**Produto Cruzado de
uma C^* -álgebra
por Endomorfismos**

Fabio Orfali

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

ORIENTADORA: **Profa. Dra. Cristina Cerri**

São Paulo, julho de 2004

*Aos meus pais e à Raquel,
que tem sido a inspiração de todo meu esforço,
com todo carinho*

Agradecimentos

A minha orientadora, Cristina Cerri, pela extrema dedicação, pelo incentivo nas horas mais difíceis e pela compreensão com minha opção de conciliar o mestrado e o trabalho. E também pelas nossas longas conversas sobre educação e Matemática, sempre tão agradáveis e importantes para minha prática diária.

Ao Tadeu, pela companhia nos estudos de álgebra e nos seminários de C^* -álgebras, pela ajuda com o Latex e principalmente pela grande amizade com a qual eu sempre pude contar durante esse período.

Ao David, à Cintia, à Martha e ao Toscano pela ajuda e paciência nos seminários de C^* -álgebras.

A todos os amigos do IME, em especial à Andréia, à Valéria e ao Sidney, que me ajudaram a fazer das tantas aulas e provas momentos um pouco mais leves.

Aos meus professores do mestrado, especialmente à Cristina e à Cláudia, por conseguirem aliar à sua competência como matemáticas um enorme talento para ensinar.

A todos os professores que contribuíram para minha formação e me incentivaram a seguir suas carreiras, nos quais até hoje eu me espelho, Lau, Elcio, Stockler, Teixeira, Conceição, Leonardo e tantos outros.

A todos os meus alunos, pois é no nosso contato diário que eu encontro motivação para continuar sempre me aprimorando.

Às minhas irmãs Cristina e Marina, as melhores amigas que eu poderia ter ao meu lado nessa longa trajetória escolar, vibrando a cada conquista e sempre trazendo uma palavra de incentivo ou um valioso conselho nos momentos mais complicados.

Aos meus pais Alba e Hélio, que me ensinaram o prazer e a importância de estudar, por todo o amor e o apoio que sempre me deram.

À minha esposa Raquel pela paciência nos muitos finais de semana que passei estudando no escritório, pelo incentivo nas horas em que eu achei que não ia conseguir e principalmente por todo amor e carinho que tem me dedicado nesse tempo todo.

Abstract

If A is a unital C^* -algebra, M is a cancellative abelian semigroup that has an identity element and α is a homomorphism from M into the injective endomorphisms of A , then the triple (A, M, α) is called a C^* -dynamical system. In this work we describe the construction of the covariance algebra of the C^* -dynamical system (A, M, α) , also called the crossed product of the C^* -algebra A by the semigroup M under the action α . We also obtain a particular useful representation of this algebra. Finally, we prove that the Cuntz algebra $\mathcal{O}_n$ is the crossed product of a UHF-algebra by an endomorphism.

Resumo

Um C^* -sistema dinâmico é uma terna (A, M, α) , onde A é uma C^* -álgebra com unidade, M é um semi-grupo abeliano cancelativo com elemento neutro e α um homomorfismo de M no semi-grupo dos endomorfismos injetores de A . Neste trabalho, descrevemos a construção da álgebra covariante do C^* -sistema dinâmico (A, M, α) , também chamada produto cruzado da C^* -álgebra A pelo semi-grupo M sob a ação de α , e estudamos suas representações. Também provamos que a álgebra de Cuntz $\mathcal{O}_n$ pode ser definida como o produto cruzado de uma UHF-álgebra por um endomorfismo.

Índice

Introdução	i
1. Conceitos Básicos e C^*-álgebras Especiais	1
1.1 Definições básicas	1
1.2 O teorema de Gelfand-Neimark-Segal	6
1.3 A C^* -álgebra envolvente	12
1.4 Limites indutivos de C^* -álgebras	16
1.5 O produto cruzado discreto	23
2. Construção do Produto Cruzado por Endomorfismos	31
3. As Álgebras de Cuntz	54
3.1 A C^* -álgebra universal gerada por elementos e relações	54
3.2 Descrição das álgebras de Cuntz	56
3.3 As álgebras de Cuntz como produto cruzado por endomorfismo ...	69
Apêndice A - O Grupo de Grothendieck	79
Referências	83

Introdução

Um C^* -sistema dinâmico é uma terna (A, M, α) , onde A é uma C^* -álgebra com unidade, M é um semi-grupo abeliano cancelativo com elemento neutro e α um homomorfismo de M no semi-grupo dos endomorfismos injetores de A . O principal objetivo deste trabalho é descrever a construção da álgebra covariante do C^* -sistema dinâmico (A, M, α) , também chamada **produto cruzado** da C^* -álgebra A pelo semi-grupo M sob a ação de α , e estudar suas representações.

É também apresentado um exemplo concreto de C^* -álgebra que pode ser definida como o produto cruzado de uma UHF-álgebra por um endomorfismo, a **álgebra de Cuntz** $\mathcal{O}_n$.

Desde o surgimento do importante trabalho de J. Cuntz [3], onde o autor definiu a C^* -álgebra $\mathcal{O}_n$ e mostrou que ela pode ser vista como o produto cruzado de uma UHF-álgebra por um endomorfismo, muitos autores tais como Paschke [16], Doplicher e Roberts [6], Stacey [18], Murphy [15] e Exel [8] têm estudado o assunto.

O estudo do produto cruzado de uma C^* -álgebra por endomorfismos tem naturalmente revelado algumas similaridades com a teoria do produto cruzado clássico, onde se trabalha com grupos de automorfismos. Entretanto, as diferenças entre as duas teorias, no que diz respeito às hipóteses, resultados e métodos empregados, destacam-se mais do que suas semelhanças.

Assim, o produto cruzado clássico e o produto cruzado por endomorfismos têm se mostrado duas áreas essencialmente disjuntas, sendo que ambas as teorias parecem ter aplicações e interesses independentes.

Tudo isto justifica o grande interesse que tem sido despertado pelo assunto, revelado pelo surgimento de tantos trabalhos na área. A maioria desses trabalhos tem procurado elaborar definições mais gerais do produto cruzado por endomorfismos, que sejam capazes de generalizar as construções mais particulares propostas anteriormente, abrangendo ainda novas situações (ver, por exemplo, [8]).

Neste trabalho faremos um estudo detalhado da construção do produto cruzado de uma C^* -álgebra por um semi-grupo abeliano de seus endomorfismos, apresentada por Murphy em [15].

Em seguida, faremos uma revisão da construção proposta por Cuntz [3], provando que as álgebras $\mathcal{O}_n$ podem ser vistas como um caso particular da definição dada em [15].

Indicaremos a seguir como o trabalho está organizado. Nas duas primeiras seções do Capítulo 1, é feita uma revisão das principais definições e resultados da teoria básica de C^* -álgebras utilizados ao longo do trabalho. Tal revisão é bastante breve, dada a existência de inúmeros textos a respeito do assunto. Podemos citar, por exemplo, o texto de Murphy [14] como referência.

As demais seções do Capítulo 1 destinam-se ao estudo de C^* -álgebras especiais, que são utilizadas na construção do produto cruzado por endomorfismos. A primeira delas é a C^* -álgebra envolvente de uma $*$ -álgebra de Banach com unidade.

A seguir, fazemos a construção do limite indutivo de um sistema indutivo (A_i, φ_j^i) , onde cada A_i é uma C^* -álgebra e cada φ_j^i é um $*$ -homomorfismo de A_i em A_j , para todo $i, j \in I$ com $i \leq j$, sendo I um conjunto dirigido. Tal limite indutivo, que sempre existe e é único, é um par $(A, \{\varphi^i\}_{i \in I})$, sendo A uma C^* -álgebra e $\varphi^i : A_i \rightarrow A$ $*$ -homomorfismos que apresentam as propriedades clássicas dos limites indutivos.

Finalmente, apresentamos o produto cruzado clássico, construído a partir de um C^* -sistema dinâmico clássico (B, G, β) , onde B é uma C^* -álgebra com unidade, G é um grupo abeliano munido da topologia discreta e β é um homomorfismo de G no grupo dos automorfismos de B .

No caso descrito acima, o produto cruzado associado ao sistema dinâmico (B, G, β) , denotado por $B \times_\beta G$, é a C^* -álgebra envolvente de $\ell_1(G, B)$, esta vista como uma Álgebra de Banach com a norma, o produto e a involução

definidos respectivamente por

$$\begin{aligned}\|x\|_1 &= \sum_{g \in G} \|x(g)\| \\ (x \times y)(h) &= \sum_{g \in G} x(g) \beta_g(y(g^{-1}h)) \\ x^*(h) &= \beta_h(x(h^{-1})^*)\end{aligned}$$

para toda $x, y \in \ell_1(G, B)$ e $h \in G$.

O Capítulo 2 traz a construção do produto cruzado por endomorfismos. Vamos associar ao C^* -sistema dinâmico (A, M, α) uma álgebra covariante obtida de um “corner” do produto cruzado de um C^* -sistema dinâmico clássico.

Mais especificamente, seja B o limite indutivo relativo ao sistema indutivo $(A_x, \alpha_x^y)_{x \leq y}$, onde $A_x = A$ e α_x^y é o endomorfismo α_z , sendo $y = x + z$. Para cada $x \in M$ consideremos o homomorfismo natural α^x de A_x em B . Então existe um único homomorfismo β_z de B em B tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A_x & \xrightarrow{\alpha^x} & B \\ \alpha_z \downarrow & & \downarrow \beta_z \\ A_x & \xrightarrow{\alpha^x} & B \end{array}$$

comuta, para todo $x \in M$. Mostramos também que β_z é um automorfismo de B .

Seja G o grupo de Grothendieck associado a M . Podemos definir naturalmente automorfismos β_z para cada $z \in G$. Portanto, temos um C^* -sistema dinâmico clássico (B, G, β) e consequentemente o produto cruzado $B \times_\beta G$.

Sendo p a projeção $\alpha^0(1) \in B$, a sub- C^* -álgebra $C = p(B \times_\beta G)p$ é uma álgebra gerada por $\alpha^0(A) = i(A)$ e por isometrias V_x , para $x \in M$, que satisfazem $i(\alpha_x(a)) = V_x i(a) V_x^*$, para todo $x \in M$ e para todo $a \in A$. Além disso, ela é universal com respeito a essa propriedade, isto é, vale o seguinte

Teorema *Seja (φ, W) uma representação covariante projetiva de (A, M, α) em um C^* -álgebra com unidade D , isto é, φ é um homomorfismo que preserva unidade de A em D e W é um homomorfismo isométrico projetivo de M nas isometrias de D , tal que $\varphi(\alpha_x(a)) = W_x \varphi(a) W_x^*$, para todo $a \in A$ e $x \in M$. Então existe único homomorfismo π de C em D tal que $\pi i = \varphi$ e $\pi V = W$.*

Assim a álgebra $C = p(B \times_\beta G)p$ é chamada de **produto cruzado (ou álgebra covariante) associado ao sistema dinâmico** (A, M, α) .

Na demonstração do teorema citado acima, utilizamos um resultado obtido por M. Laca e I. Raeburn em [10], que foi devidamente adaptado ao contexto do nosso trabalho.

No Capítulo 3 apresentamos a álgebra de Cuntz $\mathcal{O}_n$, um exemplo motivador de toda esta teoria. Inicialmente, definimos a álgebra $\mathcal{O}_n$, para $n \geq 2$, como a C^* -álgebra universal gerada pelas isometrias $S_1, \dots, S_n$ tais que

$$\sum_{i=1}^n S_i S_i^* = 1.$$

A álgebra $\mathcal{O}_n$ possui uma sequência crescente $(\mathcal{F}_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$ de $*$ -álgebras tal que cada $\mathcal{F}_k^n$ é $*$ -isomorfo à álgebra de matrizes complexas $\mathcal{M}_{n^k}$. Com isso, a sub- C^* -álgebra $\mathcal{F}^n = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_k^n$ é uma UHF álgebra.

Mostramos ainda uma propriedade fundamental da álgebra $\mathcal{O}_n$, que é dada pelo seguinte

Teorema *Seja $\{\hat{S}_1, \dots, \hat{S}_n\}$ uma família de isometrias em uma C^* -álgebra qualquer, satisfazendo a condição $\sum_{i=1}^n \hat{S}_i \hat{S}_i^* = 1$. Então $C^*(\hat{S}_1, \dots, \hat{S}_n)$ é isomorfa a $\mathcal{O}_n$.*

Em outras palavras, a construção da álgebra de Cuntz independe da escolha das isometrias $S_1, \dots, S_n$.

Finalmente, mostramos que a álgebra de Cuntz pode ser vista como um produto cruzado por um endomorfismo. Para isso, consideramos o C^* -sistema dinâmico $(\mathcal{F}^n, \mathbb{N}, \alpha)$, onde α é um endomorfismo injetor dado por

$$\alpha(M) = E_{11} \otimes M, \text{ para todo } M \in \mathcal{F}^n.$$

Capítulo 1

Conceitos Básicos e C^* -álgebras Especiais

Este capítulo tem como finalidade apresentar todos os conceitos relativos a C^* -álgebras necessários ao desenvolvimento da teoria do produto cruzado por endomorfismos, que será apresentada no Capítulo 2.

Assim, as duas primeiras seções tratam de conceitos básicos de C^* -álgebras. Como esta parte não representa o objetivo principal do trabalho, ela é feita de maneira bem resumida, focando-se apenas os resultados que serão posteriormente utilizados. Ao leitor interessado neste assunto, recomendamos as referências [14] e [5].

Nas demais seções, fazemos, com um pouco mais de detalhes, a construção de três C^* -álgebras fundamentais para o nosso trabalho, bem como a demonstração de suas principais propriedades. São elas a C^* -álgebra envolvente de uma $*$ -álgebra de Banach, o limite indutivo de C^* -álgebras e o produto cruzado clássico, no caso discreto.

1.1 Definições básicas

O principal objetivo desta seção é definir as C^* -álgebras, além de apresentar alguns conceitos básicos desta área.

Definição 1.1 *Seja A um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Dizemos que*

A é uma **álgebra** se existir uma aplicação bilinear $A^2 \rightarrow A$, $(a, b) \mapsto ab$ tal que, para todo $a, b, c \in A$,

$$a(bc) = (ab)c.$$

Tal aplicação é denominada **multiplicação**.

Se B é um sub-espço vetorial de A tal que para todo $b, b' \in B$ temos $bb' \in B$, então B , munido da multiplicação de A restrita a B , é uma **sub-álgebra** de A .

Observação: Daqui para frente, trabalharemos sempre com álgebras sobre o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos.

Definição 1.2 Seja A uma álgebra. Se A possui uma norma sub-multiplicativa $\|\cdot\|$, ou seja, que satisfaz a desigualdade

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$$

para todo $a, b \in A$, então o par $(A, \|\cdot\|)$ é chamado **álgebra normada**.

Se, além disso, A for completo segundo a norma $\|\cdot\|$, dizemos que A é uma **álgebra de Banach**.

Uma álgebra de Banach A que possui um elemento 1 tal que $\|1\| = 1$ e $1a = a1 = a$, para todo $a \in A$, é denominada **álgebra de Banach com unidade**.

Uma sub-álgebra fechada de uma álgebra de Banach é uma **sub-álgebra de Banach**.

Definição 1.3 Seja A uma álgebra. Uma **involução** é uma aplicação de A em A dada por $a \mapsto a^*$ tal que, para todo $a, b \in A$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ temos

$$\begin{aligned} (a + b)^* &= a^* + b^* & (\alpha a)^* &= \bar{\alpha} a^* \\ (a^*)^* &= a & (ab)^* &= b^* a^*. \end{aligned}$$

Uma álgebra munida de uma involução é denominada ***-álgebra**.

Se B é uma sub-álgebra auto-adjunta de A , ou seja, para $b \in B$ tem-se $b^* \in B$, então B é uma **sub-*-álgebra** de A .

Se A é uma álgebra de Banach munida de uma involução tal que, para todo $a \in A$, temos $\|a^*\| = \|a\|$, então A é chamada ***-álgebra de Banach**.

Definição 1.4 Seja A uma *-álgebra de Banach tal que $\|a^*a\| = \|a\|^2$, para todo $a \in A$. Então, A é chamada **C*-álgebra**.

Se A possui uma unidade 1 , então A é uma C^* -álgebra com unidade.

Uma sub- $*$ -álgebra fechada de uma C^* -álgebra A é chamada **sub- C^* -álgebra** de A .

Se $\|\cdot\|$ é uma norma sub-multiplicativa de uma $*$ -álgebra B que satisfaz $\|b^*b\| = \|b\|^2$ para todo $b \in B$, então $\|\cdot\|$ é denominada **C^* -norma**.

Observação: Neste trabalho, utilizaremos apenas C^* -álgebras com unidade. Entretanto, se A é uma C^* -álgebra que não possui unidade, é possível construir uma C^* -álgebra com unidade $\tilde{A}$, denominada **unitização** de A , sendo que A pode ser identificada com uma sub- C^* -álgebra de $\tilde{A}$. Maiores detalhes podem ser encontrados em [14].

Vamos a seguir mostrar alguns exemplos clássicos de C^* -álgebras.

Exemplo 1.5 O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos é uma C^* -álgebra com unidade, com a involução dada pela conjugação $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ e com a norma dada pelo módulo $\alpha \mapsto |\alpha|$.

Exemplo 1.6 Seja Ω um espaço topológico Hausdorff localmente compacto. Dizemos que uma função contínua $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ se anula no infinito se, para todo $\varepsilon > 0$, o conjunto $\{\omega \in \Omega : |f(\omega)| \geq \varepsilon\}$ é compacto. O conjunto de tais funções é denotado $C_o(\Omega)$.

Para todo $f, g \in C_o(\Omega)$, $\omega \in \Omega$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, consideremos as operações pontuais

$$\begin{aligned}(f + g)(\omega) &= f(\omega) + g(\omega), \\ (\alpha f)(\omega) &= \alpha f(\omega) \text{ e} \\ (fg)(\omega) &= f(\omega) g(\omega),\end{aligned}$$

a norma do supremo

$$\|f\|_\infty = \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|$$

e a involução dada pela conjugação, ou seja, $f \mapsto \bar{f}$, onde $\bar{f}(\omega) = \overline{f(\omega)}$.

Então, $C_o(\Omega)$ munido de tais operações é uma C^* -álgebra. Observemos ainda que $C_o(\Omega)$ tem unidade se, e somente se, Ω é um compacto.

Exemplo 1.7 Sejam H espaço de Hilbert e $\mathcal{B}(H)$ o conjunto dos operadores lineares limitados de H . Para todo $S, T \in \mathcal{B}(H)$, $\xi, \eta \in H$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, vamos definir as seguintes operações:

$$\begin{aligned}
(S + T)(\xi) &= S(\xi) + T(\xi), \\
(\alpha T)(\xi) &= \alpha T(\xi) \text{ e} \\
(ST)(\xi) &= (S \circ T)(\xi).
\end{aligned}$$

Consideremos também a norma usual dos operadores

$$\|T\| = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|T(\xi)\|$$

e a involução dada pelo operador adjunto T^* , isto é,

$$\langle T(\xi), \eta \rangle = \langle \xi, T^*(\eta) \rangle, \quad \forall \xi, \eta \in H.$$

Então, $\mathcal{B}(H)$ é uma C^* -álgebra com unidade, sendo a unidade o operador identidade Id_H .

Veremos na próxima seção que esta álgebra desempenha um papel fundamental na teoria de C^* -álgebras. Mais especificamente, pelo teorema de Gelfand-Naimark-Segal (GNS) temos que toda C^* -álgebra pode ser identificada com uma sub- C^* -álgebra de $\mathcal{B}(H)$, para um espaço de Hilbert H conveniente.

Exemplo 1.8 Como um caso particular do exemplo anterior, o conjunto $\mathcal{M}_n$ das matrizes quadradas $n \times n$ a valores complexos é uma C^* -álgebra. De fato, basta identificarmos $\mathcal{M}_n$ com $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$, já que $\mathbb{C}^n$ é espaço de Hilbert.

Os termos definidos a seguir relacionam-se a elementos de uma C^* -álgebra que apresentam propriedades especiais e serão bastante utilizados ao longo deste trabalho.

Definição 1.9 Sejam A uma $*$ -álgebra com unidade 1 e $a \in A$. Então, a é denominado

- i. **auto-adjunto**, ou hermitiano, se $a^* = a$.
- ii. **projeção**, se a é auto-adjunto e $a^2 = a$.
- iii. **normal**, se $a^*a = aa^*$.
- iv. **isometria**, se $a^*a = 1$. Se, além disso, $aa^* \neq 1$, então a é chamado **isometria própria**.
- v. **unitário**, se $a^*a = aa^* = 1$.

Definição 1.10 Sejam A e B $*$ -álgebras e $\varphi : A \rightarrow B$ uma aplicação linear. Dizemos que φ é um **$*$ -homomorfismo** se, para todo $a, a' \in A$,

$$\begin{aligned}\varphi(aa') &= \varphi(a)\varphi(a') \text{ e} \\ \varphi(a^*) &= \varphi(a)^*.\end{aligned}$$

Se A e B possuem unidades 1_A e 1_B , respectivamente, e $\varphi(1_A) = 1_B$, então dizemos que φ **preserva unidade**.

Um $*$ -homomorfismo de A em A é chamado um **endomorfismo** de A .

Se φ é um $*$ -homomorfismo bijetivo, então ele é chamado de **$*$ -isomorfismo**. Um $*$ -isomorfismo de A em A é denominado um **automorfismo** de A .

Vamos provar a seguir um resultado muito importante relacionado a $*$ -homomorfismos. Antes, porém, trataremos do espectro de um elemento de uma C^* -álgebra.

Definição 1.11 *Sejam A uma álgebra com unidade 1 e $a \in A$. O **espectro** de a é o conjunto*

$$\sigma(a) = \{\alpha \in \mathbb{C} : (a - \alpha 1) \text{ não é invertível em } A\}.$$

Teorema 1.12 *Sejam A álgebra de Banach com unidade e $a \in A$. Então, o espectro $\sigma(a)$*

(1) é um subconjunto fechado do disco do plano complexo com centro na origem e raio $\|a\|$;

(2) é um conjunto não vazio.

O teorema acima, cuja demonstração é encontrada em 1.2.4 e 1.2.5 de [14], motiva a seguinte

Definição 1.13 *Se a é um elemento de uma álgebra de Banach A com unidade, dizemos que o seu **raio espectral** $r(a)$ é dado por*

$$r(a) = \sup_{\alpha \in \sigma(a)} |\alpha|.$$

Pelo teorema 1.12, concluímos que se a é um elemento de uma álgebra de Banach A com unidade, então $r(a) \leq \|a\|$. Um resultado mais específico, relativo a C^* -álgebras, cuja demonstração pode ser vista em 2.1.1 de [14], é dado pelo

Teorema 1.14 *Se a é um elemento auto-adjunto de uma C^* -álgebra A , então $r(a) = \|a\|$.*

Teorema 1.15 *Seja $\varphi : A \rightarrow B$ um $*$ -homomorfismo de uma $*$ -álgebra de Banach A em uma C^* -álgebra B , ambas com unidade. Então, para todo $a \in A$, temos que $\|\varphi(a)\| \leq \|a\|$.*

Demonstração: Se $a \in A$, é fácil ver que $\sigma(\varphi(a)) \subseteq \sigma(a)$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \|\varphi(a)\|^2 &= \|\varphi(a)^*\varphi(a)\| = \|\varphi(a^*a)\| \stackrel{(1.14)}{=} r(\varphi(a^*a)) \leq r(a^*a) \\ &\leq \|a^*a\| \leq \|a\|^2. \end{aligned}$$

Portanto, $\|\varphi(a)\| \leq \|a\|$. ■

Vamos ainda citar um último teorema sobre $*$ -homomorfismos entre C^* -álgebras, cuja demonstração pode ser vista em 3.1.5 de [14].

Teorema 1.16 *Se $\varphi : A \rightarrow B$ é um $*$ -homomorfismo injetivo entre as C^* -álgebras A e B , então φ é necessariamente uma isometria.*

Para demonstrarmos o teorema GNS, já citado no exemplo 1.7, precisaremos dos elementos positivos de uma C^* -álgebra. Vamos defini-los a seguir.

Definição 1.17 *Seja A uma C^* -álgebra. Um elemento auto-adjunto a de A é chamado **positivo** se $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$. Se a é positivo, escrevemos $a \geq 0$.*

O conjunto de todos os elementos positivos de A é denotado A^+ . Além disso, se $a, b \in A$ e $a - b \in A^+$, escrevemos $a \geq b$ ou $b \leq a$.

Definição 1.18 *Seja $\varphi : A \rightarrow B$ uma aplicação linear entre C^* -álgebras. Dizemos que φ é **positiva** se $\varphi(A^+) \subseteq B^+$.*

*Seja $\tau : A \rightarrow \mathbb{C}$ um funcional linear positivo tal que $\|\tau\| = 1$. Então, τ é um **estado** de A . O conjunto de todos os estados de A é denotado $S(A)$.*

1.2 O teorema de Gelfand-Naimark-Segal

O objetivo desta seção é mostrar que toda C^* -álgebra pode ser identificada com uma sub- C^* -álgebra de $\mathcal{B}(H)$, sendo H um espaço de Hilbert conveniente. Para começar, vamos tratar das representações de uma C^* -álgebra em um espaço de Hilbert.

Definição 1.19 Uma **representação** de uma $*$ -álgebra de Banach A é um par (H, φ) , onde H é um espaço de Hilbert e $\varphi : A \rightarrow \mathcal{B}(H)$ é um $*$ -homomorfismo.

Se a imagem de φ está contida em $\mathcal{U}(H)$, o conjunto dos unitários de $\mathcal{B}(H)$, dizemos que (H, φ) é uma representação unitária de A .

Dizemos que (H, φ) é **fiel** se φ for injetora.

Definição 1.20 Sejam H espaço de Hilbert, $S \subseteq H$ subconjunto e $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}(H)$ um conjunto de operadores limitados de H .

Chamaremos de $\mathcal{V}S$ o conjunto das combinações lineares dos elementos de $\{T(x) : T \in \mathcal{V} \text{ e } x \in S\}$. Seja ainda $[\mathcal{V}S]$ o fecho do conjunto $\mathcal{V}S$.

Dizemos que $\mathcal{V}$ age não degeneradamente em H se $[\mathcal{V}H] = H$.

Definição 1.21 Uma representação (H, φ) de uma $*$ -álgebra de Banach A é chamada **não degenerada** se a sub-álgebra $\varphi(A) \subseteq \mathcal{B}(H)$ age não degeneradamente em H .

Proposição 1.22 Seja (H, φ) uma representação de uma $*$ -álgebra de Banach A com unidade 1_A . Então, (H, φ) é não degenerada se, e somente se, φ preserva unidade.

Demonstração: Consideremos (H, φ) não degenerada. Se $a \in A$ e $\xi \in H$, temos que

$$\varphi(a)\xi = \varphi(1_A a)\xi = \varphi(1_A)\varphi(a)\xi.$$

Logo, $\varphi(a)\xi - \varphi(1_A)\varphi(a)\xi = 0$, ou seja, $(Id_H - \varphi(1_A))(\varphi(a)\xi) = 0$.

Como (H, φ) é não degenerada, o conjunto $\{\varphi(a)\xi : a \in A \text{ e } \xi \in H\}$ é denso em H . Portanto, $Id_H - \varphi(1_A) = 0$, isto é, $\varphi(1_A) = Id_H$ e φ preserva unidade.

Por outro lado, se φ preserva unidade, $\varphi(1_A)(H) = Id_H(H) = H$, ou seja, (H, φ) é não degenerada. ■

Seja $(H_i, \varphi_i)_{i \in I}$ uma família de representações da $*$ -álgebra de Banach A . Então, podemos obter uma representação (H, φ) de A , denominada soma direta da família $(H_i, \varphi_i)_{i \in I}$, fazendo

$$\triangleright H = \bigoplus_{i \in I} H_i;$$

$\triangleright \varphi(a) \in \mathcal{B}(H)$ dado por $\varphi(a)((x_i)_{i \in I}) = (\varphi_i(a)(x_i))_{i \in I}$, para todo $a \in A$ e $(x_i)_{i \in I} \in H$.

As representações de uma C^* -álgebra têm uma relação muito importante com os seus funcionais lineares positivos. Tal relação será utilizada para demonstrar o teorema de Gelfand-Naimark-Segal.

Lema 1.23 *Seja τ um funcional linear positivo de uma C^* -álgebra com unidade A . Então, $\|\tau\| = \tau(1)$.*

Demonstração: Seja a aplicação $\phi : A \times A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $(a, b) \mapsto \tau(b^*a)$. É fácil verificar que ϕ é uma forma sesquilinear positiva em A . Assim, temos que $\tau(b^*a) = \overline{\tau(a^*b)}$ e $|\phi(a, b)| \leq \sqrt{\phi(a, a)} \sqrt{\phi(b, b)}$.

Sendo $a \in A$ com $\|a\| \leq 1$, temos que

$$\begin{aligned} |\tau(a)|^2 &= |\tau(1^*a)|^2 \leq (\tau(1^*1))^{\frac{1}{2}} \tau(a^*a)^{\frac{1}{2}} = \tau(1) \tau(a^*a) \\ &\leq \tau(1) \|\tau\|. \end{aligned}$$

Como a desigualdade acima vale para todo $a \in A$ com $\|a\| \leq 1$, concluímos que $\|\tau\|^2 \leq \tau(1) \|\tau\|$, isto é, $\|\tau\| \leq \tau(1)$.

Por outro lado, sabemos que $\tau(1) \leq \|\tau\|$. Portanto, $\|\tau\| = \tau(1)$. ■

Lema 1.24 *Seja τ um funcional linear positivo de uma C^* -álgebra com unidade A . Então,*

i. *para cada $a \in A$, $\tau(a^*a) = 0$ se, e somente se, $\tau(ba) = 0$ para todo $b \in A$.*

ii. *$\tau(b^*a^*ab) \leq \|a^*a\| \tau(b^*b)$, para todo $a, b \in A$.*

Demonstração: i. Já vimos que a relação $(a, b) \mapsto \tau(b^*a)$ define uma forma sesquilinear positiva ϕ em A . Então, $|\phi(a, b)| \leq \sqrt{\phi(a, a)} \sqrt{\phi(b, b)}$.

