Ângulo de Contato
para Superfícies Imersas em S^{2n+1}

Rodrigo Ristow Montes

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE DOUTOR
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Geometria Diferencial/MAT**

Orientador: **Prof. Dr. José Antônio Verderesi**

*Durante a elaboração deste trabalho
o autor recebeu o apoio financeiro do CNPq*

São Paulo - 2003

Ângulo de Contato
para Superfícies Imersas em S^{2n+1}

Este exemplar corresponde à redação final
da tese de doutorado devidamente
corrigida e defendida por
Rodrigo Ristow Montes
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, dezembro de 2003.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. José Antônio Verderesi (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Fabiano Gustavo Braga - IME-USP
- Prof. Dr. Celso J. Costa - MAT-UFF
- Prof. Dr. Ruy Tojeiro - MAT-UFSCAR
- Prof. Dr. Francesco Mercuri - IME- UNICAMP

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Jose Antonio Verderesi, pelo incentivo e paciência durante estes quatro anos e pela grande amizade que tivemos durante meu doutoramento.

Agradeço aos professores Pedro Venegas e Roberto Bedregal, pela orientação durante o Mestrado na UFPB e ao professor João Batista Xavier pela excelente orientação durante os 3 anos de iniciação científica na UFPR.

Agradeço a todos os amigos que fiz aqui no IME-USP e espero tê-los futuramente como colegas de trabalho.

Agradeço aos meus pais Emilio e Roseli por todo carinho, afeto e ajuda em todos os momentos, aos meus irmãos Roberto e Gisele pelo companheirismo e a Claudia por todo amor que tem me dado nestes últimos meses.

Resumo

O objetivo deste trabalho é introduzir um novo invariante geométrico para estudar superfícies imersas em esferas de dimensão ímpar.

A partir deste invariante, o ângulo de Contato, determinamos equações para Curvatura Gaussiana e Laplaciano de superfícies mínimas imersas em S^{2n+1} .

Quando a superfície está imersa em S^{2n+1} definimos o ângulo de holomorfia análogo ao ângulo Kähler. Neste caso classificamos completamente as superfícies com ambos ângulos constantes fornecendo uma família de toros mínimos imersos em S^5 .

Por fim, algumas caracterizações do Toro de Clifford em S^3 são apresentadas, sendo esta a única superfície mínima em S^3 com ângulo de Contato constante.

Abstract

The purpose of this work is to introduce a new geometric invariant to study immersed surfaces in odd dimensional spheres.

Using this invariant, the contact angle, we determine equations for Laplacian and Gaussian Curvature of a minimal surface immersed in S^{2n+1} .

When the surface is immersed in S^{2n+1} we define the holomorphic angle which corresponds to the Kähler angle. In particular, we construct a family of minimal tori in S^5 and classify minimal surfaces with both constant angles.

Finally, we characterize the Clifford Torus as the only minimal surface in S^3 with constant contact angle.

Sumário

Introdução	1
1 Ângulo de Contato para Superfícies Imersas em S^{2n+1}	5
1.1 Preliminares	5
1.2 Equações de Estrutura para uma Superfície Mínima em S^{2n+1}	7
2 Ângulo de Contato para Superfícies Imersas em S^5	11
2.1 Equações para Curvatura Gaussiana e Laplaciano	11
2.2 Equações de Codazzi para uma superfície mínima em S^5 . . .	15
2.3 Aplicações	17
2.3.1 Superfícies Mínimas em S^5 e Ângulo de Contato β constante	17
3 Superfícies Mínimas em S^5 com Ângulos de Contato e Holomorfia constantes	18
3.1 Construção de Toros Mínimos em S^5	18
3.2 Caso $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$	19
3.3 Caso $\beta = 0$	22
3.4 Caso $\beta = \frac{\pi}{2}$ (Legendrianas)	24
3.5 Toros Mínimos em S^5 com Ângulo de Holomorfia Nulo	26
3.6 Superfícies Mínimas Legendrianas em S^5 com Curvatura Gaussiana Constante	28

3.7	Exemplos de Superfícies Mínimas em S^5	30
3.7.1	Ângulo de Contato do Toro Mínimo Legendriano	30
3.7.2	Ângulo de Contato do Toro de Clifford Generalizado . .	34
3.7.3	Ângulo de Contato do Toro de Clifford Padrão	38
4	Superfícies Mínimas em S^3	40
4.1	Preliminares	40
4.2	Equações de Estrutura de S^3	42
4.3	Ângulo de Contato para Superfícies em S^3	44
4.4	Equações de Estrutura para o referencial adaptado	46
4.5	Equações de Gauss e Codazzi para uma Superfície Mínima em S^3	48
4.6	Caracterizações do Toro de Clifford em S^3	49
4.7	Exemplos de Superfícies Mínimas em S^3	50
4.7.1	Ângulo de Contato para o Toro de Clifford em S^3	50
4.7.2	Superfície Mínima em S^3 com ângulo de Contato não constante	51
	Comentários Finais	52
	Referências Bibliográficas	53

Introdução

O ângulo Kähler foi introduzido por Chern e Wolfson em [5] e [15] e constitui um invariante geométrico fundamental de uma superfície imersa em uma variedade complexa. Usando o método referencial móvel, Chern e Wolfson obtiveram equações para a curvatura Gaussiana e para o Laplaciano de uma superfície mínima imersa em uma variedade Kähleriana de curvatura seccional holomorfa constante.

Mais recentemente, Kenmotsu em [12], Ohnita em [13] e Ogata em [14] classificaram superfícies mínimas com curvatura Gaussiana constante e ângulo Kähler constante. Em particular, Kenmotsu em [11] prova que o ângulo Kähler de uma superfície mínima com Curvatura Gaussiana constante imersa em $\mathbb{CP}^2$ deve ser constante.

Bolton, Rigoli e Jensen perguntam, em [4], se uma imersão mínima de S^2 em CP^n (não holomorfa, não anti-holomorfa, nem totalmente real) com ângulo Kähler constante também apresenta Curvatura Gaussiana constante.

Este problema foi respondido negativamente por Zhenqui em [17], onde são apresentadas famílias de imersões de S^2 em CP^{10} com ângulo Kähler constante e curvatura Gaussiana não constante.

Estudos de superfícies mínimas em esferas foram feitos por Kenmotsu em [9] e [10], onde o autor classifica toros mínimos em esferas de dimensão ímpar e por Bryant, em [3], para a não existência de imersões mínimas de Curvatura Gaussiana constante negativa.

No presente trabalho introduzimos a noção do ângulo de Contato para uma superfície imersa em uma variedade riemanniana de contato. Geometricamente o ângulo de Contato é o ângulo complementar entre a distribuição de contato e o plano tangente da superfície e constitui um invariante geométrico para estudar superfícies imersas em variedades Riemannianas de contato.

No capítulo 1 introduzimos os ângulos de Contato e Holomorfia em geral para uma superfície mínima imersa em S^{2n+1} e a partir das equações de Gauss e Codazzi obtemos fórmulas para curvatura Gaussiana e Laplaciano de uma superfície mínima imersa em S^{2n+1} .

No capítulo 2 restringimos ao caso de uma superfície mínima imersa em S^5 e obtemos fórmulas da curvatura Gaussiana e do Laplaciano. Também neste capítulo deduzimos as equações de Codazzi para uma superfície mínima em S^5 e mostramos que o ângulo de Holomorfia, de uma superfície mínima com ângulo de contato constante e curvaturas principais ($a, b = 0$) nulas, deve ser constante conforme o seguinte Teorema.

TEOREMA 0.1. *O ângulo de Holomorfia ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) para superfícies mínimas compactas em S^5 com ângulo de contato constante e curvaturas principais nulas $a, b = 0$ deve ser constante.*

O capítulo 3 constitui o capítulo central deste trabalho, neste capítulo estudamos as superfícies mínimas em S^5 com ângulos de Contato e Holomorfia constantes, mostrando que estas superfícies são toros mínimos em S^5 , obtendo uma família de toros mínimos a 2-parâmetros e generalizando os toros mínimos descobertos por Kenmotsu em [10].

TEOREMA 0.2. *As superfícies mínimas compactas, orientáveis em S^5 com ângulo de Contato (β) e ângulo de Holomorfia (α) constantes são toros. Estes toros são parametrizados pelos parâmetros a e b que satisfazem a seguinte equação do círculo*

$$a^2 + \left(b - \frac{\cos \beta}{1 + \sin^2 \beta}\right)^2 = 2 \frac{\sin^4 \beta}{(1 + \sin^2 \beta)^2}$$

Quando o ângulo de Holomorfia é nulo, ou seja, quando a superfície é holomorfa temos uma caracterização do Toro de Clifford em S^5 sem supor que o ângulo de Contato seja constante, pelo seguinte Teorema

TEOREMA 0.3. *O Toro de Clifford é a única superfície mínima, compacta, não legendriana em S^5 com ângulo de Contato $0 \leq \beta < \frac{\pi}{2}$ e ângulo de Holomorfia nulo.*

Resultados importantes de caracterizações do Toro de Clifford em S^5 serão demonstrados e também uma prova simples de um teorema de classificação inicialmente descoberto por Blair, em [2] e Miyara, Kon, Yamaguchi, em [16] para superfícies mínimas Legendrianas com Curvatura Gaussiana constante.

TEOREMA 0.4. *O Toro de Clifford e a Esfera Totalmente Geodésica são as únicas superfícies mínimas Legendrianas em S^5 com curvatura Gaussiana constante.*

Um tratamento minucioso de superfícies mínimas com curvatura Gaussiana não constante foi feito por Haskins em sua tese de Doutorado, veja [8], onde o mesmo determina uma expressão para curvatura Gaussiana equivalente a nossa apresentada no final do capítulo 3.

Também apresentamos neste capítulo exemplos de Toros mínimos em S^5 via método do referencial móvel.

No capítulo 4 deduzimos a partir das equações de Gauss e Codazzi fórmulas para a Curvatura Gaussiana e Laplaciano de uma superfície mínima imersa em S^3 e provamos que o Toro de Clifford é a única superfície mínima em S^3 com ângulo de Contato constante.

TEOREMA 0.5. *O Toro de Clifford é a única superfície mínima em S^3 com ângulo de contato constante.*

Mesmo sem supor o ângulo de Contato constante mostramos que o Toro de Clifford é a única superfície mínima compacta com ângulo de Contato (β) entre 0 e $\frac{\pi}{2}$.

