Pi_{1,x}\|, \quad r_2(x) = \frac{1}{2} \|\Pi_{2,x}\|.$$

Observamos também os invariantes algébricos ρ , r_1 e r_2 estão globalmente definidos em S .

Assumindo que $r_1 r_2 \neq 0$ sobre S e fixado $x \in S$

Existe $V \subset S$ um subconjunto aberto de S ao qual x pertence tal que

- (i) Existe uma orientação de V ($S \supset V \ni x \mapsto e_x \in T_x S$).
- (ii) Existem quatro campos unitários C^∞ definidos em V satisfazendo:

$$\frac{\Pi_{1,x}(e_x, e_x)}{r_1(x)} = \frac{\Pi_{2,x}(e_x, e_x)}{r_2(x)}.$$

Seja $e_{1,x}$ um dos quatro campos citados acima. Ponhamos

$$e_{3,x} = \frac{\Pi_{1,x}(e_{1,x}, e_{1,x})}{r_1(x)}.$$

Sejam $(e_{1,x}, e_{2,x})$ e $(e_{3,x}, e_{4,x})$ o completamento de $e_{1,x}$ e $e_{3,x}$ para bases ortonormais de $T_x S$ e $T_x S^\perp$, respectivamente (lembre que havia quatro escolhas distintas e portanto já estamos tomando uma delas). Temos então $[(e_{1,x}, e_{2,x}, e_{3,x}, e_{4,x})] = T_x S \oplus T_x S^\perp$, sendo que os dois primeiros vetores constituem o que se chama de referencial móvel canônico de TS e os dois últimos o referencial móvel canônico de $TS^\perp$ e ambos estão definidos para todo $x \in V$.

Denotemos $\phi_{3,x} = \langle \Pi_x, e_{3,x} \rangle$ e $\phi_{4,x} = \langle \Pi_x, e_{4,x} \rangle$ as componentes de Π_x na base $(e_{3,x}, e_{4,x})$. Seja (ω_x^1, ω_x^2) a base dual de $(e_{1,x}, e_{2,x})$. A partir deste momento estaremos omitindo o índice x para simplificar as notações. Estaremos também supondo, no resto do capítulo, que os campos e_1 e e_2 estão definidos em toda a superfície S .

Sabemos que

$$de_i = \sum_{k=1}^4 \omega_i^k e_k,$$

e que as formas ω_i^j são anti-simétricas. Além disso satisfazem

$$d\omega_j^i + \sum_{k=1}^4 \omega_k^i \wedge \omega_j^k = 0.$$

Sejam X e Y campos sobre S , então tem-se que

$$\langle \Pi(X, Y), e_j \rangle = -\langle X, de_j(Y) \rangle,$$

donde resulta que

$$\phi_i = -\sum_{k=1}^2 \omega^k \omega_i^k, \quad i = 3, 4.$$

Calculando $\phi_i : T_x S \times T_x S \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 3, 4$ nos vetores da base de $T_x S$ tem-se

$$\phi_i(e_r, e_s) = -\sum_{k=1}^2 \omega^k(e_r) \omega_i^k(e_s), \quad 1 \leq r, s \leq 2.$$

Por outro lado, por causa da decomposição canônica (4) para Π , nós temos

$$\Pi = \begin{bmatrix} \rho_3 + r_1 + r_2 & 0 \\ 0 & \rho_3 - r_1 - r_2 \end{bmatrix} e_3 + \begin{bmatrix} \rho_4 & r_1 - r_2 \\ r_1 - r_2 & \rho_4 \end{bmatrix} e_4,$$

segue que

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_3(e_1, e_1) = \rho_3 + r_1 + r_2, \\ \phi_3(e_1, e_2) = \phi_3(e_2, e_1) = 0, \\ \phi_3(e_2, e_2) = \rho_3 - r_1 - r_2, \\ \phi_4(e_1, e_1) = \rho_4, \\ \phi_4(e_1, e_2) = \phi_4(e_2, e_1) = r_1 - r_2, \\ \phi_4(e_2, e_2) = \rho_4. \end{array} \right.$$

Portanto, resulta

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1^3 = (\rho_3 + r_1 + r_2)\omega^1 \\ \omega_2^3 = (\rho_3 - r_1 - r_2)\omega^2 \\ \omega_1^4 = \rho_4\omega^1 + (r_1 - r_2)\omega^2 \\ \omega_2^4 = (r_1 - r_2)\omega^1 + \rho_4\omega^2 \end{array} \right. \quad (5)$$

As primeiras e segundas equações de estrutura são dadas, respectivamente, por

$$\left\{ \begin{array}{l} d\omega^i + \omega_k^i \wedge \omega^k = 0 \\ d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k = 0 \end{array} \right. \quad (6)$$

Substituindo-se (5) em (6), encontramos

$$\left\{ \begin{array}{l} d\omega_2^1 = [\rho_3^2 + \rho_4^2 - 2(r_1^2 + r_2^2)]\omega^1 \wedge \omega^2 \\ d\omega_4^3 = 2(r_1^2 - r_2^2)\omega^1 \wedge \omega^2 \end{array} \right. ,$$

que são as *equações de Gauss e Ricci*, respectivamente. As curvaturas *Gaussiana e normal* são dadas, respectivamente, pelas expressões

$$K = \rho_3^2 + \rho_4^2 - 2(r_1^2 + r_2^2) \quad \text{e} \quad \mu = 2(r_1^2 - r_2^2).$$

As *equações de Mainardi-Codazzi* são dadas por

$$\begin{cases} d\omega_1^3 = -\rho_4\omega_4^3 \wedge \omega^1 - [(\rho_3 - r_1 - r_2)\omega_2^1 + (r_1 - r_2)\omega_4^3] \wedge \omega^2 \\ d\omega_2^3 = [(\rho_3 + r_1 + r_2)\omega_2^1 - (r_1 - r_2)\omega_4^3] \wedge \omega^1 - \rho_4\omega_4^3 \wedge \omega^2 \\ d\omega_1^4 = [- (r_1 - r_2)\omega_2^1 + (\rho_3 + r_1 + r_2)\omega_4^3] \wedge \omega^1 - \rho_4\omega_2^1 \wedge \omega^2 \\ d\omega_2^4 = \rho_4\omega_2^1 \wedge \omega^1 + [(r_1 - r_2)\omega_2^1 + (\rho_3 - r_1 - r_2)\omega_4^3] \wedge \omega^2 \end{cases} \quad (7)$$

Lembramos que sobre a superfície S , temos $\omega^3 = \omega^4 = 0$, logo $d\omega^1 = \omega_1^2 \wedge \omega^2$ e $d\omega^2 = \omega_2^1 \wedge \omega^1$, portanto, diferenciando exteriormente as equações de (5) escrevemos

$$\begin{cases} d\omega_1^3 = -[(\rho_3 + r_1 + r_2)_2 \omega^1 + (\rho_3 + r_1 + r_2)\omega_2^1] \wedge \omega^2 \\ d\omega_2^3 = [- (\rho_3 - r_1 - r_2)_1 \omega^2 + (\rho_3 - r_1 - r_2)\omega_2^1] \wedge \omega^1 \\ d\omega_1^4 = [(\rho_4)_2 \omega^2 + (r_1 - r_2)\omega_2^1] \wedge \omega^1 + [(r_1 - r_2)_1 \omega^1 - \rho_4\omega_2^1] \wedge \omega^2 \\ d\omega_2^4 = [(r_1 - r_2)_2 \omega^2 + \rho_4\omega_2^1] \wedge \omega^1 + [(\rho_4)_1 \omega^1 - (r_1 - r_2)\omega_2^1] \wedge \omega^2 \end{cases}, \quad (8)$$

onde os sub índices 1 e 2 nos parênteses das equações (8) indicam as derivadas nas direções dos vetores e_1 e e_2 , respectivamente.

Comparando-se as equações (7) com (8) obtemos

$$\begin{cases} -(\rho_3 + r_1 + r_2)_2 \omega^1 \wedge \omega^2 = 2(r_1 + r_2)\omega_2^1 \wedge \omega^2 - \rho_4\omega_4^3 \wedge \omega^1 - (r_1 - r_2)\omega_4^3 \wedge \omega^2 \\ (\rho_3 - r_1 - r_2)_1 \omega^1 \wedge \omega^2 = 2(r_1 + r_2)\omega_2^1 \wedge \omega^1 - (r_1 - r_2)\omega_4^3 \wedge \omega^1 - \rho_4\omega_4^3 \wedge \omega^2 \\ [(r_1 - r_2)_1 - (\rho_4)_2] \omega^1 \wedge \omega^2 = -2(r_1 - r_2)\omega_2^1 \wedge \omega^1 + (\rho_3 + r_1 + r_2)\omega_4^3 \wedge \omega^1 \\ [(\rho_4)_1 - (r_1 - r_2)_2] \omega^1 \wedge \omega^2 = 2(r_1 - r_2)\omega_2^1 \wedge \omega^2 + (\rho_3 - r_1 - r_2)\omega_4^3 \wedge \omega^2 \end{cases} \quad (9)$$

Multiplicando-se a segunda e terceira equações de (9) por $(r_1 - r_2)$ e $(r_1 + r_2)$, respectivamente, e somando-se membro a membro, eliminamos o termo em $\omega_2^1 \wedge \omega^1$, restando somente¹

$$A \omega^1 \wedge \omega^2 = [(\rho_3 + r_1 + r_2)(r_1 + r_2) - (r_1 - r_2)^2] \omega_4^3 \wedge \omega^1 - \rho_4(r_1 - r_2) \omega_4^3 \wedge \omega^2, \quad (10)$$

onde

$$A := (\rho_3)_1(r_1 - r_2) - (\rho_4)_2(r_1 + r_2) + 2r_2(r_1)_1 - 2r_1(r_2)_1.$$

Analogamente, multiplicando-se a primeira e a quarta equações de (9) por $-(r_1 - r_2)$ e $(r_1 + r_2)$ e somando-se, membro a membro, elimina-se o termo em $\omega_2^1 \wedge \omega^2$, restando

$$B \omega^1 \wedge \omega^2 = \rho_4(r_1 - r_2) \omega_4^3 \wedge \omega^1 + [(\rho_3 - r_1 - r_2)(r_1 + r_2) + (r_1 - r_2)^2] \omega_4^3 \wedge \omega^2, \quad (11)$$

onde

$$B := (\rho_3)_2(r_1 - r_2) + (\rho_4)_1(r_1 + r_2) + 2r_1(r_2)_2 - 2r_2(r_1)_2.$$

Podemos então inverter o sistema composto pelas equações (10) e (11) de modo a determinar a forma ω_4^3 . Para tanto, note que se escrevermos $\omega_4^3 = \gamma_1 \omega^1 + \gamma_2 \omega^2$, onde γ_i , $i = 1, 2$ são funções diferenciáveis, então (10) e (11) tornam-se

$$\begin{cases} -\rho_4(r_1 - r_2)\gamma_1 - [(\rho_3 + r_1 + r_2)(r_1 + r_2) - (r_1 - r_2)^2]\gamma_2 = A \\ [(\rho_3 - r_1 - r_2)(r_1 + r_2) + (r_1 - r_2)^2]\gamma_1 - \rho_4(r_1 - r_2)\gamma_2 = B \end{cases}$$

Supondo que o determinante desse sistema é não nulo, i.e.,

$$-\rho_3^2(r_1 + r_2)^2 - \rho_4^2(r_1 - r_2)^2 + (4r_1r_2)^2 \neq 0,$$

então ficam determinadas γ_1 e γ_2 pelas expressões

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{[(\rho_3 + r_1 + r_2)(r_1 + r_2) - (r_1 - r_2)^2]B - \rho_4(r_1 - r_2)A}{-\rho_4^2(r_1 - r_2)^2 - \rho_3^2(r_1 + r_2)^2 + (4r_1r_2)^2} \\ \gamma_2 = \frac{-\rho_4(r_1 - r_2)B - [(\rho_3 - r_1 - r_2)(r_1 + r_2) + (r_1 - r_2)^2]A}{-\rho_4^2(r_1 - r_2)^2 - \rho_3^2(r_1 + r_2)^2 + (4r_1r_2)^2} \end{cases}$$

¹Segue a notação de sub índice para as derivadas conforme explicado anteriormente.

