**Polinômios Cúbicos Fibonacci,
Decaimento de Geometria
e Hiperbolicidade Induzida**

Yong Su Han

Tese Apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
Obtenção do Grau de Doutor
em
Matemática

Área de Concentração: **Sistemas Dinâmicos**
Orientador: **Prof. Dr. Edson Vargas**

Durante a elaboração deste trabalho
o autor recebeu apoio financeiro do CNPq

-São Paulo, Julho de 2004-

Polinômios Cúbicos Fibonacci, Decaimento de Geometria e Hiperbolicidade Induzida

Este exemplar corresponde à redação final
da dissertação devidamente corrigida e
defendida por Yong Su Han
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 6 de Julho de 2004.

Banca Examinadora:

-Prof. Dr. Edson Vargas (Orientador)	- IME-USP
-Prof. Dr. Albert Meads Fisher	- IME-USP
-Prof. Dr. Carlos Teobaldo Guterrez Vidalon	- ICMC-USP
-Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia	- UFG
-Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita	- UNESP

aos meus filhos, presentes de Deus.

Resumo

Neste trabalho consideramos os polinômios cúbicos eventualmente Fibonacci cujos pontos críticos são quadráticos e recorrentes e possuem o mesmo ω -limite. Provamos que esses polinômios exibem decaimento exponencial de geometria. A seguir utilizamos este resultado para mostrar que todo polinômio cúbico que não apresenta retornos centrais e exibe decaimento exponencial de geometria induz uma aplicação de Markov hiperbólica.

Abstract

On this work we study decay of geometry for cubic eventually Fibonacci maps with critical points of order 2, recorrents and same ω -limite. We also prove induced hyperbolicity for all bimodal maps with decay of geometry, but without central returns. This result is related to the absence of strange attractors.

Agradecimentos

Sou muito grato a Deus que tem abençoado a minha vida acadêmica e espiritual para que eu pudesse estar neste momento da realização desta tese. Que só a Ele sejam dados a honra e o louvor através deste trabalho.

Agradeço de coração ao Prof. Edson Vargas pela sua sugestão do assunto deste trabalho e inestimável orientação nos momentos importantes, a ele sou profundamente grato.

Aos colegas Márcio e Liane, agradeço pelo companheirismo no trabalho e pelos momentos de amizade.

Aos colegas da igreja UBF, sou profundamente grato pela oração e palavras de carinho e coragem em todos os momentos.

Sumário

1	Introdução	1
2	Conceitos Básicos e Resultados Principais	5
2.1	Partição de Yoccoz real	5
2.2	Polinômios Cúbicos Fibonacci	7
2.3	Resultados Principais	10
3	Ferramentas Básicas	17
3.1	Princípios de Koebe e Outros Fatos	17
3.2	Ferramentas de análise complexa	21
3.2.1	Anéis e módulos de anéis	21
3.2.2	Partição de Yoccoz complexa	24
4	Polinômios cúbicos Fibonacci e eventualmente Fibonacci	27
4.1	Polinômios cúbicos Fibonacci	27
4.2	Polinômios cúbicos eventualmente Fibonacci	33
4.2.1	Tempos de retorno dos pontos críticos	35
4.3	As seqüências de kneading dos polinômios cúbicos Fibonacci	39

5	Decaimento de Geometria	42
5.1	Crescimento dos anéis principais	42
5.2	Anéis principais no caso eventualmente Fibonacci	43
5.2.1	Polinômios eventualmente Fibonacci do tipo F_1F_2	44
5.2.2	Polinômios cúbicos eventualmente Fibonacci do tipo $F_3F_4F_5$	52
6	Hiperbolicidade Induzida	63
6.1	Existência da Aplicação Induzida	63
6.2	Hiperbolicidade no Caso Básico	73
6.3	Hiperbolicidade no Caso Não-Básico	76

Capítulo 1

Introdução

Dado I um intervalo compacto, uma aplicação contínua $f : I \rightarrow I$ é dita multimodal se I possui uma partição em um número finito de subintervalos restrita aos quais f é estritamente monótona. Os pontos de fronteira destes subintervalos são extremos locais. Quando f possui um único extremo local no interior de I chamamo-la *unimodal* e quando possui dois extremos locais no interior de I chamamo-la *bimodal*.

A classe das aplicações multimodais inclui todos os *polinômios reais*, isto é: todos os polinômios de uma variável real com coeficientes reais como por exemplo $Q_a(x) = -1 + a(1 - x^{2l})$, $P_{ab}(x) = ax^3 + bx^2 + (1 - a - b)x$ ou $Q_{ab}(x) = 1 - ax^3 - bx^2 - (1 - a - b)x$.

Estamos interessados em aspectos métricos dos sistemas dinâmicos gerados pelas iterações de polinômios bimodais cúbicos $f = P_{ab}$ ou $f = Q_{ab}$, onde a e b são parâmetros reais. A presença de pontos críticos enriquece tais sistemas, pois estes possuem uma região muito contrativa próxima aos pontos críticos e regiões relativamente expansivas longe dos mesmos. Sendo assim, a estrutura das órbitas dos pontos críticos têm grande influência para a determinação de qual destes comportamentos predomina quando o

sistema evolui. Como é usual em dinâmica utilizamos transformações de primeiro retorno como uma das ferramentas. Dado um tal polinômio f consideramos o conjunto P_1 constituído de todos os pontos fixos de f . Definimos os intervalos I_0 e J_0 como sendo as componentes conexas de $[0, 1] \setminus f^{-1}(P_1)$ que contêm, respectivamente, c e d . Definimos também a transformação de primeiro retorno ϕ_1 da união $I_0 \cup J_0$. Assumindo que c e d são recorrentes existem intervalos $I_1 \ni c$ e $J_1 \ni d$ os quais são componentes conexas do domínio de ϕ_1 . Consideramos então a transformação de primeiro retorno ϕ_2 de $I_1 \cup J_1$. Novamente existem intervalos $I_2 \ni c$ e $J_2 \ni d$ os quais são componentes conexas do domínio de ϕ_2 . Procedendo indutivamente construímos duas seqüências de intervalos $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset \{c\}$ e $J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \dots \supset \{d\}$, onde $I_n \cup J_n$ é componentes do domínio de primeiro retorno a $I_{n-1} \cup J_{n-1}$ com as suas respectivas transformações de primeiro retorno $\phi_n : I_n \cup J_n \rightarrow I_{n-1} \cup J_{n-1}$. Chamaremos de *ramo* à restrição de ϕ_n a cada componente conexa do seu domínio. E se o domínio de um ramo contém pontos críticos, chamamo-lo *ramo crítico*. Então, os ramos de ϕ_n definidos em I_n e J_n são ramos críticos e unimodais cujas imagens estão contidas em I_{n-1} ou J_{n-1} . Todos os outros ramos de ϕ_n não possuem pontos críticos e aplicam seus domínios difeomorficamente sobre I_{n-1} ou J_{n-1} .

Definimos as seqüências de *razões de escala* em c e em d pondo

$$\mu_n(c) := \frac{|I_n|}{|I_{n-1}|} \quad \text{e} \quad \mu_n(d) := \frac{|J_n|}{|J_{n-1}|}.$$

O comportamento destas seqüências é importante para determinarmos a estrutura dos conjuntos ω -limite $\omega(c)$ e $\omega(d)$. Quando ambas convergem para zero dizemos que f exibe *decaimento de geometria* e quando isto não ocorre dizemos que f possui *geometria limitada*. É natural esperar que decaimento de geometria esteja relacionado com algum

tipo de hiperbolicidade e que isto dependa do número de iteradas que é necessário para que os pontos críticos retornem próximos deles mesmos. Mais precisamente temos que se $x = c$ ou $x = d$ então $\phi_{n+1}(x) = \phi_n^{k_n}(x)$ para algum $k_n \geq 1$. Se $k_n = 1$ então $\phi_n(x) \in I_n \cup J_n$ e dizemos que este retorno é um *retorno central*. Os retornos centrais são os retornos mais rápidos possíveis e estão relacionados a uma forte recorrência do ponto x . Em uma sequência de retornos centrais consecutivos $\phi_{n_1}(x), \phi_{n_2}(x), \dots, \phi_{n_j}(x)$ ocorre que $k_{n_1} = k_{n_2} = \dots k_{n_j} = 1$. Nestas sequências $\mu_{n_k}(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n_j$) não decresce e até mesmo pode se aproximar de 1. Estas sequências são chamadas de *cascatas de retornos centrais*.

No caso unimodal quadrático se excluirmos os retornos centrais, a saber, considerando todos os n_j tais que $\phi_{n_j}(c)$, onde c é o único ponto crítico, é não central ocorre que $\mu_{n_j}(c)$ tende a zero exponencialmente quando $j \rightarrow \infty$, veja [GS1] e [L]. A propriedade do ponto crítico ser quadrático desempenha um importante papel para este fato que pode não ocorrer para determinados tipos de recorrências se o ponto crítico é de ordem mais alta.

No caso bimodal cúbico introduzimos os polinômios de Fibonacci que dentre os que não possuem retornos centrais são aqueles cujos pontos críticos retornam mais rapidamente caracterizando a recorrência mais forte possível, e portanto a situação mais delicada, dentre os que não possuem retornos centrais. Neste trabalho descrevemos vários aspectos topológicos da dinâmica dos polinômios cúbicos Fibonacci. Provamos que os polinômios cúbicos que apresentam a combinatória de Fibonacci ou mais geralmente, a combinatória eventualmente Fibonacci, exibem decaimento exponencial de geometria. A partir desta propriedade obtemos uma aplicação de Markov induzida por f que é hiperbólica confirmando assim que decaimento de geometria está relacionado à existência

de alguma hiperbolicidade. A não-existência de *atratores selvagens* (veja a definição mais adiante) segue-se. Outras propriedades importantes também decorrem do decaimento de geometria.

No Capítulo 2 apresentamos alguns conceitos básicos como partição de Yoccoz real, transformações de primeiro retorno e polinômios cúbicos Fibonacci e eventualmente Fibonacci que são o tema principal deste trabalho. No mesmo capítulo enunciamos os resultados principais que provaremos. No Capítulo 3 apresentamos ferramentas importantes como os Princípios de Koebe que nos permitem fazer estimativas de distorção para a parte real da dinâmica e as noções de anéis e módulos de anéis úteis para a parte da dinâmica no plano complexo. No Capítulo 4 estudamos a existência de polinômios cúbicos Fibonacci e eventualmente Fibonacci, suas aplicações de primeiro retorno e a questão do menor tempo de retorno. No Capítulo 5 provamos o decaimento exponencial de geometria para os polinômios cúbicos eventualmente Fibonacci. No Capítulo 6 mostramos que polinômios cúbicos bimodais sem retornos centrais e com decaimento de geometria (dentre eles os eventualmente Fibonacci) induzem hiperbolicidade.

Capítulo 2

Conceitos Básicos e Resultados Principais

2.1 Partição de Yoccoz real

Dado um polinômio bimodal cúbico $f = P_{ab}$ ou $f = Q_{ab}$, onde a e b são parâmetros reais consideraremos aspectos da sua dinâmica no intervalo $[0, 1]$ e também no plano complexo $\mathbb{C}$. As muitas ferramentas de análise de aplicações conformes serão cruciais para abordarmos questões importantes da dinâmica em $[0, 1]$. Então introduziremos o conceito de partição de Yoccoz real a qual está relacionada com a partição de Yoccoz complexa que introduziremos mais tarde.

Seja P_{-1} o conjunto constituído de todos os pontos fixos de f . Supondo que P_n está determinado definimos $P_{n+1} := f^{-1}(P_n)$. Deste modo obtemos uma sequência crescente $P_{-1} \subset P_0 \subset P_1 \subset \dots$. Cada P_n determina uma partição finita do intervalo $[0, 1]$, chamada *partição de Yoccoz real de nível n* , cujos elementos são as componentes conexas

de $[0, 1] \setminus P_n$ e são chamados de *peças de Yoccoz real de nível n* . Se $x \notin \bigcup_{i=-1}^{\infty} P_i$ existe uma única peça de Yoccoz real de nível n que contém x a qual denotamos por $P_n(x)$. Pode-se verificar que $f(P_n(x)) \subseteq P_{n-1}(f(x))$ e $f(\partial P_n(x)) \subset \partial P_{n-1}(f(x))$. As peças de Yoccoz que contêm os pontos críticos, digamos $P_n(c)$ e $P_n(d)$, são de especial interesse. Em geral, para $x = c, d$ ocorre que $f|_{P_n(x)}$ é uma aplicação unimodal de $P_n(x)$ em um subconjunto próprio de $P_{n-1}(f(x))$. Podemos ter portanto que $f(P_n(x)) \cap P_{n-1}(f(x)) \neq \emptyset$ sem que $f(P_n(x))$ contenha $P_{n-1}(f(x))$. Sendo assim as partições de Yoccoz reais não são em geral partições de Markov. No caso em que $P_n(x)$ não contém ponto crítico temos que $f|_{P_n(x)}$ é um difeomorfismo de $P_n(x)$ sobre $P_{n-1}(f(x))$.

Supondo que as órbitas positivas dos pontos críticos c, d são infinitas existem $P_0(c) \supset P_1(c) \supset P_2(c) \supset \dots$ e $P_0(d) \supset P_1(d) \supset P_2(d) \supset \dots$. Quando $\bigcap_{i=0}^{\infty} P_i(c)$ é um intervalo não-degenerado dizemos que f é *renormalizável em c* . Podemos definir de modo análogo o caso em que f é renormalizável em d . Nós estaremos especialmente interessados no caso que chamamos de *não-renormalizável*, ou seja, o caso em que f não é renormalizável em c e d . No caso em que c e d são recorrentes temos interesse especial nas subsequências $P_0(c) \supset P_{m_1}(c) \supset P_{m_2}(c) \supset \dots$ e $P_0(d) \supset P_{n_1}(d) \supset P_{n_2}(d) \supset \dots$ tais que $m_{k+1} - m_k$ e $n_{k+1} - n_k$ são, respectivamente, os tempos de primeiro retorno de c e d a $P_{m_k}(c) \cup P_{n_k}(d)$. Aqui consideramos $m_0 = n_0 = 0$ e $k \geq 0$. Dito de outra forma temos que $P_{m_{k+1}}(c) \cup P_{n_{k+1}}(d)$ é parte do domínio da aplicação de primeiro retorno a $P_{m_k}(c) \cup P_{n_k}(d)$ e $f^{m_{k+1}-m_k}(\partial P_{m_{k+1}}(c)) \cup f^{n_{k+1}-n_k}(\partial P_{n_{k+1}}(d)) \subset \partial(P_{m_k}(c) \cup P_{n_k}(d))$. Portanto, se I_k e J_k são as sequências de intervalos definidas na introdução temos que $I_k = P_{m_k}(c)$ e $J_k = P_{n_k}(d)$. Também temos que $\phi_k(c) = f^{m_{k+1}-m_k}(c)$ e $\phi_k(d) = f^{n_{k+1}-n_k}(d)$. Em geral as sequências de tempos $m_{k+1} - m_k$ e $n_{k+1} - n_k$ são completamente independentes, mas no caso em que estaremos mais interessados, o caso em que elas são as menores possíveis dentro de

uma certa classe de polinômios, elas serão simultaneamente a sequência de Fibonacci $2, 3, 5, 8, 13, \dots$. Observamos ainda que cada componente do domínio de ϕ_k é uma peça de Yoccoz real.

2.2 Polinômios Cúbicos Fibonacci

Consideramos polinômios cúbicos $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, definidos por $f(x) = P_{ab}(x) = ax^3 + bx^2 + (1 - a - b)x$ ou $f(x) = Q_{ab}(x) = 1 - ax^3 - bx^2 - (1 - a - b)x$, onde os parâmetros $a, b \in \mathbb{R}$ são escolhidos de forma que o polinômio f possui dois extremos locais em $(0, 1)$ os quais denotamos por c e d . Então, o intervalo $[0, 1]$ possui uma partição com três intervalos $[0, c]$, $[c, d]$ e $[d, 1]$, restrito a cada qual f é estritamente monótona. Estes pontos c e d são *pontos críticos* de f .

Assumimos que f é não-renormalizável e que c e d são recorrentes, não-periódicos e tais que $\omega(c) = \omega(d)$. Sejam então $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset \{c\}$ e $J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \dots \supset \{d\}$ tais que I_n e J_n são componentes do domínio da aplicação de primeiro retorno ϕ_n a $I_{n-1} \cup J_{n-1}$. Para efeitos de uniformidade da notação convencionaremos que $\phi_0 = f$. As restrições de $\phi_n|_{I_n}$ e $\phi_n|_{J_n}$ são chamados *ramos críticos*. Estes ramos são aplicações unimodais cujas imagens estão contidas em I_{n-1} ou J_{n-1} . Todos os outros ramos de ϕ_n não possuem pontos críticos e aplicam seus domínios difeomorficamente sobre I_{n-1} ou J_{n-1} . Se $\phi_n(c) \in I_n \cup J_n$ ou $\phi_n(d) \in I_n \cup J_n$ dizemos que f possui um *retorno central*.

Se f não possui retornos centrais então existem duas componentes conexas (possivelmente idênticas) do domínio de ϕ_n denotadas por C_n e D_n as quais satisfazem $\phi_n(c) \in C_n$, $\phi_n(d) \in D_n$ e os ramos $\phi_n|_{C_n}$, $\phi_n|_{D_n}$ são difeomorfismos. Chamamos C_n e D_n de *domínios pós-críticos*.

Definição 2.2.1 *Se f não possui retornos centrais e existe um inteiro positivo $n_0 \geq 1$ tal que para todo $n \geq n_0$ $\phi_n|_{C_n} = \phi_{n-1}|_{C_n}$, $\phi_n|_{D_n} = \phi_{n-1}|_{D_n}$, $\phi_{n+1}(c) = \phi_n|_{C_n} \circ \phi_n|_{I_n}(c)$ e $\phi_{n+1}(d) = \phi_n|_{D_n} \circ \phi_n|_{J_n}(d)$ dizemos que f é eventualmente Fibonacci. Quando $n_0 = 1$ dizemos que f é Fibonacci.*

Observe que um polinômio cúbico Fibonacci não possui retornos centrais mas os seus domínios pós-críticos C_n e D_n são tais que $C_n \cup D_n \subset I_{n-1} \cup J_{n-1}$ e para $x = c, d$ verifica-se que $\phi_{n+1}(x) = \phi_{n-1} \circ \phi_n(x)$. Isto quer dizer que os tempos de retorno de polinômios cúbicos Fibonacci, como provaremos mais adiante, são os menores possíveis se considerarmos apenas os polinômios sem retornos centrais. Isto garante uma forte recorrência e então acreditamos que se os polinômios Fibonacci exibem decaimento de geometria, o que de fato é um dos nossos principais resultados, todos os polinômios com retornos não-centrais também devem ter esta mesma propriedade. O conceito de polinômio cúbico eventualmente Fibonacci é bastante natural uma vez que propriedades como o decaimento de geometria e outras não dependem do comportamento de um número finito de aplicações ϕ_n .

Os polinômios do tipo eventualmente Fibonacci exibem alguns tipos combinatórios específicos os quais procuraremos identificar. Estes tipos podem ser identificados em termos das posições dos domínios pós-críticos C_n , D_n e de suas imagens pelo primeiro retorno ϕ_n a $I_{n-1} \cup J_{n-1}$. Consideramos as seguintes possibilidades (veja as Figuras 2.1 e 2.2):

- Tipo F_1 : $C_n \cup D_n \subset I_{n-1}$ e $\phi_n(C_n \cup D_n) = J_{n-1}$.
- Tipo F_2 : $C_n \cup D_n \subset J_{n-1}$ e $\phi_n(C_n \cup D_n) = I_{n-1}$.
- Tipo F_3 : $C_n \subset I_{n-1}$, $D_n \subset J_{n-1}$ e $\phi_n(C_n) = J_{n-1}$, $\phi_n(D_n) = I_{n-1}$.

- Tipo F_4 : $C_n \subset J_{n-1}$, $D_n \subset I_{n-1}$ e $\phi_n(C_n) = J_{n-1}$, $\phi_n(D_n) = I_{n-1}$.
- Tipo F_5 : $C_n \subset J_{n-1}$, $D_n \subset I_{n-1}$ e $\phi_n(C_n) = I_{n-1}$, $\phi_n(D_n) = J_{n-1}$.

Figura 2.1: Fibonacci Tipo F_1 e F_2

Figura 2.2: Fibonacci Tipo F_3, F_4 e F_5

2.3 Resultados Principais

Inicialmente provaremos que de fato existem polinômios cúbicos Fibonacci, este é o conteúdo do teorema seguinte:

Teorema 2.3.1 *As famílias P_{ab} e Q_{ab} possuem polinômios cúbicos Fibonacci cujos pontos críticos são recorrentes e possuem o mesmo ω -limite.*

A partir do Teorema 2.3.1 podemos concluir que existem muitos polinômios cúbicos eventualmente Fibonacci cujos pontos críticos são recorrentes e possuem o mesmo ω -limite. No entanto exibiremos mais adiante as *seqüências de kneading* (itinerários dos valores críticos $f(c)$ e $f(d)$) dos polinômios cúbicos Fibonacci e disto decorrerá que todos eles estão em uma única classe de conjugação topológica.

As seqüências kneading e a classe de conjugação topológica de um polinômio podem ser determinadas a partir de uma seqüência especial de aplicações de primeiro retorno associada ao polinômio. O teorema a seguir descreve propriedades das aplicações desta seqüência.

Teorema 2.3.2 *Seja $f = P_{ab}$ ou $f = Q_{ab}$ um polinômio cúbico eventualmente Fibonacci cujos pontos críticos são recorrentes e possuem o mesmo ω -limite. Então existe n tal que a seqüência $\phi_n, \phi_{n+1}, \phi_{n+2}, \dots$ exibe a seqüência de tipos $F_1 F_2 F_1 F_2 \dots$ ou $F_3 F_4 F_5 F_3 F_4 F_5 \dots$.*

Dado um polinômio cúbico f com pontos críticos recorrentes consideramos as seqüências $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$ e $J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \dots$ de intervalos que definimos anteriormente. Para cada $x \in [0, 1]$ e $n \geq 1$ consideramos o menor $\tau_n(x) \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ tal que $f^{\tau_n(x)}(x) \in I_{n-1} \cup J_{n-1}$. Este $\tau_n(x)$ é chamado *tempo de primeira entrada* em $I_{n-1} \cup J_{n-1}$.

Sejam então a sequência de tempos $\tau(x) = (\tau_1(x), \tau_2(x), \dots)$. Quando for necessário usaremos a notação $\tau_n(x, f)$ e $\tau(x, f)$ para indicar a dependência em f também. Estamos especialmente interessados nas sequências de tempos dos pontos críticos c e d . Observe que $\phi_n(c) = f^{\tau_n(c)}(c)$ e $\phi_n(d) = f^{\tau_n(d)}(d)$. Em particular denotaremos por $s_n = \tau_n(c)$ e $r_n = \tau_n(d)$. Como $\phi_0 := f$, definimos $s_0 = r_0 = 1$. No Teorema 2.3.4 provaremos que as sequências de tempos s_n e r_n associadas a um polinômio cúbico Fibonacci são ambas idênticas à sequência de Fibonacci $\alpha = (2, 3, 5, \dots, \alpha_n, \dots)$, onde $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$ e para $n \geq 2$ tem-se que $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \alpha_{n-1}$.