TEOREMA 0.6. *O Toro de Clifford é a única superfície mínima compacta em S^3 com ângulo de contato (β) $0 \leq \beta < \frac{\pi}{2}$.*

No final da tese deixamos alguns problemas que ficaram em aberto e os quais estamos trabalhando para solucioná-los.

Capítulo 1

Ângulo de Contato para Superfícies Imersas em S^{2n+1}

1.1 Preliminares

Neste capítulo introduziremos os conceitos do ângulo de Contato e ângulo de Holomorfia e as definições básicas necessárias para estudar superfícies mínimas em esferas de dimensão ímpar.

Considere em $\mathbb{C}^{n+1}$ o produto Hermitiano

$$(z, w) = \sum_{j=0}^n z^j \bar{w}^j$$

O produto interno usual é definido como

$$\langle z, w \rangle = \operatorname{Re}(z, w)$$

A esfera unitária

$$S^{2n+1} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid (z, z) = 1\}$$

O campo de Reeb em S^{2n+1} é dado por

$$\xi(z) = iz$$

A distribuição de Contato em S^{2n+1} é ortogonal a ξ e definida por

$$\Delta_z = \{v \in T_z S^{2n+1} | \langle \xi, v \rangle = 0\}$$

Observação 1. *A distribuição de contato Δ é invariante pela estrutura complexa de $\mathbb{C}^{n+1}$ e tem dimensão $2n$.*

Considere S uma superfície orientada imersa em S^{2n+1} .

Definição 1.1. O ângulo de contato β é o ângulo complementar entre a distribuição de contato Δ e o espaço tangente TS da superfície.

Considere (e_1, e_2) um referencial local positivo de TS , onde $e_1 \in TS \cap \Delta$. Então temos que

$$\cos \beta = \langle \xi, e_2 \rangle$$

Observação 2. *O campo e_1 foi inicialmente introduzido em [1], por Bennequin. As suas órbitas geram uma folheação com singularidades genericamente isoladas. Esta folheação é denominada de folheação característica.*

Considere v a projeção unitária do campo vetorial e_2 sobre a distribuição Δ

$$e_2 = \sin \beta v + \cos \beta \xi \tag{1.1}$$

Definimos α como sendo o ângulo dado por

$$\cos \alpha = \langle ie_1, v \rangle$$

Observação 3. *O ângulo de holomorfia α é o correspondente ao ângulo Kähler que foi inicialmente introduzido por Chern and Wolfson em [5].*

1.2 Equações de Estrutura para uma Superfície Mínima em S^{2n+1}

Considere os campos vetoriais normais a superfície S

$$\begin{aligned} e_3 &= i \csc \alpha e_1 - \cot \alpha v \\ e_4 &= \cot \alpha e_1 + i \csc \alpha v \\ e_5 &= \csc \beta \xi - \cot \beta e_2 \\ e_\lambda &= i e_{\lambda+n-2} \\ e_\lambda &\in \Delta \quad 6 \leq \lambda \leq 2n-4 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Denotamos por $(e_j)_{1 \leq j \leq 2n+1}$ um referencial adaptado.

Usando (1.1) e (1.2), obtemos

$$\begin{aligned} v &= \sin \beta e_2 - \cos \beta e_5 \\ iv &= \sin \alpha e_4 - \cos \alpha e_1 \\ \xi &= \cos \beta e_2 + \sin \beta e_5 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Segue de (1.2) e (1.3) que

$$\begin{aligned} ie_1 &= \cos \alpha \sin \beta e_2 + \sin \alpha e_3 - \cos \alpha \cos \beta e_5 \\ ie_2 &= -\cos \beta e_3 - \cos \alpha \sin \beta e_1 + \sin \alpha \sin \beta e_4 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Considere (θ^j) uma base dual de (e_j) .

As formas de conexão de (θ_k^j) são dadas por

$$De_j = \theta_j^k e_k.$$

Definimos

$$\theta_j^\lambda = h_{jk}^\lambda \theta^k \tag{1.5}$$

As componentes das segundas formas fundamentais neste referencial são dadas por

$$II^j = \theta_1^j \theta^1 + \theta_2^j \theta^2; \quad j = 3, \dots, 2n+1$$

Usando (1.4) e computando a diferencial de v e ξ sobre a superfície S , temos

$$\begin{aligned} D\xi &= -\cos \alpha \sin \beta \theta^2 e_1 + \cos \alpha \sin \beta \theta^1 e_2 + \sin \alpha \theta^1 e_3 + \sin \alpha \sin \beta \theta^2 e_4 \\ &\quad - \cos \alpha \cos \beta \theta^1 e_5 \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} Dv &= (\sin \beta \theta_2^1 - \cos \beta \theta_5^1) e_1 + \cos \beta (d\beta - \theta_5^2) e_2 + (\sin \beta \theta_2^3 - \cos \beta \theta_5^3) e_3 \\ &\quad + (\sin \beta \theta_4^2 - \cos \beta \theta_5^4) e_4 + \sin \beta (d\beta + \theta_2^5) e_5 \end{aligned}$$

Calculando a diferencial de e_3 , e_4 e e_5 obtemos

$$\begin{aligned} \theta_3^1 &= -\theta_1^3 \\ \theta_3^2 &= \sin \beta (d\alpha + \theta_4^1) - \cos \beta \sin \alpha \theta^1 \\ \theta_3^4 &= \csc \beta \theta_1^2 - \cot \alpha (\theta_1^3 + \csc \beta \theta_2^4) \\ \theta_3^5 &= \cot \beta \theta_2^3 - \csc \beta \sin \alpha \theta^1 \\ \theta_4^1 &= -d\alpha - \csc \beta \theta_2^3 + \sin \alpha \cot \beta \theta^1 \\ \theta_4^2 &= -\theta_2^4 \\ \theta_4^3 &= \csc \beta \theta_2^1 + \cot \alpha (\theta_1^3 + \csc \beta \theta_2^4) \\ \theta_4^5 &= \cot \beta \theta_2^4 - \sin \alpha \theta^2 \\ \theta_5^1 &= -\cos \alpha \theta^2 - \cot \beta \theta_2^1 \\ \theta_5^2 &= d\beta + \cos \alpha \theta^1 \\ \theta_5^3 &= -\cot \beta \theta_2^3 + \csc \beta \sin \alpha \theta^1 \\ \theta_5^4 &= -\cot \beta \theta_2^4 + \sin \alpha \theta^2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

As condições para simetria e minimalidade da superfície S são descritas por

$$\begin{aligned} \theta_1^\lambda \wedge \theta^1 + \theta_2^\lambda \wedge \theta^2 &= 0 \\ \theta_1^\lambda \wedge \theta^2 - \theta_2^\lambda \wedge \theta^1 &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Sobre a superfície S , considere

$$\theta_1^3 = a\theta^1 + b\theta^2$$

Segue de (1.8)

$$\begin{aligned}\theta_1^3 &= a\theta^1 + b\theta^2 \\ \theta_2^3 &= b\theta^1 - a\theta^2 \\ \theta_1^4 &= d\alpha + (b \csc \beta - \sin \alpha \cot \beta)\theta^1 - a \csc \beta \theta^2 \\ \theta_2^4 &= d\alpha \circ J - a \csc \beta \theta^1 - (b \csc \beta - \sin \alpha \cot \beta)\theta^2 \\ \theta_1^5 &= d\beta \circ J - \cos \alpha \theta^2 \\ \theta_2^5 &= -d\beta - \cos \alpha \theta^1\end{aligned} \tag{1.9}$$

onde a estrutura complexa J de S é dada por $Je_1 = e_2$ e $Je_2 = -e_1$.

As formas de conexão normal são

$$\begin{aligned}\theta_3^4 &= -\sec \beta d\beta \circ J - \cot \alpha \csc \beta d\alpha \circ J + a \cot \alpha \cot^2 \beta \theta^1 \\ &\quad + (b \cot \alpha \cot^2 \beta - \cos \alpha \cot \beta \csc \beta + 2 \sec \beta \cos \alpha) \theta^2 \\ \theta_3^5 &= (b \cot \beta - \csc \beta \sin \alpha) \theta^1 - a \cot \beta \theta^2 \\ \theta_4^5 &= \cot \beta (d\alpha \circ J) - a \cot \beta \csc \beta \theta^1 + (-b \csc \beta \cot \beta + \sin \alpha (\cot^2 \beta - 1)) \theta^2\end{aligned} \tag{1.10}$$

Como a equação de Gauss é

$$d\theta_2^1 + \theta_k^1 \wedge \theta_2^k = \theta^1 \wedge \theta^2 \tag{1.11}$$

Usando (1.5), (1.9) e (1.11), obtemos

$$\begin{aligned}K &= 1 - |\nabla \beta|^2 - 2 \cos \alpha \beta_1 - \cos^2 \alpha - (1 + \csc^2 \beta)(a^2 + b^2) \\ &\quad + 2b \sin \alpha \csc \beta \cot \beta + 2 \sin \alpha \cot \beta \alpha_1 - |\nabla \alpha|^2 \\ &\quad + 2a \csc \beta \alpha_2 - 2b \csc \beta \alpha_1 - \sin^2 \alpha \cot^2 \beta + \sum_{\lambda=6}^{2n-4} (h_{11}^\lambda h_{22}^\lambda - (h_{12}^\lambda)^2)\end{aligned} \tag{1.12}$$

ou equivalentemente a

$$\begin{aligned}
K &= 1 - (1 + \csc^2 \beta)(a^2 + b^2) - 2b \csc \beta (\alpha_1 - \sin \alpha \cot \beta) + 2a \csc \beta \alpha_2 \\
&\quad - |\nabla \beta + \cos \alpha e_1|^2 - |\nabla \alpha - \sin \alpha \cot \beta e_1|^2 \\
&\quad + \sum_{\lambda=6}^{2n-4} (h_{11}^\lambda h_{22}^\lambda - (h_{12}^\lambda)^2)
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Usando (1.7) e a estrutura complexa J de S , obtemos

$$\theta_2^1 = \tan \beta (d\beta \circ J - 2 \cos \alpha \theta^2) \tag{1.14}$$

Computando a diferencial de (1.14), encontramos

$$\begin{aligned}
d\theta_2^1 &= -(1 + \tan^2 \beta) |\nabla \beta|^2 - \tan \beta \Delta \beta - 2 \cos \alpha (1 + 2 \tan^2 \beta) \beta_1 \\
&\quad + 2 \tan \beta \sin \alpha \alpha_1 - 4 \tan^2 \beta \cos^2 \alpha \theta^1 \wedge \theta^2
\end{aligned}$$

onde $\Delta \beta = \text{tr} \nabla d\beta$ é o operador de Beltrami-Laplace de β .