Da terceira e quarta equações de (9) escrevemos

$$\begin{cases} \omega_4^3 \wedge \omega^1 = \frac{[(r_1 - r_2)_1 - (\rho_4)_2] \omega^1 \wedge \omega^2 + 2(r_1 - r_2) \omega_2^1 \wedge \omega^1}{\rho_3 + r_1 + r_2} \\ \omega_4^3 \wedge \omega^2 = \frac{[(\rho_4)_1 - (r_1 - r_2)_2] \omega^1 \wedge \omega^2 - 2(r_1 - r_2) \omega_2^1 \wedge \omega^2}{\rho_3 - r_1 - r_2} \end{cases},$$

que ao substituírmos na primeira e segunda equações de (9) resulta em

$$\begin{cases} C \omega^1 \wedge \omega^2 = -\frac{2\rho_4(r_1 - r_2)}{\rho_3 + r_1 + r_2} \omega_2^1 \wedge \omega^1 + \left[2(r_1 + r_2) + \frac{2(r_1 - r_2)^2}{\rho_3 - r_1 - r_2} \right] \omega_2^1 \wedge \omega^2 \\ D \omega^1 \wedge \omega^2 = \left[2(r_1 + r_2) - \frac{2(r_1 - r_2)^2}{\rho_3 + r_1 + r_2} \right] \omega_2^1 \wedge \omega^1 + \frac{2\rho_4(r_1 - r_2)}{\rho_3 - r_1 - r_2} \omega_2^1 \wedge \omega^2 \end{cases}, \quad (12)$$

onde

$$\begin{cases} C = -(\rho_3 + r_1 + r_2)_2 + \frac{\rho_4[(r_1 - r_2)_1 - (\rho_4)_2]}{\rho_3 + r_1 + r_2} + \frac{(r_1 - r_2)[(\rho_4)_1 - (r_1 - r_2)_2]}{\rho_3 - r_1 - r_2} \\ D = (\rho_3 - r_1 - r_2)_1 + \frac{(r_1 - r_2)[(r_1 - r_2)_1 - (\rho_4)_2]}{\rho_3 + r_1 + r_2} + \frac{\rho_4[(\rho_4)_1 - (r_1 - r_2)_2]}{\rho_3 - r_1 - r_2} \end{cases}$$

Escrevendo $\omega_2^1 = \Gamma_1 \omega^1 + \Gamma_2 \omega^2$, o sistema (12) fica

$$\begin{cases} \left[2(r_1 + r_2) + \frac{2(r_1 - r_2)^2}{\rho_3 - r_1 - r_2} \right] \Gamma_1 + \frac{2\rho_4(r_1 - r_2)}{\rho_3 + r_1 + r_2} \Gamma_2 = C \\ \frac{2\rho_4(r_1 - r_2)}{\rho_3 - r_1 - r_2} \Gamma_1 - \left[2(r_1 + r_2) - \frac{2(r_1 - r_2)^2}{\rho_3 + r_1 + r_2} \right] \Gamma_2 = D \end{cases}$$

Supondo que o determinante desse sistema é não nulo, i.e.,

$$\frac{4[-\rho_3^2(r_1 + r_2)^2 - \rho_4^2(r_1 - r_2)^2 + (4r_1 r_2)^2]}{(\rho_3 + r_1 + r_2)(\rho_3 - r_1 - r_2)} \neq 0,$$

então ficam determinadas Γ_1 e Γ_2 pelas expressões

$$\begin{cases} \Gamma_1 = \frac{\left[-\left[2(r_1 + r_2) - \frac{2(r_1 - r_2)^2}{\rho_3 + r_1 + r_2} \right] C + \frac{2\rho_4(r_1 - r_2)}{\rho_3 + r_1 + r_2} D \right] [\rho_3^2 - (r_1 + r_2)^2]}{-\rho_3^2(r_1 + r_2)^2 - \rho_4^2(r_1 - r_2)^2 + (4r_1 r_2)^2} \\ \Gamma_2 = \frac{\left[\left[2(r_1 + r_2) + \frac{2(r_1 - r_2)^2}{\rho_3 - r_1 - r_2} \right] D - \frac{2\rho_4(r_1 - r_2)}{\rho_3 - r_1 - r_2} C \right] [\rho_3^2 - (r_1 + r_2)^2]}{-\rho_3^2(r_1 + r_2)^2 - \rho_4^2(r_1 - r_2)^2 + (4r_1 r_2)^2} \end{cases}$$

Olhando os resultados que obtivemos, concluimos, entre outras propriedades, que se forem dadas as funções ρ_3, ρ_4, r_1 e r_2 e elas satisfizerem $-\rho_3^2(r_1 + r_2)^2 - \rho_4^2(r_1 - r_2)^2 + (4r_1r_2)^2 \neq 0$, então pelas expressões para γ_i e Γ_i , $1 \leq i \leq 2$ que determinamos acima, as formas ω_2^1 e ω_4^3 ficam completamente determinadas por ρ_3, ρ_4, r_1, r_2 e por suas derivadas nas direções de e_1 e e_2 .

1. Teorema de congruência para superfícies no $\mathbb{R}^4$

O grupo $E(4) = \mathbb{R}^4 \oplus \text{SO}(4) = \{(x; e_1, \dots, e_4) | x \in \mathbb{R}^4, (e_i) \in \text{SO}(4)\}$ operando por isometrias no $\mathbb{R}^4$ é tal que

$$\begin{cases} dx = \sum_{i=1}^4 \omega^i e_i \\ de_k = \sum_{i=1}^4 \omega_k^i e_i \end{cases}$$

Denotando por $g = (x; e_1, \dots, e_4)$ um elemento do $E(4)$, a forma de Maurer-Cartan de $E(4)$ é definida por

$$\begin{aligned} \omega_g &: TE(4) \longrightarrow \mathfrak{e}(4) \\ v &\longmapsto \omega_g(v) := (dL_{g^{-1}})(v) = g^{-1}(v) \end{aligned}$$

Se olharmos para o grupo $E(4)$ como subgrupo de $\text{GL}(5, \mathbb{R})$ (esta identificação é padrão), então dg coincide com a identidade, logo teremos que a forma de Maurer-Cartan é dada por

$$\omega_g = g^{-1} \cdot dg.$$

Representando matricialmente, nós temos que

$$d \underbrace{(x; e_1, \dots, e_4)}_g = \underbrace{(x; e_1, \dots, e_4)}_g \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \omega^1 & \\ \omega^2 & \\ \omega^3 & \\ \omega^4 & \end{bmatrix} (\omega_j^i),$$

logo resulta, por multiplicação à esquerda por g^{-1} , que

$$g^{-1} \cdot dg = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \omega^1 & \\ \omega^2 & (\omega_j^i) \\ \omega^3 & \\ \omega^4 & \end{bmatrix},$$

portanto, a forma de Maurer-Cartan do grupo $E(4)$ é justamente

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \omega^1 & \\ \omega^2 & (\omega_j^i) \\ \omega^3 & \\ \omega^4 & \end{bmatrix}.$$

Definição 2.1. Seja $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão. Um referencial móvel ao longo de f é uma aplicação diferenciável $g : S \longrightarrow E(4)$ tal que comuta o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & E(4) & (x; e_1, \dots, e_4) \\ & \downarrow \pi & \downarrow \pi \\ S & \xrightarrow{f} \mathbb{R}^4 & x \end{array}$$

isto é, $f = \pi \circ g$.

TEOREMA 2.1 (Élie Cartan). *Seja $\omega : TS \longrightarrow \mathfrak{e}(4)$ uma 1-forma definida numa variedade conexa e simplesmente conexa S . Nessas condições, existe $f : S \longrightarrow E(4)$ aplicação diferenciável satisfazendo $f^*\varphi = \omega$ se, e somente se, $d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$, onde φ é a forma de Maurer-Cartan de $E(4)$; além disso f é única a menos de translações à esquerda.*

Demonstração. Para a demonstração consulte [2]. □

Definição 2.2. Seja $S \subset \mathbb{R}^4$ uma superfície conexa e orientada. Dizemos que S é regular se para os seus invariantes r_1 e r_2 , tivermos $r_1 r_2 \neq 0$.

TEOREMA 2.2. *Sejam $f_1 : S \longrightarrow \mathbb{R}^4$ e $f_2 : S \longrightarrow \mathbb{R}^4$ imersões regulares tais que $(df_1)^{-1}(e_i) = (df_2)^{-1}(\tilde{e}_i)$, $1 \leq i \leq 2$ onde (e_1, e_2) e $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ são referenciais naturais de f_1*

e f_2 , respectivamente. Além disso, suponhamos também que f_1 e f_2 possuem os mesmos invariantes algébricos ρ_3, ρ_4, r_1, r_2 . Nessas condições f_1 e f_2 diferem por uma isometria do $\mathbb{R}^4$.

Demonstração. Seja $\varphi : TE(4) \longrightarrow \mathfrak{e}(4)$ forma de Maurer-Cartan do grupo de Lie $E(4)$. Temos $g_i(x) = (f_i(x); e_{1,i}(x), \dots, e_{4,i}(x))$, são referenciais adaptados ao longo de f_i , $i = 1, 2$ sendo $g_i : S \longrightarrow E(4)$ aplicação de acordo com a definição (2.1). Por outro lado, temos uma 1-forma $\omega : TS \longrightarrow \mathfrak{e}(4)$ que representamos por

$$\omega \cong \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \omega^1 & \\ \omega^2 & (\omega_j^i) \\ 0 & \\ 0 & \end{bmatrix},$$

onde $(\omega^1, \dots, \omega^4)$ é coreferencial de $(e_1, \dots, e_4)$ e $\omega_j^i, 1 \leq i, j \leq 4$ as formas de conexão associadas. Pelo capítulo precedente, a forma ω satisfaz as equações de estrutura, isto é, $d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$. Aplicamos então o teorema (2.1), para concluir que $g_i^* = \omega$ e g_i são as mesmas a menos de uma translação à esquerda, isto é, $g_2 = L_h \circ g_1$, onde $h \in E(4)$. Segue portanto que

$$\begin{cases} g_2(x) = (f_2(x); e_{1,2}(x), \dots, e_{4,2}(x)) \\ g_1(x) = (f_1(x); e_{1,1}(x), \dots, e_{4,1}(x)) \end{cases},$$

mas

$$f_2(x) = \pi g_2(x) = \pi(h g_1(x)) \underbrace{=}_{\pi(h) := g(0)} h g_1(x) \cdot 0 = h f_1(x),$$

portanto $f_2(x) = h f_1(x)$, ou seja $f_2 = L_h \circ f_1$, e segue o resultado. $\square$

CAPÍTULO 3

Exemplos de Superfícies Homogêneas no $\mathbb{R}^4$

Observation always involves theory.

—EDWIN HUBBLE

Sejam $S \subset \mathbb{R}^4$ superfície e $\Pi : TS \times TS \longrightarrow TS^\perp$ sua segunda forma fundamental.

