Uma Torre de
Extensões de Artin-Schreier
Atingindo a Cota de
Drinfeld-Vladut

Herivelto Martins Borges Filho

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do grau
de
Mestre em Matemática

Área de Concentração: **Matemática**
Orientador: **Prof. Dr. Orlando Stanley Juriaans**

São Paulo - Agosto - 2003

Uma Torre de Extensões de Artin-Schreier Atingindo
a Cota de Drinfeld-Vladut

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e defendida por Herivelto Martins Borges
Filho e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 25 de Agosto de 2003.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Orlando Stanley Juriaans (orientador) - IME - USP
- Prof. Dr. Ricardo Bianconni - IME - USP
- Prof. Dr. Nivaldo Nunes de Medeiros Junior - Inst. de Matemática - UFF

Resumo

Neste trabalho, apresentamos a construção de uma torre de corpos de funções algébricas: $F_n/\mathbb{F}_{q^2}$ que atinge a cota de Drinfeld -Vladut . Usando a teoria da ramificação de lugares, calculamos para cada n , o gênero g_n de F_n bem como o número de lugares de grau 1, N_n . Fazendo o limite, obtemos $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{g_n} = q - 1$.

Abstract

In this work ,we present a construction of a tower of algebraic function fields: $F_n/\mathbb{F}_{q^2}$ that attains the Drinfeld-Vladut bound. Using the ramification places theory, we calculate for each n , the genus g_n of F_n as well as the number of places of degree one, N_n . Evaluating the limit, we obtain $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{g_n} = q - 1$.

1. Introdução	1
2. Objetivos	2
3. Metodologia	3
4. Resultados	4
5. Conclusões	5
6. Referências	6
7. Anexos	7
8. Bibliografia	8
9. Glossário	9
10. Índice	10
11. Apêndice	11
12. Resumo	12
13. Conclusão	13
14. Referências	14
15. Anexos	15
16. Bibliografia	16
17. Glossário	17
18. Índice	18
19. Apêndice	19
20. Resumo	20
21. Conclusão	21
22. Referências	22
23. Anexos	23
24. Bibliografia	24
25. Glossário	25
26. Índice	26
27. Apêndice	27
28. Resumo	28
29. Conclusão	29
30. Referências	30
31. Anexos	31
32. Bibliografia	32
33. Glossário	33
34. Índice	34
35. Apêndice	35
36. Resumo	36
37. Conclusão	37
38. Referências	38
39. Anexos	39
40. Bibliografia	40
41. Glossário	41
42. Índice	42
43. Apêndice	43
44. Resumo	44
45. Conclusão	45
46. Referências	46
47. Anexos	47
48. Bibliografia	48
49. Glossário	49
50. Índice	50
51. Apêndice	51
52. Resumo	52
53. Conclusão	53
54. Referências	54
55. Anexos	55
56. Bibliografia	56
57. Glossário	57
58. Índice	58
59. Apêndice	59
60. Resumo	60
61. Conclusão	61
62. Referências	62
63. Anexos	63
64. Bibliografia	64
65. Glossário	65
66. Índice	66
67. Apêndice	67
68. Resumo	68
69. Conclusão	69
70. Referências	70
71. Anexos	71
72. Bibliografia	72
73. Glossário	73
74. Índice	74
75. Apêndice	75
76. Resumo	76
77. Conclusão	77
78. Referências	78
79. Anexos	79
80. Bibliografia	80
81. Glossário	81
82. Índice	82
83. Apêndice	83
84. Resumo	84
85. Conclusão	85
86. Referências	86
87. Anexos	87
88. Bibliografia	88
89. Glossário	89
90. Índice	90
91. Apêndice	91
92. Resumo	92
93. Conclusão	93
94. Referências	94
95. Anexos	95
96. Bibliografia	96
97. Glossário	97
98. Índice	98
99. Apêndice	99
100. Resumo	100
101. Conclusão	101
102. Referências	102
103. Anexos	103
104. Bibliografia	104
105. Glossário	105
106. Índice	106
107. Apêndice	107
108. Resumo	108
109. Conclusão	109
110. Referências	110
111. Anexos	111
112. Bibliografia	112
113. Glossário	113
114. Índice	114
115. Apêndice	115
116. Resumo	116
117. Conclusão	117
118. Referências	118
119. Anexos	119
120. Bibliografia	120
121. Glossário	121
122. Índice	122
123. Apêndice	123
124. Resumo	124
125. Conclusão	125
126. Referências	126
127. Anexos	127
128. Bibliografia	128
129. Glossário	129
130. Índice	130
131. Apêndice	131
132. Resumo	132
133. Conclusão	133
134. Referências	134
135. Anexos	135
136. Bibliografia	136
137. Glossário	137
138. Índice	138
139. Apêndice	139
140. Resumo	140
141. Conclusão	141
142. Referências	142
143. Anexos	143
144. Bibliografia	144
145. Glossário	145
146. Índice	146
147. Apêndice	147
148. Resumo	148
149. Conclusão	149
150. Referências	150
151. Anexos	151
152. Bibliografia	152
153. Glossário	153
154. Índice	154
155. Apêndice	155
156. Resumo	156
157. Conclusão	157
158. Referências	158
159. Anexos	159
160. Bibliografia	160
161. Glossário	161
162. Índice	162
163. Apêndice	163
164. Resumo	164
165. Conclusão	165
166. Referências	166
167. Anexos	167
168. Bibliografia	168
169. Glossário	169
170. Índice	170
171. Apêndice	171
172. Resumo	172
173. Conclusão	173
174. Referências	174
175. Anexos	175
176. Bibliografia	176
177. Glossário	177
178. Índice	178
179. Apêndice	179
180. Resumo	180
181. Conclusão	181
182. Referências	182
183. Anexos	183
184. Bibliografia	184
185. Glossário	185
186. Índice	186
187. Apêndice	187
188. Resumo	188
189. Conclusão	189
190. Referências	190
191. Anexos	191
192. Bibliografia	192
193. Glossário	193
194. Índice	194
195. Apêndice	195
196. Resumo	196
197. Conclusão	197
198. Referências	198
199. Anexos	199
200. Bibliografia	200
201. Glossário	201
202. Índice	202
203. Apêndice	203
204. Resumo	204
205. Conclusão	205
206. Referências	206
207. Anexos	207
208. Bibliografia	208
209. Glossário	209
210. Índice	210
211. Apêndice	211
212. Resumo	212
213. Conclusão	213
214. Referências	214
215. Anexos	215
216. Bibliografia	216
217. Glossário	217
218. Índice	218
219. Apêndice	219
220. Resumo	220
221. Conclusão	221
222. Referências	222
223. Anexos	223
224. Bibliografia	224
225. Glossário	225
226. Índice	226
227. Apêndice	227
228. Resumo	228
229. Conclusão	229
230. Referências	230
231. Anexos	231
232. Bibliografia	232
233. Glossário	233
234. Índice	234
235. Apêndice	235
236. Resumo	236
237. Conclusão	237
238. Referências	238
239. Anexos	239
240. Bibliografia	240
241. Glossário	241
242. Índice	242
243. Apêndice	243
244. Resumo	244
245. Conclusão	245
246. Referências	246
247. Anexos	247
248. Bibliografia	248
249. Glossário	249
250. Índice	250
251. Apêndice	251
252. Resumo	252
253. Conclusão	253
254. Referências	254
255. Anexos	255
256. Bibliografia	256
257. Glossário	257
258. Índice	258
259. Apêndice	259
260. Resumo	260
261. Conclusão	261
262. Referências	262
263. Anexos	263
264. Bibliografia	264
265. Glossário	265
266. Índice	266
267. Apêndice	267
268. Resumo	268
269. Conclusão	269
270. Referências	270
271. Anexos	271
272. Bibliografia	272
273. Glossário	273
274. Índice	274
275. Apêndice	275
276. Resumo	276
277. Conclusão	277
278. Referências	278
279. Anexos	279
280. Bibliografia	280
281. Glossário	281
282. Índice	282
283. Apêndice	283
284. Resumo	284
285. Conclusão	285
286. Referências	286
287. Anexos	287
288. Bibliografia	288
289. Glossário	289
290. Índice	290
291. Apêndice	291
292. Resumo	292
293. Conclusão	293
294. Referências	294
295. Anexos	295
296. Bibliografia	296
297. Glossário	297
298. Índice	298
299. Apêndice	299
300. Resumo	300
301. Conclusão	301
302. Referências	302
303. Anexos	303
304. Bibliografia	304
305. Glossário	305
306. Índice	306
307. Apêndice	307
308. Resumo	308
309. Conclusão	309
310. Referências	310
311. Anexos	311
312. Bibliografia	312
313. Glossário	313
314. Índice	314
315. Apêndice	315
316. Resumo	316
317. Conclusão	317
318. Referências	318
319. Anexos	319
320. Bibliografia	320
321. Glossário	321
322. Índice	322
323. Apêndice	323
324. Resumo	324
325. Conclusão	325
326. Referências	326
327. Anexos	327
328. Bibliografia	328
329. Glossário	329
330. Índice	330
331. Apêndice	331
332. Resumo	332
333. Conclusão	333
334. Referências	334
335. Anexos	335
336. Bibliografia	336
337. Glossário	337
338. Índice	338
339. Apêndice	339
340. Resumo	340
341. Conclusão	341
342. Referências	342
343. Anexos	343
344. Bibliografia	344
345. Glossário	345
346. Índice	346
347. Apêndice	347
348. Resumo	348
349. Conclusão	349
350. Referências	350
351. Anexos	351
352. Bibliografia	352
353. Glossário	353
354. Índice	354
355. Apêndice	355
356. Resumo	356
357. Conclusão	357
358. Referências	358
359. Anexos	359
360. Bibliografia	360
361. Glossário	361
362. Índice	362
363. Apêndice	363
364. Resumo	364
365. Conclusão	365
366. Referências	366
367. Anexos	367
368. Bibliografia	368
369. Glossário	369
370. Índice	370
371. Apêndice	371
372. Resumo	372
373. Conclusão	373
374. Referências	374
375. Anexos	375
376. Bibliografia	376
377. Glossário	377
378. Índice	378
379. Apêndice	379
380. Resumo	380
381. Conclusão	381
382. Referências	382
383. Anexos	383
384. Bibliografia	384
385. Glossário	385
386. Índice	386
387. Apêndice	387
388. Resumo	388
389. Conclusão	389
390. Referências	390
391. Anexos	391
392. Bibliografia	392
393. Glossário	393
394. Índice	394
395. Apêndice	395
396. Resumo	396
397. Conclusão	397
398. Referências	398
399. Anexos	399
400. Bibliografia	400
401. Glossário	401
402. Índice	402
403. Apêndice	403
404. Resumo	404
405. Conclusão	405
406. Referências	406
407. Anexos	407
408. Bibliografia	408
409. Glossário	409
410. Índice	410
411. Apêndice	411
412. Resumo	412
413. Conclusão	413
414. Referências	414
415. Anexos	415
416. Bibliografia	416
417. Glossário	417
418. Índice	418
419. Apêndice	419
420. Resumo	420
421. Conclusão	421
422. Referências	422
423. Anexos	423
424. Bibliografia	424
425. Glossário	425
426. Índice	426
427. Apêndice	427
428. Resumo	428
429. Conclusão	429
430. Referências	430
431. Anexos	431
432. Bibliografia	432
433. Glossário	433
434. Índice	434
435. Apêndice	435
436. Resumo	436
437. Conclusão	437
438. Referências	438
439. Anexos	439
440. Bibliografia	440
441. Glossário	441
442. Índice	442
443. Apêndice	443
444. Resumo	444
445. Conclusão	445
446. Referências	446
447. Anexos	447
448. Bibliografia	448
449. Glossário	449
450. Índice	450
451. Apêndice	451
452. Resumo	452
453. Conclusão	453
454. Referências	454
455. Anexos	455
456. Bibliografia	456
457. Glossário	457
458. Índice	458
459. Apêndice	459
460. Resumo	460
461. Conclusão	461
462. Referências	462
463. Anexos	463
464. Bibliografia	464
465. Glossário	465
466. Índice	466
467. Apêndice	467
468. Resumo	468
469. Conclusão	469
470. Referências	470
471. Anexos	471
472. Bibliografia	472
473. Glossário	473
474. Índice	474
475. Apêndice	475
476. Resumo	476
477. Conclusão	477
478. Referências	478
479. Anexos	479
480. Bibliografia	480
481. Glossário	481
482. Índice	482
483. Apêndice	483
484. Resumo	484
485. Conclusão	485
486. Referências	486
487. Anexos	487
488. Bibliografia	488
489. Glossário	489
490. Índice	490
491. Apêndice	491
492. Resumo	492
493. Conclusão	493
494. Referências	494
495. Anexos	495
496. Bibliografia	496
497. Glossário	497
498. Índice	498
499. Apêndice	499
500. Resumo	500
501. Conclusão	501
502. Referências	502
503. Anexos	503
504. Bibliografia	504
505. Glossário	505
506. Índice	506
507. Apêndice	507
508. Resumo	508
509. Conclusão	509
510. Referências	510
511. Anexos	511
512. Bibliografia	512
513. Glossário	513
514. Índice	514
515. Apêndice	515
516. Resumo	516
517. Conclusão	517
518. Referências	518
519. Anexos	519
520. Bibliografia	520
521. Glossário	521
522. Índice	522
523. Apêndice	523
524. Resumo	524
525. Conclusão	525
526. Referências	526
527. Anexos	527
528. Bibliografia	528
529. Glossário	529
530. Índice	530
531. Apêndice	531
532. Resumo	532
533. Conclusão	533
534. Referências	534
535. Anexos	535
536. Bibliografia	536
537. Glossário	537
538. Índice	538
539. Apêndice	539
540. Resumo	540
541. Conclusão	541
542. Referências	542
543. Anexos	543
544. Bibliografia	544
545. Glossário	545
546. Índice	546
547. Apêndice	5

Capítulo 1

Introdução

O trabalho a seguir baseia-se no artigo intitulado *A Tower of Artin-Schreier Extensions of Function Fields Attaining the Drinfeld-Vladut Bound*, de Arnaldo Garcia e Henning Stichtenoth, publicado em 1995 (ver [3]).

No intuito de esclarecer a essência do resultado deste trabalho, faremos algumas considerações iniciais. Consideramos $F/\mathbb{F}_q$ um corpo de funções algébricas de uma variável, onde $\mathbb{F}_q$ (corpo finito com q elementos) é algebricamente fechado em F . Se $N = N(F)$ e $g = g(F)$ são, respectivamente, o número de lugares de grau 1 e o gênero de $F/\mathbb{F}_q$, então um célebre teorema devido à André Weil ([1], [4] e [13]) afirma que:

$$N \leq 1 + q + 2g\sqrt{q} \quad (1) .$$

Em geral, tal cota superior para N não pode ser melhorada, pois existem corpos de funções para os quais ocorre a igualdade em (1). No entanto, quando q não é um quadrado, Serre ([4], [10]) mostra que:

$$N \leq 1 + q + g[2\sqrt{q}] \quad (2) ,$$

onde $[x]$ denota a parte inteira de $x \in \mathbb{R}$.

Ihara ([4], [8]) mostra que, se g é suficientemente grande em relação a q , então obtemos uma desigualdade estrita em (1), ou, mais precisamente,

$$g > \frac{q - \sqrt{q}}{2} \implies N < 1 + q + 2g\sqrt{q} .$$

Consideremos o número

$$N_q(g) = \max\{N(F) : F \text{ é um corpo de funções algébricas sobre } \mathbb{F}_q \text{ de gênero } g\} .$$

Para estudar o comportamento de $N_q(g)$, com g arbitrariamente grande, definimos:

$$A(q) := \limsup_{g \rightarrow \infty} \frac{N_q(g)}{g} .$$

Usando (2), temos que:

$$A(q) \leq [2\sqrt{q}] .$$

1. Introdução

2. Objetivos

3. Metodologia

4. Resultados

Capítulo 2

Fundamentos da Teoria de Corpos de Funções Algébricas

O objetivo principal deste capítulo é apresentar as definições e os resultados básicos da teoria de corpos de funções algébricas. Ressaltamos que todos os resultados, inclusive demonstrações, podem ser encontradas em [11].

2.1 Lugares

Definição 2.1. *Seja K um corpo. Um **corpo de funções algébricas de uma variável** F/K , sobre K , é uma extensão de corpo $F \supseteq K$, onde F é uma extensão finita de $K(x)$ para algum $x \in F$ transcendente sobre K .*

Por simplicidade chamaremos F/K apenas de corpo de funções. O fecho algébrico de K em F , denotado por

$$\tilde{K} := \{z \in F : z \text{ é algébrico sobre } K\}$$

será chamado de **corpo das constantes** de F . Como $K \subseteq \tilde{K} \subseteq F$, é fácil verificar que $F/\tilde{K}$ é um corpo de funções sobre $\tilde{K}$.

Observação 2.2. *Os elementos de F que são transcendentess sobre K , podem ser caracterizados da seguinte forma: $z \in F$ é transcendente sobre K se, e somente se, $[F : K(z)] < \infty$.*

Definição 2.3. *Um **anel de valorização** de um corpo de funções F/K é um anel $O \subseteq F$ com as seguintes propriedades:*

- (1) $K \subsetneq O \subsetneq F$, e
- (2) $z \in F \implies z \in O \text{ ou } z^{-1} \in O$.

Proposição 2.4. *Seja O um anel de valorização de um corpo de funções F/K . Então:*

- (a) O é um anel local, isto é, O tem um único ideal maximal $P = O \setminus O^*$, onde O^* é o grupo das unidades de O ;
- (b) se $0 \neq x \in F$, então $x \in P \iff x^{-1} \notin O$;
- (c) se $\tilde{K}$ é o corpo das constantes de F/K , temos $\tilde{K} \subseteq O$ e $P \cap \tilde{K} = \{0\}$.

Teorema 2.5. *Seja O um anel de valorização de F/K e P seu ideal maximal. Então:*

- (a) P é um ideal principal;
- (b) se $P = tO$, então todo $0 \neq z \in F$ tem uma única representação na forma $z = t^n \cdot u$, para algum $n \in \mathbb{Z}$ e algum $u \in O^*$;
- (c) O é um domínio de ideais principais; mais precisamente, se $P = tO$ e $\{0\} \neq I \subseteq O$ é um ideal, então $I = t^n O$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Um anel com as propriedades acima é chamado de **anel de valorização discreta**.

Definição 2.6. (a) Um **lugar** P de um corpo de funções F/K é o ideal maximal de algum anel de valorização O de F/K . O elemento $t \in P$, tal que $P = tO$ é chamado de **elemento primo** de P .

(b) $\mathbb{P}(F) := \{P : P \text{ é um lugar de } F/K\}$.

Se O é um anel de valorização de F/K , e P o seu ideal maximal, então, pelo item (b) da proposição 2.4, O está unicamente determinado por P , a saber:

$$O = \{z \in F : z^{-1} \notin P\} \cup \{0\}.$$

Portanto, $O_P := O$ será chamado **anel de valorização do lugar P** .

Definição 2.7. Uma **valorização discreta** de F/K é uma função sobrejetora $v : F \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ com as seguintes propriedades:

- (1) $v(x) = \infty \iff x = 0$;
- (2) $v(xy) = v(x) + v(y)$, $\forall x, y \in F$;
- (3) $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$, $\forall x, y \in F$;
- (4) $v(a) = 0$, $\forall a \in K^*$.

A propriedade (3) é chamada de **desigualdade triangular**. Uma forte consequência desta propriedade é apresentada no seguinte lema:

Lema 2.8 (Desigualdade triangular estrita). *Seja v uma valorização discreta de F/K , e $x, y \in F$ com $v(x) \neq v(y)$. Então $v(x + y) = \min\{v(x), v(y)\}$.*

Definição 2.9. A cada lugar $P \in \mathbb{P}(F)$ associamos a função $v_P : F \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, da seguinte forma: se $0 \neq z \in F$, então z é unicamente representado na forma $z = t^n \cdot u$, com $u \in O^*$ e $n \in \mathbb{Z}$; assim, definimos $v_P(z) := n$ e $v_P(0) := \infty$.

Teorema 2.10. Seja F/K um corpo de funções.

- (a) Para todo lugar $P \in \mathbb{P}(F)$, a função v_P definida acima é uma valorização discreta, e ainda temos que:

$$O_P = \{z \in F : v_P(z) \geq 0\} ,$$

$$O_P^* = \{z \in F : v_P(z) = 0\} ,$$

$$P = \{z \in F : v_P(z) > 0\} ,$$

$$x \in F \text{ é elemento primo de } P \iff v_P(x) = 1 .$$

- (b) Reciprocamente, suponhamos que v seja uma valorização discreta de F/K . Então o conjunto $P := \{z \in F : v(z) > 0\}$ é um lugar de F/K , e $O_P = \{z \in F : v(z) \geq 0\}$ é o anel de valorização correspondente.

- (c) Todo anel de valorização O de F/K é um subanel maximal de F .

Entre outras coisas, o teorema acima nos mostra que os lugares e anéis de valorização de um corpo de funções F/K podem ser descritos por uma valorização $v : F \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, ou seja, tais noções são equivalentes.

Seja P um lugar de F/K e O_P seu anel de valorização. Como P é ideal maximal de O_P , temos que o quociente O_P/P é um corpo. Para $x \in O_P$, definimos $x(P) \in O_P/P$ como sendo a classe de resíduos de x módulo P . Para $x \in F \setminus O_P$, definimos $x(P) := \infty$. Assim, pelo item c da proposição 2.4, temos, de forma canônica, a imersão $K \hookrightarrow O_P/P$. Portanto, sempre consideraremos K como subcorpo de O_P/P . Os mesmos argumentos se aplicam a $\tilde{K}$.

Definição 2.11. Seja $P \in \mathbb{P}(F)$.

- (a) $\mathbb{F}_P := O_P/P$ é chamado de **corpo residual** de P . A função $x \mapsto x(P)$ de F para $\mathbb{F}_P \cup \{\infty\}$ é chamada de **função de classe de resíduo com respeito a P** . Em alguns momentos usaremos a notação $x + P := x(P)$ para $x \in O_P$.

- (b) $\deg(P) := [\mathbb{F}_P : K]$ é chamado de **grau** de P .

Proposição 2.12. Se P é um lugar de F/K e $0 \neq x \in P$, então $\deg(P) \leq [F : K(x)]$. Portanto, $\mathbb{F}_P$ é uma extensão finita de K .

Corolário 2.13. Supondo $\mathbb{P}(F) \neq \emptyset$, temos que o corpo $\tilde{K}$ das constantes de F/K é uma extensão finita de K .

Demonstração. Imediato, pois $K \subseteq \tilde{K} \subseteq \mathbb{F}_P$. ■

Observação 2.14. Se $\deg(P) = 1$, então $\mathbb{F}_P = K$, e a função da classe de resíduos leva F em $K \cup \{\infty\}$. Em particular, se K é algebricamente fechado, então todo lugar de F/K tem grau 1.

Definição 2.15. Seja $z \in F$ e $P \in \mathbb{P}(F)$. Dizemos que P é **zero** de z se, e somente se, $v_P(z) > 0$; P é **pólo** se, e somente se, $v_P(z) < 0$. P é **zero de ordem** m , se $v_P(z) = m > 0$, e P é **pólo de ordem** m se $v_P(z) = m < 0$.

Apesar de toda teoria descrita até aqui, nada assegurou a existência de anel de valorização, e, portanto, de lugares. O próximo teorema nos garante tal fato.

Teorema 2.16. Seja F/K um corpo de funções e R um subanel de F com $K \subseteq R \subseteq F$. Suponha que $\{0\} \neq I \subsetneq R$ seja um ideal próprio de R . Então existe um lugar $P \in \mathbb{P}(F)$ tal que $I \subseteq P$ e $R \subseteq O_P$.

Observe que tal subanel R (que não é corpo) sempre existe, pois basta tomar $z \in F$ transcendente sobre K e fazer $R = K[z]$.

Corolário 2.17. Seja F/K um corpo de funções, $z \in F$ transcendente sobre K . Então z tem pelo menos um zero e um pólo. Em particular, $\mathbb{P}(F) \neq \emptyset$.

Demonstração. Considere o anel $R = K[z]$ e o ideal $I = zK[z]$. Pelo teorema anterior, existe um lugar $P \in \mathbb{P}(F)$ tal que $zK[z] \subseteq P \implies z \in P$, e, portanto, P é zero de z . O mesmo argumento mostra que z^{-1} tem um zero $Q \in \mathbb{P}(F)$. Logo, Q é pólo de z . ■

2.2 Corpo de Funções Racionais

Apresentaremos agora o exemplo mais simples de corpo de funções algébricas.

Definição 2.18. Um corpo de funções F/K é chamado de **corpo de funções racionais** se $F = K(x)$ para algum $x \in F$ transcendente sobre K .

Dado um polinômio qualquer $p(x) \in K[x]$, irredutível, é fácil ver que o conjunto

$$(1) \quad O_{p(x)} := \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} : f(x), g(x) \in K[x] \text{ e } p(x) \nmid g(x) \right\}$$

é um anel de valorização de $K(x)/K$, e que

$$(2) \quad P_{p(x)} := \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} : f(x), g(x) \in K[x], \text{ onde } p(x) \nmid g(x) \text{ e } p(x) \mid f(x) \right\}$$

é o lugar associado a $O_{p(x)}$. No caso particular em que $p(x)$ é linear, isto é, $p(x) = x - \alpha$ com $\alpha \in K$, escreveremos abreviadamente $P_\alpha := P_{x-\alpha} \in \mathbb{P}_{K(x)}$.

Existe um outro tipo de anel de valorização de $K(x)/K$, dado por

$$(3) \quad O_\infty = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} : f(x), g(x) \in K[x] \text{ e } \deg(g(x)) \geq \deg(f(x)) \right\},$$

cujo ideal maximal associado é:

$$(4) \quad P_\infty = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} : f(x), g(x) \in K[x] \text{ e } \deg(g(x)) > \deg(f(x)) \right\}.$$

Este último é denominado **lugar infinito** de $K(x)$.

Proposição 2.19. *Seja $F = K(x)$ um corpo de funções racionais.*

- (a) *Seja $P_{p(x)} \in \mathbb{P}_{K(x)}$, onde $p(x) \in K[x]$ é um polinômio irredutível. Então, $p(x)$ é um elemento primo de P , e a valorização discreta pode ser descrita da seguinte forma: se $z \in K(x) \setminus \{0\}$ é escrito da forma*

$$z = p(x)^n \cdot \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right), \text{ com } n \in \mathbb{Z}, f(x), g(x) \in K[x], p(x) \nmid f(x) \text{ e } p(x) \nmid g(x),$$

então $v_P(z) = n$. O corpo residual $K(x)_P = O_P/P$ é isomorfo a $K[x]/\langle p(x) \rangle$, e tal isomorfismo é dado por:

$$\phi : \begin{cases} K[x]/\langle p(x) \rangle & \longrightarrow K(x)_P \\ f(x) \bmod p(x) & \longmapsto f(x)(P) \end{cases}.$$

Conseqüentemente, $\deg(P) = \deg(p(x))$.

- (b) *No caso especial em que $p(x) = x - \alpha$, com $\alpha \in K$, temos $\deg(P) = 1$.*
- (c) *Considere $P_\infty \in \mathbb{P}_{K(x)}$ definido em (4). Então, $\deg(P_\infty) = 1$. Um elemento primo de P_∞ é $t = \frac{1}{x}$. A valorização discreta v_∞ é dada por:*

$$v_\infty \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \deg(g(x)) - \deg(f(x)).$$

- (d) $K = \tilde{K}$, isto é, K é o corpo das constantes de $K(x)/K$.

Teorema 2.20. *Os únicos lugares de $K(x)/K$ são os lugares do tipo $P_{p(x)}$ e P_∞ , definidos em (2) e (4).*

Corolário 2.21. *Os lugares de $K(x)/K$ de grau 1, estão em correspondência biunívoca com $K \cup \{\infty\}$.*

Demonstração. Decorre imediatamente do item (a) da proposição 2.19 e do teorema acima. O diagrama abaixo retrata esta bijeção:

$$\begin{array}{ccc} \{\text{lugares de grau 1 de } K(x)/K\} & \longrightarrow & K \cup \{\infty\} \\ P_\alpha & \longmapsto & \alpha \end{array}$$

■

2.3 Independência de Valorizações

Teorema 2.22 (Aproximação fraca). *Seja F/K um corpo de funções e $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathbb{P}(F)$ lugares dois a dois distintos de F/K . Se $x_1, x_2, \dots, x_n \in F$ e $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{Z}$, então existe $0 \neq x \in F$ tal que*

$$v_{P_i}(x - x_i) = r_i \text{ para } i = 1, 2, \dots, n .$$

Corolário 2.23. *Todo corpo de funções F/K tem infinitos lugares.*

Demonstração. Suponhamos que $\#P(F) =: n < \infty$, e tomemos $x_i = 0$ e $r_i > 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Pelo teorema acima, existe $x \in F$ tal que $v_{P_i}(x) > 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$, ou seja, x é transcendente e não tem pólos, contrariando o corolário 2.17. ■

Proposição 2.24. *Seja F/K um corpo de funções e $P_1, \dots, P_r$ zeros de um elemento $x \in F$. Então,*

$$\sum_{i=1}^r v_{P_i}(x) \cdot \deg(P_i) \leq [F : K(x)] .$$

Corolário 2.25. *Em um corpo de funções F/K , todo elemento $0 \neq x \in F$ tem um número finito de zeros e pólos.*

Demonstração. Se x é uma constante, então x não tem zeros nem pólos. Se x é transcendente e tem infinitos zeros, então é possível tomar um inteiro positivo r tal que

$$\sum_{i=1}^r v_{P_i}(x) \cdot \deg(P_i) > [F : K(x)] ,$$

contrariando a proposição acima. Logo, x tem um número finito de zeros. Usando o mesmo argumento com x^{-1} , concluímos que x tem um número finito de pólos. ■

2.4 Divisores

Como o corpo das constantes $\tilde{K}$ de F/K é uma extensão finita de K , e $F/\tilde{K}$ é um corpo de funções, consideraremos, de agora em diante, que K seja o corpo das constantes de F/K , ou seja, K algebricamente fechado em F .