Portanto a Curvatura Gaussiana é

$$\begin{aligned}
K &= -(1 + \tan^2 \beta) |\nabla \beta|^2 - \tan \beta \Delta \beta - 2 \cos \alpha (1 + 2 \tan^2 \beta) \beta_1 \\
&\quad + 2 \tan \beta \sin \alpha \alpha_1 - 4 \tan^2 \beta \cos^2 \alpha
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Comparando a equação (1.12) com a equação (1.15), obtemos uma nova equação para o Laplaciano

$$\begin{aligned}
\tan \beta \Delta \beta &= (1 + \csc^2 \beta)(a^2 + b^2) + 2b \csc \beta (\alpha_1 - \sin \alpha \cot \beta) - 2a \csc \beta \alpha_2 \\
&\quad - \tan^2 \beta (|\nabla \beta + 2 \cos \alpha e_1|^2 - |\cot \beta \nabla \alpha + \sin \alpha (1 - \cot^2 \beta) e_1|^2) \\
&\quad + \sin^2 \alpha (1 - \tan^2 \beta) + \sum_{\lambda=6}^{2n-4} (h_{11}^\lambda h_{22}^\lambda - (h_{12}^\lambda)^2)
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Capítulo 2

Ângulo de Contato para Superfícies Imersas em S^5

2.1 Equações para Curvatura Gaussiana e Laplaciano

Considere S uma superfície orientada imersa em S^5 com $(e_1, e_2) \in TS$ e $e_1 \in TS \cap \Delta$ como no caso geral.

Os campos

$$\begin{aligned} e_3 &= i \csc \alpha e_1 - \cot \alpha v \\ e_4 &= \cot \alpha e_1 + i \csc \alpha v \\ e_5 &= \csc \beta \xi - \cot \beta e_2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

são normais à S .

Calculando as diferenciais de e_3 , e_4 e e_5 obtemos

$$\begin{aligned}
\theta_3^1 &= -\theta_1^3 \\
\theta_3^2 &= \sin \beta (d\alpha + \theta_4^1) - \cos \beta \sin \alpha \theta^1 \\
\theta_3^4 &= \csc \beta \theta_1^2 - \cot \alpha (\theta_1^3 + \csc \beta \theta_2^4) \\
\theta_3^5 &= \cot \beta \theta_2^3 - \csc \beta \sin \alpha \theta^1 \\
\theta_4^1 &= -d\alpha - \csc \beta \theta_2^3 + \sin \alpha \cot \beta \theta^1 \\
\theta_4^2 &= -\theta_2^4 \\
\theta_4^3 &= \csc \beta \theta_2^1 + \cot \alpha (\theta_1^3 + \csc \beta \theta_2^4) \\
\theta_4^5 &= \cot \beta \theta_2^4 - \sin \alpha \theta^2 \\
\theta_5^1 &= -\cos \alpha \theta^2 - \cot \beta \theta_2^1 \\
\theta_5^2 &= d\beta + \cos \alpha \theta^1 \\
\theta_5^3 &= -\cot \beta \theta_2^3 + \csc \beta \sin \alpha \theta^1 \\
\theta_5^4 &= -\cot \beta \theta_2^4 + \sin \alpha \theta^2
\end{aligned} \tag{2.2}$$

As condições para simetria e minimalidade da superfície S são descritas por

$$\begin{aligned}
\theta_1^\lambda \wedge \theta^1 + \theta_2^\lambda \wedge \theta^2 &= 0 \\
\theta_1^\lambda \wedge \theta^2 - \theta_2^\lambda \wedge \theta^1 &= 0
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Sobre a superfície S , considere

$$\theta_1^3 = a\theta^1 + b\theta^2$$

Segue de (2.3)

$$\begin{aligned}
\theta_1^3 &= a\theta^1 + b\theta^2 \\
\theta_2^3 &= b\theta^1 - a\theta^2 \\
\theta_1^4 &= d\alpha + (b \csc \beta - \sin \alpha \cot \beta)\theta^1 - a \csc \beta \theta^2 \\
\theta_2^4 &= d\alpha \circ J - a \csc \beta \theta^1 - (b \csc \beta - \sin \alpha \cot \beta)\theta^2 \\
\theta_1^5 &= d\beta \circ J - \cos \alpha \theta^2 \\
\theta_2^5 &= -d\beta - \cos \alpha \theta^1
\end{aligned} \tag{2.4}$$

onde a estrutura complexa J de S é dada por $Je_1 = e_2$ e $Je_2 = -e_1$.

As formas de conexão normal são

$$\begin{aligned}
\theta_3^4 &= -\sec \beta d\beta \circ J - \cot \alpha \csc \beta d\alpha \circ J + a \cot \alpha \cot^2 \beta \theta^1 \\
&\quad + (b \cot \alpha \cot^2 \beta - \cos \alpha \cot \beta \csc \beta + 2 \sec \beta \cos \alpha) \theta^2 \\
\theta_3^5 &= (b \cot \beta - \csc \beta \sin \alpha) \theta^1 - a \cot \beta \theta^2 \\
\theta_4^5 &= \cot \beta (d\alpha \circ J) - a \cot \beta \csc \beta \theta^1 + (-b \csc \beta \cot \beta + \sin \alpha (\cot^2 \beta - 1)) \theta^2
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Como a equação de Gauss é

$$d\theta_2^1 + \theta_k^1 \wedge \theta_2^k = \theta^1 \wedge \theta^2 \tag{2.6}$$

Segue que usando (1.5), (2.4) e (2.6), obtemos que

$$\begin{aligned}
K &= 1 - |\nabla \beta|^2 - 2 \cos \alpha \beta_1 - \cos^2 \alpha - (1 + \csc^2 \beta)(a^2 + b^2) \\
&\quad + 2b \sin \alpha \csc \beta \cot \beta + 2 \sin \alpha \cot \beta \alpha_1 - |\nabla \alpha|^2 \\
&\quad + 2a \csc \beta \alpha_2 - 2b \csc \beta \alpha_1 - \sin^2 \alpha \cot^2 \beta
\end{aligned} \tag{2.7}$$

ou equivalentemente a

$$\begin{aligned}
K &= 1 - (1 + \csc^2 \beta)(a^2 + b^2) - 2b \csc \beta (\alpha_1 - \sin \alpha \cot \beta) + 2a \csc \beta \alpha_2 \\
&\quad - |\nabla \beta + \cos \alpha e_1|^2 - |\nabla \alpha - \sin \alpha \cot \beta e_1|^2
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Usando (2.2) a estrutura complexa de S , obtemos

$$\theta_2^1 = \tan \beta (d\beta \circ J - 2 \cos \alpha \theta^2) \quad (2.9)$$

Computando a diferencial de (2.9), encontramos

$$\begin{aligned} d\theta_2^1 = & \quad (-(1 + \tan^2 \beta)|\nabla \beta|^2 - \tan \beta \Delta \beta - 2 \cos \alpha (1 + 2 \tan^2 \beta) \beta_1 \\ & + 2 \tan \beta \sin \alpha \alpha_1 - 4 \tan^2 \beta \cos^2 \alpha) \theta^1 \wedge \theta^2 \end{aligned}$$

onde $\Delta \beta = \text{tr} \nabla d\beta$.

Portanto a Curvatura Gaussiana é

$$\begin{aligned} K = & \quad -(1 + \tan^2 \beta)|\nabla \beta|^2 - \tan \beta \Delta \beta - 2 \cos \alpha (1 + 2 \tan^2 \beta) \beta_1 \\ & + 2 \tan \beta \sin \alpha \alpha_1 - 4 \tan^2 \beta \cos^2 \alpha \end{aligned} \quad (2.10)$$

Das equações (2.7) e (2.10), obtemos uma nova equação para o Laplaciano

$$\begin{aligned} \tan \beta \Delta \beta = & \quad (1 + \csc^2 \beta)(a^2 + b^2) + 2b \csc \beta (\alpha_1 - \sin \alpha \cot \beta) - 2a \csc \beta \alpha_2 \\ & - \tan^2 \beta (|\nabla \beta + 2 \cos \alpha e_1|^2 - |\cot \beta \nabla \alpha + \sin \alpha (1 - \cot^2 \beta) e_1|^2) \end{aligned}$$

2.2 Equações de Codazzi-Ricci para uma superfície mínima em S^5

Nesta seção analisaremos as equações de Codazzi-Ricci para uma superfície mínima imersa em S^5 supondo que o ângulo de Contato (β) é constante.

Assim as equações (2.4) reduzem-se a

$$\begin{aligned}
\theta_1^3 &= a\theta^1 + b\theta^2 \\
\theta_2^3 &= b\theta^1 - a\theta^2 \\
\theta_1^4 &= d\alpha + (b \csc \beta - \sin \alpha \cot \beta)\theta^1 - a \csc \beta \theta^2 \\
\theta_2^4 &= d\alpha \circ J - a \csc \beta \theta^1 - (b \csc \beta - \sin \alpha \cot \beta)\theta^2 \\
\theta_1^5 &= d\beta \circ J - \cos \alpha \theta^2 \\
\theta_2^5 &= -d\beta - \cos \alpha \theta^1
\end{aligned} \tag{2.11}$$

As formas da conexão normal dadas por (2.5) reduzem-se a

$$\begin{aligned}
\theta_3^4 &= -\sec \beta d\beta \circ J - \cot \alpha \csc \beta d\alpha \circ J + a \cot \alpha \cot^2 \beta \theta^1 \\
&\quad + (b \cot \alpha \cot^2 \beta - \cos \alpha \cot \beta \csc \beta + 2 \sec \beta \cos \alpha) \theta^2 \\
\theta_3^5 &= (b \cot \beta - \csc \beta \sin \alpha) \theta^1 - a \cot \beta \theta^2 \\
\theta_4^5 &= \cot \beta (d\alpha \circ J) - a \cot \beta' \csc \beta \theta^1 + (-b \csc \beta \cot \beta + \sin \alpha (\cot^2 \beta - 1)) \theta^2
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Substituindo as formas de conexão (2.11) e (2.12) nas equações de Codazzi-Ricci, obtemos

$$d\theta_1^3 + \theta_2^3 \wedge \theta_1^2 + \theta_4^3 \wedge \theta_1^4 + \theta_5^3 \wedge \theta_1^5 = 0$$