Exemplo 3.1. Seja $S = \pi \subset \mathbb{R}^4$ um plano. Sua segunda forma fundamental é nula e portanto seus invariantes algébricos são

$$\rho_3 = \rho_4 = r_1 = r_2 = 0.$$

Exemplo 3.2. Seja $S = S_R^2 \subset \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$ uma 2-esfera de raio R e centro na origem. Considere (f_1, f_2, f_3, f_4) referencial adaptado a S definido por $(f_1, f_2) \in TS$, $f_3(x) := \frac{x}{R} \in TS^\perp$ e $f_4 = (0, 0, 0, 1) \in TS^\perp$. Seja (ω^1, ω^2) base dual de (f_1, f_2) . Nessas condições, temos

$$df_3 = \frac{\text{id}}{R} = \frac{\omega^1}{R}f_1 + \frac{\omega^2}{R}f_2, \quad df_4 = 0,$$

que implicam em

$$\begin{cases} \omega_1^3 = -\frac{1}{R}\omega^1, & \omega_2^3 = -\frac{1}{R}\omega^2 \\ \omega_1^4 = \omega_2^4 = 0 \end{cases}$$

Portanto a segunda forma fundamental de S é dada por

$$\Pi = \left[\frac{(\omega^1)^2}{R} + \frac{(\omega^2)^2}{R} \right] f_3,$$

que matricialmente fica escrita como

$$\Pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} f_3,$$

e assim concluimos que os invariantes algébricos são dados por

$$\rho_3 = \frac{1}{R}, \quad \rho_4 = r_1 = r_2 = 0.$$

Exemplo 3.3. Seja $(u, v) \mapsto (R \cos \frac{u}{R}, R \sin \frac{u}{R}, v, 0)$ um cilindro S no $\mathbb{R}^4$. Considere então os seguinte referencial adaptado a S

$$\begin{cases} f_1 = (-\frac{x^1}{R}, \frac{x^2}{R}, 0, 0) = (-\cos \frac{u}{R}, \sin \frac{u}{R}, 0, 0) \\ f_2 = (0, 0, 1, 0) \\ f_3 = (\frac{x^2}{R}, \frac{x^1}{R}, 0, 0) = (\sin \frac{u}{R}, \cos \frac{u}{R}, 0, 0) \\ f_4 = (0, 0, 0, 1) \end{cases}$$

Note-se que $(f_1, f_2) \in TS$ e $(f_3, f_4) \in TS^\perp$. Diferenciando os campos acima, obtemos

$$\begin{cases} df_1 = (\frac{1}{R} \sin \frac{u}{R} du, \frac{1}{R} \cos \frac{u}{R} du, 0, 0) = \frac{1}{R} du f_3 \\ df_2 = 0 \\ df_3 = (\frac{1}{R} \cos \frac{u}{R} du, \frac{1}{R} \sin \frac{u}{R} du, 0, 0) = -\frac{1}{R} du f_1 \\ df_4 = 0 \end{cases}$$

Como $df_i = \sum_{j=1}^4 \omega_i^j f_j$, obtemos

$$\omega_2^1 = \omega_4^3 = 0, \quad \omega_1^3 = \frac{1}{R} du, \quad \omega_2^3 = 0, \quad \omega_1^4 = \omega_2^4 = 0,$$

e portanto a segunda forma fundamental é dada por

$$\Pi = \frac{1}{R^2} (du)^2 f_3.$$

Matricialmente,

$$\Pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} f_3.$$

Escrevemos então a segunda forma fundamental na base $(E_1, \dots, E_6)$ (em termos de f_3 e f_4), i.e., $\Pi = \sum_{i=1}^6 \lambda_i E_i$ onde os coeficientes λ_i são a determinar. Obtém-se, após algum trabalho algébrico, que

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2R^2}, \quad \lambda_3 = \lambda_5 = \frac{1}{2R^2}, \quad \lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_6 = 0.$$

Portanto, temos $\Pi = \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2$, onde

$$\begin{cases} \Pi_0 = \begin{bmatrix} 1/2R^2 & 0 \\ 0 & 1/2R^2 \end{bmatrix} f_3 \in \mathcal{U} \\ \Pi_1 = \begin{bmatrix} 1/4R^2 & 0 \\ 0 & -1/4R^2 \end{bmatrix} f_3 + \begin{bmatrix} 0 & 1/4R^2 \\ 1/4R^2 & 0 \end{bmatrix} f_4 \in \mathcal{H} \\ \Pi_2 = \begin{bmatrix} 1/4R^2 & 0 \\ 0 & -1/4R^2 \end{bmatrix} f_3 + \begin{bmatrix} 0 & -1/4R^2 \\ -1/4R^2 & 0 \end{bmatrix} f_4 \in \overline{\mathcal{H}} \end{cases}$$

Comparando com a forma normal de Π , nota-se que neste caso a base (f_3, f_4) coincide com (e_3, e_4) do referencial de Darboux de S . Logo, resulta que os invariantes algébricos para o cilindro são

$$\rho_3 = \frac{1}{2R^2}, \quad \rho_4 = 0, \quad r_1 = r_2 = \frac{1}{4R^2}.$$

Exemplo 3.4. Seja $(u, v) \mapsto (a \cos \frac{u}{a}, a \sin \frac{u}{a}, b \cos \frac{v}{b}, b \sin \frac{v}{b}) \cong (ae^{i\frac{u}{a}}, be^{i\frac{v}{b}}) \in \mathbb{C}^2$, tal que $a^2 + b^2 = R^2$ um toro S no $\mathbb{R}^4$. Considere então o seguinte referencial adaptado a S

$$\begin{cases} f_1 = (ie^{i\frac{u}{a}}, 0) \\ f_2 = (0, ie^{i\frac{v}{b}}) \\ f_3 = (-e^{i\frac{u}{a}}, 0) \\ f_4 = (0, -e^{i\frac{v}{b}}) \end{cases}$$

Note-se que $(f_1, f_2) \in TS$ e $(f_3, f_4) \in TS^\perp$. Diferenciando, obtemos

$$\begin{cases} df_1 = \frac{du}{a} f_3 \\ df_2 = \frac{dv}{b} f_4 \\ df_3 = -\frac{du}{a} f_1 \\ df_4 = -\frac{dv}{b} f_2 \end{cases}$$

Segue que

$$\omega^1 = du, \quad \omega^2 = dv, \quad \omega_2^1 = \omega_4^3 = 0, \quad \omega_1^3 = \frac{du}{a}, \quad \omega_2^3 = 0, \quad \omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^4 = \frac{dv}{b},$$

e portanto a segunda forma é dada por

$$\Pi = \frac{1}{a^2}(du)^2 f_3 + \frac{1}{b^2}(dv)^2 f_4.$$

Matricialmente,

$$\Pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} f_3 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{bmatrix} f_4.$$

Repetindo o procedimento do exemplo anterior para determinar os λ_i obtemos que

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2a^2}, \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{2b^2}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2a^2}, \quad \lambda_4 = -\frac{1}{2b^2}, \quad \lambda_5 = \frac{1}{2a^2}, \quad \lambda_6 = -\frac{1}{2b^2}.$$

Portanto, temos $\Pi = \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2$, onde

$$\begin{cases} \Pi_0 = \begin{bmatrix} 1/2a^2 & 0 \\ 0 & 1/2a^2 \end{bmatrix} f_3 + \begin{bmatrix} 1/2b^2 & 0 \\ 0 & 1/2b^2 \end{bmatrix} f_4 \in \mathcal{U} \\ \Pi_1 = \begin{bmatrix} 1/4a^2 & 1/4b^2 \\ 1/4b^2 & -1/4a^2 \end{bmatrix} f_3 + \begin{bmatrix} -1/4b^2 & 1/4a^2 \\ 1/4a^2 & 1/4b^2 \end{bmatrix} f_4 \in \mathcal{H} \\ \Pi_2 = \begin{bmatrix} 1/4a^2 & -1/4b^2 \\ -1/4b^2 & -1/4a^2 \end{bmatrix} f_3 + \begin{bmatrix} -1/4b^2 & -1/4a^2 \\ -1/4a^2 & 1/4b^2 \end{bmatrix} f_4 \in \overline{\mathcal{H}} \end{cases},$$

logo comparando com a forma normal de Π concluímos que (f_3, f_4) não é a base canônica. Portanto é necessário que determinemos a “direção privilegiada” e_3 que é aquela tal que tem-se $\Pi_1(x, x) = \Pi_2(x, x)$ para $\|x\| = 1$. Desse modo, conforme foi visto no capítulo dos

invariantes algébricos definiremos $e_3 = \Pi_1(x, x)/\|\Pi_1(x, x)\|$ e $e_4 = J_2(e_3)$. Temos então que resolver a equação

$$\Pi_1(x, x) = \Pi_2(x, x), \quad x := (\cos \theta, \sin \theta), \quad \text{i.e. } \|x\| = 1.$$

Usando as Π_1 e Π_2 determinadas acima e calculando-as no vetor $x = (\cos \theta, \sin \theta)$, vem que

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{4a^2} \cos^2 \theta + \frac{1}{2b^2} \cos \theta \sin \theta - \frac{1}{4a^2} \sin^2 \theta \right) f_3 + \left(-\frac{1}{4b^2} \cos^2 \theta + \frac{1}{2a^2} \cos \theta \sin \theta + \frac{1}{4b^2} \sin^2 \theta \right) f_4 \equiv \\ & \left(\frac{1}{4a^2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2b^2} \cos \theta \sin \theta - \frac{1}{4a^2} \sin^2 \theta \right) f_3 + \left(-\frac{1}{4b^2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2a^2} \cos \theta \sin \theta + \frac{1}{4b^2} \sin^2 \theta \right) f_4, \end{aligned}$$

que implica

$$\frac{1}{b^2} \cos \theta \sin \theta = 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{a^2} \cos \theta \sin \theta = 0,$$

ou seja $\cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta = 0$, isto é, $\theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Tomemos então $\theta = 0$, ou seja, $x = (1, 0) =: e_1$ do referencial canônico, e portanto $e_3 := \Pi_1(e_1, e_1)/\|\Pi_1(e_1, e_1)\|$, ora

$$\Pi_1(e_1, e_1) = \frac{1}{4a^2} f_3 - \frac{1}{4b^2} f_4 \Rightarrow \|\Pi_1(e_1, e_1)\| = \frac{1}{4a^2 b^2} \sqrt{a^4 + b^4},$$

portanto o invariante algébrico $r_1 := \|\Pi_1(e_1, e_1)\|$ fica dado por¹

$$r_1 = \frac{1}{4a^2 b^2} \sqrt{R^4 - 2a^2 b^2}.$$

Por conseguinte, os vetores canônicos e_3 e e_4 são dados por

$$\begin{cases} e_3 = \frac{b^2}{\sqrt{R^4 - 2a^2 b^2}} f_3 - \frac{a^2}{\sqrt{R^4 - 2a^2 b^2}} f_4 \\ e_4 = J_2(e_3) = \frac{a^2}{\sqrt{R^4 - 2a^2 b^2}} f_3 + \frac{b^2}{\sqrt{R^4 - 2a^2 b^2}} f_4 \quad (\text{pois } J_2(f_3) = f_4, J_2(f_4) = -f_3) \end{cases}$$

Invertamos o sistema acima para escrever os f_i como função dos e_i ; obtém-se

$$\begin{cases} f_3 = \frac{b^2}{\sqrt{R^4 - 2a^2 b^2}} e_3 + \frac{a^2}{\sqrt{R^4 - 2a^2 b^2}} e_4 \\ f_4 = \frac{-a^2}{\sqrt{R^4 - 2a^2 b^2}} e_3 + \frac{b^2}{\sqrt{R^4 - 2a^2 b^2}} e_4 \end{cases}$$

¹Veja que $a^4 + b^4 = R^4 - 2a^2 b^2$.

Dessa forma, reescrevemos as componentes Π_i , $i = 0, 1, 2$ na base (e_3, e_4) . Resulta finalmente que

$$\begin{cases} \Pi_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{R^4-2a^2b^2}} \left(\frac{b^4-a^4}{a^2b^2} \right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{R^4-2a^2b^2}} \left(\frac{b^4-a^4}{a^2b^2} \right) \end{bmatrix} e_3 + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{R^4-2a^2b^2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{R^4-2a^2b^2}} \end{bmatrix} e_4 \in \mathcal{U} \\ \Pi_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{R^4-2a^2b^2}}{4a^2b^2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{R^4-2a^2b^2}}{4a^2b^2} \end{bmatrix} e_3 + \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{R^4-2a^2b^2}}{4a^2b^2} \\ \frac{\sqrt{R^4-2a^2b^2}}{4a^2b^2} & 0 \end{bmatrix} e_4 \in \mathcal{H} \\ \Pi_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{R^4-2a^2b^2}}{4a^2b^2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{R^4-2a^2b^2}}{4a^2b^2} \end{bmatrix} e_3 + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{R^4-2a^2b^2}}{4a^2b^2} \\ -\frac{\sqrt{R^4-2a^2b^2}}{4a^2b^2} & 0 \end{bmatrix} e_4 \in \mathcal{H} \end{cases}$$

Portanto os invariantes algébricos para este toro são dados por

$$\rho_3 = \frac{1}{2\sqrt{R^4-2a^2b^2}} \left(\frac{b^4-a^4}{a^2b^2} \right), \quad \rho_4 = \frac{1}{\sqrt{R^4-2a^2b^2}}, \quad r_1 = r_2 = \frac{\sqrt{R^4-2a^2b^2}}{4a^2b^2}.$$

Observe que se calcularmos as curvaturas Gaussiana e normal (pelas fórmulas obtidas no capítulo sobre as Equações de Estrutura), obtemos

$$\begin{cases} K = \rho_3^2 + \rho_4^2 - 2(r_1^2 + r_2^2) = \frac{1}{4a^4b^4} \left[\frac{(a^4+b^4)}{R^4-2a^2b^2} - (R^4 - 2a^2b^2) \right] \\ \mu = 2(r_1^2 - r_2^2) = 0 \end{cases}$$

e se escolhermos os particulares valores $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, então resulta das expressões acima que $K = \mu = 0$.