Definição 2.26. *O grupo (aditivo) abeliano livre gerado pelos lugares de F/K será chamado de **grupo dos divisores** de F/K , e denotado por D_F .*

Os elementos de D_F serão chamados de **divisores** de F/K . Formalmente, um divisor D é dado por

$$D = \sum_{P \in \mathbb{P}(F)} n_P P$$

com $n_P \in \mathbb{Z}$ e $n_P = 0$ para quase todo $P \in \mathbb{P}(F)$. Algumas definições e fatos serão apresentados a seguir.

- Um divisor da forma $D = P$, com $P \in \mathbb{P}(F)$, é chamado **divisor primo**.
- Se $D = \sum n_P P$ e $D' = \sum n'_P P$ então $D + D' = \sum (n_P + n'_P) P$.
- O elemento nulo do grupo D_F é o divisor

$$0 := \sum_{P \in \mathbb{P}(F)} r_P P ,$$

onde $r_P = 0$ para todo $P \in \mathbb{P}(F)$.

- Se $Q \in \mathbb{P}(F)$ e $D = \sum n_P P \in D_F$, definimos

$$v_Q(D) := n_Q \quad \text{e} \quad \text{supp} D := \{P \in \mathbb{P}(F) : v_P(D) \neq 0\} ,$$

sendo este último chamado de **suporte** de D .

- Definimos uma ordem parcial em D_F da seguinte forma:

$$D_1 \leq D_2 \iff v_P(D_1) \leq v_P(D_2) , \quad \forall P \in \mathbb{P}(F) .$$

Um divisor $D \geq 0$ é denominado **positivo**.

- O **grau** de um divisor é definido por

$$\deg(D) = \sum_{P \in \mathbb{P}(F)} v_P(D) \cdot \deg(P) ,$$

originando um homomorfismo $\deg : D_F \longrightarrow \mathbb{Z}$.

Pelo corolário 2.25, todo elemento $0 \neq x \in F$ tem um número finito de zeros e pólos em $\mathbb{P}(F)$. Este fato dá consistência à próxima definição.

Definição 2.27. *Seja $0 \neq x \in F$, e Z e N os conjuntos de zeros e pólos de x em $\mathbb{P}(F)$, respectivamente. Então, definimos:*

$$(x)_0 := \sum_{P \in Z} v_P(x) P , \quad \text{o divisor de zeros de } x ,$$

$$(x)_\infty := \sum_{P \in N} (-v_P(x)) P , \quad \text{o divisor de pólos de } x ,$$

$$(x) := (x)_0 - (x)_\infty , \quad \text{o divisor principal de } x .$$

Obviamente, temos:

$$(x)_0 \geq 0 \quad , \quad (x)_\infty \geq 0 \quad \text{e} \quad (x) = \sum_{P \in \mathbb{P}(F)} v_P(x) P .$$

Os elementos $0 \neq x \in F$ que são constantes são evidentemente caracterizados por

$$x \in K \iff (x) = 0 .$$

O próximo teorema, grosso modo, nos diz que um elemento $0 \neq x \in F$ tem o mesmo número de zeros e pólos se levarmos em conta as multiplicidades.

Teorema 2.28. *Todo divisor principal tem grau zero. Mais precisamente: seja $x \in F/K$ e $(x)_0, (x)_\infty$ os divisores zero e pólo de x , respectivamente. Então:*

$$\deg(x)_0 = \deg(x)_\infty = [F : K(x)] .$$

Definição 2.29. (a) $\mathcal{P}_F := \{(x) : 0 \neq x \in F\}$ é chamado de **grupo dos divisores principais** de F/K . $\mathcal{P}_F$ é um subgrupo de D_F , pois se $0 \neq x, y \in F$, temos $(xy) = (x) + (y)$ (pois, $v_P(xy) = v_P(x) + v_P(y)$).

(b) O grupo quociente $\mathcal{C}_F := D_F / \mathcal{P}_F$ é chamado de **grupo de classes de divisor**.

(c) Para um divisor $D \in D_F$, o elemento correspondente em $\mathcal{C}_F$ será denotado por $[D]$, e chamado a **classe do divisor** D . Dois divisores $D, D' \in D_F$ são considerados **equivalentes** (e escrevemos $D \sim D'$) se $[D] = [D']$, isto é,

$$D - D' \in \mathcal{P}_F \implies D = D' + (x)$$

para algum $x \in F \setminus \{0\}$.

Definição 2.30. Para um divisor $A \in D_F$, temos:

$$\mathcal{L}(A) := \{x \in F : (x) \geq -A\} \cup \{0\} .$$

Esta definição tem a seguinte interpretação: se

$$A = \sum_{i=1}^r n_i P_i - \sum_{j=1}^s m_j Q_j ,$$

com $n_i > 0$ e $m_j > 0$, então $\mathcal{L}(A)$ consiste de todos os elementos $x \in F$ tais que

- (1) Q_j é zero de x com ordem maior ou igual a m_j ($j = 1, \dots, s$);
- (2) $P_1, \dots, P_r$ são os únicos possíveis pólos de x , cuja ordem (de pólo) é menor ou igual a n_i ($i = 1, \dots, r$).

Lema 2.31. *Seja $A \in D_F$. Então, temos:*

- (a) $\mathcal{L}(A)$ é um espaço vetorial sobre K ;
- (b) se $A' \sim A$, então $\mathcal{L}(A) \cong \mathcal{L}(A')$ (são isomorfos como espaços vetoriais), e $\deg(A) = \deg(A')$;
- (c) se A é o divisor nulo, então $\mathcal{L}(A) = K$;
- (d) se $A < 0$, então $\mathcal{L}(A) = \{0\}$;
- (e) se $B \in D_F$ e $B \geq A$, então $\mathcal{L}(A) \subseteq \mathcal{L}(B)$ e $\dim(\mathcal{L}(B)/\mathcal{L}(A)) \leq \deg(B) - \deg(A)$.

Proposição 2.32. *Se $A \in D_F$, então $\mathcal{L}(A)$ é um K -espaço vetorial de dimensão finita. Mais precisamente, se $A = A_+ - A_-$, onde A_+ e A_- são divisores positivos, então:*

$$\dim(\mathcal{L}(A)) \leq \deg(A_+) + 1 .$$

Demonstração. (Os itens a que nos reportaremos serão os do lema anterior.)

Como $A \leq A_+$, pelo item (e), temos $\mathcal{L}(A) \subseteq \mathcal{L}(A_+)$, e, assim, é suficiente mostrar que $\dim(\mathcal{L}(A_+)) \leq \deg(A_+) + 1$.

Mas, também temos $0 \leq A_+$, e, portanto, novamente por (e), segue que

$$\dim(\mathcal{L}(A_+)/\mathcal{L}(0)) \leq \deg(A_+) .$$

Agora, pelo item (c), temos $\mathcal{L}(0) = K$. Logo:

$$\dim(\mathcal{L}(A_+)) - 1 \leq \deg(A_+) \implies \dim(\mathcal{L}(A_+)) \leq \deg(A_+) + 1 .$$

■

Definição 2.33. *Se $A \in D_F$, o número inteiro $\dim(A) := \dim(\mathcal{L}(A))$ é chamado a dimensão do divisor A .*

Teorema 2.34. *Seja F/K um corpo de funções. Então existe $\gamma \in \mathbb{Z}$, dependendo de F/K , tal que, para todo divisor $A \in D_F$, temos $\deg(A) - \dim(A) \leq \gamma$.*

A seguir, definiremos um dos mais importantes invariantes de um corpo de funções.

Definição 2.35. *O gênero de F/K é definido por*

$$g := \max\{\deg(A) - \dim(A) + 1 : A \in D_F\} .$$

Observamos, pelo teorema anterior, que tal definição é consistente.

Observação 2.36. *O gênero de F/K é um inteiro não-negativo. De fato, tomando o divisor $A = 0$, temos:*

$$g \geq \deg(0) - \dim(0) + 1 = 0 - 1 + 1 = 0 .$$

Teorema 2.37 (Teorema de Riemann). *Seja F/K um corpo de funções de gênero g .*

- (a) *Se $A \in D_F$, então $\dim(A) \geq \deg(A) + 1 - g$.*
 (b) *Existe um inteiro c , dependendo de F/K , tal que $\dim(A) = \deg(A) + 1 - g$ para todo $A \in D_F$, com $\deg(A) \geq c$.*

Demonstração. (a) Pela definição de gênero, temos:

$$g \geq \deg(A) - \dim(A) + 1 \implies \dim(A) \geq \deg(A) + 1 - g .$$

- (b) Tomemos $A_0 \in D_F$ tal que $g = \deg(A_0) - \dim(A_0) + 1$, e seja $c := \deg(A_0) + g$. Se $\deg(A) \geq c$, temos por (a):

$$\begin{aligned} \dim(A - A_0) &\geq \deg(A - A_0) + 1 - g \\ &= \deg(A) - \deg(A_0) + 1 - g \\ &\geq c - \deg(A_0) + 1 - g \\ &= g + 1 - g = 1 . \end{aligned}$$

Logo, $\dim(A - A_0) \geq 1$, e, portanto, existe $0 \neq z \in \mathcal{L}(A - A_0)$, e assim $(z) \geq A_0 - A$.

Considere o divisor $A' := A + (z) \geq A_0$. Temos:

$$\begin{aligned} \deg(A) - \dim(A) &= \deg(A') - \dim(A') \quad (\text{pois } A \sim A') \\ &\geq \deg(A_0) - \dim(A_0) \quad (\text{item (e) do lema 2.31}) \\ &= g - 1 . \end{aligned}$$

Logo, $\dim(A) \leq \deg(A) + 1 - g$, e, portanto, $\dim(A) = \deg(A) + 1 - g$. ■

Corolário 2.38. *O corpo de funções racionais $K(x)/K$ tem gênero $g = 0$.*

Demonstração. Seja P_∞ o divisor de pólos de x . Para $r \geq 0$, considere o espaço vetorial $\mathcal{L}(rP_\infty)$. Observamos que $1, x, \dots, x^r \in \mathcal{L}(rP_\infty)$, pois $v_P(x^i) \geq -v_P(rP_\infty)$, para todo $P \in \mathbb{P}(F)$ e todo $i = 1, \dots, r$. Sendo x transcendente sobre K , temos ainda que:

$$r + 1 \leq \dim(rP_\infty) = \deg(rP_\infty) + 1 - g = r + 1 - g$$

para r suficientemente grande. Logo $g \leq 0$, e, como sabemos que $g \geq 0$ para todo corpo de funções F/K , concluímos que $g = 0$. ■

2.5 O Teorema de Riemann-Roch e Algumas Conseqüências

Nesta seção, vamos introduzir o conceito de diferencial de Weil, que é fundamental para a apresentação do teorema de Riemann-Roch; no entanto, algumas definições preliminares são necessárias. Doravante, F/K denotará um corpo de funções algébricas de gênero g .

Definição 2.39. Para $A \in D_F$, $i(A) := \dim(A) - \deg(A) + g - 1$ é denominado **índice de especialidade** de A .

O teorema de Riemann nos diz que $i(A) \geq 0$, e, se $\deg(A)$ é suficientemente grande, então $i(A) = 0$.

Definição 2.40. Um **adele** de F/K é uma função

$$\alpha : \begin{cases} \mathbb{P}(F) & \longrightarrow F \\ P & \longmapsto \alpha_P \end{cases},$$

onde $\alpha_P \in O_P$ para quase todo $P \in \mathbb{P}(F)$. O conjunto $\mathcal{A}_F := \{\alpha : \alpha \text{ é um adele de } F/K\}$ é chamado **espaço dos adeles** de F/K , pois este pode, de maneira natural, ser considerado como um K -espaço vetorial.

Um **adele principal** de um elemento $x \in F$ é aquela cujas componentes são todas iguais a x . Observamos que tal definição é consistente, uma vez que $x \in F$ tem um número finito de pólos em $\mathbb{P}(F)$. Tal definição nos traz automaticamente a imersão $F \hookrightarrow \mathcal{A}_F$. A valorização v_P de F/K pode ser estendida a $\mathcal{A}_F$ fazendo $v_P(\alpha) = v_P(\alpha_P)$ (onde α_P é a P -ésima componente do adele α). Assim, por definição, $v_P(\alpha) \geq 0$ para quase todo $P \in \mathbb{P}(F)$.

Definição 2.41. Se $A \in D_F$, definimos $\mathcal{A}_F(A) := \{\alpha \in \mathcal{A}_F : v_P(\alpha) \geq -v_P(A), \forall P \in \mathbb{P}(F)\}$, que é, naturalmente, um K -subespaço vetorial de $\mathcal{A}_F$.

Definição 2.42. Uma **diferencial de Weil** de F/K é uma função K -linear $\omega : \mathcal{A}_F \longrightarrow K$ que se anula em $\mathcal{A}_F(A) + F$ para algum $A \in D_F$. Denominamos o conjunto

$$\Omega_F := \{\omega : \omega \text{ é uma diferencial de Weil de } F/K\}$$

de **módulo das diferenciais de Weil** de F/K . Ω_F pode ser visto como espaço vetorial sobre K de forma natural.

Gostaríamos de associar a cada $0 \neq \omega \in \Omega_F$, um divisor $W \in D_F$. Para isto, consideremos o conjunto

$$M(\omega) := \{A \in D_F : \omega \text{ se anula em } \mathcal{A}_F(A) + F\}.$$

É possível provar que existe um único divisor $W \in M(\omega)$ tal que

$$W = \max\{A \in D_F : \omega \text{ se anula em } \mathcal{A}_F(A) + F\}.$$

Para $0 \neq \omega \in \Omega_F$ e $W \in D_F$, obtido da forma acima, usaremos a seguinte notação: $(\omega) := W$. Diremos que um divisor W é **canônico** se $W = (\omega)$ para algum $\omega \in \Omega_F$.

Lema 2.43. *Seja A um divisor arbitrário, e $W = (\omega)$ um divisor canônico de F/K . Então, $i(A) = \dim(W - A)$.*

Teorema 2.44 (Teorema de Riemann-Roch). *Seja W um divisor canônico de F/K . Então, para $A \in D_F$, temos*

$$\dim(A) = \deg(A) + 1 - g + \dim(W - A) .$$

Demonstração. Por definição, temos $i(A) = \dim(A) - \deg(A) + g - 1$, e, pelo lema anterior, temos $i(A) = \dim(W - A)$. Logo:

$$\dim(W - A) = \dim(A) - \deg(A) + g - 1 \implies \dim(A) = \deg(A) + 1 - g - \dim(W - A) .$$

■

Corolário 2.45. *Para um divisor canônico W , temos $\deg(W) = 2g - 2$ e $\dim(W) = g$.*

Demonstração. Pelo teorema de Riemann-Roch, se fizermos $A = 0$, temos:

$$\dim(0) = \deg(0) + 1 - g + \dim(W + 0) \implies 1 = 0 + 1 - g + \dim(W) \implies \dim(W) = g ,$$

e, se tomarmos $A = W$, temos

$$\dim(W) = \deg(W) + 1 - g + \dim(0) \implies g = \deg(W) + 1 - g + 1 \implies \dim(W) = 2g - 2 .$$

■

Os dois próximos resultados também são conseqüências do teorema de Riemann-Roch, e de grande utilidade no desenvolvimento da teoria de corpos de funções.

Teorema 2.46 (Teorema da aproximação forte). *Seja $S \subsetneq \mathbb{P}(F)$ um subconjunto próprio de $\mathbb{P}(F)$, e $P_1, \dots, P_r \in S$. Suponha que sejam dados $x_1, \dots, x_r \in F$ e $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z}$. Então, existe $x \in F$ tal que*

$$v_{P_i}(x - x_i) = n_i \text{ para } i = 1, \dots, r$$

e

$$v_P(x) \geq 0 , \forall P \in S \setminus \{P_1, \dots, P_r\} .$$

Proposição 2.47. *Seja $P \in \mathbb{P}(F)$. Então, para $n \geq 2g$, existe um elemento $x \in F$ cujo divisor de pólos é $(x)_\infty = nP$.*

Uma das aplicações da proposição acima é poder obter, a partir de um dado lugar $P \in \mathbb{P}(F)$, $x \in F$ que tenha P como seu único zero ou pólo.

Capítulo 3

Extensões Algébricas de Corpos de Funções

Neste Capítulo, a menos de menção em contrário, consideraremos:

- o corpo de funções algébricas F/K , com K algebricamente fechado em F , isto é, $K = \tilde{K}$;
- K um corpo perfeito;
- Φ um corpo fixo, algebricamente fechado, onde $F \subseteq \Phi$ e todas as extensões $F' \supseteq F$ são tais que $F' \subseteq \Phi$.

Ressaltamos novamente que as demonstrações apresentadas, bem como aquelas que forem omitidas, podem ser encontradas em [11].

3.1 Extensões Algébricas de Corpos de Funções

O principal objetivo desta seção é a introdução de conceitos básicos como:

- extensão algébrica de corpos de funções;
- extensão de lugares;
- índice de ramificação;
- a igualdade fundamental $\sum e_i f_i = n$.

Tais conceitos serão amplamente utilizados ao longo deste texto. Os dois últimos resultados desta seção (corolário 3.13 e proposição 3.14) também merecem destaque por serem ferramentas importantes para o desenvolvimento do Capítulo 4.

Definição 3.1. (a) Uma **extensão algébrica** de um corpo de funções F/K é um corpo de funções F'/K' , onde $F' \supseteq F$ é uma extensão algébrica e $K \subseteq K'$.

(b) Uma extensão algébrica F'/K' de F/K é dita **constante** se $F' = K'F$, ou seja, se F' é o compósito de K' e F .

(c) Uma extensão algébrica F'/K' de F/K é dita **finita** se $[F' : F] < \infty$.

Lema 3.2. *Seja F'/K' uma extensão algébrica de F/K . Então:*

- (a) K'/K é uma extensão algébrica, e $F \cap K' = K$;
- (b) F'/K' é uma extensão finita de F/K se, e somente se, $[K' : K] < \infty$;
- (c) se $F_1 := FK'$, temos que F_1/K' é uma extensão constante de F/K e F'/K' é uma extensão finita de F_1/K' .

Demonstração. (a) O diagrama abaixo mostra que a extensão K'/K é algébrica:

Agora, é claro que $K \subseteq K' \cap F$. Seja $z \in K' \cap F$; mostraremos que $z \in K$ (consideremos K algebricamente fechado em F). Suponhamos z transcendente; então, a extensão $K(z)/K$ é transcendente, o que contraria o diagrama abaixo.

- (b) Suponha $[F' : F] < \infty$; então, F'/K é um corpo de funções algébricas, e K' fará o papel do K definido no Capítulo 2. Logo, $[K' : K] < \infty$.

Agora, para mostrarmos a recíproca, assumiremos o seguinte fato: se K'/K é uma extensão de corpos finita, e x é transcendente sobre K , então $[K'(x) : K(x)] = [K' : K]$ (que é um caso particular do lema 3.46, apresentado mais adiante). Assumindo $[K' : K] < \infty$, e tomando $x \in F$ transcendente sobre K , o diagrama acima mostra que $[F' : F] < \infty$.

(c) Usando o item (b), o diagrama abaixo mostra que $[F' : F_1] < \infty$.

■

Veremos agora a relação entre os lugares de F e F' .

Definição 3.3. Considere uma extensão algébrica F'/K' de F/K . Um lugar $P' \in \mathbb{P}(F')$ está **sobre** $P \in \mathbb{P}(F)$ se $P \subseteq P'$. Também dizemos que P' é uma **extensão** de P , e denotamos isto por $P' \mid P$.

Proposição 3.4. Considere uma extensão algébrica F'/K' de F/K . Tomemos P, O_P, v_P em F/K , e $P', O_{P'}, v_{P'}$ em F'/K' . São equivalentes:

- (1) $P' \mid P$;
- (2) $O_P \subseteq O_{P'}$;

(3) existe um único $e \in \mathbb{N}^*$ tal que $v_{P'}(x) = e \cdot v_P(x)$, qualquer que seja $x \in F$.

Além disso, se $P' \mid P$, então $P = P' \cap F$ e $O_P = O_{P'} \cap F$.

Demonstração.

- (1) $\implies$ (2) : Suponhamos que $P' \mid P$ e $O_P \not\subseteq O_{P'}$. Neste caso, existe $u \in O_P$ tal que $v_P(u) \geq 0$ e $v_{P'}(u) < 0$. Logo:

$$u \notin P' \implies u \notin P \implies v_P(u) = 0 .$$

Mostraremos que, nestas condições, existe um elemento de P que não está em P' , contrariando a hipótese.

Seja $t \in F$, com $v_P(t) = 1$. Então, $t \in P'$ e $r := v_{P'}(t) > 0$. Assim:

$$v_P(u^r t) = r \cdot v_P(u) + v_P(t) = r \cdot 0 + 1 = 1 ,$$

e, portanto, $u^r t \in P$. Mas, por outro lado, como $v_{P'}(u) \leq -1$, temos

$$v_{P'}(u^r t) = r \cdot v_{P'}(u) + v_{P'}(t) \leq -r + r = 0 ,$$

o que implica que $u^r t \notin P'$.

Antes de mostrarmos que (2) $\implies$ (1), vamos provar que

$$(*) \quad O_P \subseteq O_{P'} \implies O_P = F \cap O_{P'} .$$

De fato, como $O_{P'} \cap F$ é um subanel de F , e $O_P \subseteq O_{P'} \cap F$, temos que $O_P = F \cap O_{P'}$ ou $O_{P'} \cap F = F$ (pois O_P é maximal em F). Suponhamos que $O_{P'} \cap F = F$, ou seja, $F \subseteq O_{P'}$. Tomemos $x \in F' \setminus O_{P'}$. Como $F' \mid F$ é algébrica, temos que

$$(**) \quad x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0 = 0 ,$$

com $c_i \in F$ para cada $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Como $x \notin O_{P'}$, temos então que $v_{P'}(x^n) = n \cdot v_{P'}(x) < 0$. Logo,

$$v_{P'}(x^n) < v_{P'}(c_i x^i) \quad i = 1, \dots, n-1 .$$

Portanto, pela desigualdade triangular estrita, temos que

$$v_{P'}(x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0) = n \cdot v_{P'}(x) < 0 .$$

Isso contradiz (**), e prova (*).

- (2) $\implies$ (1) : Suponha $O_P \subseteq O_{P'}$. Temos então que:

$$y \in P \implies y^{-1} \notin O_P \implies y^{-1} \notin O_{P'} \implies y \in P' .$$

Portanto, $P \subseteq P'$.

- (2) $\implies$ (3) : Suponha $O_P \subseteq O_{P'}$. Observemos que, se $x \in F$ e $v_P(x) = 0$, então $v_{P'}(x) = 0$: de fato, se $u \in F$ é tal que $v_P(u) = 0$, então $u, u^{-1} \in O_P$, e, portanto, $u, u^{-1} \in O_{P'}$, o que implica $v_{P'}(u) = 0$.

Agora, seja $t \in F$ tal que $v_P(t) = 1$, e façamos $e := v_{P'}(t)$. Como $P' \mid P$, temos que $e \geq 1$. Seja então $0 \neq x \in F$ e $v_P(x) =: r \in \mathbb{Z}$. Logo, $v_P(xt^{-r}) = v_P(x) - rv_P(t) = 0$. Conseqüentemente, $v_{P'}(xt^{-r}) = 0$, e assim:

$$v_{P'}(x) = v_{P'}(xt^{-r}t^r) = v_{P'}(xt^{-r}) + v_{P'}(t^r) = r \cdot v_{P'}(t) = e \cdot v_P(x) .$$

- (3) $\implies$ (2) :

$$x \in O_P \implies v_P(x) \geq 0 \implies v_{P'}(x) \geq 0 \implies x \in O_{P'} .$$

Agora, é fácil ver que $P = P' \cap F$. Seja, pois, $x \in P' \cap F$. Como $x \in P'$, temos $v_{P'}(x) > 0$; entretanto, por (3), temos $v_{P'}(x) = e \cdot v_P(x)$. Logo, $v_P(x) > 0 \implies x \in P$. ■

Uma conseqüência da proposição acima é que, se $P' \mid P$, existe uma imersão canônica de $F_P = O_P/P$ em $F'_{P'} = O_{P'}/P'$, dada por:

$$x(P) \longmapsto x(P') \text{ para } x \in O_P .$$

Portanto, podemos considerar $\mathbb{F}_P$ como subcorpo de $\mathbb{F}'_{P'}$ via tal imersão.

Definição 3.5. *Seja F'/K' uma extensão algébrica de F/K , e seja $P' \in \mathbb{P}(F')$ um lugar de F'/K' sobre $P \in \mathbb{P}(F)$.*

- (a) *O inteiro $e(P' \mid P) := e$, com $v_{P'}(x) = e \cdot v_P(x)$ para todo $x \in F$, é chamado **índice de ramificação** de P' sobre P .*

Observação: pela proposição anterior, temos que o índice de ramificação de P' sobre P nada mais é que a ordem de zero em P' de um elemento primo $t \in P$.

*Dizemos que $P' \mid P$ é **ramificado** se $e(P' \mid P) > 1$, e que $P' \mid P$ é **não-ramificado** se $e(P' \mid P) = 1$.*

- (b) $f(P' \mid P) := [F'_{P'} : F_P]$ é denominado **grau relativo** de P' sobre P .

Proposição 3.6. *Seja F'/K' uma extensão algébrica de F/K , e P' um lugar de F'/K' sobre $P \in \mathbb{P}(F)$. Então:*

- (a) $f(P' \mid P) < \infty \iff [F' : F] < \infty$;
- (b) *Se F''/K'' é uma extensão algébrica de F'/K' , e $P'' \in \mathbb{P}_{F''}$ é uma extensão de P' , então:*

$$\begin{aligned} e(P'' \mid P) &= e(P'' \mid P') \cdot e(P' \mid P) \\ f(P'' \mid P) &= f(P'' \mid P') \cdot f(P' \mid P) . \end{aligned}$$

Demonstração. (a) Lembrando que $\deg(P) = [F_P : K] < \infty$, $\deg(P') = [F'_{P'} : K'] < \infty$, e que $[F' : F] < \infty \iff [K' : K] < \infty$, o diagrama abaixo prova o item (a):

(b) Em $F \subseteq F' \subseteq F''$, tomemos os lugares $P \subseteq P' \subseteq P''$, e seja $t \in P$ um elemento primo. Pela definição de índice de ramificação, temos que:

$$e(P'' | P) = v_{P''}(t) \quad \text{e} \quad e(P' | P) = v_{P'}(t) .$$

Como, em particular, $t \in F'$, temos

$$v_{P''}(t) = e(P'' | P') \cdot v_{P'}(t) \implies e(P'' | P) = e(P'' | P') \cdot e(P' | P) .$$

Das inclusões $F_P \subseteq F'_{P'} \subseteq F''_{P''}$, segue direto que

$$f(P'' | P) = f(P'' | P') \cdot f(P' | P) .$$

■

Proposição 3.7. *Seja F'/K' uma extensão algébrica de F/K .*

- (a) *Para cada lugar $P' \in \mathbb{P}(F')$ existe exatamente um lugar $P \in \mathbb{P}(F)$ tal que $P' | P$, e este é dado por $P = P' \cap F$.*
- (b) *Reciprocamente, cada lugar $P \in \mathbb{P}(F)$ tem pelo menos um, porém uma quantidade finita de extensões $P' \in \mathbb{P}(F')$.*

Para demonstrar esta proposição usaremos a seguinte observação, demonstrada em [11] (páginas 62 e 63).

Observação 3.8. *Seja F'/K' uma extensão algébrica de F/K . Dados $P \in \mathbb{P}(F)$ e $P' \in \mathbb{P}(F')$, temos que:*

- (i) *existe $0 \neq z \in F$ tal que $v_{P'}(z) \neq 0$; conseqüentemente, $P' \cap F \neq \{0\}$;*
- (ii) *se $x \in F/K$ tem P como seu único zero, então $P' | P \iff v_{P'}(x) > 0$.*

Demonstração da proposição 3.7.

(a) Seja $O := O_{P'} \cap F$ e $P := P' \cap F$.