Vamos supor que $\tau(a^*a) = 0$. Daí, para todo $b \in A$,

$$|\phi(a, b^*)| \leq \sqrt{\phi(a, a)} \sqrt{\phi(b^*, b^*)} \Rightarrow |\tau(ba)| \leq \underbrace{(\tau(a^*a))^{\frac{1}{2}}}_{=0} (\tau(bb^*))^{\frac{1}{2}}.$$

Logo, $|\tau(ba)| \leq 0$, ou seja, $\tau(ba) = 0$.

Para mostrar a outra implicação, suponhamos que $\tau(ba) = 0$, para todo $b \in A$. Então, basta tomarmos $b = a^*$ e temos que $\tau(a^*a) = 0$.

ii. Seja $b \in A$. Se $\tau(b^*b) = 0$ o resultado segue imediatamente de (i). Tomemos $b \in A$ tal que $\tau(b^*b) > 0$. Vamos definir a aplicação $\rho : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $c \mapsto \frac{\tau(b^*cb)}{\tau(b^*b)}$.

É fácil ver que ρ é linear. Além disso, seja $c \in A^+$. De 2.2.5(2) de [14] temos que

$$0 \leq c \Rightarrow b^*0b \leq b^*cb \Rightarrow 0 \leq b^*cb.$$

Então, como τ é positivo, temos $\tau(b^*cb) \geq 0$. Logo, $\rho(c) = \frac{\tau(b^*cb)}{\tau(b^*b)} \geq 0$, ou seja, ρ é funcional linear positivo.

Mas $\rho(1) = \frac{\tau(b^*1b)}{\tau(b^*b)} = 1$. Então, do lema 1.23, $\|\rho\| = 1$. Assim,

$$\rho(a^*a) \leq \|a^*a\| \Rightarrow \frac{\tau(b^*a^*ab)}{\tau(b^*b)} \leq \|a^*a\| \Rightarrow \tau(b^*a^*ab) \leq \|a^*a\| \tau(b^*b). \quad \blacksquare$$

Teorema 1.25 *Seja A uma C^* -álgebra. Então, para cada funcional linear positivo τ de A podemos associar uma representação (H_τ, φ_τ) de A , denominada **representação GNS** associada a τ .*

Demonstração: Consideremos o conjunto $N_\tau = \{a \in A : \tau(a^*a) = 0\}$. Pelo lema 1.24 (ii), temos que N_τ é um ideal à esquerda fechado de A .

Podemos então definir um produto interno ϕ no espaço quociente A/N_τ dado por $\phi([a], [b]) = \tau(b^*a)$, para todo $a, b \in A$. Temos assim que A/N_τ é espaço pré-hilbertiano.

Vamos definir, para cada $a \in A$, um operador $\varphi(a)$ fazendo, para todo $[b] \in A/N_\tau$, $\varphi(a)([b]) = [ab]$.

É fácil ver que $\varphi(a)$ é uma aplicação linear. Observemos ainda que

$$\begin{aligned} \|(\varphi(a))([b])\|^2 &= \|[ab]\|^2 = \phi([ab], [ab]) \\ &= \tau((ab)^*(ab)) = \tau(b^*a^*ab) \\ &\stackrel{(1.24)(ii)}{\leq} \|a^*a\| \tau(b^*b) = \|a\|^2 \tau(b^*b) \\ &= \|a\|^2 \|[b]\|^2. \end{aligned}$$

Então, $\|(\varphi(a))([b])\| \leq \|a\| \|[b]\|$, isto é, $\|\varphi(a)\| \leq \|a\|$ e $\varphi(a)$ é um operador limitado de A/N_τ .

Seja H_τ o espaço de Hilbert obtido pelo completamento de A/N_τ . Da continuidade de $\varphi(a)$, este operador pode ser estendido de maneira única a um operador limitado $\varphi_\tau(a)$ em H_τ . Então, para mostrarmos que (H_τ, φ_τ) é representação de A , resta provar que a aplicação φ_τ de A em $\mathcal{B}(H_\tau)$ dada

por $a \mapsto \varphi_\tau(a)$ é $*$ -homomorfismo. Devemos ressaltar que basta fazer isso para elementos de A/N_τ , já que este conjunto é denso em H_τ .

Sejam $a, b \in A$, $[c], [d] \in A/N_\tau$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Temos que

$$\begin{aligned}\varphi_\tau(\alpha a + b)([c]) &= [(\alpha a + b)(c)] = \alpha[ac] + [bc] \\ &= \alpha\varphi_\tau(a)([c]) + \varphi_\tau(b)([c]),\end{aligned}$$

ou seja, φ_τ é aplicação linear. Além disso, $\varphi_\tau(ab)([c]) = [abc]$ e

$$(\varphi_\tau(a) \circ \varphi_\tau(b))([c]) = \varphi_\tau(a)(\varphi_\tau(b)([c])) = \varphi_\tau(a)([bc]) = [abc].$$

Então, $\varphi_\tau(ab) = \varphi_\tau(a) \circ \varphi_\tau(b)$. Temos também que

$$\begin{aligned}\phi([c], \varphi_\tau^*(a)([d])) &= \phi(\varphi_\tau(a)([c]), [d]) = \phi([ac], [d]) \\ &= \tau(d^*ac) = \tau((a^*d)^*c) = \phi([c], [a^*d]) \\ &= \phi([c], \varphi_\tau(a^*)([d])).\end{aligned}$$

Portanto, $\varphi_\tau(a^*) = \varphi_\tau^*(a)$ e (H_τ, φ_τ) é representação de A . ■

Definição 1.26 *Seja A uma C^* -álgebra com unidade. A **representação universal** de A , denotada (H_u, φ_u) , é a soma direta de todas as representações (H_τ, φ_τ) , onde τ varia no conjunto $S(A)$ dos funcionais lineares positivos com norma 1 de A .*

A seguir, demonstraremos o teorema de Gelfand-Naimark-Segal. No entanto, precisaremos de um resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em 3.3.6 de [14], que é dado pelo seguinte

Lema 1.27 *Se a é um elemento normal de uma C^* -álgebra não nula A , então existe um estado τ em A tal que $\|a\| = |\tau(a)|$.*

Teorema 1.28 (Gelfand-Naimark-Segal) *Se A é uma C^* -álgebra com unidade, então a representação universal (H_u, φ_u) é fiel e φ_u é isometria.*

Demonstração: Seja $a \in A$ tal que $\varphi_u(a) = 0$. Devemos provar que φ_u é injetora, ou seja, que $a = 0$.

Como a^*a é normal, pelo lema 1.27 existe um estado τ em A tal que $\|a^*a\| = \tau(a^*a)$.

Observemos que, como $\varphi_u(a) = 0$ e τ é um estado de A , temos $\varphi_\tau(a) = 0$. Então,

$$\begin{aligned}
\|a\|^2 &= \|a^*a\| = \tau(a^*a) = \tau(1^*a^*a) = \phi([a^*a], [1]) \\
&= \phi(\varphi_\tau(a^*a)([1]), [1]) = \phi(\varphi_\tau^*(a)(\varphi_\tau(a)([1])), [1]) \\
&= \phi(\varphi_\tau(a)([1]), \varphi_\tau(a)([1])) = \|\varphi_\tau(a)([1])\|^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $a = 0$ e φ_u é injetora. Além disso, do teorema 1.16, φ_u é isometria. ■

Observação: O teorema de Gelfand-Naimark-Segal nos fornece uma caracterização de qualquer C^* -álgebra. Como a representação universal é fiel, temos que toda C^* -álgebra é isomorfa a uma sub- C^* -álgebra de $\mathcal{B}(H)$, sendo H um espaço de Hilbert conveniente.

No caso particular em que a C^* -álgebra é abeliana, porém, conseguimos uma caracterização ainda melhor, que é dada pelo teorema de Gelfand-Naimark. Esse teorema nos diz que toda C^* -álgebra comutativa é isometricamente isomorfa a $C_o(\Omega)$, onde Ω é um espaço Hausdorff localmente compacto.

Não entraremos em detalhes nessa descrição pois, apesar de ter fundamental importância na teoria de C^* -álgebras, o teorema de Gelfand-Naimark não foi diretamente utilizado neste trabalho. Maiores detalhes sobre o assunto podem ser encontrados em [14]. Antes de citar o teorema, façamos duas definições.

Definição 1.29 *Seja A uma C^* -álgebra comutativa. Um $*$ -homomorfismo não nulo de A em $\mathbb{C}$ é denominado **caracter**. O conjunto de todos os caracteres de A , chamado de **espectro** de A , é denotado por $\hat{A}$.*

Definição 1.30 *Seja A uma $*$ -álgebra de Banach comutativa. Para cada $a \in A$ fixado, vamos definir a aplicação $\hat{a}(\phi) = \phi(a)$, para todo $\phi \in \hat{A}$. A aplicação $\varphi : A \rightarrow C_o(\hat{A})$ dada por $a \mapsto \hat{a}$ é chamada **transformada de Gelfand**.*

Teorema 1.31 (Gelfand-Naimark) *Se A é uma C^* -álgebra abeliana não nula, então a representação de Gelfand*

$$\varphi : A \rightarrow C_o(\hat{A}), \quad a \mapsto \hat{a},$$

é um $$ -isomorfismo isométrico.*

Com este resultado, terminamos a parte de conceitos básicos de C^* -álgebras. Nas próximas seções, mostraremos algumas C^* -álgebras especiais, que serão utilizadas, no Capítulo 2, para a construção do produto cruzado por endomorfismos.

1.3 A C^* -álgebra envolvente

A construção que descreveremos a seguir é muito útil, aparecendo com bastante frequência na teoria de C^* -álgebras.

Partindo de uma $*$ -álgebra de Banach B com unidade, vamos construir uma C^* -álgebra A que contém uma cópia de B , dada pela aplicação inclusão $i : B \rightarrow A$. Além disso, A possui a seguinte propriedade universal: se C é uma C^* -álgebra e $\psi : B \rightarrow C$ é $*$ -homomorfismo, então existe um único $*$ -homomorfismo $\tilde{\psi} : A \rightarrow C$ que faz o diagrama abaixo comutar.

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{i} & A \\ & \searrow \psi & \downarrow \tilde{\psi} \\ & & C \end{array}$$

Definição 1.32 *Seja A uma $*$ -álgebra. Uma semi-norma p em A é chamada **C^* -semi-norma** se, para todo $a, b \in A$, temos que $p(ab) \leq p(a)p(b)$, $p(a^*) = p(a)$ e $p(a^*a) = p(a)^2$.*

Exemplo 1.33 *Se $\varphi : A \rightarrow B$ é um $*$ -homomorfismo entre uma $*$ -álgebra A e uma C^* -álgebra B , então a aplicação $p : A \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por $a \mapsto \|\varphi(a)\|$ é uma C^* -semi-norma em A .*

Mostraremos a seguir a construção de uma C^* -álgebra a partir de uma $*$ -álgebra munida de uma C^* -semi-norma. Tal construção nos auxiliará a obter, posteriormente, a C^* -álgebra envolvente.

Proposição 1.34 *Sejam B uma $*$ -álgebra e p uma C^* -semi-norma em B . Então, o conjunto $\mathcal{N} = \{b \in B : p(b) = 0\}$ é um ideal bilateral auto-adjunto de B .*

Demonstração: Sejam $a \in \mathcal{N}$ e $b \in B$. Então,

$$0 \leq p(ab) \leq p(a)p(b) = 0 \cdot p(b) = 0.$$

Logo, $p(ab) = 0$ e $ab \in \mathcal{N}$.

Além disso, $p(a^*) = p(a) = 0$. Portanto, $a^* \in \mathcal{N}$. ■

Como $\mathcal{N}$ é um ideal bilateral auto-adjunto da $*$ -álgebra B , o espaço quociente $B/\mathcal{N}$ é uma $*$ -álgebra. Definindo, para todo $b \in B$, $\|[b]\| = p(b)$, obtemos uma C^* -norma em $B/\mathcal{N}$.

Proposição 1.35 *Seja A o espaço de Banach obtido do completamento de $B/\mathcal{N}$ pela norma definida acima. Então, A é C^* -álgebra.*

Demonstração: Como A é espaço de Banach munido de uma C^* -norma, basta mostrarmos que as operações de multiplicação e involução em $B/\mathcal{N}$ podem ser estendidas de maneira única a operações do mesmo tipo em A .

Sejam (a_n) e (b_n) seqüências de Cauchy em $B/\mathcal{N}$. Podemos concluir que $a_n \rightarrow a$ e $b_n \rightarrow b$, com $a, b \in A$, pois A é espaço de Banach. Vamos provar que (a_nb_n) é seqüência de Cauchy.

Como (a_n) e (b_n) são seqüências convergentes, então são limitadas, digamos pelos reais positivos L_a e L_b , respectivamente. Seja $M = \max\{L_a, L_b\}$.

Dado $\frac{\varepsilon}{2M} > 0$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n, m \geq n_o$, temos que $\|a_n - a_m\| < \frac{\varepsilon}{2M}$ e $\|b_n - b_m\| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Daí, se $n, m \geq n_o$,

$$\begin{aligned} \|a_nb_n - a_mb_m\| &= \|a_nb_n - a_nb_m + a_nb_m - a_mb_m\| \\ &\leq \|a_n(b_n - b_m)\| + \|(a_n - a_m)b_m\| \\ &\leq \|a_n\| \|b_n - b_m\| + \|a_n - a_m\| \|b_m\| \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como A é espaço de Banach, existe $\lim_{n \rightarrow \infty} a_nb_n$, que é um elemento de A .

Queremos estender a multiplicação definida em $B/\mathcal{N}$ para todo A . Seja $ab \in A$ o produto dos elementos a e b de A . Então,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|ab - \lim a_nb_n\| = \|\lim(ab - a_nb_n)\| = \lim \|ab - a_nb_n\| \\ &= \lim \|ab - a_nb + a_nb - a_nb_n\| \\ &\leq \lim \|(a - a_n)b\| + \|a_n(b - b_n)\| \\ &\leq \lim \|a - a_n\| \|b\| + \lim \|a_n\| \|b - b_n\| = 0. \end{aligned}$$

Logo, $\lim a_n b_n = ab$. Da unicidade do limite, concluímos que a multiplicação pode ser estendida de maneira única a todo A .

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que, se $n, m \geq n_o$, então $\|a_n - a_m\| < \varepsilon$. Como $\|a_n - a_m\| = \|a_n^* - a_m^*\|$, concluímos que (a_n^*) é seqüência de Cauchy, com $\lim a_n^* \in A$.

Vamos estender a involução definida em $B/\mathcal{N}$ para todo A . Seja $a^* \in A$ o adjunto do elemento $a \in A$. Então,

$$\|a^* - \lim a_n^*\| = \lim \|a^* - a_n^*\| = \lim \|a - a_n\| = 0.$$

Logo, $\lim a_n^* = a^*$ e a involução pode ser estendida de maneira única a todo A . ■

A próxima proposição mostra como obter, a partir de uma $*$ -álgebra de Banach com unidade, uma C^* -semi-norma. Com isso, fazendo a construção descrita pelas proposições 1.34 e 1.35, teremos a C^* -álgebra envolvente.

Proposição 1.36 *Sejam B $*$ -álgebra de Banach com unidade e R o conjunto de todas as representações (H, φ) de B . Se, para cada $b \in B$,*

$$\|b\| = \sup_{(H, \varphi) \in R} \|\varphi(b)\|,$$

então $\|\cdot\|$ é C^ -semi-norma em B .*

Demonstração: Vamos lembrar que, como $\varphi : B \rightarrow \mathcal{B}(H)$ é $*$ -homomorfismo e $\mathcal{B}(H)$ é C^* -álgebra, $\|\varphi(b)\| \leq \|b\|$ e, daí, $\|b\| = \sup_{(H, \varphi) \in R} \|\varphi(b)\| < \infty$, para todo $b \in B$. Segue ainda das propriedades do supremo que, se $a, b \in B$ e $\lambda \in \mathbb{C}$,

- ▷ $\|b\| \geq 0$,
- ▷ $\|\lambda b\| = |\lambda| \cdot \|b\|$ e
- ▷ $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$,

ou seja, $\|\cdot\|$ é semi-norma. Além disso, para todo $(H, \varphi) \in R$, temos que

- ▷ $\|\varphi(ab)\| = \|\varphi(a)\varphi(b)\| \leq \|\varphi(a)\| \cdot \|\varphi(b)\|$;
- ▷ $\|\varphi(b^*)\| = \|\varphi(b)^*\| = \|\varphi(b)\|$;
- ▷ $\|\varphi(b^*b)\| = \|\varphi(b)^*\varphi(b)\| = \|\varphi(b)\|^2$.

Assim, usando novamente as propriedades do supremo, concluimos que

$$\triangleright \|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|;$$

$$\triangleright \|b^*\| = \|b\|;$$

$$\triangleright \|b^*b\| = \|b\|^2. \quad \blacksquare$$

Definição 1.37 *Seja B uma $*$ -álgebra de Banach com unidade munida da C^* -semi-norma definida na proposição 1.36. A C^* -álgebra A construída conforme descrito na proposição 1.35 é chamada **C^* -álgebra envolvente** de B e denotada $C^*(B)$.*

Teorema 1.38 *Sejam B uma $*$ -álgebra de Banach com unidade, C uma C^* -álgebra e $\psi : B \rightarrow C$ $*$ -homomorfismo. Então, existe um único $*$ -homomorfismo $\tilde{\psi} : C^*(B) \rightarrow C$ que faz o diagrama abaixo comutar.*

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{i} & C^*(B) \\ & \searrow \psi & \downarrow \tilde{\psi} \\ & & C \end{array}$$

Demonstração: Consideremos a representação universal (H_u, φ_u) de C , que é fiel. Daí, φ_u é isometria. Temos que a composição $\varphi_u \circ \psi : B \rightarrow \mathcal{B}(H_u)$ é representação de B . Assim, para todo $b \in B$,

$$\|b\| = \sup_{(H, \varphi) \in R} \|\varphi(b)\| \geq \|(\varphi_u \circ \psi)(b)\|.$$

Portanto, se $b \in \mathcal{N}$, $(\varphi_u \circ \psi)(b) = 0$ e, daí, $\psi(b) = 0$. Em outras palavras, $\mathcal{N} \subseteq \text{Ker } \psi$.

Como o espaço quociente $B/\mathcal{N}$ é denso em $C^*(B)$, vamos inicialmente definir $\psi_o : B/\mathcal{N} \rightarrow C$, fazendo $\psi_o([b]) = \psi(b)$, para todo $b \in B$. Observemos que, como $\mathcal{N} \subseteq \text{Ker } \psi$, a aplicação ψ_o está bem definida. Além disso, ψ_o é contínua, pois, para todo $b \in B$,

$$\|\psi_o([b])\|_C = \|\psi(b)\|_C = \|\varphi_u(\psi(b))\|_{\mathcal{B}(H_u)} \leq \|b\| = \|[b]\|.$$

Portanto, basta tomarmos $\tilde{\psi}$ como a extensão de ψ_o para $C^*(B)$.

Resta provarmos a unicidade de $\tilde{\psi}$. Sejam ψ_1 e ψ_2 dois $*$ -homomorfismos satisfazendo as condições acima.

Se $b \in C^*(B)$, então existe uma seqüência $([b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $B/\mathcal{N}$ tal que $[b_n] \rightarrow b$. Da continuidade de ψ_1 e ψ_2 , temos

$$\psi_1(b) = \lim \psi_1([b_n]) = \lim \psi(b_n) = \lim \psi_2([b_n]) = \psi_2(b).$$

Logo, $\psi_1 = \psi_2$. ■

1.4 Limites indutivos de C^* -álgebras

Dados uma família de C^* -álgebras e um conjunto de $*$ -homomorfismos entre essas álgebras, pode-se obter, sob certas condições, uma nova C^* -álgebra, denominada **limite indutivo** ou limite direto. Esse tipo de construção aparece muitas vezes na teoria de C^* -álgebras e será fundamental na obtenção do produto cruzado por endomorfismos.

Nesta seção, vamos considerar que I é um conjunto munido de uma pré-ordem $\leq$ que possui a seguinte propriedade: para todo par $i_1, i_2 \in I$, existe $i \in I$ tal que $i_1 \leq i$ e $i_2 \leq i$. Dizemos então que I é um **conjunto dirigido**.

Definição 1.39 *Um **sistema indutivo** em uma categoria $\mathcal{C}$ é uma família $\{A_i\}_{i \in I}$ de objetos em $\mathcal{C}$ e uma família de morfismos $\varphi_j^i : A_i \rightarrow A_j$ definidos para todo par $(i, j) \in I \times I$, com $i \leq j$, tais que, se $i \leq j \leq k$, então $\varphi_k^i = \varphi_k^j \circ \varphi_j^i$.*

Convencionamos ainda que $\varphi_i^i = Id_{A_i}$.

Denotaremos o sistema indutivo por $\{A_i, (\varphi_j^i)_{i \leq j}\}_{i, j \in I}$ ou simplesmente (A_i, φ_j^i) .

*Se $I = \mathbb{N}$, o sistema indutivo é chamado **seqüência indutiva**.*

Definição 1.40 *Um **limite indutivo** ou limite direto de um sistema indutivo (A_i, φ_j^i) em uma categoria $\mathcal{C}$ é um par $(A, \{\varphi^i\}_{i \in I})$, onde A é um objeto em $\mathcal{C}$ e $\varphi^i : A_i \rightarrow A$ é um morfismo, para cada $i \in I$, satisfazendo as seguintes condições:*

(i) Para todo $i \leq j$ o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{\varphi_j^i} & A_j \\ & \searrow \varphi^i & \downarrow \varphi^j \\ & & A \end{array}$$

(ii) Se $(B, \{\lambda^i\}_{i \in I})$ é um par, onde B é um objeto em $\mathcal{C}$ e $\lambda^i : A_i \rightarrow B$ é um morfismo para cada $i \in I$, tal que $\lambda^i = \lambda^j \circ \varphi_j^i$ para todo $j \geq i$, então existe um único morfismo $\lambda : A \rightarrow B$ que faz o diagrama abaixo comutar para todo $i \in I$.

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{\varphi^i} & A \\ & \searrow \lambda^i & \downarrow \lambda \\ & & B \end{array}$$

O objeto A definido acima é denotado $\varinjlim (A_i, \varphi_j^i)$ ou simplesmente $\varinjlim A_i$.

Exemplo 1.41 Sejam D uma C^* -álgebra e $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência crescente de sub- C^* -álgebras de D , isto é, $A_n \subseteq A_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja $A = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\iota^n : A_n \rightarrow A$ a inclusão. Sendo ι_n a inclusão de A_n em A_{n+1} , temos que o limite indutivo da seqüência (A_n, ι_n) é o par $\{A, \iota^n\}$.

O limite indutivo de um sistema indutivo nem sempre existe, o que depende da categoria com a qual se está trabalhando. Quando ele existe, porém, é único, no sentido da seguinte

Proposição 1.42 Se os pares $(A, \{\varphi^i\}_{i \in I})$ e $(B, \{\lambda^i\}_{i \in I})$ são limites indutivos do sistema (A_i, φ_j^i) , então A e B são isomorfos.

Demonstração: Pela condição (ii) da definição 1.40, existem únicos morfismos $\lambda : A \rightarrow B$ e $\varphi : B \rightarrow A$ que fazem os diagramas abaixo comutarem.

Aplicando a unicidade da definição 1.40 (ii) aos dois diagramas acima, temos que $\varphi \circ \lambda = Id_A$ e $\lambda \circ \varphi = Id_B$, o que mostra que φ e λ são isomorfismos. ■

As definições 1.39 e 1.40 foram dadas de maneira geral, podendo a categoria $\mathcal{C}$ ser de semi-grupos, grupos, álgebras, $*$ -álgebras, etc.

Vamos a partir de agora concentrar-nos no caso em que $\mathcal{C}$ é a categoria das C^* -álgebras.

Definição 1.43 *Seja $(A_i)_{i \in I}$ uma família de C^* -álgebras. O conjunto de todas as aplicações $a : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ tais que $a(i) \in A_i$, para todo $i \in I$ e $\sup\{\|a(i)\|_{A_i} : i \in I\} < \infty$, onde $\|\cdot\|_{A_i}$ é a norma da C^* -álgebra A_i , é chamado **produto** das C^* -álgebras $(A_i)_{i \in I}$ e denotado $\prod A_i$.*

Daqui para frente, passaremos a denotar $a(i)$ por a_i e $\|a(i)\|_{A_i}$ simplesmente por $\|a_i\|$.

Seja $a \in \prod A_i$. Podemos denotá-lo por $(a_i)_{i \in I}$ ou simplesmente por (a_i) . Vamos definir em $\prod A_i$ as operações de adição, multiplicação, multiplicação por escalar e involução aplicando as respectivas operações das C^* -álgebras A_i coordenada a coordenada.

Observação: Pode-se provar que o conjunto $\prod A_i$, munido das operações acima e da norma $\|a\| = \sup\{\|a(i)\|_{A_i} : i \in I\}$ para todo $a \in \prod A_i$, é uma C^* -álgebra, o que pode ser visto em 6.1.1 de [17]. Esta norma, porém, não será utilizada na obtenção do limite indutivo.

Vamos tomar agora o subconjunto de $\prod A_i$ dado por

$$A' = \{(a_i) \in \prod A_i / \exists k_o \in I : \forall i \in I, i \geq k_o \Rightarrow a_i = \varphi_i^{k_o}(a_{k_o})\}.$$

O conjunto A' é uma sub- $*$ -álgebra de $\prod A_i$. Se $a = (a_i), b = (b_i) \in A'$, então existem $k_a, k_b \in I$ tais que, para todo $i \geq k_a$ e $j \geq k_b$ temos que $a_i = \varphi_i^{k_a}(a_{k_a})$ e $b_j = \varphi_j^{k_b}(b_{k_b})$. Seja $k_o \in I$ tal que $k_o \geq k_a$ e $k_o \geq k_b$. Então, para todo $i \geq k_o$, temos

$$\begin{aligned} a_i b_i &= \varphi_i^{k_a}(a_{k_a}) \varphi_i^{k_b}(b_{k_b}) = \varphi_i^{k_o}(\varphi_{k_o}^{k_a}(a_{k_a})) \varphi_i^{k_o}(\varphi_{k_o}^{k_b}(b_{k_b})) \\ &= \varphi_i^{k_o}(a_{k_o}) \varphi_i^{k_o}(b_{k_o}) = \varphi_i^{k_o}(a_{k_o} b_{k_o}). \end{aligned}$$

Portanto, $((ab)_i) \in A'$.

Além disso, se $a_i = \varphi_i^{k_a}(a_{k_a})$, então $a_i^* = \varphi_i^{k_a}(a_{k_a}^*)$, ou seja, $(a_i^*) \in A'$.

Proposição 1.44 *A $*$ -álgebra A' admite uma C^* -semi-norma p dada por*

$$p((a_i)) = \limsup \{ \|\varphi_i^{k_o}(a_{k_o})\| : i \in I, i \geq k_o \},$$

onde k_o é tal que para todo $i \in I, i \geq k_o$ temos $a_i = \varphi_i^{k_o}(a_{k_o})$.

Demonstração: Vamos primeiramente mostrar que $p((a_i)) \in \mathbb{R}^+$ para todo $(a_i) \in A'$. Temos que

$$\begin{aligned} p((a_i)) &= \limsup \{ \|\varphi_i^{k_o}(a_{k_o})\| : i \in I, i \geq k_o \} \\ &= \inf_{i \geq k_o} \sup_{j \geq i} \{ \|\varphi_j^{k_o}(a_{k_o})\| \}. \end{aligned}$$

Mas $0 \leq \sup_{j \geq i} \{ \|\varphi_j^{k_o}(a_{k_o})\| \} < \infty$, pois $\|\varphi_j^{k_o}(a_{k_o})\| \leq \|a_{k_o}\|$, já que $\varphi_j^{k_o}$ é homomorfismo entre C^* -álgebras e $\|\varphi_j^{k_o}(a_{k_o})\| \geq 0$, para todo j .

Portanto, o conjunto $\{ \sup_{j \geq i} \{ \|\varphi_j^{k_o}(a_{k_o})\| \} : i \geq k_o \}$ possui ínfimo, que pertence a $\mathbb{R}^+$.

Além disso, p está bem definida. De fato, se $k_1, k_2 \in I$ são tais que para todo $i \geq k_1$ e $j \geq k_2$ temos $a_i = \varphi_i^{k_1}(a_{k_1})$ e $a_j = \varphi_j^{k_2}(a_{k_2})$, basta tomarmos $k_o \in I, k_o \geq k_1, k_o \geq k_2$ e teremos

$$\limsup_{i \geq k_1} \|\varphi_i^{k_1}(a_{k_1})\| = \limsup_{i \geq k_o} \|\varphi_i^{k_o}(a_{k_o})\| = \limsup_{i \geq k_2} \|\varphi_i^{k_2}(a_{k_2})\|.$$

Temos ainda que p é C^* -semi-norma. Já vimos que $p((a_i)) \in \mathbb{R}^+$, para todo $(a_i) \in A'$.

