SOBRE OS SUBTIPOS NAS
ÁLGEBRAS DE BERNSTEIN
 n -EXCEPCIONAIS

Maria de Nazaré Carvalho Bezerra

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para a obtenção do grau de Doutor
em
Matemática

Área de Concentração: Álgebra

Orientador: Prof. Dr. Roberto Celso Fabrício Costa

Durante a elaboração deste trabalho, a autora recebeu apoio financeiro da CAPES

- São Paulo, novembro de 2003 -

Este exemplar corresponde à redação final
da tese de doutorado devidamente
corrigida e defendida por
Maria de Nazaré Carvalho Bezerra
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, novembro de 2003.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Roberto Celso Fabrício Costa (Orientador) - IME - USP
- Prof. Dr. Juan Carlos Gutiérrez Fernández - IME - USP
- Prof. Dr. Antônio Paques - IMECC - UNICAMP
- Prof. Dr. Antônio José Engler - IMECC - UNICAMP
- Prof. Dr. Juaci Picango da Silva - CCEN - UFPA

À minha mãe

*A cada retorno estavas alegremente à minha espera
Vibravas com minhas vitórias
Sofrias com minhas derrotas
E como sempre, mesmo sem dizer coisa alguma,
tua simples presença me encorajava ...
Infelizmente, o início dessa jornada
coincidiu com o fim de tua vida
E tive que atravessar tudo isso
sentindo a imensa saudade
que tua ausência me deixou.*

Ao Prof. Paulo Agozzini, por sua colaboração em alguns resultados em teoria dos números.

À CAPES, pelo financiamento em forma de bolsa de estudo, à Universidade Federal do Pará, pela liberação de minhas atividades e aos colegas do departamento de Matemática da UFPA, pelos incentivos que sempre deles recebi.

Aos amigos e familiares, que mesmo à distância, sempre estiveram presentes dando força nos momentos difíceis.

Nazaré Bezerra

Abstract

Given a Bernstein algebra $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$, the ordered pairs $(1 + \dim U, \dim V)$ and $(\dim(UV + V^2), \dim U^2)$ are called respectively, the type and subtype of $\mathbf{A}$. This work generalizes the concept of exceptional algebra, introducing the n -exceptional Bernstein algebras. It tries to determine the conditions satisfied by a quadruple of non negative integers (r, s, t, z) such that there exists a n -exceptional Bernstein algebra of type $(1 + r, s)$ and subtype (t, s) with $n \leq 2$. For a n -exceptional Bernstein algebra of type $(1 + r, s)$ and subtype (t, z) with $n \leq 1$ an upper limitation is calculated for variations occurring in the dimension of the P-monomial UV under change of the idempotent.

Resumo

Dada uma álgebra de Bernstein $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$, os pares ordenados $(1 + \dim U, \dim V)$ e $(\dim(UV + V^2), \dim U^2)$ são chamados respectivamente, o tipo e subtipo de $\mathbf{A}$. Este trabalho generaliza o conceito de álgebra excepcional, introduzindo as álgebras de Bernstein n -excepcionais e procura determinar as condições satisfeitas por uma quádrupla de inteiros não negativos (r, s, t, z) para que exista uma álgebra de Bernstein n -excepcional do tipo $(1 + r, s)$ e subtipo (t, z) com $n \leq 2$. Para uma álgebra de Bernstein n -excepcional do tipo $(1 + r, s)$ e subtipo (t, z) com $n \leq 1$, é calculado um limitante superior para as variações ocorridas na dimensão do P-monômio UV sob mudança do idempotente.

Sumário

Introdução	3
1 Preliminares	6
1.1 Conceitos básicos	6
1.2 Álgebras de Bernstein-Jordan	10
1.3 P-subespaços em álgebras de Bernstein	11
1.4 Algumas subclasses de álgebras de Bernstein	13
1.5 Nilpotência em álgebras de Bernstein	15
2 Álgebras de Bernstein n-excepcionais	16
2.1 As subclasses n -excepcionais	16
2.2 Sobre as álgebras 2-excepcionais	19
2.3 Sobre as álgebras 3-excepcionais	20
3 Subtipos de álgebras excepcionais e 1-excepcionais	25
3.1 O P-subespaço $UV + V^2$ nas álgebras excepcionais e 1-excepcionais . . .	26
3.2 Subtipos de álgebras excepcionais	27
3.3 Subtipos de álgebras 1-excepcionais	28
4 Subtipos de álgebras 2-excepcionais	40
4.1 O P-subespaço $UV + V^2$ nas 2-excepcionais	41
4.2 O P-subespaço U^2 nas 2-excepcionais	43
4.3 Álgebras 2-excepcionais nucleares	57
4.4 Casos particulares de álgebras 2-excepcionais	59

4.5	Álgebras 3-excepcionais	67
5	Variações no P-subespaço UV	69
5.1	O invariante numérico $\Omega(p)$	69
5.2	O P-monômio UV nas álgebras excepcionais	70
5.3	Álgebras com o P-monômio UV invariante	72
5.4	Idempotentes minimais e maximais	73
5.5	Variações de UV nas 1-excepcionais	75
5.6	Álgebras com $\Omega(UV)$ máximo	79
	Referência Bibliográficas	83

Introdução

As álgebras de Bernstein surgiram nos anos 70, introduzidas independentemente por Y. Lyubich (1971) e P. Holgate (1975), com o objetivo de encontrar modelos algébricos que pudessem auxiliar no estudo do equilíbrio de gerações, problema de Bernstein colocado nos anos 20.

As álgebras de Bernstein, em geral, são não associativas. É conhecido que essas álgebras possuem idempotente não nulo. A cada idempotente e de uma álgebra de Bernstein $\mathbf{A}$ está associada a decomposição $\mathbf{A} = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ - chamada decomposição de Pierce de $\mathbf{A}$ associada a e . Lyubich mostrou que as dimensões de U_e e V_e permanecem inalteradas quando se muda o idempotente. Este fato foi usado para definir o tipo de uma álgebra de Bernstein, invariante numérico muito usado no complexo problema de classificação dessas álgebras.

Para uma decomposição de Pierce $\mathbf{A} = Fe \oplus U_e \oplus V_e$, os subespaços obtidos a partir de produtos de U_e e V_e são chamados P-monômios. Somas finitas de P-monômios são conhecidas como P-subespaços. Desde os primórdios da teoria sabe-se que, a exemplo de U_e e V_e , também $U_e V_e + V_e^2$ e U_e^2 são P-subespaços de dimensão invariante sob mudança do idempotente. A partir do conhecimento destes quatro invariantes numéricos: $\dim U_e$, $\dim V_e$, $\dim(U_e V_e + V_e^2)$ e $\dim U_e^2$, uma questão proposta por Lyubich e ainda em aberto, é determinar as condições a serem satisfeitas por uma quádrupla de inteiros não negativos (r, s, t, z) para que exista uma álgebra de Bernstein com $\dim U_e = r$, $\dim V_e = s$, $\dim(U_e V_e + V_e^2) = t$ e $\dim U_e^2 = z$.

Com o avanço da teoria de álgebras de Bernstein foram sendo conhecidos novos P-subespaços de dimensão invariante, os quais passaram a ser usados para uma melhor compreensão da estrutura dessas álgebras. A busca de novos P-subespaços de dimensão

invariante, ou que fossem eles mesmos invariantes, passou a ser tema de estudo de diversos autores.

Juaci Picanço, estudando os P-subespaços invariantes em algumas álgebras bárias, obteve resultados relevantes neste sentido. Em sua tese de doutorado ele identifica todos os P-subespaços de uma álgebra de Bernstein de grau menor ou igual a três, cuja dimensão é invariante sob mudança do idempotente e quais aqueles cuja dimensão varia com o idempotente. Dos cento e onze P-subespaços relacionados no seu trabalho, somente trinta e um têm dimensão invariante e destes apenas doze são eles mesmos invariantes. Vê-se pois, que a grande maioria dos P-subespaços tem um comportamento “irregular” sob mudança do idempotente. Abre-se então outra questão: conhecer o comportamento desses P-subespaços não invariantes (resp. de dimensão não invariante), em especial, calcular a máxima variação possível, sob mudança do idempotente, na dimensão de um P-subespaço de dimensão não invariante.

Este trabalho tem por objetivo o estudo das questões relacionadas acima. No primeiro caso, problema proposto por Lyubich, uma solução para a classe toda mostrou-se bastante complexa. Fazemos assim uma generalização do conceito de álgebra de Bernstein excepcional introduzindo o seu grau de excepcionalidade e abordamos o problema nas álgebras com grau de excepcionalidade menor ou igual a dois.

Na análise do segundo problema, o estudo dos P-subespaços de dimensão não invariante, é natural que comecemos a abordagem pelos P-monômios de mais baixo grau. Como os de grau um, que são U_e e V_e , são de dimensão invariante, partimos para os de grau dois, que são U_e^2 , cuja dimensão também é invariante, $U_e V_e$ e V_e^2 , ambos com dimensão não invariante. Neste trabalho investigamos as variações ocorridas no P-monômio $U_e V_e$ sob mudança do idempotente. Estendemos o problema de Lyubich acrescentando um inteiro não negativo w à quádrupla $(r, s, t, z) \in (\mathbf{Z}_+)^4$ e procuramos determinar as condições satisfeitas pela quintupla (r, s, t, z, w) para que exista uma álgebra de Bernstein com $\dim U_e = r$, $\dim V_e = s$, $\dim(U_e V_e + V_e^2) = t$ e $\dim U_e^2 = z$ e com w sendo a diferença entre a maior e a menor das dimensões de $U_e V_e$, quando o idempotente e percorre o conjunto dos idempotentes da álgebra. As respostas são dadas nas álgebras de Bernstein excepcionais e 1-excepcionais onde foram encontrados os melhores resultados.

No capítulo 1 são colocados os conceitos básicos da teoria necessários às demais

partes deste trabalho. O capítulo 2 define as álgebras de Bernstein n -excepcionais e mostra algumas propriedades válidas nestas álgebras para $n \leq 3$.

O capítulo 3 calcula os valores máximos e mínimos que podem assumir as dimensões dos P-subespaços $U_e V_e + V_e^2$ e U_e^2 nas álgebras excepcionais e 1-excepcionais. Nas excepcionais e nas 1-excepcionais não nucleares encontramos uma solução completa para o primeiro problema. Nas 1-excepcionais nucleares damos apenas uma solução parcial.

O capítulo 4 dedica-se ao estudo do problema de Lyubich nas álgebras de Bernstein 2-excepcionais. São calculados limitantes inferiores e superiores para a dimensão do P-subespaço $U_e V_e + V_e^2$. Diante da complexidade na determinação de um limitante superior para a dimensão de U_e^2 , o cálculo é feito nas 2-excepcionais, com a hipótese adicional da álgebra ter o P-monômio $U_e(U_e(U_e(U_e V_e)))$ nulo.

O 5º capítulo estuda as variações ocorridas no P-subespaço $U_e V_e$ sob mudança do idempotente nas álgebras excepcionais e 1-excepcionais. Identificamos as álgebras em que esse P-subespaço é invariante. Naquelas em que a dimensão de $U_e V_e$ varia, calculamos um limitante superior para essa variação e caracterizamos as álgebras de Bernstein onde a variação na dimensão desse P-subespaço é a máxima possível.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Conceitos básicos

Neste capítulo apresentamos conceitos e resultados básicos necessários aos demais capítulos. Muitos dos resultados são apenas citados sem demonstrações, as quais podem ser encontradas nas referências indicadas.

Se $\mathbf{A}$ é uma álgebra comutativa e não associativa, as potências principais de um elemento $a \in \mathbf{A}$ são definidas recursivamente por $a^1 = a$ e $a^{k+1} = a^k a$, para todo inteiro positivo k . Em geral, $a^i a^j \neq a^{i+j}$.

Uma álgebra de Bernstein sobre um corpo $\mathbf{F}$ é um par $(\mathbf{A}, \omega)$, onde $\mathbf{A}$ é uma $\mathbf{F}$ -álgebra comutativa, não necessariamente associativa, e $\omega : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{F}$ é um homomorfismo não nulo de álgebras e na qual a equação:

$$(x^2)^2 = \omega(x)^2 x^2 \tag{1.1}$$

é válida para todo x em $\mathbf{A}$.

O kernel de ω , denotado por $\mathbf{N}$, é um ideal da álgebra $\mathbf{A}$ de codimensão 1. Às vezes, por abuso de linguagem, dizemos que $\mathbf{N}$ é o núcleo de $\mathbf{A}$.

De (1.1) segue que se $(\mathbf{A}, \omega)$ é uma álgebra de Bernstein então para todo x em $\mathbf{N}$ temos $(x^2)^2 = 0$, portanto $\mathbf{N}$ é nil e isso garante a unicidade de ω como homomorfismo de $\mathbf{A}$ em $\mathbf{F}$. O homomorfismo ω é chamado a função peso (ou ponderação) de $\mathbf{A}$ e para cada $x \in \mathbf{A}$, $\omega(x)$ é chamado o peso do elemento x . Também, por abuso de linguagem,

diremos “ $\mathbf{A}$ é uma álgebra de Bernstein” em vez de dizer “ $(\mathbf{A}, \omega)$ é uma álgebra de Bernstein”.

Ainda de (1.1), o quadrado de qualquer elemento de peso unitário é um idempotente da álgebra e como o homomorfismo ω é sobrejetor, toda álgebra de Bernstein tem pelo menos um idempotente não nulo.

A teoria das álgebras de Bernstein é mais desenvolvida quando a característica de $\mathbf{F}$ é diferente de 2. Isto fica claro com o que segue.

Se $\mathbf{F}$ é um corpo de característica diferente de 2, então a cada idempotente não nulo e de uma álgebra de Bernstein $\mathbf{A}$ está associada a decomposição:

$$\mathbf{A} = Fe \oplus U_e \oplus V_e$$

chamada a decomposição de Peirce de $\mathbf{A}$ relativa ao idempotente e , onde

$$U_e = \{x \in \mathbf{A} \mid 2ex = x\} \quad e \quad V_e = \{x \in \mathbf{A} \mid ex = 0\}$$

com $U_e \oplus V_e = \mathbf{N}$.

As componentes de Peirce U_e e V_e verificam as relações:

$$U_e^2 \subseteq V_e \quad U_e V_e \subseteq U_e \quad V_e^2 \subseteq U_e \quad (1.2)$$

Para todo $u \in U_e$, $v \in V_e$ temos as identidades:

$$u^3 = 0 \quad (1.3)$$

$$uv^2 = 0 \quad (1.4)$$

$$u(uv) = 0 \quad (1.5)$$

$$(uv)^2 = 0 \quad (1.6)$$

$$u^2 v^2 = 0 \quad (1.7)$$

Linearizando essas identidades temos ainda, para todo $u, u_1, u_2, u_3 \in U_e$, $v, v_1, v_2 \in V_e$:

$$u_1^2 u_2 + 2u_1(u_1 u_2) = 0 \quad (1.8)$$

$$u_1(u_2 u_3) + u_2(u_1 u_3) + u_3(u_1 u_2) = 0 \quad (1.9)$$

$$u(v_1v_2) = 0 \quad (1.10)$$

$$u_1(u_2v) + u_2(u_1v) = 0 \quad (1.11)$$

$$(u_1v)(u_2v) = 0 \quad (1.12)$$

$$(uv_1)(uv_2) = 0 \quad (1.13)$$

$$(u_1u_2)(v_1v_2) = 0 \quad (1.14)$$

Além disso, o núcleo $\mathbf{N}$ da álgebra satisfaz a identidade:

$$(x^2)^2 = 0 \quad (1.15)$$

e também as seguintes linearizações:

$$x_1^2(x_1x_2) = 0 \quad (1.16)$$

$$x_1^2(x_2x_3) + 2(x_1x_2)(x_1x_3) = 0 \quad (1.17)$$

$$(x_1x_2)(x_3x_4) + (x_1x_3)(x_2x_4) + (x_1x_4)(x_2x_3) = 0 \quad (1.18)$$

Neste trabalho consideraremos apenas álgebras de Bernstein de dimensão finita sobre um corpo $\mathbf{F}$, com $\text{car}\mathbf{F} \neq 2$.

Em [8] encontramos o seguinte teorema de estrutura:

Teorema 1.1 *Se $\mathbf{A} = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ é uma álgebra de Bernstein, para todo $x = \omega(x)e + u + v$ em $\mathbf{A}$ com $u \in U_e$ e $v \in V_e$, tem-se:*

$$x^2 = \omega(x)^2e + (\omega(x)u + 2uv + v^2) + u^2 \quad (1.19)$$

onde $\omega(x)u + 2uv + v^2 \in U_e$ e $u^2 \in V_e$. Além do mais, valem as seguintes identidades para quaisquer $u \in U_e$ e $v \in V_e$:

$$u^3 = 0, \quad u(uv) = 0, \quad uv^2 = 0, \quad (u^2)^2 = 0, \quad (uv)^2 = 0. \quad (1.20)$$

Reciprocamente, se e é um idempotente não nulo de uma álgebra $\mathbf{A}$, a qual é soma direta dos subespaços $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ com a multiplicação satisfazendo (1.19) e as identidades (1.20) então $(\mathbf{A}, \omega)$ é uma álgebra de Bernstein com $U_e = U$ e $V_e = V$.

Se e ($e \neq 0$) é um idempotente fixado de uma álgebra de Bernstein $\mathbf{A}$, então das relações (1.2), (1.3) e (1.15) segue que o conjunto dos idempotentes não nulos dessa álgebra é dado por $Ip(A) = \{e + u + u^2 \mid u \in U_e\}$.

Dados $e, f = e + u_0 + u_0^2$ ($u_0 \in U_e$), idempotentes de uma álgebra de Bernstein $\mathbf{A}$, as aplicações:

$$\begin{aligned} \sigma_{u_0} : U_e &\rightarrow U_f & \tau_{u_0} : V_e &\rightarrow V_f \\ u &\rightarrow u + 2u_0u & v &\rightarrow v - 2u_0v - 2u_0^2v \end{aligned} \quad (1.21)$$

são isomorfismos de espaços vetoriais e portanto as dimensões dos subespaços U_e e V_e independem do idempotente escolhido para a decomposição de Peirce. O par ordenado $(1 + \dim U_e, \dim V_e)$ é conhecido como o tipo de $\mathbf{A}$. Quando não houver possibilidade de confusão omitiremos o índice e em U_e e V_e . Por exemplo, escreveremos apenas $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$, para a decomposição de Peirce de $\mathbf{A}$ relativa ao idempotente e .

Mais geralmente, podemos definir potências e produtos de subespaços em álgebras arbitrárias. Se S é um subconjunto de uma álgebra $\mathbf{A}$ (não necessariamente associativa), $\langle S \rangle$ indicará o subespaço de $\mathbf{A}$ gerado por S . Dados X e Y subespaços de $\mathbf{A}$ e $a \in \mathbf{A}$, definimos os subespaços:

$$\begin{aligned} XY &= \langle xy \mid x \in X, y \in Y \rangle \\ aX &= \langle a \rangle X \end{aligned}$$

E, recursivamente, definimos:

$$\begin{aligned} X^1 &= X & \text{e} & & X^k &= X^{k-1}X & (k \geq 2) \\ XY^{(0)} &= X & \text{e} & & XY^{(k)} &= (XY^{(k-1)})Y & (k \geq 1) \end{aligned}$$

Usando indução em k mostra-se que $(XY^{(k)})Y = (XY)Y^{(k)}$, para todo inteiro $k \geq 0$.

As observações a seguir serão muito usadas nos próximos capítulos.

Sejam $X, Y, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ subespaços de uma álgebra $\mathbf{A}$. Então:

Obs 1.1 Se A e B são conjuntos de geradores de X e Y , respectivamente, então $XY = \langle ab \mid a \in A, b \in B \rangle$.

Obs 1.2 $X(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n) = XY_1 + XY_2 + \dots + XY_n$.

Obs 1.3 Se $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ e $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$, então $XY = x_1Y + \dots + x_nY$.

Obs 1.4 Se A é uma álgebra comutativa, então:

- (i) $X^2 = \langle x^2 \mid x \in X \rangle$;
- (ii) $X + X^2 = \langle x + x^2 \mid x \in X \rangle$.

As demonstrações das Obs 1.2 e 1.4 são encontradas em [11].

Faremos também uso da proposição a seguir, facilmente demonstrada a partir das identidades (1.8), (1.9) e (1.11) (veja [11]).

Proposição 1.1 Sejam $X_1, X_2, X_3 \subseteq U$ e $W \subseteq V$ subespaços de uma álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U \oplus V$. Então:

- (i) $X_1^2 X_2 \subseteq X_1(X_1 X_2)$;
- (ii) $X_1(X_2 X_3) \subseteq X_2(X_1 X_3) + X_3(X_1 X_2)$;
- (iii) $X_1(X_2 W) = X_2(X_1 W)$.

Para cada elemento x de uma álgebra arbitrária A , L_x e R_x representarão as operações de multiplicação à esquerda e à direita, respectivamente, definidas por $L_x(a) = xa$ e $R_x(a) = ax$, para todo $a \in A$. Para X e Y , subespaços de A , por vezes usaremos a notação $L_X(Y)$ para indicar o produto XY .

Para cada idempotente e de uma álgebra de Bernstein A , o conjunto $L := \{u \in U_e \mid uU_e = 0\}$ é um ideal de A . Em princípio, L depende de e . Em [8] é mostrado que $L = \bigcap_{f \in Ip(A)} U_f$ e portanto este ideal independe do idempotente e . Em [11] encontramos o resultado a seguir que trata de relações de L com os subespaços U_e e V_e .

Lema 1.1 Em toda álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U \oplus V$, tem-se as relações:

- (i) $V^k \subseteq L$, $k = 2, 3, 4, \dots$;
- (ii) $U^k L = 0$, $k = 1, 2, \dots$;
- (iii) $U^k V^l = 0$, $k = 1, 2, 3, \dots$ e $l = 2, 3, 4, \dots$.

1.2 Álgebras de Bernstein-Jordan

Uma álgebra de Bernstein (A, ω) é dita de Bernstein-Jordan, se A é também uma álgebra de Jordan, isto é, além de (1.1), A satisfaz a identidade $x^2(yx) = (x^2y)x$,

para todo $x, y \in \mathbf{A}$. Uma caracterização das álgebras de Bernstein-Jordan é dada pelo seguinte teorema, o qual pode ser encontrado em [1]:

Teorema 1.2 *Seja $\mathbf{A} = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein. São equivalentes:*

- (i) $\mathbf{A}$ é uma álgebra de Jordan;
- (ii) $V_e^2 = 0$, para todo $e \in Ip(\mathbf{A})$;
- (iii) Para todo $e \in Ip(\mathbf{A})$, tem-se $V_e^2 = 0$ e $(uv)v = 0$, para todo $u \in U_e$, $v \in V_e$;
- (iv) Existe $e \in Ip(\mathbf{A})$ tal que $V_e^2 = 0$ e $(uv)v = 0$, para todo $u \in U_e$ e $v \in V_e$;
- (v) $\mathbf{A}$ satisfaz a identidade $x^3 = \omega(x)x^2$.

Corolário 1.1 *Sejam $\mathbf{A} = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein e $I \subseteq \mathbf{N}$ um ideal de $\mathbf{A}$. Então a álgebra quociente $\mathbf{A}/I$ é Bernstein-Jordan se, e somente se, $V_e^2 \subseteq I$, para todo idempotente e de $\mathbf{A}$.*

Usando o corolário acima e o item (i) do Lema 1.1 segue que se $(\mathbf{A}, \omega)$ é uma álgebra de Bernstein, então a álgebra quociente $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\omega})$ é Bernstein-Jordan, onde $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}/L$ e $\bar{\omega}(a + L) = \omega(a)$, para todo $a \in \mathbf{A}$. Para cada idempotente $e \in \mathbf{A}$, $\bar{e} := e + L$ é um idempotente de $\bar{\mathbf{A}}$. Na decomposição de Peirce $\bar{\mathbf{A}} = F\bar{e} \oplus U_{\bar{e}} \oplus V_{\bar{e}}$ temos que $U_{\bar{e}} = \bar{U}_e := (U_e + L)/L$ e $V_{\bar{e}} = \bar{V}_e := (V_e + L)/L$. Para um subespaço X de uma álgebra de Bernstein $\mathbf{A}$, usaremos sempre a notação $\bar{X}$ para o quociente $(X + L)/L$.

1.3 P-subespaços em álgebras de Bernstein

Dado um idempotente e de uma álgebra de Bernstein $\mathbf{A}$, definem-se recursivamente *P-monômios* de $\mathbf{A}$ associados à decomposição de Peirce $\mathbf{A} = Fe \oplus U_e \oplus V_e$, ou simplesmente *P-monômios* de $\mathbf{A}$ associados a e , do seguinte modo:

- (i) U_e e V_e são P-monômios de $\mathbf{A}$ associados a e ;
- (ii) Se p e q são P-monômios de $\mathbf{A}$ associados a e , então pq também o é.

Somas finitas de P-monômios são chamadas *P-subespaços* de $\mathbf{A}$.

Quando necessário, usaremos a notação $p(U_e, V_e)$, ou abreviadamente p_e , para indicar que o P-subespaço p está associado à decomposição $\mathbf{A} = Fe \oplus U_e \oplus V_e$.

Dado um P-monômio $p_e = p(U_e, V_e)$, o seu grau em relação a U_e é o número de fatores U_e que aí aparecem. De maneira similar, define-se o grau em relação a V_e . O

grau total de p_e , ou simplesmente o grau de p_e , é a soma dos graus em relação a U_e e V_e . O maior dos graus dos P-monômios cuja soma é um P-subespaço é chamado o grau do P-subespaço.

Segue de (1.2) que, para todo P-subespaço $p(U_e, V_e)$ de $\mathbf{A} = Fe \oplus U_e \oplus V_e$, existem P-subespaços $g(U_e, V_e) \subseteq U_e$ e $h(U_e, V_e) \subseteq V_e$, tais que $p(U_e, V_e) = g(U_e, V_e) \oplus h(U_e, V_e)$.

Conforme dito na Seção 1.1, os P-monômios U_e e V_e têm dimensão invariante sob mudança do idempotente e este fato foi usado para definir o tipo da álgebra, o qual é um invariante muito usado na teoria de álgebras de Bernstein. Uma questão natural que surgiu foi a de encontrar novos P-subespaços que também tivessem dimensão invariante, ou melhor ainda, fossem eles mesmos invariantes sob mudança do idempotente. Isso motivou as seguintes definições:

Definição 1.1 *Um P-subespaço $p(U_e, V_e)$ de uma álgebra de Bernstein $\mathbf{A} = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ é dito invariante sob mudança do idempotente, ou simplesmente invariante, se $p(U_e, V_e) = p(U_f, V_f)$, para quaisquer idempotentes e, f de $\mathbf{A}$.*

Definição 1.2 *Um P-subespaço $p(U_e, V_e)$ de uma álgebra de Bernstein $\mathbf{A} = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ é dito de dimensão invariante sob mudança do idempotente, ou simplesmente de dimensão invariante, se $\dim p(U_e, V_e) = \dim p(U_f, V_f)$, para quaisquer idempotentes e, f de $\mathbf{A}$.*

Como exemplos de P-subespaços invariantes podemos citar $U_e \oplus V_e$, $U_e \oplus U_e^2$, $(U_e V_e + U_e^2 V_e) \oplus V_e$ e $(U_e V_e + V_e^2) \oplus V_e$, que estão entre os mais conhecidos. No primeiro caso temos que $U_e \oplus V_e = \mathbf{N}$; já $U_e \oplus U_e^2 = \sum_{f \in Ip(A)} U_f$ e $(U_e V_e + U_e^2 V_e) \oplus V_e = \sum_{f \in Ip(A)} V_f$ (veja [11]). O P-subespaço $(U_e V_e + V_e^2) \oplus V_e$, conhecido como o ideal de Etherington, por ele introduzido em [2], é o ideal gerado pelos elementos da forma $x^2 - \omega(x)x$, com $x \in \mathbf{A}$. Como soma de P-subespaços invariantes é também invariante, a partir desses exemplos podemos obter uma série de outros P-subespaços invariantes da álgebra.

Como já sabemos que as dimensões de U_e e V_e são invariantes, segue dos exemplos acima que U_e^2 , $U_e V_e + U_e^2 V_e$ e $U_e V_e + V_e^2$ são P-subespaços de dimensão invariante.

A pergunta que se coloca aqui é saber quais são os P-subespaços invariantes (resp. de dimensão invariante) em uma álgebra de Bernstein. Em [11] e [12] são demonstrados

os seguintes resultados sobre a invariância de P -subespaços em álgebras de Bernstein:

Proposição 1.2 (Corolário 3 de [12]) *Todo P -subespaço de uma álgebra de Bernstein-Jordan tem dimensão invariante.*

Corolário 1.2 (Corolário 4 de [12]) *Todo P -subespaço de uma álgebra de Bernstein $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$, contido em V , tem dimensão invariante.*

Corolário 1.3 (Corolário 5 de [12]) *Se $p_e = g_e \oplus h_e$ é um P -subespaço de uma álgebra de Bernstein $\mathbf{A} = Fe \oplus U_e \oplus V_e$, com $g_e \subseteq U_e$ e $h_e \subseteq V_e$, então p_e tem dimensão invariante se, e somente se, g_e tem dimensão invariante.*

Proposição 1.3 (Corolário 2.10 de [11]) *Se $p_e = g_e \oplus h_e$ é um P -subespaço invariante de uma álgebra de Bernstein $\mathbf{A} = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ com $g_e \subseteq U_e$ e $h_e \subseteq V_e$, então $\sigma_{u_0}(g_e) = g_f$, para quaisquer idempotentes $e, f = e + u_0 + u_0^2$ ($u_0 \in U_e$) de $\mathbf{A}$.*

Segue dessa proposição o seguinte corolário:

Corolário 1.4 *Se $p_e \subseteq U_e$ é um P -subespaço invariante de uma álgebra de Bernstein $\mathbf{A} = Fe \oplus U_e \oplus V_e$, então $U_e p_e = 0$, para todo $e \in Ip(\mathbf{A})$.*

Demonstração:

Seja e um idempotente arbitrário de $\mathbf{A}$. Para todo $u_0 \in U_e$, $f := e + u_0 + u_0^2$ é outro idempotente de $\mathbf{A}$. Como p_e é invariante, pela proposição anterior, $p_e = p_f = \sigma_{u_0}(p_e) = \{x + 2u_0x \mid x \in p_e\}$. Assim para todo $x \in p_e$, existe $x' \in p_e$, tal que $u_0x = \frac{1}{2}(x' - x) \in p_e \subseteq U_e$. Logo $U_e p_e \subseteq U_e^2 \cap U_e = 0$. $\square$

1.4 Algumas subclasses de álgebras de Bernstein

O estudo das álgebras de Bernstein tem sido concentrado em subclasses definidas pelo comportamento de seus subespaços U_e e V_e . Uma álgebra de Bernstein é dita trivial se $\mathbf{N}^2 = (U_e V_e + V_e^2) \oplus U_e^2 = 0$, para todo idempotente e . É dita excepcional se $U_e^2 = 0$ e é denominada normal se $U_e V_e + V_e^2 = 0$, para todo idempotente e .