- (1) O é anel de valorização de F : de fato, se $z \in F \setminus O$, então $z \notin O_{P'} \implies z^{-1} \in O_{P'}$; mas, $z^{-1} \in F$, e, portanto, $z^{-1} \in O$.
- (2) $P := P' \cap F$ é o lugar associado a O : de fato, se retirarmos as unidades de O , estaremos retirando as unidades de $O_{P'}$ que estão em F , obtendo $P = P' \cap F$, e, pelo item (i) da observação acima, teremos que $P \neq \{0\}$.
- (b) Agora, dado $P \in \mathbb{P}(F)$, escolhemos $x \in F \setminus K$ tal que P seja seu único zero (o que é possível, segundo a proposição 2.47). Então, pelo item (ii) da observação acima, temos que $P' \mid P \iff v_{P'}(x) > 0$. Como x tem pelo menos um, porém uma quantidade finita de zeros em F' , segue que P tem pelo menos uma, porém uma quantidade finita de extensões P' em F' .

■

Definição 3.9. Seja F'/K' uma extensão algébrica de F/K . Dado um lugar $P \in \mathbb{P}(F)$, definimos a sua **conorma** (em relação à $F' \mid F$) por

$$\text{Con}_{F'/F}(P) = \sum_{P' \mid P} e(P' \mid P) \cdot P'.$$

Podemos estender a função conorma a um homomorfismo entre os grupos dos divisores de F e F' , fazendo:

$$\text{Con}_{F'/F} : \begin{cases} D_F \longrightarrow D_{F'} \\ \sum n_P \cdot P \longrightarrow \sum n_P \cdot \text{Con}_{F'/F}(P) \end{cases}.$$

Uma propriedade importante da conorma é que ela leva divisores principais de F em divisores principais de $F' \mid F$.

Proposição 3.10. Seja F'/K' uma extensão algébrica de F/K . Para $0 \neq x \in F$, denotemos por $(x)^F$ e $(x)^{F'}$ os divisores principais de x em D_F e $D_{F'}$, respectivamente. Então, $\text{Con}_{F'/F}((x)^F) = (x)^{F'}$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} (x)^{F'} &= \sum_{P' \in \mathbb{P}(F')} v_{P'}(x) \cdot P' = \sum_{P \in \mathbb{P}(F)} \sum_{P' \mid P} e(P' \mid P) \cdot v_P(x) \cdot P' \\ &= \sum_{P \in \mathbb{P}(F)} v_P(x) \sum_{P' \mid P} e(P' \mid P) \cdot P' = \sum_{P \in \mathbb{P}(F)} v_P(x) \cdot \text{Con}_{F'/F}(P) \\ &= \text{Con}_{F'/F} \left(\sum_{P \in \mathbb{P}(F)} v_P(x) \cdot P \right) = \text{Con}_{F'/F}((x)^F). \end{aligned}$$

■

Teorema 3.11. *Seja F'/K' uma extensão finita de F/K , P um lugar de F/K e $P_1, \dots, P_m$ todos os lugares de F'/K' sobre P . Seja $e_i = e(P_i | P)$ e $f_i = f(P_i | P)$, com $i = 1, \dots, m$. Então:*

$$\sum_{i=1}^m e_i \cdot f_i = [F' : F] .$$

Demonstração. Seja $x \in F$ tal que P é seu único zero em F/K . Então, pelo item (ii) da observação 3.8, os lugares $P_1, \dots, P_m$ são exatamente os zeros de x em F'/K' . A idéia é calcular $[F' : K(x)]$ de duas formas distintas e fazer a comparação no final.

Para tanto, vamos utilizar os seguintes diagramas:

bem como os seguintes fatos:

- $[K'(x) : K(x)] = [K' : K]$ (caso particular do lema 3.46 adiante) ;
 - $[F' : K'(x)] = \deg(x)_0^{F'} = \sum_{i=1}^m v_{P_i}(x) \cdot \deg(P_i) ;$
 - $[F : K(x)] = \deg(x)_0^F = v_P(x) \cdot \deg(P) .$
- (teorema 2.28)

Assim:

$$\begin{aligned} [F' : K(x)] &= [F' : K'(x)] \cdot [K'(x) : K(x)] \\ &= \sum_{i=1}^m \underbrace{v_{P_i}(x)}_{e_i \cdot v_P(x)} \cdot \underbrace{\deg(P_i)}_{f_i \cdot \deg(P)} \cdot [K' : K] \\ &= \sum_{i=1}^m (e_i \cdot v_P(x)) (f_i \cdot \deg(P)) \\ &= v_P(x) \cdot \deg(P) \cdot \sum_{i=1}^m e_i \cdot f_i . \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que:

$$[F' : K(x)] = [F' : F] \cdot [F : K(x)] = [F' : F] \cdot v_P(x) \cdot \deg(P) .$$

Fazendo a comparação, obtemos então que:

$$[F' : F] \cdot v_P(x) \cdot \deg(P) = v_P(x) \cdot \deg(P) \cdot \sum_{i=1}^m e_i \cdot f_i \implies [F' : F] = \sum_{i=1}^m e_i \cdot f_i .$$

■

Corolário 3.12. *Seja F'/K' uma extensão finita de F/K , e seja $P \in \mathbb{P}(F)$. Então:*

$$(a) \mid \{P' \in \mathbb{P}(F') : P \subseteq P'\} \mid \leq [F' : F];$$

$$(b) \text{ se } P' \in \mathbb{P}(F') \text{ e } P' \mid P, \text{ então } e(P' \mid P) \leq [F' : F] \text{ e } f(P' \mid P) \leq [F' : F].$$

Demonstração. Imediata. ■

Corolário 3.13. *Seja F'/K' uma extensão finita de F/K . Então, dado $A \in D_F$, temos:*

$$\deg(\text{Con}_{F'/F}(A)) = \frac{[F' : F]}{[K' : K]} \cdot \deg(A) .$$

Demonstração. É suficiente supor que A é um divisor primo, isto é, $A = P \in \mathbb{P}(F)$. Assim:

$$\begin{aligned} \deg(\text{Con}_{F'/F}(P)) &= \deg\left(\sum_{P' \mid P} e(P' \mid P) \cdot P'\right) = \sum_{P' \mid P} e(P' \mid P) \cdot \deg(P') \\ &= \sum_{P' \mid P} e(P' \mid P) \cdot f(P' \mid P) \cdot \frac{\deg(P)}{[K' : K]} = \frac{[F' : F]}{[K' : K]} \cdot \deg(P) . \end{aligned}$$

■

Proposição 3.14. *Considere um corpo de funções F/K e um polinômio*

$$\varphi(T) = a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \dots + a_1 T + a_0 ,$$

onde $a_i \in F$. Se existe $P \in \mathbb{P}(F)$ tal que $v_P(a_n) = 0$, $v_P(a_i) \geq 0$ para $i = 1, \dots, n-1$, $v_P(a_0) < 0$ e $\text{mdc}(n; v_P(a_0)) = 1$, então $\varphi(T)$ é irredutível em $F[T]$. Se $F' = F(y)$, onde y é raiz de $\varphi(T)$, então $P \in \mathbb{P}(F)$ tem uma única extensão $P' \in \mathbb{P}(F')$, e temos $e(P' \mid P) = n$ e $f(P' \mid P) = 1$.

Demonstração. Considere a extensão de corpos $F' = F(y)$, onde $\varphi(y) = 0$. O grau de $F' \mid F$ é $[F' : F] \leq \deg \varphi(T) = n$. Valendo a igualdade se, e somente se, $\varphi(T)$ é irredutível em $F[T]$, tomemos $P' \in \mathbb{P}(F')$ com $P' \mid P$. Como $\varphi(y) = 0$, temos

$$-a_n y^n = a_0 + a_1 y + \dots + a_{n-1} y^{n-1} .$$

Decorre das hipóteses que $v_{P'}(a_n) = 0$, $v_{P'}(a_i) \geq 0$ para $i = 1, \dots, n-1$, e $v_{P'}(a_0) < 0$. É fácil ver que $v_{P'}(y) < 0$: de fato, se $v_{P'}(y) \geq 0$, teríamos $v_{P'}(a_i y) \geq 0$ para $i = 1, \dots, n-1$, e assim:

$$v_{P'}(a_0 + a_1 y + \dots + a_{n-1} y^{n-1}) = v_{P'}(-a_n y^n) \geq 0 \implies v_{P'}(a_0) \geq 0 ,$$

o que seria uma contradição.

Agora, sendo $v_{P'}(y) < 0$, e como $v_{P'}(a_i) \geq 0$ para $i = 1, \dots, n-1$, temos

$$v_{P'}(y^n) < v_{P'}(a_i y^i) \implies v_{P'}(y^n) < v_{P'}(a_1 y + \dots + a_{n-1} y^{n-1}) .$$

Por outro lado, temos que:

$$v_{P'}(y^n) \geq \min\{v_{P'}(a_0) , v_{P'}(a_1 y + \dots + a_{n-1} y^{n-1})\} .$$

Portanto, $v_{P'}(y^n) = v_{P'}(a_0)$. Fazendo $e := e(P' | P)$, temos

$$n \cdot v_{P'}(y) = e(P' | P) \cdot v_P(a_0) .$$

Mas, como $\text{mdc}(n, v_P(a_0)) = 1$, temos que $n | e$, e portanto

$$n \leq e \implies e \geq [F' | F] .$$

Agora, usando a igualdade fundamental $\sum e_i f_i = [F' : F]$ (teorema 3.11), seguem os resultados desejados. ■

3.2 Subanéis de Corpos de Funções

A idéia principal desta seção é apresentar alguns conceitos e resultados sobre anéis de holomorfia de um corpo de funções algébricas. Tal conteúdo servirá de base para a seção seguinte.

Definição 3.15. Um **subanel** de F/K é um anel R tal que $K \subseteq R \subseteq F$ e R não é corpo.

Logo, se R é um anel de F/K , então $K \subsetneq R \subsetneq F$. Temos que, se $P \in \mathbb{P}(F)$, então O_P é um exemplo trivial de subanel de F/K .

Definição 3.16. Para $\emptyset \neq S \subsetneq \mathbb{P}(F)$, definimos

$$O_S := \bigcap_{P \in S} O_P ,$$

e qualquer anel $R \subseteq F$ da forma acima será chamado **anel de holomorfia** de F/K .

Lema 3.17. (a) Todo anel de valorização O_P é um anel de holomorfia, onde $O_P = O_S$, com $S = \{P\}$.

- (b) Todo anel de holomorfia O_S é um subanel de F/K .
- (c) Para $P \in \mathbb{P}(F)$ e $\emptyset \neq S \subsetneq \mathbb{P}(F)$, temos $O_S \subseteq O_P \iff P \in S$. Conseqüentemente, $O_S = O_T \iff S = T$.

Demonstração. (a) Óbvio.

- (b) Como O_S é um anel com $K \subseteq O_S \subseteq F$, é suficiente mostrar que O_S não é corpo. Seja $P_1 \in S$. Como $S \neq \mathbb{P}(F)$, pelo teorema da aproximação forte, existe $0 \neq x \in F$ tal que

$$v_{P_1}(x) > 0 \text{ e } v_P(x) \geq 0, \forall P \in S \setminus \{P_1\}.$$

Em particular, $x \in O_S$. Conseqüentemente,

$$v_{P_1}(x^{-1}) < 0 \implies x^{-1} \notin O_{P_1} \implies x^{-1} \notin O_S.$$

- (c) É óbvio que $P \in S \implies O_S \subseteq O_P$. Provaremos que $P \notin S \implies O_S \not\subseteq O_P$.

Se $P \notin S$, pelo teorema da aproximação forte, podemos tomar $z \in F$ tal que

$$(1) \quad v_P(z) < 0 \text{ e } v_Q(z) \geq 0, \forall Q \in S,$$

ou seja, $z \in O_S$, mas $z \notin O_P$. (1) é facilmente aceitável caso tenhamos $S \cup \{P\} \neq \mathbb{P}(F)$. Por outro lado, se $S \cup \{P\} = \mathbb{P}(F)$, basta tomarmos $z \in O_S$ transcendente sobre K . Como z tem pelo menos um pólo, este será necessariamente P , ou seja, (1) continua valendo.

Agora, é claro que $S = T \implies O_S = O_T$. Provaremos que $O_S = O_T \implies S = T$.

$$P \in S \implies O_S \subseteq O_P \implies O_T \subseteq O_P \implies P \in T.$$

Portanto, $S \subseteq T$, e analogamente temos $T \subseteq S$. ■

Definição 3.18. Seja R um subanel de F/K .

- (a) Um elemento $z \in F$ é **inteiro** sobre R se $f(z) = 0$ para algum polinômio mônico $f(x) \in R[x]$.
- (b) O conjunto $ic_F(R) := \{z \in F : z \text{ é inteiro sobre } R\}$ é chamado **fecho inteiro** de R em F .
- (c) Seja $F_0 \subseteq F$ o corpo quociente de R . R é dito **integralmente fechado** se $ic_{F_0}(R) = R$.

Proposição 3.19. Seja O_S um anel de holomorfia de F/K . Então:

- (a) F é o corpo quociente de O_S ;
- (b) O_S é integralmente fechado.

Observação: Em particular, um anel de valorização possui tais propriedades.

Demonstração. (a) Seja $0 \neq x \in F$. Como x tem um número finito de zeros e pólos, temos, pelo teorema 2.46 (da aproximação forte), que existe $0 \neq z \in F$ tal que:

$$v_P(z) \geq \max\{0, v_P(x^{-1})\} \quad , \quad \forall P \in S \quad .$$

Então, como $v_P(z) \geq 0, \forall P \in S$, temos que $z \in O_S$. Seja $y := zx$. Assim,

$$v_P(y) = v_P(z) + v_P(x) \geq v_P(x^{-1}) + v_P(x) = 0 \quad , \quad \forall P \in S \quad .$$

Logo, $y \in O_S$, e, portanto, $x = yz^{-1}$ está no corpo quociente de O_S .

(b) Seja $u \in F$ inteiro sobre O_S . Então

$$u^n + a_{n-1}u^{n-1} + \dots + a_1u + a_0 = 0 \quad ,$$

onde $a_i \in O_S$ para cada $i = 0, \dots, n-1$. Mostraremos que $u \in O_S$. Suponhamos que $u \notin O_S$. Então, existe $P \in S$ tal que $v_P(u) < 0$. Como $v_P(a_i) \geq 0$, temos que $v_P(u^n) < v_P(a_i u^i)$ para todo $i = 0, 1, \dots, n-1$. Logo,

$$v_P(u^n + a_{n-1}u^{n-1} + \dots + a_0) = v_P(u^n) < 0 \implies v_P(0) < 0 \quad ,$$

o que é absurdo. ■

O próximo teorema nos diz que, se R é subanel de F/K , então o fecho inteiro de R em F é um anel de holomorfia.

Teorema 3.20. *Seja R um subanel de F/K , e $S(R) = \{P \in \mathbb{P}(F) : R \subseteq O_P\}$. Então:*

(a) $\emptyset \neq S(R) \subsetneq \mathbb{P}(F)$;

(b) o fecho inteiro de R em F é $ic_F(R) = O_{S(R)}$; em particular, $ic_F(R)$ é um subanel integralmente fechado de F/K com corpo quociente F .

Demonstração. (a) Como R não é corpo, podemos encontrar um ideal próprio $\{0\} \neq I \subsetneq R$, e, pelo teorema 2.16, existe um lugar $P \in \mathbb{P}(F)$ tal que $I \subseteq P$ e $R \subseteq O_P$. Portanto, $S(R) \neq \emptyset$. Por outro lado, tomamos $x \in R$ transcendente sobre K (este existe, pois $K \subsetneq R$). Então existe $P \in \mathbb{P}(F)$ tal que $v_P(x) < 0$. Logo, $P \notin S(R)$, e conseqüentemente $S(R) \subsetneq \mathbb{P}(F)$.

(b) Como

$$O_{S(R)} = \bigcap_{P \in S(R)} O_P \quad ,$$

temos que $R \subseteq O_{S(R)}$, e, como $O_{S(R)}$ é integralmente fechado, temos que $ic_F(R) \subseteq O_{S(R)}$. Para provar a outra inclusão, tomemos $z \in O_{S(R)}$, e assumiremos o seguinte fato (vide [11], página 69):

$$z^{-1} \cdot R[z^{-1}] = R[z^{-1}] \quad .$$

Do fato acima, temos que existem $s \in \mathbb{N}$ e $a_i \in R$, com $i = 0, 1, \dots, s$, tais que vale a seguinte relação:

$$z^{-1} \cdot \sum_{i=0}^s a_i (z^{-1})^i = 1 .$$

Multiplicando por z^{s+1} , temos

$$z^{s+1} - \sum_{i=0}^s a_i z^{s-i} = 0 .$$

Portanto, z é inteiro sobre R . ■

Corolário 3.21. *Um subanel R de F/K , com corpo quociente F , é integralmente fechado se, e somente se, R é anel de holomorfia.*

Demonstração. Na hipótese de R ser de holomorfia, o resultado segue da proposição 3.19. Na recíproca, temos $ic_F(R) = R$. Logo, $R = O_{S(R)}$ (pelo teorema 3.20), e, portanto, R é de holomorfia. ■

Proposição 3.22 ([11], página 71). *Se $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{P}(F)$ é um conjunto finito de lugares de F/K , então O_S é um domínio de ideais principais.*

3.3 Base Local Integral

Nesta seção, estudaremos o fecho inteiro de um subanel R de F/K em uma extensão finita F' de F , apresentaremos o conceito de base local integral, e finalizaremos apresentando o teorema de Kummer, que será bastante utilizado no Capítulo 4.

Aqui, assumiremos F'/F finita e separável.

Proposição 3.23. *Seja R um subanel integralmente fechado de F/K (isto é, R é um subanel de holomorfia de F/K). Para $z \in F'$, seja $\varphi(T) \in F[T]$ o seu polinômio minimal sobre F . Então:*

$$z \text{ é inteiro sobre } R \iff \varphi(T) \in R[T] .$$

Demonstração. É óbvio que

$$\varphi(T) \in R[T] \implies z \text{ é inteiro sobre } R .$$

A recíproca não é evidente, pois, a priori, $\varphi(T)$ é um polinômio muito específico. Vejamos então tal demonstração.

Tomamos $f(T) \in R[T]$ tal que $f(z) = 0$. Como $\varphi(T)$ é o polinômio minimal de z sobre F , temos que existe um polinômio $\psi(T) \in F[T]$ tal que $f(T) = \varphi(T) \cdot \psi(T)$. Seja $F'' \supseteq F'$ uma extensão finita de F contendo todas as raízes de $\varphi(T)$ e $R'' = ic_{F''}(R)$, isto é, o fecho inteiro de R em F'' . Como todas as raízes de $\varphi(T)$ são raízes de $f(T) \in R[T]$, temos que tais raízes estão em R'' . Como os coeficientes de $\varphi(T)$ são expressões polinomiais de suas raízes, temos que $\varphi(T) \in R''[T]$. Logo, $\varphi(T) \in F[T] \cap R''[T]$. Mas, como R é integralmente fechado em F , temos que $F \cap R'' = R$. Portanto, $\varphi(T) \in R[T]$. ■

Corolário 3.24. Utilizando a notação da proposição anterior, seja $T_{r_{F'|F}} : F' \rightarrow F$ a função traço de F' para F , e $x \in F'$ um inteiro sobre R . Então, $T_{r_{F'|F}}(x) \in R$.

Demonstração. Como x é inteiro sobre R segue, pela proposição anterior, que o polinômio minimal de x sobre F está em $R[T]$. Mas, pelas propriedades da função traço, sabemos que $T_{r_{F'|F}}(x)$ é um múltiplo natural de um dos coeficientes do polinômio minimal de x . Logo, $T_{r_{F'|F}}(x) \in R$. ■

As demonstrações dos dois próximos resultados podem ser encontradas em [11] (página 73).

Proposição 3.25. Seja $M | L$ uma extensão finita e separável, e $\{z_1, \dots, z_n\}$ uma base de $M | L$. Então existem únicos $z_1^*, \dots, z_n^* \in M$ tais que

$$T_{r_{M|L}}(z_i z_j^*) = \delta_{ij} ,$$

onde δ_{ij} denota o símbolo de Kronecker. O conjunto $\{z_1^*, \dots, z_n^*\}$ também é base de $M | L$, chamado **base dual** de $\{z_1, \dots, z_n\}$ (relativa ao traço).

Teorema 3.26. Seja R um subanel integralmente fechado de $F | K$, com corpo quociente F , e $F' | F$ uma extensão finita e separável de grau n . Seja $R' = ic_{F'}(R)$ o fecho inteiro de R em F' . Então:

- (a) existe uma base de $F' | F$ contida em R' ;
- (b) se $\{z_1, \dots, z_n\} \subseteq R'$ é uma base de $F' | F$ e $\{z_1^*, \dots, z_n^*\}$ denota a base dual com respeito à função traço, então:

$$\sum_{i=1}^n R z_i \subseteq R' \subseteq \sum_{i=1}^n R z_i^* ;$$

- (c) na hipótese adicional de R ser um domínio de ideais principais, então existe uma base $\{u_1, \dots, u_n\}$ de $F' | F$ com a propriedade

$$R' = \sum_{i=1}^n R u_i .$$

Corolário 3.27. Seja $F' | F$ uma extensão finita e separável de $F | K$, e $P \in \mathbb{P}(F)$ um lugar de F/K . Então, o fecho inteiro de O_P em F' (denotado por O'_P) é dado por:

$$O'_P = \bigcap_{P'|P} O_{P'} ,$$

e existe uma base $\{u_1, \dots, u_n\}$ de $F' \mid F$ tal que

$$O_{P'} = \sum_{i=1}^n O_P \cdot u_i .$$

Observação: tal base é denominada **base integral** de $O_{P'}$ sobre O_P (ou **base local integral** de $F' \mid F$ para o lugar P).

Demonstração. Façamos $R := O_P$, e consideremos

$$S(R) = \{P' \in \mathbb{P}(F') : R \subseteq O_{P'}\} = \{P' \in \mathbb{P}(F') : P' \mid P\} .$$

Por definição, temos que

$$O_{S(R)} = \bigcap_{P' \in S(R)} O_{P'} = \bigcap_{P' \mid P} O_{P'} .$$

Mas, pelo item (b) do teorema 3.20, temos que $ic_{F'}(R) = O_{S(R)}$, ou seja,

$$O'_P = O_{S(R)} \implies O'_P = \bigcap_{P' \mid P} O_{P'}$$

Agora, como O_P é um domínio de ideais principais, temos, pelo item (c) do teorema anterior, que existe uma base $\{u_1, \dots, u_n\}$ de $F' \mid F$ tal que:

$$O'_P = \sum_{i=1}^n O_P \cdot u_i .$$

■

Teorema 3.28. *Seja F/K um corpo de funções, e F'/F uma extensão finita e separável. Então, qualquer base $\{z_1, \dots, z_n\}$ é base local integral para quase todos os lugares $P \in \mathbb{P}(F)$.*

Demonstração. Consideremos $\{z_1^*, \dots, z_n^*\}$ base dual de $\{z_1, \dots, z_n\}$. Os polinômios minimais de $z_1, \dots, z_n, z_1^*, \dots, z_n^*$ sobre F envolvem apenas uma quantidade finita de coeficientes. Seja $S \subseteq \mathbb{P}(F)$ o conjunto de todos os pólos desses coeficientes. S é finito, e, se $P \notin S$, então $z_1, \dots, z_n, z_1^*, \dots, z_n^* \in ic_{F'}(O_P) = O'_P$, isto é,

$$\{z_1, \dots, z_n\} \subseteq O'_P \quad \text{e} \quad \{z_1^*, \dots, z_n^*\} \subseteq O'_P .$$

Como $O'_P = ic_{F'}(O_P)$, pelo item (b) do teorema 3.26, temos que:

$$\sum_{i=1}^n O_P z_i \subseteq O'_P \subseteq \sum_{i=1}^n O_P z_i^* \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n O_P z_i \supseteq O'_P \supseteq \sum_{i=1}^n O_P z_i^* .$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^n O_P z_i = O'_P = \sum_{i=1}^n O_P z_i^* .$$

Assim, $\{z_1, \dots, z_n\}$ é base integral para qualquer $P \notin S$. Logo, $\{z_1, \dots, z_n\}$ e $\{z_1^*, \dots, z_n^*\}$ são bases integrais para quase todos os lugares $P \in \mathbb{P}(F)$. ■

Comentário: O corolário 3.27 nos diz que, dado $P \in \mathbb{P}(F)$, existe uma base integral de F'/F para P . O teorema anterior, em particular, nos diz que, dada a base de F'/F , existe $P \in \mathbb{P}(F)$ para o qual tal base é integral.

O próximo teorema nos fornece um método para determinar as extensões de um lugar $P \in \mathbb{P}(F)$ em F' , e será fortemente usado no Capítulo 4.

Usaremos as seguintes notações:

- $\bar{F} := \mathbb{F}_P$ é o corpo residual de P ;
- $\bar{a} := a(P) \in \bar{F}$ é a classe de resíduos de $a \in O_P$;
- se $\psi(T) = \sum c_i T^i$ é um polinômio com coeficientes $c_i \in O_P$, denotaremos por $\bar{\psi}(T) = \sum \bar{c}_i T^i \in \bar{F}[T]$, a imagem de $\psi(T)$ em $\bar{F}[T]$.

Teorema 3.29 (Teorema de Kummer). *Seja $F' = F(y)$, onde y é inteiro sobre O_P , e considere o seu polinômio minimal $\varphi(T) \in O_P[T]$ sobre F . Seja*

$$\bar{\varphi}(T) = \prod_{i=1}^r \gamma_i(T)^{\epsilon_i}$$

a decomposição de $\bar{\varphi}(T)$ em fatores irredutíveis sobre $\bar{F}$ (isto é, polinômios $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ irredutíveis, mônicos, dois a dois distintos em $\bar{F}[T]$ e $\epsilon_i \geq 1$). Escolhendo polinômios mônicos $\varphi_i(T) \in O_P[T]$, com $\bar{\varphi}_i(T) = \gamma_i(T)$ e $\deg(\bar{\varphi}_i(T)) = \deg(\gamma_i(T))$, temos:

(a) *para $1 \leq i \leq r$, existem lugares $P_i \in \mathbb{P}(F')$ satisfazendo*

$$P_i \mid P, \quad \varphi_i(y) \in P_i, \quad f(P_i \mid P) \geq \deg(\gamma_i(T)) \quad \text{e ainda} \quad i \neq j \implies P_i \neq P_j;$$

(b) *supondo, adicionalmente, a validade de uma das seguintes hipóteses*

$$\epsilon_i = 1 \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, r \quad (*)$$

ou

$$\{1, y, y^2, \dots, y^{n-1}\} \text{ é uma base integral para } P \quad (**),$$

temos que:

- *para cada $1 \leq i \leq r$, existe um único lugar $P_i \in \mathbb{P}(F)$ com $P_i \mid P$ e $\varphi_i(P) \in P_i$;*
- *os lugares $P_1, \dots, P_r$ são todos os lugares de F' sobre P , e teremos*

$$\text{Con}_{F'/F}(P) = \sum_{i=1}^r \epsilon_i P_i,$$

ou seja, $e(P_i \mid P) = \epsilon_i$;

- *o corpo residual $F'_{P_i} = O_{P_i}/P_i$ é isomorfo à $\bar{F}[T]/\langle \gamma_i(T) \rangle$, e, portanto, $f(P_i \mid P) = \deg(\gamma_i(T))$.*

Demonstração. (a) Seja $\overline{F}_i := \overline{F}[T]/\langle \gamma_i(T) \rangle$. Como $\gamma_i(T)$ é irredutível sobre $\overline{F}$, temos que $\overline{F}_i$ é uma extensão de $\overline{F}$ de grau

$$[\overline{F}_i : \overline{F}] = \deg(\gamma_i(T)) .$$

Considerando o anel

$$O_P[y] = \sum_{j=0}^{n-1} O_P y^j ,$$

onde $n = \deg(\varphi(T)) = [F' : F]$, é possível mostrar ([11], página 77) que, para cada $1 \leq i \leq r$, a função

$$\sigma_i = \begin{cases} O_P[y] & \longrightarrow \overline{F}_i \\ \sum_{j=0}^{n-1} c_j y^j & \longmapsto \sum_{j=0}^{n-1} \bar{c}_j T^j \mod \gamma_i(T) \end{cases}$$

é um epimorfismo, cujo kernel é dado por

$$\ker(\sigma_i) = P \cdot O_P[y] + \varphi_i(y) \cdot O_P[y] .$$

Como $\{0\} \neq \ker(\sigma_i) \subsetneq O_P[y]$ é um ideal de $O_P[y]$, e este é subanel de F' , temos, pelo teorema 2.16, que existe um lugar $P_i \in \mathbb{P}(F')$ tal que $\ker(\sigma_i) \subseteq P_i$ e $O_P[y] \subseteq O_{P_i}$, de onde concluímos que

- $O_P \subseteq O_{P_i} \implies [P_i | P] ;$
- $P \cdot O_P[y] + \varphi_i(y) \cdot O_P[y] \subseteq P_i \implies [\varphi_i(y) \in P_i] .$

Como $O_P[y]/\ker(\sigma_i) \subseteq O_{P_i}/P_i = \mathbb{F}_{P_i}$ e $O_P[y]/\ker(\sigma_i) \simeq \overline{F}_i$ (via σ_i), temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & F_{P_i} & \\ & \downarrow & \\ f(P_i | P) & \overline{F}_i & \\ & \downarrow & \\ & \overline{F} & \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{c} F_{P_i} \\ \downarrow \\ \overline{F}_i \\ \downarrow \\ \overline{F} \end{array}} \right] \deg(\gamma_i(T))$$

Assim, concluímos que:

$$[f(P_i | P) \geq \deg(\gamma_i(T))] .$$

Agora, mostraremos que $i \neq j \implies P_i \neq P_j$. Sendo $i \neq j$, temos que $\gamma_i(T) = \overline{\varphi}_i(T)$ e $\gamma_j(T) = \overline{\varphi}_j(T)$, que são primos entre si em $\overline{F}[T]$. Então, existe $\lambda_i(T), \lambda_j(T) \in O_P[T]$ tais que

$$\overline{\varphi}_i(T) \cdot \overline{\lambda}_i(T) + \overline{\varphi}_j(T) \cdot \overline{\lambda}_j(T) = 1 \implies \varphi_i(y) \cdot \lambda_i(y) + \varphi_j(y) \cdot \lambda_j(y) - 1 \in P \cdot O_P[y] .$$

Como

$$\ker(\sigma_i) + \ker(\sigma_j) = P \cdot O_P[y] + \varphi_i(y) \cdot O_P[y] + \varphi_j(y) \cdot O_P[y] ,$$

temos que $1 \in \ker(\sigma_i) + \ker(\sigma_j)$. Como $\ker(\sigma_i) \subseteq P_i$ e $\ker(\sigma_j) \subseteq P_j$, temos que

$$\boxed{P_i \neq P_j} ,$$

pois, se $P_i = P_j$, temos $1 \in P_i$, o que é absurdo.

