TEORIA DE MODELOS DE
CORPOS p -ÁDICOS
COM FUNÇÕES ANALÍTICAS

LEONARDO PRIETO SANABRIA

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Lógica Matemática**
Orientador: **Prof. Dr. Ricardo Bianconi**

Durante a elaboração deste trabalho, o autor recebeu apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq.

- São Paulo, Março de 2004 -

TEORIA DE MODELOS DE CORPOS
 p -ÁDICOS COM FUNÇÕES ANALÍTICAS

LEONARDO PRIETO SANABRIA

Este exemplar corresponde à redação final
da tese de doutorado, devidamente corrigida,
defendida por Leonardo Prieto Sanabria
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 5 de Março de 2004.-

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Ricardo Bianconi (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Paulo Agozzini Martin - IME-USP
- Profa. Dra. Itala Maria Loffredo D'Ottaviano - UNICAMP
- Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio - UNICAMP
- Prof. Dr. Ruy José Guerra Barretto de Queiroz - UFPE

*Dedicada a
minha família
e à memória de
Victor Julio Rodriguez
e Javier Enrique Aristizabal*

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao professor Ricardo Bianconi pelo apoio que me deu durante estes quatro anos; suas orientações foram fundamentais na elaboração desta tese.

Aos professores Fernando Zalamea e Leonardo Rendón, e ao meu colega Jairo Eloy, agradeço ter possibilitado o início do meu curso de doutorado.

O exemplo de vida dos meus pais, Eloisa Sanabria Mora e José Prieto Rios, sempre será motivo de meu mais profundo agradecimento. Sou grato também aos meus irmãos Ernesto e Rubiela, a eles devo muito do que eu sou.

Os meus amigos foram a minha família no Brasil; estou especialmente agradecido a Hernan, Mariela, Sandra e Paola.

Também agradeço aos caros colegas Claus, Cristian e Hugo, que deram várias sugestões na escrita desta tese e na preparação da defesa.

A Florencia não só devo sua essencial colaboração na elaboração deste trabalho, como também todos os momentos vividos ao seu lado, para ela todo meu agradecimento e amor.

RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é estudar algumas propriedades de expansões, por adição de funções analíticas, das estruturas $(I, +, \cdot, 0, 1, P)$, e $(\mathcal{D}, +, \cdot, 0, 1, P)$, onde I denota o disco unitário de $\overline{\mathbb{Q}_p}$, $\mathcal{D}$ o disco unitário de $\mathbb{C}_p$, e P é o predicado binário $P(x, y) := |y| \leq |x|$. Primeiro provamos um teorema de eliminação de quantificadores para uma expansão do disco unitário de $\overline{\mathbb{Q}_p}$, depois obtemos um resultado análogo para uma expansão de $\mathcal{D}$. A seguir, mostramos algumas conseqüências desses resultados no estudo de conjuntos definíveis.

Nas conclusões formulamos alguns problemas abertos e damos possíveis caminhos para resolvê-los.

ABSTRACT

We study expansions of the structures $(I, +, \cdot, 0, 1, P)$ and $(\mathcal{D}, +, \cdot, 0, 1, P)$, by adding analytic functions, where I and $\mathcal{D}$ are the unit discs of $\overline{\mathbb{Q}_p}$ (the algebraic closure of $\mathbb{Q}_p$) and of $\mathbb{C}_p$ (its completion), respectively.

We prove the elimination of quantifiers for such expansions and apply these results to the study of definable sets.

We conclude with some open problems and indicate some directions for further work.

SUMÁRIO

Capítulo 1. Noções Básicas	1
Modelo Completude da Teoria de Corpos Valorados	
Algebricamente Fechados	2
Eliminação de Quantificadores para Corpos Valorados	
Algebricamente Fechados com Valoração não Trivial	21
Capítulo 2. Um Teorema de Eliminação de Quantificadores	
para o Disco Unitário de $\overline{\mathbb{Q}_p}$	25
Notação e Resultados Preliminares	26
Prova do Teorema Principal Assumindo o Lema Básico	30
Preliminares ao Lema Básico	32
Teorema de Divisão e Preparação de Weierstrass no	
Caso não Arquimediano	35
Prova do Lema Básico	37
Capítulo 3. Um Teorema de Eliminação de Quantificadores	
para o Disco Unitário de $\mathbb{C}_p$	45
Notação e Resultados Preliminares	46
Prova do Teorema Principal	47

Capítulo 4. Conjuntos Semi-algébricos em $\mathbb{C}_p$ e $\overline{\mathbb{Q}_p}$, Semi-analíticos e Subanalíticos de $\mathbb{C}_p$	49
Conjuntos Semi-algébricos de $\mathbb{C}_p$ e $\overline{\mathbb{Q}_p}$	50
Funções Analíticas p -ádicas Complexas	51
Variedades Analíticas p -ádicas Complexas	53
Conjuntos Subanalíticos de $\mathbb{C}_p$	57
Capítulo 5. Sistema de Weierstrass em $\overline{\mathbb{Q}_p}$ e $\mathbb{C}_p$	65
Sistemas de Weierstrass	66
Sistemas de Weierstrass Não Arquimedianos	70
Conclusão	75
Referências	77

CAPÍTULO 1

NOÇÕES BÁSICAS

Apresentamos neste capítulo dois importantes teoremas, que serão usados para obter os resultados desta tese. Na primeira seção, mostramos uma prova da completude da teoria de corpos algebricamente fechados com valoração não trivial, dada por Robinson em [R, (3.4.21)]. Macintyre, McKenna, e van den Dries, usando o trabalho de Robinson, mostram em [M-McK-vdD, (4.2)] que esta mesma teoria possui eliminação de quantificadores; este resultado é dado na segunda seção deste capítulo.

MODELO COMPLETUDE DA TEORIA DE CORPOS
VALORADOS ALGEBRICAMENTE FECHADOS

1.1 Axiomatizamos a noção de corpos valorados algebricamente fechados usando as seguintes relações

$F(x)$	x é um elemento do corpo
$G(x)$	x é um elemento do grupo de valoração
$E(x, y)$	relação de igualdade. Denotada $x = y$
$V(x, y)$	y é a valoração de x . Denotada por $v(x) = y$
$Q(x, y)$	ordem do grupo de valoração. Denotado por $x \leq y$
$S'(x, y, z)$	adição do grupo de valoração. Denotada por $x \oplus y = z$
$S(x, y, z)$	adição do corpo. Denotada por $x + y = z$
$P(x, y, z)$	produto do corpo. Denotado por $xy = z$

A caracterização dos corpos valorados algebricamente fechados é dada pela união dos conjuntos de axiomas apresentados nos seguintes itens 1.2 a 1.7.

1.2 Axiomas para a igualdade

$$\begin{aligned}
 &\forall x(x = x) \\
 &\forall xy(x = y \rightarrow y = x) \\
 &\forall xyz(x = y \wedge y = z \rightarrow x = z) \\
 &\forall x_1 \cdots x_n \forall y_1 \cdots y_n (R(x_1, \dots, x_n) \wedge x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \rightarrow R(y_1, \dots, y_n))
 \end{aligned}$$

onde $R \in \{F, G, V, Q, S', S, P\}$ dado em 1.1.

1.3 Axiomas para corpo

$$\forall xy\exists z(F(x) \wedge F(y) \rightarrow F(z) \wedge x + y = z)$$

$$\forall xy\exists z(F(x) \wedge F(y) \rightarrow F(z) \wedge xy = z)$$

$$\forall xyzw(F(x) \wedge F(y) \wedge F(z) \wedge F(w) \rightarrow (x + y = z \wedge x + y = w \rightarrow z = w))$$

$$\forall xyzw(F(x) \wedge F(y) \wedge F(z) \wedge F(w) \rightarrow (xy = z \wedge xy = w \rightarrow z = w))$$

$$\begin{aligned} \forall uvwxyz(F(u) \wedge F(v) \wedge F(w) \wedge F(x) \wedge F(y) \wedge F(z) \rightarrow \\ (u + v = w \wedge w + x = y \wedge v + x = z \rightarrow u + z = y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall uvwxyz(F(u) \wedge F(v) \wedge F(w) \wedge F(x) \wedge F(y) \wedge F(z) \rightarrow \\ (uv = w \wedge wx = y \wedge vx = z \rightarrow uz = y)) \end{aligned}$$

$$\forall xyz(F(x) \wedge F(y) \wedge F(z) \rightarrow (x + y = z \rightarrow y + x = z))$$

$$\forall xyz(F(x) \wedge F(y) \wedge F(z) \rightarrow (xy = z \rightarrow yx = z))$$

$$\begin{aligned} \forall tuvwxxyz(F(t) \wedge F(u) \wedge F(v) \wedge F(w) \wedge F(x) \wedge F(y) \wedge F(z) \rightarrow \\ (tu = v \wedge wu = x \wedge v + x = y \wedge t + w = z \rightarrow zu = y)) \end{aligned}$$

$$\forall xy\exists z(F(x) \wedge F(y) \rightarrow F(z) \wedge x + z = y)$$

$$\forall xy\exists z(F(x) \wedge F(y) \rightarrow F(z) \wedge (x + x = x \vee xz = y))$$

$$\exists xy(F(x) \wedge F(y) \wedge \neg(x = y))$$

1.4 Axiomas de grupo abeliano ordenado

$$\forall xy\exists z(G(x) \wedge G(y) \rightarrow G(z) \wedge x \oplus y = z)$$

$$\forall xyzw(G(x) \wedge G(y) \wedge G(z) \wedge G(w) \rightarrow (x \oplus y = z \wedge x \oplus y = w \rightarrow z = w))$$

$$\begin{aligned} \forall uvwxyz(G(u) \wedge G(v) \wedge G(w) \wedge G(x) \wedge G(y) \wedge G(z) \rightarrow \\ (u \oplus v = w \wedge w \oplus x = y \wedge v \oplus x = z \rightarrow u \oplus z = y)) \end{aligned}$$

$$\forall xyz(G(x) \wedge G(y) \wedge G(z) \rightarrow (x \oplus y = z \rightarrow y \oplus x = z))$$

$$\begin{aligned}
& \forall xy \exists z (G(x) \wedge G(y) \rightarrow G(z) \wedge x \oplus z = y) \\
& \exists xy (G(x) \wedge G(y) \wedge \neg(x = y)) \\
& \forall xyz (G(x) \wedge G(y) \wedge G(z) \rightarrow (x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z)) \\
& \forall xy (G(x) \wedge G(y) \rightarrow x \leq y \vee y \leq x) \\
& \forall xy (G(x) \wedge G(y) \rightarrow ((x \leq y \wedge y \leq x) \equiv x = y)) \\
& \forall xyzvw (G(x) \wedge G(y) \wedge G(z) \wedge G(v) \wedge G(w) \rightarrow \\
& \quad (x \oplus y = z \wedge x \oplus v = w \wedge y \leq v \rightarrow z \leq w))
\end{aligned}$$

1.5 Os seguintes axiomas estabelecem que em qualquer modelo, os conjuntos de constantes que satisfazem $F(x)$ e $G(x)$, respectivamente, constituem conjuntos complementares, tais que as relações S e P são válidas só no primeiro, enquanto as relações Q , S' são satisfeitas só por elementos do segundo.

$$\begin{aligned}
& \forall x ((F(x) \vee G(x)) \wedge (\neg F(x) \vee \neg G(x))) \\
& \forall xy (x \leq y \rightarrow G(x) \wedge G(y)) \\
& \forall xyz (x \oplus y = z \rightarrow G(x) \wedge G(y) \wedge G(z)) \\
& \forall xyz (x + y = z \rightarrow F(x) \wedge F(y) \wedge F(z)) \\
& \forall xyz (xy = z \rightarrow F(x) \wedge F(y) \wedge F(z))
\end{aligned}$$

1.6 Propriedades da valoração

$$\begin{aligned}
& \forall xy (v(x) = y \rightarrow F(x) \wedge G(y) \wedge \neg(x + x = x)) \\
& \forall x \exists y (F(x) \rightarrow (x + x = x \vee (G(y) \wedge v(x) = y))) \\
& \forall x \exists y (G(x) \rightarrow v(y) = x) \\
& \forall xyz (v(x) = y \wedge v(x) = z \rightarrow y = z) \\
& \forall uvwxyz (v(u) = x \wedge v(v) = y \wedge v(w) = z \wedge uv = w \rightarrow x \oplus y = z) \\
& \forall uvwxyz (v(u) = x \wedge v(v) = y \wedge v(w) = z \wedge u + v = w \wedge x \leq y \rightarrow x \leq z)
\end{aligned}$$

Os axiomas dados em 1.2 até 1.6 caracterizam o conceito de corpo valorado, onde o grupo de valoração é um grupo abeliano ordenado (totalmente). Para o zero do corpo não é dada uma valoração, mas aceitamos a convenção

$$v(0) = \infty$$

e agora para todas $x, y \in F$ temos

$$v(xy) = v(x) + v(y)$$

(no que se segue usaremos $+$ em lugar de $\oplus$) e

$$v(x + y) \geq \min \{v(x), v(y)\}$$

Agora precisamos acrescentar os axiomas que estabelecem que o corpo é algebricamente fechado. Primeiro definimos as relações

$$\begin{aligned} P_0(x, y) &= (x = x \wedge \neg(y + y = y) \wedge (yy = y)) \\ P_n(x, y) &= (\exists z(P_{n-1}(x, z) \wedge zx = y)) \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

assim, $P_n(x, y)$ expressa $y = x^n$. Agora para $n \geq 1$ definimos

$$\begin{aligned} R_n(x_0, x_1, \dots, x_n, y) &:= \exists u_1 \cdots u_n \exists v_1 \cdots v_n \exists w_2 \cdots w_{n-1} (P_1(y, u_1) \wedge \cdots \wedge P_n(y, u_n) \\ &\quad \wedge x_1 u_1 = v_1 \wedge \cdots \wedge x_n u_n = v_n \wedge v_1 + v_2 = w_2 \\ &\quad \wedge w_2 + v_3 = w_3 \wedge \cdots \wedge w_{n-1} + v_n = x_0) \end{aligned}$$

que significa (salvo modificações óbvias para $n = 1, 2$)

$$x_n y^n + x_{n-1} y^{n-1} + \cdots + x_2 y^2 + x_1 y = x_0 .$$

1.7 Os seguintes axiomas estabelecem que o corpo é algebricamente fechado.

$$\forall x_0 \cdots x_n \exists y (F(x_0) \wedge \cdots \wedge F(x_n) \rightarrow F(y) \wedge (x_n + x_n = x_n \vee R_n(x_0, \dots, x_n, y))),$$

para $n \geq 2$.

Seja K a coleção de axiomas apresentados em 1.2-1.7. Então, todo modelo M de K compreende um grupo G e um corpo F . Queremos provar nesta seção que K é modelo completa.

1.8 Seja M um modelo de K . Vejamos que então o grupo G é completamente divisível.

Dada $a \in G$ e n inteiro positivo, a equação

$$(1) \quad nx = a$$

possui solução em G . De fato, existe um elemento $b \in F$ tal que $a = v(b)$. Seja $c \in F$ tal que $c^n = b$. Então se $x = v(c)$ temos

$$nx = nv(c) = v(c^n) = v(b) = a.$$

1.9 Seja F um corpo algebricamente fechado o qual é valorado em um grupo G , e seja $F(t)$ uma extensão transcendental simples de F .

Suponha que existem duas valorações v_1, v_2 de $F(t)$ tais que para todo a em F ,

$$v_1(a) = v_2(a) \text{ e } v_1(t - a) = v_2(t - a).$$

Então

$$v_1(\tau) = v_2(\tau)$$

para todo $\tau \neq 0$ em $F(t)$.

De fato, cada $\tau \neq 0$ de $F(t)$ pode-se escrever como uma função racional em t com coeficientes em F ,

$$\tau = \frac{p(t)}{q(t)} = a \frac{(t - a_1) \cdots (t - a_k)}{(t - b_1) \cdots (t - b_l)}, \quad a, a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l \in F$$

onde $a \neq 0$, e o numerador (e/ou denominador) pode-se reduzir à unidade. Então

$$\begin{aligned} v_1(\tau) &= v_1(a) + v_1(t - a_1) + \cdots + v_1(t - a_k) - v_1(t - b_1) - \cdots - v_1(t - b_l) \\ &= v_2(a) + v_2(t - a_1) + \cdots + v_2(t - a_k) - v_2(t - b_1) - \cdots - v_2(t - b_l) \\ &= v_2(\tau). \end{aligned}$$

1.10 Seja F' um corpo com grupo de valoração G' , e seja F um subcorpo de F' , tal que F' é de grau de transcendência 1 sobre F . Seja G o grupo de valoração de F , $G \subseteq G'$. Então dados $b_1, b_2 \in G'$, existem inteiros n_1, n_2 , pelo menos um diferente de zero, tais que

$$(1) \quad n_1 b_1 + n_2 b_2 \in G.$$

Para provar isto usamos que se $v(x) \neq v(y)$ então

$$(2) \quad v(x + y) = \min \{v(x), v(y)\}$$

Dados $b_1, b_2 \in G'$, podemos encontrar $t_1, t_2 \in F'$, tais que

$$v(t_1) = b_1, \quad v(t_2) = b_2.$$

Já que F' é de grau de transcendência 1 sobre F , existe uma relação algébrica

$$(3) \quad \sum a_{km} t_1^k t_2^m = 0 \quad (a_{km} \in F)$$

tal que, pelo menos um a_{km} , $k + m > 0$, é não nulo (portanto existem ao menos dois a_{km} não nulos). Omitimos os termos $a_{km} = 0$. Então

$$v(a_{km}t_1^k t_2^m) = v(a_{km}) + kb_1 + mb_2$$

Consideremos dois termos diferentes, $a_{km}t_1^k t_2^m$ e $a_{k'm'}t_1^{k'} t_2^{m'}$, em (3). Então

$$(4) \quad v(a_{km}t_1^k t_2^m) = v(a_{k'm'}t_1^{k'} t_2^{m'})$$

é equivalente a

$$v(a_{km}) + kb_1 + mb_2 = v(a_{k'm'}) + k'b_1 + m'b_2$$

ou

$$(k - k')b_1 + (m - m')b_2 = v(a_{k'm'}) - v(a_{km}) \in G.$$

Já que assumimos que estamos tratando com dois termos diferentes de (3), temos $k - k' \neq 0$ ou $m - m' \neq 0$ (ou ambos são diferentes de zero) e, desta maneira, obteríamos (1).

Suponha que (4) não é satisfeita para nenhum par de termos diferentes de (3). Então repetindo sucessivamente (2), temos que

$$v(\sum a_{km}t_1^k t_2^m) = \min \{v(a_{km}t_1^k t_2^m)\}$$

mas isto implica que $v(\sum a_{km}t_1^k t_2^m)$ é finita (isto é, um elemento próprio do grupo de valoração), contradizendo

$$v(\sum a_{km}t_1^k t_2^m) = v(0) = \infty.$$

Isto prova (1).

1.12 Agora seja F um corpo algebricamente fechado, o qual é valorado em um grupo G e seja $F(t)$ uma extensão simples de F a qual é valorada em uma extensão G' de G ,

tal que a valoração de $F(t)$ é uma extensão da valoração de F . Suponha que $b = v(t)$ não está em G , então a valoração de $F(t)$ em G' está determinada pelas relações dadas por

$$(1) \quad b < d \quad \text{e} \quad b > d$$

as quais valem em G' , para todos os elementos $d \in G$.