Como os P -subespaços usados nessas definições são todos de dimensão invariante, basta exigir que eles se anulem para um idempotente da álgebra.

Uma álgebra de Bernstein é dita nuclear se $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$. É claro que se $\mathbf{A} = Fe \oplus U_e \oplus V_e$, então $\mathbf{A}^2 = Fe \oplus U_e \oplus U_e^2$. Portanto essa definição é equivalente a dizer que $U_e^2 = V_e$, para todo idempotente e .

Em [8], Lyubich mostra que as álgebras normais e excepcionais aparecem a partir de formas lineares invariantes e de formas lineares que anulam o subespaço $\mathbf{A}^2$, do seguinte modo:

Uma forma linear $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{F}$ é dita uma forma linear invariante definida em uma álgebra de Bernstein $(\mathbf{A}, \omega)$, se $f(x^2) = \omega(x)f(x)$, para todo $x \in \mathbf{A}$. Se J é o conjunto das formas lineares invariantes definidas em uma álgebra de Bernstein $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$, então o subespaço ortogonal a J , isto é $J^\perp = \{x \in \mathbf{A} \mid f(x) = 0, \forall f \in J\}$ é um ideal de $\mathbf{A}$ e $J^\perp = (UV + V^2) \oplus V$. Logo $\dim J = \text{codim} J^\perp = 1 + r - \dim(UV + V^2) \leq 1 + r$. Ocorrendo a igualdade $\dim J = 1 + r$ se, e somente se, $UV + V^2 = 0$, ou seja, se a álgebra $\mathbf{A}$ é normal.

E se $\mathcal{B}$ é o conjunto das formas lineares que anulam $\mathbf{A}^2$, então o ortogonal a $\mathcal{B}$ é dado por $\mathcal{B}^\perp = \mathbf{A}^2 = Fe \oplus U \oplus U^2$, logo $\dim \mathcal{B} = \text{codim} \mathcal{B}^\perp = s - \dim U^2 \leq s$. Segue daí que $\dim \mathcal{B} = s$, se e somente se, $U^2 = 0$, ou seja $\mathbf{A}$ é excepcional.

Citamos alguns resultados relativos a essas subclasses.

Proposição 1.4 *Se $\mathbf{A} = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ é Bernstein do tipo $(1 + r, s)$ com $r \leq 1$ ou $s \leq 1$, então $\mathbf{A}$ é normal ou excepcional. Em particular, toda álgebra de Bernstein de dimensão menor ou igual a 4 é normal ou excepcional.*

Proposição 1.5 *Se $\mathbf{A} = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ é Bernstein não excepcional, então o P -subespaço $U_e V_e + V_e^2$ está propriamente contido em U_e .*

Para a demonstração, veja [8].

Proposição 1.6 *(Corolário 3.4.30 de [8]) Se uma álgebra de Bernstein do tipo $(1 + r, s)$ satisfaz $\dim \mathbf{A}^2 > \frac{r}{2}(r + 1) + 1$, então $\mathbf{A}$ é normal.*

Como consequência temos:

Corolário 1.5 *Se $\mathbf{A} = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ é uma álgebra de Bernstein do tipo $(1 + r, s)$ com $\dim U_e^2 > \frac{1}{2}r(r - 1)$, então $\mathbf{A}$ é normal.*

1.5 Nilpotência em álgebras de Bernstein

Uma álgebra não associativa $\mathbf{A}$ é dita nilpotente se existe um inteiro positivo n tal que o produto de quaisquer n elementos de $\mathbf{A}$ (com qualquer arranjo de parênteses) é nulo. O menor inteiro n para o qual essa propriedade se verifica é chamado o índice de nilpotência de $\mathbf{A}$. É claro que a existência de idempotente de peso 1 em álgebras de Bernstein mostra que elas não são nilpotentes. O que interessa é estudar a nilpotência do núcleo $\mathbf{N}$ dessas álgebras, pois eles satisfazem $(x^2)^2 = 0$, uma identidade “próxima” da nilpotência.

Nem toda álgebra de Bernstein tem núcleo nilpotente. Um contra-exemplo é dado em [5]. Citamos alguns resultados onde a nilpotência do núcleo $\mathbf{N}$ é garantida. Eles podem ser encontrados em [4] e [11], respectivamente.

Teorema 1.3 *Toda álgebra de Bernstein nuclear de dimensão finita tem núcleo nilpotente.*

Proposição 1.7 *Existe um idempotente e de uma álgebra de Bernstein $\mathbf{A} = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ tal que a sequência de P -monômios*

$$U_e \supseteq U_e V_e \supseteq (U_e V_e) V_e \supseteq \dots \supseteq U_e V_e^{(k)} \supseteq U_e V_e^{(k+1)} \supseteq \dots$$

estaciona em 0 se, e somente se, o núcleo de $\mathbf{A}$ é nilpotente.

O Teorema 4.3 de [13] afirma que toda nilálgebra de Jordan de dimensão finita sobre um corpo de característica diferente de 2 é nilpotente. Assim podemos concluir:

Teorema 1.4 *Toda álgebra de Bernstein-Jordan de dimensão finita tem núcleo nilpotente.*

Capítulo 2

Álgebras de Bernstein n-excepcionais

Neste capítulo fazemos uma divisão da classe das álgebras de Bernstein de dimensão finita em subclasses disjuntas. Isto será feito usando os P-monômios da cadeia

$$U^2 \supseteq U(UV) \supseteq U(UV^{(2)}) \supseteq \dots \supseteq U(UV^{(k)}) \supseteq U(UV^{(k+1)}) \supseteq \dots$$

os quais têm dimensão invariante sob mudança do idempotente, conforme Corolário 1.2, uma vez que estão contidos em V . Generalizamos o conceito de álgebra excepcional dada no Capítulo 1, introduzindo o grau de excepcionalidade de uma tal álgebra. Mostramos que a classe das álgebras de Bernstein de dimensão finita é a união disjunta das subclasses das álgebras n -excepcionais, para $n \in \mathbf{Z}_+$. Essas subclasses serão usadas como ferramenta nos capítulos seguintes.

2.1 As subclasses n -excepcionais

Nesta seção definiremos as álgebras de Bernstein n -excepcionais e mostraremos que toda álgebra de Bernstein de dimensão finita é n -excepcional para algum inteiro n .

Definição 2.1 *Uma álgebra de Bernstein $\mathbf{A} = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ é dita excepcional de grau n , ou n -excepcional, se $n \geq 0$ é o menor inteiro para o qual o P-monômio $U_e(U_e V_e^{(n)}) = 0$, para todo $e \in Ip(\mathbf{A})$. O inteiro n será chamado o grau de excepcionalidade de $\mathbf{A}$.*

Conforme já mencionado, para todo inteiro $n \geq 0$, o P-monômio $U(UV^{(n)}) \subseteq V$ e portanto tem dimensão invariante. Logo a definição acima independe do idempotente.

Observamos que as álgebras 0-excepcionais, aquelas em que $U^2 = 0$, são simplesmente as já chamadas de excepcionais.

Proposição 2.1 *Seja A uma álgebra de Bernstein e $p \subseteq U$ um P -subespaço de A . São equivalentes as condições:*

- (i) *Existe um idempotente e de A tal que $p_e \subseteq L$;*
- (ii) *Para todo idempotente e de A , $p_e \subseteq L$.*

Demonstração:

- (i $\Rightarrow$ ii) Seja $e \in Ip(A)$ tal que $p_e \subseteq L$. Então $g_e := U_e p_e = 0$. Pelo Corolário 1.2, $0 = \dim g_e = \dim g_f$, para todo $f \in Ip(A)$, pois $g \subseteq V$. Logo $U_f p_f = 0$ e assim $p_f \subseteq L$.
- (i $\Leftarrow$ ii) É óbvio. □

Lema 2.1 *Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein. Para quaisquer $u \in U$, $v, v_i \in V$ ($i = 1, 2, \dots$) e para todo inteiro $k \geq 2$, tem-se:*

- (i) $R_v^k(u) \in L$;
- (ii) $\sum_{\sigma \in S_k} (R_{v_{\sigma(1)}} R_{v_{\sigma(2)}} \dots R_{v_{\sigma(k)}}(u)) \in L$, onde S_k é o grupo simétrico de grau k ;
- (iii) $R_{v_1} R_{v_k} R_{v_{k-1}} \dots R_{v_2} R_{v_1}(u) \in L$.

Demonstração:

- (i) De (1.2) segue facilmente que $UV^{(k)} \subseteq U$, para todo inteiro $k \geq 0$. Se $u_1 \in U$, então por (1.11) e (1.12), $u_1((uv)v) = -(uv)(u_1v) = 0$. Assim (i) é válida para $k = 2$. Suponha que $R_v^k(u) = l \in L$, para um certo $k \geq 2$. Como L é ideal de A , segue que $R_v^{k+1}(u) = R_v(R_v^k(u)) = R_v(l) = lv \in LV \subseteq L$;
- (ii) Segue linearizando sucessivamente $(k - 1)$ vezes $R_{v_1}^k(u)$ na variável v_1 .
- (iii) Usando (ii) para $k = 2$, temos que, para todo $u \in U, v_1, v_2 \in V$, existe $l \in L$, tal que:

$$(uv_2)v_1 = l - (uv_1)v_2 \quad (2.1)$$

Em particular, tomando $u = uv_1$ e usando (i), temos $((uv_1)v_2)v_1 = l - ((uv_1)v_1)v_2 \in L + LV = L$. Portanto (iii) é válida para $k = 2$. Suponha $((\dots((uv_1)v_2)\dots)v_k)v_1 = l' \in L$, para um certo $k \geq 2$. Substituindo v_2 por v_{k+1} em (2.1) tem-se $(uv_{k+1})v_1 = l -$

$(uv_1)v_{k+1}$. Em particular, se $u = (\dots((uv_1)v_2)\dots)v_k$, então $((\dots((uv_1)v_2)\dots)v_k)v_{k+1})v_1 = l - ((\dots((uv_1)v_2)\dots)v_k)v_1)v_{k+1} = l - l'v_{k+1} \in L + LV = L$. Logo $R_{v_1}R_{v_{k+1}}R_{v_k}\dots R_{v_2}R_{v_1}(u) \in L$. $\square$

Lema 2.2 *Se $\mathbf{A}$ é Bernstein do tipo $(1 + r, s)$, então para todo idempotente e de $\mathbf{A}$, $U_e V_e^{(s+k)} \subseteq L$, para todo inteiro $k \geq 1$.*

Demonstração:

Se $r = 0$ ou $s = 0$, isso é obviamente verdadeiro. Vamos assumir $r, s \geq 1$. Sejam e um idempotente arbitrário de $\mathbf{A}$, $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ e $\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ bases de U_e e V_e , respectivamente. Então $U_e V_e^{(s+1)} = \langle ((\dots((u_i v_{j_1})v_{j_2})\dots)v_{j_s})v_{j_{s+1}} \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j_1, j_2, \dots, j_s, j_{s+1} \leq s) \rangle$. Vamos mostrar que todo gerador de $U_e V_e^{(s+1)}$ é um elemento de L . Como $1 \leq j_1, j_2, \dots, j_s, j_{s+1} \leq s$, então existem j_k e j_l , com $1 \leq k, l \leq s+1$ e $k \neq l$, tais que $j_k = j_l$. Usando o item (iii) do Lema 2.1, tem-se:

$((\dots(((\dots(((\dots((u_i v_{j_1})v_{j_2})\dots)v_{j_{k-1}})v_{j_k})v_{j_{k+1}})\dots)v_{j_l})v_{j_{l+1}})\dots)v_{j_s})v_{j_{s+1}} = ((\dots(((\dots((u' v_{j_k})v_{j_{k+1}})\dots)v_{j_k})v_{j_{l+1}})\dots)v_{j_s})v_{j_{s+1}} = ((\dots(l' v_{j_{l+1}})\dots)v_{j_s})v_{j_{s+1}} \in L$, onde $u' = (\dots((u_i v_{j_1})v_{j_2})\dots)v_{j_{k-1}} \in U_e$ e $l' = (\dots((u' v_{j_k})v_{j_{k+1}})\dots)v_{j_k} \in L$. Logo $U_e V_e^{(s+1)} \subseteq L$ e consequentemente $U_e V_e^{(s+k)} \subseteq L$, para todo inteiro $k \geq 1$, pois L é ideal. Como e é arbitrário, segue que essa inclusão vale para todo idempotente de $\mathbf{A}$. $\square$

Teorema 2.1 *Toda álgebra de Bernstein do tipo $(1 + r, s)$ é n -excepcional para algum inteiro n , com $0 \leq n \leq s + 1$.*

Demonstração:

Seja $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ Bernstein do tipo $(1 + r, s)$. Pelo Lema 2.2, $UV^{(s+1)} \subseteq L$, assim $U(UV^{(n)}) = 0$, para algum inteiro $n \leq s + 1$. $\square$

Se $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ é uma álgebra na qual pelo menos um dos P-monômios U ou V é nulo, então $U^2 = 0$. Logo toda álgebra de Bernstein de dimensão menor ou igual a dois é excepcional. Para álgebras com dimensão maior ou igual a três temos o seguinte corolário:

Corolário 2.1 *Se $\mathbf{A}$ é Bernstein n -excepcional com $\dim \mathbf{A} \geq 3$, então $n \leq \dim \mathbf{A} - 2$.*

Demonstração:

Se $\mathbf{A}$ é do tipo $(1+r, s)$ então $1+r+s = \dim \mathbf{A}$. Pela Proposição 1.4, se $r \leq 1$, então $\mathbf{A}$ é normal ou excepcional e portanto $n \leq 1 \leq \dim \mathbf{A} - 2$. E se $r \geq 2$, usando o Teorema 2.1, $U(UV^{(n)}) = 0$, para algum inteiro $n \leq s+1 = \dim \mathbf{A} - r \leq \dim \mathbf{A} - 2$. $\square$

Posteriormente, veremos que para álgebras com dimensões maiores esse limitante superior para n ainda pode ser melhorado.

2.2 Sobre as álgebras 2-excepcionais

Nesta seção veremos algumas limitações impostas à dimensão da álgebra e de alguns de seus subespaços se o seu grau de excepcionalidade é $n \geq 2$. Portanto são propriedades válidas para as álgebras 2-excepcionais.

Proposição 2.2 *Se $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ é Bernstein do tipo $(1+r, s)$ com $U(UV) \neq 0$, então $r \geq 4$, $s \geq 2$ e $\dim L \leq r - 4$.*

Demonstração:

Como $U(UV) \subseteq V$, então $\dim \overline{U(UV)} = \dim U(UV) \neq 0$. Logo existem $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \in \bar{U}$, $\bar{v} \in \bar{V}$, tais que $\bar{u}_1(\bar{u}_2\bar{v}) = -\bar{u}_2(\bar{u}_1\bar{v}) \neq \bar{0}$. Em [7], pag. 35, é mostrado que isso implica que os conjuntos $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_1\bar{v}, \bar{u}_2\bar{v}\}$ e $\{\bar{u}_1(\bar{u}_2\bar{v}), \bar{v}\}$ são linearmente independentes. Portanto $\dim \bar{U} = \dim U - \dim L \geq 4$ e $\dim V = \dim \bar{V} \geq 2$. $\square$

Corolário 2.2 *Se $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ é Bernstein com grau de excepcionalidade $n \geq 2$, então $\dim \mathbf{A} \geq 7$ e $\dim L \leq \dim U - 4$.*

Demonstração:

Se $n \geq 2$, então $U(UV) \neq 0$ e pela proposição anterior $\dim \mathbf{A} = 1 + \dim U + \dim V \geq 7$ e $\dim L \leq \dim U - 4$. $\square$

Corolário 2.3 *Se $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ é Bernstein com grau de excepcionalidade $n \geq 2$, então $\dim \bar{U}\bar{V} \geq 2$.*

Corolário 2.4 *Se $\mathbf{A}$ é Bernstein n -excepcional com $\dim \mathbf{A} \geq 5$, então $n \leq \dim \mathbf{A} - 4$.*

Demonstração:

Seja $\mathbf{A}$ do tipo $(1 + r, s)$. Pela Proposição 2.2, se $r \leq 3$, então $n \leq 1 \leq \dim \mathbf{A} - 4$. E se $r \geq 4$, pelo Teorema 2.1, $n \leq s + 1 = \dim \mathbf{A} - r \leq \dim \mathbf{A} - 4$. $\square$

O exemplo a seguir mostra que o limite inferior para a dimensão da álgebra, dado no Corolário 2.2, não pode ser aumentado.

Exemplo 2.1 *Seja $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ a álgebra de Bernstein com tábua de multiplicação do núcleo dada abaixo, onde $U = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$ e $V = \langle v_1, v_2 \rangle$.*

	u_1	u_2	u_3	u_4	v_1	v_2
u_1				v_2	u_3	
u_2			$-v_2$		u_4	
u_3		$-v_2$				
u_4	v_2					
v_1	u_3	u_4				
v_2						

Nessa álgebra $U(UV) = \langle v_2 \rangle$ e $U(UV^{(2)}) = 0$, portanto $\mathbf{A}$ é Bernstein 2-excepcional do tipo $(1 + 4, 2)$.

2.3 Sobre as álgebras 3-excepcionais

Esta seção investiga a influência que o grau de excepcionalidade n exerce na dimensão da álgebra e de alguns de seus subespaços quando $n \geq 3$.

Proposição 2.3 *Se $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ é Bernstein do tipo $(1 + r, s)$ com $U(UV^{(2)}) \neq 0$, então $r \geq 8$, $s \geq 3$ e $\dim L \leq r - 8$.*

Demonstração:

Como $U(UV^{(2)}) \subseteq V$, segue que $\dim \overline{U(UV^{(2)})} = \dim U(UV^{(2)}) \neq 0$. Então existem

$\bar{u}_1, \bar{u}_2 \in \bar{U}$, $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in \bar{V}$, tais que $\bar{u}_1((\bar{u}_2\bar{v}_1)\bar{v}_2) \neq \bar{0}$. Usando as identidades (1.11), (1.14) e (1.18) tem-se:

$$\bar{0} \neq \bar{u}_1((\bar{u}_2\bar{v}_1)\bar{v}_2) = -(\bar{u}_2\bar{v}_1)(\bar{u}_1\bar{v}_2) = (\bar{u}_1\bar{v}_1)(\bar{u}_2\bar{v}_2) = -\bar{u}_2((\bar{u}_1\bar{v}_1)\bar{v}_2).$$

Vamos mostrar que $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_1\bar{v}_1, \bar{u}_1\bar{v}_2, \bar{u}_2\bar{v}_1, \bar{u}_2\bar{v}_2, (\bar{u}_1\bar{v}_1)\bar{v}_2, (\bar{u}_2\bar{v}_1)\bar{v}_2\} \subseteq \bar{U}$ é linearmente independente. Logo $\dim U \geq \dim \bar{U} - \dim L = \dim \bar{U} \geq 8$. Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_8 \in \mathbf{F}$, tais que:

$$\alpha_1\bar{u}_1 + \alpha_2\bar{u}_2 + \alpha_3\bar{u}_1\bar{v}_1 + \alpha_4\bar{u}_1\bar{v}_2 + \alpha_5\bar{u}_2\bar{v}_1 + \alpha_6\bar{u}_2\bar{v}_2 + \alpha_7(\bar{u}_1\bar{v}_1)\bar{v}_2 + \alpha_8(\bar{u}_2\bar{v}_1)\bar{v}_2 = \bar{0} \quad (2.2)$$

Multiplicando (2.2) por $(\bar{u}_2\bar{v}_1)\bar{v}_2$ e usando a identidade (1.11), temos:

$$\begin{aligned} & \alpha_1\bar{u}_1((\bar{u}_2\bar{v}_1)\bar{v}_2) - \alpha_2(\bar{u}_2\bar{v}_1)(\bar{u}_2\bar{v}_2) - \alpha_3\bar{u}_1((\bar{u}_2\bar{v}_1)\bar{v}_2)\bar{v}_1 + \alpha_4(\bar{u}_1\bar{v}_2)((\bar{u}_2\bar{v}_1)\bar{v}_2) + \\ & \alpha_5(\bar{u}_2\bar{v}_1)((\bar{u}_2\bar{v}_1)\bar{v}_2) + \alpha_6(\bar{u}_2\bar{v}_2)((\bar{u}_2\bar{v}_1)\bar{v}_2) + \alpha_7((\bar{u}_1\bar{v}_1)\bar{v}_2)((\bar{u}_2\bar{v}_1)\bar{v}_2) + \alpha_8((\bar{u}_2\bar{v}_1)\bar{v}_2)^2 = \bar{0} \end{aligned}$$

Por (1.13), $(\bar{u}_2\bar{v}_1)(\bar{u}_2\bar{v}_2) = \bar{0}$, de (1.12) segue que $(\bar{u}_1\bar{v}_2)((\bar{u}_2\bar{v}_1)\bar{v}_2) = (\bar{u}_2\bar{v}_2)((\bar{u}_2\bar{v}_1)\bar{v}_2) = ((\bar{u}_1\bar{v}_1)\bar{v}_2)((\bar{u}_2\bar{v}_1)\bar{v}_2) = \bar{0}$ e $(\bar{u}_2\bar{v}_1)((\bar{u}_2\bar{v}_1)\bar{v}_2)$ e $((\bar{u}_2\bar{v}_1)\bar{v}_2)^2$ são nulos pelas identidades (1.5) e (1.6), respectivamente. Por fim, usando o item (iii) do Lema 2.1, segue que $\bar{u}_1((\bar{u}_2\bar{v}_1)\bar{v}_2)\bar{v}_1 = \bar{0}$, pois $((\bar{u}_2\bar{v}_1)\bar{v}_2)\bar{v}_1 \in L$. Então (2.2) reduz-se a $\alpha_1\bar{u}_1((\bar{u}_2\bar{v}_1)\bar{v}_2) = \bar{0}$. Como $\bar{u}_1((\bar{u}_2\bar{v}_1)\bar{v}_2) \neq \bar{0}$, obtem-se que $\alpha_1 = 0$. De modo análogo, multiplicando (2.2) sucessivamente por $(\bar{u}_1\bar{v}_1)\bar{v}_2$, $\bar{u}_2\bar{v}_2$, $\bar{u}_2\bar{v}_1$, $\bar{u}_1\bar{v}_2$, $\bar{u}_1\bar{v}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_1$ e usando as identidades (1.18), (1.5), (1.11), (1.6), (1.12) e (1.13), juntamente com o item (iii) do Lema 2.1, obtemos que $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_8 = 0$. Mostraremos agora que $\dim V \geq 3$. Como $\bar{0} \neq (\bar{u}_2\bar{v}_1)(\bar{u}_1\bar{v}_2)$, da identidade (1.12) segue que $\bar{v}_1$ e $\bar{v}_2$ são linearmente independentes e portanto $\dim \bar{V} \geq 2$. Se $\dim \bar{V} = 2$, então $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ é uma base de $\bar{V}$, logo existem $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{F}$ tais que, $\bar{u}_1^2 = \alpha_1\bar{v}_1 + \alpha_2\bar{v}_2$ e assim $\bar{0} = \bar{u}_1^3 = \alpha_1\bar{u}_1\bar{v}_1 + \alpha_2\bar{u}_1\bar{v}_2$. Da independência linear de $\bar{u}_1\bar{v}_1$ e $\bar{u}_1\bar{v}_2$, segue que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e portanto $\bar{u}_1^2 = \bar{0}$. Por outro lado, $\bar{0} \neq \bar{u}_1((\bar{u}_2\bar{v}_1)\bar{v}_2) \in \bar{V}$, então existem $\alpha, \beta \in \mathbf{F}$ com $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, tais que $\bar{u}_1((\bar{u}_2\bar{v}_1)\bar{v}_2) = \alpha\bar{v}_1 + \beta\bar{v}_2$. Multiplicando essa identidade por $\bar{u}_1$ e usando (1.8), obtemos $-\frac{1}{2}\bar{u}_1^2((\bar{u}_2\bar{v}_1)\bar{v}_2) = \bar{0} = \alpha\bar{u}_1\bar{v}_1 + \beta\bar{u}_1\bar{v}_2$. Um absurdo, pois $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ e $\bar{u}_1\bar{v}_1$ e $\bar{u}_1\bar{v}_2$ são linearmente independentes. Assim $\dim V = \dim \bar{V} \geq 3$. $\square$

Corolário 2.5 *Se $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ é Bernstein com grau de excepcionalidade $n \geq 3$, então $\dim \mathbf{A} \geq 12$ e $\dim L \leq \dim U - 8$.*

Demonstração:

Se $n \geq 3$, então $U(UV^{(2)}) \neq 0$, logo pela Proposição 2.3, $\dim \mathbf{A} \geq 12$ e $\dim L \leq \dim U - 8$.

□

Corolário 2.6 *Se $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ é Bernstein com grau de excepcionalidade $n \geq 3$, então $\dim \overline{UV} \geq 6$ e $\dim \overline{(UV)V} \geq 2$.*

Corolário 2.7 *Se $\mathbf{A}$ é uma álgebra de Bernstein n -excepcional com $\dim \mathbf{A} \geq 10$, então $n \leq \dim \mathbf{A} - 8$.*

Demonstração:

Seja $\mathbf{A}$ do tipo $(1 + r, s)$. Pela Proposição 2.3, se $r \leq 7$, então $n \leq 2 \leq \dim \mathbf{A} - 8$. E se $r \geq 8$, usando o Teorema 2.1, $n \leq s + 1 = \dim \mathbf{A} - r \leq \dim \mathbf{A} - 8$.

□

O exemplo a seguir mostra que existe uma álgebra de Bernstein 3-excepcional de dimensão 12.

Exemplo 2.2 *Seja $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ a álgebra de Bernstein com tábua de multiplicação do núcleo dada a seguir, onde $U = \langle u_1, u_2, \dots, u_8 \rangle$ e $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.*

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	v_1	v_2	v_3
u_1								v_3	u_3	u_4	
u_2							$-v_3$		u_5	u_6	
u_3						v_3				u_7	
u_4					$-v_3$				$-u_7$		
u_5				$-v_3$						u_8	
u_6			v_3						$-u_8$		
u_7		$-v_3$									
u_8	v_3										
v_1	u_3	u_5		$-u_7$		$-u_8$					
v_2	u_4	u_6	u_7		u_8						
v_3											

Temos $U(UV^{(2)}) = \langle v_3 \rangle$ e $U(UV^{(3)}) = 0$, assim $\mathbf{A}$ é Bernstein 3-excepcional do tipo $(1 + 8, 3)$.

A Proposição 2.2, combinada com a Proposição 2.3, dá ainda o seguinte corolário:

Corolário 2.8 *Se $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ é Bernstein n -excepcional com $2 \leq n \leq 3$, então $\dim \mathbf{A} \geq 2^n + n + 1$ e $\dim U \geq \dim U - \dim L \geq 2^n$.*

Essa propriedade não é válida para todo inteiro $n \geq 2$. Um contra-exemplo é dado abaixo. Nele vemos que para $n = 4$ a propriedade já não é válida.

Exemplo 2.3 *Seja $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ a álgebra de Bernstein com $\{u_1, u_2, \dots, u_8\}$ e $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ bases de U e V , respectivamente. A tábua de multiplicação do núcleo dessa álgebra é dada por:*

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8		v_1	v_2	v_3	v_4
u_1								v_4		u_2	u_3	u_4	
u_2						v_4					u_7	u_5	
u_3					$-v_4$					$-u_7$		u_6	
u_4							v_4			$-u_5$	$-u_6$		
u_5			$-v_4$								u_8		
u_6		v_4								$-u_8$			
u_7				v_4								$-u_8$	
u_8	v_4												
v_1	u_2		$-u_7$	$-u_5$		$-u_8$							
v_2	u_3	u_7		$-u_6$	u_8								
v_3	u_4	u_5	u_6				$-u_8$						
v_4													

Nessa álgebra $U(UV^{(3)}) = \langle v_4 \rangle$ e $U(UV^{(4)}) = 0$, logo $\mathbf{A}$ é 4-excepcional do tipo $(1 + 8, 4)$. No entanto, $\dim \mathbf{A} = 13$ e $\dim U = \dim U - \dim L = 8 < 2^4$.

Proposição 2.4 *Se $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ é Bernstein n -excepcional, então*

- (i) $UV^{(k)} \subseteq L$, para todo inteiro $k \geq n$;
- (ii) $(UV)(UV^{(k)}) = 0$, para todo inteiro não negativo $k \geq n - 1$.

Demonstração:

Se $\mathbf{A}$ é n -excepcional, então $U(UV^{(n)}) = 0$ e como $UV^{(n)} \subseteq U$ para todo inteiro $n \geq 0$ e L é ideal, segue que $UV^{(k)} \subseteq L$, para todo inteiro $k \geq n$. Pelo item (iii) da Proposição 1.1, $(UV)(UV^{(k)}) = U(UV^{(k+1)}) = 0$, para todo inteiro $k + 1 \geq n$. $\square$

Proposição 2.5 *Se $\mathbf{A}$ é Bernstein de dimensão finita com grau de excepcionalidade $n \geq 1$, então para todo idempotente e de $\mathbf{A}$ a cadeia de P -monômios*

$$\overline{U_e} \supseteq \overline{U_e V_e} \supseteq \overline{(U_e V_e) V_e} \supseteq \dots \supseteq \overline{U_e V_e^{(k)}} \supseteq \dots$$

é estritamente decrescente para todo inteiro $k < n$ e $\overline{U_e V_e^{(n)}} = \overline{0}$.

Demonstração:

Seja $e \in Ip(A)$, arbitrário. Como $\mathbf{A}$ é n -excepcional, $U_e(U_e V_e^{(k)}) \neq 0$, para todo inteiro $k < n$ e $U_e(U_e V_e^{(n)}) = 0$, assim $\overline{U_e V_e^{(n)}} = \overline{0}$ e $\overline{U_e V_e^{(k)}} \neq \overline{0}$, para todo $k < n$. Logo a cadeia $\overline{U_e} \supseteq \overline{U_e V_e} \supseteq \overline{(U_e V_e) V_e} \supseteq \dots \supseteq \overline{U_e V_e^{(n-1)}} \neq \overline{0}$ é estritamente decrescente, pois se $\overline{U_e V_e^{(k)}} = \overline{U_e V_e^{(k+1)}}$, para algum inteiro k , $0 \leq k \leq n - 1$, então $\overline{0} \neq \overline{U_e V_e^{(k)}} = \overline{U_e V_e^{(k+1)}} = \dots = \overline{U_e V_e^{(n)}} = \overline{0}$, um absurdo. $\square$

Corolário 2.9 *Se $\mathbf{A}$ é uma álgebra de Bernstein de dimensão finita com grau de excepcionalidade $n \geq 1$, então para todo idempotente e de $\mathbf{A}$ e para todo inteiro $k \leq n$, tem-se $\dim \overline{U_e V_e^{(k)}} \leq \dim \overline{U_e V_e^{(k-1)}} - 1$.*

Capítulo 3

Subtipos de álgebras excepcionais e 1-excepcionais

Como já mencionado, para uma álgebra de Bernstein $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$, os P -subespaços U^2 e $UV + V^2$ têm dimensão invariante sob mudança do idempotente. Usaremos esses invariantes numéricos para definir o *subtipo* de uma álgebra de Bernstein, conforme segue.