(b) Suponhamos agora que valha (*), isto é,

$$\bar{\varphi}(T) = \prod_{i=1}^r \gamma_i(T) .$$

Como $\varphi(T)$ é mônico, temos $\deg(\varphi(T)) = \deg(\bar{\varphi}(T))$, e, portanto,

$$\begin{aligned} [F' : F] = \deg(\varphi(T)) &= \sum_{i=1}^r \deg(\gamma_i(T)) \leq \sum_{i=1}^r f(P_i | P) \\ &\leq \sum_{i=1}^r f(P_i | P) e(P_i | P) \leq \sum_{P' | P} e(P' | P) f(P' | P) \\ &= [F' : F] , \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^r \deg(\gamma_i(T)) = \sum_{i=1}^r f(P_i | P) = \sum_{i=1}^r f(P_i | P) e(P_i | P) = \sum_{i=1}^r e(P' | P) f(P' | P) ,$$

e, conseqüentemente, temos:

- (I) $f(P_i | P) = \deg(\gamma_i(T))$, pois, se existisse $i \in \{1, \dots, r\}$ tal que $f(P_i | P) > \deg(\gamma_i(T))$, teríamos

$$\sum_{i=1}^r \deg(\gamma_i(T)) < \sum_{i=1}^r f(P_i | P) ;$$

- (II) $e(P_i | P) = e_i = 1$, pois, se existisse $i \in \{1, \dots, r\}$ tal que $e(P_i | P) > 1$, teríamos

$$\sum_{i=1}^r f(P_i | P) < \sum_{i=1}^r f(P_i | P) e(P_i | P) ;$$

- (III) os únicos lugares P' de $\mathbb{P}(F')$ tais que $P' | P$ são $P_1, P_2, \dots, P_r$, pois, se existisse $P' \in \mathbb{P}(F')$ tal que $P' \neq P_i$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, e $P' | P$, teríamos

$$\sum_{i=1}^r e(P_i | P) f(P_i | P) < \sum_{i=1}^r e(P' | P) f(P' | P) .$$

Omitiremos a demonstração quando da validade da segunda hipótese, pois esta não será usada no Capítulo 4. ■

3.4 O Cotraço das Diferenciais de Weil e a Fórmula do Gênero de Hurwitz

Nesta seção, consideraremos a seguinte situação: F/K corpo de funções algébricas, F'/F uma extensão finita e separável, K' o corpo das constantes de F' . Como K é perfeito, temos que K'/K é finita e separável.

Inicialmente, associaremos uma diferencial de Weil em F/K com uma diferencial de Weil em F'/F . A partir desta associação, conseguiremos obter uma fórmula que relaciona o gênero de F/K com o gênero de F'/K' . Tal fórmula será de grande utilidade no Capítulo 4.

Definição 3.30. Para $P \in \mathbb{P}(F)$, seja $O'_P := ic_{F'}(O_P)$ o fecho inteiro de O_P em F' . Então, o conjunto:

$$\mathcal{C}_P := \{z \in F' : tr_{F'/F}(z \cdot O'_P) \subseteq O_P\}$$

é chamado **módulo complementar** sobre O_P .

Proposição 3.31. Usando a notação da definição anterior, temos que:

- (a) $\mathcal{C}_P$ é um O'_P -módulo e $O'_P \subseteq \mathcal{C}_P$;
- (b) se $\{z_1, \dots, z_n\}$ é uma base integral de O'_P sobre O_P , então:

$$\mathcal{C}_P = \sum_{i=1}^n O_P \cdot z_i^*,$$

onde $\{z_1^*, \dots, z_n^*\}$ é a base dual de $\{z_1, \dots, z_n\}$;

- (c) existe um elemento $t \in F'$ (dependendo de P) tal que $\mathcal{C}_P = t \cdot O'_P$; além disso, $v_{P'}(t) \leq 0$ para todo $P' \mid P$, e, se $t' \in F'$, então

$$\mathcal{C}_P = t' \cdot O'_P \iff v_{P'}(t') = v_{P'}(t), \quad \forall P' \mid P;$$

- (d) $\mathcal{C}_P = O'_P$ para quase todo $P \in \mathbb{P}(F)$.

Demonstração. (a) É evidente que $\mathcal{C}_P$ é um O'_P -módulo, e, como o traço de um elemento de O'_P está em O_P (corolário 3.24), temos que $O'_P \subseteq \mathcal{C}_P$.

- (b) Seja $z \in \mathcal{C}_P$. Como $\{z_1^*, \dots, z_n^*\}$ é uma base de F'/F , temos que existem $x_1, \dots, x_n \in F$, com

$$z = \sum_{i=1}^n x_i z_i^*.$$

Como $z \in \mathbb{C}_P$ e $z_1, \dots, z_n \in O'_P$, temos que $tr_{F'/F}(zz_j) \in O_P$ para $1 \leq j \leq n$. Assim,

$$\begin{aligned} tr_{F'/F}(zz_j) &= tr_{F'/F}\left(\sum_{i=1}^n x_i z_i^* z_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i tr_{F'/F}(z_i^* z_j) \\ &= x_j . \end{aligned}$$

Logo, $x_j \in O_P$ e $z \in \sum_{i=1}^n O_P \cdot z_i^*$, ou seja,

$$\mathbb{C}_P \subseteq \sum_{i=1}^n O_P \cdot z_i^* .$$

Reciprocamente, seja

$$z \in \sum_{i=1}^n O_P \cdot z_i^* .$$

Mostraremos que, se $u \in O'_P$, então $tr_{F'/F}(zu) \in O_P$, concluindo assim que $z \in \mathbb{C}_P$.
Sejam

$$z = \sum_{i=1}^n x_i z_i^* \quad \text{e} \quad u = \sum_{i=1}^n y_i z_i ,$$

com $x_i, y_i \in O_P$. Então:

$$\begin{aligned} tr_{F'/F}(zu) &= tr_{F'/F}\left(\sum_{i,j=1}^n x_i y_j z_i^* z_j\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i y_j tr_{F'/F}(z_i^* z_j) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \in O_P . \end{aligned}$$

Portanto, $z \in \mathbb{C}_P$.

- (c) Pelo item (b), sabemos que existe uma base $\{u_1, \dots, u_n\}$ de F'/F tal que $\mathbb{C}_P = \sum_{i=1}^n O_P \cdot u_i$. Seja $0 \neq x \in F$ tal que $v_P(x) \geq 0$ e $v_P(x) \geq -v_{P'}(u_i)$, quaisquer que sejam $P' \mid P$ e $i = 1, \dots, n$ (isto é possível pela sobrejetividade de v_P). Então,

$$v_{P'}(xu_i) = e(P' \mid P) \cdot v_P(x) + v_{P'}(u_i) \geq 0 , \quad \forall P' \mid P \text{ e } i = 1, \dots, n .$$

Logo, $xu_i \in O'_P$, e, como

$$\mathbb{C}_P = \sum_{i=1}^n O_P u_i ,$$

temos:

$$x\mathbb{C}_P = \sum_{i=1}^n O_P x u_i \implies x\mathbb{C}_P \subseteq O'_P .$$

Agora, como $x\mathbb{C}_P$ é um ideal de O'_P , e O'_P é um domínio de ideais principais (proposição 3.22), temos que $x\mathbb{C}_P = yO'_P$ para algum $y \in O'_P$. Fazendo $t = x^{-1}y$, temos $\mathbb{C}_P = t \cdot O'_P$. Como $O'_P \subseteq \mathbb{C}_P$, temos que

$$\begin{aligned} 1 \in \mathbb{C}_P \implies t^{-1} \in O'_P &\implies v_{P'}(t^{-1}) \geq 0, \quad \forall P' \mid P \\ &\implies v_{P'}(t) \leq 0, \quad \forall P' \mid P . \end{aligned}$$

Finalmente, temos:

$$\begin{aligned} tO'_P = t'O'_P &\iff t(t')^{-1} \in O'_P \text{ e } t^{-1}t' \in O'_P \\ &\iff v_{P'}(t(t')^{-1}) \geq 0 \text{ e } v_{P'}(t^{-1}t') \geq 0, \quad \forall P' \mid P \\ &\iff v_{P'}(t) = v_{P'}(t'), \quad \forall P' \mid P . \end{aligned}$$

- (d) Escolhemos $\{z_1, \dots, z_n\}$ uma base de F'/F . Pelo teorema 3.28, $\{z_1, \dots, z_n\}$ e $\{z_1^*, \dots, z_n^*\}$ são bases integrais para quase todos os lugares $P \in \mathbb{P}(F)$. Logo, pelo item (b), temos $\mathbb{C}_P = O'_P$ para quase todos os lugares $P \in \mathbb{P}(F)$. ■

Definição 3.32. Considere um lugar $P \in \mathbb{P}(F)$ e o fecho inteiro O'_P de O_P em F' . Seja $\mathbb{C}_P = t \cdot O'_P$ o módulo complementar sobre O_P . Então, para cada $P' \mid P$, definimos o **expoente da diferente** de P' sobre P por

$$d(P' \mid P) := -v_{P'}(t) .$$

Pelo item (c) da proposição anterior, $d(P' \mid P)$ está bem definido, e $d(P' \mid P) \geq 0$. Pelo item (d) da mesma proposição, temos que $d(P' \mid P) = 0$ para quase todo $P \in \mathbb{P}(F)$ e $P' \mid P$, pois $\mathbb{C}_P = O'_P \implies v_{P'}(t) = 0, \forall P' \mid P$. Logo, podemos definir o divisor

$$\boxed{\text{Diff}(F'/F) := \sum_{P \in \mathbb{P}(F)} \sum_{P' \mid P} d(P' \mid P) \cdot P' .}$$

Este divisor está em $D_{F'}$, e é chamado de **diferente** de F'/F . Observamos que:

$$\text{Diff}(F'/F) \geq 0 .$$

Observação 3.33. Da definição acima, segue imediatamente uma forma alternativa de caracterização de $\mathbb{C}_P$: para $z \in F'$, temos:

$$z \in \mathbb{C}_P \iff v_{P'}(z) \geq -d(P' \mid P), \quad \forall P' \mid P .$$

De fato,

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{C}_P &\implies z = t \cdot x, \quad x \in O_{P'} \\ &\implies v_{P'}(z) = v_{P'}(t) + v_{P'}(x) \geq v_{P'}(t) = -d(P' | P), \quad \forall P' | P. \end{aligned}$$

Reciprocamente,

$$v_{P'}(z) \geq -d(P' | P), \quad \forall P' | P \implies v_{P'}(z) - v_{P'}(t) \geq 0, \quad P' | P,$$

onde $t \in F'$ e $\mathbb{C}_P = t \cdot O_P'$. Logo,

$$v_{P'}\left(\frac{z}{t}\right) \geq 0, \quad \forall P' | P,$$

e, portanto,

$$\frac{z}{t} = u \in O_P' \implies z = t \cdot u \implies z \in \mathbb{C}_P.$$

Lembraremos alguns conceitos que serão úteis no que segue.

- Seja $\mathcal{A}_F$ o espaço dos adeles de F/K . Para um divisor $A \in D_F$, temos que:

$$\mathcal{A}_F(A) = \{\alpha \in \mathcal{A}_F : v_P(\alpha) \geq -v_P(A), \quad \forall P \in \mathbb{P}(F)\}$$

é um K -subespaço de $\mathcal{A}_F$.

- Definindo adele principal, temos que F é naturalmente imerso em $\mathcal{A}_F$.
- Uma diferencial de Weil ω em F/K é uma função K -linear $\omega : \mathcal{A}_F \rightarrow K$ que se anula em $\mathcal{A}_F(A) + F$ para algum divisor $A \in D_F$.
- Se $\omega \neq 0$ é uma diferencial de Weil de F/K , então o seu divisor $(\omega) \in D_F$ é por definição

$$(\omega) = \max\{A \in D_F : \omega \text{ se anula em } \mathcal{A}_F(A) + F\}.$$

Definição 3.34. *Seja*

$$\mathcal{A}_{F'/F} := \{\alpha \in \mathcal{A}_{F'} : \alpha_{P'} = \alpha_{Q'} \text{ sempre que } P' \cap F = Q' \cap F\}.$$

A função traço $tr_{F'/F} : F' \rightarrow F$ pode ser estendida a uma função F -linear (também denotada por $tr_{F'/F}$ de $\mathcal{A}_{F'/F}$ para $\mathcal{A}_F$ fazendo

$$tr_{F'/F} : \begin{cases} \mathcal{A}_{F'/F} & \longrightarrow & \mathcal{A}_F \\ \alpha & \longmapsto & tr_{F'/F}(\alpha) \end{cases},$$

onde $(tr_{F'/F}(\alpha))_P := tr_{F'/F}(\alpha_{P'})$, com $P' | P$.

Observe que $\alpha_{P'}$ é o mesmo elemento de F' , qualquer que seja $P' | P$, pois $\alpha \in \mathcal{A}_{F'/F}$. Temos ainda que $\alpha_{P'} \in O_{P'}$ para quase todo $P' \in \mathbb{P}(F')$, e, conseqüentemente, pelo

corolário 3.24, temos que $tr_{F'/F}(\alpha_{P'}) \in O_P$ para quase todo $P \in \mathbb{P}(F)$, caracterizando efetivamente um adele. É fácil ver também que o traço de um adele principal de $\mathcal{A}_{F'/F}$ é um adele principal de $\mathcal{A}_F$ consistente ainda com a função traço ordinária $tr_{F'/F} : F' \rightarrow F$.

A demonstração do próximo teorema pode ser encontrada em [11] (página 83).

Teorema 3.35. *Na situação acima, para cada diferencial de Weil ω de F/K , existe uma única diferencial de Weil ω' de F'/K' , chamada de **cotraço** de ω em F'/F , e denotada por $Cotr_{F'/F}(\omega)$, tal que*

$$tr_{K'/K}(\omega'(\alpha)) = \omega(tr_{F'/F}(\alpha)) , \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}_{F'/F} .$$

Se $0 \neq (\omega) \in D_F$ é o divisor de ω , então

$$(Cotr_{F'/F}(\omega)) = Con_{F'/F}((\omega)) + Diff(F'/F) .$$

Enunciaremos agora um dos resultados mais importantes do nosso trabalho.

Teorema 3.36 (Fórmula do gênero de Hurwitz). *Seja F/K um corpo de funções algébricas de gênero g e F'/F uma extensão finita e separável. Seja K' o corpo das constantes de F' e g' o gênero de F'/K' . Então:*

$$2g' - 2 = \frac{[F' : F]}{[K' : K]} \cdot (2g - 2) + deg(Diff(F'/F)) .$$

Demonstração. Considere uma diferencial de Weil $\omega \neq 0$ em F/K . Pelo teorema anterior, temos que:

$$(Cotr_{F'/F}(\omega)) = Con_{F'/F}((\omega)) + Diff(F'/F) ,$$

o que implica

$$deg((Cotr_{F'/F}(\omega))) = deg(Con_{F'/F}((\omega))) + deg(Diff(F'/F)) .$$

Mas, lembremos (corolário 2.45) que o grau de um divisor canônico em F/K é $2g - 2$ ($2g' - 2$ em F'/K'), e ainda sabemos, pelo corolário 3.13, que

$$deg(Con_{F'/F}((\omega))) = \frac{[F' : F]}{[K' : K]} \cdot deg((\omega)) .$$

Então:

$$2g' - 2 = \frac{[F' : F]}{[K' : K]} \cdot (2g - 2) + deg(Diff(F'/F)) .$$

■

3.5 A Diferente

Nesta seção, assumiremos F'/F finita e separável. Para $P \in \mathbb{P}(F)$ e $P' \in \mathbb{P}(F')$, com $P' | P$, já definimos em seções anteriores o índice de ramificação $e(P' | P)$ e o expoente da diferente $d(P' | P)$. O resultado central aqui apresentado é o *Teorema da Diferente de Dedekind*, que mostra a existência de uma estreita relação entre estes dois números. Nesta seção, também estabelecemos a nomenclatura relacionada à ramificação de lugares, e finalizaremos com a apresentação de dois resultados que serão utilizados em seções posteriores.

Teorema 3.37 (Teorema da diferente de Dedekind). *Usando a notação acima, para qualquer que seja $P' | P$, temos:*

- (a) $d(P' | P) \geq e(P' | P) - 1$;
- (b) $d(P' | P) = e(P' | P) - 1 \iff e(P' | P)$ não é divisível pela característica de K .

Em particular, se $\text{car}(K) = 0$, então $d(P' | P) = e(P' | P) - 1$.

Observação 3.38. *Pelo item (b), observamos que, se $P' | P$ é não-ramificado, isto é, se $e(P' | P) = 1$, então P' não está no suporte de $\text{Diff}(F' | F)$. Isto serve como auxílio para o cálculo do gênero de F' , pela fórmula de Hurwitz.*

Enunciaremos dois lemas que nos permitirão provar cada um dos itens do teorema acima.

Lema 3.39. ([11], página 89) *Seja F^*/F uma extensão de corpos de funções, $P \in \mathbb{P}(F)$ e $P^* \in \mathbb{P}(F^*)$, com $P^* | P$. Considere um automorfismo σ de F^*/F . Então*

$$\sigma(P^*) := \{\sigma(z) : z \in P^*\}$$

é um lugar de F^ , e temos:*

- (a) $v_{\sigma(P^*)}(y) = v_{P^*}(\sigma^{-1}(y))$, $\forall y \in F^*$;
- (b) $\sigma(P^*) | P$;
- (c) $e(\sigma(P^*) | P) = e(P^* | P)$ e $f(\sigma(P^*) | P) = f(P^* | P)$.

Demonstração do teorema 3.37(a). Seja O'_P o fecho inteiro de O_P em F' , e $\mathbb{C}_P$ o módulo complementar sobre O_P . Pela observação 3.33, temos que

$$z \in \mathbb{C}_P \iff -v_{P'}(z) \leq d(P' | P), \quad \forall P' | P.$$

Assim, a idéia é mostrar que, se $t \in F'$ e $v_{P'}(t) = 1 - e(P' | P)$, qualquer que seja $P' | P$, então $t \in \mathbb{C}_P$, ou seja, mostraremos que $\text{tr}_{F'/F}(t \cdot O'_P) \subseteq O_P$.

Considere uma extensão de Galois finita F^*/F tal que $F \subseteq F' \subseteq F^*$. Como F'/F é finita e separável, e sendo $[F' : F] = n$, podemos tomar n automorfismos $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ de F^*/F , cujas restrições a F' sejam duas a duas distintas. Assim, para $z \in O'_P$ e $t \in F'$, com $v_{P'}(t) = 1 - e(P' | P)$, qualquer que seja $P' | P$ (tal t existe, pelo teorema 2.22, da aproximação fraca), temos, pelas propriedades da função traço:

$$\text{tr}_{F'/F}(tz) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(tz) \quad (\diamond) .$$

Agora, fixamos P^* em F^* tal que $P^* | P$, e a partir dos automorfismos, conforme o lema 3.39, obtemos outros lugares de F^* , dados por $P_i^* := \sigma_i^{-1}(P^*)$, e, a partir destes, obtemos os lugares de F' dados por $P_i' = P_i^* \cap F'$ (observamos que $P_i^* | P$ e $P_i' | P$). Como $z \in O'_P$, temos que $\sigma_i(z) \in O'_P$, pois

$$\sum_{j=0}^n a_j z^j = 0 \implies \sum_{j=0}^n a_j \sigma_i(z)^j = 0 ,$$

onde $a_j \in O_P$. Logo, $v_{P^*}(\sigma_i(z)) \geq 0$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} v_{P^*}(\sigma_i(tz)) &= v_{P^*}(\sigma_i(t)) + v_{P^*}(\sigma_i(z)) \\ &\geq v_{P^*}(\sigma_i(t)) = v_{P_i'}(t) \quad (\text{lema 3.39}) \\ &= e(P_i^* | P_i') \cdot v_{P_i'}(t) \\ &= e(P_i^* | P_i') \cdot (1 - e(P_i' | P)) \\ &> -e(P_i^* | P_i') \cdot e(P_i' | P) \\ &= -e(P_i^* | P) \\ &= -e(P^* | P) \quad (\text{lema 3.39}) . \end{aligned}$$

Então, usando $(\diamond)$, temos:

$$\begin{aligned} v_{P^*}(\text{tr}_{F'/F}(tz)) &= v_{P^*}\left(\sum \sigma_i(tz)\right) > -e(P^* | P) \\ \implies e(P^* | P) \cdot v_P(\text{tr}_{F'/F}(tz)) &> -e(P^* | P) \\ \implies v_P(\text{tr}_{F'/F}(tz)) &\geq 0 . \end{aligned}$$

Como $z \in O'_P$ foi escolhido arbitrariamente, temos $\text{tr}_{F'/F}(t \cdot O'_P) \subseteq O_P$, isto é, $t \in \mathbb{C}_P$. ■

O próximo lema é essencial para a demonstração da parte (b) do teorema 3.37.

Lema 3.40. ([11], página 91) *Seja $P \in \mathbb{P}(F)$ e $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{P}(F')$ todas as extensões de P em F'/F . Considere o corpo residual $M := O_P/P$ e $M_i := O_{P_i}/P_i \supseteq M$, e as correspondentes funções de classe de resíduo $\pi : O_P \rightarrow M$ e $\pi_i : O_{P_i} \rightarrow M_i$ (para $i = 1, \dots, r$). Então, para todo $u \in O'_P$ (o fecho inteiro de O_P em F'), temos:*

$$\pi(\text{tr}_{F'/F}(u)) = \sum_{i=1}^r e(P_i | P) \cdot \text{tr}_{M_i/M}(\pi_i(u)) .$$

Demonstração do teorema 3.5.1(b). Usaremos a notação do lema 3.40 acima, e abreviaremos $e_i = e(P_i | P)$. Seja $P' = P_1$ e $e := e(P' | P)$. Devemos mostrar que:

$$d(P' | P) = e - 1 \iff \text{car}(K) \text{ não divide } e .$$

Primeiramente, assumiremos que $\text{car}(K)$ não divide e . Suponhamos $d(P' | P) \geq e$, e tomemos $t \in F'$ tal que $\mathbb{C}_P = t \cdot O'_P$. Logo:

$$v_{P'}(t) \leq -e \quad \text{e} \quad \text{tr}_{F'/F}(t \cdot O'_P) \subseteq O_P .$$

Como K é perfeito, temos que a extensão M_1/M é separável, e, portanto, $\text{tr}_{M_1/M} \neq 0$. Logo, podemos tomar $y_0 \in O'_P$ tal que $\text{tr}_{M_1/M}(\pi_1(y_0)) \neq 0$. Pelo teorema 2.22 (da aproximação fraca), existe $y \in F'$ tal que

$$v_{P'}(y - y_0) > 0 \quad \text{e} \quad v_{P_i}(y) \geq \max\{1, e_i + v_{P_i}(t)\} , \quad 2 \leq i \leq r .$$

Podemos observar que $v_{P'}(y) \geq 0$, pois

$$v_{P'}(y) = v_{P'}(y - y_0 + y_0) \geq \min\{v_{P'}(y - y_0), v_{P'}(y_0)\} .$$

Assim, temos que $v_{P_i}(y) \geq 0$, qualquer que seja $i = 1, \dots, r$, e, portanto, $y \in O'_P$.

Pelo lema 3.40, temos

$$\pi(\text{tr}_{F'/F}(y)) = e \cdot \text{tr}_{M_1/M}(\pi_1(y)) + \sum_{i=2}^r e_i \cdot \text{tr}_{M_i/M}(\pi_i(y)) .$$

Agora, observamos os seguintes fatos:

- $v_{P'}(y - y_0) > 0 \implies y(P') = y_0(P') \implies \pi_1(y) = \pi_1(y_0)$;
- para $2 \leq i \leq r$, temos

$$v_{P_i}(y) \geq 1 \implies \pi_i(y) = 0 \implies \text{tr}_{M_i/M}(\pi_i(y)) = 0 ;$$

- como e não é divisível pela característica de K , temos $e \neq 0$ em M .

Logo:

$$\pi(\text{tr}_{F'/F}(y)) = e \cdot \text{tr}_{M_1/M}(\pi(y_0)) \neq 0 .$$

Como $y \in O'_P$, temos $\text{tr}_{F'/F}(y) \in O_P$. Mas, $\pi(\text{tr}_{F'/F}(y)) \neq 0$ em M . Logo:

$$\text{tr}_{F'/F}(y) \notin P \implies v_P(\text{tr}_{F'/F}(y)) = 0 .$$

Agora, tomamos $x \in F$, com $v_P(x) = 1$, e temos

$$\text{tr}_{F'/F}(x^{-1}y) = x^{-1} \cdot \text{tr}_{F'/F}(y) \notin O_P \quad (\star) .$$

Por outro lado, temos que $x^{-1}yt^{-1} \in O'_P$, pois

$$v_{P'}(x^{-1}yt^{-1}) = -e + v_{P'}(y) - v_{P'}(t) = \underbrace{v_{P'}(y)}_{\geq 0} - \underbrace{e - v_{P'}(t)}_{\geq 0} \geq 0 .$$

Logo, $x^{-1}yt^{-1} \in O_{P'}$, e ainda

$$\begin{aligned} v_{P_i}(x^{-1}yt^{-1}) &= -v_{P_i}(x) + v_{P_i}(y) - v_{P_i}(t) \\ &= -e_i - v_{P_i}(t) + v_{P_i}(y) \\ &= v_{P_i}(y) - (e_i + v_{P_i}(t)) \geq 0, \quad \forall i = 2, \dots, r. \end{aligned}$$

Logo, $x^{-1}yt^{-1} \in O_{P_i}$, e, portanto,

$$x^{-1}yt^{-1} \in O'_P \implies x^{-1}y \in t \cdot O'_P = \mathcal{C}_P \implies tr_{F'/F}(x^{-1}y) \in O_P,$$

contradizendo $(\star)$.

Para provar a recíproca, assumiremos que a característica de K divide e , e provaremos que $d(P' | P) \geq e$. Escolhamos $u \in F'$ tal que

$$v_{P'}(u) = -e \quad \text{e} \quad v_{P_i}(u) \geq -e_i + 1 \quad (i = 2, \dots, r).$$

Como antes, tomamos $x \in F$ tal que $v_P(x) = 1$. Para todo $z \in O'_P$, temos

$$v_{P'}(xuz) = v_{P'}(x) + v_{P'}(u) + v_{P'}(z) = e - e + v_{P'}(z) \geq 0$$

e

$$v_{P_i}(xuz) = v_{P_i}(x) + v_{P_i}(u) + v_{P_i}(z) \geq e_i - e_i + 1 + v_{P_i}(z) > 0 \quad (i = 2, \dots, r).$$

Logo, $xuz \in O'_P$, e pelo lema 3.40, temos

$$\begin{aligned} \pi(tr_{F'/F}(xuz)) &= e \cdot tr_{M_1/M}(\pi_1(xuz)) + \sum_{i=2}^r e_i \cdot tr_{M_i/M}(\pi_i(xuz)) \\ &= e \cdot tr_{M_1/M}(\pi_1(xuz)) = 0, \end{aligned}$$

pois $\pi_i(xuz) = 0$ ($v_{P_i}(xuz) > 0$) para todo $i = 2, \dots, r$, e $e = n \cdot \text{car}(K)$, $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$tr_{F'/F}(xuz) \in P \implies x \cdot tr_{F'/F}(uz) \in P,$$

e, como $v_P(x) = 1$, temos

$$v_P(tr_{F'/F}(uz)) \geq 0 \implies tr_{F'/F}(uz) \in O_P.$$

Como $z \in O'_P$ é arbitrário, temos que $u \in \mathcal{C}_P$, e, assim,

$$v_{P'}(u) \geq -d(P' | P) \implies d(P' | P) \geq e.$$

Como $P' = P_1$ foi escolhido arbitrariamente dentre $P_1, \dots, P_r$, temos que o item (b) do teorema está provado. ■

Definição 3.41. *Seja F'/F uma extensão de corpos de funções e $P \in \mathbb{P}(F)$.*

- (a) *Dizemos que P é **ramificado** em F'/F se existe pelo menos um lugar $P' \in \mathbb{P}(F')$ sobre P tal que $e(P' | P) > 1$.*

- (b) Dizemos que P é **não-ramificado** em F'/F se $e(P' | P) = 1$ qualquer que seja $P' | P$, com $P' \in \mathbb{P}(F')$.
- (c) P é **totalmente ramificado** em F'/F se existe uma única extensão $P' \in \mathbb{P}(F')$ de P em F' , e o índice de ramificação é $e(P' | P) = [F' : F]$.

