**Variedades de álgebras de Jordan/
Tipos de representações de álgebras
de Jordan**

Iryna Kashuba

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE DOUTOR
EM
MATEMÁTICA

Orientador: Prof. Dr. Ivan Shestakov

*Durante a elaboração deste trabalho, a autora recebeu auxílio financeiro da FAPESP,
processo 99/12223-5*

São Paulo
2004

Variedades de álgebras de Jordan/
Tipos de representações de álgebras de Jordan

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida
e defendida por Iryna Kashuba
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 24 de agosto de 2004.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Victor Bekkert - Depto de Matemática - UFMG
- Profa. Dra. Dessislava Kochloukova - IMECC - UNICAMP
- Prof. Dr. Eduardo do Nascimento Marcos - IME - USP
- Prof. Dr. Ivan Shestakov (orientador) - IME - USP
- Prof. Dr. Efim Zelmanov - Depto de Matemática - Universidade da California

Dedico esta tese ao meu recém-nascido filho

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu orientador, professor Ivan Shestakov pela confiança, amizade e paciência. Foi uma honra ser sua aluna e sei que ainda tenho muito a aprender dele como matemático e como pessoa.

Agradeço também ao meu marido Vyacheslav Futorny pela inspiração e dedicação, especialmente nos últimos meses, por sempre estar a meu lado quando eu mais precisava.

Agradeço ao professor Sergey Ovsienko da Universidade de Kiev, de quem aprendi que a matemática não é uma profissão mas sim uma paixão.

Agradeço também aos professores Viktor Bekkert de UFMG e Eduardo do Nascimento Marcos de IME-USP pelos muitos conselhos valiosos durante a preparação da tese.

Agradeço também aos professores Alex Molev da Universidade de Sydney e Jiri Patera da Universidade de Montreal pela amizade, colaboração e orientação.

Agradeço à amiga Anliy pela ajuda na minha luta com a língua portuguesa durante a

digitação desta tese.

Agradeço também à FAPESP por ter financiado este projeto e pela confiança dada.

Finalmente, agradeço a todos do IME-USP e aos meus amigos pelo apoio e atenção.

Resumo

Este trabalho consiste de três partes: "Variedades de álgebras de Jordan", "Contrações graduadas de álgebras de Jordan" e "Tipos de representações de álgebras de Jordan". O objetivo principal da primeira parte é o estudo de propriedades geométricas da variedade de álgebras de Jordan de dimensão fixa usando o conceito de deformação de álgebras, incluindo a descrição das componentes irredutíveis dessa variedade nas dimensões pequenas, as álgebras rígidas, o comportamento de uma álgebra através de uma deformação. Mostramos, que a dimensão de uma componente irredutível de álgebras de Jordan $\mathcal{J}$, tais que $(\mathcal{J}^2)(\mathcal{J}^2) \subset (\mathcal{J}^3)\mathcal{J}$, é no máximo $1/6\sqrt{3}n^3 + O(n^{8/3})$ e a dimensão máxima de uma componente irredutível de álgebras alternativas é $4/27n^3 + O(n^{8/3})$.

Na segunda parte introduzimos contrações graduadas de álgebras de Jordan juntamente com as contrações de representações dessas álgebras. Descrevemos todas as contrações de álgebras de Jordan graduadas pelos grupos $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ e $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e também de representações e representações especiais graduadas pelos grupos $\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_3$.

A terceira parte trata do problema de classificação de módulos de Jordan especiais usando os métodos da teoria de representações de álgebras associativas de dimensão finita. Nós classificamos as álgebras de Jordan $\mathcal{J}$ com $\text{Rad}\mathcal{J}^2 = 0$ com respeito ao tipo de representação (finito, manso ou selvagem) para os módulos especiais. Paralelamente, estudamos as álgebras envoltentes universais especiais para álgebras de Jordan, visto que as categorias de módulos (associativos) são isomorfas à categoria de módulos especiais sobre a álgebra de Jordan correspondente.

Abstract

This work consists of three parts: "Varieties of Jordan algebras", "Graded contractions of Jordan algebras" and "Representational type of Jordan algebras". In the first part we study geometrical properties of the variety of Jordan algebras of fixed dimension from the point of view deformation theory: decomposition into irreducible components, rigid algebras, behavior of an algebra under deformation. In particular, we show that the maximal dimension of an irreducible component of Jordan algebras $\mathcal{J}$, such that $(\mathcal{J}^2)(\mathcal{J}^2) \subset (\mathcal{J}^3)\mathcal{J}$, is $1/6\sqrt{3}n^3 + O(n^{8/3})$ and the maximal dimension of an irreducible component of alternative algebras is $4/27n^3 + O(n^{8/3})$.

In the second part we introduce a notion of graded contraction for both Jordan algebras and their representations. We classify all contractions of Jordan algebras graded by the groups $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ and $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ and all contractions of both Jordan bimodules and Jordan special modules graded by the groups $\mathbb{Z}_2$ and $\mathbb{Z}_3$.

Third part is devoted to the problem of classification of Jordan special modules using the methods of the representations theory of finite dimensional associative algebras. We classify Jordan algebras $\mathcal{J}$, such that $(\text{Rad}\mathcal{J})^2 = 0$, with respect to their representation type (finite, tame or wild) for special modules. Also we study the special universal envelopes for Jordan algebras, since their categories of modules (associative) are isomorphic to the categories of special modules of the corresponding Jordan algebras.

Sumário

Introdução	1
1 Álgebras de Jordan de dimensão finita	7
1.1 Definição, identidades e exemplos básicos	7
1.2 Estrutura das álgebras de Jordan de dimensão finita	9
1.3 As representações de álgebras de Jordan	12
1.4 Extensões de álgebras de Jordan	15
1.5 Álgebras alternativas de dimensão finita	17
2 Variedades de álgebras de Jordan	19
2.1 Deformações de álgebras	20
2.2 O comportamento de uma álgebra de Jordan	24
2.3 Variedades de álgebras de Jordan	28
2.3.1 A variedade $\mathcal{J}or_3$	28
2.3.2 A variedade $\mathcal{J}ord_4 \setminus \mathcal{C}omm_4$	32
2.3.3 A variedade $\mathcal{J}ord_5 \setminus \mathcal{C}omm_5$	35
2.4 Um análogo do teorema de Neretin	41
3 Contrações graduadas de álgebras de Jordan e de suas representações	52
3.1 Graduações de álgebras de Jordan simples	53

3.2	Contrações graduadas de álgebras e superálgebras de Jordan	56
3.3	Exemplos de contrações de álgebras e superálgebras de Jordan	59
3.3.1	Contrações no caso $G = \mathbb{Z}_2$	59
3.3.2	Contrações no caso $G = \mathbb{Z}_3$	61
3.3.3	Contrações no caso $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	64
3.4	Contrações de representações de álgebras de Jordan	65
3.4.1	Contrações de bimódulos de Jordan	65
3.4.2	Contrações de módulos especiais de Jordan	66
3.5	Exemplos de contrações de representações	67
3.5.1	Contrações no caso $G = \mathbb{Z}_2$	67
3.5.2	Contrações no caso $G = \mathbb{Z}_3$	70
4	Tipos de representações de álgebras de Jordan	75
4.1	Tipos de representações de álgebras	75
4.2	O quiver e a equivalência de Morita	76
4.3	Álgebras envoltentes universais especiais	79
4.3.1	A álgebra envolvente universal especial unital para $\mathcal{J} = M_n(\mathbb{C})^+$.	80
4.3.2	A álgebra envolvente universal especial unital para $\mathcal{J} = H(M_n(\mathbb{C}), tr)$	83
4.4	Quiver da álgebra envolvente universal especial	84
4.5	Álgebras de Jordan com parte semi-simples $\mathbb{C} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}$	87
4.6	Álgebras de Jordan com $\mathcal{J}_{ss} = M_2(\mathbb{C})^+ \oplus \cdots \oplus M_2(\mathbb{C})^+$	92
4.7	Álgebras de Jordan com $\mathcal{J}_{ss} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \cdots \oplus M_n(\mathbb{C})^+, n \geq 3$	98
4.8	Álgebras de Jordan com $\mathcal{J}_{ss} = H(M_2(\mathbb{C}), tr) \oplus \cdots \oplus H(M_2(\mathbb{C}), tr)$	104
4.9	Álgebras de Jordan com $\mathcal{J}_{ss} = H(M_n(\mathbb{C}), tr) \oplus \cdots \oplus H(M_n(\mathbb{C}), tr), n \geq 3$	107
4.10	Tipo de representação: caso geral	109

Introdução

As álgebras de Jordan "foram concebidas e chegaram a idade adulta na paisagem da física" (were conceived and grew to maturity in the landscape of physics) [1]. Elas nasceram no ano 1933 no artigo de um físico alemão Pascal Jordan [2] como uma ferramenta algébrica para um formalismo no "modelo de Copenhagen" na mecânica quântica. A idéia foi capturar a essência algébrica dos observáveis na mecânica quântica interpretados como operadores hermitianos no espaço de Hilbert. As operações básicas com matrizes são multiplicação por um escalar, soma e multiplicação das matrizes. Mas o resultado da multiplicação de uma matriz hermitiana por um escalar complexo não é necessariamente uma matriz hermitiana, a menos que o escalar seja real. Além disso, o produto xy de dois observáveis não é observável (hermitiano) a menos que eles comutem. Assim, o primeiro passo foi observar as propriedades dos operadores hermitianos para definir uma operação básica para observáveis. O candidato foi encontrado pelo próprio Jordan e é o produto simétrico bilinear $x \circ y = xy + yx$, que agora chama-se o "produto de Jordan". O próximo passo foi encontrar os axiomas obedecidos pelas matrizes hermitianas. Ele definiu uma classe de álgebras comutativas não associativas que satisfazem a versão debilitada de associatividade ("identidade de Jordan")

$$(x^2 \circ y) \circ x = x^2 \circ (y \circ x)$$

para todos elementos x, y dessa álgebra. A teoria de Jordan busca a descrição intrínseca desses sistemas, sem referência a hipótese-mas-não-observável produto associativo. Cada sistema abstrato com o produto comutativo que satisfaz a identidade de Jordan chama-se **álgebra de Jordan**. Além disso, uma álgebra de Jordan é chamada **especial** se ela consta de um subespaço de elementos de uma álgebra associativa, fechado com respeito ao produto de Jordan $xy + yx$. Os físicos estavam interessados nas álgebras para as quais não existem tais interpretações em termos de elementos associativos, quais são chamadas

excepcionais. Em 1934 junto com J. von Neumann e E. Wigner em [3] Jordan classificou as álgebras de Jordan de dimensão finita formalmente reais. O resultado foi decepcionante para os físicos, visto que a única álgebra excepcional encontrada em dimensão finita foi a álgebra de Albert das matrizes hermitianas $H_3(\mathbb{O})$ 3×3 , a álgebra dos octônions (em 1983 E. Zelmanov ([4]) mostrou que também em dimensão infinita as álgebras de Albert são as únicas álgebras excepcionais). Enquanto esse plano não realizou-se completamente, as álgebras de Jordan provaram ter muitas conexões com diferentes áreas da matemática: elas surgiram como as coordenadas para álgebras de Lie, e a álgebra de Albert ajuda entender as cinco álgebras de Lie excepcionais simples. As álgebras de Jordan têm o papel principal na solução de Zelmanov do problema de Burnside sobre os grupos de torsão finitamente gerados [5]. Outra aplicação vem da geometria diferencial e trata os cones homogêneos auto-duais em n -espaço real relacionados com domínios simétricos limitados no espaço complexo, veja [6] e [7]. Assim, o estudo da classe das álgebras de Jordan tornou-se numa das áreas mais importantes e ativas da teoria de álgebras não-associativas com uma variedade ampla de resultados e numerosas aplicações.

Como já mencionamos, a teoria estrutural de álgebras de Jordan iniciou-se com Jordan juntamente com von Neumann e Wigner ainda em [3], mas os resultados mais gerais para álgebras de Jordan de dimensão finita sobre um corpo arbitrário foi desenvolvido por Albert em [8] e [9]. Ele introduziu o conceito de radical, a noção de solubilidade e mostrou que qualquer álgebra semi-simples é uma soma direta de ideais simples. Além disso, ele classificou as álgebras simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado. Isso foi o primeiro passo na classificação algébrica das álgebras de Jordan: a determinação de todas as classes de isomorfismo de álgebras de Jordan de dimensão fixa. Contudo, exceto para dimensões baixas, veja [10], uma classificação algébrica completa é conhecida só no caso de álgebras de Jordan semi-simples. Nesse trabalho nós começamos a **classificação geométrica** para álgebras de Jordan, que resumidamente, é o problema de descrição das constantes estruturais genéricas no sentido de geometria algébrica. Essa teoria já está bastante desenvolvida para álgebras associativas e álgebras de Lie. Nos últimos 10 anos os métodos geométricos na teoria de álgebras associativas e álgebras de Lie estão sendo desenvolvidos ativamente. O estudo das propriedades geométricas da variedade de álgebras de dimensão fixa ajuda a compreender melhor a estrutura dessas álgebras, encontrar as relações entre elas e, além disso, obter uma classificação especialmente no caso de álgebras nilpotentes onde a teoria clássica não funciona.

O objeto chave para a classificação geométrica é o cone afim $\mathcal{J}or_n \subset \mathbb{A}^{n^3}$. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ com uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$. Para introduzir a estrutura de uma álgebra de Jordan em V nós especificamos n^3 constantes estruturais $c_{ij}^k \in \mathbb{C}$, onde

$$e_i \cdot e_j = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e_k, \quad \text{para todos } i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

A escolha das constantes não é arbitrária, ela tem que refletir as suposições de que a multiplicação é comutativa e satisfaz identidade de Jordan (1.3):

$$\begin{aligned} c_{ij}^k &= c_{ji}^k, \\ \sum_{a=1}^n c_{ij}^a \sum_{b=1}^n c_{kl}^b c_{ab}^p - \sum_{a=1}^n c_{kl}^a \sum_{b=1}^n c_{ja}^b c_{ib}^p + \sum_{a=1}^n c_{lj}^a \sum_{b=1}^n c_{ki}^b c_{ab}^p - \\ \sum_{a=1}^n c_{ki}^a \sum_{b=1}^n c_{ja}^b c_{lb}^p + \sum_{a=1}^n c_{kj}^a \sum_{b=1}^n c_{il}^b c_{ab}^p - \sum_{a=1}^n c_{il}^a \sum_{b=1}^n c_{ja}^b c_{kb}^p &= 0, \end{aligned}$$

para todos $i, j, k, l, c \in \{1, \dots, n\}$. Essas equações definem uma variedade algébrica em $\mathbb{A}^{n^3} = V^* \otimes V^* \otimes V$ que é chamada $\mathcal{J}or_n$. Os fatos básicos sobre essa variedade são os seguintes. Qualquer ponto $(c_{ij}^k) \in \mathcal{J}or_n$ representa uma $\mathbb{C}$ -álgebra $\mathcal{J}$ de dimensão n , juntamente com uma escolha particular de uma base que determina os constantes estruturais c_{ij}^k . A mudança de base em $\mathcal{J}$ pode representar um ponto diferente em $\mathcal{J}or_n$. O grupo $GL(V)$ age em $\mathcal{J}or_n$, tal ação é chamada o "transporte da estrutura". Além disso, as $GL(V)$ -órbitas dessa ação estão em correspondência biunívoca com as classes de isomorfismo das álgebras de Jordan de dimensão n . Nós denotamos a órbita correspondente a uma álgebra $\mathcal{J}$ por $\mathcal{J}^{GL(V)} \subset \mathcal{J}or_n$. O conceito de órbita de álgebra está relacionado com o conceito de uma deformação de álgebra, introduzido pelo M. Gerstenhaber em [11]. Sejam $\mathcal{J}_1$ e $\mathcal{J}_2$ duas álgebras de Jordan tais que $\mathcal{J}_2^{GL(V)}$ está contido no fecho de Zariski de $\mathcal{J}_1^{GL(V)}$, então dizemos que $\mathcal{J}_1$ é uma **deformação** de $\mathcal{J}_2$.

Uma teoria estrutural de álgebras em qualquer classe inclui também a teoria de representações como sua parte essencial. O conceito de bimódulo para uma classe de álgebras foi introduzido por S. Eilenberg nos anos 1945-1947 [12]. Para álgebras de Jordan, esta teoria foi desenvolvida por N. Jacobson em [13], [14]. A categoria de (bi)módulos de uma álgebra de Jordan $\mathcal{J}$ de dimensão finita está relacionada com uma álgebra associativa de dimensão finita, a álgebra envolvente multiplicativa universal $U(\mathcal{J})$ [13]. Existe uma propriedade importante da álgebra envolvente universal: a categoria de módulos associativos à direita de $U(\mathcal{J})$ é isomorfa a categoria de módulos de $\mathcal{J}$. Portanto podemos usar todas as ferramentas da teoria de representações de álgebras associativas de dimensão

finita para o estudo de módulos sobre álgebras de Jordan. Assim, Jacobson demonstrou que, para qualquer álgebra semi-simples de dimensão finita todo módulo indecomponível é irredutível. Ele também classificou todos os módulos irredutíveis no caso de álgebras de Jordan de dimensão finita. Em 1986, E. Zelmanov [15] generalizou este resultado classificando todos os módulos irredutíveis para álgebra de Jordan de qualquer dimensão. Assim, ao contrário das álgebras de Lie, a teoria de módulos para álgebras de Jordan é muito parecida com a teoria de módulos sobre álgebras associativas. Apesar da última observação feita depois dos resultados mencionados acima, a teoria de birepresentações para álgebras de Jordan não semi-simples não tinha resultados profundos. A razão principal é que a estrutura de álgebra envolvente universal é bem mais complicada no caso de álgebras de Jordan não semi-simples. Nesse caso não é suficiente estudar apenas módulos irredutíveis, é necessário passar para os módulos indecomponíveis.

Uma das linhas de pesquisa mais relevantes na área de módulos (representações) para álgebras associativas é o estudo do **tipo de representação**. Seja Λ uma álgebra associativa de dimensão finita. Diz-se que Λ tem **tipo de representação finito** se o conjunto de classes de isomorfismo de Λ -módulos indecomponíveis finitamente gerados é finito. Diz-se que Λ tem **tipo de representação manso** se o conjunto das classes de isomorfismos dos Λ -módulos indecomponíveis finitamente gerados forma em cada dimensão o número finito de famílias de um parâmetro. Finalmente, diz-se que Λ tem **tipo de representação selvagem** quando não é de nenhum dos tipos definidos anteriormente [16]. O tipo manso corresponde ao caso em que existe uma técnica bem desenvolvida para tratar os módulos indecomponíveis finitamente gerados, sendo que no tipo selvagem isto é muito difícil, até mesmo no caso em que isto é possível. Então os problemas da teoria de representações são: caracterizar as álgebras de tipo de representação manso e descrever as classes de isomorfismo de Λ -módulos indecomponíveis no caso em que Λ é uma álgebra do tipo manso. Já existe bastante conhecimento sobre tipo de representação de classes de álgebras associativas, possibilitando o estudo de representações de álgebras de Jordan usando os resultados para álgebras associativas correspondentes.

O caso mais próximo ao caso de álgebras semi-simples é a classe de álgebras de Jordan com quadrado do radical de Jacobson nulo. Para álgebras associativas este caso foi considerado nos trabalhos [17], [18]. A terceira parte desse trabalho é dedicada ao estudo de álgebras de Jordan através do seu tipo de representação.

O capítulo 1 é dedicado as álgebras de Jordan de dimensão finita. Nesse capítulo incluímos definições, exemplos básicos e alguns resultados principais sem apresentar demonstrações, uma referência para esse assunto é o livro de N. Jacobson, *Structure and representations of Jordan algebras*, [13]. Na seção 1.2 incluímos uma breve introdução sobre a estrutura das álgebras de Jordan, sobre o radical e classificação das álgebras de Jordan semi-simples sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero. Na seção 1.3 falaremos sobre a teoria de representações de álgebra de Jordan, definimos os conceitos de um módulo de Jordan, um módulo de Jordan especial. Nós apresentaremos a construção das álgebras envoltentes universais especiais e multiplicativas. Para esta seção utilizamos o artigo de N. Jacobson *Structure of alternative and Jordan bimodules*, [14]. Finalmente, a 1.4 refere-se às álgebras alternativas. A seção foi embasada no livro de R. D. Schafer *An Introduction to Nonassociative Algebras*, [19]. Resumidamente nós apresentamos definições básicas que usamos no capítulo 2 para provar o teorema sobre estimativa do número dos parâmetros que definem uma família de álgebras alternativas.

O capítulo 2 é dedicado à classificação geométrica de álgebras de Jordan. Começamos com a definição de deformação de álgebra, incluímos uma introdução sobre os resultados e teoremas já obtidas para deformações de álgebras associativas e álgebras de Lie. No capítulo 2, 2.2 demostramos alguns teoremas sobre o comportamento de uma álgebra sob deformação. Esses teoremas são análogos aos teoremas para álgebras associativas em [20], [21] e [29]. Na seção 2.3 definimos uma variedade de álgebras de Jordan de dimensão n fixa $\mathcal{Jor}_n$ e apresentamos a descrição completa das variedades $\mathcal{Jor}_3$ (das álgebras de Jordan de dimensão 3) juntamente com $\mathcal{Jord}_4$ e $\mathcal{Jord}_5$ (das álgebras de Jordan com unidade de dimensão 4 e 5), classificamos as álgebras rígidas (componentes irredutíveis). Finalmente, a última desse capítulo é dedicada aos resultados sobre estimativa do número de parâmetros que definem uma família de álgebras de Jordan e álgebras alternativas. A assintótica é obtida para maior número possível de parâmetros quando n é fixo: $1/6\sqrt{3}n^3 + O(n^{8/3})$ no caso de álgebras de Jordan e $4/27n^3 + O(n^{8/3})$ no caso de álgebras alternativas.

O capítulo 3 refere-se às **contrações graduadas** das álgebras de Jordan juntamente com contrações de representações dessas álgebras. Na seção 3.1 incluímos uma breve introdução sobre graduações de álgebras e superálgebras de Jordan. Nas seções 3.2 e 3.4 apresentamos a construção de uma contração de uma álgebra de Jordan e contratação de

uma representação de álgebra de Jordan. Logo, nas 3.3 e 3.5 essas técnicas são aplicadas para álgebras graduadas pelos grupos $G = \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ para contrair uma álgebra e por $G = \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ no caso de contração de uma representação. Todos os casos são ilustrados com exemplos. O capítulo foi baseado no artigo *Graded Contractions of Jordan Algebras and of their representations* da autora em conjunto com Prof. J. Patera, [22].

O capítulo 4 é dedicado á classificação de álgebras de Jordan através de seus tipos de representação. Nas seções 4.1 e 4.2 incluímos definições, exemplos e alguns resultados principais sem apresentar demonstrações para tipo de representação de álgebras associativas, referências para esse assunto são os livros de A. Jones e H. Merklen *Representações de Álgebras*, [23] e de R. S. Pierce *Associative algebras* [24]. A seção 4.3 é dedicada a uma nova demonstração do teorema de Martindale para álgebras de Jordan $\mathcal{J} = M_n(\mathbb{C})^+$ e $\mathcal{J} = H(M_n(\mathbb{C}), tr)$. Em particular, nós construímos bases para a álgebra envolvente universal especial unital $S_1(\mathcal{J})$, que são usadas posteriormente para a construção do quiver que corresponde a álgebra $S_1(\mathcal{J})$. Na 4.4 demonstramos alguns resultados técnicos que mostram as relações entre uma álgebra de Jordan $\mathcal{J}$, cujo quadrado do radical é nulo, e o quiver para álgebra envolvente universal especial unital dela, $S_1(\mathcal{J})$. As seções restantes desse capítulo referem-se ao estudo do tipo de representação das álgebras $S_1(\mathcal{J})$ para álgebras de Jordan $\mathcal{J}$ com quadrado do radical nulo, cujas partes semi-simples $\mathcal{J}_{ss}$ são iguais a soma direta das seguintes álgebras simples: $\mathcal{J} \simeq M_n^+(\mathbb{C})$, $n \geq 1$, onde $M_n(\mathbb{C})$ é a álgebra dos matrizes $n \times n$ com elementos em $\mathbb{C}$ e $\mathcal{J} \simeq H(M_n(\mathbb{C}), tr)$, onde $H(M_n(\mathbb{C}), tr)$ é uma álgebra de Jordan da dimensão $\frac{1}{2}n(n+1)$ sobre $\mathbb{C}$ de elementos simétricos com respeito à transposição. O tipo de representação da álgebra $S_1(\mathcal{J})$ define o **s-tipo** para álgebra de Jordan $\mathcal{J}$ e é o primeiro passo na determinação do tipo de representação de $\mathcal{J}$, i.e., o tipo de representação da álgebra envolvente universal multiplicativa $U(\mathcal{J})$.

Capítulo 1

Álgebras de Jordan de dimensão finita

1.1 Definição, identidades e exemplos básicos

Definição 1.1.1. *Uma k -álgebra (não-associativa) Λ é um espaço vetorial sobre um corpo k que possui uma aplicação bilinear $(x, y) \rightarrow xy$ com $x, y \in \Lambda$ chamada um produto tal que*

$$\begin{aligned}x(y + z) &= xy + xz, & (x + y)z &= xz + yz, \\ \alpha(xy) &= (\alpha x)y = x(\alpha y),\end{aligned}$$

$x, y, z \in \Lambda, \alpha \in k$.

Seja a um elemento da álgebra Λ , então a multiplicação à direita R_a de Λ determinada por a é definida por:

$$R_a : x \rightarrow xa \quad \text{para todo } x \in \Lambda.$$

Obviamente R_a é um operador linear em Λ . Também o conjunto $R(\Lambda)$ de todas as multiplicações à direita de Λ é um subespaço da álgebra associativa Ω de todos operadores lineares em Λ . Analogamente, a multiplicação à esquerda L_a definida por

$$L_a : x \rightarrow ax \quad \text{para todo } x \in \Lambda$$

é um operador linear em Λ , a aplicação $a \rightarrow L_a$ é linear e o conjunto $L(\Lambda)$ de todas multiplicações à esquerda de Λ é um subespaço de Ω .

Salvo menção ao contrário, álgebras serão tomadas sobre o corpo k algebricamente fechado de $\text{car } k = 0$.

Definição 1.1.2. Uma álgebra de Jordan $\mathcal{J}$ é uma álgebra cujo produto satisfaz as seguintes condições:

$$x \cdot y = y \cdot x \quad (\text{comutatividade}), \quad (1.1)$$

$$(x^2 \cdot y) \cdot x = x^2 \cdot (y \cdot x) \quad (\text{identidade de Jordan}), \quad (1.2)$$

para todo $x, y \in \mathcal{J}$, onde $x^2 = x \cdot x$.

A identidade de Jordan pode ser reescrita usando **associador** (x, y, z) ,

$$(x, y, z) := (x \cdot y) \cdot z - x \cdot (y \cdot z),$$

como $(x, y, x^2) = 0$. Além disso, colocando $x + \lambda z$ no lugar de x , $\lambda \in k$ e comparando os coeficientes de λ , obtemos **linearização parcial**:

$$2(x, y, z \cdot x) + (z, y, x^2) = 0 \quad \text{para todos } x, y, z \in \mathcal{J}.$$

Novamente substituímos x por $x + \lambda w$ na última fórmula, dividimos por 2 e obtemos a seguinte **linearização completa**:

$$(x, y, z \cdot w) + (w, y, z \cdot x) + (z, y, x \cdot w) = 0 \quad \text{para todos } x, y, z, w \in \mathcal{J}. \quad (1.3)$$

Usando os operadores lineares, a identidade de Jordan e a comutatividade podem ser reescritos da seguinte forma:

$$R_x = L_x, \quad R_x R_{x^2} = R_{x^2} R_x, \quad x \in \mathcal{J}.$$

Da mesma maneira a identidade multilinear é equivalente a

$$R_z R_{x \cdot w} - R_z R_w R_x + R_w R_{z \cdot x} - R_w R_{(z \cdot x)} + R_x R_{z \cdot w} - R_x R_w R_z = 0, \quad (1.4)$$

$$[R_x, R_{w \cdot z}] + [R_w, R_{z \cdot x}] + [R_z, R_{x \cdot w}] = 0$$

para todos $x, z, w \in \mathcal{J}$ e $[a, b] := ab - ba$ é comutador.

Seja A uma álgebra associativa, pode-se definir uma nova multiplicação simétrica (de Jordan):

$$x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx), \quad x, y \in A.$$

Denotamos a álgebra obtida com introdução da multiplicação $x \cdot y$ sobre espaço vetorial A por A^+ . Segue-se que a álgebra A^+ é uma álgebra de Jordan.

Definição 1.1.3. *Qualquer subespaço em A fechado com respeito à operação $x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx)$ forma uma subálgebra de A^+ e é por conseqüência uma álgebra de Jordan. Tais álgebras são chamadas álgebras de Jordan especiais. As álgebras não especiais são chamadas excepcionais.*

Outra fonte de exemplos de álgebras de Jordan é relacionada com as álgebras associativas com involução. Seja (A, j) uma álgebra associativa com uma involução j (uma aplicação linear $j : A \rightarrow A$ tal que $j^2 = \text{id}$ e j é antihomomorfismo). Consideramos o conjunto $H(A, j)$ dos elementos de A fixos pela ação de j , o que é uma subálgebra de A^+ e assim é uma álgebra de Jordan. Em particular, $H(A, j)$ é uma álgebra especial. Além disso se a álgebra A é j -simples, então a álgebra $H(A, j)$ é simples.

O outro exemplo é o seguinte. Seja V um espaço vetorial de dimensão maior que 1 sobre $\mathbf{k}$, com uma forma bilinear simétrica não-degenerada $f(x, y)$. Consideramos a soma direta dos espaços vetoriais $\mathcal{J}(V, f) = \mathbf{k} \cdot 1 \oplus V$ e definimos uma multiplicação da seguinte maneira:

$$(\alpha + x) * (\beta + y) = (\alpha\beta + f(x, y)) \cdot 1 + (\alpha y + \beta x)$$

para todos $\alpha, \beta \in \mathbf{k}$, $x, y \in V$. A álgebra $(\mathcal{J}(V, f), *)$ é uma álgebra de Jordan simples especial.

Finalmente o conjunto $H(M_3(\mathbb{O}), j)$ dos elementos de álgebra de Cayley $\mathbb{O}$ sobre $\mathbf{k}$ fixos pela ação de j é uma álgebra de Jordan simples de dimensão 27. Aqui j é o transposto conjugado $j : x \rightarrow \bar{x}^{tr}$. Em [25] A. Albert mostrou que $H(M_3(\mathbb{O}), j)$ é uma álgebra excepcional.

1.2 Estrutura das álgebras de Jordan de dimensão finita

A teoria estrutural das álgebras de Jordan foi iniciada por Jordan, von Neumann e Wigner em [3] para álgebras de Jordan sobre $\mathbb{R}$. Depois Albert em [9] deu as definições de solubilidade, radical e álgebras semi-simples. Ele determinou todas as álgebras simples de Jordan sobre um corpo algebricamente fechado. Nesse capítulo apresentamos alguns

teoremas e fatos sobre o radical e álgebras semi-simples de Jordan quais foram baseados no livro de R. D. Schafer *An Introduction to Nonassociative Algebras*.

Seja $\mathcal{J}$ uma álgebra de Jordan sobre um corpo algebricamente fechado k , $\text{car } k = 0$, de dimensão finita.

Definição 1.2.1. A série de potências $\mathcal{J}^{(k)}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, de uma álgebra de Jordan é uma seqüência decrescente definida por recorrência da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}^{(0)} &= \mathcal{J}, \\ \mathcal{J}^{(k)} &= (\mathcal{J}^{(k-1)})^2.\end{aligned}$$

Claramente $\mathcal{J}^{(1)}$ é um ideal e todos os $\mathcal{J}^{(k)}$ são subálgebras e não necessariamente formam ideais.

Definição 1.2.2. Uma álgebra $\mathcal{J}$ é chamada **solúvel** se existe um número inteiro positivo n tal que $\mathcal{J}^{(n)} = 0$.

Além disso, temos o seguinte lema:

Lema 1.2.3. 1. Suponhamos que $\mathcal{J}$ contém um ideal solúvel I tal que $\mathcal{J}/I$ é também solúvel, então $\mathcal{J}$ é solúvel.

2. Sejam I_1 e I_2 ideais solúveis, então $I_1 + I_2$ é um ideal solúvel.

Segue imediatamente do lema que se a álgebra $\mathcal{J}$ satisfaz a condição maximal para ideais (em particular, quando $\mathcal{J}$ é uma álgebra de dimensão finita) então $\mathcal{J}$ contém um ideal R solúvel tal que R contém todos os ideais solúveis em $\mathcal{J}$.

Definição 1.2.4. Uma álgebra é chamada **nilpotente** se existe um número inteiro positivo n tal que qualquer produto de n elementos da álgebra é 0. O mínimo de todos tais números é chamado o **índice da nilpotência**. Uma álgebra é chamada **nil álgebra** se qualquer elemento dessa álgebra é nilpotente.

É óbvio que qualquer álgebra nilpotente $\mathcal{J}$ é também solúvel. Seja $\mathcal{J}$ uma álgebra de Jordan solúvel, então existe um número inteiro positivo n tal que $\mathcal{J}^{(n)} = 0$ e para qualquer $a \in \mathcal{J}$ $a^{2^n} = 0$. Assim qualquer álgebra solúvel é nil álgebra. Por outro lado nós temos

Teorema 1.2.5. (Albert) *Qualquer nil álgebra de Jordan $\mathcal{J}$ de dimensão finita é nilpotente. Em particular, cada álgebra solúvel da dimensão finita é nilpotente.*

Cada álgebra de Jordan de dimensão finita possui um único ideal nilpotente (=solúvel, =nil) maximal R que chama-se o **radical** de $\mathcal{J}$. Uma álgebra de Jordan é chamada **semi-simples** no caso em que $R = 0$, em particular $\mathcal{J}/R$ é uma álgebra semi-simples. Uma álgebra $\mathcal{J}$ é chamada **simples** se ela não possui ideais não triviais.

Teorema 1.2.6. (Albert) *Qualquer álgebra de Jordan semi-simples de dimensão finita possui identidade e é a soma direta dos ideais que são álgebras simples. Além disso qualquer álgebra de Jordan possui decomposição de Albert-Penico-Taft $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{ss} + \text{Rad } \mathcal{J}$, onde $\mathcal{J}_{ss}$ é uma parte semi-simples de $\mathcal{J}$ e $\text{Rad } \mathcal{J}$ é o radical.*

Finalmente, qualquer álgebra de Jordan simples de dimensão finita é uma das álgebras do tipo **A,B,C,D,E** listadas abaixo:

1. **A:** $\mathcal{J} \simeq M_n^+(\mathbf{k})$, onde $M_n(\mathbf{k})$ é a álgebra de matrizes $n \times n$ com elementos em $\mathbf{k}$ (álgebra associativa central simples);
2. **B:** $\mathcal{J} \simeq H(M_n(\mathbf{k}), tr)$, com $H(M_n(\mathbf{k}), tr)$ uma álgebra de Jordan de elementos fixos pela ação de transposição de dimensão $\frac{1}{2}n(n+1)$ sobre $\mathbf{k}$;
3. **C:** $\mathcal{J} \simeq H(M_{2n}(\mathbf{k}), sp)$, com $H(M_{2n}(\mathbf{k}), sp)$ uma álgebra de Jordan de elementos simétricos com respeito à involução

$$sp : a \rightarrow g^{-1}a^{tr}g, \quad \text{onde } g = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$$

de dimensão $2n^2 - n$ sobre $\mathbf{k}$;

4. **D:** $\mathcal{J} \simeq \mathcal{J}(V, f)$ a álgebra de Jordan de uma forma bilinear não-degenerada sobre um espaço vetorial V , $\dim V > 1$;
5. **E:** $\mathcal{J} \simeq H(M_3(\mathbb{O}), j)$.

(uma referência para esse assunto é o livro de N.Jacobson [13], seção V.6). Observamos novamente que no casos **A,B,C,D** a álgebra $\mathcal{J}$ é uma álgebra especial, enquanto que no caso **E** $\mathcal{J}$ é uma álgebra exepcional.

Seja $\mathcal{J}$ uma álgebra de Jordan sem unidade. Então consideramos a álgebra com unidade adjunta $\tilde{\mathcal{J}} = \mathcal{J} \oplus \mathbb{k}1$ com a mesma multiplicação para elementos de $\mathcal{J}$ e $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ para todos $a \in \tilde{\mathcal{J}}$. De [13], Teorema I.6.6 segue que $\tilde{\mathcal{J}}$ é uma álgebra de Jordan.

1.3 As representações de álgebras de Jordan, álgebras envolventes universais

O objetivo básico da teoria de representações é o estudo do problema de aplicação de uma álgebra de Jordan em uma álgebra associativa A . Um homomorfismo de $\mathcal{J}$ em uma álgebra de Jordan A^+ , obtida pela substituição da multiplicação na álgebra associativa pela multiplicação de Jordan chama-se **especialização associativa** de $\mathcal{J}$ em A , onde A é uma álgebra associativa com 1. O segundo tipo importante de aplicações de álgebras de Jordan são aplicações das álgebras de Jordan na álgebra de transformações lineares:

$$a \rightarrow R_a, \quad \mathcal{J} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathcal{J}, \mathcal{J}),$$

com $R_a : x \rightarrow x \cdot a$, essas aplicações são chamadas **especializações multiplicativas**. As noções de especialização associativa e multiplicativa estão relacionadas ao conceito de módulo de Jordan e de módulo especial de Jordan.

Seja $(\mathcal{J}, \cdot)$ uma álgebra de Jordan sobre $\mathbb{C}$, M um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e suponhamos que nós temos uma aplicação bilinear $(a, m) \rightarrow ma$, $a \in \mathcal{J}$, $m \in M$, de $\mathcal{J} \otimes M$ em M . Agora, seja $\Omega = \mathcal{J} \oplus M$ o espaço vetorial igual à soma direta de $\mathcal{J}$ e M e definimos o produto em Ω por

$$(a_1 + m_1) * (a_2 + m_2) = a_1 \cdot a_2 + m_2 a_1 + m_1 a_2,$$

para $a_1, a_2 \in \mathcal{J}$ e $m_1, m_2 \in M$. É obvio que esse produto é bilinear, então Ω é uma álgebra. Essa álgebra é chamada **uma extensão nula** de $\mathcal{J}$ pela ação de $\mathcal{J}$ em M . Além disso, $\mathcal{J}$ é uma subálgebra e M um ideal em Ω tal que $M^2 = 0$. No que se segue diremos que M e a aplicação bilinear descrita acima constituem um módulo de Jordan para $\mathcal{J}$ se a álgebra Ω é uma álgebra de Jordan com respeito ao produto $*$. Equivalentemente temos que M é um **módulo de Jordan** se para qualquer $a, a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{J}$ e $m \in M$

nós temos

$$\begin{aligned}
 ma_1a_2a_3 + ma_3a_2a_1 + m(a_1 \cdot a_3 \cdot a_2) \\
 = ma_1(a_2 \cdot a_3) + ma_2(a_1 \cdot a_3) + ma_3(a_1 \cdot a_2) \\
 = (m(a_2 \cdot a_3))a_1 + (m(a_1 \cdot a_3))a_2 + (m(a_1 \cdot a_2))a_3.
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Analogamente,

Definição 1.3.1. Uma aplicação linear $R : a \rightarrow R_a$ de $\mathcal{J}$ ao espaço de transformações lineares de um espaço vetorial M é chamado uma **representação de Jordan** se

$$\begin{aligned}
 R_{a_1}R_{a_2}R_{a_3} + R_{a_3}R_{a_2}R_{a_1} + R_{a_1a_3a_2} &= R_{a_1}R_{a_2a_3} + \\
 R_{a_2}R_{a_1a_3} + R_{a_3}R_{a_1a_2} &= R_{a_2a_3}R_{a_1} + R_{a_1a_3}R_{a_2} + R_{a_1a_2}R_{a_3}.
 \end{aligned}$$

Os conceitos de módulo e de representação são equivalentes no seguinte sentido: seja M um módulo para $\mathcal{J}$, então a aplicação linear $R_a : m \rightarrow ma$ define uma representação. Reciprocamente, dada uma representação em M , a composição $ma \equiv mR_a$ define um módulo M .

Freqüentemente, quando consideramos as transformações lineares é útil passar da envolvente multiplicativa universal: a álgebra gerada por R_a , $a \in \mathcal{J}$, construída da seguinte maneira. Seja $\mathcal{J}$ uma álgebra de Jordan. Nós consideramos a álgebra associativa livre $F(\mathcal{J})$ sobre o espaço vetorial $\mathcal{J}$ (álgebra tensorial) módulo o ideal R gerado pelos elementos:

$$\begin{aligned}
 a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 + a_3 \otimes a_2 \otimes a_1 + a_1a_3a_2 - a_1 \otimes a_2a_3 - a_2 \otimes a_1a_3 - a_3 \otimes a_1a_2, \\
 a_1 \otimes a_2a_3 + a_2 \otimes a_1a_3 + a_3 \otimes a_1a_2 - a_2a_3 \otimes a_1 - a_1a_3 \otimes a_2 - a_1a_2 \otimes a_3,
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

$a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{J}$. A álgebra $U(\mathcal{J}) \equiv F(\mathcal{J})/R$ é chamada a **envolvente multiplicativa universal** de $\mathcal{J}$. Qualquer representação de $\mathcal{J}$ determina uma representação da álgebra associativa $U(\mathcal{J})$ e vice versa. Além disso, $\mathcal{J}$ é uma representação regular para $\mathcal{J} : a \rightarrow R_a$ para $a \in \mathcal{J}$. Se $\mathcal{J}$ possui unidade, então R é um a um. No caso a álgebra $\mathcal{J}$ não tem unidade consideramos a álgebra com unidade adjunta $\tilde{\mathcal{J}} = \mathcal{J} \oplus k1$. Assim, $a \rightarrow R_a$ é uma representação de $\mathcal{J}$ e nós obtemos uma aplicação um a um de $\mathcal{J}$ em $U(\tilde{\mathcal{J}})$ e novamente podemos considerar $\mathcal{J}$ como um subespaço de $U(\mathcal{J})$.

A introdução da envolvente multiplicativa universal para as representações reduz o estudo das representações de álgebra de Jordan a dois problemas: (1) determinação da estrutura da álgebra associativa $U(\mathcal{J})$, (2) estudo da teoria de representações de $U(\mathcal{J})$.

Seja $\mathcal{J}$ uma álgebra de Jordan e seja M um espaço vetorial, $(a, m) \rightarrow ma$ uma aplicação bilinear de $\mathcal{J} \otimes M$ em M tal que

$$m(a_1 a_2) = \frac{1}{2}(ma_1)a_2 + \frac{1}{2}(ma_2)a_1,$$

então M é chamado **módulo especial**. É fácil verificar que M e a ação $(m, a) \rightarrow \frac{1}{2}ma$ definem um módulo de Jordan para $\mathcal{J}$.

Analogamente ao caso dos módulos de Jordan, qualquer módulo especial define uma representação especial R_s . Seja M um módulo especial para $\mathcal{J}$, então as aplicações lineares $R_a : m \rightarrow ma$ define uma representação especial. Além disso, nós introduzimos a envolvente universal especial para álgebra de Jordan $S(\mathcal{J})$ que é definida como a álgebra $S(\mathcal{J}) = F(\mathcal{J})/R_s$, onde R_s é o ideal de $F(\mathcal{J})$ gerado pelos elementos

$$a \otimes b + b \otimes a - 2ab, \quad a, b \in \mathcal{J}. \quad (1.7)$$

Nós denotamos a coclasse $a + R_s$ de $a \in S(\mathcal{J})$ por $\sigma_u(a)$. Então

$$\sigma_u : \mathcal{J} \rightarrow S(\mathcal{J}) \quad a \rightarrow \sigma_u(a) \quad (1.8)$$

é especialização associativa de $\mathcal{J}$ em $S(\mathcal{J})$. É fácil mostrar que quando $a \rightarrow R_a$ é uma representação especial de $\mathcal{J}$, $R_a \rightarrow 2R_a$ determina uma representação de $S(\mathcal{J})$. Uma representação especial de $\mathcal{J}$ determina uma representação da álgebra associativa $S(\mathcal{J})$. Portanto, para estudar os módulos especiais sobre uma álgebra de Jordan é suficiente considerar os módulos à direita sobre $S(\mathcal{J})$. A contrario ao caso da envolvente multiplicativa universal $U(\mathcal{J})$ a aplicação σ_u não é injetora em geral.

Teorema 1.3.2. ([13], II.1.3) *Uma álgebra de Jordan $\mathcal{J}$ é uma álgebra especial se e somente se a aplicação σ_u é injetora.*

Agora suponhamos que $\mathcal{J}$ é uma álgebra de Jordan com unidade e . Um módulo M para $\mathcal{J}$ é chamado **unitário**, se $m1 = m$ para qualquer $m \in M$. Para estes módulos introduzimos a **envolvente multiplicativa universal unital** $U_1(\mathcal{J}) = F(\mathcal{J})/R_1$, onde R_1 é o ideal gerado por R (1.6) e os elementos $a \otimes 1 + 1 \otimes a - 2a$, $a \in \mathcal{J}$. As três envolventes são relacionadas da seguinte maneira:

Teorema 1.3.3. ([13], II.11.15) *Seja $\mathcal{J}$ uma álgebra de Jordan com unidade e e seja $U = U(\mathcal{J})$ envolvente multiplicativa universal de $\mathcal{J}$. Seja $E_0 = (e - 1)(2e - 1)$, $E_1 =$*

$e(2e - 1)$, $E_{1/2} = -4e(e - 1)$, então os E_i são idempotentes centrais em U os quais são ortogonais e a soma destes é e . Assim, $U = U_0 + U_{1/2} + U_1$ com os ideais $U_i = UE_i$. Além disso, denotamos por x_i a componente de $x \in U$ em U_i então U_1 e $a \rightarrow a_1$ é a envolvente multiplicativa universal unital de $\mathcal{J}$, e $U_0 \oplus U_{1/2}$ com $a \rightarrow 2(a_0 + a_{1/2})$ é a envolvente especial universal $S(\mathcal{J})$ de $\mathcal{J}$.

Analogamente, podemos definir a envolvente especial universal unital $S_1(\mathcal{J})$. Terminamos essa seção com dois teoremas sobre as envolventes da soma direta de duas álgebras de Jordan.