De fato, para todo a de F ,

$$v(t - a) = \min \{v(t), v(a)\} = \min \{b, v(a)\},$$

já que $v(t) = b \neq v(a)$. Assim, o valor funcional de $v(t - a)$ é determinado inteiramente pelo valor $v(a)$ em G , pelo conjunto de relações (1). Agora, cada elemento $\tau \neq 0 \in F(t)$ pode-se escrever como

$$\tau = a \frac{(t - a_1) \cdots (t - a_k)}{(t - b_1) \cdots (t - b_l)} \quad a, a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l \in F,$$

portanto

$$v(\tau) = v(a) + v(t - a_1) + \cdots + v(t - a_k) - v(t - b_1) - \cdots - v(t - b_l),$$

e, em particular, para cada inteiro n , temos

$$v(t^n) = nv(t) = nb.$$

Segue que G' consiste de todos os elementos da forma

$$(2) \quad d + nb, \quad d \in G, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Esta representação é única, já que G' é ordenado e G é completamente divisível.

Teorema 1.13. *Seja F um corpo valorado em um grupo G , e seja F' uma extensão algébrica finita normal de F . Sejam G'_1 e G'_2 duas extensões de G , em cada uma das quais existe uma valoração v_i , $i = 1, 2$, de F' a qual é uma extensão da valoração de F . Então existe um automorfismo f de F' que centraliza os elementos de F , e um isomorfismo h que preserva a ordem entre G'_1 e G'_2 , e que centraliza os elementos de G tal que o seguinte diagrama*

$$\begin{array}{ccc} F' & \xrightarrow{f} & F' \\ v_1 \downarrow & & \downarrow v_2 \\ G'_1 & \xrightarrow{h} & G'_2 \end{array}$$

comuta.

Ver a prova deste teorema em [K, (§11, Tma.19)]. $\square$

1.14 Seja F um corpo valorado em um grupo G , e seja $\overline{F}$ o fecho algébrico de F . Sejam $\overline{G}_1$ e $\overline{G}_2$ duas extensões de G nas quais $\overline{F}$ é valorado, como no Teorema 1.13. Então a conclusão do Teorema 1.13 também vale.

Prova. Considere a coleção de pares $\{(f, h)\}$ que fazem comutar o diagrama

$$\begin{array}{ccc} F_1 & \xrightarrow{f} & F_2 \\ v_1 \downarrow & & \downarrow v_2 \\ G_1 & \xrightarrow{h} & G_2 \end{array}$$

onde os F_i são extensões de F , f é um isomorfismo que centraliza F , os G_i são extensões de G , e h é um isomorfismo que preserva a ordem e centraliza G .

O conjunto dos pares (f, h) está ordenado parcialmente por: $(f, h) \preceq (f', h')$, se f' é uma extensão de f e h' é uma extensão de h . Podemos usar o Lema de Zorn para mostrar que $\{(f, h)\}$ tem um elemento maximal (f^0, h^0) . Sejam $F_1 = F_1^0$, e $F_2 = F_2^0$, os corpos correspondentes, e $G_1 = G_1^0$, $G_2 = G_2^0$ os grupos de valoração correspondentes. Queremos provar que $F_1^0 = F_2^0 = \overline{F}$. Suponha, pelo contrário, que F_1^0 é um subcorpo próprio de $\overline{F}$; portanto o mesmo se aplica a F_2^0 . Seja F_1^* tal que $[F_1^*: F_1^0] < \infty$, e seja F_2^* a correspondente extensão de F_2^0 , isto é, F_1^* e F_2^* são obtidas a partir de F_1^0 , F_2^0 pela adjunção das raízes de correspondentes equações normais. Sejam G_1^* e G_2^* os correspondentes grupos de valoração contidos em $\overline{G}_1$ e $\overline{G}_2$, respectivamente. Então $G_1^0 \subseteq G_1^*$, $G_2^0 \subseteq G_2^*$. Por definição de (f^0, h^0) , G_1^0 e G_2^0 são isomorfos por um isomorfismo que preserva a ordem. Aplicando 1.13 podemos estender (f^0, h^0) a (f^*, h^*) para o qual $F_1 = F_1^*$, $F_2 = F_2^*$, $G_1' = G_1^*$, $G_2' = G_2^*$. Isto contradiz que (f^0, h^0) seja maximal, e mostra que $F_1^0 = \overline{F}$. Consequentemente $F_2^0 = \overline{F}$, $G_1^0 = \overline{G}_1$, $G_2^0 = \overline{G}_2$. Assim (f^0, h^0) contém um automorfismo f^0 de $\overline{F}$ que centraliza F e um isomorfismo h^0 entre $\overline{G}_1$ e $\overline{G}_2$ o qual centraliza G , tal que

$$\begin{array}{ccc} \overline{F} & \xrightarrow{f^0} & \overline{F} \\ v_1^0 \downarrow & & \downarrow v_2^0 \\ \overline{G}_1 & \xrightarrow{h^0} & \overline{G}_2 \end{array}$$

comuta $\square$

Teorema 1.15. *A teoria elementar de um corpo algebricamente fechado, com valoração não trivial em um grupo abeliano ordenado, é modelo completa.*

Prova. Temos que provar que K (a união de 1.2 a 1.7) satisfaz: para cada par de modelos M e M' de K , tais que M' é uma extensão de M , cada sentença primitiva ψ

que está definida em M é válida em M' se, e só se, é válida em M . Lembramos que ψ é primitiva se ψ é da forma

$$\exists y_1 \cdots \exists y_n \phi(y_1, \dots, y_n)$$

onde ϕ é uma fórmula livre de quantificadores.

Seja M um modelo de K e seja

$$(1) \quad \psi = \exists y_1 \cdots \exists y_n \phi(y_1, \dots, y_n)$$

uma sentença primitiva a qual está definida em $K \cup N$, onde N é o diagrama de M , tal que ψ é válida em uma extensão M' de M , a qual é um modelo de K . M consiste de um corpo algebricamente fechado F e seu grupo de valoração G , e M' consiste de uma extensão algebricamente fechada F' de F e seu grupo de valoração G' é uma extensão de G . Se $F = F'$, então $G = G'$ e $M = M'$, e não teríamos nada a provar.

Suponha então que F é um subcorpo próprio de F' , e que ψ não é válida em M mas vale em M' . Podemos supor que o grau de transcendência de F' sobre F é 1.

Agora, consideremos separadamente duas alternativas: (i) $G = G'$ e (ii) $G \neq G'$. Suponha primeiro que $G = G'$. Seja c um elemento de $F' - F$, e seja K^* a união de K e o seguinte conjunto de sentenças (dado em (2) a (4)):

(2) O diagrama de M , denotado por N .

(3) O conjunto de sentenças $\neg(a = c)$, onde a varia sobre todas as constantes de M .

(4) Para cada $a \in F$, se

$$v(c - a) = b, \quad b \in G$$

então incluímos a sentença

$$T(a, b, c) = \exists x(a + x = c \wedge v(x) = b).$$

Então o conjunto K^* é consistente, já que M' é um modelo de K^* .

Seja M^* um outro modelo de K^* ; M^* é portanto um modelo de K e contém um corpo algebricamente fechado $F^* \supset F$ e um grupo de valoração G^* o qual é uma extensão de G . Além disso, F^* tem que ser uma extensão própria de F . De fato, por

$$\forall xyz(x + y = z \rightarrow F^*(x) \wedge F^*(y) \wedge F^*(z))$$

e por uma das sentenças de (4)

$$T(a, b, c) = \exists x(a + x = c \wedge v(x) = b),$$

tem-se que $F^*(c)$. E por (3) c é diferente de todos os elementos de F .

Já que F é algebricamente fechado, c tem que ser algebricamente independente de F . Segue que F^* inclui um subcorpo $\widehat{F}$, tal que $c \in \widehat{F}$, o qual é isomorfo a F' sob um isomorfismo que centraliza os elementos de F e a constante c (dimensão transcendental de F' sobre F é 1). Os corpos obtidos ao agregar c a F em F' e $\widehat{F}$ são certamente isomorfos, mas a priori não necessariamente coincidem, no entanto podemos, sem perda de generalidade, identificar os elementos correspondentes. Podemos falar então do corpo $F(c)$ como estando contido em F' e $\widehat{F}$. Seja $\widehat{G}$ o grupo de valoração de $\widehat{F}$, $\widehat{G} \subseteq G^*$, e seja G_0 o grupo de valoração de $F(c)$, considerado como subcorpo de $\widehat{F}$, $G_0 \subseteq \widehat{G}$. O grupo de valoração de $F(c)$ considerado como subcorpo de F' é G (pela hipótese $G = G'$).

Além disso, por (4), a valoração de cada elemento $c - a$ de $F(c)$ em G_0 , onde $a \in F$, coincide com a valoração do mesmo elemento em $G = G'$. Aplicando 1.9, temos que G_0 é isomorfo a G . E, por 1.14, concluímos que $\widehat{G}$ é isomorfo a G por um isomorfismo h que preserva a ordem e que faz comutar o diagrama

$$\begin{array}{ccc} F' & \xrightarrow{f} & \widehat{F} \\ v_1 \downarrow & & \downarrow v_2 \\ G & \xrightarrow{h} & \widehat{G} \end{array}$$

onde f é um isomorfismo entre F' e $\widehat{F}$ (o qual centraliza os elementos de $F(c)$), e as v_i são as valorações correspondentes. O corpo $\widehat{F}$ junto com seu grupo de valoração $\widehat{G}$ constituem um modelo $\widehat{M}$ de K , o qual é isomorfo a M' pelas transformações f, h , com respeito a todas as relações definidas em M' e $\widehat{M}$.

Agora, pela hipótese, ψ é válida em M' . Segue que existem constantes $a'_1, \dots, a'_n$, as quais podem estar parte em F' e parte em $G' = G$, tais que $\phi(a'_1, \dots, a'_n)$ vale em M' . Sejam $\widehat{a}_1, \dots, \widehat{a}_n$ as correspondentes constantes de $\widehat{M}$ pelo isomorfismo f (i.e. $f(a'_i) = \widehat{a}_i$). Então $\phi(\widehat{a}_1, \dots, \widehat{a}_n)$ é válida em $\widehat{M}$ e, já que esta fórmula não inclui quantificadores, também é válida em M^* .

Mas isto mostra que ψ é válida em M^* , i.e., ψ vale em qualquer modelo de K^* . Segue que ψ é dedutível de K^* . Isto quer dizer, por (3) e (4), que existe um número finito de elementos de F ,

$$a_1, \dots, a_j, a_{j+1}, \dots, a_l$$

e um número finito de elementos de G

$$b_{j+1}, \dots, b_l$$

tais que a sentença

$$(5) \quad (\neg(a_1 = c) \wedge \dots \wedge \neg(a_j = c) \wedge T(a_{j+1}, b_{j+1}, c) \wedge \dots \wedge T(a_l, b_l, c)) \rightarrow \psi$$

é dedutível de $K \cup N$. Mas c não está incluída em $K \cup N$ e portanto (5) implica que

$$\exists x (\neg(a_1 = x) \wedge \dots \wedge \neg(a_j = x) \wedge T(a_{j+1}, b_{j+1}, x) \wedge \dots \wedge T(a_l, b_l, x)) \rightarrow \psi$$

é dedutível de $K \cup N$. Para mostrar que ψ vale em M (o qual é um modelo de $K \cup N$) basta provar então que

$$\exists x (\neg(a_1 = x) \wedge \dots \wedge \neg(a_j = x) \wedge T(a_{j+1}, b_{j+1}, x) \wedge \dots \wedge T(a_l, b_l, x))$$

vale em M . Portanto precisamos provar que o conjunto de condições

$$(6) \quad \begin{array}{ll} x \neq a_i & i = 1, \dots, j \\ v(x - a_i) = b_i & i = j + 1, \dots, l \end{array}$$

possui uma solução em M , para $a_i \in F$, $b_i \in G$, onde é conhecido que (6) possui uma solução $x = c$ em uma extensão M' de M com $F \subseteq F'$ e $G \subseteq G'$. Agora, já que $c \neq a_i$, $i = 1, \dots, j$, segue que $v(c - a_i)$ possui um valor b_i em G , e, reciprocamente, se $v(x - a_i) = b_i \in G$, então $x \neq a_i$. Portanto podemos substituir (6) por um sistema simples

$$(7) \quad v(x - a_i) = b_i, \quad i = 1, \dots, l.$$

Agora, se $a_i = a_k$ para $i \neq k$ então também temos que $b_i = b_k$, já que (7) tem uma solução em M' . Assim as duas equações coincidem, i.e. podemos assumir $a_i \neq a_k$ para $i \neq k$. Agora consideremos um par de equações em (7) tais que $b_i \neq b_k$. Então $v(a_i - a_k) = v(a_k - a_i)$ tem que ser diferente de pelo menos uma das duas constantes b_i, b_k . Suponha $v(a_i - a_k) \neq b_i$. Então

$$v(x - a_k) = v(x - a_i + a_i - a_k) = \min \{b_i, v(a_i - a_k)\}.$$

Isto quer dizer, para cada x que satisfaz

$$v(x - a_i) = b_i$$

o valor de $v(x - a_k)$ é determinado realmente pela valoração de F . Portanto podemos omitir a equação

$$v(x - a_k) = b_k$$

em (7). Repetindo este procedimento, se é necessário, finalmente chegamos ao sistema de condições

$$(8) \quad v(x - a_i) = b \quad i = 1, \dots, m$$

com o mesmo b para todas as equações.

Agora assumamos que $v(a_1 - a_i) \neq b$ para algum $i \geq 2$. Então

$$b = v(x - a_i) = v(x - a_1 + a_1 - a_i) = \min \{b, v(a_1 - a_i)\}$$

e portanto temos que $v(a_1 - a_i) > b$. Assim, cada x que satisfaz $v(x - a_1) = b$, satisfaz também $v(x - a_i) = b$. Então podemos omitir a correspondente condição (8), e podemos assumir que

$$(9) \quad v(a_1 - a_i) = b \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, m.$$

Escolhemos um elemento $a_0 \in F$ tal que $v(a_0) = b$, e fazemos

$$y = \frac{x - a_1}{a_0}.$$

Então a primeira condição em (8) implica

$$v(y) = v(x - a_1) - v(a_0) = b - b = 0.$$

Além disso, fazendo $c_i = (a_i - a_1)/a_0$ para $i = 2, \dots, m$ obtemos de (8) que

$$v(y - c_i) = v\left(\frac{x - a_1 - (a_i - a_1)}{a_0}\right) = v\left(\frac{x - a_i}{a_0}\right) = b - b = 0 \quad (i = 2, \dots, m).$$

Portanto pode-se substituir (8) por

$$(10) \quad \begin{aligned} v(y) &= 0 \\ v(y - c_i) &= 0 \quad i = 2, \dots, m \end{aligned}$$

onde $v(c_i) = v(a_i - a_1) - v(a_0) = b - b = 0$, $c_i \in F$.

(10) é satisfeito em M' por $y = (x - a_1)/a_0$, e temos que resolvê-la em M . Cada solução de (10) gera uma solução de (8), tomando $x = a_0 y + a_1$.

Seja R o anel de valoração de F , i.e, o conjunto de todos os $r \in F$ para os quais $v(r) \geq 0$ (incluído o zero do corpo), e seja J o ideal da valoração, i.e. o conjunto de todos os elementos $r \in F$ tais que $v(r) > 0$. Então o quociente $F_R = R/J$ é um corpo. Os elementos de F_R são as classes disjuntas dos elementos de R , e denotamos por $\gamma_2, \dots, \gamma_m$ os elementos de F_R os quais contêm $c_2, \dots, c_m$ respectivamente. Então $\gamma_i \neq 0$, i.e. γ_i não está em J , $i = 2, \dots, m$, já que $v(c_i) = 0$. Consideremos o sistema de inequações

$$(11) \quad \begin{aligned} \eta &\neq 0 \\ \eta &\neq \gamma_i \quad i = 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Para provar que este sistema possui uma solução em F_R , é suficiente provar que F_R é infinito. Isto é claro quando F_R é de característica 0. Se F_R é de característica $p > 0$, seja $q > 0$ um inteiro não divisível por p , e sejam $e_1, \dots, e_q$ as raízes da equação

$$(12) \quad Z^q - 1 = 0.$$

Então $v(e_i) = 0$, já que $0 = v(1) = v(e_i^q) = qv(e_i)$. Portanto e_i está em um elemento ξ_i de F_R . Além disso, a identidade

$$Z^q - 1 = (Z - e_1) \cdots (Z - e_q) \quad \text{em } F$$

implica

$$Z^q - 1 = (Z - \xi_1) \cdots (Z - \xi_q) \quad \text{em } F_R$$

i.e. $\xi_1, \dots, \xi_q$ são as q -ésimas raízes da unidade em F_R , $\xi_i \neq \xi_k$, para $i \neq k$. Já que q pode ser tão grande quanto se queira, F_R é infinito.

Agora seja $\eta = \alpha \in F_R$ uma solução de (11) e seja a um elemento de α . Então $a \in R$, e $a \notin J$ e $a - c_i \notin J$, $i = 2, \dots, m$. Portanto

$$v(a) = 0, \quad v(a - c_i) = 0, \quad i = 2, \dots, m$$

isto é, $y = a$ é uma solução de (10) com $a \in F$. Isto completa a prova do caso (i) $G = G'$.

Caso (ii) $G \neq G'$. Já que F' é de grau de transcendência 1 sobre F , G' tem que ser de grau 1 sobre G , por 1.12. Seja b um elemento arbitrário fixo de $G' - G$, então todos os elementos de G' podem-se expressar de maneira única como

$$d + nb, \quad d \in G, \quad n \in \mathbb{Q}.$$

Seja $c \in F'$ tal que $v(c) = b$. Então c não pode estar em F , e $F(c)$ é uma extensão transcendental simples de F .

Denotemos por K^* a união de K , N (o diagrama de M), o conjunto de sentenças $\neg(a = c)$, onde a varia sobre todas as constantes de M (ver (3)), o conjunto adicional (13) definido como segue:

(13) Para cada $d \in G$, incluímos

$$\neg(d = b) \wedge d \leq b \quad \text{ou} \quad \neg(d = b) \wedge b \leq d$$

dependendo de qual destas sentenças seja verdadeira em G' (já que G' é uma extensão própria de G , uma das duas afirmações tem que ser verdadeira em cada caso); finalmente incluímos em K^* a sentença $V(c, b)$. M' é um modelo de K^* e qualquer outro modelo M^* de K^* compreende uma extensão própria F^* de F com grupo de valoração G^* , o qual é uma extensão própria de G . F^* contém um elemento c o qual é algebricamente independente de F , e de novo podemos supor que o corpo $F(c)$ está em F' e em F^* . Seja $\widehat{F}$ o fecho algébrico de $F(c)$ em F^* , e seja $\widehat{G}$ o grupo de valoração de $\widehat{F}$, $G \subseteq \widehat{G} \subseteq G^*$. $\widehat{G}$ contém uma constante b , a qual está relacionada com c por $v(c) = b$, já que incluímos $V(c, b)$ em K^* .