Consideramos o espaço das sequências infinitas

$$\Sigma^{\mathbb{N}} = \{t = (t_1, t_2, \dots) : t_i \in \mathbb{N} \text{ para todo } i \geq 1\}$$

munido da ordem lexicográfica que denotamos por $\prec$. Então se $s, t \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ são tais que $s \prec t$ dizemos s é menor do que t . Em $\Sigma^{\mathbb{N}}$ existem algumas sequências, as quais chamamos de *sequências admissíveis*, que podem ser realizadas como sequência de tempos de um polinômio cúbico. Gostaríamos de saber se existe um polinômio cúbico f cujas sequências de tempos $\tau(c)$ e $\tau(d)$ sejam, simultaneamente, a sequência menor possível dentre as admissíveis.

Teorema 2.3.3 *Se f é um polinômio cúbico do tipo eventualmente Fibonacci cujos pontos críticos são recorrentes e possuem o mesmo ω -limite. Então $s_{n+1} = s_n + s_{n-1} + s$ e $r_{n+1} = r_n + r_{n-1} + r$ com $|s|, |r| \leq |s_1 - r_1| + |s_0 - r_0|$. Em particular, se $s_0 = r_0 = 1$ e $s_1 = r_1 = 2$ então s_n e r_n são iguais a sequência de Fibonacci.*

O próximo teorema nos garante que dentre as sequências realizadas por polinômios que não possuem retornos centrais a sequência de Fibonacci é a menor possível e é

realizada pelos polinômios Fibonacci justificando assim esta nomenclatura.

Teorema 2.3.4 1. *Se $f = P_{ab}$ ou $f = Q_{ab}$ é um polinômio cúbico Fibonacci cujos pontos críticos são recorrentes e possuem o mesmo ω -limite então verifica-se que ambas as sequências $\tau(c, f)$ e $\tau(d, f)$ coincidem com a sequência de Fibonacci.*

2. *Se $g = P_{ab}$ ou $g = Q_{ab}$ é um polinômio cúbico tal que $\tau(c, g)$ ou $\tau(d, g)$ é menor do que a sequência de Fibonacci então g possui retornos centrais.*

Como vimos no Teorema 2.3.4, dentre os polinômios cúbicos que não apresentam retornos centrais, os polinômios Fibonacci são aqueles cujos pontos críticos possuem os menores tempos de retorno determinando assim uma forte recorrência dos mesmos. Isto mostra que os polinômios Fibonacci formam uma classe de especial importância na qual o decaimento de geometria é uma questão delicada. Esperamos que a partir do decaimento de geometria que obtivemos no teorema a seguir para os polinômios Fibonacci (e mais geralmente para os polinômios eventualmente Fibonacci) poderemos obter esta mesma propriedade para todos os polinômios que não apresentam retornos centrais ou mesmo para os que exibam cascatas limitadas de retornos centrais.

Teorema 2.3.5 *Se $f = P_{ab}$ ou $f = Q_{ab}$ é um polinômio cúbico eventualmente Fibonacci cujos pontos críticos são recorrentes e possuem o mesmo ω -limite então f exibe decaimento exponencial de geometria.*

A presença de pontos críticos para um polinômio f contribui para a complexidade da sua dinâmica. No intuito de obter algumas informações podemos tentar eliminar estes pontos críticos definindo uma outra aplicação que em certos intervalos coincide

com iteradas de f . Isto nos leva ao conceito de *aplicação de Markov topológica induzida por f* que introduzimos abaixo.

Definição 2.3.1 *Seja $P = \{N_j\}_{j=1}^{\kappa}$ ($\kappa \leq \infty$) uma coleção de intervalos $N_j \subset \mathbb{R}$ não-degenerados e cujos interiores são dois a dois disjuntos. Uma aplicação $F : \cup_{j=1}^{\kappa} N_j \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de aplicação de Markov se cada ramo $F|_{N_j}$ é um homeomorfismo sobre a sua imagem a qual contém todos os intervalos N_i tais que o interior de $N_i \cap F(N_j)$ é não-vazio. Dizemos que F é de classe C^r ($r \geq 0$) se cada ramo $F|_{N_j}$ possui uma extensão para um difeomorfismo de classe C^r definido em um intervalo aberto que contém o fecho de N_j . A coleção de intervalos $F(\mathcal{P}) = \{F(N_j)\}_{j=1}^{\kappa}$ é chamada de partição imagem. Se cada ramo $F|_{N_j}$ coincide com um iterado $f|_{N_j}^{n_j}$, para algum n_j , dizemos que F é uma aplicação de Markov induzida por f .*

Uma aplicação de Markov induzida por f com propriedades apenas topológicas não é suficiente para garantir boas propriedades métricas e portanto introduzimos mais um conceito.

Definição 2.3.2 *Uma aplicação de Markov $F : \cup_{j=1}^{\kappa} N_j \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r ($r \geq 1$) é dita hiperbólica em $[0, 1]$ se:*

1. *O domínio de F é uma união de intervalos abertos $\cup_{j=1}^{\kappa} N_j$ com medida de Lebesgue total em $[0, 1]$.*
2. *A partição imagem $F(\mathcal{P}) = \{F(N_j)\}_{j=1}^{\kappa}$ é uma coleção finita de intervalos limitados.*
3. *Existe $a > 1$ tal que $|DF(x)| \geq a$, para todo $x \in \cup_{j=1}^{\kappa} N_j$.*

4. Existe $K < \infty$ tal que $\frac{DF(x)}{DF(y)} \leq K$, para todo $x, y \in N_j$.

Dizemos que uma aplicação multimodal $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ de classe C^1 *induz expansão* ou *induz hiperbolicidade* se a mesma induz uma aplicação de Markov hiperbólica em $[0, 1]$. Examinamos então a hiperbolicidade induzida nos polinômios cúbicos que não possuem retornos centrais e em particular no caso dos polinômios eventualmente Fibonacci. No caso eventualmente Fibonacci será necessário a propriedade do decaimento exponencial de geometria, mas no caso *básico*, veja a definição mais adiante, mostraremos a hiperbolicidade induzida sem usar essa propriedade.

Teorema 2.3.6 *Todo polinômio cúbico real da família P_{ab} ou Q_{ab} que não possui retornos centrais e exibe decaimento exponencial de geometria induz hiperbolicidade.*

Um aspecto importante para a compreensão de um sistema dinâmico é a descrição dos seus atratores os quais podem ser topológicos ou métricos. Dado um conjunto compacto $\mathcal{A}$ positivamente invariante por f (isto é $f(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$) definimos a sua *bacia de atração* por

$$B(\mathcal{A}) = \{x \in [0, 1] \text{ tal que } \omega(x) \subset \mathcal{A}\}.$$

O conjunto $\mathcal{A}$ é chamado de *atrator topológico* se

- $B(\mathcal{A})$ contém um conjunto de segunda categoria de Baire;
- Se existe um conjunto positivamente invariante $\mathcal{A}'$ estritamente contido em $\mathcal{A}$, então $\overline{B(\mathcal{A})} \setminus \overline{B(\mathcal{A}')}$ é um conjunto de segunda categoria de Baire.

Sabemos que se f é não-renormalizável e não possui atrator periódico então o seu atrator topológico é um intervalo invariante no qual f é transitiva, veja [L1] e [MS], página 236.

O conjunto $\mathcal{A}$ é chamado de *atrator métrico* se

- A bacia de atração $B(\mathcal{A})$ tem medida de Lebesgue positiva;
- Se $\mathcal{A}'$ é um conjunto positivamente invariante e estritamente contido em $\mathcal{A}$, então $B(\mathcal{A}) \setminus B(\mathcal{A}')$ tem medida positiva.

Em [L1] e [SV2]) encontramos uma descrição dos atratores métricos (que existem por [M]) de aplicações multimodais de classe C^2 . Segundo esta descrição um polinômio cúbico eventualmente Fibonacci possui um único atrator métrico que poderia ser um ciclo de intervalos transitivos ou um conjunto de Cantor minimal contendo os pontos críticos c e d . Uma vez que o atrator topológico de tais polinômios é deste primeiro tipo chamamos este último tipo, caso seja o atrator métrico, de *atrator selvagem*.

Em geral, se $\mathcal{A}$ é um atrator métrico que não é um atrator topológico então será chamado de *atrator selvagem*. A questão da existência ou não de atratores selvagens foi colocada por Milnor [M] e tem atraído a atenção de muitos pesquisadores. No caso de polinômios quadráticos, o que possui a combinatória de Fibonacci foi considerado o principal candidato a exibir um atrator selvagem, veja [HK] (veja também [LM]).

Como foi provado em [LM] isto de fato não ocorre. No entanto o conjunto ω -limite $\omega(c)$ para um polinômio unimodal real com ponto crítico suficientemente degenerado (a saber $x \mapsto x^{2l} + a$ com l suficientemente grande) exibindo a combinatória de Fibonacci é um atrator selvagem, veja [BKNV].

O Teorema 2.3.6 garante a existência de uma aplicação de Markov hiperbólica F induzida por f e que pelo teorema do folclore possui uma p.i.a.c. ergódica que denotamos por μ . Isto é suficiente para garantir que para x q.t.p. (em relação à medida de Lebesgue) a órbita positiva $orb_f^+(x)$ é densa em um intervalo. Com isto podemos concluir que um polinômio cúbico Fibonacci não possuem atratores selvagens. Na verdade qualquer polinômio cúbico com retornos não-centrais e decaimento de geometria não possuem atratores selvagens.

Capítulo 3

Ferramentas Básicas

3.1 Princípios de Koebe e Outros Fatos

No estudo das propriedades métricas do sistema dinâmico gerado pelas iterações de uma função multimodal g é indispensável que se tenham estimativas da distorção ou da não-linearidade das iteradas g^n em certos intervalos. Nesta seção introduzimos brevemente este conceito e importantes ferramentas que nos permitem ter estas estimativas.

Seja g é uma aplicação de classe C^3 . Definimos a sua *derivada de Schwarz* por

$$Sg(x) = \frac{g'''(x)}{g'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{g''(x)}{g'(x)} \right)^2,$$

se $g'(x) \neq 0$. Se $g'(x) = 0$ definimos $Sg(x) = -\infty$. Dizemos que g tem *derivada de Schwarz negativa* e denotamos por $Sg < 0$ se $Sg(x) < 0$ para todo x .

Se g é um polinômio com coeficientes reais cujas raízes são todas reais e distintas então verifica-se que $Sg < 0$. A classe das aplicações multimodais de classe C^3 e com derivada de Schwarz negativa é um conjunto aberto na topologia C^3 . Sabe-se também

que a composição de duas aplicações com derivada de Schwarz negativa resulta em uma aplicação com derivada de Schwarz negativa. Este fato faz da classe das aplicações com derivada de Schwarz negativa uma classe de particular interesse em sistemas dinâmicos, visto que as iteradas das aplicações com derivada de Schwarz negativa também têm esta mesma propriedade.

Singer provou em [S] que se g possui derivada de Schwarz negativa então todo ponto periódico atrator de g atrai um ponto crítico ou um dos extremos do seu domínio. Os polinômios f que estamos considerando possuem derivada de Schwarz negativa e como estamos assumindo que os pontos críticos são recorrentes e não-periódicos e que os extremos do intervalo $[0, 1]$ são pontos fixos repulsores, temos que f não possui pontos periódicos atratores.

O conceito de distorção que introduziremos a seguir desempenha um papel central na análise de propriedades métricas.

Definição 3.1.1 *Seja g um difeomorfismo definido no intervalo J . Definimos a distorção de g em J , denotada por $\text{dist}(g, J)$, do seguinte modo:*

$$\text{dist}(g, J) := \sup \left\{ \frac{|Dg(x)|}{|Dg(y)|}, \quad x, y \in J \right\}.$$

A quantidade $\text{dist}(g, J)$ é uma medida de quanto a aplicação g distorce a razão de dois intervalos adjacentes J_1, J_2 contidos em J .

A derivada de Schwarz também se tornou uma ferramenta útil para o controle de distorção de iteradas de aplicações do intervalo. Os principais fatos nesta direção são os *princípios de Koebe* enunciados no lema abaixo cuja prova pode ser encontrada em [MS]. Para enunciá-los introduzimos alguns conceitos. Denotaremos por $|A|$ a medida de Lebesgue de um Boreleano A . Se $\sigma > 0$ e $U \subset V$ são intervalos tais que para

cada componente conexa L de $V \setminus U$ verifica-se que $|L| \geq \sigma|U|$ dizemos que V é uma σ -vizinhança de U ou que U está σ -centralizado em V .

Lema 3.1.1 *Sejam $J \subset T$ intervalos e g difeomorfismo definido em T . Se g tem derivada de Schwarz negativa e $g(T)$ é uma δ -vizinhança de $g(J)$, então verifica-se que:*

1. *Existe $\alpha > 0$ tal que T é uma α -vizinhança de J e α depende apenas de δ*

2. *$\text{dist}(g, J) \leq (\frac{1+\delta}{\delta})^2$.*

Prova: Veja [MS], páginas 267-302. ■

Devido ao Lema 3.1.1 os conceitos de extendibilidade a seguir surgem relacionados com o conceito de distorção.

Definição 3.1.2 *Uma aplicação real contínua h definida em um intervalo fechado U é dita unimodal se $h(\partial U)$ é um único ponto e existe um ponto x no interior de U tal que h é estritamente monótona em cada uma das componentes de $U \setminus \{x\}$.*

Definição 3.1.3 • *Sejam V um intervalo e $F = f^k$ um difeomorfismo de V sobre $F(V)$. Se existe um intervalo $\widehat{V} \supset V$ restrito ao qual f^k é um difeomorfismo e $f^k(\widehat{V})$ é uma α -vizinhança de $f^k(V)$ dizemos que $F|_V$ é α -extensível. Neste caso denotamos $f^k|_{\widehat{V}}$ por $\widehat{F}$.*

- *Suponhamos que f e f^{k+1} são aplicações unimodais definidas em um intervalo U e que f^k é um difeomorfismo definido em um intervalo V tal que $f(U) \subset V$. Então, se existem intervalos $\widehat{U} \supset U$ e $\widehat{V} \supset V$ tais que $f^{-1}(\partial \widehat{V}) \subset \widehat{U}$, $f_{\widehat{U}}$ é unimodal e*

$f_{|\widehat{V}}^k$ é um difeomorfismo cuja imagem é uma α -vizinhança de $f^k(V)$ dizemos que a aplicação unimodal $h = f_{|U}^{k+1}$ é α -extensível. Neste caso denotamos $f_{|\widehat{U}}^{k+1}$ por $\widehat{h}$.

3.2 Ferramentas de análise complexa

3.2.1 Anéis e módulos de anéis

Para provar decaimento exponencial de geometria, vamos utilizar extensões de ϕ_n para vizinhanças adequadas no plano complexo. Cada componente conexa do domínio de ϕ_n na reta real se estende a um disco topológico contido no plano complexo. Em particular os ramos críticos $\phi_n|_{I_n}$ e $\phi_n|_{J_n}$ se estendem, respectivamente, para ramos holomorfos definidos em discos topológicos $\mathcal{I}_n$ e $\mathcal{J}_n$ contidos no plano complexo. Então teremos duas sequências encaixantes $\mathcal{I}_0 \supset \mathcal{I}_1 \supset \dots$ e $\mathcal{J}_0 \supset \mathcal{J}_1 \supset \dots$ de discos topológicos. Para provarmos decaimento de geometria devemos estudar as sequências dos tamanhos dos anéis topológicos $\mathcal{I}_n \setminus \overline{\mathcal{I}_{n+1}}$ e $\mathcal{J}_n \setminus \overline{\mathcal{J}_{n+1}}$. O conceito de *módulo* de um anel topológico que introduziremos a seguir nos permitirá medir estes tamanhos.

Seja $A(d) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < d < |z| < 1\}$. Dizemos que um conjunto aberto $\mathbb{A} \subset \mathbb{C}$ é um *anel topológico* se ele for homeomorfo a $A(d)$, para algum $d > 0$. De acordo com a clássica teoria de classificação dos abertos do plano complexo sabemos que para todo anel topológico $\mathbb{A} \subset \mathbb{C}$ existe uma aplicação conforme com inversa conforme (chamada aplicação de Riemann) que o aplica sobre um anel $A(d)$, onde $d > 0$ é único. Então definimos o módulo de $\mathbb{A}$, que denotaremos por $\text{mod}(\mathbb{A})$, como sendo o número $-\log d$. O módulo de um anel é um invariante conforme. Sejam $\mathbb{A}$ e $\mathbb{A}'$ anéis e $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ um recobrimento holomorfo de grau k . Então $\text{mod}(\mathbb{A}') = k \cdot \text{mod}(\mathbb{A})$.

Sejam $\mathbb{A}$ e $\mathbb{A}'$ anéis disjuntos tais que um deles está contido na componente conexa limitada do complementar do outro. Então definimos uma operação comutativa $\oplus$ que a cada par de anéis $\mathbb{A}$ e $\mathbb{A}'$ com a propriedade acima associa o menor anel $\mathbb{A} \oplus \mathbb{A}'$ que

contem $\mathbb{A}$ e $\mathbb{A}'$. Esta operação possui uma propriedade importante na estimativa de módulos de anéis, chamada *super-aditividade*, isto é:

$$\text{mod}(\mathbb{A} \oplus \mathbb{A}') \geq \text{mod}(\mathbb{A}) + \text{mod}(\mathbb{A}').$$

Veja a prova desta propriedade em [LV].

Para provarmos decaimento de geometria é necessário provarmos o crescimento linear de $\text{mod}(\mathcal{I}_n \setminus \overline{\mathcal{I}_{n+1}})$ e $\text{mod}(\mathcal{J}_n \setminus \overline{\mathcal{J}_{n+1}})$. A nossa estratégia é a de provar inicialmente que estas sequências de módulos não decrescem. Então para provarmos o crescimento linear que necessitamos lançaremos mão do lema seguinte que é uma importante ferramenta.

Lema 3.2.1 *Considere um disco topológico D_1' , um anel $U_1 \subset D_1'$ e um disco topológico D_1 determinado por união de U_1 junto com a componente conexa limitada do seu complementar. Denote $W_1 = D_1' \setminus \overline{D_1}$. Considere uma aplicação holomorfa f na forma de $h(z^2)$ com h univalente, assuma que f é univalente em D_1 . Defina $D_2 := f(D_1)$, $W_2 := D_2' \setminus \overline{D_2}$ e $U_2 := f(U_1)$. Escolha números não negativos σ_1 e σ_2 tais que*

$$\sigma_2 \leq \text{mod } U_2 \text{ e } \sigma_1 \leq \text{mod } U_2 + \text{mod } W_2.$$

Então

1. $\text{mod}(U_1) + \text{mod}(W_1) \geq \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2);$

2. *Para todo $\delta > 0$ existe um $\epsilon > 0$ tal que, se $\sigma_1 - \sigma_2 \geq \delta$ e $\text{mod}(U_2) \geq \delta$ então*

$$\text{mod}(U_1 \oplus W_1) \geq \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \epsilon.$$

Prova: Veja a prova em [GS3].

■

3.2.2 Partição de Yoccoz complexa

Supomos como antes que $f = P_{ab}$ ou $f = Q_{ab}$, onde a e b são parâmetros reais tais que f possui dois pontos críticos recorrentes c e d com o mesmo ω -limite. Assumimos também que f não possui retornos centrais, em particular f é não-renormalizável.

As aplicações de primeiro retorno ϕ_n podem ser extendidas para aplicações conformes que agem no plano complexo. Os elementos do que chamaremos de *partição de Yoccoz complexa* surgem naturalmente como domínios de ramos destas extensões.

Consideremos certos aspectos da dinâmica de f na esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Sabemos por [B] que existem uma vizinhança U de ∞ e um difeomorfismo conforme h que conjuga $f|_U$ com $z \mapsto z^3$ em $V := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1/2\}$. Em particular $f(\overline{U}) \subset U$ e $\cup_{i=0}^{\infty} f^{-i}(U)$ coincide com a bacia de atração de ∞ que denotamos por $W^s(\infty)$ e está definida por

$$W^s(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : \omega(z) = \infty\}.$$

De fato podemos estender h para uma conjugação conforme (que ainda denotamos por h) de $f|_{W^s(\infty)}$ com $z \mapsto z^3$ em $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Para $z \in D \setminus \{0\}$ existem únicos $\rho \in (0, 1)$ e $\theta \in [0, 2\pi)$ tais que $z = \rho e^{i\theta}$. Como $z \mapsto z^3$ preserva a família dos círculos centrados na origem e $\rho = \text{constante}$ e a família das semiretas a partir da origem e $\theta = \text{constante}$ temos que a imagem por h^{-1} destes círculos (chamadas *curvas equipotenciais*) e semiretas (chamadas *raios*) são preservadas por f . Para cada ponto fixo p de f em $[0, 1]$ existem pelo menos 2 raios $\alpha(p)$ e $\beta(p)$ tais que um é a imagem espelhada no eixo real do outro e $\overline{\alpha(p)} \setminus \alpha(p) = \overline{\beta(p)} \setminus \beta(p) = \{p, \infty\}$. Neste caso dizemos que $\alpha(p)$ e $\beta(p)$ *aterrizam* em p .

Para definirmos as partições de Yoccoz complexas consideramos D_0 , um disco to-

pológico em $\mathbb{C}$ limitado por uma curva equipotencial. Para cada $p \in P_{-1}$ (lembramos que P_{-1} é o conjunto de pontos fixos de f em $[0, 1]$) existem 2 raios $\alpha(p)$ e $\beta(p)$ que aterrizam em p . Para cada p^* tal que $f(p^*) = f(p)$ existem 2 raios que são pré-imagens por f dos raios $\alpha(p)$ e $\beta(p)$. Denotamos por R_0 o conjunto de todos os raios obtidos desta forma a partir de pontos fixos $p \in P_{-1}$. Então os raios de R_0 definem uma partição de D_0 que chamamos de *partição de Yoccoz complexa* de nível zero que denotamos por $\mathcal{P}_0$. Para cada $x \in D_0$ que não pertença a algum raio de R_0 temos o elemento $\mathcal{P}_0(x)$ desta partição, o qual chamamos de *peça de Yoccoz complexa de nível zero*, que contém x . Agora podemos definir por indução as partições de Yoccoz complexas de um nível qualquer. Assumimos definidos o disco topológico D_n , o conjunto de raios R_n e a partição de Yoccoz complexa de nível n , denotada por $\mathcal{P}_n$. Então definimos $D_{n+1} := f^{-1}(D_n)$ e $R_{n+1} := f^{-1}(R_n)$. Os raios de R_{n+1} determinam uma partição de D_{n+1} que é por definição a *partição de Yoccoz complexa de nível $n + 1$* e que denotamos por $\mathcal{P}_{n+1}$.

O conjunto $K_f := \bigcap_{i=0}^{\infty} D_i$ chama-se *conjunto de Julia cheio* e a sua fronteira $J_f := \partial K_f$ chama-se *conjunto de Julia*. Para cada $n \geq 0$ e $x \in K_f \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} R_i$ o elemento $\mathcal{P}_n(x)$ de $\mathcal{P}_n$ que contém x está bem definido e chama-se *peça de Yoccoz complexa de nível n* .