Teorema 1.3.4. ([13], II.2.5) *Seja $\mathcal{J}$ uma álgebra de Jordan com identidade com $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2$, onde $\mathcal{J}_i$ é um ideal em $\mathcal{J}$ e seja $S_1(\mathcal{J}_i)$ a envolvente especial universal unital de $\mathcal{J}_i$. Então $S_1(\mathcal{J}_1) \oplus S_1(\mathcal{J}_2)$ é envolvente especial universal unital de $\mathcal{J}$.*

Teorema 1.3.5. ([13], II.10.16) *Sejam $\mathcal{J}$ uma álgebra de Jordan com unidade, $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2$, onde $\mathcal{J}_i$ é um ideal em $\mathcal{J}$. Então,*

$$U_1(\mathcal{J}) = U_1(\mathcal{J}_1) \oplus U_1(\mathcal{J}_2) \oplus S_1(\mathcal{J}_1) \otimes S_1(\mathcal{J}_2),$$

é a soma direta de três ideais.

Antes de encerrar essa seção apresentamos mais uma relação entre as representações especiais e birepresentações de Jordan.

Teorema 1.3.6. ([13], II.10.14) *Sejam R e R' duas representações especiais que comutam (i.e. $[R_a, R'_b] = 0$ para todos $a, b \in \mathcal{J}$). Então a aplicação*

$$U = \frac{1}{2}(R + R') \tag{1.9}$$

é uma representação de Jordan de $\mathcal{J}$.

1.4 Extensões de álgebras de Jordan

Seja $\mathcal{J}$ uma álgebra de Jordan e seja $\mathcal{M}$ um módulo de Jordan para $\mathcal{J}$. Consideramos $\mathcal{M}$ como uma álgebra de Jordan com multiplicação trivial.

Definição 1.4.1. Uma extensão nula de $\mathcal{J}$ por $\mathcal{M}$ é uma seqüência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\alpha} \Omega \xrightarrow{\beta} \mathcal{J} \longrightarrow 0 \quad (1.10)$$

tal que Ω também é uma álgebra de Jordan.

Duas extensões chamam-se equivalentes se existe um diagrama comutativa

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \Omega & & & \\ & & \nearrow \alpha & \downarrow \gamma & \searrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{M} & & \mathcal{J} & \longrightarrow & 0 \\ & & \searrow \alpha' & \downarrow \beta & \nearrow & & \\ & & & \Omega' & & & \end{array}$$

A extensão (1.10) é chamado **cindida** se existe um homomorfismo $\delta : \mathcal{J} \rightarrow \Omega$ tal que $\delta\beta = 1_{\mathcal{J}}$.

Como α em (1.10) é injetora existe uma aplicação linear $\sigma : \mathcal{J} \rightarrow \Omega$ tal que $\sigma\beta = 1_{\mathcal{J}}$. Assim, obtemos a decomposição dos espaços vetoriais $\Omega = \mathcal{M} \oplus \sigma(\mathcal{J})$. Para $a, b \in \mathcal{J}$ temos

$$\beta(\sigma(a)\sigma(b) - \sigma(ab)) = ab - ab = 0.$$

Assim, $\sigma(a)\sigma(b) - \sigma(ab) \in \mathcal{M}$ ou analogamente

$$\sigma(a)\sigma(b) = \sigma(ab) + h(a, b),$$

onde $(a, b) \rightarrow h(a, b)$ é uma aplicação bilinear de $\mathcal{J} \times \mathcal{J}$ para $\mathcal{M}$. Também, nós obtemos a estrutura do módulo associada a extensão (1.10):

$$ma = m\sigma(a), \quad a \in \mathcal{J}, \quad m \in \mathcal{J}, \quad (1.11)$$

onde $\sigma(a)m$ e $m\sigma(a)$ são os produtos em Ω .

Definição 1.4.2. Uma aplicação bilinear $h : \mathcal{J} \times \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{M}$ a qual satisfaz

$$\begin{aligned} h(a, b) &= h(b, a) \\ (h(a, a)b)a + h(a^2, b)a + h(a^2b, a) &= a^2h(b, a) + h(a, a)(ba) + h(a^2, ba) \end{aligned} \quad (1.12)$$

para todos $a, b \in \mathcal{J}$, é chamada 2-cocíclo de $\mathcal{J}$ com coeficientes em $\mathcal{M}$. Denotamos o conjunto de todos os 2-cocícllos por $Z^2(\mathcal{J}, \mathcal{M})$.

Definição 1.4.3. *Dois 2-cocícos h e h' de $\mathcal{J}$ com coeficientes em $\mathcal{M}$ chamam-se equivalentes se existe uma aplicação linear $\sigma : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{M}$ tal que*

$$h'(a, b) = h(a, b) - \sigma(ab) + a\sigma(b) + b\sigma(a), \quad (1.13)$$

para $a, b \in \mathcal{J}$.

Essa é uma relação de equivalência em $Z^2(\mathcal{J}, \mathcal{M})$. Denotamos o conjunto das classes de equivalência por $H^2(\mathcal{J}, \mathcal{M})$. Finalmente, o conjunto de todos os 2-cocícos equivalentes a 0 denotamos por $B^2(\mathcal{J}, \mathcal{M})$.

A relação entre as extensões de álgebras e 2-cocícos é seguinte:

Teorema 1.4.4. *([13], II.9.12) Seja $\mathcal{J}$ uma álgebra de Jordan e $\mathcal{M}$ um módulo de Jordan para $\mathcal{J}$, então existe a bijeção entre $H^2(\mathcal{J}, \mathcal{M})$ e classes de equivalência das extensões nulos de $\mathcal{J}$ por $\mathcal{M}$ tais que a estrutura do módulo associada a extensão (1.11) coincide com a estrutura dada. Nessa correspondência a classe de equivalência de 0 em $H^2(\mathcal{J}, \mathcal{M})$ corresponde à classe de isomorfismo de extensões cindidas.*

1.5 Álgebras alternativas de dimensão finita

Definição 1.5.1. *Uma álgebra alternativa A é uma álgebra cujo produto satisfaz as seguintes condições:*

$$\begin{aligned} x^2 \cdot y &= x \cdot (x \cdot y) & (\text{identidade alternativa à direita}), \\ y \cdot x^2 &= (y \cdot x) \cdot x & (\text{identidade alternativa à esquerda}), \end{aligned}$$

para todos $x, y \in A$, com $x^2 = x \cdot x$.

As identidades podem ser reescritas usando a **associador** (x, y, z) , da seguinte forma

$$(x, x, y) = (y, x, x) = 0.$$

Analogamente ao caso de álgebras de Jordan temos também as identidades alternativas na forma bilinear

$$(x, y, z) = -(y, x, z) = (y, z, x) \quad (1.14)$$

para todos $x, y, z \in A$. Nas álgebras alternativas o associador (x_1, x_2, x_3) "alterna-se" no sentido que para qualquer permutação σ de $1, 2, 3$ nós temos $(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}) = (\text{sgn}\sigma)(x_1, x_2, x_3)$.

Assim, usando a linguagem de operadores lineares, as identidades alternativas tem forma

$$R_{x^2} = R_x^2, \quad L_{x^2} = L_x^2, \quad x \in A$$

e o fato que o associador alterna-se:

$$\begin{aligned} R_x R_y - R_{xy} &= L_{xy} - L_y L_x = L_y R_x - R_x L_y = \\ &= L_x L_y - L_{yx} = R_y L_x - L_x R_y = R_{yx} - R_y R_x \end{aligned} \tag{1.15}$$

para todos $x, y \in A$.

Analogamente ao caso de álgebras de Jordan, para qualquer álgebra alternativa de dimensão finita os conceitos de álgebra nilpotente, solúvel ou nil-álgebra coincidem, e para qualquer álgebra alternativa A existe o único ideal maximal nilpotente (solúvel, nil) $\text{Rad } A$ o **radical** de A . Uma álgebra alternativa semi-simples é isomorfa à soma direta de álgebras simples. Cada álgebra simples alternativa é ou álgebra associativa ou isomorfa a álgebra de octônios.

Capítulo 2

Variedades de álgebras de Jordan

O desenvolvimento da teoria de deformações de uma álgebra foi iniciada por M. Gerstenhaber em 1964 nos artigos fundamentais [11], [27]. Nesses artigos ele sugeriu considerar o conjunto das constantes estruturais que definem uma classe de álgebras como um espaço paramétrico da teoria de deformações. Assim, ele apresentou as classes de álgebras sobre o corpo k , de dimensão fixa n , como variedades afins dentro de um espaço afim $\mathbb{A}_k^{n^3}$. Qualquer ponto dessa variedade corresponde a uma álgebra A com uma base escolhida. O grupo de todos os automorfismos lineares de A (como um espaço vetorial) age nessa variedade e a decompõe em órbitas de classes de isomorfismos de álgebras. Uma ferramenta principal para o estudo dessas variedades foi o conceito de deformação de uma álgebra A (o elemento genérico A_t de uma família a um parâmetro das deformações de A). Resumidamente, uma álgebra A é deformação de uma álgebra B se o fecho de Zariski da órbita da álgebra A nessa variedade contém a órbita da álgebra B . A teoria das deformações de álgebras foi desenvolvida basicamente para duas classes de álgebras: álgebras associativas e álgebras de Lie. Primeiro, nos trabalhos [28], [20] e [21] para essas classes de álgebras foram demonstrados os teoremas sobre subálgebras estáveis (isto álgebras que não se deforma) juntamente com teoremas sobre o comportamento da decomposição de Levi de uma tal álgebra através de uma deformação. Em 1974, P. Gabriel no artigo *Finite representational type is open*, [26], apresentou as variedades de módulos sobre uma álgebra associativa e deu a primeira classificação geométrica para álgebras associativas de dimensões pequenas para variedade de álgebras associativas de dimensão 3, $Assoc_3$. A geometria tanto de $Assoc_n$ quanto da variedade de álgebra de Lie de dimensão Lie_n ,

é bem complicada. O número de componentes irredutíveis aumenta exponencialmente, veja [29], e a dimensão delas é no máximo $\frac{4}{27}n^3 + O(n^{8/3})$ para álgebras associativas e $\frac{2}{27}n^3 + O(n^{8/3})$ para álgebras de Lie, [30]. Contudo, a descrição completa no caso de álgebras associativas é obtida somente para álgebras de dimensão $n \leq 6$ em [26], [29], [39] e no caso de álgebras de Lie para $n \leq 8$ [31], [40].

Nesse capítulo nós daremos os resultados principais para variedades de álgebras associativas e de Lie e demonstraremos os teoremas análogos para álgebras de Jordan. Dependendo dos métodos e das ferramentas usados algumas demonstrações são parecidas com os casos de $Assoc_n$ e Lie_n . Por outro lado, no caso das estimativas das dimensões de componentes as demonstrações são bem diferentes. Também, nós apresentaremos a classificação geométrica para Jor_3 , Jor_4 e Jor_5 .

2.1 Deformações infinitesimais de álgebras, variedades de álgebras de Jordan Jor_n

Seja $\mathcal{J}$ uma álgebra (de Jordan) sobre o corpo k e V um espaço vetorial associado a $\mathcal{J}$. Suponhamos que R denota o anel de séries formais de uma variável t , e que $K = k((t))$ é corpo quociente de R . Seja $V_K = V \otimes_k K$, então qualquer função bilinear $f : V \times V \rightarrow V$, em particular a multiplicação em $\mathcal{J}$ pode ser estendida a função de $V_K \times V_K \rightarrow V_K$. Seja f_t uma função bilinear $V_K \times V_K \rightarrow V_K$ escrita da forma:

$$f_t(a, b) = ab + tF_1(a, b) + t^2F_2(a, b) + \dots,$$

onde cada F_i é uma função bilinear definida sobre k . Definimos $F_0(a, b) := ab$, o produto em $\mathcal{J}$. Suponhamos agora que f_t é um produto de Jordan, i.e.

$$\begin{aligned} f_t(a, b) &= f_t(b, a) \\ f_t(f_t(a, a), f_t(b, a)) - f_t(f_t(f_t(a, a), b), a) &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Nós podemos considerar a álgebra $\mathcal{J}_t$, cujo espaço vetorial associado é V_K e a multiplicação f_t .

Definição 2.1.1. Diz-se que a álgebra $\mathcal{J}_t$ é um elemento genérico da família a um parâmetro das deformações de $\mathcal{J}$.

A condição (2.1) que f_t é uma multiplicação de Jordan é equivalente as seguintes relações para todos $a, b \in V$ e todos ν inteiros não negativos:

$$F_\nu(a, b) = F_\nu(b, a) \quad (2.2)$$

$$\sum_{\substack{c\lambda+\mu+\gamma=\nu \\ \lambda>0 \ \mu>0 \ \gamma>0}} F_\gamma(F_\mu(a, a), F_\lambda(b, a)) - F_\gamma(F_\mu(F_\lambda(a, a), b), a) = 0$$

No caso $\nu = 0$ obtemos as identidades de comutatividade e de Jordan. No caso $\nu = 1$ a relação (2.2) pode ser escrita na forma:

$$F_1(a^2, ba) - F_1(a^2b, a) + a^2F_1(b, a) - F_1(a^2, b)a + F_1(a, b)(ba) - (F_1(a, a)b)a = 0 \quad (2.3)$$

Então $F_1 \in Z^2(\mathcal{J}, \mathcal{J})$ é um 2-cocíclo de $\mathcal{J}$ com coeficientes em $\mathcal{J}$ (1.12).

Definição 2.1.2. *Uma família de deformações a um parâmetro de uma álgebra de Jordan definida pela multiplicação g_t é chamada **trivial** se existe uma aplicação não-singular linear Φ_t de $V_{k((t))} = V_K$ em V_K da forma seguinte:*

$$\Phi_t(x) = x + t\phi_1(x) + t^2\phi_2(x) + \dots,$$

onde todos $\phi_i : V_K \rightarrow V_K$ são aplicações lineares definidas sobre k , tais que

$$g_t(a, b) = \Phi_t^{-1}(\Phi_t a \cdot \Phi_t b).$$

A álgebra $\mathcal{J}_t$ obtida é obviamente isomorfa à álgebra $\mathcal{J}_k = \mathcal{J} \otimes_k K$. De fato, o isomorfismo é dado pela aplicação linear Φ_t considerada como aplicação de $\mathcal{J}_t$ a $\mathcal{J}_K$. Geralmente, duas famílias f_t e g_t de deformações a um parâmetro de uma álgebra de Jordan $\mathcal{J}$ chamam-se **equivalentes** se existe um automorfismo linear Φ_t de V_K tal que

$$g_t(x, y) = \Phi_t^{-1}f_t(\Phi_t x, \Phi_t y).$$

Seja $g_t(a, b) = ab + tG_1(a, b) + \dots$. Então, para f_t e g_t equivalentes obtemos

$$G_1(a, b) = F_1(a, b) + (\delta\phi_1)(a, b), \quad (2.4)$$

com $(\delta\phi_1)(a, b) = a\phi_1(b) + b\phi_1(a) - \phi_1(ab)$. Para mostrar este fato, observamos primeiro que

$$\Phi_t(g_t(a, b)) = f_t(\Phi_t a, \Phi_t b).$$

Então

$$f_t(\Phi_t a, \Phi_t b) = f_t(a + t\phi_1(a) + \dots, b + t\phi_1(b) + \dots) = (a + t\phi_1(a))(b + t\phi_1(b)) \\ + tF_1(a + t\phi_1(a), b + t\phi_1(b)) + t^2(\dots) = ab + bt\phi_1(a) + at\phi_1(b) + tF_1(a, b) + t^2(\dots),$$

e, portanto, $\Phi_t(g_t(a, b)) = ab + tG_1(a, b) + t\phi_1(ab) + \dots$. Assim,

$$G_1(a, b) = F_1(a, b) + (\delta\phi_1)(a, b).$$

Suponhamos agora que f_t é uma família a um parâmetro tal que $F_1 = \dots = F_{n-1} = 0$, então de (2.2) para $\nu = n$ segue que F_n satisfaz (1.12), implicando que $F_n \in Z^2(\mathcal{J}, \mathcal{J})$. Seja adicionalmente F_n em $B^2(\mathcal{J}, \mathcal{J})$, i.e., $F_n = -\delta\phi_n$ para alguma aplicação linear ϕ_n . Então colocando $\Phi_t(a) = a + t\phi_n(a)$ anologamente à (2.4) nós obtemos:

$$\Phi_t^{-1} f_t(\Phi_t a, \Phi_t b) = ab + t^{n+1} F_{n+1}(a, b) + \dots,$$

Uma vez que

$$f_t(\Phi_t a, \Phi_t b) = f_t(a + t^n \phi_n(a), b + t^n \phi_n(b)) = f_t(a, b) + t^n f_t(\phi_n(a), b) + t^n f_t(a, \phi_n(b)) \\ + t^{2n} f_t(\phi_n(a), \phi_n(b)) = ab + t^n F_n(a, b) + t^n \phi_n(a)b + t^n a\phi_n(b) + t^{n+1}(\dots)$$

e

$$\Phi_t(ab + t^{n+1} F_{n+1}(a, b) + \dots) = ab + t^n \phi(ab) + t^{n+1}(\dots).$$

Assim, demonstramos a seguinte proposição:

Proposição 2.1.3. *Seja f_t uma família de deformações a um parâmetro de uma álgebra $\mathcal{J}$. Então f_t é equivalente a uma família $g_t(a, b) = ab + t^n F_n(a, b) + t^{n+1} F_{n+1}(a, b) + \dots$, onde o primeiro termo não nulo F_n é uma extensão nula não cindida.*

Definição 2.1.4. *Uma álgebra de Jordan é chamada rígida se ela possui somente as deformações triviais.*

Um dos problemas mais importantes na classificação geométrica é a descrição completa das álgebras rígidas em cada dimensão. Da última proposição obtemos o seguinte critério quando a álgebra $\mathcal{J}$ é rígida:

Corolário 2.1.5. *Se $H^2(\mathcal{J}, \mathcal{J}) = 0$ então $\mathcal{J}$ é rígida.*

Em particular, sejam $\mathcal{J}$ qualquer álgebra semi-simples e M um módulo sobre $\mathcal{J}$, então de [32] segue que $H^2(\mathcal{J}, M) = 0$. Segue-se o seguinte resultado

Corolário 2.1.6. *Qualquer álgebra de dimensão finita semi-simples é rígida.*

Seja V um espaço de dimensão n com uma base $e_1, \dots, e_n$. Nós queremos introduzir uma estrutura de álgebra de Jordan de dimensão n em V . Pela linearidade isso pode ser feito pela especificação das n^3 constantes estruturais $c_{ij}^k \in \mathbf{k}$, onde $e_i \cdot e_j = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e_k$ para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Equivalentemente, uma estrutura de uma álgebra em V é dada por uma aplicação bilinear $V \times V \rightarrow V$, que é um elemento de $V^* \otimes V^* \otimes V$.

A escolha das constantes estruturais não é arbitrária; ela deve refletir nossa suposição que a multiplicação defina uma álgebra de Jordan

$$\begin{aligned} c_{ij}^k &= c_{ji}^k, \\ \sum_{a=1}^n c_{ij}^a \sum_{b=1}^n c_{kl}^b c_{ab}^p - \sum_{a=1}^n c_{kl}^a \sum_{b=1}^n c_{ja}^b c_{ib}^p + \sum_{a=1}^n c_{lj}^a \sum_{b=1}^n c_{ki}^b c_{ab}^p - \\ \sum_{a=1}^n c_{ki}^a \sum_{b=1}^n c_{ja}^b c_{lb}^p + \sum_{a=1}^n c_{kj}^a \sum_{b=1}^n c_{il}^b c_{ab}^p - \sum_{a=1}^n c_{il}^a \sum_{b=1}^n c_{ja}^b c_{kb}^p &= 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

para todos $i, j, k, l, p \in \{1, \dots, n\}$. Aqui usamos a identidade multilinear (1.3). Equações (2.5) definem uma variedade algébrica em $\mathbf{k}^{n^3} = V^* \otimes V^* \otimes V$. Qualquer ponto $(c_{ij}^h) \in \mathcal{J}or_n$ representa uma $\mathbf{k}$ -álgebra $\mathcal{J}$ de dimensão n , juntamente com uma escolha particular de uma base (que fornece as constantes estruturais c_{ij}^h). A mudança de base em $\mathcal{J}$ pode representar um ponto diferente em $\mathcal{J}or_n$. O grupo $GL(V)$ age em $\mathcal{J}or_n$ pela ação de "transporte de estrutura". Além disso, as $GL(V)$ -órbitas dessa ação estão em correspondência biunívoca com as classes de isomorfismo das álgebras de Jordan de dimensão n .

Nós denotamos a órbita correspondente a uma álgebra $\mathcal{J}$ por $\mathcal{J}^{GL(V)} \subset \mathcal{J}or_n$. O estabilizador de subgrupo $Stab(\mathcal{J}) \triangleleft GL(V)$ é exatamente o grupo $Aut_{\mathbf{k}}(\mathcal{J})$ de todos os $\mathbf{k}$ -álgebra automorfismos de $\mathcal{J}$. Em [20] foi mostrado que uma deformação de álgebra pode ser visto como uma relação topológica entre as órbitas de álgebras correspondentes. De fato, se $\mathcal{J}_1^{GL(V)} \subset \mathcal{J}or_n$ pertence ao fecho de Zariski da órbita $\mathcal{J}_2^{GL(V)}$ de $\mathcal{J}$ a álgebra $\mathcal{J}_1$ deforma-se em $\mathcal{J}_2$ ($\mathcal{J}_2 \rightarrow \mathcal{J}_1$).

2.2 O comportamento de uma álgebra de Jordan através de deformação

Proposição 2.2.1. *Sejam $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 \in \mathcal{J}or_n$ e $\mathcal{J}_1 \rightarrow \mathcal{J}_2$, então temos que*

$$\dim \text{Aut}(\mathcal{J}_1) \leq \dim \text{Aut}(\mathcal{J}_2).$$

Demonstração. De [33], p. 98, segue que $\dim \mathcal{J}_2^{GL(V)} \leq \dim \mathcal{J}_1^{GL(V)}$. Como

$$\mathcal{J}^{GL(V)} = GL(V)/\text{Aut}(\mathcal{J})$$

obtemos que $\dim \text{Aut}(\mathcal{J}_1) \leq \dim \text{Aut}(\mathcal{J}_2)$. □

Definição 2.2.2. *O conjunto $Z(\mathcal{J}) = \{a \in \mathcal{J} | a\mathcal{J} = 0\}$ é chamado anulador de $\mathcal{J}$.*

Proposição 2.2.3. *Os seguintes conjuntos de $\mathcal{J}or_n$ são fechados na topologia de Zariski:*

$$\begin{aligned} &\{\mathcal{J} \in \mathcal{J}or_n | \dim \text{Rad} \mathcal{J} \geq s\} \\ &\{\mathcal{J} \in \mathcal{J}or_n | \dim Z(\mathcal{J}) \geq s\} \end{aligned}$$

Demonstração. A primeira parte da proposição segue de [26]. Para qualquer número inteiro positivo $m \leq n$, seja $Grass_{m,n-m}$ o grassmaniano formado por subespaços de dimensão m de $V \simeq k^n$. Consideramos o produto de esquemas $\mathcal{J}or_n \times Grass_{m,n-m}$ e os pares $(\mathcal{J}, I)$, onde I é um ideal nilpotente de dimensão m de $\mathcal{J}$. Tais pares formam um conjunto fechado Ω_m em $\mathcal{J}or_n \times Grass_{m,n-m}$. Como $Grass_{m,n-m}$ é completo, a projeção F_m de Ω_m em $\mathcal{J}or_n$ é fechado no sentido de Zariski. Então, como

$$\{\mathcal{J} \in \mathcal{J}or_n | \dim \text{Rad} \mathcal{J} \geq s\} = \bigcup_{s \leq m \leq n} F_m,$$

obtemos que o primeiro conjunto é Zariski-fechado.

Agora, seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base da álgebra $\mathcal{J} \in \mathcal{J}or_n$ e a um elemento em $\mathcal{J}$. Denotamos as coordenadas de a com respeito à esta base por $[a]$ e consideramos a matriz $[\mathcal{J}] = ([e_i \cdot e_j]) \in \text{Mat}_{n,n^2}$ que consiste de coordenadas dos produtos entre os elementos da base. Mostremos, que a condição $\dim Z(\mathcal{J}) \geq s$ é equivalente ao fato que $\text{rk}[\mathcal{J}] < n - s + 1$. Seja $\dim Z(\mathcal{J}) \geq s$, então quaisquer $n - s + 1$ elementos da base

são linearmente dependentes módulo $Z(\mathcal{J})$, e logo $\text{rk}[A] < n - s + 1$. Reciprocamente, suponhamos que $\text{rk}[A] < n - s + 1$. Então para quaisquer $n - s + 1$ linhas de $[A]$ são linearmente dependentes, i.e., $\sum_i \alpha_i e_i \cdot e_j = 0$ para todo $j = 1, \dots, n$. Portanto, quaisquer $n - s + 1$ elementos da base são linearmente dependentes módulo $Z(\mathcal{J})$, então $\dim Z(\mathcal{J}) \geq s$. O fato que $\text{rk}[A] < n - s + 1$ é equivalente ao fato que todos os menores de grau $n - s + 1$ são nulos, então temos um número finito de identidades para constantes estruturais. Assim, o conjunto definido por essas identidades é Zariski-fechado. $\square$

Seja agora $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{ss} + \text{Rad } \mathcal{J}$ uma álgebra de Jordan de dimensão finita sobre o corpo algebricamente fechado k , com radical $R = \text{Rad } \mathcal{J}$ e parte semi-simples $\mathcal{J}_{ss}$. Denotamos a multiplicação em $\mathcal{J}$ por $f(x, y) = xy$ e suponhamos que uma deformação da álgebra $\mathcal{J}$ é dada por uma aplicação de Jordan, bilinear comutativa $f_t(x, y) = xy + tF_1(x, y) + t^2F_2(x, y)$ no sentido da seção anterior. No próximo teorema a estrutura da álgebra deformada $\mathcal{J}_t$ é comparada com a estrutura da álgebra $\mathcal{J}$ (ou, mais precisamente com a estrutura de $\mathcal{J}_K$).

Teorema 2.2.4. *Sejam $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{ss} + R$ e f, f_t como acima. Então, usando a notação $K = k((t))$*

1. *Existe uma decomposição de K -espaços $R_K = M_K \oplus T$, onde M (respectivamente T) é um k - (resp. K -) subespaço de R (resp. R_K),*
2. *Existe uma deformação $\mu_t(x, y) = xy + tG_1(x, y) + \dots$ de $\mathcal{J}$ equivalente a f_t tal que:*
3. *$M = \text{alg}(M, f)$ é um ideal nilpotente de $\mathcal{J}$,*
4. *$M_t = \text{alg}(M_K, \mu_t)$ é o radical da K -álgebra $\mathcal{J}_t = (V_K, \mu_t)$,*
5. *$\mu_t(x, y) = xy$ para todos $x, y \in (\mathcal{J}_{ss})_K$,*
6. *$\mu_t(x, z) = xz$ por $x \in (\mathcal{J}_{ss})_K$ e $z \in R_K$,*
7. *$W_t := \text{alg}(T \oplus S_K, \mu_t)$ é a parte semi-simples de $\mathcal{J}_t = M_t \oplus W_t$.*

Demonstração. 1. Primeiramente, nós demonstramos (1), (3), (4). Seja $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r\}$ uma K -base para $\text{Rad}(f_t)$, um subespaço de V_K . Sem perda da generalidade nós temos

que $\xi_i = z_i + a_1^i t + a_2^i t^2 + \dots$ com $z_i, a_k^i \in V$. Além disso, por indução podemos escolher ξ_i tal que z_i são k -linearmente independentes. É obvio que existe $\xi_1 \in \text{Rad}(f_t)$ tal que $z_1 \neq 0$. Seja $1 \leq k < r$ e existem $\xi_1, \dots, \xi_k$ linearmente independentes com $z_1, \dots, z_k$ linearmente independentes mas para qualquer $\xi \in \text{Rad}(f_t)$, $\xi = z + t(\dots)$ $z = \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_k z_k$, $\alpha_i \in k$. Consideramos

$$\text{Rad}(f_t) \ni t^{-1}(\xi - \alpha_1 \xi_1 - \dots - \alpha_k \xi_k) = a_1 - \alpha_1 a_1^1 - \alpha_2 a_1^2 - \dots - \alpha_k a_1^k + t(\dots).$$

Então $a_1 - \alpha_1 a_1^1 - \alpha_2 a_1^2 - \dots - \alpha_k a_1^k$ é uma combinação linear de $z_1, \dots, z_k$. Continuamos assim e obtemos que $\xi = \xi_1(\alpha_1 + t\beta_1 + \dots) + \dots + \xi_k(\alpha_k + t\beta_k + \dots)$ que é contradição com o fato que $\dim \text{Rad}(f_t) = r > k$. Então z_i são k -linearmente independentes. Além disso, visto que os ξ_i 's geram o radical $\text{Rad}(\mathcal{J}_t, f_t)$, i.e., um ideal nilpotente, z_i 's também geram um ideal nilpotente e, em particular, z_i pertence ao radical R . Considere um k -espaço M com uma base $z_1, \dots, z_r$. Então, M é um ideal através da multiplicação f e obtemos (3). Agora estendemos $z_1, \dots, z_r$ a uma k -base de V que é então uma K -base de V_K . Definimos Φ_t em V_K da forma $id + t\phi_1 + \dots$ usando a k -base tal que $\Phi_t(\xi_i) = z_i$. A multiplicação $\Phi_t \cdot f_t \cdot (\Phi_t^{-1} \times \Phi_t^{-1})$ é equivalente a f_t e satisfaz (4).

2. Suponhamos agora que f tem as propriedades exigidas em (1). Sejam A, B k -álgebras associativas e seja $f : A \rightarrow B$ um homomorfismo de álgebras. Assim B é um bimódulo para A . A deformação de f é dada por K -álgebra homomorfismo $f_t : A_K \rightarrow B_K$ na forma $f_t = f + tF_1 + t^2F_2 + \dots$ com $F_i : A \rightarrow B$ k -lineares. A deformação f_t chama-se trivial se existe um automorfismo interno $\beta_t : B_K \rightarrow B_K$ dado por conjugação por elemento $1 + tb_1 + \dots$ de B_K tal que $f_t = \beta_t \cdot f$. Dizemos que f é rígido se todas as deformações f_t são triviais.

Agora definimos uma aplicação: $g : U(\mathcal{J}_{ss}) \otimes U(\mathcal{J}_{ss}) \rightarrow \text{End}(U(\mathcal{J}))$, $(g(x, x'))y = x * y * x'$ para todos $x, x' \in U(\mathcal{J}_{ss})$ e $y \in U(\mathcal{J})$, onde $U(\mathcal{J}_{ss})$, $U(\mathcal{J})$ são álgebras envoltentes universais multiplicativas para $\mathcal{J}_{ss}$ e $\mathcal{J}$ respectivamente e $*$ é a multiplicação em $U(\mathcal{J})$. Agora consideramos a álgebras envolvente universal multiplicativa $U(\mathcal{J}_t)$. Denotamos a multiplicação em $U(\mathcal{J}_t)$ por m

$$m(a, b) = t^{-r} F_{-r}(a, b) + \dots + F_0(a, b) + tF_1(a, b) + \dots,$$

para $a, b \in U(\mathcal{J}_t)$. A multiplicação em álgebra associativa livre $F(\mathcal{J}_t)$ (1.6) é k -linear então F_i é k -linear para cada $-r \leq i$. Além disso, para elementos de $\mathcal{J}$ F_i é 0 para

$i < 0$. Usando k -liniaridade obtemos que $m(a, b) = a * b + tF_1(a, b) + \dots$. Agora nós definimos $g_t : U((\mathcal{J}_{ss})_i) \otimes U((\mathcal{J}_{ss})_t) \rightarrow \text{End}(U((\mathcal{J})_t))$, $(g_t(w, w'))v = m(m(w, v), w')$ para todos $w, w' \in U(\mathcal{J}_{ss})_t$ e $v \in U((\mathcal{J})_t)$. O homomorfismo g_t é uma deformação de g . Por outro lado $U(\mathcal{J}_{ss})$ é uma álgebra semi-simples. De [21] segue que g_t deve ser trivial. Portanto existe um automorfismo interno $\beta_t : U(\mathcal{J}_t) \rightarrow U(\mathcal{J}_t)$ tal que $g_t = \beta_t \cdot g$ que induz um automorfismo Ω_t K -linear de $\mathcal{J}_K$ da forma $\Omega_t(x) = x + t\omega_1(x) + \dots$ tal que a composição $\Omega_t^{-1} \cdot f_t \cdot (\Omega_t \times \Omega_t)$ satisfaz (5), (6) e (4). Denotamos essa multiplicação por μ_t .

3. Para terminar a demonstração seja W_t uma parte semi-simples que contém a subálgebra $(\mathcal{J}_{ss})_K$ de $\mathcal{J}_t = \text{alg}(V_K, \mu_t)$. Finalmente definimos o K -subespaço $T := R_K \cap W_t$. Comparando as dimensões obtemos (1) e pela definição de T obtemos (7). Isto termina a demonstração do teorema. $\square$

Falando informalmente, o teorema demonstra que o radical R_K de $\mathcal{J}_K$ encolhe-se através de deformação ao radical de $\mathcal{J}_t$, enquanto a parte semi-simples de $\mathcal{J}_t$ contém $(\mathcal{J}_{ss})_K$ e absorve uma parte de R_K . Assim, obtemos um corolário.

Corolário 2.2.5. *A dimensão do radical não aumenta através de uma deformação.*

Observamos novamente a importância das álgebras rígidas. Qualquer álgebra rígida $\mathcal{J}$ em $\mathcal{J}or_n$ gera uma componente $\mathcal{J}or_n^i$ irredutível

$$\mathcal{J}or_n^i = \overline{\mathcal{J}^{GL(V)}}.$$

Pelo corolário 2.1.6 qualquer álgebra semi-simples define uma componente em $\mathcal{J}or_n$. Na próxima seção nós mostraremos que existem álgebras rígidas não semi-simples. A questão natural é: qual álgebra pode ser deformada para uma álgebra rígida? Ou será que cada componente irredutível de $\mathcal{J}or_n$ vem de uma álgebra rígida? O resposta é negativa e segue do teorema seguinte provado por Flanigan em [20]. A demonstração para álgebras associativas serve também para álgebras de Jordan.

Teorema 2.2.6. [20] *Seja $\mathcal{J}or_n^i$ uma componente irredutível de $\mathcal{J}or_n$. Então $\mathcal{J}or_n^i$ contém um subconjunto aberto Ω que é ou a órbita de uma álgebra rígida ou uma união infinita de órbitas de álgebras $\mathcal{J}, \mathcal{J}', \dots$ com as seguintes propriedades: sejam $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{ss} + \text{Rad } \mathcal{J}$ e $\mathcal{J}' = \mathcal{J}'_{ss} + \text{Rad } \mathcal{J}'$, então*

1. $\mathcal{J}_{ss}$ e $\mathcal{J}'_{ss}$ são isomorfas;

2. $\dim \text{Rad } \mathcal{J} = \dim \text{Rad } \mathcal{J}'$ e essa dimensão é mínima entre todas as álgebras em $\mathcal{J}or_n^i$;
3. as órbitas $\mathcal{J}^{GL(V)}$, $\mathcal{J}'^{GL(V)}$, ... têm a mesma dimensão;
4. $\text{Rad } \mathcal{J}$ e $\text{Rad } \mathcal{J}'$ têm o mesmo nil-índice, qual é máximo entre todas as álgebras em $\mathcal{J}or_n^i$.

2.3 Variedades de álgebras de Jordan da dimensões pequenas

Esta seção é dedicada a classificação geométrica de álgebras de Jordan nas dimensões 3, 4, 5.

2.3.1 A variedade $\mathcal{J}or_3$

Seja $\mathcal{J}$, uma álgebra de Jordan de dimensão 3 sobre um corpo algebricamente fechado k de $\text{car } k = 0$. De [34] e [26] temos a tabela 2.1 para álgebras de Jordan associativas (A_{1_i} , A_i) e não-associativas ($\mathcal{J}_i$) de dimensão 3 não isomorfas.

Tabela 2.1: As álgebras de Jordan de dimensão 3

$\mathcal{J}$	multiplicação em $\mathcal{J}$	$\dim \text{Aut } \mathcal{J}$	$\dim \mathcal{J}^{GL(V)}$	$\dim \text{Rad } \mathcal{J}$
A_{1_1}	$a^2 = a \quad b^2 = b \quad c^2 = c$ $ab = 0 \quad ac = 0 \quad bc = 0$	0	9	0
A_{1_2}	$a^2 = a \quad b^2 = b \quad c^2 = 0$ $ab = 0 \quad bc = c \quad ac = 0$	1	8	1
A_{1_3}	$a^2 = a \quad b^2 = c \quad c^2 = 0$ $ab = b \quad ac = c \quad bc = 0$	2	7	2
A_{1_4}	$a^2 = a \quad b^2 = 0 \quad c^2 = 0$ $ab = b \quad ac = a \quad bc = 0$	4	5	2
A_1	$a^2 = a \quad b^2 = b \quad c^2 = 0$ $ab = 0 \quad ac = 0 \quad bc = 0$	1	8	1

$\mathcal{J}$	multiplicação em $\mathcal{J}$	$\dim \text{Aut } \mathcal{J}$	$\dim \mathcal{J}^{GL(V)}$	$\dim \text{Rad } \mathcal{J}$
A_2	$a^2 = a \quad b^2 = 0 \quad c^2 = 0$ $ab = b \quad ac = 0 \quad bc = 0$	2	7	2
A_3	$a^2 = a \quad b^2 = c \quad c^2 = 0$ $ab = 0 \quad ac = 0 \quad bc = 0$	2	7	2
A_4	$a^2 = b \quad b^2 = 0 \quad c^2 = 0$ $ab = c \quad ac = 0 \quad bc = 0$	3	6	3
A_5	$a^2 = a \quad b^2 = 0 \quad c^2 = 0$ $ab = 0 \quad ac = 0 \quad bc = 0$	4	5	2
A_6	$a^2 = 0 \quad b^2 = 0 \quad c^2 = 0$ $ab = c \quad ac = 0 \quad bc = 0$	4	5	3
A_7	$a^2 = b \quad b^2 = 0 \quad c^2 = 0$ $ab = 0 \quad ac = 0 \quad bc = 0$	6	3	3
A_8	$a^2 = 0 \quad b^2 = 0 \quad c^2 = 0$ $ab = 0 \quad ac = 0 \quad bc = 0$	8	1	3
$\mathcal{J}_1$	$a^2 = a \quad b^2 = a + c \quad c^2 = c$ $ab = \frac{1}{2}b \quad bc = \frac{1}{2}b \quad ac = 0$	1	8	0
$\mathcal{J}_2$	$a^2 = a \quad b^2 = 0 \quad c^2 = 0$ $ab = \frac{1}{2}b \quad ac = c \quad bc = 0$	3	6	2
$\mathcal{J}_3$	$a^2 = a \quad b^2 = 0 \quad c^2 = 0$ $ab = \frac{1}{2}b \quad ac = \frac{1}{2}c \quad bc = 0$	6	3	2
$\mathcal{J}_4$	$a^2 = a \quad b^2 = c \quad c^2 = 0$ $ab = \frac{1}{2}b \quad ac = 0 \quad bc = 0$	2	7	2
$\mathcal{J}_5$	$a^2 = a \quad b^2 = c \quad c^2 = 0$ $ab = \frac{1}{2}b \quad ac = c \quad bc = 0$	1	8	2
$\mathcal{J}_6$	$a^2 = a \quad b^2 = b \quad c^2 = 0$ $ab = 0 \quad ac = \frac{1}{2}c \quad bc = \frac{1}{2}c$	2	7	1
$\mathcal{J}_7$	$a^2 = a \quad b^2 = b \quad c^2 = 0$ $ab = 0 \quad ac = 0 \quad bc = \frac{1}{2}c$	2	7	1
$\mathcal{J}_8$	$a^2 = 0 \quad b^2 = b \quad c^2 = 0$ $ab = 0 \quad ac = 0 \quad bc = \frac{1}{2}c$	3	6	2

A classificação geométrica neste caso é a seguinte:

Teorema 2.3.1. *As componentes irredutíveis de $\mathcal{J}or_3$ são os fechos de Zariski de órbitas das seguintes álgebras: $\Omega = \{\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_3, \mathcal{J}_5, \mathcal{J}_7, A_{1_1}\}$.*

Demonstração. A demonstração consiste de duas partes: primeiro, mostraremos, que para cada álgebra $\mathcal{J}$ da lista existe uma álgebra $\tilde{\mathcal{J}} \in \Omega$ tal que $\tilde{\mathcal{J}}$ é uma deformação de $\mathcal{J}$ e, segundo, provaremos, que as álgebras em Ω são rígidas.

1. $\mathcal{J}_1$ é deformação de $\mathcal{J}_4$, $(\mathcal{J}_1 \rightarrow \mathcal{J}_4)$, i.e. existe um elemento genérico $(\mathcal{J}_4)_t$ da família de deformações a um parâmetro de $\mathcal{J}_4$ que é $\mathbb{C}((t))$ -isomorfo a $\mathcal{J}_1 \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}((t))$. Seja a, b, c uma base de $\mathcal{J}_1$, então A_t, B_t, C_t é uma base de $\mathcal{J}_1 \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}((t))$, onde $A_t = a$, $B_t = tb$, $C_t = t^2(a + c)$. Esta base define também uma família $(\mathcal{J}_4)_t$ a um parâmetro de $\mathcal{J}_4$, pois obtemos $\mathcal{J}_4$ quando $t = 0$;
2. $\mathcal{J}_1$ é deformação de $\mathcal{J}_6$, $(\mathcal{J}_1 \rightarrow \mathcal{J}_6)$. A família a um parâmetro é definida por $A_t = a$, $B_t = c$, $C_t = tb$;
3. $\mathcal{J}_5$ é deformação de $\mathcal{J}_2$, $(\mathcal{J}_5 \rightarrow \mathcal{J}_2)$. A família a um parâmetro é definida por $A_t = a$, $B_t = tb$, $C_t = c$;
4. $\mathcal{J}_6$ é deformação de $\mathcal{J}_8$, $(\mathcal{J}_6 \rightarrow \mathcal{J}_8)$. A família a um parâmetro é definida por $A_t = ta$, $B_t = b$, $C_t = tc$;
5. A_{1_1} é deformação de A_{1_2} , $(A_{1_1} \rightarrow A_{1_2})$. A família a um parâmetro é definida por $A_t = a + b$, $B_t = \lambda a$, $C_t = c$;
6. A_{1_2} é deformação de A_{1_3} , $(A_{1_2} \rightarrow A_{1_3})$. A família a um parâmetro é definida por $A_t = a + c$, $B_t = b + tc$, $C_t = t^2c$;
7. A_{1_3} é deformação de A_{1_4} , $(A_{1_3} \rightarrow A_{1_4})$. A família a um parâmetro é definida por $A_t = a$, $B_t = tb$, $C_t = c$;
8. A_{1_1} é deformação de A_1 , $(A_{1_1} \rightarrow A_1)$. A família a um parâmetro é definida por $A_t = a$, $B_t = b$, $C_t = tc$;
9. A_1 é deformação de A_2 , $(A_1 \rightarrow A_2)$. A família a um parâmetro é definida por $A_t = a + b$, $B_t = tb$, $C_t = c$;
10. A_1 é deformação de A_3 , $(A_1 \rightarrow A_3)$. A família a um parâmetro é definida por $A_t = a$, $B_t = c + tb$, $C_t = t^2b$;

11. A_2 é deformação de A_4 , ($A_2 \rightarrow A_4$). A família a um parâmetro é definida por $A_t = ta + b + c$, $B_t = tb - tc$, $C_t = t^2b$;
12. A_3 é deformação de A_5 , ($A_3 \rightarrow A_5$). A família a um parâmetro é definida por $A_t = a$, $B_t = tb$, $C_t = tc$;
13. A_4 é deformação de A_6 , ($A_4 \rightarrow A_6$). A família a um parâmetro é definida por $A_t = ta$, $B_t = b$, $C_t = tc$;
14. A_6 é deformação de A_7 , ($A_6 \rightarrow A_7$). A família a um parâmetro é definida por $A_t = a + b$, $B_t = 2tb$, $C_t = 2c$;

Isso termina a primeira parte da demonstração.

Agora temos que provar que cada álgebra em Ω é rígida (i.e., não possui deformação não trivial). A álgebra A_{11} é rígida, visto que é a única álgebra com $\dim \text{Rad } A_{11} = 0$ e pelo corolário 2.2.5 a dimensão do radical diminui sob ação de deformação. Pela mesma razão as álgebras $\mathcal{J}_1$ e $\mathcal{J}_5$ são rígidas, uma vez que a única álgebra em que elas podem deformar-se é a álgebra associativa A_{11} , o que contradiz o fato que se para duas álgebras A, B tais que $A \rightarrow B$ e A possui uma identidade (nesse caso associatividade) então a álgebra B também tem que satisfazer a mesma identidade. Observamos também, que uma outra demonstração de rigidez para A_{11} e $\mathcal{J}_1$ é o fato que as duas álgebras são semi-simples. Finalmente, uma conta longa mas simples mostra que $H^2(\mathcal{J}_7, \mathcal{J}_7) = H^2(\mathcal{J}_3, \mathcal{J}_3) = 0$, então essas álgebras são rígidas. As órbitas de $\mathcal{J}or_3$ são desenhadas na figura 2.2.

Então $\mathcal{J}or_3$ é uma variedade afim conexa de 5 componentes irredutíveis (uma vem da álgebra associativa comutativa semi-simples $k \times k \times k$ e quatro de álgebras de Jordan não associativas).