Sejam $(a_i), (b_i) \in A'$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então,

$$\begin{aligned} p(\lambda(a_i)) &= \limsup_{i \geq k_o} \|\varphi_i^{k_o}(\lambda a_{k_o})\| = \limsup_{i \geq k_o} \|\lambda \varphi_i^{k_o}(a_{k_o})\| \\ &= \limsup_{i \geq k_o} |\lambda| \|\varphi_i^{k_o}(a_{k_o})\| = |\lambda| \limsup_{i \geq k_o} \|\varphi_i^{k_o}(a_{k_o})\| \\ &= |\lambda| p((a_i)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p((a_i) + (b_i)) &= \limsup_{i \geq k_o} \|\varphi_i^{k_o}(a_{k_o} + b_{k_o})\| \\
&= \limsup_{i \geq k_o} \|\varphi_i^{k_o}(a_{k_o}) + \varphi_i^{k_o}(b_{k_o})\| \\
&\leq \limsup_{i \geq k_o} \|\varphi_i^{k_o}(a_{k_o})\| + \|\varphi_i^{k_o}(b_{k_o})\| \\
&= \limsup_{i \geq k_o} \|\varphi_i^{k_o}(a_{k_o})\| + \limsup_{i \geq k_o} \|\varphi_i^{k_o}(b_{k_o})\| \\
&= p((a_i)) + p((b_i)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p((a_i)(b_i)) &= \limsup_{i \geq k_o} \|\varphi_i^{k_o}(a_{k_o}b_{k_o})\| \\
&= \limsup_{i \geq k_o} \|\varphi_i^{k_o}(a_{k_o})\varphi_i^{k_o}(b_{k_o})\| \\
&\leq \limsup_{i \geq k_o} \|\varphi_i^{k_o}(a_{k_o})\| \|\varphi_i^{k_o}(b_{k_o})\| \\
&= \limsup_{i \geq k_o} \|\varphi_i^{k_o}(a_{k_o})\| \limsup_{i \geq k_o} \|\varphi_i^{k_o}(b_{k_o})\| \\
&= p((a_i))p((b_i)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p((a_i)^*) &= \limsup_{i \geq k_o} \|\varphi_i^{k_o}(a_{k_o}^*)\| = \limsup_{i \geq k_o} \|\varphi_i^{k_o}(a_{k_o})^*\| \\
&= \limsup_{i \geq k_o} \|\varphi_i^{k_o}(a_{k_o})\| = p((a_i)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p((a_i)^*(a_i)) &= \limsup_{i \geq k_o} \|\varphi_i^{k_o}(a_{k_o}^*a_{k_o})\| \\
&= \limsup_{i \geq k_o} \|\varphi_i^{k_o}(a_{k_o})^*\varphi_i^{k_o}(a_{k_o})\| \\
&= \limsup_{i \geq k_o} \|\varphi_i^{k_o}(a_{k_o})\|^2 = (\limsup_{i \geq k_o} \|\varphi_i^{k_o}(a_{k_o})\|)^2 \\
&= p((a_i))^2.
\end{aligned}$$

■

Teorema 1.45 *Seja A a C^* -álgebra obtida a partir do par (A', p) , conforme a construção descrita nas proposições 1.34 e 1.35. Então, $A = \varinjlim A_i$. Além disso, o conjunto $\bigcup_{i \in I} \varphi^i(A_i)$ é denso em A , onde φ^i são os homomorfismos naturais da definição 1.40.*

Demonstração: Devemos construir $*$ -homomorfismos $\varphi^i : A_i \rightarrow A$, para cada $i \in I$, que satisfaçam as condições (i) e (ii) da definição 1.40.

Vamos definir, para todo $i \in I$ a aplicação

$$\hat{\varphi}^i : A_i \rightarrow A' \quad x \mapsto (a_k)_{k \in I}, \text{ onde } a_k = \begin{cases} \varphi_k^i(x), & \text{se } k \geq i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

A aplicação nula entre duas C^* -álgebras é $*$ -homomorfismo, assim como as aplicações φ_j^i , para todo $j \geq i$. Como as operações em A' são definidas coordenada a coordenada, segue que $\hat{\varphi}^i$ é $*$ -homomorfismo.

Sendo $\pi : A' \rightarrow A$ a projeção canônica, consideremos ainda, para todo $i \in I$, a aplicação $\varphi^i = \pi \circ \hat{\varphi}^i$. Como $\hat{\varphi}^i$ é $*$ -homomorfismo, segue que φ^i também o é.

Vamos mostrar que φ^i satisfaz a condição (i) da definição 1.40, ou seja, se $i \leq j$, o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{\varphi_j^i} & A_j \\ & \searrow \varphi^i & \downarrow \varphi^j \\ & & A \end{array}$$

Sendo $x \in A_i$, fazamos $(\hat{\varphi}^j \circ \varphi_j^i)(x) = (a_k)_{k \in I}$ e $\hat{\varphi}^i(x) = (b_k)_{k \in I}$. Seja $k \geq j \geq i$. Então, $a_k = \varphi_k^j(\varphi_j^i(x)) = \varphi_k^i(x)$ e $b_k = \varphi_k^i(x)$.

Como $a_k = b_k$ para todo $k \geq j$, temos $\limsup_{k \geq j} \|a_k\| = \limsup_{k \geq j} \|b_k\|$ e, portanto, $\pi((a_k)_{k \in I}) = \pi((b_k)_{k \in I})$.

Em outras palavras, $(\pi \circ (\hat{\varphi}^j \circ \varphi_j^i))(x) = (\pi \circ \hat{\varphi}^i)(x)$ para todo $x \in A_i$, isto é, $\varphi^j \circ \varphi_j^i = \varphi^i$.

Vamos mostrar a segunda afirmação deste teorema antes de provar que A satisfaz a condição (ii) da definição 1.40.

Sejam $(a_i)_{i \in I} \in A'$ e $\pi((a_i)_{i \in I}) \in A'/\mathcal{N} \subseteq A$. Então, existe $k_o \in I$ tal que, para todo $j \geq k_o$, temos $a_j = \varphi_j^{k_o}(a_{k_o})$, sendo $a_{k_o} \in A_{k_o}$.

Observando que $(\hat{\varphi}^{k_o}(a_{k_o}))_j = a_j$ para todo $j \geq k_o$, podemos concluir que $\varphi^{k_o}(a_{k_o}) = \pi(\hat{\varphi}^{k_o}(a_{k_o})) = \pi((a_i)_{i \in I})$. Portanto, $A'/\mathcal{N} \subseteq \bigcup_{i \in I} \varphi^i(A_i)$.

Como $A'/\mathcal{N}$ é denso em A , concluímos que o conjunto $\bigcup_{i \in I} \varphi^i(A_i)$ é denso em A .

Voltando à condição (ii) da definição 1.40, sejam B uma C^* -álgebra e $\lambda^i : A_i \rightarrow B$ $*$ -homomorfismos para cada $i \in I$, tais que $\lambda^i = \lambda^j \circ \varphi_j^i$, para todo $j \geq i$.

Queremos mostrar que existe um único $*$ -homomorfismo $\lambda : A \rightarrow B$ tal que $\lambda^i = \lambda \circ \varphi^i$, para todo $i \in I$.

Vamos definir inicialmente $\lambda : \bigcup_{i \in I} \varphi^i(A_i) \rightarrow B$ pela lei

$$\lambda(\varphi^i(a)) = \lambda^i(a),$$

onde $a \in A_i$. Posteriormente, estenderemos λ a todo A .

A aplicação λ está bem definida. De fato, suponhamos que $a \in A_i, b \in A_j$ e $\varphi^i(a) = \varphi^j(b)$. Sendo $k_o \in I, k_o \geq i, k_o \geq j$, temos que, se $\varphi^i(a) = \varphi^j(b)$, então $\varphi^{k_o}(\varphi_{k_o}^i(a) - \varphi_{k_o}^j(b)) = 0$. Daí,

$$\begin{aligned} 0 &= \|\varphi^{k_o}(\varphi_{k_o}^i(a) - \varphi_{k_o}^j(b))\| = \limsup_{k \geq k_o} \{\|\varphi_k^{k_o}(\varphi_{k_o}^i(a) - \varphi_{k_o}^j(b))\|\} \\ &= \limsup_{k \geq k_o} \{\|\varphi_k^i(a) - \varphi_k^j(b)\|\}. \end{aligned}$$

Logo, existe $k_1 \in I$ tal que $\|\varphi_k^i(a) - \varphi_k^j(b)\| < \varepsilon$, para todo $k \geq k_1$. Então, se $k \geq k_1$,

$$\begin{aligned} \|\lambda^i(a) - \lambda^j(b)\| &= \|\lambda^k(\varphi_k^i(a)) - \lambda^k(\varphi_k^j(b))\| = \|\lambda^k(\varphi_k^i(a) - \varphi_k^j(b))\| \\ &\leq \underbrace{\|\lambda^k\|}_{\leq 1} \|\varphi_k^i(a) - \varphi_k^j(b)\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, se $\varphi^i(a) = \varphi^j(b)$, então $\lambda^i(a) = \lambda^j(b)$ e λ está bem definida.

Além disso, λ é $*$ -homomorfismo. De fato, sejam $a \in A_i$ e $b \in A_j$. Vamos tomar $k \in I, k \geq i, k \geq j$. Então,

$$\begin{aligned} \lambda(\varphi^i(a)^*) &= \lambda(\varphi^i(a^*)) = \lambda^i(a^*) = \lambda^i(a)^* = \lambda(\varphi^i(a))^* \text{ e} \\ \lambda(\varphi^i(a) \varphi^j(b)) &= \lambda(\varphi^k(\varphi_k^i(a) \varphi_k^j(b))) = \lambda^k(\varphi_k^i(a) \varphi_k^j(b)) \\ &= \lambda^k(\varphi_k^i(a)) \lambda^k(\varphi_k^j(b)) = \lambda^i(a) \lambda^j(b) \\ &= \lambda(\varphi^i(a)) \lambda(\varphi^j(b)). \end{aligned}$$

De maneira análoga, mostramos que λ é linear.

Da sua própria definição, λ satisfaz a condição $\lambda^i = \lambda \circ \varphi^i$, para todo $i \in I$. Assim, resta mostrar que λ pode ser estendida de forma única para todo A .

Como $\bigcup_{i \in I} \varphi^i(A_i)$ é denso em A , basta mostrarmos que λ é contínua para estendê-la para A . Provaremos que $\|\lambda\| \leq 1$. Sendo $k \geq i$, temos

$$\|\lambda^i(a)\| = \|\lambda^k(\varphi_k^i(a))\| \leq \|\varphi_k^i(a)\| \leq \limsup_{k \geq i} \|\varphi_k^i(a)\| = \|\varphi^i(a)\|_A.$$

Mas $\|\lambda(\varphi^i(a))\| = \|\lambda^i(a)\| \leq \|\varphi^i(a)\|$. Logo, $\|\lambda\| \leq 1$.

Finalmente, da densidade de $\bigcup_{i \in I} \varphi^i(A_i)$ em A , concluímos que λ pode ser estendido de maneira única a um $*$ -homomorfismo de A em B . ■

Proposição 1.46 *Seja $(A, \{\varphi^i\}_{i \in I})$ o limite indutivo do sistema (A_i, φ_j^i)*

de C^* -álgebras. Se φ_j^i é injetivo para todo $i, j \in I, j \geq i$, então φ^i é $*$ -homomorfismo injetivo, para todo $i \in I$.

Demonstração: Vamos trabalhar, para todo $i \in I$, com os $*$ -homomorfismos $\hat{\varphi}^i$ e φ^i definidos no teorema 1.45.

Sendo $\pi : A' \rightarrow A$ a projeção canônica, temos que $\varphi^i = \pi \circ \hat{\varphi}^i$. Seja $x \in A_i$ e suponhamos que $\varphi^i(x) = 0$. Então, $(\pi \circ \hat{\varphi}^i)(x) = [\hat{\varphi}^i(x)] = 0$, isto é, $\|[\hat{\varphi}^i(x)]\| = p(\hat{\varphi}^i(x)) = 0$. Temos que

$$\begin{aligned} p(\hat{\varphi}^i(x)) &= \limsup \{ \|\varphi_k^i((\hat{\varphi}^i(x))_i)\| : k \in I, k \geq i \} \\ &= \limsup \{ \|\varphi_k^i(x)\| : k \in I, k \geq i \} = 0. \end{aligned}$$

Pelo teorema 1.16, temos que todo $*$ -homomorfismo injetivo entre C^* -álgebras é necessariamente isométrico. Daí, como cada φ_k^i é injetivo, segue que $\|\varphi_k^i(x)\| = \|x\|$ e, portanto,

$$0 = \limsup \{ \|\varphi_k^i(x)\| : k \in I, k \geq i \} = \|x\|, \text{ ou seja, } \varphi^i \text{ é injetivo.}$$

■

1.5 O produto cruzado discreto

Nesta seção, obteremos os principais resultados relativos ao produto cruzado clássico, que serão utilizados na construção do produto cruzado por endomorfismos. Algumas particularizações serão admitidas já na primeira definição, já que neste trabalho só nos interessam as C^* -álgebras com unidade e os grupos discretos. Para uma abordagem mais geral, sugerimos [5] e [4] como referência.

Definição 1.47 A terna (A, G, α) é chamada C^* -sistema dinâmico clássico se:

- A é uma C^* -álgebra com unidade 1_A .
- G é um grupo munido da topologia discreta.
- α é um homomorfismo contínuo de G no grupo dos automorfismos de A , denotado $\text{Aut}(A)$.

Observações: 1. O homomorfismo α é contínuo no seguinte sentido: para cada $a \in A$, a aplicação $\alpha(a) : G \rightarrow A$ dada por $g \mapsto \alpha_g(a)$ é contínua. Assim, a continuidade de α decorre imediatamente do fato de G ser um grupo discreto.

2. O termo “clássico” está sendo utilizado neste trabalho para diferenciar o C^* -sistema dinâmico definido acima do C^* -sistema dinâmico utilizado na construção do produto cruzado por endomorfismos.

Definição 1.48 *Sejam C e D espaços vetoriais topológicos. O **suporte** de uma função $f : C \rightarrow D$ é o fecho do conjunto $\{x \in C : f(x) \neq 0\}$.*

Se G é um grupo topológico e A é uma C^ -álgebra, denotamos por $k(G, A)$ o espaço vetorial das funções contínuas de suporte compacto. Se G é discreto, $k(G, A)$ é o conjunto das funções de G em A de suporte finito.*

A demonstração da proposição enunciada a seguir é simples no caso em que G é discreto, não sendo feita neste trabalho. A versão mais geral pode ser encontrada em 3.3 de [5].

Proposição 1.49 *Seja (A, G, α) um C^* -sistema dinâmico clássico. Vamos definir em $k(G, A)$ uma multiplicação, uma involução e uma norma dadas respectivamente por*

$$(x \times y)(h) = \sum_{g \in G} x(g) \alpha_g(y(g^{-1}h)),$$

$$x^*(h) = \alpha_h(x(h^{-1})^*) \text{ e}$$

$$\|x\|_1 = \sum_{g \in G} \|x(g)\|,$$

para todo $x, y \in k(G, A)$ e $h \in G$.

Então, o conjunto $k(G, A)$ munido destas operações é uma $*$ -álgebra normada.

Definição 1.50 *O completamento de $k(G, A)$ pela $\|\cdot\|_1$ definida na proposição 1.49 é denotado $\ell_1(G, A)$. Segue imediatamente que $\ell_1(G, A)$ é uma $*$ -álgebra de Banach.*

Vamos denotar o elemento neutro do grupo G por e .

No caso que estamos estudando, em que A é C^* -álgebra com unidade e G é um grupo discreto, pode-se mostrar que o elemento $\delta_e \in \ell_1(G, A)$ dado por $\delta_e(g) = \begin{cases} 1_A, & \text{se } g = e \\ 0, & \text{se } g \neq e \end{cases}$ é a unidade de $\ell_1(G, A)$.

Utilizaremos também ao longo deste trabalho os elementos $\delta_g \in \ell_1(G, A)$ dados por $\delta_g(h) = \begin{cases} 1_A, & \text{se } h = g \\ 0, & \text{se } h \neq g \end{cases}$. Observemos ainda que, se $g, h \in G$,

$$(\delta_g \times \delta_h)(k) = \sum_{j \in G} \delta_g(j) \alpha_j(\delta_h(j^{-1}k)) = \begin{cases} 1_A, & \text{se } k = gh \\ 0, & \text{se } k \neq gh \end{cases}.$$

Logo, $\delta_g \times \delta_h = \delta_{gh}$.

Além disso, é fácil ver que $\delta_g^* = \delta_{g^{-1}}$.

Analogamente à definição 1.19, uma representação unitária de um grupo discreto G é um homomorfismo $U : G \rightarrow \mathcal{U}(H)$, onde H é espaço de Hilbert. Assim, temos que $U_g^* = U_g^{-1} = U_{g^{-1}}$, para todo $g \in G$.

Definição 1.51 *Sejam (A, G, α) C^* -sistema dinâmico clássico e H espaço de Hilbert. A terna (H, φ, U) é chamada **representação covariante** do C^* -sistema dinâmico clássico (A, G, α) se*

- (H, φ) é representação de A tal que φ preserva unidade.
- (H, U) é representação unitária de G , tal que

$$U_g \varphi(a) U_g^* = \varphi(\alpha_g(a)), \quad (1.1)$$

para todo $g \in G$ e $a \in A$.

O teorema a seguir nos dará condições de definir o produto cruzado discreto, além de nos fornecer informações sobre suas representações não degeneradas.

Teorema 1.52 *Seja (H, φ, U) representação covariante do C^* -sistema dinâmico clássico (A, G, α) . Então, existe uma representação não degenerada $(H, \varphi \times U)$ de $\ell_1(G, A)$ tal que*

$$(\varphi \times U)(x) = \sum_{g \in G} \varphi(x(g)) U_g, \quad (1.2)$$

para todo $x \in k(G, A)$. Além disso, podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre as representações covariantes (H, φ, U) e as representações não degeneradas $(H, \varphi \times U)$ de $\ell_1(G, A)$.

Demonstração: Vamos inicialmente provar que $(H, \varphi \times U)$ dada por (1.2) é, de fato, representação de $\ell_1(G, A)$.

Seja $x \in k(G, A)$. É fácil ver que $(\varphi \times U)(x)$ é uma aplicação linear. Além disso, temos que

$$\begin{aligned} \|(\varphi \times U)(x)\| &= \left\| \sum_{g \in G} \varphi(x(g)) U_g \right\| \leq \sum_{g \in G} \|\varphi(x(g)) U_g\| \\ &\leq \sum_{g \in G} \|\varphi(x(g))\| \underbrace{\|U_g\|}_{=1} \leq \sum_{g \in G} \|x(g)\| = \|x\|_1. \end{aligned}$$

Como $\|(\varphi \times U)(x)\| \leq \|x\|_1$, concluímos que $(\varphi \times U)(x) \in \mathcal{B}(H)$.

Temos ainda que $k(G, A)$ é denso em $\ell_1(G, A)$. Então, podemos estender $(\varphi \times U)$ continuamente a todo $\ell_1(G, A)$.

Resta mostrarmos que $(\varphi \times U) : \ell_1(G, A) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ é $*$ -homomorfismo. Basta fazermos isso para elementos de $k(G, A)$, já que este conjunto é denso em $\ell_1(G, A)$. Assim, sendo $x, y \in k(G, A)$, temos que

$$\begin{aligned} (\varphi \times U)(x \times y) &= \sum_{g \in G} \varphi((x \times y)(g)) U_g \\ &= \sum_{g \in G} \varphi \left(\sum_{h \in G} x(h) \alpha_h(y(h^{-1}g)) \right) U_g \\ &= \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} [\varphi(x(h)) \varphi(\alpha_h(y(h^{-1}g)))] U_g \\ &\stackrel{(1.1)}{=} \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} [\varphi(x(h)) U_h \varphi(y(h^{-1}g)) U_h^* U_g] \\ &= \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} [\varphi(x(h)) U_h \varphi(y(h^{-1}g)) U_{h^{-1}g}] \\ &\stackrel{(r=h^{-1}g)}{=} \sum_{r \in G} \left[\sum_{h \in G} \varphi(x(h)) U_h \right] \varphi(y(r)) U_r \\ &= \sum_{r \in G} [(\varphi \times U)(x)] \varphi(y(r)) U_r \\ &= (\varphi \times U)(x) \circ (\varphi \times U)(y). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
(\varphi \times U)(x^*) &= \sum_{g \in G} \varphi(x^*(g)) U_g = \sum_{g \in G} \varphi(\alpha_g(x(g^{-1}))^*) U_g \\
&\stackrel{(1.1)}{=} \sum_{g \in G} U_g \varphi(x(g^{-1})^*) U_g^* U_g \stackrel{(r=g^{-1})}{=} \sum_{r \in G} U_{r^{-1}} \varphi(x(r))^* \\
&= \sum_{r \in G} U_r^* \varphi(x(r))^* = (\varphi \times U)(x)^*.
\end{aligned}$$

Temos, assim, que $(H, \varphi \times U)$ é representação de $\ell_1(G, A)$. Além disso,

$$(\varphi \times U)(\delta_e) = \sum_{g \in G} \varphi(\delta_e(g)) U_g = \varphi(1_A) U_e = Id_H.$$

Assim, $\varphi \times U$ preserva unidade. Da proposição 1.22, $(H, \varphi \times U)$ é não degenerada.

Já mostramos que, para cada representação covariante (H, φ, U) , existe uma representação não degenerada $(H, \varphi \times U)$ de $\ell_1(G, A)$. Reciprocamente, consideremos uma representação não degenerada (H, ρ) de $\ell_1(G, A)$. Vamos definir as aplicações

$$\varphi : A \rightarrow \mathcal{B}(H) \text{ dada por } a \mapsto \varphi(a) = \rho(a \delta_e) \text{ e}$$

$$U : G \rightarrow \mathcal{B}(H) \text{ dada por } g \mapsto U_g = \rho(\delta_g).$$

Vamos mostrar que (H, φ, U) é representação covariante do C^* -sistema dinâmico (A, G, α) . Sendo $a, b \in A$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, temos que

$$\triangleright \varphi(a + \alpha b) = \rho((a + \alpha b) \delta_e) = \rho(a \delta_e) + \alpha \rho(b \delta_e) = \varphi(a) + \alpha \varphi(b).$$

$$\triangleright \varphi(ab) = \rho(ab \delta_e) = \rho(a \delta_e b \delta_e) = \rho(a \delta_e) \rho(b \delta_e) = \varphi(a) \varphi(b).$$

$$\triangleright \varphi(a^*) = \rho(a^* \delta_e) = \rho((a \delta_e)^*) = \rho(a \delta_e)^* = \varphi(a)^*.$$

Logo, (H, φ) é representação de A . Além disso, se $g, h \in G$,

$$\triangleright U_{gh} = \rho(\delta_{gh}) = \rho(\delta_g \times \delta_h) = \rho(\delta_g) \rho(\delta_h) = U_g U_h.$$

$$\triangleright U_{g^{-1}} = \rho(\delta_{g^{-1}}) = \rho(\delta_g^*) = \rho(\delta_g)^* = U_g^*.$$

$\triangleright U_g U_g^* = \rho(\delta_g) \rho(\delta_{g^{-1}}) = \rho(\delta_g \times \delta_{g^{-1}}) = \rho(\delta_e)$. Como a representação ρ é não degenerada, da proposição 1.22 temos que $\rho(\delta_e) = Id_H$.

Analogamente, temos $U_g^* U_g = Id_H$ e, portanto, (H, U) é representação unitária de G .

Resta mostrarmos que a terna (H, φ, U) satisfaz (1.1). Para isso, vejamos inicialmente que, se $g, h \in G$ e $a \in A$,

$$\begin{aligned}
(\delta_g \times a \delta_e)(h) &= \sum_{k \in G} \delta_g(k) \alpha_k(a \delta_e(k^{-1}h)) = \alpha_g(a \delta_e(g^{-1}h)) \\
&= \begin{cases} \alpha_g(a), & \text{se } h = g \\ 0, & \text{se } h \neq g \end{cases},
\end{aligned}$$

ou seja, $\delta_g \times a \delta_e = \alpha_g(a) \delta_g$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
U_g \varphi(a) U_g^* &= \rho(\delta_g) \rho(a \delta_e) \rho(\delta_{g^{-1}}) = \rho(\delta_g \times a \delta_e \times \delta_{g^{-1}}) \\
&= \rho(\alpha_g(a) \delta_g \times \delta_{g^{-1}}) = \rho(\alpha_g(a) \delta_e) \\
&= \varphi(\alpha_g(a)).
\end{aligned}$$

Portanto, (H, φ, U) é representação covariante de (A, G, α) .

Podemos observar ainda que $\rho = \varphi \times U$, conforme definido em (1.2). Se $x \in \ell_1(G, A)$, temos que

$$\begin{aligned}
(\varphi \times U)(x) &= \sum_{g \in G} \varphi(x(g)) U_g = \sum_{g \in G} \rho(x(g) \delta_e) \rho(\delta_g) \\
&= \sum_{g \in G} \rho(x(g) \delta_e \times \delta_g) = \rho \left(\sum_{g \in G} x(g) \delta_g \right) = \rho(x).
\end{aligned}$$

■

Observação: Sejam (A, G, α) C^* -sistema dinâmico clássico e (H, φ) representação de A . Então, podemos construir uma representação covariante $(\tilde{\varphi}, \lambda, \ell_2(G, H))$ de (A, G, α) definindo, para todo $a \in A$, $g, h \in G$ e $x \in \ell_2(G, H)$,

$$\begin{aligned}
(\tilde{\varphi}(a)x)(h) &= \varphi(\alpha_{h^{-1}}(a))(x(h)) \text{ e} \\
(\lambda_g x)(h) &= x(g^{-1}h).
\end{aligned}$$

Então, pelo teorema 1.52, temos que existe uma representação não degenerada $(\tilde{\varphi} \times \lambda, \ell_2(G, H))$ de $\ell_1(G, A)$, que é denominada **representação regular**.

Com isso, garantimos que o conjunto R de todas as representações (H, φ) de $\ell_1(G, A)$ não é vazio.

Definição 1.53 O **produto cruzado** relativo ao C^* -sistema dinâmico clássico (A, G, α) , denotado $A \rtimes_\alpha G$, é definido como sendo $C^*(\ell_1(G, A))$, ou seja, a C^* -álgebra envolvente de $\ell_1(G, A)$.

Teorema 1.54 Se (A, G, α) é um C^* -sistema dinâmico clássico, então existe uma representação covariante (H, φ, U) de (A, G, α) tal que:

- (1) (H, φ) é representação fiel de A .
(2) $A \rtimes_\alpha G$ é isometricamente isomorfo a

$$\overline{\text{span}\{\varphi(a) U_g : a \in A \text{ e } g \in G\}}.$$

Demonstração: Pelo teorema 1.28, podemos tomar uma representação fiel (H, ρ) da C^* -álgebra $A \rtimes_\alpha G$. Segue ainda que (H, ρ) é não degenerada.

Daí, pelo teorema 1.52, existe uma representação covariante (H, φ, U) do C^* -sistema dinâmico clássico (A, G, α) , sendo

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= \rho(a \delta_e), \text{ para todo } a \in A \text{ e} \\ U_g &= \rho(\delta_g), \text{ para todo } g \in G.\end{aligned}$$

Sendo $a \in A$, suponhamos que $\varphi(a) = 0$, ou seja, $\rho(a \delta_e) = 0$. Como ρ é fiel, temos $a \delta_e = 0$ e, portanto, $a = 0$, o que prova (1).

Vamos denotar por $C^* \langle \varphi(A) U_G \rangle \subseteq \mathcal{B}(H)$ a menor C^* -álgebra que contém o conjunto $\{\varphi(a) U_g : a \in A \text{ e } g \in G\}$. É importante observar que $C^* \langle \varphi(A) U_G \rangle = \overline{\text{span}\{\varphi(a) U_g : a \in A \text{ e } g \in G\}}$.

Nosso objetivo é mostrar que $A \rtimes_\alpha G \simeq C^* \langle \varphi(A) U_G \rangle$. Como ρ é fiel, basta provarmos que $C^* \langle \varphi(A) U_G \rangle$ é igual à imagem de $A \rtimes_\alpha G$ por ρ . Se $a \in A$ e $g \in G$, então

$$\varphi(a) U_g = \rho(a \delta_e) \rho(\delta_g) = \rho(a \delta_e \times \delta_g) = \rho(a \delta_g).$$

Então, cada gerador de $C^* \langle \varphi(A) U_G \rangle$ pertence a $\rho(A \rtimes_\alpha G)$, que é um espaço vetorial fechado. Assim, $C^* \langle \varphi(A) U_G \rangle \subseteq \rho(A \rtimes_\alpha G)$.

Para mostrarmos a inclusão contrária, vamos inicialmente provar que $\overline{k(G, A)}^{\|\cdot\|} = A \rtimes_\alpha G$, onde $\|\cdot\|$ é a norma definida na proposição 1.36.

Dado $\varepsilon > 0$, se $x \in A \rtimes_\alpha G$, então existe $y \in \ell_1(G, A)$ tal que $\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Além disso, para todo $y \in \ell_1(G, A)$, existe $z \in k(G, A)$ tal que $\|y - z\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Mas se (H, π) é representação de $\ell_1(G, A)$, então $\|\pi(y - z)\| \leq \|y - z\|_1$. Como $\|y - z\| = \sup_{(H, \pi) \in R} \|\pi(y - z)\|$, concluímos que $\|y - z\| \leq \|y - z\|_1$.

Temos, assim, que

$$\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ou seja, $k(G, A)$ é denso em $A \rtimes_\alpha G$.

Seja, então, $x \in k(G, A)$, com $x = \sum_{i \in F} a_{g_i} \delta_{g_i}$, onde F é um conjunto finito, $g_i \in G$ e $a_{g_i} \in A$. Então,

$$\rho(x) = \rho\left(\sum_{i \in F} a_{g_i} \delta_{g_i}\right) = \sum_{i \in F} \rho(a_{g_i} \delta_e) \rho(\delta_{g_i}) = \sum_{i \in F} \varphi(a_{g_i}) U_{g_i},$$

ou seja, $\rho(x) \in C^* \langle \varphi(A) U_G \rangle$. Da densidade de $k(G, A)$ em $A \rtimes_\alpha G$, podemos concluir que $\rho(A \rtimes_\alpha G) \subseteq C^* \langle \varphi(A) U_G \rangle$, o que prova (2). ■

Observação: Como a representação (H, φ) construída no teorema acima é fiel, podemos, identificando a com $\varphi(a)$, escrever que

$$A \rtimes_\alpha G \simeq \overline{\text{span}\{a U_g : a \in A \text{ e } g \in G\}}.$$

Capítulo 2

Construção do Produto Cruzado por Endomorfismos

O objetivo deste capítulo é descrever a construção do produto cruzado por endomorfismos, demonstrando suas principais propriedades.