Pode-se verificar que se $\mathcal{P}_n(x)$ não contém pontos críticos então f é um difeomorfismo conforme de $\mathcal{P}_n(x)$ sobre $\mathcal{P}_{n-1}(f(x))$. Porém, no caso em que $\mathcal{P}_n(x)$ contém um ponto crítico, f é um recobrimento conforme ramificado de grau 2 de $\mathcal{P}_n(x)$ sobre $\mathcal{P}_{n-1}(f(x))$ cujo ponto de ramificação é o ponto crítico.

Observe então que uma peça de Yoccoz real $P_n(x)$ é exatamente a interseção da peça de Yoccoz complexa $\mathcal{P}_n(x)$ com $\mathbb{R}$, em símbolos $P_n(x) = \mathbb{R} \cap \mathcal{P}_n(x)$. Isto nos permite associar a cada ramo de uma aplicação de primeiro retorno real ϕ_k a sua extensão para uma vizinhança no plano complexo. De fato, relembramos que ϕ_k é a aplicação de

primeiro retorno a $I_{k-1} \cup J_{k-1}$ e temos que $I_{k-1} = P_{m_{k-1}}(c)$ e $J_{k-1} = P_{n_{k-1}}(d)$. Então cada componente do domínio de ϕ_k é uma peça de Yoccoz real $P_{j_k}(x)$ que possui a sua correspondente peça de Yoccoz complexa $\mathcal{P}_{j_k}(x)$. Sendo assim, se $\phi_k = f^l$ em $P_{j_k}(x)$, definimos $\Phi_k := f^l$ em $\mathcal{P}_{j_k}(x)$. Resulta que Φ_k é uma extensão de ϕ_k para o plano complexo.

Supondo que $c, d \in K_f \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} R_i$ temos que $\mathcal{P}_0(c) \supset \mathcal{P}_1(c) \supset \mathcal{P}_2(c) \supset \dots$ e $\mathcal{P}_0(d) \supset \mathcal{P}_1(d) \supset \mathcal{P}_2(d) \supset \dots$. Quando f é não-renormalizável e c, d são recorrentes, as subsequências $\mathcal{P}_0(c) \supset \mathcal{P}_{m_1}(c) \supset \mathcal{P}_{m_2}(c) \supset \dots$ e $\mathcal{P}_0(d) \supset \mathcal{P}_{n_1}(d) \supset \mathcal{P}_{n_2}(d) \supset \dots$ tais que $m_{k+1} - m_k$ e $n_{k+1} - n_k$ são, respectivamente, os tempos de primeiro retorno de c e d a $\mathcal{P}_{m_k}(c) \cup \mathcal{P}_{n_k}(d)$. Aqui consideramos $m_0 = n_0 = 0$ e $k \geq 0$. Dito de outra forma temos que $\mathcal{P}_{m_{k+1}}(c) \cup \mathcal{P}_{n_{k+1}}(d)$ é parte do domínio da aplicação Φ_k que estende a aplicação de primeiro retorno ϕ_k . Utilizemos a notação $\mathcal{I}_k = \mathcal{P}_{m_k}(c)$ e $\mathcal{J}_k = \mathcal{P}_{n_k}(d)$.

A aplicação Φ_k é uma continuação analítica do primeiro retorno ϕ_k e satisfaz às condições 2.-4. da Definição 3.2.1.

Definição 3.2.1 *Uma aplicação holomorfa acoplada Φ é uma função analítica definida em um conjunto aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ que satisfaz as seguintes condições:*

1. $\mathcal{U}$ é uma união finita ou infinita de discos topológicos abertos e dois a dois disjuntos $\mathcal{U}_i$.
2. Existem discos topológicos disjuntos $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ tais que Φ aplica cada $\mathcal{U}_i$ sobre $\mathcal{I}$ ou $\mathcal{J}$.
3. $\Phi|_{\mathcal{U}_i}$ é univalente para $i \neq 0, 1$ e para $i = 0, 1$ é um recobrimento ramificado de grau 2.
4. $\mathcal{U} \cap (\partial\mathcal{I} \cup \partial\mathcal{J}) = \emptyset$.

Capítulo 4

Polinômios cúbicos Fibonacci e eventualmente Fibonacci

4.1 Polinômios cúbicos Fibonacci

Consideramos polinômios cúbicos $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, definidos por $f(x) = P_{ab}(x) = ax^3 + bx^2 + (1 - a - b)x$ ou $f(x) = Q_{ab}(x) = 1 - ax^3 - bx^2 - (1 - a - b)x$, onde os parâmetros $a, b \in \mathbb{R}$. Nesta seção provaremos que existem parâmetros a, b tais que P_{ab} é Fibonacci. O mesmo pode ser provado para a família Q_{ab} .

Prova do Teorema 2.3.1. Para construir um polinômio P_{ab} Fibonacci nós adotamos um procedimento análogo ao adotado na prova do Lema 1 em [SV]. Nós começamos definindo por indução uma sequência g_n de aplicações bimodais contínuas que converge para uma aplicação bimodal contínua g que é Fibonacci.

Indução (primeiro passo): começamos observando que existe uma aplicação bimodal

$g_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ com pontos extremos $c, d \in (0, 1)$ tal que g_1 é crescente em $[0, c]$ e o primeiro retorno ϕ_1 é do tipo F_5 .

Indução (hipótese de indução): assumimos que existe uma aplicação bimodal $g_{3k+1} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ cujos pontos extremos são $c, d \in (0, 1)$ (os mesmos de g_1) e tal que g_{3k+1} é crescente em $[0, c]$ e para $1 \leq i \leq k$ os primeiros retornos ϕ_{3i-1} , ϕ_{3i} e ϕ_{3i+1} são dos tipos F_3 , F_4 , F_5 , respectivamente (veja a Figura 4.1).

Indução (passo indutivo): este passo da indução consiste de 3 partes nas quais construiremos g_{3k+2} , g_{3k+3} e g_{3k+4} . Para construirmos g_{3k+2} consideramos I_{3k+1} , J_{3k+1} os domínios críticos e C_{3k+1} , D_{3k+1} os domínios pós-críticos de ϕ_{3k+1} . Lembre-se que para todo $n \geq 0$, ϕ_n aplica C_{n+1} sobre I_n (ou J_n) difeomorficamente. Definimos então $\tilde{C}_{n+1} \subset C_{n+1}$, o qual é a pré-imagem de I_{n+1} (ou J_{n+1}) por ϕ_n . Da mesma forma definimos também $\tilde{D}_{n+1} \subset D_{n+1}$. Como ϕ_{3k+1} é uma aplicação de primeiro retorno podemos modificar g_{3k+1} em $I_{3k+1} \cup J_{3k+1}$ de modo que cada ramo não-crítico de ϕ_{3k+1} não se altere e os valores críticos $\phi_{3k+1}(c)$ and $\phi_{3k+1}(d)$ se movem independentemente para posições adequadas em C_{3k+1} e D_{3k+1} , respectivamente. Então escolhemos g_{3k+2} de modo que ϕ_{3k+1} é do tipo F_5 e $\phi_{3k+2}(c) \in \phi_{3k+1|I_{3k+1}}^{-1}(J_{3k+1})$ e $\phi_{3k+2}(d) \in \phi_{3k+1|J_{3k+1}}^{-1}(I_{3k+1})$. Em particular temos que a imagem dos ramos críticos de ϕ_{3k+1} contêm os domínios destes ramos, mais precisamente $\phi_{3k+1}(I_{3k+1}) \supset J_{3k+1}$ e $\phi_{3k+1}(J_{3k+1}) \supset I_{3k+1}$. Definimos

$$I_{3k+2} := \phi_{3k+1|I_{3k+1}}^{-1}(\tilde{C}_{3k+1}) \quad \text{e} \quad J_{3k+2} := \phi_{3k+1|J_{3k+1}}^{-1}(\tilde{D}_{3k+1}).$$

Nestes domínios colocamos $\phi_{3k+2} := \phi_{3k+1}^2$. Também definimos

$$C_{3k+2} := \phi_{3k+1|I_{3k+1}}^{-1}(J_{3k+1}) \quad \text{e} \quad D_{3k+2} := \phi_{3k+1|J_{3k+1}}^{-1}(I_{3k+1}).$$

Nestes domínios colocamos $\phi_{3k+2} := \phi_{3k+1}$. Fazendo mais uma modificação em g_{3k+2} de

modo a ajustar as posições de $\phi_{3k+2}(c)$ e $\phi_{3k+2}(d)$ teremos que ϕ_{3k+2} é do tipo F_3 .

Agora escolhemos g_{3k+3} de modo que ϕ_{3k+2} é do tipo F_3 e $\phi_{3k+3}(c) \in \phi_{3k+2|J_{3k+2}}^{-1}(J_{3k+2})$ e $\phi_{3k+3}(d) \in \phi_{3k+2|I_{3k+2}}^{-1}(I_{3k+2})$. Como antes temos que $\phi_{3k+2}(I_{3k+2}) \supset I_{3k+2}$ e $\phi_{3k+2}(J_{3k+2}) \supset J_{3k+2}$. Então definimos

$$I_{3k+3} := \phi_{3k+2|I_{3k+2}}^{-1}(\tilde{C}_{3k+2}) \quad \text{e} \quad J_{3k+3} := \phi_{3k+2|J_{3k+2}}^{-1}(\tilde{D}_{3k+2}).$$

Nestes domínios colocamos $\phi_{3k+3} := \phi_{3k+2}^2$. Também definimos

$$C_{3k+3} := \phi_{3k+2|I_{3k+2}}^{-1}(I_{3k+2}) \quad \text{e} \quad D_{3k+3} := \phi_{3k+2|J_{3k+2}}^{-1}(J_{3k+2}).$$

Nestes domínios colocamos $\phi_{3k+3} := \phi_{3k+2}$. Modificando g_{3k+3} de modo a ajustar as posições de $\phi_{3k+3}(c)$ e $\phi_{3k+3}(d)$ teremos que ϕ_{3k+3} é do tipo F_4 .

Encerrando a indução escolhemos g_{3k+4} de modo que ϕ_{3k+3} é do tipo F_4 e $\phi_{3k+4}(c) \in \phi_{3k+3|J_{3k+3}}^{-1}(I_{3k+3})$ e $\phi_{3k+4}(d) \in \phi_{3k+3|I_{3k+3}}^{-1}(J_{3k+3})$. De modo análogo ao do passo anterior temos que $\phi_{3k+3}(I_{3k+3}) \supset J_{3k+3}$ e $\phi_{3k+3}(J_{3k+3}) \supset I_{3k+3}$. Definimos

$$I_{3k+4} := \phi_{3k+3|I_{3k+3}}^{-1}(\tilde{C}_{3k+3}) \quad \text{e} \quad J_{3k+4} := \phi_{3k+3|J_{3k+3}}^{-1}(\tilde{D}_{3k+3}).$$

Nestes domínios colocamos $\phi_{3k+4} := \phi_{3k+3}^2$. Também definimos

$$C_{3k+4} := \phi_{3k+3|J_{3k+3}}^{-1}(I_{3k+3}) \quad \text{e} \quad D_{3k+4} := \phi_{3k+3|I_{3k+3}}^{-1}(J_{3k+3}).$$

Nestes domínios colocamos $\phi_{3k+4} := \phi_{3k+3}$. Modificando g_{3k+4} de modo a ajustar as posições de $\phi_{3k+4}(c)$ e $\phi_{3k+4}(d)$ teremos que ϕ_{3k+4} é do tipo F_5 .

Podemos construir a sequência g_n de modo que

$\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = \{c\}$ e $\bigcap_{n=0}^{\infty} J_n = \{d\}$. Então g_n converge, com n , para uma aplicação bimodal Fibonacci g . Como a família P_{ab} é uma *família completa* (veja [MS], páginas 117-119) nós concluimos que existem os parâmetros a, b tais que P_{ab} satisfaz o Teorema 2.3.1.

Finalmente gostaríamos de enfatizar que nas definições dos tipos F_3 , F_4 e F_5 nada exigimos sobre as orientações dos ramos da aplicação. Estas orientações não são relevantes para a construção de polinômios cúbicos Fibonacci ou eventualmente Fibonacci. No entanto se refinarmos a definição dos tipos de modo a levar em conta estas orientações poderemos dar mais detalhes sobre o comportamento da sequência ϕ_n associada a um polinômio cúbico Fibonacci.

Consideramos então os subtipos F_i^{jk} , onde $i = 3, 4, 5$ e $j, k \in \{+, -\}$, sendo que $j = +$ e $j = -$ significam, respectivamente, que os ramos monótonos preservam ou invertem orientação enquanto que $k = +$ e $k = -$ significam, respectivamente, que o ramo crítico em c tem concavidade para cima ou para baixo.

Com este refinamento teremos que tanto na família P_{ab} como na Q_{ab} os primeiros retornos ϕ_n exibem a seguinte sequência de tipos

$$F_5^{+-} F_3^{--} F_4^{-+} F_5^{--} F_3^{++} F_4^{++} F_5^{++} F_3^{-+} F_4^{--} F_5^{-+} F_3^{+-} F_4^{+-} F_5^{+-}.$$

Figura 4.1: Sequência de tipos de Fibonacci

4.2 Polinômios cúbicos eventualmente Fibonacci

Dada ϕ_n a aplicação de primeiro retorno definida em $I_n \cup J_n$, denotamos por C_n, D_n os domínios pós-críticos que contêm os valores críticos $\phi_n(c), \phi_n(d)$ respectivamente. Relembramos a definição de polinômios cúbicos eventualmente Fibonacci.

Definição 4.2.1 *Se f não possui retornos centrais e existe um inteiro positivo n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ $\phi_n|_{C_n} = \phi_{n-1}|_{C_n}$, $\phi_n|_{D_n} = \phi_{n-1}|_{D_n}$, $\phi_{n+1}(c) = \phi_n|_{C_n} \circ \phi_n|_{I_n}(c)$ e $\phi_{n+1}(d) = \phi_n|_{D_n} \circ \phi_n|_{J_n}(d)$ dizemos que f é Eventualmente Fibonacci.*

Provaremos a seguir que se f é eventualmente Fibonacci, então para $n = n_0$ a sequência de aplicações de primeiro retorno $\phi_n, \phi_{n+1}, \dots$ apresenta a sequência de tipos $F_1 F_2 F_1 F_2 \dots$ ou $F_3 F_4 F_5 F_3 F_4 F_5 \dots$. Este é o conteúdo do teorema 2.3.2

Prova do Teorema 2.3.2

Primeiramente, vamos supor que C_n, D_n estejam contidos em I_{n-1} . Como estes intervalos são restrições de I_{n-1} pela aplicação $\phi_{n-1}|_{I_{n-1}}$ ambos intervalos são aplicados ou sobre I_{n-1} ou sobre J_{n-1} . No primeiro caso acontece que $C_{n+1} \cup D_{n+1} \subset I_n$, e como $C_n \subset I_{n-1}$, temos que $\phi_n|_{I_n}$ aplica C_{n+1}, D_{n+1} sobre I_n . Assim temos novamente que $C_{n+2} \cup D_{n+2} \subset I_{n+1}$. Isto implica que os ω -limites $\omega(c), \omega(d)$ não contêm o ponto crítico d . Este não é nosso caso. No segundo caso acontece o Tipo F_1 . Quando os intervalos C_n, D_n estiverem contidos em J_{n-1} , a situação será análoga.

Vamos supor agora que C_n, D_n estejam contidos em intervalos diferentes. Temos então dois casos possíveis:

(Caso 1) $C_n \subset I_{n-1}$, $D_n \subset J_{n-1}$. Neste caso, existem quatro possibilidades:

1. $\phi_{n-1}(C_n) = I_{n-1}$, $\phi_{n-1}(D_n) = J_{n-1}$. Neste caso acontece que para todo n , $C_n \subset I_{n-1}$ e $D_n \subset J_{n-1}$, causando assim que $\omega(c)$ e $\omega(d)$ sejam diferentes. Este não é nosso caso.
2. $\phi_{n-1}(C_n) = J_{n-1}$, $\phi_{n-1}(D_n) = I_{n-1}$. Este é o Tipo F_3 .
3. $\phi_{n-1}(C_n) = \phi_{n-1}(D_n) = I_{n-1}$. Neste caso, conforme o segundo item da definição de Fibonacci C_{n+1} e D_{n+1} estão em I_n . Como C_n está em I_{n-1} , a aplicação ϕ_n definida em I_n vai aplicar C_{n+1}, D_{n+1} sobre I_n . Este não é nosso caso como vimos acima.
4. $\phi_{n-1}(C_n) = \phi_{n-1}(D_n) = J_{n-1}$. Neste caso, C_{n+1} e D_{n+1} estão em J_n . Como D_n está em J_{n-1} , a aplicação $\phi_n|_{J_n}$ vai aplicar C_{n+1}, D_{n+1} sobre J_n . Este também não é nosso caso.

(Caso 2) $C_n \subset J_{n-1}$, $D_n \subset I_{n-1}$. Neste caso também existem quatro possibilidades:

1. $\phi_{n-1}(C_n) = \phi_{n-1}(D_n) = I_{n-1}$. Neste caso, C_{n+1}, D_{n+1} estão em I_n e, como C_n está em J_{n-1} , a aplicação $\phi_n|_{I_n}$ vai aplicar C_{n+1}, D_{n+1} sobre J_n . Este é o Tipo F_1 .
2. $\phi_{n-1}(C_n) = \phi_{n-1}(D_n) = J_{n-1}$. Este é análogo ao item anterior.
3. $\phi_{n-1}(C_n) = I_{n-1}$, $\phi_{n-1}(D_n) = J_{n-1}$. Este é o tipo F_5 . Neste caso temos que $C_{n+1} \subset I_n$ e C_{n+1} é aplicado sobre J_n pois ϕ_n aplica I_n em J_{n-1} . Temos também que $D_{n+1} \subset J_n$ e D_{n+1} é aplicado sobre I_n , pois ϕ_n aplica J_n em I_{n-1} . Este será então o Tipo F_3 .
4. $\phi_{n-1}(C_n) = J_{n-1}$, $\phi_{n-1}(D_n) = I_{n-1}$. Neste caso, temos que $C_{n+1} \subset J_n$, $D_{n+1} \subset I_n$. Como $\phi_n : I_n \rightarrow J_{n-1}$, $\phi_n : J_n \rightarrow I_{n-1}$, resulta que C_{n+1} é aplicado sobre I_n e D_{n+1}

é aplicado sobre J_n . Este é o tipo F_5 .

Mostraremos agora que os tipos F_1, F_2 e os tipos F_3, F_4, F_5 acontecem alternadamente. Vamos supor que ϕ_{n-1} é do tipo F_1 . Neste caso, sabemos que $C_{n+1} \cup D_{n+1} \subset J_n$. Como $D_n \subset I_{n-1}$, temos que ϕ_n definida em J_n aplica C_{n+1} e D_{n+1} sobre I_n , mostrando assim o tipo F_2 . Novamente $C_{n+2} \cup D_{n+2} \subset I_{n+1}$ e como $C_{n+1} \subset J_n$, ϕ_{n+1} aplica C_{n+2} e D_{n+2} sobre J_{n+1} , voltando assim a ser o tipo F_1 .

Vamos supor agora que ϕ_{n-1} é do tipo F_3 . Como $\phi_{n-1}(C_n) = J_{n-1}$ e $\phi_{n-1}(D_n) = I_{n-1}$, temos que $C_{n+1} \subset J_n$ e $D_{n+1} \subset J_n$. Também pela posição de C_n e D_n sabemos que $\phi_n : I_n \rightarrow I_{n-1}$ e $\phi_n : J_n \rightarrow J_{n-1}$. Isto implica que $\phi_n : C_{n+1} \rightarrow J_n$ e $\phi_n : D_{n+1} \rightarrow I_n$. Este é o tipo F_4 . Novamente, $C_{n+2} \subset J_{n+1}$ e $D_{n+2} \subset I_{n+1}$. Como $\phi_{n+1} : I_{n+1} \rightarrow J_n$ e $\phi_{n+1} : J_{n+1} \rightarrow I_n$, sabemos que C_{n+2} e D_{n+2} são aplicados pela ϕ_{n+1} sobre I_{n+1} e J_{n+1} respectivamente, resultando assim o tipo F_5 . Nesta vez temos que $C_{n+3} \subset I_{n+2}$ e $D_{n+3} \subset J_{n+2}$. Como $\phi_{n+2} : I_{n+2} \rightarrow J_{n+1}$ e $\phi_{n+2} : J_{n+2} \rightarrow I_{n+1}$, temos que C_{n+3} e D_{n+3} são aplicados pela ϕ_{n+2} sobre J_{n+2} e I_{n+2} respectivamente, resultando assim o tipo F_3 . Isso conclui a prova. ■

4.2.1 Tempos de retorno dos pontos críticos

Nesta seção provaremos que os polinômios cúbicos Fibonacci têm os tempos mais rápidos possíveis de retorno apresentando assim a recorrência mais forte dos pontos críticos entre os polinômios cúbicos que não apresentam retornos centrais.

Note que para todo $n \geq 1$, existem números naturais $s_n = \tau_n(c)$, $r_n = \tau_n(d)$ tal que $\phi_n(c) = f^{s_n}(c)$ e $\phi_n(d) = f^{r_n}(d)$. Assim podemos definir duas seqüências que são tempos de primeiros retornos dos seus pontos críticos $\tau(c) = (s_1, s_2, s_3, \dots)$ e $\tau(d) =$

$(r_1, r_2, r_3, \dots)$. Como temos visto no Teorema 2.3.2 a combinatória de tipo Fibonacci pode começar a ocorrer a partir de um certo n -ésimo processo de indução na construção de aplicações de primeiro retorno. Por esta razão é provável que as seqüências $\tau(c), \tau(d)$ não coincidem (mesmo parcialmente a partir da ocorrência de tipo Fibonacci) com a seqüência de Fibonacci α_n , que é $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$ e $\alpha_{n+1} = \alpha_{n-1} + \alpha_n$ para todo $n \geq 2$. Entretanto, sob algumas hipóteses, mostraremos que as seqüências $\tau(c)$ e $\tau(d)$ satisfazem a propriedade da seqüência de Fibonacci, isto é: $s_{n+1} = s_{n-1} + s_n$ e $r_{n+1} = r_{n-1} + r_n$.

Prova do Teorema 2.3.3

Vamos assumir que a combinatória de tipo Fibonacci ocorre a partir da primeira etapa da indução. Consideramos primeiro os polinômios cúbicos Fibonacci do tipo $F_1 F_2$. Como $C_1 \cup D_1 \subset I_0$, obtemos que $s_2 = s_0 + s_1$ e $r_2 = s_0 + r_1$. E como ϕ_1 aplica $C_1 \cup D_1$ sobre J_0 os domínios C_2 e D_2 estão em J_1 e isto aplica que $s_3 = r_1 + s_2$ e $r_3 = r_1 + r_2$. Uma vez que D_1 está em I_0 , sabemos que ϕ_1 aplica J_1 sobre I_0 e $C_2 \cup D_2$ sobre I_1 . Isto implica que $C_3 \cup D_3 \subset I_2$ e temos que $s_4 = s_2 + s_3$ e $r_4 = s_2 + r_3$. Sabemos que $C_2 \subset J_1$. Isto implica que ϕ_2 aplica I_2 em J_1 e, por isso, $C_3 \cup D_3$ sobre J_2 . Esta situação é igual à situação de ϕ_1 . Então, temos em geral

$$s_{2n} = s_{2n-2} + s_{2n-1} \quad s_{2n+1} = r_{2n-1} + s_{2n}$$

$$r_{2n} = s_{2n-2} + r_{2n-1} \quad r_{2n+1} = r_{2n-1} + r_{2n}$$

Como $r_{2n+1} - s_{2n+1} = r_{2n} - s_{2n}$ e $r_{2n} - s_{2n} = r_{2n-1} - s_{2n-1}$, temos por indução que

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} + s_{2n} + (r_1 - s_1)$$

$$r_{2n} = r_{2n-2} + r_{2n-1} + (s_1 - r_1)$$

Disto temos que

$$s_{2n} = s_{2n-2} + s_{2n-1}$$

$$r_{2n} = r_{2n-2} + r_{2n-1} + (s_1 - r_1)$$

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} + s_{2n} + (r_1 - s_1)$$

$$r_{2n+1} = r_{2n-1} + r_{2n}$$

Assumindo então que $s_1 = r_1$, temos que $s_n = r_n$ para todo $n \geq 1$ e ainda as seqüências satisfazem a propriedade de Fibonacci.

