**Topologias enumeravelmente
compactas em grupos abelianos**

Irene Castro Pereira

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU
DE
DOUTOR EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Topologia Conjuntística**
Orientador: **Prof. Dr. Artur Hideyuki Tomita**
Co-orientadora: **Profa. Dra. Ofélia Teresa Alas**

Durante a elaboração deste trabalho a autora recebeu apoio financeiro do CNPq

São Paulo, 18 de junho de 2004

Resumo

Este trabalho contém exemplos e resultados sobre grupos topológicos enumeravelmente compactos.

Mostramos, a partir de um ultrafiltro seletivo sobre ω , a existência de um grupo topológico enumeravelmente compacto de cardinalidade maior que $2^{\mathfrak{c}}$, sem sequências não triviais convergentes. Apresentamos uma condição suficiente para que um grupo abeliano infinito de torção admita, sob a existência de um ultrafiltro seletivo u , uma topologia de grupo topológico u -compacto sem sequências convergentes. Esta condição classifica, sob GCH, os grupos abelianos de torção de que admitem uma topologia de grupo topológico enumeravelmente compacta e sem sequências convergentes. Mostramos também uma condição suficiente para que um grupo abeliano de torção de cardinalidade $\mathfrak{c}$, admita para cada inteiro positivo p , uma topologia de grupo τ tal que $(G, \tau)^p$ é enumeravelmente compacto e $(G, \tau)^q$ não é enumeravelmente compacto para algum $q > p$. Mostramos, usando forcing, que é consistente que para todo $\kappa \leq 2^{\mathfrak{c}}$, existe uma topologia de grupo enumeravelmente compacta no grupo abeliano livre de cardinalidade κ , e κ pode ter cofinalidade enumerável.

Abstract

This work contains examples and results about countably compact topological groups.

We show, from a selective ultrafilter, the existence of a countably compact topological group without non-trivial convergent sequences of cardinality bigger than $2^{\mathfrak{c}}$. We present, under the existence of a selective ultrafilter u , a sufficient condition for an infinite torsion group to admit a u -compact group topology without convergent sequences. This condition, under GCH, classifies the Abelian torsion groups that admit a countably compact group topology without non-trivial convergent sequences. We also show, under the existence of $\mathfrak{c}$ selective ultrafilters, a sufficient condition for an Abelian torsion group of size $\mathfrak{c}$ to admit, for every positive interger p , a group topology τ such that $(G, \tau)^p$ is countably compact and $(G, \tau)^q$ is not countably compact for some $q > p$. We show, consistently, that for every $\kappa \leq 2^{\mathfrak{c}}$, exists a countably compact group topology on the free Abelian group of cardinality κ , and κ may have countable cofinality.

Agradecimentos

Ao Artur por ter sugerido os problemas, pela orientação e também pela amizade.

À Ofélia pela paciência com tantos formulários que eu levei para assinar, e pelo apoio constante.

À Lúcia, Major, António, Samuel, porque ouviram tantas reclamações e sempre me deram força para continuar.

Aproveito também este espaço para dizer que foi uma honra fazer parte do grupo de Topologia do IME-USP. Um grupo de pessoas no qual cada um torce sinceramente pelo sucesso do outro. A gente sabe que não é fácil achar uma turma como esta.

Aos meus amigos do IME e “agregados”: Cecilia, Pablo, Raul, Mário, Bárbara, Gilberto, Aldo, Liane, Daniel, Maité, Nandinho, Claus, Fábio, Marcela, Sônia, Washington, Alice, Nazaré, Sandra gaúcha, Sandra colombiana, Rudimar, Olga, Ronaldo, Gláucio, Hernán, Diane, Juan Carlos, Miguel, Claudia, e todos os que não lembro neste momento.

A mis sobrinos, porque los dejé sin abuela por tantos meses.

Ao Felipe, mais do que um agradecimento é um pedido de desculpas, por te-lho deixado sem mãe neste final de doutorado. Espero poder recuperar o tempo perdido.

Ao Zé por ser o meu companheiro em todas as horas, especialmente nas mais difíceis.

A mi mamá, porque sin su ayuda incondicional nada de esto hubiera sido posible.

Sumário

Introdução	1
1 Conceitos preliminares	7
1.1 Grupos abelianos infinitos	7
1.2 Teoria dos Conjuntos	16
1.3 Forcing	20
1.4 Topologia Geral	23
1.5 $\beta\omega$, P-pontos e ultrafiltros seletivos	27
1.6 Mais sobre os espaços enumeravelmente compactos	29
1.7 Grupos topológicos	31
2 Ultrafiltros seletivos e Grupos de torção u – compactos	34
2.1 Seqüências e ultraproductos	35
2.2 Uma topologia u –compacta para $\mathbb{Z}(r)^{(c)}$	37
2.3 Grupos de torção u –compactos	44
3 Ultrafiltros seletivos e grupos de torção enumeravelmente compactos.	55
3.1 Uma topologia enumeravelmente compacta para $\mathbb{Z}(r)^{(c)}$	56

3.2	Compacidade enumerável e grupos de torção	66
4	Um grupo abeliano livre enumeravelmente compacto cujo tamanho tem cofinalidade enumerável	79
A	Ultrafiltros seletivos de ω	91
B	Grupos abelianos de ordem limitada e subgrupos puros	95
	Referências Bibliográficas	99

INTRODUÇÃO

Em 1944, Halmos mostrou que o grupo $(\mathbb{R}, +)$ admite uma topologia de grupo topológico compacto, e perguntou quais grupos abelianos admitem uma topologia como esta. Em [23] Kaplansky definiu os grupos abelianos algebricamente compactos, o que permitiu avançar bastante na teoria dos grupos topológicos compactos. Por fim em 1958 e 1959, em trabalhos independentes, Harrison [18] e Hulanicki [21] responderam definitivamente a pergunta de Halmos.

A versão pseudocompacta da pergunta de Halmos foi bastante abordada. Em [12] van Douwen obteve a primeira restrição à cardinalidade λ de um grupo topológico pseudocompacto infinito:

$$\lambda \geq \mathfrak{c}, \text{ e se } cf(\lambda) = \omega \text{ então } \lambda \text{ não é limite forte.}$$

Em [8] é exposta uma classificação de boa parte dos grupos abelianos que admitem uma topologia de grupo pseudocompacto. Mais uma vez, como no caso dos grupos compactos a solução foi dada em linguagem de invariantes cardinais.

É natural se perguntar, e assim o fazem Dikranjan e Shakhmatov no final do trabalho [8], sobre a classificação dos grupos que admitem uma topologia de grupo enumeravelmente compacta. Dikranjan e Tkachenko [10] obtiveram a classificação algébrica dos grupos abelianos de cardinalidade $\mathfrak{c}$ que admitem uma topologia de grupo enumeravelmente compacta, utilizando o Axioma de Martin (MA). Recentemente Dikranjan e Shakhmatov [9], baseados nas idéias de [10] obtiveram a classificação dos grupos abelianos da cardinalidade menor ou igual $2^{\mathfrak{c}}$ que admitem uma topologia de grupo enumeravelmente compacto, num modelo de forcing.

É importante notar que, sob o Axioma de Martin, um grupo abeliano de cardinalidade $\mathfrak{c}$ admite uma topologia de grupo enumeravelmente compacta se e somente se admite uma topologia de grupo enumeravelmente compacta sem sequências não triviais convergentes. A existência de grupos enumeravelmente compactos sem sequências não triviais convergentes ainda não foi estabelecida em ZFC, mas existem vários exemplos consistentes. O primeiro exemplo foi obtido por Hajnal e Juhász [17] em 1976, sob a Hipótese do Contínuo (CH). Em 1980 van Douwen [11] obteve outro exemplo sob o Axioma de Martin. Em 2000, Koszmider, Tomita e Watson [24] deram um exemplo sob $\text{MA}_{\text{countable}}$ e em 2003 Garcia-Ferreira, Tomita e Watson [15] mostraram que existe um grupo topológico enumeravelmente compacto sem sequências convergentes, a partir da existência de um ultrafiltro seletivo. Com isto, mostrou-se que o Axioma de Martin não é necessário na construção.

Neste trabalho obtivemos a classificação algébrica dos grupos abelianos de torção de cardinalidade $\mathfrak{c}$ que admitem uma topologia de grupo topológico enumeravelmente compacta sem sequências não triviais convergentes, a partir da existência de um ultrafiltro seletivo. Como GCH implica que existem ultrafiltros seletivos, a classificação comentada acima também vale sob GCH. Também apresentamos o primeiro exemplo de um grupo topológico enumeravelmente compacto sem sequências convergentes de cardinalidade maior que $2^{\mathfrak{c}}$, que por sua vez é o primeiro exemplo obtido sem usar forcing de um grupo topológico enumeravelmente compacto sem sequências convergentes de cardinalidade maior que $\mathfrak{c}$.

Em 1990, Tkachenko [27] mostrou, assumindo CH, que existe uma topologia de

grupo enumeravelmente compacta no grupo abeliano livre de cardinalidade $\mathfrak{c}$. Ele construiu um subgrupo livre e denso de $\mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$ que é enumeravelmente compacto. Neste trabalho $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Dikranjan e Shakhmatov [8] provaram que nenhum grupo livre (não abeliano) admite uma topologia de grupo enumeravelmente compacta. De fato, eles mostraram que todo subgrupo enumeravelmente compacto de um grupo livre Hausdorff é trivial. Motivados por este resultado perguntaram:

Para quais cardinais κ , o grupo abeliano livre de cardinalidade κ , admite uma topologia de grupo enumeravelmente compacta?

Em [24] foi mostrado que é consistente que o grupo livre de cardinalidade $2^{\mathfrak{c}}$ admite uma topologia de grupo enumeravelmente compacta e, portanto, também todo grupo livre de cardinalidade $\kappa \leq 2^{\mathfrak{c}}$ com $\kappa = \kappa^{\omega}$. E se $\kappa \neq \kappa^{\omega}$?

van Douwen, em [12] já tinha deixado a seguinte pergunta:

Se G é um grupo infinito enumeravelmente compacto, é $|G|^{\omega} = |G|$? É pelo menos $\text{cf}(|G|) \neq \omega$?

O próprio van Douwen, em [12], respondeu positivamente a esta pergunta sob GCH. Mas em [31], Tomita respondeu negativamente a pergunta. Ele deu um exemplo de grupo abeliano de ordem 2, enumeravelmente compacto, de cardinalidade $\aleph_{\omega}$. Este exemplo contém seqüências convergentes.

Neste trabalho mostramos que é consistente que existe uma topologia de grupo enumeravelmente compacta, sem seqüências convergentes, no grupo abeliano livre de cardinalidade λ , para cada $\mathfrak{c} \leq \lambda \leq 2^{\mathfrak{c}}$, e que $2^{\mathfrak{c}}$ pode ser “arbitrariamente grande”.

Em particular λ pode ter cofinalidade enumerável. Este resultado foi obtido independentemente do trabalho de Dikranjan e Shakhmatov [9].

Admitindo a existência de um grupo booleano G , infinito, enumeravelmente compacto, sem seqüências convergentes (construído em [11] sob MA), van Douwen obteve sob MA dois grupos enumeravelmente compactos cujo produto não é enumeravelmente compacto. Ele constrói dois subgrupos G_0 e G_1 de G , enumeravelmente compactos tais que $|G_0 \cap G_1| = \omega$, com isto $G_0 \times G_1$ não pode ser enumeravelmente compacto já que contém a diagonal, um subconjunto enumerável infinito e fechado. Utilizando outra técnica Hart e van Mill [19], obtiveram, utilizando $\text{MA}_{\text{countable}}$, um grupo enumeravelmente compacto cujo quadrado não é enumeravelmente compacto. Ainda é um problema aberto se existe um modelo de ZFC no qual o produto de grupos enumeravelmente compactos seja enumeravelmente compacto.

No *Open Problems in Topology* [3], Comfort perguntou para quais cardinais κ existe um grupo topológico G tal que G^λ é enumeravelmente compacto para todo $\lambda < \kappa$, mas G^κ não é. Recentemente [29] Tomita deu uma resposta afirmativa para todo cardinal finito, sob $\text{MA}_{\text{countable}}$.

Neste trabalho, admitindo a existência de $\mathfrak{c}$ ultrafiltros seletivos, também obtivemos para cada inteiro p , exemplos de grupos topológicos G tais que G^p é enumeravelmente compacto, mas existe $q > p$ tal que G^{q+1} não é enumeravelmente compacto.

Depois de feita a introdução histórica, vamos descrever nosso trabalho capítulo a capítulo.

No Capítulo 1, apresentamos conceitos e propriedades sobre Grupos abelianos, Teoria dos Conjuntos e Topologia Geral, que serão utilizados com familiaridade no restante do trabalho.

No Capítulo 2, apresentamos uma condição suficiente para que um grupo abeliano de torção admita uma topologia de grupo topológico u -compacto e sem seqüências convergentes, onde u é um ultrafiltro seletivo sobre ω . Notamos que se G é um grupo topológico u -compacto, então G^κ é enumeravelmente compacto para todo cardinal κ . Na primeira seção do capítulo desenvolvemos a construção para o grupo $\mathbb{Z}(r)^{(\mathfrak{c})}$ com r primo, que por ser um espaço vetorial facilita as contas e achamos que permite enxergar a técnica utilizada com mais clareza.

No Capítulo 3, mostramos uma condição suficiente para que um grupo de torção G de cardinalidade $\mathfrak{c}$ admita, para cada inteiro positivo p , uma topologia de grupo tal que G^p é enumeravelmente compacto, mas existe $q > p$ tal que G^{q+1} não é enumeravelmente compacto, sob a existência de $\mathfrak{c}$ ultrafiltros seletivos.

No Capítulo 4, usando forcing, construímos um subgrupo livre de $\mathbb{T}^\mathfrak{c}$ que é enumeravelmente compacto e sem seqüências convergentes, de cardinalidade $2^\mathfrak{c}$.

Este trabalho possui dois apêndices. O objetivo de ambos é o mesmo: aprofundar um pouco mais em algumas das propriedades que aparecem só citadas no primeiro capítulo, com o fim de torná-las mais “naturais” para o leitor que não está acostumado a trabalhar com elas. No Apêndice A nos concentramos nos ultrafiltros seletivos sob

ω e no Apêndice B em algumas propriedades algébricas.

Capítulo 1

Conceitos preliminares

Neste capítulo fazemos um resumo das definições e propriedades que serão usadas neste trabalho e também fixamos algumas notações.

1.1 Grupos abelianos infinitos

Vamos introduzir aqui os conceitos algébricos que aparecem ao longo desta tese. Não desenvolvemos nenhuma demonstração nesta seção, mas por se tratar de um tópico que não faz estritamente parte da Topologia Conjuntística, achamos conveniente incluir um apêndice para os leitores interessados em ver alguns conceitos com mais detalhe. Para estudar as propriedades dos grupos abelianos utilizamos o livro de Fuchs [14] e o livro de Kaplansky [23].

Um grupo abeliano é um par $(G, +)$ onde G é um conjunto tal que para cada par de elementos a, b de G está associado um elemento $a + b$ de G , chamado *soma* de a e b ; existe um elemento $0 \in G$, o zero, tal que $a + 0 = a$, $\forall a \in G$; para cada $a \in G$ existe

um elemento $x \in G$ com $a + x = 0$, $x = -a$ é o *inverso* de a ; finalmente $(G, +)$ satisfaz as propriedades associativa e comutativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$ e $a + b = b + a$, $\forall a, b, c \in G$.

Subgrupos e geradores

A soma $a + a + \dots + a$ de n termos iguais a a é abreviada por na ou $n.a$. Um elemento na , com n inteiro é chamado um múltiplo de a .

Um subgrupo de $(G, +)$ é um par $(H, +)$, onde H é um subconjunto de G , $+$ é a restrição da operação definida em G e $(H, +)$ é um grupo. Em geral, vamos omitir a operação e falar que H é subgrupo de G . Observamos que G e $\{0\}$ são subgrupos de G . Um subgrupo de G diferente de G é um *subgrupo próprio*.

Se H é um subgrupo de G , seja a relação de equivalência definida em G por

$$a \sim_H b \iff a - b \in H.$$

então $G/H = \{a + H : a \in G\}$ com a soma definida por $(a + H) + (b + H) = (a + b) + H$ é também um grupo abeliano.

Seja $\{H_i : i \in I\}$ é uma família de subgrupos de G , então $\bigcap_{i \in I} H_i$ é também um subgrupo de G .

Se S é um subconjunto de G , o símbolo $\langle S \rangle$ denotará o subgrupo de G gerado por S , isto é, a intersecção de todos os subgrupos de G que contém S . Se $S = \{a_i : i \in I\}$, também escrevemos $\langle S \rangle = \langle a_i \rangle_{i \in I}$. Este grupo $\langle S \rangle$ consiste em todas as somas da forma $n_1 a_1 + \dots + n_k a_k$ (combinação linear), com $a_i \in S$ e n_i inteiro, e k um número natural. Se $\langle S \rangle = G$, S é dito um *sistema de geradores de G* e os elementos de S são chamados *geradores de G* . O grupo $\langle a \rangle$, é o *grupo cíclico* gerado por a .

A ordem $o(a)$, de um elemento a do grupo, é o menor natural $n \neq 0$ tal que $na = 0$ ou ∞ no caso em que $na \neq 0$ para todo número natural $n \neq 0$. Se todo elemento do grupo G tem ordem finita, G é chamado *grupo de torção*, e se todo elemento não nulo de G tem ordem infinita, G é um grupo livre de torção. Um *grupo primário* é um grupo tal que todos os seus elementos tem ordem igual a potência do número primo r fixado. Também é chamado de r -grupo.

Para um grupo G e um inteiro n , seja

$$nG = \{na : a \in G\}$$

e para $n > 0$,

$$G[n] = \{a : a \in G, na = 0\}.$$

Então $a \in nG$ se e somente se a equação $nx = a$ tem solução em G , e $a \in G[n]$ se e somente se $o(a)|n$ (a ordem do elemento a divide n). nG e $G[n]$ são subgrupos de G .

Homomorfismos.

Sejam G e H grupos abelianos. Um função $f : G \rightarrow H$ é um homomorfismo de grupos se $f(a+b) = f(a) + f(b)$ para todo $a, b \in G$. Todo homomorfismo da origem a dois subgrupos: $\text{Ker } f$ subgrupo de G e $\text{Im } f$ subgrupo de H . O kernel de f , é o conjunto dos elementos $a \in G$ que verificam $f(a) = 0$, e a imagem de f , é o conjunto dos elementos b de H tais que existe algum $a \in G$ com $f(a) = b$. Vamos usar a notação $f(G)$ para $\text{Im } f$. Se f é sobrejetivo, dizemos que é um *epimorfismo*, se f é injetivo dizemos que é um *monomorfismo* e se f é bijetivo dizemos que é um *isomorfismo*. Se $f : G \rightarrow H$ é um isomorfismo, os grupos G e H são isomorfos e denotamos $G \cong H$. Observamos que se $f : G \rightarrow H$ é um monomorfismo, então G e $\text{Im } f$ são isomorfos.

Exemplos.

(a) *Grupos cíclicos*: São os grupos gerados por um único elemento. Se o elemento gerador for de ordem infinita, então o grupo cíclico gerado é isomorfo ao grupo $(\mathbb{Z}, +)$ dos inteiros. Se o elemento gerador for de ordem finita n , então o grupo cíclico gerado é isomorfo ao grupo aditivo dos inteiros *mod* n ($a = b \pmod{n}$ se $n|a - b$), o grupo $(\mathbb{Z}(n), +)$. Isto é um grupo cíclico $\langle a \rangle$ de ordem n consiste dos elementos $0, a, 2a, \dots, (n-1)a$.

(b) *Os grupos de racionais*: o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais com a soma, é um grupo abeliano e é um exemplo de grupo que não é finitamente gerado, ou seja não possui um conjunto finito de geradores. Neste grupo temos o subgrupo $\mathbb{Z}$ dos inteiros. O Grupo quociente $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ é conhecido como o grupo dos *racionais mod* 1. Este grupo é muito importante para a teoria de grupos divisíveis.

(c) *O grupo $\mathbb{Z}(r^\infty)$* : Seja r um número primo, e seja R o grupo aditivo dos números racionais cujos denominadores são potências de r . O grupo quociente $R/\mathbb{Z}$ é denotado por $\mathbb{Z}(r^\infty)$.

Somas diretas.

Sejam F e H subgrupos de G tais que:

- (i) $F + H = G$, onde $F + H = \{b + c : b \in F, c \in H\}$;
- (ii) $F \cap H = \{0\}$.

Então dizemos que o grupo G é a soma direta interna de F e H . Isto significa que todo elemento de G pode se escrever de forma única como soma de um elemento de F e um elemento de H .

Seja $\{H_i : i \in I\}$ um conjunto de grupos. Um vetor sobre o conjunto $\prod_{i \in I}$ tem exatamente uma coordenada b_i para cada $i \in I$, com $b_i \in H_i$. Este vetor pode ser

interpretado como uma função definida no conjunto I tal que $f(i) = b_i \in H_i$, para cada $i \in I$. A igualdade e soma de vetores se define coordenada a coordenada. Os vetores assim definidos formam um grupo chamado *produto direto* dos grupos H_i .

Se considerarmos só aqueles vetores $(\dots, b_i, \dots)$ tais que $b_i = 0$ para todos menos um número finito de $i \in I$, temos um grupo G chamado de *soma direta* (externa) dos grupos H_i , $G = \oplus_{i \in I} H_i$. Se κ é um cardinal e G é a soma direta de κ cópias do grupo H , escrevemos $G = H^{(\kappa)}$. Se G é o produto direto de κ cópias de H , escrevemos $G = H^\kappa$.

Seja $G = \oplus_{i \in I} H_i$, e seja $a \in G$ então $a = (\dots, b_i, \dots)$ e $\{i \in I : b_i \neq 0\}$ é finito. Este conjunto é chamado *suporte de a* e vai ser denotado por $\text{supp}(a)$.

Independência linear.

Um conjunto $\{a_1, \dots, a_k\}$ de elementos de um grupo G é chamado *linearmente independente* ou simplesmente *independente* se

$$n_1 a_1 + \dots + n_k a_k = 0 \quad (n_i \in \mathbb{Z})$$

implica

$$n_1 a_1 = \dots = n_k a_k = 0.$$

Isto significa que $n_i = 0$ se a ordem de a_i é infinita e que a ordem de a_i divide n_i se esta for finita. Um conjunto de elementos de G é *dependente* se não for independente. Observamos que em geral não é verdade que um elemento numa família dependente possa se escrever como combinação linear dos outros elementos.

Uma família infinita $L = \{a_i : i \in I\}$ de elementos de G é chamada independente, se toda sub-família finita de L for independente.

Lema 1.1. *Uma família $L = \{a_i : i \in I\}$ de elementos de G é independente se e somente se o subgrupo gerado por L é a soma direta dos grupos cíclicos $\langle a_i \rangle$, $i \in I$.*

$a \in G$ depende de um subconjunto L de G , se existe uma relação de dependência

$$0 \neq na = n_1a_1 + \dots + n_ka_k,$$

onde $a_i \in L$ e n, n_i são inteiros.

Uma família independente M de G é chamada *maximal* se não existe uma família independente de G que contenha M propriamente. O *rank* $r(G)$ de um grupo G é a cardinalidade de uma família independente maximal que contém só elementos de ordem infinita e elementos de ordem a potência de um número primo. Se considerarmos uma família maximal só com elementos de ordem infinita, então a cardinalidade desta família é chamada *rank livre de torção*, $r_0(G)$. O p -*rank* $r_p(G)$ de G é definido analogamente, considerando só elementos cujas ordens são potências de um número primo fixo p .

Teorema 1.2. *Os cardinais $r(G)$, $r_0(G)$ e $r_p(G)$ são invariantes do grupo G , isto é não dependem da família independente maximal considerada.*

Grupos de torção.

Vamos ver algumas propriedades específicas dos grupos de torção.

Teorema 1.3. *Todo grupo abeliano de torção é soma direta de grupos primários.*

De fato, se G é um grupo de torção e G_r é o subgrupo formado pelos elementos de G que tem ordem uma potência de r , então $G = \bigoplus_r G_r$, onde r percorre o conjunto dos números primos. Por exemplo, seja o grupo cíclico $\mathbb{Z}(n)$, onde n tem decomposição

em fatores primos $r_1^{k_1} \dots r_t^{k_t}$, então $\mathbb{Z}(n) = \mathbb{Z}(r_1^{k_1}) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}(r_t^{k_t})$.

O grupo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ é um grupo de torção e a sua componente primária para o primo r é o grupo $\mathbb{Z}(r^\infty)$. Então $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ é a soma direta de todos os grupos $\mathbb{Z}(r^\infty)$.

Dizemos que um grupo G é *de ordem limitada* se é um grupo de torção e existe um inteiro positivo n tal que $nG = 0$ ou o que é equivalente que $G[n] = G$. Se $m = \min\{n > 0 : nG = 0\}$ dizemos que o grupo G tem ordem m .

Teorema 1.4. *Um grupo de ordem limitada é soma direta de grupos cíclicos.*

Observamos que se L é um subconjunto de G , $f : \langle L \rangle \rightarrow H$ é um homomorfismo de grupos e $a \in G$ é tal que $L \cup \{a\}$ é independente, então existe um homomorfismo $g : \langle L \cup \{a\} \rangle \rightarrow H$ tal que $h|_{\langle L \rangle} = f$. Mais ainda, se a ordem de a for infinita $h(a)$ pode ser escolhida entre todos os elementos de H , e se $\text{ord}(a) = n$, $h(a)$ pode ser escolhida entre todos os elementos $b \in H$ tais que $\text{ord}(b) | \text{ord}(a)$.

Grupos divisíveis e subgrupos puros.

Dizemos que um elemento x do grupo G é divisível pelo inteiro n , se existe $y \in G$ tal que $x = ny$. Um grupo G é *divisível* se para cada $x \in G$ e cada inteiro n , x é divisível por n . ($G = nG$, $\forall n \in \mathbb{Z}$).

Um subgrupo H do grupo G é *puro* se $nH = H \cap nG \forall n \in \mathbb{Z}$.

Teorema 1.5. *Um subgrupo puro de ordem limitada é um somando direto do grupo.*

Invariantes de Ulm–Kaplansky.

Sejam r um número primo e G um r -grupo. Para cada ordinal α definimos um subgrupo G_α de G , como segue:

$$G_0 = G;$$

$$G_\alpha = r.G_\beta \text{ se } \alpha = \beta + 1,$$

$$G_\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} G_\beta \text{ se } \alpha \text{ é um ordinal limite.}$$

Então existe um ordinal γ tal que $G_{\gamma+1} = G_\gamma$, e daí para a frente a sequência permanece constante. Como $G_\gamma = r.G_\gamma$, temos que G_γ é um subgrupo divisível de G , é o maior subgrupo divisível de G . Se G não tem subgrupo divisíveis, temos uma sequência de subgrupos que começa em G e acaba em 0.

Seja R o subgrupo de G formado pelos elementos de ordem r , e seja $R_\alpha = R \cap G_\alpha$, para cada $\alpha < \gamma$. O quociente $R_\alpha/R_{\alpha+1}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Z}(r)$. A dimensão $f(\alpha)$ deste espaço vetorial é chamada α -ésima invariante de Ulm–Kaplansky de G .

Vamos ver um exemplo. Seja G um grupo cíclico de ordem r^k . Se $n \geq k$, então G_n, R_n e R_n/R_{n+1} são todos $\{0\}$, portanto $f(n) = 0$. Se $n \leq k-2$, então G_n é cíclico de ordem r^{k-n} , G_{n+1} é seu único subgrupo de ordem r^{k-n-1} , R_n e R_{n+1} são cíclicos de ordem r , $R_n/R_{n+1} = 0$, e $f(n) = 0$. Se $n = k-1$, vemos que $f(k-1) = 1$.

Baseados na idéia intuitiva deste exemplo, podemos concluir que: *se G é soma direta de grupos cíclicos, então a sua n -ésima invariante de Ulm–Kaplansky $f(n)$ é precisamente a quantidade de termos cíclicos de ordem r^{n+1} .*

Portanto, para aqueles grupos que são soma direta de grupos cíclicos, as invariantes de Ulm–Kaplansky, nos dão uma caracterização do grupo.

Lema 1.6. *Para um grupo abeliano G de ordem n e cardinalidade $\mathfrak{c}$ são equivalentes:*

(i) *para cada divisor próprio d de n , o subgrupo dG ou é finito ou tem cardinalidade $\mathfrak{c}$,*

(ii) para cada componente primária G_r de G , o último invariante infinito de Ulm–Kaplansky de G_r é $\mathfrak{c}$.

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii): Se λ é a invariante de Ulm–Kaplansky de G_r correspondente a $\mathbb{Z}(r^k)$, por hipótese temos que $r^k G$ ou é finito ou tem cardinalidade $\mathfrak{c}$.

$$r^k G = \{x \in G : \exists y \in G, x = r^k \cdot y\}$$

Se $r^k G$ é finito, então $\forall k' \leq k$ a invariante de Ulm–Kaplansky correspondente a $\mathbb{Z}(r^{k'})$ é um cardinal finito. Se $|r^k G| = \mathfrak{c}$ então existe $k' \leq k$ tal que a invariante de Ulm–Kaplansky correspondente a $\mathbb{Z}(r^{k'})$ é $\mathfrak{c}$.

Portanto a última invariante infinita de G_r é $\mathfrak{c}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Seja d um divisor próprio de n e seja $r_1^{k_1} \dots r_s^{k_s}$ a decomposição de d em fatores primos. Se para algum $1 \leq i \leq s$ a última invariante infinita de Ulm–Kaplansky de G_{r_i} é a correspondente a $\mathbb{Z}(r_i^k)$ com $k \leq k_i$ então $|dG| = \mathfrak{c}$. Caso contrário dG é finito. $\square$

Grupos livres.

Um *grupo abeliano livre* é um grupo que é soma direta de grupos cíclicos infinitos. Isto é, é um grupo da forma

$$F = \oplus_{i \in I} \langle x_i \rangle$$

onde a ordem de cada x_i é ∞ .

Então F consiste de todas as combinações lineares finitas

$$g = n_1 x_{i_1} + \dots + n_k x_{i_k}$$

com $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ diferentes, os n_j inteiros não nulos, e k um número natural. combinações lineares são o mesmo elemento de F se e somente se diferem só na ordem

dos somandos.