□

$\dim \operatorname{Aut} \mathcal{I}$

Seja $\mathcal{J}$ uma álgebra de Jordan com unidade, sem perda da generalidade podemos supor que $1 = e_1$. Nessa situação as constantes estruturais devem satisfazer ainda as relações

$$c_{1i}^j = c_{i1}^j = \sigma_i^j,$$

onde σ_i^j é o simbolo de Kronecker. Denotamos o conjunto de todos tais pontos em $\mathbf{k}^{n^3}$ por $\mathcal{Jord}_n$. Assim, $\mathcal{Jord}_n$ é uma subvariedade afim de $\mathcal{Jor}_n$. Seja $Comm_n$ uma variedade definida analogamente as álgebras comutativas associativas de dimensão n . Obviamente, $Comm_n$ é um subconjunto fechado em $\mathcal{Jord}_n$ e logo é subvariedade afim. Em [35] G. Mazzola mostrou que para $n \leq 6$ $Comm_n$ é variedade afim irredutível e sua única componente vem do fecho de Zariski de órbita de álgebra semi-simples associativa comutativa $\mathbf{k} \times \cdots \times \mathbf{k}$. Assim, para completar a classificação geométrica para $\mathcal{Jord}_d$

e $Jord_5$ é suficiente tratar somente as álgebras de Jordan não associativas. Seja $\mathcal{J}$ uma álgebra de Jordan de dimensão 4. De [10] obtemos a seguinte lista de álgebras de Jordan não-associativas com unidade de dimensão 4 não isomorfas. Aqui $c := c_1 + c_2$

1. $\dim \text{Rad} \mathcal{J} = 0$:

$$\mathcal{J}_1 = \begin{array}{c|cccc} & c_1 & c_2 & a & c_3 \\ \hline c_1 & c_1 & 0 & \frac{1}{2}a & 0 \\ c_2 & 0 & c_2 & \frac{1}{2}a & 0 \\ a & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a & c & 0 \\ c_3 & 0 & 0 & 0 & c_3 \end{array}$$

$$\dim \text{Aut } \mathcal{J}_1 = 1$$

$$\mathcal{J}_2 = \begin{array}{c|cccc} & c_1 & c_2 & a & b \\ \hline c_1 & c_1 & 0 & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}b \\ c_2 & 0 & c_2 & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}b \\ a & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a & 0 & \frac{1}{2}c \\ b & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}c & 0 \end{array}$$

$$\dim \text{Aut } \mathcal{J}_2 = 1$$

2. $\dim \text{Rad} \mathcal{J} = 1$:

$$\mathcal{J}_3 = \begin{array}{c|cccc} & c_1 & c_2 & c_3 & b \\ \hline c_1 & c_1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}b \\ c_2 & 0 & c_2 & 0 & \frac{1}{2}b \\ c_3 & 0 & 0 & c_3 & 0 \\ b & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}b & 0 & 0 \end{array}$$

$$\dim \text{Aut } \mathcal{J}_3 = 2$$

$$\mathcal{J}_4 = \begin{array}{c|cccc} & c_1 & c_2 & a & b \\ \hline c_1 & c_1 & 0 & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}b \\ c_2 & 0 & c_2 & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}b \\ a & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a & c & 0 \\ b & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}b & 0 & 0 \end{array}$$

$$\dim \text{Aut } \mathcal{J}_4 = 4$$

3. $\dim \text{Rad} \mathcal{J} = 2$:

$$\mathcal{J}_5 = \begin{array}{c|cccc} & c_1 & c_2 & a & b \\ \hline c_1 & c_1 & 0 & \frac{1}{2}a & b \\ c_2 & 0 & c_2 & \frac{1}{2}a & 0 \\ a & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a & 0 & 0 \\ b & b & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\dim \text{Aut } \mathcal{J}_5 = 3$$

$$\mathcal{J}_6 = \begin{array}{c|cccc} & c_1 & c_2 & a & b \\ \hline c_1 & c_1 & 0 & \frac{1}{2}a & b \\ c_2 & 0 & c_2 & \frac{1}{2}a & 0 \\ a & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a & b & 0 \\ b & b & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\dim \text{Aut } \mathcal{J}_6 = 2$$

$$\mathcal{J}_7 = \begin{array}{c|cccc} & c_1 & c_2 & a & b \\ \hline c_1 & c_1 & 0 & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}b \\ c_2 & 0 & c_2 & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}b \\ a & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a & 0 & 0 \\ b & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}b & 0 & 0 \end{array}$$

$$\dim \text{Aut } \mathcal{J}_7 = 6$$

4. Para $\dim \text{Rad} \mathcal{J} = 3$ todas álgebras de Jordan são álgebras comutativas associativas.

A classificação geométrica nesse caso é o seguinte:

Teorema 2.3.2. *As componentes irredutíveis de Jord_4 são os fechados de Zariski de órbitas das seguintes álgebras: $\Omega = \{\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2\}$.*

Demonstração. Novamente, demonstremos que para cada álgebra $\mathcal{J}$ da lista existe, uma álgebra $\tilde{\mathcal{J}} \in \Omega$ tal que $\tilde{\mathcal{J}}$ é uma deformação de $\mathcal{J}$.

1. $\mathcal{J}_1$ é deformação de $\mathcal{J}_3$, ($\mathcal{J}_1 \rightarrow \mathcal{J}_3$), i.e. existe um elemento genérico $(\mathcal{J}_3)_t$ de família a um parâmetro das deformações de $\mathcal{J}_3$ que é $\mathbb{C}((t))$ -isomorfo a $\mathcal{J}_1 \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{k}((t))$. Seja c_1, c_2, c_3, a uma base de $\mathcal{J}_1$, então $C_{1t}, C_{2t}, C_{3t}, A_t$ é uma base de $\mathcal{J}_1 \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{k}((t))$, tal que $C_{1t} = c_1$, $C_{2t} = c_2$, $C_{3t} = c_3$, $A_t = ta$ define também a família a um parâmetro $(\mathcal{J}_3)_t$ e obtemos $\mathcal{J}_3$ quando $t = 0$;
2. $\mathcal{J}_6$ é deformação de $\mathcal{J}_5$ ($\mathcal{J}_6 \rightarrow \mathcal{J}_5$). A família a um parâmetro é definida por $C_{1t} = c_1$, $C_{2t} = c_2$, $A_t = ta$, $B_t = b$;
3. $\mathcal{J}_2$ é deformação de $\mathcal{J}_4$ ($\mathcal{J}_2 \rightarrow \mathcal{J}_4$). A família a um parâmetro é definida por $C_{1t} = c_1$, $C_{2t} = c_2$, $A_t = a + b$, $B_t = tb$;
4. $\mathcal{J}_4$ é deformação de $\mathcal{J}_7$ ($\mathcal{J}_4 \rightarrow \mathcal{J}_7$). A família a um parâmetro é definida por $C_{1t} = c_1$, $C_{2t} = c_2$, $A_t = ta$, $B_t = b$;
5. $\mathcal{J}_6$ é deformação de $\mathcal{J}_5$ ($\mathcal{J}_1 \rightarrow \mathcal{J}_6$). A família a um parâmetro é definida por $C_{1t} = c_1 + c_3$, $C_{2t} = c_2$, $A_t = ta$, $C_{3t} = t^2c$;

A segunda parte de demonstração nesse caso é trivial, visto que as duas álgebras $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ são semi-simples. Então, pelo corolário 2.1.5 eles são rígidas. As órbitas de Jord_4 são desenhadas na figura 2.3. $\square$

$\text{Jord}_4 \setminus \text{Comm}_4$ é uma variedade afim com 2 componentes irredutíveis. Então, Jord_4 tem três componentes irredutíveis, duas são provenientes de álgebras de Jordan não-associativas semi-simples e uma da álgebra associativa comutativa semi-simples $\mathbb{k} \times \mathbb{k} \times \mathbb{k} \times \mathbb{k}$.

Figura 2.3: As órbitas de $\mathcal{J}ord_4$

2.3.3 A variedade $\mathcal{J}ord_5 \setminus \text{Comm}_5$

Seja $\mathcal{J}$ uma álgebra de Jordan de dimensão 5 com unidade sobre um corpo algebricamente fechado $\mathbf{k}$ de $\text{char} \mathbf{k} = 0$. De [10] obtemos a seguinte lista de álgebras de Jordan não-associativas com unidade, de dimensão 5, não isomorfas. Aqui $c := c_1 + c_2$

1. $\dim \text{Rad} \mathcal{J} = 0$:

		c_1	c_2	a	c_3	c_4			c_1	c_2	a	b	c_3	
$\mathcal{J}_1 =$	c_1	c_1	0	$\frac{1}{2}a$	0	0		$\mathcal{J}_2 =$	c_1	c_1	0	$\frac{1}{2}a$	$\frac{1}{2}b$	0
	c_2	0	c_2	$\frac{1}{2}a$	0	0			c_2	0	c_2	$\frac{1}{2}a$	$\frac{1}{2}b$	0
	a	$\frac{1}{2}a$	$\frac{1}{2}a$	c	0	0			a	$\frac{1}{2}a$	$\frac{1}{2}a$	0	$\frac{1}{2}c$	0
	c_3	0	0	0	c_3	0			b	$\frac{1}{2}b$	$\frac{1}{2}b$	$\frac{1}{2}c$	0	0
	c_4	0	0	0	0	c_4			c_3	0	0	0	0	c_3

$$\dim \text{Aut } \mathcal{J}_1 = 1$$

$$\dim \text{Aut } \mathcal{J}_2 = 3$$

$$\mathcal{J}_3 = \begin{array}{c|ccccc} & c_1 & c_2 & a & b & d \\ \hline c_1 & c_1 & 0 & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}b & 0 \\ c_2 & 0 & c_2 & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}b & 0 \\ a & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a & c & 0 & 0 \\ b & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}b & 0 & c & 0 \\ d & \frac{1}{2}d & \frac{1}{2}d & 0 & 0 & c \end{array}$$

$$\dim \operatorname{Aut} \mathcal{J}_3 = 6$$

2. $\dim \operatorname{Rad} \mathcal{J} = 1$:

$$\mathcal{J}_4 = \begin{array}{c|ccccc} & c_1 & c_2 & a & c_3 & c_4 \\ \hline c_1 & c_1 & 0 & \frac{1}{2}a & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & c_2 & \frac{1}{2}a & 0 & 0 \\ a & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a & 0 & 0 & 0 \\ c_3 & 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 \\ c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 \end{array}$$

$$\dim \operatorname{Aut} \mathcal{J}_4 = 2$$

$$\mathcal{J}_6 = \begin{array}{c|ccccc} & c_1 & c_2 & a & b & c_3 \\ \hline c_1 & c_1 & 0 & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}b & 0 \\ c_2 & 0 & c_2 & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}b & 0 \\ a & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a & c & 0 & 0 \\ b & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}b & 0 & 0 & 0 \\ c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 \end{array}$$

$$\dim \operatorname{Aut} \mathcal{J}_6 = 4$$

3. $\dim \operatorname{Rad} \mathcal{J} = 2$:

$$\mathcal{J}_8 = \begin{array}{c|ccccc} & c_1 & c_2 & a & c_3 & b \\ \hline c_1 & c_1 & 0 & \frac{1}{2}a & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & c_2 & \frac{1}{2}a & 0 & 0 \\ a & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a & 0 & 0 & 0 \\ c_3 & 0 & 0 & 0 & c_3 & b \\ c_4 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \end{array}$$

$$\dim \operatorname{Aut} \mathcal{J}_8 = 3$$

$$\mathcal{J}_5 = \begin{array}{c|ccccc} & c_1 & c_2 & a & c_3 & b \\ \hline c_1 & c_1 & 0 & \frac{1}{2}a & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & c_2 & \frac{1}{2}a & 0 & 0 \\ a & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a & c & 0 & 0 \\ c_3 & 0 & 0 & 0 & c_3 & b \\ c_4 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \end{array}$$

$$\dim \operatorname{Aut} \mathcal{J}_5 = 2$$

$$\mathcal{J}_7 = \begin{array}{c|ccccc} & c_1 & c_2 & a & b & d \\ \hline c_1 & c_1 & 0 & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}d \\ c_2 & 0 & c_2 & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}d \\ a & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a & 0 & \frac{1}{2}c & 0 \\ b & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}c & 0 & 0 \\ d & \frac{1}{2}d & \frac{1}{2}d & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\dim \operatorname{Aut} \mathcal{J}_7 = 7$$

$$\mathcal{J}_9 = \begin{array}{c|ccccc} & c_1 & c_2 & a & b & c_3 \\ \hline c_1 & c_1 & 0 & \frac{1}{2}a & b & 0 \\ c_2 & 0 & c_2 & \frac{1}{2}a & 0 & 0 \\ a & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a & b & 0 & 0 \\ b & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 \end{array}$$

$$\dim \operatorname{Aut} \mathcal{J}_9 = 2$$

$$\mathcal{J}_{10} = \begin{array}{c|ccccc} & c_1 & c_2 & a & b & c_3 \\ \hline c_1 & c_1 & 0 & \frac{1}{2}a & b & 0 \\ c_2 & 0 & c_2 & \frac{1}{2}a & 0 & 0 \\ a & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a & 0 & 0 & 0 \\ b & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 \end{array}$$

$$\dim \operatorname{Aut} \mathcal{J}_{10} = 3$$

$$\mathcal{J}_{11} = \begin{array}{c|ccccc} & c_1 & c_2 & a & b & c_3 \\ \hline c_1 & c_1 & 0 & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}b & 0 \\ c_2 & 0 & c_2 & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}b & 0 \\ a & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a & 0 & 0 & 0 \\ b & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}b & 0 & 0 & 0 \\ c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 \end{array}$$

$$\dim \operatorname{Aut} \mathcal{J}_{11} = 6$$

$$\mathcal{J}_{12} = \begin{array}{c|ccccc} & c_1 & c_2 & c_3 & a & b \\ \hline c_1 & c_1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}b \\ c_2 & 0 & c_2 & 0 & \frac{1}{2}a & 0 \\ c_3 & 0 & 0 & c_3 & 0 & \frac{1}{2}b \\ a & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a & 0 & 0 & 0 \\ b & \frac{1}{2}b & 0 & \frac{1}{2}b & 0 & 0 \end{array}$$

$$\dim \operatorname{Aut} \mathcal{J}_{12} = 3$$

$$\mathcal{J}_{13} = \begin{array}{c|ccccc} & c_1 & c_2 & a & b & d \\ \hline c_1 & c_1 & 0 & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}d \\ c_2 & 0 & c_2 & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}d \\ a & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}a & c & 0 & 0 \\ b & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}b & 0 & 0 & 0 \\ d & \frac{1}{2}d & \frac{1}{2}d & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\dim \operatorname{Aut} \mathcal{J}_{13} = 6$$

4. $\dim \operatorname{Rad} \mathcal{J} = 3$:

$$\mathcal{J}_{14} = \begin{array}{c|ccccc} & c_1 & c_2 & a & b & d \\ \hline c_1 & c_1 & 0 & a & b & \frac{1}{2}d \\ c_2 & 0 & c_2 & 0 & 0 & \frac{1}{2}d \\ a & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & \frac{1}{2}d & \frac{1}{2}d & 0 & 0 & a \end{array}$$

$$\dim \operatorname{Aut} \mathcal{J}_{14} = 4$$

$$\mathcal{J}_{14}^0 = \begin{array}{c|ccccc} & c_1 & c_2 & a & b & d \\ \hline c_1 & c_1 & 0 & a & b & \frac{1}{2}d \\ c_2 & 0 & c_2 & 0 & 0 & \frac{1}{2}d \\ a & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & \frac{1}{2}d & \frac{1}{2}d & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\dim \operatorname{Aut} \mathcal{J}_{14}^0 = 5$$

$$\mathcal{J}_{15} = \begin{array}{c|ccccc} & c_1 & c_2 & a & b & d \\ \hline c_1 & c_1 & 0 & a & b & \frac{1}{2}d \\ c_2 & 0 & c_2 & 0 & 0 & \frac{1}{2}d \\ a & a & 0 & b & 0 & 0 \\ b & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & \frac{1}{2}d & \frac{1}{2}d & 0 & 0 & b \end{array}$$

$$\dim \operatorname{Aut} \mathcal{J}_{15} = 3$$

$$\mathcal{J}_{15}^0 = \begin{array}{c|ccccc} & c_1 & c_2 & a & b & d \\ \hline c_1 & c_1 & 0 & a & b & \frac{1}{2}d \\ c_2 & 0 & c_2 & 0 & 0 & \frac{1}{2}d \\ a & a & 0 & b & 0 & 0 \\ b & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & \frac{1}{2}d & \frac{1}{2}d & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\dim \operatorname{Aut} \mathcal{J}_{15}^0 = 4$$

$$\mathcal{J}_{16} = \begin{array}{c|ccccc} & c_1 & c_2 & a & b & d \\ \hline c_1 & c_1 & 0 & a & 0 & \frac{1}{2}d \\ c_2 & 0 & c_2 & 0 & b & \frac{1}{2}d \\ a & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ d & \frac{1}{2}d & \frac{1}{2}d & 0 & 0 & a+b \end{array}$$

$$\dim \operatorname{Aut} \mathcal{J}_{16} = 2$$

$$\mathcal{J}_{16}^{(1,0)} = \begin{array}{c|ccccc} & c_1 & c_2 & a & b & d \\ \hline c_1 & c_1 & 0 & a & 0 & \frac{1}{2}d \\ c_2 & 0 & c_2 & 0 & b & \frac{1}{2}d \\ a & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ d & \frac{1}{2}d & \frac{1}{2}d & 0 & 0 & a \end{array}$$

$$\dim \operatorname{Aut} \mathcal{J}_{16}^{(1,0)} = 3$$

$$\mathcal{J}_{16}^0 = \begin{array}{c|ccccc} & c_1 & c_2 & a & b & d \\ \hline c_1 & c_1 & 0 & a & 0 & \frac{1}{2}d \\ c_2 & 0 & c_2 & 0 & b & \frac{1}{2}d \\ a & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ d & \frac{1}{2}d & \frac{1}{2}d & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\dim \operatorname{Aut} \mathcal{J}_{16}^0 = 4$$

$$\mathcal{J}_{17} = \begin{array}{c|ccccc} & c_1 & c_2 & a & b & d \\ \hline c_1 & c_1 & 0 & a & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}d \\ c_2 & 0 & c_2 & 0 & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}d \\ a & a & 0 & 0 & 0 & b \\ b & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}b & 0 & 0 & 0 \\ d & \frac{1}{2}d & \frac{1}{2}d & b & 0 & 0 \end{array}$$

$$\dim \operatorname{Aut} \mathcal{J}_{17} = 5$$

$$\mathcal{J}_{18} = \begin{array}{c|ccccc} & c_1 & c_2 & a & b & d \\ \hline c_1 & c_1 & 0 & a & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}d \\ c_2 & 0 & c_2 & 0 & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}d \\ a & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}b & 0 & a & a \\ d & \frac{1}{2}d & \frac{1}{2}d & 0 & a & a \end{array}$$

$$\dim \operatorname{Aut} \mathcal{J}_{18} = 4$$

$$\mathcal{J}_{19} = \begin{array}{c|ccccc} & c_1 & c_2 & a & b & d \\ \hline c_1 & c_1 & 0 & a & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}d \\ c_2 & 0 & c_2 & 0 & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}d \\ a & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}b & 0 & a & a \\ d & \frac{1}{2}d & \frac{1}{2}d & 0 & a & 0 \end{array}$$

$$\dim \operatorname{Aut} \mathcal{J}_{19} = 5$$

$$\mathcal{J}_{20} = \begin{array}{c|ccccc} & c_1 & c_2 & a & b & d \\ \hline c_1 & c_1 & 0 & a & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}d \\ c_2 & 0 & c_2 & 0 & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}d \\ a & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}b & 0 & 0 & a \\ d & \frac{1}{2}d & \frac{1}{2}d & 0 & a & a \end{array}$$

$$\dim \operatorname{Aut} \mathcal{J}_{20} = 6$$

$$\mathcal{J}_{21} = \begin{array}{c|ccccc} & c_1 & c_2 & a & b & d \\ \hline c_1 & c_1 & 0 & a & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}d \\ c_2 & 0 & c_2 & 0 & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}d \\ a & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}b & 0 & 0 & 0 \\ d & \frac{1}{2}d & \frac{1}{2}d & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\dim \operatorname{Aut} \mathcal{J}_{21} = 7$$

5. Para $\dim \operatorname{Rad} \mathcal{J} = 4$ todas álgebras de Jordan são álgebras comutativas associativas.

A classificação geométrica nesse caso é o seguinte:

Teorema 2.3.3. *As componentes irredutíveis de $\mathcal{J}ord_5$ são os fechos de Zariski de órbitas das álgebras seguintes: $\Omega = \{\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3, \mathcal{J}_{18}, \mathcal{J}_{12}\}$.*

Demonstração. Novamente, demonstremos que para cada álgebra $\mathcal{J}$ da lista existe uma álgebra $\tilde{\mathcal{J}} \in \Omega$ tal que $\tilde{\mathcal{J}}$ é uma deformação de $\mathcal{J}$.

1. $\mathcal{J}_1$ é deformação de $\mathcal{J}_4$, ($\mathcal{J}_1 \rightarrow \mathcal{J}_4$), i.e. existe um elemento genérico $\mathcal{J}_{4t}$ de família a um parâmetro das deformações de $\mathcal{J}_4$ que é $k((t))$ -isomorfo a $\mathcal{J}_1 \otimes_k k((t))$. Seja c_1, c_2, c_3, c_4, a uma base de $\mathcal{J}_1$, então $C_{1t}, C_{2t}, C_{3t}, C_{4t}, A_t$ é uma base de $\mathcal{J}_1 \otimes_k k((t))$, tal que $C_{1t} = c_1$, $C_{2t} = c_2$, $C_{3t} = c_3$, $C_{4t} = c_4$, $A_t = ta$. Isso define também uma família a um parâmetro $(\mathcal{J}_4)_t$ pois obtemos $\mathcal{J}_4$ quando $t = 0$;
2. $\mathcal{J}_1$ é deformação de $\mathcal{J}_5$ ($\mathcal{J}_1 \rightarrow \mathcal{J}_5$). A família a um parâmetro é definida por $C_{1t} = c_1$, $C_{2t} = c_2$, $C_{3t} = c_3 + c_4$, $C_{4t} = tc_4$, $A_t = a$;
3. $\mathcal{J}_4$ é deformação de $\mathcal{J}_8$ ($\mathcal{J}_4 \rightarrow \mathcal{J}_8$). A família a um parâmetro é definida por $C_{1t} = c_1$, $C_{2t} = c_2$, $C_{3t} = c_3 + c_4$, $C_{4t} = tc_4$, $A_t = a$;
4. $\mathcal{J}_2$ é deformação de $\mathcal{J}_6$ ($\mathcal{J}_2 \rightarrow \mathcal{J}_6$). A família a um parâmetro é definida por $C_{1t} = c_1$, $C_{2t} = c_2$, $C_{3t} = c_3$, $A_t = a + b$, $B_t = ta + b$;
5. $\mathcal{J}_6$ é deformação de $\mathcal{J}_{11}$ ($\mathcal{J}_6 \rightarrow \mathcal{J}_{11}$). A família a um parâmetro é definida por $C_{1t} = c_1$, $C_{2t} = c_2$, $C_{3t} = c_3$, $A_t = ta$, $B_t = b$;
6. $\mathcal{J}_3$ é deformação de $\mathcal{J}_7$ ($\mathcal{J}_3 \rightarrow \mathcal{J}_7$). A família a um parâmetro é definida por $C_{1t} = c_1$, $C_{2t} = c_2$, $A_t = \frac{1}{2}a + b$, $B_t = \frac{1}{2}a - bi$, $D_t = td$;
7. $\mathcal{J}_7$ é deformação de $\mathcal{J}_{13}$ ($\mathcal{J}_7 \rightarrow \mathcal{J}_{13}$). A família a um parâmetro é definida por $C_{1t} = c_1$, $C_{2t} = c_2$, $A_t = a + b$, $B_t = ta - bi$, $D_t = d$;
8. $\mathcal{J}_9$ é deformação de $\mathcal{J}_{10}$ ($\mathcal{J}_9 \rightarrow \mathcal{J}_{10}$). A família a um parâmetro é definida por $C_{1t} = c_1$, $C_{2t} = c_2$, $C_{3t} = c_3$, $A_t = ta$, $B_t = b$;
9. $\mathcal{J}_{14}$ é deformação de $\mathcal{J}_{14}^0$ ($\mathcal{J}_{14} \rightarrow \mathcal{J}_{14}^0$). A família a um parâmetro é definida por $C_{1t} = c_1$, $C_{2t} = c_2$, $A_t = a$, $B_t = b$, $D_t = td$;
10. $\mathcal{J}_{15}$ é deformação de $\mathcal{J}_{15}^0$ ($\mathcal{J}_{15} \rightarrow \mathcal{J}_{15}^0$). A família a um parâmetro é definida por $C_{1t} = c_1$, $C_{2t} = c_2$, $A_t = a$, $B_t = b$, $D_t = td$;
11. $\mathcal{J}_{16}$ é deformação de $\mathcal{J}_{16}^{1,0}$ ($\mathcal{J}_{16} \rightarrow \mathcal{J}_{16}^{1,0}$). A família a um parâmetro é definida por

$$C_{1t} = c_1, C_{2t} = c_2, A_t = t^2a, B_t = b, D_t = td;$$

12. $\mathcal{J}_{16}^{1,0}$ é deformação de $\mathcal{J}_{16}^0$ ($\mathcal{J}_{16}^{1,0} \rightarrow \mathcal{J}_{16}^0$). A família a um parâmetro é definida por $C_{1t} = c_1, C_{2t} = c_2, A_t = a, B_t = b, D_t = td$;

13. $\mathcal{J}_{18}$ é deformação de $\mathcal{J}_{19}$ ($\mathcal{J}_{18} \rightarrow \mathcal{J}_{19}$). A família a um parâmetro é definida por $C_{1t} = c_1, C_{2t} = c_2, A_t = t^9a, B_t = t^3b, D_t = t^6d$;

14. $\mathcal{J}_{19}$ é deformação de $\mathcal{J}_{20}$ ($\mathcal{J}_{19} \rightarrow \mathcal{J}_{20}$). A família a um parâmetro é definida por $C_{1t} = c_1, C_{2t} = c_2, A_t = ta, B_t = tb, D_t = d$;

15. $\mathcal{J}_{20}$ é deformação de $\mathcal{J}_{21}$ ($\mathcal{J}_{20} \rightarrow \mathcal{J}_{21}$). A família a um parâmetro é definida por $C_{1t} = c_1, C_{2t} = c_2, A_t = a, B_t = b, D_t = td$;

16. $\mathcal{J}_{15}$ é deformação de $\mathcal{J}_{14}$ ($\mathcal{J}_{15} \rightarrow \mathcal{J}_{14}$). A família a um parâmetro é definida por $C_{1t} = c_1, C_{2t} = c_2, A_t = ta, B_t = b, D_t = d$;

17. $\mathcal{J}_1$ é deformação de $\mathcal{J}_{16}$ ($\mathcal{J}_1 \rightarrow \mathcal{J}_{16}$). A família a um parâmetro é definida por $C_{1t} = c_1 + c_3, C_{2t} = c_2 + c_4, A_t = ta, C_{3t} = t^2c_1, C_{4t} = t^2c_2$;

18. $\mathcal{J}_1$ é deformação de $\mathcal{J}_9$ ($\mathcal{J}_1 \rightarrow \mathcal{J}_9$). A família a um parâmetro é definida por $C_{1t} = c_1 + c_3, C_{2t} = c_2, A_t = ta, C_{3t} = t^2c_1 + c_2, C_{4t} = c_4$;

19. $\mathcal{J}_9$ é deformação de $\mathcal{J}_{17}$ ($\mathcal{J}_9 \rightarrow \mathcal{J}_{17}$). A família a um parâmetro é definida por $C_{1t} = c_1 + c_3, C_{2t} = c_2, A_t = a + c_1, B_t = b, C_{3t} = c_3 + tb$.

Agora provemos que cada álgebra em Ω não possui deformações não triviais. Primeiro observamos que é suficiente considerar somente as deformações entre as álgebras em Ω . De fato, sejam $\mathcal{J} \notin \Omega$ e $\tilde{\mathcal{J}} \in \Omega$ tais que $\mathcal{J} \rightarrow \tilde{\mathcal{J}}$, então existe $\tilde{\mathcal{J}}_1 \in \Omega$ tal que $\tilde{\mathcal{J}}_1 \rightarrow \mathcal{J}$ e, portanto, $\tilde{\mathcal{J}}_1 \rightarrow \tilde{\mathcal{J}}$. As álgebras $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3$ são semi-simples, e então são rígidas pelo corolário 2.1.5. Pela proposição 2.2.1 e pelo fato que a dimensão do radical não aumenta sob ação de deformação, $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ são os únicos candidatos para deformarem-se nas álgebras $\mathcal{J}_{12}$ e $\mathcal{J}_{18}$. Mas $\mathcal{J}_{12}$ não pode ser deformada em $\mathcal{J}_1$, uma vez que $\mathcal{J}_1$ possui uma subálgebra associativa de dimensão 4. Além disso, do teorema 2.2.4 segue que se $A \rightarrow B$ com $A = A_{ss} + \text{Rad } A$ e $B = B_{ss} + \text{Rad } B$, então $B_{ss} \subseteq A_{ss}$, $\text{Rad } A \subseteq \text{Rad } B$ e ação A_{ss} a B é preservado. Assim, $\mathcal{J}_{12}$ não pode ser deformada em $\mathcal{J}_2$. Finalmente, a álgebra $\mathcal{J}_{18}$ é quadrática quando $\mathcal{J}_1$ e $\mathcal{J}_2$ não o são. As órbitas de Jord_5 são desenhadas na figura 2.4.

□

Figura 2.4: As órbitas de $Jord_5$

$Jord_5 \setminus Comm_5$ é uma variedade afim com 5 componentes irredutíveis.

2.4 Um análogo do teorema de Neretin para álgebras de Jordan e álgebras alternativas

Essa seção é dedicada aos teoremas sobre estimativa do número de parâmetros para definir uma família de álgebras de Jordan e álgebras alternativas. Nós usamos os métodos de Neretin, o qual resolveu esse problema para álgebras de Lie e álgebras associativas.

Seja A uma álgebra alternativa complexa de dimensão n com uma base $e_1, \dots, e_n$ e relações definidas

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e_k, \quad c_{ij}^k \in \mathbb{K}.$$

A multiplicação define uma álgebra alternativa e de (1.14) segue que as constantes estruturais c_{ij}^k satisfazem as seguintes condições:

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^n (c_{jk}^a c_{ia}^b - c_{ij}^a c_{ak}^b + c_{ik}^a c_{ja}^b - c_{ji}^a c_{ak}^b) &= 0, \\ \sum_{a=1}^n (c_{jk}^a c_{ia}^b - c_{ij}^a c_{ak}^b - c_{ki}^a c_{ja}^b + c_{jk}^a c_{ai}^b) &= 0, \end{aligned}$$

para todos $i, j, k, a, b \in \{1, \dots, n\}$. Analogamente ao caso de $\mathcal{J}or_n$ essas equações determinam uma subvariedade algébrica Alt_n num espaço de dimensão n^3 com coordenadas c_{ij}^k . Consideramos uma família de álgebras alternativas Ω_α , que consiste de álgebras A de dimensão 3α com uma base $x_1, x_2, \dots, x_{2\alpha}, y_1, \dots, y_\alpha$ cujas únicas multiplicações não nulas são

$$x_i x_j = \sum_{k=1}^{\alpha} c_{ij}^k y_k.$$

Para cada álgebra $A \in \Omega$ todas as palavras não-associativas de comprimento 3 em $\{x_1, \dots, x_{2\alpha}, y_1, \dots, y_\alpha\}$ é 0 e portanto A é alternativa para qualquer escolha de c_{ij}^k . Segue-se que Ω_α é uma subvariedade de Alt_n de dimensão: $\nu = 4\alpha^3$ e então $\Omega_\alpha \simeq \mathbb{K}^\nu$ é uma família algébrica irreduzível. Assim Alt_n tem uma componente de dimensão pelo menos $4/27n^3 + O(n^2)$.

Teorema 2.4.1. *A dimensão de qualquer componente de Alt_n é no máximo $4/27n^3 + O(n^{8/3})$.*

Seja $\Delta' \supset Alt_n$ uma família de álgebras algébrica irreduzível. O objetivo é determinar Δ' com menor número possível de parâmetros. Seja Alt_n^i a componente irreduzível de Alt_n a qual pertence Δ' e seja Ω o conjunto aberto em Alt_n^i do teorema 2.2.7. Consideramos $\Delta = \Delta' \cap \Omega$ subespaço algébrico irreduzível aberto em Δ' . Do teorema 2.2.7 segue que temos duas possibilidades. Primeira, que Δ consiste de álgebras isomorfas e então $\dim \Delta \leq \dim GL(V) = n^2$. Segunda possibilidade é que Δ consiste de união infinita de álgebras $\mathcal{J}, \mathcal{J}', \dots$ com propriedades 1-4 do teorema 2.2.7. Em particular, para quaisquer $\mathcal{J}, \mathcal{J}' \in \Delta$ temos $\mathcal{J}_{ss} \simeq \mathcal{J}'_{ss}$. Como $\dim \mathcal{J}_{ss}^{GL(V)} \leq n^2$ obtemos que

$$\dim \Delta \leq \dim \Psi + O(n^2),$$

onde Ψ uma família irredutível de álgebras nilpotentes alternativas (consideramos a família de radicais de álgebras em Δ). Então é suficiente determinar o número de parâmetros para Ψ . Sejam $L(n_1, n_2, n_3, \dots) \subset \Psi$ com $n_1, n_2, \dots$ números inteiros positivos e $A \in L(n_1, n_2, n_3, \dots)$ se e somente se $\dim A^2 = n_1$, $\dim A(A^2) = n_2$, $\dim (A^2)A = n_3, \dots$. Como Ψ é uma família de álgebras nilpotentes existe somente número finito dos conjuntos $L(n_1, n_2, n_3, \dots)$ não vazios e portanto existe pelo menos um $L(n_1, n_2, n_3, \dots)$ tal que

$$\dim L(n_1, n_2, n_3, \dots) = \dim \Psi.$$

Assim, podemos escolher um subespaço aberto $\Omega \subset \Psi$ tal que os subespaços A^2 , $A(A^2), \dots$ são os mesmos para todas $A \in \Omega$.

Assim, denotamos por A uma álgebra alternativa nilpotente, e por A^n as potências não-associativas de A . Observamos que qualquer conjunto minimal de geradores de A forma uma base de A/A^2 . Seja $x_1, \dots, x_k$ um conjunto dos geradores para A . Diz-se que os geradores $x_{s+1}, \dots, x_k$ são **não-essenciais** se qualquer elemento de A^2 pode ser escrito em termos de $x_1, \dots, x_s$.

Lema 2.4.2. *Geradores $x_{s+1}, \dots, x_k$ são não-essenciais em A se e somente se eles são não-essenciais em A/A^3 .*

Demonstração. Seja S uma palavra com comprimento maior que 1 em $x_1, \dots, x_k$. Qualquer produto de $x_i x_j$ pode ser reescrito como uma combinação linear em $x_i x_j$ onde $i, j \in \{1, \dots, s\}$. Usando a identidade alternativa (1.15) concluímos que S pode ser escrito em termos de $x_1, \dots, x_s$. $\square$

Agora escolhemos parâmetros para qualquer FAI das álgebras nilpotentes alternativas Δ . Seja $A \in \Delta$ com $\dim A = n$, $\dim A/A^2 = m$ e $\dim A^2/A^3 = k$. Também fixamos um conjunto dos geradores $x_1, \dots, x_m$ tal que $x_1, \dots, x_s$ é o conjunto minimal de geradores essenciais.

- Primeiro, consideramos uma aplicação $A/A^2 \times A/A^2 \rightarrow A^2/A^3$ para definir $x_i x_j$ $i, j \in \{1, \dots, m\}$. Pelo lema 2.4.2 nós temos que $x_1, \dots, x_s$ são também essenciais para A^2/A^3 . Uma vez que, $\dim A/A^2 = m$ e $\dim A^2/A^3 = k$ nós obtemos pelo lema de Sims ([30]) que para isso é necessário no máximo

$$m^2(k - s) + O(n^{8/3})$$

parâmetros (pois $m + k \leq n$).

- Já conhecemos $x_i x_j$ módulo A^3 , para terminar a definição destes produtos precisamos de mais $m^2(n - m - k)$ parâmetros ($A/A^2 \times A/A^2 \rightarrow A^3$).
- Agora conhecemos todos os produtos $x_i x_j$, $i, j \in \{1, \dots, m\}$.

Lema 2.4.3. *Suponhamos que conhecemos $R_{x_1}, \dots, R_{x_r}, L_{x_1}, \dots, L_{x_r}$ então conhecemos como $R_{x_{r+1}}$ ($L_{x_{r+1}}$) age na subálgebra $A' \subset A$, gerada por $x_1, \dots, x_r$.*

Demonstração. Para descrever a estrutura de uma álgebra A é suficiente definir os operadores $R_{x_1}, \dots, R_{x_s}$ e $L_{x_1}, \dots, L_{x_s}$ em A^2 . Se $a \in A'$ então usando (1.15) $R_{x_{r+1}}a$ pode ser escrito da forma

$$\sum_j c_j P_i(U_{x_{\alpha_i}})x_{r+1},$$

onde $\alpha_i \leq r$ e $U \in \{R, L\}$. □

- Como R_{x_1} é triangular em A^3 e $R_{x_1}A^2 \subset A^3$, podemos determinar-los por $1/2((n-m)^2 - k^2)$ parâmetros (mesmo para L_{x_1}). Além disso, $x_i x_j$ $i, j \leq r$ geram um subespaço de dimensão pelo menos $r-1$ em A^2/A^3 . Em particular, se conhecemos $R_{x_1}, \dots, R_{x_r}, L_{x_1}, \dots, L_{x_r}$ conhecemos como $R_{x_{r+1}}$ e $L_{x_{r+1}}$ agem em $r-1$ vetores, então precisamos no máximo

$$(n-m)^2 - k^2 - 2(r-1)(n-m-k)$$

parâmetros. Finalmente, todos $R_{x_1}, L_{x_1}, \dots, R_{x_s}, L_{x_s}$ são determinados no máximo por

$$s((n-m)^2 - k^2) - s^2(n-m-k) + O(n^2)$$

parâmetros e assim a família de álgebras pode ser definida no máximo por

$$m^2(n-m-s) + s((n-m)^2 - k^2) - s^2(n-m-k) + O(n^{8/3})$$

parâmetros.

- Seja $x = m/n$, $y = k/n$, $z = s/n$. Então precisamos estimar o valor maximal da função

$$R = x^2(1 - x - z) + z((1 - x^2) - y^2) - z^2(1 - x - y)$$

no simplexo $0 \leq z \leq x, y, x + y \leq 1$. O máximo dessa função é $R = 4/27$.

Para demonstrar no caso de álgebras de Jordan precisamos de um lema análogo ao lema de Sims [30]. Primeiramente, começamos com alguns lemas técnicos. Sejam V, W, U espaços vetoriais de dimensão m, k, l respectivamente. Sem perda de generalidade podemos supor que $m > k$.

Lema 2.4.4. *Seja $(\cdot, \cdot)$ uma aplicação linear $V \times W \rightarrow U$ tal que $(V, W) = U$ mas para nenhum subespaço próprio V' de V e nenhum subespaço próprio W' de W vale $(V', W) = U = (V, W')$. Então ou $m, k, l = 0$ ou existe uma base $x_1, \dots, x_m$ de V e uma base $y_1, \dots, y_k$ de W tais que se $V_i = \langle x_1, \dots, x_i \rangle$ e $W_j = \langle y_1, \dots, y_j \rangle$ então para cada x_i existe pelo menos um y_p tal que $(x_i, y_p) \notin (V_i, W_p)$.*

Demonstração. Se $l = 0$ então m e k também são iguais a 0. Sem perda da generalidade podemos supor que $k \leq m$. Se $l > 0$ então existem x_1, y_1 tais que $(x_1, y_1) \neq 0$. Seja $(V_1, y_1) \neq (V_1, W_1)$ (ou $(x_1, W_1) \neq (V_1, W_1)$), então escolhemos $x_2 \in V$ ($y_2 \in W$) tal que $(x_2, y_1) \notin (V_1, W_1)$ ($(x_1, y_2) \notin (V_1, W_1)$). Sejam $(V, y_1) = (x_1, W) = (V_1, W_1)$, então existem x_2, y_2 tais que $(x_2, y_2) \notin (V_1, W_1)$. Então seja $\tilde{y}_1 = y_1 + y_2$ e temos.

$$(x_1, \tilde{y}_1) = (x_1, y_1) \in (V_1, W_1) \quad \text{e} \quad (x_2, \tilde{y}_1) = (x_2, y_2) \notin (V_1, W_1).$$

Suponhamos que para algum r , $2 \leq r \leq m$, as bases $x_1, \dots, x_r$ e $y_1, \dots, y_r$ foram escolhidas de maneira que $(x_{i+1}, y_i) \notin (V_i, W_i)$ e $(x_i, y_i) \notin (V_i, W_{i-1})$, $1 \leq i \leq r$. Se $r < m$ então tanto V_r quanto W_r são subespaços próprios de V e W , respectivamente e portanto, (V_r, W_r) é um subespaço próprio de U .

1. Caso 1: existe um elemento x em $V \setminus V_r$ tal que $(x, y_r) \notin (V_r, W_r)$. Então definimos $x_{r+1} = x$.
2. Caso 2: $(V, y_r) \subseteq (V_r, W_r)$ mas existe um elemento $x \in V \setminus V_r$ tal que $(x, y_i) \notin (V_r, W_r)$ para alguns $1 \leq i \leq r-1$. Então definimos $\bar{y}_r = y_r + y_i$ e $x_{r+1} = x$. Assim,

$$(x_r, \bar{y}_r) = (x_r, y_r) + (x_r, y_i) \notin (V_r, W_r),$$

visto que $(x_r, y_r) \notin (V_r, W_r)$, $(x_r, y_i) \in (V_r, W_r)$. Agora $W_r = \langle y_1, \dots, \bar{y}_r \rangle$ e

$$(x_{r+1}, \bar{y}_r) = (x_{r+1}, y_r) + (x_{r+1}, y_i) \notin (V_r, W_r).$$

3. Caso 3: $(V_r, W) = (V_r, W_r)$. Então existem elementos $x \in V \setminus V_r$ e $y \in W \setminus W_r$ tais que $(x, y) \notin (V_r, W_r)$. Se

$$(x_r, y_r) + (x_r, y) \in (V_r, W_{r-1}),$$

então $(x_r, y) \notin (V_r, W_{r-1})$. Neste caso definimos $\bar{y}_r = y$ e $x_{r+1} = x$. Segue-se que $(x_r, \bar{y}_r) \notin (V_r, W_{r-1})$. Seja $\bar{W}_r = \langle y_1, \dots, y_{r-1}, \bar{y}_r \rangle$ então

$$(V_r, \bar{W}_r) = (V_r, W_{r-1}) + (V_r, \bar{y}_r) \subseteq (V_r, W_r)$$

e portanto $(x_{r+1}, \bar{y}_r) \notin (V_r, \bar{W}_r)$. Se $(x_r, y_r) + (x_r, y) \notin (V_r, W_{r-1})$, definimos $\bar{y}_r = y_r + y$ e $x_{r+1} = x$. Logo $(x_r, \bar{y}_r) \notin (V_r, W_{r-1})$ e se $\bar{W}_r = \langle y_1, \dots, \bar{y}_r \rangle$ então

$$(V_r, \bar{W}_r) = (V_r, W_{r-1}) + (V_r, \bar{y}_r) \subseteq (V_r, W_r),$$

e $(x_{r+1}, \bar{y}_r) = (x, y_r) + (x, y) \notin (V_r, \bar{W}_r)$.

Se $r = m$ então como nos casos 1 e 2 acima podemos escolher $y_{m+1}, \dots, y_k$ tais que $(x_r, y_j) \notin (V_r, W_{j-1})$ para $r+1 \leq j \leq k$. A demonstração está completa. $\square$

Corolário 2.4.5. $m + k \leq l + 1$.

Demonstração. Sejam $x_1, \dots, x_m$ e $y_1, \dots, y_k$ as bases de V e W construídas na demonstração do lema anterior. Então os elementos (x_i, y_i) , (x_i, y_{i+1}) , para $1 \leq i \leq m$, e (x_m, y_j) , para $m+1 \leq j \leq k$, são linearmente independentes e portanto $m + m - 1 + k - m \leq l$, segue-se que $m + k \leq l + 1$. $\square$

Lema 2.4.6. *Seja $(,)$ qualquer aplicação bilinear de $V \times W \rightarrow U$. Então existem os subespaços V' de V e W' de W tais que $\dim W' + \dim V'$ é no máximo $l + 1$ e $(V', W') = (V, W)$.*

Demonstração. Escolhemos V' e W' minimais (no sentido que $\dim U' + \dim W'$ é minimal) com propriedade que $(V', W') = (V, W)$. Pelo último corolário temos que $\dim U' + \dim W' \leq l + 1$ $\square$

Sejam $(,)$ uma aplicação bilinear de $V \times W \rightarrow U$, V' um subespaço de V e W' um subespaço de W . Definimos $d(V', W')$ como o valor máximo de

$$\dim(\tilde{V}, \tilde{W}) - \dim \tilde{V} - \dim \tilde{W} + 1.$$

sobre todos os subespaços $\tilde{V}$ de V' e $\tilde{W}$ de W' satisfazendo $(\tilde{V}, \tilde{W}) = (V', W')$. O corolário 2.4.5 garante que $d(V, W) \geq 0$.

Proposição 2.4.7. *Sejam V' um subespaço de V e W' um subespaço de W , então*

$$d(V', W') \leq d(V, W) + 1.$$

Demonstração. Pela definição existem subespaços V_1 de V' e W_1 de W' tais que $(V_1, W_1) = (V', W')$ e

$$d(V_1, W_1) = \dim(V_1, W_1) - \dim V_1 - \dim W_1 + 1.$$

Escolhemos subespaços V_2 de V e W_2 de W de dimensão máxima com a propriedade

$$\dim(V_2, W_2) - \dim V_2 - \dim W_2 + 1 \geq d(V', W').$$

Se $(V_2, W_2) = (V, W)$ então

$$d(V, W) \geq \dim(V_2, W_2) - \dim V_2 - \dim W_2 + 1 \geq d(V', W').$$

Seja $(V_2, W_2) \neq (V, W)$. Denotamos por V_3 um subespaço complementar de V_2 em V e por W_3 um subespaço complementar de W_2 em W . Então (V_2, W_3) e (V_3, W_2) estão em (V_2, W_2) . De fato, caso contrário existe, por exemplo, $v \in V_3$ tal que $(v, W_2) \notin (V_2, W_2)$. Seja $V_4 = \langle V_2, v \rangle$, então $(V_4, W_2) = (V_2, W_2) + (v, W_2)$ tem dimensão pelo menos $\dim(V_2, W_2) + 1$. Portanto

$$\dim(V_4, W_2) - \dim V_4 - \dim W_2 + 1 \geq \dim(V_2, W_2) +$$

$$1 - \dim V_2 - 1 - \dim W_2 + 1 \geq d(V', W').$$

e V_2, W_2 não são maximais.