A seguir, consideramos os polinômios cúbicos Fibonacci tipo $F_3F_4F_5$. Inicialmente assumiremos que ϕ_1 é do tipo F_3 . Então temos que $C_1 \subset I_0$ e $D_1 \subset J_0$ e isto implica que $s_2 = s_0 + s_1$ e $r_2 = r_0 + r_1$. Como ϕ_1 aplica C_1 sobre J_0 e D_1 sobre I_0 , temos que $C_2 \subset J_1$ e $D_2 \subset I_1$ e isto implica que $s_3 = r_1 + r_2$ e $r_3 = s_1 + s_2$. Como $C_1 \subset I_0$, $D_1 \subset J_0$, sabemos que ϕ_1 aplica I_1 em I_0 e J_1 em J_0 e, por isso, C_2 sobre J_1 e D_2 sobre I_1 . Isto implica que $C_3 \subset J_2$ e $D_3 \subset I_2$ e temos que $s_4 = r_2 + s_3$ e $r_4 = s_2 + r_3$. Aplicando o mesmo argumento, podemos verificar com facilidade que a situação dos domínios C_4 e D_4 é igual à dos C_1 e D_1 . Temos então em geral

$$s_{3n-1} = s_{3n-3} + s_{3n-2} \quad s_{3n} = r_{3n-2} + s_{3n-1} \quad s_{3n+1} = r_{3n-1} + s_{3n}$$

$$r_{3n-1} = r_{3n-3} + r_{3n-2} \quad r_{3n} = s_{3n-2} + r_{3n-1} \quad r_{3n+1} = s_{3n-1} + r_{3n}$$

A partir deste fato, observamos que

$$\begin{aligned} s_{3n} - r_{3n} &= (r_{3n-2} - s_{3n-2}) + (s_{3n-1} - r_{3n-1}) \\ &= (r_{3n-2} - s_{3n-2}) + (s_{3n-3} - r_{3n-3}) + (s_{3n-2} - r_{3n-2}) \\ &= s_{3(n-1)} - r_{3(n-1)}. \end{aligned}$$

E por indução temos que $s_{3n} - r_{3n} = s_0 - r_0$. Temos também que

$$s_{3n+1} - r_{3n+1} = (r_{3n-1} - s_{3n-1}) + (s_{3n} - r_{3n})$$

$$\begin{aligned}
&= (r_{3n-1} - s_{3n-1}) + (r_{3n-2} - s_{3n-2}) + (s_{3n-1} - r_{3n-1}) \\
&= s_{3(n-1)+1} - r_{3(n-1)+1}.
\end{aligned}$$

E por indução temos que $s_{3n+1} - r_{3n+1} = (-1)^n(s_1 - r_1)$. Usando esses últimos dois resultados e o anterior, temos que

$$\begin{aligned}
s_{3n-1} &= s_{3n-3} + s_{3n-2} \\
r_{3n-1} &= r_{3n-3} + r_{3n-2} \\
s_{3n} &= s_{3n-2} + s_{3n-1} + (-1)^n(r_1 - s_1) \\
r_{3n} &= r_{3n-2} + r_{3n-1} + (-1)^n(s_1 - r_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{3n+1} &= s_{3n-1} + s_{3n} + (-1)^n(r_1 - s_1) + (r_0 - s_0) \\
r_{3n+1} &= r_{3n-1} + r_{3n} + (-1)^n(s_1 - r_1) + (s_0 - r_0)
\end{aligned}$$

Assumindo $s_0 = r_0$ e $s_1 = r_1$ temos que $s_n = r_n$ para todo $n \geq 1$ e as seqüências $\tau(c)$ e $\tau(d)$ satisfazem a propriedade de Fibonacci.

Assim mostramos que se a aplicação de primeiro retorno começa a apresentar tipo Fibonacci a partir da n -ésima etapa e nessa etapa se satisfazem $s_n = r_n$ e $s_{n-1} = r_{n-1}$, então a partir desse momento os tempos de primeiro retorno de cada tipo Fibonacci satisfaz a propriedade de Fibonacci. Em particular, se a combinatória de tipo Fibonacci ocorre desde o início da indução e satisfaz a condição inicial, ou seja, $s_0 = r_0 = 1$ e $s_1 = r_1 = 2$, então as seqüências s_n e r_n são iguais à seqüência de Fibonacci α_n . ■

Agora provaremos que os polinômios cúbicos Fibonacci tem menor tempo de retorno entre os polinômios que não apresentam retornos centrais.

Prova do Teorema 2.3.4

Note que, se f não possui retornos centrais, C_n e D_n estão contidos em $(I_{n-1} \setminus I_n) \cup (J_{n-1} \setminus J_n)$ para todo $n \geq 1$ e que os intervalos I_{n+1}, J_{n+1} são definidos como sendo pré-imagens de C_n, D_n por ϕ_n respectivamente. Temos assim que $\phi_{n+1}|_{I_{n+1}} = \phi_n|_{C_n} \circ \phi_n|_{I_n}$ e $\phi_{n+1}|_{J_{n+1}} = \phi_n|_{D_n} \circ \phi_n|_{J_n}$. No caso de Fibonacci temos que $\phi_n|_{C_n \cup D_n} = \phi_{n-1}|_{I_{n-1} \cup J_{n-1}}$. Isso implica que $s_{n+1} = s_{n-1} + s_n$. No caso de não Fibonacci $\phi_{n-1}|_{I_{n-1} \cup J_{n-1}}$ aplica C_n em $I_{n-2} \setminus I_{n-1}$ ou em $J_{n-2} \setminus J_{n-1}$. Sendo assim, o tempo do primeiro retorno do valor crítico $f^{s_n}(c) \in C_n$ ao intervalo I_n fica maior que s_{n-1} . Isto é $s_{n+1} > s_n + s_{n-1}$. Isto mostra que, excluídos retornos-centrais, a aplicação do tipo Fibonacci tem o menor tempo de primeiro retorno, isto é, se uma aplicação g tem tempo de primeiro retorno $s_{n+1}(g) < \alpha_{n+1}$, verifica-se que g possui retornos centrais. ■

4.3 As seqüências de kneading dos polinômios cúbicos Fibonacci

Na teoria qualitativa dos sistemas dinâmicos a relação de equivalência natural para expressar a noção de “mesma dinâmica” é o que chamamos conjugação, a saber: duas aplicações f e g são topologicamente conjugadas se existe um homeomorfismo $h : I \rightarrow I$ tal que $h \circ f = g \circ h$. Um tal homeomorfismo, chamado uma conjugação entre f e g , aplica órbitas de f em órbitas de g e preserva propriedades topológicas do sistema. A relação de conjugação topológica entre duas aplicações está relacionada com a questão de mesma seqüência de kneading dos valores críticos. Nesta seção vamos construir as seqüências de kneading no caso de polinômios cúbicos Fibonacci.

Dado $x \in I$ definimos o seu *itinerário* $I(x) = (i_1(x), i_2(x), \dots)$, pondo

$$i_j(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } f^j(x) < c \\ 2, & \text{se } c < f^j(x) < d \\ 3, & \text{se } f^j(x) > d \end{cases}$$

Definimos então as *seqüências de kneading* $K_f(c), K_f(d)$ como sendo os itinerários de c e d , respectivamente. Lembramos que para todo $n \geq 1$ existem s_n, r_n tais que $\phi_n(c) = f^{s_n}(c)$ e $\phi_n(d) = f^{r_n}(d)$. No caso Polinômio cúbico Fibonacci verifica-se que $s_n = r_n$.

Proposição 4.3.1 *Dado um polinômio cúbico Fibonacci cujos pontos críticos são recorrentes e possuem o mesmo ω -limite temos que as seqüências de kneading $K_f(c), K_f(d)$ de modo que $i_1(c) = i_{s_1}(c) = 3$, $i_1(d) = i_{s_1}(d) = 1$, $i_{s_2}(c) = i_{s_2}(d) = 2$ e para todo $n \geq 2$*

1. Se $C_n \subset I_{n-1}$

$$(i_{s_n+1}(c), \dots, i_{s_{n+1}-1}(c), i_{s_{n+1}}(c)) = (i_1(c), \dots, i_{s_{n-1}-1}(c), i_{s_{n+1}}(c)).$$

2. Se $C_n \subset J_{n-1}$

$$(i_{s_n+1}(c), \dots, i_{s_{n+1}-1}(c), i_{s_{n+1}}(c)) = (i_1(d), \dots, i_{s_{n-1}-1}(d), i_{s_{n+1}}(c)).$$

Prova: **Primeiro passo:** Pela definição de f temos que $i_1(c) = i_2(c) = 3$ e $i_1(d) = i_2(d) = 1$. Observamos que $\phi_2(c) = f^3(c) \in C_2$ e $\phi_2(d) = f^3(c) \in D_2$. Segundo os subtipos mostrados anteriormente, temos que $C_2 \subset (c, d)$, $D_2 \subset (c, d)$. Isso resulta que $i_{s_2}(c) = 2$, $i_{s_2}(d) = 2$. Como $C_2 \subset I_1$ temos que os itinerários de $\phi_2(c)$ e c coincidem ao longo da iterada pela ϕ_1 até o nível $s_1 - 1$. O mesmo corre com $\phi_2(d)$ e d . Como

$s_1 = 2$, obtemos que $i_4(c) = i_{s_2-1}(c) = i_1(c)$ e $i_4(d) = i_{s_2-1}(d) = i_1(d)$. Também como $C_3 \subset (c, d)$ e $D_3 \subset (c, d)$, para $s_3 = 5$, verifica-se que $i_{s_3}(c) = i_{s_3}(d) = 2$.

Passo indutivo: Suponha que temos a seqüência de kneading até o nível de s_n para c e d . Consideramos o primeiro caso, isto é: $C_n \subset I_{n-1}$. Nesta situação temos que os itinerários de $\phi_n(c)$ e c coincidem ao longo da iterada pela ϕ_{n-1} , ou seja, durante o tempo $s_{n-1} - 1$. Assim temos que

$$(i_{s_n+1}(c), \dots, i_{s_n+s_{n-1}-1}(c)) = (i_1(c), \dots, i_{s_{n-1}-1}(c)).$$

Lembramos que a aplicação f é Fibonacci, então temos que $s_n + s_{n-1} - 1 = s_{n+1} - 1$. Então basta definirmos $i_{s_{n+1}}(c)$ dependendo de onde $f^{s_{n+1}}(c)$ está contido. Caso $C_n \subset J_{n-1}$, temos que os itinerários de $\phi_n(c)$ e d coincidem ao longo da iterada pela ϕ_{n-1} durante o tempo $s_{n-1} - 1$. Assim temos a seqüência de kneading até o nível s_{n+1} . A construção de kneading para d será análoga. ■

Por fim apresentamos as seqüências de kneading dos polinômios cúbicos Fibonacci:

$$K_f(c) = (3, \ 3, \ 2, \ 3, 2, \ 1, 1, 3, \ 1, 1, 2, 1, 1, \ 3, 3, 2, 3, 2, 1, 1, 2, \ \dots)$$

$$K_f(d) = (1, \ 1, \ 2, \ 1, 2, \ 3, 3, 1, \ 3, 3, 2, 3, 3, \ 1, 1, 2, 1, 2, 3, 3, 2, \ \dots)$$

Os espaços maiores entre os números da seqüência ocorrem exatamente nos números da seqüência de Fibonacci, isto é: $1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$

Capítulo 5

Decaimento de Geometria

5.1 Crescimento dos anéis principais

A estratégia que utilizamos para provar o decaimento de geometria enunciado no Teorema 2.3.5 é a de olhar para as continuções analíticas Φ_n das aplicações de primeiro retorno ϕ_n . Dadas então as sequências de discos topológicos $\mathcal{I}_0 \supset \mathcal{I}_1 \supset \mathcal{I}_2 \supset \dots \supset \{c\}$ e $\mathcal{J}_0 \supset \mathcal{J}_1 \supset \mathcal{J}_2 \supset \dots \supset \{d\}$ construídas na Seção 3.2.2 analisamos as sequências de módulos dos anéis $\mathcal{I}_n \setminus \overline{\mathcal{I}_{n+1}}$ e $\mathcal{J}_n \setminus \overline{\mathcal{J}_{n+1}}$ que chamamos de *anéis principais*. O Teorema 5.1.1 a seguir garante o crescimento linear destes módulos e o decaimento exponencial de geometria é uma consequência deste fato, veja [LV].

Teorema 5.1.1 *Seja $f = P_{ab}$ ou $f = Q_{ab}$ um polinômio cúbico Fibonacci cujos pontos críticos são recorrentes e possuem o mesmo ω -limite. Então existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $n > 0$,*

$$\text{mod}(\mathcal{I}_n \setminus \overline{\mathcal{I}_{n+1}}) \geq C \cdot n \quad \text{e} \quad \text{mod}(\mathcal{J}_n \setminus \overline{\mathcal{J}_{n+1}}) \geq C \cdot n.$$

Uma vez provado o Teorema 5.1.1, temos o Corolário 5.1.1 abaixo que garante o decaimento exponencial de geometria do Teorema 2.3.5 como queremos.

Corolário 5.1.1 *Seja $f = P_{ab}$ ou $f = Q_{ab}$ um polinômio cúbico eventualmente Fibonacci cujos pontos críticos são recorrentes e possuem o mesmo ω -limite. Então existe uma constante $C_1 > 0$ tal que para todo $n > 0$,*

$$\log \frac{|I_n|}{|I_{n+1}|} \geq C_1 \cdot n \quad \text{e} \quad \log \frac{|J_n|}{|J_{n+1}|} \geq C_1 \cdot n.$$

Prova: Veja a prova deste Corolário em [LV]. ■

5.2 Anéis principais no caso eventualmente Fibonacci

Seja ϕ_n a sequência de primeiros retornos a $I_{n-1} \cup J_{n-1}$ associados a um polinômio cúbico eventualmente Fibonacci $f = P_{ab}$ ou $f = Q_{ab}$. Estamos interessados apenas nas sequências de ramos críticos $\phi_n|_{I_n}$, $\phi_n|_{J_n}$ e pós-críticos $\phi_n|_{C_n}$, $\phi_n|_{D_n}$. Consideramos as suas respectivas continuações analíticas $\Phi_n|_{I_n}$, $\Phi_n|_{J_n}$, $\Phi_n|_{C_n}$ e $\Phi_n|_{D_n}$ como definidas na Seção 3.2.2.

Como f é eventualmente Fibonacci pelo Teorema 2.3.2 podemos assumir que para um dado n_0 suficientemente grande ϕ_{n_0} é do tipo F_1F_2 ou $F_3F_4F_5$. Teremos então dois casos para analisar.

5.2.1 Polinômios eventualmente Fibonacci do tipo F_1F_2

Assumimos que ϕ_{n_0} é do tipo F_1 e pelo Teorema 2.3.2 temos que ϕ_{n_0+2i} e ϕ_{n_0+2i+1} , para $i \geq 0$, são do tipo F_1 e F_2 , respectivamente. Dado então ϕ_n do tipo F_1 consideramos a sua continuação analítica Φ_n e vamos relembrar a sua dinâmica. Temos que $\mathcal{C}_n, \mathcal{D}_n \subset \mathcal{I}_{n-1}$ e são aplicados sobre $\mathcal{J}_{n-1}$. Isto também já determina que $\mathcal{I}_n$ e $\mathcal{J}_n$ são aplicados sobre $\mathcal{I}_{n-1}$. No entanto, para estimar os módulos dos anéis principais vamos considerar os domínios $\tilde{\mathcal{C}}_n \subset \mathcal{C}_n$ e $\tilde{\mathcal{D}}_n \subset \mathcal{D}_n$, os quais são aplicados sobre $\mathcal{J}_n$.

Figura 5.1: Fibonacci Tipo F_1

Agora definimos os domínios $\mathcal{I}_{n+1}, \mathcal{J}_{n+1}$ pela pré-imagem dos domínios $\tilde{\mathcal{C}}_n, \tilde{\mathcal{D}}_n$ respectivamente e também definimos $\mathcal{C}_{n+1}, \mathcal{D}_{n+1} \subset \mathcal{J}_n$ como pré-imagens de $\mathcal{I}_n$. Temos assim que Φ_{n+1} é do tipo F_2 , ou seja, $\mathcal{C}_{n+1}, \mathcal{D}_{n+1} \subset \mathcal{J}_n$ e são aplicados sobre $\mathcal{I}_n$. Temos $\Phi_{n+1} = \Phi_n$ nestes domínios. Fica determinado que $\mathcal{I}_{n+1}$ e $\mathcal{J}_{n+1}$ são aplicados sobre $\mathcal{J}_n$ e $\Phi_{n+1} = \Phi_n^2$ nestes domínios.

Em seguida definimos $\mathcal{I}_{n+2}, \mathcal{J}_{n+2}$ como pré-imagens de $\mathcal{C}_n, \mathcal{D}_n$ respectivamente e $\tilde{\mathcal{C}}_{n+2}, \tilde{\mathcal{D}}_{n+2}$ como pré-imagens de $\mathcal{J}_{n+2}$. Assim temos que Φ_{n+2} é do tipo F_1 novamente.

Temos então que $\tilde{\mathcal{C}}_{n+2}, \tilde{\mathcal{D}}_{n+2} \subset \mathcal{I}_{n+1}$ e são aplicados sobre $\mathcal{J}_{n+2}$. Ocorre que $\Phi_{n+2} = \Phi_{n+1}$ nestes domínios. Também temos que $\mathcal{I}_{n+2}$ e $\mathcal{J}_{n+2}$ são aplicados sobre $\mathcal{I}_n$ e $\Phi_{n+2} = \Phi_{n+1}^2$ nestes domínios. Continuando a indução, observamos que para $k = 0, 1, 2, \dots$, se satisfaz que $\mathcal{I}_{n+2k}$ é o domínio do primeiro-retorno a $\mathcal{I}_{n+2k-2}$.

Provaremos o crescimento linear do módulo do anel $(\mathcal{I}_{n+2k-2} \setminus \overline{\mathcal{I}_{n+2k}})$. Para isto escolhemos um sistema de 6 anéis $A_n^1, \dots, A_n^6$ associados a $\tilde{\mathcal{C}}_n$ e a $\tilde{\mathcal{D}}_n$ dentro de $\mathcal{I}_{n-2}$. No caso em que Φ_n é do tipo $F_1 F_2$ estes anéis satisfazem as seguintes propriedades:

- Todos os anéis estão contidos em $\mathcal{I}_{n-2}$.
- O disco topológico $\mathcal{I}_n$ está contido na componente limitada do complementar de A_n^2 e os discos topológicos $\tilde{\mathcal{C}}_n$ e $\tilde{\mathcal{D}}_n$ estão contidos na componente ilimitada.
- O anel A_n^1 está contido na interseção de $\mathcal{I}_{n-2}$ com a componente ilimitada do complementar de A_n^2 .
- O disco topológico $\mathcal{I}_n$ está contido na componente ilimitada do complementar de $A_n^3 \cup A_n^5$.
- O anel A_n^4 está contido na interseção de $\mathcal{I}_{n-2}$ com a componente ilimitada do complementar de A_n^3 , e o anel A_n^6 está contido na interseção de $\mathcal{I}_{n-2}$ com a componente ilimitada do complementar de A_n^5 .

A partir destes 6 anéis construiremos indutivamente os 6 anéis $A_{n+1}^1, \dots, A_{n+1}^6$ da etapa $n + 1$. Isto será feito tomando pré-imagens por $\Phi_{n|\mathcal{J}_n}$.

$$A_{n+1}^2 := \Phi_{n|\mathcal{J}_n}^{-1}(A_n^5)$$

Figura 5.2: 6 anéis do Fibonacci Tipo F_1

$$A_{n+1}^1 := \Phi_{n|\mathcal{J}_n}^{-1}(A_n^6)$$

$$A_{n+1}^3 := \Phi_{n|\mathcal{J}_n}^{-1}(A_n^2)$$

$$A_{n+1}^5 := \Phi_{n|\mathcal{J}_n}^{-1}(A_n^2).$$

Lembre-se que A_n^2 tem duas pré-imagens, então definimos A_{n+1}^3 como sendo uma pré-imagem de A_n^2 que contém $\tilde{\mathcal{C}}_{n+1}$ na componente limitada do seu complementar, e definimos A_{n+1}^5 como outra pré-imagem de A_n^2 que contém $\tilde{\mathcal{D}}_{n+1}$ na componente limitada do seu complementar. Definimos também A_{n+1}^4 como sendo a interseção de $\mathcal{J}_n$ com a componente ilimitada de complementar de A_{n+1}^3 e A_{n+1}^6 como sendo a interseção de $\mathcal{J}_n$ com a componente ilimitada de complementar de A_{n+1}^5 . Os 6 anéis assim construídos satisfazem as propriedades referidas acima. Assim podemos continuar a indução para construir os 6 anéis $A_{n+2}^1, \dots, A_{n+2}^6$ da etapa $n+2$ tomando pré-imagens por $\Phi_{n+1|\mathcal{I}_{n+1}}$.

Dados os 6 anéis de toda etapa da indução definiremos um sistema de 6 números reais de modo que:

$$a_n^2 \leq \text{mod } A_n^2, \quad a_n^1 \leq \text{mod } A_n^1 + \text{mod } A_n^2$$

$$a_n^3 \leq \text{mod } A_n^3, \quad a_n^4 \leq \text{mod } A_n^3 + \text{mod } A_n^4$$

$$a_n^5 \leq \text{mod } A_n^5, \quad a_n^6 \leq \text{mod } A_n^5 + \text{mod } A_n^6$$

Lema 5.2.1 *Para todo $n \geq n_0$, podemos escolher $a_n^3, \dots, a_n^6$ da seguinte maneira:*

$$a_n^3 = a_n^5, \quad e \quad a_n^4 = a_n^6.$$

Prova: Da construção dos anéis temos que os anéis A_{n+1}^3 e A_{n+1}^5 são definidos como sendo pré-imagens do anel A_n^2 por uma aplicação univalente. Então temos que

$$\text{mod } A_{n+1}^3 = \text{mod } A_{n+1}^5 = \text{mod } A_n^2.$$

Assim podemos escolher a_{n+1}^3, a_{n+1}^5 de tal modo que $a_{n+1}^3 = a_{n+1}^5$.