Corolário 3.42. Se F'/F é uma extensão finita e separável de corpos de funções algébricas, então quase todos os lugares $P \in \mathbb{P}(F)$ são não-ramificados em F'/F .

Demonstração. Segue da definição 3.32 que $d(P' | P) = 0$ para quase todo $P \in \mathbb{P}(F)$. Logo, pelo teorema 3.37,

$$0 \geq e(P' | P) - 1 \implies e(P' | P) = 1 ,$$

para quase todo $P \in \mathbb{P}(F)$. ■

Os dois próximos resultados nos servirão de suporte em demonstrações futuras.

Teorema 3.43. ([11], página 96) Suponha $F' = F(y)$ uma extensão finita e separável de F , e $[F' : F] = n$. Seja $P \in \mathbb{P}(F)$ tal que o polinômio minimal $\varphi(T)$ de y sobre F tenha coeficientes em O_P (isto é, y é inteiro sobre O_P), e sejam $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{P}(F')$ todos os lugares de F' que estão sobre P . Então, temos:

- (a) $d(P_i | P) \leq v_{P_i}(\varphi'(y))$ para $1 \leq i \leq r$;
- (b) $\{1, y, y^2, \dots, y^{n-1}\}$ é uma base integral de F' em P se, e somente se, $d(P_i | P) = v_{P_i}(\varphi'(y))$, com $i = 1, \dots, r$.
- ($\varphi'(T)$ denota a derivada de $\varphi(T)$ em $F[T]$).

Proposição 3.44. ([11], página 100) Seja F'/F uma extensão finita e separável de corpos de funções, $P \in \mathbb{P}(F)$ e $P' \in \mathbb{P}(F')$ com $P' | P$. Suponha que P é totalmente ramificado, isto é, $e(P' | P) = [F' : F] =: n$. Seja $t \in F'$ um elemento primo de P' , e considere o polinômio minimal $\varphi(T) \in F[T]$ de t sobre F . Então, $d(P' | P) = v_{P'}(\varphi'(t))$ e $\{1, t, \dots, t^{n-1}\}$ é uma base integral de F'/F em P .

3.6 Extensões do Corpo das Constantes

Esta seção tem como principais resultados o item (d) da proposição 3.45 (a seguir) e um caso especial que ocorre na proposição 3.47. Ambos serão utilizados na seção seguinte.

Consideramos um corpo de funções algébricas F/K , com corpo das constantes K , onde K é perfeito. Lembramos que $\Phi \supseteq F$ denota um corpo fixo algebricamente fechado.

Lembramos ainda que, se $K' \supseteq K$ é uma extensão algébrica (com $K' \subseteq \Phi$), então o composto $F' = K'F$ é um corpo de funções sobre K' , e, portanto, seu corpo de constantes é uma extensão finita de K' . A próxima proposição mostra, entre outras coisas, que neste caso K' é o próprio corpo das constantes.

Proposição 3.45. *Seja $F' = FK'$ uma extensão algébrica constante de F/K . Então:*

- (a) K' é o corpo das constantes de F' ;
- (b) todo subconjunto de F linearmente independente sobre K , mantém-se linearmente independente sobre K' ;
- (c) $[F : K(x)] = [F' : K'(x)]$, $\forall x \in F \setminus K$;
- (d) todos os lugares $P \in \mathbb{P}(F)$ são não-ramificados em F'/F .

Para demonstrar tal proposição, usaremos o seguinte lema:

Lema 3.46. ([11], página 102) *Suponha que $\alpha \in \Phi$ é algébrico sobre K . Então, $[K(\alpha) : K] = [F(\alpha) : F]$.*

Demonstração da proposição 3.45. (a) Seja $\gamma \in F'$ algébrico sobre K' . Então, γ é algébrico sobre K , e, como $F' = K'F$, temos que

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i}{\sum_{j=m+1}^r \alpha_j \beta_j},$$

com $\alpha_i, \alpha_j \in K'$ e $\beta_i, \beta_j \in F$, ou seja, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in K'$ tais que $\gamma \in F(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$.

Como K é perfeito, e K' é extensão algébrica de K , temos que a extensão $K(\alpha_1, \dots, \alpha_r)/K$ é finita e separável, e, portanto, $K(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = K(\alpha)$ para algum $\alpha \in K'$. Sendo γ algébrico sobre K' , e, conseqüentemente, sobre K , temos que $K(\alpha, \gamma)/K$ é finita e separável. Logo, existe $\beta \in F'$ tal que $K(\alpha, \gamma) = K(\beta)$. Logo, $F(\alpha, \gamma) = F(\beta)$. Mas, $\gamma \in F(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = F(\alpha)$; logo, $F(\alpha) = F(\beta)$. Assim, pelo lema 3.46, temos

$$[K(\beta) : K] = [F(\beta) : F] = [F(\alpha) : F] = [K(\alpha) : K].$$

Logo, como $K(\alpha) \subseteq K(\beta)$, temos

$$K(\alpha) = K(\beta) \implies \gamma \in K(\alpha) \subseteq K'.$$

Portanto, $\tilde{K}' = K'$.

(b) Sejam $y_1, \dots, y_r \in F$ linearmente independentes sobre K , e suponha que

$$\sum_{i=1}^r \gamma_i y_i = 0, \text{ com } \gamma_i \in K' \quad (\text{I}).$$

Provaremos que $\gamma_i = 0$ para $i = 1, \dots, r$.

Temos que $K(\gamma_1, \dots, \gamma_r)/K$ é finita e separável. Logo, existe $\alpha \in K'$ tal que $\gamma_i \in K(\alpha)$, $i = 1, \dots, r$. Sendo $[K(\alpha) : K] = n$, temos que $1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}$ é base de $K(\alpha)/K$, e, portanto,

$$\gamma_i = \sum_{j=0}^{n-1} c_{ij} \cdot \alpha^j, \text{ com } c_{ij} \in K.$$

De (I), obtemos

$$0 = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=0}^{n-1} c_{ij} \cdot \alpha^j \right) y_i = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^r c_{ij} \cdot y_i \right) \alpha^j \quad (\text{II}),$$

com $\sum c_{ij} \cdot y_i \in F$.

Como $[F(\alpha) : F] = [K(\alpha) : K] = n$ (lema 3.46), temos que $1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}$ são linearmente independentes sobre F , e, por (II), temos

$$\sum_{i=1}^r c_{ij} \cdot y_i = 0 \text{ para } j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Mas, como $y_1, \dots, y_r$ são linearmente independentes sobre K , temos que $c_{ij} = 0$, e, conseqüentemente, $\gamma_i = 0$ para $i = 1, \dots, r$.

- (c) Como $F' = FK'$, é relativamente simples mostrar que $[F' : K'(x)] \leq [F : K(x)]$. Para mostrar que $[F' : K'(x)] \geq [F : K(x)]$, provaremos que, se $z_1, \dots, z_s \in F$ são linearmente independentes sobre $K(x)$, então estes também são linearmente independentes sobre $K'(x)$.

Suponhamos que não, ou seja,

$$\sum_{i=1}^s f_i(x) z_i = 0 \quad (\text{III}),$$

onde $f_i(x) \in K'(x)$ são não todos nulos. Podemos assumir que $f_i(x) \in K'[x]$ (basta multiplicar pelo MMC dos denominadores). Temos que (III) afirma que existe uma dependência linear dos elementos do conjunto $\{x^j z_i : 1 \leq i \leq s \text{ e } j \geq 0\}$ sobre K' . Como $x^j z_i \in F$, temos um subconjunto de F linearmente dependente sobre K' . Assim, pelo item (b), temos que os elementos $x^j z_i \in F$ são linearmente dependentes sobre K . Logo, $z_1, z_2, \dots, z_s$ são linearmente dependentes sobre $K(x)$, uma contradição.

- (d) Suponhamos primeiramente que F'/F seja finita. Logo, $[K' : K] < \infty$; sendo K perfeito, temos então que $K' = K(\alpha)$, e, como $F' = FK'$, temos $F' = F(\alpha)$, e que o polinômio minimal $\varphi(T)$ de α sobre K continua irredutível sobre F (lema 3.46). Seja $P \in \mathbb{P}(F)$ e $P' \in \mathbb{P}(F')$ com $P' \mid P$. Como $K \subseteq O_P$, segue, do teorema 3.43, que o expoente da diferente $d(P' \mid P)$ satisfaz

$$0 \leq d(P' \mid P) \leq v_{P'}(\varphi'(\alpha)).$$

Como α é separável sobre K , temos $\varphi'(\alpha) \neq 0$, e como $\varphi'(\alpha) \in K'$, temos $v_{P'}(\varphi'(\alpha)) = 0$. Logo:

$$d(P' | P) = 0 \implies e(P' | P) = 1 .$$

Caso a extensão F'/F não seja finita, tomemos $t \in F'$ um elemento primo de P' , isto é, $v_{P'}(t) = 1$. Como $F' = FK'$, temos

$$t = \frac{\sum_{i=1}^m a_i b_i}{\sum_{j=m+1}^s a_j b_j} ,$$

onde $a_i, a_j \in K'$ e $b_i, b_j \in F$. Façamos $K_1 = K(a_1, \dots, a_s)$. Logo, $[K_1 : K] < \infty$, e temos $t \in F_1 = FK_1$. Seja $P_1 = P' \cap F_1 \in \mathbb{P}(F_1)$. Então,

$$1 = v_{P'}(t) = e(P' | P_1) \cdot v_{P_1}(t) .$$

Logo, $v_{P_1}(t) = 1$ e $e(P' | P_1) = 1$. Como $[K_1 : K] < \infty$, pelo caso finito provado anteriormente, temos $e(P_1 | P) = 1$. Logo, $e(P' | P) = e(P' | P_1) \cdot e(P_1 | P) = 1$. ■

Proposição 3.47. *Seja F/K um corpo de funções com corpo de constantes K . Suponha que F'/F é uma extensão finita com corpo de constantes K' . Seja $\overline{K} \subseteq \Phi$ o fecho algébrico de K . Então:*

$$[F' : F] = [F'\overline{K} : F\overline{K}] \cdot [K' : K] .$$

No caso especial em que $F' = F(y)$, e $\varphi(T) \in F[T]$ é o polinômio minimal de y sobre F , são equivalentes:

- (1) $K' = K$;
- (2) $\varphi(T)$ é (absolutamente) irredutível em $F\overline{K}[T]$.

Demonstração. Como $F \subseteq FK' \subseteq F'$ e F'/F é finito, temos

$$(I) \quad [F' : F] = [F' : FK'] \cdot [FK' : F] .$$

Temos ainda

$$[F' : F] < \infty \implies [K' : K] < \infty ,$$

e, como K'/K é separável, temos $K' = K(\alpha)$, $\alpha \in K'$, e, conseqüentemente, $FK' = F(\alpha)$. Logo, pelo lema 3.46, temos

$$(II) \quad [F(\alpha) : F] = [K(\alpha) : K] \implies [FK' : F] = [K' : K] .$$

Como $F\overline{K}/\overline{K}$ é extensão algébrica constante de FK'/K' , e $F'\overline{K}/\overline{K}$ é extensão algébrica constante de F'/K' , o item (c) da proposição 3.45 diz que, para $x \in F \setminus K$, temos $[FK' : K'(x)] = [F\overline{K} : \overline{K}(x)]$ e $[F' : K'(x)] = [F'\overline{K} : \overline{K}(x)]$, e, conseqüentemente,

$$(III) \quad [F' : FK'] = [F'\overline{K} : F\overline{K}] .$$

Substituindo (III) e (II) em (I), obtemos

$$(IV) \quad [F' : F] = [F'\overline{K} : F\overline{K}] \cdot [K' : K] .$$

O diagrama abaixo auxilia no processo acima:

Agora, mostraremos as equivalências.

- (1) $\implies$ (2) Como $F' = F(y)$, temos $F'\overline{K} = F(y)\overline{K} = F\overline{K}(y)$. Logo, por (IV), se $[K' : K] = 1$, temos

$$\deg(\varphi(T)) = [F' : F] = [F'\overline{K} : F\overline{K}] = [F\overline{K}(y) : F\overline{K}] .$$

Portanto, $\varphi(T)$ é irredutível sobre $F\overline{K}$.

- (2) $\implies$ (1) É o caminho inverso.

■

3.7 Extensões de Galois

Uma extensão F'/K' de F/K é dita **de Galois** se F'/F é uma extensão de Galois finita, isto é, o grupo de automorfismos

$$\text{Aut}(F'/F) = \{\sigma : F' \longrightarrow F' : \sigma \text{ é um } F\text{-isomorfismo}\}$$

tem ordem $[F' : F]$.

Seja $P \in \mathbb{P}(F)$. Então, o grupo de Galois de F'/F age no conjunto das extensões $\{P' \in \mathbb{P}(F') : P' \mid P\}$ via $\sigma(P') = \{\sigma(x) : x \in P'\}$. Além disso, no lema 3.39, vimos que a valorização correspondente $v_{\sigma(P')}$ é dada por

$$v_{\sigma(P')}(y) = v_{P'}(\sigma^{-1}(y)) , \quad \forall y \in F' .$$

Teorema 3.48. *Seja F'/K' uma extensão de Galois de F/K , e $P_1, P_2 \in \mathbb{P}(F')$ extensões de $P \in \mathbb{P}(F)$. Então, $P_2 = \sigma(P_1)$ para algum $\sigma \in \text{Aut}(F'/F)$, ou seja, o grupo de Galois age transitivamente no conjunto das extensões de P .*

Demonstração. Suponhamos que $\sigma(P_1) \neq P_2$ para todo $\sigma \in G := \text{Aut}(F'/F)$. Pelo teorema 2.22 (da aproximação fraca), existe $z \in F'$ tal que $v_{P_2}(z) > 0$ e $v_Q(z) = 0$, qualquer que seja $Q \in \mathbb{P}(F')$, com $Q \mid P$ e $Q \neq P_2$. Seja $N_{F'/F} : F' \rightarrow F$ a função norma. Pelas propriedades desta função, sabemos que:

$$N_{F'/F}(z) = \prod_{\sigma \in G} \sigma(z) ,$$

o que implica que

$$\begin{aligned} v_{P_1}(N_{F'/F}(z)) &= \sum_{\sigma \in G} v_{P_1}(\sigma(z)) \\ &= \sum_{\sigma \in G} v_{\sigma^{-1}(P_1)}(z) \\ &= \sum_{\sigma \in G} v_{\sigma(P_1)}(z) = 0 , \end{aligned}$$

pois $\sigma(P_1) \neq P_2$, qualquer que seja $\sigma \in G$.

Por outro lado, temos

$$v_{P_2}(N_{F'/F}(z)) = \sum_{\sigma \in G} v_{\sigma(P_2)}(z) > 0 \quad (\star) ,$$

pois $v_{P_2}(z) > 0$ e, se $\sigma(P_2) \neq P_2$, temos $v_{\sigma(P_2)}(z) = 0$.

Mas, $N_{F'/F}(z) = y \in F$; logo,

$$v_{P_1}(y) = 0 \iff v_P(y) = 0 \iff v_{P_2}(y) = 0 ,$$

o que contradiz $(\star)$. ■

Corolário 3.49. *Usaremos a notação do teorema anterior (em particular, F'/F é galoisiana). Sejam $P_1, \dots, P_r$ todas as extensões de F' sobre P . Então, temos:*

- (a) $e(P_i \mid P) = e(P_j \mid P)$ e $f(P_i \mid P) = f(P_j \mid P)$ para todo i, j ; portanto, abreviaremos $e(P) := e(P_i \mid P)$ e $f(P) := f(P_i \mid P)$, e chamaremos $e(P)$ de **índice de ramificação** e $f(P)$ de **grau relativo** de P ;
- (b) $e(P) \cdot f(P) \cdot r = [F' : F]$;
- (c) os expoentes da diferente $d(P_i \mid P)$ e $d(P_j \mid P)$ são os mesmos para todo i, j .

Demonstração. (a) Pelo item (c) do lema 3.39, sabemos que

$$e(\sigma(P_i) \mid P) = e(P_i \mid P) \quad \text{e} \quad f(\sigma(P_i) \mid P) = f(P_i \mid P) .$$

Então, dados P_i e P_j extensões de P em F' , tomamos $\sigma \in G$ tal que $\sigma(P_i) = P_j$, e assim:

$$e(P_i | P) = e(\sigma(P_i) | P) = e(P_j | P)$$

e

$$f(P_i | P) = f(\sigma(P_i) | P) = f(P_j | P) .$$

(b) Sejam $P_1, \dots, P_r$ os lugares de F' sobre P . Então:

$$[F' : F] = \sum_{i=1}^r e_i f_i = \sum_{i=1}^r e(P) f(P) = e(P) \cdot f(P) \cdot r .$$

(c) Consideremos o fecho inteiro

$$O'_P = \bigcap_{i=1}^r O_{P_i}$$

de O_P em F' , e o módulo complementar

$$\mathcal{C}_P = \{z \in F' : \text{tr}_{F'/F}(z \cdot O'_P) \subseteq O_P\} .$$

Seja $\sigma \in G$. Podemos ver que $\sigma(O'_P) = O'_P$, pois $P_i | P \implies \sigma(P_i) | P$. Logo:

$$\sigma(O'_P) = \cap \sigma(O_{P_i}) = \cap O_{\sigma(P_i)} = O'_P .$$

Usando o fato que $\text{tr}_{F'/F}(u) = \text{tr}_{F'/F}(\sigma(u))$ para todo $u \in F'$, é possível mostrar que $\sigma(\mathcal{C}_P) = \mathcal{C}_P$.

Assim, escrevendo $\mathcal{C}_P = t \cdot O'_P$, temos $\mathcal{C}_P = \sigma(t) \cdot O'_P$. Então, pela definição 3.32 de expoente da diferente, e pelo item (c) da proposição 3.31, temos

$$-d(P_i | P) = v_{P_i}(t) = v_{P_i}(\sigma(t))$$

para todo $1 \leq i \leq r$. Sejam P_i e P_j extensões de P em F' . Tomemos $\sigma \in G$ tal que $\sigma(P_j) = P_i$. Então:

$$-d(P_i | P) = v_{P_i}(\sigma(t)) = v_{\sigma^{-1}(P_i)}(t) = v_{P_j}(t) = -d(P_j | P) .$$

■

Trataremos aqui de um tipo específico de extensão de Galois de corpos de funções, que chamaremos de extensões de Artin-Schreier.

A definição de extensão de Artin-Schreier “clássica” pode ser dada da seguinte forma:

*Seja F/K uma extensão de corpos de característica $p > 0$. Suponha que $u \in F$ satisfaz $u \neq \omega^p - \omega$, para todo $\omega \in F$. Seja $F' = F(y)$, onde $y^p - y = u$. Tal extensão F'/F é chamada de **extensão de Artin-Schreier** de F .*

No entanto, para contemplar o Capítulo 4, trataremos de uma extensão (na próxima proposição) a qual também chamaremos de Artin-Schreier, mas que possui algumas modificações em relação à clássica enunciada acima. Na verdade, ambos são casos particulares de uma generalização que pode ser encontrada em [11] (página 117).

Proposição 3.50. *Seja q uma potência de um primo p , e F/K um corpo de funções algébricas sobre K , onde $K = \mathbb{F}_{q^2}$ é algebricamente fechado em F . Seja $\omega \in F$ e suponha que existe um lugar $P \in \mathbb{P}(F)$ tal que*

$$v_P(\omega) = -m, \quad m > 0, \quad \text{e} \quad \text{mdc}(m, q) = 1.$$

Então, o polinômio $\varphi(T) = T^q + T - \omega \in F[T]$ é absolutamente irredutível, isto é, irredutível em $\overline{K} \cdot F[T]$, onde $\overline{K} \cdot F$ denota o compósito do fecho algébrico de K e F .

Seja $E = F(z)$, onde $\varphi(z) = 0$, isto é, $z^q + z = \omega$. Então:

- (i) *E/F é uma extensão de Galois de grau $[E : F] = q$, o grupo de Galois é abeliano elementar de expoente p , e K é algebricamente fechado em E ;*
- (ii) *o lugar P é totalmente ramificado em E , isto é, existe um único lugar $P' \in \mathbb{P}(E)$ tal que $P' \mid P$ e $e(P' \mid P) = q$; temos ainda que $\deg(P') = \deg(P)$, e o expoente da diferente de $P' \mid P$ é dado por:*

$$d(P' \mid P) = (q - 1)(m + 1);$$

- (iii) *seja $R \in \mathbb{P}(F)$, e suponhamos que $v_R(\omega - (u^q + u)) \geq 0$ para algum $u \in F$; então, R é não-ramificado em E/F ; isto ocorre em particular se $v_R(\omega) \geq 0$;*
- (iv) *seja $Q \in \mathbb{P}(F)$ um zero de $\omega - \gamma$, com $\gamma \in \mathbb{F}_q$; então, a equação $\alpha^q + \alpha = \gamma$ tem q raízes distintas $\alpha \in K$, e para cada α existe um único lugar $Q_\alpha \in \mathbb{P}(E)$ tal que $Q_\alpha \mid Q$ e Q_α é zero de $z - \alpha$.*

Demonstração. • Usando a notação da proposição 3.14, segue imediatamente que $T^q + T - \omega \in F[T]$ é irredutível, e que $P \in \mathbb{P}(F)$ é totalmente ramificado em E .

- Se $z \in E$ é uma raiz de $\varphi(T)$, então

$$\varphi(T) = \prod_{i=1}^q (T - z - \alpha_i),$$

onde $\alpha_i \in \mathbb{F}_{q^2}$ e $\alpha_i^q + \alpha_i = 0$. Logo, E é corpo de raízes de $\varphi(T)$, e como $\varphi(T)$ é separável, temos que E/F é uma extensão de Galois de grau q .

- Os automorfismos E/F são dados por $\sigma_i(z) = z + \alpha_i$, com $\alpha_i \in \mathbb{F}_{q^2}$ e $\alpha_i^q + \alpha_i = 0$ para $i = 1, \dots, q$, ou seja, o grupo de Galois de E/F é isomorfo ao grupo aditivo $G = \{\alpha \in K : \alpha^q + \alpha = 0\}$, e, como $\text{car}(K) = p$, temos que $\exp(G) = \text{mmc}\{o(g) : g \in G\} = p$, e portanto $\text{Gal}(E/F)$ é abeliano elementar de expoente p .

- Provaremos agora que K é algebricamente fechado em E , isto é, se $K' \supseteq K$ é o corpo das constantes de E , então $K' = K$.

Seja $P' \in \mathbb{P}(E)$ a única extensão de $P \in \mathbb{P}(F)$ em E . Suponhamos que $[K' : K] > 1$, e consideremos o corpo intermediário $F_1 = FK' \supsetneq F$, e o lugar $Q_1 = P' \cap F_1$, o único lugar sobre P em F_1 . Logo, $e(Q_1 | P) = [F_1 : F]$, e, como $F_1 \neq F$, temos $e(Q_1 | P) > 1$. Mas, por outro lado, pelo item (d) da proposição 3.45, temos $e(Q_1 | P) = 1$. Esta contradição mostra que $K' = K$.

- Agora, sendo K algebricamente fechado em E , segue, da proposição 3.47, que $\varphi(T)$ é absolutamente irredutível em $F[T]$, e ainda que, se $P' \in \mathbb{P}(E)$ é a única extensão de P em E , então $\deg(P') = \deg(P)$, pois

$$\deg(P') = [\mathbb{F}_{P'} : K'] = [\mathbb{F}_{P'} : K] = f(P' | P) \cdot [\mathbb{F}_P : K] = \deg(P) .$$

- Provaremos agora que $d(P' | P) = (q-1)(m+1)$.

Como $z^q + z = \omega$ e $v_P(\omega) = -m$, temos

$$\begin{aligned} v_{P'}(z^q + z) &= v_{P'}(\omega) = e(P' | P) \cdot v_P(\omega) = -q \cdot m \implies v_{P'}(z^q) = -q \cdot m \\ &\implies v_{P'}(z) = -m . \end{aligned}$$

Seja $x \in F$ tal que $v_P(x) = 1$. Tomemos $i, j \geq 0$ tais que $1 = i \cdot q - m \cdot j$ (isto é possível, pois $\text{mdc}(m, q) = 1$). Então, o elemento $t = x^i \cdot z^j$ é um elemento primo de P' . De fato:

$$v_{P'}(t) = i \cdot v_{P'}(x) + j \cdot v_{P'}(z) = i \cdot q \cdot v_P(x) + j \cdot (-m) = i \cdot q - m \cdot j = 1 .$$

Pela proposição 3.44, o expoente da diferente $d(P' | P)$ é dado por

$$d(P' | P) = v_{P'}(\psi'(t)) ,$$

onde $\psi(T) \in F[T]$ é o polinômio minimal de t sobre F . Iremos agora em direção ao cálculo de $v_{P'}(\psi'(t))$.

Seja $G := \text{Gal}(E/F)$ o grupo de Galois de E/F . Como $t = x^i \cdot z^j$, temos que $\sigma(t) = x^i \cdot (\sigma(z))^j$ é raiz de $\psi(T)$, e, como $\{\sigma(z) : \sigma \in G\}$ são todas as raízes distintas de $T^q + T - \omega$, temos que $\{\sigma(t) : \sigma \in G\}$ são todas as raízes de $\psi(T)$, pois, se não fossem, então existiriam $\sigma_1, \sigma_2 \in G$ distintos tais que $(\sigma_1(z))^j = (\sigma_2(z))^j$. Mas, como $\sigma_1(z)$ e $\sigma_2(z)$ são raízes distintas de $T^q + T - \omega$, temos que $\sigma_1(z) + \alpha = \sigma_2(z)$, para algum $\alpha \in K$, com $\alpha^{q-1} = -1$, e assim teríamos $(\sigma_1(z))^j = (\sigma_1(z) + \alpha)^j$, o que é absurdo, pois K é algebricamente fechado em E .

Desta forma, temos

$$\psi(T) = \prod_{\sigma \in G} (T - \sigma(t)) = (T - t) \cdot h(T) ,$$

com

$$h(T) = \prod_{\sigma \neq \text{id}} (T - \sigma(t)) \in E[T] .$$

Assim, $\psi'(T) = h(T) + (T - t) \cdot h'(T)$ e $\psi'(t) = h(t)$, de onde concluímos que

$$d(P' | P) = v_{P'} \left(\prod_{\sigma \neq id} (t - \sigma(t)) \right) = \sum_{\sigma \neq id} v_{P'}(t - \sigma(t)) .$$

Como $\sigma \in G \setminus \{id\}$ é da forma $\sigma(z) = z + \alpha$, onde $\alpha \in \mathbb{F}_{q^2}$ é tal que $\alpha^{q-1} = -1$, temos

$$\begin{aligned} t - \sigma(t) &= x^i \cdot z^j - x^i \cdot (z + \alpha)^j \\ &= x^i \cdot \left(z^j - \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} z^{j-l} \cdot \alpha^l \right) \\ &= -x^i \cdot \sum_{l=1}^j \binom{j}{l} z^{j-l} \cdot \alpha^l . \end{aligned}$$

Como $v_{P'}(z) < 0$, temos $v_{P'}(z^{j-1}) < v_{P'}(z^{j-l})$, com $l \geq 2$, e, pela desigualdade triangular estrita, obtemos

$$\begin{aligned} v_{P'}(t - \sigma(t)) &= v_{P'}(x^i) + v_{P'}(z^{j-1}) \\ &= i \cdot v_{P'}(x) + (j-1) \cdot v_{P'}(z) \\ &= i \cdot p + (j-1) \cdot (-m) \\ &= i \cdot p - j \cdot m + m \\ &= 1 + m . \end{aligned}$$

Então:

$$d(P' | P) = \sum_{\sigma \neq id} v_{P'}(t - \sigma(t)) = (q-1) \cdot (m+1) .$$

- Agora, provaremos (iii). Assumindo que $v_R(\omega - (u^q + u)) \geq 0$, façamos $z_1 = z - u$ e $\omega_1 = \omega - (u^q + u)$, e temos $E = F(z_1)$ e $\varphi_1(T) = T^q + T - \omega_1$ é o polinômio minimal de z_1 .