Exemplo 3.5. Seja $S \subset S^3 \subset \mathbb{R}^4$ uma superfície na 3-esfera dentro do $\mathbb{R}^4$. Considere $(f_1, f_2) \in TS$, $(f_1, f_2, f_3) \in TS^3$ e $f_4 := -\text{id}$, $\langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq 3$. Claramente $(f_1, \dots, f_4)$ é um referencial ortonormal adaptado a superfície S . Seja $(\omega^1, \dots, \omega^4)$ coreferencial de $(e_1, \dots, e_4)$ e ω_j^i formas de conexão associadas. Diferenciando os campos f_3 e f_4 nós obtemos

$$\begin{cases} df_3 = \omega_3^1 f_1 + \omega_3^2 f_2 \equiv -(a\omega^1 + b\omega^2) f_1 - (b\omega^1 + c\omega^2) f_2 \\ df_4 = \omega_4^1 f_1 + \omega_4^2 f_2 = -(\omega^1 f_1 + \omega^2 f_2) = -\text{id} \end{cases}$$

onde a, b e c são funções diferenciáveis. A segunda forma fundamental de S pode ser escrita então como

$$\Pi = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} f_3 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} f_4.$$

Calculando o vetor curvatura média de Π nós obtemos

$$H(\Pi) = \left(\frac{a+c}{2} \right) f_3 + f_4,$$

e vamos então determinar a decomposição $\Pi = \Pi_0 \oplus \Pi_1 \oplus \Pi_2$. Com algum trabalho algébrico, escrevemos $\Pi = \sum_i \lambda_i E_i$ na base $(E_i)_{i=1}^6$, e determinando assim os λ_i , obtemos

$$\lambda_1 = \frac{a+c}{\sqrt{2}}, \quad \lambda_2 = \frac{2}{\sqrt{2}}, \quad \lambda_3 = \frac{a-c}{2}, \quad \lambda_4 = -b, \quad \lambda_5 = \frac{a-c}{2}, \quad \lambda_6 = -b.$$

Portanto, temos

$$\begin{cases} \Pi_0 = \begin{bmatrix} \frac{a+c}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a+c}{2} \end{bmatrix} f_3 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} f_4 \in \mathcal{U} \\ \Pi_1 = \begin{bmatrix} \frac{a-c}{4} & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & \frac{c-a}{4} \end{bmatrix} f_3 + \begin{bmatrix} -\frac{b}{2} & \frac{a-c}{2} \\ \frac{a-c}{2} & \frac{b}{2} \end{bmatrix} f_4 \in \mathcal{H} \\ \Pi_2 = \begin{bmatrix} \frac{a-c}{4} & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & \frac{c-a}{4} \end{bmatrix} f_3 + \begin{bmatrix} \frac{b}{2} & \frac{c-a}{4} \\ \frac{c-a}{4} & -\frac{b}{2} \end{bmatrix} f_4 \in \overline{\mathcal{H}} \end{cases},$$

e está claro, por comparação com a forma normal de Π , que os vetores (f_3, f_4) não são os vetores canônicos (e_3, e_4) . Desse modo é necessário que procuremos determinar o vetor e_3 impondo a condição $\Pi_1(x, x) = \Pi_2(x, x)$ para $\|x\| = 1$. Definindo $x = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, a equação acima torna-se

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a-c}{4} \cos^2 t + b \cos t \sin t + \frac{c-a}{4} \sin^2 t \right) f_3 + \left(-\frac{b}{2} \cos^2 t + \frac{a-c}{2} \cos t \sin t + \frac{b}{2} \sin^2 t \right) f_4 \equiv \\ & \left(\frac{a-c}{4} \cos^2 t + b \cos t \sin t + \frac{c-a}{4} \sin^2 t \right) f_3 + \left(\frac{b}{2} \cos^2 t + \frac{c-a}{2} \cos t \sin t - \frac{b}{2} \sin^2 t \right) f_4, \end{aligned}$$

e essa identidade implica em

$$[-b \cos^2 t + (a-c) \cos t \sin t + b \sin^2 t] f_4 \equiv 0 \Rightarrow -b \cos 2t + \left(\frac{a-c}{2} \right) \sin 2t \equiv 0.$$

Por conseguinte, se $\cos 2t \neq 0$, isto é, $t \neq \left(\frac{2k+1}{4} \right) \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, então podemos escrever

$$\tan 2t = \frac{2b}{a-c} \Rightarrow t = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2b}{a-c} \right).$$

Nessas condições, definimos

$$e_1 := (\cos t, \sin t), \quad e_2 := J_1(e_1), \quad e_3 := \frac{\Pi_1(e_1, e_1)}{\|\Pi_1(e_1, e_1)\|}, \quad e_4 := J_2(e_3), \quad \text{para } t = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2b}{a-c} \right),$$

e assim $(e_1, \dots, e_4)$ é o nosso referencial canônico adaptado para a superfície $S \subset S^3$ dentro do $\mathbb{R}^4$. Vamos então determinar os invariantes algébricos de S ; com efeito, $r_1 = \|\Pi_1(e_1, e_1)\|$, portanto temos

$$r_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{a-c}{2} \right)^2 + b^2}.$$

Por outro lado, $r_2 = r_1$ já que temos $e_3 = \frac{\Pi_2(e_1, e_1)}{\|\Pi_2(e_1, e_1)\|}$ e $r_2 = \|\Pi_2(e_1, e_1)\|$. Como r_1 e r_2 coincidem, resulta da fórmula da curvatura normal que toda superfície mínima na 3-esfera dentro do $\mathbb{R}^4$ tem $\mu = 0$. Além disso, se escrevermos os e_i em função dos f_i , para $i = 3, 4$, obtemos

$$\begin{cases} e_3 = \frac{1}{r_1} \left[\left(\frac{a-c}{4} \right) \cos 2t + \frac{b}{2} \sin 2t \right] f_3 + \frac{1}{r_1} \left[-\frac{b}{2} \cos 2t + \left(\frac{a-c}{4} \right) \sin 2t \right] f_4 \\ e_4 = \frac{1}{r_1} \left[\frac{b}{2} \cos 2t - \left(\frac{a-c}{4} \right) \sin 2t \right] f_3 + \frac{1}{r_1} \left[\left(\frac{a-c}{4} \right) \cos 2t + \frac{b}{2} \sin 2t \right] f_4 \end{cases},$$

logo pode-se reescrever Π_0, Π_1, Π_2 na base (e_3, e_4) ; entretanto só o faremos para a forma Π_0 , afim de determinar os invariantes ρ_3 e ρ_4 , de fato,

$$\Pi_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1} \left[\left(\frac{a+c}{2} \right) A + B \right] & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_1} \left[\left(\frac{a+c}{2} \right) A + B \right] \end{bmatrix} e_3 + \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1} \left[-\left(\frac{a+c}{2} \right) B + A \right] & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_1} \left[-\left(\frac{a+c}{2} \right) B + A \right] \end{bmatrix} e_4,$$

onde $A := \left(\frac{a-c}{4} \right) \cos 2t + \frac{b}{2} \sin 2t$ e $B := -\frac{b}{2} \cos 2t - \left(\frac{a-c}{4} \right) \sin 2t$. Resulta finalmente que

$$\rho_3 = \frac{1}{r_1} \left[\left(\frac{a+c}{2} \right) A + B \right], \quad \rho_4 = \frac{1}{r_1} \left[-\left(\frac{a+c}{2} \right) B + A \right],$$

que são os invariantes que restavam². Note-se, a título de ilustração, que o caso particular em que $b = 0$ e $a = c > 0$, conduz a

$$r_1 = r_2 = \frac{a}{2}, \quad t = 0 \Rightarrow \rho_3 = 0, \quad \rho_4 = 1,$$

portanto as curvaturas ficam $K = 1 - a^2$ e $\mu = 0$; logo S será rasa se, e somente se, $a = \pm 1$.

²Note que $\rho^2 = \rho_3^2 + \rho_4^2 = \|H\|^2 = \left(\frac{a+c}{2} \right)^2 + 1$, conforme já tínhamos visto no começo deste exemplo.

Para finalizar este exemplo vamos discutir um caso particular interessante, que ocorre quando $S \subset S^3 \subset \mathbb{R}^4$ é uma *superfície mínima em S^3* . Neste caso, temos a condição a ser satisfeita $a + c = 0$ (minimalidade), logo os invariante para esta superfície ficam

$$\begin{cases} r_1 = r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}, \\ \rho_3 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(-b \cos 2t + a \sin 2t) \\ \rho_4 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(a \cos 2t + b \sin 2t) \end{cases}, \text{ para } t = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right)$$

Além disso podemos considerar os sub-casos:

- (i) Se $a = b \equiv 1$, então $t = \frac{\pi}{8}$, $r_1 = r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\rho_3 = 0$ e $\rho_4 = 1$. Pelas equações de estrutura, as curvaturas Gaussiana e normal são dadas por $K = -1$ e $\mu = 0$.
- (ii) Se $a = b$, então $t = \frac{\pi}{8}$, $r_1 = r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, $\rho_3 = 0$ e $\rho_4 = 2$, logo $K = 1 - 2a^2$ e $\mu = 0$.
Note que, neste caso, $K \equiv 0$ se, e somente se, $1 - 2a^2 = 0$, isto é, se $a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Damos por encerrado este capítulo. No próximo capítulo classificaremos as superfícies homogêneas do $\mathbb{R}^4$ e veremos que os exemplos apresentados aqui irão reaparecer em sua forma mais geral.

CAPÍTULO 4

Classificação das Superfícies Homogêneas em $\mathbb{R}^4$

*Symmetry, as wide or as narrow as you
may define its meanings, is one idea by
which man through the ages has tried to
comprehend and create order, beauty
and perfection.*

—HERMANN WEYL

Neste capítulo, classificamos todas as superfícies homogêneas do $\mathbb{R}^4$ usando os invariantes que construímos nos capítulos precedentes. Observamos que como S é superfície homogênea, então ela é uma superfície completa. A classificação que realizaremos é local, entretanto, em vista da completude, teremos uma classificação global.