Definição 3.1 *Dada uma álgebra de Bernstein $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ do tipo $(1 + r, s)$ o par ordenado $(\dim(UV + V^2), \dim U^2)$ será chamado o subtipo de $\mathbf{A}$.*

O objetivo deste capítulo é determinar as condições a serem satisfeitas por uma quádrupla de inteiros não negativos (r, s, t, z) para que exista uma álgebra de Bernstein n -excepcional do tipo $(1 + r, s)$ e subtipo (t, z) , para $n \leq 1$.

Para as álgebras não nucleares o problema foi totalmente resolvido. Nas nucleares, encontramos apenas uma solução parcial. No caso de existência damos algoritmos para construir essas álgebras.

É óbvio que dados inteiros não negativos r e s sempre vai existir $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ do tipo $(1 + r, s)$. Basta considerar a álgebra de Bernstein trivial com $\dim U = r$ e $\dim V = s$ (veja [16]). O problema então concentra-se nos inteiros t e z . De (1.2) sabemos que $UV + V^2 \subseteq U$ e $U^2 \subseteq V$ e como $\mathbf{A}$ é comutativa, $\dim(UV + V^2) \leq r$ e $\dim U^2 \leq \min\{\frac{1}{2}r(r+1), s\}$. Além do mais, se $r = 0$ ou $s = 0$, então $UV = V^2 = U^2 = 0$,

logo o único subtipo possível para $\mathbf{A}$ é $(0, 0)$. Assim vamos considerar apenas quádruplas de inteiros (r, s, t, z) com $r \geq 1$, $s \geq 1$, $0 \leq t \leq r$ e $0 \leq z \leq \min\{\frac{1}{2}r(r+1), s\}$.

Ao longo deste e dos próximos capítulos usaremos as notações R e ψ para as aplicações $R : \mathbf{Z}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ e $\psi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}$, definidas por $R(z) = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 8z})$ e $\psi(x) = n$, onde $n - 1 < x \leq n$ e n é inteiro.

3.1 O P-subespaço $UV + V^2$ nas álgebras excepcionais e 1-excepcionais

Proposição 3.1 *Se $\mathbf{A} = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ é Bernstein do tipo $(1 + r, s)$ com $r, s \geq 1$, então $\dim L \leq r - \psi \circ R(\dim U_e^2)$, ψ e R como definidas anteriormente.*

Demonstração:

Seja M_e um subespaço complementar de L em U_e , isto é, $U_e = M_e \oplus L$. Como as dimensões de U_e e L são invariantes sob mudança do idempotente, a dimensão de M_e também o é. Além disso, $U_e^2 = M_e^2$. Suponha $z = \dim U_e^2$ e $\dim M_e = k \leq r$. Então $z = \dim U_e^2 = \dim M_e^2 \leq \frac{1}{2}k(k+1)$. Assim k deve satisfazer a inequação $k^2 + k - 2z \geq 0$. Como k deve ser um inteiro não negativo e menor ou igual a r , segue que $[R(z), r] \cap \mathbf{Z}$ é o conjunto solução dessa inequação, ou seja, $\psi(R(z)) \leq \dim M_e \leq r$ e portanto $\dim L \leq r - \psi(R(\dim U_e^2))$. $\square$

Com essa proposição temos uma ferramenta para calcular um teto máximo para a dimensão de L a partir da dimensão do P-monômio U^2 . O próximo passo será calcular limites superiores para a dimensão do P-subespaço $UV + V^2$.

Proposição 3.2 *Se $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ é uma álgebra de Bernstein do tipo $(1 + r, s)$ com $r, s \geq 1$ e grau de excepcionalidade $n \leq 1$, então $\dim(UV + V^2) \leq \dim L$.*

Demonstração:

Como o grau de excepcionalidade de $\mathbf{A}$ é $n \leq 1$, então $U(UV) = 0$ e portanto $UV \subseteq L$. Pelo item (i) do Lema 1.1 também tem-se que $V^2 \subseteq L$, assim $UV + V^2 \subseteq L$ e daí $\dim(UV + V^2) \leq \dim L$. $\square$

Corolário 3.1 *Se $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ é Bernstein do tipo $(1 + r, s)$ com $r, s \geq 1$ e grau de excepcionalidade $n \leq 1$, então $\dim(UV + V^2) \leq r - \psi(R(\dim U^2))$.*

Corolário 3.2 *Se $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ é Bernstein do tipo $(1 + r, s)$ com $r, s \geq 1$ e grau de excepcionalidade $n \leq 1$, então $\dim((UV + V^2) \oplus V) \leq \dim \mathbf{N} - \psi(R(\dim U^2))$.*

3.2 Subtipos de álgebras excepcionais

Teorema 3.1 *Dados inteiros (r, s, t, z) com $r \geq 1$, existe uma álgebra de Bernstein excepcional do tipo $(1 + r, s)$ e subtipo (t, z) se, e somente se, $z = 0$ e s e t são tais que $s = t = 0$ ou $s \geq 1$ e $0 \leq t \leq r$.*

Demonstração:

Suponha $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$, excepcional do tipo $(1 + r, s)$ e subtipo (t, z) . Da Definição 2.1, segue que $z = 0$. Se $\mathbf{A}$ é nuclear, então $0 = U^2 = V$ e portanto $UV = V^2 = 0$, logo $s = t = 0$. E se $\mathbf{A}$ é não nuclear, $U^2 \subsetneq V$, logo $s \geq 1$ e $0 \leq t \leq r$, conforme Corolário 3.1. Reciprocamente, se $(r, s, t, 0)$ são inteiros tais que $s = t = 0$, a existência é garantida considerando a álgebra de Bernstein trivial com $\dim U = r$ e $V = 0$. E se $r, s \geq 1$ e $0 \leq t \leq r$, então o par $(\mathbf{A}, \omega)$, onde $\mathbf{A}$ é o $\mathbf{F}$ -espaço vetorial gerado por $\{e, u_1, u_2, \dots, u_r, v_1, v_2, \dots, v_s\}$ e $\omega : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{F}$ é aplicação definida por $\omega(e) = 1$, $\omega(u_i) = \omega(v_j) = 0$, para $i = 1, 2, \dots, r$ e $j = 1, 2, \dots, s$, é uma álgebra de Bernstein excepcional do tipo $(1 + r, s)$ e subtipo $(t, 0)$, se consideramos em $\mathbf{A}$ o produto comutativo dado por $e^2 = e$; $2eu_i = u_i$; $ev_j = 0$, para $i = 1, 2, \dots, r$ e $j = 1, 2, \dots, s$ e $u_i v_s = u_i$, para $1 \leq i \leq t$ e demais produtos nulos. $\square$

A seguir temos o exemplo da álgebra de Bernstein excepcional descrita na demonstração do Teorema 3.1 para a quádrupla $(10, 7, 8, 0)$.

Exemplo 3.1 *Seja $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ a álgebra de Bernstein com $U = \langle u_1, u_2, \dots, u_{10} \rangle$, $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_7 \rangle$ e tábua de multiplicação do núcleo dada por:*

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	v_1	v_2	...	v_7
u_1														u_1
u_2														u_2
u_3														u_3
u_4														u_4
u_5														u_5
u_6														u_6
u_7														u_7
u_8														u_8
u_9														
u_{10}														
v_1														
v_2														
...														
v_7	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8						

3.3 Subtipos de álgebras 1-excepcionais

Para as 1-excepcionais, vamos considerar inicialmente o caso em que a álgebra é não nuclear, isto é, $U^2 \subsetneq V$ e posteriormente analisaremos o caso nuclear.

Caso 1 - Álgebras 1-excepcionais não nucleares:

O lema a seguir mostra que existe álgebra de Bernstein 1-excepcional e não nuclear, na qual a dimensão do P-subespaço $UV + V^2$ pode alcançar o limite dado no Corolário 3.1.

Lema 3.1 (Algoritmo1) *Dados inteiros (r, s, t, z) com $r \geq 1$, $s \geq 2$, $1 \leq z \leq \min\{\frac{1}{2}r(r+1), s-1\}$ e $0 \leq t \leq r - \psi(R(z))$, existe uma álgebra de Bernstein 1-excepcional não nuclear, do tipo $(1+r, s)$ e subtipo (t, z) .*

Demonstração:

A demonstração consiste simplesmente na construção dessa álgebra.

Algoritmo:

Sejam $k = \psi(R(z))$ e $\mathbf{A}$ o espaço vetorial sobre $\mathbf{F}$ de dimensão $1 + r + s$, gerado por $\{e, u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s\}$. Definimos em $\mathbf{A}$ o produto comutativo dado por:

- (1). $e^2 = e$; $2eu_i = u_i$; $ev_j = 0$; $(i = 1, 2, \dots, r \text{ e } j = 1, 2, \dots, s)$;
- (2). $u_i u_j = v_{\epsilon(i,j)}$, se $1 \leq i \leq j \leq k$ e $\epsilon(i, j) \leq z$, onde $\epsilon(i, j) = \frac{1}{2}(2k - i)(i - 1) + j$;
- (3). $u_i v_s = u_i$, se $k + 1 \leq i \leq k + t$;
- (4). Demais produtos nulos.

Definimos $\omega : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{F}$ por $\omega(e) = 1$ e imagem nula nos demais elementos da base de $\mathbf{A}$. Então $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$, onde $U = \langle u_1, u_2, \dots, u_r \rangle$ e $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_s \rangle$. Das regras do produto segue que $U^2 = \langle v_1, \dots, v_z \rangle \subseteq \langle v_1, v_2, \dots, v_{s-1} \rangle \subsetneq V$; $UV = \langle u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_{k+t} \rangle \subseteq U$ e $V^2 = 0$. Além disso, $U(UV) = \langle u_i u_j \mid 1 \leq i \leq r, k + 1 \leq j \leq k + t \rangle = 0$, pois $u_i u_j = 0$, para todo i ou $j \geq k + 1$. Seja $x = \omega(x)e + u + v \in \mathbf{A}$, onde $u = \sum_{i=1}^r \alpha_i u_i$ e $v = \sum_{j=1}^s \beta_j v_j$, com $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s \in \mathbf{F}$. Por (1) e pela comutatividade do produto tem-se $x^2 = \omega(x)^2 e + \omega(x)u + u^2 + 2uv + v^2$, com $\omega(x)u + 2uv + v^2 \in U + UV + V^2 = U$ e $u^2 \in U^2 \subseteq V$. Além disso, para quaisquer $u \in U$ e $v \in V$, tem-se:

- (i) $u^3 \in U^3 = UU^2 \subseteq U\langle v_1, v_2, \dots, v_{s-1} \rangle = 0$;
- (ii) $u(uv) \in U(UV) = 0$;
- (iii) $uv^2 \in UV^2 = 0$;
- (iv) $(u^2)^2 \in (U^2)^2 \subseteq V^2 = 0$;
- (v) $(uv)^2 \in (UV)^2 \subseteq U(UV) = 0$.

Pelo Teorema 1.1, segue que $(\mathbf{A}, \omega)$ é uma álgebra de Bernstein com $U_e = U$ e $V_e = V$. Como $U_e^2 = \langle v_1, v_2, \dots, v_z \rangle$, $U_e V_e = \langle u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_{k+t} \rangle$ e $V_e^2 = 0$, então para todo idempotente f , $\dim U_f^2 = \dim U_e^2 = z \neq 0$ e $\dim(U_f V_f + V_f^2) = \dim(U_e V_e + V_e^2) = \dim U_e V_e = t$. Assim $\mathbf{A}$ é 1-excepcional do tipo $(1 + r, s)$ e subtipo (t, z) . $\square$

Teorema 3.2 *Dados inteiros (r, s, t, z) , existe uma álgebra de Bernstein 1-excepcional e não nuclear do tipo $(1 + r, s)$ e subtipo (t, z) se, e somente se, $r \geq 1$, $s \geq 2$, $1 \leq z \leq \min\{\frac{1}{2}r(r + 1), s - 1\}$ e $0 \leq t \leq r - \psi(R(z))$.*

Demonstração:

Seja $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ de Bernstein 1-excepcional e não nuclear do tipo $(1 + r, s)$ e subtipo (t, z) . Como $\mathbf{A}$ é 1-excepcional e não nuclear, então $0 \neq U^2 \subsetneq V$, logo $r \geq 1$, $s \geq 2$ e $1 \leq z \leq \min\{\frac{1}{2}r(r+1), s-1\}$. Pelo Corolário 3.1, $0 \leq t \leq r - \psi(R(z))$. A existência da álgebra segue do Lema 3.1. $\square$

O próximo exemplo exhibe a álgebra de Bernstein 1-excepcional produzida pelo algoritmo do Lema 3.1 para a quádrupla $(8, 9, 4, 8)$.

Exemplo 3.2 *Seja $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ a álgebra de Bernstein com $U = \langle u_1, u_2, \dots, u_8 \rangle$, $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_9 \rangle$ e tábua de multiplicação do núcleo dada a seguir:*

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
u_1	v_1	v_2	v_3	v_4													
u_2	v_2	v_5	v_6	v_7													
u_3	v_3	v_6	v_8														
u_4	v_4	v_7															
u_5																	u_5
u_6																	u_6
u_7																	u_7
u_8																	u_8
v_1																	
v_2																	
v_3																	
v_4																	
v_5																	
v_6																	
v_7																	
v_8																	
v_9					u_5	u_6	u_7	u_8									

$\square$

Caso 2 - Álgebras 1-excepcionais nucleares:

No estudo das álgebras 1-excepcionais nucleares será de grande utilidade a próxima proposição, na qual faremos uso das notações dadas a seguir.

Dados inteiros $p \geq 1$ e $k_1, k_2, \dots, k_n \in \{1, 2, \dots, p\}$ distintos, seja $o(k_1 k_2 \dots \hat{k}_i \dots k_n)$ o inteiro associado à ordem de k_i ($i = 1, 2, \dots, n$) quando $k_1, k_2, \dots, k_n$ são ordenados de forma crescente. Com essa convenção, dados $M \subseteq U$ um subespaço não nulo de uma álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U \oplus V$, $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ uma base arbitrária de M e n_1, n_2, n_3, n_4 inteiros distintos, definimos os seguintes subespaços:

i) Para $n_1, n_2, n_3 \in \{1, 2, 3\}$:

$$M_{(n_1 n_2) n_3} = \langle (u_i^2 u_j) u_k \mid 1 \leq i, j, k \leq p; o(\hat{i} j k) = n_1, o(i \hat{j} k) = n_2, o(i j \hat{k}) = n_3 \rangle;$$

$$M_{n_1 (n_2 n_3)} = \langle u_i^2 (u_j u_k) \mid 1 \leq i, j, k \leq p; o(\hat{i} j k) = n_1, o(i \hat{j} k) = n_2, o(i j \hat{k}) = n_3 \rangle;$$

ii) Para $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$$M_{n_1 n_2 n_3 n_4} = \langle ((u_i u_j) u_k) u_l \mid 1 \leq i, j, k, l \leq p; o(\hat{i} j k l) = n_1, o(i \hat{j} k l) = n_2, o(i j \hat{k} l) = n_3, o(i j k \hat{l}) = n_4 \rangle;$$

$$M_{(n_1 n_2) (n_3 n_4)} = \langle (u_i u_j) (u_k u_l) \mid 1 \leq i, j, k, l \leq p; o(\hat{i} j k l) = n_1, o(i \hat{j} k l) = n_2, o(i j \hat{k} l) = n_3, o(i j k \hat{l}) = n_4 \rangle.$$

Exemplificando, se $M = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$, então

$$M_{(12)3} = \langle (u_i^2 u_j) u_k \mid 1 \leq i < j < k \leq 4 \rangle = \langle (u_1^2 u_2) u_3, (u_1^2 u_2) u_4, (u_1^2 u_3) u_4, (u_2^2 u_3) u_4 \rangle \text{ e}$$

$$M_{(31)2} = \langle (u_i^2 u_j) u_k \mid 1 \leq j < k < i \leq 4 \rangle = \langle (u_3^2 u_1) u_2, (u_4^2 u_1) u_2, (u_4^2 u_1) u_3, (u_4^2 u_2) u_3 \rangle.$$

Observamos que como n_1, n_2, n_3 e n_4 são distintos, a dimensão dos subespaços $M_{(n_1 n_2) n_3}$ e $M_{n_1 (n_2 n_3)}$ é menor ou igual a $C_{p,3}$ e a dimensão de $M_{n_1 n_2 n_3 n_4}$ e $M_{(n_1 n_2) (n_3 n_4)}$ é limitada por $C_{p,4}$, onde $C_{p,n} = \frac{p!}{(p-n)!n!}$.

Proposição 3.3 *Seja $M \subseteq U$ um subespaço arbitrário de uma álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U \oplus V$ do tipo $(1+r, s)$ com $r \geq 1$. Se $\dim M = p$, então*

$$(i) \dim M^3 \leq \min\{r-1, \frac{1}{3}p(p^2-1)\};$$

$$(ii) \dim M^4 \leq \min\{s, \frac{1}{8}(p-2)(p-1)p(p+1)\};$$

$$(iii) \dim(M^2)^2 \leq \min\{r-1, \frac{1}{12}p^2(p^2-1)\}.$$

Demonstração:

Se A é excepcional ou $p = 0$, $M^3 = M^4 = (M^2)^2 = 0$ e a proposição é obviamente

verdadeira. Vamos considerar A não excepcional e $p \geq 1$. Seja $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ uma base de M .

(i) Das observações (1.1) e (1.2), segue que $M^3 = MM^2 = M(A + B)$, onde $A = \langle u_i^2 \mid 1 \leq i \leq p \rangle$ e $B = \langle u_i u_j \mid 1 \leq i < j \leq p \rangle$. Usando as identidades (1.3) e (1.8) segue que $MA = \langle u_i^2 u_j \mid 1 \leq i, j \leq p, i \neq j \rangle$ e $MB = \langle u_i^2 u_j \mid 1 \leq i, j \leq p, i \neq j \rangle + \langle (u_i u_j) u_k \mid 1 \leq i < j \leq p, 1 \leq k \leq p, k \neq i, j \rangle = MA + \langle (u_i u_j) u_k \mid 1 \leq k < i < j \leq p \rangle + \langle (u_i u_j) u_k \mid 1 \leq i < k < j \leq p \rangle + \langle (u_i u_j) u_k \mid 1 \leq i < j < k \leq p \rangle = M_1 + M_2 + M_3 + M_4$, onde $M_1 = \langle u_i^2 u_j \mid 1 \leq i, j \leq p, i \neq j \rangle$; $M_2 = \langle (u_i u_j) u_k \mid 1 \leq i < j < k \leq p \rangle$; $M_3 = \langle (u_i u_j) u_k \mid 1 \leq k < i < j \leq p \rangle$ e $M_4 = \langle (u_i u_j) u_k \mid 1 \leq i < k < j \leq p \rangle$. Pela identidade (1.9), se i, j, k são tais que $1 \leq i < k < j \leq p$, então $(u_i u_j) u_k = -(u_i u_k) u_j - (u_k u_j) u_i$. Logo $M_4 \subseteq M_2 + M_3$ e portanto $M^3 = M_1 + M_2 + M_3$. Segue daí que $\dim M^3 \leq p(p-1) + 2C_{p,3} = \frac{1}{3}p(p^2-1)$.
(ii) $M^4 = MM^3 = M(M_1 + M_2 + M_3)$, com M_1, M_2 e M_3 como definidos no item (i). Usando as identidades (1.3), (1.5), (1.8) e (1.11) temos:

$$MM_1 = M_{(12)3} + M_{(31)2} + M_{(21)3};$$

$$MM_2 = M_{(12)3} + M_{(21)3} + M_{2341} + M_{1342} + M_{1234} + M_{1243} \text{ e}$$

$$MM_3 = M_{(23)1} + M_{(32)1} + M_{2413} + M_{2314} + M_{3412} + M_{3421}.$$

$$\text{Portanto } M^4 = (M_{(12)3} + M_{(21)3} + M_{(31)2} + M_{(23)1} + M_{(32)1}) + (M_{1234} + M_{1243} + M_{1342} + M_{2341} + M_{2314} + M_{2413} + M_{3412} + M_{3421}).$$

Das identidades (1.9) e (1.11) e fato do produto ser comutativo tem-se:

$$((u_j u_i) u_k) u_l = ((u_i u_j) u_k) u_l = -((u_i u_j) u_l) u_k = ((u_l u_i) u_j) u_k + ((u_l u_j) u_i) u_k, \quad (3.1)$$

para quaisquer $1 \leq i, j, k, l \leq p$. Segue daí que $M_{n_1 n_2 n_3 n_4} = M_{n_2 n_1 n_3 n_4} = M_{n_2 n_1 n_4 n_3}$ e $M_{n_1 n_2 n_3 n_4} \subseteq M_{n_4 n_1 n_2 n_3} + M_{n_4 n_2 n_1 n_3}$, para todo $1 \leq n_1, n_2, n_3, n_4 \leq 4$. Ainda de (3.1), para $i = j$, tem-se $M_{(n_1 n_2) n_3} = M_{(n_1 n_3) n_2}$, para quaisquer $1 \leq n_1, n_2, n_3 \leq 3$. Portanto $M^4 = M_{(12)3} + M_{(21)3} + M_{(31)2} + M_{1234} + M_{2314} + M_{3412}$ e $\dim M^4 \leq 3C_{p,3} + 3C_{p,4} = \frac{1}{8}(p-2)(p-1)p(p+1)$.

(iii) $(M^2)^2 = (A + B)^2 = A^2 + AB + B^2$, A e B como definidos no item (i). Usando as identidades (1.15), (1.16) e (1.17) tem-se:

$$A^2 = \langle u_i^2 u_j^2 \mid 1 \leq i < j \leq p \rangle, \quad AB = M_{1(23)} + M_{2(13)} + M_{3(12)} \text{ e } B^2 = A^2 + M_{1(23)} + M_{2(13)} + M_{3(12)} + M_{(12)(34)} + M_{(13)(24)} + M_{(14)(23)}.$$

Portanto $(M^2)^2 = B^2$. Da identidade (1.18) segue que $(u_i u_j)(u_k u_l) = -(u_i u_k)(u_l u_j) - (u_i u_l)(u_k u_j)$, para quais-

quer $1 \leq i, j, k, l \leq p$. Assim $M_{(n_1 n_2)(n_3 n_4)} \subseteq M_{(n_1 n_3)(n_4 n_2)} + M_{(n_1 n_4)(n_3 n_2)}$, para todo $1 \leq n_1, n_2, n_3, n_4 \leq 4$. Em particular, $M_{(14)(23)} \subseteq M_{(12)(34)} + M_{(13)(24)}$. Portanto $(M^2)^2 = A^2 + M_{1(23)} + M_{2(13)} + M_{3(12)} + M_{(12)(34)} + M_{(13)(24)}$. Então $\dim(M^2)^2 \leq C_{p,2} + 3C_{p,3} + 2C_{p,4} = \frac{1}{12}p^2(p^2 - 1)$.

Além disso, como $M \subseteq U$, tem-se de (1.2) e da proposição 1.5 que $M^3 \not\subseteq U$, $M^4 \subseteq V$ e $(M^2)^2 \not\subseteq U$, obtendo assim (i), (ii) e (iii). $\square$

O exemplo a seguir mostra uma álgebra de Bernstein 1-excepcional na qual existe um subespaço $M \subseteq U$, onde os limitantes superiores dados nos itens (i) e (iii) da proposição anterior são alcançados. No próximo capítulo veremos também o exemplo de uma álgebra, com grau de excepcionalidade maior do que um, na qual $\dim M^4$ também atinge o teto máximo, dado no item (ii) da Proposição 3.3.

Exemplo 3.3 *Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ de Bernstein, onde $U = \langle u_1, u_2, \dots, u_{44} \rangle$ e $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_{10} \rangle$, com tábuas de multiplicação do núcleo dadas a seguir:*

Tábua de U^2 :

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	...	u_{42}	u_{43}	u_{44}
u_1	v_1	v_2	v_3	v_4										
u_2	v_2	v_5	v_6	v_7										
u_3	v_3	v_6	v_8	v_9										
u_4	v_4	v_7	v_9	v_{10}										
u_5														
u_6														
u_7														
u_8														
u_9														
u_{10}														
...														
u_{42}														
u_{43}														
u_{44}														

Tábua de $UV + V^2$:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
u_1		$-u_5$	$-u_6$	$-u_7$	$2u_8$	u_{12}	u_{14}	$2u_9$	u_{16}	$2u_{10}$
u_2	$2u_5$	$-u_8$	$-u_{11} - u_{12}$	$-u_{13} - u_{14}$		$-u_{17}$	$-u_{18}$	$2u_{19}$	u_{22}	$2u_{20}$
u_3	$2u_6$	u_{11}	$-u_9$	$-u_{15} - u_{16}$	$2u_{17}$	$-u_{19}$	$-u_{21} - u_{22}$		$-u_{23}$	$2u_{24}$
u_4	$2u_7$	u_{13}	u_{15}	$-u_{10}$	$2u_{18}$	u_{21}	$-u_{20}$	$2u_{23}$	$-u_{24}$	
u_5										
$\dots$										
u_{44}										
v_1					$2u_{25}$	$2u_{31}$	$2u_{34}$	$2u_{26}$	$2u_{37}$	$2u_{27}$
v_2		$-u_{25}$	$-u_{31}$	$-u_{34}$		$-u_{32}$	$-u_{35}$	$2u_{33}$	u_{43}	$2u_{36}$
v_3		$-u_{31}$	$-u_{26}$	$-u_{37}$	$2u_{32}$	$-u_{33}$	u_{44}		$-u_{38}$	$2u_{39}$
v_4		$-u_{34}$	$-u_{37}$	$-u_{27}$	$2u_{35}$	$-u_{43} - u_{44}$	$-u_{36}$	$2u_{38}$	$-u_{39}$	
v_5	$2u_{25}$		$2u_{32}$	$2u_{35}$				$2u_{28}$	$2u_{40}$	$2u_{29}$
v_6	$2u_{31}$	$-u_{32}$	$-u_{33}$	$-u_{43} - u_{44}$		$-u_{28}$	$-u_{40}$		$-u_{41}$	$2u_{42}$
v_7	$2u_{34}$	$-u_{35}$	u_{44}	$-u_{36}$		$-u_{40}$	$-u_{29}$	$2u_{41}$	$-u_{42}$	
v_8	$2u_{26}$	$2u_{33}$		$2u_{38}$	$2u_{28}$		$2u_{41}$			$2u_{30}$
v_9	$2u_{37}$	u_{43}	$-u_{38}$	$-u_{39}$	$2u_{40}$	$-u_{41}$	$-u_{42}$		$-u_{30}$	
v_{10}	$2u_{27}$	$2u_{36}$	$2u_{39}$		$2u_{29}$	$2u_{42}$		$2u_{30}$		

Nesta álgebra o subespaço $M = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle \subseteq U$ é tal que $M^3 = \langle u_5, u_6, \dots, u_{24} \rangle$ e $(M^2)^2 = \langle u_{25}, u_{26}, \dots, u_{44} \rangle$, logo $\dim(M^3 + (M^2)^2) = 40$. $\square$

Sejam $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein 1-excepcional do tipo $(1 + r, s)$ e M um subespaço de $\mathbf{A}$ tal que $U = M \oplus L$. Se $\mathbf{A}$ é nuclear, então $U^2 = V$, logo $UV + V^2 = U^3 + (U^2)^2 = M^3 + (M^2)^2$. Portanto $\dim(UV + V^2) = \dim(M^3 + (M^2)^2) \leq \dim M^3 + \dim(M^2)^2$. Por outro lado, como $\mathbf{A}$ é 1-excepcional, pela Proposição 3.2, $\dim(UV + V^2) \leq \dim L = r - \dim M$. Da Proposição 3.1 segue que podemos ter $\psi(R(s)) \leq \dim M \leq r$. Assim $\dim(UV + V^2) \leq \max\{\min\{r - \dim M, \dim M^3 + \dim(M^2)^2\} \mid \psi(R(s)) \leq \dim M \leq r\}$.

Se $\dim M = p$ e $\dim M^2 = \frac{1}{2}p(p+1)$, então podemos encontrar uma álgebra de

Bernstein com $\dim M^3 + \dim(M^2)^2$ atingido os valores máximos dados na Proposição 3.3, conforme visto no exemplo anterior. Quanto $\dim M^2 < \frac{1}{2}p(p+1)$, isso não é possível. E neste caso, a máxima dimensão desse subespaço é de difícil determinação. Vamos apenas mostrar, através de um caso particular, que nem sempre podemos ter álgebra de Bernstein nuclear com $\dim(UV + V^2)$ alcançando o valor dado no Corolário 3.1. Em particular, isso acontece quando a dimensão do P-monômio U é “muito maior” do que a dimensão do P-monômio V .

Proposição 3.4 *Seja A uma álgebra de Bernstein 1-excepcional do tipo $(1+r, s)$ e subtipo (t, s) , com $s \geq 1$. Se $r > \frac{1}{12}p(p^2 - 1)(p + 4) + 12$, onde $p = \psi(R(s))$, então $t < r - \psi(R(s))$.*

Demonstração:

Seja $M \subseteq U$ tal que $U = M \oplus L$. Pelas considerações anteriores, $t \leq \max\{\min\{r - \dim M, \dim M^3 + \dim(M^2)^2\} \mid p \leq \dim M \leq r\}$. Se $\dim M = p$, pela Proposição 3.3, $\dim M^3 + \dim(M^2)^2 \leq \frac{1}{12}p(p^2 - 1)(p + 4) < r - p$. E $\min\{\dim M^3 + \dim(M^2)^2, r - \dim M\} \leq r - \dim M < r - p$, para todo M tal que $p + 1 \leq \dim M \leq r$. Portanto $t < r - p = r - \psi(R(s))$. $\square$

Vamos mostrar, por construção, que também existe álgebra de Bernstein 1-excepcional e nuclear com $\dim(UV + V^2) = \dim U - \psi(R(\dim U^2))$.