Sejam G'_0 , $\widehat{G}_0$ os grupos de valoração de $F(c)$ em G' e em $\widehat{G}$ respectivamente. Em ambos os grupos $v(c) = b$. Então, por 1.12 (2) todos os elementos de cada grupo podem ser escritos da forma $d + nb$, onde $d \in G$ e n é um inteiro, e as duas valorações

coincidem por 1.12 e (13). Então 1.14 mostra que existe um isomorfismo f entre F' e $\widehat{F}$ e um isomorfismo h entre G' e $\widehat{G}$ os quais centralizam F e G tais que

$$\begin{array}{ccc} F' & \xrightarrow{f} & \widehat{F} \\ v_1 \downarrow & & \downarrow v_2 \\ G' & \xrightarrow{h} & \widehat{G} \end{array}$$

comuta. Isto prova que $\widehat{F}$ e $\widehat{G}$ constituem juntos um modelo $\widehat{M}$ no qual vale ψ , e concluímos então que ψ vale em M^* , e portanto, é dedutível a partir de K^* . Assim, por (3) e (13) existe um número finito de elementos de F , $a_1, \dots, a_j$ e um número finito de elementos de G , $d_1, \dots, d_l, d_{l+1}, \dots, d_p$ tais que a sentença

$$\neg(a_1 = c) \wedge \dots \wedge \neg(a_j = c) \wedge \neg(d_1 = b) \wedge d_1 \leq b \wedge \dots \wedge \neg(d_l = b) \wedge d_l \leq b \wedge \\ \neg(d_{l+1} = b) \wedge b \leq d_{l+1} \wedge \dots \wedge \neg(d_p = b) \wedge b \leq d_p \rightarrow \psi$$

é dedutível de $K \cup N$. Nem b nem c estão em M e para mostrar que ψ vale em M temos então que provar só que

$$\exists x \exists y (\neg(a_1 = x) \wedge \dots \wedge \neg(a_j = x) \wedge \neg(d_1 = y) \wedge d_1 \leq y \wedge \dots \wedge \neg(d_l = y) \wedge d_l \leq y \wedge \\ \neg(d_{l+1} = y) \wedge y \leq d_{l+1} \wedge \dots \wedge \neg(d_p = y) \wedge y \leq d_p)$$

vale em M . Em linguagem algébrica, temos que mostrar que o sistema de equações dado nos seguintes (14) a (16) tem solução em M .

$$(14). \quad x \neq a_i \quad i = 1, \dots, j$$

$$(15) \quad y = v(x)$$

$$(16) \quad \begin{aligned} y &> d_i & i = 1, \dots, l, \\ y &< d_i & i = l+1, \dots, p. \end{aligned}$$

Sabemos que o sistema possui uma solução em M' , uma extensão de M . (16) é satisfeita por $y = b \in M'$. Suponha que não pode ser satisfeita pelos elementos de M . e consideremos os seguintes casos: (a) nenhum dos conjuntos de (16) é vazio. Sejam

$$d' = \max \{d_i : 1 \leq i \leq l\}$$

$$d'' = \min \{d_i : l+1 \leq i \leq p\}$$

então $d' \leq d''$ já que $d' < b < d''$. Segue que

$$y = a = \frac{1}{2}(d' + d'') \in G$$

é uma solução de (16) e $a \in G$ i.e. $a \in M$. Similarmente para um caso (b) quando um dos conjuntos é vazio. E para o caso (c) quando ambos os conjuntos são vazios nada temos a provar. Em todos os casos chegamos a uma contradição. Isto prova (16).

Tendo achado $y = y_0$ solução de (16) temos que determinar x satisfazendo (14) e (15). Agora, já que $y_0 \in G$, existe pelo menos um elemento $x_0 \in F$, tal que $y_0 = v(x_0)$. Escolhemos $j+1$ elementos diferentes de F , e_i , tais que $v(e_i) = 0$ (e.g. as raízes de (12) para q suficientemente grande). Então

$$e_1 x_0, e_1 x_0, \dots, e_{j+1} x_0$$

são todos diferentes e $v(e_i x_0) = v(e_i) + v(x_0) = y_0$. Mas pelo menos um desses números, por exemplo $e_1 x_0$, tem que ser diferente de todas as a_i ($i = 1, \dots, j$). Então $x = e_1 x_0$ satisfaz (14) e (15). Isto mostra que (14)-(16) tem solução em M e completa a prova de 1.15. $\square$

1.16 A noção de corpo valorado algebricamente fechado pode ser dada usando um sistema mais simples de relações. Sejam E, S, P as relações que denotam a igualdade,

a soma, e o produto. E $R(x)$ uma relação unária (representa-se-à por $v(x) \geq 0$). Consideremos as seguintes sentenças

$$\forall xy(R(x) \wedge E(x, y) \rightarrow R(y))$$

$$\forall xyz(R(x) \wedge R(y) \wedge S(x, y, z) \rightarrow R(z))$$

$$\forall xyz(R(x) \wedge R(y) \wedge S(x, z, y) \rightarrow R(z))$$

$$\forall xyz(R(x) \wedge R(y) \wedge P(x, y, z) \rightarrow R(z))$$

$$\forall x \exists y \exists z (R(y) \wedge R(z) \wedge P(x, y, z))$$

$$\forall xy \exists z (R(x) \wedge R(y) \rightarrow P(x, y, z) \vee P(x, z, y))$$

$$\exists xy \forall zw (R(x) \wedge R(y) \wedge \neg S(x, x, x) \wedge \neg S(y, y, y) \wedge \neg P(x, z, y) \wedge P(y, w, x))$$

$$\exists x (\neg R(x))$$

Os axiomas anteriores determinam um subanel próprio R do corpo dado, tal que todos os elementos do corpo podem ser representados como quociêntes de elementos do anel, e tal que para todo par de elementos do anel pelo menos um divide o outro. Sabe-se que (ver i.e. [K]) um tal anel determina uma única valoração sobre o corpo. A última sentença indica que a valoração não é trivial.

Seja K_R a união das sentenças dadas e os axiomas para a teoria dos corpos algebricamente fechados obtidos a partir de 1.2, 1.3, e 1.7. Então K_R representa um conjunto de axiomas para o conceito de corpo algebricamente fechado com valoração não trivial. Uma prova análoga à do Teorema 1.15 mostra que K_R é modelo completa (ver [R, (pg. 61)]).

ELIMINAÇÃO DE QUANTIFICADORES PARA CORPOS ALGEBRICAMENTE FECHADOS COM VALORAÇÃO NÃO TRIVIAL

1.17 Seja D um domínio. Uma *relação linear de divisibilidade* (l.d. relação) sobre D

é uma relação binária L sobre D satisfazendo:

$$\begin{aligned} L(a, b) \wedge L(b, c) &\rightarrow L(a, c) \\ L(a, b) \vee L(b, a) & \\ L(a, b) \wedge L(a, c) &\rightarrow L(a, b + c) \\ (c \neq 0) &\rightarrow (L(a, c) \equiv L(ac, bc)) \\ \neg L(0, 1) & \end{aligned}$$

para todas $a, b, c \in D$. Uma l.d. relação sobre D determina um anel de valoração R_L no corpo de quocientes $Q(D)$ de D . Este anel é dado por

$$R_L = \{a/b : a, b \in D, b \neq 0, L(b, a)\}.$$

E para a correspondente valoração v_L sobre $Q(D)$ temos

$$v_L(a) \leq v_L(b) \iff L(a, b) \quad a, b \in D.$$

Claramente a transformação dada por $L \mapsto R_L$ é uma bijeção do conjunto de l.d. relações sobre D no conjunto de anéis de valoração de $Q(D)$, com inversa dada por

$$R \mapsto L_R := \{(a, b) \in D^2 : v(a) \leq v(b)\},$$

onde v é a valoração sobre $Q(D)$ associada a R .

De novo, cada l.d. relação L sobre D pode ser estendida de maneira única a uma l.d. relação L^Q sobre $Q(D)$ tal que

$$(D, L) \subseteq (Q(D), L^Q).$$

Consideramos então um corpo valorado como um corpo com uma l.d. relação sobre este. Seja L_{div} a linguagem que contém as relações E, S, P, L . Analogamente a 1.16 obtemos uma axiomatização da teoria de corpos algebricamente fechados com valoração não trivial nesta linguagem. Denotamos esta teoria por ACF_{val} .

Teorema 1.18. *A teoria de corpos algebricamente fechados com valoração não trivial admite eliminação de quantificadores. (ver [M-McK-vdD, (pg. 83)])*

Prova. Por 1.16 e 1.17 ACF_{val} é modelo completa. Cada corpo valorado possui uma única, salvo isomorfismo, extensão prima a um corpo valorado algebricamente fechado $\tilde{F}$, com valoração não trivial. Se a valoração de F é não trivial então a extensão prima é $\overline{F}$, o fecho algébrico junto com seu grupo de valoração. Se a valoração de F é trivial, então primeiro estendemos a valoração a uma extensão pura transcendental de K , e depois aplicamos o primeiro caso. O Teorema 1.15 (modelo completude de corpos algebricamente fechados com valoração não trivial) junto com a existência de extensões primas para subestruturas implica que a teoria de corpos valorados algebricamente fechados admite eliminação de quantificadores (ver [S]). $\square$

CAPÍTULO 2

UM TEOREMA DE ELIMINAÇÃO DE QUANTIFICADORES PARA O DISCO UNITÁRIO DE $\overline{\mathbb{Q}_p}$

Apresentamos neste capítulo um teorema de eliminação de quantificadores para uma expansão de $(I, +, \cdot, 0, 1, P)$, onde I denota o disco unitário de $\overline{\mathbb{Q}_p}$. E $\overline{\mathbb{Q}_p}$ denota o fecho algébrico de $\mathbb{Q}_p$.

J. Denef e L. van den Dries em [D-vd Dries, (1.1)] provam que $\mathbb{Z}_p$, o disco unitário de $\mathbb{Q}_p$, possui eliminação de quantificadores em uma linguagem obtida a partir de séries de potências convergentes em $\mathbb{Z}_p$, e que contém os predicados $P_n(x) := \text{existe } y \text{ tal que } x = y^n$. A prova do teorema está baseada no fato de que $\mathbb{Z}_p$ é um anel noetheriano.

Claramente os predicados P_n trivializam-se em I , e I não é noetheriano. Assim propomos uma linguagem adequada que nos permite contornar essas dificuldades e provar um resultado análogo ao de Denef e van den Dries.

NOTAÇÃO E RESULTADOS PRELIMINARES

Nesta seção fixamos a notação usada no que segue do capítulo, e apresentamos alguns resultados preliminares.

2.1 Seja $\overline{\mathbb{Q}}_p$ o fecho algébrico de $\mathbb{Q}_p$, e $I = \{x \in \overline{\mathbb{Q}}_p : |x| \leq 1\}$ o disco unitário de $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Para $X = (X_1, \dots, X_m) = X_{(m)}$, $\overline{\mathbb{Q}}_p[[X]]$ denota o anel de séries de potências com coeficientes em $\overline{\mathbb{Q}}_p$, e $\overline{\mathbb{Q}}_p\{X\}$ o subanel de $\overline{\mathbb{Q}}_p[[X]]$ que contém as séries $f = \sum_{i \in \mathbb{N}^m} a_i X^i$ tais que $|a_i| \rightarrow 0$, quando $|i| \rightarrow \infty$, onde $|i| = i_1 + \dots + i_m$ para $i = (i_1, \dots, i_m) \in \mathbb{N}^m$.

Pode-se ver que $\overline{\mathbb{Q}}_p$ não é completo para a norma p -ádica (ver [G, (5.7.4)]).

2.2 Para $X = (X_1, \dots, X_n)$, $n \geq 0$, definimos

$$\overline{\mathbb{Q}}_p \langle X \rangle := \{f \in \overline{\mathbb{Q}}_p[[X]] : \exists [K : \mathbb{Q}_p] < \infty, f \in K[[X]]\},$$

onde $[K : \mathbb{Q}_p] < \infty$ significa que K é uma extensão finita de $\mathbb{Q}_p$, e para $n = 0$ o anel correspondente é $\overline{\mathbb{Q}}_p$: claramente $\overline{\mathbb{Q}}_p \langle X \rangle$ é um subanel de $\overline{\mathbb{Q}}_p[[X]]$. Seja $I\{X\}$ o subanel de $\overline{\mathbb{Q}}_p \langle X \rangle \cap \overline{\mathbb{Q}}_p\{X\}$ que contém as séries $\sum a_i X^i$ tais que $a_i \in I$ para todo $i \in \mathbb{N}^n$. É fácil ver que para cada $f \in I\{X\}$, e cada $x \in I^n$, $f(x)$ é uma série convergente e $f(x) \in I$.

2.3 Definimos $D : I^2 \rightarrow I$ por

$$D(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1/x_2 & \text{se } |x_1| \leq |x_2|, \ x_2 \neq 0 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

2.4 Seja L_{an}^D a linguagem que contém um símbolo de operação m -ário f para cada $f \in I\{X_1, \dots, X_m\}$, $m \geq 0$, um símbolo de operação binário D , e um símbolo de relação binário P .

Nota. $P(x, y)$ representará $|y| \leq |x|$.

2.5 I é uma L_{an}^D -estrutura de maneira natural. Observamos que para cada $\alpha \in I$ existe um símbolo de constante em L_{an}^D denotado por α .

2.6 Omitindo o símbolo D , obtemos a linguagem L_{an} . Claramente, para cada L_{an} -termo $t(x_1, \dots, x_m)$, existe uma série de potências $f \in I\{X_1, \dots, X_m\}$ tal que $t(x) = f(x)$ para toda $x \in I^m$.

Portanto qualquer L_{an} -fórmula livre de quantificadores $\phi(X_1, \dots, X_m)$ é equivalente a uma na qual todas as subfórmulas atômicas são da forma $f(X_1, \dots, X_m) = 0$ ou $P(f, g)$, com $f, g \in I\{X\}$.

Queremos provar neste capítulo que I possui eliminação de quantificadores na linguagem L_{an}^D .

Lema 2.7. *Seja $\phi(X_1, \dots, X_M)$ uma L_{an}^D -fórmula livre de quantificadores na qual o símbolo D ocorre m vezes. Então existe uma L_{an} -fórmula livre de quantificadores $\phi_m(X_1, \dots, X_M, X_{M+1}, \dots, X_{M+m})$, tal que $I \models \phi \leftrightarrow \exists X_{M+1} \dots X_{M+m} \phi_m$.*

Prova. Se $m = 0$, tomamos $\phi_m = \phi$. Se $m > 0$ tomamos uma ocorrência de um termo $D(t_1, t_2)$ em ϕ tal que D não ocorre nos termos t_1, t_2 . Substituímos esta ocorrência de D em ϕ por uma nova variável X_{M+1} ; portanto obtemos uma fórmula $\bar{\phi}(X_1, \dots, X_M, X_{M+1})$, e seja $\phi_1(X_1, \dots, X_M, X_{M+1})$ a fórmula

$$\bar{\phi} \wedge [(|t_1| \leq |t_2| \wedge t_2 \neq 0 \wedge t_1 = t_2 X_{M+1}) \vee (|t_1| > |t_2| \vee t_2 = 0) \wedge X_{M+1} = 0]$$

(onde $|t_1| > |t_2|$ denota $\neg P(t_2, t_1)$). Então $I \models \phi \leftrightarrow \exists X_{M+1} \phi_1$. Agora ϕ_1 contém só $m - 1$ ocorrências do símbolo D ; portanto se $m = 1$ acabamos. Se $m > 1$ repetimos o mesmo procedimento com ϕ_1 no lugar de ϕ . Depois de m passos, obtemos ϕ_m . $\square$

Nota. Observamos que se S é o subconjunto de I^M definido por ϕ , e S' é o subconjunto de I^{M+m} definido por ϕ_m , então S é a imagem injetiva de S' pela projeção canônica $\pi: I^{M+m} \rightarrow I^M$.

2.8 A linguagem L_{an} contém símbolos de operação $\cdot$, $-$, e $+$, provenientes das séries $X_1 \cdot X_2$, $-X_1$, e $X_1 + X_2$, respectivamente, e por 2.5 possui símbolos constantes 0 , 1 . Seja $L_{a,P}$ a sublinguagem de L_{an} contendo os símbolos $\{+, -, \cdot, 0, 1, P\}$.

2.9 Dado um L_{an}^D -termo $t(X_1, \dots, X_{M+1})$, dizemos que a variável X_{M+1} *ocorre polinomialmente em t* , se este é da forma

$$a_d(X_1, \dots, X_M)X_{M+1}^d + a_{d-1}(X_1, \dots, X_M)X_{M+1}^{d-1} + \dots + a_0(X_1, \dots, X_M),$$

onde os $a_i(X_1, \dots, X_M)$ são L_{an}^D -termos com variáveis entre $X_1, \dots, X_M$, e se $d = 0$, então t é $a_0(X_1, \dots, X_M)$.

Seja $\phi(X_1, \dots, X_M, X_{M+1})$ uma L_{an}^D -fórmula livre de quantificadores. Dizemos que a variável X_{M+1} *ocorre polinomialmente em ϕ* , se todas as subfórmulas atômicas de ϕ são da forma $t = 0$ ou $P(t_1, t_2)$, com X_{M+1} ocorrendo polinomialmente em t, t_1, t_2 .

2.10 A $L_{a,P}$ -estrutura $(\overline{\mathbb{Q}}_p, +, -, \cdot, 0, 1, P)$ possui eliminação de quantificadores. Para ver isto basta usar o Teorema de Eliminação de Quantificadores para corpos algebricamente fechados valorados (ver 1.18) e o fato de que

$$P(x, y) \iff |y| \leq |x| \iff v(x) \leq v(y)$$

é uma l.d. relação sobre $\overline{\mathbb{Q}}_p$, onde v denota a valoração p-ádica.

Claramente $(I, +, -, \cdot, 0, 1, P|_I)$ é uma $L_{a,P}$ -subestrutura de $(\overline{\mathbb{Q}}_p, +, -, \cdot, 0, 1, P)$. A $L_{a,P}$ -estrutura $(I, +, -, \cdot, 0, 1, P|_I)$ será denotada simplesmente por $(I, +, -, \cdot, 0, 1, P)$.

Lema 2.11. *Seja $\phi(X_1, \dots, X_{M+1})$ uma L_{an}^D -fórmula livre de quantificadores na qual a variável X_{M+1} ocorre polinomialmente. Então podemos obter uma L_{an}^D -fórmula $\psi(X_1, \dots, X_M)$ livre de quantificadores tal que*

$$I \models \exists X_{M+1} \phi \leftrightarrow \psi(X_1, \dots, X_M).$$

Prova. Seja $Y = (Y_1, \dots, Y_N)$, como I é uma $L_{a,P}$ -subestrutura de $\overline{\mathbb{Q}}_p$ temos que para cada $L_{a,P}$ -fórmula livre de quantificadores $\phi'(Y, X_{M+1})$, e cada $y \in I^N$

$$I \models \exists X_{M+1} \phi'(Y, X_{M+1})[y] \text{ se, e só se, } \overline{\mathbb{Q}}_p \models \exists X_{M+1} (\phi'(Y, X_{M+1}) \wedge |X_{M+1}| \leq 1)[y].$$

De fato, suponhamos que

$$I \models \exists X_{M+1} \phi'(Y, X_{M+1})[y],$$

então existe $x \in I$ tal que

$$I \models \phi'(Y, X_{M+1})[y, x],$$

já que I é $L_{a,P}$ -subestrutura de $\overline{\mathbb{Q}}_p$, então

$$\overline{\mathbb{Q}}_p \models \phi'(Y, X_{M+1})[y, x],$$

como $x \in I$, então $|x| \leq 1$, e assim

$$\overline{\mathbb{Q}}_p \models (\phi'(Y, X_{M+1}) \wedge |X_{M+1}| \leq 1)[y, x],$$

portanto

$$\overline{\mathbb{Q}}_p \models \exists X_{M+1} (\phi'(Y, X_{M+1}) \wedge |X_{M+1}| \leq 1)[y].$$

Reciprocamente, suponhamos que

$$\overline{\mathbb{Q}}_p \models \exists X_{M+1} (\phi'(Y, X_{M+1}) \wedge |X_{M+1}| \leq 1)[y],$$

então existe $x \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ tal que

$$\overline{\mathbb{Q}}_p \models (\phi'(Y, X_{M+1}) \wedge |X_{M+1}| \leq 1)[y, x].$$

Como $|x| \leq 1$, $(y, x) \in I^{N+1}$, e ϕ' é livre de quantificadores, de novo usamos que I é uma $L_{a,P}$ -subestrutura de $\overline{\mathbb{Q}}_p$ para obter

$$I \models (\phi'(Y, X_{M+1}) \wedge |X_{M+1}| \leq 1)[y, x],$$

portanto

$$I \models \phi'(Y, X_{M+1})[y, x],$$

e assim

$$I \models \exists X_{M+1} \phi'(Y, X_{M+1})[y].$$

Agora, em cada subfórmula atômica de ϕ , $t_1 = 0$ ou $P(t_2, t_3)$, os t_i têm a forma $a_d(X)X_{M+1}^d + \dots + a_0(X)$, com X_{M+1} não ocorrendo nos $a_j(X)$; substituindo os $a_j(X)$ por novas variáveis $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$, obtemos $\phi'(Y, X_{M+1})$ livre de quantificadores na linguagem $L_{a,P}$ ($Y = Y_{(N)}$). Pelo Teorema de Eliminação de Quantificadores citado em 2.10, existe uma $L_{a,P}$ -fórmula $\psi'(Y)$ livre de quantificadores tal que para todo $y \in I^N$

$$\overline{\mathbb{Q}}_p \models (\exists X_{M+1} (\phi'(Y, X_{M+1}) \wedge |X_{M+1}| \leq 1) \leftrightarrow \psi'(Y))[y],$$

portanto, para todo $y \in I^N$ temos

$$I \models (\exists X_{M+1} \phi'(Y, X_{M+1}) \leftrightarrow \psi'(Y))[y].$$

Seja $\psi(X)$ a fórmula obtida ao substituir as Y_j pelas $a_j(X)$ em $\psi'(Y)$, então

$$I \models \exists X_{M+1} \phi \leftrightarrow \psi(X). \quad \square$$

PROVA DO TEOREMA PRINCIPAL ASSUMINDO O LEMA BÁSICO

Nesta seção assumiremos válido o seguinte *Lema Básico* (o qual será provado no final deste capítulo).