Como $v_R(\omega_1) \geq 0$, temos que z_1 é inteiro sobre O_R , e o expoente da diferente $d(R' | R)$ de qualquer extensão R' de R satisfaz

$$0 \leq d(R' | R) \leq v_{R'}(\varphi'_1(z_1)) = 0 ,$$

pois basta observar que $\varphi'_1(T) = 1$ e usar o teorema 3.43.

Portanto, $d(R' | R) = 0$. Logo, $R' | R$ é não-ramificado, pelo teorema 3.37 da diferente de Dedekind.

- Finalmente, vamos provar (iv). Seja $\omega_1 = \omega - \gamma$ e $z_1 = z - \alpha$, onde $\alpha \in K$ é tal que $\alpha^q + \alpha = \gamma$. Temos assim que $E = F(z_1)$ e $\varphi_1(T) = T^q + T - \omega_1$ é o polinômio minimal de z_1 sobre F (pois, se não fosse, teríamos um polinômio em $F[T]$ de grau menor que q anulando z). Agora, invocamos o teorema 3.29 (de Kummer),

e usaremos sua notação. Como $Q \in \mathbb{P}(F)$ é zero de ω_1 , temos que z_1 é inteiro sobre O_Q . Logo,

$$\bar{\varphi}_1(T) = T^q + T = \prod_{i=1}^q (T - \bar{\alpha}_i) ,$$

onde $\alpha_i \in \mathbb{F}_{q^2}$ e $\alpha_i^q + \alpha_i = 0$ (observe que, na notação do teorema 3.29, temos $\epsilon_i = 1$, para $i = 1, \dots, q$). Tomando $\gamma_i(T) := T - \alpha_i \in O_Q[T]$ (observe que $\bar{\gamma}_i(T) = T - \bar{\alpha}_i$) para cada $1 \leq i \leq q$, temos:

- um único lugar $Q_{\alpha_i} \in \mathbb{P}(E)$, com $Q_{\alpha_i} \mid Q$;
- $f(Q_{\alpha_i} \mid Q) = 1 \implies \deg(Q_{\alpha_i}) = \deg(Q)$;
- Q_{α_i} é zero de $z_1 - \alpha_i$.

Mas, como $z_1 = z - \alpha$ para algum $\alpha \in K$, com $\alpha^q + \alpha = \gamma$, temos $z_1 - \alpha_i = z - (\alpha + \alpha_i)$, onde $(\alpha + \alpha_i)^q + (\alpha + \alpha_i) = \gamma$. Então, sem perda de generalidade, podemos denotar $\alpha := \alpha + \alpha_i$, e afirmar que Q_{α_i} é zero de $z - \alpha_i$. ■

3.8 As Propriedades P_i

Nesta seção, reunimos alguns resultados que visam simplificar as demonstrações que surgirão no próximo Capítulo. Tais resultados serão denominados propriedades P_i . No que segue, denotaremos por F/K um corpo de funções de característica $p > 0$, enquanto que q denotará uma potência de p .

Definição 3.51. • Sejam $x, y, z \in F$ e $P \in \mathbb{P}(F)$. Escrevemos

$$x = y + \mathcal{O}(z) \text{ em } P$$

se $x = y + tz$, com $v_P(t) \geq 0$, isto é, $t \in O_P$ (ou, equivalentemente, $v_P\left(\frac{x-y}{z}\right) \geq 0$).

Em particular,

$$x = y + \mathcal{O}(1) \text{ em } P \implies v_P(x - y) \geq 0 .$$

- O operador de Artin-Schreier generalizado $\wp : F \longrightarrow F$ é definido por $\wp(u) = u^q + u$.

Lema 3.52. Seja F/K um corpo de funções algébricas de característica $p > 0$. Usando a notação da definição acima, temos:

- $P_0 : x = a \cdot \mathcal{O}(b) \implies x = \mathcal{O}(ab)$.
- $P_1 : \gamma \in \mathbb{F}_q \implies \gamma \cdot \wp(u) = \wp(\gamma u)$.
- $P_2 : \wp(u) = \mathcal{O}(1) \implies u = \mathcal{O}(1)$.
- $P_3 : \text{Se } m, n \text{ são inteiros tais que } m \leq n \text{ e } a = \mathcal{O}(x^m) + \mathcal{O}(x^n), \text{ com } v_P(x) \geq 0, \text{ então } a = \mathcal{O}(x^m)$.

- P_4 : Se m, n são inteiros tais que $m \leq n$ e $a = x^m + \mathcal{O}(x^n)$, com $v_P(x) \geq 0$, então $a = \mathcal{O}(x^m)$.
- P_5 : Se m, n são inteiros tais que $m \leq n$ e $a = \mathcal{O}(x^n)$, com $v_P(x) \geq 0$, então $a = \mathcal{O}(x^m)$.
- P_6 : Se $a = 1 - y^{q-1} + \mathcal{O}(y^q)$, onde q é potência de p e $v_P(y) > 0$, então $a^{-1} = 1 + y^{q-1} + \mathcal{O}(y^q)$.
- P_7 : Se $a = 1 + y^{q-1} + \mathcal{O}(y^q)$, onde q é potência de p e $v_P(y) > 0$, então $a^{q+1} = 1 + y^{q-1} + \mathcal{O}(y^q)$.
- P_8 : Se $a = \gamma + \mathcal{O}(y)$, onde $\gamma \in \mathbb{F}_{q^2} \setminus \{0\}$ e $v_P(y) > 0$, então $a^{-1} = \gamma^{-1} + \mathcal{O}(y)$.

Demonstração. P_0 : De fato:

$$x = a \cdot (bt) \text{ , } v_P(t) \geq 0 \implies x = (ab) \cdot t \implies x = \mathcal{O}(ab) \text{ .}$$

P_1 : De fato, temos que:

$$\begin{aligned} \gamma \in \mathbb{F}_q &\implies \gamma^q = \gamma \\ &\implies \gamma \cdot \wp(u) = \gamma \cdot u^q + \gamma \cdot u = (u\gamma)^q + (u\gamma) = \wp(u\gamma) \text{ .} \end{aligned}$$

P_2 : De fato, suponhamos que $u \neq \mathcal{O}(1)$, isto é, $v_P(u) < 0$. Então:

$$\begin{aligned} v_P(u^q) < v_P(u) &\implies 0 > v_P(u^q) = \min\{v_P(u^q), v_P(u)\} = v_P(u^q + u) \\ &\implies \wp(u) \neq \mathcal{O}(1) \text{ ,} \end{aligned}$$

contradição.

P_3 : De fato, se $a = t_1 x^m + t_2 x^n$, onde $t_1, t_2 \in O_P$, então

$$a = x^m(t_1 + t_2 x^{n-m}) \text{ .}$$

Mas, como $t_1, t_2 \in O_P$ e $n - m \geq 0$, temos que $t_1 + t_2 x^{n-m} \in \mathcal{O}_P$. Logo, $a = \mathcal{O}(x^m)$.

P_4 : De fato, como $v_P(1) \geq 0$, temos que:

$$x^m = 1 \cdot x^m \implies x^m = \mathcal{O}(x^m) \implies a = \mathcal{O}(x^m) + \mathcal{O}(x^n) \text{ ,}$$

e, pela propriedade P_3 , segue que $a = \mathcal{O}(x^m)$.

P_5 : De fato:

$$a = t \cdot x^n \text{ , } v_P(t) \geq 0 \implies a = (t \cdot x^{n-m})x^m \implies a = \mathcal{O}(x^m) \text{ ,}$$

pois $v_P(t \cdot x^{n-m}) \geq 0$.

P_6 : Com efeito, sabemos que:

$$a = 1 - y^{q-1} + \mathcal{O}(y^q) \implies a = 1 - y^{q-1} + y^q t \text{ ,}$$

onde $t \in O_P$. Assim, temos que:

$$a^{-1} = \frac{1}{1 - y^{q-1} + y^q t} = 1 + y^{q-1} + y^q \cdot \left(\frac{y^{q-2} - ty^{q-1} - t}{1 - y^{q-1} + y^q t} \right) .$$

Como $v_P(1 - y^{q-1} + y^q t) = \min\{v_P(1), v_P(-y^{q-1} + y^q t)\} = 0$, segue que:

$$v_P\left(\frac{y^{q-2} - ty^{q-1} - t}{1 - y^{q-1} + y^q t}\right) = v_P(y^{q-2} - ty^{q-1} - t) \geq 0 ,$$

pois todas as parcelas estão em O_P . Portanto, $a^{-1} = 1 + y^{q-1} + \mathcal{O}(y^q)$.

P_7 : Com efeito, temos que:

$$a^{q+1} = (1 + y^{q-1} + y^q t) \cdot (1 + y^{q-1} + y^q t)^q ,$$

onde $v_P(t) \geq 0$. Logo:

$$\begin{aligned} a^{q+1} &= (1 + y^{q-1} + y^q t) \cdot (1 + y^{q(q-1)} + y^{q^2} t^q) \\ &= 1 + y^{q-1} + y^q t + (y^{q^2-q} + y^{q^2} t^q)(1 + y^{q-1} + y^q t) \\ &= 1 + y^{q-1} + y^q \cdot \underbrace{[t + (y^{q^2-2q} + y^{q^2-q} t^q)(1 + y^{q-1} + y^q t)]}_{(*)} \\ &= 1 + y^{q-1} + \mathcal{O}(y^q) , \end{aligned}$$

pois $(*)$ está em O_P , uma vez que temos produtos e somas de elementos de O_P .

P_8 : De fato, temos que:

$$a = \gamma + \mathcal{O}(y) \implies a = \gamma + yt ,$$

onde $v_P(t) \geq 0$. Logo:

$$a^{-1} = \frac{1}{\gamma + yt} = \gamma^{-1} + y \cdot \left(\frac{-t\gamma^{-1}}{\gamma + yt} \right) .$$

Como $v_P(\gamma + yt) = \min\{v_P(\gamma), v_P(yt)\} = 0$, temos que:

$$v_P\left(\frac{-t\gamma^{-1}}{\gamma + yt}\right) = v_P(-t\gamma^{-1}) \geq 0 .$$

Portanto, $a^{-1} = \gamma^{-1} + \mathcal{O}(y)$.

■

Capítulo 4

A Torre de Corpos F_n/K

O nosso propósito é construir uma torre de corpos de funções, usando extensões de Artin-Schreier, que atinja a cota de Drinfeld-Vladut.

Uma vez construída a torre F_n/K , as etapas seguintes culminam no teorema 4.17, onde calculamos o gênero g_n de F_n/K , e na proposição 4.19, onde obtemos uma estimativa do número N_n de lugares de grau 1 de F_n/K , suficiente para atingir a cota desejada.

Gostaríamos de ressaltar que a última seção deste capítulo contém a nossa contribuição a este trabalho. Nela, estabelecemos a quantidade efetiva N_n de lugares de grau 1 em F_n/K . Os cálculos apresentados para a obtenção de N_n são de nossa autoria, seguindo sugestões do final de [3].

4.1 Construindo a Torre

Definição 4.1. *Seja $F_1 = F_{q^2}(x_1)$ um corpo de funções racionais, onde $q \geq 2$ é potência de um primo p . Para $n \geq 1$, definiremos $F_{n+1} := F_n(z_{n+1})$, onde z_{n+1} é tal que*

$$z_{n+1}^q + z_{n+1} = x_n^{q+1} \quad ,$$

com

$$x_n := \frac{z_n}{x_{n-1}} \in F_n \quad \text{para } n \geq 2 \quad .$$

A idéia inicial é observar que tais extensões (que constituem a nossa torre) são de Artin-Schreier (no sentido do capítulo 3) e, usando os resultados conhecidos em tais extensões, sistematizaremos uma forma de calcular o gênero e o número de lugares de grau 1 em F_n . Finalmente, tomando o limite $n \rightarrow \infty$, atingiremos a cota de Drinfeld-Vladut.

Para uma maior praticidade na leitura, reenunciaremos a proposição 3.50. Veremos que esta será o alicerce do nosso trabalho, e que a mesma diz, dentre outras coisas, que as extensões apresentadas na definição 4.1 são do tipo Artin-Schreier.

Proposição 4.2. *Seja q uma potência de um primo p , e F/K um corpo de funções algébricas sobre K , onde $K = \mathbb{F}_{q^2}$ é algebricamente fechado em F . Seja $\omega \in F$ e suponha que existe um lugar $P \in \mathbb{P}(F)$ tal que*

$$v_P(\omega) = -m \quad , \quad m > 0 \quad , \quad \text{e} \quad \text{mdc}(m, q) = 1 \quad .$$

Então, o polinômio $\varphi(T) = T^q + T - \omega \in F[T]$ é absolutamente irredutível, isto é, irredutível em $\overline{K} \cdot F[T]$, onde $\overline{K} \cdot F$ denota o compósito do fecho algébrico de K e F .

Seja $E = F(z)$, onde $\varphi(z) = 0$, isto é, $z^q + z = \omega$. Então:

- (i) E/F é uma extensão de Galois de grau $[E : F] = q$, o grupo de Galois é abeliano elementar de expoente p , e K é algebricamente fechado em E ;
- (ii) o lugar P é totalmente ramificado em E , isto é, existe um único lugar $P' \in \mathbb{P}(E)$ tal que $P' \mid P$ e $e(P' \mid P) = q$; temos ainda que $\deg(P') = \deg(P)$, e o expoente da diferente de $P' \mid P$ é dado por:

$$d(P' \mid P) = (q-1)(m+1) ;$$

- (iii) seja $R \in \mathbb{P}(F)$, e suponhamos que $v_R(\omega - (u^q + u)) \geq 0$ para algum $u \in F$; então, R é não-ramificado em E/F ; isto ocorre em particular se $v_R(\omega) \geq 0$;
- (iv) seja $Q \in \mathbb{P}(F)$ um zero de $\omega - \gamma$, com $\gamma \in \mathbb{F}_q$; então, a equação $\alpha^q + \alpha = \gamma$ tem q raízes distintas $\alpha \in K$, e para cada α existe um único lugar $Q_\alpha \in \mathbb{P}(E)$ tal que $Q_\alpha \mid Q$ e Q_α é zero de $z - \alpha$.

4.2 O Gênero de F_n/K

Vamos utilizar a proposição 4.2 em cada extensão da torre construída na definição 4.1, procedendo da seguinte forma: determinamos o divisor principal (x_n) em F_n (denotado por $(x_n)^{F_n}$), e, pela proposição 4.2, veremos que os únicos lugares de F_n que podem se ramificar em F_{n+1} são os pólos de x_n . Então, fazendo uma classificação adequada dos lugares que estão no suporte de $(x_n)^{F_n}$, e separando-os em certos conjuntos, conseguiremos controlar as ramificações e discriminar em que conjunto estarão os lugares de F_n que se ramificarão em F_{n+1} . Mostraremos ainda que tais lugares são totalmente ramificados em F_{n+1} , agregando outras informações, como, por exemplo, a ordem de pólo ou de zero de x_n em cada um deles. Por outro lado, mostraremos que os demais pólos (que não são totalmente ramificados), dispostos em outros conjuntos segundo a nossa classificação, são todos não ramificados em F_{n+1} , o que nos permite esquecê-los no momento do cálculo do gênero de F_{n+1} (ver observação 3.38). Enfim, observando que $[F_{n+1} : F_n] = q$, e que K é algebricamente fechado em F_{n+1} , obtemos (usando a fórmula de Hurwitz) o gênero de F_n em função de n e de q .

Lema 4.3. *Suponha que um lugar $P \in \mathbb{P}(F_n)$ é um pólo simples de x_n em F_n , ou seja, $v_P(x_n) = -1$. Então, F_{n+1}/F_n é uma extensão de Artin-Schreier de grau $[F_{n+1} : F_n] = q$ e P é totalmente ramificado em F_{n+1}/F_n . Além disso, o lugar $P' \in \mathbb{P}(F_{n+1})$, tal que $P' \mid P$, é um pólo simples de x_{n+1} .*

Demonstração. Por definição, temos que $F_{n+1} = F_n(z_{n+1})$, onde $z_{n+1}^q + z_{n+1} = x_n^{q+1}$. Como P é pólo simples de x_n , isto é, $v_P(x_n) = -1$, temos que $v_P(x_n^{q+1}) = -(q+1)$, onde $q+1 > 0$ e $\text{mdc}(q+1, q) = 1$. Logo, pela proposição 4.2, temos que $[F_{n+1} : F_n] = q$, e que P é totalmente ramificado em F_{n+1} . Assim, $e(P' \mid P) = q$.

Agora, provaremos que $v_{P'}(x_{n+1}) = -1$. Por definição, temos que

$$x_{n+1} = \frac{z_{n+1}}{x_n} .$$

Logo, $v_{P'}(x_{n+1}) = v_{P'}(z_{n+1}) - v_{P'}(x_n)$. Mas,

$$\begin{aligned} z_{n+1}^q + z_{n+1} &= x_n^{q+1} \implies v_{P'}(z_{n+1}^q + z_{n+1}) = (q+1) \cdot v_{P'}(x_n) \\ &\implies v_{P'}(z_{n+1}^q + z_{n+1}) = (q+1) \cdot e(P' | P) \cdot v_P(x_n) \\ &\implies v_{P'}(z_{n+1}^q + z_{n+1}) = -q \cdot (q+1) . \end{aligned}$$

Agora, sabemos que

$$0 > v_{P'}(z_{n+1}^q + z_{n+1}) \geq \min\{v_{P'}(z_{n+1}), v_{P'}(z_{n+1}^q)\} .$$

Logo, $v_{P'}(z_{n+1}) < 0$, e assim temos:

$$\begin{aligned} v_{P'}(z_{n+1}^q) \neq v_{P'}(z_{n+1}) &\implies v_{P'}(z_{n+1}^q + z_{n+1}) = \min\{v_{P'}(z_{n+1}^q), v_{P'}(z_{n+1})\} \\ &= v_{P'}(z_{n+1}^q) \\ &= q \cdot v_{P'}(z_{n+1}) . \end{aligned}$$

Então:

$$q \cdot v_{P'}(z_{n+1}) = -q \cdot (q+1) \implies v_{P'}(z_{n+1}) = -(q+1) .$$

Assim,

$$\begin{aligned} v_{P'}(x_{n+1}) &= v_{P'}(z_{n+1}) - v_{P'}(x_n) \\ &= -(q+1) - e(P' | P) \cdot v_P(x_n) \\ &= -(q+1) - q \cdot (-1) \\ &= -1 . \end{aligned}$$

■

Lema 4.4. Para $n \geq 1$, temos que K é algebricamente fechado em F_n , e o grau da extensão F_n/F_1 é $[F_n : F_1] = q^{n-1}$.

Demonstração. Provaremos por indução sobre n . Para $n = 1$, temos que $F_1 = K(x_1)$, onde K é (obviamente) algebricamente fechado em F_1 , e $[F_1 : F_1] = 1 = q^{1-1}$. Agora, suponhamos a validade do lema para algum $n \geq 1$. Mas, $F_{n+1} = F_n(z_{n+1})$, onde $z_{n+1}^q + z_{n+1} = x_n^{q+1}$; temos ainda que, em $F_1 = K(x_1)$, P_∞ é pólo simples de x_1 . Logo, pelo lema 4.3, P_∞ tem uma única extensão $P_\infty^{(n)}$ em F_n , e este é pólo simples de x_n , isto é, $v_{P_\infty^{(n)}}(x_n^{q+1}) = -(q+1)$. Assim, pela proposição 4.2, temos que K é algebricamente fechado em F_{n+1} , e também que $[F_{n+1} : F_n] = q$. Logo:

$$[F_{n+1} : F_1] = [F_{n+1} : F_n] \cdot [F_n : F_1] = q \cdot q^{n-1} = q^n = q^{(n+1)-1} .$$

■

O lema a seguir caracteriza um lugar específico de F_n que tem um papel muito importante para a obtenção dos próximos resultados.

Lema 4.5. *Para $n \geq 1$, existe um único lugar $Q_n \in \mathbb{P}(F_n)$ que é zero comum das funções $x_1, z_2, z_3, \dots, z_n$. Temos ainda que $\deg(Q_n) = 1$, e, para $1 \leq k \leq n$, o lugar Q_n também é zero de x_k , e temos $v_{Q_n}(x_k) = q^{k-1}$. Na extensão F_{n+1}/F_n , o lugar Q_n decompõe-se em q lugares de F_{n+1} , todos de grau 1, onde um deles é Q_{n+1} .*

Demonstração. Para $n = 1$, temos $F_1 = K(x_1)$, onde $(x_1)^{F_1} = P_0 - P_\infty$ é o divisor associado a x_1 , e onde P_0 é o lugar de grau 1, associado ao polinômio de grau 1 $(x - 0) \in K[x]$. Fazendo $Q_1 = P_0$ temos que Q_1 é zero de $x_1^{q+1} - 0$, e, pelo item (iv) da proposição 4.2, a equação $\alpha^q + \alpha = 0$ tem q raízes distintas em K , onde a cada uma delas corresponde um único lugar Q_α de F_2 , que é zero de $z_2 - \alpha$. Como $\alpha^q + \alpha = 0$ é separável, temos que Q_1 se decompõe em q outros lugares de F_2 . Logo:

$$\sum_{i=1}^q e_i f_i = [F_2 : F_1] = q \implies e_i = f_i = 1, \quad \forall i \in \{1, \dots, q\}.$$

Assim:

$$\deg(Q_1) = 1 \implies \deg(Q_\alpha) = 1, \quad \forall \alpha \in K,$$

com $\alpha^q + \alpha = 0$ (ver diagrama a seguir).

Analisemos agora o caso $n = 2$. Denotemos por Q_2 o lugar de F_2 , extensão de Q_1 , associado à raiz $0 \in F_q$ de $\alpha^q + \alpha = 0$. Já sabemos que Q_2 tem grau 1, e $e(Q_2 | Q_1) = 1$. Logo,

$$v_{Q_2}(x_1) = e(Q_2 | Q_1) \cdot v_{Q_1}(x_1) = 1 = q^{1-1},$$

e Q_2 é zero de $z_2 - 0 = z_2$. Para ver que Q_2 é o único zero de x_1 e z_2 em F_2 , basta observar que qualquer outro zero de x_1 em F_2 é extensão de Q_1 , e, portanto, zero de $z_2 - \alpha$, com $\alpha \neq 0$, o que é um absurdo, pois, se $v_P(z_2) > 0$, então

$$v_P(z_2 - \alpha) = \min\{v_P(z_2), v_P(\alpha)\} = 0.$$

Mostraremos agora que $v_{Q_2}(x_2) = q = q^{2-1}$. Observemos primeiramente que:

$$\begin{aligned} z_2^q + z_2 &= x_1^{q+1} \implies v_{Q_2}(z_2^q + z_2) = v_{Q_2}(x_1^{q+1}) \\ &\implies v_{Q_2}(z_2^q + z_2) = (q+1) \cdot v_{Q_2}(x_1) = q+1 \\ &\implies v_{Q_2}(z_2) = q+1 \quad (\text{pois } Q_2 \text{ é zero de } z_2, \text{ ou seja, } v_{Q_2}(z_2) > 0) \end{aligned}$$

Logo:

$$x_2 = \frac{z_2}{x_1} \implies v_{Q_2}(x_2) = v_{Q_2}(z_2) - v_{Q_2}(x_1) = q + 1 - 1 = q .$$

Como Q_2 é zero de $x_2^{q+1} - 0$, segue, do item (iv) da proposição 4.2, que Q_2 se decompõe em q outros lugares de F_3 , cada um deles associado a uma única raiz da equação $\alpha^q + \alpha = 0$. Naturalmente, como Q_2 tem grau 1 e se decompõe em $q = [F_3 : F_2]$ outros lugares, então todos eles terão grau 1.

Enfim, suponhamos a validade do lema para algum natural $n - 1$, com $n \geq 3$. Isto significa que existe um único lugar $Q_{n-1} \in \mathbb{P}(F_{n-1})$ que é zero comum de $x_1, z_2, \dots, z_{n-1}$, com $\deg(Q_{n-1}) = 1$, e, para cada $1 \leq k \leq n - 1$, temos $v_{Q_{n-1}}(x_k) = q^{k-1}$; além disso, Q_{n-1} se decompõe em q outros lugares de F_n/F_{n-1} , todos de grau 1. Considere, pois, $F_n = F_{n-1}(z_n)$, onde $z_n^q + z_n = x_{n-1}^{q+1}$; como $Q_{n-1} \in \mathbb{P}(F_{n-1})$ é zero de $x_{n-1}^{q+1} - 0$, segue, do item (iv) da proposição 4.2, que existe um único $Q_n \in \mathbb{P}(F_n)$, extensão de Q_{n-1} , tal que Q_n é zero de z_n . Portanto, Q_n é o único zero comum de $x_1, z_2, \dots, z_n$. Então, como $Q_{n-1} \in \mathbb{P}(F_{n-1})$ se decompõe em q outros lugares de F_n , temos que

$$\sum_{i=1}^q e_i f_i = [F_n : F_{n-1}] = q \implies e_i = f_i = 1 .$$

Logo, todos os lugares $Q_\alpha \in \mathbb{P}(F_n)$ têm grau 1, e, em particular, $\deg(Q_n) = 1$.

Agora, para $1 \leq k \leq n - 1$, temos:

$$v_{Q_n}(x_k) = e(Q_n | Q_{n-1}) \cdot v_{Q_{n-1}}(x_k) = 1 \cdot q^{k-1} ,$$

e, portanto, $v_{Q_n}(x_k) = q^{k-1}$ para qualquer que seja $1 \leq k \leq n - 1$. Para $k = n$, temos:

$$\begin{aligned} z_n^q + z_n = x_{n-1}^{q+1} &\implies v_{Q_n}(z_n^q + z_n) = v_{Q_n}(x_{n-1}^{q+1}) \\ &\implies v_{Q_n}(z_n^q + z_n) = (q + 1) \cdot v_{Q_n}(x_{n-1}) = (q + 1) \cdot q^{n-2} . \end{aligned}$$

Mas, como Q_n é zero de z_n , temos

$$v_{Q_n}(z_n) = q^{n-1} + q^{n-2} .$$

Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned} x_n = \frac{z_n}{x_{n-1}} &\implies v_{Q_n}(x_n) = v_{Q_n}(z_n) - v_{Q_n}(x_{n-1}) \\ &\implies v_{Q_n}(x_n) = q^{n-1} + q^{n-2} - q^{n-2} = q^{n-1} . \end{aligned}$$

Logo, concluímos que $v_{Q_n}(x_k) = q^{k-1}$, qualquer que seja $1 \leq k \leq n$. ■

Corolário 4.6. *O lugar Q_n , conforme o lema anterior, é o único zero de x_n e z_n em F_n , para $n \geq 2$.*

Demonstração. Assumindo que Q_n é o único zero de z_n em F_n , é fácil ver que Q_n também é o único zero de x_n em F_n , pois

$$x_n = \frac{z_n}{x_{n-1}} \implies (x_n)^{F_n} = (z_n)^{F_n} - (x_{n-1})^{F_n} .$$

Portanto, o único zero de z_n também é o único zero de x_n , pois

$$z_n^q + z_n = x_{n-1}^{q+1} \implies (v_P(z_n) < 0 \iff v_P(x_{n-1}) < 0) ,$$

ou seja, z_n e x_{n-1} têm os mesmos pólos em F_n . Mas, como $v_P(z_n) = \frac{q+1}{q} \cdot v_P(x_{n-1})$ em cada um destes pólos, temos que a ordem de pólo em z_n é ainda maior que a ordem de pólo de x_{n-1} , o que não permite que pólos de x_{n-1} virem zeros de x_n em F_n .

Para mostrar que Q_n é o único zero de z_n em F_n , procederemos por indução. Para $n = 2$, tomemos $P \in \mathbb{P}(F_2)$ zero de z_2 . Como $z_2^q + z_2 = x_1^{q+1}$, temos:

$$v_P(z_2^q + z_2) = v_P(x_1^{q+1}) \implies v_P(z_2) = (q+1) \cdot v_P(x_1) \implies v_P(x_1) > 0 .$$

Logo, pelo lema anterior, temos $P = Q_2$.

Agora, vamos admitir que Q_{n-1} é o único zero de z_{n-1} em F_{n-1} . Usando a notação do lema 4.5, tomemos $Q_n \in \mathbb{P}(F_n)$. Temos que Q_n é zero de z_n . Se existir outro $Q \in \mathbb{P}(F_n)$ que também seja zero de z_n , então, como $z_n^q + z_n = x_{n-1}^{q+1}$, temos que Q é zero de x_{n-1} em F_n , ou seja, Q é extensão de um zero de x_{n-1} em F_{n-1} ; portanto, $Q \mid Q_{n-1}$. Logo, Q é zero de $z - \alpha$, onde $\alpha \in K \setminus \{0\}$ e $\alpha^q + \alpha = 0$, o que é absurdo, pois

$$v_Q(z_n) > 0 \implies v_Q(z_n - \alpha) = 0 .$$

■

Corolário 4.7. Para $n \geq 2$, o suporte de (x_n) em F_n é formado pelas extensões dos lugares do suporte de (x_{n-1}) em F_{n-1} .