Lema 3.2 (Algoritmo2) *Para toda terna de inteiros (r, s, t) com $s = \frac{1}{2}p(p + 1)$, para algum inteiro $p \geq 1$, $1 \leq r \leq \frac{1}{3}(s^2 + (p - 2)s + 3p)$ e $0 \leq t \leq r - p$, existe uma álgebra de Bernstein 1-excepcional do tipo $(1 + r, s)$ e subtipo (t, s) .*

Demonstração:

Como $s = \frac{1}{2}p(p + 1)$, então $p = \psi(R(s))$. Seja A o espaço vetorial sobre F com $\{e, u_1, u_2, \dots, u_r, v_1, v_2, \dots, v_s\}$ uma base de A . Definimos em A o seguinte produto comutativo:

- (1). $e^2 = e$; $eu_i = \frac{1}{2}u_i$; $ev_j = 0$ ($i = 1, 2, \dots, r$ e $j = 1, \dots, s$);
- (2). $u_i u_j = v_{\epsilon(i,j)}$, se $1 \leq i \leq j \leq p$, onde $\epsilon(i, j) = \frac{1}{2}(2p - i)(i - 1) + j$;
- (3). $u_i^2 u_j = -2u_i(u_i u_j) = 2u_{\rho_1(i,j)}$;

- $u_j^2 u_i = -2u_j(u_j u_i) = 2u_{\rho_2(i,j)};$
 se $1 \leq i < j \leq p$ e $\rho_w(i, j) \leq p + t$ para $w = 1, 2$, onde
 $\rho_1(i, j) = p + \sum_{x=1}^{i-1} [(p-x)(p-(x-1))] + (j-i)$ e
 $\rho_2(i, j) = p + \sum_{x=1}^{i-1} [(p-x)(p-(x-1))] + (p-i) + (j-i);$
 (4). $(u_i u_j) u_k = u_{\delta_1(i,j,k)};$
 $(u_j u_k) u_i = u_{\delta_2(i,j,k)};$
 se $1 \leq i < j < k \leq p$ e $\delta_w(i, j, k) \leq p + t$ para $w = 1, 2$, onde
 $\delta_w(i, j, k) = \lambda_1(i, j, k) + w$ e
 $\lambda_1(i, j, k) = p + \sum_{x=1}^{i-1} [(p-x)(p-(x-1))] + 2(p-i) + (2p-(i+j))(j-i-1) + 2(k-j) - 2;$
 (5). $(u_i u_k) u_j = -[(u_i u_j) u_k + (u_j u_k) u_i],$ se $1 \leq i < j < k \leq p;$
 (6). $u_i^2 u_j^2 = -2(u_i u_j)^2 = 2u_{\tau(i,j)};$
 se $1 \leq i < j \leq p$ e $\tau(i, j) \leq p + t$, onde
 $\tau(i, j) = \frac{1}{3}p(p^2 + 2) + \frac{1}{2}(2p-i)(i-1) + (j-i);$
 (7). $u_i^2(u_j u_k) = -2(u_i u_j)(u_i u_k) = 2u_{\tau_1(i,j,k)};$
 $u_j^2(u_i u_k) = -2(u_i u_j)(u_j u_k) = 2u_{\tau_2(i,j,k)};$
 $u_k^2(u_i u_j) = -2(u_i u_k)(u_k u_j) = 2u_{\tau_3(i,j,k)};$
 se $1 \leq i < j < k \leq p$ e $\tau_w(i, j, k) \leq p + t$ para $w = 1, 2, 3$, onde
 $\tau_w(i, j, k) = \lambda_2(i, j, k) + w$ e
 $\lambda_2(i, j, k) = \frac{1}{6}p(2p+1)(p+1) + \sum_{x=1}^{i-1} \frac{3}{2}[(p-x)(p-(x+1))] +$
 $\frac{3}{2}(2p-(i+j))(j-i-1) + 3(k-j) - 3;$
 (8). $(u_i u_j)(u_k u_l) = u_{\sigma_1(i,j,k,l)};$
 $(u_i u_k)(u_j u_l) = u_{\sigma_2(i,j,k,l)};$
 se $1 \leq i < j < k < l \leq p$ e $\sigma_w(i, j, k, l) \leq p + t$ para $w = 1, 2$, onde
 $\sigma_w(i, j, k, l) = \lambda_3(i, j, k, l) + w$ e
 $\lambda_3(i, j, k, l) = \frac{1}{6}p(5p^2 - 6p + 7) + \sum_{x=1}^{i-1} \frac{1}{3}[(p-x)(p-(x+1))(p-(x+2))] +$
 $\sum_{x=i+1}^{j-1} [(p-x)(p-(x+1))] + (2p-(k+j))(k-j-1) + 2(l-k) - 2;$
 (9). $(u_i u_l)(u_j u_k) = -[(u_i u_j)(u_k u_l) + (u_i u_k)(u_j u_l)],$ se $1 \leq i < j < k < l \leq p.$
 (10). Demais produtos nulos.

Definimos também a aplicação $\omega : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{F}$ por $\omega(e) = 1; \omega(u_i) = \omega(v_j) = 0$, para $i = 1, 2, \dots, r$ e $j = 1, 2, \dots, s$. Para mostrar que $(\mathbf{A}, \omega)$ é uma álgebra de Bernstein usaremos o Teorema 1.1. Sejam $U = \langle u_1, u_2, \dots, u_r \rangle$ e $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_s \rangle$. Então:

1) $U^2 = \langle u_i u_j \mid 1 \leq i, j \leq r \rangle = \langle u_i u_j \mid 1 \leq i \leq j \leq p \rangle = \langle v_1, v_2, \dots, v_s \rangle = V$, conforme item (2);

2) $UV = U^3 = \langle (u_i u_j) u_k \mid 1 \leq i, j, k \leq r \rangle = \langle u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_\kappa \rangle \subseteq U$, conforme os itens (3), (4) e (5), onde $\kappa = \min\{\frac{1}{3}p(p^2 + 2), p + t\}$;

3) $V^2 = (U^2)^2 = \langle (u_i u_j)(u_k u_l) \mid 1 \leq i, j, k, l \leq r \rangle = \langle u_{\kappa+1}, u_{\kappa+2}, \dots, u_{p+t} \rangle \subseteq U$, segundo itens (6), (7) e (8). Observamos que se $\kappa = p + t$, então $V^2 = 0$.

Além disso, como UV e V^2 estão contidos em $\langle u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_{p+t} \rangle$, então $U(UV) = (UV)^2 = UV^2 = 0$, já que $u_i u_j = 0$, para todo i ou $j \geq p + 1$.

Seja $x = \alpha e + u + v \in \mathbf{A}$, onde $u = \sum_{i=1}^r \alpha_i u_i$ e $v = \sum_{i=1}^s \beta_i v_i$, com $\alpha, \alpha_i, \beta_i \in \mathbf{F}$, para todo i, j . De (1) e da comutatividade do produto tem-se $x^2 = \alpha^2 e + (\alpha u + 2uv + v^2) + u^2$, com $\alpha u + 2uv + v^2 \in U + UV + V^2 = U$ e $u^2 \in U^2 = V$. Resta então mostrar que temos as identidades $u(uv) = (uv)^2 = uv^2 = u^3 = (u^2)^2 = 0$, para todo $u \in U, v \in V$. As três primeiras, $u(uv) = (uv)^2 = uv^2 = 0$, são imediatas, já que $U(UV) = (UV)^2 = UV^2 = 0$. Seja $u = \sum_{i=1}^r \alpha_i u_i \in U$, com $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbf{F}$. Pelas regras dadas, basta considerar $u = \sum_{i=1}^p \alpha_i u_i$. Pela comutatividade do produto tem-se $u^2 = \sum_{i=1}^p \alpha_i^2 u_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p \alpha_i \alpha_j u_i u_j$. Inicialmente vamos mostrar que $u^3 = 0$. Usando (3), (4) e (5), temos:

$$\begin{aligned}
u^3 &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \alpha_i^2 \alpha_j u_i^2 u_j + 2 \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p \sum_{k=1}^p \alpha_i \alpha_j \alpha_k (u_i u_j) u_k \\
&= \sum_{1 \leq i < j \leq p} \alpha_i^2 \alpha_j u_i^2 u_j + \sum_{i=1}^p \alpha_i^3 u_i^3 + \sum_{1 \leq j < i \leq p} \alpha_i^2 \alpha_j u_i^2 u_j \\
&\quad + 2 \left(\sum_{1 \leq i < j \leq p} \alpha_i^2 \alpha_j (u_i u_j) u_i + \sum_{1 \leq i < j \leq p} \alpha_i \alpha_j^2 (u_i u_j) u_j + \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^p \alpha_i \alpha_j \alpha_k (u_i u_j) u_k \right) \\
&= \sum_{1 \leq i < j \leq p} 2\alpha_i^2 \alpha_j u_{\rho_1(i, j)} + \sum_{1 \leq i < j \leq p} 2\alpha_i \alpha_j^2 u_{\rho_2(i, j)} \\
&\quad + 2 \left(\sum_{1 \leq i < j \leq p} -\alpha_i^2 \alpha_j u_{\rho_1(i, j)} + \sum_{1 \leq i < j \leq p} -\alpha_i \alpha_j^2 u_{\rho_2(i, j)} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=i+1}^p \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^p \alpha_i \alpha_j \alpha_k (u_i u_j) u_k \right) \\
&= 2 \left(\sum_{1 \leq k < i < j \leq p} \alpha_i \alpha_j \alpha_k (u_i u_j) u_k + \sum_{1 \leq i < j < k \leq p} \alpha_i \alpha_j \alpha_k (u_i u_j) u_k + \sum_{1 \leq i < k < j \leq p} \alpha_i \alpha_j \alpha_k (u_i u_j) u_k \right)
\end{aligned}$$

$$= 2 \left(\sum_{1 \leq i < j < k \leq p} \alpha_j \alpha_k \alpha_i u_{\delta_2(i,j,k)} + \sum_{1 \leq i < j < k \leq p} \alpha_i \alpha_j \alpha_k u_{\delta_1(i,j,k)} - \sum_{1 \leq i < j < k \leq p} \alpha_i \alpha_j \alpha_k (u_{\delta_1(i,j,k)} + u_{\delta_2(i,j,k)}) \right) = 0$$

Por fim, temos:

$$\begin{aligned} (u^2)^2 &= \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i^2 u_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p \alpha_i \alpha_j u_i u_j \right)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i^2 u_i^2 \right)^2 + 4 \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p \sum_{k=1}^p \alpha_i \alpha_j \alpha_k^2 (u_i u_j) u_k^2 + 4 \left(\sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p \alpha_i \alpha_j u_i u_j \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

pois do item (6) tem-se:

$$\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i^2 u_i^2 \right)^2 = \sum_{i=1}^p \alpha_i^4 (u_i^2)^2 + 2 \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p \alpha_i^2 \alpha_j^2 u_i^2 u_j^2 = 4 \sum_{1 \leq i < j \leq p} \alpha_i^2 \alpha_j^2 u_{\tau(i,j)};$$

De (7) segue:

$$\begin{aligned} 4 \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p \sum_{k=1}^p \alpha_i \alpha_j \alpha_k^2 (u_i u_j) u_k^2 &= \\ &= 4 \left(\sum_{1 \leq k < i < j \leq p} \alpha_i \alpha_j \alpha_k^2 (u_i u_j) u_k^2 + \sum_{1 \leq i < k < j \leq p} \alpha_i \alpha_j \alpha_k^2 (u_i u_j) u_k^2 + \sum_{1 \leq i < j < k \leq p} \alpha_i \alpha_j \alpha_k^2 (u_i u_j) u_k^2 \right) \\ &= 4 \left(\sum_{1 \leq i < j < k \leq p} 2 \alpha_i^2 \alpha_j \alpha_k u_{\tau_1(i,j,k)} + \sum_{1 \leq i < j < k \leq p} 2 \alpha_i \alpha_j^2 \alpha_k u_{\tau_2(i,j,k)} + \sum_{1 \leq i < j < k \leq p} 2 \alpha_i \alpha_j \alpha_k^2 u_{\tau_3(i,j,k)} \right); \end{aligned}$$

E usando (6), (7) e (8) obtem-se:

$$\begin{aligned} 4 \left(\sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p \alpha_i \alpha_j u_i u_j \right)^2 &= \\ &= 4 \sum_{1 \leq i < j \leq p} \alpha_i^2 \alpha_j^2 (u_i u_j)^2 + 8 \underbrace{\sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{l=k+1}^p \alpha_i \alpha_j \alpha_k \alpha_l (u_i u_j) (u_k u_l)}_{(i,j) < (k,l)} \\ &= -4 \sum_{1 \leq i < j \leq p} \alpha_i^2 \alpha_j^2 u_{\tau(i,j)} \\ &+ 8 \sum_{1 \leq i < j < k \leq p} \left(\alpha_i^2 \alpha_j \alpha_k (u_i u_j) (u_i u_k) + \alpha_i \alpha_j^2 \alpha_k (u_i u_j) (u_j u_k) + \alpha_i \alpha_j \alpha_k^2 (u_i u_k) (u_j u_k) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +8 \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq p} \left(\alpha_i \alpha_j \alpha_k \alpha_l (u_i u_j)(u_k u_l) + \alpha_i \alpha_j \alpha_k \alpha_l (u_i u_j)(u_k u_l) + \alpha_i \alpha_j \alpha_k \alpha_l (u_i u_j)(u_k u_l) \right) \\
& = -4 \sum_{1 \leq i < j \leq p} \alpha_i^2 \alpha_j^2 u_{\tau(i,j)} - 8 \sum_{1 \leq i < j < k \leq p} \left(\alpha_i^2 \alpha_j \alpha_k u_{\tau_1(i,j,k)} + \alpha_i \alpha_j^2 \alpha_k u_{\tau_2(i,j,k)} + \alpha_i \alpha_j \alpha_k^2 u_{\tau_3(i,j,k)} \right) \\
& +8 \sum_{1 \leq p < i < j < k < l \leq p} \left(\alpha_i \alpha_j \alpha_k \alpha_l u_{\sigma_1(i,j,k,l)} + u_{\sigma_2(i,j,k,l)} - (u_{\sigma_1(i,j,k,l)} + u_{\sigma_2(i,j,k,l)}) \right).
\end{aligned}$$

Segue então que $(\mathbf{A}, \omega)$ é Bernstein com $U_e = U$ e $V_e = V$. Como $U_e V_e + V_e^2 = \langle u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_{p+t} \rangle$, $U_e^2 = \langle v_1, v_2, \dots, v_s \rangle = V_e \neq 0$ e $U_e(U_e V_e) = 0$, então $\mathbf{A}$ é uma álgebra 1-excepcional do tipo $(1+r, s)$ e subtipo (t, s) . $\square$

No Exemplo 3.3 temos a álgebra de Bernstein do tipo $(1+44, 10)$ e subtipo $(40, 10)$, produzida pelo algoritmo do Lema 3.2 para a terna $(44, 10, 40)$.

Capítulo 4

Subtipos de álgebras 2-excepcionais

Prosseguimos neste capítulo com o estudo do problema proposto no capítulo anterior, trabalhando agora com as álgebras 2-excepcionais. Explicitamente, procuramos encontrar as condições a serem satisfeitas por uma quádrupla de inteiros não negativos (r, s, t, z) para que exista uma álgebra de Bernstein 2-excepcional do tipo $(1 + r, s)$ e subtipo (t, z) .

Uma solução para a subclasse toda mostrou-se bastante complexa. Assim o estudo é feito nas álgebras de Bernstein 2-excepcionais nas quais o P-monômio $U(U(U(UV)))$ é nulo. Como esse subespaço está contido em V , essa condição independe do idempotente, conforme Corolário 1.2. E, como veremos, ela é válida em todas as álgebras 2-excepcionais com dimensão de U menor ou igual a 5. Para essa subclasse calculamos limitantes superiores para as dimensões dos P-subespaços $UV + V^2$ e U^2 . Em alguns casos particulares encontramos as condições necessárias e suficientes para a existência da álgebra. Nestes casos, damos um algoritmo para gerar uma álgebra de Bernstein 2-excepcional.

Lembramos que uma álgebra de Bernstein $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ é dita 2-excepcional se $U(UV) \neq 0$ e $U((UV)V) = 0$. No Capítulo 2, vimos que para estas álgebras, $\dim U \geq 4$, $\dim V \geq 2$ e $\dim L \leq \dim U - 4$, propriedades essas que serão muito usadas neste capítulo.

Inicialmente vamos calcular os valores da máxima e mínima dimensão que o P-subespaço $UV + V^2$ pode atingir nestas álgebras.

4.1 O P-subespaço $UV + V^2$ nas 2-excepcionais

A cada P-subespaço $p(U_e, V_e)$ de uma álgebra de Bernstein $\mathbf{A} = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ está associado o P-subespaço $p(U_{\bar{e}}, V_{\bar{e}})$ em $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}/L$, a qual é Bernstein-Jordan. Pela Proposição 1.2, a dimensão de $p(U_{\bar{e}}, V_{\bar{e}})$ é invariante sob mudança do idempotente. Além disso, como $U_{\bar{e}} = \overline{U_e}$ e $V_{\bar{e}} = \overline{V_e}$, temos que $p(U_{\bar{e}}, V_{\bar{e}}) = p(\overline{U_e}, \overline{V_e}) = (p(U_e, V_e) + L)/L$. Em particular, se $p(U_e, V_e) = U_e V_e + V_e^2$, então $p(U_{\bar{e}}, V_{\bar{e}}) = p(\overline{U_e}, \overline{V_e}) = \overline{U_e V_e} + \overline{V_e^2} = \overline{U_e V_e}$, pois $\overline{V_e^2} = \bar{0}$, já que $\bar{\mathbf{A}}$ é Bernstein-Jordan.

Para uma base $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_t\}$ de $\overline{U_e V_e}$, o conjunto $\{u_1, u_2, \dots, u_t\}$, onde u_i é um representante da classe de equivalência $\bar{u}_i$, para $i = 1, 2, \dots, t$, é um subconjunto de U_e linearmente independente. Vamos denotar por $M_e(B(u_1, u_2, \dots, u_t))$ o subespaço de $\mathbf{A}$ gerado por esse conjunto, isto é, $M_e(B(u_1, u_2, \dots, u_t)) = \langle u_1, u_2, \dots, u_t \rangle$. Obviamente que $\dim M_e(B(u_1, u_2, \dots, u_t)) = t$, qualquer que seja a base B escolhida para $\overline{U_e V_e}$ e quaisquer que sejam os representantes u_i . Além disso, $\dim M_e(B(u_1, u_2, \dots, u_t)) = \dim \overline{U_e V_e}$, a qual independe do idempotente. Portanto a dimensão de $M_e(B(u_1, u_2, \dots, u_t))$ é um invariante numérico da álgebra.

Lema 4.1 *Se $\mathbf{A}$ é Bernstein, então para todo idempotente e de $\mathbf{A}$*

(i) $M_e(B(u_1, u_2, \dots, u_t)) \subseteq U_e V_e + L$;

(ii) $M_e(B(u_1, u_2, \dots, u_t)) \cap L = 0$;

para qualquer base B de $\overline{U_e V_e}$ e quaisquer que sejam os representantes $u_1, u_2, \dots, u_t$ escolhidos em B .

Demonstração:

Segue diretamente da construção de $M_e(B(u_1, u_2, \dots, u_t))$. □

Proposição 4.1 *Se $\mathbf{A}$ é Bernstein com grau de excepcionalidade $n \leq 2$, então para todo idempotente e de $\mathbf{A}$,*

(i) $\left(M_e(B(u_1, u_2, \dots, u_t)) \right)^2 = 0$;

(ii) $M_e(B(u_1, u_2, \dots, u_t)) \cap \left(M_e(B(u_1, u_2, \dots, u_t)) + L \right) V_e = 0$

para qualquer base B de $\overline{U_e V_e}$ e quaisquer que sejam os representantes $u_1, u_2, \dots, u_t$ escolhidos em B .

Demonstração:

Usando o Lema 4.1 e a Proposição 2.4 temos:

- (i) $\left(M_e(B(u_1, u_2, \dots, u_t))\right)^2 \subseteq (U_e V_e + L)^2 = (U_e V_e)^2 = 0;$
- (ii) Seja $x \in M_e(B(u_1, u_2, \dots, u_t)) \cap (M_e(B(u_1, u_2, \dots, u_t))V_e + LV_e)$. Então
 $x \in M_e(B(u_1, u_2, \dots, u_t))V_e + LV_e \subseteq (U_e V_e + L)V_e + L \subseteq (U_e V_e)V_e + L \subseteq L$. Assim
 $x \in M_e(B(u_1, u_2, \dots, u_t)) \cap L = 0$. □

Passaremos a denotar o subespaço $M_e(B(u_1, u_2, \dots, u_t))$ apenas por M , sem referências ao idempotente, à base e aos representantes u_i , uma vez que as propriedades desse subespaço que serão usadas independem desses elementos.

Proposição 4.2 *Se $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ é Bernstein 2-excepcional do tipo $(1+r, s)$, então $2 \leq \dim \overline{UV} \leq \dim \overline{U} - 2$.*

Demonstração:

Como $\mathbf{A}$ é 2-excepcional, $\dim \overline{UV} \geq 2$, conforme Corolário 2.3. Vamos considerar $\dim L = r - k$, com $4 \leq k \leq r$. Então $\dim \overline{U} = k$. Pelo Corolário 2.9, $\dim \overline{UV} \leq k - 1$. Suponha $\dim \overline{UV} = k - 1$ e sejam $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_{k-1}\}$ uma base de $\overline{UV}$ e $M = \langle u_1, u_2, \dots, u_{k-1} \rangle$, como definido anteriormente. Pela Proposição 4.1, $M^2 = 0$, então $u_1 M = 0 = u_1 L$. Como $u_1 \notin L$, pois $\bar{u}_1 \neq \bar{0}$, existe $u \in U$ tal que $u_1 u \neq 0$. E $\langle u \rangle \cap (M \oplus L) = 0$, pois se $\alpha \in \mathbf{F}$, $m \in M$ e $l \in L$ são tais que $\alpha u = m + l$, então $\alpha u_1 u = u_1 m + u_1 l = 0$. Como $u_1 u \neq 0$, segue que $\alpha = 0$. Então $U = \langle u \rangle \oplus M \oplus L$. Assim $M \subseteq UV + L = (\langle u \rangle + M + L)V + L \subseteq uV + L$. Logo existe $v \in V$, $l \in L$, tal que $u_1 = uv + l$. Consequentemente, $0 \neq uu_1 = u(uv) + ul = 0$, uma contradição. Portanto $2 \leq \dim \overline{UV} \leq k - 2$. □

Corolário 4.1 *Se $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ é uma álgebra de Bernstein 2-excepcional do tipo $(1+r, s)$, então $2 \leq \dim(UV + V^2) \leq r - 2$.*

Demonstração:

Pela proposição anterior temos $2 \leq \dim \overline{UV} = \dim(\overline{UV + V^2}) \leq \dim(UV + V^2) = \dim(\overline{UV + V^2}) + \dim((UV + V^2) \cap L) \leq \dim \overline{UV} + \dim L \leq r - 2$. □

A pergunta natural que surge é se ainda podemos melhorar o limitante superior dado no Corolário 4.1 ou se esse valor pode ser alcançado. Vamos mostrar, por construção, que existe álgebra de Bernstein 2-excepcional do tipo $(1 + r, s)$ e subtipo $(r - 2, z)$. Porém, isso impõe restrições no valor de z . É o que demonstraremos na próxima seção.

4.2 O P-subespaço U^2 nas 2-excepcionais

Nesta seção calcularemos um limitante superior para a dimensão do P-monômio U^2 nas Bernstein 2-excepcionais. Como já mencionamos, trabalharemos apenas nas álgebras em que o P-monômio $U(U(U(UV)))$ é nulo. Inicialmente veremos alguns resultados que serão usados na demonstração do teorema principal.

Proposição 4.3 *Se $0 \neq X \subseteq U$ é um subespaço arbitrário de uma álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U \oplus V$, então $\dim X^k \leq \dim X \cdot \dim \overline{X^{k-1}}$, para todo inteiro $k \geq 2$.*

Demonstração:

Suponha $\dim X = p \geq 1$. Se $X^{k-1} \cap L = 0$, isso é obviamente verdadeiro. Vamos assumir $\dim(X^{k-1} \cap L) = m_1 \geq 1$ e $\dim X^{k-1} = m_1 + m_2$, para algum inteiro $m_2 \geq 0$. Sejam $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ uma base de X , $\{w_1, w_2, \dots, w_{m_1}\}$ uma base de $X^{k-1} \cap L$ e $\{w_1, w_2, \dots, w_{m_1}, w_{m_1+1}, \dots, w_{m_1+m_2}\}$ sua extensão a uma base de X^{k-1} . Da observação (1.1) temos que $X^k = XX^{k-1} = \langle u_i w_j \mid 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m_1 + m_2 \rangle = \langle u_i w_j \mid 1 \leq i \leq p, m_1 + 1 \leq j \leq m_1 + m_2 \rangle$, pois $w_j \in L$, para todo $1 \leq j \leq m_1$. Portanto $\dim X^k \leq pm_2 = \dim X(\dim X^{k-1} - \dim(X^{k-1} \cap L)) = \dim X \cdot \dim \overline{X^{k-1}}$. $\square$

Proposição 4.4 *Sejam $A = Fe \oplus U \oplus V$ de Bernstein 2-excepcional, M' e M subespaços de A tais que $U = M' \oplus M \oplus L$ com $M \subseteq UV + L$. Então para quaisquer subespaços $W_1, W_2 \subseteq V$, se $M'(M'W_1) \cap M'(M'W_2) = 0$, tem-se $\overline{M'W_1} \cap \overline{M'W_2} = \overline{0}$.*

Demonstração:

Suponha que exista $\bar{0} \neq \bar{u} \in \overline{M'W_1} \cap \overline{M'W_2}$. Então $u \in (M'W_1 + L) \cap (M'W_2 + L) \subseteq (UV + L) \subseteq U$ e $u \notin L$. Logo existe $m' + m + l \in U$, com $m' \in M'$, $m \in M$, $l \in L$, tais que $0 \neq (m' + m + l)u = m'u$, pois $mu \in M(UV + L) = 0$ e $lu \in LU = 0$. Então

$0 \neq m'u \in M'(M'W_1) \cap M'(M'W_2)$. Um absurdo. $\square$

Dados inteiros não negativos k e p , com $p \geq 2$, $\mathfrak{W}(k, p) = \{(n_1, n_2, \dots, n_p) \in (\mathbb{Z}_+)^p \mid \sum_{i=1}^p n_i = k\}$ define-se a função $f_{k,p} : \mathfrak{W}(k, p) \rightarrow \mathbb{Z}$ por $f_{k,p}(n_1, n_2, \dots, n_p) = \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p \min(n_i, n_j)$. Usando essas notações temos o seguinte lema:

Lema 4.2 *Dados inteiros não negativos k e p , com $p \geq 2$, sejam q e r_1 os únicos inteiros tais que $k = pq + r_1$, com $0 \leq r_1 \leq p - 1$. Então*

$$\max\{f_{k,p}(n_1, n_2, \dots, n_p) \mid (n_1, n_2, \dots, n_p) \in \mathfrak{W}(k, p)\} = \frac{1}{2}[(p-1)(k-r_1) + r_1(r_1-1)].$$

E esse valor máximo ocorre se, e somente se, $n_i \in \{q, q+1\}$ para todo $i = 1, 2, \dots, p$.

Demonstração:

Inicialmente observamos que $n_i \in \{q, q+1\}$ para todo i , se e só se, $|n_i - n_j| < 2$, para todo $1 \leq i, j \leq p$. Assim vamos mostrar que se $(n_1, n_2, \dots, n_p) \in \mathfrak{W}(k, p)$ é ponto de máximo de $f_{k,p}$, então $|n_i - n_j| < 2$, para todo i, j . Suponha que isso não seja verdadeiro. Então existe $(n_1, n_2, \dots, n_p) \in \mathfrak{W}(k, p)$, ponto de máximo de $f_{k,p}$, com $|n_i - n_j| \geq 2$, para algum i, j . Podemos supor sem perda de generalidade que $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_p$. Neste caso $f_{k,p}$ pode ser mais facilmente escrita como

$$f_{k,p}(n_1, n_2, \dots, n_p) = (p-1)n_1 + (p-2)n_2 + \dots + n_{p-1} \quad (4.1)$$

e é claro que temos $|n_p - n_1| \geq 2$. Seja j o menor índice tal que $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_j < n_{j+1} \leq \dots \leq n_p$. Se $n_{j+1} - n_j \geq 2$, então $(n_1, n_2, \dots, n_j+1, n_{j+1}-1, \dots, n_p) \in \mathfrak{W}(k, p)$ e de (4.1) temos que $f(n_1, n_2, \dots, n_j+1, n_{j+1}-1, \dots, n_p) > f(n_1, n_2, \dots, n_j, n_{j+1}, \dots, n_p)$, contrariando a maximalidade de $(n_1, n_2, \dots, n_j, n_{j+1}, \dots, n_p)$. Se $n_{j+1} - n_j = 1$, então existe outro índice l , $j+1 \leq l \leq p-1$, tal que $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_j < n_{j+1} \leq \dots \leq n_l < n_{l+1} \leq \dots \leq n_p$, pois $|n_p - n_1| \geq 2$. Neste caso $(n_1, n_2, \dots, n_j+1, n_{j+1}, \dots, n_l, n_{l+1}-1, \dots, n_p) \in \mathfrak{W}(k, p)$ e $f_{k,p}(n_1, n_2, \dots, n_j+1, n_{j+1}, \dots, n_l, n_{l+1}-1, \dots, n_p) > f_{k,p}(n_1, n_2, \dots, n_j, n_{j+1}, \dots, n_l, \dots, n_p)$, outra contradição. E se $(n_1, n_2, \dots, n_p) \in \mathfrak{W}(k, p)$ é tal que $n_i \in \{q, q+1\}$, $\forall i$, então $n_1 = n_2 = \dots = n_{p-r_1} = q$ e $n_{p-r_1+1} = n_{p-r_1+2} = \dots = n_p = q+1$ e usando (4.1) segue que $f_{k,p}(n_1, n_2, \dots, n_p) = \frac{1}{2}[(p-1)(k-r_1) + r_1(r_1-1)]$. $\square$

Na Proposição 3.3 foi visto que se $M \subseteq U$ é um subespaço arbitrário de uma álgebra de Bernstein $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ do tipo $(1+r, s)$ com $\dim M = p$, então $\dim M^4 \leq \min\{s, \frac{1}{8}(p-2)(p-1)p(p+1)\}$. Como $M^4 \subseteq U^4 \subseteq U(UV)$, somente em álgebras com grau de excepcionalidade $n \geq 2$ podemos ter subespaços não nulos de U^4 . O Exemplo 4.1 mostra uma álgebra de Bernstein 2-excepcional na qual existe um subespaço $M \subseteq U$ com $\dim M^4 = \frac{1}{8}(p-2)(p-1)p(p+1)$. Convém observar que $\dim M^4$ alcança este valor somente quando $\dim M^3 = \frac{1}{3}p(p^2-1)$, o que por sua vez requer que $\dim M^2 = \frac{1}{2}p(p+1)$. Quando isso não acontece, $\dim M^4 < \frac{1}{8}(p-2)(p-1)p(p+1)$. E neste caso a determinação da máxima dimensão desse subespaço é bem mais complexa.