Lema 2.12. (Básico) Seja $X = (X_1, \dots, X_M)$, $Y = (Y_1, \dots, Y_N)$, $N > 0$. Se $\phi(X, Y)$ é uma L_{an} -fórmula livre de quantificadores, então existe uma L_{an}^D -fórmula livre de quantificadores $\psi(X, Z_1, \dots, Z_{N-1})$ tal que

- (i) $I \models (\exists Y \phi(X, Y)) \leftrightarrow \exists Z_1 \dots Z_{N-1} \psi(X, Z_1, \dots, Z_{N-1})$.
- (ii) em ψ o símbolo de operação D é aplicado só a termos que não envolvem as variáveis $Z_1, \dots, Z_{N-1}$.

O lema básico pode ser estendido a L_{an}^D -fórmulas livres de quantificadores ϕ , nas quais D é aplicado só a termos que não envolvem as variáveis $Y_1, \dots, Y_N$ (ver [B2,(4.8)]). De fato, seja ϕ uma dessas fórmulas, e sejam $t_1(X), \dots, t_k(X)$ todos os subtermos de ϕ da forma

$$t_i(X) = D(t_{i,1}(X), t_{i,2}(X))$$

onde $t_{i,1}(X)$ e $t_{i,2}(X)$ são L_{an}^D -termos, $1 \leq i \leq k$. Sejam $W = (W_1, \dots, W_k)$ novas variáveis, e seja $\tilde{\phi}(X, W, Y)$ a L_{an}^D -fórmula obtida de $\phi(X, Y)$ ao se substituir todas as ocorrências de $t_i(X)$ em ϕ por W_i .

Podemos aplicar assim o Lema 2.12 a $\tilde{\phi}$, obtendo $\tilde{\psi}(X, W, Z)$, $Z = (Z_1, \dots, Z_{N-1})$, satisfazendo 2.12 (i) e 2.12 (ii). Seja $\psi(X, Y) = \tilde{\psi}(X, t_1(X), \dots, t_k(X), Z)$. Então

- (i) $I \models (\exists Y \phi(X, Y)) \leftrightarrow \exists Z_1 \dots Z_{N-1} \psi(X, Z_1, \dots, Z_{N-1})$.
- (ii) em ψ o símbolo de operação D é aplicado só a termos que não envolvem as variáveis $Z_1, \dots, Z_{N-1}$.

Teorema 2.13. I admite eliminação de quantificadores na linguagem L_{an}^D .

Prova. Aplicando a extensão do lema básico N vezes, obtemos que, para cada L_{an} -fórmula livre de quantificadores $\phi(X, Y)$, existe uma L_{an}^D -fórmula livre de quantificadores $\psi(X)$ tal que $I \models \exists Y \phi(X, Y) \leftrightarrow \psi(X)$.

Seja agora $\theta(X, Y_1)$ uma L_{an}^D -fórmula livre de quantificadores. Temos que provar que existe uma L_{an}^D -fórmula livre de quantificadores $\psi(X)$ tal que $I \models \exists Y_1 \theta(X, Y_1) \leftrightarrow \psi(X)$. Pelo Lema 2.7, podemos construir uma L_{an} -fórmula livre de quantificadores $\phi(X, Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$, para algum $N > 0$, tal que

$$I \models \theta(X, Y_1) \leftrightarrow \exists Y_2 \dots Y_N \phi(X, Y_1, Y_2, \dots, Y_N).$$

Para esta ϕ existe uma L_{an}^D -fórmula livre de quantificadores $\psi(X)$ tal que $I \models \exists Y \phi(X, Y) \leftrightarrow \psi(X)$. Portanto $I \models \exists Y_1 \theta(X, Y_1) \leftrightarrow \psi(X)$. $\square$

PRELIMINARES AO LEMA BÁSICO

Apresentamos alguns resultados necessários à prova do *Lema Básico*. Usaremos a notação adotada na primeira seção deste capítulo. Assim, $I\{X\}$ é o subanel de $\overline{\mathbb{Q}_p}\{X\} \cap \overline{\mathbb{Q}_p}\langle X \rangle$ que contém as séries com coeficientes em I .

Para $f = \sum a_i X^i \in \overline{\mathbb{Q}_p}\{X\}$, $X = X_{(M)}$, definimos $\|f\| = \max\{|a_i| : i \in \mathbb{N}^M\}$.

Lema 2.14. *Sejam $X = (X_1, \dots, X_M)$, $Y = (Y_1, \dots, Y_N)$, $N > 0$. Se $f(X, Y) \in I\{X, Y\}$, então f pode ser escrita como $f = \sum a_i(X) Y^i$, onde i percorre $\mathbb{N}^N$ e $a_i = a_i(X) \in I\{X\}$.*

Prova. Por indução. Para $N = 1$. Afirmamos que f pode ser escrita como

$$f(X, Y_1) = \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j(X) Y_1^j, \quad \text{com } a_j(X) \in I\{X\}.$$

Seja $a_0(X) = f(X, 0)$. Claramente $a_0(X) \in \overline{\mathbb{Q}_p}\langle X \rangle \cap \overline{\mathbb{Q}_p}\{X\}$, e os coeficientes de $a_0(X)$ estão em I , assim $a_0(X) \in I\{X\}$.

Agora $f(X, Y_1) - a_0(X) \in I\{X, Y_1\}$ e Y_1 divide $f(X, Y_1) - a_0(X)$ em $\overline{\mathbb{Q}_p}[[X, Y_1]]$. Portanto $f(X, Y_1) - a_0(X) = Y_1 f_1(X, Y_1)$, para algum $f_1 \in \overline{\mathbb{Q}_p}[[X, Y_1]]$. Como $f - a_0 \in$

$I\{X, Y_1\}$, então $f_1(X, Y_1) \in I\{X, Y\}$. De novo, $f_1(X, 0) = a_1(X) \in I\{X\}$. Por indução sobre $j \in \mathbb{N}$, usando o argumento anterior, segue que $a_j(X) \in I\{X\}$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Seja $N > 1$. Pelo caso anterior, existem $a_k(X, Y_1, \dots, Y_{N-1}) \in I\{X, Y_1, \dots, Y_{N-1}\}$, $k \geq 0$, tais que

$$f(X, Y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k(X, Y_1, \dots, Y_{N-1}) Y_N^k;$$

pela hipótese de indução, para cada k fixo, existem $a_{j,k}(X) \in I\{X\}$, $j \in \mathbb{N}^{N-1}$, tais que

$$a_k(X, Y_1, \dots, Y_{N-1}) = \sum_{j \in \mathbb{N}^{N-1}} a_{j,k}(X) (Y_1, \dots, Y_{N-1})^j;$$

portanto

$$f(X, Y) = \sum_{j,k} a_{j,k}(X) Y^{(i,k)} \quad \square$$

2.15 Para um corpo K , tal que $[K:\mathbb{Q}_p] < \infty$, I_K denota o disco unitário de K . Seja $I_K\{X\}$ o subanel de $K[[X]]$ que contém as séries $f = \sum a_i X^i$, tais que, $a_i \in I_K$, e $|a_i| \rightarrow 0$ quando $|i| \rightarrow \infty$. Observamos que $I_K\{X\}$ é um subanel de $I\{X\}$.

Nota. No lema anterior observamos que se $f \in I\{X, Y\}$, então $f \in I_K\{X, Y\}$ para algum $[K:\mathbb{Q}_p] < \infty$, e os $a_i(X) \in I_K\{X\}$.

2.16 Seja A um anel, e J um ideal de A finitamente gerado. Então, o completado de A com respeito a J é noetheriano sempre que A seja noetheriano (ver [Mat 1, (23.K)]).

Lema 2.17. Para todo corpo K , com $[K:\mathbb{Q}_p] < \infty$, $I_K\{X_1, \dots, X_n\}$ é noetheriano.

Prova. Já que I_K é um anel de valoração discreta (ver [G, (5.4.2)]), então I_K é um domínio de ideais principais (ver [Mat 2, (11.1)]). Em particular I_K é noetheriano,

assim o anel de polinômios $A = I_K[X_1, \dots, X_n]$ é noetheriano. Considere o ideal de A dado por: $J = \sum_{i=1}^n pX_iA$. Então $I_K\{X\}$ é o completado de A com respeito a J (finitamente gerado). Portanto, por 2.16, $I_K\{X\}$ é noetheriano.

Lema 2.18. *Sejam $X = (X_1, \dots, X_m)$, $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$, $n > 0$, e $f \in I\{X, Y\}$ escrita da forma $f = \sum a_i Y^i$ onde i percorre $\mathbb{N}^n$ e $a_i = a_i(X) \in I\{X\}$. Então existe $d > 0$ tal que para cada i , com $|i| \geq d$,*

$$a_i = \sum_{|j| < d} b_{i,j} a_j, \quad \text{com } b_{i,j} \in I\{X\}, \quad \|b_{i,j}\| < 1/p.$$

Além disso os $b_{i,j}$ podem ser escolhidos, para cada j fixo com $|j| < d$, tais que $\|b_{i,j}\| \rightarrow 0$ quando $|i| \rightarrow \infty$.

Demonstração. Para cada $i \geq 0$ escrevemos $a_i = p^{\lambda(i)} \bar{a}_i$, com $\lambda(i) \in \mathbb{N}$, $\bar{a}_i \in I\{X\}$ tal que $\lambda(i) \rightarrow \infty$ quando $|i| \rightarrow \infty$. Como $f \in I\{X, Y\}$ então existe um corpo K tal que $[K:\mathbb{Q}_p] < \infty$, e se I_K é o disco unitário de K , então $f \in I_K\{X, Y\}$, e $\bar{a}_i(X) \in I_K\{X\}$. Pelo lema anterior, $I_K\{X\}$ é noetheriano, e então o ideal gerado pelos $\bar{a}_i$, é realmente gerado por $\bar{a}_j$, com $|j| < d_0$, para algum inteiro $d_0 > 0$. Portanto para cada i temos

$$\bar{a}_i = \sum_{|j| < d_0} \bar{b}_{i,j} \bar{a}_j, \quad \text{para alguns } \bar{b}_{i,j} \in I_K\{X\}.$$

Então $a_i = p^{\lambda(i)} \bar{a}_i = p^{\lambda(i)} \sum_{|j| < d_0} \bar{b}_{i,j} \bar{a}_j = p^{\lambda(i)} \sum_{|j| < d_0} \bar{b}_{i,j} a_j p^{-\lambda(j)}$. Logo, $a_i = \sum_{|j| < d_0} p^{\lambda(i)-\lambda(j)} \bar{b}_{i,j} a_j$.

Escolhemos $d \geq d_0$ suficientemente grande para que $\lambda(i) - \lambda(j) > 1$, para todo i com $|i| \geq d$ e para todo j com $|j| < d_0$.

Basta tomarmos

$$\begin{aligned}
b_{i,j} &= p^{\lambda(i)-\lambda(j)} \bar{b}_{i,j} \quad \text{para } |i| \geq d, \quad |j| < d_0 \\
&= 0 \quad \text{para } |i| \geq d, \quad d_0 \leq |j| \leq d \quad \square
\end{aligned}$$

Nota 2.19. Seja $f(X) = \sum a_i(X)Y^i \in I\{X\}$, como no lema anterior. Então para cada $x \in I^M$ e cada $|i| \geq d$, temos

$$\begin{aligned}
|a_i(x)| &= \left| \sum_{|j| < d} b_{i,j}(x) a_j(x) \right| \\
&\leq \max \{|b_{i,j}(x) a_j(x)| : |j| < d\} \\
&\leq \max \{|a_j(x)| : |j| < d\}
\end{aligned}$$

TEOREMA DE DIVISÃO E PREPARAÇÃO DE WEIERSTRASS NO CASO NÃO ARQUIMEDIANO

2.20 Seja F um corpo completo para uma ultramétrica, e $X = (X_1, \dots, X_n)$. Denotamos com $F\{X\}$ o subanel de $F[[X]]$ que contém as séries $f = \sum_{i \in \mathbb{N}^n} a_i X^i$, tais que, $|a_i| \rightarrow 0$, quando $|i| \rightarrow \infty$. Como antes, para cada $f \in F\{X\}$, definimos $\|f\| = \max \{|a_i| : i \in \mathbb{N}^n\}$.

O anel $\{f \in F\{X\} : \|f\| \leq 1\}$ é denotado por $F'\{X\}$; o ideal $\{f \in F'\{X\} : \|f\| < 1\}$ é denotado por $F''\{X\}$, e $\bar{F}\{X\}$ representa $F'\{X\}/F''\{X\}$. Em particular $\bar{F} = F'/F''$ denota o corpo residual de F . Já que $\bar{F}\{X\} \cong F[X]$ não tem divisores de zero, a norma sobre $F\{X\}$ é multiplicativa, isto é, $\|fg\| = \|f\|\|g\|$.

A sobrejeção canônica $F'\{X\} \rightarrow \bar{F}\{X\}$ é denotada por $f \rightarrow \bar{f}$. Seja $X = (X_1, \dots, X_n)$ e $Y = Y_1$. Um elemento $f \in F\{X, Y\}$, com $\|f\| = 1$, se chama

regular de grau d em Y se $\bar{f} \in \bar{F}\{X, Y\}$ é da forma

$$\lambda Y^d + \sum_{i < d} c_i(X) Y^i,$$

onde $\lambda \in \bar{F}$, $\lambda \neq 0$ e $c_0, \dots, c_{d-1} \in \bar{F}[X]$.

Teorema 2.21 (Divisão e Preparação de Weierstrass no Caso não Arquimédiano). (ver [F-vd Put, (II.2.2)]) (1) *Divisão.* Seja $X = (X_1, \dots, X_n)$, $Y = Y_1$, e $f \in F\{X, Y\}$ regular de grau d em Y . Então para toda $g \in F\{X, Y\}$ existem elementos únicos $q \in F\{X, Y\}$, e $r_0(X), \dots, r_{d-1}(X) \in F\{X\}$ tais que

$$g = fq + \sum_{i=0}^{d-1} r_i(X) Y^i.$$

Além disso, se $r = \sum_{i=0}^{d-1} r_i(X) Y^i$,

$$\|g\| = \max\{\|q\|, \|r\|\}.$$

(2) *Preparação.* Se $f \in F\{X, Y\}$ é de norma 1 (i.e. $\|f\| = 1$), então existe um F -automorfismo σ de $F\{X, Y\}$, tal que $\sigma(f)$ é regular em Y . $\square$

Corolário 2.22. (ver [F-vd Put, (II.3.2)]) Seja $X = (X_1, \dots, X_n)$, $Y = Y_1$, $f \in F\{X, Y\}$, f regular de grau d em Y . Então existe uma unidade u em $F\{X, Y\}$, e $r_0(X), \dots, r_{d-1}(X) \in F\{X\}$, tais que

$$f = u \left(Y^d + \sum_{i < d} r_i(X) Y^i \right). \quad \square$$

2.23 Finalizamos esta seção observando que para toda extensão normal finita de $\mathbb{Q}_p$, $[K:\mathbb{Q}_p] < \infty$, K é um corpo completo para a ultramétrica p -ádica (ver [G, (5.3.1)]), e portanto os resultados anteriores valem para K .

PROVA DO LEMA BÁSICO

Os resultados apresentados nas seções anteriores deste capítulo permitem-nos provar agora o *Lema 2.12 (Básico)*. Adaptamos, onde possível, a demonstração dada por J. Denef e L. van den Dries em [D-vd Dries,(1.5)].

2.24 Prova do Lema 2.12 (Básico). Seja $\varphi(X, Y)$ uma L_{an} -fórmula livre de quantificadores. Então as subfórmulas atômicas de φ são da forma $f(X, Y) = 0$ e $P(f(X, Y), g(X, Y))$, com $f, g \in I\{X, Y\}$. Agora aplicamos o Lema 2.18 a todas as f que ocorrem em φ com um valor comum d (justamente o maior). Fixamos o tal valor d , e consideramos cada $f(X, Y)$ tal que ou $f = 0$ ou $P(f, g)$ ou $P(g, f)$ ocorrem como uma subfórmula de φ .

Adotamos a notação do Lema 2.18 para f , isto é, $f = \sum a_i Y^i$ onde i percorre $\mathbb{N}^n$ e $a_i = a_i(X) \in I\{X\}$, e para cada i , com $|i| \geq d$,

$$a_i = \sum_{|j| < d} b_{i,j} a_j, \quad \text{com } b_{i,j} \in I\{X\}, \quad \|b_{i,j}\| < 1/p.$$

Além disso para cada j fixo com $|j| < d$, $\|b_{i,j}\| \rightarrow 0$ quando $|i| \rightarrow \infty$. E seja $x = (x_1, \dots, x_M)$ percorrendo I^M no que segue.

Consideramos $Z_f(X)$ a L_{an} -fórmula $\bigwedge_{|j| < d} a_j(X) = 0$. Notemos que para cada x temos

$$I \models Z_f(x) \quad \text{se, e só se,} \quad f(x, y) = 0 \quad \forall y \in I^N,$$

Introduzimos para cada $j \in \mathbb{N}^N$, com $|j| < d$, conjuntos finitos $A(j)$ e $B(j)$ dados por

$$A(j) = \{i: |i| < d, i < j\}, \quad B(j) = \{i: |i| < d, i > j\}$$

(Aqui $i < j$ refere-se à ordem lexicográfica em $\mathbb{N}^N$). Para cada $|j| < d$ seja $\mu_{f,j}$ a seguinte L_{an} -fórmula

$$a_j(X) \neq 0 \wedge \left(\bigwedge_{i \in A(j)} |a_i(X)| \leq |a_j(X)| \right) \wedge \left(\bigwedge_{i \in B(j)} |a_i(X)| < |a_j(X)| \right).$$

Portanto $\mu_{f,j}$ define em I o conjunto de $x \in I^M$ para o qual j é o elemento lexicograficamente maior de $\mathbb{N}^N$ com $|a_j(x)| = \max \{|a_i(x)| : i \in \mathbb{N}^N\}$, já que d é como no Lema 2.18 (ver Nota 2.19). Notemos que os conjuntos definidos pelas fórmulas $Z_f(X)$ e $\mu_{f,j}(X)$, $|j| < d$, são disjuntos e cobrem I^M .