Se $X = \{x_i\}_{i \in I}$ e F é o grupo formado por todas as expressões formais como acima, dizemos que X é um conjunto livre de geradores para F .

O grupo livre F está determinado pela cardinalidade κ do conjunto de índices I . Se escrevemos F_κ para o grupo gerado por um conjunto livre de cardinalidade κ temos

Proposição 1.7. *Os grupos livres F_κ e F_λ são isomorfos se e somente se $\kappa = \lambda$.*

Teorema 1.8. *Um conjunto $X = \{x_i\}_{i \in I}$ de geradores de um grupo F é um conjunto livre de geradores se, e somente se, toda função $f : X \rightarrow A$, de X num grupo A , pode ser estendida a um homomorfismo $\phi : F \rightarrow A$.*

Teorema 1.9. *Um subgrupo de um grupo livre é também um grupo livre.*

1.2 Teoria dos Conjuntos

A referência utilizada para os conceitos conjuntistas é o livro de Kunen [25] e o livro de Jech [22]. Trabalharemos no contexto da axiomática de Zermelo–Fraenkel com o Axioma da Escolha (ZFC).

Assumiremos conhecidas as operações básicas com conjuntos assim como as noções de função, relação de ordem e boa ordem.

Vamos fixar algumas notações. $A \setminus B$ será a notação usada para a diferença entre dois conjuntos A e B . Se $f : X \rightarrow Y$ é uma função, denotaremos $\text{dom}(f)$ e $\text{im}(f)$ o domínio e a imagem de f respectivamente. Se $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ então

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} \text{ e } f^{-1}(B) = \{x \in X : \exists b \in B, f(x) = b\}.$$

A restrição da função f ao conjunto A será denotada por $f \upharpoonright_A$.

Se X e Y são conjuntos, então ${}^Y X$ denotará o conjunto das funções $f : Y \rightarrow X$.

Em particular ${}^\omega X$ denotará o conjunto das seqüências em X . Se $f \in {}^\omega X$ e A é um subconjunto infinito de ω chamamos a função $f \upharpoonright_A$ uma *subseqüência* de f . Se existe um ponto $x \in X$ tal que $f(n) = x$ para todo $n \in A$ dizemos que f é constante em A , e se o conjunto $\omega \setminus \{n \in A : f(n) = x\}$ é finito, dizemos que f é *trivial* em A .

Um conjunto A é dito transitivo se cada elemento de A é também um subconjunto de A . Um conjunto A é um *ordinal* se é transitivo e bem ordenado por $\in$. Observamos que os elementos de um ordinal são também ordinais. Usaremos as letras gregas $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ para designar ordinais. Se α e β são ordinais, utilizamos a expressão $\alpha < \beta$ como equivalente a $\alpha \in \beta$.

Se X é um conjunto de ordinais, então $\sup(X) = \cup X$ e se $X \neq \emptyset$, $\min(X) = \cap X$. Seja α um ordinal. O sucessor de α é o ordinal $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$. Um ordinal α é chamado ordinal sucessor se existe um ordinal β tal que $\alpha = \beta + 1$, e é chamado ordinal limite se $\alpha \neq 0$ e α não é sucessor.

Dois conjuntos A e B são equipotentes se existe uma função bijetiva $f : A \rightarrow B$. Se A é um conjunto bem ordenado, define-se a cardinalidade A , $|A|$, como o menor ordinal equipotente a A . Sob o Axioma da Escolha, todo conjunto admite uma boa ordem e portanto está definida a cardinalidade de todo conjunto. ω denota o conjunto de todos os números naturais, e é o menor ordinal limite. Dizemos que um conjunto é enumerável se tem cardinalidade menor ou igual a ω . Um *cardinal* é um ordinal α tal que $\alpha = |\alpha|$. Usaremos as letras gregas λ, κ para denotar cardinais.

Se λ é um cardinal, o cardinal sucessor de λ é denotado por λ^+ e é o menor cardinal estritamente maior que λ . Todo cardinal infinito é da forma ω_α onde α é um ordinal e ω_α é definido por:

- (1) $\omega_0 = \omega$;
- (2) $\omega_{\alpha+1} = (\omega_\alpha)^+$;

(3) Se γ é um ordinal limite, $\omega_\gamma = \sup\{\omega_\alpha : \alpha < \gamma\}$.

Sejam α e β ordinais. Se $f : \alpha \rightarrow \beta$, dizemos que f é cofinal se $\text{im}(f)$ é não limitada em β . A *cofinalidade* de β é o menor α tal que existe uma função cofinal de α em β . Neste caso escrevemos $\text{cf}(\beta) = \alpha$.

Dizemos que um ordinal β é *regular* se β é um ordinal limite e $\text{cf}(\beta) = \beta$.

Lema 1.10. (AC) *Se κ é um cardinal infinito, então κ^+ é regular.*

Se X é um conjunto denotamos por $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X . Pelo teorema de Cantor, temos que $|X| < |\mathcal{P}(X)|$. Então $\omega < 2^\omega = |\mathcal{P}(\omega)|$. A Hipótese do Contínuo (CH) é a asserção: $2^\omega = \omega_1$ e a Hipótese Generalizada do Contínuo (GCH) é a asserção: $2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1}$, para todo ordinal α . O cardinal 2^ω será denotado por $\mathfrak{c}$.

Lema 1.11. (AC + GCH) *Sejam $\kappa, \lambda \geq 2$ cardinais tais que pelo menos um deles é infinito, então*

- (1) $\kappa \leq \lambda$ implica que $\kappa^\lambda = \lambda^+$.
- (2) $\kappa > \lambda \geq \text{cf}(\kappa)$ implica que $\kappa^\lambda = \kappa^+$.
- (3) $\lambda < \text{cf}(\kappa)$ implica que $\kappa^\lambda = \kappa$.

Definição 1.12. Uma família de conjuntos $\mathcal{A}$ é chamada um Δ -sistema se existe um conjunto fixo R , chamado raiz do Δ -sistema, tal que $A \cap B = R$ para todos os conjuntos $A, B \in \mathcal{A}$, com $A \neq B$.

Se A é um conjunto e λ é um cardinal, definimos:

$$[A]^\lambda = \{B \subseteq A : |B| = \lambda\} \text{ e } [A]^{<\lambda} = \{B \subseteq A : |B| < \lambda\}$$

Lema 1.13. (*do Δ -sistema*) *Seja κ um cardinal infinito. Seja $\theta > \kappa$ regular e tal que $\forall \alpha < \theta (|\alpha^{<\kappa}| < \theta)$. Assuma que $|\mathcal{A}| \geq \theta$ e que $\forall x \in \mathcal{A} (|x| < \kappa)$, então existe $B \subset \mathcal{A}$, tal que $|B| = \theta$ e B forma um Δ -sistema.*

Dado um conjunto X , um *filtro* sobre X é uma família $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ que satisfaz:

- (i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{F}$;
- (ii) Se A, B são elementos de $\mathcal{F}$, então $A \cap B \in \mathcal{F}$;
- (iii) Se $A \in \mathcal{F}$, $B \subseteq X$ e $A \subseteq B$, então $B \in \mathcal{F}$.

Um *ultrafiltro* sobre X é um filtro sobre X que é maximal no sentido da inclusão. Vamos enumerar algumas propriedades dos ultrafiltros:

- (1) Um filtro $\mathcal{F}$ sobre X é um ultrafiltro se e somente se para cada subconjunto A de X tem-se que ou $A \in \mathcal{F}$ ou $X \setminus A \in \mathcal{F}$.
- (2) Se $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ satisfaz a propriedade da intersecção finita, então existe algum ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre X tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.
- (3) Se $\mathcal{U}$ é um ultrafiltro sobre X , então $\bigcap \mathcal{U}$ ou é vazia ou possui um único elemento.

Neste trabalho vamos nos concentrar nos ultrafiltros sobre ω , que vamos denotar com as letras u e v . Um ultrafiltro u sobre ω é dito principal se existir $n \in \omega$ tal que $u = \{A \subseteq \omega : n \in A\}$; um ultrafiltro sobre ω que não é principal é chamado *ultrafiltro livre*. Observamos que pela propriedade (3) acima, se u é um ultrafiltro livre, então $\bigcap u = \emptyset$. Ultrafiltros livres de ω não possuem como elementos subconjuntos finitos de ω .

Como falamos no começo do capítulo, neste trabalho utilizamos o sistema axiomático denominado ZFC ($ZF + AC$). Vamos falar um pouco de *consistência* e *independência*. Se S é um conjunto de sentenças e φ é uma fórmula, dizemos que S *prova* φ se houver uma dedução formal de φ a partir de S . Neste caso φ é dito um *teorema* de S e a correção dos métodos de dedução garante que φ é verdadeira em todos os modelos de

S . Um conjunto de fórmulas é dito *consistente* se ele não puder provar contradições. Todo conjunto consistente de fórmulas possui um modelo. φ é dita consistente com S se $S \cup \{\varphi\}$ for consistente o que é equivalente a dizer que existe algum modelo de S no qual φ é verdadeira. Neste caso, se M é um modelo de S no qual φ é verdadeira, escrevemos $(\varphi)^M$. φ é dita *independente* de S se tanto φ como a negação de φ forem consistentes com S . Por exemplo, o Axioma da escolha e a hipótese do contínuo são independentes de ZF.

Neste trabalho “Teorema” significa “teorema de ZFC”, nas demonstrações de resultados de consistência que utilizem hipóteses ou axiomas adicionais, essas hipóteses serão destacadas.

1.3 Forcing

Nesta seção pretendemos dar uma idéia muito geral sobre forcing. A referência básica para este tópico é o livro de Kunen [25].

Forcing é uma técnica, criada por Cohen, no ano 1964, para produzir modelos de ZFC que satisfazem diversas propriedades matemáticas.

A idéia é a seguinte: assumindo que existe um modelo transitivo enumerável M de ZFC, uma ordem parcial $\mathbb{P}$ em M e um $\mathbb{P}$ -genérico G sobre M , obter um modelo transitivo e enumerável para ZFC, chamado $M[G]$ que satisfaz $M \subseteq M[G]$, $o(M) = o(M[G])$ e $G \in M[G]$.

Definição 1.14. Uma *ordem parcial* é uma terna $\langle \mathbb{P}, \leq, \mathbf{1} \rangle$ tal que $\leq$ ordena $\mathbb{P}$ parcialmente e $\mathbf{1}$ é um elemento máximo de $\mathbb{P}$.

Definição 1.15. $D \subset \mathbb{P}$ é *denso* em $\mathbb{P}$ se e somente se para cada $p \in \mathbb{P}$, existe $q \in D$

tal que $q \leq p$.

Definição 1.16. $\mathbb{G}$ é $\mathbb{P}$ -genérico sobre M se satisfaz:

- (a) $\forall p, q \in \mathbb{G}$ existe $r \in \mathbb{G}$ tal que $r \leq p$ e $r \leq q$;
- (b) $\forall p \in \mathbb{G}, \forall q \in \mathbb{P}$, se $q \leq p$ então $q \in \mathbb{G}$;
- (c) para todo denso $D \subset \mathbb{P}$, se $\dot{d} \in M$ então $\mathbb{G} \cap D \neq \emptyset$.

Lema 1.17. Se M é enumerável e $p \in \mathbb{P}$, então existe $\mathbb{G}$ um $\mathbb{P}$ -genérico sobre M tal que $p \in \mathbb{G}$.

É importante destacar que, em geral, um $\mathbb{P}$ -genérico sobre M não pertence a M . $M[\mathbb{G}]$ é a menor extensão de M a um modelo transitivo enumerável para ZFC, contendo $\mathbb{G}$. Em geral temos $M \neq M[\mathbb{G}]$. Os axiomas adicionais a ZFC que $M[\mathbb{G}]$ satisfaz, dependem das propriedades combinatórias da ordem parcial $\mathbb{P}$, em M . Isto é, se queremos que uma sentença ψ seja um axioma de $M[\mathbb{G}]$, temos que construir $\mathbb{P}$ com as propriedades combinatórias apropriadas. Os elementos de $\mathbb{P}$ são condições que dizem alguma coisa a respeito de $\mathbb{G}$ ou de algum objeto que será construído a partir de $\mathbb{G}$. Os moradores de M não podem construir um $\mathbb{G}$ que seja $\mathbb{P}$ -genérico sobre M . Eles não sabem o que $\mathbb{G}$ é ou o que os objetos construídos a partir de $\mathbb{G}$ são, mas tem nomes para eles. Cada elemento de $M[\mathbb{G}]$ tem um nome em M . Este nome nos diz como este elemento foi construído a partir de $\mathbb{G}$. Os moradores de M entendem um nome, τ para um objeto de M , mas não sabem o que este objeto (chamado $\tau_{\mathbb{G}}$) é, porque isso depende de $\mathbb{G}$ que não está em M .

Definição 1.18. τ é um $\mathbb{P}$ -nome se τ é uma relação e para todo par $\langle \sigma, p \rangle \in \tau$, σ é um $\mathbb{P}$ -nome e $p \in \mathbb{P}$.

Definição 1.19. $V^{\mathbb{P}}$ é a classe dos $\mathbb{P}$ -nomes. Se M é um modelo transitivo de ZFC e $\mathbb{P} \in M$, $M^{\mathbb{P}} = V^{\mathbb{P}} \cap M$.

Definição 1.20. $val(\tau, \mathbb{G}) = \{val(\sigma, \mathbb{G}) : \exists p \in \mathbb{G}(\langle \sigma, p \rangle \in \tau)\}$. Também escrevemos $\tau_{\mathbb{G}}$ para $val(\tau, \mathbb{G})$.

Definição 1.21. Se M é um modelo transitivo de ZFC, $\mathbb{P} \in M$ e $\mathbb{G} \subset \mathbb{P}$, então

$$M[\mathbb{G}] = \{\tau_{\mathbb{G}} : \tau \in M^{\mathbb{P}}\}$$

Se $\mathbb{G} \notin M$, $val(\tau, \mathbb{G})$ não significa nada para M . Os moradores de M podem construir uma linguagem de forcing, na qual uma sentença ψ da linguagem usa nomes em $M^{\mathbb{P}}$ para dizer alguma coisa sobre $M[\mathbb{G}]$. O valor de ψ em $M[\mathbb{G}]$, se ela é verdadeira ou falsa, depende de $\mathbb{G}$.

Escrevemos $p \Vdash \psi$ para dizer que se $\mathbb{G}$ é um $\mathbb{P}$ -genérico sobre M e $p \in \mathbb{G}$, então ψ é verdadeira em $M[\mathbb{G}]$.

Pode ser decidido dentro de M se $p \Vdash \psi$.

Se $\mathbb{G}$ é $\mathbb{P}$ -genérico sobre M e ψ é verdadeira em $M[\mathbb{G}]$, então para algum $p \in \mathbb{G}$, $p \Vdash \psi$.

Definição 1.22. Dois elementos p, q da ordem parcial $\mathbb{P}$ são incompatíveis se não existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ e $r \leq q$. Uma *anticadéia* em $\mathbb{P}$ é um subconjunto $A \subset \mathbb{P}$ tal que se $p, q \in A$ e $p \neq q$ então p e q são incompatíveis.

Definição 1.23. Seja λ é um cardinal infinito de M .

(1) Dizemos que a ordem parcial $\mathbb{P}$ é λ -c.c. se toda anticadéia em $\mathbb{P}$ tem cardinalidade $< \lambda$.

(2) Dizemos que $\mathbb{P}$ é λ -fechada se, para cada $\gamma < \lambda$ e cada sequência decrescente $\{p_{\xi} : \xi < \gamma\}$ de elementos de $\mathbb{P}$, temos que existe $q \in \mathbb{P}$ tal que $q \leq p_{\xi}$ para cada $\xi < \gamma$.

Definição 1.24. Seja $\mathbb{P} \in M$ e seja λ um cardinal infinito de M .

(1) $\mathbb{P}$ preserva cardinais $\geq \lambda$ (ou $\leq \lambda$) se para todo genérico $\mathbb{G}$ sobre M , se $\beta \in o(M)$,

e $\beta \geq \lambda$ (resp. $\beta \leq \lambda$), então

$$(\beta \text{ é um cardinal})^M \longleftrightarrow (\beta \text{ é um cardinal})^{M[G]}$$

(2) $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades $\geq \lambda$ (ou $\leq \lambda$) se para todo genérico $\mathbb{G}$ sobre M , se γ é um ordinal limite em M , e $\text{cf}(\gamma)^M \geq \lambda$ (resp. $\leq \lambda$), então

$$\text{cf}(\gamma)^M = \text{cf}(\gamma)^{M[G]}$$

Lema 1.25. *Se $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades $\leq \lambda$, então $\mathbb{P}$ preserva cardinais $\leq \lambda$. Se $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades $\geq \lambda$ e λ é regular em M , então $\mathbb{P}$ preserva cardinais $\geq \lambda$.*

Lema 1.26. *Se $\mathbb{P} \in M$, λ é um cardinal de M , e $\mathbb{P}$ é λ -c.c. em M , então $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades $\geq \lambda$. Portanto, se também λ é regular em M , $\mathbb{P}$ preserva cardinais $\geq \lambda$.*

Teorema 1.27. *Sejam $\mathbb{P} \in M$, $A, B \in M$, e, em M , λ um cardinal, $\mathbb{P}$ λ -fechado, e $|A| < \lambda$. Seja $\mathbb{G}$ um $\mathbb{P}$ -genérico sobre M e seja $f \in M[\mathbb{G}]$ com $f : A \rightarrow B$. Então $f \in M$.*

Corolário 1.28. *Em M sejam λ um cardinal e $\mathbb{P}$ λ -fechado. Então $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades $\leq \lambda$ e portanto preserva cardinais $\leq \lambda$.*

Definição 1.29. Se $\sigma \in V^{\mathbb{P}}$, um *nice name* para um subconjunto de σ é $\tau \in V^{\mathbb{P}}$ da forma $\cup\{\{\pi\} \times A_\pi : \pi \in \text{dom}(\sigma)\}$, onde A_π é uma anticadéia em $\mathbb{P}$.

Lema 1.30. *Suponhamos que em M , $\mathbb{P}$ é ω -c.c., $|\mathbb{P}| = \kappa \geq \omega$, λ é um cardinal infinito, e $\theta = \kappa^\lambda$. Seja $\mathbb{G}$ um $\mathbb{P}$ -genérico sobre M . Então em $M[\mathbb{G}]$, $2^\lambda \leq \theta$.*

1.4 Topologia Geral

As referências básicas para os conceitos topológicos são o livro de Engelking [13] e as Notas de aula do curso de Topologia Geral da pos-graduação do IME-USP [33].

Um espaço topológico é um par $\langle X, \tau \rangle$, onde X é o conjunto suporte e τ a topologia definida no conjunto X . Em geral vamos nos referir ao espaço $\langle X, \tau \rangle$ por espaço topológico X ou espaço X .

Assumiremos conhecidos os conceitos básicos da Topologia Geral, como por exemplo : conjunto aberto, conjunto fechado, vizinhança, base para o espaço, base para um ponto, subconjunto G_δ , fecho de um conjunto, axiomas de enumerabilidade e separação.

Se $\langle X, \tau \rangle$ é um espaço topológico, e Y é um subconjunto de X , então

$$\sigma = \{Y \cap U : U \in \tau\}$$

define uma topologia para Y chamada *topologia induzida* por X ou *topologia de subespaço* de X .

Se $\{X_s : s \in S\}$ é uma família de conjuntos, o *produto cartesiano* desta família é o conjunto de todas as funções $f : S \rightarrow \bigcup_{s \in S} X_s$ tal que para cada $s \in S$ temos $f(s) \in X_s$. Dado $t \in S$, a função $\pi_t : \prod_{s \in S} X_s \rightarrow X_t$ tal que $\pi_t(f) = f(t)$ é chamada de projeção de $\prod_{s \in S} X_s$ na coordenada t . A topologia gerada pela base

$$\begin{aligned} & \{\pi_{s_1}^{-1}(U_{s_1}) \cap \dots \cap \pi_{s_k}^{-1}(U_{s_k}) : s_1 \dots s_k \in S \text{ e } U_{s_k} \text{ é aberto de } X_{s_k}\} = \\ & = \left\{ \prod_{s \in S} U_s : U_s \text{ é aberto de } X_s \text{ e } \{s \in S : U_s \neq X_s\} \text{ é finito} \right\} \end{aligned}$$

é o *produto de Tychonoff* da família $\{X_s : s \in S\}$ e é denotado por $\prod_{s \in S} X_s$. Sempre que falemos de produto de espaços estaremos nos referindo a esta topologia.

Se $\{X_s : s \in S\}$ é uma família de conjuntos, e Y é um conjunto, e se para cada $s \in S$ $f_s : Y \rightarrow X_s$ é uma função, a *função diagonal* definida pela família $\{f_s : s \in S\}$ é a função $\Delta_{s \in S} f_s : Y \rightarrow \prod_{s \in S} X_s$ dada por $\Delta_{s \in S} f_s(y) = (f_s(y))_{s \in S}$, $\forall y \in Y$.

Seja X um espaço topológico e $A \subseteq X$. Dizemos que $x \in X$ é *ponto de acumulação* de A se para cada vizinhança U de x em X , $A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Se A é infinito dizemos que x é *ponto de acumulação completo* de A se para cada vizinhança U de x , $|U \cap A| = |A|$. Se X é T_1 e $A \subseteq X$, então $x \in X$ é ponto de acumulação de A se, e somente se, para cada vizinhança U de x em X , $A \cap U$ é infinito.

Seja X um espaço topológico e seja $f : \omega \rightarrow X$ uma sequência. Dizemos que f *converge* para um ponto x se para cada vizinhança aberta U de x em X ,

$$\omega \setminus \{n < \omega : f(n) \in U\} \text{ é finito .}$$

Dizemos que x é um *ponto de acumulação (cluster point)* da sequência f se para cada vizinhança U de x em X , $\{n < \omega : f(n) \in U\}$ é infinito.

Um espaço topológico X é *compacto* se todo recobrimento aberto de X possui um sub-recobrimento finito.

Teorema 1.31 (Teorema de Tychonoff). *Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família de espaços topológicos compactos não-vazios. Então o produto de Tychonoff $\prod_{i \in I} X_i$ é compacto.*

Um espaço topológico X é *enumeravelmente compacto* se toda cobertura aberta enumerável de X possui um sub-recobrimento finito.

Teorema 1.32. *Para X um espaço topológico T_1 são equivalentes:*

(i) X é enumeravelmente compacto;

- (ii) toda sequência em X possui ponto de acumulação;
- (iii) todo subconjunto infinito enumerável de X possui ponto de acumulação;
- (iv) X não tem um subespaço enumerável infinito que seja discreto e fechado.

Toda função contínua a valores reais definida num espaço enumeravelmente compacto X é limitada.

Um espaço topológico X é *pseudocompacto* se toda função a valores reais, contínua definida em X é limitada.

Das definições segue que

$$\text{compacto} \Rightarrow \text{enumeravelmente compacto} \Rightarrow \text{pseudocompacto},$$

mas as recíprocas não valem.

Vamos ver um exemplo de espaço pseudocompacto que não é enumeravelmente compacto. Seja X um conjunto infinito. Fixamos um ponto $p \in X$ e declaramos $U \subseteq X$ aberto se $p \in U$. Observamos que X é T_0 mas não é T_1 pois se $x \in X$, $x \neq p$, toda vizinhança aberta de x contém também p . Se f é uma sequência em X , os únicos candidatos a pontos de acumulação de f são os pontos $x \in X$ tais que $\{n < \omega : f(n) = x\}$ é infinito. X é pseudocompacto pois toda função a valores reais contínua definida em X é a constante. X não é enumeravelmente compacto pois nenhuma sequência injetora em X possui ponto de acumulação.

Considerando o teorema de Tychonoff para espaços compactos parece natural se perguntar se o produto de espaços enumeravelmente compactos é também enumeravelmente compacto. A resposta é não, de fato também não é verdade para espaços pseudocompactos.

Falaremos mais dos espaços enumeravelmente compactos depois de apresentarmos o espaço $\beta\omega$.

1.5 $\beta\omega$, P-pontos e ultrafiltros seletivos

$\beta\omega$ é o compactificado de Stone-Čech do espaço discreto ω . Vamos considerar $\beta\omega$ como o espaço que tem por suporte o conjunto de todos os ultrafiltros sobre ω e a topologia dada pela base de abertos-fechados $\{V(A) : A \subseteq \omega\}$, onde

$$V(A) = \{u : u \text{ é um ultrafiltro sobre } \omega \text{ e } A \in u\}.$$

Neste espaço ω é homeomorfo ao subespaço denso formado pelos ultrafiltros principais. O espaço $\beta\omega \setminus \omega$ é denotado por ω^* .

Todo subconjunto infinito de $\beta\omega$ possui 2^c pontos de acumulação, portanto as únicas sequências convergentes em $\beta\omega$ são as triviais.

Para cada subconjunto infinito V de ω , o fecho de V em $\beta\omega$ é homeomorfo a $\beta\omega$.

Se $f : \omega \rightarrow \omega$ é uma função, então a função $\bar{f} : \beta\omega \rightarrow \beta\omega$ dada por

$$\bar{f}(u) = \{A \subseteq \omega : f^{-1}(A) \in u\}$$

é chamada a extensão de Stone-Čech de f .

Sobre os elementos de $\beta\omega$ se define uma pre-ordem (propriedades reflexiva e transitiva), chamada *ordem de Rudin-Keisler*, denotada por $\leq_{RK}$. Dados dois ultrafiltros u, v sobre ω dizemos que

$$u \leq_{RK} v \iff \text{existe } f \in {}^\omega\omega \text{ tal que } u = \bar{f}(v)$$

Um ultrafiltro $u \in \omega^*$ é dito minimal na ordem de Rudin-Keisler se não existe $v \in \omega^*$ tal que $v \leq_{RK} u$ e $v \neq u$. Então dois ultrafiltros minimais na ordem de

Rudin–Keisler ou são equivalentes ou são incomparáveis.

Um ultrafiltro livre u é chamado *P–ponto* se para cada partição $\{A_n : n \in \omega\}$ de ω tal que $A_n \notin u$ para todo n , existe $X \in u$ tal que

$$X \cap A_n \text{ é finito, } \forall n \in \omega$$

Existem ultrafiltros que não são P–pontos. Por exemplo, seja $\mathcal{F}$ o seguinte filtro sobre ω : $X \in \mathcal{F}$ se e somente se $A_n \setminus (X \cap A_n)$ é finito para todos exceto um número finito de n . Se u é um ultrafiltro estendendo $\mathcal{F}$, então u não é um P–ponto. A existência de P–pontos é independente de ZFC. Existem 2^c P–pontos sob CH ou MA (Axioma de Martin) e Shelah mostrou que existem modelos de ZFC sem P–pontos.

Um ultrafiltro livre u é chamado *seletivo* se para cada função $f : \omega \rightarrow \omega$ existe $A \in u$ tal que $f \upharpoonright_A$ é ou constante ou injetora. Como no caso dos P–pontos, sob CH ou MA existem 2^c ultrafiltros seletivos incomparáveis. Da proposição seguinte se deduz facilmente que ultrafiltros seletivos são P–pontos. Portanto a existência de ultrafiltros seletivos é independente de ZFC.

Proposição 1.33. *Para u um ultrafiltro livre de ω são equivalentes:*

- (a) *u é minimal na ordem de Rudin–Keisler;*
- (b) *u é seletivo;*
- (c) *para cada partição $\{P_k : k \in \omega\}$ de ω , ou existe $k \in \omega$ tal que $P_k \in u$ ou existe $A \in u$ tal que $|A \cap P_k| \leq 1 \forall k \in \omega$;*
- (d) *toda coloração $F : [\omega]^2 \rightarrow \{0, 1\}$ possui um conjunto homogêneo $A \in u$.*

Os leitores interessados podem ver a demonstração desta proposição no Anexo A deste trabalho.

1.6 Mais sobre os espaços enumeravelmente compactos

J. Novák em 1953 e H. Teresaka em 1952 obtiveram dois espaços enumeravelmente compactos X e Y tais que

- (i) $\omega \subset X \subset \beta\omega$ e $\omega \subset Y \subset \beta\omega$;
- (ii) $X \cap Y = \omega$.

O produto $X \times Y$ não é enumeravelmente compacto: O conjunto $H = \{(n, n) : n \in \omega\}$ não possui ponto de acumulação em $X \times Y$. Para ver que isto é verdade basta considerar a diagonal $\Delta = \{(u, u) : u \in \beta\omega\}$ de $\beta\omega \times \beta\omega$. Como $\beta\omega \times \beta\omega$ é um espaço T_2 a diagonal é fechada e portanto $\overline{H} \subset \Delta$. Então se (x, y) é ponto de acumulação de H em $X \times Y$, temos que $x = y$ o que não é possível por (ii).

Há varios outros exemplos:

- (1) (Nóvak, 1952) Existem espaços X e Y tais que toda sequência em X e toda sequência em Y tem $2^{\aleph_1}$ pontos de acumulação, e $X \times Y$ não é enumeravelmente compacto.
- (2) [van Dowen, [11]] Sob MA existem dois grupos enumeravelmente compactos G e H tais que $G \times H$ não é enumeravelmente compacto.
- (3) (Frólik, 1967) Existe um espaço enumeravelmente compacto X tal que para todo $n < \omega$ X^n é enumeravelmente compacto, mas X^ω não é enumeravelmente compacto.

Ginsburg e Saks [16] mostraram que $\prod_{i \in I} X_i$ é enumeravelmente compacto se e somente se $\prod_{i \in J} X_i$ é enumeravelmente compacto para cada $J \subseteq I$ tal que $|J| \leq 2^{\aleph_1}$.

Seja $u \in \omega^*$ e seja $f : \omega \rightarrow X$ uma sequência num espaço X . Dizemos que um ponto $x \in X$ é o u -limite de f e denotado $x = u - \lim f$ se para cada vizinhança U de x , $\{n \in \omega : f(n) \in U\} \in u$. Como um ultrafiltro não contém conjuntos disjuntos, uma sequência (num espaço T_2) pode ter no máximo um u -limite. Portanto o u -limite de uma sequência se existe é único. Observamos também que se x é u -limite de uma sequência é também ponto de acumulação da sequência pois ultrafiltros livres só contém conjuntos infinitos.