Tomemos S superfície homogênea do $\mathbb{R}^4$. Seja (e_1, e_2, e_3, e_4) referencial adaptado canônico a S e $(\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4)$ referencial dual de (e_i) . Sobre S , ω^3 e ω^4 se anulam. Temos então que

$$\begin{cases} \omega_1^3 = (\rho_3 + r_1 + r_2)\omega^1 \\ \omega_2^3 = (\rho_3 - r_1 - r_2)\omega^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \omega_1^4 = \rho_4\omega^1 + (r_1 - r_2)\omega^2 \\ \omega_2^4 = (r_1 - r_2)\omega^1 + \rho_4\omega^2 \end{cases}$$

Vamos renomear os coeficientes das formas acima para simplificar o trabalho algébrico envolvido. Definimos então

$$\begin{cases} a := \rho_3 + r_1 + r_2 \\ b := \rho_3 - r_1 - r_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha := \rho_4 \\ \beta := r_1 - r_2 \end{cases}$$

de modo tal que agora temos

$$\begin{cases} \omega_1^3 = a\omega^1 \\ \omega_2^3 = b\omega^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \omega_1^4 = \alpha\omega^1 + \beta\omega^2 \\ \omega_2^4 = \beta\omega^1 + \alpha\omega^2 \end{cases} \quad (13)$$

Das equações de estrutura, tem-se

$$d\omega_2^1 + \omega_3^1 \wedge \omega_2^3 + \omega_4^1 \wedge \omega_2^4 = 0 \Rightarrow d\omega_2^1 = (\alpha^2 - \beta^2 + ab)\omega^1 \wedge \omega^2$$

$$d\omega_4^3 + \omega_1^3 \wedge \omega_4^1 + \omega_2^3 \wedge \omega_4^2 = 0 \Rightarrow d\omega_4^3 = (a - b)\beta\omega^1 \wedge \omega^2$$

Portanto as curvaturas Gaussiana e normal são dadas, respectivamente, por

$$K = (\alpha^2 - \beta^2 + ab), \quad \mu = (a - b)\beta$$

Para obter as equações de Mainardi-Codazzi, diferenciamos as equações (13) e comparamos com as equações de estrutura formais. Vamos escrever

$$\omega_2^1 = \Gamma_1\omega^1 + \Gamma_2\omega^2, \quad \omega_4^3 = \gamma_1\omega^1 + \gamma_2\omega^2,$$

onde Γ_1 , Γ_2 , γ_1 e γ_2 são funções diferenciáveis. Portanto, tem-se

$$\left. \begin{aligned} d\omega_1^3 &= -a\Gamma_1\omega^1 \wedge \omega^2 \\ d\omega_1^3 &= (-b\Gamma_1 - \beta\gamma_1 + \alpha\gamma_2)\omega^1 \wedge \omega^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (b - a)\Gamma_1 + \beta\gamma_1 - \alpha\gamma_2 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} d\omega_2^3 &= -b\Gamma_2\omega^1 \wedge \omega^2 \\ d\omega_2^3 &= (-a\Gamma_2 - \alpha\gamma_1 + \beta\gamma_2)\omega^1 \wedge \omega^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (b - a)\Gamma_2 - \alpha\gamma_1 + \beta\gamma_2 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} d\omega_1^4 &= (-\alpha\Gamma_1 - \beta\Gamma_2)\omega^1 \wedge \omega^2 \\ d\omega_1^4 &= (-\alpha\Gamma_1 + \beta\Gamma_2 - a\gamma_2)\omega^1 \wedge \omega^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\beta\Gamma_2 - a\gamma_2 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} d\omega_2^4 &= (-\beta\Gamma_1 - \alpha\Gamma_2)\omega^1 \wedge \omega^2 \\ d\omega_2^4 &= (\beta\Gamma_1 - \alpha\Gamma_2 + b\gamma_1)\omega^1 \wedge \omega^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\beta\Gamma_1 + b\gamma_1 = 0$$

Resumindo, o conjunto de equações que temos é

$$\left\{ \begin{array}{l} (b-a)\Gamma_1 + \beta\gamma_1 - \alpha\gamma_2 = 0 \\ (b-a)\Gamma_2 - \alpha\gamma_1 + \beta\gamma_2 = 0 \\ 2\beta\Gamma_2 - a\gamma_2 = 0 \\ 2\beta\Gamma_1 + b\gamma_1 = 0 \\ K = \alpha^2 - \beta^2 + ab \\ \mu = (a-b)\beta \end{array} \right. \quad (14)$$

Vamos então analisar essas equações impondo certas propriedades algébrico-geométricas.

(1) Suponhamos que $\beta = 0$, ou seja, do ponto de vista dos invariantes algébricos, estamos supondo $r_1 = r_2$. Por conseguinte, o sistema (14) se reduz a

$$\left\{ \begin{array}{l} (b-a)\Gamma_1 - \alpha\gamma_2 = 0 \\ (b-a)\Gamma_2 - \alpha\gamma_1 = 0 \\ a\gamma_2 = 0 \\ b\gamma_1 = 0 \\ K = \alpha^2 + ab \\ \mu = 0 \end{array} \right. \quad (15)$$

Duas possibilidades a se considerar:

(a) Suponha que $r_1 = 0$ (e portanto $r_2 = 0$), i.e., a superfície é homogênea umbílica. Se $\rho_3 = \rho_4 = 0$, então a segunda forma fundamental Π de S é nula e portanto a superfície é um **plano**. Caso contrário, suponhamos, sem perda de generalidade, que $\rho_3 \neq 0$ e então afirmamos que S trata-se de uma **2-esfera**. Para ver isso, vamos integrar diretamente o sistema diferencial $de_i = \sum_{k=1}^4 \omega_i^k e_k$. Com efeito, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} de_1 = \omega_1^2 e_2 + \rho_3 \omega^1 e_3 \\ de_2 = \omega_2^1 e_1 + \rho_3 \omega^2 e_3 \\ de_3 = -\rho_3 \omega^1 e_1 - \rho_3 \omega^2 e_2 \\ de_4 = 0 \end{array} \right. ,$$

portanto $S \subset \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$. Seja $x \in S$ e considere a seguinte função

$$X(x) := x + \frac{1}{\rho_3} e_3,$$

e vamos mostrar que X é constante sobre a superfície S . De fato, diferenciando X , e lembrando que $d(x) = \text{id} = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2$, nós obtemos

$$dX = dx + \frac{1}{\rho_3} de_3 = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \frac{1}{\rho_3} (-\rho_3 \omega^1 e_1 - \rho_3 \omega^2 e_2) = 0.$$

Portanto $X = x_0$ constante sobre S , logo escrevemos

$$x + \frac{1}{\rho_3} e_3 = x_0,$$

que ao tomarmos a norma, fica

$$||x - x_0|| = \frac{1}{\rho_3},$$

isto é, S é um aberto de uma 2-esfera de raio $\frac{1}{\rho_3}$ e centro x_0 . Como S é completa, S é uma **2-esfera**. Outra possibilidade é que ρ_3 e ρ_4 sejam simultaneamente não nulos, neste caso o sistema diferencial fica

$$\begin{cases} de_1 = \omega_1^2 e_2 + \rho_3 \omega^1 e_3 + \rho_4 \omega^1 e_4 \\ de_2 = \omega_2^1 e_1 + \rho_3 \omega^2 e_3 + \rho_4 \omega^2 e_4 \\ de_3 = -\rho_3 \omega^1 e_1 - \rho_3 \omega^2 e_2 \\ de_4 = -\rho_4 \omega^1 e_1 - \rho_4 \omega^2 e_2 \end{cases},$$

portanto dado $x \in S$, considere as seguintes funções

$$X(x) = x + \frac{1}{\rho_3} e_3, \quad \text{e} \quad Y(x) = x + \frac{1}{\rho_4} e_4.$$

Da mesma forma que vimos anteriormente, se diferenciarmos X e Y , mostra-se que essas funções são ambas constantes sobre S , portanto escrevemos

$$x_0 = x + \frac{1}{\rho_3} e_3, \quad \text{e} \quad x_0 = x + \frac{1}{\rho_4} e_4,$$

onde x_0 e y_0 são constantes. Esse par de equações definem também uma 2-esfera no $\mathbb{R}^4$.

(b) Suponha que $r_1 \neq 0$ (e portanto $r_2 \neq 0$), neste caso o referencial de Darboux está globalmente definido e portanto as funções coeficiente Γ_i e γ_i são também constantes sobre a superfície S , desse modo, se diferenciarmos as formas ω_2^1 e ω_4^3 , nós obtemos

$$d\omega_2^1 = -(\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2)\omega^1 \wedge \omega^2, \quad d\omega_4^3 = -(\gamma_1\Gamma_1 + \gamma_2\Gamma_2)\omega^1 \wedge \omega^2$$

Quatro sub-casos restam neste ponto:

(i) Se $b = a = 0$, então de $\alpha^2 = -(\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2)$ obtém-se $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$, logo $\alpha = 0$. Observamos que as duas primeiras equações do sistema, $\alpha\gamma_2 = \alpha\gamma_1 = 0$, estão, portanto, verificadas. Como $\mu = 0$, segue também que $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Em resumo, obtivemos $a = b = \alpha = \beta = 0$ e $\omega_2^1 = \omega_4^3 = 0$, por outro lado, $a = b = \alpha = \beta = 0$ implica em $\rho_3 = \rho_4 = r_1 = r_2 = 0$, o que contradiz a hipótese $r_1 \neq 0 \neq r_2$, logo este caso não é possível.

(ii) Se $b = a \neq 0$, então de $a\gamma_1 = a\gamma_2 = 0$ obtemos $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, por outro lado de $K = \alpha^2 + a^2 = -(\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2)$, segue $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$ e portanto resulta que $\alpha = a = 0$, contradizendo a hipótese. Conclui-se, assim, que este caso não é possível.

(iii) Se $0 \neq b \neq a \neq 0$, então de $a\gamma_2 = b\gamma_1 = 0$, obtemos $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ e portanto $\omega_4^3 = 0$. Por outro lado, de $(b - a)\Gamma_1 = (b - a)\Gamma_2 = 0$ resulta $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$ e portanto $\omega_2^1 = 0$, logo a curvatura Gaussiana K é nula e portanto temos a identidade $\alpha^2 + ab = 0$ como consequência. O sistema diferencial $de_i = \sum_{k=1}^4 \omega_i^k e_k$ fica sendo

$$\begin{cases} de_1 = a dx e_3 + \alpha dx e_4 \\ de_2 = b dy e_3 + \alpha dy e_4 \\ de_3 = -a dx e_1 - b dy e_2 \\ de_4 = -\alpha dx e_1 - \alpha dy e_2 \end{cases}$$

pois temos $\omega_2^1 = 0$ (ou seja pode-se tomar $\omega^1 = dx$ e $\omega^2 = dy$). Para integrar o sistema acima, considere a seguinte mudança de referencial

$$\begin{cases} f_1 := e_1, \\ f_2 := e_2, \\ f_3 := \frac{a e_3 + \alpha e_4}{\sqrt{a^2 + \alpha^2}}, \\ f_4 := \frac{b e_3 + \alpha e_4}{\sqrt{b^2 + \alpha^2}} \end{cases}$$

Claramente, $(f_1, \dots, f_4)$ também é um referencial ortonormal adaptado à superfície S , além disso, se diferenciarmos os campos acima, obtemos

$$\begin{cases} df_1 = \sqrt{a^2 + \alpha^2} dx f_3 \\ df_2 = \sqrt{b^2 + \alpha^2} dy f_4 \\ df_3 = \frac{-(a^2 + \alpha^2)dx e_1 - \overbrace{(ab + \alpha^2)}^{=0} dy e_2}{\sqrt{a^2 + \alpha^2}} = -\sqrt{a^2 + \alpha^2} dx f_1 \\ df_4 = \frac{-\overbrace{(ab + \alpha^2)}^{=0} dx e_1 - (b^2 + \alpha^2)dy e_2}{\sqrt{b^2 + \alpha^2}} = -\sqrt{b^2 + \alpha^2} dy f_2 \end{cases},$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x} = \sqrt{a^2 + \alpha^2} f_3 \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} = \sqrt{b^2 + \alpha^2} f_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f_3}{\partial x} = -\sqrt{a^2 + \alpha^2} f_1 \\ \frac{\partial f_3}{\partial y} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{\partial f_4}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f_4}{\partial y} = -\sqrt{b^2 + \alpha^2} f_2 \end{cases}$$

Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ uma parametrização de S que satisfaça $\varphi_x \equiv f_1$ e $\varphi_y \equiv f_2$. Considere as seguintes curvas em S

$$c_1(x) := \varphi(x, y_0), \quad \text{e} \quad c_2(y) := \varphi(x_0, y),$$

onde (x_0, y_0) é um ponto fixado. Definimos então os seguintes campos sobre S

$$X := c_1(x) + \frac{1}{a} f_3, \quad \text{e} \quad Y := c_2(y) + \frac{1}{b} f_4,$$

que quando diferenciados com respeito a x e y , respectivamente, segue

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = 0.$$

Portanto X e Y são campos constantes sobre S , isto é, podemos escrever

$$c_1(x) + \frac{1}{a} f_3 = p_0 \quad \text{e} \quad c_2(y) + \frac{1}{b} f_4 = q_0,$$

onde $p_0, q_0 \in S$. Segue, das expressões acima que

$$||c_1(x) - p_0|| = \frac{1}{a} \quad \text{e} \quad ||c_2(y) - q_0|| = \frac{1}{b},$$

que são as equações de duas circunferências de centros p_0 e q_0 e raios $\frac{1}{a}$ e $\frac{1}{b}$, respectivamente. Vamos mostrar agora que essas circunferências estão contidas em planos ortogonais. Com efeito, temos

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \langle c_1(x), f_2 \rangle = \frac{\partial}{\partial x} \langle c_1(x), f_4 \rangle = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \langle c_2(y), f_1 \rangle = \frac{\partial}{\partial y} \langle c_2(y), f_3 \rangle = 0, \end{cases}$$

logo esse par de equações definem dois planos $\pi_1, \pi_2 \subset \mathbb{R}^4$ por

$$\begin{cases} \pi_1 : \langle c_1(x), f_2 \rangle = \lambda_1, \quad \langle c_1(x), f_4 \rangle = \lambda_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ \pi_2 : \langle c_2(y), f_1 \rangle = \mu_1, \quad \langle c_2(y), f_3 \rangle = \mu_2, \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \end{cases},$$

sendo que as circunferências

$$\mathcal{C}_1 : \langle c_1(x) - p_0, c_1(x) - p_0 \rangle = \frac{1}{a^2}, \quad \mathcal{C}_2 : \langle c_2(y) - q_0, c_2(y) - q_0 \rangle = \frac{1}{b^2},$$

são tais que $\mathcal{C}_1 \subset \pi_1$ e $\mathcal{C}_2 \subset \pi_2$. Como $\{f_1, f_3\}$ e $\{f_2, f_4\}$ são suplementares, (i.e. ortogonalmente complementares), as circunferências $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são ortogonais, logo S trata-se de um toro em $\mathbb{R}^4$.

(iv) Se $b \neq 0$ e $a = 0$ (o outro caso, $b = 0$ e $a \neq 0$ é similar), então de $b\gamma_1 = 0$ obtemos $\gamma_1 = 0$, logo de $b\Gamma_2 - \alpha\gamma_1 = 0$ tiramos $\Gamma_2 = 0$. Por outro lado, de $\alpha^2 = -(\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2)$ sai também que $\Gamma_1 = 0$ e portanto resulta que $\alpha = 0$. De $\mu = 0$, obtém-se também que $\gamma_1 = 0$. Portanto $\omega_2^1 = \omega_4^3 = 0$, e o sistema diferencial $de_i = \sum_{k=1}^4 \omega_i^k e_k$ fica sendo ($\omega^1 = dx$ e $\omega^2 = dy$ já que $\omega_2^1 = 0$)

$$\begin{cases} de_1 = 0 \\ de_2 = b dy e_3 \\ de_3 = -b dy e_2 \\ de_4 = 0 \end{cases} \quad (16)$$

Para integrar o sistema acima vamos proceder de um modo diferente do que fizemos no caso do toro. A abordagem que vamos utilizar é mais analítica e servirá para complementar

o trabalho. Primeiramente, escrevemos o sistema diferencial (16) sob a seguinte forma matricial

$$d\mathbf{e} = \mathbf{e} \cdot A,$$

onde

$$\mathbf{e} := [e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4], \quad d\mathbf{e} := [de_1 \ de_2 \ de_3 \ de_4] \quad \text{e} \quad A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b dy & 0 \\ 0 & b dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se escrevermos $A = dxX + dyY$, então segue que

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial x} = \mathbf{e} \cdot X, \quad \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial y} = \mathbf{e} \cdot Y. \quad (17)$$

Resta, portanto, determinar as soluções do sistema acima. Para tanto, notamos que $\mathbf{e} = \exp(xX + g(y))$ é uma solução de $\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial x} = \mathbf{e} \cdot X$, onde $\exp$ é a exponencial de matrizes e g é uma função de classe C^1 que depende somente da variável y . Diferenciando essa solução com respeito à variável y e comparando com a segunda equação do sistema (17), escrevemos

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial y} = \mathbf{e} \frac{dg}{dy} = \mathbf{e} \cdot Y \Rightarrow g(y) = yY + K', \quad K' \in \text{GL}(4, \mathbb{R})$$

pois as entradas da matriz Y são constantes. Portanto as soluções do sistema (17) são dadas por

$$\mathbf{e}(x, y) = K \cdot \exp(xX + yY), \quad \text{onde} \quad K \in \text{GL}(4, \mathbb{R}),$$

sendo que a matriz K é uma constante de integração e portanto ficará determinada pelas condições iniciais do sistema (17), isto é, $K = \mathbf{e}(0, 0)$.

Com algum trabalho algébrico, pode-se mostrar que para a nossa matriz A tem-se

$$\exp(xX + yY) = \exp(yY) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(by) & -\sin(by) & 0 \\ 0 & \sin(by) & \cos(by) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

logo a solução geral do sistema (16) é dada por

$$\mathbf{e}(x, y) = K \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(by) & -\sin(by) & 0 \\ 0 & \sin(by) & \cos(by) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K \in \text{GL}(4, \mathbb{R}).$$

Escrevendo $K \cong [K_1 \ K_2 \ K_3 \ K_4]$, onde cada K_i , $i = 1, \dots, 4$ é uma matriz coluna $(k_i^j)_{4 \times 1}$ e realizando o produto formal das matrizes acima, obtemos

$$\begin{cases} e_1(x, y) \cong K_1, & \text{i.e. } e_1^j(x, y) = k_1^j \\ e_2(x, y) \cong K_2 \cos(by) + K_3 \sin(by), & \text{i.e. } e_2^j(x, y) = k_2^j \cos(by) + k_3^j \sin(by) \\ e_3(x, y) \cong -K_2 \sin(by) + K_3 \cos(by), & \text{i.e. } e_3^j(x, y) = -k_2^j \sin(by) + k_3^j \cos(by) \\ e_4(x, y) \cong K_4, & \text{i.e. } e_4^j(x, y) = k_4^j \end{cases}$$

para $j = 1, \dots, 4$. Dada a arbitrariedade da condição inicial $\mathbf{e}(0, 0) = K$, podemos escolher, convenientemente, uma particular matriz K de modo a estabelecer o referencial adaptado $(e_1, \dots, e_4)$. Feito isso, integraremos os vetores $e_j(x, y)$, $1 \leq j \leq 4$ com o intuito de determinar, explicitamente, uma parametrização para a superfície S . Com efeito, se fazemos a escolha

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e assim obtemos os seguintes campos

$$\begin{cases} e_1(x, y) = (1, 0, 0, 0) \\ e_2(x, y) = (0, -\cos(by), \sin(by), 0) \\ e_3(x, y) = (0, \sin(by), \cos(by), 0) \\ e_4(x, y) = (0, 0, 0, 1) \end{cases}$$

Considere então $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, U um aberto do $\mathbb{R}^2$ uma parametrização da superfície S tal que $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = e_1$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = e_2$ (i.e., já estou supondo que as curvas coordenadas estão parametrizadas por comprimento de arco). Nestas condições, nós escrevemos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = e_1(x, y) \Rightarrow \varphi(x, y) = (x + h_1(y), h_2(y), h_3(y), h_4(y)),$$

onde h_i , $1 \leq i \leq 4$ são funções de classe C^1 que só dependem da variável y . Impondo que a solução determinada acima satisfaça $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = e_2$, escrevemos

$$\left(\frac{dh_1}{dy}, \frac{dh_2}{dy}, \frac{dh_3}{dy}, \frac{dh_4}{dy} \right) = (0, -\cos(by), \sin(by), 0),$$

donde segue imediatamente que

$$\begin{cases} h_1(y) = c_1, & c_1 \in \mathbb{R} \\ h_2(y) = -\frac{1}{b} \sin(by) + c_2, & c_2 \in \mathbb{R} \\ h_3(y) = -\frac{1}{b} \cos(by) + c_3, & c_3 \in \mathbb{R} \\ h_4(y) = c_4, & c_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Portanto φ fica determinada, a menos de constantes que correspondem à translações no $\mathbb{R}^4$, ou seja φ fica determinada a menos de isometrias. Logo, podemos escolher, por conveniência, que $c_i = 0$, $1 \leq i \leq 4$, e assim obtemos por parametrização da superfície S a aplicação

$$\varphi(x, y) = \left(x, -\frac{1}{b} \sin(by), -\frac{1}{b} \cos(by), 0 \right),$$

e assim vemos que S é um cilindro no $\mathbb{R}^4$.

Esgotamos então o caso $\beta = 0$ e obtivemos que as seguintes superfícies são homogêneas no $\mathbb{R}^4$: planos, cilindros, toros e 2-esferas.

(2) Suponhamos agora que $\beta \neq 0$. Em termos dos invariantes, isso significa que $r_1 \neq r_2$. Vamos então repetir a sistemática que usamos anteriormente.

(a) Observamos que não faz sentido supor que $r_1 = r_2 = 0$ pois isso implicaria em $\beta = 0$, contradizendo a hipótese.

(b) Suponhamos que $r_1 \neq 0$ e $r_2 \neq 0$. Observe que neste caso o referencial de Darboux está globalmente definido já que $r_1 r_2 \neq 0$.

(i) Se $b = a = 0$, então de $2\beta\Gamma_2 = 2\beta\Gamma_1 = 0$ obtemos $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$, que implica $\mu = 0$ e $\alpha^2 = \beta^2$. Note que as outras equações $\beta\gamma_1 - \alpha\gamma_2 = 0$ e $\alpha\gamma_1 - \beta\gamma_2 = 0$ estão verificadas,

visto que $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. O sistema diferencial $de_i = \sum_{k=1}^4 \omega_i^k e_k$ fica sendo então

$$\begin{cases} de_1 = (\alpha dx + \beta dy)e_4 \\ de_2 = (\beta dx + \alpha dy)e_4 \\ de_3 = 0 \\ de_4 = -(\alpha dx + \beta dy)e_1 - (\beta dx + \alpha dy)e_2 \end{cases}$$

juntamente com a condição $\beta = \pm\alpha$. Como $de_3 = 0$, a superfície S está contida no $\mathbb{R}^3$ dentro do $\mathbb{R}^4$, portanto podemos tomar o campo e_3 como sendo o vetor $(0, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$. Como $S \subset \mathbb{R}^3$ e sabendo¹ que as superfícies homogêneas do $\mathbb{R}^3$ são planos, cilindros e 2-esferas; mediante a seguinte mudança de base adaptada: $f_1 := e_1 + e_2$ e $f_2 := e_1 - e_2$, conclui-se que S é um cilindro no $\mathbb{R}^3$ dentro do $\mathbb{R}^4$.

(ii) Se $a = b \neq 0$, então do par de equações $\beta\gamma_1 - \alpha\gamma_2 = 0$ e $\alpha\gamma_1 - \beta\gamma_2 = 0$, que tem por determinante $\Delta = \alpha^2 - \beta^2$, passamos a analisar duas possibilidades: $\Delta = 0$, isso implica $a^2 = -(\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2)$ e portanto $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$, logo $a = 0$, o que contradiz a hipótese. Por conseguinte, só pode ser $\Delta \neq 0$; neste caso o sistema só admite soluções triviais, isto é, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ e isso implica em $2\beta\Gamma_1 = 2\beta\Gamma_2 = 0$ e portanto $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$, donde vem que $\alpha^2 - \beta^2 + a^2 = 0$. O sistema diferencial $de_i = \sum_{k=1}^4 \omega_i^k e_k$ fica sendo

$$\begin{cases} de_1 = a dx e_3 + (\alpha dx + \beta dy)e_4 \\ de_2 = a dy e_3 + (\beta dx + \alpha dy)e_4 \\ de_3 = -a dx e_1 - a dy e_2 \\ de_4 = -(\alpha dx + \beta dy)e_1 - (\beta dx + \alpha dy)e_2 \end{cases}$$

lembrando que $\omega^1 = dx$ e $\omega^2 = dy$. Para integrarmos o sistema acima, considere a seguinte mudança de campos coordenados

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial u} := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial v} := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \end{cases}$$

¹O trabalho de classificação das superfícies homogêneas do $\mathbb{R}^3$ pode ser encontrado no livro de Guggenheimer.