Tal construção segue a mesma linha daquela realizada por Murphy em [15]. Nesse artigo, porém, considera-se o produto cruzado torcido, enquanto neste trabalho optamos por não considerar qualquer torção.

Também fazemos a demonstração de um importante resultado obtido por Laca e Reaburn em [10], que foi utilizado por Murphy, adaptando-o ao contexto de nosso trabalho.

Analogamente ao caso do produto cruzado clássico, iniciaremos a construção com o conceito de C^* -sistema dinâmico.

Definição 2.1 *A terna (A, M, α) é chamada C^* -sistema dinâmico não clássico se:*

- *A é uma C^* -álgebra com unidade.*
- *$(M, +)$ é um semi-grupo abeliano cancelativo com elemento neutro.*
- *$\alpha : x \mapsto \alpha_x$ é um homomorfismo de M no semi-grupo dos endomorfismos injetores de A , denotado $\text{End}(A)$.*

Observações: 1. Daqui para frente, usaremos a expressão “semi-grupo” para designar um semi-grupo abeliano cancelativo com elemento neutro. Como M é abeliano, denotaremos a operação binária por $+$ e o elemento neutro por 0 .

2. Se M é um grupo, então todo α_x é necessariamente um automorfismo. Nesse caso, a tripla (A, M, α) é um C^* -sistema dinâmico clássico.

Seja (A, M, α) um C^* -sistema dinâmico não clássico. Vamos definir uma pré-ordem sobre M :

$$x \leq y \text{ se } y = x + z, \text{ para algum } z \in M.$$

Como o semi-grupo M é cancelativo, o elemento z é único. De fato, se $z' \in M$ é tal que $y = x + z'$, então $x + z = x + z'$, ou seja, $z = z'$.

Notemos que a relação $\leq$ é

- reflexiva: $x \leq x$ pois $x = x + 0$.
- transitiva: se $x \leq y$ e $y \leq t$, então $y = x + z_1$ e $t = y + z_2$, com $z_1, z_2 \in M$. Assim, $t = x + z_1 + z_2$, ou seja, $x \leq t$.

Observemos ainda que, dados $x, y \in M$, existe $z \in M$ tal que $x \leq z$ e $y \leq z$. De fato, basta tomarmos $z = x + y$. Portanto, a relação $\leq$ faz de M um conjunto dirigido.

Seja $A_x = A$, para todo $x \in M$. Se $x \leq y$, denotemos por α_y^x o endomorfismo α_z de A , onde $y = x + z$. E escrevemos ainda que $\alpha_y^x : A_x \rightarrow A_y$.

Se $x, y, t \in M$, com $x \leq y \leq t$, então $\alpha_t^y \circ \alpha_y^x = \alpha_t^x$, ou seja, o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} A_x & \xrightarrow{\alpha_y^x} & A_y \\ & \searrow \alpha_t^x & \downarrow \alpha_t^y \\ & & A_t \end{array}$$

De fato, como $x \leq y \leq t$, temos que $y = x + z_1$ e $t = y + z_2$, com $z_1, z_2 \in M$, ou seja, $t = x + z_1 + z_2$. Daí,

$$\alpha_t^x = \alpha_{z_2+z_1} = \alpha_{z_2} \circ \alpha_{z_1} = \alpha_t^y \circ \alpha_y^x.$$

Observemos também que $\alpha_x^x = \alpha_o = Id_{A_x}$.

De acordo com a definição 1.39 e pelo que vimos acima, podemos considerar o sistema indutivo $(A_x, \alpha_y^x)_{x \in M}$. Assim, denotaremos por B a C^* -álgebra que é o limite indutivo desse sistema, ou seja, $B = \varinjlim (A_x, \alpha_y^x)$.

Seja α^x o homomorfismo natural de A_x em B , para cada $x \in M$.

Proposição 2.2 *Seja (A, M, α) um C^* -sistema dinâmico não clássico. Se z é um elemento fixo de M , então existe um único endomorfismo β_z de B tal que, para todo $x \in M$, o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{array}{ccc} A_x & \xrightarrow{\alpha^x} & B \\ \alpha_z \downarrow & & \downarrow \beta_z \\ A_x & \xrightarrow{\alpha^x} & B \end{array}$$

Além disso, $\beta_z \circ \beta_t = \beta_{z+t}$, para todo $z, t \in M$.

Demonstração: Seja $z \in M$. Vamos primeiro observar que, para todo $x, y \in M$ com $x \leq y$, o diagrama seguinte comuta:

$$\begin{array}{ccc} A_x & \xrightarrow{\alpha_y^x} & A_y \\ \alpha_z \downarrow & & \downarrow \alpha_z \\ A_x & \xrightarrow{\alpha_y^x} & A_y \end{array}$$

De fato, sendo $y = x + w$, com $w \in M$, a comutatividade do diagrama acima é equivalente à igualdade $\alpha_z \circ \alpha_w^x = \alpha_w \circ \alpha_z$, que decorre do fato do semi-grupo M ser abeliano.

Vamos definir a aplicação $\lambda_x : A_x \rightarrow B$ como $\lambda_x = \alpha^x \circ \alpha_z$. Temos que

$$\lambda_y \circ \alpha_y^x = \alpha^y \circ \alpha_z \circ \alpha_y^x = \alpha^y \circ \alpha_y^x \circ \alpha_z = \alpha^x \circ \alpha_z = \lambda_x.$$

Então, o sistema (B, λ_x) satisfaz a condição (ii) da definição 1.40 e, portanto, existe um único endomorfismo $\lambda : B \rightarrow B$ tal que o diagrama abaixo

comuta, para todo $x \in M$:

Como o resultado acima vale para cada $z \in M$ fixado, podemos definir $\beta_z = \lambda : B \rightarrow B$. Temos ainda, da comutatividade do diagrama acima, que

$$\beta_z \circ \alpha^x = \lambda_x = \alpha^x \circ \alpha_z. \quad (2.1)$$

Sejam $z, t \in M$. De (2.1), temos que $\alpha^x \circ \alpha_{z+t} = \beta_{z+t} \circ \alpha^x$, ou seja, $\alpha^x \circ \alpha_z \circ \alpha_t = \beta_{z+t} \circ \alpha^x$.

Aplicando novamente (2.1), obtemos que $\beta_z \circ \alpha^x \circ \alpha_t = \beta_{z+t} \circ \alpha^x$ e então que $\beta_z \circ \beta_t \circ \alpha^x = \beta_{z+t} \circ \alpha^x$, para todo $x \in M$.

Mas do teorema 1.45, sabemos que $B = \overline{\bigcup_{x \in M} \alpha^x(A_x)}$. Então, concluímos que $\beta_z \circ \beta_t = \beta_{z+t}$. ■

Proposição 2.3 *Para cada $z \in M$, o endomorfismo $\beta_z : B \rightarrow B$ definido na proposição 2.2 é um automorfismo de B .*

Demonstração: i. β_z é injetora. Como o conjunto $\bigcup_{x \in M} \alpha^x(A_x)$ é denso em B , basta mostrar que $\|\beta_z(\alpha^x(a))\| = \|\alpha^x(a)\|$, para todo $a \in A$.

Cada endomorfismo α_y^x é injetor. Assim, pela proposição 1.46, cada homomorfismo α^x de A_x em B também é injetor. Então, lembrando que homomorfismos injetores entre C^* -álgebras são necessariamente isométricos, temos que, para cada $a \in A$,

$$\|\beta_z(\alpha^x(a))\| = \|\alpha^x(\alpha_z(a))\| = \|\alpha_z(a)\| = \|a\| = \|\alpha^x(a)\|.$$

ii. β_z é sobrejetora. Usando a densidade do conjunto $\bigcup_{x \in M} \alpha^x(A_x)$ em B mais uma vez, basta mostrarmos que cada sub- C^* -álgebra $\alpha^x(A_x)$ está contida na imagem de β_z .

Sejam $a \in A_x$ e $x, z \in M$. Então,

$$\alpha^x(a) = \alpha^{x+z}(\alpha_{x+z}^x(a)) = \alpha^{x+z}(\alpha_z(a)) = \beta_z(\alpha^{x+z}(a)).$$

Logo, $\alpha^x(A_x) \subseteq \beta_z(B)$. ■

Sendo G o grupo de Grothendieck de M , provaremos, no próximo lema, que existe uma única extensão em G do homomorfismo de M em $\text{Aut}(B)$, dado por $x \mapsto \beta_x$. A construção e as principais propriedades do grupo de Grothendieck estão descritas no Apêndice A.

Lema 2.4 *Seja G o grupo de Grothendieck de M . O homomorfismo de M em $\text{Aut}(B)$ definido por $x \mapsto \beta_x$ pode ser estendido de maneira única a um homomorfismo $\beta : G \rightarrow \text{Aut}(B)$.*

Demonstração: 1. *Existência*

Seja $g \in G$. Sabemos, da definição A.1, que g pode ser identificado com uma classe de equivalência $\langle x, y \rangle$, sendo $x, y \in M$. Além disso, cada $y \in M$ fica associado ao elemento $\langle y, 0 \rangle$ em G .

Observemos ainda que, se $y \in M$, β_y é bijetora e, portanto, existe a função β_y^{-1} , que é um automorfismo de B . Vamos então definir a aplicação

$$\beta : G \rightarrow \text{Aut}(B), \quad g = \langle x, y \rangle \mapsto \beta_g = \beta_x \circ \beta_y^{-1}.$$

Sejam $x, y, z, w \in M$. Temos inicialmente que

$$\beta_{y+w} = \beta_y \circ \beta_w \Rightarrow (\beta_{y+w})^{-1} = (\beta_y \circ \beta_w)^{-1} = \beta_w^{-1} \circ \beta_y^{-1}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \beta_y \circ \beta_z &= \beta_z \circ \beta_y \Rightarrow \beta_y^{-1} \circ \beta_y \circ \beta_z \circ \beta_y^{-1} = \beta_y^{-1} \circ \beta_z \circ \beta_y \circ \beta_y^{-1} \\ &\Rightarrow \beta_z \circ \beta_y^{-1} = \beta_y^{-1} \circ \beta_z. \end{aligned}$$

Vamos provar que β está bem definida. Se $g = \langle x, y \rangle = \langle z, w \rangle$, então $x + w = y + z$. Daí,

$$\begin{aligned} \beta_{x+w} = \beta_{y+z} &\Rightarrow \beta_x \circ \beta_w \circ \beta_w^{-1} \circ \beta_y^{-1} = \beta_y \circ \beta_z \circ \beta_w^{-1} \circ \beta_y^{-1} \\ &\Rightarrow \beta_x \circ \beta_y^{-1} = \beta_z \circ \beta_w^{-1}. \end{aligned}$$

Além disso, β é homomorfismo. De fato, sejam $g, h \in G$, com $g = \langle x, y \rangle$ e $h = \langle z, w \rangle$. Então, temos

$$\begin{aligned} \beta_{g+h} &= \beta_{\langle x, y \rangle + \langle z, w \rangle} = \beta_{\langle x+z, y+w \rangle} \\ &= \beta_{x+z} \circ \beta_{y+w}^{-1} = \beta_x \circ \beta_z \circ \beta_y^{-1} \circ \beta_w^{-1} \\ &= \beta_x \circ \beta_y^{-1} \circ \beta_z \circ \beta_w^{-1} = \beta_{\langle x, y \rangle} \circ \beta_{\langle z, w \rangle} \\ &= \beta_g \circ \beta_h. \end{aligned}$$

2. Unicidade

Seja δ um homomorfismo que estende em G o homomorfismo dado. Então, se $g \in G$ e $g = \langle x, y \rangle$, com $x, y \in M$, temos

$$i. \beta_y \circ \delta_{\langle 0, y \rangle} = \delta_{\langle y, 0 \rangle + \langle 0, y \rangle} = \delta_{\langle y, y \rangle} = \beta_o = Id_B = \delta_{\langle 0, y \rangle} \circ \beta_y.$$

$$\text{Portanto, } \delta_{\langle 0, y \rangle} = \beta_y^{-1}.$$

$$ii. \delta_{\langle x, y \rangle} = \delta_{\langle x, 0 \rangle + \langle 0, y \rangle} = \delta_{\langle x, 0 \rangle} \circ \delta_{\langle 0, y \rangle} = \beta_x \circ \beta_y^{-1}.$$

Daí, $\delta = \beta$ e β é único. ■

Corolário 2.5 *A tripla (B, G, β) é um C^* -sistema dinâmico clássico.*

Seja $Z = B \rtimes_{\beta} G$, ou seja, Z é o produto cruzado relativo ao C^* -sistema dinâmico clássico (B, G, β) .

Denotando por p a projeção $\alpha^o(1) \in B$, seja C a sub- C^* -álgebra $pZp \subseteq Z$, ou seja, $C = \{p z p / z \in Z\}$. Observemos que C possui unidade, que é igual a p .

De fato, $p = p p p$, ou seja, $p \in C$. Além disso, se $p z p \in C$, com $z \in Z$, temos $p(p z p) = p z p = (p z p)p$.

Utilizando os teoremas 1.52 e 1.54, podemos tomar o homomorfismo unitário canônico $U : G \rightarrow Z$, isto é, U tem a seguinte propriedade:

$$U_g b U_g^* = \beta_g(b) \quad (\forall g \in G, \forall b \in B). \quad (2.2)$$

Da definição A.1, todo $x \in M$ pode ser identificado com o elemento $\langle x, 0 \rangle \in G$. Assim, se $a \in A$ e $x \in M$, temos, de (2.1) e (2.2), que

$$U_x \alpha^o(a) U_x^* = \beta_x(\alpha^o(a)) = \alpha^o(\alpha_x(a)).$$

Definamos agora, para cada $x \in M$,

$$V_x = p U_x p.$$

Observemos que $V_x \in C$. Além disso, temos que, para todo $x \in M$,

$$\begin{aligned} p U_x p U_x^* &= p U_x \alpha^o(1) U_x^* = p \alpha^o(\alpha_x(1)) \\ &= \alpha^o(1) \alpha^o(\alpha_x(1)) = \alpha^o(1 \cdot \alpha_x(1)) \\ &= \alpha^o(\alpha_x(1)) = U_x \alpha^o(1) U_x^*, \text{ ou seja,} \\ p U_x p U_x^* &= U_x p U_x^*. \end{aligned}$$

Como U_x é um unitário, multiplicando a última igualdade à direita por U_x , obtemos

$$V_x = p U_x p = U_x p \quad (\forall x \in M).$$

Algumas propriedades dos elementos V_x são descritas agora no seguinte

Lema 2.6 *Sejam $x, y \in M$ e $V_x \in C$. Então:*

1. V_x é isometria de C .
2. $V_{x+y} = V_x V_y$.
3. $\alpha^o(\alpha_x(a)) = V_x \alpha^o(a) V_x^* \quad (\forall a \in A, \forall x \in M)$.

Demonstração:

$$1. V_x^* V_x = (p U_x p)^* (p U_x p) = (U_x p)^* (U_x p) = p U_x^* U_x p = p^2 = p = 1_C.$$

Observemos que $V_x V_x^* = U_x p U_x^* = U_x \alpha^o(1) U_x^* = \alpha^o(\alpha_x(1))$, que não é necessariamente igual à unidade de C . Portanto, V_x é uma isometria própria de C .

$$2. V_{x+y} = p U_{x+y} p = p U_x (U_y p) = p U_x (p U_y p) = (p U_x p) (p U_y p) = V_x V_y.$$

3. Sendo $a \in A$, temos:

$$\begin{aligned} \alpha^o(\alpha_x(a)) &= U_x \alpha^o(1 \cdot a \cdot 1) U_x^* = (U_x p) \alpha^o(a) (p U_x^*) \\ &= (p U_x p) \alpha^o(a) (p U_x p)^* = V_x \alpha^o(a) V_x^*. \end{aligned}$$

■

As representações covariantes desempenham um papel fundamental na teoria do produto cruzado clássico. O mesmo ocorre no produto cruzado por endomorfismo. Enunciaremos agora algumas definições que nos permitirão fazer um paralelo com a teoria clássica.

Definição 2.7 *Sejam M um semi-grupo e B uma C^* -álgebra com unidade. Uma função W de M em B dada por $x \mapsto W_x$ é um **homomorfismo isométrico projetivo** de M em B se, para todo $x, y \in M$,*

- $W_x \in B$ é isometria, ou seja, $W_x^* W_x = 1_B$.
- $W_o = 1_B$.
- $W_{x+y} = W_x W_y$.

Definição 2.8 Se H é um espaço de Hilbert e $W : M \rightarrow \mathcal{B}(H)$ é um homomorfismo isométrico projetivo, então dizemos que o par (H, W) é uma **representação isométrica projetiva** de M em H .

No caso particular em que W_x é um unitário de $\mathcal{B}(H)$, para todo x do semi-grupo M , dizemos que o par (H, W) é uma **representação unitária projetiva** de M em H .

Definição 2.9 Se D é uma C^* -álgebra com unidade, o par (φ, W) é chamado **representação covariante projetiva** do C^* -sistema dinâmico não clássico (A, M, α) em D se

- φ é $*$ -homomorfismo de A em D , que preserva unidade.
- W é homomorfismo isométrico projetivo de M em D tal que:

$$\varphi(\alpha_x(a)) = W_x \varphi(a) W_x^* \quad (\forall a \in A, \forall x \in M).$$

Vamos denotar por i a cópia isométrica de A em C induzida por α^o , isto é, a aplicação $i : A \rightarrow C$ onde $i(a) = \alpha^o(a)$, para todo $a \in A$.

Vale ressaltar que $\alpha^o(a) = \alpha^o(1 \cdot a \cdot 1) = p \alpha^o(a) p \in C$.

Consideremos ainda a aplicação V de M em C dada por $x \mapsto V_x$, para todo $x \in M$.

Proposição 2.10 O par (i, V) definido acima é uma representação covariante projetiva do C^* -sistema dinâmico não clássico (A, M, α) na C^* -álgebra C .

Demonstração: Como α^o é $*$ -homomorfismo, temos que i é $*$ -homomorfismo de A em C . Além disso, $i(1_A) = \alpha^o(1_A) = p = 1_C$, ou seja, i preserva unidade.

Se $x, y \in M$, sabemos, pelo lema 2.6, que V_x é isometria e ainda que $V_{x+y} = V_x V_y$. Como $V_o = p U_o p = p Id_Z p = p^2 = p = 1_C$, concluímos que V é homomorfismo isométrico projetivo de M em C .

Também usando o lema 2.6, temos que, para todo $a \in A$ e todo $x \in M$, $\alpha^o(\alpha_x(a)) = V_x \alpha^o(a) V_x^*$.

Logo, (i, V) é representação covariante projetiva de (A, M, α) em C . ■

Teorema 2.11 A sub- C^* -álgebra C é a C^* -álgebra gerada pelas imagens $i(A)$ e V_M , ou seja, $C = C^* \langle i(A) \cup V_M \rangle$. Mais precisamente, C é o fecho do conjunto das combinações lineares dos elementos da forma $V_y^* i(a) V_x$, onde $x, y \in M$ e $a \in A$.

Demonstração: Pelo teorema 1.54, temos que, se $Z = B \rtimes_\beta G$, então $Z = \overline{\text{span}\{b U_g : b \in B \text{ e } g \in G\}}$, onde U_g são unitários.

Se $g \in G$, então $g = \langle x, y \rangle$, com $x, y \in M$. Observemos que

$$U_{\langle y, 0 \rangle} U_{\langle 0, y \rangle} = U_{\langle 0, y \rangle} U_{\langle y, 0 \rangle} = U_{\langle y, y \rangle} = U_o = Id.$$

Como $U_{\langle y, 0 \rangle}$ é unitário, concluímos que $U_{\langle 0, y \rangle} = U_{\langle y, 0 \rangle}^* = U_y^*$. Daí,

$$\begin{aligned} b U_g &= b U_{\langle x, y \rangle} = b U_{\langle 0, y \rangle + \langle x, 0 \rangle} \\ &= b U_{\langle 0, y \rangle} U_{\langle x, 0 \rangle} = b U_y^* U_x \\ &= U_y^* \beta_y(b) U_x, \text{ com } x, y \in M \text{ e } \beta_y(b) \in B. \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever que $Z = \overline{\text{span}\{U_y^* b U_x : b \in B \text{ e } x, y \in M\}}$. Como o conjunto $\bigcup_{z \in M} \alpha^z(A)$ é denso em B , obtemos

$$Z = \overline{\text{span}\{U_y^* \alpha^z(a) U_x : a \in A \text{ e } x, y, z \in M\}}.$$

Utilizando a condição (i) da definição 1.40, vale que $\alpha^z \circ \alpha_z = \alpha^o$. Assim, se $a \in A$ e $z \in M$,

$$\beta_z(\alpha^z(a)) = \alpha^z(\alpha_z(a)) = \alpha^o(a) = i(a).$$

Como β_z é automorfismo e z possui inverso $-z \in G$, temos

$$\alpha^z(a) = \beta_{-z}(\beta_z(\alpha^z(a))) = \beta_{-z}(i(a)) = U_{-z} i(a) U_{-z}^* = U_z^* i(a) U_z.$$

Assim, $U_y^* \alpha^z(a) U_x = U_y^* U_z^* i(a) U_z U_x = U_y^* i(a) U_x$ e, portanto,

$$Z = \overline{\text{span}\{U_y^* i(a) U_x : a \in A \text{ e } x, y \in M\}}.$$

Então, um elemento da forma $p(U_y^* i(a) U_x) p$, que pertence a C , pode ser escrito como $(p U_y p)^* i(a) (p U_x p) = V_y^* i(a) V_x$. Como $C = p Z p$, concluímos que

$$C = \overline{\text{span}\{V_y^* i(a) V_x : a \in A \text{ e } x, y \in M\}}.$$

■

Para construir a C^* -álgebra C , tivemos de “aumentar” a C^* -álgebra original A , obtendo a C^* -álgebra B , que de certa maneira continha A . Da

mesma forma, dada uma representação isométrica projetiva de M em H , precisaremos estendê-la a uma representação unitária projetiva de G em K , onde K é um espaço de Hilbert que contém H . O teorema a seguir, que tem uma versão mais geral demonstrada em [10], garante a existência desta extensão.

Teorema 2.12 *Sejam M semi-grupo, H espaço de Hilbert e (H, V) representação isométrica projetiva de M em H . Então, existe uma representação unitária projetiva (K, U) de M em um espaço de Hilbert K , que contém uma cópia de H , tal que*

- (i) H é invariante por U_x e U_x restrito a H é igual a V_x , para todo $x \in M$.
- (ii) O conjunto $\bigcup_{x \in M} U_x^*(H)$ é denso em K .

Demonstração: Seja H_o o conjunto das funções $f : M \rightarrow H$ para as quais existe $x \in M$ tal que

$$f(t) = V_{t-x}(f(x)), \text{ para todo } t \geq x. \quad (2.3)$$

Tais elementos $x \in M$ serão chamados **admissíveis** para f .

Recordemos que se $t \geq x$ então existe $z \in M$ tal que $x + z = t$. Na equação acima, estamos denotando z por $t - x$.

Se $x, y \in M$, com $y \geq x$ e x é admissível para f , então y também é admissível para f . De fato, para todo $t \geq y \geq x$ temos

$$f(t) = V_{t-x}(f(x)) = V_{t-y+y-x}(f(x)) = V_{t-y} \underbrace{V_{y-x}(f(x))}_{=f(y)} = V_{t-y}(f(y)).$$

Se $f, g \in H_o$, $x \in M$ é admissível para f e $y \in M$ é admissível para g , então segue do que vimos acima que $x + y$ é admissível para f e para g . Portanto, sempre existe um elemento de M admissível simultaneamente para duas funções de H_o .

Sejam $f, g \in H_o$ e $x \in M$ admissível para f e g . Se $x \leq y$, então

$$\begin{aligned} \langle f(y), g(y) \rangle_H &= \langle V_{y-x}(f(x)), V_{y-x}(g(x)) \rangle_H \\ &= \langle f(x), V_{y-x}^*(V_{y-x}(g(x))) \rangle_H = \langle f(x), g(x) \rangle_H. \end{aligned}$$

Portanto, como M munido da relação $\leq$ é um conjunto dirigido, a expressão $\langle f(x), g(x) \rangle_H$ é constante quando x varia no conjunto dos valores admissíveis simultaneamente para f e g .

Com isso, podemos definir em H_o uma forma positiva semi-definida sesquilinear, ou seja, um semi-produto interno, pela relação

$$\langle f, g \rangle = \langle f(x), g(x) \rangle_H,$$

onde x é qualquer valor admissível para f e g .

Portanto, H_o é espaço pré-hilbertiano. Antes de completarmos H_o para obtermos um espaço de Hilbert, vamos definir, ainda em H_o , algumas aplicações que serão importantes ao longo da demonstração.

Inicialmente, vamos identificar uma cópia de H em H_o . Para cada $\xi \in H$, definamos a aplicação

$$\begin{aligned} \hat{\xi} &: M \rightarrow H \\ x &\mapsto \hat{\xi}(x) = V_x(\xi). \end{aligned}$$

Observemos que, se $y \geq x$,

$$\hat{\xi}(y) = V_y(\xi) = V_{y-x+x}(\xi) = V_{y-x}(V_x(\xi)) = V_{y-x}(\hat{\xi}(x)).$$

Logo, $\hat{\xi}$ satisfaz (2.3) para todo $x \in M$, isto é, $\hat{\xi} \in H_o$ e todo elemento de M é admissível para $\hat{\xi}$.

Observemos ainda que a aplicação $\hat{\xi}$ definida acima garante que o conjunto H_o não é vazio.

Se $\xi, \eta \in H$ e $x \in M$, temos

$$\begin{aligned} \langle \hat{\xi}, \hat{\eta} \rangle &= \langle \hat{\xi}(x), \hat{\eta}(x) \rangle_H = \langle V_x(\xi), V_x(\eta) \rangle_H \\ &= \langle \xi, V_x^* V_x(\eta) \rangle_H = \langle \xi, \eta \rangle_H. \end{aligned}$$

Daí, $\|\xi\|^2 = \langle \xi, \xi \rangle_H = \langle \hat{\xi}, \hat{\xi} \rangle = \|\hat{\xi}\|^2$ e a função de H em H_o dada por $\xi \mapsto \hat{\xi}$ é isometria.

Sejam $f \in H_o$ e $x \in M$. Vamos definir a aplicação

$$\begin{aligned} f_x &: M \rightarrow H \\ y &\mapsto f(y+x). \end{aligned}$$

Se $t \in M$ é admissível para f , então $x+t \geq t$ é admissível para f . Ainda, se $y \geq t$, então $x+y \geq x+t$. Daí,

$$f_x(y) = f(x+y) = V_{x+y-(x+t)}(f(x+t)) = V_{y-t}(f(x+t)) = V_{y-t}(f_x(t)).$$

Então, t também é admissível para f_x e, portanto, $f_x \in H_o$. Podemos então calcular o produto interno entre f_x e g_x usando um elemento $t \in M$, admissível para f e g :

$$\langle f_x, g_x \rangle = \langle f_x(t), g_x(t) \rangle_H = \langle f(t+x), g(t+x) \rangle_H = \langle f, g \rangle.$$

Vamos definir agora, para cada $x \in M$, a aplicação

$$\begin{aligned} U_x &: H_o \rightarrow H_o \\ f &\mapsto U_x(f) = f_x. \end{aligned}$$

Se $\xi \in H$ e $x, t \in M$, temos que

$$\begin{aligned} (U_x(\hat{\xi}))(t) &= \hat{\xi}_x(t) = \hat{\xi}(x+t) = V_{t+x}(\xi) = V_t(\underbrace{V_x(\xi)}_{\in H}) \\ &= \widehat{V_x(\xi)}(t). \end{aligned}$$

Como $U_x(\hat{\xi}) = \widehat{V_x(\xi)}$ para todo $\xi \in H$, concluímos que a restrição de U_x a H é igual a V_x .

Além disso, se $x, y, t \in M$ e $f \in H_o$, temos

$$\begin{aligned} (U_x(U_y(f)))(t) &= (U_y(f))_x(t) = (U_y(f))(x+t) = f_y(x+t) \\ &= f(y+x+t) = f_{x+y}(t) = (U_{x+y}(f))(t). \end{aligned}$$

Logo, $U_{x+y} = U_x \circ U_y$.

Vamos mostrar agora que a função U_x é sobrejetora, para todo $x \in M$. Suponhamos que $t \in M$ seja admissível para $f \in H_o$ e definamos a aplicação

$$\begin{aligned} f_{-x} &: M \rightarrow H \\ y &\mapsto f_{-x}(y) = \begin{cases} f(y-x), & \text{se } y \geq x \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \end{aligned}$$

Então, $f_{-x} \in H_o$ e $x+t$ é admissível para f_{-x} . De fato, se $y \geq x+t$, então $y-x \geq t$ e, assim, $y-x$ é admissível para f . Além disso, $y \geq x$. Daí,

$$\begin{aligned} f_{-x}(y) &= f(y-x) = V_{y-x-t}(f(t)) = V_{y-(x+t)}(f(t+x-x)) \\ &= V_{y-(x+t)}(f_{-x}(x+t)). \end{aligned}$$

Assim, sendo $f \in H_o$ e $y \in M$, temos que

$$f(y) = f(x+y-x) = f_{-x}(x+y) = (f_{-x})_x(y) = (U_x(f_{-x}))(y).$$

Portanto, $U_x(f_{-x}) = f$ e U_x é sobrejetora.

Obteremos agora, a partir de H_o , o espaço de Hilbert K . Consideremos o conjunto $\mathcal{N} = \{f \in H_o : \langle f, f \rangle = 0\}$, que é um sub-espaço linear de H_o .

Definimos, para $[f]$ e $[g]$ pertencentes ao espaço quociente $H_o/\mathcal{N}$, o produto interno $\langle [f], [g] \rangle = \langle f, g \rangle$ e tomamos K como sendo o complemento de $H_o/\mathcal{N}$ pela norma proveniente deste produto interno.