Assim,

$$(V, W) = (V_2, W_2) + (V_3, W_3)$$

e temos que uma projeção de (V_3, W_3) em $(V, W)/(V_2, W_2)$ é sobrejetora. Aplicando o último corolário a (V_3, W_3) e $(V, W)/(V_2, W_2)$ nós podemos escolher $V_5 \subseteq V_3$ e $W_5 \subseteq W_3$ tais que $(V, W) = (V_2, W_2) + (V_5, W_5)$ e $\dim V_5 + \dim W_5 \leq \dim(V, W) - \dim(V_2, W_2) + 1$. Assim, para $V_0 = V_2 + V_5$ e $W_0 = W_2 + W_5$ nós obtemos $(V, W) = (V_0, W_0)$ e

$$\begin{aligned} d(V, W) &\geq \dim(V_0, W_0) - \dim V_0 - \dim W_0 + 1 = \\ &= \dim(V, W) - \dim V_2 - \dim W_2 - \dim V_5 - \dim W_5 + 1 \geq \\ &\geq \dim(V, W) - \dim V_2 - \dim W_2 - \dim(V, W) + \dim(V_2, W_2) - 1 + 1 = \\ &= \dim(V_2, W_2) - \dim V_2 - \dim W_2 \geq d(V', W') - 1. \end{aligned}$$

Portanto, $d(V', W') \leq d(V, W) + 1$. □

Corolário 2.4.8. *Sejam V', W' subespaços de V, W respectivamente, então $d(V, W) \geq \dim(V', W') - \dim V' - \dim W'$.*

Lema 2.4.9. (de Sims): *Sejam V, W e U espaços vetoriais de dimensão m, k, l respectivamente e seja s um inteiro positivo. Então o número de aplicações bilineares $(,) : V \times W \rightarrow U$ tais que para alguns subespaços V_1 de V e W_1 de W com $\dim V_1 + \dim W_1 = s$ tem $(V_1, W_1) = (V, W)$, mas para nenhuma par de subespaços V_0, W_0 tais que $\dim V_0 + \dim W_0 = s - 1$ tem $(V_0, W_0) = (V, W)$, a dimensão é menor ou igual a*

$$mk(l - s) + O((m + k)^{8/3}).$$

Demonstração. Estamos procurando o número de aplicações $(,)$ tais que $d(V, W) = l - s + 1$. Do último corolário segue que para todos os subespaços V_1 de V e W_1 de W

$$\dim(V_1, W_1) - \dim V_1 - \dim W_1 \leq l - s + 1.$$

Seja $V = \oplus V_\alpha$ uma decomposição em soma direta de $m^{1/3} + O(1)$ subespaços de dimensão $m^{2/3} + O(1)$ e $W = \oplus W_\beta$ uma decomposição com $k^{1/3} + O(1)$ subespaços de dimensão $k^{2/3} + O(1)$. Pelo último lema a dimensão $\dim(V_\alpha, W_\beta)$ deve ser menor ou igual $l - s +$

$1 + k^{2/3} + m^{2/3}$. Para cada par α, β escolhemos o subespaço $(V_\alpha, W_\beta) = U_{\alpha, \beta}$. Qualquer um desses subespaços pode ser determinado por $m^{1/3}k^{1/3}O(l^2)$ parâmetros. Seja x um elemento não nulo de V e y um elemento não nulo de W então (x, y) é determinado por $l - s + O(k^{2/3})$ parâmetros e o número total desses produtos é mk . Assim, o número de parâmetros é igual a:

$$mk(l - s + O(k^{2/3})) + m^{1/3}k^{1/3}O(l^2) = mk(l - s) + O((m + k)^{8/3}).$$

□

Consideramos uma família de álgebras de Jordan $\Omega(k, l, m)$, que consiste de álgebras $\mathcal{J}$ de dimensão $k + l + m$ com uma base $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_m$ cujas únicas multiplicações não nulas são

$$\begin{aligned} x_i x_j &= \sum_{p=1}^l c_{ij}^p y_p + \sum_{p=1}^m d_{ij}^p z_p, \\ x_i y_j &= \sum_{p=1}^m b_{ij}^p z_p, \end{aligned}$$

com $c_{ij}^p, d_{ij}^p, b_{ij}^p \in \mathbf{k}$. Para cada álgebra $\mathcal{J} \in \Omega$ todas as palavras não-associativas de comprimento 4 em $\{x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_m\}$ é 0 e portanto para qualquer escolha de c_{ij}^k tal que $c_{ij}^k = c_{ji}^k$ álgebra $\mathcal{J}$ definida pelas constantes c_{ij}^k é uma álgebra de Jordan. Assim, $\Omega(k, l, m)$ é uma subvariedade de $\mathcal{J}or_n$ de dimensão $\nu = \frac{k^2+k}{2}(l+m) + klm$. Além disso, $\Omega(k, l, m) \simeq \mathbf{k}^\nu$ é uma família algébrica irredutível (FAI). Agora seja $k + l + m = n$. O máximo da função ν no simplexo $0 \leq k, l, m$ e $k + l + m = n$ é igual a $1/6\sqrt{3}$. Portanto, $\mathcal{J}or_n$ tem uma componente de dimensão pelo menos $1/6\sqrt{3}n^3 + O(n^2)$.

Seja Λ uma família irredutível de álgebras de Jordan. Analogamente ao caso de álgebras alternativas podemos supor que Λ é uma família de álgebras de Jordan nilpotentes e que os subespaços $\mathcal{J}^2, \mathcal{J}(\mathcal{J}^2), \dots$ para cada $\mathcal{J} \in \Lambda$ são os mesmos. Além disso, consideramos somente tais famílias irredutíveis de álgebras de Jordan as quais consistem de álgebras com a propriedade $(\mathcal{J}^2)(\mathcal{J}^2) \subseteq \mathcal{J}(\mathcal{J}^3)$.

Teorema 2.4.10. *A dimensão de qualquer componente de $\mathcal{J}or_n$, cujas álgebras $\mathcal{J}$ satisfazem $(\mathcal{J}^2)(\mathcal{J}^2) \subseteq \mathcal{J}(\mathcal{J}^3)$ é no máximo $\frac{1}{6\sqrt{3}}$.*

Demonstração. Desde que $\dim GL(n) = n^2$ e para qualquer álgebra $\mathcal{J}$ $\dim \text{Aut } \mathcal{J} \leq n^2$, sem perda de generalidade podemos supor que Λ consiste somente de álgebras nilpotentes.

Seja $\mathcal{J} \in \Lambda$, com $\dim \mathcal{J} = n$ e $\{x_1, \dots, x_m\} = X_1$ um conjunto que gera $\mathcal{J}$ (uma base de $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$). Nós consideramos todos os pares de produtos $X_2 = \{x_i x_j\}$, $i, j = 1, \dots, m$. Obviamente esse conjunto é um conjunto de geradores de $\mathcal{J}^2/\mathcal{J}^3$. Em particular, podemos escolher k elementos da base de $\mathcal{J}^2/\mathcal{J}^3$ (onde $k = \dim \mathcal{J}^2/\mathcal{J}^3$) da forma $x_i x_j$. Agora sejam $S_i \subseteq X_i$, $i = 1, 2$ tais que $S_1 S_2$ gera $\mathcal{J}^3/\mathcal{J}^4$ (é possível escolher tais S_i uma vez que $\mathcal{J}^2 \mathcal{J}^2 \subseteq \mathcal{J}(\mathcal{J}^3)$ e logo $\mathcal{J}^4 \subseteq \mathcal{J} \mathcal{J}^3$).

Lema 2.4.11. *Se $S_1 S_2$ gera $\mathcal{J}^3/\mathcal{J}^4$ então T gera $\mathcal{J}^3$, onde T é um espaço de todos $x_i \in S_1 \cup S_2$.*

Seja $x = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_p}$, $p \geq 3$. Qualquer aparência de $(x_a x_b) x_c$ em x pode ser reescrita (módulo $\mathcal{J}^4$) como uma combinação linear de elementos de $S_1 S_2$. Usando a identidade $R_{(ac)b} = R_a R_{bc} + R_b R_{ac} + R_c R_{ab} - R_a R_b R_c - R_c R_b R_a$ (1.4) concluímos que x pode ser reescrito (módulo $\mathcal{J}^{p+1}$) como uma palavra em T .

Observamos agora que $\{x_1, \dots, x_m\}$ é uma base de $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$, $\dim \mathcal{J}^2/\mathcal{J}^3 = k$. Sejam $\dim \mathcal{J}^3/\mathcal{J}^4 = l$ e $\dim \mathcal{J}^4/\mathcal{J}^5 = t$. Para determinar uma álgebra $\mathcal{J}$ nós precisamos:

1. escolher $x_i x_j \in \mathcal{J}^2$ para todos $i, j = 1, \dots, k$, requerendo $\frac{k^2}{2}(n - k) + O(nk)$ parâmetros;
2. escolher $x_i(x_j x_h) \in \mathcal{J}^3$ módulo $\mathcal{J}^4$. Pelo lema de Sims modificado precisamos de $km(l - s) + O(n^{8/3})$ parâmetros. Aqui s é o mínimo sobre todos os números de elementos $x_1, \dots, x_{s_1} \in \mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ e $y_1, \dots, y_{s_2} \in \mathcal{J}^2/\mathcal{J}^3$ os quais geram $\mathcal{J}^3/\mathcal{J}^4$. Usando o lema de Sims escolhemos elementos $x_1, \dots, x_s$ e $x_{i_1} x_{j_1}, \dots, x_{i_s} x_{j_s}$ (obtemos no máximo $2s$ elementos os quais consistem no máximo de $3s$ x_i 's distintos).
3. Dos produtos $x_i(x_j x_h)$ determinados módulo $\mathcal{J}^4$. Para definir-los completamente precisamos de outros $km(n - m - k - l)$ parâmetros.
4. Ter s geradores essenciais, o que significa que teremos no máximo s geradores $x_1, \dots, x_s \in \mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ e no máximo s geradores $x_{i_1} x_{j_1}, \dots, x_{i_s} x_{j_s}$ que geram $\mathcal{J}^2/\mathcal{J}^4$. Então T gera $\mathcal{J}^3$. Também precisamos de parâmetros para escolher $Rx_i : \mathcal{J}^3 \rightarrow \mathcal{J}^4$ e $R_{x_{i_t} x_{j_t}} : \mathcal{J}^2 \rightarrow \mathcal{J}^4 : \frac{3s}{2}((n - m - k)^2 - l^2) + \frac{3s}{2}((m - n)^2 - (k + l)^2) - \frac{s^2}{2}(n - m - k - l)$.

5. Estimar o valor maximal da função

$$R = \frac{x^2}{2}(1-x) + xy(1-y-x-p) + \frac{3p}{2}((1-y-x)^2 - z^2) \\ + \frac{3p}{2}((x-1)^2 - (y+z)^2) - \frac{p^2}{2}(1-y-x-z)$$

no simplexo $0 \leq p \leq x, y, z, x+y+z \leq 1$. Usando Maple obtemos que o máximo dessa função é $R = 1/6\sqrt{3}$.

□

Capítulo 3

Contrações graduadas de álgebras de Jordan e de suas representações

O objetivo dessa seção é introduzir o conceito de contração de uma álgebra de Jordan graduada bem como de contrações de representações dessa álgebra do mesmo jeito isso foi feito para álgebras de Lie e suas representações em [36]-[37]. Isto é possível porque podemos graduar simultaneamente os espaços das álgebras e suas representações por automorfismos de ordem finita.

O conceito de contração foi introduzido por Inönu e Wigner para álgebras de Lie em [38]. Seja L uma álgebra de Lie sobre um espaço vetorial V sobre um corpo k com multiplicação $(a, b) \rightarrow [a, b]$ e seja F_t uma aplicação linear de $V_K = V_{k((t))}$ em V_K (usamos as notações da seção 2.1), tal que $F_t = u + tv$, onde u e v são aplicações lineares de $V \rightarrow V$ definidas sobre k e u é uma aplicação singular enquanto que v é uma aplicação não singular. Agora uma contração de L é uma álgebra $L_1 = (V, [,]_1)$, onde

$$[a, b]_1 = \lim_{t \rightarrow 0} F_t^{-1}[F_t a, F_t b].$$

Uma vez que v é uma aplicação não singular podemos supor que $v = id$. O conceito de contração é relacionado com o conceito de deformação na seguinte maneira: definimos $f_t(a, b) = F_t^{-1}[F_t a, F_t b]$ com $F_t = u + t$, então a álgebra (V, f_t) é uma deformação da álgebra L_1 que pertence a órbita da álgebra L . Um caso particular de contração é o caso das contrações graduadas. Nos artigos de J. Patera juntamente com outros colab-

oradores ([36], [37]) a teoria das contrações graduadas é bem desenvolvida não somente para álgebras de Lie mas também para suas representações. A ideia é introduzir para cada álgebra $\Lambda = \bigoplus_{i \in G} \Lambda_i$ graduada por um grupo finito G uma família de parâmetros $\{\varepsilon_{ij} | i, j \in G\}$ e definir uma nova álgebra Λ^ε com multiplicação $*$

$$a * b = \varepsilon_{ij} a \cdot b, \quad \text{com } a \in \Lambda_i, \quad b \in \Lambda_j.$$

A escolha das constantes estruturais não é arbitrária; ela deve refletir nossa suposição que a multiplicação defina uma álgebra de Lie, assim as famílias de parâmetros “permitidas” satisfazem o sistema de equações polinomiais e formam um subgrupo de 2-cociclos fracos do grupo G (veja [42]). Nessa seção nós definimos as contrações graduadas para álgebras de Jordan juntamente com as contrações de representações dessas álgebras.

3.1 Graduações de álgebras de Jordan simples

Nessa seção apresentamos uma seleção suficientemente grande de graduações. De jeito nenhum nós pretendemos aqui esgotar todas as possíveis graduações.

De agora em diante todas as álgebras são consideradas sobre o corpo dos números complexos. Seja G um grupo finito abeliano e suponhamos que $\mathcal{J}$ é uma álgebra de Jordan graduada por G . Isto é que nós temos uma decomposição

$$\mathcal{J} = \bigoplus_{i \in G} \mathcal{J}_i$$

de $\mathcal{J}$ como soma direta de subespaços graduados $\mathcal{J}_i$, tais que para qualquer escolha de $x \in \mathcal{J}_i$ e $y \in \mathcal{J}_j$ nós temos $x \cdot y = z \in \mathcal{J}_{i+j}$.

Qualquer álgebra $\mathbb{Z}_2$ -graduada $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \oplus \mathcal{J}_1$ chama-se **superálgebra**. Uma superálgebra $\mathcal{J}$ é **comutativa** se

$$x \cdot y = (-1)^{\alpha\beta} y \cdot x \quad \text{para } x \in \mathcal{J}_\alpha, y \in \mathcal{J}_\beta. \quad (3.1)$$

Definição 3.1.1. [41] *Uma superálgebra de Jordan é uma superálgebra comutativa $\mathcal{J}$ com uma operação $\cdot$ que satisfaz:*

$$(-1)^{\alpha\gamma}(x, y, z \cdot w) + (-1)^{\beta\alpha}(w, y, z \cdot x) + (-1)^{\gamma\beta}(z, y, x \cdot w) = 0, \quad (3.2)$$

para $x \in \mathcal{J}_\alpha, z \in \mathcal{J}_\beta, w \in \mathcal{J}_\gamma, y \in \mathcal{J}$. A última relação é chamada de **identidade de super-Jordan**.

Várias graduações de uma álgebra de Jordan $\mathcal{J}$ são obtidas por decomposição a álgebra de Jordan em espaços próprios de um ou mais automorfismos que comutam entre si da álgebra $\mathcal{J}$. Duas graduações são equivalentes se existe um automorfismo de álgebra que leva uma na outra.

Em geral, as graduações não equivalentes de álgebras de Jordan de dimensão finita não foram classificadas. Um grande passo nessa direção seria uma descrição de todas as graduações finas (i.e. graduações que não podem ser refinadas) de álgebras de Jordan simples. Por outro lado, as classes de conjugação dos elementos de ordem finita de grupos de Lie compactos, simples, simplismente conexos são conhecidas (veja [44]), e suas descrições em qualquer representação são dadas em [42]. Portanto, elas podem ser usadas para a graduação de álgebras de Jordan $M_n(\mathbb{C})^+$.

Consideramos a álgebra de Jordan $M_n(\mathbb{C})^+$ das matrizes $n \times n$ e escolhemos um automorfismo graduado g em $SU(n)$ de ordem finita $g^N = 1$. A graduação é realizada caso conheçamos os matrizes X tais que

$$gXg^{-1} = \lambda X \quad (3.3)$$

para todos os autovalores λ . Suficiente conhecer todos os g para representações que definem $SU(n)$, isto é a matriz unitária $n \times n$. Para cada classe de conjugação de tal automorfismo, escolhemos o unico elemento representado pela matriz diagonal.

Escrevemos as matrizes diagonais as quais representam cada classe de conjugação. Uma classe de $SU(n)$ -conjugação do elemento de ordem finita é caracterizada completamente por n inteiros $[s_0, s_1, \dots, s_{n-1}]$ tais que

$$\{s_0, s_1, \dots, s_{n-1}\} \in \mathbb{Z}^{\geq 0} \quad \text{e} \quad \gcd\{s_0, s_1, \dots, s_{n-1}\} = 1.$$

Assim, os autovalores λ em (3.3) são as M -ésimas raízes da unidade, tais que $M = \sum_{i=0}^{n-1} s_i$.

Finalmente pela Sec. 9, Observação 4 de [42], escrevemos a expressão exata para a matriz diagonal g nos três casos:

$$n = 2 : \quad g = \begin{pmatrix} e^{\pi i \frac{s_1}{s_0+s_1}} & 0 \\ 0 & e^{\pi i \frac{-s_1}{s_0+s_1}} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

$$n = 3 : \quad g = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{3} \frac{2s_1+s_2}{s_0+s_1+s_2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i}{3} \frac{-s_1+s_2}{s_0+s_1+s_2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{2\pi i}{3} \frac{-s_1-2s_2}{s_0+s_1+s_2}} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned}
n \geq 4 : \quad g &= \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{nM}U_1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\frac{2\pi i}{nM}U_k} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & e^{\frac{2\pi i}{nM}U_{n-1}} \end{pmatrix} \\
1 \leq k \leq n, \quad M &= \sum_{j=0}^{n-1} s_j, \quad U_k = -\sum_{q=0}^{k-1} q s_q + \sum_{p=k}^n (n-p) s_p
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Notamos que a ação adjunta (3.3) de g na álgebra é de ordem M , mas o elemento g é de ordem nM/c , com $c = \gcd\{n, s_1, \dots, s_{n-1}\}$.

Como um exemplo dos casos especiais de matrizes diagonais acima, nós podemos verificar que os elementos do centro de $SU(n)$, os quais são todos múltiplos da matriz identidade, têm $M = 1$ e exatamente n deles são distintos. De fato, as classes de conjugação destes elementos são dadas por

$$[s_0, s_1, \dots, s_{n-1}] \in \{[1, 0, \dots, 0], [0, 1, 0, \dots, 0], \dots, [0, \dots, 0, 1]\}.$$

Consideramos agora a álgebra de Jordan simples:

$$\mathcal{J} = M_3(\mathbb{C})^+ = \{X \mid X \in \mathbb{C}^{3 \times 3}\} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ h & b & e \\ f & j & c \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

graduada pelo elemento $g = \text{diag}\{\theta, 0, \theta^2\}$, onde θ é uma raiz da unidade. Então a ação adjunta de g em $X \in M_3(\mathbb{C})$ é:

$$gXg^{-1} = \begin{pmatrix} a & \theta d & \theta^{-1}g \\ \theta^{-1}h & b & \theta^{-2}e \\ \theta f & \theta^2j & c \end{pmatrix}.$$

Observação 3.1.2. *Seja A uma álgebra associativa graduada por G*

$$A = \bigoplus_{i \in G} A_i,$$

então temos a mesma graduação para a álgebra $A^+ = \bigoplus_{i \in G} A_i$.

Suponhamos que $\theta^2 = 1$ então nós temos imediatamente $\mathbb{Z}_2$ -graduação em $\mathcal{J}$

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \oplus \mathcal{J}_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & e \\ 0 & j & c \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & d & g \\ h & 0 & 0 \\ f & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Aplicando simultaneamente a ação adjunta ao elemento $h = \text{diag}\{1, \gamma, \gamma^2\}$, $\gamma^2 = 1$ obtemos $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -gradação em $\mathcal{J}$

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \mathcal{J}_{00} \oplus \mathcal{J}_{01} \oplus \mathcal{J}_{10} \oplus \mathcal{J}_{11} = \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e \\ 0 & j & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 \\ f & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & d & 0 \\ h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Observamos que as duas graduações obtidas, geram também graduações para álgebras de Jordan das matrizes simétricas $M = M^{tr}$.

Suponhamos que $\theta^3 = 1$, ($\theta = \theta^{-2}$). Então nós obtemos uma $\mathbb{Z}_3$ -gradação para $\mathcal{J}$

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \oplus \mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & e \\ f & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 & g \\ h & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Nós escrevemos agora alguns resultados sobre graduação de álgebras de Jordan simples de uma forma bilinear $\mathcal{J}(V, f)$. Devido a [43], qualquer graduação de $\mathcal{J}(V, f) = \bigoplus_{i \in G} \mathcal{J}_i$ por um grupo G sobre um corpo k ($\text{car } k \neq 2$) pode ser obtida da seguinte maneira. Existem uma base graduada B de V , B é união disjunta de B_1 , B'_1 e F , e uma bijeção $B_1 \ni b \leftrightarrow b' \in B'_1$ tais que $\deg b = (\deg b')^{-1} = 1$ para qualquer $b \in B$ e $(\deg f)^2 = 1$ para qualquer $f \in F$. Os conjuntos B_1 and B'_1 são duais um a outro e a dualidade é definida pela bijeção. Além disso, F é ortonormal e ortogonal a B e a B' .

Como um exemplo consideramos um espaço vetorial V de dimensão 3 e uma forma simétrica bilinear f_1 em V tal que para uma base fixa $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ nós temos $f_1(v_1, v_2) = f_1(v_3, v_3) = 1$ e para qualquer outro (i, j) $f_1(v_i, v_j) = 0$. Então obtemos uma $\mathbb{Z}_3$ -gradação de

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \oplus \mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2 = \langle 1, v_3 \rangle \oplus \langle v_1 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle. \quad (3.11)$$

3.2 Contrações graduadas de álgebras e superálgebras de Jordan

Nesta seção nós descrevemos um método para encontrar as contrações que preservam uma graduação fixada de uma álgebra ou superálgebra de Jordan. O método não tem

nenhuma restrição quanto a dimensão da álgebra. Consideramos as álgebras de Jordan e ocasionalmente enfatizando o fato que subálgebras com o mesmo tipo de graduação estão sendo considerados também. Sejam G um grupo abeliano e $\mathcal{J}$ uma álgebra de Jordan graduada por G .

Definimos uma contração G -graduada. Suponhamos que uma álgebra de Jordan G -graduada é dada. Uma **contração G -graduada** $\mathcal{J}^\varepsilon$ de $\mathcal{J}$:

$$\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}^\varepsilon = \bigoplus_{i \in G} \mathcal{J}_i$$

é a álgebra de Jordan $\mathcal{J}^\varepsilon$ com decomposição graduada isomorfa a decomposição de $\mathcal{J}$ com multiplicação:

$$\mathcal{J}_i \cdot^\varepsilon \mathcal{J}_j = \varepsilon_{ij} \mathcal{J}_i \cdot \mathcal{J}_j \subseteq \varepsilon_{ij} \mathcal{J}_{i+j} \quad (3.12)$$

dado por parâmetros de contração $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{C}$. Por $\mathcal{J}_i \cdot \mathcal{J}_j$ denotamos o espaço linear gerado por produtos de todos os elementos de $\mathcal{J}_i$ com cada elemento de $\mathcal{J}_j$. No nível dos elementos nós temos $x \cdot^\varepsilon y = \varepsilon_{ij} z$, onde $x \in \mathcal{J}_i$, $y \in \mathcal{J}_j$, $z \in \mathcal{J}_{i+j}$ e $x \cdot y = z$.

Os casos especiais de contrações surgem quando as relações de multiplicação (3.12) são modificadas por renormalização da base dos subespaços por uma constante arbitrária não nula,

$$\mathcal{J}_i \rightarrow a_i \mathcal{J}_i, \quad i \in G, \quad a_i \in \mathbb{C}, \quad a_i \neq 0.$$

Assim, em termos da nova base temos

$$\mathcal{J}_i \cdot \mathcal{J}_j \subseteq \frac{a_i a_j}{a_{i+j}} \mathcal{J}_{i+j} \quad i, j \in G.$$

Obviamente tais $\varepsilon = (\varepsilon_{ij}) = \left(\frac{a_i a_j}{a_{i+j}} \right)$ determinam uma contração. Nós chamamos duas contrações ε_1 e ε_2 **equivalentes** se uma pode ser obtida da outra por renormalização da base dos espaços graduados.

Uma contração chama-se **trivial** se ou $\mathcal{J}^\varepsilon$ é isomorfo à $\mathcal{J}$ (i.e. $\varepsilon_{ij} = 1$) ou $\mathcal{J}^\varepsilon$ é uma álgebra de Jordan com multiplicação trivial (i.e. todos os $\varepsilon_{ij} = 0$). Obviamente nos dois casos ε_{ij} satisfazem (3.12) e $\mathcal{J}^\varepsilon$ é uma álgebra de Jordan.

Em geral, não vamos entrar em detalhes da estrutura de $\mathcal{J}$, mas é importante saber quando $\mathcal{J}_i \cdot \mathcal{J}_j$ é nulo. Como no caso das álgebras de Lie (veja [36]) nós introduzimos uma matriz simétrica $\kappa = (\kappa_{ij})$:

$$\kappa_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if } \mathcal{J}_i \cdot \mathcal{J}_j = 0 \\ 1 & \text{if } \mathcal{J}_i \cdot \mathcal{J}_j \neq 0 \end{cases}$$

Logo escrevemos

$$\mathcal{J}_i \cdot \mathcal{J}_j \subseteq \kappa_{ij} \mathcal{J}_{i+j}$$

e $\mathcal{J}$ será chamada de álgebra de Jordan com G -estrutura κ . Em geral, o problema de determinação das contrações não triviais ε precisa ser resolvido para cada estrutura G -graduada κ . Aqui nós consideramos o caso mais geral de $\kappa = (1)$, o caso genérico quando nenhum $\mathcal{J}_i \cdot \mathcal{J}_j$ desaparece.

Para que a álgebra $\mathcal{J}^\varepsilon$ seja novamente uma álgebra de Jordan a matriz ε dos parâmetros de contração (a matriz de contração ou contração) não pode violar nenhuma identidade de Jordan (1.3) nem mesmo a comutatividade (1.5.1).

No caso da contração genérica, $\mathcal{J}^\varepsilon$ é de novo uma álgebra de Jordan se (1.5.1) e (1.3) são satisfeitos para todos i, j, k, l :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} \mathcal{J}_i \cdot \mathcal{J}_j &= \varepsilon_{ji} \mathcal{J}_j \cdot \mathcal{J}_i, \\ \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{k+l, j+i} (\mathcal{J}_i \cdot \mathcal{J}_j) \cdot (\mathcal{J}_k \cdot \mathcal{J}_l) &- \varepsilon_{kl} \varepsilon_{j, k+l} \varepsilon_{i, j+k+l} \mathcal{J}_i \cdot (\mathcal{J}_j \cdot (\mathcal{J}_k \cdot \mathcal{J}_l)) \\ + \varepsilon_{ki} \varepsilon_{lj} \varepsilon_{l+j, k+i} (\mathcal{J}_k \cdot \mathcal{J}_i) \cdot (\mathcal{J}_l \cdot \mathcal{J}_j) &- \varepsilon_{ki} \varepsilon_{k+i, j} \varepsilon_{k+i+j, l} \mathcal{J}_l \cdot (\mathcal{J}_j \cdot (\mathcal{J}_k \cdot \mathcal{J}_i)) \\ + \varepsilon_{il} \varepsilon_{kj} \varepsilon_{i+l, k+j} (\mathcal{J}_i \cdot \mathcal{J}_j) \cdot (\mathcal{J}_k \cdot \mathcal{J}_l) &- \varepsilon_{il} \varepsilon_{i+l, j} \varepsilon_{i+l+j, k} \mathcal{J}_k \cdot (\mathcal{J}_j \cdot (\mathcal{J}_l \cdot \mathcal{J}_i)) = 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

aqui nós escrevemos as relações na forma de um somando graduado de $\mathcal{J}$.

As igualdades são satisfeitas simultaneamente para qualquer escolha de elementos dos espaços correspondentes no caso:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ji}, \\ \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{k+l, j+i} &= \varepsilon_{kl} \varepsilon_{j, k+l} \varepsilon_{i, j+k+l} = \varepsilon_{ki} \varepsilon_{lj} \varepsilon_{l+j, k+i}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

para todos $k, i, j, l \in G$.

Agora fazemos a observação final sobre o caso de contração não genérica. Suponhamos que nós temos uma G -gradação de uma álgebra de Jordan que é não genérica. Para todos os i, j tais que $\mathcal{J}_i \cdot \mathcal{J}_j = 0$ o parâmetro de contração ε_{ij} não está bem-definido, então para obter o sistema de equações que correspondem a G -estrutura κ dada, precisamos excluir de (3.13) todos os termos com ε_{ij} .

Qualquer contração é dada por uma aplicação $\varepsilon : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$, com $(i, j) \rightarrow \varepsilon_{i,j}$ que satisfaz as equações (3.14). O conjunto de tais aplicações é fechado com respeito a multiplicação ponto a ponto. A seguir escrevemos alguns fatos de [37] sobre contrações de álgebras de Lie sobre $\mathbb{C}$. Suponhamos que L é uma álgebra de Lie G -graduada sobre

$\mathbb{C}$, logo qualquer contração de álgebra de Lie L é dada por $\varepsilon : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$ tais que para qualquer $i, j, k \in G$

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{i+j,k} = \varepsilon_{j,k}\varepsilon_{i,j+k}. \quad (3.15)$$

Além disso, nesse artigo ([37]) foi provado que contração de álgebras de Lie formam um semigrupo de classes de cociclos fracos de cohomologias $H^2(G, \mathbb{C})$ de G com coeficientes em $\mathbb{C}$. É fácil verificar que qualquer solução de (3.15) satisfaz também (3.14). Então qualquer aplicação $\varepsilon : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$ que define uma contração de uma álgebra de Lie G -graduada definirá também uma contração de uma álgebra de Jordan G -graduada. Em particular, qualquer elemento de $H^2(G, \mathbb{C})$ dará uma contração de álgebra de Jordan G -graduada.

Observamos que quando no lugar de (1.3) e (1.5.1) consideramos as identidade de super-Jordan (3.2) e de super-comutatividade (3.1), vamos obter o mesmo sistema de equações. Os soluções não triviais desse sistema determinam as contrações no caso genérico.

3.3 Exemplos de contrações de álgebras e superálgebras de Jordan

Nessa seção consideramos contrações de álgebras de Jordan simples para os casos quando G é $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ ou $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Observamos que álgebras obtidas no processo de contração de álgebras simples de Jordan vêm sendo interessantes não somente como ilustrações para o método de contrações graduadas mas também como uma fonte de álgebras de Jordan não-simples.

3.3.1 Contrações no caso $G = \mathbb{Z}_2$

Consideramos qualquer álgebra de Jordan $\mathcal{J}$ de dimensão finita ou infinita que é graduada pelo grupo cíclico abeliano $\mathbb{Z}_2$ de dois elementos. Então temos

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \oplus \mathcal{J}_1,$$

$$0 \neq \mathcal{J}_i \cdot \mathcal{J}_j \subseteq \mathcal{J}_{i+j}, \quad j, i, i+j \pmod{2}.$$

A contração mais geral $\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}^\varepsilon$ de $\mathcal{J}$ que preserva a $\mathbb{Z}_2$ -graduação pode ser descrita em termos da matriz $\varepsilon = (\varepsilon_{ij}) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ dos parâmetros de contração

$$\mathcal{J}_i \cdot^\varepsilon \mathcal{J}_j := \varepsilon_{ij} \mathcal{J}_i \cdot \mathcal{J}_j \subseteq \varepsilon_{ij} \mathcal{J}_{i+j}, \quad i, j = 0, 1. \quad (3.16)$$

Aqui a notação $\cdot^\varepsilon$ denota a multiplicação na álgebra contraída. No caso em que $\varepsilon_{00} \neq 0$ nós renormalizamos a base do subespaço graduado $\mathcal{J}_0$ tal que $\varepsilon_{00} = 1$.

A álgebra de Jordan $\mathcal{J}$ e sua contração $\mathcal{J}^\varepsilon$ são isomorfas como espaços vetoriais e as relações de multiplicação são modificadas em $\mathcal{J}^\varepsilon$ por (3.16). Das equações (3.14) segue que $\mathcal{J}^\varepsilon$ será uma álgebra de Jordan se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{01} &= \varepsilon_{10}, & \varepsilon_{10}(\varepsilon_{00}^2 - \varepsilon_{10}\varepsilon_{i0}) &= 0, \\ \varepsilon_{11}^2 \varepsilon_{00} &= \varepsilon_{11}^2 \varepsilon_{10}, & \varepsilon_{11}(\varepsilon_{00}^2 - \varepsilon_{10}\varepsilon_{i0}) &= 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

com $i = 0, 1$. Existem duas soluções triviais:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

um caso de contração trivial e outro de contração idêntica. As contrações não triviais são dadas por soluções restantes. Nesse caso temos três matrizes não-equivalentes não-triviais:

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comparando esses resultados com o caso de álgebras de Lie [36] observamos que para as álgebras de Jordan obtemos as mesmas contrações não-equivalentes como no caso de álgebras de Lie.

Exemplo 3.1: Seja $\mathcal{J} = \text{Symm}(3, \mathbb{C})$ álgebra de Jordan de matrizes simétricas 3×3 sobre $\mathbb{C}$. A $\mathbb{Z}_2$ -graduação (3.8) de $M_3(\mathbb{C})^+$ induz a $\mathbb{Z}_2$ -graduação de $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \oplus \mathcal{J}_1$, com

$$\mathcal{J}_0 = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_1 = \begin{pmatrix} 0 & g & 0 \\ g & 0 & f \\ 0 & f & 0 \end{pmatrix},$$

onde $a, b, c, d, f, g \in \mathbb{C}$.

Contraindo a álgebra $\text{Symm}(3, \mathbb{C})$ por $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ nós obtemos as seguintes álgebras:

- $\mathcal{J}^{\varepsilon_1} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C}e \oplus V$, onde $e^2 = e$ e $V = \langle v_0, v_1 \rangle$ é um módulo de dimensão 2 sobre a parte semi-simples $\text{Sym}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}e$ tal que $E_{11}v_1 = ev_1 = \frac{1}{2}v_1$, $E_{22}v_0 = ev_0 = \frac{1}{2}v_0$ e $(E_{12} + E_{21})v_i = \frac{1}{2}v_{i+1}$, $i(\text{mod } 2)$. Por E_{ij} denotamos a matriz elementar. Isto é a matriz cuja única entrada não-nula é 1 e está na posição (i, j) .
- $\mathcal{J}^{\varepsilon_2} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C}e \oplus V$, onde $e^2 = e$ e V é um módulo de dimensão 2 anulado pela parte semi-simples $\text{Sym}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}e$.
- $\mathcal{J}^{\varepsilon_3} = A^{(+)} \oplus V$, onde $A^{(+)} = \langle x, y \rangle / \langle x, y \rangle^3$ é uma álgebra associativa, comutativa e nilpotente de três geradores e V é um bimódulo de dimensão 1 anulado por $A^{(+)}$.

Exemplo 3.2: Seja $\mathcal{J}_t = \mathcal{J}_0 \oplus \mathcal{J}_1 = \langle 1, a \rangle \oplus \langle \xi, \eta \rangle$ a super-álgebra de Jordan simples tal que $a \cdot \xi = \xi$, $a \cdot \eta = \eta$, $a^2 = 2a$, $\xi^2 = \eta^2 = 0$ e $\xi \cdot \eta = 1 + ta$, com $t \in \mathbb{C}$, $t \neq -\frac{1}{2}$. Então nós obtemos as seguintes contrações de $\mathcal{J}_t$:

- $\mathcal{J}_t^{\varepsilon_1} \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \langle v_1, v_2 \rangle$, é a superálgebra de Jordan com $\mathcal{J}_0 = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2$, $e_i v_j = 0$ e $v_j^2 = 0$ para todos $i, j \in \{0, 1\}$.
- $\mathcal{J}_t^{\varepsilon_2} \simeq \mathcal{J}'_0 \oplus \mathcal{J}_1$, onde $\mathcal{J}'_0 = \langle \xi \cdot \eta, v \rangle$ com $\xi v = \eta v = 0$.
- $\mathcal{J}_t^{\varepsilon_3} \simeq \mathcal{J}_0 \oplus \langle \xi, \eta \rangle$, onde $\langle \xi, \eta \rangle$ é a álgebra de Jordan com a multiplicação trivial.

3.3.2 Contrações no caso $G = \mathbb{Z}_3$

Qualquer álgebra de Jordan $\mathbb{Z}_3$ -graduada decompõe-se em

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \oplus \mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2, \\ 0 \neq \mathcal{J}_i \cdot \mathcal{J}_j \subseteq \mathcal{J}_{i+j}, \quad j, i, i+j(\text{mod } 3).$$

Novamente qualquer contração genérica pode ser descrita em termos da matriz $\varepsilon = (\varepsilon_{ij}) \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$. Para que a álgebra $\mathcal{J}^\varepsilon$ seja álgebra de Jordan nós obtemos das equações (3.14)

equações para o caso de $\mathbb{Z}_3$ -gradação:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ji}, \\
 \varepsilon_{i0}^3 &= \varepsilon_{i0}^2 \varepsilon_{00} = \varepsilon_{i0} \varepsilon_{00}^2, \\
 \varepsilon_{11}(\varepsilon_{00} \varepsilon_{i0} - \varepsilon_{j0} \varepsilon_{k0}) &= 0, \\
 \varepsilon_{11} \varepsilon_{12} \varepsilon_{00} &= \varepsilon_{11} \varepsilon_{12} \varepsilon_{i0} = \varepsilon_{11}^2 \varepsilon_{22}, \\
 \varepsilon_{22} \varepsilon_{12} \varepsilon_{00} &= \varepsilon_{22} \varepsilon_{12} \varepsilon_{i0} = \varepsilon_{22}^2 \varepsilon_{11}, \\
 \varepsilon_{21}^3 &= \varepsilon_{21}^2 \varepsilon_{i0},
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

com $i, j, k, l = 1, 2$. As soluções dessas equações dão 13 contrações não-triviais não-equivalentes:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \varepsilon_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \varepsilon_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 \varepsilon_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \varepsilon_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \varepsilon_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 \varepsilon_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \varepsilon_8 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \varepsilon_9 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 \varepsilon_{10} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, & \varepsilon_{11} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \varepsilon_{12} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 \varepsilon_{13} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Observemos dois fatos: primeiro, comparamos novamente resultados obtidos para $\mathbb{Z}_3$ -contração de álgebras de Jordan com os resultados [36] para álgebras de Lie: como no caso de $\mathbb{Z}_2$ -contração nós obtemos as mesmas contrações. Segundo, observamos que as matrizes obtidas são simétricas com respeito a $\mathcal{J}_1$ e $\mathcal{J}_2$. Portanto nós consideramos somente um de cada par dos casos descritos acima que se diferem unicamente pela permutação $\mathcal{J}_1 \leftrightarrow \mathcal{J}_2$.

Agora nós calculamos algumas contrações de álgebras de Jordan $\mathbb{Z}_3$ -graduadas $M_3(\mathbb{C})^+$.

Exemplo 3.4 $\mathcal{J} = M_3(\mathbb{C})^+$. Na seção 3 (3.10) nós obtemos $\mathbb{Z}_3$ -gradações para $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \oplus \mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2$. Para essa graduação as álgebras contraídas são as seguintes:

- $\mathcal{J}^{\varepsilon_1} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus V$, onde V é um bimódulo de dimensão 6 anulado pela parte semisimples.
- $\mathcal{J}^{\varepsilon_2} \simeq \mathcal{J}^{\varepsilon_3} = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus (V_{12} \oplus V_{13} \oplus V_{23}) \oplus V$, onde V_{ij} é um módulo de dimensão 1, tal que $e_i v_{ij} = e_j v_{ij} = \frac{1}{2} v_{ij}$, $v_{ij} \in V_{ij}$, $i = 1, 2$, $j = 2, 3$ e V é um módulo de dimensão 3 anulado pela parte semisimples.
- $\mathcal{J}^{\varepsilon_4} \simeq \mathcal{J}^{\varepsilon_8} = A^+ \oplus V$, onde $A^+ = \langle x, y, z \rangle / \langle x^2, y^2, z^2, xyz \rangle$ é uma álgebra nilpotente, associativa e comutativa de três geradores e V é um módulo de dimensão 3 anulado por A^+ .
- $\mathcal{J}^{\varepsilon_5} \simeq \mathcal{J}^{\varepsilon_9} = A^+ \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, onde $A^+ = \langle x, y, z \rangle / \langle x^2, y^2, z^2, xyz \rangle$ é uma álgebra nilpotente, associativa, comutativa de três geradores.
- $\mathcal{J}^{\varepsilon_6} = A^+ \oplus V$, onde $A^+ = \langle x, y, z \rangle / \langle x^2, y^2, z^2, xyz \rangle$ e V é um módulo de dimensão 3 anulado por A^+ .
- $\mathcal{J}^{\varepsilon_7} \simeq \mathcal{J}^{\varepsilon_{10}} = \mathbb{C}\langle x, y, z \rangle \oplus \mathbb{C} \cdot 1$, a álgebra com unidade adjunta a álgebra não-associativa de Grassman.
- $\mathcal{J}^{\varepsilon_{11}} = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus (V_{12} \oplus V_{13} \oplus V_{23})^2$, onde V_{ij} e e_i são como em $\mathcal{J}^{\varepsilon_2}$.

Exemplo 3.5 $\mathcal{J} = \mathcal{J}(V, f_1)$ (exemplo de seção 3). Nós demonstramos que $\mathcal{J}$ possui a $\mathbb{Z}_3$ -graduação $\mathcal{J} = \langle 1, v_3 \rangle \oplus \langle v_1 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle$. Essa graduação é não-genérica pois $\mathcal{J}_1^2 = \mathcal{J}_2^2 = 0$. No caso de graduação não-genérica alguns termos em (3.13) não estão mais presente. Então as contrações de álgebras de Jordan $\mathbb{Z}_3$ -graduadas com estrutura graduada não-genérica são determinadas por um subconjunto das equações (3.18). Em particular, as soluções de (3.18) também satisfazem o subsistema determinado por graduação não-genérica. A seguir escrevemos algumas contrações para $\mathcal{J}$.

- $\mathcal{J}^{\varepsilon_1} \simeq \mathcal{J}^{\varepsilon_5} \simeq \mathcal{J}^{\varepsilon_9} \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus V$, onde V é um módulo de dimensão 2 anulado pela parte semisimples.

- $\mathcal{J}^{\varepsilon_4} \simeq \mathcal{J}^{\varepsilon_8} = (\mathcal{J}, 0)$, uma álgebra com multiplicação trivial.
- $\mathcal{J}^{\varepsilon_6} \simeq \mathcal{J}^{\varepsilon_7} \simeq \mathcal{J}^{\varepsilon_{10}} \simeq S \oplus V$, onde $S = \langle x, y \rangle / \langle x^2, y^2 \rangle$ é uma álgebra nilpotente e associativa e V é um módulo de dimensão 1 anulado por S .
- $\mathcal{J}^{\varepsilon_{11}} \simeq \mathcal{J}^{\varepsilon_{12}} \simeq \mathcal{J}^{\varepsilon_{13}} \simeq \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \langle v_1, v_2 \rangle$, com e_1, e_2 , idempotentes e $e_j v_i = \frac{1}{2} v_i$, para os todos $i, j = 1, 2$.

3.3.3 Contrações no caso $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

O grupo G nessa seção é o produto cartesiano de dois grupos cíclicos de ordem 2. Nós consideramos qualquer superálgebra de Jordan que possui uma $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -graduação. Então decomponos $\mathcal{J}$ em

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_{00} \oplus \mathcal{J}_{01} \oplus \mathcal{J}_{10} \oplus \mathcal{J}_{11}, \quad \text{tal que } \mathcal{J}_{ij} \cdot \mathcal{J}_{kl} \subset \mathcal{J}_{i+k, j+l},$$

e os índices têm duas componentes, cada um considerado módulo 2. Novamente nós trabalhamos com o caso de contrações genéricas. Logo a matriz ε pode ser escrita como

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{00,00} & \varepsilon_{00,01} & \varepsilon_{00,10} & \varepsilon_{00,11} \\ \varepsilon_{01,00} & \varepsilon_{01,01} & \varepsilon_{01,10} & \varepsilon_{01,11} \\ \varepsilon_{10,00} & \varepsilon_{10,01} & \varepsilon_{10,10} & \varepsilon_{10,11} \\ \varepsilon_{11,00} & \varepsilon_{11,01} & \varepsilon_{11,10} & \varepsilon_{11,11} \end{pmatrix}.$$

Nesse caso nós não vamos especificar as equações de (3.14) para $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. A razão para isso é que, primeiro, o grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ é bastante rico para prover um sistema grande de equações e, segundo, existe 41 contrações não-equivalentes, incluindo as duas triviais e elas são as mesmas contrações que foram obtidas para o caso de álgebras de Lie em [36]. Portanto, abstenho-nos de escrever todas elas novamente. Uma outra possibilidade de achar alguns soluções de (3.14) sem fazer os cálculos direto é observar que o sistema é resolvido pelo produto tensorial de soluções para o caso de $\mathbb{Z}_2$ (situação genérica). Como um exemplo, usando as três contrações de álgebras $\mathbb{Z}_2$ -graduadas $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ nós temos

$$\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 \otimes \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Exemplo 3.6 $\mathcal{J} = \text{Sym}(3, \mathbb{C})$. Da seção 3 nós temos $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -graduação de

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & d & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & f & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para contrações obtidos acima nós temos:

- $\mathcal{J}^{\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2} \simeq \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \langle v_1 \rangle \oplus V$, onde o e_i 's são idempotentes e V é um módulo de dimensão 2 anulado pela parte semisimples, $e_1v_1 = e_2v_1 = v_1$.
- $\mathcal{J}^{\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_3} \simeq \mathbb{C}[x, y]/\langle x^2, y^3 \rangle \oplus V_2$, onde V é um módulo de dimensão 2 anulado por $\mathbb{C}[x, y]/\langle x^2, y^3 \rangle$.
- $\mathcal{J}^{\varepsilon_2 \otimes \varepsilon_3} \simeq \mathbb{C}[x]/\langle x^3 \rangle \oplus V$, onde V é um módulo de dimensão 2 anulado por $\mathbb{C}[x]/\langle x^3 \rangle$.