Derivando com respeito a u e v os campos e_1 e e_2 , nós obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial e_1}{\partial u} = \frac{ae_3 + (\alpha + \beta)e_4}{\sqrt{2}} \\ \frac{\partial e_2}{\partial u} = \frac{ae_3 + (\alpha + \beta)e_4}{\sqrt{2}} \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{\partial e_1}{\partial v} = \frac{(\beta - \alpha)e_4 - ae_3}{\sqrt{2}} \\ \frac{\partial e_2}{\partial v} = -\frac{(\beta - \alpha)e_4 - ae_3}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Definimos então os seguintes novos campos ortonormais

$$\begin{cases} f_1 := \frac{e_1 - e_2}{\sqrt{2}} \\ f_2 := \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}} \end{cases},$$

e pode-se observar facilmente que

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial v} = -ae_3 + (\beta - \alpha)e_4 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{\partial f_2}{\partial u} = ae_3 + (\beta + \alpha)e_4 \\ \frac{\partial f_2}{\partial v} = 0 \end{cases}$$

e observe que se denotarmos por

$$\tilde{f}_3 := -ae_3 + (\beta - \alpha)e_4, \quad \tilde{f}_4 := ae_3 + (\beta + \alpha)e_4,$$

nota-se a propriedade $\langle \tilde{f}_3, \tilde{f}_4 \rangle = 0$, pois $-a^2 + \beta^2 - \alpha^2 = 0$. Ortonormalizando $\tilde{f}_3$ e $\tilde{f}_4$, obtemos campos f_3 e f_4 dados por

$$f_3 = \frac{-ae_3 + (\beta - \alpha)e_4}{2\beta(\beta - \alpha)}, \quad f_4 = \frac{ae_3 + (\beta + \alpha)e_4}{2\beta(\beta + \alpha)}.$$

Note que $2\beta(\beta \pm \alpha)$ é sempre não nulo, pois caso contrário, ou $\beta = 0$ ou $\alpha^2 - \beta^2 = 0$, ambas contraditórias. Portanto resulta que (f_1, f_2, f_3, f_4) é uma base ortonormal adaptada a superfície e que satisfaz

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial v} = 2\beta(\beta - \alpha)f_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{\partial f_2}{\partial u} = 2\beta(\beta + \alpha)f_4 \\ \frac{\partial f_2}{\partial v} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f_3}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial v} = -f_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{\partial f_4}{\partial u} = -f_2 \\ \frac{\partial f_4}{\partial v} = 0 \end{cases}$$

e conforme vimos num caso anterior, a superfície correspondente é um **toro** no $\mathbb{R}^4$.

(iii) Se $b \neq 0$ e $a = 0$ (o outro caso: $b = 0$ e $a \neq 0$ é similar), então de $2\beta\Gamma_2 = 0$ obtemos $\Gamma_2 = 0$, que implica $b\beta = \gamma_1\Gamma_1$. Da equação $2\beta\Gamma_1 + b\gamma_1 = 0$, tira-se $2\beta\Gamma_1\gamma_1 + b\gamma_1^2 = 0$ e assim obtemos $2\beta^2 + \gamma_1^2 = 0$. Essa última equação implica em $\beta = \gamma_1 = 0$, o que contradiz uma das hipóteses. Conclui-se então que este caso não é possível.

(iv) Se $0 \neq a \neq b \neq 0$, então temos o sistema (14) na sua forma mais geral possível. Neste caso nós temos o referencial de Darboux $(e_1, \dots, e_4)$ globalmente definido e portanto escrevemos

$$\begin{cases} \Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 = \beta^2 - \alpha^2 - ab = -K \\ \gamma_1\Gamma_1 + \gamma_2\Gamma_2 = (b - a)\beta = -\mu \end{cases} \quad (18)$$

Pretendemos deixar tudo em função de γ_1 e γ_2 , portanto do sistema (14) e de $\beta \neq 0$ vem que

$$\Gamma_1 = -\frac{b}{2\beta}\gamma_1, \quad \text{e} \quad \Gamma_2 = \frac{a}{2\beta}\gamma_2, \quad (19)$$

logo as duas primeiras equações do sistema (14) ficam

$$\begin{cases} \left[\frac{b(a-b)}{2\beta} + \beta \right] \gamma_1 - \alpha\gamma_2 = 0 \\ -\alpha\gamma_1 + \left[-\frac{a(a-b)}{2\beta} + \beta \right] \gamma_2 = 0 \end{cases}, \quad (20)$$

e o determinante deste sistema linear é dado por

$$\Delta = \left[\frac{b(a-b)}{2\beta} + \beta \right] \left[-\frac{a(a-b)}{2\beta} + \beta \right] - \alpha^2. \quad (21)$$

Portanto, se tivermos:

(i) $\Delta \neq 0$, então o sistema (20) só admite soluções triviais, isto é $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, o que implicaria na nulidade da curvatura normal μ e portanto de (14) vem que $(a-b)\beta = 0$, donde $a = b$ ou $\beta = 0$, o que contradiz as hipóteses. Concluimos, portanto, que este caso não é possível.

(ii) Por outro lado, se for $\Delta = 0$, então as equações de (20) são múltiplas, uma da outra, e além disso de (14) junto com (18) e (19) obtemos o seguinte conjunto de equações

$$\begin{cases} \frac{b^2}{4\beta^2}\gamma_1^2 + \frac{a^2}{4\beta^2}\gamma_2^2 = \beta^2 - \alpha^2 - ab \\ \frac{b}{2\beta}\gamma_1^2 - \frac{a}{2\beta}\gamma_2^2 = (a-b)\beta \\ \left[\frac{b(a-b)}{2\beta} + \beta\right]\gamma_1 - \alpha\gamma_2 = 0 \\ \alpha^2 = \left[\frac{b(a-b)}{2\beta} + \beta\right]\left[-\frac{a(a-b)}{2\beta} + \beta\right] \end{cases} \quad (22)$$

Observamos agora que como os invariantes algébricos ρ_3, ρ_4, r_1 e r_2 são positivos, então necessariamente $a > 0$. Além disso, pela definição de a e b segue também que $a > b$. Para determinar o sinal de b , notamos que se for $b < 0$, então da equação

$$(b-a)\beta = \gamma_1\Gamma_1 + \gamma_2\Gamma_2 = -\frac{2\beta}{b}\Gamma_1^2 + \frac{2\beta}{a}\Gamma_2^2 \xRightarrow[\beta \neq 0, b < 0]{} \frac{1}{|b|}\Gamma_1^2 + \frac{1}{a}\Gamma_2^2 = \frac{(b-a)}{2},$$

entretanto $(b-a) < 0$, logo temos uma contradição. Portanto só pode ser $b > 0$. Obtemos então a importante desigualdade

$$a > b > 0. \quad (23)$$

Voltando então para o sistema (22) e levando em consideração a desigualdade (23), concluímos que as duas primeiras equações de (22) são, respectivamente, uma elipse e uma hipérbole.

Outra desigualdade importante é

$$\beta^2 - \alpha^2 - ab = \frac{(a-b)^2}{2} - ab\left(1 + \frac{a-b}{4\beta^2}\right) > 0, \quad (24)$$

ou seja, a equação da elipse em (22) é não degenerada.

Impondo que as equações de (22) estejam satisfeitas, simultaneamente, determina-se, com um certo trabalho algébrico, a seguinte expressão nos parâmetros a, b e β

$$\beta^4 + ab\left[1 - \frac{ab}{(a-b)^2}\right]\beta^2 + \left(\frac{ab}{2}\right)^2 = 0. \quad (25)$$

Olhando para (25) como uma equação polinomial na variável β podemos determinar suas raízes, isto é, obter β como função de a e b . É claro que como $\beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, é necessário

que o discriminante da equação bi-quadrada (em β^2) (25) seja positivo, isto é,

$$a^2b^2 \left(\frac{a^2b^2}{(a-b)^4} - 2\frac{ab}{(a-b)^2} \right) \geq 0 \Rightarrow \frac{a^2b^2}{(a-b)^4} - 2\frac{ab}{(a-b)^2} \geq 0$$

que implica

$$ab \geq 2(a-b)^2. \quad (26)$$

Multiplicando a desigualdade (24) por 4 e comparando com a desigualdade (26), obtemos

$$ab > ab \left[4 + \frac{(a-b)}{\beta^2} \right] \Rightarrow \frac{(a-b)}{\beta^2} < -3,$$

o que é uma contradição. Conclui-se assim que a equação (25) não admite raízes reais, o que é um absurdo. Resulta, portanto, que não há superfície homogênea para $\beta \neq 0$ e $a \neq b$ não nulos. Finalizamos assim o caso $\beta \neq 0$.

Estabelecemos então a classificação de todas as superfícies homogêneas do $\mathbb{R}^4$, em resumo são elas: PLANOS, 2-ESFERAS, CILINDROS E TOROS.

É interessante notar que o toro é a única superfície homogênea que aparece a mais quando vamos do $\mathbb{R}^3$ para o $\mathbb{R}^4$.

1. Superfícies homogêneas no $\mathbb{R}^4$

TEOREMA 4.1. *Uma superfície S do $\mathbb{R}^4$ é homogênea se, e somente se, seus invariantes algébricos ρ_3, ρ_4, r_1 e r_2 forem constantes.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Primeiramente, suponhamos que para a superfície S tem-se $r_1r_2 \neq 0$, isto é, o referencial canônico está globalmente definido. Seja $f \in E(4)$ isometria que deixe S invariante. Então f deixa o referencial $(e_1, \dots, e_4)$ também invariante, isto é, $df(p)(e_j) = e_j(f(p))$, $1 \leq j \leq 4$ para todo $p \in S$. Diferenciando então $f_*(e_j) = e_j$, $1 \leq j \leq 4$ e levando-se em consideração que f é uma isometria, concluimos que ρ_3, ρ_4, r_1 e r_2 são funções constantes sobre a superfície. Suponhamos então que $r_1r_2 = 0$ sobre a superfície S . Neste caso, seremos capazes de mostrar (Capítulo 5) que a superfície S é, localmente, um plano ou uma 2-esfera dentro do $\mathbb{R}^4$, e assim conclui-se que seus invariantes algébricos são constantes.

($\Leftarrow$) Como consequência da classificação realizada no presente capítulo, as superfícies S no $\mathbb{R}^4$ que tem invariantes ρ_3, ρ_4, r_1 e r_2 constantes são planos, cilindros, 2-esferas e toros, e como todas estas são superfícies Riemannianas homogêneas, segue o resultado. $\square$

CAPÍTULO 5

Alguns Resultados

*The shortest path between two truths in
the real domain passes through the
complex domain.*

—JACQUES HADAMARD

1. Superfícies mínimas no $\mathbb{R}^4$ com curvatura Gaussiana constante

Uma superfície S no $\mathbb{R}^4$ é mínima quando seus invariantes $\rho_3 = \rho_4 = 0$, dessa forma teremos

$$\begin{cases} \omega_1^3 = a\omega^1 \\ \omega_2^3 = -a\omega^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \omega_1^4 = \beta\omega^2 \\ \omega_2^4 = \beta\omega^1 \end{cases}, \quad \text{onde} \quad \begin{cases} a := r_1 + r_2 \\ \beta := r_1 - r_2 \end{cases},$$

além disso as curvaturas Gaussiana e normal são dadas, respectivamente por

$$\begin{cases} K = -(\beta^2 + a^2) = -2(r_1^2 + r_2^2) \\ \mu = 2a\beta = 2(r_1^2 - r_2^2) \end{cases}$$

Temos, portanto, três casos a analisar:

- (i) Quando $K > 0$. Teremos então que $-2(\beta^2 + a^2) > 0$, o que é uma contradição, logo não há superfícies mínimas de curvatura Gaussiana positiva no $\mathbb{R}^4$.
- (ii) Quando $K = 0$. Neste caso temos que $-2(r_1^2 + r_2^2) = 0$, o que implica em $r_1 = r_2 = 0$ e portanto S é um plano no $\mathbb{R}^4$.
- (iii) Quando $K < 0$. Para simplificar um pouco as expressões que seguem adiante, vamos supor que $a^2 + \beta^2 = |K| \equiv 1$, assim tomamos $a := \cos \theta$ e $\beta := \sin \theta$ (logo $a^2 + \beta^2 = 1$).