Demonstração. É evidente a partir da demonstração do corolário anterior. ■

Conforme mencionamos anteriormente, dividiremos o suporte de $(x_n)^{F_n}$ em determinados conjuntos de lugares de modo a facilitar o controle das ramificações. Considerando o corolário 4.7, tomaremos, para $n \geq 2$ em F_n , as extensões dos lugares do suporte de $(x_1)^{F_1} = Q_1 - P_\infty$, e as dividiremos em certos conjuntos segundo um critério que será justificado *à posteriori*. A definição seguinte formaliza toda esta idéia.

Definição 4.8. (Veja figura ♠)

(i) Para $n \geq 2$, seja

$$S_0^{(n)} := \{P \in \mathbb{P}(F_n) \mid P \cap F_{n-1} = Q_{n-1} \text{ e } P \neq Q_n\} .$$

(ii) Para $1 \leq i \leq \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$, com $n \geq 5$, seja

$$S_i^{(n)} := \{P \in \mathbb{P}(F_n) \mid P \cap F_{n-1} \in S_{i-1}^{(n-1)}\} .$$

(iii) Seja $P_\infty \in \mathbb{P}(F_1)$ o pólo de x_1 em F_1 . Definimos

$$S^{(1)} = \{P_\infty\} \text{ e } S^{(2)} = \{P \in \mathbb{P}(F_2) \mid P \in S_0^{(2)} \text{ ou } P \cap F_1 = P_\infty\} ,$$

ou seja, $S^{(2)}$ contém todos os lugares de F_2 que são pólos de x_1 , ou zero de x_1 e $z_2 - \alpha$, com $\alpha \in K \setminus \{0\}$ e $\alpha^q + \alpha = 0$.

(iv) Para $n \geq 3$ ímpar, definimos

$$S^{(n)} := \{P \in \mathbb{P}(F_n) \mid P \cap F_{n-1} \in S^{(n-1)}\} ,$$

e, para $n \geq 4$ par, definimos

$$S^{(n)} := \{P \in \mathbb{P}(F_n) \mid P \cap F_{n-1} \in S^{(n-1)} \cup S_{\frac{n-4}{2}}^{(n-1)}\} .$$

Observação 4.9. De agora em diante, a menos de menção em contrário, nos reportaremos ao $S_i^{(n)}$ subentendendo $n \geq 3$. Assim, pelo corolário 4.7 e pela definição 4.8, podemos observar que o suporte de (x_n) em F_n , para $n \geq 3$, é dado pelo conjunto $\{Q_n\} \cup X \cup S^{(n)}$, onde

$$X = \bigcup_{i=0}^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor} S_i^{(n)} .$$

Passaremos agora à parte mais técnica do trabalho, que é mostrar que os lugares de $S_i^{(n)}$ são não-ramificados em F_{n+1} . O principal objetivo desta próxima etapa é mostrar que, dado $P \in S_i^{(n)}$, existe $u \in F_n$ tal que $x_n^{q+1} = \wp(u) + \mathcal{O}(1)$ em P ; daí, pelo item (iii) da proposição 4.2, concluímos que P é não-ramificado em F_{n+1} .

A maioria dos resultados a seguir será mais facilmente interpretada com o auxílio da figura ♠.

Para simplificar as próximas demonstrações, apresentaremos o seguinte lema:

Lema 4.10. (i) Para $2 \leq k \leq n$, se $P \in \mathbb{P}(F_n)$ está acima de Q_k (isto é, P é zero de $x_1, z_2, \dots, z_k$), então:

$$\frac{z_k^{q^2}}{x_{k-1}^{q+1}} = \mathcal{O}(x_{k-1}^{(q+1)(q^2-1)}) \text{ em } P.$$

(ii) Se $P \in \mathbb{P}(F_n)$ é zero de $x_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ e $z_n - \alpha$, onde $\alpha \in K \setminus \{0\}$ e $\alpha^q + \alpha = 0$, então

$$v_P\left(\frac{z_n - \alpha}{x_{n-1}^{q+1}}\right) = 0.$$

Em particular,

$$\frac{z_n - \alpha}{x_{n-1}^{q+1}} = \mathcal{O}(1).$$

Demonstração. (i) Com efeito, temos que:

$$\frac{z_k^{q^2}}{x_{k-1}^{q+1}} = x_{k-1}^{(q+1)(q^2-1)} \cdot \left(\frac{z_k}{x_{k-1}^{q+1}}\right)^{q^2}.$$

Como $v_P(z_k) > 0$ e $z_k^q + z_k = x_{k-1}^{q+1}$, segue que:

$$\begin{aligned} v_P(z_k^q + z_k) = v_P(x_{k-1}^{q+1}) &\implies v_P(z_k) = v_P(x_{k-1}^{q+1}) \\ &\implies v_P\left(\frac{z_k}{x_{k-1}^{q+1}}\right) = 0. \end{aligned}$$

Logo:

$$\frac{z_k^{q^2}}{x_{k-1}^{q+1}} = \mathcal{O}(x_{k-1}^{(q+1)(q^2-1)}).$$

(ii) De fato, como $z_n^q + z_n = x_{n-1}^{q+1}$ e $\alpha^q + \alpha = 0$, temos que $(z_n - \alpha)^q + (z_n - \alpha) = x_{n-1}^{q+1}$. Dado que $v_P(z_n - \alpha) > 0$, temos

$$v_P(z_n - \alpha) = v_P(x_{n-1}^{q+1}) \implies v_P\left(\frac{z_n - \alpha}{x_{n-1}^{q+1}}\right) = 0.$$

■

Proposição 4.11. *Seja $0 \leq i \leq [\frac{n-3}{2}]$ e $P \in S_i^{(n)}$. Então o lugar P é não-ramificado na extensão F_{n+1}/F_n .*

Para provar esta proposição, precisaremos de mais dois lemas. Lembramos ainda que em algumas passagens das próximas demonstrações serão utilizadas as propriedades P_i , apresentadas na seção 3.8.

Lema 4.12. *Seja $2 \leq k \leq n$ e $P \in \mathbb{P}(F_n)$ um lugar acima de Q_k (isto é, P é zero de $x_1, z_2, \dots, z_k$). Então, no lugar P , temos:*

$$(I) \quad x_k = x_{k-1}^q (1 - x_{k-1}^{(q+1)(q-1)} + \mathcal{O}(x_{k-1}^{(q+1)(q^2-1)}))$$

e

$$(II) \quad x_k^{-(q+1)} = \wp(x_{k-1}^{-(q+1)}) + \mathcal{O}(1) .$$

Demonstração. Consideremos a equação $z_k^q + z_k = x_{k-1}^{q+1}$. Como $z_k = x_{k-1}^{q+1} - z_k^q$, temos

$$\begin{aligned} z_k &= x_{k-1}^{q+1} - (x_{k-1}^{q+1} - z_k^q)^q \implies z_k = x_{k-1}^{q+1} - x_{k-1}^{q(q+1)} + z_k^{q^2} \\ &\implies z_k = x_{k-1}^{q+1} \cdot \left(1 - x_{k-1}^{q^2-1} + \frac{z_k^{q^2}}{x_{k-1}^{q+1}}\right) \\ &\implies z_k = x_{k-1}^{q+1} \cdot \left(1 - x_{k-1}^{q^2-1} + \mathcal{O}(x_{k-1}^{(q+1)(q^2-1)})\right) \text{ em } P \text{ (lema 4.10(i))} \\ &\implies x_k = \frac{z_k}{x_{k-1}} = x_{k-1}^q \cdot \left(1 - x_{k-1}^{q^2-1} + \mathcal{O}(x_{k-1}^{(q+1)(q^2-1)})\right) \text{ em } P . \end{aligned}$$

Obtemos, assim, a parte (I) do lema.

Agora, fazendo $y := x_{k-1}^{q+1}$, temos

$$\begin{aligned} x_k &= x_{k-1}^q \cdot (1 - y^{q-1} + \mathcal{O}(y^{q^2-1})) \xrightarrow{P_5} x_k = x_{k-1}^q \cdot (1 - y^{q-1} + \mathcal{O}(y^q)) \\ &\implies x_k^{-1} = x_{k-1}^{-q} \cdot (1 - y^{q-1} + \mathcal{O}(y^q))^{-1} \\ &\xrightarrow{P_6} x_k^{-1} = x_{k-1}^{-q} \cdot (1 + y^{q-1} + \mathcal{O}(y^q)) \\ &\implies x_k^{-(q+1)} = x_{k-1}^{-q(q+1)} \cdot (1 + y^{q-1} + \mathcal{O}(y^q))^{q+1} \\ &\xrightarrow{P_7} x_k^{-(q+1)} = y^{-q} \cdot (1 + y^{q-1} + \mathcal{O}(y^q)) \\ &\xrightarrow{P_0} x_k^{-(q+1)} = y^{-q} + y^{-1} + \mathcal{O}(1) \\ &\implies x_k^{-(q+1)} = \wp(y^{-1}) + \mathcal{O}(1) , \end{aligned}$$

de onde segue (II). ■

Lema 4.13. *Seja $0 \leq i \leq [\frac{n-3}{2}]$. Então, temos em P :*

$$x_n^{q+1} = \gamma \cdot x_{n-2i-1}^{-(q+1)} + \mathcal{O}(1)$$

para algum $\gamma \in \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$.

Demonstração. Provaremos por indução sobre i . Para o caso $i = 0$, tomamos $P \in S_0^{(n)}$, ou seja $P \mid Q_{n-1}$ e $P \neq Q_n$; então, P é zero comum de $x_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ e $z_n - \alpha$, onde $\alpha \in K \setminus \{0\}$ é tal que $\alpha^q + \alpha = 0$.

Assim, temos que:

$$\begin{aligned} z_n^q + z_n &= x_{n-1}^{q+1} \implies (z_n - \alpha)^q + (z_n - \alpha) = x_{n-1}^{q+1} \\ &\implies z_n - \alpha = x_{n-1}^{q+1} - (z_n - \alpha)^q \\ &\implies z_n - \alpha = x_{n-1}^{q+1} + x_{n-1}^{q(q+1)} \cdot \left[-\frac{z_n - \alpha}{x_{n-1}^{q+1}} \right]^q \\ &\implies z_n - \alpha = x_{n-1}^{q+1} + \mathcal{O}(x_{n-1}^{q(q+1)}) \quad (\text{lema 4.10(ii)}) . \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} x_n^{q+1} \cdot x_{n-1}^{q+1} &= z_n^{q+1} = ((z_n - \alpha) + \alpha)^{q+1} \\ &= ((z_n - \alpha)^q + \alpha^q) \cdot ((z_n - \alpha) + \alpha) \\ &= \alpha^{q+1} + \alpha^q \cdot (z_n - \alpha) + \alpha \cdot (z_n - \alpha)^q + (z_n - \alpha)^{q+1} . \end{aligned}$$

Fazendo a substituição, temos:

$$x_n^{q+1} \cdot x_{n-1}^{q+1} = \alpha^{q+1} + \alpha^q \cdot (x_{n-1}^{q+1} + \mathcal{O}(x_{n-1}^{q(q+1)})) + \alpha \cdot (x_{n-1}^{q(q+1)} + \mathcal{O}(x_{n-1}^{q^2(q+1)})) + (x_{n-1}^{q+1} + \mathcal{O}(x_{n-1}^{q(q+1)}))^{q+1} ,$$

o que, por P_3 e P_4 , implica

$$\begin{aligned} x_n^{q+1} \cdot x_{n-1}^{q+1} &= \alpha^{q+1} + \alpha^q \cdot x_{n-1}^{q+1} + \mathcal{O}(x_{n-1}^{q(q+1)}) \implies x_n^{q+1} = \underbrace{\frac{\alpha^{q+1}}{x_{n-1}^{q+1}} + \alpha^q + \mathcal{O}(x_{n-1}^{q^2-1})}_{(*)} \\ &\implies x_n^{q+1} = \frac{\alpha^{q+1}}{x_{n-1}^{q+1}} + \mathcal{O}(1) . \end{aligned}$$

Como $\alpha \in K$, temos que $\gamma := \alpha^{q+1} \in \mathbb{F}_q$, pois $(\alpha^{q+1})^q = \alpha^{q^2+q} = \alpha^{q+1}$. Deste modo, podemos concluir que $x_n^{q+1} = \gamma \cdot x_{n-1}^{-(q+1)} + \mathcal{O}(1)$ em $P \in S_0^{(n)}$, qualquer que seja $n \geq 3$.

Agora, tomamos $i \geq 1$ e supomos que o lema seja válido para $i - 1$. Dado $P \in S_i^{(n)}$, temos (pela definição do $S_i^{(n)}$) que $P \mid Q_{n-i-1}$, e, como $P \cap F_{n-1} \in S_{i-1}^{(n-1)}$, segue (da hipótese) que:

$$\begin{aligned} x_{n-1}^{q+1} &= \gamma \cdot x_{(n-1)-2(i-1)-1}^{-(q+1)} + \mathcal{O}(1) \\ \implies x_{n-1}^{q+1} &= \gamma \cdot x_{n-2i}^{-(q+1)} + \mathcal{O}(1) , \quad \gamma \in \mathbb{F}_q \setminus \{0\} \quad (1) , \end{aligned}$$

Como P está sobre Q_{n-i-1} , temos que P também está sobre Q_{n-2i} , pois $n - 2i \leq n - i - 1$ para todo $i \geq 1$. Por outro lado, como $i \leq \frac{n-3}{2}$, temos que $n - 2i \geq 3$. Logo, pelo item (II) do lema 4.12, obtemos:

$$x_{n-2i}^{-(q+1)} = \wp(x_{n-2i-1}^{-(q+1)}) + \mathcal{O}(1) \text{ em } P .$$

Então, usando P_0 , temos:

$$\gamma \cdot x_{n-2i}^{-(q+1)} = \gamma \cdot \wp(x_{n-2i-1}^{-(q+1)}) + \mathcal{O}(\gamma) ,$$

o que (por P_1) implica:

$$\gamma \cdot x_{n-2i}^{-(q+1)} + \mathcal{O}(1) = \wp(\gamma \cdot x_{n-2i-1}^{-(q+1)}) + \mathcal{O}(\gamma) + \mathcal{O}(1) \xrightarrow{P_3, (1)} x_{n-1}^{q+1} = \wp(\gamma \cdot x_{n-2i-1}^{-(q+1)}) + \mathcal{O}(1) .$$

Mas, como $z_n^q + z_n = x_{n-1}^{q+1}$, temos que:

$$\begin{aligned} \wp(z_n) = \wp(\gamma \cdot x_{n-2i-1}^{-(q+1)}) + \mathcal{O}(1) &\implies \wp(z_n) - \wp(\gamma \cdot x_{n-2i-1}^{-(q+1)}) = \mathcal{O}(1) \\ &\implies \wp(z_n - \gamma \cdot x_{n-2i-1}^{-(q+1)}) = \mathcal{O}(1) \\ &\xrightarrow{P_2} z_n - \gamma \cdot x_{n-2i-1}^{-(q+1)} = \mathcal{O}(1) \\ &\implies z_n = \gamma \cdot x_{n-2i-1}^{-(q+1)} + \mathcal{O}(1) \end{aligned} \quad (2) ,$$

Como $x_n = z_n/x_{n-1}$, obtemos então:

$$x_n^{q+1} = \frac{(z_n \cdot x_{n-2i})^{q+1}}{(x_{n-1} \cdot x_{n-2i})^{q+1}} = A^{q+1} \cdot B^{-1} \quad (3) ,$$

onde $A := z_n \cdot x_{n-2i}$ e $B := x_{n-1}^{q+1} \cdot x_{n-2i}^{q+1}$.

Como, em particular, P está sobre Q_{n-2i} , segue (do item (I) do lema 4.12) que:

$$\begin{aligned} x_{n-2i} &= x_{n-2i-1}^q \cdot (1 - x_{n-2i-1}^{(q+1)(q-1)} + x_{n-2i-1}^{(q+1)(q^2-1)} \cdot t) , \quad t \in O_P \\ \implies x_{n-2i} &= x_{n-2i-1} \cdot \underbrace{\left[x_{n-2i-1}^{q-1} \cdot (1 - x_{n-2i-1}^{(q+1)(q-1)} + x_{n-2i-1}^{(q+1)(q^2-1)} \cdot t) \right]}_{(*)} \end{aligned} \quad (4) .$$

Entretanto, P também está acima de Q_{n-2i-1} . Logo, $v_P(x_{n-2i-1}) > 0$ e, conseqüentemente, $(*)$ está em O_P . Portanto, $x_{n-2i} = \mathcal{O}(x_{n-2i-1})$.

Agora, como $B = x_{n-1}^{q+1} \cdot x_{n-2i}^{q+1}$, temos, de (1), que:

$$\begin{aligned} B &= (\gamma \cdot x_{n-2i}^{-(q+1)} + \mathcal{O}(1)) \cdot x_{n-2i}^{q+1} \implies B = \gamma + \mathcal{O}(x_{n-2i}^{q+1}) \\ &\xrightarrow{P_3} B^{-1} = \gamma^{-1} + \mathcal{O}(x_{n-2i}^{q+1}) \\ &\implies B^{-1} = \gamma^{-1} + \mathcal{O}(x_{n-2i-1}^{q+1}) \end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos que $A = z_n \cdot x_{n-2i}$. Mas, por (2), temos:

$$z_n = \gamma \cdot x_{n-2i-1}^{-(q+1)} + \mathcal{O}(1) ,$$

enquanto que, pelo item (I) do lema 4.12, temos

$$x_{n-2i} = x_{n-2i-1}^q \cdot \left(1 - x_{n-2i-1}^{q^2-1} + \mathcal{O}(x_{n-2i-1}^{(q+1)(q^2-1)}) \right) ,$$

e, usando P_4 , obtemos:

$$x_{n-2i} = x_{n-2i-1}^q \cdot (1 + \mathcal{O}(x_{n-2i-1}^{q^2-1})) .$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\gamma \cdot x_{n-2i-1}^{-(q+1)} + \mathcal{O}(1) \right) \cdot x_{n-2i-1}^q \cdot \left(1 + \mathcal{O}(x_{n-2i-1}^{q^2-1}) \right) \\
 &= \left(\gamma \cdot x_{n-2i-1}^{-1} + \mathcal{O}(x_{n-2i-1}^q) \right) \cdot \left(1 + \mathcal{O}(x_{n-2i-1}^{q^2-1}) \right) \\
 &= \gamma \cdot x_{n-2i-1}^{-1} + t_2 \cdot x_{n-2i-1}^q + t_1 \cdot \gamma \cdot x_{n-2i-1}^{q^2-2} + t_1 \cdot t_2 \cdot x_{n-2i-1}^{q^2+q-1},
 \end{aligned}$$

onde $t_1, t_2 \in \mathcal{O}_P$. Logo:

$$A = \gamma \cdot x_{n-2i-1}^{-1} + x_{n-2i-1}^q \cdot \underbrace{\left(t_2 + t_1 \cdot \gamma \cdot x_{n-2i-1}^{q^2-q-2} + t_1 \cdot t_2 \cdot x_{n-2i-1}^{q^2-1} \right)}_{(**)}.$$

Como $(**)$ está em $\mathcal{O}_P$, temos que:

$$\begin{aligned}
 A &= \gamma \cdot x_{n-2i-1}^{-1} + \mathcal{O}(x_{n-2i-1}^q) \\
 \Rightarrow A^{q+1} &= (\gamma^q \cdot x_{n-2i-1}^{-q} + t^q \cdot x_{n-2i-1}^{q^2}) \cdot (\gamma \cdot x_{n-2i-1}^{-1} + t \cdot x_{n-2i-1}^q), \text{ onde } t \in \mathcal{O}_P \\
 \Rightarrow A^{q+1} &= \gamma^{q+1} \cdot x_{n-2i-1}^{-(q+1)} + \underbrace{\left(\gamma \cdot t^q \cdot x_{n-2i-1}^{q^2-1} + t^{q+1} \cdot x_{n-2i-1}^{q^2+q} + t \cdot \gamma^q \right)}_{\in \mathcal{O}_P} \\
 \Rightarrow A^{q+1} &= \gamma^{q+1} \cdot x_{n-2i-1}^{-(q+1)} + \mathcal{O}(1) = \gamma^2 \cdot x_{n-2i-1}^{-(q+1)} + \mathcal{O}(1), \text{ pois } \gamma \in \mathbb{F}_q.
 \end{aligned}$$

Assim, fazendo as substituições em (3), obtemos:

$$\begin{aligned}
 x_n^{q+1} &= A^{q+1} \cdot B^{-1} = \left(\gamma^2 \cdot x_{n-2i-1}^{-(q+1)} + \mathcal{O}(1) \right) \cdot \left(\gamma^{-1} + \mathcal{O}(x_{n-2i-1}^{q+1}) \right) \\
 \xrightarrow{P_0} x_n^{q+1} &= \gamma \cdot x_{n-2i-1}^{-(q+1)} + \mathcal{O}(\gamma^{-1}) + \mathcal{O}(\gamma^2) + \mathcal{O}(x_{n-2i-1}^{q+1}) \\
 \Rightarrow x_n^{q+1} &= \gamma \cdot x_{n-2i-1}^{-(q+1)} + \mathcal{O}(1).
 \end{aligned}$$

■

Finalmente, podemos demonstrar a proposição 4.11.

Demonstração da proposição 4.11. Dado $P \in S_i^{(n)}$, onde $0 \leq i \leq [\frac{n-3}{2}]$, temos (do lema 4.13) que, em P , vale:

$$x_n^{q+1} = \gamma \cdot x_{n-2i-1}^{-(q+1)} + \mathcal{O}(1), \text{ com } \gamma \in \mathbb{F}_q.$$

Como P está sobre Q_{n-i-1} e $2 \leq n-2i-1 \leq n-i-1$, segue (do item (II) do lema 4.12) que:

$$\begin{aligned}
 x_{n-2i-1}^{-(q+1)} &= \wp(x_{n-2i-2}^{-(q+1)}) + \mathcal{O}(1) \xrightarrow{P_0, P_1} \gamma \cdot x_{n-2i-1}^{-(q+1)} + \mathcal{O}(1) = \wp(\gamma \cdot x_{n-2i-2}^{-(q+1)}) + \mathcal{O}(\gamma) + \mathcal{O}(1) \\
 &\Rightarrow x_n^{q+1} = \wp(\gamma \cdot x_{n-2i-2}^{-(q+1)}) + \mathcal{O}(1).
 \end{aligned}$$

Como $F_{n+1} = F_n(z_{n+1})$, onde $z_{n+1}^q + z_{n+1} = x_n^{q+1}$, concluímos, do item (iii) da proposição 4.2, que P é não-ramificado em F_{n+1} . ■

Pelo corolário 4.6, já sabemos que Q_n é o único zero de x_n em F_n , e ainda que $v_{Q_n}(x_n) = q^{n-1}$ (lema 4.5). Para obter o divisor (x_n) em F_n é necessário determinar a ordem de pólo, em x_n , dos lugares de $S_i^{(n)}$ e $S^{(n)}$. Nesta direção, temos o seguinte lema:

Lema 4.14. (i) *Seja $P \in S_i^{(n)}$, com $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$. Então $v_P(x_n) = -q^{n-2i-2}$.*

(ii) *$P \in S^{(n)} \implies v_P(x_n) = -1$, e, portanto, P é totalmente ramificado em F_{n+1} .*

Demonstração. (i) Se $P \in S_i^{(n)}$, então P está sobre Q_{n-i-1} , ou seja, P está no topo de uma “torre de lugares” $P_j \in S_{i-j}^{(n-j)}$, onde $j = 1, \dots, i$, os quais (pela proposição 4.11) são todos não-ramificados. Logo $e(P | Q_{n-i-1}) = 1$.

Por outro lado, também sabemos que $e(Q_{n-i-1} | Q_{n-2i-1}) = 1$. Logo:

$$v_P(x_{n-2i-1}) = e(P | Q_{n-2i-1}) \cdot v_{Q_{n-2i-1}}(x_{n-2i-1}) \implies v_P(x_{n-2i-1}) = 1 \cdot v_{Q_{n-2i-1}}(x_{n-2i-1}) .$$

Assim, pelo lema 4.5, temos que:

$$v_P(x_{n-2i-1}) = q^{n-2i-2} .$$

Mas, do lema 4.13, segue que:

$$x_n^{q+1} = \gamma \cdot x_{n-2i-1}^{-(q+1)} + \mathcal{O}(1) \text{ em } P \in S_i^{(n)} .$$

Portanto:

$$v_P(x_n^{q+1}) = v_P(\gamma \cdot x_{n-2i-1}^{-(q+1)} + t) , \text{ onde } v_P(t) \geq 0 .$$

Então:

$$\begin{aligned} (q+1) \cdot v_P(x_n) &= \min\{v_P(x_{n-2i-1}^{-(q+1)}), v_P(t)\} \\ &= \min\{-(q+1) \cdot q^{n-2i-2}, v_P(t)\} \\ &= -(q+1) \cdot q^{n-2i-2} . \end{aligned}$$

Logo, $v_P(x_n) = -q^{n-2i-2}$.

(ii) Procederemos por indução sobre n .

- *Caso $n = 1$:*
Imediato, pois

$$v_{P_\infty}(x_1) = -1 .$$

- *Caso $n = 2$:*

Se $P \cap F_1 = P_\infty$, então, pelo lema 4.3, temos que $v_P(x_2) = -1$. Por outro lado, se $P \in S_0^{(2)}$, então $P \cap F_1 = Q_1$ e $P \neq Q_2$. Logo, $v_P(z_2 - \alpha) > 0$ para algum $\alpha \in K \setminus \{0\}$, com $\alpha^q + \alpha = 0$, e, portanto, $v_P(z_2) = 0$. Assim, temos que:

$$\begin{aligned} x_2 = \frac{z_2}{x_1} &\implies v_P(x_2) = v_P(z_2) - v_P(x_1) \\ &\implies v_P(x_2) = -e(P | Q_1) \cdot v_{Q_1}(x_1) = -1 . \end{aligned}$$

• *Caso $n \geq 3$:*

◦ *Caso 1: n é ímpar.*

Se $P \in S^{(n)}$, tomamos $P' = P \cap F_{n-1} \in S^{(n-1)}$, e, por hipótese, $v_{P'}(x_{n-1}) = -1$. Logo, pelo lema 4.3, P é pólo simples de x_n .

◦ *Caso 2: n é par (e, portanto, $n \geq 4$).*

• Se $P' = P \cap F_{n-1} \in S^{(n-1)}$, repetimos o argumento do caso 1.

• Se $P' = P \cap F_{n-1} \in S^{(n-1)}$, então, pelo item (i) acima, temos $v_{P'}(x_{n-1}) = -q$. Como $z_n^q + z_n = x_{n-1}^{q+1}$ e P' é não-ramificado em F_n , segue que:

$$\begin{aligned} v_P(z_n^q + z_n) = v_P(x_{n-1}^{q+1}) &\implies v_P(z_n^q + z_n) = e(P | P') \cdot v_{P'}(x_{n-1}^{q+1}) \\ &\implies v_P(z_n^q + z_n) = 1 \cdot (q+1) \cdot v_{P'}(x_{n-1}) \\ &\implies v_P(z_n^q + z_n) = -q \cdot (q+1) \\ &\implies v_P(z_n) = -(q+1) \end{aligned}$$

Mas, $x_n = z_n/x_{n-1}$; portanto,

$$v_P(x_n) = v_P(z_n) - v_P(x_{n-1}) \implies v_P(x_n) = -(q+1) - (-q) = -1.$$

Logo, como $v_P(x_n) = -1$, pelo lema 4.3 temos que P é totalmente ramificado em F_{n+1} . ■

Lema 4.15.

$$(a) \quad (x_n)^{F_n} = q^{n-1} \cdot Q_n - \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor} q^{n-2i-2} \cdot D_i^{(n)} \right) - D^{(n)},$$

$$\text{onde } D_i^{(n)} := \sum_{P \in S_i^{(n)}} P \quad \text{e} \quad D^{(n)} := \sum_{P \in S^{(n)}} P.$$

$$(b) \quad \deg D_i^{(n)} = q^i \cdot (q-1) \quad \text{e} \quad \deg D^{(n)} = q^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Demonstração.

(a) Pela observação 4.9, sabemos que o suporte de $(x_n)^{F_n}$ é formado pelos lugares de $S_i^{(n)}$, $S^{(n)}$ e por Q_n . Usando o fato que $v_{Q_n}(x_n) = q^{n-1}$ (lema 4.5) e o lema 4.14, segue o item (a).

(b)

- Primeiramente, mostremos que $\deg(D_i^{(n)}) = q^i \cdot (q-1)$. Procederemos por indução sobre i .