3.4 Contrações de representações de álgebras de Jordan

Nessa seção nós definimos simultaneamente as contrações tanto para bimódulos quanto para módulos especiais de álgebra de Jordan.

3.4.1 Contrações de bimódulos de Jordan

Suponhamos que $\mathcal{J}$ é uma álgebra de Jordan G -graduada. Seja $G\text{-Mod}(\mathcal{J})$ uma categoria de bimódulos G -graduados de $\mathcal{J}$, i.e., $\mathcal{J}$ -bimódulo V tal que:

- V é graduado por G ,
- $\mathcal{J}_i \cdot V_j \subseteq V_{i+j}$, $i, j \in G$.

Seja ε uma matriz de contração para $\mathcal{J}$, então tem uma aplicação satisfazendo (3.14). Agora queremos que V seja um $\mathcal{J}^\varepsilon$ -bimódulo. Nós consideramos o conjunto de todas as aplicações $\phi : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$, tais que

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}\phi_{km}\phi_{i+j,m+k} &= \varepsilon_{ij}\phi_{i+j,m}\phi_{k,i+j+m} = \varepsilon_{jk}\phi_{im}\phi_{j+k,m+i}, \\ \varepsilon_{ik}\varepsilon_{i+k,j}\phi_{i+j+k,m} &= \varepsilon_{ik}\phi_{jm}\phi_{i+k,j+m} = \phi_{im}\phi_{j,m+i}\phi_{k,m+i+j} = \\ &= \varepsilon_{jk}\phi_{im}\phi_{j+k,m+i} = \phi_{km}\phi_{j,m+k}\phi_{i,m+k+j}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

para todos $i, j, k, m \in G$.

Para qualquer ϕ dado que satisfaz (3.20) e $V \in G\text{-Mod}(\mathcal{J})$ nós definimos um $\mathcal{J}^\varepsilon$ -módulo V^ϕ com

- a estrutura de espaço vetorial igual a V ;
- a ação de $\mathcal{J}^\varepsilon$ é definida por:

$$\begin{aligned} x \cdot^\phi v &= \phi_{i,m} x \cdot v, & x \in (\mathcal{J}^\varepsilon)_i, v \in V_m, \\ v \cdot^\phi x &= \phi_{m,i} v \cdot x, & x \in (\mathcal{J}^\varepsilon)_i, v \in V_m. \end{aligned}$$

As duas equações (3.20) fornecem uma nova ação de $\mathcal{J}^\varepsilon$ em V satisfazendo (1.5). Então V^ϕ é um $\mathcal{J}^\varepsilon$ -bimódulo.

3.4.2 Contrações de módulos especiais de Jordan

Seja $G\text{-SMod}(\mathcal{J})$ uma categoria de módulos especiais G -graduados de álgebras de Jordan $\mathcal{J}$. Nós consideramos o conjunto das todas aplicações $\phi : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$ tais que

$$\varepsilon_{ij} \phi_{i+j,m} = \phi_{j,i+m} \phi_{im} = \phi_{jm} \phi_{i,j+m}, \quad (3.21)$$

para todos $i, j, k, m \in G$.

Novamente, para qualquer ϕ dado que satisfaz (3.21) e um módulo $W \in G\text{-SMod}(\mathcal{J})$ nós definimos no espaço vetorial W uma estrutura de $\mathcal{J}^\varepsilon$ -módulo especial W^ϕ com ação

$$w \cdot^\phi x = \phi_{i,m} w \cdot x, \quad x \in (\mathcal{J}^\varepsilon)_i, w \in W_m.$$

A equação (3.21) nos fornece que W^ϕ torna-se um $\mathcal{J}^\varepsilon$ -módulo especial de Jordan. Além disso, nós observamos que as soluções das equações (3.21) para módulos de Jordan especiais coincidem com as soluções das equações para álgebras de Lie [37]. Assim, se nós temos uma matriz de contração de álgebra de Lie G -graduada (que automaticamente seria uma matriz de contração para álgebra de Jordan G -graduada), então as contrações para módulos especiais de Jordan coincidem com as matrizes de contrações para o caso de Lie-módulos. Em particular, de [37] tabelas 3.1 e 3.2 nós temos uma lista completa para os casos de $\mathbb{Z}_2$ - e $\mathbb{Z}_3$ -gradações, respectivamente

3.5 Exemplos de contrações de representações G -graduadas de álgebras de Jordan contraídas

Nessa seção, nós consideramos as contrações de representações para álgebras contraídas sobretudo da seção 3.3.

3.5.1 Contrações no caso $G = \mathbb{Z}_2$

Suponhamos $V \in \mathbb{Z}_2\text{-Mod}(\mathcal{J})$ então a ação da álgebra $\mathcal{J}$ $\mathbb{Z}_2$ -graduada divide V em soma direta

$$V = V_0 \oplus V_1,$$

onde os subespaços V_i , $i = 0, 1$, são definidos pelas propriedades de graduação:

$$0 \neq \mathcal{J}_i V_m \subseteq V_{i+m} \quad \text{and} \quad 0 \neq V_m \mathcal{J}_i \subseteq V_{i+m} \quad i, m, i+m \pmod{2}.$$

Como acima nós consideramos a situação de graduação genérica. Nós também escrevemos V e $\mathcal{J}V$ da seguinte forma:

$$V = \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{J}V = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_0 & \mathcal{J}_1 \\ \mathcal{J}_1 & \mathcal{J}_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_0 V_0 + \mathcal{J}_1 V_1 \\ \mathcal{J}_1 V_0 + \mathcal{J}_0 V_1 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Depois da contração de $\mathcal{J}$ por ε e de V por ϕ nós temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^\varepsilon \cdot^\phi V &= \begin{pmatrix} \mathcal{J}_0 & \mathcal{J}_1 \\ \mathcal{J}_1 & \mathcal{J}_0 \end{pmatrix}^\varepsilon \cdot^\phi \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \phi_{00}\mathcal{J}_0 & \phi_{11}\mathcal{J}_1 \\ \phi_{10}\mathcal{J}_1 & \phi_{01}\mathcal{J}_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{00}\mathcal{J}_0 V_0 + \phi_{11}\mathcal{J}_1 V_1 \\ \phi_{01}\mathcal{J}_0 V_1 + \phi_{10}\mathcal{J}_1 V_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Em particular, para ação adjunta de $\mathcal{J}^\varepsilon$ em $\mathcal{J}^\varepsilon$, nós temos $\phi = \varepsilon$. Visto que nós queremos que V^ϕ seja um bimódulo de Jordan para $\mathcal{J}^\varepsilon$, ϕ precisa satisfazer (3.20) para este caso:

$$\begin{aligned} \phi_{0i}^3 &= \phi_{0i}^2 \varepsilon_{00} = \phi_{0i} \varepsilon_{00}^2, \\ \varepsilon_{11} \phi_{01} \varepsilon_{10} &= \varepsilon_{11} \phi_{10} \phi_{0i} = \phi_{10}^2 \phi_{11}, \\ \varepsilon_{11} \phi_{11} (\phi_{00} - \phi_{01}) &= 0, \\ \phi_{10} (\gamma_{0i} \phi_{0j} - \varepsilon_{01} \varepsilon_{k0}) &= 0, \\ \phi_{11} (\gamma_{0i} \phi_{0j} - \varepsilon_{01} \varepsilon_{k0}) &= 0, \end{aligned} \quad (3.23)$$

Tabela 3.1: As contrações de representações $\mathbb{Z}_2$ -graduadas na forma (3.22).

ε	No.	$\mathcal{J} \cdot^\varphi V$	
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	I.1	$\begin{pmatrix} \mathcal{J}_0 & 0 \\ \mathcal{J}_1 & \mathcal{J}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_0 V_0 \\ \mathcal{J}_1 V_0 + \mathcal{J}_0 V_1 \end{pmatrix}$	$\varepsilon = \varphi$
	I.2	$\begin{pmatrix} \mathcal{J}_0 & \mathcal{J}_1 \\ 0 & \mathcal{J}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_0 V_0 + \mathcal{J}_1 V_1 \\ \mathcal{J}_0 V_1 \end{pmatrix}$	
	I.3	$\begin{pmatrix} \mathcal{J}_0 & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_0 V_0 \\ \mathcal{J}_0 V_1 \end{pmatrix}$	
	I.4	$\begin{pmatrix} \mathcal{J}_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_0 V_0 \\ 0 \end{pmatrix}$	
	I.5	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{J}_0 V_1 \end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	II.1	$\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{J}_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1 V_1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\varepsilon = \varphi$
	II.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{J}_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{J}_1 V_0 \end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	III.1	$\begin{pmatrix} \mathcal{J}_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_0 V_0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\varepsilon = \varphi$
	III.2	$\begin{pmatrix} \mathcal{J}_0 & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_0 V_0 \\ \mathcal{J}_0 V_1 \end{pmatrix}$	
	III.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{J}_0 V_1 \end{pmatrix}$	
	III.4	$\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{J}_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1 V_1 \\ 0 \end{pmatrix}$	
	III.5	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{J}_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{J}_1 V_0 \end{pmatrix}$	

para $i, j, k = 0, 1$ e $\gamma \in \{\phi, \varepsilon\}$

Similarmente, se nós queremos que $V^\phi \in \mathbb{Z}_2\text{-SMod}(\mathcal{J})$ então ϕ deve satisfazer (3.21) para o caso de $\mathbb{Z}_2$.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{00}\phi_{0i} &= \phi_{0i}^2, \\
 \phi_{10}\phi_{0i} &= \varepsilon_{10}\phi_{10}, \\
 \phi_{11}\phi_{0i} &= \phi_{11}\varepsilon_{10}, \\
 \varepsilon_{11}\phi_{0i} &= \phi_{11}\phi_{10}, \quad i = 0, 1.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

As soluções das equações (3.23) e (3.24) formam os conjuntos de todas as $\mathbb{Z}_2$ -contrações das matrizes dos bimódulos de Jordan e dos módulos de Jordan especiais, respectivamente. É obvio que ϕ depende fortemente de ε . Nossa situação obtemos que quaisquer das três contrações ε não-equivalentes de álgebras de Jordan, as soluções de (3.20) e de (3.21) coincidem, além disso eles também coincidem com as soluções das equações análogos para as representações $\mathbb{Z}_2$ -graduadas de álgebras de Lie, veja [36]. Tabela 3.1 representa a lista completa das soluções na forma (3.22).

Exemplo 3.7 Consideramos um exemplo de álgebra de Jordan simples $\mathcal{J} = \text{Symm}(2, \mathbb{C})$, a álgebra de Jordan das matrizes complexas simétricas 2×2 , e seu módulo de Jordan

especial $V = M_2(\mathbb{C})^+$, o espaço das matrizes complexas 2×2 . A base da álgebra é dada pelas matrizes E_{11} , E_{22} , $h := E_{12} + E_{21}$, onde E_{11} , E_{22} são idempotentes ortogonais e

$$E_{11} \cdot h = E_{22} \cdot h = \frac{1}{2}h, \quad h^2 = E_{11} + E_{22}.$$

Consideramos a $\mathbb{Z}_2$ -gradação de $\mathcal{J}$:

$$\mathcal{J}_0 = \mathbb{C}E_{11} + \mathbb{C}E_{22}, \quad \mathcal{J}_1 = \mathbb{C}h,$$

onde $\mathbb{C}$ é um coeficiente complexo arbitrário. É fácil verificar que

$$\mathcal{J}_0 \cdot \mathcal{J}_0 = \mathcal{J}_0, \quad \mathcal{J}_0 \cdot \mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_1, \quad \mathcal{J}_1 \cdot \mathcal{J}_1 = \mathbb{C}h \subset \mathcal{J}_0.$$

Por consequência a graduação é genérica. O espaço V também pode ser graduado:

$$V_0 = \mathbb{C}F_{11} + \mathbb{C}F_{22}, \quad V_1 = \mathbb{C}F_{21} + \mathbb{C}F_{12},$$

onde F_{ij} é a base padrão de $V = M_2(\mathbb{C})$.

Nesse simples exemplo podemos escrever todas as relações no forma de matrizes.

$$\mathcal{J}_0 V_0 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ak_1 & 0 \\ 0 & ck_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_0 V_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & n_2 \\ n_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & an_2 \\ cn_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{J}_1 V_0 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & bk_2 \\ bk_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_1 V_1 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & n_2 \\ n_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bn_1 & 0 \\ 0 & bn_2 \end{pmatrix},$$

para todos $a, b, c, k_1, k_2, n_1, n_2$.

Agora consideramos as contrações de $\mathcal{J}$ por ε_1 . Os itens (I.1-I.5) da tabela 3.1 são as contrações de representações nesse caso. Então, para I.1 nós obtemos

$$\mathcal{J} \cdot^\phi V = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_0 & 0 \\ \mathcal{J}_1 & \mathcal{J}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \\ 0 & n_2 \\ n_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ak_1 & 0 \\ 0 & ck_2 \\ 0 & bk_2 + an_2 \\ bk_1 + cn_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sem perda a generalidade podemos rescrever a última relação:

$$\mathcal{J} \cdot^\phi V = \begin{pmatrix} ak_1 & bk_2 + an_2 \\ bk_1 + an_1 & ck_2 \end{pmatrix}.$$

Similarmente para I.2 da tabela 3.1 calculamos:

$$\mathcal{J} \cdot^\phi V = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_0 & \mathcal{J}_1 \\ 0 & \mathcal{J}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ak_1 + bn_1 & an_2 \\ cn_1 & ck_2 + bn_2 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.8: Seja $\mathcal{J}$ uma álgebra de Jordan. Consideramos as contrações de $\mathcal{J}$ dadas por $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Nesse caso (3.23) torna-se

$$\phi_{00} = \phi_{01} = \phi_{10}\phi_{11} = 0. \quad (3.25)$$

É fácil verificar que no caso dos módulos de Jordan especiais o sistema (3.24) torna-se em (3.25). Nesse caso particular existe duas possibilidades para ϕ :

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Na forma de (3.22) nós escrevemos transformações lineares contraídas como

$$\begin{pmatrix} 0 & a\mathcal{J}_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\mathcal{J}_1 V_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b\mathcal{J}_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b\mathcal{J}_1 V_0 \end{pmatrix}.$$

3.5.2 Contrações no caso $G = \mathbb{Z}_3$

Suponhamos que $V \in \mathbb{Z}_3\text{-Mod}(\mathcal{J})$ então a ação da álgebra $\mathcal{J}$ $\mathbb{Z}_3$ -graduada decompõe V em soma direta

$$V = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2,$$

onde os subespaços V_i , $i = 0, 1, 2$ são definidos pelas propriedades graduadas:

$$0 \neq \mathcal{J}_i V_m \subseteq V_{i+m} \quad \text{and} \quad 0 \neq V_m \mathcal{J}_i \subseteq V_{i+m} \quad i, m, i+m \pmod{3}.$$

Nós podemos escrevê-los na forma de (3.22)

$$\mathcal{J}^\varepsilon \cdot \phi V = \begin{pmatrix} \phi_{00}\mathcal{J}_0 V_0 + \phi_{21}\mathcal{J}_2 V_1 + \phi_{12}\mathcal{J}_1 V_2 \\ \phi_{10}\mathcal{J}_1 V_0 + \phi_{01}\mathcal{J}_0 V_1 + \phi_{22}\mathcal{J}_2 V_2 \\ \phi_{20}\mathcal{J}_2 V_0 + \phi_{11}\mathcal{J}_1 V_1 + \phi_{02}\mathcal{J}_0 V_2 \end{pmatrix}.$$

Para que V^ϕ tornar-se em bimódulo de Jordan para $\mathcal{J}^\varepsilon$, ϕ deve satisfazer (3.20) para $\mathbb{Z}_3$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{00}^2 \phi_{00} &= \varepsilon_{00} \phi_{00}^2 = \phi_{00}^3, \\
\varepsilon_{00}^2 \phi_{0i} &= \varepsilon_{00} \phi_{0i}^2 = \phi_{0i}^3, \\
\phi_{i0} \gamma_{00} \phi_{00} &= \phi_{i0} \gamma_{0i} \gamma_{0i} = \phi_{0i} \gamma_{00} \gamma_{0i}, \\
\varepsilon_{ii} \phi_{i0} \gamma_{0i} &= \varepsilon_{ii} \phi_{i0} \phi_{00} = \gamma_{0i} \phi_{ii} \phi_{i0} = \phi_{ii} \phi_{i0} \phi_{00} = \varepsilon_{ii} \varepsilon_{i0} \phi_{i0}, \\
\phi_{ii} \gamma_{0i} \gamma_{0i} &= \phi_{ii} \gamma_{0i} \varepsilon_{00} = \phi_{ii} \phi_{0i} \varepsilon_{00} = \phi_{ii} \phi_{0i} \gamma_{0i} = \phi_{ii} \phi_{0i}^2, \\
\phi_{12} \phi_{00} \gamma_{00} &= \phi_{12} \phi_{0i} \gamma_{00} = \varepsilon_{0i} \phi_{12} \gamma_{00} = \phi_{12} \varepsilon_{0i}^2 = \phi_{12} \phi_{0i}^2, \\
\phi_{ij} \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} &= \phi_{ij} \varepsilon_{12} \varepsilon_{i0} = \phi_{ij} \phi_{20} \phi_{12} = \phi_{ij} \phi_{10} \phi_{21} = \phi_{ij} \phi_{11} \phi_{22} = \\
&= \phi_{ij} \varepsilon_{12} \phi_{0,i+j} = \phi_{ij} \varepsilon_{12} \phi_{0j} = \varepsilon_{ii} \phi_{ii} \phi_{i,i+j}, \\
\varepsilon_{ii} \phi_{ii} \gamma_{0i} &= \phi_{ii} \varepsilon_{ii} \phi_{00} = \phi_{ii} \varepsilon_{ii} \varepsilon_{i0} = \phi_{ii} \phi_{ii} \phi_{0k}, \quad k = 0, 1, \\
\varepsilon_{ii} \phi_{ii} \varepsilon_{i0} &= \varepsilon_{ii} \phi_{i0} \phi_{ii} = \phi_{i0} \phi_{ii} \phi_{ii} = \varepsilon_{ii} \varepsilon_{ii} \phi_{0k}, \quad k = 0, 1, 2, \\
\phi_{ii} \phi_{0k} \phi_{i0} &= \phi_{ii} \phi_{i0} \varepsilon_{i0} = \varepsilon_{ii} \phi_{ii} \gamma_{0k} = \phi_{ii} \phi_{i0} \phi_{00}, \quad k = 1, 2, \\
\varepsilon_{12} \phi_{k0} \phi_{0i} &= \varepsilon_{ii} \phi_{i0} \phi_{ii} = \phi_{0i} \phi_{ii} \phi_{i0} = \phi_{i0} \phi_{ii} \phi_{ii} = \\
&= \phi_{i0} \phi_{i0} \phi_{ii} = \varepsilon_{ii} \varepsilon_{ii} \phi_{i0} = \varepsilon_{ii} \varepsilon_{0i} \phi_{i0}, \quad k = 0, i, \\
\varepsilon_{12} \phi_{0k}^2 &= \varepsilon_{12} \varepsilon_{0k} \phi_{0m} = \varepsilon_{0l} \phi_{10} \phi_{21} = \varepsilon_{0l} \phi_{20} \phi_{12} = \gamma_{0l} \phi_{11} \phi_{22} = \phi_{12} \phi_{20} \phi_{02} = \\
&\phi_{12} \phi_{20} \phi_{00} = \phi_{21} \phi_{10} \phi_{01} = \phi_{21} \phi_{10} \phi_{00}, \quad k, m = 0, 1, 2, \quad l = 1, 2.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Para as todas equações acima $i = 1, 2$, $j = 1, 2$, $\bar{a} = -a$ e $\gamma \in \{\phi, \varepsilon\}$.

Para que V^ϕ tornar-se um módulo de Jordan especial nós deduzimos de (3.21) o seguinte sistema de equações para ϕ :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{00} \phi_{0m} &= \phi_{0m}^2, \\
\varepsilon_{01} \phi_{1m} &= \phi_{1m} \phi_{0,m+1} = \phi_{1m} \phi_{0m} \\
\varepsilon_{02} \phi_{2m} &= \phi_{2m} \phi_{0,m+2} = \phi_{2m} \phi_{0m} \\
\varepsilon_{11} \phi_{2m} &= \phi_{1m} \phi_{1,m+1} \\
\varepsilon_{22} \phi_{1m} &= \phi_{2m} \phi_{2,m+2} \\
\varepsilon_{12} \phi_{0m} &= \phi_{2m} \phi_{1,m+2} = \phi_{1m} \phi_{2,m+1},
\end{aligned} \tag{3.28}$$

com $m = 0, 1, 2$.

Como nós já mencionamos, o sistema (3.28) coincide com o sistema que corresponde a ϕ para o caso de representações de álgebras de Lie contraídas graduadas. Por consequência, como nós obtemos o mesmo conjunto de contrações não-equivalentes, e também as mesmas soluções como no caso de álgebras de Lie. Essas contrações podem ser encontradas na tabela 2 em [37]. Além disso, as soluções de (3.28) estão também dentro das

soluções de (3.27). Contudo, (3.27) admite outras soluções. Nós escrevemo-as na tabela 3.2. As contrações de álgebras de Jordan são dados por ε e das representações por ϕ . De três matrizes que se diferem somente pelo permutação cíclica das colunas escrevemos uma so.

Exemplo 3.9 Consideramos as contração $\mathcal{J}^\varepsilon$ dada por

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Além disso, consideramos duas contrações de bimódulos de Jordan

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nesse exemplo ϕ_1 é contração para os dois casos de bimódulo de Jordan e para módulo de Jordan especial, enquanto ϕ_2 é uma matriz de contração somente no caso dos bimódulos de Jordan. Nos escrevemos as transformações lineares contratadas na forma (3.22) como

$$\begin{pmatrix} \mathcal{J}_0 & 0 & 0 \\ \mathcal{J}_1 & \mathcal{J}_0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{J}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_0 V_0 \\ \mathcal{J}_1 V_0 + \mathcal{J}_0 V_1 \\ \mathcal{J}_0 V_2 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{J}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{J}_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_2 V_1 \\ 0 \\ \mathcal{J}_2 V_0 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

É facil verificar que (3.29) define a representação especial da álgebra de Jordan contraída $\mathcal{J}^\varepsilon$. Por exemplo para $\mathcal{J}_0 \cdot_\varepsilon \mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{J}_1$ nos temos:

$$\mathcal{J}_1 V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{J}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{J}_1 V_0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{J}_1 V \supseteq (\mathcal{J}_0 \cdot_\varepsilon \mathcal{J}_1)^\phi V = \frac{1}{2} \mathcal{J}_0^\phi (\mathcal{J}_1^\phi V) + \frac{1}{2} \mathcal{J}_1^\phi (\mathcal{J}_0^\phi V) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathcal{J}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{J}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{J}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{J}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{J}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{J}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \\ &\quad \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{J}_0 \mathcal{J}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{J}_1 \mathcal{J}_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{J}_0 \mathcal{J}_1 V_0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[illegible]

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mas no caso (3.30) nós obtemos

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{J}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{J}_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{J}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{J}_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_2 \mathcal{J}_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Um cálculo simples, mas longo mostra que (3.30) dá um bimódulo de Jordan para $\mathcal{J}^\varepsilon$.

Capítulo 4

Tipos de representações de álgebras de Jordan

4.1 Tipos de representações de álgebras

Neste capítulo todas as álgebras são de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$. Seja A uma álgebra associativa com unidade. Do ponto de vista da teoria das representações, conhecer uma álgebra A significa conhecer todos os módulos sobre A . Usaremos a notação $A\text{-mod}$ para indicar a categoria dos módulos à esquerda finitamente gerados.

Definição 4.1.1. *Diz-se que um módulo M é indecomponível em $A\text{-mod}$ se $M \neq 0$ e para toda decomposição em $A\text{-mod}$, $M = M_1 \oplus M_2$, se tem ou $M_1 = 0$ ou $M_2 = 0$.*

Suporemos conhecido o teorema de Krull-Schmidt, que diz que se A é de dimensão finita a decomposição de cada M de $A\text{-mod}$ em indecomponíveis é única, a menos da ordem dos somandos e de isomorfismos.

Definição 4.1.2. *Diz-se que uma álgebra associativa possui*

- **tipo de representação finito** se o conjunto das classes de isomorfismos dos A -módulos indecomponíveis finitamente gerados é finito.
- **tipo de representação manso** se o conjunto das classes de isomorfismos dos A -módulos indecomponíveis finitamente gerados forma em cada dimensão um número finito de famílias a um parâmetro.

- **tipo de representação selvagem** se existe um $A\text{-}\mathbb{C}\langle x, y \rangle$ -bimódulo M , finitamente gerado livre como $\mathbb{C}\langle x, y \rangle$ -módulo, tal que o funtor $M \otimes_{\mathbb{C}\langle x, y \rangle}$ leva os $\mathbb{C}\langle x, y \rangle$ -módulos não-isomorfos finitamente gerados para os A -módulos não-isomorfos.

Em 1980 Yu. Drozd mostrou em [45] que

Teorema 4.1.3. *Uma álgebra associativa A de dimensão finita é do tipo ou finito ou manso ou selvagem.*

Seja $\mathcal{J}$ uma álgebra de Jordan complexa de dimensão finita, então a álgebra envolvente universal especial $S(\mathcal{J})$ é uma álgebra associativa de dimensão finita. Do capítulo 1 seção 3 segue que existe uma correspondência 1-1 entre as representações especiais (módulos especiais) de $\mathcal{J}$ e representações de $S(\mathcal{J})$. Então, diz-se que

Definição 4.1.4. *Uma álgebra de Jordan de dimensão finita $\mathcal{J}$ tem um tipo de representação s-finito (s-manso ou s-selvagem) se $S(\mathcal{J})$ tem um tipo de representação finito (manso ou selvagem).*

Nós acentuamos que as representações de $S(\mathcal{J})$ estão em correspondência biunívoca com as representações especiais de $\mathcal{J}$. O tipo de representação de $\mathcal{J}$ para os bimódulos de $\mathcal{J}$ coincide com o tipo de representação da álgebra envolvente multiplicativa universal $U(\mathcal{J})$.

4.2 O quiver e a equivalência de Morita

Definição 4.2.1. *As álgebras A e A' são chamadas Morita equivalentes, se as categorias de A -módulos e A' -módulos são equivalentes. Uma álgebra A é chamada básica ou Morita reduzida se $A/\text{Rad } A$ é isomorfo à soma direta do corpo básico.*

Em cada classe de equivalência de Morita existe uma única álgebra básica a menos de isomorfismo. O problema de determinação do tipo de representação de uma álgebra A pode ser reduzida a álgebra básica B que é Morita equivalente a A .

Observamos que o somando direto de A considerado como um módulo à esquerda tem a forma Ae , onde $e \in A$ é um idempotente. Quando Ae é um módulo indecomponível

Ae é chamado de A -módulo indecomponível principal e o idempotente correspondente e é chamado primitivo.

Seja P um ideal à esquerda de A tal que $P = P_1 \oplus \dots \oplus P_r$, onde $\{P_1, P_2, \dots, P_r\}$ é o conjunto dos representantes de classes de isomorfismos dos módulos à esquerda principais indecomponíveis. Obviamente tal P é único a menos de isomorfismo, então a álgebra $B = \text{End}_A(P)$ é chamada de álgebra básica de A e por [24] Proposição 6.7.a é reduzida, i.e. $B/\text{Rad}B$ é um produto finito de $\mathbb{C}$ e por [24] Proposição 9.6 A e B são Morita equivalentes. Além disso, por [24] Proposição 6.4.a e Corolário 6.4.a segue que existe um idempotente $e \in A$ tal que $P = eA$ e $B = \text{End}_A(eA) \simeq eAe$. Então obtemos o seguinte lema:

Lema 4.2.2. *Seja $A = A_{ss} + \text{Rad}A$ uma álgebra associativa finitamente gerada, onde A_{ss} é a parte semi-simples e $\text{Rad}A$ o radical de A . Segue do teorema de Wedderburn que $A_{ss} = A_1 \oplus \dots \oplus A_r$, com $A_k \simeq M_{n_k}(\mathbb{C})$. Seja $e_{ij}^{(k)}$, $k \in \{1, \dots, r\}$, a base canônica de A_k e $e_1 = e_{11}^{(1)} + \dots + e_{11}^{(r)}$. Então as álgebras A e $e_1 A e_1$ são Morita equivalentes.*

Demonstração. Para todo k temos que $A_k = e_{11}^{(k)} A \oplus \dots \oplus e_{n_k n_k}^{(k)} A$. Além disso para todos $p, q \in \{1, \dots, n_k\}$ $e_{pp}^{(k)} A \simeq e_{qq}^{(k)} A$. Consideramos um A -módulo $P = P_1 \oplus \dots \oplus P_r$, onde $P_k = e_{11}^{(k)} A$ e $k = 1, \dots, r$. Então os P_k 's são distintos representantes de classes de isomorfismos dos módulos principais indecomponíveis. Assim, $\text{End}_A(P) \simeq e_1 A e_1$ é uma álgebra básica de A e portanto $e_1 A e_1$ é Morita equivalente a A . $\square$

Definição 4.2.3. *Um grafo orientado ou quiver Q é um par formado por um conjunto Q_0 (de vértices) e um conjunto Q_1 (de arestas ou pares de vértices) juntamente com duas funções $c, t : Q_1 \rightarrow Q_0$ as quais levam cada aresta aos seus início e fim respectivamente. Dizemos que a aresta $x \in Q_1$ vai do vértice $c(x)$ ao vértice $t(x)$.*

Seja A uma álgebra básica. Consideramos a decomposição da identidade em soma dos idempotentes primitivos ortogonais, $1 = e_1 + \dots + e_n$.

Definição 4.2.4. *O quiver $Q(A)$ da álgebra A é o seguinte grafo orientado :*

- os vértices são indexados pelo conjunto $\{1, \dots, n\}$;

- do vértice i a vértice j , $1 \leq i, j \leq n$ temos a_{ij} arestas onde

$$a_{ij} = \dim_{\mathbb{C}} e_j(\text{Rad } A / \text{Rad}^2 A)e_i.$$

Caso a álgebra A não seja básica nós utilizamos a noção de $Q(A)$ para o quiver da álgebra básica B , que é Morita equivalente a A . Seja agora $\mathcal{J}$ uma álgebra de Jordan de dimensão finita. Por $Q(\mathcal{J})$ um **s-quiver de álgebra de Jordan** denotamos o quiver $Q(S_1(\mathcal{J}))$ de álgebra envolvente universal especial unital e logo $Q_i(\mathcal{J}) = Q_i(S(\mathcal{J}))$.

Reciprocamente, a cada quiver Q nós podemos associar uma álgebra de caminhos $\mathbb{C}[Q]$ de Q . A base dessa álgebra é formada por caminhos orientados em Q , i.e., uma seqüência finita de arestas $x_1, \dots, x_t$, tais que $c(x_i) = t(x_{i+1})$, $i = 1, \dots, t-1$ para $t \geq 1$ e vértices de Q_0 para $t = 0$, t é chamado de comprimento do caminho. O produto de dois caminhos $p_1 = x_1 \dots x_t$ e $p_2 = y_1 \dots y_k$, $p_1 p_2 = x_1 \dots x_t y_1 \dots y_k$, se $c(x_t) = t(y_1)$ e 0 caso contrário. Se Q_0 é o conjunto finito então $\sum_{P \in Q_0} P$ é a identidade de $\mathbb{C}[Q]$.

Seja $Q = Q(A)$ um quiver da álgebra associativa básica de dimensão finita A , então existe um epimorfismo $\pi : \mathbb{C}[Q] \rightarrow A$. Além disso, fixando um conjunto $S \subset \mathbb{C}[Q]$ de geradores do ideal $\text{Ker} \pi$, um par (Q, S) é chamado de **quiver com relações** que representa a álgebra A . Observamos que a escolha de S não é única. No caso em que S é vazio ou qualquer $s \in S$ é uma combinação linear dos caminhos de comprimento 2 a álgebra A é chamada quadrática.

Todas as álgebras a seguir são representadas por quiver com relações.

Antes de encerrar essa seção queremos resumidamente fazer uma exposição dos resultados clássicos sobre as álgebras associativas. Assim, nós apresentamos fontes que depois usaremos para definir os tipos de representação de quivers obtidos para álgebras de Jordan.

Definição 4.2.5. *Uma álgebra associativa A sobre $\mathbb{C}$ é chamada local se $A = \mathbb{C}1 + \text{Rad} A$, onde $\text{Rad} A$ é o radical de A .*

Em particular, uma álgebra local A é básica e, além disso, $Q_0(A)$ consiste de um ponto só. Em 1975, no artigo [47] K. Ringel apresentou uma lista das álgebras locais de tipo finito. Depois em 1982 K. Bongartz and P. Gabriel generalizaram este resultado e obtiveram a descrição de todas álgebras A de **dois pontos** (i.e., quando $Q_0(A)$ consiste de dois pontos só) de tipo finito, veja [50]. Finalmente, Y. Han em [46] classificou todas

as álgebras de dois pontos mansas. Nós usaremos essa classificação, para qualquer álgebra de Jordan $\mathcal{J}$, cuja álgebra envolvente universal especial unital é local ou de dois pontos.

Definição 4.2.6. *Uma álgebra A associativa de dimensão finita é chamada biserial especial se A é uma álgebra dos caminhos de um grafo orientado Q módulo o ideal gerado por relações I tal que: (i) os números de arestas em Q com um domínio fixo estão limitados por dois; (ii) para qualquer aresta α em Q existe no máximo uma aresta β em Q e no máximo uma aresta γ em Q tais que $\beta\alpha$ e $\alpha\gamma$ não pertencem a I .*

Nos artigos [48] e [49] o problema de determinação dos tipos de representação de uma álgebra biserial especial é completamente resolvida: qualquer álgebra biserial especial é no máximo do tipo manso. Uma álgebra biserial especial é do tipo finito quando ela não possui um ciclo não-orientado sem relações. Esses fatos serão usados para determinar o s -tipo de álgebras de Jordan $\mathcal{J}$ com $S_1(\mathcal{J})$ sendo biserial especial.

4.3 Álgebras envolventes universais especiais de álgebras de Jordan do tipo A, B

Recordemos que a álgebra envolvente universal especial $S(\mathcal{J})$ para álgebra de Jordan $\mathcal{J}$ é definida como a álgebra $S(\mathcal{J}) = F(\mathcal{J})/R_s$, onde R_s é o ideal de $F(\mathcal{J})$ gerado por elementos

$$a \otimes b + b \otimes a - 2ab, \quad a, b \in \mathcal{J}. \quad (4.1)$$

De [13] segue que a álgebra envolvente universal especial $S(\mathcal{J})$ é uma álgebra associativa semi-simples. Além disso, essa álgebra possui a identidade e . Suponhamos que $\mathcal{J}$ possui unidade 1. Seja $\sigma_u : \mathcal{J} \rightarrow S(\mathcal{J})$ de (1.8) então $\sigma_u(1)\sigma_u(a) = \sigma_u(a)\sigma_u(1) = \sigma_u(a)$ em $S(\mathcal{J})$ e visto que e e $\sigma_u(\mathcal{J})$ geram $S(\mathcal{J})$ é óbvio que $\sigma_u(1)$ é um idempotente central de $S(\mathcal{J})$. Então considerando $z = e - \sigma_u(1)$ nós obtemos que $S(\mathcal{J}) = \mathbb{C}z \oplus S_1(\mathcal{J})$ onde $S_1(\mathcal{J})$ é a subálgebra de $S(\mathcal{J})$ gerada por $\sigma_u(\mathcal{J})$. Portanto, a estrutura de $S(\mathcal{J})$ pode ser determinada através da estrutura de $S_1(\mathcal{J})$, a álgebra envolvente universal especial unital.

4.3.1 A álgebra envolvente universal especial unital para $\mathcal{J} = M_n(\mathbb{C})^+$

Seja $\{e_{ij}, i, j = 1, \dots, n\}$ a base canônica de $\mathcal{J}$, onde (e_{ij}) é a matriz elementar cuja a única entrada não-nula e igual a 1 é a i -ésima linha e j -ésima coluna. Nessa seção construiremos uma base de monômios em e_{ij} para a álgebra $S_1(\mathcal{J})$.

Lema 4.3.1. *Para qualquer $i, j \in (1, \dots, n)$ $i \neq j$ temos*

$$\begin{aligned} e_{ii}^2 &= e_{ii}, \\ e_{ii}e_{jj} &= 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Demonstração. Denotamos a multiplicação $x, y \in \mathcal{J}$ em $S_1(\mathcal{J})$ por xy e a multiplicação de Jordan por $x \cdot y$. A relação (4.1) com $a = b = e_{ii}$ dá a primeira igualdade em (4.2). Escrevendo (4.1) com $a = e_{ii}$ e $b = e_{jj}$ nós obtemos

$$e_{ii}e_{jj} + e_{jj}e_{ii} = 0.$$

Multiplicando a última equação por e_{ii} à esquerda e depois por e_{ii} à direita temos $e_{ii}e_{jj} = -e_{ii}e_{jj}e_{ii} = e_{jj}e_{ii}$, o que implica $[e_{ii}, e_{jj}] = \{e_{ii}, e_{jj}\} = 0$ e portanto $e_{ii}e_{jj} = e_{jj}e_{ii} = 0$. $\square$

Lema 4.3.2. *Para quaisquer i, j, k tais que $i \neq j$ e $i \neq k$ temos que $e_{ii}e_{jk} = e_{jk}e_{ii} = 0$.*

Demonstração. Começamos com (4.1) para e_{ii} e e_{jk} :

$$e_{ii}e_{jk} + e_{jk}e_{ii} = 0.$$

Como no lema anterior multiplicando a equação por e_{ii} à esquerda e depois por e_{ii} à direita nós obtemos:

$$e_{ii}e_{jk} = -e_{ii}e_{jk}e_{ii} = e_{jk}e_{ii}$$

e o resultado segue das duas últimas equações. $\square$

Analogamente temos o seguinte

Lema 4.3.3. *Da relação (4.1) para $a = b = e_{ij}$ e $i \neq j$ segue que $e_{ij}^2 = 0$.*

Lema 4.3.4. Para quaisquer $i, j, k = 1, \dots, n$, $i \neq j$, $k \neq j$, $k \neq i$

$$\begin{aligned} e_{ii}e_{ij} &= e_{ij}e_{jj} = e_{ik}e_{kj} \\ e_{jj}e_{ij} &= e_{ij}e_{jj} = e_{kj}e_{ik}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Demonstração. Consideramos (4.1) para dois pares e_{ii}, e_{ij} e e_{ij}, e_{jj} :

$$\begin{aligned} e_{ii}e_{ij} + e_{ij}e_{ii} &= e_{ij} \\ e_{ij}e_{jj} + e_{jj}e_{ij} &= e_{ij}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Multiplicamos a primeira equação por e_{jj} à esquerda e a segunda por e_{ii} à direita. Comparando as equações obtidas nós temos

$$e_{jj}e_{ij} = e_{jj}e_{ij}e_{ii} = e_{ij}e_{ii}. \quad (4.5)$$

Consequentemente obtemos que $e_{ii}e_{ij} = e_{ij}e_{jj}$. Agora escrevemos (4.1) para e_{ik} e e_{kj} :

$$e_{ik}e_{kj} + e_{kj}e_{ik} = e_{ij}.$$

Multiplicando a última relação à esquerda por e_{ii} e por e_{jj} à direita nós temos:

$$e_{ii}e_{ik}e_{kj}e_{jj} = e_{ii}e_{ij}e_{jj}.$$

Por outro lado

$$e_{ik}e_{kj} = e_{ik}\left(\sum_{p=1}^n e_{pp}\right)e_{kj} = e_{ik}e_{kk}e_{kj} = e_{ik}e_{kk}e_{kk}e_{kj}.$$

Utilizando os resultados obtidos reescrevemos:

$$e_{ik}e_{kj} = e_{ii}e_{ik}e_{kj}e_{jj} = e_{ii}e_{ij}e_{jj} = e_{ii}e_{ij}$$

e portanto $e_{kj}e_{ik} = e_{ik}e_{kj}$. □

Lema 4.3.5. Para quaisquer i, j, k, l tais que $i \neq k$, $j \neq l$, $j \neq k$ e $i \neq l$ nós temos $e_{kl}e_{ij} = 0$.

Demonstração. Começamos com (4.1) para e_{ij}, e_{kl} :

$$e_{ij}e_{kl} + e_{kl}e_{ij} = 0.$$

Em $U_{S,1}$ temos $1 = \sum_{p=1}^n e_{pp}$ e então podemos reescrever a última relação:

$$e_{ij} \left(\sum_{p=1}^n e_{pp} \right) e_{kl} + e_{kl} e_{ij} = 0.$$

Pelo lema 4.3.2 segue que para qualquer $p = 1, \dots, n$ ou $e_{ij}e_{pp}$ ou $e_{pp}e_{kl}$ é 0 e portanto $e_{kl}e_{ij} = 0$. $\square$

Lema 4.3.6. Para quaisquer i, j, k tais que $i \neq k$, $j \neq k$ e $i \neq j$ temos $e_{ij}e_{ik} = e_{ji}e_{ki} = 0$.

Demonstração. Primeiramente, escrevemos (4.1) para e_{ij}, e_{ik} :

$$e_{ij}e_{ik} + e_{ik}e_{ij} = 0. \quad (4.6)$$

Por outro lado, temos (4.1) para e_{ij}, e_{jk} :

$$e_{ij}e_{jk} + e_{jk}e_{ij} = e_{ik}.$$

Multiplicando essa equação por e_{ij} à esquerda e à direita e usando o fato que $e_{ij}^2 = 0$ temos:

$$e_{ij}e_{jk} = e_{ij}e_{jk}e_{ij} = e_{jk}e_{ij}.$$

Comparando estas igualdades com (4.6) obtemos o resultado desejado. $\square$

Proposição 4.3.7. O conjunto

$$\Omega = \{e_{ii}e_{ij}, e_{ij}e_{ii}, e_{ii}e_{i+1}e_{i+1}i, e_{ii}e_{i+1}i e_{i+1}i \mid i \neq j, i, j = 1, \dots, n\}$$

gera $S_1(M_n(\mathbb{C})^+)$. Em particular, obtemos o teorema de Martindale para $\mathcal{J} = M_n(\mathbb{C})^+$ que diz que $S_1(\mathcal{J}) = M_n(\mathbb{C}) \oplus M_n(\mathbb{C})$.

Demonstração. Primeiramente, como ambos $e_{ii}e_{ij}$ e $e_{ij}e_{ii}$ estão em Ω temos que e_{ij} com $i \neq j$ está também em $\langle \Omega \rangle$. Além disso,

$$e_{ii}e_{i+1}e_{i+1}i + e_{ii}e_{i+1}i e_{i+1}i = e_{ii}(e_{i+1}e_{i+1}i + e_{i+1}i e_{i+1}i) = e_{ii}(e_{i+1} + e_{i+1}i) = e_{ii}.$$

Todos os monômios de grau 1 de $S_1(\mathcal{J})$ estão em $\langle \Omega \rangle$. Também do Lema 4.3.4 segue que para $i \neq j$

$$e_{ii}e_{ij}e_{ji} = e_{ii+1}e_{i+1j}e_{ji} = e_{ii+1}e_{i+1i+1}e_{i+1i} = e_{ii}e_{ii+1}e_{i+1i},$$

e $e_{ii}e_{ij}e_{ji}$, $e_{ii}e_{ji}e_{ij}$ estão em $\langle \Omega \rangle$.

Agora somando todos os lemas anteriores temos que os monômios restantes não nulos de grau 2 em $S(\mathcal{J})$ são $e_{ij}e_{ji}$'s. Mas

$$e_{ij}e_{ji} = (e_{ii} + e_{jj})e_{ij}e_{ji} = e_{ii}e_{ij}e_{ji} + e_{jj}e_{ij}e_{ji} = e_{ii}e_{ii+1}e_{i+1i} + e_{ii}e_{i+1i}e_{ii+1}$$

e portanto todos os monômios de grau 2 de $S_1(\mathcal{J})$ também estão em $\langle \Omega \rangle$. Finalmente, é fácil verificar que os monômios não nulos de grau maior que 2 em $S_1(\mathcal{J})$ podem ser escritos da seguinte forma : $p = e_{i_0 i_0}^t e_{i_0 i_1} e_{i_1 i_2} \dots e_{i_k i_{k+1}}$, com $i_j \in \{1, \dots, n\}$ e $t = 0, 1$. Então ou $p = e_{ii}e_{ij}e_{ji}$ ou $p = e_{ii}e_{ij}$. Além disso, denotando $E_{ij} = e_{ii}e_{ij}$ para $i \neq j$, $E_{ii} = e_{ii}e_{ii+1}e_{i+1i}$ e $\tilde{E}_{ij} = e_{ij}e_{ii}$ para $i \neq j$ e $\tilde{E}_{ii} = e_{ii}e_{i+1i}e_{ii+1}$ temos $\langle E_{ij} \mid i, j = 1 \dots, n \rangle \simeq \langle \tilde{E}_{ij} \mid i, j = 1 \dots, n \rangle \simeq M_n(\mathbb{C})$. $\square$

4.3.2 A álgebra envolvente universal especial unital para $\mathcal{J} = H(M_n(\mathbb{C}), tr)$

Como no caso anterior essa álgebra de Jordan possui identidade, assim novamente restringimos ao caso da álgebra envolvente universal especial unital $S_1(\mathcal{J})$. Seja $\tilde{e}_{ij} = e_{ij} + e_{ji}$ para $i, j = 1, \dots, n$, então temos a base para $\mathcal{J}$: $e_{ii}, \tilde{e}_{ij}$ com $i, j = 1, \dots, n$ e $i < j$.