Diferenciando ω_1^3 , ω_2^3 , ω_1^4 e ω_2^4 e comparando com suas respectivas equações de estrutura, nós obtemos, respectivamente

$$-2 \cos \theta \omega_2^1 \wedge \omega^2 + \sin \theta \theta_2 \omega^1 \wedge \omega^2 + \sin \theta \omega_4^3 \wedge \omega^2 = 0 \quad (27)$$

$$-2 \cos \theta \omega_2^1 \wedge \omega^1 - \sin \theta \theta_1 \omega^2 \wedge \omega^1 + \sin \theta \omega_4^3 \wedge \omega^1 = 0 \quad (28)$$

$$-\cos \theta \theta_1 \omega^2 \wedge \omega^1 + 2 \sin \theta \omega_2^1 \wedge \omega^1 - \cos \theta \omega_4^3 \wedge \omega^1 = 0 \quad (29)$$

$$-\cos \theta \theta_2 \omega^1 \wedge \omega^2 - 2 \sin \theta \omega_2^1 \wedge \omega^2 + \cos \theta \omega_4^3 \wedge \omega^2 = 0 \quad (30)$$

De (27) e (28), segue

$$\begin{cases} (\sin \theta \theta_2 \omega^1 + \eta) \wedge \omega^2 \\ (-\sin \theta \theta_1 \omega^2 + \eta) \wedge \omega^1 \end{cases}, \quad \text{onde } \eta := -2 \cos \theta \omega_2^1 + \sin \theta \omega_4^3,$$

e pondo $\eta = k_1 \omega^1 + k_2 \omega^2$, determinamos

$$\eta = \sin \theta (-\theta_2 \omega^1 + \theta_1 \omega^2). \quad (31)$$

Da mesma forma, de (29) e (30), segue

$$\begin{cases} (-\cos \theta \theta_1 \omega^2 + \zeta) \wedge \omega^1 = 0 \\ (\cos \theta \theta_2 \omega^1 + \zeta) \wedge \omega^2 = 0 \end{cases}, \quad \text{onde } \zeta = 2 \sin \theta \omega_2^1 - \cos \theta \omega_4^3,$$

e pondo $\zeta = l_1 \omega^1 + l_2 \omega^2$, determinamos

$$\zeta = \cos \theta (-\theta_2 \omega^1 + \theta_1 \omega^2). \quad (32)$$

Portanto obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} -2 \cos \theta \omega_2^1 + \sin \theta \omega_4^3 = \sin \theta (-\theta_2 \omega^1 + \theta_1 \omega^2) \\ 2 \sin \theta \omega_2^1 - \cos \theta \omega_4^3 = \cos \theta (-\theta_2 \omega^1 + \theta_1 \omega^2) \end{cases}$$

O determinante deste sistema é $\Delta = 2 \cos 2\theta$, que se supusermos não nulo, nos conduz a solução

$$\begin{cases} \omega_2^1 = \frac{1}{2} \tan 2\theta (\theta_2 \omega^1 - \theta_1 \omega^2) \\ \omega_4^3 = \frac{1}{\cos 2\theta} (\theta_2 \omega^1 - \theta_1 \omega^2) \end{cases} \quad (33)$$

Por outro lado, se o determinante for nulo, o sistema fica indeterminado e portanto podemos eliminar uma das equações, logo escrevemos

$$\omega_4^3 = 2 \tan \theta \omega_2^1 + \theta_2 \omega^1 - \theta_1 \omega^2 \quad (34)$$

Como consequência do que vimos acima, obtivemos o resultado que segue abaixo.

TEOREMA 5.1. *A única superfície mínima homogênea do $\mathbb{R}^4$ é o plano.*

Demonstração. Neste caso, a e β são constantes e portanto $\theta_i = 0$, $i = 1, 2$. Assim, as expressões (31) e (32) se reduzem a

$$2a\omega_2^1 - \beta\omega_4^3 = 0 \quad (35)$$

$$2\beta\omega_2^1 - a\omega_4^3 = 0 \quad (36)$$

e esse sistema de equações tem por determinante $-2(a^2 - \beta^2)$. Portanto, se $\beta^2 - a^2 \neq 0$, então $\omega_2^1 = \omega_4^3 = 0$, logo $K = 0$, i.e., $a^2 + \beta^2 = 0$, donde vem que $a = \beta = 0$ (pois a e β são reais). Agora, de $a = \beta = 0$, então $r_1 = r_2 = 0$ e portanto temos um plano. Caso contrário, $\beta^2 - a^2 = 0$, ou seja $a = \pm\beta$, então nós temos

- (i) Se $a = \beta$, então $K = -2a^2$, $\mu = 2a^2$ e de (35) $d\omega_4^3 = 2d\omega_2^1$. Portanto $2(-2a^2)\omega^1 \wedge \omega^2 = 2a^2\omega^1 \wedge \omega^2$ que implica $2a^2\omega^1 \wedge \omega^2 = 0$, ou seja $a = 0$, e portanto $\beta = 0$.
- (ii) Se $a = -\beta$, então $K = -2a^2$, $\mu = -2a^2$ e de (36) $2d\omega_2^1 = -d\omega_4^3$. Portanto $2(-2a^2)\omega^1 \wedge \omega^2 = 2a^2\omega^1 \wedge \omega^2$ que implica $2a^2\omega^1 \wedge \omega^2 = 0$, ou seja $a = 0$, e portanto $\beta = 0$.

Portanto, em ambos os casos, temos um plano e isso conclui a demonstração. $\square$

Corolário 5.1. *Se γ é uma curva holomorfa homogênea no $\mathbb{R}^4$, então γ é necessariamente um plano complexo.*

Demonstração. De fato, como $\mathcal{M} = \mathcal{H} \oplus \overline{\mathcal{H}}$ e, pelo resultado anterior, o conjunto das superfícies mínimas homogêneas do $\mathbb{R}^4$ contém somente planos, portanto segue o resultado. $\square$

2. Superfícies holomorfas no $\mathbb{R}^4$

TEOREMA 5.2 (Calabi). *Uma curva holomorfa no $\mathbb{C}^2$ não-degenerada é univocamente determinada (a menos de movimento rígido) pela primeira forma fundamental (métrica).*

Demonstração. Seja γ uma curva holomorfa no $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$. Então nós temos

$$\begin{cases} \omega_1^3 = r_1 \omega^1 \\ \omega_2^3 = -r_1 \omega^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \omega_1^4 = r_1 \omega^2 \\ \omega_2^4 = r_1 \omega^1 \end{cases}, \quad \begin{cases} d\omega_2^1 = -2r_1^2 \omega^1 \wedge \omega^2 \\ d\omega_4^3 = 2r_1^2 \omega^1 \wedge \omega^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} K = -2r_1^2 \\ \mu = 2r_1^2 \end{cases}$$

Portanto, dada ds^2 sobre γ , temos ω^1 e ω^2 , e então determinamos a curvatura Gaussiana K (por uma fórmula conhecida), logo pelo que temos acima $K = -2r_1^2$, e assim conhecemos r_1 e portanto sabemos quem é a segunda forma fundamental de γ . $\square$

Existência de curvas holomorfas

Obtemos a seguir uma equação diferencial parcial intrínseca cujas soluções garantem a existência de curvas holomorfas no $\mathbb{C}^2$.

No caso holomorfo, as equações de Codazzi se reduzem a

$$\begin{cases} [(r_1)_2 \omega^1 + 2r_1 \omega_2^1 - r_1 \omega_4^3] \wedge \omega^2 = 0 \\ [-(r_1)_1 \omega^2 + 2r_1 \omega_2^1 - r_1 \omega_4^3] \wedge \omega^1 = 0 \end{cases}$$

e defina a forma $\eta := r_1(2\omega_2^1 - \omega_4^3) \equiv k_1 \omega^1 + k_2 \omega^2$. Obtém-se, facilmente que $k_1 = -(r_1)_2$ e $k_2 = (r_1)_1$. Segue então que

$$r_1(2\omega_2^1 - \omega_4^3) = -(r_1)_2 \omega^1 + (r_1)_1 \omega^2$$

que ao diferenciarmos exteriormente produz

$$\frac{1}{r_1} \left\{ [(r_1)_{11} + (r_1)_{22}] \omega^1 \wedge \omega^2 + \omega_2^1 \wedge [(r_1)_1 \omega^1 + (r_1)_2 \omega^2] \right\} - \frac{\|\nabla r_1\|^2}{r_1^2} \omega^1 \wedge \omega^2 + 6r_1^2 \omega^1 \wedge \omega^2 = 0.$$

Porém,

$$[(r_1)_{11} + (r_1)_{22}] \omega^1 \wedge \omega^2 + \omega_2^1 \wedge [(r_1)_1 \omega^1 + (r_1)_2 \omega^2] = [(r_1)_{11} + (r_1)_{22} - \Gamma_2(r_1)_1 + \Gamma_1(r_1)_2] \omega^1 \wedge \omega^2,$$

sendo que

$$\Delta r_1 = (r_1)_{11} + (r_1)_{22} - \Gamma_2(r_1)_1 + \Gamma_1(r_1)_2$$

é o Laplaciano da superfície¹ $\gamma \subset \mathbb{C}^2$. Portanto a última equação fica

$$\frac{\Delta r_1}{r_1} - \frac{\|\nabla r_1\|^2}{r_1^2} + 6r_1^2 = 0, \quad (37)$$

que também pode ser escrita como

$$\Delta(\ln r_1) + 6r_1^2 = 0. \quad (38)$$

A soluções desta última EDP determinam curvas holomorfas no $\mathbb{C}^2$. Observe também que como

$$r_1 = \sqrt{-\frac{K}{2}}, \quad (39)$$

então, se r_1 for constante (holomorfa homogênea), a equação (38) implica que $r_1 = 0$, e portanto isso redemonstra o último corolário da seção anterior, que afirma que curvas holomorfas homogêneas no $\mathbb{C}^2$ são necessariamente planos complexos.

Outro fato interessante a se observar é que se tomarmos $K = -1$, então por (39), $r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e a equação (38) leva-nos a uma contradição, portanto podemos interpretar geometricamente este fato como *o plano hiperbólico não pode ser imerso holomorficamente (por uma isometria holomorfa) em $\mathbb{C}^2$* .

¹Este Laplaciano é intrínseco.

Referências Bibliográficas

- [1] **Calabi, E.**, *Isometric imbeddings of complex manifolds*, Ann. of Math. 58 (1953), 1-23.
- [2] **Griffiths, P.**, *On Cartan's method of Lie groups and moving frames as applied to uniqueness and existence questions in differential geometry*, Duke Math. Journ. 41, (1974), 775-814.
- [3] **Guggenheimer, H.**, *Differential geometry*, Dover, 1977.
- [4] **Jensen, G.**, *Higher order contact of submanifolds of homogeneous spaces*, Springer-Verlag LNM 610, 1977.
- [5] **Kenmotsu, K.**, *Minimal surfaces with constant curvature in 4-dimensional space forms*, Proc. Amer. Math. Soc. 89 (1983), 133-138.
- [6] **Kobayashi, S. Nomizu, K.**, *Foundations of Differential Geometry*, Vol 1 & 2, John Wiley, 1963.
- [7] **Rodrigues, A.A.M.**, *Notas manuscritas*.
- [8] **Wong, Y. C.** *Contribution to the theory of surfaces in a 4-space of constant curvature.*, Trans. Amer. Math. Soc. 59 (1946), 467-507.