Dado $M \subseteq U$, um subespaço arbitrário de uma álgebra de Bernstein $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ do tipo $(1+r, s)$ com $\dim M = p$, vamos denotar por $\mu(p, m)$ o valor da máxima dimensão que pode ter o subespaço M^4 , quando $\dim M^3 = m$, para $0 \leq m \leq \min\{r-1, \frac{1}{3}p(p^2-1)\}$.

Lema 4.3 *Seja $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein 2-excepcional do tipo $(1+r, s)$ com $U(U(U(UV))) = 0$. Se $\dim \overline{UV} = r - (\dim L + p)$, para algum inteiro p , com $2 \leq p \leq r - (\dim L + 2)$, então $\dim U^2 \leq \max\{\min\{\frac{1}{2}[p(p+1) + (p-1)(\dim \overline{UV} - m) - r_1(p-r_1)] + \mu(p, m), s - \psi(\frac{\dim \overline{UV} - m}{p})\} \mid m \in \mathbf{Z}, \text{ com } \max\{0, \dim \overline{UV} - ps\} \leq m \leq \min\{\dim \overline{UV}, \frac{1}{3}p(p^2-1)\}\}$, onde r_1 é o resto da divisão de $(\dim \overline{UV} - m)$ por p .*

Demonstração:

Vamos supor $\mathbf{A}$ com $\dim L = r - k$, $4 \leq k \leq r$. Sejam $\{\bar{u}_{p+1}, \bar{u}_{p+2}, \dots, \bar{u}_k\}$ uma base de $\overline{UV}$ e $M = \langle u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_k \rangle$, onde u_i é um representante da classe de equivalência $\bar{u}_i$, para $i = p+1, p+2, \dots, k$. Como $M \cap L = 0$ e $M + L \subsetneq U$, então existem $u_1, u_2, \dots, u_p \in U$, linearmente independentes, tais que se $M' = \langle u_1, u_2, \dots, u_p \rangle$, então $U = M' \oplus M \oplus L$. Seja W um subespaço de V , tal que $V = U^2 \oplus W$. As dimensões de M' e W são invariantes sob mudança do idempotente, uma vez que U , L , M , V e U^2 são subespaços com essa propriedade. Usando os itens (i) do Lema 4.1 e das Proposições 4.1 e 2.4, temos $M \subseteq (M')^3 + M'(M'M) + M'W + L$ e $U^2 = (M')^2 + M'M \subseteq (M')^2 + (M')^4 + M'(M'(M'M)) + M'(M'W) = (M')^2 + (M')^4 + M'(M'W)$, pois $M'(M'(M'M)) \subseteq U(U(U(UV + L))) = U(U(U(UV))) = 0$. Então

$$\dim U^2 \leq \dim (M')^2 + \dim (M')^4 + \dim M'(M'W). \quad (4.2)$$

Para alcançar o limitante superior em (4.2) devemos ter $(M')^4 \cap M'(M'W) = (M')^2 \cap [(M')^4 + M'(M'W)] = 0$, e consequentemente, $\overline{(M')^3} \cap \overline{M'W} = \bar{0}$, conforme Proposição 4.4. Da Proposição 4.3, temos que $\dim(M')^4 \leq \dim M'(\dim(M')^3 - \dim((M')^3 \cap L))$. Consequentemente, $\dim(M')^4$ será maior nas álgebras em que $(M')^3 \cap L = 0$. Assim vamos considerar apenas o caso em que $\mathbf{A}$ é Bernstein com $\overline{(M')^3} \cap \overline{M'W} = \bar{0}$ e $\dim(M')^3 = \dim \overline{(M')^3}$. Dado $m = \dim(M')^3$, um inteiro fixado, vamos analisar o valor máximo que pode assumir cada uma das parcelas em (4.2):

- i) $\dim(M')^2 \leq \frac{1}{2}p(p+1)$, pela comutatividade de $\mathbf{A}$;
- ii) $\dim(M')^4 \leq \mu(p, m)$, por definição;
- iii) $M'(M'W) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p A_{ij}$, onde $A_{ij} = u_i(u_jW)$, para todo $1 \leq i, j \leq p$, conforme as observações (1.3) e (1.2). Da identidade (1.5), segue que $A_{ii} = 0$ e do item (iii) da Proposição 1.1, $A_{ij} = A_{ji}$, para todo $1 \leq i, j \leq p$. Então $M'(M'W) = \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p A_{ij}$ e $\dim M'(M'W) = \dim(\sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p A_{ij}) = \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p \dim A_{ij} - \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p \dim[A_{ij} \cap (\underbrace{\sum_{k=1}^{p-1} \sum_{l=k+1}^p A_{kl}}_{(i,j) < (k,l)})]$. Assim

$$\dim M'(M'W) \leq \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p \dim A_{ij} \quad (4.3)$$

E mais uma vez, só podemos ter a igualdade em (4.3) se $M'(M'W) = A_{12} \oplus A_{13} \oplus \dots \oplus A_{1p} \oplus A_{23} \oplus \dots \oplus A_{2p} \oplus \dots \oplus A_{(p-1)p}$. Isso implica que $\overline{M'W} = \overline{u_1W} \oplus \overline{u_2W} \oplus \dots \oplus \overline{u_pW}$. Pois supondo que essa última soma não seja direta, então existe um índice j , $2 \leq j \leq p$, tal que $(\overline{u_1W} + \overline{u_2W} + \dots + \overline{u_{j-1}W}) \cap \overline{u_jW} \neq \bar{0}$. Então existem $w_1, w_2, \dots, w_j \in W$, tais que $\overline{u_1w_1} + \overline{u_2w_2} + \dots + \overline{u_{j-1}w_{j-1}} = \overline{u_jw_j} \neq \bar{0}$. Isso implica na existência de pelo menos um inteiro k com $1 \leq k \leq p$ e $k \neq j$, tal que $0 \neq u_k(u_jw_j) = u_k(u_1w_1) + u_k(u_2w_2) + \dots + u_k(u_{j-1}w_{j-1})$. Segue daí que $[\sum_{i=1}^{p-1} \sum_{l=i+1}^p A_{il}] \cap A_{kj} \neq 0$, uma contradição.

Para cada $1 \leq i < j \leq p$, seja $n_i := \dim \overline{u_iW}$ e $n_{ij} = \dim(\overline{u_iW} \cap \overline{u_jW})$. Mostraremos que $\dim A_{ij} \leq n_j - n_{ji}$. Sejam $\{\bar{b}_{j1}, \bar{b}_{j2}, \dots, \bar{b}_{jn_{ji}}\}$ uma base de $\overline{u_jW} \cap \overline{u_iW}$ e $\{\bar{a}_{j1}, \bar{a}_{j2}, \dots, \bar{a}_{j(n_j - n_{ji})}, \bar{b}_{j1}, \bar{b}_{j2}, \dots, \bar{b}_{jn_{ji}}\}$ sua extensão a uma base de $\overline{u_jW}$. Como $\bar{b}_{jk} \in \overline{u_iW}$ para todo $1 \leq k \leq n_{ji}$, então existe $v_k \in V$, tal que $\bar{b}_{jk} = \overline{u_i v_k}$, logo $\overline{u_i \bar{b}_{jk}} = \overline{u_i(u_i v_k)} = \bar{0}$.

Assim $\overline{u_i(u_j W)} = \langle \overline{u_i a_{j1}}, \overline{u_i a_{j2}}, \dots, \overline{u_i a_{j(n_j - n_{ji})}} \rangle$ e $\dim(\overline{u_i(u_j W)}) \leq n_j - n_{ji}$. Como $u_i(u_j W) \subseteq V$, segue que $\dim(u_i(u_j W)) = \dim(\overline{u_i(u_j W)}) \leq n_j - n_{ji}$. Então $n_i - n_{ij} \geq \dim A_{ji} = \dim A_{ij} \leq n_j - n_{ji}$. Portanto $\dim M'(M'W) \leq \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p \min(n_i - n_{ij}, n_j - n_{ji}) \leq \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p \min(n_i, n_j)$. Como $UV = (M')^3 + M'(M'M) + M'W + (M + L)V$ e $(M + L)V + M'(M'M) \subseteq L$, segue que $\overline{UV} = \overline{(M')^3} + \overline{M'W}$. Pelas considerações anteriores, essa soma é direta, ou seja, $\overline{UV} = \overline{(M')^3} \oplus \overline{M'W} = \overline{(M')^3} \oplus \overline{u_1 W} \oplus \dots \oplus \overline{u_p W}$ e portanto $\dim \overline{UV} - \dim \overline{(M')^3} = \dim \overline{UV} - m = n_1 + n_2 + \dots + n_p$. Segue então que $\dim M'(M'W) \leq \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p \min(n_i, n_j)$, onde $(n_1, n_2, \dots, n_p) \in \mathfrak{W}(\dim \overline{UV} - m, p)$. Pelo Lema 4.2, $\dim M'(M'W) \leq \frac{1}{2}[(p-1)(\dim \overline{UV} - m - r_1) + r_1(r_1 - 1)]$, onde r_1 é o resto da divisão de $(\dim \overline{UV} - m)$ por p .

De (i), (ii) e (iii) segue $\dim U^2 \leq \frac{1}{2}[p(p+1) + (p-1)(\dim \overline{UV} - m) - r_1(p - r_1)] + \mu(p, m)$. Por outro lado, como $\dim \overline{UV} = \dim \overline{(M')^3} + \dim \overline{M'W} \leq \dim \overline{(M')^3} + \dim M'W \leq m + p(s - \dim U^2)$ e $\dim U^2$ é um inteiro não negativo, temos também $\dim U^2 \leq s - \psi(\frac{\dim \overline{UV} - m}{p})$. Então $\dim U^2 \leq \min\{\frac{1}{2}[p(p+1) + (p-1)(\dim \overline{UV} - m) - r_1(p - r_1)] + \mu(p, m), s - \psi(\frac{\dim \overline{UV} - m}{p})\}$. Pelo item (i) da Proposição 3.3 e os fatos de $\overline{(M')^3} \subseteq \overline{UV}$ e $\dim U^2 \geq 0$, podemos $\max\{0, \dim \overline{UV} - ps\} \leq m \leq \min\{\dim \overline{UV}, \frac{1}{3}p(p^2 - 1)\}$. Portanto, $\dim U^2 \leq \max\{\min\{\frac{1}{2}[p(p+1) + (p-1)(\dim \overline{UV} - m) - r_1(p - r_1)] + \mu(p, m), s - \psi(\frac{\dim \overline{UV} - m}{p})\} \mid m \in \mathbf{Z}, \text{ com } \max\{0, \dim \overline{UV} - ps\} \leq m \leq \min\{\dim \overline{UV}, \frac{1}{3}p(p^2 - 1)\}\}$. $\square$

Teorema 4.1 *Se $\mathbf{A}$ é Bernstein 2-excepcional do tipo $(1 + r, s)$ e subtipo (t, z) com $U(U(U(UV))) = 0$, então $z \leq \max\{\min\{\frac{1}{2}[(r-t)(r-t+1) + (r-t-1)(k-m) - r_1(r-t-r_1)] + \mu(r-t, m), s - \psi(\frac{k-m}{r-t})\} \mid k, m \in \mathbf{Z}, \text{ com } 2 \leq k \leq t, \max\{0, k - (r-t)s\} \leq m \leq \min\{k, \frac{1}{3}(r-t)((r-t)^2 - 1)\}\}$, onde r_1 é o resto da divisão de $(k-m)$ por $(r-t)$.*

Demonstração:

Sejam M' e M os subespaços de $\mathbf{A}$ descritos no Lema 4.3. Vamos considerar $p = \dim M'$, $k = \dim M = \dim \overline{UV}$ e $l = \dim L$. Como $\dim \overline{UV} = \dim(\overline{UV} + V^2) \leq \dim(UV + V^2) = t$, então $k \leq t$. Por outro lado, sendo $\mathbf{A}$ 2-excepcional, segue da Proposição 4.2 que $2 \leq \dim \overline{UV} \leq r - (l + 2)$. Logo para cada inteiro k fixado, com $2 \leq k \leq t$, podemos ter $t - k \leq l \leq r - (k + 2)$, já que também temos $t = \dim(UV + V^2) = \dim(\overline{UV} + V^2) + \dim((UV + V^2) \cap L) \leq \dim \overline{UV} + \dim L = k + l$. Como $r = p + k + l$,

isso implica que $2 \leq p \leq r - t$ e $k = r - (l + p)$. Para simplificar a notação vamos considerar as aplicações $F(p, k, m) = \frac{1}{2}[p(p+1) + (p-1)(k-m) - r_1(p-r_1)]$ e $G(p, k, m) = s - \psi(\frac{k-m}{p})$, onde r_1 é o resto da divisão de $k-m$ por p . Pelo Lema 4.3, para cada k fixado, tem-se $z \leq \max \{ \min \{ F(p, k, m) + \mu(p, m), G(p, k, m) \} \mid p, m \in \mathbb{Z}, \text{ com } 2 \leq p \leq r-t \text{ e } \max \{ 0, k-ps \} \leq m \leq \min \{ k, \frac{1}{3}p(p^2-1) \} \} = \max \{ \min \{ F(r-t, k, m) + \mu(r-t, m), G(r-t, k, m) \} \mid m \in \mathbb{Z}, \text{ com } \max \{ 0, k-(r-t)s \} \leq m \leq \min \{ k, \frac{1}{3}(r-t)((r-t)^2-1) \} \}$, pois $f(p) := F(p, k, m)$ e $g(p) := G(p, k, m)$ são funções não decrescentes em toda a reta real e $\mu(p, m) \leq \mu(p', m)$, para quaisquer inteiros $p \leq p'$ e m . Considerando agora as variações de k temos $z \leq \max \{ \min \{ \frac{1}{2}[(r-t)(r-t+1) + (r-t-1)(k-m) - r_1(r-t-r_1)] + \mu(r-t, m), s - \psi(\frac{k-m}{r-t}) \} \mid k, m \in \mathbb{Z}, \text{ com } 2 \leq k \leq t, \max \{ 0, k-(r-t)s \} \leq m \leq \min \{ k, \frac{1}{3}(r-t)((r-t)^2-1) \} \}$. $\square$

Dados inteiros r, s, t com $r \geq 4, s \geq 2$ e $2 \leq t \leq r-2$ vamos denotar por $\delta(r, s, t) = \max \{ \min \{ \frac{1}{2}[(r-t)(r-t+1) + (r-t-1)(k-m) - r_1(r-t-r_1)] + \mu(r-t, m), s - \psi(\frac{k-m}{r-t}) \} \mid k, m \in \mathbb{Z}, \text{ com } 2 \leq k \leq t, \max \{ 0, k-(r-t)s \} \leq m \leq \min \{ k, \frac{1}{3}(r-t)((r-t)^2-1) \} \}$.

Segue do Corolário 4.1 e do teorema anterior, o seguinte resultado:

Corolário 4.2 *Se A é uma álgebra de Bernstein 2-excepcional do tipo $(1+r, s)$ e subtipo (t, z) com $U(U(U(UV))) = 0$, então $r \geq 4, s \geq 2, 2 \leq t \leq r-2$ e $1 \leq z \leq \delta(r, s, t)$.*

A questão natural que surge aqui é saber se para toda quádrupla de inteiros (r, s, t, z) com $r \geq 4, s \geq 2, 2 \leq t \leq r-2$ e $1 \leq z \leq \delta(r, s, t)$, existe uma álgebra de Bernstein 2-excepcional do tipo $(1+r, s)$ e subtipo (t, z) . O principal obstáculo em responder a essa questão encontra-se na dificuldade em determinar os inteiros k e m para os quais obtem-se $\delta(r, s, t)$, isto em função da indefinição de $\mu(r-t, m)$. Posteriormente veremos um caso particular em que $\mu(r-t, m) = 0$, para qualquer m . Antes daremos um algoritmo para produzir álgebras de Bernstein 2-excepcionais para alguns tipos e subtipos.

Se $(r, s, t, z) \in (\mathbb{Z}_+)^4$ são tais que $r \geq 1, s \geq 1, z \leq \min \{ \frac{1}{2}(r-t)(r-t+1), s-1 \}$ então $\sqrt{1+8z} \leq \sqrt{4(r-t)(r-t+1)+1} = \sqrt{[2(r-t)+1]^2} = 2(r-t)+1$. Assim $\psi(R(z)) \leq \psi(r-t) = r-t$ e portanto $t \leq r - \psi(R(z))$ e pelo Lema 3.1, existe álgebra de

Bernstein do tipo $(1 + r, s)$ e subtipo (t, z) . Em vista disso, no algoritmo abaixo vamos considerar apenas quádruplas de inteiros (r, s, t, z) com $\frac{1}{2}(r - t)(r - t + 1) < z \leq s$.

Lema 4.4 (Algoritmo3) *Dados inteiros r, s, t, z, K, m, n , satisfazendo uma das condições abaixo:*

- i) $r \geq 4, s \geq 2, 2 \leq t \leq r - 2, 2 \leq K \leq t, m$ e n tais que $\max\{0, K - (r - t)s\} \leq m \leq \min\{K - 1, \frac{1}{3}(r - t)((r - t)^2 - 1)\}$ e $n = 0$ ou $K - (r - t)s \leq m = \frac{1}{3}(r - t)((r - t)^2 - 1) \leq K - 1$ e $0 \leq n \leq \mu(r - t, m), \frac{1}{2}(r - t)(r - t + 1) < z \leq \min\{\frac{1}{2}[(r - t)(r - t + 1) + (r - t - 1)(K - m) - r_1(r - t - r_1)] + n, s - \psi(\frac{K - m}{r - t})\}$, onde r_1 é o resto da divisão de $K - m$ por $r - t$;
 - ii) $t = K = m = \frac{1}{3}p'((p')^2 - 1)$, para algum inteiro $p' \geq 3, r = t + p', 0 \leq n \leq \mu(p', m)$ e $\frac{1}{2}p'(p' + 1) < z = s \leq \frac{1}{2}p'(p' + 1) + n$;
- o algoritmo a seguir gera uma álgebra de Bernstein 2-excepcional do tipo $(1 + r, s)$ e subtipo (t, z) .

Algoritmo:

Sejam $p = r - t, m_1 = \frac{1}{2}p(p + 1), q$ e r_1 , respectivamente o quociente e o resto da divisão de $K - m$ por p . As letras i, j, k e l , usadas a seguir, representam sempre valores inteiros. Considere $\mathbf{A}$ o espaço vetorial sobre $\mathbf{F}$ com uma base $\{e, u_1, u_2, \dots, u_r, v_1, v_2, \dots, v_s\}$. Em $\mathbf{A}$ define-se o seguinte produto comutativo:

- (1). $e^2 = e; \quad eu_i = \frac{1}{2}u_i; \quad ev_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r \quad e \quad j = 1, \dots, s);$
- (2). $u_i u_j = v_{\epsilon(i, j)}, \text{ se } 1 \leq i \leq j \leq p, \text{ onde } \epsilon(i, j) = \frac{1}{2}(2p - i)(i - 1) + j;$
- (3). $u_i^2 u_j = -2u_i(u_i u_j) = 2u_{\rho_1(i, j)};$
 $u_j^2 u_i = -2u_j(u_i u_j) = 2u_{\rho_2(i, j)};$
 $\text{se } 1 \leq i < j \leq p \text{ e } \rho_w(i, j) \leq p + m \text{ para } w = 1, 2, \text{ onde}$
 $\rho_w(i, j) = p + \sum_{x=1}^{i-1} [(p - x)(p - (x - 1))] + (w - 1)(p - i) + (j - i);$
- (4). $(u_i u_j) u_k = u_{\tau_1(i, j, k)};$
 $(u_j u_k) u_i = u_{\tau_2(i, j, k)};$
 $\text{se } 1 \leq i < j < k \leq p \text{ e } \tau_w(i, j, k) \leq p + m \text{ para } w = 1, 2, \text{ onde}$
 $\tau_w(i, j, k) = \lambda_1(i, j, k) + w \text{ e}$
 $\lambda_1(i, j, k) = p + \sum_{x=1}^{i-1} [(p - x)(p - (x - 1))] + 2(p - i) + (2p - (i + j))(j - i - 1) + 2(k - j) - 2;$
- (5). $(u_i u_k) u_j = -[(u_i u_j) u_k + (u_j u_k) u_i], \text{ se } 1 \leq i < j < k \leq p;$

- (6). $(u_i^2 u_j) u_k = -(u_i^2 u_k) u_j = 2(u_i u_j \cdot u_k) u_i = 2v_{\delta_1(i,j,k)}$;
 $(u_j^2 u_i) u_k = -(u_j^2 u_k) u_i = 2(u_i u_j \cdot u_k) u_j = -2(u_j u_k \cdot u_i) u_j = 2v_{\delta_2(i,j,k)}$;
 $(u_k^2 u_i) u_j = -(u_k^2 u_j) u_i = 2(u_i u_k \cdot u_j) u_k = -2(u_j u_k \cdot u_i) u_k = 2v_{\delta_3(i,j,k)}$;
se $1 \leq i < j < k \leq p$ e $\delta_w(i, j, k) \leq \min\{z, m_1 + n\}$ para $w = 1, 2, 3$, onde
 $\delta_w(i, j, k) = \lambda_2(i, j, k) + w$, e
 $\lambda_2(i, j, k) = m_1 + \sum_{x=1}^{i-1} \frac{3}{2}[(p-x)(p-(x+1))] + \frac{3}{2}(2p-(i+j))(j-i-1) + 3(k-j) - 3$;
- (7). $(u_i u_j \cdot u_k) u_l = -(u_i u_j \cdot u_l) u_k = v_{\gamma_1(i,j,k,l)}$;
 $(u_j u_k \cdot u_i) u_l = -(u_j u_k \cdot u_l) u_i = v_{\gamma_2(i,j,k,l)}$;
 $(u_k u_l \cdot u_i) u_j = -(u_k u_l \cdot u_j) u_i = v_{\gamma_3(i,j,k,l)}$;
se $1 \leq i < j < k < l \leq p$ e $\gamma_w(i, j, k, l) \leq \min\{z, m_1 + n\}$ para $w = 1, 2, 3$, onde
 $\gamma_w(i, j, k, l) = \lambda_3(i, j, k, l) + w$, e
 $\lambda_3(i, j, k, l) = m_1 + \frac{1}{2}p(p-1)(p-2) + \sum_{x=1}^{i-1} \frac{1}{2}[(p-x)(p-(x+1))(p-(x+2))] +$
 $\sum_{x=i+1}^{j-1} \frac{3}{2}[(p-x)(p-(x+1))] + 3(2p-(k+j))(k-j-1) + 3(l-k) - 3$;
- (8). $(u_i u_k \cdot u_l) u_j = (u_i u_j \cdot u_k) u_l + (u_j u_k \cdot u_i) u_l$;
 $(u_j u_l \cdot u_i) u_k = (u_j u_k \cdot u_l) u_i + (u_k u_l \cdot u_j) u_i$, se $1 \leq i < j < k < l \leq p$;
- (9). $u_i v_{z+j} = u_{p+m+(i-1)q+j}$, se $1 \leq i \leq p$ e $1 \leq j \leq q$;
- (10). $u_i v_{z+q+1} = u_{m+p(q+1)+i}$, se $1 \leq i \leq r_1$;
- (11). $u_i v_s = u_i$, se $p + K + 1 \leq i \leq p + t$;
- (12). $u_i u_{p+m+(j-1)q+k} = -u_j u_{p+m+(i-1)q+k} = v_{\sigma_1(i,j,k)}$;
se $1 \leq i < j \leq p$, $1 \leq k \leq q$ e $\sigma_1(i, j, k) \leq z$, onde
 $\sigma_1(i, j, k) = m_1 + n + [\frac{1}{2}(2p-i)(i-1) + (j-i-1)]q + k$;
- (13). $u_i u_{m+p(q+1)+j} = -u_j u_{m+p(q+1)+i} = v_{\sigma_2(i,j)}$;
se $1 \leq i < j \leq r_1$ e $\sigma_2(i, j) \leq z$, onde
 $\sigma_2(i, j) = m_1 + n + \frac{1}{2}p(p-1)q + \frac{1}{2}(2r_1-i)(i-1) + (j-i)$;
- (14). Demais produtos nulos.

Consideramos também a aplicação $\omega : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{F}$ dada por $\omega(e) = 1$ e $\omega(u_i) = \omega(v_j) = 0$, para $i = 1, 2, \dots, r$ e $j = 1, 2, \dots, s$.

Demonstração:

Vamos mostrar que a álgebra produzida pelo algoritmo é Bernstein 2-excepcional do tipo $(1 + r, s)$ e subtipo (t, z) . Para mostrar que $\mathbf{A}$ é uma álgebra de Bernstein

usaremos o Teorema 1.1. Considere $U = \langle u_1, u_2, \dots, u_r \rangle$ e $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_s \rangle$, então $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$. Como $m \leq K$ e $p + K \leq r$, podemos escrever $U = \langle u_1, u_2, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_{p+m}, \dots, u_{p+K}, \dots, u_r \rangle$. Pela comutatividade do produto segue que $U^2 = \langle u_i u_j \mid 1 \leq i \leq j \leq r \rangle = \langle u_i u_j \mid 1 \leq i \leq j \leq p \rangle + \langle u_i u_j \mid 1 \leq i \leq p, p+1 \leq j \leq p+m \rangle + \langle u_i u_j \mid 1 \leq i \leq p, p+m+1 \leq j \leq p+K \rangle + \langle u_i u_j \mid 1 \leq i \leq p, p+K+1 \leq j \leq r \rangle + \langle u_i u_j \mid p+1 \leq i \leq j \leq r \rangle$. De (3), (4) e (5) segue que $\langle u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_{p+m} \rangle = \langle u_i^2 u_j, u_j^2 u_i \mid 1 \leq i < j \leq p \rangle + \langle (u_i u_j) u_k, (u_j u_k) u_i \mid 1 \leq i < j < k \leq p \rangle$. Assim $U^2 = \langle u_i u_j \mid 1 \leq i \leq j \leq p \rangle + \langle (u_i^2 u_j) u_k, (u_j^2 u_i) u_k \mid 1 \leq i < j \leq p, 1 \leq k \leq p \rangle + \langle (u_i u_j \cdot u_k) u_l, (u_j u_k \cdot u_i) u_l \mid 1 \leq i < j < k \leq p, 1 \leq l \leq p \rangle + \langle u_i u_j \mid 1 \leq i \leq p, p+m+1 \leq j \leq p+K \rangle + \langle u_i u_j \mid 1 \leq i \leq p, p+K+1 \leq j \leq r \rangle + \langle u_i u_j \mid p+1 \leq i \leq j \leq r \rangle$. Usando agora os itens (2), (6), (7), (8), (12), (13) e (14) obtemos $U^2 = \langle v_1, v_2, \dots, v_{m_1}, v_{m_1+1}, \dots, v_{m_1+n}, v_{m_1+n+1}, \dots, v_z \rangle \subseteq V$. Seja $W = \langle v_{z+1}, v_{z+2}, \dots, v_s \rangle$, então $V = U^2 \oplus W$ e $UV = U^3 + UW$. De (3), (4) e (5) segue que $U^3 = \langle u_i^2 u_j, u_j^2 u_i \mid 1 \leq i < j \leq p \rangle + \langle (u_i u_j) u_k, (u_j u_k) u_i \mid 1 \leq i < j \leq p \rangle = \langle u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_{p+m} \rangle$ e de (9), (10) e (11) obtemos $UW = \langle u_i v_{z+j} \mid 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q \rangle + \langle u_i v_{z+q+1} \mid 1 \leq i \leq r_1 \rangle + \langle u_i v_s \mid p+K+1 \leq i \leq p+t \rangle = \langle u_{p+m+1}, u_{p+m+2}, \dots, u_{p+t} \rangle$. Logo $UV = \langle u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_{p+t} \rangle \subseteq U$. Além disso, tem-se $V^2 = 0$. Seja $x = \omega(x)e + u + v \in \mathbf{A}$, onde $u = \sum_{i=1}^r \alpha_i u_i$, $v = \sum_{j=1}^s \beta_j v_j$, com $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s \in \mathbf{F}$. Como o produto é comutativo por (1) segue que $x^2 = \omega(x)^2 e + (\omega(x)u + 2uv + v^2) + u^2$, com $\omega(x)u + 2uv + v^2 \in U + UV + V^2 = U$ e $u^2 \in U^2 \subseteq V$. Resta então mostrar que temos as identidades:

$$uv^2 = (u^2)^2 = u^3 = u(uv) = (uv)^2 = 0$$

para todo $u = \sum_{i=1}^r \alpha_i u_i \in U$ e $v = \sum_{j=1}^s \beta_j v_j \in V$.

i) $uv^2 \in UV^2 = 0$, já que $V^2 = 0$;

ii) $(u^2)^2 \in (U^2)^2 \subseteq V^2 = 0$;

iii) $u^3 = 0$:

Da comutatividade do produto temos $u^2 = \sum_{i=1}^r \alpha_i^2 u_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r \alpha_i \alpha_j u_i u_j$ e $u^3 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i^2 \alpha_j u_i^2 u_j + 2 \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r \sum_{k=1}^r \alpha_i \alpha_j \alpha_k (u_i u_j) u_k$. Considere um produto da forma $(u_i u_j) u_k$, com $1 \leq i, j, k \leq r$. Se i ou $j \geq p+1$, então o produto $u_i u_j$ está em $\langle v_{m_1+n+1}, v_{m_1+n+2}, \dots, v_z \rangle$, conforme itens (12) e (13). Observamos que se $z = s$, então $q = r_1 = 0$ e $K = t$. Assim $(u_i u_j) u_k = 0$, para todo k , pois por (9), (10) e (14), $u_k v_\sigma = 0$, para qualquer $\sigma \leq z \leq s$. Se $i, j \leq p$, então $u_i u_j \in \langle v_1, v_2, \dots, v_{m_1} \rangle$, conforme

(2) e neste caso se $k \geq p + 1$, então $(u_i u_j)u_k = 0$, pela mesma razão. Assim basta considerar $i, j, k \leq p$. Então

$$\begin{aligned}
u^3 &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \alpha_i^2 \alpha_j u_i^2 u_j + 2 \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p \sum_{k=1}^p \alpha_i \alpha_j \alpha_k (u_i u_j) u_k \\
&= \sum_{1 \leq i < j \leq p} \alpha_i^2 \alpha_j u_i^2 u_j + \sum_{i=1}^p \alpha_i^3 u_i^3 + \sum_{1 \leq i < j \leq p} \alpha_i \alpha_j^2 u_i u_j^2 + \\
&\quad 2 \left(\sum_{1 \leq i < j \leq p} \alpha_i^2 \alpha_j (u_i u_j) u_i + \sum_{1 \leq i < j \leq p} \alpha_i \alpha_j^2 (u_i u_j) u_j + \right. \\
&\quad \left. \sum_{1 \leq i < j < k \leq p} \alpha_i \alpha_j \alpha_k (u_j u_k) u_i + \sum_{1 \leq i < j < k \leq p} \alpha_i \alpha_j \alpha_k (u_i u_k) u_j + \sum_{1 \leq i < j < k \leq p} \alpha_i \alpha_j \alpha_k (u_i u_j) u_k \right).
\end{aligned}$$