Observação 4.3.8. Pelos lemas 4.3.1-4.3.6 segue que:

$$\begin{aligned} e_{ii}^2 &= e_{ii}, \\ e_{ii}e_{jj} &= 0, \\ \tilde{e}_{ik}\tilde{e}_{lj} &= 0, \\ e_{ii}\tilde{e}_{ij} &= \tilde{e}_{ij}e_{jj}, \\ e_{jj}\tilde{e}_{ij} &= \tilde{e}_{ij}e_{ii}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

para $i \neq j$, $k \neq l$, $k \neq j$.

Logo temos a seguinte proposição

Proposição 4.3.9. *O conjunto*

$$\tilde{\Omega} = \{e_{ii}\tilde{e}_{ij}, \tilde{e}_{ij}e_{ii}, e_{ii} \mid i < j, i, j = 1, \dots, n\}$$

gera $S_1(\mathcal{J})$. Em particular, obtemos o teorema de Martindale para $\mathcal{J} = H(M_n(\mathbb{C}), tr)$ que diz que $S_1(\mathcal{J}) = M_n(\mathbb{C})$.

Demonstração. Primeiramente, observamos que como ambos $e_{ii}\tilde{e}_{ij}$ e $\tilde{e}_{ij}e_{ii}$ estão em $\tilde{\Omega}$ temos também que e_{ij} para $i < j$ estão em $\langle \tilde{\Omega} \rangle$. Portanto, obtemos que todos os monômios de grau 1 de $S_1(\mathcal{J})$ estão em $\langle \tilde{\Omega} \rangle$. Por (4.7) segue que todos os monômios de grau 2 de S_1 podem ser escritos como: $e_{ii}\tilde{e}_{ij}$, $\tilde{e}_{ij}e_{ii}$, $\tilde{e}_{ij}\tilde{e}_{jk}$ e $\tilde{e}_{ij}\tilde{e}_{ij}$ para $i < j < k$. Começamos com (4.1) para $a = b = \tilde{e}_{ij}$:

$$\tilde{e}_{ij}\tilde{e}_{ij} = e_{ii} + e_{jj},$$

portanto $\tilde{e}_{ij}\tilde{e}_{ij}$ também pertence a $\langle \tilde{\Omega} \rangle$. Continuamos com (4.1) para $\tilde{e}_{ij}$, $\tilde{e}_{jk}$:

$$\tilde{e}_{ij}\tilde{e}_{jk} + \tilde{e}_{jk}\tilde{e}_{ij} = \tilde{e}_{ik}.$$

Multiplicando esta equação por e_{ii} à esquerda e por e_{jj} à direita obtemos:

$$e_{ii}\tilde{e}_{ij}\tilde{e}_{jk}e_{kk} = e_{ii}\tilde{e}_{ik}e_{kk}.$$

Como no lema 4.3.4:

$$\tilde{e}_{ij}\tilde{e}_{jk} = e_{ii}\tilde{e}_{ij}\tilde{e}_{jk}e_{kk} = e_{ii}\tilde{e}_{ik}e_{kk} = e_{ii}\tilde{e}_{ik}.$$

Então demostramos que todos os monômios de grau 2 de $S_1(\mathcal{J})$ estão em $\langle \tilde{\Omega} \rangle$. Agora é fácil verificar que qualquer monômio de grau 3 é ou 0 ou pertence a $\langle \tilde{\Omega} \rangle$. $\square$

4.4 Quiver da álgebra envolvente universal especial

Nessa seção demostramos alguns resultados técnicos que serão usados na construção do quiver para álgebras de Jordan. A partir de agora consideramos somente álgebras de

Jordan $\mathcal{J}$ complexas finitamente geradas, cuja parte semi-simble J_{ss} é uma soma direta de álgebras de Jordan simples: $\mathbb{C}$, $M_n(\mathbb{C})^+$ e $H(M_n(\mathbb{C}), tr)$. Vamos dizer que tal álgebra J_{ss} é do tipo das matrizes. Além disso restringimo-nos somente às álgebras cujos $\text{Rad}^2 \mathcal{J} = 0$. Neste caso podemos pensar na álgebra $\mathcal{J}$ como uma extensão nula de J_{ss} pela ação de J_{ss} no bimódulo de Jordan $M = \text{Rad } \mathcal{J}$. Como a multiplicação em $\text{Rad } \mathcal{J}$ é nulo qualquer álgebra desse tipo pode ser obtida se nós consideramos a extensão nula de J_{ss} por qualquer bimódulo de Jordan. Novamente, o teorema de Krull-Schmidt reduz o problema ao bimódulos indecomponíveis. Além disso, em [14] Jacobson demonstrou que, para qualquer álgebra simples de dimensão finita qualquer todo bimódulo indecomponível é irredutível. Ele também classificou todos os bimódulos indecomponíveis no caso de álgebras de Jordan semi-simples de dimensão finita. Nessa seção consideramos as álgebras de Jordan, cujas partes semi-simples são álgebras de tipo das matrizes e $\text{Rad } \mathcal{J}$ é soma direta dos bimódulos indecomponíveis.

Primeiro começamos com os seguintes lemas técnicos.

Lema 4.4.1. *Seja $\mathcal{J}$ uma álgebra de Jordan sem unidade. Consideramos a álgebra $\tilde{\mathcal{J}} = \mathbb{C}1 \oplus \mathcal{J}$, onde a multiplicação entre os elementos de $\mathcal{J}$ permanece a mesma e para qualquer $x \in \mathcal{J}$, $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$. Então $\tilde{\mathcal{J}}$ é uma álgebra de Jordan com unidade 1. Em particular, $S(\mathcal{J}) \simeq S_1(\tilde{\mathcal{J}})$ e $Q(\tilde{\mathcal{J}})$ é uma união de $Q(\mathcal{J})$ e de um ponto.*

Demonstração. É obvio que $\tilde{\mathcal{J}}$ é uma álgebra de Jordan com unidade. Então $S(\tilde{\mathcal{J}}) = \mathbb{C}z \oplus S_1(\tilde{\mathcal{J}})$ com $z = 1_S - \sigma_u(1)$ e $S_1(\tilde{\mathcal{J}})$ é a subálgebra de $S(\tilde{\mathcal{J}})$ gerada por $\sigma_u(\tilde{\mathcal{J}})$. Em particular, em $S_1(\tilde{\mathcal{J}})$, $1_S = \sigma_u(1)$ e isto termina a demonstração. $\square$

Portanto é basta considerar somente as álgebras de Jordan com unidade. Mas, como $1 \in J$ nós temos que $S(\mathcal{J}) = \mathbb{C} \oplus S_1(\mathcal{J})$ e agora podemos considerar somente $S_1(\mathcal{J})$.

Lema 4.4.2. *Seja $e_1, \dots, e_n$ um sistema de idempotentes ortogonais em $\mathcal{J}$. Então as imagens destes idempotentes através da especialização associativa é um sistema ortogonal de idempotentes em $S_1(\mathcal{J})$. Além disso, suponhamos que $r \in \text{Rad}(\mathcal{J})$ e $e \cdot r = 0$ (ou $e \cdot r = r$) então $er = re = 0$ ($er = re = r$) em $S_1(\mathcal{J})$. (Aqui nós denotamos a multiplicação de Jordan por $x \cdot y$ e a multiplicação na álgebra associativa $S_1(\mathcal{J})$ por xy .)*

Demonstração. A primeira parte segue imediatamente do lema 4.3.1, onde nós mostramos

que $e_i^2 = e_i$ e $e_i e_j = 0$ no caso $e_i \cdot e_i = e_i$ e $e_i \cdot e_j = 0$, $j \neq i$. Para demonstrar a segunda parte escrevemos (4.1) para e e v

$$ev + ve = 0 \quad (ev + ve = 2v).$$

Multiplicando essa equação por e à esquerda e depois independentemente por e à direita obtemos que $ev = -eve = ve$ e portanto $ev = ve = 0$ ($ev = ve = v$). $\square$

Teorema 4.4.3. [51] *Seja $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{ss} \oplus \text{Rad } \mathcal{J}$. Então $(S_1(\mathcal{J}))_{ss} = S_1(\mathcal{J}_{ss})$.*

Recordemos que $Q_0(\mathcal{J})$ denota o conjunto de vértices do quiver $Q(\mathcal{J}) = Q(S_1(\mathcal{J}))$ e $Q_1(\mathcal{J})$ o conjunto de arestas de $Q(\mathcal{J})$.

Lema 4.4.4. *Seja $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{ss} \oplus V_1 \oplus V_2$ uma extensão nula de $\mathcal{J}_{ss}$ por $V_1 \oplus V_2$, onde V_1, V_2 são módulos sobre $\mathcal{J}_{ss}$. Então, temos que $Q_0(\mathcal{J}) = Q_0(\mathcal{J}_{ss})$ e $Q_1(\mathcal{J}) = Q_1(\mathcal{J}_1) \cup Q_1(\mathcal{J}_2)$, com $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_{ss} \oplus V_1$ e $\mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_{ss} \oplus V_2$.*

Demonstração. Pelo teorema anterior, sabemos que $(S_1(\mathcal{J}))_{ss} = S_1(\mathcal{J}_{ss})$ e como $Q_0(\mathcal{J})$ é definido por $\mathcal{J}_{ss}$ temos que $Q_0(\mathcal{J}) = Q_0(\mathcal{J}_{ss})$.

Os espaços V_1 e V_2 são módulos sobre $\mathcal{J}_{ss}$ e também ideais em $\mathcal{J}$. Então para qualquer álgebra associativa A e qualquer ideal $I \subset A$ temos que $\text{Rad } A/I = \text{Rad } A/(I \cap \text{Rad } A)$. Do teorema anterior deduzimos que $(S_1(\mathcal{J}))_{ss} = S_1(\mathcal{J}_{ss})$ e então $\text{Rad } S_1(\mathcal{J})$ é gerado por monômios em $S_1(\mathcal{J})$ com pelo menos um $v \in \{V_1 \cup V_2\}$. Isto significa que

$$\text{Rad } S_1(\mathcal{J}) = \langle \text{monômios em } T(\mathcal{J}) \text{ com pelo menos um } v \rangle / R_S^1.$$

Obtemos

$$\begin{aligned} \text{Rad}(T(\mathcal{J})/R_S^1)/(\text{Rad}^2(T(\mathcal{J})/R_S^1)) = \\ (\text{Rad } T(\mathcal{J})/R_S^1 \cap \text{Rad } T(\mathcal{J})) / (\text{Rad}^2 T(\mathcal{J})/R_S^1 \cap \text{Rad}^2 T(\mathcal{J})). \end{aligned}$$

Assim, $R_S^1 \cap \text{Rad } T(\mathcal{J})$ é gerado pelas seguintes relações:

$$1v_1 + v_11 = v_1, \quad sv_1 + v_1s = v_1 \cdot s, \quad (4.8)$$

$$1v_2 + v_21 = v_2, \quad sv_2 + v_2s = v_2 \cdot s, \quad (4.9)$$

$$v_1 v'_1 + v'_1 v_1 = 0, \quad v_1 v_2 + v_2 v_1 = 0, \quad v_2 v'_2 + v'_2 v_2 = 0, \quad (4.10)$$

com $v_i, v'_i \in V_i$, $s \in \mathcal{J}_{ss}$. Por outro lado, $R_S^1 \cap \text{Rad}^2 T(\mathcal{J})$ é gerado por (4.10). Então temos que

$$\text{Rad}(T(\mathcal{J})/R_S^1)/(\text{Rad}^2(T(\mathcal{J})/R_S^1)) = \text{Mon}_v/I,$$

onde $v \in \{V_1 \cup V_2\}$, I é gerado pelas relações (4.8) e (4.9) e

$$\text{Mon}_v = \langle \text{monômios em } T(\mathcal{J}) \text{ com um único } v \rangle$$

como espaço vetorial. Mas,

$$\text{Mon}_v/I = \text{Mon}_{v_1}/I_1 \oplus \text{Mon}_{v_2}/I_2,$$

onde $\text{Mon}_{v_i} = \langle \text{monômios in } T(\mathcal{J}) \text{ com um só } v_i \rangle$, $v_i \in V_i$, I_1 é gerado por (4.8) e I_2 é gerado por (4.9). Então segue que

$$\begin{aligned} \text{Rad}(T(\mathcal{J})/R_S^1)/(\text{Rad}^2(T(\mathcal{J})/R_S^1)) = \\ \text{Rad}(T(\mathcal{J}_1)/R_S^1)/(\text{Rad}^2(T(\mathcal{J}_1)/R_S^1)) \oplus \text{Rad}(T(\mathcal{J}_2)/R_S^1)/(\text{Rad}^2(T(\mathcal{J}_2)/R_S^1)) \end{aligned}$$

e finalmente $Q_1(\mathcal{J}) = Q_1(\mathcal{J}_1) \cup Q_1(\mathcal{J}_2)$. $\square$

Corolário 4.4.5. *Seja $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2 \oplus \text{Rad}(\mathcal{J})$, onde $\text{Rad}^2 \mathcal{J} = 0$, $\mathcal{J}_i$ é um ideal em $\mathcal{J}_{ss}$, $\mathcal{J}_{ss} = \mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2$ e $\mathcal{J}_1$ age trivialmente em $\text{Rad} \mathcal{J}$, então $S_1(\mathcal{J}) = S_1(\mathcal{J}_1) \oplus S_1(\mathcal{J}_2 \oplus \text{Rad} \mathcal{J})$.*

4.5 Álgebras de Jordan com parte semi-simples $\mathbb{C} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}$

Nessa seção consideramos todas as álgebras $\mathcal{J}$ tais que $\mathcal{J}$ é uma extensão nula de $\mathcal{J}_{ss} = \mathbb{C} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}$ definida pela ação de $\mathcal{J}_{ss}$ no $\mathcal{J}_{ss}$ -bimódulo M . Começamos com bimódulos irredutíveis. No caso de $\mathcal{J}_{ss} = \mathbb{C}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}e_n$ existem salvo isomorfismo dois (bi)módulos irredutíveis de Jordan:

1. $V_i = \langle v_i \rangle$, com $e_i v_i = v_i$, $e_j v_j = 0$ se $i \neq j$;

2. $V_{ij} = \langle v_{ij} \rangle$ com $e_i v_{ij} = e_j v_{ij} = \frac{1}{2} v_{ij}$ e $e_k v_{ij} = 0$, $j \neq k \neq i$.

1. $\tilde{\mathcal{J}}_1 = \mathbb{C}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}e_n \oplus V_i$. Pelo corolário 4.4.5 segue que $S(\tilde{\mathcal{J}}) = \mathbb{C} \oplus (\mathbb{C}e_1 \oplus \cdots \mathbb{C}e_{i-1} \oplus \mathbb{C}e_{i+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}e_n) \oplus S_1(\mathbb{C}e_i \oplus V_i)$. Assim o tipo de representação é determinado por $S_1(\mathcal{J}_1)$, com $\mathcal{J}_1 = \mathbb{C}e_i \oplus V_i$. Como a parte semi-simples de $S_1(\mathcal{J}_1)$ é $\mathbb{C}$ então $Q_0(S_1(\mathcal{J}_1)) = \{e_i\}$. Seja $e = e_i$ e $v = v_i$. Pelo lema 4.4.2 já sabemos que $e^2 = e$ e $ev = ve = v$ e portanto $\text{Rad}\mathcal{J}_1/\text{Rad}^2\mathcal{J}_1$ é gerado por $v = eve$. De (4.1) obtemos que $v^2 = 0$ o que implica $\text{Rad}^2\mathcal{J}_1 = 0$. Finalmente, temos o quiver de $S_1(\mathcal{J}_1)$:

com $x^2 = 0$. De [47] segue que $S(\mathcal{J}_1)$ é uma álgebra de tipo finito e esse é também o tipo da álgebra $S(\mathbb{C}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}e_n \oplus V_i)$ e o s-tipo de representação de $\mathcal{J}_1$ e $\tilde{\mathcal{J}}_1$ é finito.

2. $\tilde{\mathcal{J}}_2 = \mathbb{C}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}e_n \oplus V_{ij}$. Novamente, do corolário 4.4.5 temos que $S(\tilde{\mathcal{J}}_2) = \mathcal{J}_0 \oplus S_1(\mathbb{C}e_i \oplus \mathbb{C}e_j \oplus V_{ij})$, onde $\mathcal{J}_0$ é uma soma direta de $n-1$ cópias de $\mathbb{C}$. Consideramos $S_1(\mathcal{J}_2)$ para álgebra $\mathcal{J}_2 = \mathbb{C}e_i \oplus \mathbb{C}e_j \oplus V_{ij}$. A parte semi-simples de $S_1(\mathcal{J}_2)$ é $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ e portanto $Q_0(\mathcal{J}_2) = \{e_i, e_j\}$. Seja $v = v_{ij}$, então de (4.1) para e_i , v e e_j , v temos:

$$e_i v + v e_i = v$$

$$e_j v + v e_j = v$$

Multiplicando a primeira igualdade por e_j à esquerda e segunda igualdade por e_i à direita temos $e_j v = e_j v e_i = v e_i$. Analogamente, obtemos que $e_i v = v e_j$. Então temos que $v = e_i v e_j + e_j v e_i$, $e_i v e_j$, e $e_j v e_i$ geram $\text{Rad}\mathcal{J}_2/\text{Rad}^2\mathcal{J}_2$ e como $v^2 = 0$ temos que $\text{Rad}^2\mathcal{J}_2 = 0$ e o quiver de $S_1(\mathcal{J}_2)$:

com $xy = yx = 0$. Novamente, de [50] obtemos uma álgebra associativa de tipo finito e tanto $\mathcal{J}_2$ como $\tilde{\mathcal{J}}_2$ têm s-tipo finito.

Agora, consideramos todas as álgebras de Jordan tais que $\text{Rad}\mathcal{J} = \bigoplus_{k=1}^p V_{i_k}^{m_k} \oplus \bigoplus_{k=1}^s V_{j_k l_k}^{n_k}$, com $i_k, j_k, l_k \in \{1, \dots, n\}$ e m_k, n_k são inteiros não-negativos.

3. $\tilde{\mathcal{J}}_3 = \mathbb{C}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}e_n \oplus V_i \oplus V_j$. Primeiro, se $i \neq j$ temos que $S(\tilde{\mathcal{J}}_3) = \mathcal{J}_0 \oplus S_1(\mathcal{J}_1) \oplus S_1(\mathcal{J}'_1)$, onde $\mathcal{J}_0$ é soma direta de $n-1$ cópias de $\mathbb{C}$ e $\mathcal{J}'_1 = \mathbb{C}e_j \oplus V_j$. Portanto o quiver para $S_1(\mathcal{J}_3)$ é a união de $n-1$ pontos juntamente com duas cópias de $Q(S_1(\mathcal{J}_1))$. Nesse

caso o s-tipo de $\tilde{\mathcal{J}}_3$ é finito. Se $i = j$ então temos que $S(\tilde{\mathcal{J}}_3) = \mathcal{J}_0 \oplus \mathbb{C} \oplus S_1(\mathcal{J}_3)$, com $\mathcal{J}_3 = \mathbb{C}e_i \oplus V'_i \oplus V_i$. Definimos $v = v_i$ e $u = v'_i$. Nós já sabemos que a parte semi-simples de $S_1(\mathcal{J}_3)$ é $\mathbb{C}$, então $Q_0(S_1(\mathcal{J}_3))$ consiste de um ponto. logo, do lema 4.4.4 segue que $Q_1(S_1(\mathcal{J}_3)) = Q_1(S_1(\mathcal{J}_1)) \cup Q_1(S_1(\mathcal{J}_1))$. Além disso, de (4.1) para u e v obtemos que $vu + uv = 0$ e essa relação é o único elemento não nulo em $\text{Rad}^2 S_1(\mathcal{J}_3)$. Portanto, obtemos o seguinte quiver para $S_1(\mathcal{J}_3)$:

onde $xy + yx = x^2 = y^2 = 0$. De [46] obtemos que $S_1(\mathcal{J}_3)$ é uma álgebra associativa do tipo manso. Logo, $S_1(\tilde{\mathcal{J}}_3)$ tem tipo manso e $\tilde{\mathcal{J}}_3$ juntamente com $\mathcal{J}_3$ têm tipo s-manso.

4. $\mathcal{J}_4 = \mathbb{C}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}e_n \oplus V_i \oplus V_j \oplus V_k$. Se pelo menos dois índices i, j, k são distintos temos que $S_1(\mathcal{J}_4)$ é uma soma direta de cópias de $\mathbb{C}$, $S_1(\mathcal{J}_1)$ e $S_1(\mathcal{J}_3)$ e é portanto ou de tipo finito ou de tipo manso.

Se $i = j = k$ pelo Lema 4.4.4 temos três arestas que começam e terminam no ponto e_i e portanto $S_1(\mathcal{J}_4)$ é de tipo selvagem.

5. $\tilde{\mathcal{J}}_5 = \mathbb{C}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}e_n \oplus V_{i_1 j_1} \oplus V_{i_2 j_2}$. Primeiramente, se os índices i_1, j_1, i_2 , e j_2 são todos distintos temos que $S(\tilde{\mathcal{J}}_5) = \mathcal{J}_0 \oplus S_1(\mathcal{J}_2) \oplus S_1(\mathcal{J}'_2)$, onde $\mathcal{J}_0$ é soma direta de $n - 3$ cópias de $\mathbb{C}$ e $\mathcal{J}'_2 = \mathbb{C}e_j \oplus V_j$. Portanto, o quiver para $S_1(\tilde{\mathcal{J}}_5)$ é a união de $n - 3$ pontos juntamente com duas cópias de $Q(S_1(\mathcal{J}_2))$.

Sejam $i_1 = i_2$ e $j_1 = j_2$, então temos $S(\tilde{\mathcal{J}}_5) = \mathcal{J}_0 \oplus \mathbb{C} \oplus S_1(\mathcal{J}_5)$, onde $\mathcal{J}_5 = \mathbb{C}e_i \oplus \mathbb{C}e_j \oplus V'_{ij} \oplus V_{ij}$. Denotamos por $v = v_{ij}$ e $u = v'_{ij}$. Se a parte semi-simples de $S_1(\mathcal{J}_5)$ é $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ então $Q_0(S_1(\mathcal{J}_5))$ consiste de dois pontos. Pelo lema 4.4.4 temos que $Q_1(S_1(\mathcal{J}_5)) = Q_1(S_1(\mathcal{J}_2)) \cup Q_1(S_1(\mathcal{J}'_2))$. Além disso, usando (4.1) para u e v obtemos $vu + uv = 0$. Então vu , e uv são os únicos elementos não nulos em $\text{Rad}^2 S_1(\mathcal{J}_5)$. Portanto, obtemos o seguinte quiver para $S_1(\mathcal{J}_5)$:

com $x_i y_i = y_i x_i = x_1 y_2 + x_2 y_1 = y_2 x_1 + y_1 x_2 = 0$. De [46] segue que $S_1(\mathcal{J}_5)$ é uma álgebra associativa de tipo manso e portanto $\mathcal{J}_5$ tem tipo s-manso.

Finalmente, o único caso restante é quando $i_1 = i_2$ e $j_1 \neq j_2$. Consideramos $i_1 = i$, $j_1 = j$ e $j_2 = k$. Então $S(\tilde{\mathcal{J}}_5) = \mathcal{J}_0 \oplus S_1(\check{\mathcal{J}}_5)$, onde $\mathcal{J}_0$ é uma soma direta de $n - 2$ cópias de $\mathbb{C}$ e

$$\check{\mathcal{J}}_5 = \mathbb{C}e_i \oplus \mathbb{C}e_j \oplus \mathbb{C}e_k \oplus V_{ij} \oplus V_{ik}.$$

Se a parte semi-simples de $S_1(\check{\mathcal{J}}_5)$ é $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ então $Q_0(S_1(\check{\mathcal{J}}_5))$ consiste de três pontos. Portanto do Lemma 4.4.4 temos que $Q_1(S_1(\check{\mathcal{J}}_5)) = Q_1(S_1(\mathcal{J}_2)) \cup Q_1(S_1(\mathcal{J}'_2))$. Além disso, por (4.1) para $\langle u \rangle = V_{ij}$ e $\langle v \rangle = V_{ik}$ temos que $vu + uv = 0$ e então obtemos o seguinte quiver para $S_1(\check{\mathcal{J}}_5)$:

onde $x_2 y_2 = y_1 x_1 = x_1 y_1 + y_2 x_2 = 0$. Este quiver representa o famoso problema de Gelfand e obtemos que $S_1(\check{\mathcal{J}}_5)$ é uma álgebra associativa de tipo manso, portanto os dois $\check{\mathcal{J}}_5$ e $\tilde{\mathcal{J}}_5$ têm tipo s-manso.

6. $\mathcal{J}_6 = \mathbb{C}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}e_n \oplus V_{i_1 j_1} \oplus V_{i_2 j_2} \oplus V_{i_3 j_2}$. Primeiramente, se todos os índices i_k, j_k são distintos temos que $S_1(\mathcal{J}_6)$ é uma soma direta de cópias de $\mathbb{C}$ e $S_1(\mathcal{J}_2)$ e portanto é de tipo finito.

Suponhamos que temos ou todos i_k 's iguais ou que existe pelo menos dois pares tais que $\mathcal{J}_k = i_p$ ou $i_k = i_p$ para quaisquer $k, p = 1, 2, 3$, $k \neq p$, pelo lema 4.4.4 temos imediatamente que $S_1(\mathcal{J}_6)$ nesse caso é de tipos-selvagem.

Finalmente, nos demais casos é fácil ver que $S(\mathcal{J}_6)$ é uma soma direta de $\mathcal{J}_0$, $S_1(\mathcal{J}_5)$ e (ou) $S_1(\check{\mathcal{J}}_5)$ e (ou) $S_1(\mathcal{J}_2)$.

Em todos os casos acima temos que ou $S_1(\mathcal{J}_6)$ é de tiposelvagem ou $\mathcal{J}_6$ é a soma direta das álgebras $\mathbb{C}$, $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_5$ e $\check{\mathcal{J}}_5$.

7. $\tilde{\mathcal{J}}_7 = \mathbb{C}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}e_n \oplus V_{ij} \oplus V_k$. Observamos que quando $k \neq i$ e $k \neq j$ concluímos imediatamente que $S(\tilde{\mathcal{J}}_7)$ é a soma direta de $n - 2$ cópias de $\mathbb{C}$, $S_1(\mathcal{J}_1)$ e $S_1(\mathcal{J}_2)$ e é portanto de tipo finito.

Agora suponhamos que $k = i$. Então $S(\tilde{\mathcal{J}}_7) = \mathcal{J}_0 \oplus S_1(\mathcal{J}_7)$, onde $\mathcal{J}_0$ é a soma direta de $n - 1$ cópias de $\mathbb{C}$ e $\mathcal{J}_7 = \mathbb{C}e_i \oplus \mathbb{C}e_j \oplus V_{ij} \oplus V_i$. Sejam $\langle v \rangle = V_i$ e $\langle u \rangle = V_{ij}$. Então $Q_0(S_1(\mathcal{J}_7))$ consiste de dois pontos e do lema 4.4.4 segue que $Q_1(S_1(\mathcal{J}_7)) = Q_1(S_1(\mathcal{J}_1)) \cup Q_1(S_1(\mathcal{J}_2))$. Finalmente, da relação (4.1) para v, u obtemos que $uv + vu = 0$ e portanto temos o seguinte quiver:

com $xy = yx = zx = yz = z^2 = 0$. Então $S_1(\mathcal{J}_7)$ é uma álgebra associativa de tipo finito e portanto $\mathcal{J}_7$ é de tipos-finito.

8. $\tilde{\mathcal{J}}_8 = \mathbb{C}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}e_n \oplus V_{ij} \oplus V_k \oplus V_l$. Observamos que os dois únicos casos em que $\tilde{\mathcal{J}}_8$ não pode ser escrito como soma direta de $\mathbb{C}$, $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ ou $\mathcal{J}_7$ são, sem perda de generalidade, quando $i = k$ e $j = l$ ou $i = k = l$. Então restringimo-nos à esses casos. Seja $i = k = l$, então temos que $S(\tilde{\mathcal{J}}_8) = \mathcal{J}_0 \oplus S_1(\tilde{\mathcal{J}}_8)$, onde $\mathcal{J}_0$ é soma direta de $n - 1$ cópias de $\mathbb{C}$ e $\tilde{\mathcal{J}}_8 = \mathbb{C}e_i \oplus \mathbb{C}e_j \oplus V_{ij} \oplus V_i^2$. Analogamente ao caso $\mathcal{J}_4$ do lema 4.4.4 segue que $S_1(\tilde{\mathcal{J}}_8)$ é de tiposelvagem (visto que temos três arestas partindo de um ponto e duas delas terminam nesse mesmo ponto).

Sejam $i = k$ e $j = l$, então $S(\tilde{\mathcal{J}}_8) = \mathcal{J}_0 \oplus S_1(\mathcal{J}_8)$, onde $\mathcal{J}_0$ é a soma direta de $n - 1$ cópias de $\mathbb{C}$ e $\mathcal{J}_8 = \mathbb{C}e_i \oplus \mathbb{C}e_j \oplus V_{ij} \oplus V_i \oplus V_j$. Sejam $\langle v \rangle = V_i$ e $\langle u \rangle = V_{ij}$. Então $Q_0(S_1(\mathcal{J}_8))$ consiste de dois pontos e do Lema 4.4.4 segue que $Q_1(S_1(\mathcal{J}_8)) = Q_1(S_1(\mathcal{J}_1)) \cup Q_1(S_1(\mathcal{J}'_1)) \cup Q_1(S_1(\mathcal{J}_2))$. Portanto temos o seguinte quiver:

onde $xy = yx = zx = yz = xw = wy = w^2 = z^2 = 0$. De [46] segue que $S_1(\mathcal{J}_8)$ é uma álgebra associativa de tipo manso e $\mathcal{J}_8$ e $\tilde{\mathcal{J}}_8$ são de tipos-manso.

Qualquer outra álgebra $\mathcal{J}$ com parte semi-simples $\mathbb{C} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}$ e $\text{Rad } \mathcal{J} = \bigoplus_{k=1}^p V_{i_k}^{m_k} \oplus \bigoplus_{k=1}^s V_{j_k l_k}^{n_k}$ é ou uma soma de álgebras consideradas acima ou $S(\mathcal{J})$ é de tiposelvagem.

Combinamos todos os calculos nós obtemos

Teorema 4.5.1. *Seja $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \oplus V$, onde $\mathcal{J}_0 = \mathbb{C} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}$ e V é um bimódulo de Jordan sobre $\mathcal{J}_0$. Então temos as seguintes possibilidades:*

- $\mathcal{J}$ tem um tipo s-finito de representação se e somente se $\mathcal{J}$ é uma soma direta das seguintes álgebras: $\mathcal{J}_0$, $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ e $\mathcal{J}_7$.
- $\mathcal{J}$ tem um tipo de representação s-manso se e somente se $\mathcal{J}$ é uma soma direta das seguintes álgebras: $\mathcal{J}_3$, $\mathcal{J}_5$, $\tilde{\mathcal{J}}_5$, $\mathcal{J}_8$ e alguns álgebras de tipo finito.

- Em todos os outros casos $\mathcal{J}$ é de tipos-selvagem. Em particular, todos as álgebras de tipos-selvagem são também de tiposelvagem, visto que $U(\mathcal{J})$ tem tipo selvagem.

4.6 Álgebras de Jordan com $\mathcal{J}_{ss} = M_2(\mathbb{C})^+ \oplus \cdots \oplus M_2(\mathbb{C})^+$

Seja $\mathcal{J}_0 = M_2^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \cdots \oplus M_2^{(k)}(\mathbb{C})^+$ uma álgebra de Jordan semi-simples com base $\{e_{pq}^s \in M_2^{(s)}(\mathbb{C})^+ \mid p, q = 1, 2, s = 1, \dots, k\}$. Para $\mathcal{J}_0$ temos quatro bimódulos unitais irredutíveis não-isomorfos (veja [52]):

- bimódulo de dimensão um, $M_s = \langle m \rangle$, com ação dada por

$$m \cdot M_2^{(j)}(\mathbb{C})^+ = 0, \quad m \cdot e_{pp}^{(s)} = \frac{1}{2}m, \quad m \cdot e_{pq}^{(s)} = 0,$$

onde $s \neq j$ e $p \neq q$.

- bimódulo de dimensão quatro, $R_s = \text{Reg } M_2^{(s)}(\mathbb{C})^+$, onde para quaisquer $r \in R_s$ e $e_{pq} \in M_2^{(j)}(\mathbb{C})^+$ temos que $e_{pq} \cdot r = 0$ se $j \neq s$.
- bimódulo de dimesão três $N_s = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle$ com ação:

$$\begin{aligned} n_p \cdot M_2^{(j)}(\mathbb{C})^+ &= 0, \\ n_1 \cdot e_{11}^{(s)} &= n_1 \cdot e_{22}^{(s)} = n_2 \cdot e_{12}^{(s)} = -n_2 \cdot e_{21}^{(s)} \\ &= -n_3 \cdot e_{12}^{(s)} = -n_3 \cdot e_{21}^{(s)} = \frac{1}{2}n_1, \\ -n_1 \cdot e_{12}^{(s)} &= n_2 \cdot e_{11}^{(s)} = n_3 \cdot e_{11}^{(s)} = \frac{1}{2}(n_2 + n_3), \\ n_1 \cdot e_{21}^{(s)} &= n_2 \cdot e_{22}^{(s)} = -n_3 \cdot e_{22}^{(s)} = \frac{1}{2}(n_2 - n_3) \end{aligned}$$

onde $j \neq s$ e $p = 1, 2, 3$.

- bimódulo de dimensão três $N'_i = \langle n'_1, n'_2, n'_3 \rangle$ com ação:

$$\begin{aligned} n'_p \cdot M_2^{(j)}(\mathbb{C})^+ &= 0, \\ n'_1 \cdot e_{11}^{(s)} &= n'_1 \cdot e_{22}^{(s)} = -n'_2 \cdot e_{12}^{(s)} = n'_2 \cdot e_{21}^{(s)} \\ &= n'_3 \cdot e_{12}^{(s)} = n'_3 \cdot e_{21}^{(s)} = \frac{1}{2}n'_1, \\ n'_1 \cdot e_{12}^{(s)} &= n'_2 \cdot e_{22}^{(s)} = n'_3 \cdot e_{22}^{(s)} = \frac{1}{2}(n'_2 + n'_3), \\ n'_1 \cdot e_{21}^{(s)} &= -n'_2 \cdot e_{11}^{(s)} = n'_3 \cdot e_{11}^{(s)} = \frac{1}{2}(n'_2 - n'_3). \end{aligned}$$

$j \neq s$, $p = 1, 2, 3$.

1. $\tilde{\mathcal{J}}_9 = M_2^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \cdots \oplus M_2^{(k)}(\mathbb{C})^+ \oplus M_s$. Do corolário 4.4.5 segue que $S(\mathcal{J}_9) = \mathcal{J}_0 \oplus S_1(\hat{\mathcal{J}}_9)$, onde $\mathcal{J}_0$ é uma soma direta de $n-1$ cópias de $M_2(\mathbb{C})$ e $\hat{\mathcal{J}}_9 = M_2^{(s)}(\mathbb{C})^+ \oplus M_s$. Então o tipo de representação de $S_1(\mathcal{J}_9)$ é o mesmo como de $S_1(\hat{\mathcal{J}}_9)$. Por simplicidade denotamos por $e_{pq} = e_{pq}^{(s)}$. Além disso, analogamente a proposição 4.3.7 temos que $(\mathcal{J}_9)_{ss} = M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C})$. Agora, pelo teorema 1.3.4 obtemos que $S_1(\hat{\mathcal{J}}_9)$ é Morita equivalente à $A_9 = e_{11}S_1(\hat{\mathcal{J}}_9)e_{11}$, onde $e_{11} = E_1 + E_2$ é a soma de dois idempotentes ortogonais primitivos $E_1 = e_{11}e_{12}e_{21}$ e $E_2 = e_{11}e_{21}e_{12}$. Portanto, $Q_0(A_9) = \{E_1, E_2\}$. De (4.1) para e_{11}, m e e_{22}, m temos:

$$e_{11}m + me_{11} = m,$$

$$e_{22}m + me_{22} = m$$

e obtemos que $e_{11}m = me_{22}$ e $e_{22}m = me_{11}$. Em particular, temos que $e_{11}me_{11} = 0$. Usando isto concluímos que $\text{Rad}A_9/\text{Rad}^2A_9$ é gerado por $e_{12}m$ e $e_{21}m$. Além disso, temos que $E_2e_{12}m = E_1e_{21}m = e_{12}mE_1 = e_{21}mE_2 = 0$. Por (4.1) segue que $m^2 = 0$, então $\text{Rad}^2A_9 = 0$ e nós temos o seguinte quiver para $S_1(A_9)$:

com $xy = yx = 0$. Portanto, A_9 é uma álgebra associativa de tipo finito e $\mathcal{J}_9$ e $\tilde{\mathcal{J}}_9$ são de tipos-finito.

2. $\tilde{\mathcal{J}}_{10} = M_2^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \cdots \oplus M_2^{(k)}(\mathbb{C})^+ \oplus R_s$. Do corolário 4.4.5 segue que $S(\tilde{\mathcal{J}}_{10}) = \mathcal{J}_0 \oplus S_1(\mathcal{J}_{10})$, onde $\mathcal{J}_0$ é uma soma direta de $n-1$ cópias de $M_2(\mathbb{C})$ e $\mathcal{J}_{10} = M_2^{(s)}(\mathbb{C})^+ \oplus R_s$, então o tipo de representação de $S_1(\tilde{\mathcal{J}}_{10})$ é o mesmo de $S_1(\mathcal{J}_{10})$. Para simplicidade denotamos por $e_{pq} = e_{pq}^{(s)}$. Além disso, analogamente pela proposição 4.3.7 temos que $S(\mathcal{J}_{10}) = M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C})$. Então pelo lema 4.2.2 obtemos que $S_1(\mathcal{J}_{10})$ é Morita equivalente à $A_{10} = e_{11}S_1(\tilde{\mathcal{J}}_{10})e_{11}$. Portanto $Q_0(A_{10}) = \{E_1, E_2\}$, onde $e_{11} = E_1 + E_2$, E_1 e E_2 são idempotentes. Agora procuremos uma base de $\text{Rad}A_{10}/\text{Rad}^2A_{10}$. Seja $R_s = \langle r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22} \rangle$, então analogamente ao lema 4.4.1 nós obtemos:

$$e_{qq}r_{qq} = r_{qq} \quad e_{qq}r_{pp} = e_{qp}r_{qp} = r_{qp}e_{qp} = 0,$$

$$e_{qq}r_{qp} = r_{qp}e_{pp} \quad r_{qp}e_{qq} = e_{pp}r_{qp},$$

com $p \neq q$ e $p, q = 1, 2$. Portanto, em A_{10} temos

$$e_{11}r_{qp}e_{11} = e_{11}r_{22}e_{11} = 0,$$

$$e_{11}e_{pp}n_{qp}e_{11} = e_{11}n_{qp}e_{pp}e_{11} = e_{11}n_{pp}e_{pq}e_{11} = 0,$$

para $p \neq q$, $p, q = 1, 2$. Os únicos elementos não nulos em A_{10} são:

$$\begin{aligned} e_{11}r_{12}e_{21}e_{11} + e_{11}e_{21}r_{12}e_{11} &= r_{11}, \\ e_{11}r_{21}e_{12}e_{11} + e_{11}e_{12}r_{21}e_{11} &= r_{11}. \end{aligned}$$

Além disso, temos que $E_1r_{12}e_{21}E_1 = E_1e_{12}r_{21}E_1 = E_2r_{21}e_{12}E_2 = E_2e_{21}r_{12}E_2 = 0$ e $E_2r_{12}e_{21}E_2 = E_2(r_{11} + r_{22})E_2 = E_2e_{12}r_{21}E_2$ e analogamente temos que $E_1r_{21}e_{12}E_1 = e_{11}e_{21}r_{12}E_1$. Novamente, para quaisquer $p, q = 1, 2$ nós temos que $\text{Rad}^2(A_{10}) = 0$ pois $r_{pq}^2 = 0$, e obtemos o seguinte quiver:

com $x^2 = y^2 = 0$. Portanto A_{10} é uma álgebra associativa de tipo finito e o tipo de representação para $\mathcal{J}_{10}$ é s-finito.

3. $\tilde{\mathcal{J}}_{11} = M_2^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \cdots \oplus M_2^{(k)}(\mathbb{C})^+ \oplus N_s$. Analogamente ao exemplo anterior temos que a álgebra $\tilde{\mathcal{J}}_{11}$ é Morita equivalente à $A_{11} = e_{11}\mathcal{J}_{11}e_{11}$, onde $\mathcal{J}_{11} = M_2^{(s)}(\mathbb{C})^+ \oplus N_s$. Por simplicidade denotamos por $e_{kl} = e_{kl}^{(s)}$ e novamente temos que $Q_0(A_{11}) = \{E_1, E_2\}$. Agora, obtemos uma base de $\text{Rad}A_{11}/\text{Rad}^2A_{11}$. Usando (4.1) temos

$$\begin{aligned} e_{11}n_1 &= n_1e_{11}, \quad e_{11}e_{pq}n_je_{11} = 0, \\ e_{11}n_j &= n_je_{11} = -e_{12}n_1 = -n_1e_{12} = \frac{1}{2}(n_2 + n_3), \\ e_{11}e_{21}n_1e_{11} &= e_{11}n_1e_{21}e_{11} = 0, \end{aligned}$$

para $j = 2, 3$, $p, q = 1, 2$ e $p \neq q$. Então, $\text{Rad}A_{11}/\text{Rad}^2A_{11}$ é gerado por $e_{12}n_1 = -n_1e_{12}$. Além disso, $E_2e_{12}n_1E_1 = E_2e_{12}n_1 = 0$ e assim $Q(A_{11})$ é da seguinte forma:

$$E_1 \bullet \xleftarrow{x} \bullet E_2$$

De [50] segue que A_{11} é uma álgebra associativa de tipo finito e $\mathcal{J}_{11}$ é s-finito.

4. $\tilde{\mathcal{J}}_{12} = M_2^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \cdots \oplus M_2^{(k)}(\mathbb{C})^+ \oplus N'_s$. Como no exemplo anterior temos que a álgebra $\mathcal{J}_{12}$ é Morita equivalente a $A_{12} = e_{11}(\mathcal{J}_{12})e_{11}$ com $\mathcal{J}_{12} = M_2^{(s)}(\mathbb{C})^+ \oplus N'_s$. Por simplicidade denotamos por $e_{kl} = e_{kl}^{(s)}$. Novamente, $Q_0(A_{12}) = \{E_1, E_2\}$ e uma base de $\text{Rad}A_{12}/\text{Rad}^2A_{12}$ é gerada por $e_{21}n'_1 = -n'_1e_{21}$ e obtemos o seguinte quiver $Q(A_{12})$:

$$E_1 \bullet \xrightarrow{x} \bullet E_2$$

Portanto, A_{12} é uma álgebra associativa de tipo finito e $\mathcal{J}_{12}$ é s-finito.

5. $\tilde{\mathcal{J}}_{13} = M_2^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \cdots \oplus M_2^{(n)}(\mathbb{C})^+ \oplus M_s \oplus M_t$. Sejam $M_s = \langle m_1 \rangle$ e $M_t = \langle m_2 \rangle$. Se $s \neq t$ então obviamente $S_1(\tilde{\mathcal{J}}_{13}) = \mathcal{J}_0 \oplus S(\mathcal{J}_{12}) \oplus S(\mathcal{J}_{12})$ e portanto $\tilde{\mathcal{J}}_{13}$ é de tipo de representação s-finito. Se $s = t$ então o tipo de representação é determinado pelo tipo de representação de $\mathcal{J}_{13} = M_2^{(s)}(\mathbb{C})^+ \oplus M_s^2$. Pelo Lema 4.4.4 temos que $Q_1(\mathcal{J}_{13}) = Q_1(\mathcal{J}_9) \cup Q_1(\mathcal{J}_9)$. Além disso, como $m_p^2 = 0$, $p = 1, 2$ e $m_1 m_2 + m_2 m_1 = 0$ obtemos o seguinte quiver para $\mathcal{J}_{13}$:

onde $x_i y_i = y_i x_i = x_1 y_2 + x_2 y_1 = y_2 x_1 + y_1 x_2 = 0$. De [46] segue que $S_1(\mathcal{J}_{13})$ é uma álgebra de tipo manso e então $\mathcal{J}_{13}$ tem tipo s-manso. Suponhamos que nós temos $\mathcal{J}_{14} = M_2^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \cdots \oplus M_2^{(k)}(\mathbb{C})^+ \oplus M_s \oplus M_t \oplus M_v$. Então, ou $Q(\mathcal{J}_{14})$ é uma união de pontos, $Q(\mathcal{J}_9)$ e de $Q(\mathcal{J}_{13})$ ou (no caso $s = t = v$) $Q_1(\mathcal{J}_{14})$ contem seis arestas entre $E_1^{(s)}$ e $E_2^{(t)}$, pelo Lema 4.4.4.4, e portanto $\mathcal{J}_{14}$ é de tipo de representação s-selvagem.

6. $\tilde{\mathcal{J}}_{15} = M_2^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \cdots \oplus M_2^{(k)}(\mathbb{C})^+ \oplus R_s \oplus R_t$. Suponhamos que $s \neq t$ então obviamente $S_1(\tilde{\mathcal{J}}_{15}) = \mathcal{J}_0 \oplus S(\mathcal{J}_{10}) \oplus S(\mathcal{J}_{10})$, onde $\mathcal{J}_0$ uma álgebra semi-simples, e portanto $\tilde{\mathcal{J}}_{15}$ é de tipo de representação s-finito. Se $s = t$ então o tipo de representação é determinado pelo tipo de $\mathcal{J}_{15} = M_2^{(s)}(\mathbb{C})^+ \oplus R_s^2$. Novamente, usamos o lema 4.4.4 e obtemos $Q_1(\mathcal{J}_{15})$. Portanto, o quiver para $\mathcal{J}_{15}$ é:

onde $xy + yx = x^2 = y^2 = z^2 = w^2 = zw + wz = 0$. Então, $S_1(\mathcal{J}_{15})$ é uma álgebra associativa de tipo manso e $\mathcal{J}_{15}$ é de tipos-manso. Analogamente, podemos demonstrar que $\mathcal{J}_{16} = M_2^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \cdots \oplus M_2^{(n)}(\mathbb{C})^+ \oplus R_s \oplus R_t \oplus R_v$ ou é uma soma direta de álgebras semi-simples juntamente com álgebras isomorfas à $\mathcal{J}_{10}$ ou à $\mathcal{J}_{15}$ ou é de tipos-selvagem.