De onde segue

$$\begin{aligned}
&(b_1 - a_2) + (a^2 + b^2) \cot \alpha \csc \beta \cot^2 \beta - a \cot \alpha (\csc^2 \beta + \cot^2 \beta) \alpha_2 \\
&+ b(\cot \alpha (\csc^2 \beta + \cot^2 \beta) \alpha_1 - \cos \alpha \cot \beta (\csc^2 \beta + \cot^2 \beta - 3 \sec^2 \beta (1 + \sin^2 \beta))) \\
&- \cos \alpha \csc \beta (2(\cot \beta - \tan \beta) \alpha_1 - \sin \alpha (\cot^2 \beta - 3)) + \cot \alpha \csc \beta |\nabla \alpha|^2 = 0
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Substituindo as formas de conexão (2.11) e (2.12) nas equações de Codazzi-Ricci

$$\begin{aligned} d\theta_2^3 + \theta_1^3 \wedge \theta_2^1 + \theta_4^3 \wedge \theta_2^4 + \theta_5^3 \wedge \theta_2^5 &= 0 \\ d\theta_1^4 + \theta_2^4 \wedge \theta_1^2 + \theta_3^4 \wedge \theta_1^3 + \theta_5^4 \wedge \theta_1^5 &= 0 \\ d\theta_3^5 + \theta_1^5 \wedge \theta_3^1 + \theta_2^5 \wedge \theta_3^2 + \theta_4^5 \wedge \theta_3^4 &= 0 \end{aligned}$$

Obtemos

$$\begin{aligned} (a_1 + b_2) + b \cot \alpha \alpha_2 + a(\cot \alpha \alpha_1 + 6 \tan \beta \cos \alpha) \\ - 2 \sec \beta \cos \alpha \alpha_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Substituindo as formas de conexão (2.11) e (2.12) nas equações de Codazzi-Ricci

$$\begin{aligned} d\theta_2^4 + \theta_1^4 \wedge \theta_2^1 + \theta_3^4 \wedge \theta_2^3 + \theta_5^4 \wedge \theta_2^5 &= 0 \\ d\theta_4^5 + \theta_1^5 \wedge \theta_4^1 + \theta_2^5 \wedge \theta_4^2 + \theta_3^5 \wedge \theta_4^3 &= 0 \end{aligned}$$

Obtemos

$$\begin{aligned} (a_2 - b_1) - (a^2 + b^2) \cot \alpha \sin \beta \cot^2 \beta + a \cot \alpha \alpha_2 \\ + b(-\cot \alpha \alpha_1 + 2 \cos \alpha (\cot \beta - 3 \tan \beta)) + 2 \cos \alpha \sin \beta (\cot \beta - \tan \beta) \alpha_1 \\ + \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta (5 - \cot^2 \beta) + \sin \beta \Delta \alpha = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

As equações de Codazzi

$$\begin{aligned} d\theta_1^2 + \theta_3^2 \wedge \theta_1^3 + \theta_4^2 \wedge \theta_1^4 + \theta_5^2 \wedge \theta_1^5 &= 0 \\ d\theta_1^5 + \theta_2^5 \wedge \theta_1^2 + \theta_3^5 \wedge \theta_1^3 + \theta_4^5 \wedge \theta_1^4 &= 0 \end{aligned}$$

forneem a seguinte equação:

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)(1 + \csc^2 \beta) + 2b \csc \beta (\alpha_1 - \cot \beta \sin \alpha) - 2a \csc \beta \alpha_2 \\ + |\nabla \alpha|^2 + 2 \sin \alpha (\tan \beta - \cot \beta) \alpha_1 - 4 \tan^2 \beta \cos^2 \alpha \\ - \sin^2 \alpha (1 - \cot^2 \beta) = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

A equação de Codazzi abaixo é automaticamente verificada

$$d\theta_2^5 + \theta_1^5 \wedge \theta_2^1 + \theta_3^5 \wedge \theta_2^3 + \theta_4^5 \wedge \theta_2^4 = 0$$

2.3 Aplicações

2.3.1 Superfícies Mínimas em S^5 e Ângulo de Contato β constante

Nesta seção faremos algumas aplicações das equações de Gauss-Codazzi, classificando as superfícies mínimas em S^5 com curvaturas principais a, b nulas e ângulo de Contato (β) constante.

Suponha a, b nulos e ângulo de Contato constante, usando a equação de Codazzi (2.13) resulta que

$$\cos \alpha (2(\cot \beta - \tan \beta) \alpha_1 - \sin \alpha (\cot^2 \beta - 3)) - \cot \alpha |\nabla \alpha|^2 = 0 \quad (2.17)$$

Por outro lado, a equação de Codazzi (2.15) com a, b nulos e ângulo de contato constante resulta

$$2 \cos \alpha (\cot \beta - \tan \beta) \alpha_1 + \sin \alpha \cos \alpha (5 - \cot^2 \beta) + \Delta \alpha = 0 \quad (2.18)$$

Das equações (2.17) e (2.18) obtemos uma equação intrínseca do Laplaciano de α

$$\Delta \alpha = -\sin(2\alpha) - \cot \alpha |\nabla \alpha|^2 \quad (2.19)$$

E usando o Lema de Hopf obtemos o seguinte

TEOREMA 2.1. *O ângulo de Holomorfia ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) para superfícies mínimas compactas em S^5 com ângulo de contato constante e curvaturas principais nulas $a, b = 0$ deve ser constante.*

No capítulo seguinte faremos uma classificação completa de superfícies em S^5 que possuem ângulos de Contato e Holomorfia constantes.

Capítulo 3

Superfícies Mínimas em S^5 com Ângulos de Contato e Holomorfia constantes

Neste capítulo faremos inicialmente uma classificação de superfícies mínimas imersas em S^5 considerando condições apenas sobre os ângulos de Contato e Holomorfia.

3.1 Construção de Toros Mínimos em S^5

Suponha que α e β são constantes com $\beta \neq \frac{\pi}{2}$ ($\beta \neq -\frac{\pi}{2}$), então a equação (2.10) reduz-se a

$$K = -4 \tan^2 \beta \cos^2 \alpha \quad (3.1)$$

Quando $\beta \neq \frac{\pi}{2}$ ($\beta \neq -\frac{\pi}{2}$) o campo de retas determinado por e_1 está globalmente definido, temos portanto que S é paralelizável e pela equação (3.1) a curvatura Gaussiana é constante.

Portanto, do teorema de Gauss-Bonnet, encontramos que a curvatura Gaussiana de S é identicamente nula.

Observação 4. Nos casos extremos para $\beta = 0$ e para $\beta = \frac{\pi}{2}$ não podemos usar a equação (3.1), assim consideramos o referencial adaptado em cada caso, veja nas próximas seções (3.3) e (3.4) um estudo mais detalhado.

3.2 Caso $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$

Quando $\beta \neq 0$, usando a equação (3.1) concluimos que $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

As componentes da segunda forma fundamental dadas por (2.4) são

$$\begin{aligned}\theta_1^3 &= a\theta^1 + b\theta^2 \\ \theta_2^3 &= b\theta^1 - a\theta^2 \\ \theta_1^4 &= (b \csc \beta - \cot \beta)\theta^1 - a \csc \beta \theta^2 \\ \theta_2^4 &= -a \csc \beta \theta^1 - (b \csc \beta - \cot \beta)\theta^2 \\ \theta_1^5 &= 0 \\ \theta_2^5 &= 0\end{aligned}\tag{3.2}$$

As formas de conexão normal são

$$\begin{aligned}\theta_3^4 &= 0 \\ \theta_3^5 &= (b \cot \beta - \csc \beta)\theta^1 - a \cot \beta \theta^2 \\ \theta_4^5 &= -a \cot \beta \csc \beta \theta^1 + (-b \csc \beta \cot \beta + (\cot^2 \beta - 1))\theta^2\end{aligned}$$

As equações de Codazzi

$$\begin{aligned}d\theta_1^3 + \theta_2^3 \wedge \theta_1^2 + \theta_4^3 \wedge \theta_1^4 + \theta_5^3 \wedge \theta_1^5 &= 0 \\ d\theta_2^3 + \theta_1^3 \wedge \theta_2^1 + \theta_4^3 \wedge \theta_2^4 + \theta_5^3 \wedge \theta_2^5 &= 0 \\ d\theta_1^4 + \theta_2^4 \wedge \theta_1^2 + \theta_3^4 \wedge \theta_1^3 + \theta_5^4 \wedge \theta_1^5 &= 0 \\ d\theta_2^4 + \theta_1^4 \wedge \theta_2^1 + \theta_3^4 \wedge \theta_2^3 + \theta_5^4 \wedge \theta_2^5 &= 0 \\ d\theta_3^5 + \theta_1^5 \wedge \theta_3^1 + \theta_2^5 \wedge \theta_3^2 + \theta_4^5 \wedge \theta_3^4 &= 0 \\ d\theta_4^5 + \theta_1^5 \wedge \theta_4^1 + \theta_2^5 \wedge \theta_4^2 + \theta_3^5 \wedge \theta_4^3 &= 0\end{aligned}$$

reduzem-se a

$$\begin{aligned}(a_1 - b_2) &= 0 \\ (a_2 + b_1) &= 0\end{aligned}\tag{3.3}$$

As equações de Codazzi

$$\begin{aligned}d\theta_4^3 + \theta_1^3 \wedge \theta_4^1 + \theta_2^3 \wedge \theta_4^2 + \theta_5^3 \wedge \theta_4^5 &= 0 \\ d\theta_1^5 + \theta_2^5 \wedge \theta_1^2 + \theta_3^5 \wedge \theta_1^3 + \theta_4^5 \wedge \theta_1^4 &= 0 \\ d\theta_2^5 + \theta_1^5 \wedge \theta_2^1 + \theta_3^5 \wedge \theta_2^3 + \theta_4^5 \wedge \theta_2^4 &= 0\end{aligned}$$

forneem a equação

$$(1 + \csc^2 \beta)(a^2 + b^2) - 2b \csc \beta \cot \beta + (\cot^2 \beta - 1) = 0\tag{3.4}$$

A equação acima é equivalente a equação do círculo

$$a^2 + \left(b - \frac{\cos \beta}{1 + \sin^2 \beta}\right)^2 = 2 \frac{\sin^4 \beta}{(1 + \sin^2 \beta)^2}\tag{3.5}$$

Considerando (x, y) um sistema de coordenadas conforme sobre S , a equação (3.3) é representada pelas equações de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned}(a_x - b_y) &= 0 \\ (a_y + b_x) &= 0\end{aligned}$$

Portanto $f = a + ib$ é uma função holomorfa com valores no círculo (3.5) segue assim que a and b são constantes.