Cada elemento f de H_o pode ser naturalmente identificado com sua respectiva classe em $H_o/\mathcal{N} \subseteq K$. Com esta identificação, como $H_o/\mathcal{N}$ é denso em K , podemos dizer que H_o é denso em K .

Notemos ainda que se $f, g \in H_o$ e $f(x) = g(x)$ para todo elemento $x \in M$ admissível para f e g , então $f = g$ em K .

Para todo $x \in M$, a função U_x , definida em H_o , pode ser estendida continuamente para todo K . Vamos agora concluir a demonstração verificando as propriedades dessa extensão em K .

(i) Vamos provar que U_x é um unitário de K , para todo $x \in M$. Como H_o é denso em K , basta fazermos os cálculos para $f, g \in H_o$. Assim,

$$\langle f, g \rangle = \langle f_x, g_x \rangle = \langle U_x(f), U_x(g) \rangle = \langle U_x^*(U_x(f)), g \rangle.$$

Logo, $U_x^* U_x = Id$ em K . Além disso,

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \langle U_x(f_{-x}), g \rangle = \langle f_{-x}, U_x^*(g) \rangle \\ &= \langle U_x^*(U_x(f_{-x})), U_x^*(g) \rangle = \langle U_x^*(f), U_x^*(g) \rangle \\ &= \langle f, U_x(U_x^*(g)) \rangle. \end{aligned}$$

Então, $U_x U_x^* = Id$ em K e U_x é um unitário de K .

Já vimos que $U_{x+y} = U_x \circ U_y$ em H_o , para todo $x, y \in M$. Como U_x foi estendida continuamente, essa relação se mantém em K . Portanto, o par (K, U) é uma representação unitária projetiva de M em K .

Além disso, já mostramos que existe uma cópia de H em H_o (e portanto em K) e que a restrição de U_x a H é igual a V_x , para todo $x \in M$.

(ii) Sejam $f \in H_o$ e $t \in M$ admissível para f . Então, para $x \geq t$, temos

$$\begin{aligned} U_t(f)(x) &= f_t(x) = f(x+t) = V_{x+t-t}(f(t)) = V_x(f(t)) \\ &= \widehat{f(t)}(x). \end{aligned}$$

Se $U_t(f)(x) = \widehat{f(t)}(x)$, então, $U_t^*(U_t(f))(x) = (U_t^*(\widehat{f(t)}))(x)$, ou seja, para todo $x \geq t$ temos $f(x) = (U_t^*(\widehat{f(t)}))(x)$.

Se f e $U_t^*(\widehat{f(t)})$ coincidem em todos os valores admissíveis para f , então $f = U_t^*(\widehat{f(t)})$ em K . Como H_o é denso em K e $H_o \subseteq \bigcup_{x \in M} U_x^*(H) \subseteq K$, então o conjunto $\bigcup_{x \in M} U_x^*(H)$ é denso em K . ■

Corolário 2.13 *Se G é o grupo de Grothendieck do semi-grupo M , então a representação (K, U) de M em K obtida no teorema 2.12 pode ser estendida de maneira única a uma representação (K, U) de G em K , satisfazendo (i) e (ii).*

Demonstração: Sejam $x, y, z, w \in M$. Vejamos inicialmente que U_z e U_y^* comutam. Como M é abeliano, $U_y U_z = U_z U_y$. Compondo U_y^* à esquerda e à direita, temos $U_y^*(U_y U_z) U_y^* = U_y^*(U_z U_y) U_y^*$, ou seja, $U_z U_y^* = U_y^* U_z$.

Seja $g \in G$. Podemos escrever $g = \langle x, y \rangle$, para $x, y \in M$ convenientes. Vamos definir $\widetilde{U}_g = U_x U_y^*$.

Vamos provar que $\widetilde{U}$ está bem definida. Se $g = \langle x, y \rangle = \langle z, t \rangle$, então $x + t = y + z$. Assim, temos que $U_x U_t = U_{x+t} = U_{y+z} = U_z U_y$, ou seja,

$$U_x U_y^* = U_x U_t U_t^* U_y^* = U_z U_y U_y^* U_t^* = U_z U_t^*.$$

Se $g \in M$, então g pode ser visto em G como $\langle g, 0 \rangle$ e $\widetilde{U}_g = U_g U_0^* = U_g$. Então, $\widetilde{U}$ restrito a M é igual a U .

Se $g, h \in G$, com $g = \langle x, y \rangle$ e $h = \langle z, t \rangle$, temos

$$\widetilde{U}_g \widetilde{U}_h = U_x U_y^* U_z U_t^* = U_x U_z U_y^* U_t^* = U_{x+z} U_{y+t}^* = \widetilde{U}_{g+h}.$$

Se $\widetilde{W}$ é outra extensão de U , temos:

$$Id = \widetilde{W}_0 = \widetilde{W}_{\langle y, 0 \rangle} \widetilde{W}_{\langle 0, y \rangle} = U_y \widetilde{W}_{\langle 0, y \rangle}.$$

Compondo com U_y^* à esquerda, chegamos que $\widetilde{W}_{\langle 0, y \rangle} = U_y^*$. Portanto, $\widetilde{W}_g = \widetilde{W}_{\langle x, y \rangle} = \widetilde{W}_{\langle x, 0 \rangle} \widetilde{W}_{\langle 0, y \rangle} = U_x U_y^* = \widetilde{U}_g$, para todo $g \in G$. ■

A propriedade universal da C^* -álgebra C é descrita agora pelo seguinte

Teorema 2.14 *Seja (φ, W) representação covariante projetiva do C^* -sistema dinâmico não clássico (A, M, α) em uma C^* -álgebra com unidade D . Então, existe um único $*$ -homomorfismo π de C em D satisfazendo $\pi \circ i = \varphi$ e $\pi \circ V = W$.*

Nosso objetivo é provar este teorema. Obteremos a seguir alguns resultados necessários para a sua demonstração. O primeiro deles é a obtenção

do operador W^x , que desempenha um papel importante na construção do $*$ -homomorfismo π .

Pelo teorema 1.28 de Gelfand-Naimark-Segal, podemos trabalhar com a C^* -álgebra D como uma sub- C^* -álgebra não degenerada de $\mathcal{B}(H)$, para algum espaço de Hilbert H .

Lembrando que (φ, W) é representação covariante projetiva de (A, M, α) em $D \subseteq \mathcal{B}(H)$, temos que (H, W) é representação isométrica projetiva de M . Assim, W_x é isometria de $\mathcal{B}(H)$, para todo $x \in M$.

Pelo teorema 2.12 e corolário 2.13, temos então que

- Existe um espaço de Hilbert K tal que H é subespaço fechado de K .
- Existe uma representação projetiva unitária $\tilde{U}$ de G em K tal que, para cada $x \in M$,
 - (i) H é invariante por $\tilde{U}_x$ e W_x é a restrição de $\tilde{U}_x$ a H .
 - (ii) o conjunto $\bigcup_{x \in M} \tilde{U}_x^*(H)$ é denso em K .

Para cada $x \in M$, seja W^x a restrição de $\tilde{U}_x^*$ a H . Vamos mostrar que W^x é isometria. Se $\xi, \eta \in H$, temos

$$\begin{aligned} \langle ((W^x)^* \circ W^x)(\xi), \eta \rangle &= \langle W^x(\xi), W^x(\eta) \rangle = \langle \tilde{U}_x^*(\xi), \tilde{U}_x^*(\eta) \rangle \\ &= \langle \xi, \tilde{U}_x(\tilde{U}_x^*(\eta)) \rangle = \langle \xi, \eta \rangle. \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } \langle ((W^x)^* \circ W^x)(\xi) - \xi, \eta \rangle = 0, \quad \forall \xi, \eta \in H. \quad (2.4)$$

Como W^x está definido de H em K , então $(W^x)^*$ é definido de K em H . Assim, $((W^x)^* \circ W^x)(\xi) \in H$. De (2.4), temos que $((W^x)^* \circ W^x)(\xi) = \xi$, para todo $\xi \in H$, ou seja, $(W^x)^* \circ W^x = Id_H$ e W^x é isometria.

Vale ressaltar que não temos, necessariamente, $W^x \circ (W^x)^* = Id_K$, isto é, W^x é isometria própria.

Sejam $x, z \in M$ e $\xi \in H$. Então,

$$W^{x+z}(W_z(\xi)) = \tilde{U}_{x+z}^*(\tilde{U}_z(\xi)) = \tilde{U}_{x+z}^*(\tilde{U}_{x+z-x}(\xi)) = (\tilde{U}_{x+z}^* \circ \tilde{U}_{x+z} \circ \tilde{U}_{-x})(\xi).$$

Mas $\tilde{U}_{x+z}^* \circ \tilde{U}_{x+z} = Id$. Daí, $W^{x+z}(W_z(\xi)) = \tilde{U}_{-x}(\xi) = \tilde{U}_x^*(\xi) = W^x(\xi)$, para todo $\xi \in H$. Logo,

$$W^x = W^{x+z} \circ W_z \quad (\forall x, z \in M). \quad (2.5)$$

De (2.5), concluímos que $W^x(H) \subseteq W^{x+z}(H)$. Portanto, lembrando que $W^x(H) = \tilde{U}_x^*(H)$, o subconjunto $K_o = \bigcup_{x \in M} W^x(H)$ é um subespaço vetorial de K , denso em K .

A seguir, vamos construir uma representação covariante do C^* -sistema dinâmico clássico (B, G, β) em $\mathcal{B}(K)$. Porém, o homomorfismo φ associa, a cada elemento da C^* -álgebra A , um operador em $\mathcal{B}(H)$. Precisaremos, assim, de operadores em $\mathcal{B}(K)$ e, para obtê-los, mostraremos primeiro o seguinte

Lema 2.15 *Seja $(T_x)_{x \in M}$ uma família de operadores em $\mathcal{B}(H)$, que satisfaz $\sup_x \|T_x\| = N < \infty$, tal que*

$$T_{x+z} \circ W_z = W_z \circ T_x \quad (x, z \in M). \quad (2.6)$$

Então, existe um único operador limitado T em $\mathcal{B}(K)$ tal que vale a relação $T \circ W^x = W^x \circ T_x$, $\forall x \in M$. Além disso, $\|T\| \leq N$.

Demonstração: a) *Unicidade:* sejam T_1 e T_2 operadores em $\mathcal{B}(K)$ tais que $T_i \circ W^x = W^x \circ T_x$, $\forall x \in M$, $i = 1, 2$. Basta mostrarmos que T_1 e T_2 coincidem para todo $\xi \in K_o$, pois K_o é denso em K .

Se $\xi \in K_o$, existem $\eta \in H$ e $x \in M$ tais que $\xi = W^x(\eta)$. Daí,

$$T_1(\xi) = T_1(W^x(\eta)) = W^x(T_x(\eta)) = T_2(W^x(\eta)) = T_2(\xi).$$

Logo, $T_1 = T_2$.

b) *Existência:* primeiro, vamos construir T em K_o . Se $\xi \in K_o$, então $\xi = W^x(\eta)$, para algum $x \in M$, $\eta \in H$.

Definamos, então, $T(\xi) = W^x(T_x(\eta))$.

▷ T está bem definido.

Seja $\xi = W^x(\eta) = W^y(\eta')$, com $x, y \in M$ e $\eta, \eta' \in H$. Suponha ainda $x \leq y$, com $y = x + z$, $z \in M$. É suficiente considerarmos esse caso pois M é um conjunto dirigido. Temos que

$$W^y(\eta') = W^{x+z}(\eta') = \xi = W^x(\eta) = W^{x+z}(W_z(\eta)).$$

Mas W^{x+z} é isometria e, portanto, injetora. Daí, $\eta' = W_z(\eta)$.

De (2.5) e (2.6), $W^x(T_x(\eta)) = W^{x+z}(W_z(T_x(\eta))) = W^{x+z}(T_{x+z}(W_z(\eta)))$. Assim, lembrando que $\eta' = W_z(\eta)$,

$$W^x(T_x(\eta)) = W^{x+z}(T_{x+z}(\eta')) = W^y(T_y(\eta')).$$

▷ T é linear: a demonstração é trivial.

▷ T é limitado.

Para todo $\eta \in H$, temos

$$\|T(W^x(\eta))\| = \|W^x(T_x(\eta))\| \leq \underbrace{\|W^x\|}_{=1} \cdot \underbrace{\|T_x\|}_{\leq N} \cdot \|\eta\| \leq N \cdot \|\eta\| = N \cdot \|W^x(\eta)\|.$$

Daí, $\|T\| \leq N$, ou seja, T é limitado em K_o .

Como K_o é denso em K , então T pode ser estendido a um operador limitado em K , tal que $T \circ W^x = W^x \circ T_x$, para todo $x \in M$. ■

Passemos agora à construção da representação covariante $(\tilde{\varphi}, \tilde{U})$ de (B, G, β) em $\mathcal{B}(K)$. Seja $a \in A$ e, para cada $x \in M$, vamos definir $T_x = \varphi(\alpha_x(a))$.

Como (φ, W) é representação covariante projetiva, temos, para $x, z \in M$,

$$\varphi(\alpha_{x+z}(a)) = \varphi(\alpha_z(\alpha_x(a))) = W_z \circ \varphi(\alpha_x(a)) \circ W_z^*.$$

Assim, $T_{x+z} = W_z \circ T_x \circ W_z^*$, isto é, $T_{x+z} \circ W_z = W_z \circ T_x$ e a condição (2.6) é satisfeita pela família $(T_x)_{x \in M}$.

Mas $\|T_x\| = \|\varphi(\alpha_x(a))\| \leq \|\alpha_x(a)\| \leq \|a\|$, $\forall x \in M$.

Logo, $\sup_{x \in M} \|T_x\| \leq \|a\| < \infty$. Podemos então aplicar o lema 2.15 à família $(T_x)_{x \in M}$ definida acima. Assim, para cada $a \in A$, existe um único operador linear limitado em $\mathcal{B}(K)$, denotado $\theta(a)$, tal que

$$\theta(a) \circ W^x = W^x \circ T_x = W^x \circ \varphi(\alpha_x(a)), \quad \forall x \in M.$$

Definimos então a função $\theta : A \rightarrow \mathcal{B}(K)$

$$a \mapsto \theta(a).$$

Vamos mostrar que θ é $*$ -homomorfismo. Como K_o é denso em K , basta provarmos tal afirmação para elementos $\xi \in K_o$. Sejam $a, b \in A$, $x \in M$ e $\xi \in K_o$, com $\xi = W^x(\eta)$, $\eta \in H$.

▷ θ é homomorfismo: é fácil ver que θ é linear. Além disso,

$$\begin{aligned} \theta(ab)(\xi) &= (W^x \circ \varphi(\alpha_x(ab)))(\eta) = W^x(\varphi(\alpha_x(a)\alpha_x(b))(\eta)) \\ &= W^x(\varphi(\alpha_x(a)) \circ \varphi(\alpha_x(b))(\eta)) \\ &= W^x(\varphi(\alpha_x(a))(\varphi(\alpha_x(b))(\eta))) \text{ e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\theta(a) \circ \theta(b))(\xi) &= \theta(a)(W^x \circ \varphi(\alpha_x(b))(\eta)) = (\theta(a) \circ W^x)(\varphi(\alpha_x(b))(\eta)) \\
&= W^x \circ \varphi(\alpha_x(a))(\varphi(\alpha_x(b))(\eta)) \\
&= W^x(\varphi(\alpha_x(a))(\varphi(\alpha_x(b))(\eta))).
\end{aligned}$$

Logo, $\theta(ab) = \theta(a) \circ \theta(b)$.

▷ θ preserva involução.

$$\begin{aligned}
\theta(a^*)(\xi) &= (W^x \circ \varphi(\alpha_x(a^*)))(\eta) = W^x(\varphi(\alpha_x(a)^*)(\eta)) \\
&= W^x(\varphi^*(\alpha_x(a))(\eta)) = W^x(T_x^*(\eta)) = (W^x \circ T_x^*)(\eta)
\end{aligned}$$

Assim,

$$\theta(a^*) \circ W^x = W^x \circ T_x^*. \quad (2.7)$$

Sejam $\xi_1, \xi_2 \in K_o$, com $\xi_1 = W^x(\eta_1)$ e $\xi_2 = W^x(\eta_2)$, $\eta_1, \eta_2 \in H$.

$$\begin{aligned}
\langle \xi_1, \theta(a)^*(\xi_2) \rangle &= \langle \theta(a)(\xi_1), \xi_2 \rangle \\
&= \langle (\theta(a) \circ W^x)(\eta_1), W^x(\eta_2) \rangle \\
&= \langle (W^x \circ T_x)(\eta_1), W^x(\eta_2) \rangle \\
&= \langle T_x(\eta_1), (W^{x*} \circ W^x)(\eta_2) \rangle = \langle \eta_1, T_x^*(\eta_2) \rangle \\
&= \langle (W^{x*} \circ W^x)(\eta_1), T_x^*(\eta_2) \rangle \\
&= \langle W^x(\eta_1), (W^x \circ T_x^*)(\eta_2) \rangle \quad \text{usando (2.7),} \\
&= \langle \xi_1, (\theta(a^*) \circ W^x)(\eta_2) \rangle = \langle \xi_1, \theta(a^*)(\xi_2) \rangle
\end{aligned}$$

Logo, $\theta(a^*) = \theta(a)^*$.

Definiremos agora, para cada $x \in M$, o $*$ -homomorfismo θ_x de $A_x = A$ em $\mathcal{B}(K)$ dado por

$$\theta_x(a) = Ad(\tilde{U}_x^* \theta(a)) = \tilde{U}_x^* \circ \theta(a) \circ \tilde{U}_x, \quad \text{para todo } a \in A_x.$$

Vamos provar que, se $x, y \in M$, com $x \leq y$, então $\theta_x = \theta_y \circ \alpha_y^x$, isto é, o diagrama seguinte comuta:

$$\begin{array}{ccc}
A_x & \xrightarrow{\alpha_y^x} & A_y \\
& \searrow \theta_x & \downarrow \theta_y \\
& & \mathcal{B}(K)
\end{array}$$

Se $z \in M$ e $y = z + x$, para provar a comutatividade do diagrama acima, é suficiente mostrar que

$$\theta(\alpha_z(a)) \circ \tilde{U}_z = \tilde{U}_z \circ \theta(a). \quad (2.8)$$

De fato, se $a \in A$, temos

$$\begin{aligned} \theta_y(\alpha_y^x(a)) &= \tilde{U}_y^* \circ \theta(\alpha_z(a)) \circ \tilde{U}_y = \tilde{U}_{x+z}^* \circ \theta(\alpha_z(a)) \circ \tilde{U}_{x+z} \\ &= \tilde{U}_x^* \circ \tilde{U}_z^* \circ \theta(\alpha_z(a)) \circ \tilde{U}_z \circ \tilde{U}_x \\ &\stackrel{(2.8)}{=} \tilde{U}_x^* \circ \tilde{U}_z^* \circ \tilde{U}_z \circ \theta(a) \circ \tilde{U}_x = \tilde{U}_x^* \circ \theta(a) \circ \tilde{U}_x \\ &= \theta_x(a). \end{aligned}$$

Como K_o é denso em K , para provar (2.8) basta mostrarmos que, para cada $t \in M$, vale:

$$\theta(\alpha_z(a)) \circ \tilde{U}_z \circ W^t = \tilde{U}_z \circ \theta(a) \circ W^t.$$

Se $\xi \in H$, temos:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_z(W^t(\xi)) &= \tilde{U}_z(\tilde{U}_t^*(\xi)) = \tilde{U}_z(\tilde{U}_{-t}(\xi)) = \tilde{U}_{z-t}(\xi) = \tilde{U}_{-t}(\tilde{U}_z(\xi)) \\ &= \tilde{U}_t^*(\underbrace{\tilde{U}_z(\xi)}_{\in H}) = W^t(W_z(\xi)). \end{aligned}$$

Logo, $\tilde{U}_z \circ W^t = W^t \circ W_z$. Assim,

$$\begin{aligned} \theta(\alpha_z(a)) \circ \tilde{U}_z \circ W^t &= \theta(\alpha_z(a)) \circ W^t \circ W_z \\ &= W^t \circ \varphi(\alpha_t(\alpha_z(a))) \circ W_z \\ &= W^t \circ \varphi(\alpha_z(\alpha_t(a))) \circ W_z \\ &= W^t \circ W_z \circ \varphi(\alpha_t(a)) \circ W_z^* \circ W_z \\ &= \tilde{U}_z \circ W^t \circ \varphi(\alpha_t(a)) \\ &= \tilde{U}_z \circ \theta(a) \circ W^t. \end{aligned}$$

Então, a condição (2.8) se verifica e, portanto, o diagrama comuta.

Aplicando a condição (i) da definição 1.40 ao sistema $(\mathcal{B}(K), \{\theta_x\}_{x \in M})$, concluímos que existe um único *-homomorfismo $\tilde{\varphi} : B \rightarrow \mathcal{B}(K)$ tal que, para todo $x \in M$, $\tilde{\varphi} \circ \alpha^x = \theta_x$, ou seja, o diagrama seguinte comuta:

$$\begin{array}{ccc}
A_x & \xrightarrow{\alpha^x} & B \\
& \searrow \theta_x & \downarrow \tilde{\varphi} \\
& & B(K)
\end{array}$$

Queremos provar que para todo $x \in M$ e $b \in B$ vale

$$\tilde{\varphi} \circ \beta_x(b) = \tilde{U}_x \circ \tilde{\varphi}(b) \circ \tilde{U}_x^*. \quad (2.9)$$

Mas $\bigcup_{x \in M} \alpha^x(A_x)$ é denso em B . Assim, podemos mostrar (2.9) apenas para os elementos da forma $\alpha^y(a)$, com $y \in M$ e $a \in A$, ou seja, obtemos

$$\tilde{\varphi}(\beta_x(\alpha^y(a))) = \tilde{U}_x \circ \tilde{\varphi}(\alpha^y(a)) \circ \tilde{U}_x^*,$$

e, de (2.1),

$$\tilde{\varphi}(\alpha^y(\alpha_x(a))) = \tilde{U}_x \circ \tilde{\varphi}(\alpha^y(a)) \circ \tilde{U}_x^*.$$

Como $(\tilde{\varphi} \circ \alpha^y)(a) = \theta_y(a) = \tilde{U}_y^* \circ \theta(a) \circ \tilde{U}_y$, temos então

$$\tilde{U}_y^* \circ \theta(\alpha_x(a)) \circ \tilde{U}_y = \tilde{U}_x \circ \tilde{U}_y^* \circ \theta(a) \circ \tilde{U}_y \circ \tilde{U}_x^*.$$

Dado que os operadores $\tilde{U}_s$ e $\tilde{U}_r^*$ comutam para todo $r, s \in M$, da igualdade acima temos, então,

$$\tilde{U}_y^* \circ \theta(\alpha_x(a)) \circ \tilde{U}_y = \tilde{U}_y^* \circ \tilde{U}_x \circ \theta(a) \circ \tilde{U}_x^* \circ \tilde{U}_y.$$

Como $\tilde{U}_y$ é operador unitário, chegamos finalmente a

$$\theta(\alpha_x(a)) = \tilde{U}_x \circ \theta(a) \circ \tilde{U}_x^*.$$

Mas a igualdade acima é consequência de (2.8), o que prova (2.9).

Temos portanto que:

1. $\tilde{\varphi}$ é representação de B em K .
2. $\tilde{U}$ é representação unitária de G em K .
3. $\tilde{\varphi}(\beta_g(b)) = \tilde{U}_g \circ \tilde{\varphi}(b) \circ \tilde{U}_g^*, \forall g \in G, \forall b \in B$.

Então, a terna $(\tilde{\varphi}, \tilde{U}, K)$ é uma representação covariante do C^* -sistema dinâmico clássico (B, G, β) .

Vamos agora enunciar novamente o teorema 2.14 para que possamos demonstrá-lo em seguida.

Teorema 2.14 *Seja (φ, W) representação covariante projetiva do C^* -sistema dinâmico não clássico (A, M, α) em uma C^* -álgebra com unidade D . Então, existe um único $*$ -homomorfismo π de C em D satisfazendo $\pi \circ i = \varphi$ e $\pi \circ V = W$.*

Demonstração: 1. *Unicidade*

Suponhamos que existam os $*$ -homomorfismos π_1 e π_2 nas condições do enunciado. Pelo teorema 2.11, basta verificar que π_1 e π_2 coincidem nos elementos da forma $V_y^* i(a) V_x$, com $x, y \in M$ e $a \in A$. Assim,

$$\begin{aligned} \pi_1(V_y^* i(a) V_x) &= \pi_1(V_y^*) \pi_1(i(a)) \pi_1(V_x) = W_y^* \varphi(a) W_x \\ &= \pi_2(V_y^*) \pi_2(i(a)) \pi_2(V_x) = \pi_2(V_y^* i(a) V_x). \end{aligned}$$

Portanto, $\pi_1 = \pi_2$.

2. *Existência*

Sendo $Z = B \rtimes_{\beta} G$, pelo teorema 1.52 existe uma correspondência biunívoca entre as representações covariantes $(\tilde{\varphi}, \tilde{U}, K)$ do C^* -sistema dinâmico clássico (B, G, β) e as representações não-degeneradas $(\tilde{\varphi} \times \tilde{U}, K)$ de Z .

Assim, existe um único $*$ -homomorfismo $\psi : Z \rightarrow \mathcal{B}(K)$ tal que

$$\psi(b U_g) = \tilde{\varphi}(b) \tilde{U}_g, \quad \forall b \in B, \quad \forall g \in G.$$

Podemos agora definir a aplicação

$$\begin{aligned} \pi &: C \rightarrow \mathcal{B}(H) \\ c &\mapsto \pi(c) = (W^o)^* \circ \psi(c) \circ W^o. \end{aligned}$$

Antes de mostrarmos que π é $*$ -homomorfismo, precisamos provar que $W^o(W^o)^* = \psi(i(1))$ e, conseqüentemente, $W^o(W^o)^*$ comuta com todos os elementos de $\psi(C)$, pois $i(1) = p$ é a unidade de C . Observemos que

$$\begin{aligned} i. \quad \psi(i(1))^2 &= \psi(\alpha^o(1)) \circ \psi(\alpha^o(1)) \\ &= \psi(\alpha^o(1) \circ \alpha^o(1)) = \psi(\alpha^o(1 \cdot 1)) = \psi(i(1)) \end{aligned}$$

e

$$\psi(i(1))^* = \psi(i(1)).$$

$$\begin{aligned}
ii. \quad (W^o(W^o)^*)^2 &= W^o \underbrace{(W^o)^* W^o (W^o)^*}_{Id} = W^o(W^o)^* \\
(W^o(W^o)^*)^* &= W^o(W^o)^*.
\end{aligned}$$

Assim, $\psi(i(1))$ e $W^o(W^o)^*$ são projeções. Como $W^o(H) = H$, temos $W^o(W^o)^*(K) = H$. Logo, basta mostrarmos que $\psi(i(1))(K) = H$.

(1) $\psi(i(1))(K) \subseteq H$: como $K_o = \bigcup_{x \in M} W^x(H)$ é denso em K , basta mostrar que $\psi(i(1))(W^x(H)) \subseteq H$, para todo $x \in M$.

$$\begin{aligned}
\psi(i(1)) \circ W^x &= \psi(\alpha^o(1)) \circ W^x = \psi(U_o \circ \alpha^o(1) \circ U_o^*) \circ W^x \\
&= \tilde{U}_o \circ \tilde{\varphi}(\alpha^o(1)) \circ \tilde{U}_o^* \circ W^x = \tilde{U}_o \circ \theta_o(1) \circ \tilde{U}_o^* \circ W^x \\
&= \tilde{U}_o \circ \tilde{U}_o^* \circ \theta(1) \circ \tilde{U}_o \circ \tilde{U}_o^* \circ W^x \\
&= \theta(1) \circ W^x = W^x \circ \varphi(\alpha_x(1)) \\
&= W^x \circ W_x \circ \varphi(1) \circ W_x^* = W^o \circ Id \circ W_x^* \\
&= W^o \circ W_x^*
\end{aligned}$$

Como $W_x^*(K) \subseteq H$ e $W^o(H) = H$, concluímos que $\psi(i(1))(W^x(H)) \subseteq H$, para todo $x \in M$.

(2) $H \subseteq \psi(i(1))(K)$: substituindo, na igualdade obtida em (1), x por 0, temos

$$\psi(i(1)) \circ W^o = W^o \circ W_o^* = W^o.$$

Assim, $\psi(i(1))(W^o(H)) = W^o(H) = H$. Logo, $H \subseteq \psi(i(1))(K)$.