Usando (3), (4), (5) e (14) obtemos:

$$\begin{aligned}
u^3 &= \sum_{1 \leq i < j \leq p} \left(2\alpha_i^2 \alpha_j u_{\rho_1(i,j)} + 2\alpha_i \alpha_j^2 u_{\rho_2(i,j)} + 2(-\alpha_i^2 \alpha_j u_{\rho_1(i,j)} - \alpha_i \alpha_j^2 u_{\rho_2(i,j)}) \right) + \\
&\quad \sum_{1 \leq i < j < k \leq p} 2\alpha_i \alpha_j \alpha_k \left(u_{\tau_2(i,j,k)} - (u_{\tau_1(i,j,k)} + u_{\tau_2(i,j,k)} + u_{\tau_1(i,j,k)}) \right) = 0.
\end{aligned}$$

iv) $u(uv) = 0$

Inicialmente calcularemos o produto uv . Vamos considerar $W_1 = \langle v_1, v_2, \dots, v_{m_1} \rangle$, $W_2 = \langle v_{m_1+1}, v_{m_1+2}, \dots, v_z \rangle$ e $W_3 = \langle v_{z+1}, v_{z+2}, \dots, v_s \rangle$. Então $V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ e assim $v = w_1 + w_2 + w_3$ com $w_i \in W_i$, para $i = 1, 2, 3$. Das regras do produto segue que $UW_2 = 0$, logo $uv = uw_1 + uw_3$. Por (2), $W_1 = \langle u_i u_j \mid 1 \leq i \leq j \leq p \rangle$, então existem $\beta_{ij} \in \mathbf{F}$ ($1 \leq i \leq j \leq p$) tais que $w_1 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=i}^p \beta_{ij} u_i u_j$ e assim

$$\begin{aligned}
uw_1 &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq p} \sum_{k=1}^r \alpha_k \beta_{ij} (u_i u_j) u_k = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^r \alpha_k \beta_{ii} u_i^2 u_k + \sum_{1 \leq i < j \leq p} \sum_{k=1}^p \alpha_k \beta_{ij} (u_i u_j) u_k \\
&= \sum_{1 \leq i < j \leq p} \left(\alpha_i \beta_{jj} u_i u_j^2 + \alpha_j \beta_{ii} u_i^2 u_j + \alpha_i \beta_{ij} (u_i u_j) u_i + \alpha_j \beta_{ij} (u_i u_j) u_j \right) + \\
&\quad \sum_{1 \leq i < j < k \leq p} \left(\alpha_i \beta_{jk} (u_j u_k) u_i + \alpha_j \beta_{ik} (u_i u_k) u_j + \alpha_k \beta_{ij} (u_i u_j) u_k \right).
\end{aligned}$$

Usando (3) e (5) obtemos:

$$\begin{aligned}
uw_1 = & \sum_{1 \leq i < j \leq p} \left((\alpha_i \beta_{jj} - \frac{1}{2} \alpha_j \beta_{ij}) u_i u_j^2 + (\alpha_j \beta_{ii} - \frac{1}{2} \alpha_i \beta_{ij}) u_i^2 u_j \right) + \\
& + \sum_{1 \leq i < j < k \leq p} \left((\alpha_i \beta_{jk} - \alpha_j \beta_{ik}) (u_j u_k) u_i + (\alpha_k \beta_{ij} - \alpha_j \beta_{ik}) (u_i u_j) u_k \right).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Como $z \leq s - \psi(\frac{K-m}{p})$, então $z+q \leq s$, assim $W_3 = \langle v_{z+1}, v_{z+2}, \dots, v_{z+q}, \dots, v_s \rangle$. Sejam $\lambda_{z+j} \in \mathbf{F}$ com $j = 1, 2, \dots, s-z$ tais que $w_3 = \sum_{j=1}^{s-z} \lambda_{z+j} v_{z+j}$. Então

$$\begin{aligned}
uw_3 = & \sum_{j=1}^{s-z} \lambda_{z+j} uv_{z+j} = \\
= & \sum_{j=1}^q \lambda_{z+j} uv_{z+j} + \lambda_{z+q+1} uv_{z+q+1} + \sum_{j=q+2}^{s-(z+1)} \lambda_{z+j} uv_{z+j} + \lambda_s uv_s.
\end{aligned}$$

Usando (9), (10) e (11), segue:

$$uw_3 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \alpha_i \lambda_{z+j} u_{p+m+(i-1)q+j} + \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i \lambda_{z+q+1} u_{m+p(q+1)+i} + \sum_{i=p+K+1}^{p+t} \alpha_i \lambda_s u_i. \tag{4.5}$$

Juntando (4.4) e (4.5) obtemos:

$$\begin{aligned}
uv = & \sum_{1 \leq i < j \leq p} \left((\alpha_i \beta_{jj} - \frac{1}{2} \alpha_j \beta_{ij}) u_i u_j^2 + (\alpha_j \beta_{ii} - \frac{1}{2} \alpha_i \beta_{ij}) u_i^2 u_j \right) \\
& + \sum_{1 \leq i < j < k \leq p} \left((\alpha_i \beta_{jk} - \alpha_j \beta_{ik}) (u_j u_k) u_i + (\alpha_k \beta_{ij} - \alpha_j \beta_{ik}) (u_i u_j) u_k \right) \\
& + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \alpha_i \lambda_{z+j} u_{p+m+(i-1)q+j} + \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i \lambda_{z+q+1} u_{m+p(q+1)+i} + \sum_{i=p+K+1}^{p+t} \alpha_i \lambda_s u_i.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Para determinar $u(uv)$ vamos calcular em separado o produto de u por cada uma das parcelas em (4.6).

$$1) \sum_{1 \leq i < j \leq p} (\alpha_i \beta_{jj} - \frac{1}{2} \alpha_j \beta_{ij}) (u_i u_j^2) u = \sum_{1 \leq i < j \leq p} \sum_{k=1}^r \alpha_k (\alpha_i \beta_{jj} - \frac{1}{2} \alpha_j \beta_{ij}) (u_i u_j^2) u_k$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{1 \leq i < j < k \leq p} \left(\alpha_i(\alpha_j \beta_{kk} - \frac{1}{2} \alpha_k \beta_{jk})(u_j u_k^2) u_i + \alpha_j(\alpha_i \beta_{kk} - \frac{1}{2} \alpha_k \beta_{ik})(u_i u_k^2) u_j \right. \\
&\quad \left. + \alpha_k(\alpha_i \beta_{jj} - \frac{1}{2} \alpha_j \beta_{ij})(u_i u_j^2) u_k \right) \\
&\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq p} \left((\alpha_i^2 \beta_{jj} - \frac{1}{2} \alpha_i \alpha_j \beta_{ij})(u_i u_j^2) u_i + (\alpha_i \alpha_j \beta_{jj} - \frac{1}{2} \alpha_j^2 \beta_{ij})(u_i u_j^2) u_j \right).
\end{aligned}$$

Usando os itens (6), (7), (8) e (14) obtemos:

$$\begin{aligned}
&\sum_{1 \leq i < j \leq p} (\alpha_i \beta_{jj} - \frac{1}{2} \alpha_j \beta_{ij})(u_i u_j^2) u = \\
&= \sum_{1 \leq i < j < k \leq p} \left(\alpha_i \alpha_k \beta_{jk} - \alpha_j \alpha_k \beta_{ik} \right) v_{\delta_3(i,j,k)} + (2 \alpha_i \alpha_k \beta_{jj} - \alpha_j \alpha_k \beta_{ij}) v_{\delta_2(i,j,k)};
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
2) \quad &\sum_{1 \leq i < j \leq p} (\alpha_j \beta_{ii} - \frac{1}{2} \alpha_i \beta_{ij})(u_i^2 u_j) u = \sum_{1 \leq i < j \leq p} \sum_{k=1}^r \alpha_k (\alpha_j \beta_{ii} - \frac{1}{2} \alpha_i \beta_{ij})(u_i^2 u_j) u_k \\
&= \sum_{1 \leq i < j < k \leq p} \left((\alpha_i \alpha_k \beta_{jj} - \frac{1}{2} \alpha_i \alpha_j \beta_{jk})(u_j^2 u_k) u_i + (\alpha_j \alpha_k \beta_{ii} - \frac{1}{2} \alpha_i \alpha_j \beta_{ik})(u_i^2 u_k) u_j \right. \\
&\quad \left. + (\alpha_j \alpha_k \beta_{ii} - \frac{1}{2} \alpha_i \alpha_k \beta_{ij})(u_i^2 u_j) u_k \right).
\end{aligned}$$

Usando (6), (7) e (8) obtemos:

$$\begin{aligned}
&\sum_{1 \leq i < j \leq p} (\alpha_j \beta_{ii} - \frac{1}{2} \alpha_i \beta_{ij})(u_i^2 u_j) u = \\
&\sum_{1 \leq i < j < k \leq p} \left((\alpha_i \alpha_j \beta_{jk} - 2 \alpha_i \alpha_k \beta_{jj}) v_{\delta_2(i,j,k)} + (\alpha_i \alpha_j \beta_{ik} - \alpha_i \alpha_k \beta_{ij}) v_{\delta_1(i,j,k)} \right);
\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}
3) \quad &\sum_{1 \leq i < j < k \leq p} (\alpha_i \beta_{jk} - \alpha_j \beta_{ik})(u_j u_k \cdot u_i) u = \sum_{1 \leq i < j < k \leq p} \sum_{l=1}^r \alpha_l (\alpha_i \beta_{jk} - \alpha_j \beta_{ik})(u_j u_k \cdot u_i) u_l \\
&= \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq p} \left(\alpha_i \alpha_j \beta_{kl} - \alpha_i \alpha_k \beta_{jl} \right) (u_k u_l \cdot u_j) u_i + (\alpha_i \alpha_j \beta_{kl} - \alpha_j \alpha_k \beta_{il}) (u_k u_l \cdot u_i) u_j \\
&\quad + (\alpha_i \alpha_k \beta_{jl} - \alpha_j \alpha_k \beta_{il}) (u_j u_l \cdot u_i) u_k + (\alpha_i \alpha_l \beta_{jk} - \alpha_j \alpha_l \beta_{ik}) (u_j u_k \cdot u_i) u_l
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq p} \left((\alpha_i \alpha_j \beta_{jk} - \alpha_j^2 \beta_{ik})(u_j u_k \cdot u_i) u_j + (\alpha_i \alpha_k \beta_{jk} - \alpha_k \alpha_j \beta_{ik})(u_j u_k \cdot u_i) u_k \right).$$

Usando agora (6), (7) e (8) temos:

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq i < j < k \leq p} (\alpha_i \beta_{jk} - \alpha_j \beta_{ik})(u_j u_k \cdot u_i) u \\ &= \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq p} \left(\alpha_k \alpha_j \beta_{il} - \alpha_i \alpha_k \beta_{jl} + \alpha_i \alpha_l \beta_{jk} - \alpha_j \alpha_l \beta_{ik} \right) v_{\gamma_2(i,j,k,l)} \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq p} \left((\alpha_j^2 \beta_{ik} - \alpha_i \alpha_j \beta_{jk}) v_{\delta_2(i,j,k)} + (\alpha_j \alpha_k \beta_{ik} - \alpha_i \alpha_k \beta_{jk}) v_{\delta_3(i,j,k)} \right); \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} 4) \quad & \sum_{1 \leq i < j < k \leq p} (\alpha_k \beta_{ij} - \alpha_j \beta_{ik})(u_i u_j \cdot u_k) u = \sum_{1 \leq i < j < k \leq p} \sum_{l=1}^r \alpha_l (\alpha_k \beta_{ij} - \alpha_j \beta_{ik})(u_i u_j \cdot u_k) u_l \\ &= \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq p} \left((\alpha_i \alpha_l \beta_{jk} - \alpha_k \alpha_i \beta_{jl})(u_j u_k \cdot u_l) u_i + (\alpha_j \alpha_l \beta_{ik} - \alpha_k \alpha_j \beta_{il})(u_i u_k \cdot u_l) u_j \right. \\ &+ (\alpha_k \alpha_l \beta_{ij} - \alpha_j \alpha_k \beta_{il})(u_i u_j \cdot u_l) u_k + (\alpha_k \alpha_l \beta_{ij} - \alpha_j \alpha_l \beta_{ik})(u_i u_j \cdot u_k) u_l \Big) \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq p} \left((\alpha_i \alpha_k \beta_{ij} - \alpha_i \alpha_j \beta_{ik})(u_i u_j \cdot u_k) u_i + (\alpha_j \alpha_k \beta_{ij} - \alpha_j^2 \beta_{ik})(u_i u_j \cdot u_k) u_j \right). \end{aligned}$$

Usando agora (6), (7), (8) e (14) temos:

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq i < j < k \leq p} (\alpha_k \beta_{ij} - \alpha_j \beta_{ik})(u_i u_j \cdot u_k) u = \\ &= \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq p} \left(\alpha_i \alpha_k \beta_{jl} + \alpha_j \alpha_l \beta_{ik} - \alpha_i \alpha_l \beta_{jk} - \alpha_j \alpha_k \beta_{il} \right) v_{\gamma_2(i,j,k,l)} \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq p} \left((\alpha_i \alpha_k \beta_{ij} - \alpha_i \alpha_j \beta_{ik}) v_{\delta_1(i,j,k)} + (\alpha_j \alpha_k \beta_{ij} - \alpha_j^2 \beta_{ik}) v_{\delta_2(i,j,k)} \right); \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} 5) \quad & \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \alpha_i \lambda_{z+j} u_{p+m+(i-1)q+j} u = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q \alpha_i \alpha_j \lambda_{z+k} u_i u_{p+m+(j-1)q+k} \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq p} \sum_{k=1}^q \left(\alpha_i \alpha_j \lambda_{z+k} u_i u_{p+m+(j-1)q+k} + \alpha_j \alpha_i \lambda_{z+k} u_j u_{p+m+(i-1)q+k} \right); \end{aligned}$$

Usando (12):

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \alpha_i \lambda_{z+j} u_{p+m+(i-1)q+j} u = \sum_{1 \leq i < j \leq p} \sum_{k=1}^q \alpha_i \alpha_j \lambda_{z+k} (v_{\sigma_1(i,j,k)} - v_{\sigma_1(i,j,k)}) = 0; \quad (4.11)$$

•

$$\begin{aligned} 6) \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i \lambda_{z+q+1} u_{m+p(q+1)+i} u &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{r_1} \alpha_i \alpha_j \lambda_{z+q+1} u_i u_{p+m+p(q+1)+j} \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq r_1} \left(\alpha_i \alpha_j \lambda_{z+q+1} u_i u_{p+m+p(q+1)+j} + \alpha_j \alpha_i \lambda_{z+q+1} u_j u_{m+p(q+1)+i} \right). \end{aligned}$$

Usando (13):

$$\sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i \lambda_{z+q+1} u_{m+p(q+1)+i} u = \sum_{1 \leq i < j \leq r_1} \alpha_i \alpha_j \lambda_{z+q+1} (v_{\sigma_s(i,j)} - v_{\sigma_2(i,j)}) = 0; \quad (4.12)$$

•

$$7) \sum_{i=p+K+1}^{p+t} \alpha_i \lambda_s u_i u = \sum_{j=1}^r \sum_{i=p+K+1}^{p+t} \alpha_i \alpha_j \lambda_s u_i u_j = 0, \quad (4.13)$$

•

pois em qualquer parcela no somatório acima temos $i \geq p + K + 1$ e pelas regras do produto $u_i u_j = 0$.

De (4.7) a (4.13) segue que $u(uv) = 0$.

$$v) (uv)^2 = 0$$

Já vimos que $UV = \langle u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_{p+t} \rangle$, então $(UV)^2 = \langle u_i u_j \mid p+1 \leq i \leq j \leq p+t \rangle = 0$, já que no algoritmo só temos produto $u_i u_j \neq 0$, para pelo menos um dos índices menor ou igual a p . Assim $(uv)^2 \in (UV)^2 = 0$.

Com isso mostramos que $(\mathbf{A}, \omega)$ é uma álgebra de Bernstein com $U_e = U$ e $V_e = V$. Como $U_e V_e + V_e^2 = U_e V_e = \langle u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_{p+t} \rangle$ e $U_e^2 = \langle v_1, v_2, \dots, v_z \rangle$, então $\mathbf{A}$ é do tipo $(1+r, s)$ e subtipo (t, z) . Além disso, $U_e(U_e V_e) = \langle u_i u_j \mid 1 \leq i \leq r, p+1 \leq j \leq p+t \rangle = \langle v_{m_1+1}, v_{m_1+2}, \dots, v_z \rangle \neq 0$, pois $z \geq m_1 + 1$. Se W_1 , W_2 e W_3 são os subespaços definidos anteriormente, então $(U_e V_e) V_e = (U_e V_e) W_1 + (U_e V_e) W_2 + (U_e V_e) W_3 = (U_e V_e) W_1 + (U_e V_e) W_3$. Por (3), (4), (5) e (14), $(U_e V_e) W_1 = \langle u_{p+i} v_j \mid 1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq m_1 \rangle = \langle (u_j u_k) u_{p+i} \mid 1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq k \leq p \rangle = 0$. Por (9), (10), (11)

e (14) segue que $(U_e V_e)W_2 = \langle u_{p+i}v_{z+j} \mid 1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq s - (z+1) \rangle + \langle u_{p+i}v_s \mid 1 \leq i \leq p+t \rangle = \langle u_i \mid p+K+1 \leq i \leq p+t \rangle$. Assim $U_e((U_e V_e)V_e) = \langle u_i u_j \mid 1 \leq i \leq r, p+K+1 \leq j \leq p+t \rangle = 0$. Logo $\mathbf{A}$ é 2-excepcional. $\square$

4.3 Álgebras 2-excepcionais nucleares

Suponha $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein 2-excepcional e nuclear do tipo $(1+r, s)$ e subtipo (t, z) e com $U(U(U(UV))) = U^6 = 0$. Sejam k' e m' os inteiros para os quais se obtém $\delta(r, s, t)$. Pelo Teorema 4.1, $s = \dim U^2 \leq \delta(r, s, t) = \min\{\frac{1}{2}[(r-t)(r-t+1) + (r-t-1)(k'-m') - r_1(r-t-r_1)] + \mu(r-t, m'), s - \psi(\frac{k'-m'}{r-t})\}$. Segue daí que $s \leq s - \psi(\frac{k'-m'}{r-t})$, consequentemente $k' = m'$ e $s \leq \frac{1}{2}[(r-t)(r-t+1) + (r-t-1)(k'-m') - r_1(r-t-r_1)] + \mu(r-t, m') = \frac{1}{2}(r-t)(r-t+1) + \mu(r-t, m) \leq \frac{1}{2}(r-t)(r-t+1) + \mu(r-t, m)$, onde $m = \min\{t, \frac{1}{3}(r-t)((r-t)^2 - 1)\}$. Temos assim o seguinte resultado:

Proposição 4.5 *Se $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ é Bernstein 2-excepcional do tipo $(1+r, s)$ e subtipo (t, s) com $U(U(U(UV))) = 0$, então $2 \leq t \leq r-2$ e $2 \leq s \leq \frac{1}{2}(r-t)(r-t+1) + \mu(r-t, m)$, onde $m = \min\{t, \frac{1}{3}(r-t)((r-t)^2 - 1)\}$.*

A seguir temos o exemplo de uma álgebra de Bernstein 2-excepcional e nuclear, na qual $\dim U^2$ atinge o limitante superior dado na proposição anterior. Ela é a álgebra produzida pelo algoritmo 3 para a quádrupla $(r, s, t, z) = (24, 25, 20, 25)$, tomando $K = m = 20$ e $n = 15$.

Exemplo 4.1 *Seja $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ a álgebra de Bernstein com $U = \langle u_1, u_2, \dots, u_{24} \rangle$, $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_{25} \rangle$ e tábuas de multiplicação do núcleo dada por:*

Tábua de U^2 :

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6		u_{20}	u_{21}	u_{22}	u_{23}	u_{24}
u_1	v_1	v_2	v_3	v_4				$-v_{16}$	$-v_{24}$	$-v_{25}$	$-v_{18}$	$-v_{19}$
u_2	v_2	v_5	v_6	v_7		$-v_{11}$			v_{20}		$-v_{21}$	$-v_{22}$
u_3	v_3	v_6	v_8	v_9	v_{11}			v_{22}	v_{21}	$-v_{21}$		
u_4	v_4	v_7	v_9	v_{10}	v_{14}	v_{17}				$-v_{22}$		
u_5			v_{11}	v_{14}								
u_6		$-v_{11}$		v_{17}								
u_7		$-v_{14}$	$-v_{17}$									
u_8			v_{12}	v_{15}								
u_9		v_{13}		v_{18}								
u_{10}		v_{16}	v_{19}									
u_{11}	v_{11}	v_{12}		v_{23}								
u_{12}		$-v_{12}$	$-v_{13}$	v_{24}								
u_{13}	v_{14}	v_{15}	$-v_{23}$									
u_{14}		$-v_{15}$	$-v_{24}$	$-v_{25}$	$-v_{16}$							
u_{15}	v_{17}	$v_{23} + v_{24}$	v_{18}									
u_{16}		v_{25}	$-v_{18}$	$-v_{19}$								
u_{17}	$-v_{12}$			v_{20}								
u_{18}	$-v_{15}$		$-v_{20}$									
u_{19}	$-v_{13}$			v_{21}								
u_{20}	$-v_{16}$		v_{22}									
u_{21}	$-v_{24}$	v_{20}	v_{21}									
u_{22}	$-v_{25}$		$-v_{21}$	$-v_{22}$								
u_{23}	$-v_{18}$	$-v_{21}$										
u_{24}	$-v_{19}$	$-v_{22}$										

Tábua de $UV + V^2$:

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	...	u_{24}	v_1	v_2	v_3	...	v_{25}
v_1		$2u_5$	$2u_6$	$2u_7$								
v_2	$-u_5$	$-u_8$	u_{11}	u_{13}								
v_3	$-u_6$	$-u_{11} - u_{12}$	$-u_9$	u_{15}								
v_4	$-u_7$	$-u_{13} - u_{14}$	$-u_{15} - u_{16}$	$-u_{10}$								
v_5	$2u_8$		$2u_{17}$	$2u_{18}$								
v_6	u_{12}	$-u_{17}$	$-u_{19}$	u_{21}								
v_7	u_{14}	$-u_{18}$	$-u_{21} - u_{22}$	$-u_{20}$								
v_8	$2u_9$	$2u_{19}$		$2u_{23}$								
v_9	u_{16}	u_{22}	$-u_{23}$	$-u_{24}$								
v_{10}	$2u_{10}$	$2u_{20}$	$2u_{24}$									
v_{11}												
...												
v_{25}												

Considere $M' = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$ e $M = \langle u_5, u_6, \dots, u_{24} \rangle$. Então $U = M' \oplus M$ e $U^2 = (M')^2 + M'M + M^2 = (M')^2 + M'M = \langle v_1, v_2, \dots, v_{25} \rangle = V$ e $UV + V^2 = UV = \langle u_5, u_6, \dots, u_{24} \rangle$. Além disso, $U(UV) = \langle u_i u_j \mid 1 \leq i \leq 24, 5 \leq j \leq 24 \rangle = \langle v_{11}, v_{12}, \dots, v_{25} \rangle$, $(UV)V = \langle u_i v_j \mid 5 \leq i \leq 24, 1 \leq j \leq 25 \rangle = 0$. Portanto A é 2-excepcional do tipo $(1 + 24, 25)$ e subtipo $(20, 25)$, logo nuclear. Observamos também que $(M')^4 = \langle v_{11}, v_{12}, \dots, v_{25} \rangle$, logo $\dim(M')^4$ atinge o teto dado no item (ii) da Proposição 3.3.

4.4 Casos particulares de álgebras 2-excepcionais

Nesta seção veremos um caso particular em que $\mu(r-t, m) = 0$, para qualquer inteiro m . Antes veremos casos de álgebras de Bernstein em que a condição $U(U(U(UV))) = 0$ sempre ocorre.

Lema 4.5 *Se $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ é uma álgebra de Bernstein 2-excepcional, então para quaisquer $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{2k}$, linearmente dependentes em U , $v \in V$, tem-se $u_1(u_2(u_3(\dots(u_{2k}v)))) = 0$, para todo inteiro $k \geq 1$.*

Demonstração:

Se $k = 1$, pela identidade (1.5), segue que o lema é válido em qualquer álgebra de Bernstein. Assim vamos assumir $k \geq 2$. Inicialmente vamos mostrar que sendo $\mathbf{A}$ 2-excepcional, então para todo inteiro $k \geq 2$, tem-se

$$u_1(u_2(\dots(u_j(u_{j+1}(\dots(u_{2k}v)))))) = -u_1(u_2(\dots(u_{j+1}(u_j(\dots(u_{2k}v)))))) \quad (4.14)$$

para qualquer $1 \leq j \leq 2k - 1$.

Se $k = 2$, segue da identidade (1.11) que $u_1(u_2(u_3(u_4v))) = -u_1(u_2(u_4(u_3v)))$ e $u_1(u_2(u_3(u_4v))) = -u_2(u_1(u_3(u_4v)))$, já que $u_3(u_4v) \in V$. E como $u_4v \in U$, segue de (1.9) que $u_1(u_2(u_3(u_4v))) = -u_1(u_3(u_2(u_4v))) - u_1((u_4v)(u_2u_3)) = -u_1(u_3(u_2(u_4v)))$, já que $u_1((u_4v)(u_2u_3)) \in U((UV)U^2) \subseteq U((UV)V) = 0$. Assim (4.14) é válida para $k = 2$. Vamos supor, por hipótese de indução, que essa identidade seja válida para um certo inteiro $k - 1 \geq 1$. Como $w = u_{2k-1}(u_{2k}v) \in V$, segue da hipótese de indução que para todo $1 \leq j \leq 2k - 3$, $u_1(u_2(\dots(u_j(u_{j+1}(\dots(u_{2k-2}(u_{2k-1}(u_{2k}v)))))))) = u_1(u_2(\dots(u_j(u_{j+1}(\dots(u_{2k-2}w)))))) = -u_1(u_2(\dots(u_{j+1}(u_j(\dots(u_{2k-2}w)))))) = -u_1(u_2(\dots(u_{j+1}(u_j(\dots(u_{2k-2}(u_{2k-1}(u_{2k}v))))))))$. Para $j = 2k - 2$, tem-se usando (1.9), $u_1(u_2(\dots(u_{2k-2}(u_{2k-1}(u_{2k}v)))) = -u_1(u_2(\dots(u_{2k-1}(u_{2k-2}(u_{2k}v)))) - u_1(u_2(\dots(u_{2k}v)(u_{2k-2}u_{2k-1}))) = -u_1(u_2(\dots(u_{2k-1}(u_{2k-2}(u_{2k}v))))$, já que $u_1(u_2(\dots(u_{2k}v)(u_{2k-2}u_{2k-1})))$ está no subespaço $U^{(2k-2)}((UV)U^2) = 0$. E finalmente, para $j = 2k - 1$, aplicamos a identidade (1.11). Além disso, usando (1.8), temos também para todo $k \geq 2$

$$u_1(\dots(u_{2k-3}(u_j(u_j(u_{2k}v)))))) = -\frac{1}{2}u_1(\dots(u_{2k-3}(u_j^2(u_{2k}v)))) = 0 \quad (4.15)$$

já que $U^{(2k-3)}((UV)U^2) \subseteq U^{(2k-4)}(U((UV)V)) = 0$. De (4.14) e (4.15) decorre que se $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{2k} \in U$ são linearmente dependentes, então $u_1(u_2(u_3(\dots(u_{2k}v)))) = 0$. $\square$

Corolário 4.3 *Sejam $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ Bernstein 2-excepcional do tipo $(1 + r, s)$, M' e M subespaços de $\mathbf{A}$ tais que $U = M' \oplus M \oplus L$ com $M \subseteq UV + L$. Se $U(U(U(UV))) \neq 0$, então $\dim M' \geq 4$.*

Demonstração:

Como $\mathbf{A}$ é 2-excepcional e $M \subseteq UV + L$, então $U(U(U(UV))) = M'(M'(M'(M'V)))$. Se $M'(M'(M'(M'V))) \neq 0$, então existem vetores $u_1, u_2, u_3, u_4 \in M'$ e $v \in V$ tais que $u_4(u_3(u_2(u_1v))) \neq 0$. Pelo Lema 4.5, $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ é linearmente independentes, logo $\dim M' \geq 4$. $\square$

Corolário 4.4 *Se $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ é Bernstein 2-excepcional do tipo $(1+r, s)$ com $U(U(U(UV))) \neq 0$, então $\dim U \geq 6$.*

Demonstração:

Sejam M' e M os subespaços de $\mathbf{A}$ descritos na demonstração do Lema 4.3. Então $U = M' \oplus M \oplus L$, com $M \subseteq UV + L$ e $\dim M = \dim \overline{UV} \geq 2$, conforme Proposição 4.2. Como $U(U(U(UV))) \neq 0$, do corolário anterior segue que $\dim U \geq 6$. $\square$

Proposição 4.6 *Se $\mathbf{A}$ é uma álgebra de Bernstein 2-excepcional do tipo $(1+r, s)$ e subtipo (t, z) com $r-3 \leq t \leq r-2$, então $1 \leq z \leq \delta(r, s, t)$.*

Demonstração:

Sejam M' e M os subespaços de $\mathbf{A}$ construídos na demonstração do Lema 4.3. Vamos considerar $\dim M' = p$, $\dim M = k$ e $\dim L = l$. Então $r = p+k+l$ e $l \geq t-k \geq r-3-k$, conforme visto na demonstração do Teorema 4.1, logo $p \leq 3$. Pelo Corolário 4.3, $U(U(U(UV))) = 0$ e assim $1 \leq z \leq \delta(r, s, t)$, segundo Corolário 4.2. $\square$

Proposição 4.7 *Seja $\mathbf{A}$ de Bernstein 2-excepcional do tipo $(1+r, s)$ e subtipo $(r-2, z)$, com $3 \leq z \leq s$. Então*

- (i) *Se $s < r+1$, então $z \leq \frac{1}{2}(s+3-r_1)$, onde r_1 é o resto da divisão de $(s-3)$ por 2;*
- (ii) *Se $s \geq r+1$, então $z \leq \frac{1}{2}(r+4-r_1)$, onde r_1 é o resto da divisão de $(r-2)$ por 2;*

Demonstração:

Sejam $t = r-2$ e $p = r-t = 2$. Pela Proposição 3.3, $\mu(2, m) = 0$, para qualquer valor de m . Usando a Proposição 4.6, tem-se $z \leq \max \{ \min \{ \frac{1}{2}[6 + (k-m) - r_1(2-r_1)] \}, s - \psi(\frac{k-m}{2}) \}$, $k-m \in \mathbf{Z}$, com $0 \leq (k-m) \leq \min \{ t, 2s \}$. Para simplificar a notação vamos considerar as funções reais X e Y , definidas por $X(x) = \frac{1}{2}[6 + x - r_1(2-r_1)]$ e

$Y(x) = s - \psi(\frac{x}{2})$, onde r_1 é o resto da divisão de x por 2. X é uma função crescente em toda a reta real, ao passo que Y é não crescente. Em vista disso temos:

(i) Se $s < r + 1$, então $0 \leq s - 3 < r - 2 = t$, assim $s - 3 \in [0, \min\{2s, t\}] \cap \mathbf{Z}$. Neste caso temos $X(k - m) \leq Y(k - m)$ para todo $0 \leq k - m \leq s - 3$ e $Y(k - m) < X(k - m)$, para todo $s - 2 \leq k - m \leq \min\{t, 2s\}$. Assim $z \leq \max\{\max\{\min\{X(k - m), Y(k - m)\} \mid k - m \in \mathbf{Z}, 0 \leq k - m \leq s - 3\}, \max\{\min\{X(k - m), Y(k - m)\} \mid k - m \in \mathbf{Z}, s - 2 \leq k - m \leq \min\{t, 2s\}\}\} = \max\{\max\{X(k - m) \mid k - m \in \mathbf{Z}, 0 \leq k - m \leq s - 3\}, \max\{Y(k - m) \mid k - m \in \mathbf{Z}, s - 2 \leq k - m \leq \min\{t, 2s\}\}\} = \max\{X(s - 3), Y(s - 2)\} = X(s - 3) = \frac{1}{2}(s + 3 - r_1)$, onde r_1 é o resto da divisão de $s - 3$ por 2;

(ii) Se $s \geq r + 1$, então $\min\{t, 2s\} = t = r - 2 \leq s - 3$. Logo $X(k - m) \leq Y(k - m)$, para todo $0 \leq k - m \leq t$ e como X é uma função crescente isso implica que $\max\{\min\{X(k - m), Y(k - m)\} \mid k - m \in \mathbf{Z}, 0 \leq k - m \leq t\} = \max\{X(k - m) \mid k - m \in \mathbf{Z}, 0 \leq k - m \leq t\} = X(t) = \frac{1}{2}(r + 4 - r_1)$, onde r_1 é o resto da divisão de $r - 2$ por 2. $\square$

Corolário 4.5 *Se A é uma álgebra de Bernstein 2-excepcional do tipo $(1 + r, s)$ e subtipo $(r - 2, s)$, então $2 \leq s \leq 3$.*

Demonstração:

Decorre diretamente das Proposições 4.5 e 4.7. $\square$

Proposição 4.8 *Para toda terna de inteiros (r, s, z) com $r \geq s \geq 5$, $3 < z \leq \frac{1}{2}(s + 3 - r_1)$, onde r_1 é o resto da divisão de $(s - 3)$ por 2, existe uma álgebra de Bernstein 2-excepcional do tipo $(1 + r, s)$ e subtipo $(r - 2, z)$.*

Demonstração:

Fazendo $t = r - 2$, $m = n = 0$ e $K = 2(z - 3)$ no algoritmo 3, obtemos uma álgebra de Bernstein 2-excepcional do tipo $(1 + r, s)$ e subtipo $(r - 2, z)$. $\square$

Proposição 4.9 *Para toda terna de inteiros (r, s, z) , com $4 \leq r \leq s - 1$ e $3 < z \leq \frac{1}{2}(r + 4 - r_1)$, onde r_1 é o resto da divisão de $(r - 2)$ por 2, existe uma álgebra de Bernstein 2-excepcional do tipo $(1 + r, s)$ e subtipo $(r - 2, z)$.*

Demonstração:

Fazendo a mesma atribuição de valores da proposição anterior obtemos a álgebra com as propriedades desejadas. $\square$

A seguir exibimos a álgebra de Bernstein produzida pelo algoritmo 3 para a quádrupla de inteiros $(r, s, t, z) = (12, 10, 10, 6)$, tomando $K = 6$ e $m = n = 0$.