Lema 1.34. *Um ponto x é ponto de acumulação de uma sequência f se e somente se existe $u \in \omega^*$ tal que $x = u - \lim f$.*

Lema 1.35. *Um ponto $x \in \prod_{i \in I} X_i$ é u -limite da sequência $f : \omega \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ se e somente se $\pi_i(x) \in X_i$ é u -limite de $\{\pi_i(f(n)) : n \in \omega\} \subseteq X_i$ para todo $i \in I$, onde π_I é a projeção de $\prod_{i \in I} X_i$ em X_i .*

A demonstração do seguinte teorema pode ser lida em [34]

Teorema 1.36. *Seja $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ uma família de espaços topológicos. Então o espaço produto $X = \prod \{X_\alpha : \alpha \in I\}$ é enumeravelmente compacto se e somente se para cada sequência $f : \omega \rightarrow X$, existe $u \in \omega^*$ tal que $\pi_\alpha \circ f$ possui u -limite em X_α para cada $\alpha \in I$.*

Já vimos que num espaço enumeravelmente compacto, toda sequência tem u -limite em X para algum ultrafiltro livre u , mas este ultrafiltro pode ser diferente para cada sequência.

Seja $u \in \omega^*$. Um espaço X é dito u -compacto se toda sequência em X possui u -limite em X . Segue da definição que todo espaço u -compacto é enumeravelmente

compacto. Do teorema 1.36 temos que O produto de espaços u -compactos é também u -compacto.

Teorema 1.37. *Para um espaço X são equivalentes:*

- (i) X^κ é enumeravelmente compacto para todo cardinal κ ;
- (ii) X^{2^c} é enumeravelmente compacto;
- (iii) Existe $u \in \omega^*$ tal que X é u -compacto

1.7 Grupos topológicos

Os conceitos fundamentais referentes a grupos topológicos podem ser encontrados no trabalho de Comfort [2] e no livro de Hewitt e Ross [20].

Um *grupo topológico* é um par $\langle G, \tau \rangle$ para o qual

- (i) $\langle G, \tau \rangle$ é um espaço topológico,
- (ii) G é um grupo, e
- (iii) A função de $G \times G$ em G definida por $\langle a, b \rangle \rightarrow ab^{-1}$ é contínua.

A seguinte propriedade, bem conhecida, dos grupos topológicos é devida independentemente a Pontrjagin e a Kakutani:

Todo grupo topológico T_0 é um espaço Hausdorff, completamente regular.

O teorema seguinte é a classificação dada por Harrison e Hulanicki dos grupos abelianos que admitem uma topologia de grupo.

Teorema 1.38. (i) *Seja G um grupo abeliano e*

$$G = D(G) \oplus R(G)$$

sua decomposição na parte divisível $D(G)$ e na parte reduzida $R(G) \cong G/D(G)$. (um grupo é reduzido se não contém subgrupos próprios divisíveis). Então G admite uma topologia de grupo compacto se e somente se $D(G)$ e $R(G)$ admitem ambos uma topologia de grupo compacto.

(ii) Um grupo abeliano divisível G admite uma topologia de grupo compacto se e somente se $r_0(G) = 2^\sigma$ para algum cardinal infinito σ , e cada $r_p(G)$ é ou finito ou 2^{σ_p} para algum cardinal $\sigma_p \leq \sigma$.

(iii) Um grupo abeliano reduzido G admite uma topologia de grupo compacto se e somente se

$$G = \prod \{\mathbb{Z}_p^{\beta_p} : p \text{ é primo}\} \oplus \prod \{\mathbb{Z}(p^n)^{\alpha_n} : n \in \omega\}$$

onde $\mathbb{Z}_p$ é o grupo dos inteiros p -ádicos.

(iv) Se G é um grupo topológico abeliano compacto, então ou $r(G) = 0$ ou $r(G) = 2^\sigma$ para algum cardinal infinito σ .

Um grupo topológico $G = \langle G, \tau \rangle$ é totalmente limitado se para toda vizinhança $U \in \mathcal{N}(0)$ existe um subconjunto finito F de G tal que $G \subseteq FU$. A importância destes grupos segue da seguinte caracterização:

um grupo topológico é totalmente limitado se e somente se ele é um subgrupo denso de um grupo compacto.

Todo grupo topológico pseudocompacto é totalmente limitado.

Na construção de exemplos de grupos pseudocompactos a seguinte propriedade é de grande utilidade.

Seja X um espaço topológico. Um subconjunto Y de X é G_δ -denso em X se Y intercepta todo subconjunto G_δ não vazio de X .

Teorema 1.39. *Dado um grupo compacto G , um subgrupo denso H de G é pseudo-compacto se e somente se H é G_δ -denso em G .*

Teorema 1.40 (Comfort e Robertson [5]). *Seja G um grupo topológico pseudo-compacto não discreto, então $|G| \geq \mathfrak{c}$.*

Vemos que a pseudocompacidade em grupos topológicos é preservada pelo produto, o que não acontece em geral com espaços pseudocompactos:

Teorema 1.41 (Comfort e Ross [6]). *Seja $\{G_i : i \in I\}$ um conjunto de grupos topológicos pseudocompactos e seja $G = \prod_{i \in I} G_i$. Então G é pseudocompacto.*

O mesmo não pode se dizer dos grupos enumeravelmente compactos:

Teorema 1.42 (van Dowen [11]). *Assuma MA . Existem grupos topológicos enumeravelmente compactos G e H , subgrupos de $2^{\mathfrak{c}}$, tais que $|G \cap H| = \omega$. Então $G \times H$ por conter a diagonal*

$$\Delta = \{(x, y) \in G \times H : x = y\} = \{(x, x) : x \in G \cap H\}$$

como subgrupo enumerável infinito e fechado, não é enumeravelmente compacto.

Capítulo 2

Ultrafiltros seletivos e Grupos de torção u – compactos

Neste capítulo vamos ver que sob a existência de um ultrafiltro seletivo u , é possível estabelecer condições suficientes para que um grupo abeliano de torção admita uma topologia de grupo topológico u -compacta. Estas condições tem algumas consequências importantes:

* nos permitem classificar, sob a existência de um ultrafiltro seletivo, os grupos abelianos de torção de cardinalidade $\mathfrak{c}$ que admitem uma topologia de grupo topológico enumeravelmente compacta e sem seqüências convergentes;

** nos permitem classificar, sob GCH, todos os grupos abelianos de torção que admitem uma topologia de grupo enumeravelmente compacta e sem seqüências não triviais convergentes;

*** nos fornecem o primeiro exemplo de grupo topológico enumeravelmente compacto sem seqüências convergentes de cardinalidade maior que $2^{\mathfrak{c}}$, e o primeiro exemplo obtido sem usar forcing de um grupo topológico enumeravelmente compacto sem

seqüências convergentes e de cardinalidade maior que $\mathfrak{c}$.

2.1 Seqüências e ultraproductos

Como ferramenta fundamental para esta construção vamos precisar de um caso simples de ultraproducto, que detalhamos a seguir.

Seja u um ultrafiltro livre sobre ω , e seja G um grupo abeliano de ordem finita n .

Definição 2.1. Se f e g são seqüências em G , dizemos que f é u -equivalente a g , e denotamos $f \equiv_u g$ se $\{m \in \omega : f(m) = g(m)\} \in u$.

É imediato que $\equiv_u$ é uma relação de equivalência. Para cada $f \in {}^\omega G$, denotamos por $[f]_u$ a $\equiv_u$ -classe de equivalência de f e denotamos por ${}^\omega G/u$ o conjunto das $\equiv_u$ -classes de equivalência de ${}^\omega G$. Isto é ${}^\omega G/u = \{[f]_u : f \in {}^\omega G\}$.

Se definimos $[f]_u + [g]_u = [f + g]_u$, então $({}^\omega G/u, +)$ é um grupo abeliano de ordem limitada. Portanto, ${}^\omega G/u$ é soma direta de grupos cíclicos e ${}^\omega G/u$ possui uma base.

Vamos ver o que acontece com este ultraproducto no caso em que o ultrafiltro u é seletivo. Se f é uma seqüência em G , e u é um ultrafiltro seletivo sobre ω , temos que existe $A \in u$ tal que $f \upharpoonright_A$ é constante ou $f \upharpoonright_A$ é injetora. Então, se u é seletivo, ${}^\omega G/u = \{[f]_u : f \text{ é injetora}\} \cup \{[\vec{x}]_u : x \in G\}$, onde $\vec{x}$ denota a seqüência constante x .

Proposição 2.2. $A = \{[\vec{x}]_u : x \in G\}$ é um subgrupo puro de ${}^\omega G/u$.

Demonstração: É claro que A é subgrupo de ${}^\omega G/u$. Vamos verificar que A é puro. Sejam $n \in \mathbb{Z}$ e $[\vec{y}]_u \in A$ e suponhamos que existe $[f]_u \in {}^\omega G/u$ tal que $n[f]_u = [\vec{y}]_u$. Então $\{m \in \omega : n.f(m) = y\} \in u$. Em particular, existe $x \in G$ tal que $nx = y$. Logo

$$n[\vec{x}]_u = [\vec{y}]_u \text{ e } [\vec{x}]_u \in A.$$

□

Segue desta proposição que se $\{x_\xi : \xi \in \kappa\}$ é uma base para G podemos completar $\{[\vec{x}_\xi]_u : \xi < \kappa\}$ com elementos de $\{[f]_u : f \text{ é injetora}\}$ para obtermos uma base de ${}^\omega G/u$.

Proposição 2.3. *Seja o grupo $\mathbb{Z}(n)^{(\alpha)}$, onde n é um inteiro positivo e α é um ordinal qualquer. Se $f \in {}^\omega(\mathbb{Z}(n)^{(\alpha)})$, então existe $g \in {}^\omega(\mathbb{Z}(n)^{(\alpha)})$ tal que $\text{ord}(g(m)) = n$, $\forall m \in \omega$ e $[f]_u \in \langle [g]_u \rangle$.*

Demonstração: Seja $\{x_\xi : \xi < \alpha\}$ uma base para $\mathbb{Z}(n)^{(\alpha)}$ e seja f_0 uma seqüência em $\mathbb{Z}(n)^{(\alpha)}$, com

$$f_0(m) = a_1^m \xi_1^m + \dots + a_{s_m}^m \xi_{s_m}^m.$$

Se $\{m \in \omega : \text{ord}(f_0(m)) = n\} \in u$, basta considerar qualquer seqüência g que seja u -equivalente a f_0 e cujos elementos sejam todos de ordem n . Se não, existe d_0 divisor próprio de n tal que $\{m \in \omega : \text{ord}(f_0(m)) = d_0\} \in u$. Vamos assumir que $\text{ord}(f_0(m)) = d_0 \forall m \in \omega$. Temos então que

$$d_0(a_1^m \xi_1^m + \dots + a_{s_m}^m \xi_{s_m}^m) = 0, \forall m \in \omega.$$

Como os ξ_i^m são elementos de uma base, segue que $n|d_0 \cdot a_i^m, \forall i = 1, \dots, s_m$. Se $n = d_0 \cdot t$ temos que $t|a_i^m \forall i = 1, \dots, s_m$. Podemos então definir $f_1 \in {}^\omega(\mathbb{Z}(n)^{(\alpha)})$ por

$$f_1(m) = \frac{a_1^m}{t} x_{\xi_1}^m + \dots + \frac{a_{s_m}^m}{t} x_{\xi_{s_m}}^m, \text{ para cada } m \in \omega.$$

Segue que $f_0(m) = t \cdot f_1(m), \forall m \in \omega$ e portanto $f_0 \in \langle [f_1]_u \rangle$ e $\text{ord}(f_1(m)) = n, \forall m \in \omega$. □

Desta proposição se deduz que todos os elementos de uma base para ${}^\omega(\mathbb{Z}(n)^{(\alpha)})/u$ tem ordem n .

2.2 Uma topologia u -compacta para $\mathbb{Z}(r)^{(\mathfrak{c})}$.

Em [15], S. Garcia-Ferreira, A.H. Tomita e S. Watson apresentaram o primeiro exemplo de um grupo topológico enumeravelmente compacto sem seqüências convergentes obtido sem usar alguma versão do Axioma de Martin. Assumindo a existência de um ultrafiltro seletivo u sobre ω , deram a $\mathbb{Z}(2)^{(\mathfrak{c})}$ uma topologia de grupo topológico u -compacta.

Nesta seção apresentamos uma construção similar à de [15], para dar a $\mathbb{Z}(r)^{(\mathfrak{c})}$ uma topologia u -compacta, onde r é número primo qualquer. Poderia ser escolhido um número natural qualquer, mas sendo r primo $\mathbb{Z}(r)$ é um espaço vetorial e isto simplifica as coisas.

O objetivo de apresentarmos este caso particular é facilitar a leitura da próxima seção, que terá notação um pouco mais complicada.

Teorema 2.4. *Se existe um ultrafiltro seletivo u sobre ω , então $G = \mathbb{Z}(r)^{(\mathfrak{c})}$ admite uma topologia de grupo topológico u -compacta e sem seqüências não triviais convergentes.*

Seja $\{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ uma base para o espaço $\mathbb{Z}(r)^{(\mathfrak{c})}$ e seja

$$\{[f_\xi]_u : \xi < \mathfrak{c}\} \cup \{[\vec{x}_\alpha]_u : \alpha < \mathfrak{c}\}$$

uma base para o espaço vetorial ${}^\omega(\mathbb{Z}(r)^{(\mathfrak{c})})/u$, tal que $f_\xi : \omega \rightarrow \mathbb{Z}(r)^{(\mathfrak{c})}$ é injetora e $\text{supp}(f_\xi(m)) \subseteq \max\{\omega, \xi\}$, $\forall m \in \omega$, $\forall \xi < \mathfrak{c}$.

A idéia é construir um homomorfismo injetor $\varphi : G \rightarrow \mathbb{Z}(r)^{\mathfrak{c}}$ tal que $\varphi(G)$, com a topologia de subespaço, seja u -compacto e sem seqüências não triviais convergentes. Para fazer φ injetora vamos tomar conta de um elemento do grupo G de cada vez,

e para fazer com que $\varphi(G)$ não tenha seqüências convergentes vamos tomar conta de uma seqüência não trivial de cada vez. Mas não é necessário trabalhar com todas as seqüências não triviais. A seguir explicamos por que.

Se $g : \omega \rightarrow G$ temos duas possibilidades para ela: ou g é quase constante ou g contém uma subseqüência injetiva. Portanto basta considerarmos as seqüências injetivas em G , isto é, as seqüências f em G tais que

$$[f]_u = \sum_{j=0}^{k_f} a_j [f_{\xi_j}]_u, \text{ onde } a_j \in \mathbb{Z}, a_j \neq 0(\text{mod } r), \forall 0 \leq j \leq k_f.$$

Continuando com a idéia da demonstração, vamos construir homomorfismos $\phi_{f,x}$ para cada par $\{f, x\}$, onde f é uma seqüência injetora e $x \in G$. Este homomorfismo vai ser responsável por fazer com que $\varphi(x)$ seja diferente de zero se x é diferente de zero, e por fazer com que a seqüência $\{\varphi(f(m)) : m \in \omega\}$ não seja convergente. É claro que ao mesmo tempo temos que fazer com que toda seqüência em $\varphi(G)$ possua u -limite. Mas vamos ver que para isto é suficiente com que para cada par $\{f, x\}$ a seqüência $\{\phi_{f,x}(f_\xi(m)) : m \in \omega\}$ tenha u -limite $\phi_{f,x}(x_\xi)$ em $\phi_{f,x}(G)$, para cada $\xi < \mathfrak{c}$.

Lema 2.5. *Seja u um ultrafiltro sobre ω . Se $\varphi : G \rightarrow \mathbb{Z}(r)^\mathfrak{c}$ é um monomorfismo tal que para cada $\xi < \mathfrak{c}$, $\varphi(x_\xi) = u - \lim_{m \in \omega} \varphi(f_\xi(m))$, então $\varphi(G)$ é u -compacto como subespaço de $\mathbb{Z}(r)^\mathfrak{c}$.*

Demonstração: Seja g uma seqüência qualquer em G . Escrevemos $[g]_u$ como combinação linear dos elementos da base:

$$[g]_u = \sum_{j=0}^{k_g} a_j [f_{\xi_j}]_u + \sum_{s=0}^{h_g} c_s [x_{\alpha_s}]_u.$$

Seja $A = \{m \in \omega : g(m) = \sum_{j=0}^{k_g} a_j \cdot f_{\xi_j}(m) + \sum_{s=0}^{h_g} c_s \cdot x_{\alpha_s}\}$

Como $\varphi(x_{\xi_j}) = u - \lim_{m \in \omega} \varphi(f_{\xi_j}(m)) \forall 0 \leq j \leq k_g$ e $A \in u$, temos que

$$u - \lim_{m \in \omega} \varphi(g(m)) = \sum_{j=0}^{k_g} a_j \cdot \varphi(x_{\xi_j}) + \sum_{s=0}^{h_g} c_s \cdot \varphi(x_{\alpha_s}).$$

□

Lema 2.6. *Seja $x \in G$ e seja $f \in {}^\omega G$ tal que*

$$[f]_u = \sum_{j=0}^{k_f} a_j [f_{\xi_j}]_u, \text{ com } a_j \in \mathbb{Z} \text{ e } \sum_{j=0}^{k_f} a_j [f_{\xi_j}]_u \neq 0.$$

Então existem uma seqüência crescente $\{b_i : i \in \omega\} \in u$, e uma seqüência $\{E_i : i \in \omega\}$ de subconjuntos finitos de $\mathfrak{c}$ tais que:

- (a) $\text{supp}(x) \cup \{\xi_j : 0 \leq j \leq k_f\} \subseteq E_0$;
- (b) $\omega \subseteq \bigcup_{i \in \omega} E_i$;
- (c) $E_{i+1} \supseteq \bigcup_{\xi \in E_i} \text{supp}(f_\xi(b_i)) \cup E_i$;
- (d) $\{f_\xi(b_i) : \xi \in E_i\} \cup \{x_\alpha : \alpha \in E_i\}$ é linearmente independente, para todo $i < \omega$;
- (e) $f(b_i) = \sum_{j=0}^{k_f} a_j f_{\xi_j}(b_i) \quad \forall i \in \omega$.

Demonstração: Definimos por indução uma família $\{F_k : k \in \omega\}$ de subconjuntos finitos de $\mathfrak{c}$ como segue:

$$F_0 = \text{supp}(x) \cup \{\xi_j : 0 \leq j \leq k_f\},$$

$$F_{k+1} = \bigcup_{\xi \in F_k} \{\text{supp}(f_\xi(m)), m \leq k\} \cup F_k \cup k, \quad \forall k \in \omega.$$

Sejam, para cada $k \in \omega$

$A_k^0 = \{m \in \omega : \{f_\xi(m) : \xi \in F_k\} \cup \{x_\alpha : \alpha \in F_k\} \text{ é linearmente independente} \}$ e seja

$$U = \{m \in \omega : f(m) = \sum_{j=0}^{k_f} a_j f_{\xi_j}(m)\}$$

Como $\{[f_\xi]_u : \xi < \mathfrak{c}\} \cup \{[\vec{x}_\alpha]_u : \alpha < \mathfrak{c}\}$ é uma base do espaço vetorial ${}^\omega(\mathbb{Z}(r)^{(c)})/u$, temos que $A_k^0 \in u, \forall k < \omega$. E como $U \in u$ temos que para cada $k \in \omega$, $A_k = A_k^0 \cap U \in u$.

Como u é P-ponto, existe $A \in u$ tal que $A \setminus A_k$ é finito para todo $k < \omega$.

Seja $h : \omega \rightarrow \omega$ uma função crescente tal que $A \setminus A_k \subseteq h(k)$, para cada $k \in \omega$.

Pela seletividade de u , existe $B \in u$ que satisfaz

$$B \cap h(1) = \emptyset, \quad B \subseteq A, \quad |B \cap [h(k) + 1, h(k + 1)]| \leq 1 \quad \forall k \in \omega.$$

Seja $\{a_k : k \in \omega\}$ uma enumeração crescente de B . Então $k < a_k < a_m$ e $a_k \in A_k$ para todo $k < m < \omega$. Definimos em $[\omega]^2$ uma coloração P_0, P_1 por:

$\{a, b\} \in P_0$ se e somente se $a, b \in B$, $a < b$ e $a_k < m$ se $a = a_k$ e $b = a_m$,

$\{a, b\} \in P_1$ caso contrário.

De novo pela seletividade de u , existe $C \in u$, $C \subseteq B$ tal que $[C]^2 \subseteq P_0$ ou $[C]^2 \subseteq P_1$.

Seja $I \in {}^\omega\omega$ tal que $C = \{a_k : k \in I\}$ e seja $\{i_m : m < \omega\}$ uma enumeração crescente de I . Suponhamos que $[C]^2 \subseteq P_1$, então $a_{i_0} \geq i_k, \forall 1 \leq k < \omega$, o que é absurdo. Logo $[C]^2 \subseteq P_0$ e portanto $i_k < a_{i_k} < i_{k+1}, \forall k < \omega$.

Definimos, para cada $k < \omega$, $b_k = a_{i_k}$ e $E_k = F_{i_k}$. Então

$$\begin{aligned} E_k \cup \bigcup_{\xi \in E_k} \text{supp}(f_\xi(b_k)) &= F_{i_k} \cup \bigcup_{\xi \in F_{i_k}} \text{supp}(f_\xi(a_{i_k})) \subseteq \\ &\subseteq F_{i_k} \cup \bigcup_{\xi \in F_{i_k}} \{\text{supp}(f_\xi(m)), m < i_{k+1}\} \subseteq F_{i_{k+1}} = E_{k+1}. \end{aligned}$$

De $a_{i_k} \in A_k$ seguem (d) e (f). □

Lema 2.7. *Seja u um ultrafiltro seletivo sobre ω . Sejam $x \in G$ e f uma seqüência em G tal que*

$$[f]_u = \sum_{j=0}^{k_f} a_j \cdot [f_{\xi_j}]_u,$$

onde $a_j \in \mathbb{Z}$, e $\sum_{j=0}^{k_f} a_j \cdot [f_{\xi_j}]_u \neq 0$. Então existe um homomorfismo $\phi_{f,x} : G \rightarrow \mathbb{Z}(n)$ que satisfaz:

- 1) $\phi_{f,x}(x) \neq 0$ se $x \neq 0$,
- 2) $\{m \in \omega : \phi_{f,x}(f_\xi(m)) = \phi_{f,x}(x_\xi)\} \in u \quad \forall \xi < \mathfrak{c}$,
- 3) $\{m \in \omega : \phi_{f,x}(f(m)) = \sum_{j=0}^{k_f} a_j \cdot \phi_{f,x}(x_{\xi_j}) + \sum_{s=0}^{h_f} 1\}$ é infinito.

Demonstração: Observamos primeiro que o item 3) faz sentido pois como r é primo, temos que $\text{ord}(f(m)) = r$, para todo $m \in \omega$ e portanto $\text{ord}(\phi_{f,x}(f(m))) \leq \text{ord}(f(m))$. Pelo lema 2.6 existem uma seqüência crescente $\{b_i : i \in \omega\} \in u$ e uma seqüência $\{E_i : i \in \omega\}$ de subconjuntos finitos de $\mathfrak{c}$ tais que:

- (a) $\text{supp}(x) \cup \{\xi_j : 0 \leq j \leq k_f\} \subseteq E_0$;
- (b) $\omega \subseteq \bigcup_{i \in \omega} E_i$;
- (c) $E_{i+1} \supseteq \bigcup_{\xi \in E_i} \text{supp}(f_\xi(b_i)) \cup E_i$;
- (d) $\{f_\xi(b_i) : \xi \in E_i\} \cup \{x_\alpha : \alpha \in E_i\}$ é linearmente independente, para todo $i < \omega$;
- (e) $f(b_i) = \sum_{j=0}^{k_f} a_j f_{\xi_j}(b_i) \quad \forall i \in \omega$.

Como $\{b_i : i \in \omega\} \in u$ temos que $\{b_{2i} : i \in \omega\} \in u$ ou $\{b_{2i+1} : i \in \omega\} \in u$. Podemos assumir s.p.g. que $\{b_{2i} : i \in \omega\} \in u$.

Definimos primeiro $\phi_{f,x}$ em $\{x_\xi : \xi \in \bigcup_{i \in \omega} E_i\}$ por indução.

Para cada $\alpha \in E_0$, definimos $\phi_{f,x}(x_\alpha)$ de tal forma que $\phi_{f,x}(x) \neq 0$.

Suponhamos que para $h \in \omega$, temos definida $\phi_{f,x}$ em $\langle \{x_\xi : \xi \in E_h\} \rangle$ tal que para cada $k < h$,

i) se k é par, então

$$\phi_{f,x}(f_\xi(b_k)) = \phi_{f,x}(x_\xi) \quad \forall \xi \in E_k$$

ii) se k é ímpar, então

$$\sum_{j=0}^{k_f} \phi_{f,x}(a_j \cdot f_{\xi_j}(b_k)) = \sum_{j=0}^{k_f} a_j \cdot \phi_{f,x}(x_{\xi_j}) + 1.$$

Como $\{f_\xi(b_h) : \xi \in E_h\} \cup \{x_\alpha : \alpha \in E_h\}$ é linearmente independente, podemos estender $\phi_{f,x}$ a $\langle \{x_\alpha : \alpha \in E_{h+1}\} \rangle$ satisfazendo:

i) $\phi_{f,x}(f_\xi(b_h)) = \phi_{f,x}(x_\xi) \quad \forall \xi \in E_h$, se h é par;

ii) $\sum_{j=0}^{k_f} \phi_{f,x}(a_j \cdot f_{\xi_j}(b_h)) = \sum_{j=0}^{k_f} a_j \phi_{f,x}(x_{\xi_j}) + 1$, se h é ímpar.

Temos então definido o homomorfismo $\phi_{f,x}$ no espaço gerado por $\{x_\alpha : \alpha \in \bigcup_{i \in \omega} E_i\}$ e verifica:

$$\{m \in \omega : \phi_{f,x}(f_\xi(m)) = \phi_{f,x}(x_\xi)\} \in u \quad \forall \xi \in \bigcup_{i \in \omega} E_i, \text{ e}$$

$$\left\{m \in \omega : \phi_{f,x}(f(m)) = \sum_{j=0}^{k_f} a_j \cdot \phi_{f,x}(x_{\xi_j}) + 1\right\} \text{ é infinito.}$$

Falta então definirmos $\phi_{f,x}(x_\alpha)$ para cada $\alpha \in \mathfrak{c} \setminus (\bigcup_{i \in \omega} E_i)$. Esta definição vai ser feita por indução transfinita. Seja $\gamma \in \mathfrak{c} \setminus (\bigcup_{i \in \omega} E_i)$ e suponhamos $\phi_{f,x}$ definida em $\{x_\alpha : \alpha \in \bigcup_{i \in \omega} \gamma \cup E_i\}$. Sabemos que $\bigcup_{k \in \omega} \text{supp}(f_\gamma(k)) \subseteq \gamma$, portanto podemos definir $\phi_{f,x}$ tal que:

$$\phi_{f,x}(x_\gamma) = u - \lim_{k \in \omega} (\phi_{f,x}(f_\gamma(k))).$$

□

Demonstração do Teorema 2.4: Para cada $x \in G$ e para cada seqüência f de G tal que

$$[f]_u = \sum_{j=0}^{k_f} a_j \cdot [f_{\xi_j}]_u,$$

onde $a_j \in \mathbb{Z}$ e $\sum_{j=0}^{k_f} a_j \cdot [f_{\xi_j}]_u \neq 0$, seja $\phi_{f,x}$ como no lema 2.7.

Definimos o homomorfismo $\varphi : G \rightarrow \mathbb{Z}(n)^{\mathfrak{c}}$ por

$$\varphi(z) = \Delta_{(f,x)} \phi_{f,x}(z).$$

Vemos que se $x \in G$ com $x \neq 0$, então $\varphi(x) \neq 0$ pois $\phi_{f,x}(x) \neq 0$. Portanto o homomorfismo φ é injetor e $\varphi(G)$ é um subgrupo de $\mathbb{Z}(n)^{\mathfrak{c}}$ isomorfo a G .

Vamos verificar agora que $\varphi(G)$ com a topologia de subespaço de $\mathbb{Z}(n)^{\mathfrak{c}}$ é u -compacto.

Do Lema 2.5 segue que basta verificar que $u - \lim_{k \in \omega} \varphi(f_{\xi}(m)) = \varphi(x_{\xi})$, $\forall \xi < \mathfrak{c}$.

Do Lema 2.7 temos que para cada par (f, x) , $u - \lim_{k \in \omega} \phi_{f,x}(f_{\xi}(m)) = \phi_{f,x}(x_{\xi})$, $\forall \xi < \mathfrak{c}$.

Portanto $u - \lim_{k \in \omega} \varphi(f_{\xi}(m)) = \varphi(x_{\xi})$, $\forall \xi < \mathfrak{c}$.

Só falta verificar que $\varphi(G)$ não possui seqüências não triviais convergentes.

Seja $\{\varphi(f(m)) : m \in \omega\}$ uma seqüência injetiva, com $[f]_u = \sum_{j=0}^{k_f} a_j \cdot [f_{\xi_j}]_u$, onde $a_j \in \mathbb{Z}$ e $\sum_{j=0}^{k_f} a_j \cdot [f_{\xi_j}]_u \neq 0$. Segue do item 3) do Lema 2.7 que $\{m \in \omega : \phi_{f,x}(f(m)) = \sum_{j=0}^{k_f} a_j \phi_{f,x}(x_{\xi_j}) + 1\}$ é infinito. Mas

$$u - \lim_{m \in \omega} \varphi(f(m)) = u - \lim_{m \in \omega} \phi_{f,x}(f(m)) = \sum_{j=0}^{k_f} a_j \cdot \phi_{f,x}(x_{\xi_j}).$$

Portanto a seqüência $\{\varphi(f(m)) : m \in \omega\}$ não converge. □

2.3 Grupos de torção u -compactos

Segue o enunciado da condição suficiente da qual falamos na introdução deste capítulo.

Teorema 2.8. *Seja G um grupo abeliano de torção limitada tal que para cada componente primária G_r de G e cada invariante de Ulm–Kaplansky infinita $\alpha_{r,k}$ de G_r , correspondente a $\mathbb{Z}(r^k)$, existe um inteiro $k' \geq k$ tal que a invariante $\alpha_{r,k'}$ satisfaz $\alpha_{r,k} \leq \alpha_{r,k'}$ e $(\alpha_{r,k'})^\omega = \alpha_{r,k'}$. Se existe um ultrafiltro seletivo u sobre ω , então G admite uma topologia de grupo topológico u -compacta e sem seqüências não triviais convergentes.*

Por que precisamos impor esta condição ao grupo G ?