Centramos agora nossa atenção sobre um índice fixo $j \in \mathbb{N}^N$ com $|j| < d$. A idéia agora é que se $I \models \mu_{f,j}(X)$, então, depois de uma transformação das Y -variáveis as quais não dependem de X , o Teorema de Preparação de Weierstrass no Caso não Arquimediano pode-se aplicar a $a_j^{-1}(X)f(X, Y)$. Para realizar esta idéia precisamos de uma tupla $V = (V_i)_{i \in A(j) \cup B(j)}$ de variáveis auxiliares (suprimimos a dependência de V sobre j para não sobrecarregar a notação).

Separamos f da seguinte maneira

$$\begin{aligned} f = & \left(\sum_{i \in A(j)} a_i Y^i \right) + a_j Y^j + \left(\sum_{i \in B(j)} a_i Y^i \right) \\ & + \sum_{|i| \geq d} \left\{ \left(\sum_{k \in A(j)} b_{i,k} a_k \right) + b_{i,j} a_j + \left(\sum_{k \in B(j)} b_{i,k} a_k \right) \right\} Y^i, \end{aligned}$$

onde os b são como no Lema 2.18. Dividimos nesta fórmula todos os a_i pelos a_j , substituindo todos os cocientes resultantes a_i/a_j por V_i ou por pV_i de acordo com $i \in A(j)$ ou $i \in B(j)$ resultando na série $\tilde{f} \in I[[X, V, Y]]$ definida por

$$\begin{aligned} \tilde{f} = & \left(\sum_{i \in A(j)} V_i Y^i \right) + Y^j + \left(\sum_{i \in B(j)} pV_i Y^i \right) \\ & + \sum_{|i| \geq d} \left\{ \left(\sum_{k \in A(j)} b_{i,k} V_k \right) + b_{i,j} + \left(\sum_{k \in B(j)} b_{i,k} pV_k \right) \right\} Y^i \end{aligned}$$

Já que $\|b_{ik}\| \rightarrow 0$ quando $|i| \rightarrow \infty$, temos $\tilde{f} \in I\{X, V, Y\}$. Claramente $\tilde{f}$ está construída tal que

$$(1) \quad \text{Se } I \models \mu_{f,j}(x), \quad \text{então } f(x, Y) = a_j(x) \tilde{f}(x, v(x), Y),$$

onde $v(x) = (v_i(x))_{i \in A(j) \cup B(j)}$, com

$$\begin{aligned} v_i(x) &= D(a_i(x), a_j(x)) \quad \text{se } i \in A(j) \\ &= D(a_i(x), pa_j(x)) \quad \text{se } i \in B(j) \end{aligned}$$

(também definimos $v(x)$ desta maneira se $I \models \neg \mu_{f,j}(x)$).

Sejam $Z_1, \dots, Z_N$, novas variáveis, $Z = (Z_1, \dots, Z_N)$, e seja

$$T: I\{X, V, Y\} \rightarrow I\{X, V, Z\}$$

o isomorfismo de $I\{X, V\}$ -álgebras dado por

$$T(Y_\lambda) = Z_\lambda + (Z_N)^{d^{N-\lambda}} \quad \text{para } 1 \leq \lambda < N, \quad T(Y_N) = Z_N.$$

Sob esta transformação $\tilde{f}$ se torna $T(\tilde{f})$, e já que $\|b_{i,j}\| < 1/p$, temos:

$$T(\tilde{f}) \equiv \left(\sum_{i \in A(j)} V_i (TY_1)^{i_1} \dots (TY_N)^{i_N} \right) + (TY_1)^{j_1} \dots (TY_N)^{j_N} \pmod{p}.$$

Seja $E = j_N + j_{N-1}d + \dots + j_1d^{N-1}$, então

$$T(\tilde{f}) \equiv C_0 + C_1 Z_N + \dots + C_{E-1} Z_N^{E-1} + Z_N^E \pmod{p}$$

onde $C_i \in I[V, Z_1, \dots, Z_{N-1}]$, pois j é lexicograficamente maior que todo $i \in A(j)$. Assim $T(\tilde{f})$ é regular de grau E em Z_N . Podemos aplicar agora o Teorema de

Preparação de Weierstrass no Caso não Arquimediano, dado em 2.21, a $T(\tilde{f})$; e pelo Colorário 2.22, temos

$$(2) \quad T(\tilde{f}) = U(Z_N^E + A_1 Z_N^{E-1} + \cdots + A_E)$$

para alguma unidade U de $I\{X, V, Z\}$ e certas $A_1, \dots, A_E \in I\{X, V, Z_1, \dots, Z_{N-1}\}$. Observemos o que isto significa para a série original f considerada como uma função sobre I^{M+N} . Associamos a cada $y \in I^N$ um ponto $z(y) = (z_1(y), \dots, z_n(y)) \in I^N$ por:

$$\begin{aligned} y_\lambda &= z_\lambda(y) + z_N(y)^{d^{N-\lambda}} \quad \text{para } 1 \leq \lambda < N \\ y_N &= z_N(y). \end{aligned}$$

Notemos que a transformação $I^N \rightarrow I^N: y \mapsto z(y)$ é uma bijeção. Para simplificar, escreveremos $\bar{A}_\mu$ para $A_\mu(x, v(x), z_1(y), \dots, z_{N-1}(y))$, $1 \leq \mu \leq E$.

Combinando (1) e (2), obtemos: Se $I \models \mu_{f,j}$, então $\forall y \in I^N$,

$$(3) \quad f(x, y) = a_j(x)U(x, v(x), y(z))(z_N(y)^E + \bar{A}_1 z_N(y)^{E-1} + \cdots + \bar{A}_E).$$

Portanto, se $I \models \mu_{f,j}(x)$, então $\forall y \in I^N$

$$(4) \quad f(x, y) = 0 \iff z_N(y)^E + \bar{A}_1 z_N(y)^{E-1} + \cdots + \bar{A}_E = 0.$$

Agora consideramos dois casos

- (a) f aparece em ϕ como uma subfórmula $f(X, Y) = 0$.
- (b) f aparece em ϕ como uma subfórmula $P(f, g)$ ou $P(g, f)$.

No caso (a) notemos que $f(X, Y) = 0$ é equivalente a

$$Z_f(X) \vee \bigvee_{|j| < d} (\mu_{f,j}(X) \wedge f(X, Y) = 0).$$

Além disso, se $|j| < d$, devido a (4) existe uma L_{an}^D -fórmula $\psi_{0,j}(X, Z)$ livre de quantificadores na qual D é aplicado só a termos que não envolvem $Z_1, \dots, Z_N$, e Z_N ocorre só polinomialmente, tal que para todo $(x, y) \in I^{M+N}$,

$$I \models (\mu_{f,j}(x) \wedge f(x, y) = 0) \leftrightarrow (\mu_{f,j}(x) \wedge \psi_{0,j}(x, z(y))).$$

Aqui usamos que a função $(x, z_1, \dots, z_{N-1}) \mapsto A_\mu(x, v(x), z_1, \dots, z_{N-1})$, definida em I^{M+N-1} , é dada por um termo $\tau_\mu(X, Z_1, \dots, Z_{N-1})$ de L_{an}^D no qual D é aplicado só a subtermos que não envolvem $Z_1, \dots, Z_{N-1}$. Seja $\psi_0(X, Z)$ a fórmula

$$Z_f \vee \bigvee_{|j| < d} (\mu_{f,j}(X) \wedge \psi_{0,j}(X, Z)).$$

Os argumentos anteriores mostram

$$(5) \quad I \models f(X, Y) = 0 \leftrightarrow \psi_0(X, Z(Y)),$$

onde $Z(Y)$ consiste de $(Y_1 - Y_N^{d^{N-1}}, \dots, Y_{N-1} - Y_N^d, Y_N)$.

Agora tratamos o caso (b). Consideremos a fórmula $|f| \leq |g|$ onde $f, g \in I\{X, Y\}$. Como indicamos no início da prova, usaremos a notação dada pelo Lema 2.18. Isto é,

$$f = \sum a_i(X)Y^i \text{ e } g = \sum b_i(X)Y^i,$$

onde os $a_i(X)$ e os $b_i(X)$ satisfazem o Lema 2.18 para um valor comum d .

Além de Z_f e $\mu_{f,j}$, consideramos as fórmulas: $Z_g(X)$ dada por $\bigwedge_{|j| < d} b_j(X) = 0$ e $\mu_{g,j}$ definida por

$$b_j(X) \neq 0 \wedge \left(\bigwedge_{i \in A(j)} |b_i(X)| \leq |b_j(X)| \right) \wedge \left(\bigwedge_{i \in B(j)} |b_i(X)| < |b_j(X)| \right).$$

Já que

$$|f| \leq |g| \text{ se, e só se } f = 0 \vee (g = 0 \wedge f = 0) \vee ((f \neq 0 \wedge g \neq 0) \wedge |f| \leq |g|),$$

podemos supor $f(X, Y) \neq 0$, e $g(X, Y) \neq 0$ (caso contrário usamos o caso (a)). Como $f \neq 0 \wedge g \neq 0$ é equivalente a $fg \neq 0$, assumiremos $fg(X, Y) = f(X, Y)g(X, Y) \neq 0$.

Observe que para todo $(x, y) \in I^{M+N}$, $f(x, y) \neq 0$ implica $\mu_{f,j}(x)$ para algum j com $|j| < d$ (senão $Z_f(x)$ implica $f(x, y) = 0$). Igualmente $g(x, y) \neq 0$ implica $\mu_{g,k}(x)$ para algum k com $|k| < d$. Temos assim que

$$I \models fg(X, Y) \neq 0 \leftrightarrow fg(X, Y) \neq 0 \wedge \left(\bigvee_{|j|, |k| < d} \mu_{f,j}(X) \wedge \mu_{g,k}(X) \right).$$

Portanto

$$I \models fg(X, Y) \neq 0 \wedge |f(X, Y)| \leq |g(X, Y)| \leftrightarrow \\ fg(X, Y) \neq 0 \wedge \left(\bigvee_{|j|, |k| < d} \mu_{f,j}(X) \wedge \mu_{g,k}(X) \wedge |f(X, Y)| \leq |g(X, Y)| \right).$$

Agora, se $I \models \mu_{f,j}(x) \wedge \mu_{g,k}(x)$ então $\forall y \in I^N$

$$f(x, y) = a_j(x)U(x, v(x), z(y))(z_N(y)^E + \bar{A}_1 z_N(y)^{E-1} + \dots + \bar{A}_E)$$

e

$$g(x, y) = b_k(x)U'(x, v(x), z(y))(z_N(y)^{E'} + \bar{B}_1 z_N(y)^{E'-1} + \dots + \bar{B}_{E'})$$

onde $E' = k_N + k_{N-1}d + \dots + k_1d^{N-1}$, e $U(x, v, z), U'(x, v, z)$ são unidades de $I\{X, V, Z\}$ ($Z = Z_1, \dots, Z_N$), e os $\bar{A}_\alpha = A_\alpha(x, v(x), z_1(y), \dots, z_{N-1}(y))$, $\bar{B}_\alpha = B_\alpha(x, v(x), z_1(y), \dots, z_{N-1}(y))$, são como em (2).

Assim, para cada tupla (x, v, z) , $U(x, v, z)$ e $U'(x, v, z)$ são unidades de I , portanto $|U(x, v, z)| = |U'(x, v, z)| = 1$. Assim se $I \models \mu_{f,j}(x) \wedge \mu_{g,k}(x)$ então $\forall y \in I^N$,

$$|f(x, y)| = |a_j(x)||U(x, v(x), z(y))|(z_N(y)^E + \bar{A}_1 z_N(y)^{E-1} + \dots + \bar{A}_E)| \\ = |a_j(x)|(z_N(y)^E + \bar{A}_1 z_N(y)^{E-1} + \dots + \bar{A}_E)|$$

e

$$\begin{aligned} |g(x, y)| &= |b_k(x)| |U'(x, v(x), z(y))| |(z_N(y)^{E'} + \bar{B}_1 z_N(y)^{E'-1} + \dots + \bar{B}_{E'})| \\ &= |b_k(x)| |(z_N(y)^{E'} + \bar{B}_1 z_N(y)^{E'-1} + \dots + \bar{B}_{E'})|. \end{aligned}$$

Existe então uma L_{an}^D -fórmula livre de quantificadores $\psi'_1(X, Z_1, \dots, Z_N)$ na qual D é aplicado unicamente a termos que não envolvem $Z_1, \dots, Z_N$, e Z_N ocorre polinomialmente tal que

$$I \models fg(X, Y) \neq 0 \wedge |f(X, Y)| \leq |g(X, Y)| \leftrightarrow fg(X, Y) \neq 0 \wedge \psi'_1(X, Z).$$

Finalmente (usando o caso (a)) temos que existe uma L_{an} -fórmula livre de quantificadores $\psi_1(X, Z_1, \dots, Z_N)$ na qual D é aplicado unicamente a termos que não envolvem $Z_1, \dots, Z_{N-1}$, e Z_N ocorre polinomialmente tal que

$$(6) \quad I \models |f(X, Y)| \leq |g(X, Y)| \leftrightarrow \psi_1(X, Z).$$

De (5) e (6) obtemos uma L_{an}^D -fórmula livre de quantificadores $\phi^d(X, Z)$ na qual D é aplicado unicamente a termos que não envolvem $Z_1, \dots, Z_{N-1}$, e Z_N ocorre só polinomialmente, tal que

$$(7) \quad I \models \phi(X, Y) \leftrightarrow \phi^d(X, Z(Y)).$$

Dado que $y \mapsto z(y)$ é uma permutação de I^N , isto implica que

$$(8) \quad I \models \exists Y \phi(X, Y) \leftrightarrow \exists Z \phi^d(X, Z).$$

Já que em $\phi^d(X, Z)$ a variável Z_N ocorre só polinomialmente podemos aplicar o Lema 2.11 a $\exists Z_N \phi^d(X, Z)$. Obtemos uma L_{an}^D -fórmula livre de quantificadores $\psi(X, Z_1, \dots, Z_{N-1})$ tal que

$$(9) \quad I \models \exists Z_N \phi^d(X, Z) \longleftrightarrow \psi(X, Z_1, \dots, Z_{N-1}).$$

Combinando (8) e (9) obtemos a equivalência desejada

$$I \models \exists Y \phi(X, Y) \longleftrightarrow \exists Z_1 \cdots \exists Z_{N-1} \psi(X, Z_1, \dots, Z_{N-1}). \quad \square$$

CAPÍTULO 3

UM TEOREMA DE ELIMINAÇÃO DE QUANTIFICADORES PARA O DISCO UNITÁRIO DE $\mathbb{C}_p$

Neste capítulo provaremos que o disco unitário de $\mathbb{C}_p$ possui eliminação de quantificadores na linguagem L_{an}^D introduzida no Capítulo 2.

As provas dos principais resultados são análogas às apresentadas no capítulo anterior, e serão omitidas.

NOTAÇÃO E RESULTADOS PRELIMINARES

Nesta seção fixamos a notação usada no que segue do capítulo, e apresentamos alguns resultados preliminares.

3.1 Seja $\mathbb{C}_p$ o completamento de $\overline{\mathbb{Q}_p}$ com respeito à norma p -ádica, e $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{C}_p : |x| \leq 1\}$ o disco unitário de $\mathbb{C}_p$. Notemos que $\mathbb{C}_p$ é algebricamente fechado (ver [G,(5.7.8)]).

Para $X = (X_1, \dots, X_n)$, lembramos que $I\{X\}$ é o subanel de $\overline{\mathbb{Q}_p}[[X]]$ que contém as séries $f = \sum_{i \in \mathbb{N}^n} a_i X^i$ com coeficientes em I_K , o disco unitário de K , uma extensão normal finita de $\mathbb{Q}_p$ ($[K:\mathbb{Q}_p] < \infty$), tais que $|a_i| \rightarrow 0$, quando $|i| \rightarrow \infty$.

Observemos que para todo $x \in \mathcal{D}^n$ e $f \in I\{X\}$, $f(x)$ é uma série convergente, e $f(x) \in \mathcal{D}$.

3.2 Definimos $D: \mathcal{D}^2 \rightarrow \mathcal{D}$ por

$$D(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1/x_2 & \text{se } |x_1| \leq |x_2|, \ x_2 \neq 0 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Lembramos que L_{an}^D é a linguagem que contém um símbolo de operação m -ário f para cada $f \in I\{X_1, \dots, X_m\}$, $m \geq 0$, um símbolo de operação binário D , e um símbolo de relação binário P (onde $P(x, y)$ é também denotado por $|y| \leq |x|$).

Claramente $\mathcal{D}$ é uma L_{an}^D -estrutura com as interpretações naturais. Se $X = (X_1, \dots, X_n)$, observemos que para toda $f \in I\{X\}$, e todo $x \in I^n$, $f(x) \in I$. Portanto $(I, (f)_{f \in I\{X\}}, D, P)$ é uma L_{an}^D -subestrutura de $(\mathcal{D}, (f)_{f \in I\{X\}}, D, P)$.

Por 2.10, omitindo o símbolo D , obtemos a linguagem L_{an} . Lembramos que qualquer L_{an} -fórmula livre de quantificadores $\phi(X_1, \dots, X_m)$ é equivalente a uma fórmula na qual todas as subfórmulas atômicas são da forma $f(X_1, \dots, X_m) = 0$ ou $P(f, g)$, com $f, g \in I\{X\}$.

Neste capítulo queremos provar que $\mathcal{D}$ possui eliminação de quantificadores na linguagem L_{an}^D .

Substituindo I por $\mathcal{D}$ no Lema 2.7 obtemos o seguinte

Lema 3.3. *Seja $\phi(X_1, \dots, X_M)$ uma L_{an}^D -fórmula livre de quantificadores na qual o símbolo D ocorre m vezes. Então existe uma L_{an} -fórmula livre de quantificadores $\phi_m(X_1, \dots, X_M, X_{M+1}, \dots, X_{M+m})$, tal que $\mathcal{D} \models \phi \leftrightarrow \exists X_{M+1} \dots X_{M+m} \phi_m$. $\square$*

Como antes $L_{a,P}$ é a sublinguagem de L_{an} contendo os símbolos $\{+, -, \cdot, 0, 1, P\}$.

3.4 $(\mathbb{C}_p, +, -, \cdot, 0, 1, P)$ possui eliminação de quantificadores na linguagem $L_{a,P}$. De novo, basta usar o teorema de eliminação de quantificadores para corpos algebricamente fechados valorados (ver Teorema 1.18) e o fato de que

$$P(x, y) \iff |y| \leq |x| \iff v(x) \leq v(y)$$

é uma l.d. relação sobre $\mathbb{C}_p$, onde v denota a valoração p -ádica.

Observamos que $(\mathcal{D}, +, -, \cdot, 0, 1, P|_{\mathcal{D}})$ é uma $L_{a,P}$ -subestrutura de $(\mathbb{C}_p, +, -, \cdot, 0, 1, P)$. A estrutura $(\mathcal{D}, +, -, \cdot, 0, 1, P|_{\mathcal{D}})$ será notada simplesmente por $(\mathcal{D}, +, -, \cdot, 0, 1, P)$.

Substituindo I por $\mathcal{D}$, e $\overline{\mathbb{Q}}_p$ por $\mathbb{C}_p$, na prova do Lema 2.11, obtemos o seguinte

Lema 3.5. *Seja $\phi(X_1, \dots, X_{M+1})$ uma L_{an}^D -fórmula livre de quantificadores na qual a variável X_{M+1} ocorre polinomialmente. Então podemos obter uma L_{an}^D -fórmula $\psi(X_1, \dots, X_M)$ livre de quantificadores tal que*

$$\mathcal{D} \models \exists X_{M+1} \phi \leftrightarrow \psi(X_1, \dots, X_M).$$

PROVA DO TEOREMA PRINCIPAL

Observamos que o Teorema de Divisão e Preparação de Weierstrass dado em 2.21 vale para $\mathbb{C}_p$.