Vamos, então, mostrar que π é $*$ -homomorfismo. Tomemos $c, d \in C$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

▷ π é linear.

$$\begin{aligned}
\pi(c + \lambda d) &= (W^o)^* \circ \psi(c + \lambda d) \circ W^o = (W^o)^* \circ (\psi(c) + \lambda \psi(d)) \circ W^o \\
&= (W^o)^* \circ \psi(c) \circ W^o + \lambda ((W^o)^* \circ \psi(d) \circ W^o) \\
&= \pi(c) + \lambda \pi(d)
\end{aligned}$$

▷ π preserva involução.

$$\begin{aligned}
\pi(c^*) &= (W^o)^* \circ \psi(c^*) \circ W^o = (W^o)^* \circ \psi(c)^* \circ W^o \\
&= [(W^o)^* \circ \psi(c) \circ W^o]^* = \pi(c)^*
\end{aligned}$$

▷ π preserva a multiplicação.

$$\begin{aligned}
\pi(cd) &= (W^o)^* \circ \psi(cd) \circ W^o \\
&= \underbrace{(W^o)^* W^o}_{Id} \circ (W^o)^* \circ \psi(c) \circ \psi(d) \circ W^o \\
&= (W^o)^* \circ W^o (W^o)^* \circ \psi(c) \circ \psi(d) \circ W^o \\
&= (W^o)^* \circ \psi(c) \circ W^o \circ (W^o)^* \circ \psi(d) \circ W^o \\
&= \pi(c) \circ \pi(d)
\end{aligned}$$

Finalmente, podemos mostrar a universalidade da C^* -álgebra C . Sejam $a \in A$ e $x \in M$.

$$\begin{aligned}
i. \quad \pi(i(a)) &= (W^o)^* \circ \psi(\alpha^o(a)) \circ W^o = (W^o)^* \circ \tilde{\varphi}(\alpha^o(a)) \circ W^o \\
&= (W^o)^* \circ \theta_o(a) \circ W^o = (W^o)^* \circ \underbrace{\tilde{U}_o^*}_{Id} \circ \theta(a) \circ \underbrace{\tilde{U}_o^*}_{Id} \circ W^o \\
&= (W^o)^* \circ W^o \circ \varphi(\alpha_o(a)) = \varphi(a)
\end{aligned}$$

Logo, $\pi \circ i = \varphi$.

$$\begin{aligned}
ii. \quad \pi(V_x) &= (W^o)^* \circ \psi(V_x) \circ W^o = (W^o)^* \circ \psi(U_x i(1)) \circ W^o \\
&= (W^o)^* \circ \tilde{U}_x \circ \psi(i(1)) \circ W^o \\
&= (W^o)^* \circ \tilde{U}_x \circ W^o \circ (W^o)^* \circ W^o \\
&= (W^o)^* \circ \tilde{U}_x \circ W^o = (W^o)^* \circ W^o \circ W_x \\
&= W_x
\end{aligned}$$

Logo, $\pi \circ V = W$. ■

O teorema que acabamos de demonstrar justifica o fato de C ser chamada a **álgebra covariante** do C^* -sistema dinâmico (A, M, α) , sendo denotada por $C^*(A, M, \alpha)$. Também podemos dizer que C é o **produto cruzado** da C^* -álgebra A pelo semigrupo M sob a ação de α .

Capítulo 3

As Álgebras de Cuntz

O principal exemplo de uma C^* -álgebra que pode ser vista como um produto cruzado por endomorfismo são as álgebras de Cuntz, denotadas por $\mathcal{O}_n$. Na realidade, foi o trabalho de J. Cuntz [3] sobre as álgebras $\mathcal{O}_n$ que motivou o estudo do produto cruzado por endomorfismo.

Iniciaremos este capítulo discutindo brevemente as C^* -álgebras universais geradas por elementos e relações. A seguir, descreveremos a álgebra $\mathcal{O}_n$, que é gerada por um conjunto de duas ou mais isometrias satisfazendo uma determinada relação. Finalmente, provaremos que essa C^* -álgebra pode ser vista como o produto cruzado de uma UHF-álgebra por um endomorfismo.

3.1 A C^* -álgebra universal gerada por elementos e relações

As C^* -álgebras universais geradas por elementos e relações têm desempenhado um papel importante em vários trabalhos publicados nos últimos anos na área de C^* -álgebras, tais como [9], [2], [11], [7] e [13].

Faremos aqui uma breve descrição, num caso particular, desse tipo de C^* -álgebra, suficiente para que possamos construir as álgebras de Cuntz, cujo estudo é o principal objetivo deste capítulo. Estudos mais gerais das C^* -álgebras universais geradas por elementos e relações podem ser encontrados

em [1] e [12].

Sejam $G = \{a_i : i \in I\}$ um conjunto de elementos de uma C^* -álgebra, $G^* = \{a_i^* : i \in I\}$ e $\mathcal{R}$ um conjunto de relações do tipo

$$\|p(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}, a_{i_1}^*, \dots, a_{i_n}^*)\| \leq M, \quad (3.1)$$

sendo p um polinômio de $2n$ variáveis, com coeficientes complexos e M um número real não negativo.

Definição 3.1 *Sejam A uma C^* -álgebra e $G = \{a_i : i \in I\}$ um subconjunto de A cujos elementos satisfazem as relações de $\mathcal{R}$. Dizemos que A é **universal** para o par $(G, \mathcal{R})$ se, dada uma C^* -álgebra A' e um subconjunto $G' = \{a'_i : i \in I\}$ de A' cujos elementos satisfazem as relações de $\mathcal{R}$, existe um único $*$ -homomorfismo sobrejetor $\varphi : A \rightarrow A'$ tal que $\varphi(a_i) = a'_i$, para todo $i \in I$.*

Tal C^* -álgebra, quando existe, é única, a menos de isomorfismos. Esta propriedade é demonstrada na

Proposição 3.2 *Se A e A' são C^* -álgebras universais para o par $(G, \mathcal{R})$, então A e A' são isomorfas.*

Demonstração: Sejam os conjuntos $\{a_i : i \in I\} \subseteq A$ e $\{a'_i : i \in I\} \subseteq A'$, cujos elementos satisfazem as condições de $\mathcal{R}$.

Da universalidade das C^* -álgebras A e A' , existem $*$ -homomorfismos sobrejetores $\varphi : A \rightarrow A'$ e $\rho : A' \rightarrow A$ tais que, para todo $i \in I$, $\varphi(a_i) = a'_i$ e $\rho(a'_i) = a_i$. Daí, $(\rho \circ \varphi)(a_i) = a_i$ e $(\varphi \circ \rho)(a'_i) = a'_i$.

Usando novamente que A é universal, temos que Id_A é o único $*$ -homomorfismo que leva a_i em a_i . Analogamente, $Id_{A'}$ é o único $*$ -homomorfismo que leva a'_i em a'_i . Portanto, $\rho \circ \varphi = Id_A$ e $\varphi \circ \rho = Id_{A'}$. ■

As próximas definições nos ajudarão a obter concretamente a C^* -álgebra universal para o par $(G, \mathcal{R})$, quando ela existir.

Definição 3.3 *Seja H um espaço de Hilbert. Um conjunto $\{\pi(a_i) : i \in I\}$ de operadores limitados de H é chamado uma **representação** π do par $(G, \mathcal{R})$ se $\pi(a_i^*) = \pi(a_i)^*$, para todo $i \in I$, e seus elementos satisfazem as relações de $\mathcal{R}$.*

Definição 3.4 O par $(G, \mathcal{R})$ é *admissível* se, para todo $i \in I$,

$$\sup\{\|\pi(a_i)\| : \pi \text{ é representação de } (G, \mathcal{R})\} = M_i < \infty.$$

Observação: Seja $\mathcal{S} = \{s_i : i \in I\}$ um conjunto não vazio. Denotaremos o conjunto de todos os polinômios de coeficientes complexos nas variáveis s_i por $\text{pol } \mathcal{S}$.

Dado o par admissível $(G, \mathcal{R})$, seja $\mathcal{F}(G) = \text{pol}\{a_i, a_i^* : i \in I\}$. Observe-mos que $\mathcal{F}(G)$ é uma $*$ -álgebra.

É fácil ver que toda representação de $(G, \mathcal{R})$ em um espaço de Hilbert H pode ser estendida de maneira única a um $*$ -homomorfismo de $\mathcal{F}(G)$ em $\mathcal{B}(H)$. Assim, se $a \in \mathcal{F}(G)$, definimos

$$\|a\|_u = \sup\{\|\pi(a)\| : \pi \text{ é representação de } (G, \mathcal{R})\}.$$

Como $(G, \mathcal{R})$ é admissível, $\|\cdot\|_u$ é uma C^* -semi-norma em $\mathcal{F}(G)$.

Seja $\mathcal{N} = \{x : \|x\|_u = 0\}$. Pela proposição 1.35, o completamento de $\mathcal{F}(G)/\mathcal{N}$ pela norma definida por $\|[x]\| = \|x\|_u$, para todo $x \in \mathcal{F}(G)$, é uma C^* -álgebra, que denotaremos por $C^* \langle G, \mathcal{R} \rangle$.

Teorema 3.5 *Seja $(G, \mathcal{R})$ admissível. Então, $C^* \langle G, \mathcal{R} \rangle$ é C^* -álgebra universal para $(G, \mathcal{R})$.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [1].

Definição 3.6 Dizemos que $C^* \langle G, \mathcal{R} \rangle$, ou qualquer C^* -álgebra isomorfa a ela, é a **C^* -álgebra universal** gerada por G satisfazendo as relações de $\mathcal{R}$.

3.2 Descrição das álgebras de Cuntz

Vamos agora definir as álgebras de Cuntz e descrever suas principais propriedades.

Definição 3.7 *Sejam $n \in \mathbb{N}$ fixado, $n \geq 2$ e uma seqüência finita $S_1, \dots, S_n$ de isometrias que satisfazem a relação*

$$\sum_{i=1}^n S_i S_i^* = 1. \quad (3.2)$$

A C^ -álgebra universal gerada pelas isometrias $S_1, \dots, S_n$ é chamada **álgebra de Cuntz** e denotada por $\mathcal{O}_n$.*

Observemos que a condição (3.2) pode ser escrita como $\sum_{i=1}^n S_i S_i^* - 1 = 0$ e, portanto, ela é uma relação do tipo descrito em (3.1), para $M = 0$. Com isso, faz sentido tomarmos a C^* -álgebra universal gerada pelas isometrias $S_1, \dots, S_n$ satisfazendo a relação (3.2).

Vamos mostrar algumas propriedades que decorrem da definição 3.7. Para tanto, precisaremos de alguns resultados gerais.

Lema 3.8 *Se p, q são projeções de uma C^* -álgebra A com unidade, então são equivalentes:*

- (i) *p e q são mutuamente ortogonais, isto é, $pq = 0$.*
- (ii) *$p + q$ é projeção.*
- (iii) *$p + q \leq 1$.*

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Vejamos inicialmente que $pq = 0 \Rightarrow pqqp = 0 \Rightarrow (qp)^* qp = 0$. Então, $0 = \|(qp)^* qp\| = \|qp\|^2$. Daí, $qp = 0$. Assim, temos

$$(p + q)^* = p^* + q^* = p + q \text{ e, daí, } p + q \text{ é auto-adjunto. Além disso,}$$

$$(p + q)^2 = p^2 + \underbrace{pq}_{=0} + \underbrace{qp}_{=0} + q^2 = p^2 + q^2 = p + q. \text{ Daí, } p + q \text{ é projeção.}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Seja $t = p + q$.

De 2.2.5(1) de [14], temos que $A^+ = \{a^* a : a \in A\}$. Mas t é projeção, ou seja, $t = t^2 = t^* t$. Assim, $t \geq 0$. Usando 2.2.3 de [14], como $1 \geq 0$ e $t \geq 0$, então $1 + t \geq 0$.

Como $0 \leq 1 + t$, de 2.2.5(2) de [14], temos então

$$\begin{aligned}
(1-t)^* \cdot 0 \cdot (1-t) &\leq (1-t)^*(1+t)(1-t) \Rightarrow \\
0 &\leq (1-t)(1+t)(1-t) \Rightarrow \\
0 &\leq 1-t-t^2+t^3 = 1-t-t+t \Rightarrow \\
0 &\leq 1-t, \text{ isto é, } t \leq 1.
\end{aligned}$$

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Se $p+q \leq 1$, de 2.2.5(2) de [14] temos que $q^*(p+q)q \leq q^*q$. Daí,

$$qpq + q^3 \leq q^2 \Rightarrow qpq \leq 0 \Rightarrow -qpq \geq 0 \Rightarrow -qppq \geq 0.$$

Então, $-(pq)^*(pq) \geq 0$. De 2.2.4 de [14], $pq = 0$ e p e q são mutuamente ortogonais. ■

Corolário 3.9 *Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Se $p_1, p_2, \dots, p_n$ são projeções de uma C^* -álgebra A com unidade, então são equivalentes:*

(i) $p_1, p_2, \dots, p_n$ são mutuamente ortogonais, isto é, $p_i p_j = 0$, para todo $1 \leq i, j \leq n$, com $i \neq j$.

(ii) $p_1 + p_2 + \dots + p_n$ é projeção.

(iii) $p_1 + p_2 + \dots + p_n \leq 1$.

Demonstração: Basta utilizar indução finita e o lema 3.8. ■

Voltando à família de isometrias da definição 3.7, podemos agora demonstrar uma importante propriedade, descrita pela seguinte

Proposição 3.10 *Sejam $S_1, \dots, S_n$, com $n \geq 2$, isometrias satisfazendo a relação $\sum_{i=1}^n S_i S_i^* = 1$. Então, $S_i^* S_j = 0$, se $i \neq j$.*

Demonstração: Como cada S_i é isometria, $(S_i S_i^*)^2 = S_i S_i^* S_i S_i^* = S_i S_i^*$, ou seja, $S_i S_i^*$ é projeção. Além disso, da hipótese, $\sum_{i=1}^n S_i S_i^* \leq 1$ e assim, do corolário 3.9, temos que $(S_i S_i^*)(S_j S_j^*) = 0$, se $i \neq j$. Multiplicando por S_i^* à esquerda e S_j à direita, chegamos que $S_i^* S_j = 0$, se $i \neq j$. ■

Para demonstrarmos importantes propriedades das álgebras $\mathcal{O}_n$, trabalharemos com palavras formadas pelos seus geradores S_i . Dado $k \in \mathbb{N}$, seja W_k^n o conjunto de todas as k -uplas $(j_1, \dots, j_k)$, com $j_i \in \{1, \dots, n\}$, para $i = 1, \dots, k$. Sejam ainda $W_0^n = \{0\}$ e $W_\infty^n = \bigcup_{k=0}^\infty W_k^n$.

Consideraremos também, para $\alpha = (j_1, \dots, j_k) \in W_k^n$, $S_\alpha = S_{j_1} S_{j_2} \dots S_{j_k}$. Em W_0^n , temos $S_0 = 1$. Denotaremos ainda o comprimento de α como $\ell(\alpha) = k$, sendo $\ell(0) = 0$.

Finalmente, se $\mu, \nu \in W_\infty^n$, definimos $\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \text{se } \mu = \nu \\ 0, & \text{se } \mu \neq \nu \end{cases}$.

Lema 3.11 *Sejam $\mu, \nu \in W_\infty^n$, $P = S_\mu S_\mu^*$ e $Q = S_\nu S_\nu^*$.*

a) *Se $\ell(\mu) = \ell(\nu)$, então $S_\mu^* S_\nu = \delta_{\mu\nu} \cdot 1$.*

b) *Suponha que $S_\mu^* S_\nu \neq 0$.*

i. *se $\ell(\mu) = \ell(\nu)$, então $S_\mu = S_\nu$ e $P = Q$.*

ii. *se $\ell(\mu) < \ell(\nu)$, então $S_\nu = S_\mu S_{\mu'}$, com $\mu' \in W_{\ell(\nu)-\ell(\mu)}^n$ e $P > Q$.*

iii. *se $\ell(\mu) > \ell(\nu)$, então $S_\mu = S_\nu S_{\nu'}$, com $\nu' \in W_{\ell(\mu)-\ell(\nu)}^n$ e $P < Q$.*

Demonstração: a) basta lembrarmos que $S_i^* S_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$.

b) i. Segue diretamente de (a).

ii. Seja $S_\nu = S_\alpha S_{\mu'}$, onde $\ell(\alpha) = \ell(\mu)$ e $\ell(\mu') = \ell(\nu) - \ell(\mu)$. Usando (a), temos que $S_\mu^* S_\alpha = \delta_{\mu\alpha} \cdot 1 \Rightarrow S_\mu^* S_\alpha S_{\mu'} = \delta_{\mu\alpha} S_{\mu'}$, ou seja, $S_\mu^* S_\nu = \delta_{\mu\alpha} S_{\mu'}$.

Mas $S_\mu^* S_\nu \neq 0$ e, portanto, $\mu = \alpha$. Então, $S_\nu = S_\mu S_{\mu'}$.

Além disso, $Q = S_\nu S_\nu^* = S_\mu S_{\mu'} S_{\mu'}^* S_\mu^*$. Como $P = S_\mu S_\mu^*$, concluímos que $P > Q$.

iii. Análogo ao caso (ii). ■

Lema 3.12 *Sejam $\mathcal{S} = \{S_i, S_i^* : 1 \leq i \leq n\}$ e $M \neq 0$ uma palavra formada por elementos de $\mathcal{S}$. Então, existem dois únicos elementos $\mu, \nu \in W_\infty^n$ tais que $M = S_\mu S_\nu^*$.*

Demonstração: Seja $M = X_1 X_2 \dots X_r$, onde $X_j \in \mathcal{S}$, com $j = 1, \dots, r$. Vamos eliminar todos os termos da forma $X_i X_{i+1}$ tais que $X_i X_{i+1} = 1$ (por exemplo, se $X_i X_{i+1} = S_1^* S_1 = 1$). Obtemos uma expressão reduzida para M , com $M = Y_1 Y_2 \dots Y_s$, onde $Y_i Y_{i+1} \neq 1, i = 1, \dots, s-1$. Como $S_i^* S_j = \delta_{ij} \cdot 1$ e $M \neq 0$, temos que se $Y_j \in \{S_i : 1 \leq i \leq n\}$, então $Y_{j-1} \in \{S_i^* : 1 \leq i \leq n\}$, para $j = 2, \dots, s$.

Temos agora três casos a considerar. 1) Se $Y_s \in \{S_i : 1 \leq i \leq n\}$, então $Y_j \in \{S_i : 1 \leq i \leq n\}$, para $j = 1, \dots, s$. Neste caso, concluímos que $M = S_\mu S_0^*$, onde $\mu = (k_1, \dots, k_s)$ e $Y_j = S_{k_j}$, para $j = 1, \dots, s$.

2) Se $Y_1 \in \{S_i^* : 1 \leq i \leq n\}$, então $Y_j \in \{S_i^* : 1 \leq i \leq n\}$, para $j = 1, \dots, s$. Neste caso, concluímos que $M = S_0 S_\nu^*$, onde $\nu = (k_s, \dots, k_1)$ e $Y_j = S_{k_j}^*$, para $j = 1, \dots, s$.

3) Seja j_0 o maior número de 1 a $s - 1$ tal que $Y_{j_0} \in \{S_i : 1 \leq i \leq n\}$. Então, se $1 \leq j \leq j_0$, temos que $Y_j \in \{S_i : 1 \leq i \leq n\}$. Além disso, se $j_0 + 1 \leq j \leq s$, temos que $Y_j \in \{S_i^* : 1 \leq i \leq n\}$. Fazendo $\mu = (k_1, \dots, k_{j_0})$ e $\nu = (k_s, \dots, k_{j_0+1})$, concluímos que $M = S_\mu S_\nu^*$, sendo $Y_j = S_{k_j}$, para $j = 1, \dots, j_0$ e $Y_j = S_{k_j}^*$, para $j = j_0 + 1, \dots, s$.

Para verificarmos a unicidade de μ e ν , consideremos $\alpha, \beta \in W_\infty^n$ tais que $M = S_\alpha S_\beta^*$.

Como $M^*M \neq 0$, então $(S_\mu S_\nu^*)^*(S_\alpha S_\beta^*) \neq 0 \Rightarrow S_\nu(S_\mu^* S_\alpha) S_\beta^* \neq 0$. Daí, $S_\mu^* S_\alpha \neq 0$.

Além disso, $P = S_\mu S_\mu^* = S_\mu S_\nu^* S_\nu S_\mu^* = MM^* = S_\alpha S_\beta^* S_\beta S_\alpha^* = S_\alpha S_\alpha^* = Q$.

Então, pelo lema 3.11, temos que $\ell(\mu) = \ell(\alpha)$ e $S_\mu = S_\alpha$.

Analogamente, provamos que $\ell(\nu) = \ell(\beta)$ e $S_\nu = S_\beta$. ■

Chamemos de $\mathcal{F}_k^n$ a C^* -álgebra gerada pelo conjunto $\{S_\mu S_\nu^* : \mu, \nu \in W_k^n\}$. Seja ainda $\mathcal{F}_0^n = \mathbb{C}1$. Denotaremos por $\mathcal{M}_r$ a $*$ -álgebra das matrizes complexas $r \times r$.

Observação: O conjunto $\mathcal{M}_n$, $n \in \mathbb{N}$, possui uma importante base formada pelas **matrizes unitárias**. As matrizes unitárias canônicas $E_{ij} = (e_{k\ell})_{k,\ell}$ são dadas por:

$$e_{k\ell} = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq i \text{ ou } \ell \neq j \\ 1, & \text{se } k = i \text{ e } \ell = j \end{cases}.$$

Em outras palavras, as matrizes E_{ij} apresentam 1 na posição (i, j) e 0 em todas as demais posições.

É importante notar que as matrizes unitárias apresentam as seguintes propriedades:

- i. $E_{ij} E_{k\ell} = \delta_{jk} \cdot E_{i\ell}$.
- ii. $(E_{ij})^* = E_{ji}$.

Proposição 3.13 $\mathcal{F}_k^n$ é $*$ -isomorfo a $\mathcal{M}_{n^k}$ e $\mathcal{F}_k^n \subseteq \mathcal{F}_{k+1}^n$, para $k = 0, 1, 2, \dots$

Demonstração: Sejam $\mu, \mu', \nu, \nu' \in W_k^n$. Temos, então:

I. De acordo com o lema 3.11 (a), $(S_\mu S_\nu^*)(S_{\mu'} S_{\nu'}^*) = \delta_{\nu\nu'} \cdot S_\mu S_{\mu'}^*$.

II. $(S_\mu S_\nu^*)^* = S_\nu S_\mu^*$.

III. O conjunto W_k^n possui n^k elementos, pois ele é formado por k -uplas em que cada componente pode assumir n valores diferentes.

De (I) e (II), concluímos que o conjunto $\{S_\mu S_\nu^* : \mu, \nu \in W_k^n\}$, que são os geradores de $\mathcal{F}_k^n$, forma um sistema de matrizes unitárias.

De (III), podemos estabelecer uma função bijetora ϕ entre os conjuntos $K = \{1, 2, \dots, n^k\}$ e W_k^n . Assim, temos uma bijeção entre os geradores de $\mathcal{F}_k^n$ e $\mathcal{M}_{n^k}$ dada por $S_{\phi(i)} S_{\phi(j)}^* \mapsto E_{ij}$, onde $i, j \in K$, o que completa a demonstração de que $\mathcal{F}_k^n$ é $*$ -isomorfo a $\mathcal{M}_{n^k}$.

Tomemos agora $S_\mu S_\nu^* \in \mathcal{F}_k^n$. Como $\sum_{i=1}^n S_i S_i^* = 1$, temos

$$S_\mu S_\nu^* = S_\mu (\sum_{i=1}^n S_i S_i^*) S_\nu^* = \sum_{i=1}^n (S_\mu S_i) (S_i^* S_\nu^*)$$

Mas $(S_\mu S_i) (S_i^* S_\nu^*) \in \mathcal{F}_{k+1}^n$, para todo $i = 1, \dots, n$. Logo, $S_\mu S_\nu^* \in \mathcal{F}_{k+1}^n$ e $\mathcal{F}_k^n \subseteq \mathcal{F}_{k+1}^n$. ■

Vamos definir a seguir $\mathcal{F}^n$, uma sub- C^* -álgebra de $\mathcal{O}_n$ que desempenhará um papel fundamental na seqüência deste trabalho. Antes, porém, precisamos de outras duas definições.

Definição 3.14 Uma C^* -álgebra A é dita *simples* se $\{0\}$ e A são seus únicos ideais fechados.

Definição 3.15 Uma álgebra uniformemente hiperfinita, ou **UHF álgebra**, é uma C^* -álgebra A com unidade que possui uma seqüência crescente $(A_n)_{n=1}^\infty$, isto é, $A_n \subseteq A_{n+1}$, de sub- C^* -álgebras simples de dimensão finita, cada uma delas contendo a unidade de A , tal que $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ é densa em A .

Observações: 1. Pode-se provar que, se A é C^* -álgebra simples e tem dimensão finita, então é $*$ -isomorfa a $\mathcal{M}_k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. A demonstração deste fato pode ser vista na observação 6.2.1 de [14].

2. Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência crescente de sub- C^* -álgebras tal que A_n contém a unidade de A , para todo $n \in \mathbb{N}$, então pode-se provar que, se A_n

é $*$ -isomorfa a $\mathcal{M}_k$ e A_{n+1} é $*$ -isomorfa a $\mathcal{M}_\ell$, então k divide ℓ . Maiores detalhes podem ser vistos em III.5.1 de [4].

Seja $\mathcal{F}^n$ a C^* -álgebra gerada pela união de todos os $\mathcal{F}_k^n$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), ou seja,

$$\mathcal{F}^n = \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_k^n}.$$

Pela proposição 3.13 tem-se que $\mathcal{F}^n$ é uma UHF álgebra, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, toda álgebra de Cuntz $\mathcal{O}_n$ contém uma UHF álgebra $\mathcal{F}^n$.

O próximo teorema mostra que a obtenção das álgebras de Cuntz depende da escolha das isometrias $S_1, \dots, S_n$, o que representa uma propriedade bastante importante destas C^* -álgebras.

Teorema 3.16 *Seja $\{\hat{S}_1, \dots, \hat{S}_n\}$ uma seqüência finita de isometrias em uma C^* -álgebra qualquer, satisfazendo a condição $\sum_{i=1}^n \hat{S}_i \hat{S}_i^* = 1$. Então, $C^*(\hat{S}_1, \dots, \hat{S}_n)$ é isomorfa a $\mathcal{O}_n$.*

O nosso objetivo agora é provar este teorema. Vamos inicialmente obter alguns resultados necessários à sua demonstração.

Definição 3.17 *Uma **esperança** de uma C^* -álgebra em uma sub-álgebra é uma aplicação sobrejetora, positiva, idempotente e que conserva a unidade.*

Teorema 3.18 *Existe uma esperança fiel Φ_0 de $\mathcal{O}_n$ em $\mathcal{F}^n$.*

Demonstração: Sendo $\mathbb{T}$ o círculo de raio unitário do plano complexo, consideremos, para cada $\lambda \in \mathbb{T}$, o conjunto $\mathcal{S}_\lambda = \{\lambda S_i : 1 \leq i \leq n\} \subseteq \mathcal{O}_n$. Como $(\lambda S_i)^*(\lambda S_i) = \bar{\lambda} S_i^* \lambda S_i = S_i^* S_i = 1$ e $\sum_{i=1}^n \lambda S_i (\lambda S_i)^* = \sum_{i=1}^n S_i S_i^* = 1$, temos um conjunto de isometrias que satisfazem a condição (3.2).

Além disso, $\text{pol}\{S_i, S_i^* : 1 \leq i \leq n\} = \text{pol}\{\lambda S_i, \bar{\lambda} S_i^* : 1 \leq i \leq n\}$. Assim, podemos concluir que $\mathcal{O}_n = C^*(\mathcal{S}_\lambda)$.

Tomemos ainda o conjunto $\mathcal{S}_{1/\lambda} = \{\frac{1}{\lambda} S_i : 1 \leq i \leq n\} \subseteq \mathcal{O}_n$. Analogamente, temos $\mathcal{O}_n = C^*(\mathcal{S}_{1/\lambda})$.

Da universalidade de $\mathcal{O}_n$, existem dois endomorfismos sobrejetores de $\mathcal{O}_n$, que denotaremos por ρ_λ e $\rho_{1/\lambda}$, tais que, para $1 \leq i \leq n$, $\rho_\lambda(S_i) = \lambda S_i$ e $\rho_{1/\lambda}(S_i) = \frac{1}{\lambda} S_i$.

Mas $\rho_\lambda \circ \rho_{1/\lambda} = \rho_{1/\lambda} \circ \rho_\lambda = Id$ e, portanto, ρ_λ e $\rho_{1/\lambda}$ são automorfismos de $\mathcal{O}_n$.

Observemos ainda que $\rho_\lambda(S_i^*) = \rho_\lambda(S_i)^* = (\lambda S_i)^* = \bar{\lambda} S_i^*$, para $1 \leq i \leq n$.

Fixemos $X = S_\mu S_\nu^*$, com $\mu, \nu \in W_\infty^n$. Definindo a aplicação $f_X : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{O}_n$ por $f_X(\lambda) = \rho_\lambda(X)$, temos que

$$\begin{aligned} f_X(\lambda) &= \rho_\lambda(X) = \rho_\lambda(S_\mu S_\nu^*) = \rho_\lambda(S_\mu) \rho_\lambda(S_\nu^*) = \lambda^{\ell(\mu)} S_\mu \bar{\lambda}^{\ell(\nu)} S_\nu^* \\ &= \lambda^{\ell(\mu) - \ell(\nu)} S_\mu S_\nu^* = \lambda^{\ell(\mu) - \ell(\nu)} X. \end{aligned}$$

Como X está fixado, $\ell(\mu) - \ell(\nu)$ é constante e, portanto, f_X é contínua.

Se $X \in \text{span}\{S_\mu S_\nu^* : \mu, \nu \in W_\infty^n\}$, f_X é combinação linear finita de funções contínuas e assim é contínua.

Sejam agora $Y \in \mathcal{O}_n$ e $\varepsilon > 0$. Existe $X \in \text{span}\{S_\mu S_\nu^* : \mu, \nu \in W_\infty^n\}$ tal que $\|Y - X\| < \frac{\varepsilon}{3}$ pois esse conjunto é denso em $\mathcal{O}_n$.

Além disso, como mostramos que f_X é contínua em $\lambda_o \in \mathbb{T}$, existe $\delta > 0$ tal que se $|\lambda - \lambda_o| < \delta$, então $\|f_X(\lambda) - f_X(\lambda_o)\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Daí, se $|\lambda - \lambda_o| < \delta$,

$$\begin{aligned} \|f_Y(\lambda) - f_Y(\lambda_o)\| &\leq \|f_Y(\lambda) - f_X(\lambda)\| + \|f_X(\lambda) - f_X(\lambda_o)\| + \|f_X(\lambda_o) - f_Y(\lambda_o)\| \\ &< \|\rho_\lambda(Y - X)\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|\rho_{\lambda_o}(Y - X)\| \\ &\leq \|Y - X\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|Y - X\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Portanto, f_Y é contínua para todo $Y \in \mathcal{O}_n$.

Vamos definir, para todo $X \in \mathcal{O}_n$, a aplicação

$$\Phi_0(X) = \int_0^1 f_X(e^{2\pi it}) dt = \int_0^1 \rho_{e^{2\pi it}}(X) dt,$$

onde a integral é entendida como uma integral de Riemann.