Agora consideramos o módulo de A_{n+1}^4 . Considere a aplicação de Riemann h que aplica o anel $\{z : d < |z| < 1\}$ sobre o anel A_n^1 . Seja $t = |h^{-1}(\Phi_n(d))|$. Então podemos dividir o anel A_n^1 em dois anéis, $V_i := h(\{z : d < |z| < t\})$ e $V_o := h(\{z : t < |z| < 1\})$. Temos que $\text{mod } A_n^1 = \text{mod } V_i + \text{mod } V_o$. Dividimos também o anel A_n^4 em dois anéis,

$$U_i := \Phi_{n|J_n}^{-1}(V_i) \quad e \quad U_o := \Phi_{n|J_n}^{-1}(V_o).$$

Note que a aplicação Φ_n aplica U_i difeomorficamente sobre V_i e aplica U_o sobre V_o como um recobrimento de grau 2. Como $A_{n+1}^4 = U_i \oplus U_o$ temos que

$$\text{mod } A_{n+1}^4 = \text{mod } V_i + \frac{1}{2} \text{mod } V_o > \frac{1}{2} \text{mod } A_n^1.$$

O mesmo se verifica para o módulo do anel A_{n+1}^6 . Portanto, podemos escolher a_n^4, a_n^6 de modo que $a_n^4 = a_n^6$. ■

Corolário 5.2.1

$$\text{mod}(\mathcal{I}_{n-1} \setminus \overline{\mathcal{I}_n}) = \text{mod}(\mathcal{J}_{n-1} \setminus \overline{\mathcal{J}_n}).$$

Prova: Do Lema 5.2.1 temos que $\text{mod } A_{n-1}^3 = \text{mod } A_{n-1}^5$ e $\text{mod } A_{n-1}^4 = \text{mod } A_{n-1}^6$. De [LV] temos que $\text{mod}(A_{n-1}^3 \oplus A_{n-1}^4) = \text{mod}(A_{n-1}^5 \oplus A_{n-1}^6)$. Como $\mathcal{I}_{n-1} \setminus \overline{\mathcal{I}_n}$ é pré-imagem de $A_{n-1}^3 \oplus A_{n-1}^4$ e $\mathcal{J}_{n-1} \setminus \overline{\mathcal{J}_n}$ é pré-imagem de $A_{n-1}^5 \oplus A_{n-1}^6$ ambos por uma aplicação de recobrimento de grau 2, isto implica que os anéis $\mathcal{I}_{n-1} \setminus \overline{\mathcal{I}_n}$ e $\mathcal{J}_{n-1} \setminus \overline{\mathcal{J}_n}$ têm o mesmo módulo. ■

O Lema 5.2.1 nos permite trabalhar apenas com o sistema de quatro números reais $a_n^i, i = 1, \dots, 4$ para estimar os módulos dos anéis. Provaremos a seguir que os módulos dos anéis principais não decrescem.

Proposição 5.2.1 *Existe uma matriz $\mathbf{A}$ tal que para todo $n \geq n_0$ com Φ_n do tipo F_1 , que satisfaz*

$$(a_{n+2}^1, a_{n+2}^2, a_{n+2}^3, a_{n+2}^4) = (a_n^1, a_n^2, a_n^3, a_n^4)\mathbf{A}.$$

Além disso, a matriz $\mathbf{A}$ tem um auto valor igual a 1 e seu correspondente autovetor possui todas as componentes não negativas.

Prova: Vamos estimar os módulos dos anéis da etapa $n + 1$ por

$$\begin{aligned} A_{n+1}^2 &= \Phi_n^{-1}(A_n^5) \Rightarrow a_{n+1}^2 = \frac{1}{2}a_n^3 \\ A_{n+1}^1 &= \Phi_n^{-1}(A_n^6) \Rightarrow a_{n+1}^1 = \frac{1}{2}a_n^4 \\ A_{n+1}^3 &= \Phi_n^{-1}(A_n^2) \Rightarrow a_{n+1}^3 = a_n^2 \\ A_{n+1}^4 &= \Phi_n^{-1}(A_n^1) \Rightarrow a_{n+1}^4 = \frac{1}{2}(a_n^1 + a_n^2) \end{aligned}$$

Vamos estimar também os módulos dos anéis da etapa $n + 2$ por

$$A_{n+2}^2 = \Phi_{n+1|\mathcal{I}_{n+1}}^{-1}(A_{n+1}^3) \Rightarrow a_{n+2}^2 = \frac{1}{2}a_{n+1}^3$$

$$\begin{aligned}
A_{n+2}^1 &= \Phi_{n+1|\mathcal{I}_{n+1}}^{-1}(A_{n+1}^4) \oplus (\mathcal{I}_n \setminus \overline{\mathcal{I}_{n+1}}) \Rightarrow a_{n+2}^1 = \frac{1}{2}a_{n+1}^4 + a_{n+1}^1 \\
A_{n+2}^3 &= \Phi_{n+1|\mathcal{I}_{n+1}}^{-1}(A_{n+1}^2 \oplus (\mathcal{J}_{n+1} \setminus \overline{\mathcal{J}_{n+2}})) \Rightarrow a_{n+2}^3 = a_{n+1}^2 + \frac{1}{2}a_{n+1}^4 \\
A_{n+2}^4 &= \Phi_{n+1|\mathcal{I}_{n+1}}^{-1}(A_{n+1}^1) \oplus (\mathcal{I}_n \setminus \overline{\mathcal{I}_{n+1}}) \Rightarrow a_{n+2}^4 = \frac{3}{2}a_{n+1}^1 + \frac{1}{2}a_{n+1}^2 + \frac{1}{2}a_{n+1}^4
\end{aligned}$$

Com isso, temos a seguinte relação entre a_{n+2}^i e a_n^i :

$$\begin{aligned}
a_{n+2}^1 &= \frac{1}{4}(a_n^1 + a_n^2 + 2a_n^4) \\
a_{n+2}^2 &= \frac{1}{2}a_n^2 \\
a_{n+2}^3 &= \frac{1}{4}(a_n^1 + a_n^2 + 2a_n^3) \\
a_{n+2}^4 &= \frac{1}{4}(a_n^1 + a_n^2 + a_n^3 + 3a_n^4)
\end{aligned}$$

Temos, então, a seguinte fórmula de recursão:

$$(a_{n+2}^1, a_{n+2}^2, a_{n+2}^3, a_{n+2}^4) = (a_n^1, a_n^2, a_n^3, a_n^4)\mathbf{A}, \quad \text{onde } \mathbf{A} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

A matriz $\mathbf{A}$ tem um auto valor igual a 1 e seu correspondente autovetor $(2, 0, 1, 3)$. ■

A Proposição 5.2.1 prova que se escolhemos os módulos dos anéis da primeira etapa como sendo um múltiplo do auto vetor $(2, 0, 1, 3)$, então os módulos não decrescem. O seguinte Lema mostra que de fato, os módulos crescem linearmente em cada etapa da indução.

Lema 5.2.2 *Existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $n \geq 1$ com Φ_n do tipo F_1 que satisfaz*

$$a_{2n+2}^1 \geq a_{2n}^1 + \epsilon, \quad a_{2n+2}^4 \geq a_{2n}^4 + \epsilon.$$

Prova: Vamos considerar a aplicação Φ_{n+1} que aplica $\mathcal{I}_{n+1}$ em $\mathcal{J}_n$. Lembre-se que pela mesma aplicação $\tilde{\mathcal{C}}_{n+2}$ é aplicado sobre $\mathcal{J}_{n+2}$. Sejam $U_2 := A_{n+1}^2 \oplus \mathcal{J}_{n+1} \setminus \overline{\mathcal{J}_{n+2}}$ e $W_2 := A_{n+1}^1$. Sejam também $U_1 := A_{n+2}^3$ e $W_1 := \mathcal{I}_{n+1} \setminus \overline{(A_{n+2}^3 \oplus \tilde{\mathcal{C}}_{n+2})}$. Verifica-se que $\Phi_{n+1}(U_1) = U_2$ e $\Phi_{n+1}(W_1) = W_2$, sendo Φ_{n+1} restrita a U_1 é univalente, e Φ_{n+1} restrita a W_1 é um recobrimento de grau 2.

Figura 5.3: Crescimento do módulo no Tipo F_1F_2

Sabemos que $\text{mod}(\mathcal{J}_{n+1} \setminus \overline{\mathcal{J}_{n+2}}) \geq \frac{1}{2}(\text{mod } A_{n+1}^3 + \text{mod } A_{n+1}^4)$. Então temos que

$$\text{mod } U_2 \geq \frac{1}{4}(a_n^1 + a_n^2 + 2a_n^3),$$

$$\text{mod } W_2 + \text{mod } U_2 \geq \frac{1}{4}(a_n^1 + a_n^2 + 2a_n^4).$$

Então pelo Lema 3.2.1 existe uma constante $\epsilon_n > 0$ tal que

$$\text{mod}(U_1 \oplus W_1) \geq \frac{1}{4}(a_n^1 + a_n^2 + a_n^3 + a_n^4) + \epsilon_n.$$

Como A_{n+2}^4 é definido como a união de W_1 e $\mathcal{I}_n \setminus \overline{\mathcal{I}_{n+1}}$ e que $\text{mod}(\mathcal{I}_n \setminus \overline{\mathcal{I}_{n+1}}) \geq a_n^4/2$ resulta-se que

$$\text{mod}(A_{n+2}^3 \oplus A_{n+2}^4) \geq \frac{1}{4}(a_n^1 + a_n^2 + a_n^3 + 3a_n^4) + \epsilon_n,$$

onde ϵ_n depende de δ_n e tal que $\text{mod } W_2 \geq \delta_n$. Vamos denotar por a_n o vetor $(a_n^1, a_n^2, a_n^3, a_n^4)$ e vamos definir $a_{n_0} = (\alpha, 0, 0, 0)$ com $\alpha > 0$. Então aplicando a matriz $\mathbf{A}$ da Proposição 5.2.1 obtemos

$$a_{n_0+2} = (\alpha/4, 0, \alpha/4, \alpha/4).$$

A presença do auto valor 1 da matriz $\mathbf{A}$ garante que a_n^1, a_n^3 e a_n^4 estejam afastados de zero sendo maiores que uma constante positiva, digamos, δ . Lembre-se que $W_2 = \Phi_n^{-1}(A_n^4)$ e A_n^4 contém $\mathcal{I}_{n-2} \setminus \overline{\mathcal{I}_{n-1}}$. Como

$$\text{mod}(\mathcal{I}_{n-2} \setminus \overline{\mathcal{I}_{n-1}}) \geq \frac{1}{2}(\text{mod } A_{n-2}^3 + \text{mod } A_{n-2}^4)$$

temos que

$$\text{mod } W_2 \geq \frac{1}{4}a_{n-2}^4 \geq \frac{1}{4}\delta.$$

Isto implica que existe uma constante $\epsilon > 0$ que independe de n tal que $\epsilon \geq \epsilon$ e assim obtemos o aumento dos números a_n^1 e a_n^4 no processo da indução. Isto conclui a prova. ■

5.2.2 Polinômios cúbicos eventualmente Fibonacci do tipo $F_3F_4F_5$

Assumimos que ϕ_{n_0} é do tipo F_3 e pelo Teorema 2.3.2 teremos que ϕ_{n_0+3i} , ϕ_{n_0+3i+1} e ϕ_{n_0+3i+2} , para $i \geq 0$, são do tipo F_3 , F_4 e F_5 , respectivamente. Dado então ϕ_n do tipo F_3 temos que $C_n \subset I_{n-1}$, $D_n \subset J_{n-1}$ e $\phi_n(C_n) = J_{n-1}$, $\phi_n(D_n) = I_{n-1}$. Isto determina que I_n é aplicado sobre I_{n-1} e J_n sobre J_{n-1} . Agora temos que ϕ_{n+1} é do tipo F_4 , ou seja $C_{n+1} \subset J_n$, $D_{n+1} \subset I_n$ e $\phi_{n+1}(C_{n+1}) = J_n$, $\phi_{n+1}(D_{n+1}) = I_n$. Temos também que I_{n+1} é aplicado sobre J_n , e J_{n+1} sobre I_n . Assim temos que ϕ_{n+2} é do tipo F_5 , ou seja $C_{n+2} \subset J_{n+1}$, $D_{n+2} \subset I_{n+1}$ e $\phi_{n+2}(C_{n+2}) = I_{n+1}$, $\phi_{n+2}(D_{n+2}) = J_{n+1}$. Temos assim que ϕ_{n+3} é novamente do tipo F_3 .

Proposição 5.2.2 *Dada uma aplicação bimodal f do tipo $F_3F_4F_5 \dots$ existe uma seqüência de intervalos $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset U_4 \supset \dots \supset \{c\}$, tal que U_{n+1} é componente do domínio do primeiro retorno a U_n . Verifica-se também que a aplicação de primeiro retorno de U_{2n} a U_{2n-1} é unimodal e a de U_{2n+1} a U_{2n} é trimodal, ou seja, com três pontos críticos.*

Prova: Vamos considerar a aplicação de primeiro retorno ϕ_1 a $I_0 \cup J_0$ que é do tipo F_5 . Então temos dois domínios críticos $I_1 \subset I_0$, $J_1 \subset J_0$ e dois domínios pós-críticos $C_1 \subset J_0$, $D_1 \subset I_0$, sendo que

$$\begin{aligned} \phi_1 : I_1 &\rightarrow J_0, & \phi_1 : J_1 &\rightarrow I_0 \\ \phi_1 : C_1 &\rightarrow I_0, & \phi_1 : D_1 &\rightarrow J_0 \end{aligned}$$

Primeiro passo: Seja $U_1 := I_1$ e definimos em U_1 uma aplicação de primeiro retorno a $I_{-1} = (0, p)$, à qual chamamo-la ψ_1 . Desta forma temos que $\psi_1|_{U_1} = f|_{J_0} \circ \phi_1|_{U_1}$. Temos então que essa aplicação é trimodal, ou seja, possui três pontos críticos, sendo que dois valores críticos são idênticos e estão contidos em $I_{-1} \setminus \overline{I_0}$ e um valor crítico está contido

em U_1 . Seja $U_2 \ni c$ o intervalo maximal contido em U_1 tal que $\psi_1(U_2) \subset U_1$. Definimos neste domínio $\phi_2 = \psi_1$. A seguir definimos $C_2 := \phi_1^{-1}(J_1)$, $D_2 := \phi_1^{-1}(U_1)$ e nestes intervalos definimos $\phi_2 := \phi_1$. Como $\phi_1(d) \in D_1$ definimos $J_2 := \phi_1^{-1}(D_1)$ e $\phi_2 := \phi_1^2$ neste domínio. Sendo assim temos que $C_2 \subset U_1$, $D_2 \subset J_1$ e

$$\begin{aligned} \phi_2 : U_2 &\rightarrow U_1, & \phi_2 : J_2 &\rightarrow J_0 \\ \phi_2 : C_2 &\rightarrow J_1, & \phi_2 : D_2 &\rightarrow U_1 \end{aligned}$$

Verifica-se que ϕ_2 é do tipo F_3 .

Figura 5.4: Fibonacci Tipo F_5 e trimodal ψ_1 definida em U_1

Passo n : Vamos supor que para $3n - 1$ se satisfaz

$$\begin{aligned}\phi_{3n-1} : U_{2n} &\rightarrow U_{2n-1}, & \phi_{3n-1} : J_{3n-1} &\rightarrow J_{3n-3} \\ \phi_{3n-1} : C_{3n-1} &\rightarrow J_{3n-2}, & \phi_{3n-1} : D_{3n-1} &\rightarrow U_{2n-1}\end{aligned}$$

A seguir construiremos os domínios e a aplicação para o nível $3n$. Sabe-se que $\phi_{3n}(c) \in J_{3n-1}$ e $\phi_{3n}(d) \in U_{2n}$. Então construimos os domínios C_{3n}, D_{3n} de modo que $C_{3n} := \phi_{3n-1}^{-1}(J_{3n-1})$, $D_{3n} := \phi_{3n-1}^{-1}(U_{2n})$ e definimos nestes domínios $\phi_{3n} := \phi_{3n-1}$. Sejam também $I_{3n} := \phi_{3n-1}^{-1}(C_{3n-1})$, $J_{3n} := \phi_{3n-1}^{-1}(D_{3n-1})$ e definimos nestes domínios $\phi_{3n} := \phi_{3n-1}^2$. Então temos que $C_{3n} \subset J_{3n-1}$, $D_{3n} \subset U_{2n}$ e

$$\begin{aligned}\phi_{3n} : I_{3n} &\rightarrow J_{3n-2}, & \phi_{3n} : J_{3n} &\rightarrow U_{2n-1} \\ \phi_{3n} : C_{3n} &\rightarrow J_{3n-1}, & \phi_{3n} : D_{3n} &\rightarrow U_{2n}\end{aligned}$$

Verifica-se que ϕ_{3n} é do tipo F_4 .

Vamos construir agora os domínios e a aplicação para o nível $3n + 1$. Sabemos que $\phi_{3n+1}(c) \in J_{3n}$ e $\phi_{3n+1}(d) \in I_{3n}$. Então construimos os domínios C_{3n+1}, D_{3n+1} de modo que $C_{3n+1} := \phi_{3n}^{-1}(I_{3n})$, $D_{3n+1} := \phi_{3n}^{-1}(J_{3n})$ e definimos nestes domínios $\phi_{3n+1} := \phi_{3n}$. Construimos também $I_{3n+1} := \phi_{3n}^{-1}(C_{3n})$, $J_{3n+1} := \phi_{3n}^{-1}(D_{3n})$ e definimos nestes domínios $\phi_{3n+1} := \phi_{3n}^2$. Assim temos que $C_{3n+1} \subset J_{3n}$, $D_{3n+1} \subset I_{3n}$ e

$$\begin{aligned}\phi_{3n+1} : I_{3n+1} &\rightarrow J_{3n-1}, & \phi_{3n+1} : J_{3n+1} &\rightarrow I_{3n-1} \\ \phi_{3n+1} : C_{3n+1} &\rightarrow I_{3n}, & \phi_{3n+1} : D_{3n+1} &\rightarrow J_{3n}\end{aligned}$$

Verifica-se que ϕ_{3n+1} é do tipo F_5 .

Vamos considerar a aplicação $\phi_{3n} : J_{3n} \rightarrow U_{2n-1}$. Temos então um intervalo $\tilde{J}_{3n}$ tal que $J_{3n+1} \subset \tilde{J}_{3n} \subset J_{3n}$ e $\phi_{3n}(\partial\tilde{J}_{3n}) \subset \partial U_{2n}$. Daí definimos o intervalo $U_{2n+1} := \phi_{3n+1}^{-1}(\tilde{J}_{3n})$. Definimos neste intervalo $\psi_{2n+1} := \phi_{3n} \circ \phi_{3n+1}$. Assim temos que U_{2n+1} é

o domínio do primeiro retorno a U_{2n} e $\psi_{2n+1} : U_{2n+1} \rightarrow U_{2n}$ é uma aplicação trimodal, sendo que dois valores são idênticos e estão contidos em $D_{3n} \subset U_{2n}$ e um valor crítico em U_{2n+1} . Seja então $U_{2n+2} \subset U_{2n+1}$ o intervalo maximal tal que $\psi_{2n+1}(U_{2n+2}) \subset U_{2n+1}$. Então definimos neste intervalo $\phi_{3n+2} := \psi_{2n+1}$. A seguir definimos $C_{3n+2} := \phi_{3n+1}^{-1}(J_{3n+1})$, $D_{3n+2} := \phi_{3n+1}^{-1}(U_{2n+1})$ e nestes intervalos definimos $\phi_{3n+2} := \phi_{3n+1}$. Definimos também $J_{3n+2} := \phi_{3n+1}^{-1}(D_{3n+1})$ e $\phi_{3n+2} := \phi_{3n+1}^2$ neste intervalo. Sendo assim temos que $C_{3n+2} \subset U_{2n+1}$, $D_{3n+2} \subset J_{3n+1}$ e

$$\begin{aligned} \phi_{3n+2} : U_{2(n+1)} &\rightarrow U_{2n+1}, & \phi_{3n+2} : J_{3n+2} &\rightarrow J_{3n} \\ \phi_{3n+2} : C_{3n+2} &\rightarrow J_{3n+1}, & \phi_{3n+2} : D_{3n+2} &\rightarrow U_{2n+1} \end{aligned}$$

Verifica-se que ϕ_{3n+2} é do tipo F_3 . Isto satisfaz a hipótese da indução, e podemos continuar a construção. Isto conclui a prova da Proposição. $\blacksquare$

A seguir vamos mostrar que a sequência obtida na Proposição 5.2.2 implica o decaimento exponencial de geometria. Dados então $\phi_n, U_n, I_n, J_n, C_n, D_n$ consideramos a continuação analítica $\Phi_n, \mathcal{U}_n, \mathcal{I}_n, \mathcal{J}_n, \mathcal{C}_n, \mathcal{D}_n$.

Lema 5.2.3 *Dada a sequência de domínios de primeiro retorno da Proposição 5.2.2, existem constantes $C > 0, \lambda > 1$ tal que para todo $n > 0$,*

$$\text{mod}(\mathcal{U}_{2n-1} \setminus \overline{\mathcal{U}_{2n}}) \geq C\lambda^n.$$

Prova: Como a construção se repete de modo análogo no decorrer da indução, estimaremos o crescimento dos módulos do nível $n = 1$ para $n = 2$. Lembre-se que $\mathcal{U}_2$ é o domínio do primeiro retorno a $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{J}_2$ é o domínio do primeiro retorno a $\mathcal{J}_0$. Então vamos construir quatro anéis A_2^i , $i = 1, 2, 3, 4$ para $\mathcal{U}_2, \mathcal{C}_2$ dentro de $\mathcal{U}_1$. Vamos construir também quatro anéis B_2^i , $i = 1, 2, 3, 4$ para $\mathcal{J}_2, \mathcal{D}_2$ dentro de $\mathcal{J}_0$.