Provamos então o seguinte teorema

TEOREMA 3.1. *As superfícies mínimas compactas, orientáveis em S^5 com ângulo de Contato (β) e ângulo de Holomorfia (α) constantes são toros. Estes toros são parametrizados pelos parâmetros a e b que satisfazem a seguinte equação do círculo*

$$a^2 + \left(b - \frac{\cos \beta}{1 + \sin^2 \beta}\right)^2 = 2 \frac{\sin^4 \beta}{(1 + \sin^2 \beta)^2}$$

Observação 5. *Em particular, quando $a = 0$ descrevemos os exemplos já estudados por Kenmotsu, em [10]. Estes exemplos estão definidos para $(0 < \beta < \frac{\pi}{2})$.*

Observação 6. *Em particular, quando $b = 0$ construímos uma nova família de toros mínimos em S^5 e estes toros estão definidos para $(\frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2})$*

Observação 7. *No caso geral, os parâmetros (a, b, β) descrevem um cone em $\mathbb{R}^3$ segundo a Figura 3.1.*

Figura 3.1: Toros Mínimos em S^5

3.3 Caso $\beta = 0$

O referencial adaptado para superfície S é dado por

$$\begin{aligned} e_2 &= \xi \\ e_3 &= ie_1 \\ e_4 &\in \Delta \\ e_4 &\perp (e_1, ie_1) \\ e_5 &= ie_4 \end{aligned} \tag{3.6}$$

A diferencial de e_2 é

$$De_2 = \theta_2^1 e_1 + \theta_2^3 e_3 + \theta_2^4 e_4 + \theta_2^5 e_5 \tag{3.7}$$

Computando a diferencial de ξ e usando (3.6)

$$\begin{aligned} D\xi &= \theta^1(ie_1) + \theta^2(ie_2) + \theta^3(ie_3) + \theta^4(ie_4) + \theta^5(ie_5) \\ &= -\theta^3 e_1 + \theta^1 e_3 - \theta^5 e_4 + \theta^4 e_5 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Sobre a superfície S as formas duais θ^3, θ^4 and θ^5 são nulas e usando (3.7) e (3.8) e a condição de minimalidade temos que as formas de conexão $\theta_2^1, \theta_1^4, \theta_2^4, \theta_1^5, \theta_2^5$ são nulas, obtendo

$$\begin{aligned} \theta_1^3 &= \theta^2 \\ \theta_2^3 &= \theta^1 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Calculando a diferencial de $e_3 = ie_1$ obtemos as mesmas expressões que as equações (3.9) e também que θ_3^4 e θ_3^5 são nulas.

Analogamente acontece para a diferencial da equação $e_5 = ie_4$.

Usando (3.9), temos

$$De_1 = \theta^2 e_3$$

Assim, $D_{e_1}e_1 = 0$, e portanto e_1 é um campo geodésico que pertence a distribuição Δ . Assim concluímos que no caso $\beta = 0$, a superfície S é um toro e é descrita geometricamente pelo produto de dois círculos, um pertence a distribuição de contato e o outro à fibração de Hopf.

3.4 Caso $\beta = \frac{\pi}{2}$ (Legendrianas)

Neste caso S é tangente à distribuição de contato, ou seja, S é Legendriana. O referencial adaptado para a superfície S é dado por

$$\begin{aligned} e_2 &= v \\ e_3 &= i \csc \alpha e_1 - \cot \alpha e_2 \\ e_4 &= \cot \alpha e_1 + i \csc \alpha e_2 \\ e_5 &= \xi \end{aligned} \tag{3.10}$$

Diferenciando e_5 obtemos

$$De_5 = \theta_5^1 e_1 + \theta_5^2 e_2 + \theta_5^3 e_3 + \theta_5^4 e_4 \tag{3.11}$$

Computando a diferencial de ξ e usando (3.10)

$$\begin{aligned} D\xi &= \theta^1(ie_1) + \theta^2(ie_2) + \theta^3(ie_3) + \theta^4(ie_4) + \theta^5(ie_5) \\ &= -\cos \alpha \theta^2 e_1 + \cos \alpha \theta^1 e_2 + \sin \alpha \theta^1 e_3 + \sin \alpha \theta^2 e_4 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Segue de (3.11) e (3.12)

$$\begin{aligned} \theta_5^1 &= -\cos \alpha \theta^2 \\ \theta_5^2 &= \cos \alpha \theta^1 \\ \theta_5^3 &= \sin \alpha \theta^1 \\ \theta_5^4 &= \sin \alpha \theta^2 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Usando (2.4) com $\beta = \frac{\pi}{2}$ e comparando com (3.13), concluímos que $\alpha = \frac{\pi}{2}$, provando o seguinte

Corolário 3.2. *As superfícies mínimas Legendrianas em S^5 são totalmente reais.*

Assim o referencial adaptado dado por (3.10) reduz-se à

$$\begin{aligned} e_2 &= v \\ e_3 &= ie_1 \\ e_4 &= ie_2 \\ e_5 &= \xi \end{aligned} \tag{3.14}$$

Calculando a diferencial de ambos os membros da equação $e_3 = ie_1$ obtemos

$$\begin{aligned} \theta_3^1 &= -\theta_1^3 \\ \theta_3^2 &= -\theta_1^4 \\ \theta_3^4 &= \theta_1^2 \\ \theta_3^5 &= -\theta^1 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Calculando a diferencial de ambos os membros da equação $e_4 = ie_2$ obtemos

$$\begin{aligned} \theta_4^1 &= -\theta_2^3 \\ \theta_4^2 &= -\theta_2^4 \\ \theta_4^3 &= \theta_2^1 \\ \theta_4^5 &= -\theta^2 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Na seção (3.6) faremos um tratamento mais detalhado de superfícies mínimas legendrianas com curvatura Gaussiana constante.

3.5 Toros Mínimos em S^5 com Ângulo de Holonomia Nulo

Quando $\alpha = 0$ o campo v é igual ao campo ie_1 . Neste caso o referencial adaptado a superfície S é dado por

$$\begin{aligned} e_2 &= \sin \beta (ie_1) + \cos \beta \xi \\ e_3 &\in \Delta \\ e_4 &= ie_3 \\ e_5 &= \csc \beta \xi - \cot \beta e_2 \end{aligned} \tag{3.17}$$

A diferencial de e_2 é

$$De_2 = \theta_2^1 e_1 + \theta_2^3 e_3 + \theta_2^4 e_4 + \theta_2^5 e_5 \tag{3.18}$$

Por outro lado,

$$De_2 = \tan \beta (\theta_1^5 - \theta^2) e_1 - \sin \beta \theta_1^4 e_3 + \sin \beta \theta_1^3 e_4 - (d\beta + \theta^1) e_5 \tag{3.19}$$

Comparando a equação (3.18) com a equação (3.19) obtemos

$$\begin{aligned} \theta_2^1 &= \tan \beta (\theta_1^5 - \theta^2) \\ \theta_2^3 &= -\sin \beta \theta_1^4 \\ \theta_2^4 &= \sin \beta \theta_1^3 \\ \theta_2^5 &= -d\beta \theta^1 \end{aligned}$$

Usando a condição de minimalidade temos

$$(1 - \sin^2 \beta) \theta_1^3 = 0$$

Como a superfície S é não legendriana, concluímos que $\theta_1^3 = 0$. Então a equação (2.11) reduz-se a

$$\Delta(\beta) = -\tan \beta |\nabla \beta + 2e_1|^2 \tag{3.20}$$

Suponha que $0 \leq \beta < \frac{\pi}{2}$, então usando o Lema de Hopf obtemos que β é constante e usando a equação (2.10) obtemos que a curvatura Gaussiana é identicamente nula e portanto a superfície S é o Toro de Clifford. Provamos assim o seguinte Teorema.

TEOREMA 3.3. *O Toro de Clifford é a única superfície mínima, compacta, não legendriana em S^5 com ângulo de Contato $0 \leq \beta < \frac{\pi}{2}$ e ângulo de Holomorfia nulo.*

3.6 Superfícies Mínimas Legendrianas em S^5 com Curvatura Gaussiana Constante

No caso de $\beta = \frac{\pi}{2}$ obtemos as superfícies Legendrianas.

Diagonalizando a componente na direção e_3 da segunda forma fundamental temos

$$\begin{aligned}\theta_1^3 &= \lambda\theta^1 \\ \theta_2^3 &= -\lambda\theta^2\end{aligned}\tag{3.21}$$

A equação de Codazzi relativa a θ_1^3 é

$$d\theta_1^3 + \theta_2^3 \wedge \theta_1^2 + \theta_4^3 \wedge \theta_1^4 + \theta_5^3 \wedge \theta_1^5 = 0$$

Usando a equação de Codazzi acima e as equações (3.15), (3.16) e (3.21) temos

$$d\lambda \wedge \theta^1 = -3\lambda\theta_1^2 \wedge \theta^2\tag{3.22}$$

A equação de Codazzi relativa a θ_2^3 é

$$d\theta_2^3 + \theta_1^3 \wedge \theta_2^1 + \theta_4^3 \wedge \theta_2^4 + \theta_5^3 \wedge \theta_2^5 = 0$$

Usando a equação de Codazzi acima e as equações (3.15), (3.16) e (3.21), temos

$$d\lambda \wedge \theta^2 = 3\lambda\theta_1^2 \wedge \theta^1\tag{3.23}$$

Se a curvatura Gaussiana é constante, segue da equação de Gauss que

$$K = 1 - 2\lambda^2\tag{3.24}$$

que λ é constante e usando as equações (3.22) e (3.23), temos portanto que ou $\lambda = 0$ ou $\theta_1^2 = 0$.

Obtemos assim uma nova prova de um teorema de Blair, em [2] e Miyara, Kon, Yamaguchi, em [16].

TEOREMA 3.4. *O Toro de Clifford e a Esfera Totalmente Geodésica são as únicas superfícies mínimas Legendrianas em S^5 com curvatura Gaussiana constante.*

Usando (3.22) e (3.23) a forma de conexão θ_1^2 é dada por

$$\theta_1^2 = \frac{\lambda_2 \theta^1 - \lambda_1 \theta^2}{3\lambda} \quad (3.25)$$

Calculando a diferencial de (3.25) temos uma expressão geral para a Curvatura Gaussiana de superfícies Legendrianas mínimas em S^5

$$K = \frac{\lambda \Delta \lambda + |\nabla \lambda|^2}{3\lambda^2}$$

3.7 Exemplos de Superfícies Mínimas em S^5

Nesta seção calculamos o ângulo de Contato para exemplos de Toros mínimos apresentados por Kenmotsu, em [10].