Observemos que Φ_0 é uma contração, pois

$$\|\Phi_0(X)\| = \left\| \int_0^1 \rho_{e^{2\pi it}}(X) dt \right\| \leq \int_0^1 \|\rho_{e^{2\pi it}}(X)\| dt \leq \int_0^1 \|X\| dt = \|X\|.$$

Vamos agora mostrar que Φ_0 é uma esperança fiel de $\mathcal{O}_n$ em $\mathcal{F}^n$.

Se $\mu, \nu \in W_\infty^n$, temos que

$$\begin{aligned}\Phi_0(S_\mu S_\nu^*) &= \int_0^1 (e^{2\pi i t})^{\ell(\mu)} S_\mu \left(\overline{e^{2\pi i t}} \right)^{\ell(\nu)} S_\nu^* dt \\ &= \int_0^1 e^{2\pi i t(\ell(\mu) - \ell(\nu))} S_\mu S_\nu^* dt = \begin{cases} 0, & \text{se } \ell(\mu) \neq \ell(\nu) \\ S_\mu S_\nu^*, & \text{se } \ell(\mu) = \ell(\nu) \end{cases}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Segue, então, que

- Φ_0 conserva a unidade:

$$\Phi_0(1) = \Phi_0\left(\sum_{i=1}^n S_i S_i^*\right) = \sum_{i=1}^n \Phi_0(S_i S_i^*) \stackrel{(3.3)}{=} \sum_{i=1}^n S_i S_i^* = 1$$

- Φ_0 é positiva:

O elemento $(S_\mu S_\nu^*)^*(S_\mu S_\nu^*) = S_\nu S_\mu^* S_\mu S_\nu^* = S_\nu S_\nu^*$ pertence a $\mathcal{O}_n^+$. Mas $\Phi_0(S_\nu S_\nu^*) \stackrel{(3.3)}{=} S_\nu S_\nu^* \in \mathcal{O}_n^+$.

Tomemos então $X \in \text{pol}\{S_i, S_i^* : 1 \leq i \leq n\}$. Temos que

$$X^* X = \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i S_{\mu_i} S_{\nu_i}^* \right)^* \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j S_{\mu_j} S_{\nu_j}^* \right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \overline{\alpha_i} S_{\nu_i} S_{\mu_i}^* \in \mathcal{O}_n^+.$$

Daí, Φ_0 leva elementos positivos do conjunto $\text{pol}\{S_i, S_i^* : 1 \leq i \leq n\}$ em elementos positivos.

Seja $Y^* Y \in \mathcal{O}_n^+$, para algum $Y \in \mathcal{O}_n$. Podemos aproximar Y por elementos do conjunto $\text{pol}\{S_i, S_i^* : 1 \leq i \leq n\}$, já que este é denso em $\mathcal{O}_n$. Daí, $Y^* Y$ pode ser aproximado por elementos positivos desse conjunto. Como Φ_0 é contínua e $\mathcal{O}_n^+$ é fechado, concluímos que $\Phi_0(Y^* Y)$ é positivo em $\mathcal{O}_n$.

- A imagem de Φ_0 é um sub-conjunto de $\mathcal{F}^n$:

De (3.3), temos que se $X \in \text{pol}\{S_i, S_i^* : 1 \leq i \leq n\}$, então $\Phi_0(X) \in \mathcal{F}^n$. Mas $\mathcal{F}^n$ é sub- C^* -álgebra e, portanto, fechado. Então, da densidade de $\text{pol}\{S_i, S_i^* : 1 \leq i \leq n\}$ em $\mathcal{O}_n$ e da continuidade de Φ_0 , concluímos que $\Phi_0(X) \in \mathcal{F}^n$ para todo $X \in \mathcal{O}_n$.

- Φ_0 é idempotente:

Já vimos que $\Phi_0(X) \in \mathcal{F}^n$, para todo $X \in \mathcal{O}_n$. Mas se $X \in \mathcal{F}_k^n$ para algum $k \in \mathbb{N}$, por (3.3) temos que $\Phi_0(X) = X$. Como $\bigcup_{k=1}^n \mathcal{F}_k^n$ é denso

em $\mathcal{F}^n$ e Φ_0 é contínua, concluímos que $\Phi_0(\Phi_0(X)) = \Phi_0(X)$, para todo $X \in \mathcal{O}_n$.

- Φ_0 é sobrejetora:

No item anterior, mostramos que a restrição de Φ_0 a $\mathcal{F}^n$ é a identidade. Portanto, a imagem de Φ_0 é de fato igual a $\mathcal{F}^n$, ou seja, Φ_0 é sobrejetora.

- Φ_0 é fiel:

Observemos inicialmente que uma função positiva Φ é fiel se $Y \geq 0$ e $\Phi(Y) = 0$ implicam que $Y = 0$.

Ao provar que Φ_0 é positiva, vimos que se $X \in \text{pol}\{S_i, S_i^* : 1 \leq i \leq n\}$, então $X^*X = \sum_{i=1}^k \alpha_i \overline{\alpha_i} S_{\nu_i} S_{\nu_i}^*$, isto é, $X^*X \in \mathcal{F}^n$.

Se $Y \in \mathcal{O}_n$, então Y pode ser aproximado por elementos do conjunto $\text{pol}\{S_i, S_i^* : 1 \leq i \leq n\}$. Assim, como $\mathcal{F}^n$ é um conjunto fechado, concluímos que $Y^*Y \in \mathcal{F}^n$. Mas $\mathcal{O}_n^+ = \{X^*X : X \in \mathcal{O}_n\}$ e, portanto, $\mathcal{O}_n^+ \subseteq \mathcal{F}^n$.

Como Φ_0 restrita a $\mathcal{F}^n$ é a identidade, chegamos que $\Phi_0(Y^*Y) = Y^*Y$ para todo $Y \in \mathcal{O}_n$ e, assim, Φ_0 é fiel. ■

Lema 3.19 *Sejam $\mu, \nu \in W_\infty^n$, com $\ell(\mu) \neq \ell(\nu)$ e $\max\{\ell(\mu), \ell(\nu)\} \leq k$, com $k \in \mathbb{N}$. Se $S_\gamma = S_1^k S_2$, então $S_\gamma^*(S_\mu S_\nu^*) S_\gamma = 0$.*

Demonstração: Como $k \geq \ell(\mu)$, pelo lema 3.11, temos que

$$S_\gamma^* S_\mu = S_2^* (S_1^*)^k S_\mu = \begin{cases} 0, & \text{se } S_\mu \neq S_1^{\ell(\mu)} \\ S_2^* (S_1^*)^{k-\ell(\mu)}, & \text{se } S_\mu = S_1^{\ell(\mu)} \end{cases}.$$

$$\text{Analogamente, } S_\nu^* S_\gamma = S_\nu^* S_1^k S_2 = \begin{cases} 0, & \text{se } S_\nu \neq S_1^{\ell(\nu)} \\ S_1^{k-\ell(\nu)} S_2, & \text{se } S_\nu = S_1^{\ell(\nu)} \end{cases}.$$

Só é necessário analisar o caso em que $S_\gamma^* S_\mu \neq 0$ e $S_\nu^* S_\gamma \neq 0$. Assim,

$$S_\gamma^* S_\mu S_\nu^* S_\gamma = S_2^* (S_1^*)^{k-\ell(\mu)} S_1^{k-\ell(\nu)} S_2 = S_2^* S_1^{\ell(\mu)-\ell(\nu)} S_2 = 0.$$

Na igualdade acima, convencionamos $S_1^m = (S_1^*)^{\ell(m)}$ quando $m < 0$. ■

Lema 3.20 *Para cada inteiro positivo m , existe em $\mathcal{O}_n$ uma isometria W , que comuta com todo elemento de $\mathcal{F}_m^n$, tal que $\Phi_0(Y) = W^* Y W$, para todo*

$Y \in S$, sendo S o conjunto de todas as combinações lineares de elementos da forma $\{S_\mu S_\nu^* : \max\{\ell(\mu), \ell(\nu)\} \leq m\}$.

Demonstração: Seja $S_\gamma = S_1^{2m} S_2$. Vamos definir

$$W = \sum_{\ell(\eta)=m} S_\eta S_\gamma S_\eta^*, \text{ ou seja, } \eta \text{ varia no conjunto } W_m^n.$$

Provemos que W é uma isometria de $\mathcal{O}_n$:

$$\begin{aligned} W^* W &= \left(\sum_{\ell(\eta)=m} S_\eta S_\gamma S_\eta^* \right)^* \left(\sum_{\ell(\zeta)=m} S_\zeta S_\gamma S_\zeta^* \right) \\ &= \sum_{\ell(\eta)=m} \sum_{\ell(\zeta)=m} (S_\eta S_\gamma^*) (S_\eta^* S_\zeta) (S_\gamma S_\zeta^*) \\ &= \sum_{\ell(\eta)=m} \sum_{\ell(\zeta)=m} (S_\eta S_\gamma^*) (\delta_{\eta\zeta} \cdot 1) (S_\gamma S_\zeta^*) \\ &= \sum_{\ell(\eta)=m} S_\eta \underbrace{S_\gamma^* S_\gamma}_{=1} S_\eta^* = \sum_{\ell(\eta)=m} S_\eta S_\eta^* = 1. \end{aligned}$$

Além disso, se $\ell(\mu) = m = \ell(\nu)$, então

$$\begin{aligned} W S_\mu &= \sum_{\ell(\eta)=m} S_\eta S_\gamma (S_\eta^* S_\mu) = \sum_{\ell(\eta)=m} S_\eta S_\gamma (\delta_{\eta\mu} \cdot 1) = S_\mu S_\gamma \text{ e} \\ S_\nu^* W &= \sum_{\ell(\eta)=m} (S_\nu^* S_\eta) S_\gamma S_\eta^* = \sum_{\ell(\eta)=m} (\delta_{\nu\eta} \cdot 1) S_\gamma S_\eta^* = S_\gamma S_\nu^*. \end{aligned}$$

Portanto, o sistema de matrizes unitárias $S_\mu S_\nu^*$ de $\mathcal{F}_m^n$ satisfaz a equação $W (S_\mu S_\nu^*) = S_\mu S_\gamma S_\nu^* = (S_\mu S_\nu^*) W$ e, daí, W comuta com todo $X \in \mathcal{F}_m^n$.

Como W é isometria, temos ainda que $X W = W X \Rightarrow W^* X W = X$, se $X \in \mathcal{F}_m^n$.

Por outro lado, quando $\ell(\mu) \neq \ell(\nu)$ e $\max\{\ell(\mu), \ell(\nu)\} \leq m$, o lema 3.19 mostra que, se $\ell(\eta) = \ell(\zeta) = m$, então

$$S_\gamma (S_\eta^* S_\mu S_\nu^* S_\zeta) S_\gamma = S_\gamma (S_{\mu'} S_{\nu'}^*) S_\gamma = 0,$$

sendo a primeira igualdade garantida pelo lema 3.12 e $\max\{\ell(\mu'), \ell(\nu')\} \leq 2m$.

Portanto,

$$\begin{aligned} W^* S_\mu S_\nu^* W &= \left(\sum_{\ell(\eta)=m} S_\eta S_\gamma S_\eta^* \right)^* S_\mu S_\nu^* \left(\sum_{\ell(\zeta)=m} S_\zeta S_\gamma S_\zeta^* \right) \\ &= \sum_{\ell(\eta)=m} \sum_{\ell(\zeta)=m} S_\eta \left(\underbrace{S_\gamma^* S_\eta^* S_\mu S_\nu^* S_\zeta S_\gamma}_{=0} \right) S_\zeta^* = 0. \end{aligned}$$

Logo, se $\max\{\ell(\mu), \ell(\nu)\} \leq m$, então

$$W^* S_\mu S_\nu^* W = \begin{cases} 0, & \text{se } \ell(\mu) \neq \ell(\nu) \\ S_\mu S_\nu^*, & \text{se } \ell(\mu) = \ell(\nu) \end{cases}.$$

Do teorema 3.18, concluímos que $W^* Y W = \Phi_0(Y)$, para todo $Y \in S$. ■

Teorema 3.21 *Se $X \neq 0$ pertence a $\mathcal{O}_n$, então existem elementos $A, B \in \mathcal{O}_n$ tais que $A X B = 1$.*

Demonstração: Como $X \neq 0$ e Φ_0 é fiel, então $\Phi_0(X^* X) \neq 0$. Multipliquemos X pelo escalar $\frac{1}{\|\Phi_0(X^* X)\|^{\frac{1}{2}}}$. Deste modo, temos que $\|\Phi_0(X^* X)\| = 1$.

Podemos escolher um elemento auto adjunto $Y = Y^*$ no conjunto de todas as combinações lineares de elementos da forma $S_\mu S_\nu^*$, com $\mu, \nu \in W_\infty^n$, de modo que $\|X^* X - Y\| < \frac{1}{4}$, já que esse conjunto é denso em $\mathcal{O}_n$.

Mas $\|X^* X - Y\| < \frac{1}{4} \Rightarrow \|\Phi_0(X^* X - Y)\| < \frac{1}{4}$, pois Φ_0 é contração. Temos, portanto, que

$$\underbrace{\|\Phi_0(X^* X)\|}_{=1} - \|\Phi_0(Y)\| \leq \|\Phi_0(X^* X) - \Phi_0(Y)\| < \frac{1}{4} \Rightarrow \|\Phi_0(Y)\| > \frac{3}{4}.$$

Seja m o maior comprimento dentre as palavras envolvidas na expansão de Y . Pelo lema 3.20, existe uma isometria $W \in \mathcal{O}_n$ tal que $W^* Y W = \Phi_0(Y)$, sendo que $\Phi_0(Y) \in \mathcal{F}_m^n$.

Pela proposição 3.13, $\mathcal{F}_m^n$ é *-isomorfo a uma álgebra de matrizes. Tomemos assim $M \in \mathcal{M}_{n^m}$ uma matriz auto-adjunta. Então, M é diagonalizável, com $M = T D T^*$, onde T é matriz unitária e D é matriz diagonal. Além disso, $\|M\| = \|D\| = \max\{|\lambda_i|, i = 1, \dots, k\}$, onde $\lambda_i \in \mathbb{R}$ são os auto-valores de D .

Podemos tomar então uma projecção minimal P , isto é, cuja imagem tem dimensão 1, tal que $D P = P D = \|M\| P$. Daí,

$$M(T P T^*) = T D T^* T P T^* = T D P T^* = T P D T^* = T P T^* T D T^* = (T P T^*) M$$

e, portanto, existe uma projecção $E = T P T^*$ tal que $M E = E M = \|M\| E$.

Pelo exposto acima, existe uma projecção minimal $E \in \mathcal{F}_m^n$ tal que

$$E \Phi_0(Y) = \Phi_0(Y) E = \|\Phi_0(Y)\| E > \frac{3}{4} E.$$

Tomemos um unitário $U \in \mathcal{F}_m^n$ tal que $U E U^* = E_{11} = S_1^m (S_1^*)^m$ (isto é possível já que E é minimal). Façamos $Z = \|\Phi_0(Y)\|^{-\frac{1}{2}} (S_1^*)^m U E W^*$.

Como U é unitário e S_1 e W são isometrias, $\|U\| = \|S_1\| = \|W\| = 1$. Além disso, $U E U^* = S_1^m (S_1^*)^m \Rightarrow \|E\| \leq 1$. Logo,

$$\|Z\| = \underbrace{\|\Phi_0(Y)\|^{-\frac{1}{2}}}_{< \frac{2}{\sqrt{3}}} \underbrace{\|(S_1^*)^m U E W^*\|}_{\leq 1} < \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Temos, então,

$$\begin{aligned} Z Y Z^* &= \|\Phi_0(Y)\|^{-\frac{1}{2}} (S_1^*)^m U E W^* Y \|\Phi_0(Y)\|^{-\frac{1}{2}} W E U^* S_1^m \\ &= \|\Phi_0(Y)\|^{-1} (S_1^*)^m U E (W^* Y W) E U^* S_1^m \\ &= \|\Phi_0(Y)\|^{-1} (S_1^*)^m U E (\Phi_0(Y) E) U^* S_1^m \\ &= \|\Phi_0(Y)\|^{-1} (S_1^*)^m U E (\|\Phi_0(Y)\| E) U^* S_1^m \\ &= (S_1^*)^m U E^2 U^* S_1^m = (S_1^*)^m E_{11} S_1^m = (S_1^*)^m (S_1^*)^m S_1^m S_1^m = 1. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \|1 - Z X^* X Z^*\| &= \|Z Y Z^* - Z X^* X Z^*\| = \|Z(Y - X^* X) Z^*\| \\ &\leq \|Z\| \|Z^*\| \|Y - X^* X\| \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3} < 1. \end{aligned}$$

Como $\|1 - Z X^* X Z^*\| < 1$, de 1.2.2 de [14] podemos concluir que o elemento $1 - (1 - Z X^* X Z^*) = Z X^* X Z^*$ é invertível. Além disso, temos que $Z X^* X Z^* = (X Z^*)^* X Z^* \geq 0$. Logo, de 2.2.1 de [14], $Z X^* X Z^*$ admite raiz quadrada.

Tomemos então $B = Z^*(Z X^* X Z^*)^{-\frac{1}{2}}$. Observemos que

$$\begin{aligned} (B^* X^*) X B &= (Z X^* X Z^*)^{-\frac{1}{2}} (Z X^* X Z^*) (Z X^* X Z^*)^{-\frac{1}{2}} \\ &= (Z X^* X Z^*)^{-\frac{1}{2}} (Z X^* X Z^*)^{\frac{1}{2}} (Z X^* X Z^*)^{\frac{1}{2}} (Z X^* X Z^*)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Logo, $A = B^* X^*$ e B são tais que $A X B = 1$. ■

Corolário 3.22 *A C^* -álgebra $\mathcal{O}_n$ é simples.*

Demonstração: Seja $\mathcal{I}$ ideal fechado de $\mathcal{O}_n$. Suponhamos que $0 \neq X \in \mathcal{I}$.

Então, do teorema 3.21, existem $A, B \in \mathcal{O}_n$ com $A X B = 1$. Logo, $1 \in \mathcal{I}$. Assim, se $Y \in \mathcal{O}_n$, então $1 \cdot Y = Y \in \mathcal{I}$ e, portanto, $\mathcal{I} = \mathcal{O}_n$. ■

Podemos voltar agora ao teorema 3.16, cuja demonstração é uma consequência direta do corolário 3.22. Vamos relembrar seu enunciado e demonstrá-lo em seguida.

Teorema 3.16 *Seja $\{\hat{S}_1, \dots, \hat{S}_n\}$ uma seqüência finita de isometrias em uma C^* -álgebra qualquer, satisfazendo a condição $\sum_{i=1}^n \hat{S}_i \hat{S}_i^* = 1$. Então, $C^*(\hat{S}_1, \dots, \hat{S}_n)$ é isomorfa a $\mathcal{O}_n$.*

Demonstração: Da universalidade de $\mathcal{O}_n$, existe um $*$ -homomorfismo sobrejetor ρ de $\mathcal{O}_n$ em $C^*(\hat{S}_1, \dots, \hat{S}_n)$. Resta provarmos que ρ é injetor.

Seja $\mathcal{I} = \{X \in \mathcal{O}_n : \rho(X) = 0\}$. Como $\mathcal{I} = \text{Ker } \rho$, $\mathcal{I}$ é ideal de $\mathcal{O}_n$. Pelo teorema 3.16, temos que $\mathcal{I} = \{0\}$ ou $\mathcal{I} = \mathcal{O}_n$. Como $\rho(\hat{S}_i) = \hat{S}_i$, concluímos que $\mathcal{I} \neq \mathcal{O}_n$. Portanto, $\mathcal{I} = \{0\}$, ou seja, ρ é isomorfismo. ■

3.3 As álgebras de Cuntz como produto cruzado por endomorfismo

Veremos agora a representação da álgebra de Cuntz $\mathcal{O}_n$ como um produto cruzado por endomorfismo.

Sabemos, pela proposição 3.13, que a álgebra $\mathcal{O}_n$ contém uma UHF álgebra com unidade $\mathcal{F}^n$. Esta C^* -álgebra será o ponto de partida de nossa construção.

Temos que $\mathcal{F}^n = \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_k^n}$. Pela proposição 3.13, $\mathcal{F}_k^n$ é $*$ -isomorfo a $\mathcal{M}_{n^k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

O $*$ -isomorfismo entre $\mathcal{F}_k^n$ e $\mathcal{M}_{n^k}$ permite uma identificação natural entre os elementos dos dois conjuntos. A partir de agora, essa identificação será feita sem qualquer referência.

Consideremos o sistema de matrizes unitárias canônicas $E_{ij} \in \mathcal{M}_n$, com $1 \leq i, j \leq n$, e tomemos $X \in \mathcal{M}_{n^k}$. Utilizando a notação de produto tensorial, temos que $E_{ij} \otimes X \in \mathcal{M}_n \otimes \mathcal{M}_{n^k} \simeq \mathcal{M}_n(\mathcal{M}_{n^k})$ é a matriz $n \times n$ que possui X na posição (i, j) e $O_{n^k \times n^k}$ nas demais posições, onde $O_{n^k \times n^k}$ denota a matriz nula de $\mathcal{M}_{n^k}$. É imediato que $E_{ij} \otimes X$ pode ser identificado com uma matriz de $\mathcal{M}_{n^{k+1}}$.

Exemplificando, se $n = 2$ e $k = 1$, tomemos $X = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix}$. Temos,

então,

$$E_{21} \otimes X = \begin{bmatrix} O_{2 \times 2} & O_{2 \times 2} \\ X & O_{2 \times 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{11} & \lambda_{12} & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Queremos agora associar à matriz $X = (x_{\ell m})_{\ell, m} \in \mathcal{M}_{n^k}$ uma outra matriz em $\mathcal{M}_{n^{k+1}}$ de maneira um pouco diferente do que fizemos acima.

Para $1 \leq i, j \leq n$, vamos definir $E_{ij} \dot{\otimes} X \in \mathcal{M}_n(\mathcal{M}_{n^k})$ como sendo a matriz cujo elemento da posição (ℓ, m) é dado por $E_{ij} \otimes x_{\ell m}$. Novamente, podemos identificar $E_{ij} \dot{\otimes} X$ com uma matriz de $\mathcal{M}_{n^{k+1}}$.

Tomando mais uma vez, para $n = 2$ e $k = 1$, $X = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix}$, temos que

$$E_{21} \dot{\otimes} X = \begin{bmatrix} E_{21} \otimes \lambda_{11} & E_{21} \otimes \lambda_{12} \\ E_{21} \otimes \lambda_{21} & E_{21} \otimes \lambda_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{11} & 0 & \lambda_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & 0 & \lambda_{22} & 0 \end{bmatrix}.$$

Observação: Se $X \in \mathcal{M}_{n^k}$ e $1 \leq i, j \leq n$, é fácil ver que as matrizes $E_{ij} \otimes X$ e $E_{ij} \dot{\otimes} X$ são unitariamente equivalentes, isto é, existe um unitário $U \in \mathcal{M}_{n^{k+1}}$ tal que $E_{ij} \dot{\otimes} X = U (E_{ij} \otimes X) U^{-1}$. Este fato levou-nos a escolher a notação $\dot{\otimes}$, que de certa forma ressalta a semelhança com o produto tensorial.

No caso dos dois exemplos citados acima, temos que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{11} & 0 & \lambda_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & 0 & \lambda_{22} & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_U \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{11} & \lambda_{12} & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U^{-1}}.$$

Citaremos a seguir algumas propriedades que decorrem da definição acima, que podem facilmente ser verificadas pelo leitor utilizando propriedades de matrizes. Se $M, N \in \mathcal{F}_k^n$,

$$\triangleright (E_{ij} \dot{\otimes} M) (E_{rs} \dot{\otimes} N) = \delta_{jr} (E_{is} \dot{\otimes} MN).$$

$$\triangleright (E_{ij} \dot{\otimes} M)^* = (E_{ji} \dot{\otimes} M^*).$$

▷ Seja I_{n^k} a identidade de $\mathcal{F}_k^n$. Então, $\sum_{i=1}^n E_{ii} \dot{\otimes} I_{n^k} = I_{n^{k+1}}$ é a identidade de $\mathcal{F}_{k+1}^n$.

Denotando $\mathcal{F}_\infty^n = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_k^n$, vamos definir a aplicação

$$\begin{aligned} \alpha : \mathcal{F}_\infty^n &\rightarrow \mathcal{F}_\infty^n \\ M &\mapsto E_{11} \dot{\otimes} M. \end{aligned}$$

Proposição 3.23 *A aplicação α definida acima é um endomorfismo injetor. Além disso, α é contínua.*

Demonstração: Sejam $M, N \in \mathcal{F}_\infty^n$, ou seja, $M \in \mathcal{F}_k^n$ e $N \in \mathcal{F}_\ell^n$, com $k, \ell \in \mathbb{N}$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $k \geq \ell$.

Pela proposição 3.13, $\mathcal{F}_k^n \subseteq \mathcal{F}_{k+1}^n$, ou seja, existe uma cópia de $\mathcal{F}_k^n$ em $\mathcal{F}_{k+1}^n$. Assim, podemos considerar que $M, N \in \mathcal{F}_k^n$, com $M = (m_{ij})_{i,j}$ e $N = (n_{ij})_{i,j}$. Sendo $\lambda \in \mathbb{C}$, temos que

1. α é linear:

$$\begin{aligned} \alpha(M + \lambda N) &= E_{11} \dot{\otimes} (M + \lambda N) = E_{11} \dot{\otimes} M + \lambda (E_{11} \dot{\otimes} N) \\ &= \alpha(M) + \lambda \alpha(N), \end{aligned}$$

2. α preserva multiplicação:

$$\begin{aligned} \alpha(MN) &= E_{11} \dot{\otimes} MN = (E_{11} \dot{\otimes} M) (E_{11} \dot{\otimes} N) \\ &= \alpha(M) \alpha(N), \end{aligned}$$

3. α preserva involução:

$$\alpha(M^*) = E_{11} \dot{\otimes} M^* = (E_{11} \dot{\otimes} M)^* = \alpha(M)^*.$$

Portanto, α é endomorfismo de $\mathcal{F}_\infty^n$.

Temos ainda que $\|\alpha(M)\| = \|M\|$, para todo $M \in \mathcal{F}_\infty^n$. Logo, α é contínua. Segue também desse fato que α é injetora. ■

Como $\mathcal{F}_\infty^n$ é denso em $\mathcal{F}^n$ e α é contínua, podemos estendê-la de maneira única para todo $\mathcal{F}^n$. Denotaremos esta extensão também por α .

Observação: De maneira análoga ao que fizemos na proposição 3.23, podemos provar que toda aplicação de $\mathcal{F}_\infty^n$ em $\mathcal{F}_\infty^n$ dada por $M \mapsto E_{ij} \dot{\otimes} M$, para

$1 \leq i, j \leq n$, é contínua, podendo ser estendida de maneira única para todo $\mathcal{F}^n$.

Consideremos agora o semi-grupo $\mathbb{N}$ dos números naturais. Podemos definir um homomorfismo de $\mathbb{N}$ nos endomorfismos de $\mathcal{F}^n$ simplesmente compondo n vezes o endomorfismo α , ou seja, $n \mapsto (\alpha)^n = \underbrace{\alpha \circ \alpha \circ \cdots \circ \alpha}_{n \text{ vezes}}$. De fato, se $n, p \in \mathbb{N}$, então $(\alpha)^n \circ (\alpha)^p = (\alpha)^{n+p}$.

Temos, portanto, um C^* -sistema dinâmico $(\mathcal{F}^n, \mathbb{N}, \alpha)$. Assim, a partir deste ponto, seguiremos a construção descrita no capítulo anterior.

Fazendo $A_k = \mathcal{F}^n$ para todo $k \in \mathbb{N}$, obtemos a seqüência indutiva $(A_k, \alpha)_{k \in \mathbb{N}}$ representada na figura abaixo:

$$A_0 \xrightarrow{\alpha} A_1 \xrightarrow{\alpha} A_2 \xrightarrow{\alpha} \dots$$

Seja B a C^* -álgebra que é o limite indutivo da seqüência $(A_k, \alpha)_{k \in \mathbb{N}}$ e, para cada k , seja α^k o homomorfismo natural de A_k em B .

Analogamente ao que foi feito nas proposições 2.2 e 2.3, concluímos que existe um único automorfismo β de B que faz o diagrama abaixo comutar, para todo $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ccc} A_k & \xrightarrow{\alpha^k} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ A_k & \xrightarrow{\alpha^k} & B \end{array}$$

Em outras palavras,

$$\alpha^k \circ \alpha = \beta \circ \alpha^k.$$

Definimos então um homomorfismo de $\mathbb{N}$ nos automorfismos de B dado por $n \mapsto (\beta)^n = \underbrace{\beta \circ \beta \circ \cdots \circ \beta}_{n \text{ vezes}}$.

Lembrando que o grupo de Grothendieck de $\mathbb{N}$ é o grupo dos números inteiros $\mathbb{Z}$, pelo lema 2.4, esse homomorfismo pode ser estendido de maneira única a um homomorfismo $\beta : \mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(B)$.

Portanto, $(B, \mathbb{Z}, \beta)$ é o C^* -sistema dinâmico clássico associado ao C^* -sistema dinâmico $(\mathcal{F}^n, \mathbb{N}, \alpha)$.

Seja $Z = B \rtimes_{\beta} \mathbb{Z}$ o produto cruzado relativo ao C^* -sistema dinâmico clássico $(B, \mathbb{Z}, \beta)$. Sabemos que esta C^* -álgebra contém um unitário U que satisfaz, para todo $b \in B$,

$$U b U^* = \beta(b).$$

Sejam $P \in \mathcal{F}^n$ a unidade da UHF álgebra $\mathcal{F}^n$ e $p_0 = \alpha^0(P) \in B$. Observe que

$$\begin{aligned} p_0 U p_0 U^* &= p_0 \beta(p_0) = \alpha^0(P) \beta(\alpha^0(P)) = \alpha^0(P) \alpha^0(\alpha(P)) \\ &= \alpha^0(P \alpha(P)) = \alpha^0(\alpha(P)) = \beta(\alpha^0(P)) = U \alpha^0(P) U^* \\ &= U p_0 U^*. \end{aligned}$$

Como U é unitário, concluímos que $p_0 U p_0 = U p_0$.