Figura 5.5: 8 anéis do Fibonacci Tipo F_3

A seguir construímos os anéis para o nível 3 tomando pré-imagens dos anéis do nível 2 pela aplicação Φ_2 . Como $\mathcal{C}_3 \subset \mathcal{J}_2$ temos anéis B_3^i para $\mathcal{C}_3$

$$\begin{aligned} B_3^2 &= \Phi_2^{-1}(B_2^3) \Rightarrow b_3^2 = \frac{1}{2}b_2^3 \\ B_3^1 &= \Phi_2^{-1}(B_2^4) \Rightarrow b_3^1 = \frac{1}{2}b_2^4 \\ B_3^3 &= \Phi_2^{-1}(B_2^2) \Rightarrow b_3^3 = b_2^2 \\ B_3^4 &= \Phi_2^{-1}(B_2^1) \Rightarrow b_3^4 = \frac{1}{2}b_2^1 \end{aligned}$$

Também como $\mathcal{D}_3 \subset \mathcal{U}_2$, definimos os anéis A_3^i para $\mathcal{D}_3$

$$\begin{aligned} A_3^2 &= \Phi_2^{-1}(A_2^3) \Rightarrow a_3^2 = \frac{1}{2}a_2^3 \\ A_3^1 &= \Phi_2^{-1}(A_2^4) \Rightarrow a_3^1 = \frac{1}{2}a_2^4 \\ A_3^3 &= \Phi_2^{-1}(A_2^2) \Rightarrow a_3^3 = a_2^2 \\ A_3^4 &= \Phi_2^{-1}(A_2^1) \Rightarrow a_3^4 = \frac{1}{2}a_2^1. \end{aligned}$$

A aplicação Φ_3 aplica $\mathcal{I}_3$ em $\mathcal{J}_1$ e $\mathcal{J}_3$ em $\mathcal{U}_1$. Então, definimos os anéis B_4^i para

$\mathcal{C}_4 \subset \mathcal{J}_3$ tomando pré-imagens dos anéis A_3^i e do anel $\mathcal{U}_1 \setminus \overline{\mathcal{U}_2}$. Temos então

$$\begin{aligned} B_4^2 &= \Phi_3^{-1}(A_3^3) \Rightarrow b_4^2 = \frac{1}{2}a_3^3 \\ B_4^1 &= \Phi_3^{-1}(A_3^4 \oplus (\mathcal{U}_1 \setminus \overline{\mathcal{U}_2})) \Rightarrow b_4^1 = \frac{1}{2}a_3^4 + \frac{1}{2}a_2^1 + \frac{1}{2}a_2^2 \\ B_4^3 &= \Phi_3^{-1}(A_3^2) \Rightarrow b_4^3 = a_3^2 \\ B_4^4 &= \Phi_3^{-1}(B_3^1 \oplus (\mathcal{U}_1 \setminus \overline{\mathcal{U}_2})) \Rightarrow b_4^4 = \frac{1}{2}a_3^1 + \frac{1}{2}a_2^1 + \frac{1}{2}a_2^2. \end{aligned}$$

Vamos definir também os anéis A_4^i para $\mathcal{D}_4$. Lembre-se que $\mathcal{J}_1 \setminus \overline{\mathcal{J}_2}$ contém pelo menos o anel B_2^2 .

$$\begin{aligned} A_4^2 &= \Phi_3^{-1}(B_3^3) \Rightarrow a_4^2 = \frac{1}{2}b_3^3 \\ A_4^1 &= \Phi_3^{-1}(B_3^4 \oplus (\mathcal{J}_1 \setminus \overline{\mathcal{J}_2})) \Rightarrow a_4^1 = \frac{1}{2}b_3^4 + \frac{1}{2}b_2^2 \\ A_4^3 &= \Phi_3^{-1}(B_3^2) \Rightarrow a_4^3 = b_3^2 \\ A_4^4 &= \Phi_3^{-1}(B_3^1 \oplus (\mathcal{J}_1 \setminus \overline{\mathcal{J}_2})) \Rightarrow b_4^4 = \frac{1}{2}b_3^1 + \frac{1}{2}b_2^2. \end{aligned}$$

Agora vamos estimar o módulo do anel $\mathcal{I}_4 \setminus \overline{\mathcal{U}_3}$. A aplicação Φ_4 aplica este anel sobre $(\mathcal{J}_2 \setminus \overline{\mathcal{J}_3}) \oplus (\mathcal{J}_3 \setminus \overline{\mathcal{J}_3})$ e o anel $\mathcal{J}_3 \setminus \overline{\mathcal{J}_3}$ é aplicado por Φ_3 sobre $\mathcal{U}_1 \setminus \overline{\mathcal{U}_2}$. Então temos que

$$\text{mod}(\mathcal{I}_4 \setminus \overline{\mathcal{U}_3}) \geq \frac{1}{2}b_3^1 + \frac{1}{2}b_3^2 + \frac{1}{4}a_2^1 + \frac{1}{4}a_2^2.$$

A seguir, vamos estimar o módulo dos anéis para o nível 5. Lembre-se que Φ_5 aplica $\mathcal{U}_4$ em $\mathcal{U}_3$ e $\mathcal{J}_5$ em $\mathcal{J}_3$. Então, consideramos os anéis para $\mathcal{C}_5$ dentro de $\mathcal{U}_3$ e para $\mathcal{D}_5$ dentro de $\mathcal{J}_3$. Assim temos anéis para $\mathcal{C}_5$ que

$$\begin{aligned} A_5^2 &= \Psi_4^{-1}(\mathcal{I}_3 \setminus \overline{\mathcal{U}_3}) \Rightarrow a_5^2 = \frac{1}{4}b_3^1 + \frac{1}{4}b_3^2 + \frac{1}{8}a_2^1 + \frac{1}{8}a_2^2 + \frac{1}{2}a_4^1 + \frac{1}{2}a_4^2 \\ A_5^1 &= \Psi_4^{-1}(\mathcal{U}_2 \setminus \overline{\mathcal{I}_3}) \Rightarrow a_5^1 = \frac{1}{2}a_3^2 + \frac{1}{4}a_3^1 \\ A_5^3 &= \Psi_4^{-1}(A_3^3) \Rightarrow a_5^3 = \frac{1}{2}a_3^3 \\ A_5^4 &= \Psi_4^{-1}(A_3^4) \Rightarrow a_5^4 = \frac{1}{4}a_3^4. \end{aligned}$$

Temos também anéis para $\mathcal{D}_5 \subset \mathcal{J}_3$

$$\begin{aligned}
B_5^2 &= \Phi_4^{-1}(A_4^3 \oplus A_4^4) \Rightarrow b_5^2 = \frac{1}{2}a_4^3 + \frac{1}{2}a_4^4 \\
B_5^1 &= \Phi_4^{-1}(\mathcal{U}_2 \setminus \overline{\mathcal{I}_3}) \oplus (\mathcal{J}_3 \setminus \overline{\mathcal{J}_4}) \Rightarrow b_5^1 = \frac{1}{2}a_3^1 + \frac{1}{2}a_3^2 + b_4^1 + b_4^2 \\
B_5^3 &= \Phi_4^{-1}(A_4^2 \oplus (\mathcal{I}_4 \setminus \overline{\mathcal{U}_3})) \Rightarrow b_5^3 = a_4^2 + \frac{1}{2}b_3^1 + \frac{1}{2}b_3^2 + \frac{1}{4}a_2^1 + \frac{1}{4}a_2^2 \\
B_5^4 &= \Phi_4^{-1}(A_4^1 \oplus (\mathcal{U}_2 \setminus \overline{\mathcal{I}_3})) \oplus (\mathcal{J}_3 \setminus \overline{\mathcal{J}_4}) \Rightarrow b_5^4 = \frac{1}{2}a_4^1 + \frac{1}{2}a_3^1 + \frac{1}{2}a_3^2 + b_4^1 + b_4^2.
\end{aligned}$$

Isto com os resultados anteriores temos que

$$\begin{aligned}
a_5^1 &= \frac{1}{4}a_2^3 + \frac{1}{8}a_2^4 \\
a_5^2 &= \frac{1}{8}a_2^1 + \frac{1}{8}a_2^2 + \frac{1}{8}b_2^1 + \frac{1}{2}b_2^2 + \frac{1}{8}b_2^3 + \frac{1}{8}b_2^4 \\
a_5^3 &= \frac{1}{2}a_2^2 \\
a_5^4 &= \frac{1}{8}a_2^1 \\
b_5^1 &= \frac{3}{4}a_2^1 + a_2^2 + \frac{1}{4}a_2^3 + \frac{1}{4}a_2^4 \\
b_5^2 &= \frac{1}{4}b_2^2 + \frac{1}{4}b_2^3 + \frac{1}{8}b_2^4 \\
b_5^3 &= \frac{1}{4}a_2^1 + \frac{1}{4}a_2^2 + \frac{1}{2}b_2^2 + \frac{1}{4}b_2^3 + \frac{1}{4}b_2^4 \\
b_5^4 &= \frac{3}{4}a_2^1 + a_2^2 + \frac{1}{4}a_2^3 + \frac{1}{4}a_2^4 + \frac{1}{8}b_2^1 + \frac{1}{4}b_2^2.
\end{aligned}$$

Então, podemos escrever esta relação do seguinte modo:

$$(a_5^1, a_5^2, a_5^3, a_5^4, b_5^1, b_5^2, b_5^3, b_5^4) = (a_2^1, a_2^2, a_2^3, a_2^4, b_2^1, b_2^2, b_2^3, b_2^4)\mathbf{B},$$

$$\text{onde } \mathbf{B} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 8 & 0 & 2 & 8 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

O polinômio característica desta matriz é:

$$p_B(\lambda) = \lambda^8 - 5\lambda^7 - 21\lambda^6 - 21\lambda^5 - 52\lambda^4 - 14\lambda^3 + 8\lambda^2.$$

Verifica-se, então, que a matriz obtida possui um autovalor maior do que 1 e um autovetor com componentes todas positivas.

Lembre-se que $C_2 = \phi_1^{-1}(J_1)$ e $f(J_1)$ está contido no complementar de I_0 , ou seja $\psi_1(C_2)$ está contido no complementar de I_0 , enquanto $\phi_2(U_2) \subset U_1$. Isto implica que U_2 e C_2 estão afastados entre si por um intervalo com comprimento positivo e que C_2 está afastado do bordo de U_1 por uma distância positiva. Este fato nos permite tomar os módulos dos anéis iniciais A_2^i de modo que:

$$(a_2^1, a_2^2, a_2^3, a_2^4) = (\alpha, \alpha, \alpha, \alpha),$$

onde $\alpha > 0$. Lembre-se também que os anéis B_2^i são definidos no anel $\mathcal{J}_0 \setminus \overline{\mathcal{J}_2}$ tendo $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{J}_1$. Como o anel $\mathcal{J}_0 \setminus \overline{\mathcal{J}_1}$ tem módulo positivo, podemos escolher $(b_2^1, b_2^2, b_2^3, b_2^4) =$

$(\alpha, 0, 0, \alpha)$. Aplicando a matriz adquirida na proposição obtemos que

$$(a_5^1, a_5^2, a_5^3, a_5^4, b_5^1, b_5^2, b_5^3, b_5^4) = \frac{1}{8}(3\alpha, 4\alpha, 4\alpha, \alpha, 18\alpha, \alpha, 6\alpha, 19\alpha)$$

sendo assim todas as componentes positivas. Podemos então escolher os módulos dos anéis do nível 5 como sendo um múltiplo de autovetor da matriz $\mathbf{B}$. Aplicando a matriz a este vetor, por indução, resulta-se que $\text{mod}(\mathcal{U}_{2n-1} \setminus \overline{\mathcal{U}_{2n}})$ cresce exponencialmente, concluindo assim a prova da Proposição. ■

Lembre-se que existe uma seqüência de domínios do primeiro retorno definido como sendo a seqüência das peças de Yoccoz $P_0(c) \supset P_{m_1}(c) \supset P_{m_2}(c) \supset \dots$ e $P_0(d) \supset P_{n_1}(d) \supset P_{n_2}(d) \supset \dots$. Mostraremos na Proposição seguinte que a seqüência U_n obtida na Proposição 5.2.2 está bem encaixada na partição de Yoccoz.

Proposição 5.2.3 *Para todo $k \geq 1$ verifica-se que*

$$U_{2k-1} = P_{m_{3k-2}}(c) \text{ e } U_{2k} = P_{m_{3k-1}}(c).$$

Prova: Dado o ponto fixo p da aplicação f , inicialmente temos por definição $P_0(c) = (p_c, p) = I_0$ e $P_0(d) = (p, p_d) = J_0$, onde p_c, p_d são pré-imagens de p por f . A seguir $P_{m_1}(c)$, U_1 e $P_{n_1}(d)$, J_1 foram definidos da mesma maneira como sendo domínios críticos de primeiro retorno a $I_0 \cup J_0$. Verifica-se então que

$$P_{m_1}(c) = U_1 \text{ e } P_{n_1}(d) = J_1.$$

Temos também domínios pós-críticos $C_1 = f^{-1}(I_0) = C_{m_1}$ e $D_1 = f^{-1}(J_0) = D_{n_1}$.

Primeiro Passo: Observamos os domínios do nível 2. $P_{m_2}(c)$ é o domínio maximal de primeiro retorno a P_{m_1} por uma aplicação unimodal e é definido por $P_{m_2}(c) = \phi_{n_1}^{-1}(\tilde{C}_{m_1})$. O mesmo verifica-se para U_2 . Temos assim que

$$P_{m_2} = U_2.$$

Temos também os domínios P_{n_2} e J_2 definidos por $P_{n_2}(d) = \phi_{m_1}^{-1}(\tilde{D}_{n_1})$, $J_2 = \phi_1^{-1}(D_1)$. Como $\tilde{D}_{n_1} \subset D_1$ verifica-se então que

$$P_{n_2}(d) \subset J_2.$$

Temos também $C_{m_2} = \phi_{m_1}^{-1}(P_{n_1}(d)) = \phi_1^{-1}(J_1) = C_2$ e $D_{n_2} = \phi_{n_1}^{-1}(P_{m_1}(c)) = \phi_1^{-1}(U_1) = D_2$.

Passo indutivo: Vamos supor que para $k \geq 1$ verifica-se o seguinte fato:

$$P_{m_{3k-1}}(c) = U_{2k}, \quad P_{n_{3k-1}}(d) \subset J_{3k-1},$$

$$C_{m_{3k-1}} \subset C_{3k-1}, \quad D_{n_{3k-1}} \subset D_{3k-1}.$$

A seguir observamos os domínios do nível $3k$ definidos por $P_{m_{3k}}(c) = \phi_{m_{3k-1}}^{-1}(\tilde{C}_{m_{3k-1}})$, $I_{3k} = \phi_{3k-1}^{-1}(C_{3k-1})$, e $P_{n_{3k}}(d) = \phi_{3k-1}^{-1}(\tilde{D}_{n_{3k-1}})$, $J_{3k} = \phi_{3k-1}^{-1}(D_{3k-1})$. Verifica-se então que:

$$P_{m_{3k}}(c) \subset I_{3k} \text{ e } P_{n_{3k}}(d) \subset J_{3k}.$$

Temos também os dominios pós-críticos definidos por $C_{3k} = \phi_{3k-1}^{-1}(J_{3k-1})$, $C_{m_{3k}} = \phi_{n_{3k-1}}^{-1}(P_{n_{3k-1}}(d))$ e $D_{3k} = \phi_{3k-1}^{-1}(I_{3k-1})$, $D_{n_{3k}} = \phi_{m_{3k-1}}^{-1}(P_{m_{3k-1}}(c))$. Verifica-se então que $C_{3k} \supset C_{m_{3k}}$ e $D_{3k} = D_{n_{3k}}$.

Vamos observar agora os domínios do nível $3k+1$ definidos por $P_{m_{3k+1}}(c) = \phi_{m_{3k}}^{-1}(\tilde{C}_{m_{3k}})$, $I_{3k+1} = \phi_{3k}^{-1}(C_{3k})$ e $P_{n_{3k+1}}(d) = \phi_{n_{3k}}^{-1}(\tilde{D}_{n_{3k}})$, $J_{3k+1} = \phi_{3k}^{-1}(D_{3k})$. Verifica-se então que

$$P_{m_{3k+1}}(c) \subset I_{3k+1}, \quad P_{n_{3k+1}}(d) \subset J_{3k+1}.$$

Temos também os domínios pós-críticos $C_{3k+1} = \phi_{3k}^{-1}(I_{3k})$, $C_{m_{3k+1}} = \phi_{n_{3k}}^{-1}(P_{m_{3k}}(c))$ e $D_{3k+1} = \phi_{3k}^{-1}(J_{3k})$, $D_{n_{3k+1}} = \phi_{m_{3k}}^{-1}(P_{n_{3k}}(d))$. Na Proposição 5.2.2, observamos que U_{2k+1} foi definido de modo que

$$\phi_{3k|J_{3k}} \circ \phi_{3k+1|I_{3k+1}}(\partial U_{2k+1}) \subset \partial U_{2k}$$

e que essa aplicação é uma trimodal, sendo aplicação de primeiro retorno de U_{2k+1} a U_{2k} . Entretanto, para $P_{m_{3k+1}}(c)$ temos que

$$\phi_{n_{3k}|P_{n_{3k}}(d)} \circ \phi_{m_{3k+1}|P_{m_{3k+1}}(c)}(\partial P_{m_{3k+1}}(c)) \subset \partial P_{m_{3k+1}}(c).$$

Observamos que esta é a aplicação de primeiro retorno de $P_{m_{3k+1}}(c)$ a $P_{m_{3k+1}}(c)$ como uma aplicação trimodal. Como $U_{2k} = P_{m_{3k+1}}(c)$, $\phi_{n_{3k}|P_{n_{3k}}(d)} = \phi_{3k|J_{3k}}$ e $\phi_{m_{3k+1}|P_{m_{3k+1}}(c)} = \phi_{3k+1|I_{3k+1}}$, temos que

$$P_{m_{3k+1}}(c) = U_{2k+1}.$$

Sabemos que $P_{m_{3k+2}}(c)$ é o domínio de primeiro retorno a $P_{m_{3k+1}}(c)$, ou seja, $P_{m_{3k+2}}(c) = \phi_{m_{3k+1}}^{-1}(P_{m_{3k+1}}(c))$, e U_{2k+2} foi definido como sendo o domínio maximal contido em U_{2k+1} tal que $\psi_{2k+1}(U_{2k+2}) \subset U_{2k+1}$, ou seja, domínio crítico do primeiro retorno a U_{2k+1} . Estas construções implicam que

$$P_{m_{3k+2}} = U_{2k+2} \text{ e } P_{n_{3k+2}}(d) \subset J_{3k+2}.$$

Temos também os domínios pós-críticos correspondentes satisfazendo $C_{m_{3k+2}} \subset C_{3k+2}$, $D_{n_{3k+2}} \subset D_{3k+2}$, satisfazendo assim a condição da indução. Isto conclui a prova da Proposição. ■

O resultado da Proposição 5.2.3 com o Lema 5.2.3 prova que $\frac{|P_{m_{3k+2}}|}{|P_{m_{3k+1}}|}$ decai exponencialmente.

Capítulo 6

Hiperbolicidade Induzida

6.1 Existência da Aplicação Induzida

Nesta seção mostraremos que uma aplicação f bimodal sem retornos centrais induz uma aplicação $\mathcal{F}$ de tal forma que $\mathcal{F}$ restrita a cada componente conexa do seu domínio é monótona e a imagem de $\mathcal{F}$ é união finita de intervalos. Exigiremos ainda que todos os ramos de $\mathcal{F}^n$, $n = 1, 2, \dots$, tenham distorção uniformemente limitada. A partir desta aplicação induzida mostraremos mais tarde a hiperbolicidade da aplicação.

Proposição 6.1.1 *Dada f uma aplicação bimodal sem retornos centrais existem intervalos I_0, J_0 e uma família $\{\Delta_i\}$ enumerável (possivelmente finita) de intervalos abertos dois a dois disjuntos. Existem também uma aplicação $\mathcal{F}$ e uma constante α tal que:*

1. $(I_0 \cup J_0) \setminus \cup_i \Delta_i$ é um conjunto de Cantor.
2. Para cada i , existe n_i tal que $\mathcal{F}|_{\Delta_i} = f|_{\Delta_i}^{n_i}$.

3. Para cada Δ_i , aplicação $\mathcal{F}$ restrita a Δ_i é monótona sobre I_0 ou J_0 .
4. $\mathcal{F}|_{\Delta_i} = f|_{\Delta_i}^{n_i}$ é α -extensível (isto é: cada Δ_i possui uma vizinhança $\hat{\Delta}_i$ tal que $f^{n_i}(\hat{\Delta}_i)$ é uma α -vizinhança de $f^{n_i}(\Delta_i)$).

A propriedade do intervalo $\hat{\Delta}$ no item 4 da Proposição implica o seguinte resultado:

Corolário 6.1.1 *Dada f uma aplicação bimodal sem retornos centrais existem intervalos I_0, J_0 e uma família $\{\Delta_i\}$ enumerável (possivelmente finita) de intervalos abertos dois a dois disjuntos. Existem também uma aplicação $\mathcal{F}$ e uma constante α tal que, para todo $k \geq 1$, $\mathcal{F}^k$ restrita a cada componente conexa do seu domínio é α -extensível.*

Prova: Sejam i, j tais que $f^{n_j}(\Delta_j) \supset \Delta_i$. Vamos assumir que $\Delta_i \subset I_0$. Então, pela Proposição 6.1.1, temos que $f^{n_j}(\hat{\Delta}_j)$ é uma α -vizinhança de I_0 . Seja $\Delta_{ji} = \Delta_j \cap f^{-n_j}(\Delta_i)$. Definimos $\hat{\Delta}_{ji} := \hat{\Delta}_j \cap f^{-n_i}(\hat{\Delta}_i)$. Como $\hat{\Delta}_i$ está contido em uma τ_0 -vizinhança de I_0 , temos que $\hat{\Delta}_{ji} \subset \hat{\Delta}_j$ e $f^{n_j+n_i}$ aplica $\hat{\Delta}_{ji}$ sobre uma α -vizinhança de I_0 ou J_0 . Como esta situação se satisfaz para quaisquer i, j tal que $f^{n_j}(\Delta_j) \supset \Delta_i$, implica-se que $\mathcal{F}^2$ é α -extensível. Semelhantemente, para todo $k \geq 1$, os ramos de $\mathcal{F}^k$ são α -extensíveis. ■

Prova da Proposição 6.1.1

Construção inicial

Dada a aplicação bimodal f com pontos críticos c, d ($c < d$) e ponto fixo q , definimos dois intervalos $I_0 = (q_c, q)$ e $J_0 = (q, q_d)$, onde q_c, q_d ($q_c < q_d$) são pré-imagens de q por f . Consideramos a aplicação do Primeiro Retorno $\mathcal{F}_1$ induzida por f em $I_0 \cup J_0$. Pela hipótese $f(c), f(d)$ não estão contidos em $I_0 \cup J_0$, então sejam m_0 e n_0 números mínimos de inteiros positivos tais que $f^{m_0}(c) \in I_0 \cup J_0$ e $f^{n_0}(d) \in I_0 \cup J_0$. Então podemos ver

facilmente que $\mathcal{F}_1$ possui $2(m_0 - 1) + 2(n_0 - 1)$ ramos monótonos e dois ramos críticos. Usaremos a notação I_1 para o domínio do ramo crítico que contém c , J_1 para o domínio do ramo crítico contendo d e Δ_i para os domínios dos ramos monótonos. Chamaremos de ϕ_1 aos ramos críticos definidos em $I_1 \cup J_1$. Desta forma podemos definir uma partição ξ_1 de $I_0 \cup J_0$ por

$$\xi_1 : I_0 \cup J_0 = (\cup \Delta) \cup I_1 \cup J_1$$

e temos

$$\mathcal{F}_1 = \begin{cases} f^{n_i} : \Delta_i \rightarrow I_0 \text{ ou } J_0 \\ \phi_1 : I_1 \cup J_1 \rightarrow I_0 \cup J_0 \end{cases}$$

onde n_i é um número inteiro tal que $\mathcal{F}_1|_{\Delta_i} = f^{n_i}$.

Figura 6.1:

Agora, vamos considerar a extendibilidade de cada ramo de $\mathcal{F}_1$.