3.7.1 Ângulo de Contato do Toro Mínimo Legendriano

Considere a seguinte imersão

$$f(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{3}}(e^{iu_1}, e^{iu_2}, e^{-i(u_1+u_2)})$$

do toro definido por

$$T^3 = \{(z_1, z_2, z_3) \in C^3 | z_1 \bar{z}_1 = \frac{1}{3}, z_2 \bar{z}_2 = \frac{1}{3}, z_3 \bar{z}_3 = \frac{1}{3}\}$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_1} &= i \frac{1}{\sqrt{3}}(e^{iu_1}, 0, -e^{-i(u_1+u_2)}) \\ \frac{\partial}{\partial u_2} &= i \frac{1}{\sqrt{3}}(0, e^{iu_2}, -e^{-i(u_1+u_2)}) \end{aligned}$$

O campo de Reeb é

$$\xi = i \frac{1}{\sqrt{3}}(e^{iu_1}, e^{iu_2}, e^{-i(u_1+u_2)})$$

Note que $\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2} \in \Delta$, pois $\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2} \perp \xi$.

Como $e_1 \in \Delta$, ortonormalizamos a base acima

$$e_2 = \frac{\frac{\partial}{\partial u_2} - \langle \frac{\partial}{\partial u_2}, e_1 \rangle e_1}{\|\frac{\partial}{\partial u_2} - \langle \frac{\partial}{\partial u_2}, e_1 \rangle e_1\|}$$

Assim a base ortonormal tem a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} e_1 &= i \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{iu_1}, 0, -e^{-i(u_1+u_2)}) \\ e_2 &= i \sqrt{\frac{2}{3}}(-\frac{1}{2}e^{iu_1}, e^{iu_2}, -\frac{1}{2}e^{-i(u_1+u_2)}) \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} e_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\partial}{\partial u_1} \\ e_2 &= \sqrt{2} \left(\frac{\partial}{\partial u_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_1} \right) \end{aligned}$$

As formas duais de (e_1, e_2) são

$$\begin{aligned} \theta^1 &= \sqrt{\frac{2}{3}} du_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} du_2 \\ \theta^2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} du_2 \end{aligned} \tag{3.26}$$

O ângulo de Contato é

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \langle e_2, \xi \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto

$$\beta = \frac{\pi}{2}$$

A projeção unitária v de e_2 sobre a distribuição Δ é dada por

$$v = \frac{e_2 - \cos \beta \xi}{\sin \beta}$$

Assim

$$v = i \sqrt{\frac{2}{3}} \left(-\frac{1}{2} e^{iu_1}, e^{iu_2}, -\frac{1}{2} e^{-i(u_1+u_2)} \right)$$

O ângulo de Holomorfia é

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \langle i e_1, v \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

Os campos normais à superfície S são

$$\begin{aligned} e_3 &= ie_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-e^{iu_1}, 0, e^{-i(u_1+u_2)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_4 &= iv \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}e^{iu_1}, -e^{iu_2}, \frac{1}{2}e^{-i(u_1+u_2)}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_5 &= -\sin \beta \xi + \cos \beta v \\ &= \frac{i}{\sqrt{3}}(-e^{iu_1}, -e^{iu_2}, -e^{-i(u_1+u_2)}) \end{aligned}$$

Diferenciando o campo normal e_3 e usando (3.26), obtemos

$$\begin{aligned} De_3 &= \frac{i}{\sqrt{2}}(-e^{iu_1}, 0, -e^{-i(u_1+u_2)})du_1 + \frac{i}{\sqrt{2}}(0, 0, -e^{-i(u_1+u_2)})du_2 \\ &= \left(\frac{1}{2}du_2\right)e_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(du_1 + \frac{1}{2}du_2\right)e_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}(2du_1 + du_2)e_5 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\theta^2\right)e_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\theta^1\right)e_2 + \theta^1e_5 \end{aligned}$$

A segunda forma fundamental relativa ao campo normal e_3 é

$$\Pi^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Diferenciando o campo normal e_4 e usando (3.26), obtemos

$$\begin{aligned} De_4 &= i\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}e^{iu_1}, 0, -\frac{1}{2}e^{-i(u_1+u_2)}\right)du_1 + i\sqrt{\frac{2}{3}}\left(0, -e^{iu_2}, -\frac{1}{2}e^{-i(u_1+u_2)}\right)du_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(du_1 + \frac{1}{2}du_2\right)e_1 + \left(-\frac{1}{2}du_2\right)e_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(du_2)e_5 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\theta^1\right)e_1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\theta^2\right)e_2 + \theta^2e_5 \end{aligned}$$

A segunda forma fundamental relativa ao campo normal e_4 é

$$\Pi^4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Diferenciando o campo normal e_5 e usando (3.26), obtemos

$$\begin{aligned} De_5 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(e^{iu_1}, 0, -e^{-i(u_1+u_2)})du_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}(0, e^{iu_2}, -e^{-i(u_1+u_2)})du_2 \\ &= -\frac{1}{\sqrt{6}}(2du_1 + du_2)e_3 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}du_2\right)e_4 \\ &= -\theta^1 e_3 - \theta^2 e_4 \end{aligned}$$

A segunda forma fundamental relativa ao campo normal e_5 é nula:

$$\Pi^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.7.2 Ângulo de Contato do Toro de Clifford Generalizado

Considere a seguinte imersão

$$f(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{3}}(e^{iu_1}, e^{iu_2}, e^{i(u_2-u_1)})$$

do toro definido por

$$T^3 = \{(z_1, z_2, z_3) \in C^3 \mid z_1 \bar{z}_1 = \frac{1}{3}, z_2 \bar{z}_2 = \frac{1}{3}, z_3 \bar{z}_3 = \frac{1}{3}\}$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_1} &= \frac{i}{\sqrt{3}}(e^{iu_1}, 0, -e^{i(u_2-u_1)}) \\ \frac{\partial}{\partial u_2} &= \frac{i}{\sqrt{3}}(0, e^{iu_2}, e^{i(u_2-u_1)}) \end{aligned}$$

O campo de Contato normal à distribuição é

$$\xi = \frac{i}{\sqrt{3}}(e^{iu_1}, e^{iu_2}, e^{i(u_2-u_1)})$$

Note que $\frac{\partial}{\partial u_1} \in \Delta$, pois $\frac{\partial}{\partial u_1} \perp \xi$.

Como $e_1 \in \Delta$, ortonormalizamos a base acima

$$e_2 = \frac{\frac{\partial}{\partial u_2} - \langle \frac{\partial}{\partial u_2}, e_1 \rangle e_1}{\|\frac{\partial}{\partial u_2} - \langle \frac{\partial}{\partial u_2}, e_1 \rangle e_1\|}$$

Assim a base ortonormal é dada por

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{i}{\sqrt{2}}(e^{iu_1}, 0, -e^{i(u_2-u_1)}) \\ e_2 &= i\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}e^{iu_1}, e^{iu_2}, \frac{1}{2}e^{i(u_2-u_1)}\right) \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} e_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\partial}{\partial u_1} \\ e_2 &= \sqrt{2} \left(\frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_1} \right) \end{aligned}$$

As formas duais de (e_1, e_2) são

$$\begin{aligned}\theta^1 &= \sqrt{\frac{2}{3}}du_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}du_2 \\ \theta^2 &= \frac{\sqrt{2}}{2}du_2\end{aligned}\tag{3.27}$$

O ângulo de Contato é

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \langle e_2, \xi \rangle \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

Portanto

$$\beta = \arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

A projeção v de e_2 sobre a distribuição Δ é dada por

$$v = \frac{e_2 - \cos \beta \xi}{\sin \beta}$$

Assim

$$v = i\sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{2}e^{iu_1}, e^{iu_2}, -\frac{1}{2}e^{i(u_2-u_1)}\right)$$

O ângulo de Holomorfia é

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \langle ie_1, v \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

Portanto

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

Os campos normais à superfície são

$$\begin{aligned}e_3 &= ie_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-e^{iu_1}, 0, e^{i(u_2-u_1)})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_4 &= iv \\
&= \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{2} e^{iu_1}, -e^{iu_2}, \frac{1}{2} e^{i(u_2-u_1)} \right) \\
e_5 &= -\sin \beta \xi + \cos \beta v \\
&= \frac{i}{\sqrt{3}} (-e^{iu_1}, e^{iu_2}, -e^{i(u_2-u_1)})
\end{aligned}$$

Diferenciando o campo normal e_3 e usando (3.27), temos

$$\begin{aligned}
De_3 &= \frac{i}{\sqrt{2}} (-e^{iu_1}, 0, -e^{i(u_2-u_1)}) du_1 + \frac{i}{\sqrt{2}} (0, 0, e^{i(u_2-u_1)}) du_2 \\
&= \left(-\frac{1}{2} du_2\right) e_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} (-du_1 + \frac{1}{2} du_2) e_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} (2du_1 - du_2) e_5 \\
&= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \theta^2\right) e_1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \theta^1\right) e_2 + \theta^1 e_5
\end{aligned}$$

A segunda forma fundamental relativa ao campo normal e_3 é

$$\Pi^3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Diferenciando o campo normal e_4 e usando (3.27), temos

$$\begin{aligned}
De_4 &= i\sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{2} e^{iu_1}, 0, -\frac{1}{2} e^{i(u_2-u_1)} \right) du_1 + i\sqrt{\frac{2}{3}} \left(0, -e^{iu_2}, \frac{1}{2} e^{i(u_2-u_1)} \right) du_2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} (du_1 - \frac{1}{2} du_2) e_1 + \left(-\frac{1}{2} du_2\right) e_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} (du_2) e_5 \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \theta^1\right) e_1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \theta^2\right) e_2 - \theta^2 e_5
\end{aligned}$$

A segunda forma fundamental relativa ao campo normal e_4 é

$$\Pi^4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Diferenciando o campo normal e_5 e usando (3.27), temos

$$\begin{aligned}
De_5 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (e^{iu_1}, 0, -e^{i(u_2-u_1)}) du_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} (0, -e^{iu_2}, e^{i(u_2-u_1)}) du_2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} (-2du_1 + du_2) e_3 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} du_2\right) e_4 \\
&= -\theta^1 e_3 + \theta^2 e_4
\end{aligned}$$