Tomando a sub- C^* -álgebra $C = p_0 Z p_0$, seja $V = U p_0 = p_0 U p_0 \in C$. Vamos relembrar alguns fatos importantes sobre a C^* -álgebra C vistos no capítulo anterior:

- $p_0 \in B$ pode ser visto dentro de Z pela inclusão canônica, ou seja, $B \hookrightarrow Z = B \rtimes_{\beta} \mathbb{Z}$.
- $p_0 = \alpha^0(P) = \alpha^0(P P P) = \alpha^0(P) \alpha^0(P) \alpha^0(P) = p_0 p_0 p_0$. Portanto, $p_0 \in C$.
- $p_0 = p_0^2 = p_0^*$, ou seja, p_0 é projeção.
- Se $z \in Z$, então $p_0(p_0 z p_0) = p_0 z p_0 = (p_0 z p_0)p_0$. Portanto, p_0 é a unidade de C .
- $V^*V = (U p_0)^* U p_0 = p_0 U^* U p_0 = p_0$.
- $V V^* = U p_0 p_0 U^* = U p_0 U^*$.

Os dois últimos itens mostram que V é uma isometria própria de C .

Proposição 3.24 *Seja $B_0 = p_0 B p_0 = \{p_0 b p_0 : b \in B\}$. Então, $A_0 = \mathcal{F}^n$ é isomorfo a B_0 .*

Demonstração: Vamos construir um isomorfismo ϕ entre $\mathcal{F}^n$ e B_0 . Para todo $M \in \mathcal{F}^n$, definimos $\phi(M) = p_0 \alpha^0(M) p_0$. É imediato que $\phi(M) \in B_0$. Como α^0 é $*$ -homomorfismo injetor, basta provarmos que ϕ é sobrejetora.

Pelo teorema 1.45, temos que $B = \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} \alpha^k(A_k)}$. Então, se $b \in B$, dado $\varepsilon > 0$, existe $M \in A_k = \mathcal{F}^n$ tal que $\|b - \alpha^k(M)\|_B < \frac{\varepsilon}{2}$, para algum $k \in \mathbb{N}$.

Além disso, como $\mathcal{F}^n = \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_k^n}$, existe $N \in \mathcal{F}_j^n$ tal que $\|M - N\|_{\mathcal{F}^n} < \frac{\varepsilon}{2}$, para algum $j \in \mathbb{N}$.

Mas α^k é norma-decrescente, pois é $*$ -homomorfismo entre C^* -álgebras. Daí, $\|\alpha^k(M) - \alpha^k(N)\|_B = \|\alpha^k(M - N)\|_B \leq \|M - N\|_{\mathcal{F}^n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Assim,

$$\|b - \alpha^k(N)\|_B \leq \|b - \alpha^k(M)\|_B + \|\alpha^k(M) - \alpha^k(N)\|_B < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, como α^k é contínua para todo $k \in \mathbb{N}$, basta provarmos que, dado um elemento da forma $\alpha^k(N)$, para $N \in \mathcal{F}_j^n$, existe $X \in \mathcal{F}^n$ tal que $\phi(X) = p_0 \alpha^k(N) p_0$.

Sem perda de generalidade, podemos considerar que $k = j$. De fato, se $k < j$, temos que $\alpha^k(N) = \alpha^j(\underbrace{(\alpha)^{j-k}(N)}_{N'}) = \alpha^j(N')$. Por outro lado, se $j < k$, podemos identificar $N \in \mathcal{F}_j^n$ com um elemento $N' \in \mathcal{F}_k^n$.

Como $\alpha^0(P) = \alpha^1(\alpha(P)) = \dots = \alpha^k(\overbrace{(\alpha \circ \alpha \circ \dots \circ \alpha)}^{k \text{ vezes}}(P)) = \alpha^k((\alpha)^k(P))$, temos

$$\begin{aligned} p_0 \alpha^k(N) p_0 &= \alpha^0(P) \alpha^k(N) \alpha^0(P) = \alpha^k((\alpha)^k(P) N (\alpha)^k(P)) \\ &= \alpha^k \left(\begin{bmatrix} P & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n^k} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n^k} \\ \vdots & & \ddots & \\ \lambda_{n^k 1} & \lambda_{n^k 2} & \cdots & \lambda_{n^k n^k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \alpha^k \left(\begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right) = \alpha^k((\alpha)^k([\lambda_{11}])) = \alpha^0([\lambda_{11}]). \end{aligned}$$

Assim, $\alpha^0([\lambda_{11}]) = p_0 \alpha^k(N) p_0$, ou seja, ϕ é sobrejetora. ■

Corolário 3.25 A C^* -álgebra $C = p_0 Z p_0$ é gerada por $B_0 = p_0 B p_0$ e pela isometria $V = U p_0$.

Demonstração: Segue do teorema 2.11 e da proposição 3.24. ■

Lema 3.26 *Sejam I_{n^k} e P as unidades de $\mathcal{F}_k^n$ e $\mathcal{F}^n$, respectivamente. Então,*

i. *para todo $\varepsilon > 0$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\|I_{n^j} - P\| < \varepsilon$;*

ii. $\sum_{i=1}^n E_{ii} \dot{\otimes} P = P$.

Demonstração: i. Da densidade de $\mathcal{F}_\infty^n$ em $\mathcal{F}^n$, dado $\varepsilon > 0$, existe $X \in \mathcal{F}_j^n$ tal que $\|X - P\| < \frac{\varepsilon}{2}$, para algum $j \in \mathbb{N}$.

Observando que $X = X I_{n^j}$ e $I_{n^j} = P I_{n^j}$, temos que

$$\begin{aligned} \|I_{n^j} - P\| &= \|I_{n^j} - X + X - P\| \leq \|I_{n^j} - X\| + \|X - P\| \\ &< \|P I_{n^j} - X I_{n^j}\| + \frac{\varepsilon}{2} = \|(P - X)I_{n^j}\| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \|P - X\| \underbrace{\|I_{n^j}\|}_{=1} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

ii. De (i), dado $\varepsilon > 0$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\|I_{n^j} - P\| < \frac{\varepsilon}{n+1}$. Lembrando que $\sum_{i=1}^n E_{ii} \dot{\otimes} I_{n^j} = I_{n^{j+1}}$, temos que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n E_{ii} \dot{\otimes} P - P \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^n E_{ii} \dot{\otimes} P - I_{n^{j+1}} + I_{n^{j+1}} - P \right\| \\ &\leq \|I_{n^{j+1}} - P\| + \left\| \sum_{i=1}^n E_{ii} \dot{\otimes} P - I_{n^{j+1}} \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{n+1} + \left\| \sum_{i=1}^n E_{ii} \dot{\otimes} P - \sum_{i=1}^n E_{ii} \dot{\otimes} I_{n^j} \right\| \\ &= \frac{\varepsilon}{n+1} + \left\| \sum_{i=1}^n E_{ii} \dot{\otimes} (P - I_{n^j}) \right\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{n+1} + \sum_{i=1}^n \|E_{ii} \dot{\otimes} (P - I_{n^j})\| \\ &= \frac{\varepsilon}{n+1} + \sum_{i=1}^n \|P - I_{n^j}\| \\ &< \frac{\varepsilon}{n+1} + \frac{n\varepsilon}{n+1} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\sum_{i=1}^n E_{ii} \dot{\otimes} P = P$. ■

Teorema 3.27 *A C^* -álgebra $C = p_0 Z p_0$ é isomorfa à álgebra de Cuntz $\mathcal{O}_n$.*

Demonstração: Vamos inicialmente definir um conjunto de matrizes uni-

tárias $\hat{E}_{ij}$ em B , $1 \leq i, j \leq n$, da seguinte forma:

$$\hat{E}_{ij} = \alpha^0(E_{ij} \dot{\otimes} P).$$

Para todo i , $1 \leq i \leq n$, seja

$$\hat{S}_i = \hat{E}_{i1} V.$$

Provemos que cada $\hat{S}_i$ definida acima é uma isometria própria de C , lembrando que p_0 é a unidade de C .

- $\hat{S}_i \in C$.

$$\begin{aligned} \hat{S}_i &= \hat{E}_{i1} V = \alpha^0(E_{i1} \dot{\otimes} P) U p_0 = \alpha^0(P (E_{i1} \dot{\otimes} P)) U p_0 \\ &= p_0 [\alpha^0(E_{i1} \dot{\otimes} P) U] p_0 \in C \end{aligned}$$

- $\hat{S}_i^* \hat{S}_i = p_0$.

$$\begin{aligned} \hat{S}_i^* \hat{S}_i &= (\alpha^0(E_{i1} \dot{\otimes} P) U p_0)^* \alpha^0(E_{i1} \dot{\otimes} P) U p_0 \\ &= p_0 U^* \alpha^0(E_{i1} \dot{\otimes} P)^* \alpha^0(E_{i1} \dot{\otimes} P) U p_0 \\ &= p_0 U^* \alpha^0((E_{1i} E_{i1}) \dot{\otimes} P) U p_0 = p_0 U^* \alpha^0(E_{11} \dot{\otimes} P) U p_0 \\ &= p_0 U^* \alpha^0(\alpha(P)) U p_0 = p_0 U^* \beta(\alpha^0(P)) U p_0 \\ &= p_0 \underbrace{U^* U}_{Id} \alpha^0(P) \underbrace{U^* U}_{Id} p_0 = p_0 p_0 p_0 = p_0 \end{aligned}$$

- $\hat{S}_i \hat{S}_i^* \neq p_0$.

$$\begin{aligned} \hat{S}_i \hat{S}_i^* &= (\alpha^0(E_{i1} \dot{\otimes} P) U p_0) (p_0 U^* \alpha^0(E_{i1} \dot{\otimes} P)^*) \\ &= \alpha^0(E_{i1} \dot{\otimes} P) U p_0 U^* \alpha^0(E_{1i} \dot{\otimes} P) \\ &= \alpha^0(E_{i1} \dot{\otimes} P) \beta(\alpha^0(P)) \alpha^0(E_{1i} \dot{\otimes} P) \\ &= \alpha^0(E_{i1} \dot{\otimes} P) \alpha^0(\alpha(P)) \alpha^0(E_{1i} \dot{\otimes} P) \\ &= \alpha^0((E_{i1} E_{11} E_{1i}) \dot{\otimes} P) = \alpha^0(E_{ii} \dot{\otimes} P) = \hat{E}_{ii} \end{aligned}$$

Utilizando o último item acima e o lema 3.26, temos ainda que

$$\sum_{i=1}^n \hat{S}_i \hat{S}_i^* = \sum_{i=1}^n \hat{E}_{ii} = \sum_{i=1}^n \alpha^0(E_{ii} \dot{\otimes} P) = \alpha^0 \left(\sum_{i=1}^n E_{ii} \dot{\otimes} P \right) = \alpha^0(P) = p_0.$$

Como a família de isometrias $\{\hat{S}_i : 1 \leq i \leq n\}$ é tal que $\sum_{i=1}^n \hat{S}_i \hat{S}_i^* = p_0$, concluímos, do teorema 3.16, que a C^* -álgebra $C^*(\hat{S}_1, \dots, \hat{S}_n)$ é isomorfa a $\mathcal{O}_n$.

Resta mostrarmos que o conjunto $\{\hat{S}_i : 1 \leq i \leq n\}$ gera toda a C^* -álgebra C . Do corolário 3.25, basta mostrarmos que as isometrias $\hat{S}_1, \dots, \hat{S}_n$ geram V e $B_0 \simeq A_0 = \mathcal{F}^n$. A primeira parte é simples, pois $\hat{S}_1 = V$. De fato,

$$\begin{aligned}\hat{S}_1 &= \hat{E}_{11}V = \alpha^0(E_{11} \dot{\otimes} P) U p_0 \\ &= \alpha^0(\alpha(P)) U p_0 = \beta(\alpha^0(P)) U p_0 \\ &= \beta(p_0) U p_0 = U p_0 U^* U p_0 = U p_0 = V.\end{aligned}$$

Para mostrar a segunda parte, devemos lembrar que, como $A_0 = \mathcal{F}^n$ é uma UHF álgebra, ela possui uma seqüência de sub- C^* -álgebras $*$ -isomorfas a álgebras de matrizes complexas, sendo que a união destas sub- C^* -álgebras é densa em A_0 . Em outras palavras, podemos dizer que o conjunto $\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{M}_{n^k}$ é denso em A_0 .

Então, basta mostrarmos que as isometrias $\hat{S}_1, \dots, \hat{S}_n$ geram uma cópia de $\mathcal{M}_{n^k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Seja $k \in \mathbb{N}$. Para cada $q \in \mathbb{N}$, consideremos os elementos de $\mathcal{F}_{q+k}^n$ da forma $E_{i_1 j_1} \dot{\otimes} E_{i_2 j_2} \dot{\otimes} \dots \dot{\otimes} E_{i_k j_k} \dot{\otimes} I_{n^q}$, com $1 \leq i_\ell, j_\ell \leq n$ e $\ell = 1, \dots, k$. Utilizando propriedades de matrizes, verificamos que esses elementos formam uma cópia do sistema de matrizes unitárias canônicas de $\mathcal{M}_{n^k}$.

Pelo lema 3.26, para todo $\varepsilon > 0$, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $\|I_{n^q} - P\| < \varepsilon$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}\|E_{i_1 j_1} \dot{\otimes} E_{i_2 j_2} \dot{\otimes} \dots \dot{\otimes} E_{i_k j_k} \dot{\otimes} I_{n^q} - E_{i_1 j_1} \dot{\otimes} E_{i_2 j_2} \dot{\otimes} \dots \dot{\otimes} E_{i_k j_k} \dot{\otimes} P\| &= \\ &= \|E_{i_1 j_1} \dot{\otimes} E_{i_2 j_2} \dot{\otimes} \dots \dot{\otimes} E_{i_k j_k} \dot{\otimes} (I_{n^q} - P)\| = \|I_{n^q} - P\| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Então, os elementos de $\mathcal{F}^n$ da forma $E_{i_1 j_1} \dot{\otimes} E_{i_2 j_2} \dot{\otimes} \dots \dot{\otimes} E_{i_k j_k} \dot{\otimes} P$, com $1 \leq i_\ell, j_\ell \leq n$ e $\ell = 1, \dots, k$ formam uma cópia do sistema de matrizes unitárias canônicas de $\mathcal{M}_{n^k}$.

Consideremos então $\mu = (i_1, \dots, i_k) \in W_k^n$ e $\nu = (j_1, \dots, j_k) \in W_k^n$. Vamos provar que

$$\hat{S}_\mu \hat{S}_\nu^* = \alpha^0(E_{i_1 j_1} \dot{\otimes} E_{i_2 j_2} \dot{\otimes} \dots \dot{\otimes} E_{i_k j_k} \dot{\otimes} P).$$

Para $1 \leq r, t, i, j \leq n$, temos

$$\begin{aligned}
\hat{S}_r \alpha^0(E_{ij} \dot{\otimes} P) \hat{S}_t^* &= \hat{E}_{r1} V \alpha^0(E_{ij} \dot{\otimes} P) V^* \hat{E}_{1t} \\
&= \hat{E}_{r1} U \alpha^0(P) \alpha^0(E_{ij} \dot{\otimes} P) \alpha^0(P) U^* \hat{E}_{1t} \\
&= \hat{E}_{r1} U \alpha^0(E_{ij} \dot{\otimes} P) U^* \hat{E}_{1t} = \hat{E}_{r1} \beta(\alpha^0(E_{ij} \dot{\otimes} P)) \hat{E}_{1t} \\
&= \hat{E}_{r1} \alpha^0(\alpha(E_{ij} \dot{\otimes} P)) \hat{E}_{1t} \\
&= \alpha^0[(E_{r1} \dot{\otimes} P) (\alpha(E_{ij} \dot{\otimes} P)) (E_{1t} \dot{\otimes} P)] \\
&= \alpha^0 \left[\left(E_{r1} \dot{\otimes} \sum_{\ell=1}^n E_{\ell\ell} \dot{\otimes} P \right) (E_{11} \dot{\otimes} E_{ij} \dot{\otimes} P) \left(E_{1t} \dot{\otimes} \sum_{q=1}^n E_{qq} \dot{\otimes} P \right) \right] \\
&= \alpha^0(E_{rt} \dot{\otimes} E_{ij} \dot{\otimes} P).
\end{aligned}$$

Aplicando indução finita sobre k , temos que, se $\mu, \nu \in W_1^n$,

$$\hat{S}_{i_1} \hat{S}_{j_1}^* = \hat{E}_{i_1 1} V V^* \hat{E}_{1 j_1} = \hat{E}_{i_1 1} \hat{E}_{11} \hat{E}_{1 j_1} = \hat{E}_{i_1 j_1} = \alpha^0(E_{i_1 j_1} \dot{\otimes} P).$$

Da hipótese de indução, temos que $\hat{S}_{\mu'} \hat{S}_{\nu'}^* = \alpha^0(E_{i_2 j_2} \dot{\otimes} \cdots \dot{\otimes} E_{i_k j_k} \dot{\otimes} P)$, onde $\mu', \nu' \in W_{k-1}^n$. Então,

$$\begin{aligned}
\hat{S}_\mu \hat{S}_\nu^* &= \hat{S}_{i_1} \hat{S}_{\mu'} \hat{S}_{\nu'}^* \hat{S}_{j_1}^* = \hat{S}_{i_1} \alpha^0(E_{i_2 j_2} \dot{\otimes} \cdots \dot{\otimes} E_{i_k j_k} \dot{\otimes} P) \hat{S}_{j_1}^* \\
&= \alpha^0(E_{i_1 j_1} \dot{\otimes} E_{i_2 j_2} \dot{\otimes} \cdots \dot{\otimes} E_{i_k j_k} \dot{\otimes} P),
\end{aligned}$$

mostrando que as isometrias $\hat{S}_1, \dots, \hat{S}_n$ geram uma cópia do sistema de matrizes unitárias canônicas em A_0 . ■

Apêndice A

O Grupo de Grothendieck

Dado um semi-grupo abeliano M , podemos associar a ele um grupo abeliano G , de maneira análoga à obtenção dos inteiros a partir dos naturais. Além disso, se M for um semi-grupo cancelativo, G conterá uma cópia de M . Dizemos que G é o **grupo de Grothendieck** de M . A seguir, descreveremos a sua construção.

Seja $(M, +)$ um semi-grupo abeliano. Denotaremos o elemento neutro de M por 0 . Vamos definir uma relação de equivalência $\sim$ em $M \times M$ dada por

$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ se existe $z \in M$ tal que $x_1 + y_2 + z = x_2 + y_1 + z$.

A relação $\sim$ é

a) reflexiva: como $x_1 + y_1 + 0 = x_1 + y_1 + 0$, temos que $(x_1, y_1) \sim (x_1, y_1)$.

b) simétrica: suponhamos que $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$. Então, existe $z \in M$ tal que $x_1 + y_2 + z = x_2 + y_1 + z$. Daí, $x_2 + y_1 + z = x_1 + y_2 + z$ e, portanto, $(x_2, y_2) \sim (x_1, y_1)$.

c) transitiva: se $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ e $(x_2, y_2) \sim (x_3, y_3)$, então existem $z, t \in M$ tais que $x_1 + y_2 + z = x_2 + y_1 + z$ e $x_2 + y_3 + t = x_3 + y_2 + t$. Somando as duas igualdades resulta que

$$x_1 + y_3 + \underbrace{(x_2 + y_2 + z + t)}_{\in M} = x_3 + y_1 + \underbrace{(x_2 + y_2 + z + t)}_{\in M}.$$

Logo, $(x_1, y_1) \sim (x_3, y_3)$.

Denotemos por $G(M)$ o espaço quociente $(M \times M) / \sim$. Seja $\langle x, y \rangle$ a classe de equivalência de $G(M)$ que contém o par $(x, y) \in M \times M$. Vamos definir uma operação binária em $G(M)$ pela relação

$$\langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2 \rangle.$$

Vamos mostrar que a operação $+$ está bem definida. Consideremos os pares $(x_1, y_1) \sim (x'_1, y'_1)$ e $(x_2, y_2) \sim (x'_2, y'_2)$.

Devemos provar que $\langle x_1 + x_2, y_1 + y_2 \rangle = \langle x'_1 + x'_2, y'_1 + y'_2 \rangle$. Das equivalências temos que existem $z_1, z_2 \in M$ tais que $x_1 + y'_1 + z_1 = x'_1 + y_1 + z_1$ e $x_2 + y'_2 + z_2 = x'_2 + y_2 + z_2$. Somando as duas igualdades resulta que

$$(x_1 + x_2) + (y'_1 + y'_2) + \underbrace{(z_1 + z_2)}_{\in M} = (x'_1 + x'_2) + (y_1 + y_2) + \underbrace{(z_1 + z_2)}_{\in M}.$$

Portanto, $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \sim (x'_1 + x'_2, y'_1 + y'_2)$ e, conseqüentemente, $\langle x_1 + x_2, y_1 + y_2 \rangle = \langle x'_1 + x'_2, y'_1 + y'_2 \rangle$.

O par $(G(M), +)$ é um grupo. O elemento neutro de $G(M)$ é $\langle x, x \rangle$, para qualquer $x \in M$. De fato,

$\langle x, x \rangle + \langle y, z \rangle = \langle x + y, x + z \rangle = \langle y, z \rangle = \langle y, z \rangle + \langle x, x \rangle$, pois $(x + y, x + z) \sim (y, z)$, já que $(x + y + z) + 0 = (y + x + z) + 0$.

Assim, o oposto de $\langle x, y \rangle \in G(M)$ é $\langle y, x \rangle \in G(M)$, porque $\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle = \langle x + y, x + y \rangle$.

Além disso, $G(M)$ é abeliano porque M é abeliano.

Definição A.1 O grupo $G(M)$ construído acima é chamado de **grupo de Grothendieck** do semi-grupo abeliano M .

Exemplo A.2 O grupo de Grothendieck do semi-grupo abeliano cancelativo $(\mathbb{Z}^+, +)$ é (isomorfo a) o grupo $(\mathbb{Z}, +)$. Neste caso, existe uma cópia de $\mathbb{Z}^+$ em $\mathbb{Z}$.

Exemplo A.3 O grupo de Grothendieck do semi-grupo abeliano não cancelativo $(\mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}, +)$ é o grupo $(\{0\}, +)$. Neste caso, não existe uma cópia de $\mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$ em $\{0\}$.

Proposição A.4 *Sejam M semi-grupo abeliano, $y \in M$ e γ_M a aplicação de M em $G(M)$ dada por $x \mapsto \langle x + y, y \rangle$. Então,*

(i) γ_M *independe da escolha de y .*

(ii) γ_M *é aditiva.*

Demonstração: (i) Sejam $x, z \in M$. Então, $\langle x + y, y \rangle = \langle x + z, z \rangle$, pois $(x + y) + z + 0 = (x + z) + y + 0$.

(ii) Temos que

$$\gamma_M(x + z) = \langle x + z + y, y \rangle \text{ e}$$

$$\gamma_M(x) + \gamma_M(z) = \langle x + y, y \rangle + \langle z + y, y \rangle = \langle x + z + 2y, 2y \rangle.$$

Porém, como $x + z + y + 2y + 0 = x + z + 2y + y + 0$, concluímos que $\langle x + z + y, y \rangle = \langle x + z + 2y, 2y \rangle$.

Portanto, $\gamma_M(x + z) = \gamma_M(x) + \gamma_M(z)$. ■

O grupo de Grothendieck satisfaz a propriedade universal, dada pelo

Teorema A.5 *Seja M semi-grupo abeliano e γ_M a aplicação definida na proposição A.4. Se H é um grupo abeliano e $\varphi : M \rightarrow H$ é uma aplicação aditiva, então existe um único homomorfismo de grupos $\psi : G(M) \rightarrow H$ tal que o diagrama abaixo comuta.*

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \gamma_M \swarrow & & \searrow \varphi \\ G(M) & \xrightarrow{\psi} & H \end{array}$$

Demonstração: Seja $\varphi : M \rightarrow H$ uma aplicação aditiva. Vamos definir uma aplicação ψ de $G(M)$ em H dada por $\langle x, y \rangle \mapsto \varphi(x) - \varphi(y)$, para $x, y \in M$.

Tomemos $x, y, x', y' \in M$. Vamos provar que ψ está bem definida. Se $\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle$, então existe $t \in M$ tal que $x + y' + t = x' + y + t$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \psi(\langle x, y \rangle) - \psi(\langle x', y' \rangle) &= \varphi(x) - \varphi(y) - \varphi(x') + \varphi(y') \\ &= \varphi(x) + \varphi(y') + \varphi(t) - \varphi(x') - \varphi(y) - \varphi(t) \\ &= \varphi(x + y' + t) - \varphi(x' + y + t) = 0. \end{aligned}$$

Logo, $\psi(< x, y >) = \psi(< x', y' >)$.

Além disso, ψ é homomorfismo de grupos, pois

$$\begin{aligned}\psi(< x, y > + < x' + y' >) &= \psi(< x + x', y + y' >) \\ &= \varphi(x + x') - \varphi(y + y') \\ &= \varphi(x) - \varphi(y) + \varphi(x') - \varphi(y') \\ &= \psi(< x, y >) + \psi(< x', y' >).\end{aligned}$$

Vamos provar agora que o homomorfismo ψ faz o diagrama dado acima comutar.

$$(\psi \circ \gamma_M)(x) = \psi(< x + y, y >) = \varphi(x + y) - \varphi(y) = \varphi(x)$$

Além disso, ψ é único. De fato, seja $\lambda : G(M) \rightarrow H$ um homomorfismo de grupos com as mesmas propriedades de ψ . Temos que

$$\begin{aligned}\lambda(< x, y >) &= \lambda(< x, y > + < x + y, x + y >) \\ &= \lambda(< x + y, y > + < x, x + y >) \\ &= \lambda(< x + y, y > - < y + x, x >) \\ &= \lambda(\gamma_M(x) - \gamma_M(y)) = (\lambda \circ \gamma_M)(x) - (\lambda \circ \gamma_M)(y) \\ &= \varphi(x) - \varphi(y) = \psi(< x, y >).\end{aligned}$$

Logo, $\lambda = \psi$. ■

A aplicação $\gamma_M : M \rightarrow G(M)$ pode produzir uma cópia de M em $G(M)$. A condição para que isso ocorra é dada agora pela

Proposição A.6 *A aplicação $\gamma_M : M \rightarrow G(M)$ é injetora se, e somente se, M é um semi-grupo cancelativo.*

Demonstração: Sejam $x, y, z \in M$. Então, se M é semi-grupo cancelativo,

$$\begin{aligned}\gamma_M(x) = \gamma_M(y) &\Rightarrow < x + y, y > = < x + y, x > \\ &\Rightarrow x + y + x + t = y + x + y + t, \text{ para algum } t \in M \\ &\Rightarrow x + (x + y + t) = y + (x + y + t) \\ &\Rightarrow x = y.\end{aligned}$$

Por outro lado, se γ_M é injetora e $x + z = y + z$, temos

$$\begin{aligned}\gamma_M(x + z) = \gamma_M(y + z) &\Rightarrow \gamma_M(x) + \gamma_M(z) = \gamma_M(y) + \gamma_M(z) \\ &\Rightarrow \gamma_M(x) = \gamma_M(y).\end{aligned}$$

Assim, como γ_M é injetora, $x = y$ e M é cancelativo. ■

Referências

- [1] B. Blackadar, Shape theory for C^* -algebras, *Math. Scand.* **56** (1985), 249-275.
- [2] C. Cerri, Non-commutative deformations of $C(T^2)$ and K-theory, *Internat. J. Math.* **8** (5) (1997), 555-571.
- [3] J. Cuntz, Simple C^* -algebras generated by isometries, *Comm. Math. Phys.* **57** (1977), 173-185.
- [4] K. R. Davidson, *C^* -algebras by Example*, Field Institute Monographs, American Mathematical Society, Providence (1996).
- [5] D. P. Dias, *O Produto Cruzado de C^* -álgebra por Grupos Mediáveis*, Dissertação de Mestrado, IME-USP, São Paulo (2000).
- [6] S. Doplicher & J. E. Roberts, Endomorphisms of C^* -algebras, cross products and duality for compact groups, *Ann. Math.* **130** (1989), 75-119.
- [7] S. Eilers, T. A. Loring & G. K. Pedersen, Stability of anticommutation relations. An application of noncommutative CW complexes, *J. Reine Angew. Math.* **499** (1998), 101-143.
- [8] R. Exel, A new look at the crossed-product of a C^* -algebra by an endomorphism, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, to appear.
- [9] R. Exel, The soft torus II: a variational analysis of commutator norms, *J. Funct. Analysis*, **126** (1994), 259-273.
- [10] M. Laca & I. Reaburn, Extending multipliers from semigroups, *Proc. Amer. Math. Soc.* **123** (1995), 355-362.
- [11] T. A. Loring, C^* -algebras generated by stable relations, *J. Funct. Anal.* **112** (1993), 159-201.
- [12] T. A. Loring, *Lifting Solutions to Perturbing Problem in C^* -algebras*, Fields Institute Monographs (1997).

- [13] M. S. Monteiro, Weakly stable relations and inductive limits of C^* -algebras, *Canad. Math. Bull.* **46** (4) (2003), 588-596.
- [14] G. J. Murphy, *C^* -algebras and Operator Theory*, Academic Press, London (1990).
- [15] G. J. Murphy, Crossed products of C^* -algebras by endomorphisms, *Integr. Equat. Oper. Th.* **24** (1995), 289-319.
- [16] W. L. Paschke, The crossed product of a C^* -algebra by an endomorphism, *Proc. Amer. Math. Soc.* **80** (1980), 113-118.
- [17] M. Rørdam, F. Larsen & N. J. Laustesen, *An Introduction to K -Theory for C^* -Algebras*, Cambridge University, Cambridge (2000).
- [18] P. J. Stacey, Crossed product of C^* -algebras by $*$ -endomorphism, *J. Aust. Math. Soc., Ser. A* **54** (1993), 204-212.