Sabemos que se n é a ordem do grupo G e $r_1^{t_1} \dots r_s^{t_s}$ é a decomposição em fatores primos de n , então $G = \bigoplus_{i=1}^s G_{r_i}$, onde $G_{r_i} = \mathbb{Z}(r_i)^{(\alpha_{r_i}^1)} \oplus \mathbb{Z}(r_i^2)^{(\alpha_{r_i}^2)} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}(r_i^{t_i})^{(\alpha_{r_i}^{t_i})}$. Vamos fixar um i , com $1 \leq i \leq s$ e seja $r = r_i$ e $t = t_i$. Suponhamos que $1 \leq k < t$, que α_r^k é um cardinal infinito e que $(\alpha_r^k)^\omega > \alpha_r^k$. Então temos mais seqüências em $\mathbb{Z}(r^k)^{(\alpha_r^k)}$ do que possíveis u -limites para elas (pois vamos ter u -limites diferentes para seqüências diferentes). Portanto vamos precisar de “ u -limites” para seqüências de $\mathbb{Z}(r^k)^{(\alpha_r^k)}$, fora de $\mathbb{Z}(r^k)^{(\alpha_r^k)}$. Por hipótese existe j , com $k < j \leq t$ tal que $(\alpha_r^j)^\omega = \alpha_r^j$ e $(\alpha_r^k)^\omega \leq \alpha_r^j$. Como $\mathbb{Z}(r^j)^{(\alpha_r^j)} \cong \mathbb{Z}(r^j)^{(\alpha_r^j)} \oplus \mathbb{Z}(r^j)^{(\alpha_r^j)}$, temos em $\mathbb{Z}(r^j)^{(\alpha_r^j)}$ candidatos suficientes a “ u -limites” para as seqüências em $\mathbb{Z}(r^k)^{(\alpha_r^k)}$ e para as seqüências em $\mathbb{Z}(r^j)^{(\alpha_r^j)}$. Isto é, vamos fazer com que

$$\mathbb{Z}(r^k)^{(\alpha_r^k)} \oplus \mathbb{Z}(r^j)^{(\alpha_r^j)} \oplus \mathbb{Z}(r^j)^{(\alpha_r^j)} \cong \mathbb{Z}(r^k)^{(\alpha_r^k)} \oplus \mathbb{Z}(r^j)^{(\alpha_r^j)}$$

seja u -compacto.

Como a u -compacidade é produtiva, todo outro caso reduz-se ao que acabamos de comentar.

Vamos simplificar um pouco a notação. Se G é como no enunciado do teorema, e n é a ordem de G , então existem um subgrupo finito F de G e um divisor $m > 1$ de n tais que $G \cong F \oplus \oplus_{d|m} \mathbb{Z}(d)^{(\beta_d)}$, onde β_m satisfaz $\beta_m^\omega = \beta_m$. Como o produto de um grupo finito por um grupo u -compacto é u -compacto, podemos assumir que $F = \{0\}$ e que $m = n$. Também podemos assumir $G = \mathbb{Z}(d)^{(\beta_d)} \oplus \mathbb{Z}(n)^{(\beta_n)}$ onde d é divisor de n , $\beta_d < \beta_n$ e $\beta_d^\omega \leq \beta_n$, pela produtividade da u -compacidade e porque o conjunto dos divisores de n é finito.

Vamos fixar $\{x_\alpha : \alpha < \beta_d\}$ uma base para $\mathbb{Z}(d)^{(\beta_d)}$ e $\{x_\alpha : \beta_d \leq \alpha < \beta_n\}$ uma base para o grupo $\mathbb{Z}(n)^{(\beta_n)}$.

Consideramos agora os ultraproductos ${}^\omega(\mathbb{Z}(d)^{(\beta_d)})/u$ e ${}^\omega(\mathbb{Z}(n)^{(\beta_n)})/u$, e vamos enumerar as funções injetoras na base de cada um deles.

Como $\beta_d^\omega \leq \beta_n$, podemos assumir (para simplificar a notação) que $\beta_d^\omega = \beta_n$. Seja $\{I_0, I_1\}$ uma partição de $\beta_n \setminus \beta_d$ tal que $|I_0| = |I_1| = \beta_n$. Então enumeramos por $\{f_\xi : \xi \in \beta_n \setminus \beta_d\}$ as funções injetoras que satisfazem:

(1) $f_\xi : \omega \rightarrow \mathbb{Z}(d)^{(\beta_d)} \forall \xi \in I_0$ e $\{[f_\xi]_u : \xi \in I_0\} \cup \{[\vec{x}_\alpha]_u : \alpha < \beta_d\}$ é uma base para ${}^\omega(\mathbb{Z}(d)^{(\beta_d)})/u$;

(2) $f_\xi : \omega \rightarrow \mathbb{Z}(n)^{(\beta_n)} \forall \xi \in I_1$ e $\{[f_\xi]_u : \xi \in I_1\} \cup \{[\vec{x}_\alpha]_u : \beta_d \leq \alpha < \beta_n\}$ é uma base para ${}^\omega(\mathbb{Z}(n)^{(\beta_n)})/u$ e $\bigcup_{k < \omega} \text{supp}(f_\xi(k)) \subseteq \xi, \forall \xi \in I_1$.

Observamos que:

- (i) $\bigcup_{k < \omega} \text{supp}(f_\xi(k)) \subseteq \beta_d, \forall \xi \in I_0$,
- (ii) $\text{ord}(f_\xi(k)) = d, \forall k \in \omega, \forall \xi \in I_0$ e $\text{ord}(f_\xi(k)) = n, \forall k \in \omega, \forall \xi \in I_1$,
- (iii) se $x \in G$, então $x = x_0 + x_1$, com $x_0 \in \mathbb{Z}(d)^{(\beta_d)}$ e $x_1 \in \mathbb{Z}(n)^{(\beta_n)}$, isto é $\text{supp}(x) =$

$\text{supp}(x_0) \cup \text{supp}(x_1)$, onde $\text{supp}(x_0) \in [\beta_d]^{<\omega}$ e $\text{supp}(x_1) \in [\beta_n \setminus \beta_d]^{<\omega}$,

(iv) se $f \in G^\omega$ então $[f]_u = \sum_{j=0}^{k_f} a_j [f_{\xi_j}]_u + \sum_{s=0}^{h_f} c_s [\vec{x}_{\alpha_s}]_u$, onde $a_j \in \mathbb{Z}$, $c_s \in \mathbb{Z}$, $\beta_d \leq \xi_j < \beta_n$, $\alpha_s < \beta_n$.

A idéia é construir um monomorfismo $\varphi : G \rightarrow \mathbb{Z}(n)^{\beta_n}$ tal que $\varphi(G)$ com a topologia de subespaço de $\mathbb{Z}(n)^{\beta_n}$ seja u -compacto e sem seqüências convergentes. Para conseguir a segunda condição tomamos conta de uma seqüência de cada vez. Vamos construir homomorfismos $\phi_{f,x} : G \rightarrow \mathbb{Z}(n)$, para cada $x \in G$ e cada seqüência injetora f tal que $[f]_u \in \langle \{[f_\xi]_u : \beta_0 \leq \xi < \beta_n\} \rangle$.

Lema 2.9. *Seja $x \in G$ e seja $f \in {}^\omega G$ tal que*

$$[f]_u = \sum_{j=0}^{k_f} a_j [f_{\xi_j}]_u, \text{ com } a_j \in \mathbb{Z} \text{ e } \sum_{j=0}^{k_f} a_j [f_{\xi_j}]_u \neq 0.$$

Então existem uma seqüência crescente $\{b_i : i \in \omega\} \in u$, e uma seqüência $\{E_i : i \in \omega\}$ de subconjuntos finitos de β_n tais que:

- (a) $\text{supp}(x) \cup \{\xi_j : 0 \leq j \leq k_f\} \subseteq E_0$;
- (b) $\omega \subseteq \bigcup_{i \in \omega} E_i$;
- (c) $E_{i+1} \supseteq \bigcup_{\xi \in E_i} \text{supp}(f_\xi(b_i)) \cup E_i$;
- (d) $\{f_\xi(b_i) : \xi \in E_i\} \cup \{x_\alpha : \alpha \in E_i\}$ é independente, para todo $i < \omega$;
- (e) $f(b_i) = \sum_{j=0}^{k_f} a_j f_{\xi_j}(b_i) \quad \forall i \in \omega$.

Demonstração: Definimos por indução uma família $\{F_k : k \in \omega\}$ de subconjuntos finitos de β_n :

$$F_0 = \text{supp}(x) \cup \{\xi_j : 0 \leq j \leq k_f\},$$

$$F_{k+1} = \bigcup_{\xi \in F_k} \{\text{supp}(f_\xi(m)), m \leq k\} \cup F_k \cup k, \quad \forall k \in \omega.$$

Sejam, para cada $k \in \omega$

$$A_k^0 = \{m \in \omega : \{f_\xi(m) : \xi \in F_k \cap I_0\} \cup \{x_\alpha : \alpha \in F_k \cap \beta_d\} \text{ é independente}\},$$

$A_k^1 = \{m \in \omega : \{f_\xi(m) : \xi \in F_k \cap I_1\} \cup \{x_\alpha : \alpha \in F_k \cap \beta_n \setminus \beta_d\} \text{ é independente} \},$

$U = \{m \in \omega : f(m) = \sum_{j=0}^{k_f} a_j f_{\xi_j}(m)\}.$

Como $\{[f_\xi]_u : \xi \in I_0\} \cup \{[\vec{x}_\alpha]_u : \alpha < \beta_d\}$ é independente e

$\{[f_\xi]_u : \xi \in I_1\} \cup \{[\vec{x}_\alpha]_u : \beta_d \leq \alpha < \beta_n\}$ é também independente temos que $A_k^i \in u$ para cada $i < 2$. Portanto

$A_k = A_k^0 \cap A_k^1 \cap U = \{m \in \omega : \{f_\xi(m) : \xi \in F_k\} \cup \{x_\alpha : \alpha \in F_k\} \text{ é independente} \} \cap U \in u, \forall k \in \omega.$

Como u é P-ponto, existe $A \in u$ tal que $A \setminus A_k$ é finito para todo $k < \omega$.

Seja $h : \omega \rightarrow \omega$ uma função crescente tal que $A \setminus A_k \subseteq h(k)$, para cada $k \in \omega$.

Pela seletividade de u , existe $B \in u$ que satisfaz

$$B \cap h(1) = \emptyset, \quad B \subseteq A, \quad |B \cap [h(k) + 1, h(k + 1)]| \leq 1 \quad \forall k \in \omega.$$

Seja $\{a_k : k \in \omega\}$ uma enumeração crescente de B . Então $k < a_k < a_m$ e $a_k \in A_k$ para todo $k < m < \omega$. Definimos em $[\omega]^2$ uma coloração P_0, P_1 por:

$\{a, b\} \in P_0$ se e somente se $a, b \in B$, $a < b$ e $a_k < m$ se $a = a_k$ e $b = a_m$,
 $\{a, b\} \in P_1$ caso contrário.

De novo pela seletividade de u , existe $C \in u$, $C \subseteq B$ tal que $[C]^2 \subseteq P_0$ ou $[C]^2 \subseteq P_1$.

Seja $I \in {}^\omega \omega$ tal que $C = \{a_k : k \in I\}$ e seja $\{i_m : m < \omega\}$ uma enumeração crescente de I . Suponhamos que $[C]^2 \subseteq P_1$, então $a_{i_0} \geq i_k, \forall 1 \leq k < \omega$, o que é absurdo. Logo $[C]^2 \subseteq P_0$ e portanto $i_k < a_{i_k} < i_{k+1}, \forall k < \omega$.

Definimos, para cada $k < \omega$, $b_k = a_{i_k}$ e $E_k = F_{i_k}$. Então

$$\begin{aligned} E_k \cup \bigcup_{\xi \in E_k} \text{supp}(f_\xi(b_k)) &= F_{i_k} \cup \bigcup_{\xi \in F_{i_k}} \text{supp}(f_\xi(a_{i_k})) \subseteq \\ &\subseteq F_{i_k} \cup \bigcup_{\xi \in F_{i_k}} \{\text{supp}(f_\xi(m)), m < i_{k+1}\} \subseteq F_{i_{k+1}} = E_{k+1}. \end{aligned}$$

De $a_{i_k} \in A_k = A_k^0 \cap A_k^1$ seguem (d) e (f). □

Lembramos que d é divisor de n , e fixamos o inteiro t que satisfaz $d.t = n$.

Seja f uma seqüência em G tal que

$$[f]_u = \sum_{j=0}^{k_f} a_j \cdot [f_{\xi_j}]_u,$$

onde $a_j \in \mathbb{Z}$ e $\sum_{j=0}^{k_f} a_j \cdot [f_{\xi_j}]_u \neq 0$. Então existem $A \in u$ e um divisor l_f de n tais que $\text{ord}(f(m)) = l_f \forall m \in A$. Seja $l'_f \in \mathbb{Z}$ tal que $l_f \cdot l'_f = n$.

Lema 2.10. *Seja $x \in G$ e seja f uma seqüência em G tal que*

$$[f]_u = \sum_{j=0}^{k_f} a_j \cdot [f_{\xi_j}]_u,$$

onde $a_j \in \mathbb{Z}$ e $\sum_{j=0}^{k_f} a_j \cdot [f_{\xi_j}]_u \neq 0$. Se existe u um ultrafiltro seletivo sobre ω , então existe um homomorfismo $\phi_{f,x} : G \rightarrow \mathbb{Z}(n)$ que satisfaz:

- 1) $\phi_{f,x}(x) \neq 0$ se $x \neq 0$,
- 2) $\{m \in \omega : \phi_{f,x}(f_{\xi}(m)) = l \cdot \phi_{f,x}(x_{\xi})\} \in u \quad \forall \xi \in I_0$,
- 3) $\{m \in \omega : \phi_{f,x}(f_{\xi}(m)) = \phi_{f,x}(x_{\xi})\} \in u, \quad \forall \xi \in I_1$,
- 4) $\{m \in \omega : \phi_{f,x}(f(m)) \neq \sum_{j=0}^{k_f} t_{\xi_j} \cdot a_j \phi_{f,x}(x_{\xi_j})\}$ é infinito, onde $t_{\xi_j} = t$ se $\xi_j \in I_0$ e $t_{\xi_j} = 1$ se $\xi_j \in I_1$.

Demonstração: Pelo Lema 2.9 existem uma seqüência crescente $\{b_i : i \in \omega\} \in u$ e uma seqüência $\{E_i : i \in \omega\}$ de subconjuntos finitos de β_n tais que:

- (a) $\text{supp}(x) \cup \{\xi_j : 0 \leq j \leq k_f\} \subseteq E_0$;
- (b) $\omega \subseteq \bigcup_{i \in \omega} E_i$;

$$(c) E_{i+1} \supseteq \bigcup_{\xi \in E_i} \text{supp}(f_\xi(b_i)) \cup E_i;$$

(d) $\{f_\xi(b_i) : \xi \in E_i\} \cup \{x_\alpha : \alpha \in E_i\}$ é independente, para todo $i < \omega$;

$$(e) f(b_i) = \sum_{j=0}^{k_f} a_j f_{\xi_j}(b_i) \quad \forall i \in \omega.$$

Como $\{b_i : i \in \omega\} \in u$ temos que $\{b_{2i} : i \in \omega\} \in u$ ou $\{b_{2i+1} : i \in \omega\} \in u$. Podemos assumir s.p.g. que $\{b_{2i} : i \in \omega\} \in u$.

Também podemos assumir que $\text{ord}(f(b_i)) = l_f$ para todo $i \in \omega$.

Definimos primeiro $\phi_{f,x}$ em $\{x_\alpha : \alpha \in \bigcup_{i \in \omega} E_i\}$ por indução.

Para cada $\alpha \in E_0$, definimos $\phi_{f,x}(x_\alpha)$ de tal forma que $\phi_{f,x}(x) \neq 0$.

Suponhamos que para $h \in \omega$, temos definida $\phi_{f,x}$ em $\{x_\alpha : \alpha \in E_h\}$, tal que para cada $k < h$,

i) se k é par, então

$$\phi_{f,x}(f_\xi(b_k)) = t \cdot \phi_{f,x}(x_\xi) \quad \forall \xi \in E_k \cap I_0 \quad \text{e} \quad \phi_{f,x}(f_\xi(b_k)) = \phi_{f,x}(x_\xi) \quad \forall \xi \in E_k \cap I_1;$$

ii) se k é ímpar, então

$$\phi_{f,x}(f(b_k)) = \sum_{j=0}^{k_f} t_{\xi_j} \cdot a_j \phi_{f,x}(x_{\xi_j}) + l'_f, \text{ onde } t_{\xi_j} = t \text{ se } \xi_j \in I_0 \text{ e } t_{\xi_j} = 1 \text{ se } \xi_j \in I_1.$$

Observamos que $\phi_{f,x}(f(b_k))$ assim definida satisfaz $\text{ord}(\phi_{f,x}(f(b_k)))$ divide $l_f = \text{ord}(f(b_k))$.

Como $\{f_\xi(b_h) : \xi \in E_h\} \cup \{x_\alpha : \alpha \in E_h\}$ é independente, podemos estender $\phi_{f,x}$ a $\{x_\alpha : \alpha \in E_{h+1}\}$ satisfazendo:

i) se h é par:

$$\phi_{f,x}(f_\xi(b_h)) = \phi_{f,x}(t \cdot x_\xi) \quad \forall \xi \in E_h \cap I_0 \quad \text{e} \quad \phi_{f,x}(f_\xi(b_h)) = \phi_{f,x}(x_\xi) \quad \forall \xi \in E_h \cap I_1;$$

ii) se h é ímpar:

$$\phi_{f,x}(f(b_h)) = \sum_{j=0}^{k_f} t_{\xi_j} \cdot a_j \phi_{f,x}(x_{\xi_j}) + l'_f, \text{ onde } t_{\xi_j} = t \text{ se } \xi_j \in I_0 \text{ e } t_{\xi_j} = 1 \text{ se } \xi_j \in I_1.$$

Temos então definido o homomorfismo $\phi_{f,x}$ no grupo gerado por $\{x_\alpha : \alpha \in \bigcup_{i \in \omega} E_i\}$ e verifica:

$$\{m \in \omega : \phi_{f,x}(f_\xi(m)) = \phi_{f,x}(t.x_\xi)\} \in u \quad \forall \xi \in (I_0 \cap \bigcup_{i \in \omega} E_i),$$

$$\{m \in \omega : \phi_{f,x}(f_\xi(m)) = \phi_{f,x}(x_\xi)\} \in u, \quad \forall \xi \in (I_1 \cap \bigcup_{i \in \omega} E_i),$$

$\{m \in \omega : \phi_{f,x}(f(m)) = \sum_{j=0}^{k_f} t_{\xi_j} \cdot a_j \phi_{f,x}(x_{\xi_j}) + l'_f\}$ é infinito, onde $t_{\xi_j} = t$ se $\xi_j \in I_0$ e $t_{\xi_j} = 1$ se $\xi_j \in I_1$.

Para cada $\alpha \in \beta_d \setminus \bigcup_{i \in \omega} E_i$, podemos por $\phi_{f,x}(x_\alpha) = 0$.

Resta então definirmos $\phi_{f,x}(x_\alpha)$ para cada $\alpha \in \beta_n \setminus (\beta_d \cup \bigcup_{i \in \omega} E_i)$. Esta definição vai ser feita por indução transfinita. Seja $\gamma \in \beta_n \setminus (\beta_d \cup \bigcup_{i \in \omega} E_i)$ e suponhamos $\phi_{f,x}$ definida em $\{x_\alpha : \alpha \in \beta_d \cup \bigcup_{i \in \omega} E_i \cup \gamma\}$. Sabemos que $\bigcup_{k \in \omega} \text{supp}(f_\gamma(k)) \subseteq \gamma$, portanto podemos definir $\phi_{f,x}$ tal que:

$$\phi_{f,x}(t.x_\gamma) = u - \lim_{k \in \omega} (\phi_{f,x}(f_\gamma(k))) \text{ se } \gamma \in I_0,$$

$$\phi_{f,x}(x_\gamma) = u - \lim_{k \in \omega} (\phi_{f,x}(f_\gamma(k))) \text{ se } \gamma \in I_1. \quad \square$$

Demonstração do Teorema 2.8: Para cada $x \in G$ e para cada seqüência f injetora de G com $[f]_u = \sum_{j=0}^{k_f} a_j \cdot [f_{\xi_j}]_u$, onde $a_j \in \mathbb{Z}$ e $\sum_{j=0}^{k_f} a_j \cdot [f_{\xi_j}]_u \neq 0$, seja $\phi_{f,x}$ como no Lema 2.10.

Definimos o homomorfismo $\varphi : G \rightarrow \mathbb{Z}(n)^{\beta_n}$ por

$$\varphi(z) = \Delta_{(f,x)} \phi_{f,x}(z).$$

Vemos que se $x \in G$ com $x \neq 0$, então $\varphi(x) \neq 0$ pois $\phi_{f,x}(x) \neq 0$. Portanto o homomorfismo φ é injetor e $\varphi(G)$ é um subgrupo de $\mathbb{Z}(n)^{\beta_n}$ isomorfo a G .

Vamos verificar agora que $\varphi(G)$ com a topologia de subespaço de $\mathbb{Z}(n)^{\beta_n}$ é enumeravelmente compacto.

Seja $(z_m)_{m < \omega}$ uma seqüência qualquer em $\varphi(G)$. Então existe $g \in G^\omega$ tal que $z_m = \varphi(g(m))$, $\forall m \in \omega$. Se $[g]_u = \sum_{i=0}^{k_g} a_i \cdot [f_{\xi_i}]_u + \sum_{l=0}^{h_g} c_l \cdot [x_{\alpha_l}]_u$, seja

$$A = \{m \in \omega : g(m) = \sum_{i=0}^{k_g} a_i \cdot f_{\xi_i}(m) + \sum_{l=0}^{h_g} c_l \cdot x_{\alpha_l}\}.$$

Como $A \in u$, do Lema 2.10, segue que para cada par (f, x) ,

$$u - \lim_{m \in \omega} \phi_{f,x}(g(m)) = \sum_{i=0}^{k_g} t_{\xi_i} \cdot a_i \cdot \phi_{f,x}(x_{\xi_i}) + \sum_{l=0}^{h_g} c_l \cdot \phi_{f,x}(x_{\alpha_l}),$$

onde $t_{\xi_i} = t$ se $\xi_i \in I_0$ e $t_{\xi_i} = 1$ se $\xi_i \in I_1$.

Logo,

$$u - \lim_{m \in \omega} z_m = u - \lim_{m \in \omega} \varphi(g(m)) = \sum_{i=0}^{k_g} t_{\xi_i} \cdot a_i \cdot \varphi(x_{\xi_i}) + \sum_{l=0}^{h_g} c_l \cdot \varphi(x_{\alpha_l}),$$

onde $t_{\xi_i} = t$ se $\xi_i \in I_0$ e $t_{\xi_i} = 1$ se $\xi_i \in I_1$.

Só falta verificar que $\varphi(G)$ não possui seqüências não triviais convergentes.

Seja $\{\varphi(f(m)) : m \in \omega\}$ uma seqüência não trivial. Vamos assumir que a seqüência $\{\varphi(f(m)) : m \in \omega\}$ é injetiva. Como φ é injetiva, temos que $f \in G^\omega$ também é injetiva e que $[f]_u = \sum_{j=0}^{k_f} a_j \cdot [f_{\xi_j}]_u$, onde $a_j \in \mathbb{Z}$ e $\sum_{j=0}^{k_f} a_j \cdot [f_{\xi_j}]_u \neq 0$. Também assumimos que existem $A \in u$ e l_f divisor de n tais que $\text{ord}(f(m)) = l_f \forall m \in \omega$. Segue do item 4) do Lema 2.10 que

$\{m \in \omega : \phi_{f,x}(f(m)) = \sum_{j=0}^{k_f} t_{\xi_j} \cdot a_j \cdot \phi_{f,x}(x_{\xi_j}) + l'_f\}$ é infinito, onde l'_f é tal que $l_f \cdot l'_f = n$.

Mas

$$u - \lim_{m \in \omega} \varphi(f(m)) = u - \lim_{m \in \omega} \phi_{f,x}(f(m)) = \sum_{j=0}^{k_f} t_{\xi_j} \cdot a_j \cdot \phi_{f,x}(x_{\xi_j}).$$

Portanto a seqüência $\{\varphi(f(m)) : m \in \omega\}$ não converge. $\square$

Corolário 2.11. *Se existe um ultrafiltro seletivo u sobre ω , então para um grupo abeliano de torção G , de cardinalidade $\mathfrak{c}$ são equivalentes:*

- (a) *G tem ordem limitada n e para cada divisor próprio d de n , o subgrupo dG é finito ou tem cardinalidade $\mathfrak{c}$.*
- (b) *G tem ordem limitada n , e para cada componente prima G_r de G o último invariante infinito de Ulm–Kaplansky de G_r é $\mathfrak{c}$.*
- (c) *G admite uma topologia de grupo topológico u -compacta sem seqüências não triviais convergentes.*

Demonstração: A equivalência entre (a) e (b) é o Lema 1.6.

Que (b) implica (c) é consequência imediata do Teorema 2.8 e é o único passo da equivalência que precisa da existência de um ultrafiltro seletivo.

Para (c) $\Rightarrow$ (a), lembramos que um espaço topológico u -compacto é pseudocompacto. Comfort e van Mill provaram em [7] que um grupo abeliano de torção pseudocompacto de cardinalidade $\mathfrak{c}$ verifica (a). Vamos aqui fazer um esboço da demonstração que aparece em [8]. Vamos primeiro assumir que G têm ordem n , e vamos provar que dG é finito ou tem cardinalidade $\mathfrak{c}$. O homomorfismo $\pi : G \rightarrow dG$ que leva $x \in G$ em $d.x \in dG$ é sobrejetor e contínuo. Como a imagem contínua de um espaço pseudocompacto é também um espaço pseudocompacto, temos que o grupo dG é pseudocompacto. Um grupo pseudocompacto é finito e discreto ou tem cardinalidade maior ou igual a $\mathfrak{c}$. Portanto dG é finito ou $|G| = \mathfrak{c}$.

A prova de que um grupo abeliano de torção pseudocompacto é de ordem limitada, não é tão simples. O que segue é só um esboço da demonstração.

A idéia é mostrar que todo subgrupo enumerável de G tem ordem limitada. Se isso acontece, então G também tem ordem limitada.

Fixamos um subgrupo enumerável qualquer G' de G . O grupo G , sendo pseudocompacto, é totalmente limitado. Sendo assim, por ser G' enumerável é possível construir um homomorfismo contínuo π de G sobre um grupo métrico H , tal que a restrição de π a G' é injetora.

Seja $K = \ker \pi$ e seja $\beta : G \rightarrow G/K$ o homomorfismo natural. Então existe um isomorfismo contínuo $i : G/K \rightarrow H$ com $\pi = i \circ \beta$. Observamos que o grupo G/K é pseudocompacto por ser imagem contínua de G e também é um grupo de torção. Mas é possível provar que existe uma uniformidade completa e totalmente limitada sobre G/K que induz a topologia de G/K . Portanto o grupo G/K é compacto. Da classificação dos grupos topológicos compactos (Teorema 1.38), segue que o grupo G/K tem ordem limitada.

$\beta(G')$ é subgrupo de G/K , e portanto tem ordem limitada também. Mas o homomorfismo β restrito a G' é um isomorfismo do qual segue que G' tem ordem limitada.

□

Corolário 2.12. (GCH) *Seja G um grupo abeliano de torção e u um ultrafiltro seletivo sobre ω . Então são equivalentes:*

- (a) *G admite uma topologia de grupo u -compacta sem seqüências não triviais convergentes;*
- (b) *G admite uma topologia de grupo enumeravelmente compacta sem seqüências não triviais convergentes;*
- (c) *G admite uma topologia de grupo pseudocompacta;*
- (d) *para cada número primo r , a componente prima G_r de G admite uma topologia de grupo pseudocompacta e G_r é não trivial só para uma quantidade finita de r 's;*
- (e) *para cada componente primária G_r de G e cada invariante de Ulm-Kaplansky infinita $\alpha_{r,k}$ de G_r , correspondente a $\mathbb{Z}(r^k)$, existe um inteiro $k' \geq k$ tal que a invariante*

$\alpha_{r,k'}$ satisfaz $\alpha_{r,k} \leq \alpha_{r,k'}$ e $(\alpha_{r,k'})^\omega = \alpha_{r,k'}$.

Demonstração: (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) são resultados conhecidos.

(e) $\Rightarrow$ (a) é o Teorema 2.8. Vamos ver por que vale (d) $\Rightarrow$ (e). Para isso vamos definir *cardinal de van Douwen*: dizemos que um cardinal κ é um cardinal de van Douwen se κ é tal que $\kappa \geq \mathfrak{c}$ e se κ é limite forte, então $\text{cf}(\kappa) > \omega$.

Esta definição é natural se levamos em conta a restrição dada por van Douwen à cardinalidade de um grupo topológico pseudocompacto infinito.

Em [8], Teorema 1.5, os autores mostraram que a condição (d) implica que para cada componente primária G_r de G e cada invariante de Ulm–Kaplansky infinita $\alpha_{r,k}$ de G_r , correspondente a $\mathbb{Z}(r^k)$, existe um inteiro $k' \geq k$ tal que a invariante $\alpha_{r,k'}$ satisfaz $\alpha_{r,k} \leq \alpha_{r,k'}$ e $\alpha_{r,k'}$ é um cardinal de van Douwen. Mas sob GCH, se κ é um cardinal de van Douwen, então $\kappa^\omega = \kappa$. Portanto temos (e). $\square$

Capítulo 3

Ultrafiltros seletivos e grupos de torção enumeravelmente compactos.

Neste capítulo apresentamos uma condição suficiente para que, sob a existência de $\mathfrak{c}$ ultrafiltros seletivos, um grupo abeliano de torção G , de cardinalidade $\mathfrak{c}$, admita, para cada número natural p , uma topologia τ de grupo topológico tal que $(G, \tau)^p$ é enumeravelmente compacto, mas $(G, \tau)^q$ não é enumeravelmente compacto para algum $q > p$.