A segunda forma fundamental relativa ao campo normal e_5 é nula:

$$\Pi^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.7.3 Ângulo de Contato do Toro de Clifford Padrão

Considere a imersão

$$f(u_1, u_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}(e^{iu_1}, e^{iu_2}, 0)$$

do toro definido por

$$T^2 = \{(z_1, z_2, 0) \in C^3 | z_1 \bar{z}_1 = \frac{1}{2}, z_2 \bar{z}_2 = \frac{1}{2}\}$$

Assim

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_1} &= \frac{i}{\sqrt{2}}(e^{iu_1}, 0, 0) \\ \frac{\partial}{\partial u_2} &= \frac{i}{\sqrt{2}}(0, e^{iu_2}, 0) \end{aligned}$$

O campo de Contato normal à distribuição é

$$\xi = \frac{i}{\sqrt{2}}(e^{iu_1}, e^{iu_2}, 0)$$

Os campos vetoriais tangentes à superfície são

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\partial}{\partial u_1} - \frac{\partial}{\partial u_2} = \frac{i}{\sqrt{2}}(e^{iu_1}, -e^{iu_2}, 0) \\ e_2 &= \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial u_2} = \frac{i}{\sqrt{2}}(e^{iu_1}, e^{iu_2}, 0) \end{aligned}$$

As formas duais de (e_1, e_2) são

$$\begin{aligned} \theta^1 &= \frac{du_1 - du_2}{2} \\ \theta^2 &= \frac{du_1 + du_2}{2} \end{aligned} \tag{3.28}$$

Note que e_2 é igual ao campo vetorial de Contato ξ e portanto

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \langle e_2, \xi \rangle \\ &= 1 \end{aligned}$$

Assim

$$\beta = 0$$

Os campos normais à superfície são

$$\begin{aligned} e_3 &= \frac{i}{\sqrt{2}}(-e^{iu_1}, e^{iu_2}, 0) \\ e_4 &= (0, 0, 1) \\ e_5 &= i(0, 0, 1) \end{aligned}$$

Diferenciando o campo normal e_3 e usando (3.28), obtemos

$$\begin{aligned} De_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-e^{iu_1}, 0, 0)du_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(0, e^{iu_2}, 0)du_2 \\ &= -\frac{1}{2}(du_1 + du_2)e_1 - \frac{1}{2}(du_1 - du_2)e_2 \\ &= -\theta^2 e_1 - \theta^1 e_2 \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \theta_1^3 &= \theta^2 \\ \theta_2^3 &= \theta^1 \end{aligned}$$

A segunda forma fundamental relativa ao campo normal e_3 é

$$\Pi^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

As componentes da segunda forma fundamental relativa aos campos normais e_4 e e_5 são

$$\Pi^4 = \Pi^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Capítulo 4

Superfícies Mínimas em S^3

4.1 Preliminares

O produto hermitiano do C^2 é dado por:

$$(z, w) = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2$$

onde $z = (z_1, z_2)$ são elementos do C^2 .

O produto interno do $C^2 \cong \mathbb{R}^4$ é dado pela parte real:

$$\begin{aligned} \langle z, w \rangle &= \frac{(z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2) + (\bar{z}_1 w_1 + \bar{z}_2 w_2)}{2} \\ &= \operatorname{Re}(z, w) \end{aligned}$$

Se considerarmos $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, então:

$$\begin{aligned} \langle z, w \rangle &= x_1 u_1 + x_2 u_2 + y_1 v_1 + y_2 v_2 \\ \langle z, z \rangle &= x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 \end{aligned}$$

Consideremos a esfera $S^3 \subset \mathbb{C}^2$

$$S^3 = \{z \in \mathbb{C}^2 \mid (z, z) = 1\}$$

O campo normal à S^3 é dado por:

$$N(z) = z$$

A distribuição de Contato canônica é definida por:

$$\Delta_z = \{v \in T_z S^3 | \langle v, iz \rangle = 0\}$$

O campo de Reeb sobre S^3 é o campo:

$$\xi(z) = iz$$

Δ_z é o complemento ortogonal do plano complexo $[z]_{\mathbb{C}}$ gerado por z , em relação ao produto hermitiano. Δ_z é invariante por multiplicação por i .

$$J : \Delta_z \rightarrow \Delta_z$$

$$J(u) = iu$$

define uma estrutura complexa sobre Δ .

4.2 Equações de Estrutura de S^3

Consideremos (f_1, f_2, f_3) um referencial ortonormal positivo de S^3 adaptado a Δ , isto é, (f_1, f_2) é um referencial de Δ e $f_3 = \xi$.

Denotemos por (w_1, w_2, w_3) a base dual e D a derivada covariante de S^3 .

As formas de conexão são dadas por:

$$Df_i = w_i^j f_j$$

e verificam as equações de estrutura:

$$\begin{aligned} dw^i + w_j^i \wedge w^j &= 0 \\ dw_j^i + w_k^i \wedge w_j^k &= \Omega_j^i \end{aligned}$$

onde Ω_j^i são as formas de curvatura de S^3 e $w_j^i + w_i^j = 0$.

Desde que $f_3 = \xi = iN$, segue que:

$$\begin{aligned} df_3 &= idN \\ &= i(w^1 f_1 + w^2 f_2 + w^3 f_3) \\ &= -w^2 f_1 + w^1 f_2 - w^3 N \end{aligned}$$

Sendo Df_3 a parte tangencial, obtemos:

$$\begin{aligned} Df_3 &= -w^2 f_1 + w^1 f_2 \\ &= w^1 i(f_1) + w^2 i(f_2) \end{aligned}$$

Note que $Df_3 = i$ sobre a distribuição Δ .

Por outro lado temos

$$Df_3 = w_3^1 f_1 + w_3^2 f_2$$

Da qual obtemos

$$\begin{aligned} w_3^1 &= -w^2 \\ w_3^2 &= w^1 \end{aligned}$$

Assim as equações de estrutura reduzem-se à:

$$dw^1 + w_2^1 \wedge w^2 - w^2 \wedge w^3 = 0$$

$$dw^2 + w_1^2 \wedge w^1 + w^1 \wedge w^3 = 0$$

$$dw^3 + w^2 \wedge w^1 - w^1 \wedge w^3 = 0$$

Simplificando temos:

$$dw^1 + (w_2^1 + w^3) \wedge w^2 = 0$$

$$dw^2 + (w_1^2 - w^3) \wedge w^1 = 0$$

$$dw^3 - 2w^1 \wedge w^2 = 0$$

As segundas equações de estrutura são:

$$dw_2^1 + w_3^1 \wedge w_2^3 = w^1 \wedge w^2 = \Omega_2^1$$

$$dw_3^2 + w_1^2 \wedge w_3^1 = w^2 \wedge w^3 = \Omega_3^2$$

$$dw_1^3 + w_2^3 \wedge w_1^2 = w^3 \wedge w^1 = \Omega_1^3$$

onde Ω_2^1, Ω_3^2 e Ω_1^3 são as formas de curvatura Riemanniana de S^3 .

Simplificando, temos:

$$dw_2^1 - 2w^1 \wedge w^2 = 0$$

$$dw^1 + (w_2^1 + w^3) \wedge w^2 = 0$$

$$dw^2 + (w_1^2 - w^3) \wedge w^1 = 0$$

Note que a segunda e terceira equação repetem as primeiras equações de estrutura.

Se $w = w_2^1 + w^3$, então :

$$dw^1 + w \wedge w^2 = 0$$

$$dw^2 - w \wedge w^1 = 0$$

$$dw^3 - 2w^1 \wedge w^2 = 0$$

4.3 Ângulo de Contato para Superfícies em S^3

Seja S uma superfície orientada imersa em S^3 . Como Δ é uma distribuição de contato, então o conjunto

$$U = \{p \in S \mid \dim(\Delta_p \cap T_p S) = 1\}$$

é um aberto denso em S .

Considere um campo unitário $e_1 \in TS \cap \Delta$. Escolhemos $e_2 \in TS$ tal que (e_1, e_2) é um referencial ortonormal positivo de S (supondo-se que S é orientada). Assim, se $p \notin U$ então $(e_2)_p \in \Delta_p$.

Definimos o ângulo de Contato para S como sendo a função angular β tal que

$$\cos \beta = \langle \xi, e_2 \rangle$$

Assim:

$$e_2 = \cos \beta f_3 + \sin \beta f_2$$

Obtemos então um referencial de Darboux para S :

$$\begin{aligned} e_1 &= f_1 \\ e_2 &= \sin \beta f_2 + \cos \beta f_3 \\ e_3 &= -\cos \beta f_2 + \sin \beta f_3 \end{aligned}$$

Invertendo, temos:

$$\begin{aligned} f_1 &= e_1 \\ f_2 &= \sin \beta e_2 - \cos \beta e_3 \\ f_3 &= \cos \beta e_2 + \sin \beta e_3 \end{aligned}$$

Seja $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ coreferencial de (e_1, e_2, e_3) , então:

$$\begin{aligned}\theta^1 &= w^1 \\ \theta^2 &= \sin \beta w^2 + \cos \beta w^3 \\ \theta^3 &= -\cos \beta w^2 + \sin \beta w^3\end{aligned}\tag{4.1}$$

Invertendo, temos:

$$\begin{aligned}w^1 &= \theta^1 \\ w^2 &= \sin \beta \theta^2 - \cos \beta \theta^3 \\ w^3 &= \cos \beta \theta^2 + \sin \beta \theta^3\end{aligned}$$

4.4 Equações de Estrutura para o referencial adaptado

Nesta seção deduziremos as equações de estrutura para o referencial adaptado.