Nós usamos a mesma técnica: para cada álgebra $\tilde{\mathcal{J}}$ encontramos uma álgebra menor, $\mathcal{J}$, e depois usando os lemas 4.3.4 e 4.4.4 construímos $Q_1(A)$ onde A é Morita equivalente à $S_1(\mathcal{J})$. Nós escrevemos a lista de todas as álgebras $\mathcal{J}$ de tipo de representação finito

e manso tais que $\mathcal{J}_{ss} = M_2^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \cdots \oplus M_2^{(k)}(\mathbb{C})^+$ e $\text{Rad}\mathcal{J} = \bigoplus_{i=1}^k N_i^{q_i} \oplus \bigoplus_{i=1}^n R_i^{r_i} \oplus \bigoplus_{i=1}^m M_i^{p_i} \oplus \bigoplus_{i=1}^l M_i^{p'_i}$, onde q_i, p_i, p'_i , e r_i são inteiros não-negativos para todo i :

- $\mathcal{J}_{17} = M_2^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus N_1^2$ é de tipo de representação s-manso e $Q(\mathcal{J}_{17})$:

- $\mathcal{J}_{18} = M_2^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus N_1'^2$ é de tipo de representação s-manso e $Q(\mathcal{J}_{18})$:

- $\mathcal{J}_{19} = M_2^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus N_1 \oplus N_1'$ é de tipo de representação s-finito e $Q(\mathcal{J}_{19})$:

onde $xy = yx = 0$.

- $\mathcal{J}_{20} = M_2^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus N_1 \oplus M_1$ é de tipo de representação s-manso (segue de [46]) e $Q(\mathcal{J}_{20})$:

onde $xz = zx = yx = xy = 0$.

- $\mathcal{J}_{21} = M_2^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus N_1' \oplus M_1$ é de tipo de representação s-manso e $Q(\mathcal{J}_{21})$:

onde $yz = zy = yx = xy = 0$.

- $\mathcal{J}_{22} = M_2^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus N_1 \oplus R_1$ é de tipo de representação s-finito (segue de [50]) e $Q(\mathcal{J}_{22})$:

onde $y^2 = z^2 = yx + xz = 0$.

- $\mathcal{J}_{23} = M_2^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus N'_1 \oplus R_1$ é de tipo de representação s-finito e $Q(\mathcal{J}_{23})$:

$$y \circlearrowleft \bullet \xrightarrow{x} \bullet \circlearrowright z$$

onde $y^2 = z^2 = xy + zx = 0$.

finalmente, ambas $\mathcal{J}_{24} = M_2^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus M_1 \oplus R_1$ e $\mathcal{J}_{25} = M_2^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus N_1 \oplus N'_1 \oplus R_1$ são de tipo de representação s-mansos e $Q(\mathcal{J}_{24}) = Q(\mathcal{J}_{25})$:

$$w \circlearrowleft \bullet \begin{matrix} \xrightarrow{x} \\ \xleftarrow{y} \end{matrix} \bullet \circlearrowright z$$

onde $xy = yx = zx = yz = xw = wy = w^2 = z^2 = 0$.

Teorema 4.6.1. *Seja $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \oplus V$, onde $\mathcal{J}_0 = M_2^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \cdots \oplus M_2^{(k)}(\mathbb{C})^+$ para algum k inteiro positivo, e V é soma dos bimódulos V_{α_i} , onde V_{α_i} é um módulo unitail irredutível sobre $M_2^{(\alpha_i)}(\mathbb{C})^+$. Então, temos as seguintes possibilidades:*

- $\mathcal{J}$ tem tipo de representação s-finito se e somente se $\mathcal{J}$ é uma soma direta das seguintes álgebras: $\mathcal{J}_0, \mathcal{J}_9, \mathcal{J}_{10}, \mathcal{J}_{11}, \mathcal{J}_{12}, \mathcal{J}_{19}, \mathcal{J}_{20}, \mathcal{J}_{22}$ e $\mathcal{J}_{23}$.
- $\mathcal{J}$ tem tipo de representação s-mansos se e somente se $\mathcal{J}$ é uma soma direta das seguintes álgebras: $\mathcal{J}_{13}, \mathcal{J}_{15}, \mathcal{J}_{17}, \mathcal{J}_{18}, \mathcal{J}_{20}, \mathcal{J}_{21}, \mathcal{J}_{24}, \mathcal{J}_{25}$ e de álgebras de tipo finito.
- em todos os outros casos $\mathcal{J}$ é de tipo de representação s-selvagem. Em particular, todas essas álgebras também têm tipo de representação selvagem, pois suas álgebras envoltentes universais multiplicativas $U(\mathcal{J})$ têm tipo de representação selvagem.

4.7 Álgebras de Jordan com $\mathcal{J}_{ss} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \cdots \oplus M_n(\mathbb{C})^+, n \geq 3$

Nessa seção consideramos as álgebras cuja parte semi-simples é uma soma direta de álgebras de matrizes $M_n(\mathbb{C})^+$. Começamos com a descrição de todos os bimódulos irredutíveis unitais para uma álgebra de Jordan especial simples de dimensão finita e de grau $n \geq 3$. Seja U uma álgebra associativa com involução j . Denotamos por $H(U, j)$ (e respectivamente por $G(U, j)$) o conjunto de todos elementos j -simétricos (e respectivamente j -antisimétricos).

Teorema 4.7.1. [13] *Seja $\mathcal{J}$ uma álgebra de Jordan especial simples de dimensão finita e de grau $n \geq 3$. Consideramos $U = S_1(\mathcal{J})$ e j , a involução principal em U .*

1. *Seja U uma álgebra central simples. Então $\dim U = n^2$ e ambos $H(U, j)$ e $G(U, j)$ são os únicos bimódulos irredutíveis unitais não-isomorfos para $\mathcal{J} = H(U, j)$ através da ação $x \bullet h = \frac{1}{2}(xh + hx)$.*
2. *Seja $U = B \oplus B^j$ e suponhamos que B possui uma involução K . Então temos os seguintes bimódulos não-isomorfos irredutíveis unitais para $\mathcal{J} = B^+$:*

- B com ação de $b \in B^+$ dada por $x \bullet b = \frac{1}{2}(xb + bx)$,
- $H(B, K)$ com ação de $b \in B^+$ dada por $x \bullet b = \frac{1}{2}(xb^K + bx)$,
- $H(B, K)$ com ação de $b \in B^+$ dada por $x \bullet b = \frac{1}{2}(xb + b^K x)$,
- $G(B, K)$ com ação de $b \in B^+$ dada por $x \bullet b = \frac{1}{2}(xb^K + bx)$,
- $G(B, K)$ com ação de $b \in B^+$ dada por $x \bullet b = \frac{1}{2}(xb + b^K x)$.

Pela proposição 4.3.7 para álgebra de Jordan $\mathcal{J}_0 = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+$ sabemos que $S_1(\mathcal{J}_0) = M_n(\mathbb{C}) \oplus M_n(\mathbb{C})$. Além disso, para qualquer elemento $e_{pq} \in M_n(\mathbb{C})$, $p, q = 1, \dots, n$, da base temos $e_{pq}^K = e_{qp}$. Portanto, pela segunda parte do teorema anterior deduzimos que $M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \cdots \oplus M_n^{(k)}(\mathbb{C})^+$ tem os seguintes bimódulos irredutíveis:

- de dimensão n^2 , R_s , onde $s = 1, \dots, n$ tal que para quaisquer $r_s \in R_s$ e $p_j \in M_n^{(j)}(\mathbb{C})^+$ temos $r_s p_j = 0$ se $s \neq j$ e R_s é um módulo regular para $M_n^{(s)}(\mathbb{C})^+$.

- de dimensão $\frac{1}{2}n(n+1)$, $M_s = \langle m_{ij} \mid 1 \leq i \leq j \leq n \rangle$, tal que

$$\begin{aligned} e_{ii}m_{jj} &= e_{ii}m_{jh} = e_{il}m_{jh} = e_{jl}m_{jh} = e_{hl}m_{jh} = 0, & e_{ii}m_{ii} &= m_{ii}, \\ e_{hh}m_{jh} &= e_{jj}m_{jh} = e_{hi}m_{ij} = e_{hi}m_{ji} = \frac{1}{2}m_{jh}, & e_{ij}m_{ij} &= m_{ii} + m_{jj}, \end{aligned}$$

onde $i \neq j \neq l$, $i \neq h \neq l$ e $j < h$.

- de dimensão $\frac{1}{2}n(n+1)$, $M'_s = \langle m'_{ij} \mid 1 \leq i \leq j \leq n \rangle$, tal que

$$\begin{aligned} e_{ii}m'_{jj} &= e_{ii}m'_{jh} = e_{il}m'_{jh} = e_{lj}m'_{jh} = e_{lh}m'_{jh} = 0, & e_{ii}m'_{ii} &= m'_{ii}, \\ e_{hh}m'_{jh} &= e_{jj}m'_{jh} = e_{ih}m'_{ij} = e_{ih}m'_{ji} = \frac{1}{2}m'_{jh}, & e_{ij}m'_{ij} &= m'_{ii} + m'_{jj}, \end{aligned}$$

onde $i \neq j \neq l$, $i \neq h \neq l$ e $j < h$.

- de dimensão $\frac{1}{2}n(n-1)$, $N_s = \langle n_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n \rangle$, tal que

$$\begin{aligned} e_{jj}n_{jh} &= e_{hh}n_{jh} = \frac{1}{2}n_{jh}, & e_{jh}n_{jh} &= e_{hj}n_{jh} = e_{il}n_{jh} = e_{ji}n_{jh} = e_{hi}n_{jh} = 0, \\ e_{ij}n_{jh} &= \frac{1}{2}(\delta_{i<h}n_{ih} - \delta_{h<i}n_{hi}), & e_{ih}n_{jh} &= \frac{1}{2}(-\delta_{i<j}n_{ij} + \delta_{j<i}n_{ji}), \end{aligned}$$

onde $i \neq j \neq l$, $i \neq h \neq l$ e $j < h$.

- de dimensão $\frac{1}{2}n(n-1)$, $N'_s = \langle n'_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n \rangle$, tal que

$$\begin{aligned} e_{jj}n_{jh} &= e_{hh}n_{jh} = \frac{1}{2}n_{jh}, & e_{jh}n_{jh} &= e_{hj}n_{jh} = e_{il}n_{jh} = e_{ij}n_{jh} = e_{ih}n_{jh} = 0, \\ e_{ji}n_{jh} &= \frac{1}{2}(\delta_{i<h}n_{ih} - \delta_{h<i}n_{hi}), & e_{hi}n_{jh} &= \frac{1}{2}(-\delta_{i<j}n_{ij} + \delta_{j<i}n_{ji}), \end{aligned}$$

onde $i \neq j \neq l$, $i \neq h \neq l$ e $j \leq h$.

1. $\tilde{\mathcal{J}}_{26} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \cdots \oplus M_n^{(k)}(\mathbb{C})^+ \oplus R_s$. Primeiramente, do Corolário 4.4.5 segue que $S(\tilde{\mathcal{J}}_{26}) = \mathcal{J}_0 \oplus S_1(\mathcal{J}_{26})$, onde $\mathcal{J}_0$ é uma soma direta de $k-1$ cópias de $M_n(\mathbb{C})^+$ e $\mathcal{J}_{26} = M_n^{(s)}(\mathbb{C})^+ \oplus R_s$, então o tipo de representação de $S_1(\mathcal{J}_{26})$ é o mesmo de $S_1(\tilde{\mathcal{J}}_{26})$. Por simplicidade denotamos por $e_{kl} = e_{kl}^{(s)}$. Além disso, analogamente a proposição 4.3.7 temos que $(\mathcal{J}_{26})_{ss} = M_n(\mathbb{C}) \oplus M_n(\mathbb{C})$. Logo pelo lema 4.2.2 temos que $S_1(\mathcal{J}_{26})$ é Morita equivalente à $A_{26} = e_{11}S_1(\mathcal{J}_{26})e_{11}$ visto que $e_{11} = E_1 + E_2$, onde $E_1 = e_{11}e_{12}e_{21}$ e $E_2 = e_{11}e_{21}e_{12}$ são idempotentes. Então, $Q_0(A_{26}) = E_1, E_2$. Agora procuremos uma base de $\text{Rad}A_{26}/\text{Rad}^2A_{26}$. Como no lema 4.2.1 obtemos:

$$\begin{aligned} e_{ii}r_{ii} &= r_{ii}, & e_{ii}r_{jj} &= e_{ij}r_{ij} = r_{ij}e_{ij} = 0, \\ e_{ii}r_{ij} &= r_{ij}e_{jj} = e_{ik}r_{kj} = r_{ik}e_{kj}, \\ r_{ij}e_{ii} &= e_{jj}r_{ij} = r_{ik}e_{kj} = e_{ik}r_{kj}, \end{aligned}$$

onde $i \neq j$ e $i, j = 1, 2$. Portanto, como no caso de $\mathcal{J}_{10}$ temos que $\text{Rad} A_{26}$ é gerado por $r_{12}e_{21}$ e $e_{21}r_{12}$. Além disso, temos que $E_1 r_{12} e_{21} E_1 = E_1 e_{12} r_{21} = E_2 r_{21} e_{12} E_2 = E_2 e_{21} r_{12} E_2 = 0$ e $E_2 r_{12} e_{21} E_2 = E_2 (r_{11} + r_{22}) E_2 = E_2 e_{12} r_{21} E_2$ e de forma análoga $E_1 r_{21} e_{12} E_1 = e_{12} r_{21} E_1$. Novamente, temos que $\text{Rad}^2(A_{26}) = 0$ pois $r_{ij}^2 = 0$, e obtemos o seguinte quiver:

onde $x^2 = y^2 = 0$. Portanto, A_{26} é uma álgebra associativa de tipo finito e o tipo de $\mathcal{J}_{26}$ é s-finito.

2. $\tilde{\mathcal{J}}_{27} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \cdots \oplus M_n^{(k)}(\mathbb{C})^+ \oplus M_s$. Analogamente ao exemplo anterior podemos mostrar que a álgebra $\tilde{\mathcal{J}}_{27}$ é Morita equivalente à $A_{27} = e_{11} S_1(\mathcal{J}_{27}) e_{11}$, com $\mathcal{J}_{27} = M_n^{(s)}(\mathbb{C})^+ \oplus M_s$. Por simplicidade denotamos por $e_{kl} = e_{kl}^{(s)}$. Novamente, $Q_0(A_{27}) = \{E_1, E_2\}$. Agora, procuremos $\text{Rad} A_{27} / \text{Rad}^2 A_{27}$. Usando (4.1) temos que

$$\begin{aligned} e_{ll} m_{ll} &= m_{ll} e_{ll} = m_{ll}, & e_{ll} m_{jj} &= m_{jj} e_{ll} = m_{ij} e_{lp} = e_{lp} m_{ij} = 0, \\ e_{ii} m_{ij} &= m_{ij} e_{jj} = m_{ii} e_{ij} = e_{ij} m_{jj}, & e_{jj} m_{ij} &= m_{ij} e_{ii} = m_{jj} e_{ij} = e_{ij} m_{ii}, \\ e_{pl} m_{jj} &= m_{jj} e_{pl} = m_{ik} e_{jj} = e_{jj} m_{ik} = 0, \end{aligned}$$

onde $i < j$, $i < k$ e $j \neq l \neq p$. Além disso, sobraram as seguintes relações:

$$\begin{aligned} e_{ij} m_{ij} + m_{ij} e_{ij} &= 2m_{ii}, \\ e_{jk} m_{ij} + m_{ij} e_{jk} &= 0, & e_{kj} m_{ij} + m_{ij} e_{kj} &= m_{ik}, \\ e_{kj} m_{il} + m_{il} e_{kj} &= 0, \end{aligned} \tag{4.11}$$

onde $i \neq j \neq l$, $i \neq k \neq l$ e $j \neq l$. Multiplicando essas equações em ambos lados por e_{11} temos:

$$\begin{aligned} e_{1j} m_{1j} + m_{1j} e_{1j} &= 2m_{11}, \\ e_{j1} m_{1j} + m_{1j} e_{j1} &= 0 \end{aligned}$$

com $j \neq 1$. Além disso, por (4.11) temos que

$$\begin{aligned} e_{j1} m_{1j} &= m_{kj} e_{jk}, & m_{1j} e_{j1} &= e_{kj} m_{kj}, \\ e_{1j} m_{1j} &= m_{1k} e_{1k}, & m_{1j} e_{1j} &= e_{1k} m_{1k}, \end{aligned}$$

onde $1 \neq k \neq j$. Então, $\text{Rad} A_{27} / \text{Rad}^2 A_{27}$ é gerado por $e_{12} m_{12}$, $m_{12} e_{12}$. Finalmente, $E_2 e_{12} m_{12} = 0$ e $E_1 e_{12} m_{12} E_1 = 0$ e analogamente $E_1 m_{12} e_{12} = 0$ e $E_2 m_{12} e_{12} E_2 = 0$. Portanto $Q(A_{27})$ tem a seguinte forma:

com $xy = yx = 0$. Assim, A_{27} é uma álgebra associativa de tipo finito e $\mathcal{J}_{27}$ tem tipo de representação s-finito.

$$3. \tilde{\mathcal{J}}_{28} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \cdots \oplus M_n^{(k)}(\mathbb{C})^+ \oplus M'_s.$$

Analogamente ao caso anterior concluímos que o tipo de representação da álgebra dada é o mesmo da $A_{28} = e_{11}S_1(\mathcal{J}_{28})e_{11}$, onde $\mathcal{J}_{28} = M_n^{(s)}(\mathbb{C})^+ \oplus M'_s$. Visto que $M_n^{(s)}(\mathbb{C})^+$ age similarmente a M e M' nós obtemos todas as relações em A_{28} substituindo e_{ij} por e_{ji} . Portanto, $\text{Rad}A_{28}/\text{Rad}^2A_{28}$ é gerado por $e_{21}m'_{12}$, e $m'_{12}e_{21}$ e temos o seguinte quiver:

com $xy = yx = 0$. Então, A_{28} é uma álgebra associativa de tipo finito e $\mathcal{J}_{28}$ tem o tipo de representação s-finito.

4. $\tilde{\mathcal{J}}_{29} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \cdots \oplus M_n^{(k)}(\mathbb{C})^+ \oplus N_s$. Primeiramente, do corolário 4.4.5 segue que $S(\mathcal{J}_{29}) = \mathcal{J}_0 \oplus S_1(\mathcal{J}_{29})$, onde $\mathcal{J}_0$ é soma direta de $k - 1$ cópias de $M_n(\mathbb{C})^+$ e $\mathcal{J}_{29} = M_n^{(s)}(\mathbb{C})^+ \oplus N_s$. Então o tipo de representação de $S_1(\mathcal{J}_{29})$ é o mesmo de $S_1(\tilde{\mathcal{J}}_{29})$. Para simplicidade denotamos por $e_{pq} = e_{pq}^{(s)}$. Além disso, da proposição 4.3.7 temos que $(\mathcal{J}_{29})_{ss} = M_n(\mathbb{C}) \oplus M_n(\mathbb{C})$. Então, pelo lema 4.2.2 obtemos que $S_1(\mathcal{J}_{29})$ é Morita equivalente à $A_{29} = e_{11}S_1(\mathcal{J}_{29})e_{11}$ e novamente, $Q_0(A_{29}) = \{E_1, E_2\}$. Agora, procuremos uma base para $\text{Rad}A_{29}/\text{Rad}^2A_{29}$. Usando (4.1) temos que

$$\begin{aligned} e_{jj}n_{jh} &= n_{jh}e_{hh}, & e_{hh}n_{jh} &= n_{jh}e_{jj}, & e_{qq}n_{jh} &= n_{jh}e_{qq} = 0, \\ e_{jh}n_{jh} + n_{jh}e_{jh} &= e_{hj}n_{jh} + n_{jh}e_{hj} = e_{pq}n_{jh} + n_{jh}e_{pq} = 0, \\ e_{hi}n_{jh} + n_{jh}e_{hi} &= e_{ji}n_{jh} + n_{ij}e_{ji} = 0, & e_{ij}n_{jh} + n_{jh}e_{ij} &= \frac{1}{2}(\delta_{i<h}n_{ih} - \delta_{h< i}n_{hi}), \\ e_{ih}n_{jh} + n_{jh}e_{ih} &= \frac{1}{2}(-\delta_{i< j}n_{ij} + \delta_{j< i}n_{ji}), \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde i, j, k, l, p , e q são todos distintos e além disso, vamos supor que $j < h$. Multiplicando essas relações em ambos os lados por e_{11} nós obtemos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} e_{1j}n_{1j} + n_{1j}e_{1j} &= 0, \\ e_{j1}n_{1j} + n_{1j}e_{j1} &= 0 \end{aligned}$$

onde $j \neq 1$. Além disso, por (4.12) provamos que

$$\begin{aligned} e_{j1}n_{1j} &= \varepsilon n_{kj}e_{jk}, & n_{1j}e_{j1} &= \varepsilon e_{kj}n_{kj}, \\ e_{1j}n_{1j} &= \varepsilon n_{1k}e_{1k}, & n_{1j}e_{1j} &= \varepsilon e_{1k}n_{1k}, \end{aligned}$$

para $1 \neq k \neq j$ e ε é 1 ou -1 . Então, $\text{Rad}A_{29}/\text{Rad}^2A_{29}$ é gerado por $e_{12}n_{12}$ e $E_2e_{12}n_{12} = 0$ e $e_{12}n_{12}E_1 = 0$. Assim $Q(A_{29})$ é da seguinte forma:

$$E_1 \bullet \xleftarrow{x} \bullet E_2$$

Portanto, A_{29} é uma álgebra associativa de tipo finito e $\mathcal{J}_{29}$ tem o tipo de representação s-finito.

$$5. \tilde{\mathcal{J}}_{30} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \cdots \oplus M_n^{(k)}(\mathbb{C})^+ \oplus N'_s.$$

Concluimos que basta determinar o tipo de representação para a álgebra $e_{11}S_1(\mathcal{J}_{30})e_{11}$, onde $\mathcal{J}_{30} = M_n^{(s)}(\mathbb{C})^+ \oplus N'_s$. Observamos que $M_n(\mathbb{C})^+$ age similarmente à N e N' nos escrevemos todas as relações em $S_1(\mathcal{J}_{29})$ substituindo e_{ij} por e_{ji} . Segue que $\text{Rad}A_{30}/\text{Rad}^2\mathcal{J}_{30}$ é gerado por $e_{21}n'_{12}$ e nós obtemos o seguinte quiver:

$$E_1 \bullet \xrightarrow{x} \bullet E_2$$

Portanto, A_{30} é uma álgebra associativa de tipo finito e $\mathcal{J}_{30}$ tem o tipo de representação s-finito.

Abaixo listamos todas as álgebras de tipos-finito e s-manso, cuja parte semi-simples é a soma direta de $M_n(\mathbb{C})^+$.

- As álgebras $\mathcal{J}_{31} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus M \oplus M'$, $\mathcal{J}_{32} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus M^2$, $\mathcal{J}_{33} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus M'^2$ e $\mathcal{J}_{34} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus N^2 \oplus N'^2$ são de tipo de representação s-manso com o quiver:

onde $x_i y_i = y_i x_i = x_1 y_2 + x_2 y_1 = y_2 x_1 + y_1 x_2 = 0$.

- $\mathcal{J}_{35} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus R^2$ é de tipo de representação s-manso com o quiver $Q(\mathcal{J}_{35})$:

onde $xy + yx = x^2 = y^2 = z^2 = w^2 = zw + wz = 0$.

- $\mathcal{J}_{36} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus N^2$ e $\mathcal{J}_{37} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus N'^2$ são de tipo de representação s-mansô com o quiver:

- $\mathcal{J}_{38} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus N \oplus N'$ é de tipo de representação s-finito com o quiver $Q(\mathcal{J}_{38})$:

onde $xy = yx = 0$.

- $\mathcal{J}_{39} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus M \oplus N$, $\mathcal{J}_{40} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus M' \oplus N$, $\mathcal{J}_{41} = M_2(\mathbb{C})^+ \oplus M \oplus N'$ e $\mathcal{J}_{42} = M_2(\mathbb{C})^+ \oplus M' \oplus N'$ são de tipo de representação s-mansô com o quiver:

onde $xz = zx = yx = xy = 0$.

- $\mathcal{J}_{43} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus N \oplus R$, $\mathcal{J}_{44} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus N' \oplus R$ são de tipo de representação s-finito com $Q(\mathcal{J}_{43})$:

onde $y^2 = z^2 = yx + xz = 0$.

- Finalmente, as três álgebras $\mathcal{J}_{45} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus M \oplus R$, $\mathcal{J}_{46} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus M' \oplus R$ e $\mathcal{J}_{47} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus N \oplus N' \oplus R$ são de tipo de representação s-mansô com o quiver:

onde $xy = yx = zx = yz = xw = wy = w^2 = z^2 = 0$.

Teorema 4.7.2. *Seja $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \oplus V$, onde $\mathcal{J}_0 = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \cdots \oplus M_2^{(k)}(\mathbb{C})^+$ para um k inteiro positivo e V é soma dos bimódulos V_{α_i} , onde V_{α_i} é um módulo unitail irredutível sobre $M_n^{(\alpha_i)}(\mathbb{C})^+$. Então temos as seguintes possibilidades:*

- $\mathcal{J}$ tem tipo de representação s -finito se e somente se $\mathcal{J}$ é uma soma direta das seguintes álgebras: $\mathcal{J}_0$, $\mathcal{J}_{26}$ - $\mathcal{J}_{30}$, $\mathcal{J}_{38}$, $\mathcal{J}_{43}$ e $\mathcal{J}_{44}$.
- $\mathcal{J}$ tem tipo de representação s -manso se e somente se $\mathcal{J}$ é uma soma direta das seguintes álgebras: $\mathcal{J}_{31}$ - $\mathcal{J}_{37}$, $\mathcal{J}_{39}$, $\mathcal{J}_{40}$, $\mathcal{J}_{41}$, $\mathcal{J}_{42}$, $\mathcal{J}_{45}$ - $\mathcal{J}_{47}$ e algumas álgebras de tipos-finito.
- Em todos os outros casos $\mathcal{J}$ é de tipo de representação s -selvagem. Em particular, todas essas álgebras são de tipo de representação selvagem, visto que suas álgebras envolveres universais $U(\mathcal{J})$ tem tipo de representação selvagem.

4.8 Álgebras de Jordan com $\mathcal{J}_{ss} = H(M_2(\mathbb{C}), tr) \oplus \cdots \oplus H(M_2(\mathbb{C}), tr)$

Nessa seção tratamos das álgebras de Jordan $\mathcal{J}$ com $\mathcal{J}_{ss} = H^{(1)}(M_2(\mathbb{C}), tr) \oplus \cdots \oplus H^{(k)}(M_2(\mathbb{C}), tr)$, onde $H(M_2(\mathbb{C}), tr)$ é uma álgebra de Jordan dos elementos simétricos de $M_n(\mathbb{C})$ através da transposição tr . Para os elementos básicos temos $e_{pq} \in M_n(\mathbb{C})$ e $e_{pq}^{tr} = e_{qp}$. Seja $\langle e_{ii}^{(s)}, \tilde{e}_{ij}^{(s)} \mid 1 \leq i < j \leq 2, 1 \leq s \leq k \rangle$, uma base para $\mathcal{J}_{ss}$. De [14], Teorema 16.1 segue que para $\mathcal{J}_{ss} = H^{(1)}(M_2(\mathbb{C}), tr) \oplus \cdots \oplus H^{(k)}(M_2(\mathbb{C}), tr)$ temos seguintes os bimódulos irredutíveis unitais:

- de dimensão um, $N_s = \langle n_s \rangle$, $s \in \{1, \dots, k\}$, tal que para qualquer elemento $q_j \in H^{(j)}(M_2(\mathbb{C}), tr)$ temos $q_j n_s = 0$ e $e_{ii}^{(s)} n_s = n_s$ e $\tilde{e}_{12}^{(s)} n_s = 0$ se $j \neq s$, onde $i = 1, 2$.

- de dimensão três $R_s = \langle r_{ii}^{(s)}, r_{12}^{(s)} \rangle$, tal que para qualquer elemento $q_j \in H^{(j)}(M_2(\mathbb{C}), tr)$ temos $q_j R_s = 0$, se $s \neq j$ e $R_s = \text{Reg}(H^{(s)}(M_2(\mathbb{C}), tr))$.

$$1. \tilde{\mathcal{J}}_{48} = H^{(1)}(M_2(\mathbb{C}), tr) \oplus \cdots \oplus H^{(k)}(M_2(\mathbb{C}), tr) \oplus N_s.$$

Primeiramente, do Corolário 4.4.5 segue que $S(\tilde{\mathcal{J}}_{48}) = \mathcal{J}_0 \oplus S_1(\mathcal{J}_{48})$, onde $\mathcal{J}_0$ é a soma direta de $k - 1$ cópias de $H(M_2(\mathbb{C}), tr)$ e $\mathcal{J}_{48} = H^{(s)}(M_2(\mathbb{C}), tr) \oplus N_s$. Então o tipo de representação de $S_1(\mathcal{J}_{48})$ é o mesmo de $S_1(\tilde{\mathcal{J}}_{48})$. Por simplicidade denotamos por $e_{ii} = e_{ii}^{(s)}$ e $\tilde{e}_{12} = \tilde{e}_{12}^{(s)}$, onde $i = 1, 2$ e $n = n_s$. Além disso, analogamente a proposição 4.3.8 temos que $(\mathcal{J}_{48})_{ss} = M_2(\mathbb{C})$ e pelo lema 4.2.2 temos que $S_1(\mathcal{J}_{48})$ é Morita equivalente à $A_{48} = e_{11}S_1(\mathcal{J}_{48})e_{11}$. Visto que $(A_{48})_{ss} = e_{11}$, o quiver $Q_0(A_{48})$ consiste de um só ponto. O próximo passo é escolher uma base de $\text{Rad}A_{48}/\text{Rad}^2A_{48}$. Temos as seguintes relações

$$\begin{aligned} e_{11}n &= ne_{22}, & e_{22}n &= ne_{11}, \\ \tilde{e}_{12}n + n\tilde{e}_{12} &= 0, \end{aligned}$$

e assim $\text{Rad}A_{48}$ é gerado por $\tilde{e}_{12}n$. Novamente, temos que $n^2 = 0$ e obtemos o seguinte quiver:

$$\begin{array}{c} x \\ \curvearrowright \\ \bullet \end{array}$$

onde $x^2 = 0$. Então A_{48} é uma álgebra associativa de tipo finito o que implica que $\mathcal{J}_{48}$ tem o tipo de representação s-finito.

2. $\tilde{\mathcal{J}}_{49} = H^{(1)}(M_2(\mathbb{C}), tr) \oplus \cdots \oplus H^{(k)}(M_2(\mathbb{C}), tr) \oplus R_s$. Usando corolário 4.4.5 concluímos que o tipo dessa representação de nossa álgebra coincide com o tipo de representação da álgebra $\mathcal{J}_{49} = H^{(s)}(M_2(\mathbb{C}), tr)^{(s)} \oplus R_s$. Por simplicidade denotamos por $e_{ii} = e_{ii}^{(s)}$, $r_{ii} = r_{ii}^{(s)}$, $\tilde{e}_{12} = \tilde{e}_{12}^{(s)}$ e $r_{12} = r_{12}^{(s)}$ para $i = 1, 2$. Além disso, pelo lema 4.2.2 temos que $S_1(\tilde{\mathcal{J}}_{49})$ é Morita equivalente à $e_{11}S_1(\tilde{\mathcal{J}}_{49})e_{11}$. Como $(\tilde{\mathcal{J}}_{49})_{ss} = e_{11}$ temos que $Q_0(\tilde{\mathcal{J}}_{49})$ consiste de um só ponto. Analogamente aos lemas 4.3.1-4.3.6 obtemos que:

$$\begin{aligned} e_{ii}r_{ii} &= r_{ii}, & e_{ii}r_{jj} &= 0, \\ e_{11}r_{12} &= r_{12}e_{22} = r_{11}\tilde{e}_{12} = \tilde{e}_{12}r_{22}, \\ e_{22}r_{12} &= r_{12}e_{11} = r_{22}\tilde{e}_{12} = \tilde{e}_{12}r_{11}, \\ \tilde{e}_{12}r_{12} + r_{12}\tilde{e}_{12} &= 2r_{11} + 2r_{22}, \end{aligned}$$

onde $i \neq j$ e $i, j = 1, 2$. Além disso, quando multiplicamos (4.1) por r_{11} e $\tilde{e}_{12}$ temos

$$r_{11}\tilde{e}_{12} + \tilde{e}_{12}r_{11} = r_{12}$$

e depois por $\tilde{e}_{12}$ à esquerda e à direita obtemos que

$$\tilde{e}_{12}r_{12} = (e_{11} + e_{22})r_{11} + \tilde{e}_{12}r_{11}\tilde{e}_{12} = \tilde{e}_{12}r_{11}\tilde{e}_{12} + r_{11}(e_{11} + e_{22}) = r_{12}\tilde{e}_{12}$$

e portanto $\text{Rad}A_{49}$ é gerado por $r_{12}\tilde{e}_{12}$. Visto que $r_{12}^2 = 0$ temos $\text{Rad}^2(A_{49}) = 0$ e obtemos o seguinte quiver:

com $x^2 = 0$. Portanto, A_{49} é uma álgebra associativa de tipo finito e então $\mathcal{J}_{49}$ tem o tipo de representação s-finito.

Teorema 4.8.1. *Seja $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \oplus V$, onde $\mathcal{J}_0 = H^{(1)}(M_2(\mathbb{C}), tr) \oplus \cdots \oplus H^{(k)}(M_2(\mathbb{C}), tr)$ e V é soma dos bimódulos V_{α_i} , onde V_{α_i} é um módulo unitail irredutível sobre $H^{(\alpha_i)}(M_2(\mathbb{C}), tr)$. Então temos as seguintes possibilidades:*

- $\mathcal{J}$ tem tipo de representação s-finito se e somente se $\mathcal{J}$ é uma soma direta das seguintes álgebras: $\mathcal{J}_0$, $\mathcal{J}_{48}$ e $\mathcal{J}_{49}$.
- $\mathcal{J}$ tem tipo de representação s-manso se e somente se $\mathcal{J}$ é uma soma direta das seguintes álgebras: $\mathcal{J}_{50} = H^{(s)}(M_2(\mathbb{C}), tr) \oplus R_s^2$, $\mathcal{J}_{51} = H^{(s)}(M_2(\mathbb{C}), tr) \oplus N_s^2$, $\mathcal{J}_{52} = H^{(s)}(M_2(\mathbb{C}), tr) \oplus R_s \oplus N_s$ e alguns álgebras de tipos-finito. Aqui $\mathcal{J}_{50}$, $\mathcal{J}_{51}$ e $\mathcal{J}_{52}$ são as álgebras de tipos-manso com o quiver:

onde $x^2 = y^2 = xy + yx = 0$.

- Em todos os outros casos $\mathcal{J}$ é de tipo de representação s-selvagem. Em particular, todas essas álgebras são de tipo de representação selvagem, visto que suas álgebras envoltentes universais $U(\mathcal{J})$ tem tipo de representação selvagem.

4.9 Álgebras de Jordan com $\mathcal{J}_{ss} = H(M_n(\mathbb{C}), tr) \oplus \cdots \oplus H(M_n(\mathbb{C}), tr)$, $n \geq 3$

Nessa seção consideramos as álgebras de Jordan $\mathcal{J}$ com parte semi-simples

$$\mathcal{J}_{ss} = H^{(1)}(M_n(\mathbb{C}), tr) \oplus \cdots \oplus H^{(k)}(M_n(\mathbb{C}), tr),$$

para $n \geq 3$. Seja $\langle e_{ii}^{(s)}, \tilde{e}_{ij}^{(s)}, 1 \leq i < j \leq n, 1 \leq s \leq k \rangle$, uma base de $\mathcal{J}_{ss}$.

Pela proposição 4.3.9 nós temos que $S_1(\mathcal{J}_0) = M_n(\mathbb{C})$, onde $\mathcal{J}_0 = H(M_n(\mathbb{C}), tr)$. Este caso corresponde ao caso (1) no Teorema 4.7.1. Portanto, para a álgebra $H^{(1)}(M_n(\mathbb{C}), tr) \oplus \cdots \oplus H^{(k)}(M_n(\mathbb{C}), tr)$ temos os seguintes bimódulos irredutíveis unitais não-isomorfos:

- de dimensão $\frac{1}{2}n(n-1)$, $N_s = \langle n_{ij} \rangle$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ e $s \in \{1, \dots, k\}$, tal que para qualquer elemento $q_l \in H^{(l)}(M_n(\mathbb{C}), tr)$ temos $q_l N_s = 0$ se $l \neq s$ e para $H^{(s)}(M_n(\mathbb{C}), tr)$ temos a seguinte ação:

$$\begin{aligned} e_{ii} n_{ij} &= e_{jj} n_{ij} = \frac{1}{2} n_{ij}, & e_{rr} n_{ij} &= \tilde{e}_{ij} n_{ij} = \tilde{e}_{rv} n_{ij} = 0, \\ \tilde{e}_{ij} n_{jq} &= \frac{1}{2} n_{iq}, & \tilde{e}_{tq} n_{jq} &= \frac{1}{2} (-\delta_{i < j} n_{tj} + \delta_{j < t} n_{jt}), \\ \tilde{e}_{jp} n_{jq} &= \frac{1}{2} (\delta_{p < q} n_{pq} - \delta_{q < p} n_{qp}), & \tilde{e}_{ij} n_{jq} &= \frac{1}{2} n_{pj}, \end{aligned}$$

para $i, j, q, p, r, t, v \in \{1, \dots, n\}$ distintos dois a dois, $i < j < q$, $t < q$, $\delta_{a < b}$ igual 0 se $a \geq b$ e 1 caso contrário.

- de dimensão $\frac{1}{2}n(n+1)$, $R_s = \langle r_{ii}^{(s)}, r_{ij}^{(s)} \rangle$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i < j$ e $s \in \{1, \dots, k\}$, tal que para qualquer elemento $q_l \in H^{(l)}(M_n(\mathbb{C}), tr)$ temos $q_l R_s = 0$ se $l \neq s$ e $R_s = \text{Reg}(H^{(s)}(M_n(\mathbb{C}), tr))$.

$$1. \tilde{\mathcal{J}}_{53} = H(M_n(\mathbb{C}), tr)^{(1)} \oplus \cdots \oplus H(M_n(\mathbb{C}), tr)^{(k)} \oplus N_s.$$

Primeiramente, do corolário 4.4.5 segue que $S(\tilde{\mathcal{J}}_{53}) = \mathcal{J}_0 \oplus S_1(\mathcal{J}_{53})$, onde $\mathcal{J}_0$ é uma soma direta de $k-1$ cópias de $H(M_n(\mathbb{C}), tr)$ e $\mathcal{J}_{53} = H^{(s)}(M_2(\mathbb{C}), tr) \oplus N_s$. Então o tipo de representação de $S_1(\mathcal{J}_{53})$ é o mesmo de $S_1(\tilde{\mathcal{J}}_{53})$. Por simplicidade denotamos por $e_{ii} = e_{ii}^{(s)}$, $\tilde{e}_{ij} = \tilde{e}_{ij}^{(s)}$ e $n_{ij} = n_{ij}^{(s)}$, $i, j = \{1, \dots, n\}$, $i < j$. Além disso, analogamente a proposição 4.3.9 temos que $(\mathcal{J}_{53})_{ss} = M_n(\mathbb{C})$. Então, pelo lema 4.2.2 obtemos que $S_1(\mathcal{J}_{53})$ é Morita equivalente à $A_{53} = e_{11} S_1(\mathcal{J}_{53}) e_{11}$. Observamos que $(A_{53})_{ss} = \langle e_{11} \rangle$ e

portanto $Q_0(A_{53})$ consiste de um só ponto. O próximo passo é escolher uma base para $\text{Rad}A_{53}/\text{Rad}^2A_{53}$:

$$\begin{aligned} e_{ii}n_{ij} &= n_{ij}e_{jj}, & e_{jj}n_{ij} &= n_{ij}e_{ii}, \\ e_{rr}n_{ij} &= n_{ij}e_{rr} = \tilde{e}_{ij}n_{ij} = n_{ij}\tilde{e}_{ij} = \tilde{e}_{rv}n_{ij} = n_{ij}\tilde{e}_{rv} = 0, \\ \tilde{e}_{ij}n_{jq} + n_{jq}\tilde{e}_{ij} &= n_{iq}, & n_{jq}\tilde{e}_{tq} + \tilde{e}_{tq}n_{jq} &= -\delta_{t<j}n_{tj} + \delta_{j<t}n_{jt}, \\ \tilde{e}_{jp}n_{jq} + n_{jq}\tilde{e}_{jp} &= \delta_{p<q}n_{pq} - \delta_{q<p}n_{qp}, & \tilde{e}_{ij}n_{jq} + n_{jq}\tilde{e}_{ij} &= n_{pj} \end{aligned}$$

para $i, j, q, p, r, t, v \in \{1, \dots, n\}$, distintos dois a dois, $i < j < q$, $t < q$, $\delta_{a<b}$ igual 0 se $a \geq b$ e 1 caso contrário. Então temos que $\text{Rad}A_{53}$ é gerado por $\tilde{e}_{12}n_{12}$. Além disso, $n_{12}^2 = 0$ e obtemos o seguinte quiver:

com $x^2 = 0$. Logo A_{53} é uma álgebra associativa de tipo finito e portanto $\mathcal{J}_{53}$ tem o tipo de representação s-finito.

2. $\tilde{\mathcal{J}}_{54} = H^{(1)}(M_n(\mathbb{C}), tr) \oplus \dots \oplus H^{(k)}(M_n(\mathbb{C}), tr) \oplus R_s$. Novamente, usando o corolário 4.4.5 concluímos que nossa álgebra é Morita equivalente à álgebra $\mathcal{J}_{54} = H^{(s)}(M_2(\mathbb{C}), tr) \oplus R_s$. Por simplicidade, denotamos por $e_{ii} = e_{ii}^{(s)}$, $r_{ii} = r_{ii}^{(s)}$, $\tilde{e}_{ij} = \tilde{e}_{ij}^{(s)}$ e $r_{ij} = r_{ij}^{(s)}$ para $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i < j$. Além disso, pelo lema 4.2.2 temos que $S_1(\tilde{\mathcal{J}}_{54})$ é Morita equivalente à $A_{54} = e_{11}S_1(\mathcal{J}_{54})e_{11}$. Como $(A_{54})_{ss} = e_{11}$ temos que $Q_0(A_{54})$ consiste de um só ponto. Analogamente aos lemmas 4.3.1-4.3.6, obtemos:

$$\begin{aligned} e_{ii}r_{ii} &= r_{ii}, & e_{ii}r_{jj} &= e_{qq}r_{ij} = r_{ij}e_{qq} = r_{qq}\tilde{e}_{ij} = \tilde{e}_{ij}r_{qq} = 0, \\ e_{ii}r_{ij} &= r_{ij}e_{jj} = r_{ii}\tilde{e}_{ij} = \tilde{e}_{ij}r_{jj}, & e_{jj}r_{ij} &= r_{ij}e_{ii} = r_{jj}\tilde{e}_{ij} = \tilde{e}_{ij}r_{ii}, \\ \tilde{e}_{ij}r_{ij} + r_{ij}\tilde{e}_{ij} &= 2r_{ii} + 2r_{jj}, \\ \tilde{e}_{qp}r_{ij} &= r_{ij}\tilde{e}_{qp} = 0, \\ \tilde{e}_{qi}r_{ij} &= \tilde{e}_{qp}r_{pj} = r_{qi}\tilde{e}_{ij} = r_{qp}\tilde{e}_{pj} \end{aligned}$$

com $i, j, p, q \in \{1, \dots, n\}$, todos i, j, k, l são distintos, e quando escrevemos r_{ab} ou $\tilde{e}_{ab}$ temos que $a < b$. Portanto, $\text{Rad}A_{54}$ é gerado por $r_{12}\tilde{e}_{12}$. Novamente, visto que $r_{12}^2 = 0$ temos que $\text{Rad}^2(A_{54}) = 0$ e nós obtemos o seguinte quiver:

onde $x^2 = 0$. Logo A_{54} é uma álgebra associativa de tipo finito e então $\mathcal{J}_{54}$ tem o tipo de representação s-finito.

Analogamente a seção anterior temos o seguinte teorema:

Teorema 4.9.1. *Seja $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \oplus V$, onde $\mathcal{J}_0 = H^{(1)}(M_n(\mathbb{C}), tr) \oplus \cdots \oplus H^{(k)}(M_n(\mathbb{C}), tr)$ e V é soma dos bimódulos V_{α_i} , onde V_{α_i} é um módulo unital irredutível sobre $H^{(\alpha_i)}(M_n(\mathbb{C}), tr)$. Então temos as seguintes possibilidades:*

- $\mathcal{J}$ tem tipo de representação *s-finito* se e somente se $\mathcal{J}$ é uma soma direta das seguintes álgebras: $\mathcal{J}_0$, $\mathcal{J}_{53}$ e $\mathcal{J}_{54}$.
- $\mathcal{J}$ tem tipo de representação *s-manso* se e somente se $\mathcal{J}$ é uma soma direta das seguintes álgebras: $\mathcal{J}_{55} = H^{(s)}(M_n(\mathbb{C}), j) \oplus R_s^2$, $\mathcal{J}_{56} = H^{(s)}(M_n(\mathbb{C}), j) \oplus N_s^2$, $\mathcal{J}_{57} = H^{(s)}(M_2(\mathbb{C}), j) \oplus R_s \oplus N_s$ e algumas álgebras de tipos-finito. Aqui $\mathcal{J}_{55}$, $\mathcal{J}_{56}$ e $\mathcal{J}_{57}$ são de tipo de representação *s-manso* com o quiver:

onde $x^2 = y^2 = xy + yx = 0$.

- Em todos os outros casos $\mathcal{J}$ é de tipo de representação *s-selvagem*. Em particular, todas essas álgebras são de tipo de representação *selvagem*, visto que suas álgebras envoltentes universais $U(\mathcal{J})$ tem tipo de representação *selvagem*.

4.10 Tipo de representação: caso geral

Seja $\mathcal{J}_0$ uma álgebra de Jordan de dimensão finita complexa do tipo de matrizes, i.e., uma soma direta de $\mathbb{C}$, $M_n(\mathbb{C})^+$ e $H(M_n(\mathbb{C}), tr)$, $n \geq 2$. Decompomos

$$\mathcal{J}_0 = \mathcal{J}_{\alpha_1} \oplus \mathcal{J}_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus \mathcal{J}_{\alpha_r}$$

em soma direta, onde r é um inteiro positivo e para qualquer $1 \leq i \leq r$, $\mathcal{J}_{\alpha_i}$ é uma álgebra de Jordan simples.