Uma prova idêntica à dada em 2.24 (com as substituições óbvias), demonstra o seguinte

Lema 3.6. *(Básico) Seja $X = (X_1, \dots, X_M)$, $Y = (Y_1, \dots, Y_N)$, $N > 0$. Se $\phi(X, Y)$ é uma L_{an} -fórmula livre de quantificadores, então existe uma L_{an}^D -fórmula livre de quantificadores $\psi(X, Z_1, \dots, Z_{N-1})$ tal que*

- (i) $\mathcal{D} \models (\exists Y \phi(X, Y)) \longleftrightarrow \exists Z_1 \dots Z_{N-1} \psi(X, Z_1, \dots, Z_{N-1})$.
- (ii) em ψ o símbolo de operação D é aplicado só a termos que não envolvem as variáveis $Z_1, \dots, Z_{N-1}$. $\square$

Assim, repetindo a prova dada em 2.13 obtemos o seguinte

Teorema 3.7. $\mathcal{D}$ admite eliminação de quantificadores na linguagem L_{an}^D . $\square$

CAPÍTULO 4

CONJUNTOS SEMI-ALGÉBRICOS EM $\mathbb{C}_p$ E $\overline{\mathbb{Q}_p}$, SEMI-ANALÍTICOS E SUBANALÍTICOS DE $\mathbb{C}_p$

Usando o predicado $P(x, y): |y| \leq |x|$ introduzimos as noções de *subconjunto semi-analítico* de $\mathbb{C}_p^M$ (resp. $\overline{\mathbb{Q}_p}^M$), e provamos alguns fatos básicos sobre eles. Baseados no trabalho de Serre [Se], formulamos as noções de *função analítica p -ádica complexa*, e *variedade analítica p -ádica complexa*. Utilizando as noções anteriores definimos o conceito de *subconjunto subanalítico* de uma variedade analítica p -ádica complexa. Finalmente provamos um teorema de existência de *cotas* para conjuntos subanalíticos de $\mathbb{C}_p$.

CONJUNTOS SEMI-ALGÉBRICOS DE $\mathbb{C}_p$ E $\overline{\mathbb{Q}_p}$

4.1 Um subconjunto $A \subseteq \mathbb{C}_p^M$ é chamado *semi-algébrico* se é um elemento da álgebra de Boole gerada pelos conjuntos da forma

$$\{x \in \mathbb{C}_p^M : f(x) = 0, |g(x)| \leq |h(x)|\},$$

onde $f, g, h \in \mathbb{C}_p[X_1, \dots, X_M]$.

Lembramos que $L_{a,P}$ é a linguagem que contém os símbolos $+, \cdot, 0, 1, P$ (onde $P(X, Y)$ denota $|X| \leq |Y|$). Seja $L_{a,P}^{\mathbb{C}_p}$ a linguagem obtida ao agregar um símbolo de constante para cada elemento de $\mathbb{C}_p$.

4.2 Pelo Teorema 1.18 (Eliminação de Quantificadores para Corpos Valorados Algebricamente Fechados), $\mathbb{C}_p$ possui eliminação de quantificadores na linguagem $L_{a,P}^{\mathbb{C}_p}$.

Claramente um subconjunto $A \subseteq \mathbb{C}_p^M$ é semi-algébrico se, e só se, A é definido por uma $L_{a,P}^{\mathbb{C}_p}$ -fórmula livre de quantificadores.

Lema 4.3. *Seja A um subconjunto semi-algébrico de $\mathbb{C}_p^M$.*

- (1) *Se $\pi: \mathbb{C}_p^M \rightarrow \mathbb{C}_p^{M-1}$ é a projeção canônica nas $M-1$ primeiras variáveis, então $\pi(A)$ é um subconjunto semi-algébrico de $\mathbb{C}_p^{M-1}$.*
- (2) *O fecho de A , $\overline{A} \subseteq \mathbb{C}_p^M$, é um subconjunto semi-algébrico de $\mathbb{C}_p^M$.*

Prova. (i) Seja $\phi(X_1, \dots, X_M)$ a $L_{a,P}^{\mathbb{C}_p}$ -fórmula livre de quantificadores que define A . Então por 4.2 existe uma $L_{a,P}^{\mathbb{C}_p}$ -fórmula livre de quantificadores $\psi(X_1, \dots, X_{M-1})$ tal que

$$\mathbb{C}_p \models \exists X_M \phi(X_1, \dots, X_M) \leftrightarrow \psi(X_1, \dots, X_{M-1}).$$

Como $(x_1, \dots, x_{M-1}) \in \pi(A)$ se, e só se, existe x_M tal que $(x_1, \dots, x_{M-1}, x_M) \in A$, então ψ define $\pi(A)$. Isto prova (i).

(ii) Seja ϕ como em (i). Observemos que

$$(x_1, \dots, x_M) \in \overline{A} \iff$$

$$\forall y[y = 0 \vee \exists z_1 \dots z_M(\phi(z_1, \dots, z_M) \wedge |x_1 - z_1| < |y| \wedge \dots \wedge |x_M - z_M| < |y|)].$$

A equivalência anterior e 4.2 provam (ii). $\square$

4.4 Analogamente, um subconjunto $A \subseteq \overline{\mathbb{Q}_p^M}$ é chamado *semi-algébrico* se é um elemento da álgebra de Boole gerada pelos conjuntos da forma

$$\{x \in \overline{\mathbb{Q}_p^M} : f(x) = 0, |g(x)| \leq |h(x)|\},$$

onde $f, g, h \in \overline{\mathbb{Q}_p}[X_1, \dots, X_M]$.

Seja $L_{a,p}^{\overline{\mathbb{Q}_p}}$ a linguagem obtida ao agregar a $L_{a,p}$ um símbolo de constante por cada elemento de $\overline{\mathbb{Q}_p}$. De novo pelo Teorema 1.18, $\overline{\mathbb{Q}_p}$ possui eliminação de quantificadores na linguagem $L_{a,p}^{\overline{\mathbb{Q}_p}}$.

É claro que um subconjunto $A \subseteq \overline{\mathbb{Q}_p^M}$ é semi-algébrico se, e só se, A é definido por uma $L_{a,p}^{\overline{\mathbb{Q}_p}}$ -fórmula livre de quantificadores, e então o seguinte lema se satisfaz.

Lema 4.5. *Seja A um subconjunto semi-algébrico de $\overline{\mathbb{Q}_p^M}$.*

- (1) *Se $\pi: \overline{\mathbb{Q}_p^M} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p^{M-1}}$ é a projeção canônica, então $\pi(A)$ é um subconjunto semi-algébrico de $\overline{\mathbb{Q}_p^{M-1}}$.*
- (2) *O fecho de A , $\overline{A} \subseteq \overline{\mathbb{Q}_p^M}$, é um subconjunto semi-algébrico de $\overline{\mathbb{Q}_p^M}$. $\square$*

FUNÇÕES ANALÍTICAS p -ÁDICAS COMPLEXAS

Nesta seção F denota um corpo completo com respeito à norma dada por um valor absoluto não trivial $|\cdot|$.

4.6 Sejam $m \in \mathbb{N}$, $0 < r_1, \dots, r_m \in \mathbb{R}$. O *polidisco* em F^m com centro em $x = (x_1, \dots, x_m)$ e raio $r = (r_1, \dots, r_m)$ é definido por

$$\Delta(x, r) := \{(y_1, \dots, y_m) \in F^m : |x_1 - y_1| < r_1, \dots, |x_m - y_m| < r_m\}.$$

O *polidisco fechado* em F^m com centro em $x = (x_1, \dots, x_m)$ e raio $r = (r_1, \dots, r_m)$ está dado por

$$\overline{\Delta}(x, r) := \{(y_1, \dots, y_m) \in F^m : |x_1 - y_1| \leq r_1, \dots, |x_m - y_m| \leq r_m\}.$$

Em particular, para $x = 0$ temos as seguintes notações

$$\Delta(r) := \Delta(0, r), \quad \overline{\Delta}(r) = \overline{\Delta}(0, r).$$

Também serão usadas as seguintes abreviações

$$|x| < r \iff |x_j| < r_j, \quad j = 1, \dots, m. \quad |x| \leq r \iff |x_j| \leq r_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

Seja $r' = (r'_1, \dots, r'_m)$, $0 < r'_1, \dots, r'_m \in \mathbb{R}$, então $r < r'$ (resp. $r \leq r'$) denota $r_j < r'_j$ (resp. $r_j \leq r'_j$) para $j = 1, \dots, m$.

Finalmente lembramos que se $i = (i_1, \dots, i_m) \in \mathbb{N}^m$, então $|i| = i_1 + \dots + i_m$.

Definição 4.7. Seja $f = \sum_{i \in \mathbb{N}^m} a_i X^i \in F[[X_1, \dots, X_m]]$, e $r = (r_1, \dots, r_m)$, $0 < r_i \in \mathbb{R}$. A série f é dita *convergente em* $\overline{\Delta}(r)$ se

$$\sum_{i \in \mathbb{N}^m} |a_i| r^i < \infty.$$

A série f é dita *convergente em* $\Delta(r)$ se f converge em $\overline{\Delta}(r')$ para todo $r < r'$. Finalmente f é dita *convergente* se é convergente em $\Delta(r)$, para algum $r > 0$.

Seja $f = \sum a_i X^i$ convergente em $\Delta(r)$. Para cada $x \in \Delta(r)$ a série $\sum a_i x^i$ converge absolutamente, e a soma $\tilde{f}(x)$ é uma função contínua de x . O seguinte lema permite identificar uma série formal de potências com sua função associada $\tilde{f}$.

Lema 4.8. (ver [Se, LG2.3]) $\tilde{f} = 0$ implica $f = 0$. $\square$

Definição 4.9. Seja $U \subseteq F^n$ um aberto e seja $\phi: U \rightarrow F$ uma função. Então ϕ é chamada *analítica* em U se para cada $x \in U$ existe uma série de potências f e um raio $r > 0$ tal que

- (1) $\Delta(x, r) \subseteq U$, e
- (2) f converge em $\Delta(r)$, e para cada $h \in \Delta(r)$, $\phi(x + h) = \tilde{f}(h)$.

Note que se ϕ é analítica em U e $x \in U$, então a série f da definição é única e chama-se a *expansão local de ϕ em x* .

Seja $U \subseteq F^m$ e $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n): U \rightarrow F^n$. Então ϕ é dita analítica se ϕ_i é analítica para cada $1 \leq i \leq n$.

Teorema 4.10. (ver [Se, LG2.6]) Suponha $f: U \rightarrow V$ e $g: V \rightarrow W$ analíticas, onde $U \subseteq F^m$, $V \subseteq F^s$, $W \subseteq F^n$, são abertos. Então $g \circ f$ é analítica. $\square$

Definição 4.11. Quando $F = \mathbb{C}_p$, as funções analíticas são chamadas *funções analíticas p -ádicas complexas*.

VARIEDADES ANALÍTICAS p -ÁDICAS COMPLEXAS

Como na seção anterior, F denota um corpo completo com respeito à norma dada por um valor absoluto $|\cdot|$.

4.12 Seja X um espaço topológico. Uma *carta* c sobre X é uma tripla $c = (U, \phi, n)$ tal que

- (1) U é um subconjunto aberto de X
- (2) $n \in \mathbb{N}$

- (3) $\phi: U \rightarrow \phi(U) \subseteq F^n$, onde $\phi(U)$ é um subconjunto aberto de F^n e ϕ é um homeomorfismo.

4.13 Para uma carta $c = (U, \phi, n)$ sobre X , usaremos as seguintes notações

$U = O(c) =$ Conjunto aberto de c .

$\phi = M(c) =$ Transformação de c .

$n = \dim_F(c) =$ Dimensão de c .

4.14 Sejam $c = (U, \phi, n)$ e $d = (V, \psi, m)$ duas cartas sobre X . Dizemos que c e d são compatíveis se, para $W = U \cap V$, as transformações $\psi\phi^{-1}|_{\phi(W)}$ e $\phi\psi^{-1}|_{\psi(W)}$ são analíticas.

Se c e d são compatíveis, então $W \neq \emptyset$ implica $n = m$.

4.15 Uma família de cartas $\{c_j\}_{j \in J}$ sobre X é chamada *um recobrimento* de X se

$$\bigcup_{j \in J} O(c_j) = X.$$

Um *atlas* A sobre X é uma família de cartas sobre X a qual cobre X , e tal que as cartas da família são mutuamente compatíveis.

Dois atlas A e A' sobre X são chamados compatíveis quando é satisfeita uma das duas condições equivalentes seguintes

- (1) $A \cup A'$ é um atlas.
- (2) Se $c \in A$ e $c' \in A'$, então c e c' são compatíveis.

A compatibilidade de atlas é uma relação de equivalência. De fato, as propriedades de simetria e reflexividade são óbvias pela definição. Agora sejam A_1 , A_2 , e A_3 atlas, tais que A_1 é compatível com A_2 , e A_2 é compatível com A_3 . Dados $c_1 \in A_1$ e $c_3 \in A_3$, temos que provar que c_1 e c_3 são compatíveis. Seja $V = O(c_1) \cap O(c_3)$. Quando $V = \emptyset$, então c_1 e c_3 são trivialmente compatíveis. Suponha $V \neq \emptyset$, e seja $\phi_1 = M(c_1)$ e $\phi_3 = M(c_3)$. Por simetria basta provar que $\phi_3\phi_1^{-1}$ é analítica sobre $\phi_1(V)$. Para cada $x \in V$, provaremos que $\phi_3\phi_1^{-1}$ é analítica em $\phi_1(x)$. Escolha $c_2 = (U, \phi, n) \in A_2$ tal que $x \in U$. Então

$$\phi\phi_1^{-1}: \phi_1(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$$

é analítica em $\phi_1(x)$, e

$$\phi_3\phi^{-1}: \phi(U \cap V) \rightarrow \phi_3(U \cap V)$$

é analítica em $\phi(x)$. Portanto $\phi_3\phi_1^{-1} = (\phi_3\phi^{-1})(\phi\phi_1^{-1})$ é analítica em $\phi_1(x)$.

Definição 4.16. Seja X um espaço topológico. Uma *estrutura de variedade analítica sobre X* é uma classe de equivalência de atlas compatíveis sobre X .

Um atlas A sobre X é dito *pleno* se para cada carta c sobre X , com c compatível com todas as $c' \in A$, se tem que $c \in A$.

Claramente, cada classe de equivalência de atlas sobre X contém exatamente um atlas pleno. Pode-se então definir equivalentemente a noção de variedade analítica da seguinte maneira: uma estrutura de variedade analítica sobre X é a escolha de um atlas pleno sobre X .

No que se segue, X denota um espaço topológico fixo com uma estrutura de variedade analítica. $A(X)$ denota seu atlas pleno. Por uma carta sobre X entende-se uma carta de $A(X)$.

Seja X uma variedade analítica e $x \in X$, então $\dim_x X$, a *dimensão de X em x* , é definida como a dimensão de uma carta c sobre X tal que $x \in O(c)$. A função $x \mapsto \dim_x X$ é localmente constante; se esta função é constante, e igual a n , dizemos que X é *de dimensão constante n* .

Para alguns corpos destacados F , as variedades analíticas de dimensão constante n , recebem nomes especiais, por exemplo,

variedade analítica real, quando $F = \mathbb{R}$.

variedade analítica complexa, quando $F = \mathbb{C}$.

variedade analítica p -ádica, quando $F = \mathbb{Q}_p$.

Definição 4.17. Seja $F = \mathbb{C}_p$. Uma variedade analítica de dimensão constante n é chamada *variedade analítica p -ádica complexa*.

Seja B um subconjunto de X . Dizemos que B é uma *bola* se existe uma carta $c = (U, \phi, n)$ tal que $B \subseteq U$ e ϕB é um polidisco da forma

$$\{(y_1, \dots, y_n) \in F^n : |x_1 - y_1| < r, \dots, |x_n - y_n| < r\},$$

para algum $(x_1, \dots, x_n) \in F^n$, onde $0 < r \in \mathbb{R}$.

4.18 Enunciamos um par de propriedades topológicas para uma variedade analítica X (ver [Se, (LG 3.3)]).

- (1) Todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança B que é uma bola. Em particular, X é localmente um espaço métrico completo (portanto um espaço de Baire).
- (2) Suponha que F é localmente compacto. Então se X é Hausdorff, X é localmente compacto.

Como $\mathbb{C}_p$ não é localmente compacto (ver [G,]), o anterior item (2) mostra uma

importante diferença topológica das variedades de Hausdorff analíticas p -ádicas complexas (as quais não necessariamente são localmente compactas) com as variedades de Hausdorff analíticas p -ádicas (resp. reais, resp. complexas).

Sejam X e Y variedades analíticas. Uma função $f: X \rightarrow Y$ é chamada *analítica* se

- (1) f é contínua, e
- (2) f é *localmente dada por funções analíticas*, isto é, existem atlas A de X e B de Y tais que se $c = (U, \phi, n) \in A$ e $d = (V, \psi, m) \in B$, então para $W = U \cap f^{-1}(V)$, a composição

$$\phi(W) \xrightarrow{\phi^{-1}} W \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\psi} \psi(V)$$

é analítica.

Seja X uma variedade e U um aberto em X . Se $A(X)$ é o atlas de X , definimos

$$A_U = \{c \in A: O(c) \subseteq U\}.$$

Então A_U define um atlas pleno sobre U . O espaço U junto com seu atlas A_U é chamado uma subvariedade aberta de X .

Agora $f: U \rightarrow F^n$ é chamada analítica se é uma transformação analítica entre as variedades U e F^n .

CONJUNTOS SUBANALÍTICOS DE $\mathbb{C}_p$

Nesta seção, M denotará uma variedade analítica p -ádica complexa de Hausdorff. Escreveremos simplesmente “ M uma variedade”.

Definição 4.19. Seja M uma variedade.

- (1) Um subconjunto $S \subseteq M$ é chamado *semi-analítico em um ponto* $x \in M$ se x possui uma vizinhança U em M tal que $U \cap S$ é um elemento da álgebra de

Boole gerada pelos conjuntos da forma

$$\{y \in U: f(y) = 0, |g(y)| \leq |h(y)|\}$$

onde f, g, h são funções analíticas sobre U ($f, g, h: U \rightarrow \mathbb{C}_p$).

- (2) Um subconjunto $S \subseteq M$ é chamado *semi-analítico* em M se S é semi-analítico em cada ponto de M .
- (3) Um subconjunto $S \subseteq M$ é chamado *subanalítico em um ponto* $x \in M$ se existe uma vizinhança U de x em M e um conjunto semi-analítico S' em $U \times \mathcal{D}^N$, para algum N , tal que $U \cap S = \pi(S')$, onde $\pi: U \times \mathcal{D}^N \rightarrow U$ é a projeção canônica.
- (4) Um subconjunto $S \subseteq M$ é chamado *subanalítico* em M se S é subanalítico em cada ponto de M .

Claramente todo subconjunto de $\mathcal{D}^M$, definido por uma L_{an} -fórmula livre de quantificadores, é semi-analítico.