3.1 Uma topologia enumeravelmente compacta para $\mathbb{Z}(r)^{(\mathfrak{c})}$.

Começamos apresentando a construção de uma topologia enumeravelmente compacta para $\mathbb{Z}(r)^{(\mathfrak{c})}$, onde r é um número primo. Acreditamos que a leitura deste caso pode ajudar na compreensão do caso mais geral.

Teorema 3.1. *Seja $G = \mathbb{Z}(r)^{(\mathfrak{c})}$, e p um inteiro positivo. Se existem $\mathfrak{c}$ ultrafiltros seletivos incomparáveis sobre ω , então existe uma topologia τ de grupo topológico tal que $(G, \tau)^p$ é enumeravelmente compacto, mas $(G, \tau)^{p+1}$ não é enumeravelmente compacto.*

A idéia é, como no capítulo anterior, construir um monomorfismo $\varphi : G \rightarrow \mathbb{Z}(r)^\mathfrak{c}$ tal que $\varphi(G)$ com a topologia de subespaço de $\mathbb{Z}(r)^\mathfrak{c}$, possua as propriedades requeridas. Também como no caso do capítulo anterior, para fazer de φ uma função injetora, trabalhamos com um elemento do grupo de cada vez, construindo homomorfismos $\phi_x : G \rightarrow \mathbb{Z}(r)$.

Seja $\{x_{\alpha,i} : \alpha < \mathfrak{c}, i < p+1\}$ uma base para o espaço vetorial $\mathbb{Z}(r)^{(\mathfrak{c})}$.

Enumeramos por $\{f_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$ as funções $f : S \times \omega \rightarrow G$ com $S \in (p+1)^{\leq p}$ tais que para cada $F \in]\mathfrak{c} \times (p+1)[^{<\omega}$ o conjunto

$\omega \setminus \{m \in \omega : \{x_{\alpha,i} : (\alpha, i) \in F\} \cup \{f(i, m) : i \in S\} \text{ é linearmente independente} \}$ é finito.

Para cada ξ , chamamos de S_ξ o subconjunto de $(p+1)$ tal que $\text{dom}(f_\xi) = S_\xi \times \omega$.

Assumimos que $\bigcup_{(i,m) \in \text{dom}(f_\xi)} \text{supp}(f_\xi(i, m)) \subseteq \xi \times (p+1)$.

Lema 3.2. *Seja $\varphi : G \rightarrow \mathbb{Z}(r)^\mathfrak{c}$ um monomorfismo de grupos e seja $\{u_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$ uma família de ultrafiltros sobre ω . Se para cada $\omega \leq \xi < \mathfrak{c}$, a seqüência $\{(\varphi(f_\xi(i, m)))_{i \in S_\xi} : m \in \omega\}$ tem u_ξ -limite $(\varphi(x_{\xi, i}))_{i \in S_\xi}$ em $\varphi(G)^{S_\xi}$, então $\varphi(G)^p$ é enumeravelmente compacto como subespaço de $\mathbb{Z}(r)^\mathfrak{c}$.*

Demonstração: Seja $\{(\varphi(a_{i, m}))_{i < p} : m \in \omega\}$ uma seqüência em $\varphi(G)^p$.

Afirmção 1: Existem $S \subseteq p$, $c_i \in G$ e $E_i \subseteq S$ para cada $i < p$, $A \subseteq \omega$ infinito e subconjuntos $\{b_{i, m} : m \in \omega\}$ de G para cada $i \in S$, tais que:

$\{(\varphi(b_{i, m}))_{i \in S} : m \in A\}$ tem ponto de acumulação em $\varphi(G)^S$ e

$c_i = a_{i, m} - \sum_{j \in E_i} b_{j, m}$ para cada $m \in A$.

Antes de demonstrarmos a Afirmção 1, vamos fazer uso dela para demonstrar a Afirmção 2: A seqüência $\{(\varphi(a_{i, m}))_{i < p} : m \in \omega\}$ possui ponto de acumulação em $\varphi(G)^p$.

Demonstração da Afirmção 2: Sejam $S \subseteq p$, $c_i \in G$ e $E_i \subseteq S$ para cada $i < p$, $A \subseteq \omega$ infinito e subconjuntos $\{b_{i, m} : m \in \omega\}$ de G para cada $i \in S$, como na Afirmção 1. Então existe um ultrafiltro u sobre ω e $b_i \in G$ para cada $i \in S$, tais que

$$\varphi(b_i) = u - \lim_{m \in \omega} \varphi(b_{i, m}) \text{ para cada } i \in S.$$

Logo, para cada $i < p$ temos que

$$\begin{aligned} u - \lim_{m \in \omega} \varphi(a_{i, m}) &= \varphi(c_i) + u - \lim_{m \in \omega} \sum_{j \in E_i} \varphi(b_{j, m}) = \\ &= \varphi(c_i) + \sum_{j \in E_i} (u - \lim_{m \in \omega} \varphi(b_{j, m})) = \varphi(c_i) + \sum_{j \in E_i} \varphi(b_j). \end{aligned}$$

Portanto cada seqüência $\{\varphi(a_{i, m}) : m \in \omega\}$ tem u -limite em $\varphi(G)$. Segue que $\{(\varphi(a_{i, m}))_{i < p} : m \in \omega\}$ tem u -limite em $\varphi(G)^p$.

Demonstração da Afirmação 1: Seja u um ultrafiltro seletivo sobre ω . Consideramos o ultraproduto ${}^\omega G/u$, que é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Z}(r)$. Chamamos R ao subespaço de ${}^\omega G/u$ gerado por $\{[\{a_{i,m} : m \in \omega\}]_u : i < p\}$. Isto é:

$$R = \langle [\{a_{i,m} : m \in \omega\}]_u : i < p \rangle.$$

Podemos considerar $C \subseteq G$ tal que $\{[\vec{x}]_u : x \in C\}$ é uma base para $R \cap \{[\vec{x}]_u : x \in G\}$.

Sejam $S \subseteq p$ e $\{[\{b_{i,m} : m \in \omega\}]_u : i \in S\}$ tais que

$\{[\{b_{i,m} : m \in \omega\}]_u : i \in S\} \cup \{[\vec{x}]_u : x \in C\}$ é uma base para R .

Escrevemos cada elemento do conjunto gerador original de R como combinação linear dos elementos da base:

para cada $i < p$, sejam $E_i \subseteq S$ e $C_i \subseteq C$ tais que

$$[\{a_{i,m} : m \in \omega\}]_u = \sum_{x \in C_i} c_{i,x} [\vec{x}]_u + \sum_{j \in E_i} t_{j,i} [\{b_{j,m} : m \in \omega\}]_u,$$

onde $c_{i,x} \in \mathbb{Z}(r) \forall x \in C_i$ e $t_{j,i} \in \mathbb{Z}(r) \forall j \in E_i$.

Segue que a seqüência $\{a_{i,m} : m \in \omega\} - \sum_{j \in E_i} \{t_{j,i} \cdot b_{j,m} : m \in \omega\}$ é u -equivalente a uma seqüência constante. Portanto existe $B \in u$ e elementos x_i do grupo G tais que para cada $i < p$

$$x_i = \sum_{x \in C_i} c_{i,x} \cdot x = a_{i,m} - \sum_{j \in E_i} t_{j,i} \cdot b_{j,m} \quad \forall m \in B.$$

(*) Para cada $T \subseteq S$ não vazio, e para cada conjunto $\{t_i : i \in T\} \subseteq \mathbb{Z}(r)$, se $\sum_{i \in T} t_i [\{b_{i,m} : m \in \omega\}]_u \neq 0$ então $\sum_{i \in T} t_i [\{b_{i,m} : m \in \omega\}]_u$ não está na classe de u -equivalência de uma seqüência constante. Isto é verdade pois

$$\sum_{i \in T} t_i [\{b_{i,m} : m \in \omega\}]_u \in R,$$

e é uma combinação linear de elementos da base de R que não geram as constantes. Agora, para cada $T \subseteq S$ e para cada $\{t_i : i \in T\}$ que abreviamos por $\{t_i\}$ definimos a aplicação $h_{T,\{t_i\}} : \omega \rightarrow G$ por

$$h_{T,\{t_i\}}(m) = \sum_{i \in T} t_i \cdot b_{i,m}.$$

Se $\sum_{i \in T} t_i [\{b_{i,m} : m \in \omega\}]_u \neq 0$, por (*) e por ser u seletivo podemos afirmar que existe $A_{T,\{t_i\}} \in u$, $A_{T,\{t_i\}} \subseteq B$, tal que a aplicação $h_{T,\{t_i\}} \upharpoonright_{A_{T,\{t_i\}}}$ é injetora. Como só temos uma quantidade finita de funções $h_{T,\{t_i\}}$,

(**) existe $A \in u$, $A \subseteq B$ tal que $h_{T,\{t_i\}} \upharpoonright_A$ é injetora, para cada $T \subseteq S$ e para cada $\{t_i : i \in T\}$.

Seja $\{m_k : k \in \omega\}$ uma enumeração de A e seja a função $f : S \times \omega \rightarrow G$ definida por $f(i, k) = b_{i,m_k}$, $\forall i \in S, \forall k \in \omega$.

Afirmção: existe $\omega \leq \xi < \mathfrak{c}$, tal que $f_\xi = f$.

Para demonstrar esta afirmação, precisamos provar que para cada subconjunto finito F de $\mathfrak{c} \times (p+1)$, o conjunto

$$X_F = \omega \setminus \{m \in \omega : \{x_{\alpha,i} : (\alpha, i) \in F\} \cup \{f(i, m) : i \in S\} \text{ é linearmente independente} \}$$

é finito. Seja então F um subconjunto finito de $\mathfrak{c} \times (p+1)$, e vamos supor, por absurdo, que o conjunto X_F é infinito. Então, para cada $k \in X_F$, existe $F_k \subseteq F$, $\emptyset \neq T_k \subseteq S$ e inteiros t_i^k para cada $i \in T_k$ tais que $\sum_{i \in T_k} t_i^k \cdot b_{i,m_k}$ é combinação linear dos elementos do conjunto $\{x_\alpha : \alpha \in F_k\}$. Como F é finito, S também é finito e os escalares que aparecem nas combinações lineares são elementos de $\mathbb{Z}(r)$ que também é finito, temos que existe um subconjunto infinito Y_F de X_F , $E \subseteq F$, $T \subseteq S$ e inteiros

$\{t_i : i \in T\}$ tais que $F_k = E$, $T_k = T$, $\{t_i^k : i \in T_k\} = \{t_i : i \in T\}$ para todo $k \in Y_F$ e $\{\sum_{i \in T} t_i \cdot b_{i,m_k} : k \in Y_F\}$ é unitário. Mas isto contradiz (**). Portanto a suposição é falsa e temos demonstrada a afirmação.

Por hipótese temos que $\{\varphi(f_\xi(i, k))_{i \in S_\xi} : k \in \omega\}$ tem u_ξ -limite $(\varphi(x_{\xi,i}))_{i \in S_\xi}$ em $\varphi(G)^{S_\xi}$. Segue que $\{(\varphi(b_{i,m}))_{i \in S} : m \in A\}$ possui ponto de acumulação em $(\varphi(G))^S$ e que $c_i = a_{i,m} - \sum_{j \in E_i} b_{j,m}$ para cada $m \in A$. $\square$

Vimos com este lema que só temos que nos preocupar com os pontos de acumulação das seqüências f_ξ .

O seguinte lema de A.H. Tomita é fundamental para esta construção.

Lema 3.3. [32] *Sejam $\{u_j : j \in \omega\}$ conjunto de ultrafiltros seletivos incomparáveis sobre ω , e para cada $j \in \omega$ $\{a_k^j : k \in \omega\} \in u_j$ uma seqüência estritamente crescente tal que $k < a_k^j$, $\forall k \in \omega$. Então para cada $j \in \omega$ existe um conjunto $I_j \subseteq \omega$ tal que:*

- i) $\{a_k^j : k \in I_j\} \in u_j$, $\forall j < \omega$ e*
- ii) os elementos do conjunto $\{[k, a_k^j] : k \in \bigcup_{j < \omega} I_j\}$ são dois a dois disjuntos.*

$\square$

Lema 3.4. *Sejam H um subconjunto infinito enumerável de $(\mathfrak{c} \setminus \omega)$, $\{u_\xi : \xi \in H\}$ conjunto de ultrafiltros seletivos incomparáveis de ω e F um subconjunto finito de $\mathfrak{c} \times (p+1)$.*

Seja E um subconjunto enumerável de $\mathfrak{c} \times (p+1)$ tal que $F \cup (\omega \times (p+1)) \subseteq E$, $H \times (p+1) \subseteq E$ e $\bigcup_{(k,m) \in S_\xi \times \omega} \text{supp}(f_\xi(k, m)) \subseteq E$, para cada $\xi \in H$.

Então existe uma seqüência crescente $\{b_k : k \in \omega\} \subseteq \omega$, uma função $r : \omega \rightarrow H$ e uma seqüência $\{E_k : k \in \omega\}$ de subconjuntos finitos de E tais que:

- (a) $F \subseteq E_0$;
- (b) $E = \bigcup_{k \in \omega} E_k$;
- (c) $E_{k+1} \supseteq \left\{ \bigcup_{i \in S_\xi} \text{supp}(f_\xi(i, b_k)) : \{\xi\} \times (p+1) \subseteq E_k \right\} \cup E_k$;
- (d) $\{f_{r(k)}(i, b_k) : i \in S_{r(k)}\} \cup \{x_{\alpha, i} : (\alpha, i) \in E_k\}$ é linearmente independente, para cada $k \in \omega$;
- (e) $\{b_k : k \in r^{-1}(\{\xi\})\} \in u_\xi$, para cada $\xi \in H$;
- (f) $E_k \cap (\omega \times (p+1)) = N_k \times (p+1)$, para algum $N_k \in \omega$.

Demonstração: Definimos por indução uma seqüência $\{F_k : k \in \omega\}$ de subconjuntos finitos de E , como segue:

- 1) $F_0 = F$;
- 2) $F_{k+1} \in [E]^{<\omega}$ tal que $F_{k+1} \supseteq F_k \cup \bigcup_{m \leq k} \left\{ \bigcup_{i \in S_\xi} \text{supp}(f_\xi(i, m)) : \{\xi\} \times S_\xi \subseteq F_k \right\}$, e se $m \in \omega$ e $(m, i) \in F_{k+1}$ para algum $i < p+1$, então $(m+1) \times (p+1) \subseteq F_{k+1}$;
- 3) $E = \bigcup_{k \in \omega} F_k$.

Para cada $\xi \in H$ e para cada $k \in \omega$, seja

$$A_k^\xi = \{m \in \omega : \{f_\xi(i, m) : i \in S_\xi\} \cup \{x_{\alpha, i} : (\alpha, i) \in F_k\} \text{ é l.i.}\}$$

Pela definição de f_ξ , temos que $A_k^\xi \in q_\xi$, $\forall k \in \omega$, $\forall \xi \in H$.

Como u_ξ é ultrafiltro seletivo, é também P -ponto. Logo existe $A_\xi \in u_\xi$ que satisfaz

- 4) $A_\xi \setminus A_k^\xi$ é finito para cada $k \in \omega$.

Seja $h_\xi : \omega \rightarrow \omega$ uma função crescente tal que

- 5) $A_\xi \setminus A_k^\xi \subseteq h_\xi(k)$, para cada $k \in \omega$.

Novamente pela seletividade do ultrafiltro u_ξ , existe $B_\xi \in u_\xi$, $B_\xi \subseteq A_\xi$ tal que

- 6) $B_\xi \cap h_\xi(1) = \emptyset$ e $|B_\xi \cap [h_\xi(k) + 1, h_\xi(k+1)]| \leq 1$, $\forall k \in \omega$.

Seja $\{a_k^\xi : k \in \omega\}$ a enumeração crescente de B_ξ .

Por 6) temos que $a_k^\xi > h_\xi(k)$ e $k < a_k^\xi \forall k \in \omega$. Portanto segue de 5) que $a_k^\xi \in A_k^\xi$, para cada $k \in \omega$ e para cada $\xi \in H$. Então pelo Lema 3.3, podemos considerar, para cada $\xi \in H$, um subconjunto I_ξ de ω satisfazendo:

- 7) $\{a_k^\xi : k \in I_\xi\} \in u_\xi, \forall \xi \in H$, e
8) $\{[k, a_k^\xi] : k \in \bigcup_{\xi \in H} I_\xi\}$ são dois a dois disjuntos.

Seja $\{i_m : m \in \omega\}$ uma enumeração crescente de $\bigcup_{\xi \in H} I_\xi$, e seja $r : \omega \rightarrow H$ definida por $r(m) = \xi \Leftrightarrow i_m \in I_\xi$. Observamos que a função r está bem definida pois de 8) segue que se $\alpha, \beta \in H$ com $\alpha \neq \beta$ então $I_\alpha \cap I_\beta = \emptyset$.

Para cada $m \in \omega$ definimos $b_m = a_{i_m}^{r(m)}$ e $E_m = F_{i_m}$.

(a) segue de $F_0 = F$ e a definição de E_0 .

(b) segue de $E = \bigcup_{k \in \omega} F_k$ e a definição de E_k , para cada $k \in \omega$.

Vamos verificar o item (c):

De 8) temos que $b_m = a_{i_m}^{r(m)} \leq i_{m+1} - 1$ e de 2) e a definição de E_m temos que $E_m = F_{i_m} \subseteq F_{i_{m+1}-1}, \forall m \in \omega$. Logo

$$\begin{aligned} & \bigcup \{ \bigcup_{i \in S_\xi} \text{supp}(f_\xi(i, b_m)) : \{\xi\} \times S_\xi \in E_m \} \cup E_m \subseteq \\ & \subseteq \bigcup \{ \bigcup_{i \in S_\xi} \text{supp}(f_\xi(i, k)) : \{\xi\} \times S_\xi \in F_{i_{m+1}-1}, k \leq i_{m+1} - 1 \} \cup F_{i_{m+1}-1} \subseteq \\ & \subseteq F_{i_{m+1}} = E_{m+1}, \forall m \in \omega. \end{aligned}$$

(d) segue de $b_m = a_{i_m}^{r(m)} \in A_{i_m}^{r(m)}$ e da definição de E_m .

Por último, (e) segue de 7) e da definição da função r e (f) da definição de E_m . $\square$

Lema 3.5. *Sejam $x \in G$, $(g_i)_{i < p+1} \in (G)^{p+1}$ e $\{u_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$ uma família de ultrafiltros seletivos incomparáveis sobre ω .*

Então existe um homomorfismo $\phi : G \rightarrow \mathbb{Z}(r)$ tal que:

- 1) $\phi(x) \neq 0$, se $x \neq 0$;
- 2) $\{m \in \omega : \phi(f_\xi(k, m)) = \phi(x_{\xi, k}), \forall k \in S_\xi\} \in u_\xi$, para cada $\omega \leq \xi < \mathfrak{c}$,
- 3) $\{m \in \omega : (\phi(x_{m, k}))_{k < p+1} = (\phi(g_k))_{k < p+1}\}$ é finito.

Demonstração: Seja $F = (\bigcup_{i < p+1} \text{supp}(g_i)) \cup \text{supp}(x)$. Sejam $H \in (\mathfrak{c} \setminus \omega)^\omega$, E um subconjunto enumerável de $\mathfrak{c} \times (p+1)$ tal que $(F \cup \omega \times (p+1)) \subseteq E$, $H \times (p+1) \subseteq E$, $\bigcup_{(k, m) \in S_\xi \times \omega} \text{supp} f_\xi(k, m) \subseteq E$, $\forall \xi \in H$ e, para cada $\omega \leq \alpha < \mathfrak{c}$ tal que existe um $i < p+1$ com $(\alpha, i) \in E$, tem-se $\{\alpha\} \times (p+1) \subseteq E$. Então pelo lema 3.4 existem uma seqüência crescente $\{b_k : k \in \omega\} \subseteq \omega$, uma função $r : \omega \rightarrow H$ e uma seqüência $\{E_k : k \in \omega\}$ de subconjuntos finitos de E tais que:

- (a) $F \subseteq E_0$;
- (b) $E = \bigcup_{k \in \omega} E_k$;
- (c) $E_{k+1} \supseteq \{\bigcup_{i \in S_\xi} \text{supp}(f_\xi(i, b_k)) : \{\xi\} \times (p+1) \subseteq E_k\} \cup E_k$;
- (d) $\{f_{r(k)}(i, b_k) : i \in S_{r(k)}\} \cup \{x_{\alpha, i} : (\alpha, i) \in E_k\}$ é linearmente independente, para cada $k \in \omega$;
- (e) $\{b_k : k \in r^{-1}(\{\xi\})\} \in u_\xi$, para cada $\xi \in H$;
- (f) $E_k \cap (\omega \times (p+1)) = N_k \times (p+1)$, para algum $N_k \in \omega$.

Primeiro definimos o homomorfismo ϕ em $\{x_{\alpha, i} : (\alpha, i) \in E\}$, por indução.

Para cada $(\alpha, i) \in E_0$ definimos $\phi(x_{\alpha, i})$ de forma que $\phi(x) \neq 0$.

Assumimos que ϕ já foi definida em $\{x_{\alpha, i} : (\alpha, i) \in E_k\}$ satisfazendo: para cada $0 < t < k$

- i) se $\{r(t)\} \times (p+1) \subseteq E_t$, então $\phi(f_{r(t)}(i, b_t)) = \phi(x_{r(t), i})$, $\forall i \in S_{r(t)}$ e
- ii) $(\phi(x_{N, i}))_{i < p+1} \neq (\phi(g_i))_{i < p+1}$, $\forall N < N_{t+1}$.

Vamos estender o homomorfismo ϕ a $\{x_{\alpha, i} : (\alpha, i) \in E_{k+1}\}$ de forma que:

- (I) se $\{r(k)\} \times (p+1) \subseteq E_k$ então $\phi(f_{r(k)}(i, b_k)) = \phi(x_{r(k), i})$, $\forall i \in S_{r(k)}$ e
- (II) $(\phi(x_{N, i}))_{i < p+1} \neq (\phi(g_i))_{i < p+1}$, $\forall N \in [N_k, N_{k+1})$.

Suponhamos que $\{r(k)\} \times (p+1) \subseteq E_k$, então pela condição (c) temos que

$$E_{k+1} \supseteq \bigcup_{i \in S_{r(k)}} \text{supp}(f_{r(k)}(i, b_k))$$

e pela condição (f) temos que $E_{k+1} \cap \omega \times (p+1) = N_k \times (p+1)$.

Se $N_{k+1} = N_k + M$, vamos provar por indução em $[N_k, N_{k+1})$ que

Afirmção: existe, para cada $\eta < M$, $i_{N_k+\eta} \in (p+1)$ tal que $x_{N_k+\eta, i_{N_k+\eta}}$ satisfaz:

$$\{f_{r(k)}(i, b_k) : i \in S_{r(k)}\} \cup \{x_{N_k+\eta, i_{N_k+\eta}} : 0 \leq \eta < M\} \text{ é linearmente independente.}$$

O conjunto $\{f_{r(k)}(i, b_k) : i \in S_{r(k)}\}$ é linearmente independente e possui $|S_{r(k)}| \leq p$ elementos e o conjunto $\{x_{N_k, i} : i < p+1\}$ é linearmente independente com $(p+1)$ elementos. Portanto existe $i_{N_k} < p+1$ tal que $\{f_{r(k)}(i, b_k) : i \in S_{r(k)}\} \cup \{x_{N_k, i_{N_k}}\}$ é linearmente independente.

Suponhamos que $0 < \eta < M-1$ e

$$\{f_{r(k)}(i, b_k) : i \in S_{r(k)}\} \cup \{x_{N_k, i_{N_k}}, \dots, x_{N_k+\eta, i_{N_k+\eta}}\} \text{ é l.i.}$$

Observamos que o conjunto acima tem $|S_{r(k)}| + (\eta+1)$ elementos e que o conjunto

$$\{x_{N_k, i_{N_k}}, \dots, x_{N_k+\eta, i_{N_k+\eta}}\} \cup \{x_{N_k+(\eta+1), i} : i < p+1\}$$

é l.i. de $(\eta+1) + (p+1)$ elementos. Portanto existe $i_{N_k+(\eta+1)} \in p+1$ tal que

$$\{f_{r(k)}(i, b_k) : i \in S_{r(k)}\} \cup \{x_{N_k, i_{N_k}}\} \cup \{x_{N_k+\eta+1, i_{N_k+(\eta+1)}}\}$$

é linearmente independente, o que demonstra a afirmação.

Então podemos estender ϕ a $\{x_{\alpha, i} : (\alpha, i) \in E_{k+1}\}$ satisfazendo:

$$\phi(f_{r(k)}(i, b_k)) = \phi(r(k), i), \forall i \in S_{r(k)} \text{ e}$$

$$\phi(x_{N_k+\eta, i_{N_k+\eta}}) \neq \phi(g_{i_{N_k+\eta}}), \forall 0 \leq \eta < M.$$

Logo ϕ satisfaz (I) e (II).

Portanto temos definido o homomorfismo ϕ em $\{x_{\alpha,i} : (\alpha,i) \in E\}$ e como $\omega \times (p+1) \subseteq E$ a seqüência $(\phi(x_{m,i}))_{i < p+1}$ está definida e satisfaz 3).

Falta então definirmos ϕ em $\{x_{\alpha,i} : (\alpha,i) \in (\mathfrak{c} \times (p+1) \setminus E)\}$. Definimos ϕ neste conjunto por indução transfinita em $L = \mathfrak{c} \setminus \{\alpha : \{\alpha\} \times (p+1) \subseteq E\}$.

Seja γ o menor ordinal no conjunto L tal que o homomorfismo ϕ ainda não foi definido em $x_{\gamma,i}$ para todo $i < p+1$. Como $\phi(f_\gamma(i, m))$ já foi definido $\forall i \in S_\gamma, \forall m \in \omega$, podemos definir, para cada $i \in S_\gamma$, $\phi(x_{\gamma,i})$ tal que $\phi(x_{\gamma,i}) = u_\gamma - \lim_{m \rightarrow \infty} \{\phi(f_\gamma(i, m)) : m \in \omega\}$. Se $i \in (p+1) \setminus S_\gamma$ definimos $\phi(x_{\gamma,i}) = 0$.

Temos então $\phi : G \rightarrow \mathbb{Z}(r)$ homomorfismo satisfazendo 1), 2) e 3). $\square$

Demonstração do Teorema 3.1:

Pelo Lema 3.5, para cada $x \in G$ e para cada $(p+1)$ -upla $(g_i)_{i < p+1} \in G^{p+1}$, existe um homomorfismo $\phi_{x,(g_i)_{i < p+1}} : G \rightarrow \mathbb{Z}(r)$ tal que:

- 1) $\phi_{x,(g_i)_{i < p+1}}(x) \neq 0$, se $x \neq 0$;
- 2) $\{m \in \omega : \phi_{x,(g_i)_{i < p+1}}(f_\xi(k, m)) = \phi_{x,(g_i)_{i < p+1}}(x_{\xi,k}), \forall k \in S_\xi\} \in u_\xi$ para cada $\omega \leq \xi < \mathfrak{c}$,
- 3) $\{m \in \omega : (\phi_{x,(g_i)_{i < p+1}}(x_{m,k}))_{k < p+1} = (\phi_{x,(g_i)_{i < p+1}}(g_k))_{k < p+1}\}$ é finito.

Seja $\varphi : G \rightarrow \mathbb{Z}(r)^\mathfrak{c}$ a função diagonal

$$\varphi = \Delta\{\phi_{x,(g_i)_{i < p+1}} : x \in G, (g_i) \in G^{p+1}\}$$

φ é um homomorfismo pois cada ϕ é um homomorfismo e φ é injetor pelo item 1). Portanto $\varphi(G)$ é um subgrupo de $\mathbb{Z}(r)^\mathfrak{c}$ isomorfo a G . Vamos mostrar que $\varphi(G)$ com a topologia de subespaço de $\mathbb{Z}(r)^\mathfrak{c}$ é tal que $\varphi(G)^p$ é enumeravelmente compacto. Para isto, pelo Lema 3.2 é suficiente mostrar que cada seqüência $\{(\varphi(f_\xi(k, m)))_{k \in S_\xi} : m \in$

$\omega\}$ tem ponto de acumulação $(x_{\xi,k})_{k \in S_\xi}$ em $\varphi(G)^{S_\xi}$.

Por 2) sabemos que a seqüência $\{(\phi_{x,(g_i)_{i < p+1}}(f_\xi(k, m)))_{k \in S_\xi} : m \in \omega\}$ tem u_ξ -limite $(\phi_{x,(g_i)_{i < p+1}}(x_{\xi,k}))_{k \in S_\xi}$. Portanto a seqüência $\{(\varphi(f_\xi(k, m)))_{k \in S_\xi} : m \in \omega\}$ tem u_ξ -limite $(\varphi(x_{\xi,k}))_{k \in S_\xi}$ em $(\varphi(G))^{S_\xi}$.

Falta mostrar que a seqüência $\{(\varphi(x_{m,k}))_{k < p+1} : m \in \omega\}$ não tem ponto de acumulação em $\varphi(G)^{p+1}$ do qual segue que $\varphi(G)^{p+1}$ não é enumeravelmente compacto.

Dada uma $(p+1)$ -upla qualquer $(g_i)_{i < p+1}$ de elementos de G , temos que $(\varphi(g_i))_{i < p+1}$ não é ponto de acumulação da seqüência $\{(\varphi(x_{m,k}))_{k < p+1} : m \in \omega\}$ pois por 3), para cada $x \in G$, $\{m \in \omega : (\phi_{x,(g_i)_{i < p+1}}(x_{m,k}))_{k < p+1} = (\phi_{x,(g_i)_{i < p+1}}(g_k))_{k < p+1}\}$ é finito. $\square$

3.2 Compacidade enumerável e grupos de torção

Nesta seção classificamos, sob a existência de $\mathfrak{c}$ ultrafiltros seletivos, os grupos de torção G de cardinalidade $\mathfrak{c}$ que, para cada inteiro positivo p , admitem uma topologia de grupo topológico que faz G^p enumeravelmente compacto e G^{q+1} não enumeravelmente compacto para um $q > p$.