Exemplo 4.2 *Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ a álgebra de Bernstein com $U = \langle u_1, u_2, \dots, u_{12} \rangle$, $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_{10} \rangle$, com tabela de multiplicação do núcleo dada a seguir:*

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	$\dots$	u_{12}	v_1	$\dots$	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	
u_1	v_1	v_2				v_4	v_5	v_6						u_3	u_4	u_5		
u_2	v_2	v_3	$-v_4$	$-v_5$	$-v_6$									u_6	u_7	u_8		
u_3		$-v_4$																
u_4		$-v_5$																
u_5		$-v_6$																
u_6	v_4																	
u_7	v_5																	
u_8	v_6																	
u_9																		u_9
u_{10}																		u_{10}
u_{11}																		u_{11}
u_{12}																		u_{12}
v_1																		
v_2																		
v_3																		
v_4																		
v_5																		
v_6																		
v_7	u_3	u_6																
v_8	u_4	u_7																
v_9	u_5	u_8																
v_{10}									$\dots$	u_{12}								

Temos $U^2 = \langle v_1, v_2, \dots, v_6 \rangle$, $UV + V^2 = \langle u_3, u_4, \dots, u_{12} \rangle$, $U(UV) = \langle v_4, v_5, v_6 \rangle$ e $U((UV)V) = 0$. Logo **A** é 2-excepcional do tipo $(1 + 12, 10)$ e subtipo $(10, 6)$. $\square$

Observamos que os inteiros (r, s, t, z) que devem ser fornecidos ao algoritmo 3 estão dentro das condições estabelecidas no Corolário 4.2. Em particular se os inteiros K , m e n , também fornecidos, coincidem com aqueles para os quais se obtém $\delta(r, s, t)$ então o Lema 4.4 garante serem as condições dadas naquele corolário também suficientes para

a existência da álgebra. Usaremos a proposição a seguir para dar um exemplo disso.

Proposição 4.10 *Seja $\mathbf{A}$ de Bernstein 2-excepcional do tipo $(1+r, s)$ e subtipo $(r-3, z)$. Se $z = s - 1$, então $s \leq 13$.*

Demonstração:

Sejam k' e m' inteiros para os quais obtem-se $\delta(r, s, t)$. Pela Proposição 4.6, $s - 1 = z \leq \delta(r, s, t) = \min\{\frac{1}{2}[12 + 2(k' - m') - r_1(3 - r_1)] + \mu(3, m'), s - \psi(\frac{k' - m'}{3})\}$. Então $s - 1 \leq s - \psi(\frac{k' - m'}{3})$, logo $k' - m' \leq 3$. Por outro lado, $s - 1 \leq \frac{1}{2}[18 - r_1(3 - r_1)] + \mu(3, m') \leq 12$, pois pela Proposição 3.3, $\mu(3, m') \leq 3$. Assim $s \leq 13$. $\square$

Exemplo 4.3 *Dado $(r, s, t) = (14, 13, 11)$ vamos determinar o valor de $\delta(r, s, t)$ bem como inteiros k e m para os quais obtem-se esse valor e posteriormente usar o algoritmo 3 para gerar a álgebra de Bernstein do tipo $(1 + 14, 13)$ e subtipo $(11, \delta(14, 13, 11))$.*

Por definição, $\delta(14, 13, 11) = \max\{\min\{X(k - m) + \mu(3, m), Y(k - m)\} \mid k - m \in \mathbb{Z}, \text{ com } 0 \leq k - m \leq 11\}$, onde $X(k - m) = \frac{1}{2}[12 + 2(k - m) - r_1(3 - r_1)]$ e $Y(k - m) = 13 - \psi(\frac{k - m}{3})$, sendo r_1 o resto da divisão de $k - m$ por 3. Então $\delta(14, 13, 11) = \max\{\min\{X(0) + \mu(3, m), Y(0)\}, \max\{\min\{X(k - m) + \mu(3, m), Y(k - m)\} \mid 1 \leq k - m \leq 2\}, \min\{X(3) + \mu(3, m), Y(3)\}, \max\{\min\{X(k - m) + \mu(3, m), Y(k - m)\} \mid 4 \leq k - m \leq 11\}\} = \max\{\min\{6 + \mu(3, m), 13\}, \max\{\min\{5 + (k - m) + \mu(3, m), 12\} \mid 1 \leq k - m \leq 2\}, \min\{9 + \mu(3, m), 12\}, \max\{\min\{X(k - m) + \mu(3, m), Y(k - m)\} \mid 4 \leq k - m \leq 11\}\}$. Como $\mu(3, m) \leq 3$, conforme Proposição 3.3 segue que $\delta(14, 13, 11) = \min\{9 + \mu(3, m), 12\} = 12$. E obtemos esse valor para $k - m = 3$. Em particular tomando $k = 11$, $m = 8$ e $n = 3$, obtemos $z = 12$. A seguir temos a álgebra de Bernstein 2-excepcional produzida pelo algoritmo 3 para a quádrupla $(14, 13, 11, 12)$.

Seja $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ de Bernstein com $U = \langle u_1, u_2, \dots, u_{14} \rangle$, $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_{13} \rangle$, com tábua de multiplicação do núcleo dada a seguir:

Tábua de U^2 :

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}
u_1	v_1	v_2	v_3					v_7		$-v_8$	$-v_9$		v_{10}	v_{11}
u_2	v_2	v_4	v_5		$-v_7$		v_9	v_8	$-v_8$			$-v_{10}$		v_{12}
u_3	v_3	v_5	v_6	v_7		v_8			$-v_9$			$-v_{11}$	$-v_{12}$	
u_4			v_7											
u_5		$-v_7$												
u_6			v_8											
u_7		v_9												
u_8	v_7	v_8												
u_9		$-v_8$	$-v_9$											
u_{10}	$-v_8$													
u_{11}	$-v_9$													
u_{12}		$-v_{10}$	$-v_{11}$											
u_{13}	v_{10}		$-v_{12}$											
u_{14}	v_{11}	v_{12}												

Tábua de $UV + V^2$:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}	v_{13}
u_1		$-u_4$	$-u_5$	$2u_6$	u_9	$2u_7$							u_{12}
u_2	$2u_4$	$-u_6$	$-u_8 - u_9$		$-u_{10}$	$2u_{11}$							u_{13}
u_3	$2u_5$	u_8	$-u_7$	$2u_{10}$	$-u_{11}$								u_{14}
u_4													
...													
u_{14}													
v_1													
v_2													
v_3													
...													
v_{11}													
v_{12}													
v_{13}													

4.5 Álgebras 3-excepcionais

Lembramos que uma álgebra de Bernstein $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ é dita 3-excepcional se $U((UV)V) \neq 0$ e $U(((UV)V)V) = 0$. Estas álgebras têm $\dim U \geq 8$, $\dim V \geq 3$ e portanto $\dim \mathbf{A} \geq 12$ e $\dim L \leq \dim U - 8$, conforme Proposição 2.3 e Corolário 2.5.

O cálculo de um limitante superior para a dimensão do P-monômio U^2 nas álgebras 3-excepcionais é ainda mais complexo do que nas 2-excepcionais. Nesta seção, encerramos o presente capítulo, calculando os valores máximos e mínimos que pode assumir a dimensão do P-subespaço $UV + V^2$ nas álgebras de Bernstein 3-excepcionais.

Proposição 4.11 *Se $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ é uma álgebra de Bernstein 3-excepcional do tipo $(1 + r, s)$, então $6 \leq \dim(UV + V^2) \leq r - 2$.*

Demonstração:

Do Corolário 2.5, segue que $6 \leq \dim \overline{UV} = \dim(\overline{UV + V^2}) \leq \dim(UV + V^2)$. Como $\mathbf{A}$ é 3-excepcional, $U(UV^{(2)}) \neq 0$. Logo existem $u_1, u_2 \in U$, $v_1, v_2 \in V$, tais que

$$0 \neq u_1((u_2v_1)v_2) = -(u_2v_1)(u_1v_2) = u_2((u_1v_2)v_1).$$

Da identidade (1.13), segue que $\{u_1, u_2\}$ é linearmente independente. Mostraremos que o subespaço gerado por esse conjunto é disjunto de $UV + V^2$ e portanto $\dim(UV + V^2) \leq r - 2$. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ tais que $\alpha u_1 + \beta u_2 \in UV + V^2$. Então existem $u \in U$, $w_1, w_2 \in V$ tais que

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = uw_1 + w_2^2. \quad (4.16)$$

Multiplicando (4.16) por $(u_2v_1)v_2$, obtem-se $\alpha u_1((u_2v_1)v_2) + \beta u_2((u_2v_1)v_2) = uw_1((u_2v_1)v_2) + w_2^2((u_2v_1)v_2)$. Por (1.11) e (1.13), $u_2((u_2v_1)v_2) = -(u_2v_1)(u_2v_2) = 0$, $uw_1((u_2v_1)v_2) \in (UV)(UV^{(2)}) = 0$, conforme Proposição 2.4 e $w_2^2((u_2v_1)v_2) \in UV^2 = 0$, conforme item (iii) do Lema 1.1. Como $u_1((u_2v_1)v_2) \neq 0$, segue que $\alpha = 0$. Multiplicando agora (4.16) por $(u_1v_2)v_1$, temos $\beta u_2((u_1v_2)v_1) = uw_1((u_1v_2)v_1) + w_2^2((u_1v_2)v_1) \in (UV)(UV^{(2)}) + UV^2 = 0$, consequentemente $\beta = 0$.

□

Usando os Corolários 3.1 e 4.1, a Proposição 4.11 e a álgebra dada no Exemplo 2.3, podemos enunciar o seguinte resultado:

Proposição 4.12 *Se A é uma álgebra de Bernstein n -excepcional do tipo $(1 + r, s)$ e subtipo $(r - 1, z)$ com $z \geq 2$, então $n \geq 4$.*

Demonstração:

Como $z \geq 2$, então $n \geq 1$. Pelos Corolários 3.1 e 4.1 e a Proposição 4.11, temos $\dim(UV + V^2) \leq r - 2$, se $1 \leq n \leq 3$. Assim $n \geq 4$ e o Exemplo 2.3 mostra a existência de álgebra de Bernstein 4-excepcional do tipo $(1 + r, s)$ e subtipo $(r - 1, z)$. $\square$

Capítulo 5

Variações no P-subespaço UV

Conforme foi visto em [11], a grande maioria dos P-subespaços de uma álgebra de Bernstein tem um comportamento “irregular” com a mudança do idempotente. Alguns variam mas preservam sua dimensão, como é o caso de U , V , $UV + V^2$ e U^2 . Há porém aqueles cuja dimensão também varia, a exemplo de UV , V^2 , U^3 , U^2V e $(UV)V$. A teoria de álgebras de Bernstein já avançou no que diz respeito ao conhecimento dos P-subespaços de dimensão invariante (resp. invariantes). Porém pouco se sabe sobre o comportamento dos P-subespaços que não são invariantes. Neste capítulo estudaremos as variações ocorridas no P-monômio UV com a mudança do idempotente em álgebras de Bernstein excepcionais e 1-excepcionais. A questão central deste capítulo é encontrar um limitante superior para a variação ocorrida na dimensão de UV , sob mudança do idempotente, em uma álgebra de Bernstein do tipo $(1 + r, s)$, subtipo (t, z) e com grau de excepcionalidade $n \leq 1$.

5.1 O invariante numérico $\Omega(p)$

Dado um P-subespaço p de uma álgebra de Bernstein $\mathbf{A}$, denotaremos por $\alpha_p = \sup\{\dim p_e \mid e \in Ip(\mathbf{A})\}$ e $\beta_p = \inf\{\dim p_e \mid e \in Ip(\mathbf{A})\}$. E introduzimos o inteiro não negativo

$$\Omega(p) = \alpha_p - \beta_p.$$

Para cada P-subespaço p de uma álgebra de Bernstein $\mathbf{A}$, $\Omega(p)$ é um invariante

numérico da álgebra e mede a variação máxima ocorrida na dimensão desse P-subespaço quando o idempotente percorre $Ip(A)$. Para uma álgebra de Bernstein A do tipo $(1+r, s)$ e subtipo (t, z) procuraremos calcular um limitante superior para $\Omega(UV)$. O estudo será conduzido nas álgebras excepcionais e 1-excepcionais, pois este foi o melhor resultado encontrado.

Como consequência da Proposição 1.2, o valor de $\Omega(p)$ depende do modo como o P-subespaço p interage com L quando se dá a mudança do idempotente. Consequentemente a dimensão de L é um limitante superior para $\Omega(p)$, qualquer que seja p .

Proposição 5.1 *Se A é Bernstein, então $\Omega(p) \leq \dim L$, para qualquer P-subespaço p de A .*

Demonstração:

Sejam e, f idempotentes de A tais que $\dim p_e = \beta_p$ e $\dim p_f = \alpha_p$. Se $p_f \subseteq L$, então $\Omega(p) = \alpha_p - \beta_p \leq \alpha_p \leq \dim L$. E se $p_f \not\subseteq L$, então $\overline{p_e} \neq \bar{0}$, $\forall e$, conforme Proposição 2.1. Como A/L é Bernstein-Jordan, usando a Proposição 1.2, temos $\dim \overline{p_e} = \dim p_{\bar{e}} = \dim p_{\bar{f}} = \dim \overline{p_f}$. Assim $\alpha_p - \beta_p = \dim p_f \cap L - \dim p_e \cap L \leq \dim p_f \cap L \leq \dim L$. Portanto $\Omega(p) \leq \dim L$. $\square$

Corolário 5.1 *Se A é Bernstein do tipo $(1+r, s)$ com grau de excepcionalidade $n \geq 1$, então $\Omega(p) \leq r-1$, para qualquer P-subespaço p de A .*

A Proposição 5.1 afirma tão somente que $\Omega(p)$ não pode ultrapassar a dimensão de L . Fica claro porém na demonstração que, dependendo de p , $\dim L$ pode ser uma estimativa muito alta para $\Omega(p)$. Por exemplo, se p é um P-subespaço tal que $p \subseteq V$, então $\Omega(p) \leq p_f \cap L = 0$, independente de quão grande seja $\dim L$. Nas próximas seções tentaremos melhorar esta estimativa para $p = UV$.

5.2 O P-monômio UV nas álgebras excepcionais

Sejam $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein do tipo $(1+r, s)$ e $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}, \{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ bases de U_e e V_e , respectivamente. Se $f = e + u_0 + u_0^2$ é outro idempotente de A com $u_0 \in U_e$, então por (1.21):

$$U_f = \langle \sigma_{u_0}(u_i) \mid 1 \leq i \leq r \rangle \quad (5.1)$$

$$V_f = \langle \tau_{u_0}(v_j) \mid 1 \leq j \leq s \rangle. \quad (5.2)$$

Usando a obs. (1.1), as identidades (1.11), (1.17) e o item (iii) do Lema 1.1, obtemos:

$$U_f V_f = \langle u_i v_j + 2u_0(u_i v_j) + 2u_0^2(u_i v_j) + 2(u_0 u_i) v_j \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s \rangle \quad (5.3)$$

Proposição 5.2 *Sejam $e, f = e + u_0 + u_0^2$ ($u_0 \in U_e$), idempotentes de uma álgebra de Bernstein $\mathbf{A}$. Se $u_0 \in L$, então $U_e V_e^{(k)} = U_f V_f^{(k)}$, para todo inteiro $k \geq 0$. Em particular, se $\mathbf{A}$ é excepcional, então $U_e V_e^{(k)} = U_f V_f^{(k)}$, para todo inteiro $k \geq 0$ e para quaisquer $e, f \in Ip(\mathbf{A})$.*

Demonstração:

Vamos demonstrar usando indução em k . Se $k = 0$ isso é imediato por (5.1). Suponha que a propriedade seja verdadeira para um certo inteiro $k \geq 0$. Usando (5.2), a obs. (1.2) e o item (iii) da Proposição 1.1, tem-se:

$$\begin{aligned} U_f V_f^{(k+1)} &= (U_f V_f^{(k)}) V_f = (U_e V_e^{(k)}) V_f \subseteq (U_e V_e^{(k)}) (V_e + u_0 V_e) = U_e V_e^{(k+1)} + (U_e V_e^{(k)}) (u_0 V_e) \\ &= U_e V_e^{(k+1)} + u_0 (U_e V_e^{(k+1)}) = U_e V_e^{(k+1)}. \end{aligned}$$

Como $e = f - u_0$, de modo análogo temos a outra inclusão. Portanto $U_e V_e^{(k+1)} = U_f V_f^{(k+1)}$. $\square$

Corolário 5.2 *Em uma álgebra de Bernstein $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$, o P -subespaço U é invariante se, e somente se, $\mathbf{A}$ é excepcional.*

Demonstração:

Se U é invariante, pelo Corolário 1.4, $U^2 = 0$. A recíproca corresponde à Proposição 5.2 para $k = 0$. $\square$

A Proposição 5.2, combinada com a Proposição 1.5, nos dá o seguinte corolário:

Corolário 5.3 *Em toda álgebra de Bernstein a identidade $UV = U$ é um invariante da álgebra, isto é, independe do idempotente escolhido na álgebra.*

Corolário 5.4 *Se $\mathbf{A}$ é Bernstein excepcional então $\Omega(UV) = 0$.*

Corolário 5.5 *Se $\mathbf{A}$ é Bernstein do tipo $(1 + r, s)$ com $r \geq 1$, então $\Omega(UV) \leq r - 1$.*

Demonstração:

Segue dos Corolários 5.1 e 5.4. □

Para toda quádrupla de inteiros não negativos (r, s, t, z) com $r, s \geq 1$, $0 \leq t \leq r$ e $z = 0$, vimos que existe uma álgebra de Bernstein do tipo $(1+r, s)$ e subtipo $(t, 0)$, portanto excepcional, logo com $\Omega(UV) = 0$. Podemos assim enunciar o seguinte teorema:

Teorema 5.1 *Dados inteiros não negativos (r, s, t, z, w) com $r, s \geq 1$, existe uma álgebra de Bernstein excepcional do tipo $(1+r, s)$ e subtipo (t, z) com $\Omega(UV) = w$ se, e somente se, $0 \leq t \leq r$ e $z = w = 0$.*

5.3 Álgebras com o P-monômio UV invariante

Nesta seção caracterizamos as álgebras em que o P-monômio UV é invariante sob mudança do idempotente e consequentemente, $\Omega(UV)$ é nulo.

Teorema 5.2 *Em uma álgebra de Bernstein A o P-monômio UV é invariante se, e somente se, o grau de excepcionalidade de A é menor ou igual a um e $U_e^2 V_e \subseteq U_e V_e$, para todo $e \in Ip(A)$.*

Demonstração:

Seja n o grau de excepcionalidade de A . Se UV é invariante, segue do Corolário 1.4 que $U_e(U_e V_e) = 0$, para todo idempotente e , portanto $n \leq 1$. Além disso, para todo $u_0, u \in U_e$, $v \in V_e$, temos $uv + 2u_0(uv) + 2u_0^2(uv) + 2(u_0u)v = uv + 2u_0^2(uv) + 2(u_0u)v \in U_f V_f = U_e V_e$, onde $f = e + u_0 + u_0^2$. Logo existe $w \in U_e V_e$, tal que $uv + 2u_0^2(uv) + 2(u_0u)v = w$ e assim $(u_0u)v = \frac{1}{2}[w - uv - 2u_0^2(uv)] \in U_e V_e + U_e^2(U_e V_e) = U_e V_e$. Portanto $U_e^2 V_e \subseteq U_e V_e$. Suponha agora $n \leq 1$ e $U_e^2 V_e \subseteq U_e V_e$, para todo idempotente e . Sejam $e, f = e + u_0 + u_0^2$ idempotentes de A , com $u_0 \in U_e$. Por (5.3), $U_f V_f \subseteq U_e V_e + U_e(U_e V_e) + U_e^2(U_e V_e) + U_e^2 V_e = U_e V_e$. Como essa inclusão vale para todo par de idempotentes, segue a igualdade. □

O Teorema 5.2 exige que a inclusão $U_e^2 V_e \subseteq U_e V_e$ seja válida para todos os idempotentes da álgebra. Em geral essa condição pode não ser verdadeira, como mostra o exemplo a seguir:

Exemplo 5.1 Seja $\mathbf{A} = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ a álgebra de Bernstein com $U_e = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, $V_e = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ e tábua de multiplicação do núcleo dada por:

	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	v_3
u_1	v_1				$2u_2$	
u_2						u_3
u_3						
v_1					$-u_2$	u_3
v_2	$2u_2$			$-u_2$		
v_3		u_3		u_3		

Nesta álgebra, $U_e(U_e V_e) = 0$ e $U_e^2 V_e = \langle u_2, u_3 \rangle = U_e V_e$. Porém tomando $f = e + u_1 + u_1^2$, temos $U_f^2 V_f = \langle u_2, u_3 \rangle \not\subseteq U_f V_f = \langle u_3 \rangle$.

Corolário 5.6 Se $\mathbf{A}$ é Bernstein na qual o P -subespaço $UV^{(k)}$ é invariante para algum inteiro $k \geq 0$, então $UV^{(k+1)}$ também é invariante. Em particular se UV é invariante, todos os P -subespaços da cadeia $UV \supseteq (UV)V \supseteq \dots \supseteq UV^{(k)} \supseteq UV^{(k+1)} \supseteq \dots$ são invariantes.

Demonstração:

Sejam $e, f = e + u_0 + u_0^2$ idempotentes de $\mathbf{A}$, com $u_0 \in U_e$, e suponha $UV^{(k)}$ invariante para algum inteiro $k \geq 0$. Como $U_e V_e^{(k)} \subseteq U_e, \forall k \geq 0$, segue do Corolário 1.4 que $U_e(U_e V_e^{(k)}) = 0$. Assim, $U_f V_f^{(k+1)} = (U_f V_f^{(k)})V_f = (U_e V_e^{(k)})V_f \subseteq (U_e V_e^{(k)})(V_e + U_e) = U_e V_e^{(k+1)} + U_e(U_e V_e^{(k)}) = U_e V_e^{(k+1)}$. De modo análogo temos a outra inclusão. $\square$

Pelo Teorema 5.2, se $\mathbf{A}$ é uma álgebra normal ou excepcional, então UV é invariante. Esse fato, combinado com a Proposição 1.4 produz o seguinte corolário:

Corolário 5.7 Se $\mathbf{A}$ é Bernstein com UV não invariante então $\dim \mathbf{A} \geq 5$.

5.4 Idempotentes minimais e maximais

Definição 5.1 Seja p um P -subespaço de uma álgebra de Bernstein $\mathbf{A}$. Um elemento $e \in Ip(\mathbf{A})$ é dito p -minimal se $\dim p_e = \beta_p$ e p -maximal se $\dim p_e = \alpha_p$, onde α_p e β_p

foram definidos no início deste capítulo.

Denotaremos por $Ip_{\beta_p}(A)$ o conjunto dos idempotentes p -minimais de $\mathbf{A}$ e por $Ip_{\alpha_p}(A)$ o conjunto dos idempotentes p -maximais de $\mathbf{A}$. Se p é um P -subespaço com dimensão invariante, então $Ip_{\beta_p}(A) = Ip_{\alpha_p}(A) = Ip(A)$. Estamos interessados em localizar esses subconjuntos dentro de $Ip(A)$ quando $\mathbf{A}$ é uma álgebra com $\Omega(UV) > 0$.

Para uma álgebra de Bernstein $\mathbf{A}$, usaremos a notação $\widetilde{Ip}(A)$ para o subconjunto de $Ip(A)$ formado pelos idempotentes e que não satisfazem a condição $U_e^2 V_e \subseteq U_e V_e$, dada no Teorema 5.2, isto é, $\widetilde{Ip}(A) = \{e \in Ip(A) \mid U_e^2 V_e \not\subseteq U_e V_e\}$.

Proposição 5.3 *Se $\mathbf{A}$ é uma álgebra de Bernstein com $\Omega(UV) > 0$, então $\widetilde{Ip}(A) \neq \emptyset$.*

Demonstração:

Suponha $\widetilde{Ip}(A) = \emptyset$. Então para todo $e \in Ip(A)$, $U_e^2 V_e \subseteq U_e V_e$. Sejam e e f idempotentes UV -minimal e UV -maximal, respectivamente. Como a dimensão de $(UV + U^2 V)$ é invariante, temos $\alpha_{UV} = \dim U_f V_f = \dim(U_f V_f + U_f^2 V_f) = \dim(U_e V_e + U_e^2 V_e) = \dim U_e V_e = \beta_{UV}$. Logo $\Omega(UV) = 0$, absurdo. $\square$

O exemplo a seguir mostra que a recíproca dessa proposição não é verdadeira.

Exemplo 5.2 *Seja $\mathbf{A} = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ de Bernstein com $\{u_1, u_2, u_3\}$ e $\{v_1, v_2, v_3\}$ bases de U_e e V_e , respectivamente e tábua de multiplicação do núcleo de $\mathbf{A}$ dada por:*

	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	v_3
u_1	v_1				u_2	
u_2						
u_3						
v_1					u_3	
v_2						
v_3	u_2			u_3		

Para qualquer idempotente $f = e + (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3) + (\alpha_1 u_1)^2$, com $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbf{F}$, $U_f V_f = \langle u_2 + 2\alpha_1 u_3 \rangle$. Portanto $\Omega(UV) = 0$, embora $U_e^2 V_e = \langle u_3 \rangle \not\subseteq U_e V_e = \langle u_2 \rangle$.

Uma “recíproca mais fraca” dessa proposição é obtida com uma condição adicional ao conjunto $\widetilde{Ip}(A)$.