Lema 4.20. *Seja $S \subseteq \mathcal{D}^M$ definível em $\mathcal{D}$ por uma L_{an}^D -fórmula. Então S é subanalítico em $\mathcal{D}^M$.*

Prova. Seja $S \subseteq \mathcal{D}^M$ definível em $\mathcal{D}$ por uma L_{an}^D -fórmula, então pelo Teorema 3.7 existe uma L_{an}^D -fórmula livre de quantificadores $\phi(X_1, \dots, X_M)$ que define S . Assim, pelo Lema 3.3 existe uma L_{an} -fórmula livre de quantificadores $\phi_m(X_1, \dots, X_M, X_{M+1}, \dots, X_{M+m})$, $m \in \mathbb{N}$, tal que

$$\mathcal{D} \models \phi(X_1, \dots, X_M) \longleftrightarrow \exists X_{M+1} \cdots X_{M+m} (\phi_m(X_1, \dots, X_M, X_{M+1}, \dots, X_{M+m})).$$

Portanto, se S' é o subconjunto de $\mathcal{D}^{M+m}$ definido por ϕ_m , então S' é semi-analítico e $S = \pi(S')$, onde $\pi: \mathcal{D}^M \rightarrow \mathcal{D}^{M+m}$ é a projeção canônica. Isto prova que S é subanalítico em $\mathcal{D}^M$. $\square$

Definição 4.21. Um subconjunto S de $\mathcal{D}^M$ é chamado *fortemente subanalítico* se S é definível em $\mathcal{D}$ por uma L_{an}^D -fórmula.

Lema 4.22. *Sejam $f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$, $g(X) = b_0 + b_1X + \cdots + b_mX^m$ dois polinômios em $\mathbb{C}_p[X]$ ($X = X_1$). Suponha que existe $\alpha \in \mathcal{D}$ tal que $\alpha \neq 0$ e*

$$|f(\alpha)| = |g(\alpha)| \neq 0.$$

Então existem infinitos $\sigma \in \mathcal{D}$ tais que $|f(\sigma)| = |g(\sigma)|$.

Prova. Sem perda de generalidade podemos supor $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$. Tome $\beta \in \mathcal{D}$ com $0 < |\beta| < |\alpha|$ tal que

$$\left| a_k \left(\sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \alpha^{k-j} \beta^j \right) \right| < |f(\alpha)|$$

para todo $k = 1, \dots, n$, e

$$\left| b_k \left(\sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \alpha^{k-j} \beta^j \right) \right| < |g(\alpha)|$$

para todo $k = 1, \dots, m$. Assim

$$\begin{aligned} |f(\alpha + \beta)| &= |a_0 + a_1(\alpha + \beta) + \cdots + a_n(\alpha + \beta)^n| \\ &= \left| a_0 + \sum_{k=1}^n a_k(\alpha + \beta)^k \right| \\ &= \left| a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \alpha^{k-j} \beta^j \right) \right| \\ &= \left| a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \left(\alpha^k + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \alpha^{k-j} \beta^j \right) \right| \\ &= \left| a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \alpha^k + \sum_{k=1}^n a_k \left(\sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \alpha^{k-j} \beta^j \right) \right| \\ &= \left| f(\alpha) + \sum_{k=1}^n a_k \left(\sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \alpha^{k-j} \beta^j \right) \right| \end{aligned}$$

mas

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \left(\sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \alpha^{k-j} \beta^j \right) \right| \leq \max \{ |a_k| \left(\sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \alpha^{k-j} \beta^j \right) : k = 1, \dots, n \} < |f(\alpha)|.$$

Portanto

$$|f(\alpha + \beta)| = |f(\alpha)|.$$

Similarmente, $|g(\alpha + \beta)| = |g(\alpha)|$. Seja $\sigma = \alpha + \beta$, então $|\sigma| = |\alpha + \beta| = |\alpha| \leq 1$ e $|f(\sigma)| = |f(\alpha)| = |g(\alpha)| = |g(\sigma)|$. $\square$

Corolário 4.23. *Sejam $f(X), g(X) \in \mathbb{C}_p[X]$ como no lema anterior. Seja $d = \max \{ \text{grau}(f), \text{grau}(g) \}$. Suponha que existem diferentes $\alpha_0, \dots, \alpha_{d+1} \in \mathcal{D}$ tais que $|f(\alpha_i)| = |g(\alpha_i)|$ para $i = 0, \dots, d+1$. Então existem infinitos $\beta \in \mathcal{D}$ tais que $|f(\beta)| = |g(\beta)|$. $\square$*

Lema 4.24. *Seja $S \subseteq \mathcal{D}^{M+N}$ fortemente subanalítico, então existe uma cota $A \in \mathbb{N}$ tal que para cada $x \in \mathcal{D}^M$ com fibra finita S_x temos que $\text{card}(S_x) \leq A$.*

Prova. Seja $\phi(X, Y)$ uma L_{an}^D -fórmula livre de quantificadores definindo S . Aplicando o Lema 3.3 a ϕ (ver também a nota depois do Lema 2.7) obtemos uma L_{an} -fórmula livre de quantificadores $\phi^*(X, Y, Y_{N+1}, \dots, Y_{N+n})$ tal que S é a imagem injetiva pela projeção canônica, $(x, y, y_{N+1}, \dots, y_{N+n}) \mapsto (x, y)$, de $S^* \subseteq \mathcal{D}^{M+N+n}$, definido por ϕ^* . Portanto $\text{card } S_x = \text{card } S_x^*$, para cada $x \in \mathcal{D}^M$.

Assim, substituindo S por S^* podemos assumir sem perda de generalidade que ϕ é uma L_{an} -fórmula, isto é, D não ocorre em ϕ .

Agora, é suficiente provar por indução sobre N a seguinte afirmação:

$R(N)$: Se $\phi(X, Y)$ é uma L_{an}^D -fórmula livre de quantificadores na qual D é aplicado só a termos que não envolvem $Y = (Y_1, \dots, Y_N)$, então existe uma cota A como é requerida para $S \subseteq \mathcal{D}^{M+N}$ definido por ϕ .

Claramente $R(0)$ é válida, com $A = 1$. Seja $N > 0$ e suponha $R(N-1)$ válido. Seja $\phi(X, Y)$ uma fórmula como foi estabelecida em $R(N)$. Para provar $R(N)$ para

esta ϕ podemos substituir $D(t_1, t_2)$ em ϕ por novas X -variáveis e reduzir ao caso em que ϕ é uma L_{an} -fórmula. Com ϕ desta forma podemos usar a prova do Lema 2.12 para ver que existe L_{an}^D -fórmula livre de quantificadores $\phi^d(X, Z)$, $Z = (Z_1, \dots, Z_N)$ tal que

$$\mathcal{D} \models \phi(X, Y) \leftrightarrow \phi^d(X, Z(Y))$$

onde $Z(Y) = (Y_1 - Y_N^{d^{N-1}}, \dots, Y_{N-1} - Y_N^d, Y_N)$. Além disso, Z_N aparece só polinomialmente em $\phi^d(X, Z)$.

Já que $y \mapsto z(y)$ é uma permutação de $\mathcal{D}^N$, é suficiente obter uma cota para a cardinalidade dos conjuntos finitos da forma

$$S_x^d = \{z \in \mathcal{D}^N : \phi^d(x, z)\},$$

onde x percorre $\mathcal{D}^N$. Pelo Lema 3.6 sabemos que existe uma L_{an}^D -fórmula livre de quantificadores $\psi(X, Z_1, \dots, Z_{N-1})$ na qual D é aplicado só a termos que não envolvem $Z_1, \dots, Z_{N-1}$ tal que

$$\mathcal{D} \models \exists Z_N \phi^d(X, Z) \longleftrightarrow \psi(X, Z_1, \dots, Z_{N-1}).$$

Agora aplicamos $R(N-1)$ a ψ e obtemos uma cota $A_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in \mathcal{D}^M$ temos

$$\text{card} \{(z_1, \dots, z_{N-1}) : \mathcal{D} \models \exists Z_N \phi^d(x, z_1, \dots, z_{N-1}, z_N)\} \in \{0, 1, \dots, A_1\} \cup \{\infty\}.$$

Afirmamos que existe uma cota $A_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $(x, z_1, \dots, z_{N-1}) \in \mathcal{D}^{M+(N-1)}$ temos

$$\text{card} \{z_N : \mathcal{D} \models \phi^d(x, z_1, \dots, z_{N-1}, z_N)\} \in \{0, 1, \dots, A_2\} \cup \{\infty\}.$$

É claro que $A = A_1 A_2$ é uma cota para o cardinal de conjuntos finitos da forma S_x^d , $x \in \mathcal{D}^M$. Para ver que A_2 existe, notemos que, salvo equivalências, $\phi^d(X, Z)$ é uma disjunção de conjunções

$$(1) \quad f_0 \neq 0 \bigwedge_{1 \leq i \leq k} f_i = 0 \bigwedge_{0 \leq j \leq l} |g_j| \leq |h_j| \bigwedge_{l+1 \leq j \leq l+s} |h_j| < |g_j|,$$

e podemos assumir que ϕ^d é uma dessas conjunções.

Agora, f_i , g_j , e h_j são polinomiais em Z_N , para $i = 0, \dots, k$, e $j = 0, \dots, l + s$. Sejam E_{f_i} , E_{g_j} , E_{h_j} , seus respectivos graus (na variável Z_N).

Finalmente

$$A_2 = 2 + \sum_{\substack{0 \leq i \leq k \\ 0 \leq j \leq l+s}} E_{f_i} + E_{g_j} + E_{h_j}$$

é uma cota como foi requerida.

De fato, suponha que existem $z_0, \dots, z_{A_2} \in \mathcal{D}$ tais que (1) se satisfaz para $(x, z_1, \dots, z_{N-1}, z_\mu)$ para $0 \leq \mu \leq A_2$. Então para $1 \leq i \leq k$, $f_i(x, z_1, \dots, z_{N-1}, z_N) = 0$ para todo $z_N \in \mathcal{D}$. Podemos supor que $g_j(x, z_1, \dots, z_{N-1}, z_N)$ é um polinômio não nulo (na variável Z_N) para $0 \leq j \leq l$.

Existe assim $z_\alpha \in \{z_0, \dots, z_{A_2}\}$ tal que

- (a) $z_\alpha \neq 0$,
- (b) $f_0(x, z_1, \dots, z_{N-1}, z_\alpha) \neq 0$,
- (c) $0 < |g_j(x, z_1, \dots, z_{N-1}, z_\alpha)| \leq |h_j(x, z_1, \dots, z_{N-1}, z_\alpha)|$, para $0 \leq j \leq l$,
- (d) $|h_j(x, z_1, \dots, z_{N-1}, z_\alpha)| < |g_j(x, z_1, \dots, z_{N-1}, z_\alpha)|$, para $l + 1 \leq j \leq l + s$.

Usando a prova do Lema 4.22 temos que existem infinitos $z_\beta \in \mathcal{D}$ com $0 < |z_\beta| < |z_\alpha|$ tais que

- (i) $|f_0(x, z_1, \dots, z_{N-1}, z_\alpha + z_\beta)| = |f_0(x, z_1, \dots, z_{N-1}, z_\alpha)| \neq 0$,
- (ii) $|g_j(x, z_1, \dots, z_{N-1}, z_\alpha + z_\beta)| = |g_j(x, z_1, \dots, z_{N-1}, z_\alpha)|$, para $0 \leq j \leq l$, e
- (iii) $|h_j(x, z_1, \dots, z_{N-1}, z_\alpha)| = |h_j(x, z_1, \dots, z_{N-1}, z_\alpha + z_\beta)|$, para $0 \leq j \leq l$,

Isto finaliza a prova do Lema. $\square$

Nota. Em [L], Lipshitz apresenta um resultado similar ao lema anterior para corpos completos arbitrários com ultramétrica.

Finalizamos este capítulo observando que a noção de subconjunto subanalítico não

é dada para subconjuntos de $\overline{\mathbb{Q}_p}$ (o qual não é completo). No entanto, uma prova análoga à do Lema 4.24 demonstra o seguinte

Lema 4.25. *Seja $S \subseteq I^{M+N}$ definível por uma L_{an}^D -fórmula, então existe uma cota $A \in \mathbb{N}$ tal que para cada $x \in I^M$ com fibra finita S_x temos que $\text{card}(S_x) \leq A$. $\square$*

CAPÍTULO 5

SISTEMAS DE WEIERSTRASS EM $\overline{\mathbb{Q}_p}$ E $\mathbb{C}_p$

Iniciamos este capítulo apresentando a noção de Sistema de Weierstrass. Depois mostramos que se $\overline{\mathbb{Q}_p}\langle X \rangle$ é como em 2.2, então a coleção de anéis $(\overline{\mathbb{Q}_p}\langle X_{(n)} \rangle)_{n \geq 0}$ constitui um sistema de Weierstrass sobre $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Em [A, (10.3)] prova-se que a coleção de séries de potências convergentes em uma vizinhança da origem constitui um sistema de Weierstrass sobre um corpo completo. Neste capítulo obtemos um resultado análogo para $\overline{\mathbb{Q}_p}$ (não completo).

Usando o Teorema de Divisão de Weierstrass não Arquimediano, adaptamos a noção de sistema de Weierstrass para o caso não arquimediano. Finalmente estabelecemos uma relação entre estas noções e os resultados dos Capítulos 2 e 3.

Na conclusão desta tese indicamos como estas técnicas poderiam ser adaptadas para provar a modelo completude de algumas estruturas.

SISTEMAS DE WEIERSTRASS

Definição 5.1. Seja F um corpo. Um sistema de Weierstrass (ou um W -sistema) sobre F é uma família de anéis $(F[X_{(n)}])_{n \in \mathbb{N}}$, onde $X_{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$, satisfazendo as seguintes condições

- W1 Para $n = 0$ o anel é F . Para todo $n > 0$ temos $F[X_{(n)}] \subseteq F[X_{(n)}] \subseteq F[[X_{(n)}]]$. Se σ é uma permutação de $\{1, 2, \dots, n\}$ e $f(X_{(n)}) \in F[X_{(n)}]$, então $f(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) \in F[X_{(n)}]$. Além disso, para $m \geq n$, $F[X_{(m)}] \cap F[[X_{(n)}]] = F[X_{(n)}]$.
- W2 Se $f \in F[X_{(n)}]$ é uma unidade de $F[[X_{(n)}]]$, então f é uma unidade de $F[X_{(n)}]$.
- W3 Se $f \in F[X_{(n)}, X_{n+1}]$ e $f(0, X_{n+1}) \in F[[X_{n+1}]]$ é não nula de ordem d (i.e. $f(0, X_{n+1}) = \sum_{i=d}^{\infty} c_i X_{n+1}^i$ com $c_d \neq 0$), então para todo $g \in F[X_{(n+1)}]$, existe $Q \in F[X_{(n+1)}]$ e $R_i \in F[X_{(n)}]$, $(0 \leq i \leq d-1)$, tal que

$$g = Qf + \sum_{i=1}^{d-1} R_i X_{n+1}^i$$

5.2 Listamos agora algumas propriedades dos sistemas de Weierstrass. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $F[X_{(n)}]$ é um anel que satisfaz as seguintes propriedades (ver [D-L, (1.3)]).

- (1) $F[X_{(n)}]$ é local, com ideal maximal I gerado por $X_1, \dots, X_n$. O completado de $F[X]$ com respeito a I é $F[[X]]$. Se $g \in F[X]$, e X_i divide g em $F[[X]]$ então X_i divide g em $F[X]$ ($i = 1, \dots, n$).
- (2) (Substituição) Se $X = (X_1, \dots, X_n)$, $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$, $f \in F[X, Y]$ e $g_1, \dots, g_m \in (X)F[X_{(n)}]$ (o ideal maximal de $F[X_{(n)}]$) então

$$f(X, g_1(X) \cdots, g_m(X)) \in F[X].$$

- (3) $F[X_{(n)}]$ é fechado para derivadas $\partial/\partial X_i$, $1 \leq i \leq n$.

- (4) (Preparação de Weierstrass) Suponhamos que $f \in F[X_{(n+1)}]$ é regular de ordem d em X_{n+1} . Então existe uma unidade $Q \in F[X_{(n+1)}]$, e existem $R_0, \dots, R_{d-1} \in (X_{(n)})F[X_{(n)}]$ tais que

$$f = Qw, \quad \text{onde } w(X_{(n)}, X_{n+1}) = X_{n+1}^d + \sum_{i=0}^{d-1} R_i(X_{(n)})X_{n+1}^i.$$

Além disso, esta fatoração é única e w é chamado o polinômio de Weierstrass de f .

- (5) $F[X_1, \dots, X_n]$ é noetheriano para cada n .

Teorema 5.3 (Aproximação de Artin). (ver [D-L,(1.1)]) *Seja $(F[X_{(n)}])_{n \in \mathbb{N}}$ um W -sistema sobre F , $c \in \mathbb{N}$, $X = (X_1, \dots, X_n)$, $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$, $f = (f_1, \dots, f_r) \in F[X, Y]^m$ e seja $\bar{y} \in (X)F[[X]]$ satisfazendo $f(X, \bar{y}) = 0$. Então existe $y \in F[X]$ tal que $f(X, y) = 0$ e $y \equiv \bar{y} \pmod{(X)^c}$. $\square$*

Para $X = (X_1, \dots, X_n)$, lembramos que

$$\overline{\mathbb{Q}_p} \langle X \rangle = \{f \in \overline{\mathbb{Q}_p}[[X]] : \exists [K : \mathbb{Q}_p] < \infty \wedge f \in K[[X]]\},$$

onde para $n = 0$ o anel correspondente é $\overline{\mathbb{Q}_p}$.

Lema 5.4. *A coleção de anéis $(\overline{\mathbb{Q}_p} \langle X_1, \dots, X_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ é um sistema de Weierstrass sobre $\overline{\mathbb{Q}_p}$.*

Prova. W1. É evidente que $\overline{\mathbb{Q}_p}[X] \subseteq \overline{\mathbb{Q}_p} \langle X \rangle \subseteq \overline{\mathbb{Q}_p}[[X]]$. Se $f(X_1, \dots, X_n) \in \overline{\mathbb{Q}_p} \langle X \rangle$, então existe $[K : \mathbb{Q}_p] < \infty$, tal que $f \in K[[X]]$. Seja σ uma permutação de $\{1, \dots, n\}$; é claro que $f(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) \in K[[X]]$, e portanto $f(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) \in \overline{\mathbb{Q}_p} \langle X \rangle$.

Suponhamos $m \geq n$. Se $f \in \overline{\mathbb{Q}_p}[[X_{(n)}]] \cap \overline{\mathbb{Q}_p} \langle X_{(m)} \rangle$, então existe $[K : \mathbb{Q}_p] < \infty$ tal que $f \in K[[X_{(m)}]]$. Como $f \in \overline{\mathbb{Q}_p}[[X_{(n)}]]$, então $f \in K[[X_{(n)}]]$. Assim $f \in \overline{\mathbb{Q}_p} \langle X_{(n)} \rangle$.

Agora se $f \in \overline{\mathbb{Q}_p} \langle X_{(n)} \rangle$, então existe $[K : \mathbb{Q}_p] < \infty$ tal que $f \in K[[X_{(n)}]]$, e portanto $f \in K[[X_{(m)}]]$. Assim $f \in \overline{\mathbb{Q}_p}[[X_{(n)}]] \cap \overline{\mathbb{Q}_p} \langle X_{(m)} \rangle$.

Provamos que para $m \geq n$, $\overline{\mathbb{Q}}_p[[X_{(n)}]] \cap \overline{\mathbb{Q}}_p\langle X_{(m)} \rangle = \overline{\mathbb{Q}}_p\langle X_{(n)} \rangle$.

W2. Seja $f \in \overline{\mathbb{Q}}_p\langle X \rangle$ uma unidade de $\overline{\mathbb{Q}}_p[[X]]$. Então existe uma extensão $[K:\mathbb{Q}_p] < \infty$ tal que $f \in K[[X]]$, e $0 \neq f(0) = a_0 \in K$, assim f é uma unidade de $K[[X]]$, e portanto uma unidade de $\overline{\mathbb{Q}}_p\langle X \rangle$.

W3. Para $X = X_{(M)}$, $Y = Y_{(1)}$, seja $f(X, Y) \in \overline{\mathbb{Q}}_p\langle X, Y \rangle$ tal que $f(0, Y) = \sum_{i=d}^{\infty} c_i Y^i$ com $c_d \neq 0$. Então existe $[K:\mathbb{Q}_p] < \infty$ tal que $f \in K[[X, Y]]$.