Extendibilidade:

Sejam Δ_0, Δ'_0 dois intervalos externos da partição ξ_1 contidos em I_0 e Δ_1, Δ'_1 , contidos em J_0 . Sejam $h_0 := f|_{[0, q_c]}$ e $h_1 := f|_{[q_d, 1]}$. Assumiremos que Δ_0 e Δ_1 têm q (ponto fixo) no seu bordo, e sejam $g_0 := f|_{\Delta_0}$ e $g_1 := f|_{\Delta_1}$. Seja $z_0 (\neq q)$ o bordo de Δ_0 e $z_1 (\neq q)$ o bordo de Δ_1 . Consideramos uma seqüência de pré-imagens de (z_0, z_1) definida para $n = 0, 1, 2, \dots$

$$(z_0^n, z_1^n) = ((g_0^{-1} \circ g_1^{-1})^n(z_0), (g_1^{-1} \circ g_0^{-1})^n(z_1)).$$

Note que (z_0^n, z_1^n) converge a q , pois q é um ponto fixo repulsor. Temos então o número mínimo τ tal que, $h_0^{-1}(z_0^\tau) \in (f^{n_0-1}(d), q_c)$ e $h_1^{-1}(z_1^\tau) \in (q_d, f^{m_0-1}(c))$. Definimos então

$$\hat{I} = (h_0^{-1}(z_0^\tau), g_1^{-1}(z_0^\tau)) \quad \text{e} \quad \hat{J} = (g_0^{-1}(z_1^\tau), h_1^{-1}(z_1^\tau)).$$

Vamos escolher α de tal modo que $\hat{I}$ é uma α -vizinhança de I_0 e $\hat{J}$ é uma α -vizinhança de J_0 .

Podemos verificar facilmente que todos os ramos de $\mathcal{F}_1$ são α -extensíveis. Ainda mais, como $z_0^\tau < g_0^{-1}(z_1^\tau)$ e g_1 é uma aplicação decrescente, temos que $g_1^{-1}(z_0^\tau) > g_1^{-1} \circ g_0^{-1}(z_1^\tau)$. Isto implica que $\hat{\Delta}_0 \subset \hat{I}$. E como h_0 é crescente, temos que $h_0^{-1}(z_0^\tau) < h_0^{-1} \circ g^{-1}(z_1^\tau)$. Isto implica que $\hat{\Delta}'_0 \subset \hat{I}$. Analogamente, podemos mostrar que $\hat{\Delta}_1$ e $\hat{\Delta}'_1$ também são contidos em $\hat{J}$. Além disso a extensão de I_1, J_1 está contida em I_0, J_0 respectivamente.

Primeiro Passo

Dividindo $I_1 \cup J_1$

Pela hipótese, $\phi_1(c), \phi_1(d) \notin I_1 \cup J_1$ e temos dois domínios Δ_*, Δ'_* de ξ_1 que contêm $\phi_1(c), \phi_1(d)$ respectivamente. Denotemos por f_*, f'_* ramos monótonos definidos em Δ_*, Δ'_* . Refinamos I_1 e J_1 usando a pré-imagem de intervalos de ξ_1 por ϕ_1 . Assim definimos uma

partição em $I_1 \cup J_1$ por:

$$\eta_2' : I_1 \cup J_1 = (\cup \Delta) \cup (\cup I_1^{-k}) \cup (\cup J_1^{-k}) \cup I_2 \cup J_2,$$

onde I_1^{-k}, J_1^{-k} são pré-imagens de I_1 ou de J_1 por ϕ_1 . E I_2 e J_2 são domínios dos ramos críticos contendo c e d respectivamente e definidos de modo que $I_2 = \phi_1^{-1}(\Delta_*)$ e $J_2 = \phi_1^{-1}(\Delta'_*)$. As aplicações em cada intervalo de η_2' são definidos por:

$$\mathcal{F}_2' = \begin{cases} \phi_2 = f_* \circ \phi_1 : I_2 \rightarrow I_0 \cup J_0 \\ \phi_2 = f'_* \circ \phi_1 : J_2 \rightarrow I_0 \cup J_0 \\ f_{\Delta_i} = \mathcal{F}_1 \circ \phi_1 : \Delta_i \rightarrow I_0 \cup J_0 \\ \chi : I_1^{-k} \rightarrow I_1, \quad \chi : J_1^{-k} \rightarrow J_1, \end{cases}$$

onde χ é uma aplicação composta de f que leva I_1^{-k} (respectivamente J_1^{-k}) difeomorficamente sobre I_1 (respectivamente J_1).

Extendibilidade:

Sabemos que os ramos críticos ϕ_1 possuem uma extensão cuja imagem se estende até ao bordo de $\hat{I}$ ou $\hat{J}$, e que todas as componentes conexas do domínio de $\mathcal{F}_1$ possuem sua extensão contida em $\hat{I}$ ou $\hat{J}$. Fácil ver que os ramos críticos ϕ_2 definidos em $I_2 \cup J_2$ possuem uma extensão cuja imagem se estende até ao bordo de $\hat{I}$ ou de $\hat{J}$. Denotemos por $\hat{I}_2 \supset I_2$ e $\hat{J}_2 \supset J_2$ os intervalos onde a extensão de ϕ_2 está definida. Seja $\Delta \in \xi_1$ tal que $\hat{\Delta}$ esteja contido em $\phi_1(I_1 \cup J_1)$. Então temos que a restrição de $\mathcal{F}_2'$ em $\phi_1^{-1}(\Delta)$ é α -extensível. Entretanto, podemos ter alguns intervalos Δ' tal que $\Delta' \subset \phi_1(I_1 \cup J_1)$, mas $\hat{\Delta}' \ni \phi_1(c)$ (ou $\phi_1(d)$) (veja a figura 6.2). Neste caso $\mathcal{F}_2'$ restrita a pré-imagem de Δ' por ϕ_1 não pode ser α -extensível. Neste caso, refinaremos Δ' usando o chamado Refinamento no Bordo, isto é:

Figura 6.2: Δ -sem extendibilidade

Refinamento no Bordo:

Vamos refinar Δ' usando a pré-imagem de intervalos de ξ_1 por $f_{\Delta'}$ e temos uma partição em Δ' :

$$\Delta' = (\cup \Delta) \cup (\cup I_1^{-1}) \cup (\cup J_1^{-1}).$$

Note que os dois ramos externos definidos na prtição em Δ' são monótonos. Então refinamos novamente os domínios destes dois ramos externos usando a pré-imagem de intervalos de ξ_1 pela aplicação monótona definida netes domínios. Repetimos este processo nos domínios externos da próxima etapa. Repetindo este processo infinitas vezes, obtemos uma partição em Δ' :

$$\Delta' = (\cup \Delta) \cup (\cup I_1^{-k}) \cup (\cup J_1^{-k}) \cup C,$$

onde C é um conjunto de Cantor definido por:

$$C = (\cap_{i \geq 0} \cup_{k \geq i} I_1^{-k}) \cup (\cap_{j \geq 0} \cup_{l \geq j} J_1^{-k}).$$

Assim todos os intervalos definidos em Δ' possuem suas extensões contidas na imagem de ϕ_1 . Aplicando a pré-imagem dessa partição por ϕ_1 , completamos o primeiro refinamento em $I_1 \cup J_1$:

$$\eta_2'' : I_1 \cup J_1 = (\cup \Delta) \cup (\cup I_1^{-k}) \cup (\cup J_1^{-k}) \cup I_2 \cup J_2,$$

onde a aplicação $\mathcal{F}_2''$ restrita em Δ é α -extensíveis e todos os domínios da partição η_2'' têm sua extensão contida em $\hat{I}_1$ ou $\hat{J}_1$. Ainda mais, $\hat{I}_2 \subset I_1, \hat{J}_2 \subset J_1$.

Dividindo I_1^{-k} e J_1^{-k}

Refinados os dois intervalos I_1 e J_1 , refinamos também os intervalos do tipo I_1^{-k}, J_1^{-k} usando a pré-imagem de intervalos de η_2'' por χ . Então temos uma partição,

$$I_1^{-k} \cup J_1^{-k} = (\cup \Delta) \cup (\cup I_1^{-k}) \cup (\cup J_1^{-k}) \cup I_2^{-k} \cup J_2^{-k}.$$

Extendibilidade:

Podemos ter algum Δ , provavelmente perto do bordo de I_1 , cuja extensão não esteja contida na imagem de $\hat{\chi}(\hat{I}_1^{-k})$, visto que não temos a extendibilidade de χ neste caso. Para estes Δ aplicamos o Refinamento no Bordo e assim conseguimos todos os Δ em I_1^{-k} extensíveis. Como I_2 tem sua extensão contida em I_1 e como $\chi : I_1^{-k} \rightarrow I_1$ é monótona, temos que o intervalo I_2^{-k} construído em I_1^{-k} possui uma extensão contida em I_1^{-k} e que é levado pela aplicação χ sobre $\hat{I}_2$. Repetimos este processo infinitas vezes em todos os I_1^{-k} e J_1^{-k} construídos e assim obtemos uma partição em $I_1^{-k} \cup J_1^{-k}$:

$$I_1^{-k} \cup J_1^{-k} = (\cup \Delta) \cup (\cup I_2^{-k}) \cup (\cup J_2^{-k}) \cup J_2^{-k} \cup C,$$

onde C é um conjunto de Cantor.

Dessa forma obtemos uma nova partição ξ_2 em $I_0 \cup J_0$:

$$\xi_2 : I_0 \cup J_0 = (\cup \Delta) \cup (\cup I_2^{-k}) \cup (\cup J_2^{-k}) \cup I_2 \cup J_2 \cup C.$$

Hipótese da indução

Seja $n \geq 2$, assumimos que existe uma partição ξ_n

$$\xi_n : I_0 \cup J_0 = (\cup \Delta) \cup (\cup I_n^{-k}) \cup (\cup J_n^{-k}) \cup I_n \cup J_n \cup C.$$

Assumimos também que existe uma aplicação $\mathcal{F}_n$ definida nessa aplicação satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $\mathcal{F}_n$ aplica cada Δ difeomorficamente sobre I_0 ou J_0 e é α -extensível,
2. $\mathcal{F}_n$ aplica $I_n \cup J_n$ de modo unimodal em I_0 ou J_0 e é α -extensível,
3. $\mathcal{F}_n$ aplica os intervalos I_n^{-k} (respectivamente J_n^{-k}) difeomorficamente sobre I_n (respectivamente J_n) e a imagem da extensão dessa aplicação é $\hat{I}_n$ (respectivamente $\hat{J}_n$),
4. A extensão de cada componente conexa de ξ_n está contida em $\hat{I}$ ou $\hat{J}$.

Passo n+1

Estudaremos a construção da partição apenas em I_n , pois em J_n a construção é análoga. Consideramos o ramo crítico ϕ_n definido em I_n . Então temos dois casos:

Caso 1: $\phi_n(c) \in \Delta_*$: Vamos assumir que $\phi_n(I_n) \subset I_0$. Então podemos refinar I_n usando a pré-imagem de intervalos de ξ_n por ϕ_n e obtemos uma partição em I_n :

$$\eta_{n+1} : I_n = (\cup \Delta) \cup (\cup I_n^{-k}) \cup (\cup J_n^{-k}) \cup I_{n+1},$$

onde $I_{n+1} = \phi_n^{-1}(\Delta_*)$. Como a aplicação $\phi_n(I_n)$ contém uma componente conexa de $\hat{\Delta}_* \setminus \Delta_*$, temos que $\phi_{n+1} = \mathcal{F}_n|_{\Delta_*} \circ \phi_n|_{I_{n+1}}$ tem sua imagem em I_0 ou J_0 e é α -extensível. Usando, se for necessário, o Refinamento no bordo nos Δ perto de $\phi_n(c)$ pela pré-imagem

de intervalos de ξ_n , podemos conseguir que todos os ramos definidos nos intervalos Δ em η_{n+1} sejam α -extensíveis. A seguir, refinamos os intervalos I_n^{-k}, J_n^{-k} de ξ_n , usando a pré-imagem de intervalos de η_{n+1} pela aplicação $\chi : I_n^{-k} \rightarrow I_n$ ou $\chi : J_n^{-k} \rightarrow J_n$. Usando, se for necessário, o Refinamento no bordo nos Δ perto do bordo de I_n , podemos conseguir que todos os ramos monôtonos definidos nos intervalos Δ em I_n^{-k} sejam α -extensíveis e obtemos uma partição em I_n^{-k} :

$$I_n^{-k} = (\cup \Delta) \cup (\cup I_n^{-k}) \cup (\cup J_n^{-k}) \cup (I_{n+1}^{-k}).$$

Note que $\hat{I}_{n+1}^{-k}$ são levados difeomorficamente sobre $\hat{I}_{n+1}$, pois $\hat{I}_{n+1} \subset I_n$. Repetindo este processo em todos os intervalos do tipo I_n^{-k} e J_n^{-k} , obtemos uma nova partição:

$$\xi_{n+1} : I_0 \cup J_0 = (\cup \Delta) \cup (\cup I_{n+1}^{-k}) \cup (\cup J_{n+1}^{-k}) \cup I_{n+1} \cup J_{n+1} \cup (C \cap (I_0 \cup J_0)).$$

Temos também que a aplicação definida nesta partição $\mathcal{F}_{n+1}$ é α -extensível em Δ , e aplica $\hat{I}_{n+1}^{-k}$ sobre $\hat{I}_{n+1}$, e J_{n+1}^{-k} sobre $\hat{J}_{n+1}$. Ainda mais o ramo crítico ϕ_{n+1} definido em I_{n+1} é α -extensível tendo sua imagem em $I_0 \cup J_0$.

Caso 2 - $\phi_n(c) \in I_n^{-k} \cup J_n^{-k}$: A única diferença neste caso do caso anterior acontece apenas no ramo crítico ϕ_{n+1} definido em I_{n+1} . Assumiremos que $\phi_n(c) \in J_{n*}^{-k}$. Então $I_{n+1} = \phi_n^{-1}(J_{n*}^{-k})$ e $\phi_{n+1} = \chi_{*|J_{n*}^{-k}} \circ \phi_n|_{I_{n+1}}$, onde $\chi_* : J_{n*}^{-k} \rightarrow J_n$. Como a aplicação χ_* definida em J_{n*}^{-k} possui uma extensão cuja imagem é $\hat{J}_n$, o ramo crítico ϕ_{n+1} aplica I_{n+1} em J_n . Também existe $\hat{I}_{n+1} \supset I_{n+1}$ tal que $\phi_{n+1} : \hat{I}_{n+1} \rightarrow \hat{J}_n$ é unimodal. Então, ao refinar o intervalo I_{n+1} , usando a aplicação $\phi_{n+1}|_{I_{n+1}}$, precisamos restringir à pré-imagem de intervalos de $\xi_{n+1} \cap J_n$. Essa situação vai continuar até que, para algum s , $\phi_{n+s}(c)$ esteja contido em um Δ . Entretanto, podemos continuar a partição de I_{n+1}, J_{n+1} por

indução e obtemos a partição final:

$$\xi : I_0 \cup J_0 = (\cup \Delta) \cup C,$$

onde a aplicação $\mathcal{F}$ aplica cada intervalo Δ sobre I ou J e é α -extensível. Isto concluí a prova da Proposição 6.1.1. ■

6.2 Hiperbolicidade no Caso Básico

Na seção anterior mostramos que dada uma aplicação bimodal f existe uma aplicação induzida $\mathcal{F}$ com uma partição ξ . Esta partição possui domínios de tipo Δ e um conjunto de cantor. Em geral esta aplicação induzida e partição podem ser construídas sem considerar a propriedade da distorção limitada em cada etapa da indução. Neste caso não será necessário o processo de refinamento no bordo. Quando este conjunto de cantor tem medida de Lebesgue nula dizemos que a aplicação induzida $\mathcal{F}$ é *aplicação de Markov*. Dizemos também que uma aplicação de Markov é *hiperbólica* se $\mathcal{F}$ restrita a cada Δ tem distorção uniformemente limitada e existe uma constante $a > 1$ tal que $|D\mathcal{F}(x)| \geq a$, para todo $x \in \cup_{\Delta \in \xi} \Delta$.

Lembre-se que na construção da aplicação induzida consideramos dois casos diferentes, dependendo de onde os valores críticos pertencem. Então diremos que a aplicação $\mathcal{F}$ é do *caso básico* se durante a construção da aplicação induzida os valores críticos estiverem contidos em domínios do tipo Δ e é do *caso não-básico* se os valores críticos estiverem contidos em domínios I_n^{-k} ou J_n^{-k} . Note que o caso não-básico inclui aplicações de tipo Fibonacci.

Primeiramente, mostraremos que as aplicações do caso básico apresentam hiperbolicidade. O Lema a seguir mostra que na verdade basta os valores críticos estiverem em Δ apenas infinitas vezes e não em toda etapa da construção da partição.

Sejam I_0^+, I_0^- componentes conexas de $\hat{I} \setminus I_0$ e J_0^+, J_0^- componentes conexas de $\hat{J} \setminus J_0$. Definimos:

$$\alpha = \min \left\{ \frac{|I_0^+|}{|I_0|}, \frac{|I_0^-|}{|I_0|}, \frac{|J_0^+|}{|J_0|}, \frac{|J_0^-|}{|J_0|} \right\}.$$

Lembre-se que Δ_0, Δ_0' são intervalos externos definidos em I_0 e Δ_1, Δ_1' são intervalos

externos definidos em J_0 . Definimos então:

$$\gamma = \min \left\{ \frac{|\Delta_0|}{|I_0|}, \frac{|\Delta'_0|}{|I_0|}, \frac{|\Delta_1|}{|J_0|}, \frac{|\Delta'_1|}{|J_0|} \right\}.$$

Neste contexto, diremos que α, γ e a propriedade da ordem de pontos críticos são *geometria inicial* de f .

Suponha que $\phi_n : I_n \rightarrow I_0$. Assumimos que $\phi_n(I_n) \ni \Delta_0$. Definimos então dois intervalos $\Delta_{n_1}, \Delta_{n_2} \subset I_n$ como sendo pré-imagens de Δ_0 por ϕ_n .

Lema 6.2.1 *Cada ramo crítico $\phi_n|_{I_n}, \phi_n|_{J_n}$ é α -extensível e existe $\alpha_1 = \alpha_1(\alpha, \gamma)$ tal que o domínio da extensão $\hat{I}_n$ (resp. $\hat{J}_n$) é uma α_1 -vizinhança de I_n (resp. J_n).*

Prova: A extendibilidade dos ramos críticos vem direto da construção da partição mostrada na Proposição 6.1.1. Podemos escrever ϕ_n como sendo uma composição de forma $\phi_n = f_n \circ f$, onde f_n é um difeomorfismo com distorção limitada controlada por $(1 + 1/\alpha)^2$. Sendo assim, a prova deste Lema vem direto do Princípio macroscópico e da propriedade da ordem dos pontos críticos. ■

Lema 6.2.2 *Existe $\sigma > 0$ que depende apenas da geometria inicial, tal que*

$$\min \left\{ \frac{|\Delta_{n_1}|}{|I_n|}, \frac{|\Delta_{n_2}|}{|I_n|} \right\} > \sigma.$$

Prova: Sabemos que $\phi_n = f_n \circ f$, onde f_n é um difeomorfismo extensível. Seja $\Delta_* = f_n^{-1}(I_0)$, então pelo Princípio de Koebe existe uma constante c_1 tal que

$$\frac{|f_n^{-1}(\Delta_0)|}{|\Delta_*|} \cdot \frac{|I_0|}{|\Delta_0|} > c_1(\alpha)$$

e isso resulta

$$\frac{|f_n^{-1}(\Delta_0)|}{|\Delta_*|} > c_2(\alpha, \gamma).$$

Usando a propriedade da ordem do ponto crítico c obtemos o resultado desejado

$$\frac{|\Delta_{n_i}|}{|I_n|} = \frac{|f^{-1}(f_n^{-1}(\Delta_0))|}{|f^{-1}(\Delta_*)|} > \sigma.$$

■

Para algum I_n^{-k} denotemos por $\mathcal{U}_n^{-k}$ a união de todo domínio do tipo $I_{n+1}^{-k}, J_{n+1}^{-k}$, construídos em I_n^{-k} .

Lema 6.2.3 *Existe uma constante $\theta_1 \in (0, 1)$ que depende apenas da geometria inicial, tal que*

$$\frac{|\mathcal{U}_n^{-k}|}{|I_n^{-k}|} < \theta_1.$$

Prova: Do Lema anterior sabemos que a união de I_{n+1} e todo intervalo do tipo I_{n+1}^{-k} e J_{n+1}^{-k} contidos em I_n tem a medida relativa menor que $1 - 2\sigma$. Do Lema 6.2.1, os difeomorfismos $\chi : I_n^{-k} \rightarrow I_n$ são uniformemente extensíveis. Usando o lema anterior e o Princípio de Koebe, obtemos que a medida relativa de domínios extensíveis Δ em todo I_n^{-k} é maior que uma constante $\beta > 0$ determinada pela geometria inicial. Como $\mathcal{U}_n^{-k} \subset I_n^{-k}$ é contido em complementar da união de Δ , temos que a medida relativa de $\mathcal{U}_n^{-k}$ em I_n^{-k} é menor que $\theta_1 = 1 - \beta$. ■

Este Lema junto com a Proposição 6.1.1 prova o Teorema 2.3.6 para o caso básico, pois a medida de $\mathcal{U}_n^{-k}$ reduz por um fator θ_1 menor que 1.

6.3 Hiperbolicidade no Caso Não-Básico

Lembre-se que as aplicações do caso básico têm uma aplicação induzida, na construção da qual os valores críticos pertencem a domínios dos ramos monótonos do tipo Δ . Nesse caso, mostramos a hiperbolicidade da aplicação sem usar a propriedade do decaimento de geometria. Na verdade, na prova da Hiperbolicidade do caso básico, nem precisamos que os valores críticos pertencessem a domínios do tipo Δ em toda etapa da construção. Foi bastante se isso acontecesse apenas em um número infinito de vezes.

Vamos considerar nesta seção as aplicações não-básicas. Em função da hiperbolicidade do caso básico, podemos assumir que existe $n_0 \geq 1$ tal que para todo $n \geq n_0$ os valores críticos $\phi_n(c), \phi_n(d)$ pertencem sempre a domínios do tipo I_n^{-k} ou J_n^{-k} . A classe dessas aplicações é maior do que a de Fibonacci, ou seja, a nossa prova não se limitará apenas à classe de aplicações Fibonacci. Entretanto, precisaremos restringir o nosso trabalho às aplicações bimodais que exibem decaimento de geometria.

Lembre-se que para cada $n \geq 1$ temos uma partição:

$$\xi_n : I_0 \cup J_0 = (\cup \Delta) \cup (\cup I_n^{-k}) \cup (\cup J_n^{-k}) \cup I_n \cup J_n$$

temos também uma aplicação $\mathcal{F}_n$ definida nesta partição. Como os valores críticos de $\mathcal{F}_{n-1}$ pertencem a domínios do tipo $I_{n-1}^{-k}, J_{n-1}^{-k}$, $\mathcal{F}_n$ restrita a domínios I_n e J_n , isto é, os ramos críticos ϕ_n aplicam seus domínios em I_{n-1} ou J_{n-1} de modo unimodal. E $\mathcal{F}_n$ restrita a domínios do tipo Δ , denotado por $\mathcal{F}_\Delta$, aplicam seus domínios difeomorficamente sobre I_0 ou J_0 . E os domínios I_n^{-k} e J_n^{-k} são aplicados difeomorficamente sobre I_n e J_n respectivamente pela aplicação χ . Lembre-se que os intervalos I_n^{-k}, J_n^{-k} são domínios de primeira entrada para os intervalos I_n, J_n respectivamente e cada destes intervalos tem

sua extensão do tipo $I_{n-1}^{-k}, J_{n-1}^{-k}$ tais que a aplicação χ tem sua extensão definida nestes intervalos, cuja imagem é I_{n-1}, J_{n-1} respectivamente.