Note que $\theta^3 = 0$ sobre a superfície S . De onde segue que:

$$\sin \beta w^3 = \cos \beta w^2$$

e também que:

$$\begin{aligned} w^2 &= \sin \beta \theta^2 \\ w^3 &= \cos \beta \theta^2 \end{aligned}$$

Segue de (4.1) que:

$$\begin{aligned} d\theta^1 &+ \sin(\beta)(w_2^1 - \cos(\beta)\theta^2) \wedge \theta^2 = 0 \\ d\theta^2 &+ \sin(\beta)(w_1^2 + \cos(\beta)\theta^2) \wedge \theta^1 = 0 \\ d\theta^3 &= d\beta \wedge \theta^2 - \cos(\beta)w_2^1 \wedge w^1 + (1 + \sin^2(\beta))\theta^1 \wedge \theta^2 \end{aligned}$$

Portanto a forma de conexão de S é dada por:

$$\theta_2^1 = \sin(\beta)(w_2^1 - \cos(\beta)\theta^2) \quad (4.2)$$

Calculando De_3 na base (e_1, e_2) , obtemos os coeficientes da segunda forma fundamental:

$$De_3 = \theta_3^1 e_1 + \theta_3^2 e_2$$

onde:

$$\begin{aligned} \theta_3^1 &= -\cos(\beta)w_2^1 - \sin^2(\beta)\theta^2 \\ \theta_3^2 &= d\beta + \theta^1 \end{aligned}$$

Como $d\theta^3 = 0$, temos:

$$w_2^1(e_2) = -\frac{\beta_1}{\cos \beta} - \frac{(1 + \sin^2 \beta)}{\cos \beta} \quad (4.3)$$

onde $d\beta(e_1) = \beta_1$.

Da condição de minimalidade:

$$\theta_1^3 \wedge \theta^2 - \theta_2^3 \wedge \theta^1 = 0$$

obtemos:

$$w_2^1(e_1) = \frac{\beta_2}{\cos(\beta)} \quad (4.4)$$

onde $d\beta(e_2) = \beta_2$.

Usando (4.2), (4.3) e (4.4), encontramos:

$$\begin{aligned} \theta_2^1 &= \tan(\beta)(\beta_2\theta^1 - (\beta_1 + 2)\theta^2) \\ \theta_3^1 &= -\beta_2\theta^1 + (\beta_1 + 1)\theta^2 \\ \theta_3^2 &= (\beta_1 + 1)\theta^1 + \beta_2\theta^2 \end{aligned}$$

Se J é a estrutura complexa de S temos $Je_1 = e_2$ e $Je_2 = -e_1$.

Usando J , as formas acima reduzem-se a:

$$\begin{aligned} \theta_2^1 &= \tan \beta (d\beta \circ J - 2\theta^2) \\ \theta_3^1 &= -d\beta \circ J + \theta^2 \\ \theta_3^2 &= d\beta + \theta^1 \end{aligned} \quad (4.5)$$

4.5 Equações de Gauss e Codazzi para uma Superfície Mínima em S^3

Da equação de Gauss:

$$d\theta_1^2 = \theta^1 \wedge \theta^2 + \theta_1^3 \wedge \theta_2^3$$

Obtemos:

$$d\theta_2^1 = (|\nabla\beta|^2 + 2\beta_1)(\theta^2 \wedge \theta^1) \quad (4.6)$$

de onde concluímos que:

$$K = 1 - |\nabla\beta + e_1|^2$$

Calculando a diferencial de θ_2^1 , temos:

$$\begin{aligned} d\theta_2^1 = & \sec^2(\beta)(|\nabla\beta|^2 + 2\beta_1)(\theta^2 \wedge \theta^1) \\ & + (\tan(\beta)\Delta(\beta) + 2\tan^2(\beta)(\beta_1 + 2))(\theta^2 \wedge \theta^1) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Combinando (4.6) e (4.7), temos uma nova fórmula para o Laplaciano:

$$\Delta(\beta) = -\tan(\beta)((\beta_1 + 2)^2 + \beta_2^2) \quad (4.8)$$

Ou ainda:

$$\Delta(\beta) = -\tan(\beta)|\nabla\beta + 2e_1|^2$$

As equações de Codazzi são:

$$d\theta_1^3 + \theta_2^3 \wedge \theta_1^2 = 0$$

$$d\theta_2^3 + \theta_1^3 \wedge \theta_2^1 = 0$$

A primeira equação nos fornece a equação (4.8) e a segunda equação é automaticamente verificada.

4.6 Caracterizações do Toro de Clifford em S^3

Suponha que β é constante, segue de (4.6) que $d\theta_1^2 = 0$ e, portanto, $K = 0$, ou seja, a curvatura é identicamente nula, logo $S \subset S^3$ é o Toro de Clifford, o que prova o seguinte teorema.

TEOREMA 4.1. *O Toro de Clifford é a única superfície mínima em S^3 com ângulo de contato constante.*

Para $0 \leq \beta < \frac{\pi}{2}$, temos que $\tan \beta \geq 0$, logo $\Delta(\beta) \leq 0$ e como S é uma superfície compacta temos pelo Lema de Hopf que β é constante e, portanto, $K = 0$ e S é o Toro de Clifford, o que prova o seguinte teorema.

TEOREMA 4.2. *O Toro de Clifford é a única superfície mínima compacta em S^3 com ângulo de contato (β) $0 \leq \beta < \frac{\pi}{2}$.*

4.7 Exemplos de Superfícies Mínimas em S^3

4.7.1 Ângulo de Contato para o Toro de Clifford em S^3

Consideramos a seguinte imersão:

$$f(u_1, u_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}(e^{iu_1}, e^{iu_2})$$

do toro definido por:

$$T^2 = \{(z_1, z_2, 0) \in C^3 | z_1 \bar{z}_1 = \frac{1}{2}, z_2 \bar{z}_2 = \frac{1}{2}\}$$

Então os campos de vetores tangentes à superfícies são:

$$\begin{aligned} e_1 &= i \frac{\sqrt{2}}{2}(e^{iu_1}, -e^{iu_2}) \\ e_2 &= i \frac{\sqrt{2}}{2}(e^{iu_1}, e^{iu_2}) \end{aligned}$$

O campo normal à distribuição de contato é:

$$\xi = i \frac{\sqrt{2}}{2}(e^{iu_1}, e^{iu_2})$$

O ângulo de Contato é:

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \langle e_2, \xi \rangle \\ &= 1 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\beta = 0$$

A segunda forma fundamental na base (e_1, e_2) é:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

4.7.2 Superfície Mínima em S^3 com ângulo de Contato não constante

Nesta seção apresentaremos um exemplo de superfície mínima com ângulo de contato não constante.

Considere a esfera totalmente geodésica descrita por:

$$\begin{cases} z_2 - \bar{z}_2 & = 0 \\ (x_1)^2 + (y_1)^2 + (x_2)^2 + (y_2)^2 & = 1 \end{cases}$$

Os campos de vetores tangentes á superfície são:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\sqrt{1-x_2^2}}(-x_1x_2, -y_1x_2, 1-x_2^2, 0) \\ e_2 &= \frac{1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}(y_1, -x_1, 0, 0) \end{aligned}$$

O campo vetorial normal á superfície é:

$$e_3 = (0, 0, 0, 1)$$

O ângulo de contato é o ângulo entre e_2 e f_3 :

$$\begin{aligned} \cos(\beta) &= \langle e_2, f_3 \rangle \\ &= x_2 \end{aligned}$$

Portanto, o ângulo de contato é:

$$\beta = \arccos(x_2)$$

Comentários Finais

Listamos alguns problemas e conclusões do trabalho:

- Um problema que deixamos em aberto é saber se é possível classificar superfícies mínimas em S^5 supondo apenas o ângulo de Contato constante, sem impor quaisquer condições sobre o ângulo de Holomorfia (α). No nosso caso, este problema consiste em solucionar uma equação diferencial de segunda ordem em função do ângulo de Holomorfia (α).
- Neste trabalho consideramos em todos os casos que S é uma superfície mínima, a pergunta que fica é saber que resultados de classificação tiramos do trabalho se consideramos que S é uma superfície com curvatura média constante ($H=\text{constante}$).
- No caso de superfícies Legendrianas, enfraquecendo a condição da superfície S ter curvatura Gaussiana constante, desejamos saber se é possível tirar os mesmos resultados supondo a compacidade para S e com curvatura Gaussiana qualquer. Dessa forma estendendo os resultados de Dillen e Vrancken, em [6].

Referências Bibliográficas

- [1] B. Aebischer: *Symplectic Geometry*, Progress in Mathematics, Vol. 124 Springer-Verlag, Berlin-New York, 1992.
- [2] D. Blair: *Contact Manifolds in Riemannian Geometry*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 509. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976
- [3] R. Bryant: *Minimal Surfaces of constant curvature in S^n* , Trans . Amer. Math. Soc. 290 (1985), 259-271
- [4] J. Bolton, G.R. Jensen , M. Rigoli, L.M. Woodward: *On conformal minimal immersions of S^2 into CP^n* , Math. Ann. 279 (1988), 599-620
- [5] S.S. Chern and J.G. Wolfson: *Minimal surfaces by moving frames*, American J. Math. 105 (1983), 59-83
- [6] F. Dillen and L. Vrancken: *C-totally real submanifolds of Sasakian space forms*, J. Math. Pures Appl. 69 (1990), 85-93.
- [7] J. Eschenburg, I.V. Guadalupe and R. Tribuzy: *The fundamental equations of minimal surfaces in CP^2* , Math Ann. 270 (1985), 571-598
- [8] M. Haskins: *Constructing Special Lagrangian Cones* , PhD. Thesis; University of Texas at Austin (2000).

- [9] K. Kenmotsu: *On compact minimal surfaces with non-negative Gaussian curvature in a space of constant curvature I,II*, Tohoku Math. J. 25 (1973), 469-479; Tohoku Math. J. 27 (1975), no. 3, 291–301.
- [10] K. Kenmotsu: *On a parametrization of minimal immersions R^2 into S^5* , Tohoku Math. J. 27 (1975), 83-90.
- [11] K. Kenmotsu: *On minimal surfaces of constant curvature in two-dimensional complex space form*, J. Reine Angew. Math. 523 (2000), 69-101.
- [12] K. Kenmotsu: *On minimal immersion of R^2 into CP^n* , J. Math Soc. Japan 37 (1985), 665-682
- [13] Y. Ohnita : *Minimal surfaces with constant curvature and Kähler angle in complex spaces forms*, Tsukuba J. Math 13 (1989) 191-207
- [14] T. Ogata : *Curvature pinching theorem for minimal surfaces with constant Kähler angle in complex projective spaces*, Tôhoku Math J. 43 (1991) , 361-374.
- [15] J.G. Wolfson: *Minimal surfaces in complex manifolds*, Ph.D. Thesis, University of California Berkeley, (1982).
- [16] S. Yamaguchi; M. Kon; Y. Miyahara: *A theorem on C-totally real minimal surface*, Proc. American Math. Soc., 54 (1976), 276-280.
- [17] L. Zhenqui : *Counterexamples to the conjecture on minimal S^2 into CP^n with constant Kähler angle*, manuscripta math. 88 (1995), 417-431