Dada $g \in \overline{\mathbb{Q}}_p\langle X, Y \rangle$, existe $[K_1:\mathbb{Q}_p] < \infty$, tal que $g \in K_1[[X, Y]]$. Sem perda de generalidade podemos supor $K = K_1$. Como K é completo para a norma p -ádica, podemos usar o Teorema de Divisão de Weierstrass dado por Abhyankar em [A, (3.10)]. Temos então que existem $Q \in K[[X, Y]]$ e $R_i(X) \in K[[X]]$, $0 \leq i \leq d-1$ tais que

$$g = Qf + \sum_{i=0}^{d-1} R_i(X)Y^i.$$

É claro que $Q \in \overline{\mathbb{Q}}_p\langle X, Y \rangle$ e $R_i(X) \in \overline{\mathbb{Q}}_p\langle X \rangle$, para $0 \leq i \leq d-1$. Isto prova W3. $\square$

5.5 Um sistema de Weierstrass $(F[X_{(m)}])_{m \in \mathbb{N}}$ sobre $\overline{\mathbb{Q}}_p$ se diz *convergente* se cada $f \in F[X_{(m)}]$ converge sobre um polidisco

$$\Delta_r := \{x \in \overline{\mathbb{Q}}_p^m : |x_1| < r, \dots, |x_m| < r\}, \quad 0 < r \in \mathbb{R}.$$

Notemos que se $a, x \in \Delta_r$, então $a + x \in \Delta_r$, e portanto a série

$$f(a + X) = \sum \frac{\partial^{|i|} f}{\partial X^i}(a) \frac{X^i}{i!}$$

é uma série convergente sobre Δ_r e também está em $F[X]$. Este fato não necessariamente se tem para Sistemas de Weierstrass sobre corpos como $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, e precisa-se impor como uma condição adicional na definição de sistema convergente de Weierstrass (ver [vd Dries, (1.4)]).

Lema 5.6. *Seja $X = X_{(m)}$, $f(X) = \sum a_i X^i \in \overline{\mathbb{Q}_p} \langle X \rangle$ convergente em um polidisco $\Delta_r = \{(x_1, \dots, x_m) \in \overline{\mathbb{Q}_p}^m : |x_1| < r, \dots, |x_m| < r\}$, $0 < r \in \mathbb{R}$. Suponhamos que f é uma unidade de $\overline{\mathbb{Q}_p} \langle X \rangle$, isto é, existe $g(X) \in \overline{\mathbb{Q}_p} \langle X \rangle$ tal que*

$$g(X)f(X) = 1.$$

Então existe um polidisco $\Delta_{r_1} = \{(x_1, \dots, x_m) \in \overline{\mathbb{Q}_p}^m : |x_1| < r_1, \dots, |x_m| < r_1\}$, $0 < r_1 \in \mathbb{R}$, tal que $g(X)$ converge em Δ_{r_1} .

Prova. Como f é uma unidade de $\overline{\mathbb{Q}_p} \langle X \rangle$, temos que $f(0) \neq 0$. Logo existe um polidisco $\Delta_{r_1} \subseteq \overline{\mathbb{Q}_p}^m$, $0 < r_1 \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \Delta_{r_1}$. Portanto

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} \quad \text{para todo } x \in \Delta_{r_1}.$$

Assim $g(X)$ converge em Δ_{r_1} . $\square$

Lema 5.7. (ver [A, (10.3)]) *Seja $X = X_{(m)}$, $Y = Y_1$, $[K:\mathbb{Q}_p] < \infty$, $f(X, Y) \in K[[X, Y]]$ uma série convergente em um polidisco $\Delta_r \subseteq K^{m+1}$, f regular de ordem d em Y , isto é*

$$f(0, Y) = \sum_{i \geq d} c_i Y^i \quad c_d \neq 0.$$

Se $g(X, Y) \in \overline{\mathbb{Q}_p} \langle X, Y \rangle$ converge em um polidisco $\Delta_{r_1} \subseteq K^{m+1}$, então existem $q(X, Y) \in K[[X, Y]]$ e $r_0(X), \dots, r_{d-1}(X) \in K[[X]]$ tais que

$$g(X, Y) = q(X, Y)f(X, Y) + \sum_{i=0}^{d-1} r_i(X)Y^i,$$

onde q converge em um polidisco $\Delta_{r_2} \subseteq K^{m+1}$ e $r_i(X)$ converge no polidisco $\Delta_{r_2} K^m$, para $i = 0, \dots, d-1$. $\square$

Para $X = (X_1, \dots, X_m)$, definimos

$$\overline{\mathbb{Q}_p} \langle\langle X \rangle\rangle = \{f \in \overline{\mathbb{Q}_p} \langle X \rangle : f \text{ converge em uma vizinhança da origem}\}.$$

Com esta definição e os dois lemas anteriores temos o seguinte

Lema 5.8. *A coleção de anéis dada por $(\overline{\mathbb{Q}}_p \langle\langle X_{(m)} \rangle\rangle)_{m \in \mathbb{N}}$ é um sistema de Weierstrass sobre $\overline{\mathbb{Q}}_p$ convergente.*

Prova. W1 verifica-se facilmente. W2 segue do Lema 5.5. Para provar W3 basta aplicar o Lema 5.7 e observar que se $X = X_{(m)}$, $[K:\mathbb{Q}_p] < \infty$, e $f \in K[[X]]$ converge em

$$\overline{\Delta}_r := \{x \in K^m : |x_1| \leq r, \dots, |x_m| \leq r\}, \quad 0 < r \in \mathbb{R}$$

então f converge em $\Delta_r = \{x \in \overline{\mathbb{Q}}_p^m : |x_1| \leq r, \dots, |x_m| \leq r\} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}_p^m$.

De fato, tomemos $x = (x_1, \dots, x_m) \in K^m$ tal que $|x_i| = r$, para $i = 1, \dots, m$; como f converge em $\overline{\Delta}_r \subseteq K^m$ então

$$|a_i x^i| = |a_i| r^{|i|} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } |i| \longrightarrow \infty.$$

Seja $y = (y_1, \dots, y_m) \in \Delta_r \subseteq \overline{\mathbb{Q}}_p^m$, assim $|y_i| \leq r$. Para alguma extensão finita $[K_1:\mathbb{Q}_p] < \infty$, temos que $y \in K_1^m$ e $f \in K_1[[X]]$. Já que

$$|a_i y^i| = |a_i| |y_1^{i_1}| \cdots |y_m^{i_m}| \leq |a_i| r^{i_1} \cdots r^{i_m} = |a_i| r^{|i|} \longrightarrow 0,$$

então, pela completude de K_1 , f converge em y . $\square$

SISTEMAS DE WEIERSTRASS NÃO ARQUIMEDIANOS

Adotamos nesta seção a notação dada em 2.20. Isto é, seja F um corpo com uma ultramétrica $|\cdot|$, e $X = (X_1, \dots, X_n)$. Denotamos por $F\{X\}$ o subanel de $F[[X]]$ que contém as séries $f = \sum_{i \in \mathbb{N}^n} a_i X^i$, tais que, $|a_i| \rightarrow 0$, quando $|i| \rightarrow \infty$. E para cada $f \in F\{X\}$, definimos $\|f\| = \max\{|a_i| : i \in \mathbb{N}^n\}$.

O anel $\{f \in F\{X\} : \|f\| \leq 1\}$ é denotado por $F'\{X\}$; o ideal $\{f \in F'\{X\} : \|f\| < 1\}$ é denotado por $F''\{X\}$, e $\overline{F}\{X\}$ representa $F'\{X\}/F''\{X\}$. Em particular $\overline{F} = F'/F''$ denota o corpo residual de F .

A sobrejeção canônica $F'\{X\} \rightarrow \overline{F}\{X\}$ é denotada por $f \rightarrow \overline{f}$. Seja $X = (X_1, \dots, X_n)$ e $Y = Y_1$. Um elemento $f \in F\{X, Y\}$, com $\|f\| = 1$, se chama *regular de grau d em Y* se $\overline{f} \in \overline{F}\{X, Y\}$ é da forma

$$\lambda Y^d + \sum_{i < d} c_i(X) Y^i,$$

onde $\lambda \in \overline{F}$, $\lambda \neq 0$ e $c_0, \dots, c_{d-1} \in \overline{F}[X]$.

Definição 5.9. Seja F um corpo com ultramétrica. Um sistema de Weierstrass não arquimediano sobre F é uma família de anéis $(F[[X_{(n)}]])_{n \in \mathbb{N}}$, onde $X_{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$, satisfazendo as seguintes condições

- UW1 Para $n = 0$ o anel é F . Para todo $n > 0$ temos $F[X_{(n)}] \subseteq F[[X_{(n)}]] \subseteq F\{X_{(n)}\}$. Se σ é uma permutação de $\{1, 2, \dots, n\}$ e $f(X_{(n)}) \in F[[X_{(n)}]]$, então $f(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) \in F[[X_{(n)}]]$. Além disso, para $m \geq n$, $F[[X_{(m)}]] \cap F[[X_{(n)}]] = F[[X_{(n)}]]$.
- UW2 Se $f \in F[[X_{(n)}]]$ é uma unidade de $F\{X_{(n)}\}$, então f é uma unidade de $F[[X_{(n)}]]$.
- UW3 Se $f \in F[[X_{(n)}, X_{n+1}]]$ é regular de grau d em X_{n+1} , então para todo $g \in F[[X_{(n+1)}]]$, existe $Q \in F[[X_{(n+1)}]]$ e $R_i \in F[[X_{(n)}]]$, $(0 \leq i \leq d-1)$, tal que

$$g = Qf + \sum_{i=1}^{d-1} R_i X_{n+1}^i.$$

Com esta definição e o Teorema 2.21 temos o seguinte

Lema 5.10. *Seja F um corpo completo para uma ultramétrica. Então a coleção de anéis $(F\{X_{(n)}\})_{n \geq 0}$ constitui um sistema de Weierstrass não arquimediano sobre F . $\square$*

Chamamos *pré-sistema de Weierstrass não arquimediano* sobre F uma coleção de anéis $(F[[X_{(n)}]])_{n \in \mathbb{N}}$ satisfazendo UW3, e tal que $F[[X_{(n)}]] \subseteq F\{X_{(n)}\}$ para todo $n \geq 0$.

Lembramos que $f \in F'\{X\}$ se, e só se, $\|f\| \leq 1$. De novo pelo Teorema 2.21 temos o seguinte

Lema 5.11. *Seja F um corpo completo para uma ultramétrica. Então a coleção de anéis $(F'\{X_{(n)}\})_{n \geq 0}$ constitui um pré-sistema de Weierstrass não arquimediano sobre F . $\square$*

Lembramos que $I\{X\}$ é o subanel de $\overline{\mathbb{Q}_p}\{X\} \cap \overline{\mathbb{Q}_p}\langle X \rangle$ que contém as séries com coeficientes em I .

Lema 5.12. *$(I\{X_{(n)}\})_{n \geq 0}$ é um pré-sistema de Weierstrass não arquimediano sobre $\mathbb{C}_p$.*

Prova. Claramente $I\{X\} \subseteq \mathbb{C}_p\{X\}$ para $X = (X_1, \dots, X_n)$, $n \geq 0$. Agora seja $f(X, Y) \in I\{X, Y\}$ regular de grau d em Y ($Y = Y_1, X = (X_1, \dots, X_n)$), e seja $g(X, Y) \in I\{X, Y\}$. Como f e g estão em $\overline{\mathbb{Q}_p}\langle X, Y \rangle$, então existe $[K:\mathbb{Q}_p] < \infty$ tal que $f, g \in K[[X, Y]]$, e portanto $f, g \in K'\{X, Y\}$. Usando o lema anterior temos que existem $Q \in K'\{X, Y\}$ e $R_i \in K'\{X\}$, $(0 \leq i \leq d-1)$, tais que

$$g = Qf + \sum_{i=1}^{d-1} R_i X_{n+1}^i.$$

É claro que $Q \in I\{X, Y\}$, e $R_i(X) \in I\{X\}$, para $(0 \leq i \leq d-1)$. $\square$

Definição 5.13. Seja $W = (\mathbb{C}_p[[X_{(n)}]])_{n \geq 0}$ um pré-sistema de Weierstrass não arquimediano contido em $(I\{X_{(n)}\})_{n \geq 0}$. Definimos L_W^D como a linguagem que contém um símbolo de operação m -ário f para cada $f \in \mathbb{C}_p[[X_{(m)}]]$, $m \geq 0$, um símbolo de operação binário D , e um símbolo de relação binário P .

Com as interpretações usuais I , e $\mathcal{D}$ são L_W^D -estruturas.

Lema 5.14. *Seja $W = (\mathbb{C}_p \llbracket X_{(n)} \rrbracket)_{n \geq 0}$ um pré-sistema de Weierstrass não arquimédiano contido em $(I\{X_{(n)}\})_{n \geq 0}$ satisfazendo*

- (1) $I[X_{(m)}] \subseteq \mathbb{C}_p \llbracket X_{(m)} \rrbracket$, para todo $m \geq 0$. Sejam $X = X_{(m)}$, $Y = Y_{(n)}$, e $f \in \mathbb{C}_p \llbracket X, Y \rrbracket$, então f pode ser escrita da forma $f = \sum_{i \in \mathbb{N}^n} a_i(X) Y^i$, com $a_i(X) \in \mathbb{C}_p \llbracket X \rrbracket$, e existe $d \in \mathbb{N}$ tal que para todo i com $|i| \geq d$,

$$a_i = \sum_{|j| < d} b_{i,j} a_j, \quad \text{com } b_{i,j} \in \mathbb{C}_p \llbracket X \rrbracket, \quad \|b_{i,j}\| < 1/p.$$

Além disso os $b_{i,j}$ podem ser escolhidos, para cada j fixo com $|j| < d$, tais que $\|b_{i,j}\| \rightarrow 0$ quando $|i| \rightarrow \infty$.

- (2) Para $f(X, Y) \in \mathbb{C}_p \llbracket X, Y \rrbracket$ satisfazendo (1), e j fixo com $|j| < d$, a série $\bar{f} \in \mathbb{C}_p \llbracket X, Y \rrbracket$ definida por

$$\begin{aligned} \bar{f} = & \left(\sum_{i \in A(j)} V_i Y^i \right) + Y^j + \left(\sum_{i \in B(j)} p V_i Y^i \right) \\ & + \sum_{|i| \geq d} \left\{ \left(\sum_{k \in A(j)} b_{i,k} V_k \right) + b_{i,j} + \left(\sum_{k \in B(j)} b_{i,k} p V_k \right) \right\} Y^i, \end{aligned}$$

está em $\mathbb{C}_p \llbracket X, V, Y \rrbracket$ (os conjuntos $A(j)$ e $B(j)$ são como em 2.24).

- (3) Dada $f \in \mathbb{C}_p \llbracket X, V, Y \rrbracket$, então $T(f) \in \mathbb{C}_p \llbracket X, V, Z \rrbracket$, onde $T: I\{X, V, Y\} \rightarrow I\{X, V, Z\}$ é dada por

$$T(Y_\lambda) = Z_\lambda + (Z_N)^{d^{N-\lambda}} \quad \text{para } 1 \leq \lambda < N, \quad T(Y_N) = Z_N,$$

e a transformação T é um isomorfismo de $\mathbb{C}_p \llbracket X, V \rrbracket$ -álgebras.

Então I e $\mathcal{D}$ possuem eliminação de quantificadores na linguagem L_W^D . $\square$

A seguir, na conclusão desta tese, indicaremos como o anterior resultado poderia ser usado na possível prova da modelo completude de algumas estruturas.

CONCLUSÃO

Para finalizar, apresentamos alguns problemas abertos relacionados com os resultados obtidos nesta tese. Propomos possíveis caminhos para resolvê-los baseados no trabalho de van den Dries [vd Dries].

P1. Provar a modelo completude da estrutura $(I, +, -, \cdot, 0, 1, P, E(x))$, onde $E(x) := \exp(p^2x)$.

Um caminho possível para provar P1 é o seguinte: construir um pré-sistema de Weierstrass não arquimadiano sobre $\mathbb{C}_p$ contido em $(I\{X_{(n)}\})_{n \geq 0}$ a partir de funções analíticas em I existencialmente definíveis em $(I, +, -, \cdot, 0, 1, P, E(x))$. Depois usar o Teorema 5.14. como em [vd Dries, §4].

P2. Provar a modelo completude da estrutura $(\mathcal{D}, +, -, \cdot, 0, 1, P, E(x))$.

O mesmo caminho sugerido para resolver P1 deve provar P2.

P3. Mostrar a modelo completude da estrutura $(\overline{\mathbb{Q}}_p, +, -, \cdot, 0, 1, P, E(x)|_I)$.

Para obter P3, podemos tentar adaptar de novo [vd Dries, §4], usando a transformação $\tau: \overline{\mathbb{Q}}_p \rightarrow I$ dada por

$$\tau(x) = \begin{cases} \frac{px}{x+1} & \text{se } |x| \neq 1 \\ x & \text{se } |x| = 1. \end{cases}$$

P4. Mostrar a modelo completude da estrutura $(\mathbb{C}_p, +, -, \cdot, 0, 1, P, E(x)|_I)$.

Uma prova de P3 deve mostrar P4.

REFERÊNCIAS

- [A] S.S. Abhyankar, *Local Analytic Geometry*, Academic Press, New York, (1964)
- [B] R. Bianconi, Model completeness results for elliptic and abelian functions, *Ann. of Pure and Applied Logic* 54, 121-136 (1991).
- [B2] R. Bianconi, Some results in the model theory of analytic functions, Doctoral Thesis, Oxford (1990).
- [D] J. Denef, The rationality of the Poincaré series associated to the p -adic points on a variety, *Invent. Math.* 77, no. 1, 1-23 (1984).
- [D-L] J. Denef and L. Lipshitz, Ultraproducts and approximation in local rings II, *Math. Ann.* 253 (1980).
- [D-vd Dries] J. Denef and L. van den Dries. p -Adic and real subanalytic sets, *Ann. of Math.* 128, 79-138 (1988).
- [vd Dries] L. van den Dries, On the elementary theory of restricted elementary functions, *Journal Symbolic Logic* 53, 796-808 (1988).
- [F-vd Put] J. Fresnel and M. van den Put, *Géométrie Analytique Rigide et Applications*, Progress in Math. vol. 18, Birkhäuser (1981).
- [G] F. Gouvea, *p -adic Numbers*, Springer Verlag, Berlin (1993).
- [K] W. Krull, Allgemeine Bewertungstheorie, *J. Reine Angew. Math.* 167, 160-196 (1932).
- [L] L. Lipshitz, Isolated points on fibers of affinoid varieties, *J. Reine Angew. Math.* 384, 208-220 (1988).

- [M] A. Macintyre, On definable subsets of p -adic fields, *Journal of Symbolic Logic*, vol. 41, Num. 3, 605-610 (1976).
- [M-McK-vdD] A. Macintyre, K. McKenna, L. van den Dries, Elimination of Quantifiers in Algebraic Structures, *Advances in Mathematics* 47, 74-78 (1983).
- [Mat 1] H. Matsumura, *Commutative Algebra*, Benjamin (1970).
- [Mat 2] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Cambridge University Press (1986).
- [R] A. Robinson, *Complete Theories*, North-Holland, Amsterdam, (1956).
- [S] G. Sacks, *Saturated Model Theory*, Benjamin, New York (1972).
- [Se] J-P. Serre. *Lie Algebras and Lie Groups*, Lectures given at Harvard University, Mathematics Lecture Notes Series, Benjamin, (1964).
- [Sh] J. R. Shoenfield, A Theorem of Quantifier Elimination, *Symposium mathematica*, vol. 5, 173-176 (1971).
- [Z-S] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative algebra*. I, II. Princeton: van Nostrand 1960.