Teorema 4.10.1. ([14], Teorema 19.3) *Qualquer bimódulo M sobre a álgebra de Jordan $\mathcal{J}_0$ decompõe-se em soma direta dos seguintes bimódulos:*

1. unital sobre $\mathcal{J}_{\alpha_i}$;
2. um bimódulo M_i , tal que M_i com ação λm é um módulo especial sobre $\mathcal{J}_{\alpha_i}$ (Teorema 1.3.6,);
3. unital que é a soma de dois módulos especiais que comutam; um deles é $\mathcal{J}_{\alpha_i}$ -bimódulo e o outro é $\mathcal{J}_{\alpha_j}$ -bimódulo, $i \neq j$ (Teorema 1.3.6);

Nas seções 4.6-4.9 obtemos um resultado completo do caso (1) para qualquer U_i de tipo de matrizes. Agora consideramos os módulos especiais para $U_i = M_n(\mathbb{C})^+$, $n \geq 2$. Pela proposição 4.3.7 sabemos que $S_1(\mathcal{J}_{\alpha_i}) = M_n(\mathbb{C}) \oplus M_n(\mathbb{C})$, então obtemos dois módulos irredutíveis especiais:

- de dimensão n , $P = \langle p_1, \dots, p_n \rangle$, com ação:

$$\begin{aligned} e_{ii} \cdot p_i &= e_{ij} \cdot p_j = \frac{1}{2} p_i, \\ e_{ii} \cdot p_j &= e_{ki} \cdot p_j = 0, \end{aligned}$$

onde $1 \leq i, j, k \leq n$, $i \neq j$;

- de dimensão n , $P' = \langle p'_1, \dots, p'_n \rangle$, com ação:

$$\begin{aligned} e_{ii} \cdot p'_i &= e_{ji} \cdot p'_j = \frac{1}{2} p'_i, \\ e_{ii} \cdot p'_j &= e_{ik} \cdot p'_j = 0, \end{aligned}$$

onde $1 \leq i, j, k \leq n$, $i \neq j$.

A extensão nula de $M_n(\mathbb{C})^+$ pelo módulo especial P (ou P') provê uma álgebra de Jordan $\mathcal{J}$ sem unidade. Portanto, consideramos a álgebra unital $\tilde{\mathcal{J}} = \mathbb{C}1 + \mathcal{J}$ e pelo lema 4.4.1 temos que ambas possuem o mesmo tipo de representação.

1. $\mathcal{J}_{58} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e \oplus P$. Começamos com a álgebra de Jordan $\mathcal{J}_{58} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e \oplus P$, com unidade $1 = e + \sum_{i=1}^n e_{ii}$. Pelo proposição 1.3.4 temos que $(\mathcal{J}_{58})_{ss} = \mathbb{C} \oplus M_n(\mathbb{C}) \oplus M_n(\mathbb{C})$ e portanto pelo lema 4.2.2 temos que $S_1(\mathcal{J}_{58})$ é Morita equivalente à $A_{58} = (e + e_{11})S_1(\mathcal{J}_{58})(e + e_{11})$. Então, $Q_0(A_{58}) = \{E_1, E_2, e\}$. O próximo passo é escolher uma base para $\text{Rad}A_{58}/\text{Rad}^2A_{58}$. Por (4.1) temos que

$$\begin{aligned} e_{ii}p_i &= p_ie, & ep_i &= e_{ii}p_i, \\ e_{ki}p_j &= p_je_{ki} = e_{ii}p_j = p_je_{ii} = 0, & e_{ij}p_j + p_je_{ij} &= p_i \end{aligned}$$

$1 \leq i, j, k \leq n$, $i \neq j$ e assim

$$\begin{aligned} (e + e_{11})p_j(e + e_{11}) &= 0, \\ e_{1j}p_j &= e_{1j}e_{j1}p_1 = e_{1k}e_{k1}p_1 = e_{1k}p_k, \quad e_{j1}p_j = p_k e_{k1}, \\ (e + e_{11})p_1(e + e_{11}) &= ep_1e_{11} + e_{11}p_1e = ep_2e_{12}E_2 + E_1e_{12}p_2e, \end{aligned}$$

para $1 \neq j \neq k \neq 1$. Portanto, $\text{Rad}A_{58}/\text{Rad}^2A_{58}$ é gerado por $ep_2e_{12}E_2$ e $E_1e_{12}p_2e$. Além disso, $p_2^2 = 0$ e nós temos $Q(A_{58})$ da seguinte forma:

$$E_2 \bullet \xrightarrow{y} e \bullet \xrightarrow{x} \bullet E_1$$

com $yx = 0$. Concluimos de [48] que A_{58} é uma álgebra associativa de tipo finito o que implica que $\mathcal{J}_{58}$ tem o tipo de representação s-finito.

2. $\mathcal{J}_{59} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e \oplus P'$. A álgebra de Jordan $\mathcal{J}_{59} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e \oplus P'$ tem unidade $1 = e + \sum_{i=1}^n e_{ii}$. Analogamente a caso de álgebra $\mathcal{J}_{58}$ temos que $S_1(\mathcal{J}_{59})$ é Morita equivalente à $A_{59} = (e + e_{11})S_1(\mathcal{J}_{59})(e + e_{11})$. Segue que $\text{Rad}A_{58}/\text{Rad}^2A_{58}$ é gerado por $ev_2e_{21}E_2$ e $E_1e_{21}v_2e$. Além disso, $v_2^2 = 0$ e obtemos o seguinte quiver $Q(A_{58})$:

$$E_2 \bullet \xleftarrow{y} e \bullet \xleftarrow{x} \bullet E_1$$

com $xy = 0$. Portanto, A_{59} é uma álgebra associativa de tipo finito o que implica que $\mathcal{J}_{59}$ tem tipo de representação s-finito.

3. $\mathcal{J}_{60} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e \oplus P^2$. Novamente obtemos uma álgebra associativa $A_{60} = (e + e_{11})S_1(\mathcal{J}_{60})(e + e_{11})$ Morita equivalente à $S_1(\mathcal{J}_{60})$. Pelo Lema 4.4.4 obtemos imediatamente que $Q_1(A_{60}) = Q_1(A_{58}) \cup Q_1(A_{58})$ e também para qualquer $v_j^{(i)} \in P^{(i)}$ temos que $v_j^{(1)}v_j^{(2)} + v_j^{(2)}v_j^{(1)} = 0$ e obtemos o seguinte quiver $Q(A_{60})$:

$$E_2 \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{x_1} \\ \xrightarrow{x_2} \end{array} e \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{y_1} \\ \xrightarrow{y_2} \end{array} \bullet$$

com $y_2x_2 = y_1x_1 = y_1x_1 + y_2x_2 = 0$. De [49] segue que a álgebra A_{60} é uma álgebra associativa de tipo manso o que implica que $\mathcal{J}_{60}$ tem o tipo de representação s-manso.

Abaixo segue a lista de todas as álgebras de Jordan $\mathcal{J}$ de tipo de representação s-finito e de tipos-manso, cuja parte semi-simples é igual a soma direta de $M_n(\mathbb{C})^+$ e $\mathbb{C}$ e $\text{Rad } \mathcal{J}$

decompõe-se na soma direta dos módulos unitais sobre $M_n(\mathbb{C})^+$ e P e (ou) P' . Aqui $n \geq 2$ e no caso $n = 2$ nós omitimos as álgebras com M'_s .

- $\mathcal{J}_{61} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e \oplus P'^2$ é de tipo de representação s-mansu (veja [49]) com $Q(\mathcal{J}_{61})$:

$$E_2 \bullet \begin{array}{c} \xleftarrow{x_2} \\ \xleftarrow{x_1} \end{array} e \bullet \begin{array}{c} \xleftarrow{y_2} \\ \xleftarrow{y_1} \end{array} \bullet E_1$$

onde $x_2y_2 = x_1y_1 = x_1y_2 + x_2y_1 = 0$.

- $\mathcal{J}_{62} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e \oplus P' \oplus P$ é de tipo de representação s-mansu (veja [49]) com $Q(\mathcal{J}_{62})$:

$$E_2 \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{x_1} \\ \xleftarrow{y_1} \end{array} e \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{x_2} \\ \xleftarrow{y_2} \end{array} \bullet E_1$$

onde $x_2y_2 = y_1x_1 = x_1y_1 + y_2x_2 = 0$.

- $\mathcal{J}_{63} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e \oplus P \oplus V_e$ é de tipo de representação s-finito (veja [48]) com $Q(\mathcal{J}_{63})$:

$$E_2 \bullet \xrightarrow{x} e \bullet \begin{array}{c} \curvearrowright^z \\ \xrightarrow{y} \end{array} \bullet E_1$$

onde $xy = z^2 = zx = yz = 0$.

- $\mathcal{J}_{64} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e \oplus P' \oplus V_e$ é de tipo de representação s-finito com $Q(\mathcal{J}_{64})$:

$$E_2 \bullet \xleftarrow{x} e \bullet \begin{array}{c} \curvearrowleft^z \\ \xleftarrow{y} \end{array} \bullet E_1$$

onde $yx = z^2 = xz = zy = 0$.

- $\mathcal{J}_{65} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus P_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus V_{e_1e_2}$ é de tipo de representação s-finito (veja [48]) com $Q(\mathcal{J}_{65})$:

$$E_1^1 \bullet \begin{array}{c} \xleftarrow{z} \\ \xleftarrow{x} \end{array} E_2^1 \bullet \xrightarrow{x} e_1 \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{y_1} \\ \xleftarrow{y_2} \end{array} \bullet e_2$$

onde $y_1x = zy_2 = zx = y_1y_2 = y_2y_1 = 0$.

- $\mathcal{J}_{66} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus P'_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus V_{e_1 e_2}$ é de tipo de representação s-finito com $Q(\mathcal{J}_{66})$:

$$\begin{array}{ccccc} & & z & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ E_1^1 \bullet & & E_2^1 \bullet & \xleftarrow{x} & e_1 \bullet & \xrightarrow{y_1} & \bullet e_2 \\ & & & & \curvearrowright & & \\ & & & & y_2 & & \end{array}$$

onde $y_1 z = x y_2 = x z = y_1 y_2 = y_2 y_1 = 0$.

- $\mathcal{J}_{67} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus P_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus M_n^{(2)}(\mathbb{C})^+ \oplus P_2 \oplus V_{e_1 e_2}$ é de tipo de representação s-finito (veja [48]) com $Q(\mathcal{J}_{67})$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & z_1 & & & & z_2 \\ & \curvearrowright & & & & & \curvearrowleft \\ E_1^1 \bullet & & E_2^1 \bullet & \xrightarrow{x_1} & e_1 \bullet & \xrightarrow{y_1} & \bullet e_2 & \xleftarrow{x_2} & \bullet E_2^2 & \xrightarrow{z_2} & \bullet E_1^2 \\ & & & & \curvearrowright & & & & & & \\ & & & & y_2 & & & & & & \end{array}$$

com $y_i x_i = z_1 y_2 = z_2 y_1 = z_i x_i = y_1 y_2 = y_2 y_1 = 0$, $i = 1, 2$.

- $\mathcal{J}_{68} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus P'_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus M_n^{(2)}(\mathbb{C})^+ \oplus P'_2 \oplus V_{e_1 e_2}$ é de tipo de representação s-finito com $Q(\mathcal{J}_{68}) = Q(\mathcal{J}_{67})$ (se trocamos $E_1^{(i)}$ com $E_2^{(i)}$).
- $\mathcal{J}_{69} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus P_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus M_n^{(2)}(\mathbb{C})^+ \oplus P'_2 \oplus V_{e_1 e_2}$ é de tipo de representação s-finito com $Q(\mathcal{J}_{69})$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & z_1 & & & & z_2 \\ & \curvearrowright & & & & & \curvearrowleft \\ E_1^1 \bullet & & E_2^1 \bullet & \xrightarrow{x_1} & e_1 \bullet & \xrightarrow{y_1} & \bullet e_2 & \xrightarrow{x_2} & \bullet E_2^2 & \xrightarrow{z_2} & \bullet E_1^2 \\ & & & & \curvearrowright & & & & & & \\ & & & & y_2 & & & & & & \end{array}$$

com $y_1 x_1 = x_2 y_1 = z_1 y_2 = y_2 z_2 = z_1 x_1 = x_2 z_2 = y_1 y_2 = y_2 y_1 = 0$.

- $\mathcal{J}_{70} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus P_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus V_{e_1 e_2} \oplus V_{e_2}$ é de tipo de representação s-finito (veja [48]) com $Q(\mathcal{J}_{70})$:

$$\begin{array}{ccccc} & & z & & w \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \curvearrowright \\ E_1^1 \bullet & & E_2^1 \bullet & \xleftarrow{x} & e_1 \bullet & \xrightarrow{y_1} & \bullet e_2 \\ & & & & \curvearrowright & & \\ & & & & y_2 & & \end{array}$$

onde $y_1 z = x y_2 = x z = y_1 y_2 = y_2 y_1 = w y_1 = y_2 w = w^2 = 0$.

- $\mathcal{J}_{71} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus P'_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus V_{e_1 e_2} \oplus V_{e_2}$ é de tipo de representação s-finito

- $\mathcal{J}_{72} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus P_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus V_{e_1e_2} \oplus V_{e_1}$ é de tipo de representação s-mansoso com $Q(\mathcal{J}_{72})$:

onde $y_1z = xy_2 = xz = y_1y_2 = y_2y_1 = wy_2 = y_1w = wz = xw = w^2 = 0$.

- $\mathcal{J}_{73} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus P'_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus V_{e_1e_2} \oplus V_{e_1}$ é de tipo de representação s-mansoso com $Q(\mathcal{J}_{73}) = Q(\mathcal{J}_{72})$ (se nós trocamos $E_1^{(i)}$ com $E_2^{(i)}$).

Para determinar os tipos de representações dos quivers abaixo usamos [46] e [50] para álgebras biseriais especiais e [17] para álgebras com $\text{Rad}^2 = 0$.

- $\mathcal{J}_{74} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e \oplus \Omega \oplus \Psi$ com $\Omega \in \{P, P'\}$ e $\Psi \in \{M, M', N \oplus N'\}$ é de tipo de representação s-finito com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{75} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e \oplus V_e \oplus \Omega \oplus \Psi$ com $\Omega \in \{P, P'\}$ e $\Psi \in \{M, M', N \oplus N'\}$ é de tipo de representação s-mansoso com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{76} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus V_{e_1e_2} \oplus \Omega \oplus \Psi$ com $\Omega \in \{P, P'\}$ e $\Psi \in \{M, M', N \oplus N'\}$ é de tipo de representação s-finito com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{77} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus V_{e_1e_2} \oplus V_{e_2} \oplus \Omega \oplus \Psi$ com $\Omega \in \{P, P'\}$ e $\Psi \in \{M, M', N \oplus N'\}$ é de tipo de representação s-mansoso com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{78} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus M_n^{(2)}(\mathbb{C})^+ \oplus V_{e_1e_2} \oplus \Omega_1 \oplus \Omega_2 \oplus \Psi_1$ com $\Omega_i \in \{P_i, P'_i\}$ e $\Psi_1 \in \{M_1, M'_1, N_1 \oplus N'_1\}$ é de tipo de representação s-finito com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{79} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus M_n^{(2)}(\mathbb{C})^+ \oplus V_{e_1e_2} \oplus \Omega_1 \oplus \Omega_2 \oplus \Psi_1 \oplus \Psi_2$ com $\Omega_i \in \{P_i, P'_i\}$ e $\Psi_i \in \{M_i, M'_i, N_i \oplus N'_i\}$ é de tipo de representação s-mansu com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{80} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus M_n^{(2)}(\mathbb{C})^+ \oplus V_{e_1e_2} \oplus \Omega_1 \oplus \Omega_2 \oplus \Psi_1 \oplus R_2$ com $\Omega_i \in \{P_i, P'_i\}$ e $\Psi_1 \in \{M_1, M'_1, N_1 \oplus N'_1\}$ é de tipo de representação s-finito com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{81} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus M_n^{(2)}(\mathbb{C})^+ \oplus V_{e_1e_2} \oplus \Omega_1 \oplus P_2 \oplus N'_2 \oplus \Psi_1 \oplus R_2$ e $\mathcal{J}_{82} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus M_n^{(2)}(\mathbb{C})^+ \oplus V_{e_1e_2} \oplus \Omega_1 \oplus P'_2 \oplus N_2 \oplus \Psi_1 \oplus R_2$ com $\Omega_1 \in \{P_1, P'_1\}$ e $\Psi_1 \in \{M_1, M'_1\}$ são de tipo de representação s-mansu com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{83} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e \oplus \Omega \oplus R$ com $\Omega \in \{P, P'\}$ é de tipo de representação s-finito com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{84} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e \oplus V_e \oplus \Omega \oplus R$ com $\Omega \in \{P, P'\}$ é de tipo de representação s-finito com $Q(\mathcal{J}_{84})$:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{85} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \Omega_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus V_{e_1 e_2} \oplus R_1$ com $\Omega_1 \in \{P_1, P'_1\}$ é de tipo de representação s-finito com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{86} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \Omega_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus V_{e_1 e_2} \oplus V_{e_2} \oplus R_1$ com $\Omega_1 \in \{P_1, P'_1\}$ é de tipo de representação s-finito com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{87} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus M_n^{(2)}(\mathbb{C})^+ \oplus V_{e_1 e_2} \oplus \Omega_1 \oplus \Omega_2 \oplus R_2$ com $\Omega_i \in \{P_i, P'_i\}$ é de tipo de representação s-finito com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{88} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus M_n^{(2)}(\mathbb{C})^+ \oplus V_{e_1 e_2} \oplus \Omega_1 \oplus \Omega_2 \oplus R_1 \oplus R_2$ com $\Omega_i \in \{P_i, P'_i\}$ é de tipo de representação s-finito com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{89} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e \oplus \Omega$ com $\Omega \in \{P \oplus N, P' \oplus N'\}$ é de tipo de representação s-finito com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{90} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e \oplus \Omega$ com $\Omega \in \{P \oplus N', P' \oplus N\}$ é de tipo de representação s-finito com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{91} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e \oplus V_e \oplus \Omega$ com $\Omega \in \{P \oplus N, P' \oplus N'\}$ é de tipo de representação s-mansu com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{92} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e \oplus V_e \oplus \Omega$ com $\Omega \in \{P \oplus N', P' \oplus N\}$ é de tipo de representação s-finito com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{93} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e \oplus \Omega \oplus \Psi$ com $\Omega \in \{P \oplus N', P' \oplus N\}$ e $\Psi \in \{M, M', N \oplus N'\}$ é de tipo de representação s-mansu com o quiver:

$xy + xz = yx + zx = 0$ e todos outros caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{94} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e \oplus V_e \oplus \Omega \oplus \Psi$ com $\Omega \in \{P \oplus N', P' \oplus N\}$ e $\Psi \in \{M, M', N \oplus N'\}$ é de tipo de representação s-mansu com o quiver:

$xy + xz = yx + zx = 0$ e todos outros caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{95} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus V_{e_1e_2} \oplus \Omega$ com $\Omega \in \{P \oplus N, P' \oplus N'\}$ é de tipo de representação s-finito com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{96} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus V_{e_1e_2} \oplus \Omega$ com $\Omega \in \{P \oplus N', P' \oplus N\}$ é de tipo de representação s-finito com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{97} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus V_{e_1e_2} \oplus V_{e_2} \oplus \Omega$ com $\Omega \in \{P \oplus N', P' \oplus N\}$ é de tipo de representação s-finito com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{98} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus V_{e_1e_2} \oplus V_{e_2} \oplus \Omega$ com $\Omega \in \{P \oplus N, P' \oplus N'\}$ é de tipo de representação s-manso com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{99} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus V_{e_1e_2} \oplus \Omega \oplus \Psi$ com $\Omega \in \{P \oplus N', P' \oplus N\}$ e $\Psi \in \{M, M', N \oplus N'\}$ é de tipo de representação s-manso com o quiver:

$xy + xz = yx + zx = 0$ e todos outros caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{100} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus V_{e_1e_2} \oplus V_{e_2} \oplus \Omega$ com $\Omega \in \{P \oplus N', P' \oplus N\}$ é de tipo de representação s-manso com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{101} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \Omega \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus V_{e_1 e_2} \oplus V_{e_1}$ com $\Omega \in \{P \oplus N', P' \oplus N\}$ é de tipo de representação s-mansu com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{102} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e \oplus \Omega \oplus R$ com $\Omega \in \{P \oplus N', P' \oplus N\}$ é de tipo de representação s-finito com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{103} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e \oplus \Omega \oplus R$ com $\Omega \in \{P \oplus N, P' \oplus N'\}$ é de tipo de representação s-mansu com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{104} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e \oplus V_e \oplus \Omega \oplus R$ com $\Omega \in \{P \oplus N', P' \oplus N\}$ é de tipo de representação s-mansu com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{105} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \Omega_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus V_{e_1 e_2} \oplus R_1$ com $\Omega_1 \in \{P_1 \oplus N'_1, P'_1 \oplus N_1\}$ é de tipo de representação s-finito com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{106} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \Omega_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus V_{e_1 e_2} \oplus V_{e_2} \oplus R_1$ com $\Omega_1 \in \{P_1 \oplus N'_1, P'_1 \oplus N_1\}$ é de tipo de representação s-mansu com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{107} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus M_n^{(2)}(\mathbb{C})^+ \oplus V_{e_1 e_2} \oplus \Omega_1 \oplus \Omega_2$ com $\Omega_1 \in \{P_1 \oplus N'_1, P'_1 \oplus N_1\}$ e $\Omega_2 \in \{P_2, P'_2\}$ é de tipo de representação s-finito com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{108} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus M_n^{(2)}(\mathbb{C})^+ \oplus V_{e_1 e_2} \oplus \Omega_1 \oplus \Omega_2$ com $\Omega_1 \in \{P_1 \oplus N_1, P'_1 \oplus N'_1\}$ e $\Omega_2 \in \{P_2, P'_2\}$ é de tipo de representação s-finito com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{109} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus M_n^{(2)}(\mathbb{C})^+ \oplus V_{e_1 e_2} \oplus \Omega_1 \oplus \Omega_2$ com $\Omega_1 \in \{P_1 \oplus N'_1, P'_1 \oplus N_1\}$ e $\Omega_2 \in \{P_2 \oplus N'_2, P'_2 \oplus N_2\}$ é de tipo de representação s-mansu com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{110} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus M_n^{(2)}(\mathbb{C})^+ \oplus V_{e_1 e_2} \oplus \Omega_1 \oplus \Omega_2$ com $\Omega_1 \in \{P_1 \oplus N'_1 \oplus N'_1, P'_1 \oplus N_1 \oplus N_1\}$ e $\Omega_2 \in \{P_2 \oplus N'_2, P'_2 \oplus N_2\}$ é de tipo de representação s-mansu com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{111} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus M_n^{(2)}(\mathbb{C})^+ \oplus V_{e_1 e_2} \oplus \Omega_1 \oplus \Omega_2$ com $\Omega_1 \in \{P_1 \oplus N'_1 \oplus N'_1, P'_1 \oplus N_1 \oplus N_1\}$ e $\Omega_2 \in \{P_2 \oplus N_2, P'_2 \oplus N'_2\}$ é de tipo de representação s-mansu com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{112} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus M_n^{(2)}(\mathbb{C})^+ \oplus V_{e_1e_2} \oplus \Omega_1 \oplus \Omega_2 \oplus R_2$ com $\Omega_1 \in \{P_1, P'_1\}$ e $\Omega_2 \in \{P_2 \oplus N'_2, P'_2 \oplus N_2\}$ são de tipo de representação s-finito com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{113} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus M_n^{(2)}(\mathbb{C})^+ \oplus V_{e_1e_2} \oplus \Omega_1 \oplus \Omega_2 \oplus R_2$ com $\Omega_i \in \{P_i \oplus N'_i, P'_i \oplus N_i\}$ são de tipo de representação s-finito com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{114} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus M_n^{(2)}(\mathbb{C})^+ \oplus V_{e_1e_2} \oplus \Omega_1 \oplus \Omega_2 \oplus R_2$ com $\Omega_1 \in \{P_1 \oplus N'_1 \oplus N'_1, P'_1 \oplus N_1 \oplus N_1\}$ e $\Omega_2 \in \{P_2 \oplus N'_2, P'_2 \oplus N_2\}$ são de tipo de representação s-mansu com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{115} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus M_n^{(2)}(\mathbb{C})^+ \oplus V_{e_1e_2} \oplus \Omega_1 \oplus \Omega_2 \oplus R_1 \oplus R_2$ com $\Omega_1 \in \{P_1, P'_1\}$ e $\Omega_2 \in \{P_2 \oplus N'_2, P'_2 \oplus N_2\}$ é de tipo de representação s-finito com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{116} = M_n^{(1)}(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus M_n^{(2)}(\mathbb{C})^+ \oplus V_{e_1e_2} \oplus \Omega_1 \oplus \Omega_2 \oplus R_1 \oplus R_2$ com $\Omega_i \in \{P_i \oplus N'_i, P'_i \oplus N_i\}$ é de tipo de representação s-mansu com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{123} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus P_{e_1} \oplus P_{e_2}$ e $\mathcal{J}_{124} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus P'_{e_1} \oplus P'_{e_2}$ são de tipo de representação s-finito com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{125} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus P'_{e_1} \oplus P_{e_2}$ é de tipo de representação s-finito com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{126} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus P_{e_1} \oplus P_{e_2} \oplus V_{e_1}$ e $\mathcal{J}_{127} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus P'_{e_1} \oplus P'_{e_2} \oplus V_{e_1}$ são de tipo de representação s-finito com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{128} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus P_{e_1} \oplus P_{e_2} \oplus V_{e_1} \oplus V_{e_2}$ e $\mathcal{J}_{129} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus P'_{e_1} \oplus P'_{e_2} \oplus V_{e_1} \oplus V_{e_2}$ são de tipo de representação s-manso com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{130} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus P_{e_1} \oplus P_{e_2} \oplus V_{e_1e_3}$ e $\mathcal{J}_{131} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus P'_{e_1} \oplus P'_{e_2} \oplus V_{e_1e_3}$ são de tipo de representação s-finito com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{132} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus P_{e_1} \oplus P_{e_2} \oplus V_{e_1e_2}$ e $\mathcal{J}_{133} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus P'_{e_1} \oplus P'_{e_2} \oplus V_{e_1e_2}$ são de tipo de representação s-mansu com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{134} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus P_{e_1} \oplus P_{e_2} \oplus V_{e_1e_3} \oplus V_{e_3}$ e $\mathcal{J}_{135} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus P'_{e_1} \oplus P'_{e_2} \oplus V_{e_1e_3} \oplus V_{e_3}$ são de tipo de representação s-finito com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- Para $i \in \{123, 126, 128, 130, 132, 134\}$ o s-tipo de álgebra $\mathcal{J}_i \oplus N_s$ coincide com o-tipo de $\mathcal{J}_i$ e para $i \in \{124, 127, 129, 131, 133, 135\}$ o s-tipo de álgebra $\mathcal{J}_i \oplus N'_s$ coincide com o-tipo de $\mathcal{J}_i$.

- $\mathcal{J}_{136} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus P_{e_1} \oplus P_{e_2} \oplus R$ e $\mathcal{J}_{137} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus P'_{e_1} \oplus P'_{e_2} \oplus R$ são de tipo de representação s-finito com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{138} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus P'_{e_1} \oplus P_{e_2} \oplus R$ e $\mathcal{J}_{139} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus P'_{e_1} \oplus P_{e_2} \oplus V_{e_1} \oplus V_{e_2}$ são de tipo de representação s-finito com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

- $\mathcal{J}_{140} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus P'_{e_1} \oplus P_{e_2} \oplus R \oplus V_{e_1}$ e $\mathcal{J}_{141} = M_n(\mathbb{C})^+ \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus P'_{e_1} \oplus P_{e_2} \oplus R \oplus V_{e_2}$ são de tipo de representação s-finito com o quiver:

e todos os caminhos de comprimento 2 são nulos.

Agora continuamos com os módulos especiais para $\mathcal{J}_{\alpha_i} = H(M_n(\mathbb{C}), tr)$, $n \geq 2$. Pela proposição 4.3.9 sabemos que $S_1(\mathcal{J}_{\alpha_i}) = M_n(\mathbb{C})$ e portanto temos um único módulo especial irredutível de dimensão n , $P = \langle p_1, \dots, p_n \rangle$, com ação:

$$\begin{aligned} e_{ii} \cdot p_i &= \tilde{e}_{ij} \cdot p_j = \tilde{e}_{kj} \cdot p_k = \frac{1}{2}p_i, \\ e_{ii} \cdot p_j &= e_{ki} \cdot p_j = 0, \end{aligned}$$

onde $1 \leq i, j, k \leq n$, $i \neq j \neq k$.

A extensão nula de $H(M_n(\mathbb{C}), tr)$ pelo módulo especial P produz uma álgebra de Jordan $\mathcal{J}$ sem unidade. Portanto consideramos a álgebra unital $\tilde{\mathcal{J}} = \mathbb{C}1 + \mathcal{J}$ e pelo lema 4.4.1 temos que estas álgebras possuem o mesmo tipo de representação.

1. $\mathcal{J}_{117} = H(M_n(\mathbb{C}), tr) \oplus \mathbb{C}e \oplus P$. Nós começamos com uma álgebra de Jordan $\mathcal{J}_{117} = H(M_n(\mathbb{C}), tr) \oplus \mathbb{C}e \oplus P$ com unidade $1 = e + \sum_{i=1}^n e_{ii}$. Pelo proposição 1.3.4 e pela proposição 4.3.9 temos que $(\mathcal{J}_{117})_{ss} = \mathbb{C} \oplus M_n(\mathbb{C})$ e pelo lema 4.2.2 obtemos que $S_1(\mathcal{J}_{117})$ é Morita equivalente à $A_{117} = (e + e_{11})S_1(\mathcal{J}_{117})(e + e_{11})$ e $Q_0(A_{117}) = \{e_{11}, e\}$. O próximo passo é escolher uma base para $\text{Rad} A_{117} / \text{Rad}^2 A_{117}$. Por (4.1) temos que

$$\begin{aligned} e_{ii}p_i &= p_i e, & e p_i &= e_{ii} p_i, \\ \tilde{e}_{ki} p_j &= p_j \tilde{e}_{ki} = e_{ii} p_j = p_j e_{ii} = 0, \\ \tilde{e}_{ij} p_j + p_j \tilde{e}_{ij} &= p_i, & \tilde{e}_{ij} p_i + p_i \tilde{e}_{ij} &= p_j, \end{aligned}$$

onde $1 \leq i, j, k \leq n$, $i \neq j \neq k$. Portanto, temos

$$\begin{aligned} (e + e_{11})v_j(e + e_{11}) &= 0, & \tilde{e}_{1j} p_j &= p_k \tilde{e}_{1k}, \\ (e + e_{11})v_1(e + e_{11}) &= e v_1 e_{11} + e_{11} v_1 e = e v_2 \tilde{e}_{12} e_{11} + e_{11} \tilde{e}_{12} v_2 e, \end{aligned}$$

$1 \neq j \neq k \neq 1$. Logo, $\text{Rad} A_{117} / \text{Rad}^2 A_{117}$ é gerado por $e v_2 e_{12} e_{11}$ e $e_{11} e_{12} v_2 e$. Além disso, $v_2^2 = 0$ e então o quiver tem a seguinte forma $Q(A_{117})$:

com $xy = yx = 0$. Portanto, A_{117} é uma álgebra associativa de tipo finito o que implica que $\mathcal{J}_{117}$ é uma álgebra de tipos-finito.

Abaixo segue a lista de todas as álgebras de Jordan $\mathcal{J}$ dos tipos de representação s-finito e s-manso, cuja parte semi-simples é igual a soma direta de $H(M_n(\mathbb{C}), tr)$ e $\mathbb{C}$ e $\text{Rad} \mathcal{J}$ contém P .

- $\mathcal{J}_{118} = H(M_n(\mathbb{C}), tr) \oplus \mathbb{C}e \oplus P^2$ é de tipo de representação s-manso com $Q(\mathcal{J}_{118})$:

com $x_i y_i = y_i x_i = x_1 y_2 + x_2 y_1 = y_2 x_1 + y_1 x_2 = 0$.

- $\mathcal{J}_{119} = H^{(1)}(M_n(\mathbb{C}), tr) \oplus H^{(2)}(M_n(\mathbb{C}), tr) \oplus \mathbb{C}e \oplus P_1 \oplus P_2$ é de tipo de representação s-mansoso com $Q(\mathcal{J}_{119})$:

$$E_2 \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{x_1} \\ \xleftarrow{y_1} \end{array} e \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{x_2} \\ \xleftarrow{y_2} \end{array} \bullet E_1$$

onde $x_2 y_2 = y_1 x_1 = x_1 y_1 + y_2 x_2 = 0$.

- $\mathcal{J}_{120} = H^{(1)}(M_n(\mathbb{C}), tr) \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus P_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus V_{e_1 e_2}$ é de tipo de representação s-mansoso com $Q(\mathcal{J}_{120})$:

$$e_2 \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{x_1} \\ \xleftarrow{y_1} \end{array} e_1 \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{x_2} \\ \xleftarrow{y_2} \end{array} \bullet E_1$$

onde $x_2 y_2 = y_1 x_1 = x_1 y_1 + y_2 x_2 = 0$.

- $\mathcal{J}_{121} = H(M_n(\mathbb{C}), tr) \oplus \mathbb{C}e \oplus P \oplus \Omega$ com $\Omega \in \{R, N, V_e\}$ é de tipo de representação s-finito com o quiver:

$$\bullet \begin{array}{c} \curvearrowright^z \\ \xrightarrow{x} \\ \xleftarrow{y} \end{array} \bullet$$

com $xy = yx = z^2 = zy = xz = 0$.

- $\mathcal{J}_{122} = H(M_n(\mathbb{C}), tr) \oplus \mathbb{C}e \oplus P \oplus \Omega \oplus V_e$ com $\Omega \in \{R, N\}$ é de tipo de representação s-mansoso com o quiver:

$$\bullet \begin{array}{c} \curvearrowright^z \quad \curvearrowright^w \\ \xrightarrow{x} \\ \xleftarrow{y} \end{array} \bullet$$

com $xy = yx = z^2 = zy = xz = w^2 = yw = wx = 0$.

Teorema 4.10.2. *Seja $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \oplus V$, onde $\mathcal{J}_0$ é soma direta de álgebras $\mathbb{C}$, $M_n(\mathbb{C})^+$ e $H(M_n(\mathbb{C}), tr)$ e V é um bimódulo de Jordan sobre $\mathcal{J}_0$ que é a soma direta dos módulos de tipo 1, 2 de Teorema 4.10.1. Então temos as seguintes possibilidades:*

- $\mathcal{J}$ tem tipo de representação s-finito se e somente se $\mathcal{J}$ é uma soma direta das seguintes álgebras: $\mathcal{J}_0$, $\mathcal{J}_{58}$, $\mathcal{J}_{59}$, $\mathcal{J}_{63}$, $\mathcal{J}_{64}$, $\mathcal{J}_{65}$, $\mathcal{J}_{66}$, $\mathcal{J}_{67}$, $\mathcal{J}_{68}$, $\mathcal{J}_{69}$, $\mathcal{J}_{70}$, $\mathcal{J}_{71}$, $\mathcal{J}_{74}$, $\mathcal{J}_{76}$, $\mathcal{J}_{78}$, $\mathcal{J}_{80}$, $\mathcal{J}_{83}$, $\mathcal{J}_{84} - \mathcal{J}_{90}$, $\mathcal{J}_{92}$, $\mathcal{J}_{95} - \mathcal{J}_{97}$, $\mathcal{J}_{102}$, $\mathcal{J}_{105}$, $\mathcal{J}_{107}$, $\mathcal{J}_{108}$, $\mathcal{J}_{112}$, $\mathcal{J}_{113}$, $\mathcal{J}_{115}$, $\mathcal{J}_{116}$, $\mathcal{J}_{121}$, $\mathcal{J}_{123} - \mathcal{J}_{127}$, $\mathcal{J}_{130}$, $\mathcal{J}_{131}$, $\mathcal{J}_{134} - \mathcal{J}_{141}$ e álgebras de tipo s-finito dos Teoremas 4.5.1, 4.6.1, 4.7.2, 4.8.1 e 4.9.1

- $\mathcal{J}$ tem tipo de representação s -manso se e somente se $\mathcal{J}$ é uma soma direta das seguintes álgebras: $\mathcal{J}_{60}, \mathcal{J}_{61}, \mathcal{J}_{62}, \mathcal{J}_{72}, \mathcal{J}_{73}, \mathcal{J}_{75}, \mathcal{J}_{77}, \mathcal{J}_{79}, \mathcal{J}_{81}, \mathcal{J}_{82}, \mathcal{J}_{91}, \mathcal{J}_{93}, \mathcal{J}_{94}, \mathcal{J}_{98}, \mathcal{J}_{99}-\mathcal{J}_{101}, \mathcal{J}_{103}, \mathcal{J}_{104}, \mathcal{J}_{106}, \mathcal{J}_{109}-\mathcal{J}_{111}, \mathcal{J}_{114}, \mathcal{J}_{116}, \mathcal{J}_{118}, \mathcal{J}_{119}, \mathcal{J}_{120}, \mathcal{J}_{122}, \mathcal{J}_{128}, \mathcal{J}_{129}, \mathcal{J}_{132}, \mathcal{J}_{133}$, e álgebras de tipo s -manso dos Teoremas 4.5.1, 4.6.1, 4.7.2, 4.8.1 e 4.9.1 algumas álgebras de tipos-finito.
- Em todos os outros casos $\mathcal{J}$ é de tipo de representação s -selvagem. Em particular, todas essas álgebras são de tipo de representação selvagem, visto que suas álgebras envoltentes universais $U(\mathcal{J})$ tem tipo de representação selvagem.

Referências Bibliográficas

- [1] K. McCrimmon *A taste of Jordan algebras*, Universitext. New York, NY: Springer. 2002, 562 p. pages 1
- [2] P. Jordan *Über Verallgemeinerungsmöglichkeiten des Formalismus der Quantenmechanik*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1933, 209-214. pages 1
- [3] P. Jordan, J. von Neumann, E. Wigner *On algebraic generalization of the quantum mechanical formalism*, Ann. of Math. (2) **36**, (1934), 29-64. pages 2, 9
- [4] E. Zelmanov, *Prime Jordan algebras. II*, Sib. Math. J. **24**, (1983), 73-85. pages 2
- [5] E. Zelmanov *On the restricted Burnside problem. (Russian)*, Sibirsk. Mat. Zh. **30**, no. 6, 68-74, (1989). pages 2
- [6] M. Koecher, *An elementary approach to bounded symmetric domains*, Rice University, Houston, Texas 1969. pages 2
- [7] J. Faraut, A. Korányi *Analysis on symmetric cones*, Oxford Math. Monographs, The Clarendon Press, New York 1994. pages 2
- [8] A. A. Albert, *On Jordan algebras of linear transformations*, Trans. Amer. Math. Soc., **59**, (1946), 524-555. pages 2
- [9] A. A. Albert, *A structure theory for Jordan algebras*, Ann. of Math., **48**, (1947), 546-567. pages 2, 9
- [10] H. Wesseler, *Der Klassifikation der Jordan-Algebren niedriger Dimension*, Staatsexamensarbeit für das Lehramt am Gymnasium, Münster, (1978) 165p. pages 2, 33, 35

- [11] M. Gerstenhaber, *On the deformation of rings and algebras*, Ann. of Math. **79**, (1964), 59-103. pages 3, 19
- [12] S. Eilenberg, *Extensions of general algebras*, Ann. de Soc. Polon. Math., bf 21, (1948), 34-125. pages 3
- [13] N. Jacobson, *Structure and representations of Jordan algebras*, AMS Colloq. Publ. **39**, AMS, Providence 1968. pages 3, 5, 11, 12, 14, 15, 17, 79, 98
- [14] N. Jacobson, *Structure of alternative and Jordan bimodules*, Osaka Math. J. **6**, (1954), 1-71. pages 3, 5, 85, 104, 109
- [15] E. Zelmanov *Bi-representations of infinite-dimensional Jordan algebras. (Russian)*, Sibirsk. Mat. Zh. **27** no. 6, 79-94, (1986). pages 4
- [16] Yu. Drozd, V. Kirichenko, *Finite-dimensional algebras*, Springer-Verlag, Berlin, 1994. pages 4
- [17] P. Gabriel, *Unzerlegbare Darstellungen, I*, Manus. Math., **6**, (1972), 71-103. pages 4, 114
- [18] L. A. Nazarova, *Representations of quivers of infinite type* Izv. Akad. Nauk. Ser., **37**, (1973), 752-791. pages 4
- [19] R. D. Schafer, *An Introduction to Nonassociative Algebras*, Academic Press, New York (1966). pages 5
- [20] F. J. Flanigan, *Algebraic geography: varieties of structure constants*, Pacific J. Math. **27**, (1968), 71-79. pages 5, 19, 23, 27
- [21] F. J. Flanigan, *Straightening out and semi-rigidity in associative algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **138**, (1969), 415-425. pages 5, 19, 27
- [22] I. Kashuba, J. Patera *Graded Contractions of Jordan Algebras and of their representations*, Jour. Phys. A: Math. Gen. **36**, (2003), 12453-12473. pages 6
- [23] A. Jones, H. Merklen, *Representações de álgebras: Métodos diagramáticos*, Publicações do IME-USP, São Paulo, (2000), 192p. pages 6
- [24] R. S. Pierce, *Associative algebras*, Springer-Verlag, Berlin, 1982. pages 6, 77

- [25] A. Albert, *On a certain algebra of quantum mechanics*, Ann. Math. **35**, (1934), 65-73. pages 9
- [26] P. Gabriel, *Finite representation type is open*, proceedings of the international conference on representations of algebras, Carleton University, Ottawa, Ontario 1974, Lecture Notes in Mathematics **488**, (1975), 132-155. pages 19, 20, 24, 28
- [27] M. Gerstenhaber, *On the deformation of rings and algebras. II*, Ann. Math. (2) **84**, (1966), 1-19. pages 19
- [28] S. Page, R. Richardson, *Stable subalgebras of Lie algebras and associative algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **127**, (1967), 302-312. pages 19
- [29] G. Mazzola, *The algebraic and geometric classification of associative algebras of dimension 5*, Manuscripta Math. **27**, (1979), 81-101. pages 5, 20
- [30] Yu. Neretin, *An estimate for the number of parameters defining an n -dimensional algebra*, Izv.Acad.Nauk SSSR Ser. Mat. **51**, (1987), 306-318. pages 20, 43, 45
- [31] A. A. Kirillov, Yu. A. Neretin *The variety A_n of n -dimensional Lie algebra structures*, Transl., II. Ser., Am. Math. Soc. **137**, (1987), 21-30. pages 20
- [32] N. Glassman, *Cohomology of non-associative algebras*, Doctoral Dissertation, Yale univ., New Haven, (1963). pages 22
- [33] A. Borel, *Linear algebraic groups*, New York - Amsterdam: W. A. Benjamin, Inc., (1969) 398p. pages 24
- [34] H. Sherkulov, *Jordan algebras in small dimensions*, Master Theses, University of Novosibirsk, (1989), 29p. pages 28
- [35] G. Mazzola, *Hochschild-cocycles and generic finite schemes*, Comment. Math. Helv. **55**, (1980), 267-293. pages 32
- [36] M. de Montigny, J. Patera, *Discrete and continuous graded contractions of Lie algebras and superalgebras*, J. Phys. A **24**, (1991), 525-547. pages 52, 53, 57, 60, 62, 64, 68

- [37] B. Moody, J. Patera, *Discrete and continuous graded contractions of representations of Lie algebras*, J. Phys. A **24**, (1991), 2227-2257. pages 52, 53, 58, 59, 66, 71
- [38] E. Inönü, E. P. Wigner *Contraction of Lie groups and algebras*, Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. **39**, (1953), 510-524. pages 52
- [39] D. Happel *Deformations of five dimensional algebras*, Ring Theory (Proc. Antwerp. Conf., Univ. Antwerp, Antwerp, 1978), Lect. Notes in Pure and Appl. Math. **51**, (1979), 459-494. pages 20
- [40] A. A. Kirillov *Lectures on the orbit method*, Nauch. Kniga, Novosibirsk, **10** (2002). pages 20
- [41] V. Kac *Classification of simple $\mathbb{Z}$ -graded superalgebras and simple Jordan superalgebras*, Comm. Algebra **13**, (1977), 1375-1400. pages 53
- [42] B. V. Moody, J. Patera *Characters of elements of finite order in Lie groups*, Siam. J. Alg. Disc. Meth. **5**, (1984), 359-383. pages 53, 54
- [43] Yu. Bahturin, I. Shestakov *Gradings of simple Jordan algebras and their relation to the gradings of simple associative algebras*, Comm. Algebra **29**, (2001), 4095-4102. pages 56
- [44] V. Kac, *Automorphisms of finite order of semisimple Lie algebras*, Funct. Anal. and Appl. **3**, (1969), 253-254. pages 54
- [45] Yu. Drozd, *Tame and wild matrix problems*, Repres. Theory, II, Proc. ICRA II, Carleton, 1979, Springer Math. Lect. Notes **832**, (1980), 242-259. pages 76
- [46] Y. Han, *Wild Two-Point Algebras*, J. Algebra **247**, (2002), 57-77. pages 78, 89, 91, 95, 96, 114
- [47] C. M. Ringel, *The Representation Type of Local Algebras*, Springer Lecture Notes **488**, (1975), 282-305. pages 78, 88
- [48] A. Skowronski, J. Waschbusch, *Representation-finite biserial algebras*, J. Reine Angew. Math. **345**, (1983), 172-181. pages 79, 111, 112, 113

- [49] B. Wald, J. Waschbusch, *Tame biserial algebras*, J. Algebra **95**, (1985), 480-500.
pages 79, 111, 112
- [50] K. Bongartz, P. Gabriel, *Covering spaces in representation-theory*, Invent. Math. **65**,
(1982), 331-378. pages 78, 88, 94, 96, 114
- [51] I. Kashuba, S. Ovsienko, I. Shestakov, *On categories of Jordan algebras* em
preparação pages 86
- [52] L. I. Murakami, I. Shestakov, *Irreducible unital right alternative bimodules*, J. Algebra
246, (2001), no.2, 897-914. pages 92