Nesta seção assumimos que f exibe decaimento exponencial de geometria, ou seja, existem constantes $A > 0$ e $\lambda > 1$ tais que para cada $n \geq 1$, satisfazem-se o seguinte:

$$\frac{|I_n|}{|I_{n-1}|} \leq \frac{1}{1 + 2A\lambda^n} \quad \text{e} \quad \frac{|J_n|}{|J_{n-1}|} \leq \frac{1}{1 + 2A\lambda^n}.$$

Lema 6.3.1 *Para todo $I_n^{-k}, J_n^{-k} \in \xi_n$, os difeomorfismos $\chi : I_n^{-k} \rightarrow I_n$ e $\chi : J_n^{-k} \rightarrow J_n$ são $A\lambda^n$ -extensíveis e têm distorção limitada por $(1 + \frac{1}{A\lambda^n})^2$.*

Prova: Da Proposição 6.1.1 podemos ver que todos os intervalos do tipo I_n^{-k}, J_n^{-k} são restrições dos intervalos $I_{n-1}^{-k}, J_{n-1}^{-k}$ respectivamente e que esses intervalos são aplicados por χ sobre I_{n-1}, J_{n-1} enquanto os intervalos I_n^{-k}, J_n^{-k} são aplicados por mesma aplicação sobre I_n, J_n . Como I_{n-1}, J_{n-1} são, pela hipótese do decaimento de geometria, $A\lambda^n$ -vizinhanças de I_n, J_n respectivamente, usando o Lema 3.1.1, conclui-se a prova. ■

Observamos que $\phi_n(c)$ e $\phi_n(d)$ são contidos em algum dos intervalos do tipo I_n^{-k} ou J_n^{-k} , denotamo-los por $\tilde{C}_n$ e $\tilde{D}_n$ respectivamente. Estes intervalos terão suas extensões do tipo I_{n-1}^{-k} ou J_{n-1}^{-k} , então vamos denotá-los por C_n e D_n respectivamente. Lembre-se que os intervalos I_{n+1} e J_{n+1} são definidos como sendo pré-imagens de $\tilde{C}_n$ e $\tilde{D}_n$ pelos ramos críticos ϕ_n . Vamos definir as vizinhas desses intervalos do seguinte modo:

$$W_{n+1}(c) = \phi_n^{-1}(C_n) \quad \text{e} \quad W_{n+1}(d) = \phi_n^{-1}(D_n).$$

Lema 6.3.2 *Para todo $n \geq 1$, as aplicações ϕ_n possuem $A\lambda^{n-1}$ -extensões unimodais $\hat{\phi}_n$. Estas extensões estão definidas, respectivamente, nos intervalos $W_n(c)$ e $W_n(d)$ e*

são tais que $\hat{\phi}_n(\partial W_n(c))$ e $\hat{\phi}_n(\partial W_n(d))$ estão em ∂I_{n-2} ou ∂J_{n-2} para $n \geq 2$. Além disso, para cada $n \geq 1$ existem aplicações monótonas Φ_n tais que

$$\hat{\phi}_n = \Phi_n \circ f$$

com

$$\left(1 + \frac{1}{A\lambda^{n-1}}\right)^{-2} \leq \frac{D\Phi_n(f(x))}{D\Phi_n(f(y))} \leq \left(1 + \frac{1}{A\lambda^{n-1}}\right)^2$$

para $x, y \in I_n$ ou $x, y \in J_n$.

Prova: Vamos provar o Lema pela indução em n apenas para os ramos críticos definidos ao redor de c , visto que a prova do outro caso será análoga. Lembre-se que temos a partição inicial definida por $\xi_0 := [0, 1] = I_0 \cup J_0 \cup (\cup \Delta)$ e a aplicação $\mathcal{F}_0$ definida nesta partição. $\mathcal{F}_0$ aplica cada um dos Δ sobre I_0 ou J_0 monotonamente e com distorção uniformemente limitada. Para $n = 1$ temos que $\phi_1|_{I_1} = \mathcal{F}_0|_{\Delta_c} \circ f$, onde $f(c) \in \Delta_c$ e, assim, o Lema segue. Assumimos que o Lema é verdadeiro para n e vamos mostrá-lo para $n + 1$. Temos que $\phi_{n+1}|_{I_{n+1}} = \mathcal{F}_n|_{\tilde{C}_n} \circ \phi_n|_{I_{n+1}}$. Pela hipótese da indução, existe um difeomorfismo Φ_n tais que $\phi_n = \Phi_n \circ f$. Como $\mathcal{F}_n|_{\tilde{C}_n}$ é monótona, definindo $\Phi_{n+1} = \mathcal{F}_n|_{\tilde{C}_n} \circ \Phi_n$, temos que

$$\phi_{n+1} = \Phi_{n+1} \circ f.$$

Como $W_n(c) = \phi_{n-1}^{-1}(C_{n-1})$ e $\mathcal{F}_{n-1}$ tem sua extensão $\hat{\mathcal{F}}_{n-1}$ definida em C_{n-1} , resulta que ϕ_n têm sua extensão $\hat{\phi}_n$ definida em $W_n(c)$ e $\hat{\phi}_n(\partial W_n(c))$ está em ∂I_{n-2} ou ∂J_{n-1} , enquanto que a imagem de ϕ_n está contida em $I_{n-1} \cup J_{n-1}$. Como $\frac{|I_{n-1}|}{|I_{n-2}|}$ e $\frac{|J_{n-1}|}{|J_{n-2}|}$ são majorados por $(1 + 2A\lambda^{n-1})^{-1}$ o Lema segue. ■

Corolário 6.3.1 *Existe um número real $A_1 > 0$ tal que*

1. para $n \geq 0$ e $x \in I_n$ verifica-se que

$$\left(1 + \frac{A_1}{\lambda^{n-1}}\right)^{-3} |D^2\phi_n(c)||x - c| \leq |D\phi_n(x)| \leq \left(1 + \frac{A_1}{\lambda^{n-1}}\right)^3 |D^2\phi_n(c)||x - c|.$$

2. para $n \geq 0$ e $x \in J_n$ verifica-se que

$$\left(1 + \frac{A_1}{\lambda^{n-1}}\right)^{-3} |D^2\phi_n(d)||x - d| \leq |D\phi_n(x)| \leq \left(1 + \frac{A_1}{\lambda^{n-1}}\right)^3 |D^2\phi_n(d)||x - d|.$$

Prova: Vamos provar apenas a primeira afirmação, visto que a prova da segunda é análoga. Pelo Lema 6.3.2 temos que ϕ_n é $A\lambda^{n-1}$ -extensível e $\phi_n = \Phi_n \circ f$, onde Φ_n é um difeomorfismo $A\lambda^{n-1}$ -extendível e, portanto, com distorção limitada por $(1 + \frac{1}{A\lambda^{n-1}})^2$. Como

$$\frac{|I_n|}{|I_{n-1}|} \leq \frac{1}{1 + 2A\lambda^n},$$

em particular $|I_n| \leq (1 + 2A\lambda^n)^{-1}|I_0|$. Sendo 2 a ordem do ponto crítico c concluímos que existe constante $A_0 < \infty$ tal que para todo $x \in I_n$ verifica-se que

$$\left(1 + \frac{A_0}{\lambda^{n-1}}\right)^{-1} |D^2f(c)||x - c| \leq |Df(x)| \leq \left(1 + \frac{A_0}{\lambda^{n-1}}\right) |D^2f(c)||x - c|.$$

Como $|D\phi_n(x)| = |D\Phi_n(f(x))||Df(x)|$ e

$$\left(1 + \frac{1}{A\lambda^{n-1}}\right)^{-2} \leq \frac{|D\Phi_n(f(x))|}{|D\Phi_n(f(c))|} \leq \left(1 + \frac{1}{A\lambda^{n-1}}\right)^2,$$

temos uma constante $A_1 < \infty$ tal que

$$\left(1 + \frac{A_1}{\lambda^{n-1}}\right)^{-3} |D\Phi_n(f(c))||D^2f(c)||x - c| \leq |D\phi_n(x)| \leq \left(1 + \frac{A_1}{\lambda^{n-1}}\right)^3 |D\Phi_n(f(c))||D^2f(c)||x - c|.$$

Como $D^2\phi_n(c) = D\Phi_n(c) \cdot D^2f(c)$, o Lema segue. ■

Corolário 6.3.2 *Existe uma constante $A_2 < \infty$ tal que para todo $n \geq 0$ verifica-se que*

$$\frac{|I_{n+1}|}{|W_{n+1}(c)|} \leq \frac{A_2}{(1 + 2A\lambda^n)^{1/2}}, \quad e \quad \frac{|W_{n+1}(c)|}{|I_n|} \leq \frac{A_2}{\lambda^{n/4}}$$

O mesmo verifica-se também para os intervalos definidos em volta do ponto crítico d .

Prova: Vamos mostrar apenas as primeiras duas afirmações, pois as demais provam-se de maneira análoga. Lembre-se que $W_{n+1}(c) = \phi_n^{-1}(C_n)$ e $I_{n+1} = \phi_n^{-1}(\tilde{C}_n)$. Usando o Corolário 6.3.1 temos que

$$\frac{|I_{n+1}|}{|W_{n+1}(c)|} \leq \left(1 + \frac{A_1}{\lambda^n}\right)^3 \left(\frac{|\tilde{C}_n|}{|C_n|}\right)^{1/2}.$$

Como C_n e $\tilde{C}_n$ são pré-imagens de I_{n-1} e I_n (ou J_{n-1} e J_n) respectivamente pelo difeomorfismo χ , usando o Princípio Macroscópico de Köbe, obtemos

$$\frac{|I_{n+1}|}{|W_{n+1}(c)|} \leq \frac{A_2}{(1 + 2A\lambda^n)^{1/2}}$$

para uma constante $A_2 < \infty$. Isto prova a primeira afirmação.

Para demonstrar a segunda afirmação precisamos considerar duas situações possíveis. Para ambos casos assumiremos que $C_n \subset I_{n-1}$ e $\phi_{n-1} : I_{n-1} \rightarrow J_{n-2}$ (em demais situações a prova será análoga):

1. $\phi_{n-1}(C_n) \neq J_{n-1}$. Lembre-se que o intervalo C_n é aplicado pelo difeomorfismo χ sobre I_{n-1} ou J_{n-1} dependendo do caso. Afirmamos que I_{n-1} é uma $A\lambda^{n-1}$ -vizinhança de C_n . Pela hipótese temos que $\phi_{n-1}(C_n) \subset J_{n-2} \setminus J_{n-1}$ e que $\phi_{n-1}(C_n)$ é agora um domínio de primeira entrada para I_{n-1} ou J_{n-1} . Então existe um intervalo T como sendo uma extensão monótona de $\phi_{n-1}(C_n)$ cuja imagem é sobre I_{n-2} ou J_{n-2} . Pelo decaimento de geometria e Princípio de Köbe, temos que T é uma $A\lambda^{n-1}$ -vizinhança de $\phi_{n-1}(C_n)$. Usando o Corolário 6.3.1, C_n possui uma $A\lambda^{\frac{n-1}{2}}$ -vizinhança contida em uma

das componentes conexas de $I_{n-1} \setminus \{c\}$ pelo menos no lado oposto do ponto crítico. Isto prova a afirmação.

Então, usando o Corolário 6.3.1, verifica-se que

$$\begin{aligned} \frac{|W_{n+1}(c)|}{|I_n|} &\leq \left(1 + \frac{A_1}{\lambda^{n-1}}\right)^3 \left(\frac{C_n}{I_{n-1}}\right)^{1/2} \\ &\leq \left(1 + \frac{A_1}{\lambda^{n-1}}\right)^3 \left(\frac{1}{1 + 2A\lambda^{\frac{n-1}{2}}}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

Disto segue que existe uma constante $A_2 < \infty$ que satisfaz o Lema.

2. $\phi_{n-1}(C_n) = J_{n-1}$. Nesta situação temos que $\phi_{n-1}(I_{n-1})$ possui uma das componentes conexas de $J_{n-2} \setminus J_{n-1}$. Em outras palavras, $\phi_{n-1}(I_{n-1})$ possui uma $A\lambda^{n-1}$ -vizinhança de $\phi_{n-1}(C_n)$ num lado deste que não contém $\phi_{n-1}(c)$. Então, usando o Corolário 6.3.1 temos que I_{n-1} é uma $(A\lambda^{n-1})^{1/2}$ -vizinhança de C_n . Usando novamente o Corolário 6.3.1 pela aplicação $\phi_n|_{I_n}$ temos que

$$\frac{|W_{n+1}(c)|}{|I_n|} \leq \frac{A_2}{\lambda^{n/4}}.$$

■

Avaliaremos em seguida, qual a proporção que os intervalos Δ que surgem na construção de cada etapa da partição ξ representa em $[0, 1]$. Para isso, definimos:

$$\Gamma_n := \cup_{\Delta \in \xi_n} \Delta, \quad \Gamma_n(c) := \Gamma_n \cap W_n(c) \quad \text{e} \quad \Gamma_n(d) := \Gamma_n \cap W_n(d).$$

Definimos também

$$\delta_n := \min \left\{ \frac{|\Gamma_n(c)|}{|W_n(c)|}, \frac{|\Gamma_n(d)|}{|W_n(d)|} \right\}.$$

Lema 6.3.3 *Existe um número real $A_3 > 0$ tal que para todo $n \geq 0$ verifica-se que*

$$\delta_{n+2} \geq \frac{\lambda^{n/4}}{A_3 + \lambda^{n/4}} \delta_{n+1}.$$

Prova: Observemos que para cada I_{n+1}^{-k} da partição ξ_{n+1} existem intervalos $I_n^{-k}, W_{n+1}^{-k}(c)$ tais que

$$I_{n+1}^{-k} \subset W_{n+1}^{-k}(c) \subset I_n^{-k}.$$

Cada uma destas triplas é aplicada por um difeomorfismo $\hat{\chi}$ sobre $I_{n+1} \subset W_{n+1}(c) \subset I_n$. Pelo corolário 6.3.2 estes difeomorfismos têm em $W_{n+1}^{-k}(c)$ distorção limitada por $(1 + \frac{B}{\lambda^{n/4}})^2$, onde $B < \infty$ independe de n . Cada intervalos $W_{n+1}^{-k}(c)$ contém a respectiva pré-imagem de $\Gamma_{n+1}(c)$ que denotamos por $\Gamma_{n+1}^{-k}(c)$. Temos então que

$$\frac{|\Gamma_{n+1}^{-k}(c)|}{|W_{n+1}^{-k}(c)|} \geq \left(1 + \frac{B}{\lambda^{n/4}}\right)^{-2} \frac{|\Gamma_{n+1}(c)|}{|W_{n+1}(c)|}$$

Isto e o fato das pré-imagens de $\Gamma_{n+1}(c)$ serem disjuntas, temos que

$$\frac{|\Gamma_{n+1} \cap I_n^{-k}|}{|I_n^{-k}|} \geq \left(1 + \frac{B}{\lambda^{n/4}}\right)^{-2} \delta_{n+1}.$$

Em particular, consideramos duas triplas de intervalos $\tilde{C}_{n+1} \subset W_{n+1}^{-k}(c) \subset C_{n+1}$ e temos

$$\frac{|\Gamma_{n+1} \cap C_{n+1}|}{|C_{n+1}|} \geq \left(1 + \frac{B}{\lambda^{n/4}}\right)^{-2} \delta_{n+1}.$$

Lembre-se que os intervalos I_{n+2} e $W_{n+2}(c)$ são definidos como sendo pré-imagens de $\tilde{C}_{n+1}$ e C_{n+1} respectivamente por ϕ_{n+1} . Também ficam definidos $\Gamma_{n+2}(c) = \phi_{n+1}^{-1}(\Gamma_{n+1} \cap C_{n+1})$. Então pelo Corolário 6.3.1 existe uma constante $A > 0$ tal que

$$\frac{|\Gamma_{n+2}(c)|}{|W_{n+2}(c) \setminus I_{n+2}|} \geq A \frac{|\Gamma_{n+1} \cap C_{n+1}|^{1/2}}{|C_{n+1}|^{1/2}}.$$

Pelo Lema 6.3.2 temos que

$$\frac{|I_{n+2}|}{|W_{n+2}(c)|} \leq \frac{A_2}{(1 + 2A\lambda^{n+1})^{1/2}}.$$

Logo concluímos

$$\begin{aligned} \frac{|\Gamma_{n+2}(c)|}{|W_{n+2}(c)|} &= \frac{|\Gamma_{n+2}(c)|}{|W_{n+2}(c) \setminus I_{n+2}|} \frac{|W_{n+2}(c) \setminus I_{n+2}|}{|W_{n+2}(c)|} \\ &\geq A \left(1 + \frac{B}{\lambda^{n/4}}\right)^{-1} \left(1 - \frac{A_2}{(1 + 2A\lambda^{n+1})^{1/2}}\right) \delta_{n+1}. \end{aligned}$$

O mesmo verifica-se para $|\Gamma_{n+2}(d)|/|W_{n+2}(d)|$. Como o valor $A(1 - A_2/(1 + 2A\lambda^{n+1})^{1/2})$ é maior do que uma constante positiva, segue que existe uma constante $A_3 < \infty$ satisfazendo o Lema. ■

Corolário 6.3.3 *Existe uma constante $\theta > 0$ tal que $\delta_n > \theta$, $\forall n \geq 1$.*

Prova: O Lema 6.3.3 garante a existência de uma constante $A_3 < \infty$ tal que

$$\delta_{n+2} \geq \frac{\lambda^{n/4}}{A_3 + \lambda^{n/4}} \delta_{n+1}.$$

Então para todo $n \geq 1$ temos que

$$\delta_{n+1} \geq \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{i/4}}{A_3 + \lambda^{i/4}} \delta_1.$$

Mas

$$\log \left(\prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{i/4}}{A_3 + \lambda^{i/4}} \right) = - \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{A_3}{\lambda^{i/4}} + 1 \right).$$

Como $\log(1+x) < x$ para todo $x > 0$, resulta que a soma acima é maior que um número negativo mas real. Logo existe uma constante $\theta > 0$ tal que $\delta_n > \theta$. ■

Mostraremos a seguir que a aplicação induzida $\mathcal{F}$ está definida num subconjunto de medida total de $[0, 1]$. Disto mostraremos também a hiperbolicidade desta aplicação.

Definimos

$$S_n := (\cup I_n^{-k}) \cup (\cup J_n^{-k}) \cup I_n \cup J_n.$$

Lema 6.3.4 *Seja $S = \cap_{n=0}^{\infty} S_n$, o domínio de $\mathcal{F}$. Então $|S| = 0$.*

Prova: Do corolário 6.3.3 existe $\beta < 1$ tal que

$$\frac{|S \cap W_n(c)|}{|W_n(c)|} \leq \beta, \quad \frac{|S \cap W_n(d)|}{|W_n(d)|} \leq \beta.$$

Dado $x \in S$, existem intervalos arbitrariamente pequenos do tipo $W_n^{-k}(c)$ ou $W_n^{-k}(d)$ que contêm x . Como estes intervalos são aplicados em $W_n(c)$ ou $W_n(d)$ por um difeomorfismo com distorção limitada, verifica-se que existe uma constante $\beta' < 1$ tal que

$$\frac{|S \cap W_n^{-k}(c)|}{|W_n^{-k}(c)|} \leq \beta' \quad \text{e} \quad \frac{|S \cap W_n^{-k}(d)|}{|W_n^{-k}(d)|} \leq \beta'.$$

Logo pelo Teorema da Densidade de Lebesgue, S tem medida nula. ■

Este Lema junto com a Proposição 6.1.1 prova o Teorema 2.3.6 para o caso não-básico.

Observação: Sabe-se que a aplicação Fibonacci bimodal possui $\omega(c), \omega(d)$ idênticos, contendo pontos críticos c, d e ainda minimais. Foi provada então a hiperbolicidade da aplicação Fibonacci bimodal usando a minimalidade desses conjuntos. Nessa prova não foi necessário mostrar a extendibilidade dos ramos monôtonos na construção da aplicação induzida, em outras palavras, não foi usado o Refinamento no Bordo que nós usamos no contexto. Como os pontos críticos estão contidos em $\omega(c) \cup \omega(d)$, cuja distância a $\partial I_0 \cup \partial J_0$ é maior do que alguma constante positiva, resulta que existe $\alpha > 0$ tal que os ramos de $\mathcal{F}$ ou mesmo os de $\mathcal{F}^N$ para $N \geq 1$ sejam α -extensíveis e, por isso, com distorção uniformemente limitada.

Em [Mar] foi provado que, quando o conjunto $\omega(c)$ não é minimal, existem dois intervalos $U \subset V$ e uma aplicação de primeiro retorno a U definida em um conjunto de medida total tal que restrita a cada componente conexa do seu domínio existe uma

extensão cuja imagem contém V . Existem também uma seqüência de intervalos K_n , com $K_n \supset K_{n+1}$ e $K_n \cap V = \emptyset$, e uma seqüência de números inteiros positivos t_n tais que, para cada $n \geq 1$, t_n é o tempo de primeira entrada do ponto crítico c no intervalo K_n . Essa situação verifica que o caso é básico segundo a classificação deste contexto.

Referências Bibliográficas

- [B] Beardon, A.: *Iteration of rational functions*- Graduate texts in mathematics. Springer-Verlag (1991)
- [BKNV] Bruin, H., Keller, G., Nowicki, T., Van Strein, S.: *Wild cantor attractors exist*- Ann. Math. **143**, 97-130 (1996)
- [GS1] Graczyk, J., Świątek, G.: *Induced expansion for quadratic polynomials*- Ann.Scient.Éc.Norm.Sup. **2**,399-482 (1996)
- [GS2] Graczyk, J., Świątek, G.: *Hyperbolicity in the real quadratic family*- Ann. Math **146**, 1-52 (1997)
- [GS3] Graczyk, J., Świątek, G.: *The Real Fatou Conjecture*-Annals of Mathematics Studies **144** (1998)
- [HK] Hofbauer, F., Keller, G.: *Some remarks on recent results about S-unimodal maps*- Ann. Inst. H. Poincaré Phys.Théor **53**, 413-425 (1990)
- [L] Lyubich, M.: *Combinatorics, geometry and attractors of quasiquadratic maps*.- Ann. Math. **140**, 347-404 (1994)

- [L1] Lyubich, M.: *Ergodic Theory for Smooth One-Dimensional Dynamical System*-IMS Stony Brook Preprint (1991)
- [LM] Lyubich, M. Milnor, J.: *The Fibonacci unimodal map*- Journal of the American Mathematical Society **6**, Number 2, 425-457 (1993)
- [LV] Lehto, O., Virtanen, K.: *Quasiconformal Mappings in the Plane*- Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1973)
- [M] Milnor, J.: *On the concept of attractor*- Comm. math. phys. **99**, 177-195 (1985) and **102**, 517-519 (1985)
- [Mar] Martens, M.: *Distortion results and invariant Cantor sets of unimodal maps*- Ergodic Theory and Dynamical Systems **14**, 331-349 (1994)
- [MS] de Melo, W., van Strein, S.: *One-dimensional dynamics*-Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (Berlin: Springer) (1993)
- [S] Singer, D.: *Stable orbits and bifurcations of maps of the interval*-SIAM J.-Appl. Math. **35**, 260-267 (1978)
- [SV] Świątek, G., Vargas, E.: *Decay of geometry in the cubic family*- Ergodic Theory and Dynamical Systems **18**, 1311-1329 (1998)
- [SV2] van Strein, S., Vargas, E.: *Real bounds, ergodicity and negative Schwarzian for multimodal maps*- a preprint no Journal of the American Mathematics Society.