Teorema 3.6. *Se existem $\mathfrak{c}$ ultrafiltros seletivos incomparáveis sobre ω então para um grupo abeliano infinito de torção G , de cardinalidade no máximo $\mathfrak{c}$, as seguintes condições são equivalentes:*

(a) *para cada inteiro positivo p existe $q > p$ tal que G admite uma topologia de grupo topológico (G, τ) que satisfaz: $(G, \tau)^p$ é enumeravelmente compacto mas $(G, \tau)^{q+1}$ não é*

enumeravelmente compacto;

(b) *G admite uma topologia de grupo topológico τ , enumeravelmente compacta tal que*

- $(G, \tau)^q$ não é enumeravelmente compacto para algum $q > 1$;
- (c) G tem ordem limitada n e dG é finito ou tem cardinalidade $\mathfrak{c}$ para cada divisor próprio d de n ;
- (d) G tem ordem limitada n e para cada componente primária G_r de G , a última invariante infinita de Ulm–Kaplansky de G_r é igual a $\mathfrak{c}$.

Temos bastante trabalho prévio à demonstração do teorema. Primeiro vamos apresentar o q . Seja

$$q = |\cup \{ {}^F n : F \in \mathcal{P}(p) \}| + 1$$

Sabemos que para um grupo abeliano G como na condição (d) do teorema, podemos achar um subgrupo finito F de G e um divisor m de n tais que $G \cong F \oplus \oplus_{d|m} \mathbb{Z}(d)^{(\alpha_d)}$, com $\alpha_m = \mathfrak{c}$ e $\omega \leq \alpha_d \leq \mathfrak{c}$, para cada $d|m$. Como o produto de um grupo finito por um grupo enumeravelmente compacto é enumeravelmente compacto, podemos assumir $F = \{0\}$ e substituir m por n . Assumimos então $G \cong \oplus_{d|n} \mathbb{Z}(d)^{(\alpha_d)}$, com $\alpha_n = \mathfrak{c}$ e $\omega \leq \alpha_d \leq \mathfrak{c}$, para cada $d|n$.

Seja $\{x_{\alpha,i} : \alpha < \mathfrak{c}, i < q+1\}$ uma base para $\mathbb{Z}(n)^{(\mathfrak{c})}$ (i.e um conjunto de geradores independentes de ordem n).

Suponhamos que a quantidade de divisores próprios de n , que aparecem na decomposição de G em soma direta, é h . Enumeramos estes divisores por $d_{q+1}, \dots, d_{q+h}$ e escrevemos $G \cong \mathbb{Z}(d_{q+1})^{(\alpha_1)} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}(d_{q+h})^{(\alpha_h)} \oplus \mathbb{Z}(n)^{(\mathfrak{c})}$.

Para cada $1 \leq j \leq h$, seja $\{y_{\delta,q+j} : \delta < \alpha_j\}$ uma base para $\mathbb{Z}(d_{q+j})^{(\alpha_j)}$.

Se x é um elemento do grupo G , o suporte de x denotado por $\text{supp}(x)$ é um subconjunto finito de $(\bigcup_{j=1}^h \alpha_j \times \{q+j\}) \cup (\mathfrak{c} \times (q+1))$.

Enumeramos por $\{f_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$ as funções $f : S \times \omega \rightarrow G$ com $S \in [q+1]^{\leq p}$ tais

que para cada subconjunto finito F de $\bigcup_{j=1}^h \{y_{\delta, q+j} : \delta < \alpha_j\} \cup \{x_{\alpha, i} : \alpha < \mathfrak{c}, i < q+1\}$, o conjunto $\omega \setminus \{m \in \omega : F \cup \{f(k, m) : k \in S\} \text{ é linearmente independente}\}$ é finito. Chamamos de S_ξ o elemento S de $[q+1]^{\leq p}$ tal que $\text{dom}(f_\xi) = S_\xi \times \omega$.

Assumimos $\bigcup_{(k, m) \in \text{dom}(f_\xi)} \text{supp } f_\xi(k, m) \subseteq \xi \times (q+h+1)$.

Lema 3.7. *Seja $\varphi : G \rightarrow \mathbb{Z}(n)^\mathfrak{c}$ um monomorfismo de grupos e seja $\{u_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$ uma família de ultrafiltros sobre ω . Se para cada $\omega \leq \xi < \mathfrak{c}$, a seqüência $\{(\varphi(f_\xi(i, m)))_{i \in S_\xi} : m \in \omega\}$ tem u_ξ -limite $(\varphi(c_{\xi, i} x_{\xi, i}))_{i \in S_\xi}$ em $\varphi(G)^{S_\xi}$, onde $c_{\xi, i} \in \mathbb{Z}$, então $\varphi(G)^p$ é enumeravelmente compacto como subespaço de $\mathbb{Z}(n)^\mathfrak{c}$.*

Demonstração: Seja $\{(\varphi(a_{i, m}))_{i < p} : m \in \omega\}$ uma seqüência em $\varphi(G)^p$.

Afirmção 1: Existem $S \subseteq p$, $c_i \in G$ e $E_i \subseteq S$ para cada $i < p$, $A \subseteq \omega$ infinito e subconjuntos $\{b_{i, m} : m \in \omega\}$ de G para cada $i \in S$, tais que:

$\{(\varphi(b_{i, m}))_{i \in S} : m \in A\}$ tem ponto de acumulação em $\varphi(G)^S$ e

$c_i = a_{i, m} - \sum_{j \in E_i} b_{j, m}$ para cada $m \in A$.

Demonstração da Afirmção 1: Esta demonstração exige um pouco mais de atenção do que a feita na seção anterior pois agora já não temos mais um espaço vetorial. Seja u um ultrafiltro seletivo sobre ω . Consideramos ultraproduto ${}^\omega G/u$, que como vimos no capítulo anterior é um grupo abeliano de ordem n . Chamamos R ao subgrupo de ${}^\omega G/u$ gerado por $\{\{a_{i, m} : m \in \omega\}_u : i < p\}$. Isto é:

$$R = \langle \{\{a_{i, m} : m \in \omega\}_u : i < p\} \rangle.$$

Seja $C \subseteq G$ tal que $\{[\vec{x}]_u : x \in C\}$ é uma base para $R \cap \{[\vec{x}]_u : x \in G\}$. Sabemos que R possui uma base que contém $\{[\vec{x}]_u : x \in C\}$, pois R é um grupo abeliano de ordem finita e o subgrupo formado pelas classes das seqüências constante é puro. Como R possui um conjunto de geradores de cardinalidade p e é de ordem finita, uma base

para R tem cardinalidade menor o igual a p .

Sejam então $S \subseteq p$ e $\{[\{b_{i,m} : m \in \omega\}]_u : i \in S\}$ tais que

(I) $\{[\{b_{i,m} : m \in \omega\}]_u : i \in S\} \cup \{[\vec{x}]_u : x \in C\}$ é uma base para R .

Escrevemos cada elemento do conjunto gerador original de R como combinação linear dos elementos da base.

Para cada $i < p$, sejam $E_i \subseteq S$ e $C_i \subseteq C$ tais que

$$[\{a_{i,m} : m \in \omega\}]_u = \sum_{x \in C_i} c_{i,x} [\vec{x}]_u + \sum_{j \in E_i} t_{j,i} [\{b_{j,m} : m \in \omega\}]_u,$$

onde $c_{i,x} \in \mathbb{Z} \forall x \in C_i$ e $t_{j,i} \in \mathbb{Z} \forall j \in E_i$.

Segue que a seqüência $\{a_{i,m} : m \in \omega\} - \sum_{j \in E_i} \{t_{j,i} \cdot b_{j,m} : m \in \omega\}$ é u -equivalente a uma seqüência constante. Portanto existem $B \in u$ e elementos x_i do grupo G tais que para cada $i < p$

$$x_i = \sum_{x \in C_i} c_{i,x} \cdot x = a_{i,m} - \sum_{j \in E_i} t_{j,i} \cdot b_{j,m} \quad \forall m \in B.$$

(II) Para cada $T \subseteq S$ não vazio, e para cada conjunto $\{t_i : i \in T\} \subseteq \mathbb{Z}(n)$, se $\sum_{i \in T} t_i [\{b_{i,m} : m \in \omega\}]_u \neq 0$ então $\sum_{i \in T} t_i [\{b_{i,m} : m \in \omega\}]_u$ não está na classe de u -equivalência de uma seqüência constante. Isto é verdade pois

$$\sum_{i \in T} t_i [\{b_{i,m} : m \in \omega\}]_u \in R,$$

e é uma combinação linear de elementos da base de R que não geram as constantes.

Agora, para cada $T \subseteq S$ e para cada $\{t_i : i \in T\}$ que abreviamos por $\{t_i\}$ definimos a aplicação $h_{T,\{t_i\}} : \omega \rightarrow G$ por $h_{T,\{t_i\}}(m) = \sum_{i \in T} t_i \cdot b_{i,m}$.

Se $\sum_{i \in T} t_i [\{b_{i,m} : m \in \omega\}]_u \neq 0$, por (II) e por ser u seletivo podemos afirmar que existe $A_{T,\{t_i\}} \in u$, $A_{T,\{t_i\}} \subseteq B$, tal que a aplicação $h_{T,\{t_i\}} \upharpoonright_{A_{T,\{t_i\}}}$ é injetora. Como só temos uma quantidade finita de funções $h_{T,\{t_i\}}$,

(III) existe $A \in u$, $A \subseteq B$ tal que $h_{T, \{t_i\}} \upharpoonright_A$ é injetora, para cada $T \subseteq S$ e para cada $\{t_i : i \in \mathbb{Z}(n)\}$.

Seja $\{m_k : k \in \omega\}$ uma enumeração de A e seja a função $f : S \times \omega \rightarrow G$ definida por $f(i, k) = b_{i, m_k} \forall i \in S, \forall k \in \omega$.

Afirmção: existe $\omega \leq \xi < \omega$, tal que $f_\xi = f$.

Para demonstrar esta afirmação, precisamos provar que para cada subconjunto finito F de $\bigcup_{j=1}^h \{y_{\delta, p+j} : \delta < \alpha_j\} \cup \{x_{\alpha, i} : \alpha < \mathfrak{c}, i < q+1\}$, o conjunto

$\omega \setminus \{k \in \omega : F \cup \{f(i, k) : i \in S\} \text{ é linearmente independente}\}$ é finito.

Seja então F um subconjunto finito de $\bigcup_{j=1}^h \{y_{\delta, q+j} : \delta < \alpha_j\} \cup \{x_{\alpha, i} : \alpha < \mathfrak{c}, i < q+1\}$, e vamos supor, por absurdo, que o conjunto

$X = \omega \setminus \{k \in \omega : F \cup \{f(i, k) : i \in S\} \text{ é linearmente independente}\}$ é infinito.

Então, para cada $k \in X$, existem $F_k \subseteq F$, $\emptyset \neq T_k \subseteq S$ e inteiros t_i^k para cada $i \in S$ tais que $\sum_{i \in T_k} t_i^k \cdot b_{i, m_k}$ é combinação linear dos elementos de F_k . Como F é finito, S também é finito e os escalares (inteiros) que aparecem nas combinações lineares são elementos de $\mathbb{Z}(n)$ que também é finito, temos que existem um subconjunto infinito Y de X , $E \subseteq F$, $T \subseteq S$ e inteiros $\{t_i : i \in T\}$ tais que $F_k = E$, $T_k = T$, $\{t_i^k : i \in T_k\} = \{t_i : i \in T\}$ para todo $k \in Y$ e $\{\sum_{i \in T} t_i \cdot b_{i, m_k} : k \in Y\}$ é unitário. Mas isto contradiz (III). Portanto a suposição é falsa e temos demonstrada a afirmação.

Por hipótese temos que $\{\varphi(f_\xi(i, k))_{i \in S_\xi} : k \in \omega\}$ tem u_ξ -limite $(\varphi(c_{\xi, i} \cdot x_{\xi, i}))_{i \in S_\xi}$ em $\varphi(G)^{S_\xi}$. Segue que $\{(\varphi(b_{i, m}))_{i \in S} : m \in A\}$ possui ponto de acumulação em $(\varphi(G))^S$ e que $c_i = a_{i, m} - \sum_{j \in E_i} b_{j, m}$ para cada $m \in A$.

Afirmção 2: A seqüência $\{\varphi(a_{i, m})_{i < p} : m \in \omega\}$ possui ponto de acumulação em

$\varphi(G)^p$.

Análogo a Afirmação 2 do Lema 3.2. □

Lema 3.8. *Sejam H um subconjunto infinito enumerável de $\mathfrak{c} \setminus \omega$, $\{u_\xi : \xi \in H\}$ conjunto de ultrafiltros seletivos incomparáveis de ω e F um subconjunto finito de $(\bigcup_{j=1}^h \alpha_j \times \{q+j\}) \cup (\mathfrak{c} \times (q+1))$.*

Seja E um subconjunto enumerável de $(\bigcup_{j=1}^h \alpha_j \times \{q+j\}) \cup (\mathfrak{c} \times (q+1))$ tal que $F \cup (\omega \times (q+1)) \subseteq E$, $H \times (q+1) \subseteq E$ e $\bigcup_{(k,m) \in S_\xi \times \omega} \text{supp}(f_\xi(k,m)) \subseteq E$, para cada $\xi \in H$.

Então existem uma seqüência crescente $\{b_k : k \in \omega\} \subseteq \omega$, uma função $r : \omega \rightarrow H$ e uma seqüência $\{E_k : k \in \omega\}$ de subconjuntos finitos de E tais que:

- (a) $F \subseteq E_0$;
- (b) $E = \bigcup_{k \in \omega} E_k$;
- (c) $E_{k+1} \supseteq \{\bigcup_{i \in S_\xi} \text{supp}(f_\xi(i, b_k)) : \{\xi\} \times (q+1) \subseteq E_k\} \cup E_k$;
- (d) $\{f_{r(k)}(i, b_k) : i \in S_{r(k)}\} \cup \{x_{\alpha,i} : (\alpha, i) \in E_k\} \cup \{y_{\delta, q+j} : (\delta, q+j) \in E_k, 1 \leq j \leq h\}$ é linearmente independente, para cada $k \in \omega$;
- (e) $\{b_k : k \in r^{-1}(\{\xi\})\} \in u_\xi$, para cada $\xi \in H$;
- (f) $E_k \cap \omega \times (q+1) = N_k \times (q+1)$, para algum $N_k \in \omega$.

Demonstração: Definimos por indução uma seqüência $\{F_k : k \in \omega\}$ de subconjuntos finitos de E , como segue:

- 1) $F_0 = F$;
- 2) $F_{k+1} \in E^{<\omega}$ tal que $F_{k+1} \supseteq F_k \cup \bigcup_{m \leq k} \{\bigcup_{i \in S_\xi} \text{supp}(f_\xi(i, m)) : \{\xi\} \times (q+1) \subseteq F_k\}$ e se $m \in \omega$ e existe $i < q+1$ tal que $(m, i) \in F_{k+1}$, então $(m+1) \times (q+1) \subseteq F_{k+1}$;
- 3) $E = \bigcup_{k \in \omega} F_k$.

Para cada $\xi \in H$ e para cada $k \in \omega$, seja

$A_k^\xi = \{m \in \omega : \{f_\xi(i, m) : i \in S_\xi\} \cup \{x_{\alpha, i} : (\alpha, i) \in F_k\} \cup \{y_{\delta, q+j} : (\delta, q+j) \in F_k, 1 \leq j \leq h\} \text{ é l.i.}\}$.

Pela definição de f_ξ , temos que $A_k^\xi \in u_\xi, \forall k \in \omega, \forall \xi \in H$.

Como u_ξ é ultrafiltro seletivo, é também P -ponto. Logo existe $A_\xi \in u_\xi$ que satisfaz

4) $A_\xi \setminus A_k^\xi$ é finito para cada $k \in \omega$.

Seja $h_\xi : \omega \rightarrow \omega$ uma função crescente tal que

5) $A_\xi \setminus A_k^\xi \subseteq h_\xi(k)$, para cada $k \in \omega$.

Novamente pela seletividade do ultrafiltro u_ξ , existe $B_\xi \in u_\xi, B_\xi \subseteq A_\xi$ tal que

6) $B_\xi \cap h_\xi(1) = \emptyset$ e $|B_\xi \cap [h_\xi(k) + 1, h_\xi(k+1)]| \leq 1, \forall k \in \omega$.

Seja $\{a_k^\alpha : k \in \omega\}$ a enumeração crescente de B_ξ .

Por 6) temos que $a_k^\xi > h_\xi(k)$ e $k < a_k^\xi \forall k \in \omega$. Portanto segue de 5) que $a_k^\xi \in A_k^\xi$, para cada $k \in \omega$ e para cada $\xi \in H$. Então pelo Lema 3.3, podemos considerar, para cada $\xi \in H$, um subconjunto I_ξ de ω satisfazendo:

7) $\{a_k^\xi : k \in I_\xi\} \in u_\xi, \forall \xi \in H$, e

8) $\{[k, a_k^\xi] : k \in \bigcup_{\xi \in H} I_\xi\}$ são dois a dois disjuntos.

Seja $\{i_m : m \in \omega\}$ uma enumeração crescente de $\bigcup_{\xi \in H} I_\xi$, e seja $r : \omega \rightarrow H$ definida por $r(m) = \xi \Leftrightarrow i_m \in I_\xi$. Observamos que a função r está bem definida pois de 8) segue que se $\alpha, \beta \in H$ com $\alpha \neq \beta$ então $I_\alpha \cap I_\beta = \emptyset$.

Para cada $m \in \omega$ definimos $b_m = a_{i_m}^{r(m)}$ e $E_m = F_{i_m}$.

(a) segue de $F_0 = F$ e a definição de E_0 .

(b) segue de $E = \bigcup_{k \in \omega} F_k$ e a definição de E_k , para cada $k \in \omega$.

Vamos verificar o item (c):

De 8) temos que $b_m = a_{i_m}^{r(m)} \leq i_{m+1} - 1$ e de 2) e a definição de E_m temos que

$E_m = F_{i_m} \subseteq F_{i_{m+1}-1}, \forall m \in \omega$. Logo

$$\begin{aligned} & \bigcup \{ \bigcup_{i \in S_\xi} \text{supp}(f_\xi(i, b_m)) : \{\xi\} \times S_\xi \subseteq E_m \} \cup E_m \subseteq \\ & \subseteq \bigcup \{ \bigcup_{i \in S_\xi} \text{supp}(f_\xi(i, k)) : \{\alpha\} \times S_\xi \subseteq F_{i_{m+1}-1}, k \leq i_{m+1} - 1 \} \cup F_{i_{m+1}-1} \subseteq \\ & \subseteq F_{i_{m+1}} = E_{m+1}, \quad \forall m \in \omega. \end{aligned}$$

(d) segue de $b_m = a_{i_m}^{r(m)} \in A_{i_m}^{r(m)}$ e da definição de E_m .

Por último, (e) segue de 7) e da definição da função r e (f) segue da definição de E_m . $\square$

Observação 3.9. Como para cada $\omega \leq \xi < \mathfrak{c}$, $|\{f_\xi((k, m)) : k \in S_\xi, m \in \omega\}| \leq \omega$ e $\text{ord}(f_\xi(k, m)) \leq n$, se u_ξ é um ultrafiltro seletivo sobre ω então existe um divisor $d_{\xi,k}$ de n e $B_{\xi,k} \in u_\xi$ tais que $\{m \in \omega : \text{ord}(f_\xi(k, m)) = d_{\xi,k}\} = B_{\xi,k}$. Se $B_\xi = \bigcap_{k \in S_\xi} B_{\xi,k}$, segue que para todo $m \in B_\xi$ vale $\text{ord}(f_\xi(k, m)) = d_{\xi,k}$ e $B_\xi \in u_\xi$.

Seja $c_{\xi,k}$ um inteiro que satisfaz $c_{\xi,k} \cdot d_{\xi,k} = n$.

Agora estamos em condições de enunciar o próximo lema.

Lema 3.10. *Sejam $x \in G$, $(g_i)_{i < q+1} \in G^{q+1}$ e $\{u_\xi : \omega \leq \xi < \mathfrak{c}\}$ uma família de ultrafiltros seletivos incomparáveis sobre ω .*

Então existe um homomorfismo $\phi : G \rightarrow \mathbb{Z}(n)$ tal que:

- 1) $\phi(x) \neq 0$, se $x \neq 0$;
- 2) $\{m \in \omega : \phi(f_\xi(k, m)) = \phi(c_{\xi,k} \cdot x_{\xi,k}), \forall k \in S_\xi\} \in u_\xi$, para cada $\omega \leq \xi < \mathfrak{c}$,
- 3) $\{m \in \omega : (\phi(x_{m,k}))_{k < q+1} = (\phi(g_k))_{k < q+1}\}$ é finito.

Demonstração: Seja $F = \bigcup_{i < q+1} \text{supp}(g_i) \cup \text{supp}(x)$. Sejam $H \in (\mathfrak{c} \setminus \omega)^\omega$, E um subconjunto enumerável de $(\bigcup_{j=1}^h \alpha_j \times \{q+j\}) \cup (\mathfrak{c} \times (q+1))$ tal que $F \cup \omega \times (q+1) \subseteq E$, $H \times (q+1) \subseteq E$, $\bigcup_{(k,m) \in S_\xi \times \omega} \text{supp} f_\xi(k, m) \subseteq E$, para cada $\xi \in H$ e para cada $\omega \leq \xi < \mathfrak{c}$ tal que existe um $i < q+1$ com $(\xi, i) \in E$ tem-se $\{\xi\} \times (q+1) \subseteq E$.

Então pelo Lema 3.8 existem uma seqüência crescente $\{b_k : k \in \omega\} \subseteq \omega$, uma função $r : \omega \rightarrow H$ e uma seqüência $\{E_k : k \in \omega\}$ de subconjuntos finitos de E tais que:

- (a) $F \subseteq E_0$;
- (b) $E = \bigcup_{k \in \omega} E_k$;
- (c) $E_{k+1} \supseteq \{\bigcup_{i \in S_\xi} \text{supp}(f_\xi(i, b_k)) : \{\xi\} \times (q+1) \subseteq E_k\} \cup E_k$;
- (d) $\{f_{r(k)}(i, b_k) : i \in S_{r(k)} \cup \{x_{\alpha,i} : (\alpha, i) \in E_k\} \cup \{y_{\delta,q+j} : (\delta, q+j) \in E_k, 1 \leq j \leq h\}$
é linearmente independente, para cada $k \in \omega$;
- (e) $\{b_k : k \in r^{-1}(\{\xi\})\} \in u_\xi$, para cada $\xi \in H$;
- (f) $E_k \cap \omega \times (q+1) = N_k \times (q+1)$, para algum $N_k \in \omega$.

Primeiro definimos o homomorfismo ϕ em $\{y_{\delta,q+j} : (\delta, q+j) \in E\} \cup \{x_{\alpha,i} : (\alpha, i) \in E\}$, por indução.

Para cada $(\delta, q+j) \in E_0$ e para cada $(\alpha, i) \in E_0$ definimos $\phi(y_{\delta,q+j})$ e $\phi(x_{\alpha,i})$ de forma que $\phi(x) \neq 0$.

Assumimos que ϕ já foi definida em $\{y_{\delta,q+j} : (\delta, q+j) \in E_k\} \cup \{x_{\alpha,i} : (\alpha, i) \in E_k\}$ satisfazendo: para cada $0 < t < k$

- i) se $\{r(t)\} \times S_{r(t)} \subseteq E_t$, então $\phi(f_{r(t)}(i, b_t)) = \phi(c_{r(t),i} \cdot x_{r(t),i})$, $\forall i \in S_{r(t)}$ e
- ii) $(\phi(x_{N,i}))_{i < q+1} \neq (\phi(g_i))_{i < q+1}$, $\forall N < N_{t+1}$.

Vamos estender o homomorfismo ϕ a $\{y_{\delta,q+j} : (\delta, q+j) \in E_{k+1}\} \cup \{x_{\alpha,i} : (\alpha, i) \in E_{k+1}\}$ de forma que:

- (I) se $\{r(k)\} \times S_{r(k)} \subseteq E_k$ então $\phi(f_{r(k)}(i, b_k)) = \phi(c_{r(k),i} \cdot x_{r(k),i})$, $\forall i \in S_{r(k)}$ e
- (II) $(\phi(x_{N,i}))_{i < q+1} \neq (\phi(g_i))_{i < q+1}$, $\forall N \in [N_k, N_{k+1})$.

Suponhamos que $\{r(k)\} \times (q+1) \subseteq E_k$, então pela condição (c) temos que

$E_{k+1} \supseteq \bigcup_{i \in S_{r(k)}} \text{supp}(f_{r(k)}(i, b_k))$ e pela condição (f) temos que $E_{k+1} \cap \omega \times (p+1) = N_{k+1} \times (q+1)$.

Se $N_{k+1} = N_k + M$, vamos provar por indução em $[N_k, N_{k+1})$ que

Afirmção: existe, para cada $\eta < M$, $i_{N_k+\eta} \in (q+1)$ tal que $x_{N_k+\eta, i_{N_k+\eta}}$ satisfaz: $\{f_{r(k)}(i, b_k) : i \in S_{r(k)}\} \cup \{x_{N_k+\eta, i_{N_k+\eta}} : 0 \leq \eta < M\}$ é linearmente independente. Suponhamos por absurdo que, para cada $i < q+1$, existe $F_i \in \mathcal{P}(S_{r(k)})$, $a_{l,i} \in n$, $\forall l \in F_i$ e $\theta_i \in n$, $\theta_i \neq 0$ tais que

$$\sum_{l \in F_i} a_{l,i} f_{r(k)}(l, b_k) = \theta_i \cdot x_{N_k,i}.$$

Como temos menos que $(q+1)$ combinações lineares possíveis deste tipo, segue que existem $i, j < q+1$ com $i \neq j$ tais que

$$\theta_i \cdot x_{N_k,i} = \sum_{l \in F_i} a_{l,i} f_{r(k)}(l, b_k) = \sum_{l \in F_j} a_{l,j} f_{r(k)}(l, b_k) = \theta_j \cdot x_{N_k,j}$$

Mas isto não é possível já que $x_{N_k,i}$ e $x_{N_k,j}$ são independentes, portanto existe $i_{N_k} < q+1$ tal que $\{f_{r(k)}(i, b_k) : i \in S_{r(k)}\} \cup \{x_{N_k, i_{N_k}}\}$ é independente.

Suponhamos que $0 < \eta < M-1$ e

$$\{f_{r(k)}(i, b_k) : i \in S_{r(k)}\} \cup \{x_{N_k, i_{N_k}}, \dots, x_{N_k+\eta, i_{N_k+\eta}}\} \text{ é l.i.}$$

Seja $\{x_{N_k+\eta+1, i} : i < q+1\}$ e suponhamos por absurdo que para cada $i < q+1$, existe $F_i \in (S_{r(k)})$, $a_{l,i} \in n$, $\forall l \in F_i$, $\gamma_{s,i} \in n$, $\forall 0 \leq s \leq \eta$ e $\theta_i \in n$ tais que

$$\sum_{l \in F_i} a_{l,i} f_{r(k)}(l, b_k) = \theta_i \cdot x_{N_k+\eta+1, i} - \sum_{s=0}^{\eta} \gamma_{s,i} \cdot x_{N_k+s, i_{N_k+s}}.$$

De novo, temos menos que $(q+1)$ possibilidades para o lado esquerdo da igualdade, portanto existem $i, j < q+1$, $i \neq j$ tais que

$$\theta_i \cdot x_{N_k+\eta+1, i} - \sum_{s=0}^{\eta} \gamma_{s,i} \cdot x_{N_k+s, i_{N_k+s}} = \theta_j \cdot x_{N_k+\eta+1, j} - \sum_{s=0}^{\eta} \gamma_{s,j} \cdot x_{N_k+s, i_{N_k+s}}$$

o que é absurdo pois

$$\{x_{N_k+\eta+1,i}, x_{N_k+\eta+1,j}\} \cup \{x_{N_k+s,i_{N_k+s}} : 0 \leq s \leq \eta\}$$

é linearmente independente.

Portanto existe $i_{N_k+\eta+1} < q+1$ tal que

$$\{f_{r(k)}(i, b_k) : i \in S_{r(k)}\} \cup \{x_{N_k,i_{N_k}}, \dots, x_{N_k+\eta,i_{N_k+\eta}}, x_{N_k+\eta+1,i_{N_k+\eta+1}}\}, \text{ é l.i..}$$

Então temos que

$$\{f_{r(k)}(i, b_k) : i \in S_{r(k)}\} \cup \{x_{N_k+\eta,i_{N_k+\eta}} : 0 \leq \eta < M\}$$

é linearmente independente. Logo podemos estender o homomorfismo ϕ a

$$\{y_{\delta,q+j} : (\delta, q+j) \in E_{k+1}\} \bigcup \{x_{\alpha,i} : (\alpha, i) \in E_{k+1}\}$$

satisfazendo:

$$\phi(f_{r(k)}(i, b_k)) = \phi(c_{r(k),i} \cdot x_{r(k),i}), \forall i \in S_{r(k)} \text{ e}$$

$$(\phi(x_{N_k+\eta,i_{N_k+\eta}})) \neq (\phi(g_{i_{N_k+\eta}})), \forall 0 \leq \eta < M, \text{ e } \phi \text{ verifica (I) e (II).}$$

Portanto temos definido o homomorfismo ϕ em

$$\{y_{\delta,q+j} : (\delta, q+j) \in E\} \bigcup \{x_{\alpha,i} : (\alpha, i) \in E\}$$

e como $\omega \times (q+1) \subseteq E$ a sequência $(\phi(x_{m,i}))_{i < q+1}$ está definida e satisfaz 3).

Para cada $1 \leq j \leq h$, se $(\delta, q+j) \in \alpha_j \times \{q+j\} \setminus E$, definimos $\phi(y_{\delta,p+j}) = 0$. Falta então definirmos ϕ em $\{x_{\alpha,i} : (\alpha, i) \in (\mathfrak{c} \times (q+1) \setminus E)\}$. Definimos ϕ neste conjunto por indução transfinita em $L = \mathfrak{c} \setminus \{\alpha : \{\alpha\} \times (q+1) \subseteq E\}$.