Proposição 5.4 *Se $\mathbf{A}$ é Bernstein com $\widetilde{Ip}(A)$ um subconjunto próprio de $Ip(A)$ então $\Omega(UV) > 0$.*

Demonstração:

Se $\emptyset \neq \widetilde{Ip}(A) \subsetneq Ip(A)$, então existem $e, f \in Ip(A)$, tais que: $U_e^2 V_e \not\subseteq U_e V_e$ e $U_f^2 V_f \subseteq U_f V_f$, assim

$$\dim U_f V_f = \dim(U_f V_f + U_f^2 V_f) = \dim(U_e V_e + U_e^2 V_e) > \dim U_e V_e.$$

Portanto $\Omega(UV) > 0$. □

Proposição 5.5 *Se $\mathbf{A}$ é Bernstein com $\Omega(UV) > 0$ então $Ip_{\beta_{UV}}(A) \subseteq \widetilde{Ip}(A)$. Além disso, se $\widetilde{Ip}(A) \neq Ip(A)$ então o seu complementar $\widetilde{Ip}(A)^c = Ip_{\alpha_{UV}}(A)$.*

Demonstração:

Seja e um idempotente UV -minimal de $\mathbf{A}$ e suponha que $e \notin \widetilde{Ip}(A)$, então $U_e^2 V_e \subseteq U_e V_e$. Como a dimensão de UV varia, segue da Proposição 5.3 que $\widetilde{Ip}(A) \neq \emptyset$, logo existe um idempotente f tal que $U_f^2 V_f \not\subseteq U_f V_f$, assim

$$\dim U_e V_e = \dim(U_e V_e + U_e^2 V_e) = \dim(U_f V_f + U_f^2 V_f) > \dim U_f V_f$$

uma contradição, pois e é UV -minimal. □

5.5 Variações de UV nas 1-excepcionais

Lema 5.1 *Sejam $M \subseteq U$ um subespaço arbitrário de uma álgebra de Bernstein $\mathbf{A} = Fe \oplus U \oplus V$ do tipo $(1+r, s)$ e $0 \neq u_0 \in M$. Se $\dim M = p \geq 1$, então $\dim(u_0 M)M^2 \leq \min\{r, \frac{1}{6}p(p-1)(2p-1)\}$.*

Demonstração:

Seja $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ uma base de M . Então $u_0 = \sum_{i=1}^p \alpha_i u_i$ ($\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbf{F}$) e $(u_0 M)M^2 = \langle (u_0 u_j)(u_k u_l) \mid 1 \leq j, k, l \leq p \rangle$. Como u_0 é não nulo, então $\alpha_i \neq 0$, para pelo menos um índice i . Vamos supor $\alpha_1 \neq 0$. Usando as identidades (1.16), (1.17) e (1.18) obtemos $(u_0 M)M^2 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$, onde

$A_1 = \langle (u_0 u_j) u_k^2 \mid 1 \leq j < k \leq p \rangle$, $A_2 = \langle (u_0 u_k) u_j^2 \mid 1 \leq j < k \leq p \rangle$,
 $A_3 = \langle (u_0 u_j)(u_k u_l) \mid 1 \leq j < k < l \leq p \rangle$ e $A_4 = \langle (u_0 u_k)(u_j u_l) \mid 1 \leq j < k < l \leq p \rangle$.
Podemos ainda escrever A_2 e A_4 como soma de dois outros subespaços de acordo com as variações de j do seguinte modo: $A_2 = A_{21} + A_{22}$ e $A_4 = A_{41} + A_{42}$, onde
 $A_{21} = \langle (u_0 u_k) u_1^2 \mid 2 \leq k \leq p \rangle$, $A_{22} = \langle (u_0 u_k) u_j^2 \mid 2 \leq j < k \leq p \rangle$,
 $A_{41} = \langle (u_0 u_k)(u_1 u_l) \mid 2 \leq k < l \leq p \rangle$ e $A_{42} = \langle (u_0 u_k)(u_j u_l) \mid 2 \leq j < k < l \leq p \rangle$.
Vamos mostrar que $A_{21} + A_{41} \subseteq A_1 + A_{22} + A_3 + A_{42}$. Sejam $\beta_{jk}, \lambda_{jk}, \delta_{jkl}, \sigma_{jkl} \in \mathbf{F}$, com $1 \leq j, k, l \leq p$. Para todo inteiro n , $2 \leq n \leq p$, temos a identidade:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^p \alpha_i u_1^2 (u_i u_n) &= \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{k=j+1}^p \beta_{jk} \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i (u_i u_j) u_k^2 \right) + \sum_{j=2}^{p-1} \sum_{k=j+1}^p \lambda_{jk} \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i (u_i u_k) u_j^2 \right) + \\
&+ \sum_{j=1}^{p-2} \sum_{k=j+1}^{p-1} \sum_{l=k+1}^p \delta_{jkl} \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i (u_i u_j) (u_k u_l) \right) + \sum_{j=2}^{p-2} \sum_{k=j+1}^{p-1} \sum_{l=k+1}^p \sigma_{jkl} \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i (u_i u_k) (u_j u_l) \right)
\end{aligned}$$

para a seguinte atribuição de valores: $\beta_{1n} = \frac{\alpha_n}{\alpha_1}$, $\beta_{jn} = \frac{-\alpha_j \alpha_n}{2\alpha_1^2}$ e $\lambda_{jn} = \frac{\alpha_j^2}{2\alpha_1^2}$ para $2 \leq j \leq n-1$, $\beta_{nk} = \frac{\alpha_k^2}{2\alpha_1^2}$ e $\lambda_{nk} = \frac{-\alpha_k \alpha_n}{2\alpha_1^2}$ para $n+1 \leq k \leq p$, $\delta_{1kn} = \frac{\alpha_k}{\alpha_1}$ para $2 \leq k \leq n-1$, $\delta_{1nl} = \frac{\alpha_l}{\alpha_1}$ para $n+1 \leq l \leq p$, $\delta_{nkl} = \frac{\alpha_k \alpha_l}{\alpha_1^2}$ e $\sigma_{nkl} = 0$ para $n+1 \leq k < l \leq p$; $\delta_{jnl} = 0$ e $\sigma_{jnl} = \frac{\alpha_j \alpha_l}{\alpha_1^2}$ para $2 \leq j \leq n-1$ e $n+1 \leq l \leq p$, $\delta_{jkn} = \frac{-\alpha_j \alpha_k}{\alpha_1^2} = \sigma_{jkn}$ para $2 \leq j < k \leq n-1$ e $\beta_{jk} = \lambda_{jk} = \delta_{jkl} = \sigma_{jkl} = 0$ para os demais valores de j, k, l .

Como isso mostramos que todo gerador de A_{21} é um elemento de $A_1 + A_{22} + A_3 + A_{42}$. De modo análogo, para quaisquer inteiros m e n , com $2 \leq m < n \leq p$, também temos a identidade:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^p \alpha_i (u_i u_m) (u_1 u_n) &= \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{k=j+1}^p \beta_{jk} \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i (u_i u_j) u_k^2 \right) + \sum_{j=2}^{p-1} \sum_{k=j+1}^p \lambda_{jk} \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i (u_i u_k) u_j^2 \right) + \\
&+ \sum_{j=1}^{p-2} \sum_{k=j+1}^{p-1} \sum_{l=k+1}^p \delta_{jkl} \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i (u_i u_j) (u_k u_l) \right) + \sum_{j=2}^{p-2} \sum_{k=j+1}^{p-1} \sum_{l=k+1}^p \sigma_{jkl} \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i (u_i u_k) (u_j u_l) \right)
\end{aligned}$$

quando fazemos $\beta_{mn} = \frac{-3\alpha_n}{4\alpha_1}$, $\lambda_{mn} = \frac{3\alpha_m}{4\alpha_1}$, $\delta_{1mn} = \frac{-1}{2}$, $\delta_{jmn} = \frac{-\alpha_j}{2\alpha_1}$ e $\sigma_{jmn} = \frac{-\alpha_j}{\alpha_1}$ para $2 \leq j \leq m-1$, $\delta_{mkn} = \frac{-\alpha_k}{\alpha_1}$ e $\sigma_{mkn} = \frac{-\alpha_k}{2\alpha_1}$ para $m+1 \leq k \leq n-1$, $\delta_{mnl} = \frac{-\alpha_l}{2\alpha_1}$ e $\sigma_{mnl} = \frac{\alpha_l}{2\alpha_1}$ para $n+1 \leq l \leq p$ e $\beta_{jk} = \lambda_{jk} = \delta_{jkl} = \sigma_{jkl} = 0$ para os demais valores de j, k, l . Portanto $A_{21} + A_{41} \subseteq A_1 + A_{22} + A_3 + A_{42}$. Segue então que $(u_0 M)M^2 = A_1 + A_{22} + A_3 + A_{42}$. Assim $\dim(u_0 M)M^2 \leq \dim A_1 + \dim A_{22} + \dim A_3 + \dim A_{42} \leq \frac{1}{6}p(p-1)(2p-1)$. Além

disso, $\dim(u_0M)M^2$ não pode ultrapassar $\dim U$, já $(u_0M)M^2 \subseteq (M^2)^2 \subseteq U$. $\square$

Considere $\mathbf{A}$ uma álgebra de Bernstein 1-excepcional do tipo $(1+r, s)$ e subtipo (t, z) . Sejam $e, f = e + u_0 + u_0^2$ ($u_0 \in U_e$) idempotentes UV -minimal e UV -maximal de $\mathbf{A}$, respectivamente. De (5.3) segue que $U_f V_f \subseteq U_e V_e + (u_0 U_e) V_e$. Logo $\dim U_f V_f \leq \dim(U_e V_e + (u_0 U_e) V_e) \leq \dim U_e V_e + \dim(u_0 U_e) V_e$. Assim $\Omega(UV) = \alpha_{UV} - \beta_{UV} \leq \dim(u_0 U_e) V_e$. Se M e W são subespaços de $\mathbf{A}$ tais que $U_e = M \oplus L$ e $V_e = U_e^2 \oplus W$, então $(u_0 U_e) V_e = (u_0 M)(M^2 + W) = (u_0 M)M^2 + (u_0 M)W$ e daí segue que $\Omega(UV) \leq \dim((u_0 M)M^2) + \dim M(s - z)$. Como $\mathbf{A}$ é 1-excepcional, pelas Proposições 3.1 e 3.2, podemos ter M com $\psi(R(z)) \leq \dim M \leq r - t$. Assim $\Omega(UV) \leq \max\{\dim(u_0 M)M^2 + \dim M(s - z) \mid \psi(R(z)) \leq \dim M \leq r - t\}$. Por outro lado, $(u_0 M)M^2 \subseteq V_e^2 \subseteq U_e V_e + V_e^2$, assim $\Omega(UV) \leq t$. Portanto $\Omega(UV) \leq \min\{t, \max\{\dim(u_0 M)M^2 + \dim M(s - z) \mid \psi(R(z)) \leq \dim M \leq r - t\}\}$.

Se $\dim M = p$ e $\dim M^2 = \frac{1}{2}p(p+1)$ é possível que a dimensão do subespaço $(u_0 M)M^2$ alcance o limite máximo dado no Lema 5.1. Para esse caso particular vamos mostrar que existe álgebra de Bernstein com $\Omega(UV)$ atingindo o teto máximo dado acima.

Proposição 5.6 *Se $\mathbf{A}$ é Bernstein 1-excepcional do tipo $(1+r, s)$ e subtipo $(r-p, z)$, com $z = \frac{1}{2}p(p+1) \leq s$ para algum inteiro $p \geq 1$, então $\Omega(UV) \leq \min\{r-p, \frac{1}{6}p(p-1)(2p-1) + p(s-z)\}$.*

Demonstração:

Sejam e um idempotente UV -minimal de $\mathbf{A}$ e M um subespaço tal que $U_e = M \oplus L$. Como $z = \frac{1}{2}p(p+1)$, então $\psi(R(z)) = p$. Pelo acima temos, $\Omega(UV) \leq \min\{r-p, \dim(u_0 M)M^2 + \dim M(s-z) \mid \dim M = p\} \leq \min\{r-p, \frac{1}{6}p(p-1)(2p-1) + p(s-z)\}$, conforme o Lema 5.1. $\square$

A seguir temos o exemplo de uma álgebra 1-excepcional com $\Omega(UV)$ atingindo o teto dado na Proposição 5.6.

Exemplo 5.3 *Seja $\mathbf{A} = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ Bernstein com $U_e = \langle u_1, u_2, \dots, u_{15} \rangle$, $V_e = \langle v_1, v_2, \dots, v_8 \rangle$ e tábua de multiplicação do núcleo dada por:*

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	$\dots$	u_{15}	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
u_1	v_1	v_2	v_3												
u_2	v_2	v_4	v_5												
u_3	v_3	v_5	v_6												
u_4															
u_5															
$\dots$															
u_{15}															
v_1										$2u_{10}$	$2u_{13}$	$2u_{11}$	u_4	u_7	
v_2									$-u_{10}$	$-u_{13}$		$-u_{14}$	$2u_{15}$	u_5	u_8
v_3									$-u_{13}$	$-u_{11}$	$2u_{14}$	$-u_{15}$		u_6	u_9
v_4								$2u_{10}$		$2u_{14}$			$2u_{12}$		
v_5								$2u_{13}$	$-u_{14}$	$-u_{15}$		$-u_{12}$			
v_6								$2u_{11}$	$2u_{15}$		$2u_{12}$				
v_7								u_4	u_5	u_6					
v_8								u_7	u_8	u_9					

Nesta álgebra, $U_e^2 = \langle v_1, v_2, \dots, v_6 \rangle$, $U_e V_e = 0$ e $V_e^2 = \langle u_4, u_5, \dots, u_{15} \rangle$. Logo $\mathbf{A}$ é 1-excepcional do tipo $(1+15, 8)$ e subtipo $(12, 6)$. Seja $f = e + u_0 + u_0^2$ outro idempotente de $\mathbf{A}$, com $u_0 = \sum_{i=1}^{15} \alpha_i u_i$ ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{15} \in \mathbf{F}$). Como $U_e V_e = 0$, usando (5.3) temos: $U_f V_f = \langle u_0 u_j \cdot v_k \mid 1 \leq j \leq 15, 1 \leq k \leq 8 \rangle$. Usando a tábua acima obtemos: $U_f V_f = \langle \alpha_1 u_5, \alpha_1 u_6, \alpha_1 u_4 + \alpha_2 u_5 + \alpha_3 u_6, \alpha_1 u_8, \alpha_1 u_9, \alpha_1 u_7 + \alpha_2 u_8 + \alpha_3 u_9, \alpha_1 u_{10} + \alpha_3 u_{14}, \alpha_2 u_{10} + \alpha_3 u_{13}, \alpha_1 u_{11} + \alpha_2 u_{15}, \alpha_3 u_{11} + \alpha_2 u_{13}, \alpha_2 u_{12} + \alpha_1 u_{15}, \alpha_3 u_{12} + \alpha_1 u_{14}, \alpha_1 u_{13} + \alpha_2 u_{14} - 2\alpha_3 u_{15}, \alpha_1 u_{13} - 2\alpha_2 u_{14} + \alpha_3 u_{15}, 2\alpha_1 u_{13} - \alpha_2 u_{14} - \alpha_3 u_{15} \rangle$. Se $\alpha_1 = 0$, $U_f V_f = \langle \alpha_2 u_5 + \alpha_3 u_6, \alpha_2 u_8 + \alpha_3 u_9, \alpha_3 u_{14}, \alpha_2 u_{10} + \alpha_3 u_{13}, \alpha_2 u_{15}, \alpha_3 u_{11} + \alpha_2 u_{13}, \alpha_2 u_{12}, \alpha_3 u_{12}, \alpha_2 u_{14} - 2\alpha_3 u_{15}, 2\alpha_2 u_{14} - \alpha_3 u_{15}, \alpha_2 u_{14} + \alpha_3 u_{15} \rangle$. E se $\alpha_1 \neq 0$, então $U_f V_f = \langle \alpha_1 u_5, \alpha_1 u_6, \alpha_1 u_8, \alpha_1 u_9, \alpha_1 u_4 + \alpha_2 u_5 + \alpha_3 u_6, \alpha_1 u_7 + \alpha_2 u_8 + \alpha_3 u_9, \alpha_1 u_{10} + \alpha_3 u_{14}, \alpha_1 u_{11} + \alpha_2 u_{15}, \alpha_3 u_{12} + \alpha_1 u_{14}, \alpha_2 u_{12} + \alpha_1 u_{15}, \alpha_1 u_{13} + \alpha_2 u_{14} - 2\alpha_3 u_{15} \rangle$. Logo $\dim U_f V_f \leq 11$, para todo $f \in Ip(A)$. Em particular, para $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ não nulos em $\mathbf{F}$, os onze geradores no último subespaço são linearmente independentes, assim $\alpha_{UV} = 11$ e como $U_e V_e = 0$, temos $\Omega(UV) = 11 = \min\{t, \frac{1}{6}p(p-1)(2p-1) + p(s-z)\}$,

onde $p = 3$, $t = 12$, $s = 8$ e $z = 6$.

5.6 Álgebras com $\Omega(UV)$ máximo

No Corolário 5.5 vimos que $\Omega(UV) \leq \dim U - 1$. Vamos agora descrever as álgebras de Bernstein em que $\Omega(UV)$ atinge esse valor máximo. Se a álgebra é do tipo $(1 + 1, s)$, então $\Omega(UV) = 0$. Portanto vamos considerar apenas álgebras com $\dim U \geq 2$.

Teorema 5.3 *Seja A Bernstein do tipo $(1 + r, s)$ com $r \geq 2$. Então $\Omega(UV) = r - 1$ se, e somente se, existe $e \in Ip(A)$ tal que $U_e V_e = 0$ e $\dim U_e^2 V_e = r - 1$.*

Demonstração:

Suponha $\Omega(UV) = r - 1 > 0$. Pelo Corolário 5.4, A não é excepcional, logo $U_f V_f \subsetneq U_f$, para todo idempotente f , conforme Proposição 1.5 e Corolário 5.3 e assim $\alpha_{UV} \leq r - 1$. Então $\beta_{UV} = 0$ e $\alpha_{UV} = r - 1$. Consequentemente existem idempotentes e, f em A tais que $U_e V_e = 0$ e $\dim U_f V_f = r - 1$. Por (5.3), $U_f V_f \subseteq U_e^2 V_e \subseteq V_e^2 \subsetneq U_e$ e daí segue que $\dim U_e^2 V_e = r - 1$. Reciprocamente, se $U_e V_e = 0$ e $\dim U_e^2 V_e = r - 1$ para algum idempotente e , então $\beta_{UV} = 0$ e $\dim L = r - 1$. Logo existe $0 \neq u_1 \in U_e$ e $u_1 \notin L$. Seja $f = e + u_1 + u_1^2$, por (5.3), $U_f V_f = (u_1 U_e) V_e = U_e^2 V_e$. Como $\alpha_{UV} \leq r - 1$, já que A não é excepcional, segue que $\alpha_{UV} = r - 1$ e portanto $\Omega(UV) = r - 1$. $\square$

Corolário 5.8 *Se A é Bernstein do tipo $(1 + r, s)$ com $r \geq 2$ e $\Omega(UV) = r - 1$, então A é do subtipo $(r - 1, 1)$, portanto 1-excepcional, e $r \leq s$.*

Demonstração:

Seja (t, z) o subtipo de A . Como $\Omega(UV) = r - 1$, pelo Teorema 5.3 existe um idempotente e tal que $U_e V_e = 0$ e $\dim U_e^2 V_e = r - 1$ e daí segue que A é 1-excepcional, $\dim L = r - 1$ e $U_e V_e + V_e^2 = U_e^2 V_e$, logo $t = r - 1$. Se $U = M \oplus L$, então $\dim M = 1$ e assim $z = 1$. Pelo Corolário 5.6, $r - 1 = \Omega(UV) \leq \min\{t, s - z\}$, portanto $r \leq s$. $\square$

Corolário 5.9 *Se A é Bernstein do tipo $(1 + r, s)$ com $r \geq 2$ e $\Omega(UV) = r - 1$, então o núcleo de A é nilpotente.*

Demonstração:

Segue da Proposição 1.7. □

No Teorema 5.3 vimos que se $\Omega(UV)$ é máximo, existe em $\mathbf{A}$ um idempotente e tal que $U_e V_e = 0$ e $\dim L = \dim U_e^2 V_e = r - 1$. Logo se $U_e = \langle u_1 \rangle \oplus L$, então $Ip(A) = \{e + \alpha u_1 + l + (\alpha u_1)^2 \mid \alpha \in \mathbf{F}, l \in L\}$. Então para todo $0 \neq \alpha \in \mathbf{F}$, $U_f V_f = (u_1^2) V_e = U_e^2 V_e$. Assim, $\dim U_f V_f \in \{0, (r - 1)\}$, $\forall f \in Ip(A)$. Temos então o seguinte corolário:

Corolário 5.10 *Se $\mathbf{A}$ é Bernstein do tipo $(1 + r, s)$ com $r \geq 2$ e existe $e \in Ip(A)$, tal que $1 \leq \dim U_e V_e \leq r - 2$, então $\Omega(UV) \leq r - 2$.*

Seja $\mathbf{A} = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ a decomposição de Peirce de uma álgebra de Bernstein relativa a um idempotente e . Se $\dim U_e V_e = 0$ então, conforme Teorema 5.3, $\Omega(UV)$ é máximo somente se $\dim U_e^2 V_e = r - 1$, o que pode facilmente ser verificado. Se $0 < \dim U_e V_e < r - 1$, pelo Corolário 5.10, $\Omega(A) < r - 1$. Resta então determinar, dentre as álgebras com $\dim U_e V_e = r - 1$, aquelas em que existe um idempotente f anulando o P-subespaço $U_f V_f$ e portanto com $\Omega(UV)$ máximo. A próxima proposição fornece os critérios para identificar as álgebras que possuem um idempotente satisfazendo essa condição.

Lema 5.2 *Seja $\mathbf{A} = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ Bernstein do tipo $(1 + r, s)$ com $r \geq 2$. Se $\dim L = r - 1$, então existem bases $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ de U_e , $\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ de V_e tais que $u_1^2 = v_1$, $u_1 u_i = u_i u_j = 0$, para $i = 2, 3, \dots, r$ e $j = 1, 3, \dots, s$. Além disso, $v_1^2 = 0$ e $v_1 \in \text{ann} U_e = \{x \in \mathbf{A} \mid x U_e = 0\}$.*

Demonstração:

Seja $\{u_2, \dots, u_r\}$ uma base de L . Como L está propriamente contido em U_e , existe $0 \neq u_1 \in U_e$ e $u_1 \notin L$. Logo $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ é uma base de U_e e obviamente $u_1 u_i = u_i u_j = 0$, para $i = 2, 3, \dots, r$ e $j = 1, 2, \dots, s$ e $0 \neq u_1^2 \in V_e$. Assim existem $v_2, \dots, v_s$ tais que $\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ é uma base de V_e , onde $v_1 = u_1^2$. Além disso, $v_1^2 = (u_1^2)^2 = 0$, por (1.15). Seja $u = \sum_{i=1}^r \alpha_i u_i \in U_e$ ($\alpha_i \in \mathbf{F}$), usando (1.3) e (1.8) temos $uv_1 = \alpha_1 u_1 v_1 + \sum_{i=2}^r \alpha_i u_i v_1 = \alpha_1 u_1^3 + \sum_{i=2}^r \alpha_i (u_i u_1^2) = \alpha_1 u_1^3 - 2(\sum_{i=2}^r \alpha_i u_1 (u_1 u_i)) = 0$. Portanto $v_1 \in \text{ann} U_e$. □

Corolário 5.11 *Seja $\mathbf{A} = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ Bernstein do tipo $(1+r, s)$ com $\dim L = r-1$. Se $U_e = \langle u_1 \rangle \oplus L$, então para todo idempotente $f = e + \alpha u_1 + l + (\alpha u_1)^2$, onde $\alpha \in \mathbf{F}$, $l \in L$, temos $U_f V_f = (u_1 + 2\alpha u_1^2)V_e + LV_e$.*

Demonstração:

Como $\dim L = r-1$, $\mathbf{A}$ é 1-excepcional e portanto $U_e(U_e V_e) = 0$. Aplicando agora o lema anterior em (5.3) segue o resultado. $\square$

Proposição 5.7 *Seja $\mathbf{A} = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ Bernstein 1-excepcional do tipo $(1+r, s)$ e subtipo $(r-1, 1)$ com $r \geq 2$. Então $\beta_{UV} = 0$ se, e somente se, $U_e V_e = 0$ ou $LV_e = 0$ e as constantes estruturais $\alpha_{1j}^k, \beta_{1j}^k$, em relação à base $\{e, u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s\}$ de $\mathbf{A}$, onde $U_e = \langle u_1, u_2, \dots, u_r \rangle$ e $V_e = \langle v_1 = u_1^2, v_2, \dots, v_s \rangle$, definidas por:*

$$u_1 v_j = \sum_{k=2}^r \alpha_{1j}^k u_k \quad e \quad v_1 v_j = \sum_{k=2}^r \beta_{1j}^k u_k \quad (j = 2, \dots, s)$$

satisfazem as seguintes condições:

- i) *Para quaisquer $2 \leq k \leq r$ e $2 \leq j \leq s$, $\beta_{1j}^k = 0$ se, e somente se, $\alpha_{1j}^k = 0$;*
- ii) *Existe $0 \neq \alpha \in \mathbf{F}$, tal que para todo $\alpha_{1j}^k, \beta_{1j}^k$ não nulos, $\alpha_{1j}^k = \alpha \beta_{1j}^k$;*

Demonstração:

Como $\mathbf{A}$ é do subtipo $(r-1, 1)$, então $\dim L = r-1$. Seja $\{e, u_1, u_2, \dots, u_r, v_1 = u_1^2, \dots, v_s\}$ a base de $\mathbf{A}$, descrita no Lema 5.2.

$(\Rightarrow)$ Suponha $\beta_{UV} = 0$ e $U_e V_e \neq 0$.

Como $\beta_{UV} = 0$, existe $f = e + u_0 + u_0^2$, com $u_0 \in U_e$, tal que $U_f V_f = 0$. E $u_0 \notin L$, pois caso contrário, pela Proposição 5.2, $U_f V_f = U_e V_e \neq 0$. Logo existe $0 \neq \alpha' \in \mathbf{F}$, $l \in L$, tal que $u_0 = \alpha' u_1 + l$ e pelo Corolário 5.11, $0 = U_f V_f = (u_1 + 2\alpha' u_1^2)V_e + LV_e$. Logo $LV_e = (u_1 + 2\alpha' u_1^2)V_e = 0$. Então para todo $j=2, \dots, s$, temos $u_1 v_j + 2\alpha' u_1^2 v_j = \sum_{k=2}^r (\alpha_{1j}^k + 2\alpha' \beta_{1j}^k) u_k = 0$. Logo $\alpha_{1j}^k + 2\alpha' \beta_{1j}^k = 0$, para todo k, j com $2 \leq k \leq r$ e $2 \leq j \leq s$. Isso implica que $\beta_{1j}^k = \alpha_{1j}^k = 0$ ou se α_{1j}^k e β_{1j}^k são não nulos, $\alpha_{1j}^k = \alpha \beta_{1j}^k$, onde $\alpha = -2\alpha'$.

A recíproca é óbvia. $\square$

Exemplo 5.4 *Seja $\mathbf{A} = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ a álgebra de Bernstein com $U_e = \langle u_1, \dots, u_4 \rangle$, $V_e = \langle v_1, \dots, v_5 \rangle$ e tábua de multiplicação do núcleo dada a seguir:*

	u_1	u_2	u_3	u_4	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_1	v_1					$2u_2$	$u_3 - 2u_4$		$3u_2 + 10u_3$
u_2									
u_3									
u_4									
v_1						u_2	$\frac{1}{2}u_3 - u_4$		$2u_2 + 5u_3$
v_2	$2u_2$				u_2				
v_3	$u_3 - u_4$				$\frac{1}{2}u_3 - u_4$				
v_4								$2u_3$	u_2
v_5	$3u_2 + 10u_3$				$2u_2 + 5u_3$			u_2	

Nesta álgebra $\dim L = 3 = \dim U_e - 1$ e $LV_e = 0$. Porém, observamos da tábua que:

$$\frac{\alpha_{12}^2}{\beta_{12}^2} = \frac{\alpha_{13}^3}{\beta_{13}^3} = \frac{\alpha_{13}^4}{\beta_{13}^4} = \frac{\alpha_{15}^3}{\beta_{15}^3} = 2 \neq \frac{3}{2} = \frac{\alpha_{15}^2}{\beta_{15}^2}$$

Logo, pela Proposição 5.7, $\beta_{UV} > 0$. De fato, se $f = e + \sum_{i=1}^4 \alpha_i u_i + (\sum_{i=1}^4 \alpha_i u_i)^2$, $\alpha_i \in \mathbf{F}$, então

$$U_f V_f = \langle 2(1 + \alpha_1)u_2, (1 + \alpha_1)u_3 - 2(1 + \alpha_1)u_4, 4(\frac{3}{4} + \alpha_1)u_2 + 10(1 + \alpha_1)u_3 \rangle$$

e não existe $\alpha_1 \in \mathbf{F}$, tal que $U_f V_f = 0$. No entanto podemos escolher $\alpha_1 \in \mathbf{F}$ tal que $\dim U_f V_f = 1$, assim $\Omega(UV) = \dim U - 2 = 2$. $\square$

Referências Bibliográficas

- [1] Cortés, T.; Montaner, F., *On the structure of Bernstein algebras*, J. London Math. Soc. (2) 51, 41 – 52 (1995).
- [2] Etherington, I.M.H., *Genetic algebras*, Proc. Royal Soc. Edinb., 59, 242–258 (1939).
- [3] González, S.; Martínez, C., *Idempotent elements in a Bernstein algebra*, J. London Math. Soc. (2) 42, 430 – 436 (1990).
- [4] Grishkov, A. N. *On the genetic property of Bernstein algebras*, Soviet. Math. Dokl., (3) 35, 489 – 492 (1987).
- [5] Hentzel, I.R.; Peresi, L.A., *Semi-prime Bernstein algebras*, Arch. Math., 52, 539 – 543 (1989).
- [6] Holgate, P., *Genetic algebras satisfying Bernstein's stationarity principle*, J. London Math. Soc. (2) 9, 613 – 623 (1975).
- [7] Ikemoto, L. S., *A álgebra de multiplicações de uma álgebra de Bernstein*, Tese de Doutorado do Instituto de Matemática e Estatística -USP (1999).
- [8] Lyubich, Y.I., *Mathematical Structures in Population Genetics*, Biomathematics 22, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg (1992).
- [9] Micali, A.; Ouattara, M., *Structure des algèbres de Bernstein*, Linear Algebra and its Applications, 218, 77 – 88 (1995).
- [10] Oliveira, R. A. F., *Sobre os P -subespaços em uma train álgebra de posto 3*, Tese de Doutorado - Instituto de Matemática e Estatística - USP (1997).

- [11] Picanço, J., *Subespaços invariantes em algumas álgebras básicas*, Tese de Doutorado - Instituto de Matemática e Estatística - USP (1998).
- [12] Picanço, J.; Costa, R. *Invariance of dimension of P -subspaces in Bernstein algebras*, Comm. Algebra 27 (8), 4039 – 4055 (1999).
- [13] Schafer, R.D., *An Introduction to Nonassociative Algebras*, Academic Press (1966).
- [14] Wörz-Busekros, A., *Algebras in Genetics*, Lectures Notes in Biomathematics, 36, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (1980).
- [15] Wörz-Busekros, A., *Bernstein algebras*, Arch. Math., 48, 388 – 398, (1987).
- [16] Wörz-Busekros, A., *Further remarks on Bernstein algebras*, J. London Math. Soc. (3) 58, 69 – 73 (1989).