Seja γ o mínimo ordinal no conjunto L tal que o homomorfismo ϕ ainda não foi definido em $x_{\gamma,i}$ para todo $i < q+1$. Como $\phi(f_\gamma(i, m))$ já foi definido $\forall i \in S_\gamma$, $\forall m \in \omega$, podemos definir, para cada $i \in S_\gamma$, $\phi(x_{\gamma,i})$ tal que

$$\phi(c_{\gamma,i} x_{\gamma,i}) = u_\gamma - \lim \{\phi(f_\gamma(i, m)) : m \in \omega\}.$$

Se $i \in (q+1) \setminus S_\gamma$ definimos $\phi(x_{\gamma,i}) = 0$.

Temos então $\phi : G \rightarrow \mathbb{Z}(n)$ homomorfismo satisfazendo 1), 2) e 3). $\square$

Vamos então demonstrar o Teorema 3.6.

Demonstração do Teorema 3.6:

(a) $\Rightarrow$ (b) é óbvia.

(b) $\Rightarrow$ (c) foi justificada na demonstração do Corolário 1.38

(c) $\Rightarrow$ (d) está justificada no Lema 1.6.

Todas as implicações acima são provadas em ZFC.

Vamos provar (d) $\Rightarrow$ (a). É para provar esta implicação que precisamos assumir a existência dos ultrafiltros seletivos.

Pelo Lema 3.10, para cada $x \in G$ e para cada $(q+1)$ -upla $(g_i)_{i < q+1} \in G^{q+1}$, existe um homomorfismo $\phi_{x,(g_i)_{i < q+1}} : G \rightarrow \mathbb{Z}(n)$ tal que:

- 1) $\phi_{x,(g_i)_{i < q+1}}(x) \neq 0$, se $x \neq 0$;
- 2) $\{m \in \omega : \phi_{x,(g_i)_{i < q+1}}(f_\xi(k, m)) = \phi_{x,(g_i)_{i < q+1}}(c_{\xi,k}x_{\xi,k}), \forall k \in S_\xi\} \in u_\xi$ para cada $\omega \leq \xi < \mathfrak{c}$,
- 3) $\{m \in \omega : (\phi_{x,(g_i)_{i < q+1}}(x_{m,k}))_{k < q+1} = (\phi_{x,(g_i)_{i < q+1}}(g_k))_{k < p+1}\}$ é finito.

Seja $\varphi : G \rightarrow \mathbb{Z}(n)^\mathfrak{c}$ a função diagonal

$$\varphi = \Delta\{\phi_{x,(g_i)_{i < p+1}} : x \in G, (g_i) \in G^{q+1}\}$$

φ é um homomorfismo pois cada ϕ é um homomorfismo e φ é injetor pelo item 1). Portanto $\varphi(G)$ é um subgrupo de $\mathbb{Z}(n)^\mathfrak{c}$ isomorfo a G . Vamos mostrar que $\varphi(G)$ com a topologia de subespaço de $\mathbb{Z}(n)^\mathfrak{c}$ é tal que $\varphi(G)^p$ é enumeravelmente compacto. Para

isto, pelo Lema 3.7 é suficiente mostrar que cada seqüência

$$\{(\varphi(f_\xi(k, m)))_{k \in S_\xi} : m \in \omega\}$$

tem ponto de acumulação $(c_{\xi, k}, x_{\xi, k})_{k \in S_\xi}$ em $\varphi(G)^{S_\xi}$.

Por 2) sabemos que a seqüência $\{(\phi_{x, (g_i)_{i < q+1}}(f_\alpha(k, m)))_{k \in S_\alpha} : m \in \omega\}$ tem u_ξ -limite $(\phi_{x, (g_i)_{i < q+1}}(c_{\xi, k}, x_{\xi, k}))_{k \in S_\xi}$. Portanto a seqüência $\{(\varphi(f_\xi(k, m)))_{k \in S_\xi} : m \in \omega\}$ tem u_ξ -limite $(\varphi(c_{\xi, k}, x_{\xi, k}))_{k \in S_\xi}$ em $(\varphi(G))^{S_\xi}$.

Falta mostrar que a seqüência $\{(\varphi(x_m, k))_{k < q+1} : m \in \omega\}$ não tem ponto de acumulação em $\varphi(G)^{q+1}$ do qual segue que $\varphi(G)^{q+1}$ não é enumeravelmente compacto.

Dada uma $(q+1)$ -upla qualquer $(g_i)_{i < q+1}$ de elementos de G , temos que $(\varphi(g_i))_{i < q+1}$ não é ponto de acumulação da seqüência $\{(\varphi(x_m, k))_{k < q+1} : m \in \omega\}$ pois por 3), para cada $x \in G$, $\{m \in \omega : (\phi_{x, (g_i)_{i < q+1}}(x_m, k))_{k < q+1} = (\phi_{x, (g_i)_{i < q+1}}(g_k))_{k < q+1}\}$ é finito. $\square$

Capítulo 4

Um grupo abeliano livre enumeravelmente compacto cujo tamanho tem cofinalidade enumerável

Neste capítulo apresentamos a construção, usando forcing, de um grupo abeliano livre enumeravelmente compacto cuja cardinalidade pode ter cofinalidade enumerável.

Exemplo 4.1. *É consistente com ZFC que $2^{\mathfrak{c}}$ é “arbitrariamente grande” e que existe uma topologia de grupo, enumeravelmente compacta, sem seqüências convergentes, no grupo livre de cardinalidade λ para todo $\lambda \in [\mathfrak{c}, 2^{\mathfrak{c}}]$. Em particular, é consistente que existem topologias de grupo enumeravelmente compactas num grupo abeliano livre cuja cardinalidade tem cofinalidade enumerável.*

Vamos construir, usando forcing, um subgrupo G de $\mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$ de tamanho κ que é

algebricamente livre e enumeravelmente compacto com a topologia de subespaço. De fato, vamos construir um subconjunto livre

$$X = \{x_\beta : \beta < \kappa\} \text{ de } \mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$$

com $\kappa \geq \omega_2$, κ regular, tal que para cada $\gamma \in [\mathfrak{c}, \kappa)$, o grupo gerado por $\{x_\beta : \beta < \gamma\}$ seja enumeravelmente compacto.

Cada elemento do grupo G se escreve como combinação linear finita de elementos do conjunto X . Então, para cada $x \in G$ existe um conjunto $E \in [\kappa]^{<\omega}$ e uma função

$$f : E \rightarrow \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ tal que } x = \sum_{\xi \in E} f(\xi)x_\xi.$$

Vemos que a função f define o elemento x por isso vamos chamar f de *representação* de x .

Queremos que X seja um conjunto livre, isto é, que para cada função $F : \text{dom}(F) \rightarrow \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ com $\text{dom}(F) \in [\kappa]^{<\omega}$, se tenha $\sum_{\xi \in \text{dom}(F)} F(\xi)x_\xi \neq 0$. Observamos que para isso basta com que, para algum $\beta < \mathfrak{c}$, seja

$$\sum_{\xi \in \text{dom}(F)} F(\xi)x_\xi(\beta) \neq 0 \in \mathbb{T}.$$

Se $\{g_n : n \in \omega\}$ é uma seqüência em G , para cada $n \in \omega$, temos uma função $\mathcal{F}(n)$ de domínio um subconjunto finito de κ ,

$$\mathcal{F}(n) : \text{dom}\mathcal{F}(n) \rightarrow \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

tal que $g_n = \sum_{\xi \in \text{dom}\mathcal{F}(n)} \mathcal{F}(n)(\xi)x_\xi = x_{\mathcal{F}(n)}$. Portanto a seqüência $\{g_n : n \in \omega\}$ é representada pela função

$$\mathcal{F} : \omega \rightarrow \bigcup_{E \in [\kappa]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}} (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^E$$

definida por $\mathcal{F} = \{(n, \mathcal{F}(n)) : n \in \omega\}$.

Lema 4.2. *Seja $\{g_n : n \in \omega\}$ uma seqüência em $G = \langle X \rangle$ que não contém uma subsequência constante. Então existe uma seqüência injetiva*

$$\mathcal{F} : \omega \rightarrow \bigcup_{E \in [\kappa]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}} (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^E$$

tal que $\{x_{\mathcal{F}(n)} : n \in \omega\} \subseteq \{g_n : n \in \omega\}$ e satisfaz uma das seguintes condições:

- 1) $\text{dom}\mathcal{F}(n) \neq \text{dom}\mathcal{F}(m)$, $\forall n, m \in \omega$ com $m \neq n$;
- 2) existe $E \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $\text{dom}\mathcal{F}(n) = E$, $\forall n \in \omega$, e existe $\mu \in E$ tal que $\mathcal{F}(n)(\mu) \neq \mathcal{F}(m)(\mu)$, $\forall n, m \in \omega$ com $m \neq n$.

Demonstração: Se $\{g_n : n \in \omega\}$ não contém uma subsequência constante, ela contém uma subsequência injetiva. Seja $\{a_n : n \in \omega\} \subseteq \{g_n : n \in \omega\}$ injetiva, e seja

$$\mathcal{G} : \omega \rightarrow \bigcup_{E \in [\kappa]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}} (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^E$$

tal que $a_n = x_{\mathcal{G}(n)}$.

Se existe $A \subseteq \omega$ infinito tal que $\text{dom}\mathcal{G}(n) \neq \text{dom}\mathcal{G}(m)$, $\forall n, m \in \omega$ com $m \neq n$, então enumeramos $A = \{n_k : k \in \omega\}$ e definimos

$$\mathcal{F} : \omega \rightarrow \bigcup_{E \in [\kappa]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}} (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^E$$

por $\mathcal{F}(k) = \mathcal{G}(n_k)$. Esta função $\mathcal{F}$ satisfaz 1).

Se não existe um A como acima então existe $B \in \omega$ infinito e $E \in [\kappa]^{<\omega}$ tais que $\text{dom}\mathcal{G}(n) = \text{dom}\mathcal{G}(m) = E$, $\forall n, m \in \omega$.

Como E é finito e a seqüência $\{a_n : n \in \omega\}$ é injetiva, exista $\mu \in E$ e $C \subseteq B$ infinito tal que $\mathcal{G}(n)(\mu) \neq \mathcal{G}(m)(\mu)$, $\forall n, m \in \omega$ com $m \neq n$.

Seja $C = \{n_k : k \in \omega\}$. Definimos

$$\mathcal{F} : \omega \rightarrow \bigcup_{E \in [\kappa]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}} (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^E$$

por $\mathcal{F}(k) = \mathcal{G}(n_k)$. Esta função $\mathcal{F}$ satisfaz 2). □

Seja $\mathcal{F}_\alpha : \alpha < \kappa$ uma enumeração das seqüências injetoras

$$\mathcal{F} : \omega \rightarrow \bigcup_{E \in [\kappa]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}} (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^E$$

que satisfazem a condição 1) ou a condição 2) do lema acima.

Do Lema 4.2 segue que para que o grupo G seja enumeravelmente compacto é suficiente com que cada $\alpha < \kappa$ a seqüência $\{x_{\mathcal{F}_\alpha(n)} : n \in \omega\}$ possua ponto de acumulação em G .

Fixamos $\mathcal{B} = \{W_l : l \in \omega\}$ uma base de abertos (arcos) para $\mathbb{T}$ tal que $\mathbb{T} \in \mathcal{B}$.

Definição 4.3. Seja $D \subseteq \kappa$ infinito e sejam as funções $\psi_0 : D \rightarrow \mathcal{B}$ e $\psi_1 : D \rightarrow \mathcal{B}$ tais que $\{\xi \in D : \psi_i(\xi) \neq \mathbb{T}\}$ é finito, para $i = 0, 1$. Dizemos que $\psi_1 \leq \psi_2$ se $\overline{\psi_1(\xi)} \subseteq \psi_2(\xi)$, para todo $\xi \in D$.

Lema 4.4. (Tkachenko [27]) *Seja $\mathcal{F} : \omega \rightarrow \bigcup_{E \in [\kappa]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}} (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^E$ satisfazendo uma das seguintes condições:*

- 1) $\text{dom} \mathcal{F}(n) \neq \text{dom} \mathcal{F}(m)$, $\forall n, m \in \omega$ com $m \neq n$;
- 2) existe $E \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $\text{dom} \mathcal{F}(n) = E$, $\forall n \in \omega$, e existe $\mu \in E$ tal que $\mathcal{F}(n)(\mu) \neq \mathcal{F}(m)(\mu)$, $\forall n, m \in \omega$ com $m \neq n$.

Seja $\psi : D \rightarrow \mathcal{B}$ uma função tal que $\{\xi \in D : \psi(\xi) \neq \mathbb{T}\}$ é finito. Se $W \in \mathcal{B}$, então existe $m \in \omega$ e uma função $\psi' : D \rightarrow \mathcal{B}$ com $\{\xi \in D : \psi'(\xi) \neq \mathbb{T}\}$ finito tal que $\psi' \leq \psi$ e $\sum_{\xi \in \text{dom} \mathcal{F}(m)} \mathcal{F}(m)(\xi) \psi'(\xi) \subseteq W$.

Demonstração:

caso 1: a função $\mathcal{F}$ satisfaz a condição 1).

Então existe $m_0 \in \omega$ e $\gamma \in \text{dom}\mathcal{F}(m_0)$ tal que $\psi(\gamma) = \mathbb{T}$. Vamos definir $\psi' : D \rightarrow \mathcal{B}$ tal que

$$\{\xi \in D : \psi'(\xi) \neq \mathbb{T}\} \subseteq \{\xi \in D : \psi(\xi) \neq \mathbb{T}\} \cup \text{dom}\mathcal{F}(m_0) = C$$

Para cada $\xi \in D$ tal que $\psi(\xi) \neq \mathbb{T}$, fixamos $a_\xi \in \psi(\xi)$ e para cada

$$\xi \in \text{dom}\mathcal{F}(m_0) \setminus (\{\xi \in D : \psi(\xi) \neq \mathbb{T}\} \cup \{\gamma\}),$$

definimos $a_\xi = 0$.

Vamos escolher $a_\gamma \in \mathbb{T}$ tal que

$$\sum_{\xi \in \text{dom}\mathcal{F}(m_0)} \mathcal{F}(m_0)(\xi)a_\xi \in W$$

Agora, para cada $\xi \in C$, fixamos $W_\xi \in \mathcal{B}$ tal que $\sum_{\xi \in \text{dom}\mathcal{F}(m_0)} \mathcal{F}(m_0)(\xi)W_\xi \subseteq W$, $a_\xi \in W_\xi$, e $\overline{W_\xi} \subseteq \psi(\xi)$ para cada ξ tal que $\psi(\xi) \neq \mathbb{T}$.

Definimos $\psi' : D \rightarrow \mathcal{B}$ por $\psi'(\xi) = \mathbb{T}$ se $\xi \in D \setminus C$ e $\psi'(\xi) = W_\xi$ para todo $\xi \in C$.

caso 2: a função $\mathcal{F}$ satisfaz a condição 2).

Se $E \not\subseteq \{\xi \in D : \psi(\xi) \neq \mathbb{T}\} = C$ procedemos como no caso 1).

Se $E \subseteq C$, como o conjunto $\{F(n)(\mu) : n \in \omega\}$ é não limitado em $\mathbb{Z}$, existe $m_0 \in \omega$ tal que $\mathcal{F}(m_0)(\mu) \cdot \psi(\mu) = \mathbb{T}$.

Fixamos $a_\xi \in \psi(\xi)$, $\forall \xi \in E \setminus \{\mu\}$ e escolhemos $a_\mu \in \psi(\mu)$ tal que

$$\sum_{\xi \in E \setminus \{\mu\}} \mathcal{F}(m_0)(\xi)a_\xi + \mathcal{F}(m_0)(\mu)a_\mu \in W.$$

Agora procedemos como no caso 1. □

Definição 4.5. Seja $\mathbb{P}$ a família de todos os elementos

$$p = (\alpha_p, \{x_{p,\xi} : \xi \in D_p\}, \{A_{p,\zeta} : \zeta \in E_p\})$$

que satisfazem:

- i) $\alpha_p \in \omega_1$;
- ii) $D_p \in [\kappa]^\omega$;
- iii) $x_{p,\xi} \in \mathbb{T}^{\alpha_p}$;
- iv) $E_p \in [\kappa]^\omega$;
- v) $A_{p,\zeta} \subseteq D_p \cap \mathfrak{c}$;
- vi) $\text{dom}\mathcal{F}_\zeta(n) \subseteq D_p$ para cada $n \in \omega$, $\zeta \in E_p$;
- vii) $x_{p,\xi}$ é ponto de acumulação de $\{x_{p,\mathcal{F}_\zeta(n)} : n \in \omega\}$ para cada $\xi \in A_{p,\zeta}$ e cada $\zeta \in E_p$;
- viii) $\{x_{p,\xi} : \xi \in D_p\}$ é um conjunto livre.

Dados $p, q \in \mathbb{P}$, p estende q , isto é $p \leq q$, se

- a) $\alpha_p \geq \alpha_q$;
- b) $D_p \supseteq D_q$;
- c) $x_{p,\xi} \upharpoonright_{\alpha_q} = x_{q,\xi}$ para todo $\xi \in D_q$;
- d) $E_p \supseteq E_q$;
- e) $A_{p,\zeta} \supseteq A_{q,\zeta}$ para todo $\zeta \in E_q$.

Lema 4.6. $(\mathbb{P}, \leq)$ é uma ordem parcial.

Primeiro vamos verificar que $\mathbb{P} \neq \emptyset$.

Seja $p = (\alpha_p, \{x_{p,\xi} : \xi \in D_p\}, \{A_{p,\zeta} : \zeta \in E_p\})$, com

$$\alpha_p = \omega;$$

$$D_p \in [\kappa \setminus \omega_1]^\omega, \quad D_p = \{\xi_n : n \in \omega\};$$

$$x_{p,\xi_n} \in \mathbb{T}^\omega, \forall n \in \omega, \text{ é tal que } x_{p,\xi_n}(n) \neq 0 \in \mathbb{T} \text{ e } x_{p,\xi_n}(m) = 0 \text{ se } n \neq m;$$

$E_p \in [\kappa]^\omega$ tal que $\text{dom } \mathcal{F}_\zeta(n) \subseteq D_p$, $\forall n \in \omega$, $\forall \zeta \in E_p$;

$A_{p,\zeta} = \emptyset$, $\forall \zeta \in E_p$.

p assim definido é um elemento de $\mathbb{P}$.

É claro que a relação $\leq$ é reflexiva e antisimétrica. Vamos verificar que é também transitiva. Sejam $p, q, r \in \mathbb{P}$ com $p \leq q$ e $q \leq r$. Então $x_{p,\xi} \upharpoonright_{\alpha_r} = x_{q,\xi} \upharpoonright_{\alpha_r} = x_{r,\xi}$. $\square$

Lema 4.7. *A ordem parcial $\mathbb{P}$ é ω_1 -fechada.*

Demonstração: Seja $\{p_n : n \in \omega\} \subseteq \mathbb{P}$ tal que $p_{n+1} \leq p_n$, $\forall n \in \omega$. Definimos

$$p_\omega = (\alpha_{p_\omega}, \{x_{p_\omega,\xi} : \xi \in D_{p_\omega}\}, \{A_{p_\omega,\zeta} : \zeta \in E_{p_\omega}\}),$$

onde $\alpha_\omega = \sup\{\alpha_{p_n} : n \in \omega\}$, $D_{p_\omega} = \bigcup_{n \in \omega} D_{p_n}$, $x_{p_\omega,\xi} = \bigcup_{\xi \in D_{p_n}} x_{p_n,\xi}$, $E_{p_\omega} = \bigcup_{n \in \omega} E_{p_n}$, $A_{p_\omega,\zeta} = \bigcup_{n \in \omega} A_{p_n,\zeta}$.

Afirmamos que $p_\omega \in \mathbb{P}$. Temos que verificar as condições (vii) e (viii).

Sejam $\zeta \in E_{p_\omega}$ e $\xi \in A_{p_\omega,\zeta}$. Seja V uma vizinhança aberta (básica) de $x_{p_\omega,\xi}$ em $\mathbb{T}^{\alpha_{p_\omega}}$. Como V depende de uma quantidade finita $\beta_1 < \dots < \beta_k < \alpha_{p_\omega}$ de coordenadas e pela definição de α_{p_ω} , existe $n_0 \in \omega$ tal que para todo $n \geq n_0$ é $\alpha_{p_n} > \beta_k$, $\xi \in D_{p_n}$ e $\zeta \in E_{p_n}$. Logo $x_{p_n,\xi} \in \pi_{\alpha_{p_n}}(V)$ e $\pi_{\alpha_{p_n}}(V) \cap \{x_{p_n,\mathcal{F}_\zeta(k)} : k \in \omega\} \neq \emptyset$. Portanto $V \cap \{x_{p_\omega,\mathcal{F}_\zeta(k)} : k \in \omega\} \neq \emptyset$, e temos a condição (vii).

Seja $E \in [D_{p_\omega}]^{<\omega}$ e seja $f : E \rightarrow \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Queremos $\sum_{\xi \in E} f(\xi)x_{p_\omega,\xi} \neq 0$.

Pela definição de D_{p_ω} , temos que existe $n \in \omega$ tal que $E \subseteq D_{p_n}$ e portanto $\sum_{\xi \in E} f(\xi)x_{p_n,\xi} \neq 0$. $\square$

Lema 4.8. *Seja $r = (\alpha_r, \{x_{r,\xi} : \xi \in D_r\}, \{A_{r,\zeta} : \zeta \in E_r\})$ satisfazendo as condições (i) a (viii) da definição da ordem $\mathbb{P}$. Então existe $p \in \mathbb{P}$ tal que p “estende” r , isto é as condições a) – e) são satisfeitas.*

Demonstração: Vamos definir $p \in \mathbb{P}$ tal que $\alpha_p = \alpha_r + \omega$, $D_p = D_r$, $E_p = E_r$, $A_{p,\zeta} = A_{r,\zeta}$ para todo $\zeta \in E_p$ and $x_{p,\xi} \upharpoonright_{\alpha_r} = x_{r,\xi}$ para todo $\xi \in D_p$.

Para obter (viii) precisamos que, para cada $f \in \bigcup_{F \in [\kappa]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}} (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^F$,

$$\sum_{\xi \in \text{dom}(f)} f(\xi) x_{p,\xi} \neq 0.$$

Vamos enumerar $\bigcup_{F \in [\kappa]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}} (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^F$ por $\{f_n : n \in \omega\}$ e vamos definir $x_{p,\xi}(\alpha + n)$, por indução, para cada $n \in \omega$ e para cada $\xi \in D_p$, tal que a condição (viii) seja satisfeita e $\sum_{\xi \in \text{dom}(f_n)} f_n(\xi) x_{p,\xi}(\alpha + n) = x_{p,f_n}(\alpha + n) \neq 0$.

Suponhamos que a condição (vii) é satisfeita por $\{x_{p,\xi} \upharpoonright_{\alpha_r+n} : \xi \in D_p\}$. Para cada $\zeta \in E_p$ e cada $\mu \in A_{p,\zeta}$, seja $B_{\zeta,\mu}$ um subconjunto infinito de ω tal que $\{x_{p,\mathcal{F}_\zeta(m)} \upharpoonright_{\alpha_r+n} : m \in B_{\zeta,\mu}\}$ converge para $x_{p,\mu} \upharpoonright_{\alpha_r+n}$.

Seja $\{B_{\zeta,\mu,k} : k \in \omega\}$ uma partição de $B_{\zeta,\mu}$ tal que $|B_{\zeta,\mu,k}| = \omega$ para todo $k \in \omega$.

Lembramos que $\mathcal{B} = \{W_l : l \in \omega\}$ é uma base de abertos para $\mathbb{T}$. Enumeramos todos os possíveis pares $(B_{\zeta,\mu,k}, W_l)$ onde $\zeta \in E_p$, $\mu \in A_{p,\zeta}$ e $k, l \in \omega$ por $\{(B_{\zeta_t,\mu_t,k_t}, W_{l_t}) : k \in \omega\}$.

Vamos definir por indução uma família decrescente de funções $\psi_t : D_p \rightarrow \mathcal{B}$ tais que $\{\xi \in D_p : \psi_t(\xi) \neq \mathbb{T}\}$ é finito.

Seja $\psi_0 : D_p \rightarrow \mathcal{B}$ tal que $\text{dom}(f_n) \subseteq \{\xi \in D_p : \psi_0(\xi) \neq \mathbb{T}\}$ e $0 \notin \sum_{\xi \in \text{dom}(f_n)} f_n(\xi) \psi_0(\xi)$.

Do Lema 4.4 aplicado a $\mathcal{F}_\zeta \upharpoonright_{B_{\zeta_0,\mu_0,k_0}}$, segue que existe $m_0 \in B_{\zeta_0,\mu_0,k_0}$ e $\psi_1 \leq \psi_0$ com $\{\xi \in D_p : \psi_1(\xi) \neq \mathbb{T}\}$ finito tais que

$$\sum_{\xi \in \text{dom} \mathcal{F}_{\zeta_0}(m_0)} \mathcal{F}_{\zeta_0}(m_0)(\xi) \psi_1(\xi) \subseteq W_{l_0}.$$

Por indução, usando o Lema 4.4, definimos $\{\psi_t : t \in \omega\}$ e $\{m_t : t \in \omega\}$ tais que $\psi_{t+1} \leq \psi_t$ e

$$\sum_{\xi \in \text{dom} \mathcal{F}_{\zeta_t}(m_t)} \mathcal{F}_{\zeta_t}(m_t)(\xi) \psi_t(\xi) \subseteq W_{l_t}.$$

Para cada $\xi \in D_p$, definimos $x_{p,\xi}(\alpha_r + n) \in \bigcap_{t \in \omega} \overline{\psi_t(\xi)}$. Então $\{x_{p,\xi} \upharpoonright_{\alpha_r+n+1} : \xi \in D_p\}$ satisfaz (vii) e $\sum_{\xi \in \text{dom}(f_n)} f_n(\xi) x_{p,\xi}(\alpha_r + n) \neq 0$. $\square$

Lema 4.9. (CH) $\mathbb{P}$ é ω_2 -c.c.

Demonstração: Seja $\{p_\beta : \beta < \omega_2\}$ um subconjunto de $\mathbb{P}$. Usando o Lema do Δ -sistema, como vale CH, temos que existe $I \in [\omega_2]^{\omega_2}$ e $D \in [\kappa]^{\leq \omega}$ tais que $D_{p_\beta} \cap D_{p_\gamma} = D$ para todo par $\{\beta, \gamma\} \in [I]^2$. Como $|I| = \omega_2$, podemos assumir que existe $\alpha < \omega_1$ tal que $\alpha_{p_\beta} = \alpha$ para cada $\beta \in I$. Também podemos assumir que $|\{x_{p_\beta, \xi} : \beta \in I\}| = 1$ para cada $\xi \in D$.

Fixamos $\beta, \gamma \in I$. Seja $D_r = D_{p_\beta} \cup D_{p_\gamma}$. Definimos $x_{r, \xi}$ como $x_{p_\beta, \xi}$ se $\xi \in D_{p_\beta}$ ou $x_{p_\gamma, \xi}$ se $\xi \in D_{p_\gamma} \setminus D$.

Seja $E_r = E_{p_\beta} \cup E_{p_\gamma}$, definimos $A_{r, \zeta}$ como $A_{p_\beta, \zeta}$ se $\zeta \in E_{p_\beta} \setminus E_{p_\gamma}$; $A_{p_\gamma, \zeta}$ se $\zeta \in E_{p_\gamma} \setminus E_{p_\beta}$ ou $A_{p_\beta, \zeta} \cup A_{p_\gamma, \zeta}$ se $\zeta \in E_{p_\beta} \cap E_{p_\gamma}$.

Vemos que $r = (\alpha, \{x_{r, \xi} : \xi \in D_r\}, \{A_{r, \zeta} : \zeta \in E_r\})$ satisfaz as condições (i) a (vii) da definição da ordem $\mathbb{P}$. Então pelo Lema 4.8, $\exists p \in \mathbb{P}$ tal que $\alpha_p \geq \alpha$, $D_p \supseteq D_r$, $x_{p, \xi} \restriction_{\alpha_r} = x_{r, \xi} \forall \xi \in D_r$, $E_p \supseteq E_r$ e $A_{p, \zeta} \supseteq A_{r, \zeta} \forall \zeta \in E_r$. Portanto p estende p_β e p_γ . $\square$

Lema 4.10. O conjunto $\mathcal{D}_{\alpha, \xi, \zeta, \mu} = \{p \in \mathbb{P} : \alpha_p \geq \alpha, \xi \in D_p, \zeta \in E_p \wedge A_{p, \zeta} \setminus \mu \neq \emptyset\}$ é denso em $\mathbb{P}$, para cada $\alpha, \mu < \omega_1$ e $\xi, \zeta < \kappa$.

Demonstração: Seja q um elemento arbitrário de $\mathbb{P}$.

Se $\zeta \in E_q$, definimos $E_r = E_q$. Seja $\theta \in (\mu, \mathfrak{c})$ tal que $\theta \notin D_q \cup \{\xi\}$, e seja $D_r = D_q \cup \{\theta\} \cup \{\xi\}$. Definimos $x_{q, \theta}$ como um ponto de acumulação da sequência $\{x_{q, \mathcal{F}_\zeta(n)} : n \in \omega\}$. Se $\xi \in D_r \setminus D_q$ define $x_{q, \xi} = 0 \in \mathbb{T}^{\alpha_q}$.

Se $\zeta \notin E_q$, escolhemos $\theta \in (\mu, \mathfrak{c}) \setminus (D_q \cup \bigcup_{n \in \omega} \text{dom} \mathcal{F}_\zeta(n) \cup \{\xi\})$ e pomos

$$D_r = D_q \cup \left(\bigcup_{n \in \omega} \text{dom} \mathcal{F}_\zeta(n) \right) \cup \{\theta, \xi\}.$$

Se $\psi \in D_r \setminus (D_q \cup \{\theta\})$, definimos $x_{q,\psi} = 0 \in \mathbb{T}^{\alpha_q}$. Definimos $x_{q,\theta}$ como um ponto de acumulação da seqüência $\{x_{q,\mathcal{F}_\zeta(n)} : n \in \omega\}$.

Em ambos casos, definimos $A_{r,\rho} = A_{q,\rho}$ para cada $\rho \in E_r \setminus \{\zeta\}$ e $A_{r,\zeta} = A_{q,\zeta} \cup \{\theta\}$.
Se $\alpha_q \geq \alpha$, seja $x_{r,\eta} = x_{q,\eta}$ para cada $\eta \in D_r$.
Se $\alpha_q < \alpha$, seja $x_{r,\eta} = x_{q,\eta} \cup \{(\beta, 0) : \alpha_q \leq \beta < \alpha\}$ para cada $\eta \in D_r$. Seja $\alpha_r = \max\{\alpha, \alpha_q\}$.

Então $r = (\alpha_r, \{x_{r,\eta} : \eta \in D_r\}, \{A_{r,\rho} : \rho \in E_r\})$ satisfaz as condições (i) a (vii) da definição da ordem $\mathbb{P}$. Portanto pelo Lema 4.8, existe $p \in \mathbb{P}$, “abaixo” de r . Logo $p \leq q$ e $p \in \mathcal{D}_{\alpha,\xi,\zeta,\mu}$. $\square$

Prova do Exemplo 4.1:

Seja M um modelo enumerável de $ZFC + GCH$ tal que $\kappa \in M$, $\mathbb{P} \in M$ e $\kappa \geq \omega_2$ em M .

Seja $\mathbb{G}$ um conjunto genérico para a ordem parcial $\mathbb{P}$.

Lema 4.11. (CH) *O forcing com $\mathbb{P}$ preserva cardinais.*

Demonstração: Sabemos que a ordem parcial $\mathbb{P}$ é ω_1 -fechada e portanto pelo Corolário 1.28, o forcing preserva ω_1 . Como $\mathbb{P}$ é ω_2 -c.c. e ω_2 é regular em M , o forcing preserva cardinais maiores ou iguais a ω_2 . $\square$

Lema 4.12. $\mathbb{P}$ não introduz conjuntos enumeráveis novos.

Demonstração: Temos que mostrar que se $A \in M$, $B \in M[\mathbb{G}]$, $B \subseteq A$ e B é enumerável em $M[\mathbb{G}]$, então $B \in M$.

Seja, então, $B \subseteq A$ e B é enumerável em $M[\mathbb{G}]$. Temos que existe uma função $f : \omega \rightarrow A$ tal que $f(\omega) = B$ e $f \in M[\mathbb{G}]$.

Como $\mathbb{P}$ é ω_1 -fechado, pelo Lema 1.27 temos que $f \in M$. Então $\omega \in M$ e $f \in M$ implicam que $B = f(\omega) \in M$. $\square$

Para cada $\xi, \zeta \in \kappa$, seja $x_\xi = \bigcup_{p \in \mathbb{G} \wedge \xi \in D_p} x_{p,\xi}$ e $A_\zeta = \bigcup_{p \in \mathbb{G} \wedge \zeta \in E_p} A_{p,\zeta}$. Pelo Lema 4.10, cada x_ξ é uma função em $\mathbb{T}^{\omega_1}$ e o conjunto $\{x_\beta : \beta < \kappa\}$ é livre. Também, cada A_ζ tem cardinalidade $\mathfrak{c}$, e para cada $\mu \in A_\zeta$, x_μ é ponto de acumulação da seqüência $\{x_{\mathcal{F}_\zeta(n)} : n \in \omega\}$.

Fixamos $\lambda \in [\mathfrak{c}, \kappa]$. O grupo gerado por $\{x_\beta : \beta < \lambda\}$ é abeliano livre. Vamos verificar que $\langle \{x_\beta : \beta < \lambda\} \rangle$ é enumeravelmente compacto.

Seja $\{g_n : n \in \omega\}$ uma seqüência em $\langle \{x_\beta : \beta < \lambda\} \rangle$. Como $\mathbb{P}$ não adiciona novos conjuntos enumeráveis, temos que $\{g_n : n \in \omega\} \in M$. Pelo Lema 4.2, ou $\{g_n : n \in \omega\}$ contém uma subsequência constante ou existe $\zeta < \kappa$ tal que

$$\{x_{\mathcal{F}_\zeta(n)} : n \in \omega\} \subseteq \{g_n : n \in \omega\}$$

No primeiro caso, é claro que $\{g_n : n \in \omega\}$ possui ponto de acumulação. No segundo caso, usando o Lema 4.10, podemos achar $p \in \mathbb{G}$ tal que $\zeta \in E_p$ e $A_{p,\zeta} \neq \emptyset$. Portanto para cada $\mu \in A_{p,\zeta}$, $x_{p,\mu}$ é ponto de acumulação de $\{x_{p,\mathcal{F}_\zeta(n)} : n \in \omega\}$. E como $p \in \mathbb{G}$ temos que x_μ é ponto de acumulação de $\{x_{\mathcal{F}_\zeta(n)} : n \in \omega\}$, $\forall \mu \in A_\zeta \subseteq \mathfrak{c} \leq \lambda$.

Lema 4.13. (CH) $\mathfrak{c} = \omega_1$ e $2^{\omega_1} = 2^\mathfrak{c} = \kappa$ em $M[\mathbb{G}]$.

Demonstração: $\mathbb{P}$ não introduz novos conjuntos enumeráveis, portanto o valor de $\mathfrak{c} = 2^\omega$ é o mesmo em M e em $M[\mathbb{G}]$. Em M , $\mathfrak{c} = \omega_1$, e como ω_1 é preservado temos que $\mathfrak{c} = \omega_1$ em $M[\mathbb{G}]$.

Sabemos que $\kappa = |\{x_\beta : \beta < \kappa\}| \leq |\mathbb{T}^{\omega_1}| = \mathfrak{c}^{\omega_1} = \omega_1^{\omega_1} \leq (2^{\omega_1})^{\omega_1} = 2^{\omega_1}$ em $M[\mathbb{G}]$.
Falta provar que $2^{\omega_1} \leq \kappa$ em $M[\mathbb{G}]$.
Como κ é regular e $\kappa \geq \omega_2$ em M e M é um modelo de $\text{ZFC} + \text{GCH}$, temos que $\kappa^{\omega_1} = \kappa$ e $\kappa^\omega = \kappa$ em M .
Como $\mathbb{P}$ é ω_2 -c.c., toda anticadéia em $(\mathbb{P}, \leq)$, que é elemento de M , tem cardinalidade menor ou igual a ω_1 . Então, em M , o número total de anticadéias em $(\mathbb{P}, \leq)$ é menor ou igual a $|\mathbb{P}^{\omega_1}| = \kappa^{\omega_1} = \kappa$. Logo o número de "nice-names" em M para subconjuntos de ω_1 é menor ou igual a κ . Pela demonstração do Lema 1.30 temos que $2^{\omega_1} \leq \kappa$ em $M[\mathbb{G}]$. ([25], Cap VII, Lema 5.3.) $\square$

Apêndice A

Ultrafiltros seletivos de ω

Neste apêndice, vamos apresentar a demonstração da Proposição 1.33. Este teorema na versão mais geral, para ultrafiltros sobre ordinal infinito α qualquer pode ser lida em [4]. Aqui apresentamos a versão específica para ultrafiltros sobre ω .

Todos os ultrafiltros considerados neste anexo são pontos de $\beta\omega \setminus \omega = \omega^*$, isto é, são ultrafiltros livres de ω .

Definição A.1. Dizemos que dois ultrafiltros u, v são equivalentes, e escrevemos $u \equiv v$, se existe uma bijeção $f : \omega \rightarrow \omega$ tal que $u = \bar{f}(v)$, onde $\bar{f} : \beta\omega \rightarrow \beta\omega$ denota a extensão de Stone–Čech de f .

Lembramos que $u \leq v$ se existe uma função $f : \omega \rightarrow \omega$ tal que $\bar{f}(v) = u$, i.e. se $u = \{X : f^{-1}[X] \in v\}$. É a chamada ordem de Rudin–Keisler em ω^* .

Vamos verificar que se $u \leq v$ e $v \leq u$, então $u \equiv v$.

Proposição A.2. Se $f : \omega \rightarrow \omega$ e $u = \bar{f}(v)$, então $\{n : f(n) = n\} \in u$.

Demonstração: Consideramos os conjuntos $X = \{n : f(n) < n\}$ e $Y = \{n : f(n) > n\}$ e vemos que nenhum deles é um elemento de u . Para cada $n \in Y$ seja $l(n)$ o comprimento da seqüência máxima $n < f(n) < f(n)^2 < \dots$. Sejam $Y_0 = \{n \in Y : l(n) \text{ é par}\}$, $Y_1 = \{n \in Y : l(n) \text{ é ímpar}\}$ e $Z = \{n \in Y : n < f(n) < f(n)^2 < \dots, \text{ é infinita}\}$.

Temos que $Y_0 \notin u$ pois $Y_0 \cap f^{-1}[Y_0] = \emptyset$. De igual forma $Y_1 \notin u$.

Se $x, y \in Z$ definimos $x \sim y$ se existem naturais k e m que satisfazem $f^k(x) = f^m(y)$.

Para cada $x \in Z$, seja a_x um representante de $\{y : y \sim x\}$, e seja

$$l(x) = \min\{k + m : f^k(x) = f^m(a_x)\}.$$

Definimos $Z_0 = \{x \in Z : l(x) \text{ é par}\}$ e $Z_1 = \{x \in Z : l(x) \text{ é ímpar}\}$. Então $f^{-1}[Z_1] \cap Z = Z_0$ e portanto nem Z_0 e nem Z_1 são elementos de u . De forma análoga se verifica que $X \notin u$. $\square$

Proposição A.3. *Se u e v são dois ultrafiltros que satisfazem $u \leq v$ e $v \leq u$, então $u \equiv v$.*

Demonstração: Como $u \leq v$, existe uma função $g : \omega \rightarrow \omega$ tal que $\bar{g}(v) = u$. Analogamente como $v \leq u$, existe uma função $h : \omega \rightarrow \omega$ tal que $\bar{h}(u) = v$. Segue que $\overline{g \circ h}(u) = u$, portanto $A = \{n : g \circ h(n) = n\} \in u$ pela proposição A.2. Em particular se $f = g \circ h \upharpoonright A$ a função $f \upharpoonright_A$ é injetora. Seja $\{A_0, A_1\}$ uma partição de A onde $|A_0| = |A_1| = \omega$. Assumimos que $A_0 \in u$. Sabemos que $\omega = |\omega \setminus A_0| = |\omega \setminus f[A_0]|$. Seja π uma permutação de ω tal que $\pi[\omega \setminus A_0] = \omega \setminus f[A_0]$ e $\pi \upharpoonright_{A_0} = f \upharpoonright_{A_0}$. Então $\bar{\pi}(u) = \bar{f}(u) = u$. $\square$

Proposição A.4. *Para u um ultrafiltro livre de ω são equivalentes:*

(a) *u é minimal na ordem de Rudin–Keisler;*

(b) u é seletivo;

(c) para cada partição $\{P_k : k \in \omega\}$ de ω , ou existe $k \in \omega$ tal que $P_k \in p$ ou existe $A \in u$ tal que $|A \cap P_k| \leq 1 \ \forall k \in \omega$;

(d) toda coloração $F : [\omega]^2 \rightarrow \{0, 1\}$ possui um conjunto homogêneo $A \in u$.

Demonstração:

(a) $\Rightarrow$ (b)

Seja $f : \omega \rightarrow \omega$ uma função.

Se $\bar{f}(u)$ é um ultrafiltro principal, então existe $a \in \omega$ tal que $\{a\} \in \bar{f}(u)$, isto é $f^{-1}[\{a\}] \in u$. Neste caso $A = f^{-1}[\{a\}]$.

Se $\bar{f}(u)$ é um ultrafiltro livre por definição $\bar{f}(u) \leq u$ e por hipótese u é minimal, logo $\bar{f}(u) \sim u$. Portanto existe uma permutação π de ω que satisfaz $\overline{\pi \circ f}(u) = u$. Seja $A = \{n : \pi \circ f(n) = n\} \in u$. A função $f \upharpoonright_A$ é injetora.

(b) $\Rightarrow$ (c)

Seja $\{P_k : k \in \omega\}$ uma partição de ω . Definimos a função $f : \omega \rightarrow \omega$ por $f(x) = k \Leftrightarrow x \in P_k$. Por hipótese, existe $A \in u$ satisfazendo uma das condições de (b).

(c) $\Rightarrow$ (d)

Afirmção: Se $X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots$ são elementos de u , então existe uma sequência $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ tal que $\{a_n : n \in \omega\} \in u$ e $a_{n+1} \in X_{a_n} \ \forall n \in \omega$.

Demonstração: Sejam $X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots$ elementos de u . Como u é P -ponto, existe $Y \in u$ tal que $Y \setminus X_n$ é finito, para todo $n \in \omega$. Definimos a sequência crescente $\{y_n : n \in \omega\}$ em Y como segue:

$$y_0 = \min\{k \in Y : \{y \in Y : y > k\} \subseteq X_0\}$$

$$y_{n+1} = \min\{k \in Y : k > y_n, \{y \in Y : y > k\} \subseteq X_{y_n}\}.$$

Para cada n , seja $A_n = \{y \in Y : y_n < y \leq y_{n+1}\}$. Por (c) existe $\{z_n : n \in \omega\} \in p$, com $z_n \in A_n$ para cada $n \in \omega$.

Como $z_{n+2} > y_{n+2}$, temos que $z_{n+2} \in X_{y_{n+1}}$, e como $y_{n+1} \geq z_n$ temos que $X_{y_{n+1}} \subseteq X_{z_n}$, portanto $z_{n+2} \in X_{z_n}$.

Sejam, para cada $n \in \omega$, $a_n = z_{2n}$ e $b_n = z_{2n+1}$. Então $\{a_n : n \in \omega\} \in u$ ou $\{b_n : n \in \omega\} \in u$. Aquele que for elemento de p satisfaz a afirmação.

Seja uma coloração $F : \omega^2 \rightarrow \{0, 1\}$. Para cada $a \in \omega$, seja $F_a : \omega \setminus \{a\} \rightarrow \{0, 1\}$ a função definida por $F_a(x) = F(x, a)$. Então para cada $a \in \omega$, existe $H_a \in p$ tal que $F_a \upharpoonright_{H_a}$ é constante. Logo existem $r \in \{0, 1\}$ e $A \in u$ tais que $F(x, a) = r \ \forall x \in H_a, \forall a \in A$.

Para cada $n \in \omega$ seja $x_n = A \cap H_0 \cap \dots \cap H_n$. Pela afirmação podemos considerar uma seqüência crescente $H = \{a_n : n \in \omega\} \in u$, com $a_{n+1} \in H_{a_n}, \forall n \in \omega$.

Para cada $n \in \omega$ $a_n \in A$ e $\{a_m : m > n\} \subseteq H_{a_n}$, portanto $F(x, a_n) = r \ \forall x \in \{a_m : m > n\}$. Segue que F é constante em H^2 .

(d) $\Rightarrow$ (c)

Seja u um ultrafiltro satisfazendo (d), e seja $\{P_k : k \in \omega\}$ uma partição de ω . Suponhamos que $P_k \notin u$, para todo $k \in \omega$, definimos a coloração $F : \omega^2 \rightarrow \{0, 1\}$ por $F(x, y) = 0$ se $\{x, y\} \subseteq P_k$ para algum $k \in \omega$ e $F(x, y) = 1$ caso contrário.

Por hipótese podemos considerar $A \in u$ tal que a função F é constante em A^2 . Como estamos supondo $P_k \notin u$, para todo $k \in \omega$, temos que $|A \cap P_k| \leq 1$ para cada $k \in \omega$.

(c) $\Rightarrow$ (a)

Seja u um ultrafiltro satisfazendo (c), vamos provar que para toda função $f : \omega \rightarrow \omega$ tal que $\bar{f}(u) \in \omega^*$ temos $\bar{f}(u) \sim u$.

Seja então f uma função como acima. Para cada $k \in \omega$ seja $P_k = f^{-1}[\{k\}]$. Então $\{P_k : k \in \omega\}$ é uma partição de ω , e como $P_k \notin u \ \forall k \in \omega$, por (c) temos que existe $A \in u$ tal que $|A \cap P_k| \leq 1, \forall k \in \omega$. Segue que $f \upharpoonright_A$ é injetora, então usando a demonstração do Proposição A.3 temos $\bar{f}(u) \sim u$. $\square$

Apêndice B

Grupos abelianos de ordem limitada e subgrupos puros

Duas propriedades fortemente usadas neste trabalho são os teoremas 1.4 e 1.5. O primeiro diz que todo grupo abeliano de ordem finita é soma direta de cíclicos e o segundo diz que um subgrupo puro de ordem limitada é somando direto do grupo. Neste apêndice queremos dar uma idéia de porque isso acontece. A referência principal é o livro de Kaplansky [23].

Lembramos que um subgrupo H de um grupo abeliano G é puro se para cada $h \in H$ se h é divisível por n em G , então h é divisível por n em H .

Lema B.1. *Sejam G um grupo abeliano e H um subgrupo puro de G e $\pi : G \rightarrow G/H$ a projeção natural. Se $y \in G/H$, então existe $x \in G$ tal que $\text{ord}(x) = \text{ord}(y)$ e $\pi(x) = y$.*

Demonstração: Se $\text{ord}(y) = \infty$, podemos escolher qualquer $x \in \pi^{-1}(\{y\})$. Se $\text{ord}(y) = n$, seja $z \in G$ tal que $\pi(z) = y$. Então $n.z \in H$. Como H é puro, existe $h \in H$ tal que $n.z = n.h$. Seja $x = z - h$. Segue que $\pi(x) = y$ e $\text{ord}(x) = n$. $\square$

Teorema B.2. *Sejam G um grupo abeliano, e H um subgrupo puro de G tal que G/H é soma direta de grupos cíclicos. Então H é somando direto de G .*

Demonstração: Sabemos que $G/H = \oplus_{i \in I} \langle y_i \rangle$. Pelo lema B.1 existe uma família $\{x_i : i \in I\}$ tal que $\text{ord}(x_i) = \text{ord}(y_i)$ e $\pi(x_i) = y_i, \forall i \in I$.

Seja $K = \langle \{x_i : i \in I\} \rangle$. Afirmamos que $G = H \oplus K$:

- 1) Se $t \in G$, temos que $\pi(t) = t* = \sum n_i \cdot y_i$. Portanto $t - \sum n_i \cdot x_i \in H$ e $t \in H + K$.
- 2) Seja $w \in H \cap K$. Por pertencer a K , $w = \sum n_i \cdot x_i$ e por pertencer a H , temos que $\sum n_i \cdot y_i = 0$, portanto $n_i y_i = 0 \forall i \in I$. Logo $w = 0$. $\square$

Lema B.3. *Sejam G um grupo abeliano e S um subgrupo puro de G . Se T é um subgrupo de G tal que $S \subseteq T$ e T/S é puro em G/S , então T é puro em G .*

Demonstração: Seja $t \in T$ tal que $t = n \cdot x$, onde $x \in G$. Seja $\pi : G \rightarrow G/S$ o homomorfismo natural. Se $\pi(t) = t*$ e $\pi(x) = x*$, então $t* = n \cdot x*$ e como T/S é puro em G/S temos que $t* = n \cdot y$ para algum $y \in T/S$.

Seja $t_1 \in T$ tal que $\pi(t_1) = y$ (t_1 existe pois $\pi|_T : T \rightarrow T/S$). Segue que $t = n \cdot t_1 + s$ para algum $s \in S$. Então $s = t - n \cdot t_1 = n \cdot x - n \cdot t_1$ e como S é puro $s = n \cdot s_1$ para algum $s_1 \in S$. Logo $t = n(t_1 + s_1)$. $\square$

Lema B.4. *Seja G um grupo abeliano primário satisfazendo $r^k G = 0$. Seja $x \in G$ tal que $\text{ord}(x) = r^k$. Então $\langle x \rangle$ é puro em G .*

Demonstração: Observamos que por ser G um r -grupo, $\langle x \rangle$ é divisível por todo inteiro primo com r , portanto só precisamos nos preocupar com as potências de r .

Suponhamos que $r^i \cdot x = r^j \cdot y$, onde $i < k$ e $y \in G$. Se $j \leq i$ não temos nada a fazer. Se $j > i$, temos que $r^k \cdot y = r^{k-j} (r^j \cdot y) = r^{k-j} (r^i \cdot x)$ e $k - j + i < k$ $\square$

Lema B.5. *Sejam G um grupo abeliano e S um subgrupo de G . Se $\pi : G \rightarrow G/S$ é o homomorfismo natural e $x \in G$ é tal que $\text{ord}(x) = \text{ord}(\pi(x))$, então a soma $\langle x \rangle + S$ é soma direta.*

Demonstração: Suponhamos que $n.x \in S$ para algum inteiro n . Então $n.\pi(x) = 0$ e portanto $\text{ord}(\pi(x)) \mid n$, da hipótese segue que $\text{ord}(x) \mid n$, logo $n.x = 0$. $\square$

Lema B.6. *Seja S um subgrupo puro de G com $nS = 0$. Então $(S + nG)/nG$ é puro em G/nG .*

Demonstração: Suponhamos que $x = m.y$, onde $x \in (S + nG)/nG$, $y \in G/nG$, e m é um inteiro. Temos que provar que x é múltiplo de m dentro de $(S + nG)/nG$. Seja $\pi : G \rightarrow G/nG$ o homomorfismo natural e sejam $s \in (S + nG)$ e $t \in G$ tais que $\pi(s) = x$ e $\pi(t) = y$. Observamos que podemos considerar $s \in S$.

Então temos que $s = mt + nz$, onde $z \in G$.

Seja d o máximo divisor comum de m e n . Então $m = d.m_1$ e $n = d.n_1$, com m_1 e n_1 primos entre si. Portanto existem inteiros a e b tais que $a.m_1 + b.n_1 = 1$. Substituindo em $s = mt + nz$ temos que s é múltiplo de d em G e como é subgrupo puro, $s = d.s_1$, com $s_1 \in S$. Logo

$$s = d.s_1 = d(a.m_1 + b.n_1)s_1 = m.a.s_1 + n.b.s_1 = m.a.s_1.$$

Segue que x é múltiplo de m em $(S + nG)/nG$. $\square$

Lema B.7. *Sejam S e T subgrupos de G com $S \cap T = 0$, e suponhamos que $(S + T)/T$ é somando direto de G/T . Então S é somando direto de G .*

Demonstração: Seja R/T o somando direto de G/T que complementa $(S + T)/T$. Temos que $R + (S + T) = G$ e $R \cap (S + T) = T$. Vamos ver que $G = S \oplus R$.

Como $T \subset R$, temos que $S + R = S + T + R = G$. Também $(R \cap S) \subset R \cap (S + T) = T$. Portanto $R \cap S \subset T \cap S = 0$. $\square$

Demonstração do Teorema 1.4: Como todo grupo de torção é soma direta de grupos primários podemos assumir que G é um r -grupo.

Dado um subconjunto A de G , dizemos que A é puro se $\langle A \rangle$ é um subgrupo puro de G .

Usando o Lema de Zorn obtemos um subconjunto $\{x_i : i \in I\}$ puro e independente maximal. Vamos provar que $\langle \{x_i : i \in I\} \rangle = G$, isto é que $G = \bigoplus_{i \in I} \langle x_i \rangle$.

Suponhamos por absurdo que $\langle \{x_i : i \in I\} \rangle \neq G$ e seja $S = \langle \{x_i : i \in I\} \rangle$. Então G/S é um grupo primário de ordem limitada. Seja $y \in G/S$ de ordem máxima. Pelo Lema B.1, seja $x \in G$ tal que $\text{ord}(x) = \text{ord}(y)$ e $\pi(x) = y$, onde $\pi: G \rightarrow G/S$ é o homomorfismo natural.

Seja $T = \langle x \rangle + S$. Pelo Lema B.4 temos que $T = \langle x \rangle \oplus S$. Observamos que $\pi(T/S) = \langle y \rangle$ que é puro em G/S . Pelo Lema B.3 T é puro em G , isto é $\{x_i : i \in I\} \cup \{x\}$ é um subconjunto independente puro de G , contradizendo a maximalidade de $\{x_i : i \in I\}$. $\square$

Demonstração do Teorema 1.5: Seja S subgrupo puro de ordem limitada do grupo G . Suponhamos que $nS = 0$. Pelo Lema B.6 temos que $(S + nG)/nG$ é puro em G/nG . Como G/nG é de ordem limitada, pelo Teorema 1.4 é soma direta de grupos cíclicos, e o mesmo acontece com todos os seus subgrupos. Pelo Teorema B.2 $(S + nG)/nG$ é somando direto de G/nG . Observamos que $S \cap nG = 0$. Então aplicando o Lema B.7 com $T = nG$, temos que S é somando direto de G . $\square$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para finalizar, gostaríamos de fazer alguns comentários que tem a ver com a continuação do nosso trabalho.

No capítulo 3, mostramos quais grupos abelianos de torção G , de cardinalidade $\mathfrak{c}$, admitem para cada inteiro positivo p uma topologia e grupo, com G^p enumeravelmente compacto e tal que existe $q > p$ com G^q não enumeravelmente compacto. Achamos que é possível trocar $q > p$ por $p + 1$ nesta demonstração, por estarmos trabalhando com grupos abelianos de torção limitada.

Comentamos na introdução que Dikranjan e Shakhmatov [9] classificaram, num modelo de forcing, os grupos abelianos de cardinalidade menor ou igual a $2^{\mathfrak{c}}$ que admitem uma topologia de grupo enumeravelmente compacta e sem sequências convergentes. Continuando nesta linha de trabalho, pretendemos classificar, num modelo de forcing, os grupos abelianos de cardinalidade menor ou igual a $2^{\mathfrak{c}}$ que admitem uma topologia de grupo enumeravelmente compacta e sem sequências convergentes e cujo cuadrado não é enumeravelmente compacto.

Referências Bibliográficas

- [1] Castro Pereira I., Tomita A.H., *A countably compact free Abelian group whose size has countable cofinality*, Aceito em Appl. Gen. Topology.
- [2] Comfort W.W., *Topological groups*, Handbook of set-theoretic topology (K. Kunen, J.E. Vaughan eds.), North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 1143–1263.
- [3] Comfort W.W. *Problems on topological groups and other homogeneous spaces*, Open Problems in Topology (J. van Mill and G.M. Reeds, eds.), North holland, 1990, pp. 311–347.
- [4] Comfort W.W., Negrepontis S. *The theory of Ultrafilters*, Springer-Verlag, 1974.
- [5] Comfort W.W., Robertson L.C. *Cardinality constraints for pseudocompact and for totally dense subgroups of compact Abelian groups*, Pacific J. Math. **119** (1985) pp. 265–285.
- [6] Comfort W.W., Ross K.A. *Pseudocompactness and uniform continuity in topological groups*, Pacific J. Math. **16** (1966) pp. 483–496.
- [7] Comfort W.W., van Mill J. *Concerning connected, pseudocompact Abelian groups*, Topology Appl. **33** (1989), pp. 21–45.

- [8] Dikranjan D., Shakhmatov D. *Algebraic structure of the pseudocompact groups*, Memoirs Amer. Math. Soc. 133/633, April 1998, pp. viii+83.
- [9] Dikranjan D., Shakhmatov D., *Forcing hereditarily separable compact-like group topologies on Abelian groups*, Preprint (2003).
- [10] Dikranjan D., Tkachenko M., *Algebraic structure of small countably compact Abelian groups*, Forum Math. **15** (2003), pp. 811–837.
- [11] van Douwen E.K., *The product of two countably compact topological groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **262** (1980), pp. 417–427.
- [12] van Douwen E.K., *The weight of pseudocompact (homogeneous) space whose cardinality has countable cofinality*, Proc. Amer. Math. Soc. **80** (1980), pp. 678–682.
- [13] Engelking R., *General Topology*, 2nd edition. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
- [14] Fuchs L., *Infinite Abelian groups*, Vol. I. Academic Press, New York, 1970.
- [15] Garcia-Ferreira S., Tomita A.H., Watson S., *Countably compact groups from a selective ultrafilter*, accepted in Proc. Amer. Math. Soc.
- [16] Ginsburg J., Saks V., *Some applications of ultrafilters in topology*, Pacific J. Math. **57** (1976), pp. 199–205.
- [17] Hajnal A., Juhasz I., *A separable normal topological group need not be Lindeloff*, Gen. Topology Appl. **6** (1976), pp. 199–205.
- [18] Harrison D., *Infinite Abelian groups and homological methods*, Ann. Math.(2) **69** (1959), pp. 366–391.

- [19] Hart K., van Mill J., *A countably compact group H such that $H \times H$ is not countably compact*. Trans. Amer. Math. Soc. **323** (1991) pp. 811–821.
- [20] Hewitt E., Ross K.A., *Abstract Harmonic Analysis*. Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1970.
- [21] Hulanicki A., *Algebraic structure of compact Abelian groups*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys. **6** (1958), pp. 71–73.
- [22] Jech T., *Set Theory*. Academic Press, New York, 1978.
- [23] Kaplansky I., *Infinite Abelian groups*. Univ. of Mich. Press, Ann Arbor, 1954.
- [24] Koszmider P., Tomita A.H., Watson S., *Forcing countably compact group topologies on a larger free Abelian group*, Proceedings of the 15th. Summer Conference in General Topology and its Applications/1st Turkish International Conference on Topology and its Applications (Oxford OH/ Istambul 2000). Topology Proc **25** (2000), Summer pp. 563–574.
- [25] Kunen K., *Set Theory – an introduction to the independence proofs*. vol. 102 of Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1980.
- [26] Robinson D.J.F., *A Course in the theory of Groups*, Springer–Verlag, Berlin, 1982.
- [27] Tkachenko M.G., *Countably compact and pseudocompact topologies on free Abelian groups*, Izvestiya VUZ. Matematika, Vol **31** (1990), n.5, pp. 68–75.
- [28] Tomita A.H., *A group under $\text{MA}_{\text{countable}}$ whose square is countably compact but whose cube is not*, Topology Appl. **91** (1999), n.2, pp. 91–104.

- [29] Tomita A.H., *Countable compactness and finite powers of topological groups without convergent sequences*, aceito em Topology Appl.
- [30] Tomita A.H., Watson S., *Ultraproducts, p -limits and antichains on the Comfort group order*, aceito em Topology Appl.
- [31] Tomita A.H., *Two countably compact groups: one of size $\aleph_\omega$ and the other of weight $\aleph_\omega$ without non-trivial convergent sequences*, Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), n.8, pp. 2617–2622.
- [32] Tomita A.H., *A solution to Comfort's question on the countable compactness of powers of a topological group*, Preprint.
- [33] Tomita A.H., Junqueira L. *Topologia geral* Notas de aula do IME/USP, 1997.
- [34] Vaughan J.E., *Countably compact and sequentially compact spaces*, Handbook of set-theoretic topology (K. Kunen, J.E. Vaughan eds.), North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 1143–1263.