- Para $i = 0$, temos que $S_0^{(n)}$ é formado pelos $q - 1$ lugares de grau 1, extensões de Q_{n-1} , e que estão associados às raízes de $\alpha^{q-1} = -1$, $\alpha \in K$. Logo, $\deg(D_0^{(n)}) = q - 1 = q^0 \cdot (q - 1)$.
- Para $1 \leq i \leq [\frac{n-3}{2}]$, temos que $S_i^{(n)}$ é formado pelas extensões dos lugares de $S_{i-1}^{(n-1)}$ que, por serem não-ramificados em F_n , são tais que

$$D_i^{(n)} = \sum_{P \in S_{i-1}^{(n-1)}} \sum_{P' | P} \left(\underbrace{e(P' | P)}_1 \cdot P' \right) \implies D_i^{(n)} = \text{Con}_{F_n | F_{n-1}} \left(D_{i-1}^{(n-1)} \right).$$

Mas, como por hipótese $\deg(D_{i-1}^{(n-1)}) = q^{i-1} \cdot (q - 1)$, usando o corolário 3.13 e o fato de K ser algebricamente fechado em F_n , temos que:

$$\begin{aligned} \deg(D_i^{(n)}) &= [F_n : F_{n-1}] \cdot \deg(D_{i-1}^{(n-1)}) \\ &= q \cdot q^{i-1} \cdot (q - 1) \\ &= q^i \cdot (q - 1). \end{aligned}$$

- Agora, mostraremos (por indução sobre n) que $\deg(D^{(n)}) = q^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.
 - Se $n = 1$, temos que $D^{(1)} = P_\infty$, e, como $\deg(P_\infty) = 1$, temos $\deg(D^{(1)}) = 1 = q^{\lfloor \frac{1}{2} \rfloor}$.
 - Se $n = 2$, temos que $D^{(2)} = \sum_{P \in S^{(2)}} P$; mas, como $S^{(2)}$ é formado por q lugares de grau 1, temos que $\deg(D^{(2)}) = q = q^{\lfloor \frac{2}{2} \rfloor}$.
 - *Caso n ímpar:*
Como n é ímpar, temos que os lugares de $S^{(n)}$ são extensões biunívocas dos lugares de $S^{(n-1)}$, os quais são totalmente ramificados em F_n . Logo:

$$\begin{aligned} D^{(n)} &= \sum_{P \in D^{(n-1)}} \sum_{P' | P} P' = \sum_{P \in D^{(n-1)}} \sum_{P' | P} \left(\frac{e(P' | P)}{q} \cdot P' \right) \\ &= \frac{1}{q} \cdot \sum_{P \in D^{(n-1)}} \sum_{P' | P} \left(e(P' | P) \cdot P' \right) = \frac{1}{q} \cdot \text{Con}_{F_n | F_{n-1}} (D^{(n-1)}), \end{aligned}$$

e, portanto, usando o corolário 3.13 e o fato de K ser algebricamente fechado em F_n , temos:

$$q \cdot D^{(n)} = \text{Con}_{F_n | F_{n-1}} (D^{(n-1)}) \implies q \cdot \deg(D^{(n)}) = [F_n : F_{n-1}] \cdot \deg(D^{(n-1)}).$$

Mas, por hipótese, temos que $\deg(D^{(n-1)}) = q^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$. Logo:

$$q \cdot \deg(D^{(n)}) = q \cdot q^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \implies \deg(D^{(n)}) = q^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Contudo, como n é ímpar, temos $[\frac{n-1}{2}] = [\frac{n}{2}]$, e, conseqüentemente, $\deg(D^{(n)}) = q^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

o *Caso n par:*

Para calcular o grau de $D^{(n)}$, devemos observar que, desta vez, $S^{(n)}$ recebeu, além das extensões dos lugares de $S^{(n-1)}$, as extensões dos lugares de $S_{[\frac{n-4}{2}]}^{(n-1)} = S_{\frac{n-4}{2}}^{(n-1)}$ (pois n é par). Como os lugares de $S_{\frac{n-4}{2}}^{(n-1)}$ e $S^{(n-1)}$ são respectivamente não-ramificados e totalmente ramificados em F_n , temos, de forma análoga ao que fizemos no caso ímpar,

$$D^{(n)} = \text{Con}_{F_n|F_{n-1}}(D_{\frac{n-4}{2}}^{(n-1)}) + \frac{1}{q} \cdot \text{Con}_{F_n|F_{n-1}}(D^{(n-1)}) ,$$

o que implica que:

$$\begin{aligned} \deg(D^{(n)}) &= \deg(\text{Con}_{F_n|F_{n-1}}(D_{\frac{n-4}{2}}^{(n-1)})) + \frac{1}{q} \cdot \deg(\text{Con}_{F_n|F_{n-1}}(D^{(n-1)})) \\ &= q \cdot q^{\frac{n-4}{2}} \cdot (q-1) + \frac{1}{q} \cdot q \cdot q^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \\ &= q^{\frac{n-2}{2}} \cdot (q-1) + q^{\frac{n-2}{2}} \\ &= q^{\frac{n}{2}} = q^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} . \end{aligned}$$

■

Lema 4.16. *Se g_n e g_{n+1} são os gêneros de F_n e F_{n+1} , respectivamente, então:*

$$2g_{n+1} - 2 = q \cdot (2g_n - 2) + q^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cdot (q+2) \cdot (q-1) .$$

Demonstração. Pelo item (iii) da proposição 4.2, temos que, se $P \in \mathbb{P}(F_n)$ e $v_P(x_n) \geq 0$, então P é não-ramificado em F_{n+1} , ou seja, apenas os pólos de x_n em F_n têm possibilidade de se ramificar em F_{n+1} . Mas, por outro lado, vimos que os lugares de $S_i^{(n)}$ são não-ramificados em F_{n+1} . Logo, pelo item (ii) do lema 4.14, os lugares de F_n que se ramificam em F_{n+1} são exatamente os lugares de $S^{(n)}$, os quais são totalmente ramificados em F_{n+1} . Então, para cada lugar $P \in S^{(n)}$, temos $m = q+1$ (no contexto do item (ii) da proposição 4.2), e o expoente da diferente de $P' \in \mathbb{P}(F_{n+1})$ com $P' | P$ será dado por $d(P' | P) = (q-1)(m+1) = (q-1)(q+2)$. Assim, lembrando que $\deg(P') = \deg(P)$, temos:

$$\begin{aligned} \deg(\text{Diff}(F_{n+1} | F_n)) &= \sum_{P \in S^{(n)}} \sum_{P' | P} (P' | P) \cdot \deg(P') \\ &= \sum_{P \in S^{(n)}} \sum_{P' | P} (q-1) \cdot (q+2) \cdot \deg(P) \\ &= (q-1) \cdot (q+2) \cdot \sum_{P \in S^{(n)}} \sum_{P' | P} \deg(P) \\ &= (q-1) \cdot (q+2) \cdot \deg(D^{(n)}) \\ &= q^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cdot (q+2) \cdot (q-1) . \end{aligned}$$

Então, pela fórmula do gênero de Hurwitz (teorema 3.36), teremos

$$2g_{n+1} - 2 = q(2g_n - 2) + q^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cdot (q+2)(q-1) ,$$

onde g_{n+1} e g_n são os gêneros de F_{n+1} e F_n , respectivamente. ■

Obteremos agora o principal resultado desta seção, que pode ser considerado um dos pilares deste capítulo.

Teorema 4.17.

$$g_n = \begin{cases} q^n + q^{n-1} - q^{\frac{n+1}{2}} - 2q^{\frac{n-1}{2}} + 1 , & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ q^n + q^{n-1} - \frac{1}{2}q^{\frac{n}{2}+1} - \frac{3}{2}q^{\frac{n}{2}} - q^{\frac{n}{2}-1} + 1 , & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} .$$

Demonstração. Procederemos por indução sobre n .

- *Caso $n = 1$:*

Temos:

$$g_1 = q^1 + q^{1-1} - q^{\frac{1+1}{2}} - 2q^{\frac{1-1}{2}} + 1 = 0 .$$

De fato, $F_1 = K(x_1)$ é um corpo de funções racionais, e, portanto, tem gênero 0.

- *Caso $n = 2$:*

Temos:

$$g_2 = q^2 + q^{2-1} - \frac{1}{2}q^{\frac{2}{2}+1} - \frac{3}{2}q^{\frac{2}{2}} - q^{\frac{2}{2}-1} + 1 = \frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{2}q .$$

De fato, usando o lema acima e o fato de que $g_1 = 0$, obtemos $g_2 = \frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{2}q$.

Agora, suponhamos a validade da fórmula para $n \geq 2$.

- Se n é par, então, por hipótese, temos que:

$$g_n = q^n + q^{n-1} - \frac{1}{2}q^{\frac{n}{2}+1} - \frac{3}{2}q^{\frac{n}{2}} - q^{\frac{n}{2}-1} + 1 .$$

Agora, pelo lema 4.16, temos:

$$\begin{aligned} 2g_{n+1} - 2 &= q(2(q^n + q^{n-1} - \frac{1}{2}q^{\frac{n}{2}+1} - \frac{3}{2}q^{\frac{n}{2}} - q^{\frac{n}{2}-1} + 1) - 2) + q^{\frac{n}{2}} \cdot (q^2 + q - 2) \\ &= 2q^{n+1} + 2q^n - q^{\frac{n}{2}+2} - 3q^{\frac{n}{2}+1} - 2q^{\frac{n}{2}} + 2q - 2q + q^{\frac{n}{2}+2} + q^{\frac{n}{2}+1} - 2q^{\frac{n}{2}} \\ &= 2q^{n+1} + 2q^n - 2q^{\frac{n}{2}+1} - 4q^{\frac{n}{2}} , \end{aligned}$$

e, portanto,

$$2g_{n+1} = 2q^{n+1} + 2q^n - 2q^{\frac{n}{2}+1} - 4q^{\frac{n}{2}} + 2 \implies g_{n+1} = q^{n+1} + q^n - q^{\frac{n}{2}+1} - 2q^{\frac{n}{2}} + 1 ,$$

confirmando a validade do teorema para $n+1$ se n é par.

- Consideremos n ímpar. Por hipótese, temos:

$$g_n = q^n + q^{n-1} - q^{\frac{n+1}{2}} - 2q^{\frac{n-1}{2}} + 1 .$$

Pelo lema acima, obtemos:

$$\begin{aligned} 2g_{n+1} - 2 &= q(2(q^n + q^{n-1} - q^{\frac{n+1}{2}} - 2q^{\frac{n-1}{2}} + 1) - 2) + q^{\frac{n-1}{2}}(q+2)(q-1) \\ &= 2q^{n+1} + 2q^n - 2q^{\frac{n+1}{2}+1} - 4q^{\frac{n-1}{2}+1} + 2q - 2q + q^{\frac{n-1}{2}}(q^2 + q - 2) \\ &= 2q^{n+1} + 2q^n - 2q^{\frac{n+3}{2}} - 4q^{\frac{n+1}{2}} + q^{\frac{n+3}{2}} + q^{\frac{n+1}{2}} - 2q^{\frac{n-1}{2}} \\ &= 2q^{n+1} + 2q^n - q^{\frac{n+3}{2}} - 3q^{\frac{n+1}{2}} - 2q^{\frac{n-1}{2}} , \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} 2g_{n+1} &= 2q^{n+1} + 2q^n - q^{\frac{n+3}{2}} - 3q^{\frac{n+1}{2}} - 2q^{\frac{n-1}{2}} + 2 \\ \implies g_{n+1} &= q^{n+1} + q^n - \frac{1}{2}q^{\frac{n+3}{2}} - \frac{3}{2}q^{\frac{n+1}{2}} - q^{\frac{n-1}{2}} + 1 , \end{aligned}$$

o que prova o passo indutivo para o caso em que n é ímpar.

■

4.3 Os Lugares de Grau 1

Nesta seção, apresentaremos uma estimativa para o número de lugares de grau 1 em F_n/K . Para tanto, enunciamos o seguinte resultado:

Proposição 4.18. (A) *Seja $P \in \mathbb{P}(F_1)$ um zero de $x_1 - \alpha$, com $\alpha \in K \setminus \{0\}$. Então P se decompõe totalmente em $F_n \mid F_1$, ou seja, existe exatamente q^{n-1} extensões de P em F_n e todas de grau 1. Além disso, existem $(q^2 - 1) \cdot q^{n-1}$ lugares em F_n originados desta forma.*

(B) *Os lugares $P \in S^{(2)}$ têm grau 1 e são totalmente ramificados em $F_n \mid F_2$. Logo, cada um destes lugares tem uma única extensão em F_n e esta tem grau 1. O total desses lugares em F_n é igual a q .*

(C) *Os q lugares $P \in S_0^{(n)} \cup \{Q_n\}$ são de grau 1.*

Demonstração. (A) Se $P \in \mathbb{P}(F_1)$ é zero de $x_1 - \alpha$, então P também é zero de $x_1^{q+1} - \alpha^{q+1}$. Como $\alpha \in K$, temos $\alpha^{q+1} \in \mathbb{F}_q$, e pelo item (iv) da proposição 4.2, a equação $\lambda^q + \lambda = \alpha^{q+1}$ tem q raízes distintas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q \in K \setminus \{0\}$, e, para cada λ_i ($1 \leq i \leq q$), existe um único lugar $Q_{\lambda_i} \in \mathbb{P}(F_2)$ tal que $Q_{\lambda_i} \mid P$, Q_{λ_i} é zero de $z_2 - \lambda_i$, e Q_{λ_i} tem grau 1. Em outras palavras, o lugar $P \in \mathbb{P}(F_1)$ irá se decompor em q outros lugares de grau 1 em F_2 .

Mostraremos agora que ocorre o mesmo com cada uma destas extensões em F_2 , isto é, cada uma delas também vai se decompor em q outros lugares de grau 1 em F_3 . De

fato, tomemos $Q_\lambda \in \mathbb{P}(F_2)$ zero de $z_2 - \lambda$; como $\alpha \in K \setminus \{0\}$, teremos que Q_λ é zero de $x_2 - \frac{\lambda}{\alpha}$, pois

$$x_2 = \frac{z_2}{x_1} \implies x_2 - \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{(z_2 - \lambda) - \frac{\lambda}{\alpha} \cdot (x_1 - \alpha)}{x_1}.$$

Como $Q_\lambda \mid P$ e $v_P(x_1 - \alpha) > 0$, temos $v_{Q_\lambda}(x_1 - \alpha) > 0$, e, portanto,

$$v_{Q_\lambda}\left(x_2 - \frac{\lambda}{\alpha}\right) = v_{Q_\lambda}\left((z_2 - \lambda) - \frac{\lambda}{\alpha} \cdot (x_1 - \alpha)\right) \geq \min\left\{v_{Q_\lambda}(z_2 - \lambda), v_{Q_\lambda}(x_1 - \alpha)\right\} > 0,$$

pois $Q_\lambda \mid P$ e $v_P(x_1 - \alpha) > 0$.

Logo Q_λ é zero de $x_2^{q+1} - (\frac{\lambda}{\alpha})^{q+1}$, com $(\frac{\lambda}{\alpha})^{q+1} \in \mathbb{F}_q$. Utilizando o mesmo argumento usado para $P \in \mathbb{P}(F_1)$ zero de $x_1^{q+1} - \alpha^{q+1}$, concluimos que Q_λ se decompõe em q outros lugares de grau 1 em F_3 .

Observamos que o mesmo procedimento adotado com Q_λ pode ser repetido com todos os outros de F_2 , e mais ainda, com todas as extensões destes lugares em qualquer ponto da torre.

Portanto, acima de cada lugar de F_1 , zero de $x_1 - \alpha$, $\alpha \in K \setminus \{0\}$, temos exatamente q^{n-1} lugares em F_n do tipo descrito, totalizando $(q^2 - 1) \cdot q^{n-1}$.

(B) Lembrando que

$$S_0^{(2)} = \{P \in \mathbb{P}(F_2) : P \cap F_1 = Q_1 \text{ e } P \neq Q_2\}$$

e

$$S^{(2)} = \{P \in \mathbb{P}(F_2) : P \in S_0^{(2)} \text{ ou } P \cap F_1 = P_\infty\},$$

observamos que $S^{(2)}$ tem q lugares e todos são de grau 1. Já sabemos também, pelo item (ii) do lema 4.14, que os lugares de $S^{(2)}$ são totalmente ramificados em F_n . Logo, o índice de ramificação de cada um deles é $[F_n : F_2] = q^{n-2}$, e como $\sum e_i f_i = [F_n : F_2]$, temos que o grau relativo de cada um deles é 1, o que garante, uma vez que K é algebricamente fechado em F_n , que todas as extensões também têm grau 1 (vide figura abaixo).

(C) Como $S_0^{(n)} \cup \{Q_n\}$ são as q ramificações de Q_{n-1} em F_n , segue que estas possuem grau 1. ■

Temos uma estimativa muito boa para a quantidade de lugares de grau 1 em F_n/K , pois, apesar de não termos calculado efetivamente o número de lugares, veremos na seção seguinte que tal estimativa é suficiente para atingirmos a cota desejada.

Proposição 4.19. *Seja N_n o número de lugares de grau 1 em F_n/K . Para $n \geq 3$, temos*

$$N_n \geq (q^2 - 1)q^{n-1} + 2q .$$

Demonstração. É imediata, uma vez que temos $(q^2 - 1)q^{n-1}$ lugares do tipo (A), q lugares do tipo (B) e q lugares do tipo (C). ■

4.4 Atingindo a Cota de Drinfeld-Vladut

Agora, usando os dois pilares deste capítulo, podemos, finalmente, calcular o tão esperado limite e ver a cota de Drinfeld-Vladut ser atingida.

Teorema 4.20.

$$A(q^2) = q - 1 .$$

Demonstração. De fato, vamos mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{g_n} = q - 1 .$$

Usando o teorema 4.17 e a proposição 4.19, temos:

- Para n ímpar:

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{g_n} &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^{n+1} - q^{n-1} + 2q}{q^n + q^{n-1} - q^{\frac{n+1}{2}} - 2q^{\frac{n-1}{2}} + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^2 - 1 + \frac{2}{q^{n-2}}}{q + 1 - \frac{1}{q^{\frac{n-3}{2}}} - \frac{2}{q^{\frac{n-1}{2}}} + \frac{1}{q^{n-1}}} \\ &= \frac{q^2 - 1}{q + 1} = q - 1 . \end{aligned}$$

- Para n par:

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{g_n} &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^{n+1} - q^{n-1} + 2q}{q^n + q^{n-1} - \frac{1}{2}q^{\frac{n}{2}+1} - \frac{3}{2}q^{\frac{n}{2}} - q^{\frac{n}{2}-1} + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^2 - 1 - \frac{2}{q^{n-2}}}{q + 1 - \frac{1}{2}q^{\frac{n}{2}-2} - \frac{3}{2}q^{\frac{n}{2}-2} - \frac{1}{q^{\frac{n}{2}}} + \frac{1}{q^{n-1}}} \\ &= \frac{q^2 - 1}{q + 1} = q - 1 . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{g_n} \geq q - 1 .$$

Mas, pela cota de Drinfeld-Vladut, temos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{g_n} \leq A(q^2) \leq q - 1 ,$$

ou seja,

$$q - 1 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{g_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{g_n} \leq q - 1 .$$

Logo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{g_n} = q - 1 ,$$

e, conseqüentemente, $A(q^2) = q - 1$. ■

4.5 O Valor Preciso de N_n

Acabamos de explicitar uma torre F_n de corpos de funções sobre $\mathbb{F}_{q^2}$ que atinge a cota de Drinfeld-Vladut. Veremos agora que é possível calcular efetivamente a quantidade N_n de lugares de grau 1 em F_n .

Para este cálculo, precisamos essencialmente do teorema 3.29 (de Kummer) e de alguns refinamentos nas demonstrações dos lemas 4.12 e 4.13. Nas demonstrações desta seção, evitaremos repetir justificativas de passagens feitas anteriormente.

Primeiramente, observamos que todos os lugares de grau 1 em F_n são necessariamente extensões de lugares de grau 1 do corpo de funções racionais $F_1 = K(x_1)$. Em outras palavras, os lugares de grau 1 de F_n são extensões de lugares de F_1 que estão associados aos elementos do conjunto $K \cup \{\infty\}$.

Portanto, levando em conta a estimativa que fizemos na seção 4.3, concluímos que só nos resta analisar os lugares $P \in S_i^{(n)}$, $1 \leq i \leq [\frac{n-3}{2}]$, com $n \geq 5$.

Para tanto, voltaremos à demonstração da proposição 4.11, onde temos que, se $P \in S_i^{(n)}$, $0 \leq i \leq [\frac{n-3}{2}]$, então:

$$x_n^{q+1} = \wp(x_{n-2i-2}^{-(q+1)}) + \mathcal{O}(1) \text{ em } P .$$

Observaremos que, se escrevermos

$$x_n^{q+1} = \wp(x_{n-2i-2}^{-(q+1)}) + \lambda + v ,$$

com $\lambda \in K$ e $v_P(z) > 0$, então o comportamento de P na extensão $F_{n+1} | F_n$ dependerá de λ no seguinte sentido:

Proposição 4.21. *Um lugar de grau 1 $P \in S_i^{(n)}$ decompõe-se em q outros lugares de grau 1 de F_{n+1} se, e somente se, $\lambda \in \mathbb{F}_q$.*

Demonstração. Fixado i , tomemos $u := x_{n-2i-2}^{-(q+1)}$ em F_n . Temos então:

$$\begin{aligned} x_n^{q+1} = u^q + u + \lambda + v &\implies z_{n+1}^q + z_{n+1} = u^q + u + \lambda + v \\ &\implies (z_{n+1} - u)^q + (z_{n+1} - u) = \lambda + v . \end{aligned}$$

Ao fazermos $\bar{z}_{n+1} := z_{n+1} - u$, temos que $F_{n+1} = F_n(\bar{z}_{n+1})$ e que $\varphi(T) = T^q + T - \lambda - v$ é o polinômio minimal de $\bar{z}_{n+1}$ sobre F_n .

Assim, usando os resultados, bem como a notação, do teorema 3.29 (de Kummer), temos que $\bar{z}_{n+1}$ é inteiro sobre O_P e que $\bar{\varphi}(T) = T^q + T - \bar{\lambda}$. Então, pelo teorema de Kummer, o lugar P decompõe-se em q outros lugares de grau 1 se, e somente se, o polinômio $T^q + T - \lambda$ fatora-se linearmente em $O_P[T]$, e é fácil ver que isto ocorre se, e somente se, $\lambda \in \mathbb{F}_q$. De fato:

- o Se $\lambda \in \mathbb{F}_q$, e $\omega \in \bar{\mathbb{F}}_q$ é tal que $\omega^q + \omega = \lambda$, então:

$$(\omega^q + \omega)^q = \lambda^q \iff \omega^{q^2} + \omega^q = \lambda \iff \omega^{q^2} = \omega \iff \omega \in K .$$

Portanto, o polinômio $T^q + T - \lambda$ tem todas as raízes em K .

- o Se $\lambda \notin \mathbb{F}_q$, isto é, se $\lambda \in K \setminus \mathbb{F}_q$, então, obviamente, $T^q + T - \lambda$ não tem raízes em K e, conseqüentemente, não tem raízes em O_P , pois K é algebricamente fechado em $\mathbb{F}_n$. Logo, nenhuma extensão de P tem grau 1.

■

As seguintes afirmações serão utilizados no decorrer de nossos cálculos:

AFIRMAÇÃO 1: Na notação do lema 4.12 (II), temos que

$$x_k^{-(q+1)} = \wp(x_{k-1}^{-(q+1)}) + s ,$$

onde $v_P(s) \geq 0$. Afirmamos que, na verdade, temos $v_P(s) > 0$.

Demonstração. Basta refinar um pouco a demonstração do lema 4.12 (II), a qual nos remete às demonstrações das propriedades P_6 e P_7 (seção 3.8).

Inicialmente, temos que:

$$x_k = x_{k-1}^q \cdot (1 - y^{q-1} + y^{q^2-1} \cdot r) ,$$

onde $v_P(r) \geq 0$. Mas, como $v_P(y) > 0$, podemos escrever

$$y^{q^2-1} \cdot r = y^q \cdot y^{q^2-q-1} \cdot r = y^q \cdot t ,$$

com $v_P(t) > 0$. Agora, pela demonstração de P_6 , temos

$$(1 - y^{q-1} + y^q \cdot t)^{-1} = 1 + y^{q-1} + y^q \cdot t' ,$$

onde

$$t' = \frac{y^{q-2} - ty^{q-1} - t}{1 - y^{q-1} + y^q \cdot t} ,$$

e, na demonstração de P_7 , vemos que

$$s = t' + y^{q^2-2q} + y^{q^2-q} \cdot t'^q + (y^{q^2-2q} + y^{q^2-q} \cdot t'^q)(y^{q-1} + y^q \cdot t') .$$

Como $v_P(y) > 0$ e $v_P(t) > 0$, segue imediatamente que $v_P(s) > 0$ para $q > 2$.

Agora, caso tenhamos $q = 2$, teremos

$$t' = \frac{1 + ty + t}{1 + y + y^2t}$$

e

$$s = t' + 1 + y^2t'^2 + (1 + y^2t'^2)(y + y^2t') .$$

Mas, apesar de termos $v_P(t') = 0$, é fácil ver que $v_P(t' + 1) > 0$, pois

$$t' + 1 = \frac{y^2t + ty + y + t}{1 + y + y^2t} ,$$

e, conseqüentemente, temos $v_P(s) > 0$. ■

AFIRMAÇÃO 2: Usando a notação do lema 4.12 (I), temos, para $n \geq 4$, que

$$x_{n-2} = x_{n-3}^q \cdot (1 + x_{n-3}^{q^2-1} \cdot t) ,$$

onde $v_P(t) \geq 0$, e $P \in \mathbb{P}(F_n)$ é tal que $P \mid Q_{n-2}$. Se $q = 2$, afirmamos que, necessariamente, temos $t + 1 \in P$.

Demonstração. Pela demonstração do lema 4.12, temos que

$$t = \left(\frac{z_{n-2}}{x_{n-3}^{q+1}} \right)^q .$$

Sendo $q = 2$, temos :

$$\begin{aligned} t = \left(\frac{z_{n-2}}{x_{n-3}^3} \right)^2 &\implies t + 1 = \left(\frac{z_{n-2}}{x_{n-3}^3} + 1 \right)^2 \\ &\implies t + 1 = \left(\frac{z_{n-2} + x_{n-3}^3}{x_{n-3}^3} \right)^2 . \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$z_{n-2}^2 + z_{n-2} = x_{n-3}^3 \implies z_{n-2} + x_{n-3}^3 = z_{n-2}^2 .$$

Logo,

$$t + 1 = \left(\frac{z_{n-2}^2}{x_{n-3}^3} \right)^2 = z_{n-2}^2 \cdot t ,$$

e, como $v_P(z_{n-2}) > 0$, temos $v_P(t + 1) > 0 \implies t + 1 \in P$. ■

Proposição 4.22. *Se q é ímpar e $n \geq 3$, temos $N_n = (q^2 - 1) \cdot q^{n-1} + 2q$.*

Demonstração. Tomando $P = Q_\alpha \in S_0^{(n)}$ (ou seja, P é zero comum de $x_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ e $z_n - \alpha$, onde $\alpha^q + \alpha = 0$ e $\alpha \in K \setminus \{0\}$), temos, pela demonstração do lema 4.13, caso $i = 0$ (em *), que

$$x_n^{q+1} = \frac{\alpha^{q+1}}{x_{n-1}^{q+1}} + \alpha^q + z ,$$

onde $v_P(z) > 0$, e assim, pela demonstração da proposição 4.11 (a qual nos remete ao lema 4.12(II)), temos

$$(1) \quad \boxed{x_n^{q+1} = \wp(\gamma \cdot x_{n-2}^{-(q+1)}) + \alpha^q + z'} ,$$

com $\gamma \in \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$ e $v_P(z') > 0$ (tal desigualdade estrita se justifica pela afirmação 1). Usando a notação da proposição 4.21, concluímos assim que $\lambda = \alpha^q$.

Mas, como $\alpha^q + \alpha = 0$ e $\alpha \in K \setminus \{0\}$, temos

$$\alpha^q \in \mathbb{F}_q \iff \alpha^{q^2} = \alpha^q \iff \alpha = \alpha^q \iff 2\alpha = 0 \iff K \text{ tem característica } 2 .$$

Portanto, se q é ímpar, pela proposição 4.21, nenhuma extensão dos lugares de $S_0^{(n)}$ tem grau 1, e, conseqüentemente, nenhum lugar de F_n , que é extensão de lugares de $S_0^{(m)}$, com $3 \leq m \leq n-1$, possui grau 1. Assim, aquela desigualdade que ocorre na estimativa da seção 4.3, é precisamente uma igualdade, ou seja, $N_n = (q^2 - 1)q^{n-1} + 2q$. ■

Veremos agora o caso $q \equiv 0 \pmod{2}$. Neste caso, se $P \in S_0^{(n-1)}$, com $n \geq 4$, pelo que foi demonstrado acima, temos por (1) que

$$(2) \quad \boxed{x_{n-1}^{q+1} = \wp(\gamma \cdot x_{n-3}^{-(q+1)}) + \alpha^q + z} ,$$

onde $v_P(z) > 0$, ou seja, P decompõe-se em q outros lugares de grau 1, que irão compor o $S_1^{(n)}$. Nos resta, agora, analisar o que ocorre, em termos de grau, com as extensões dos lugares de $S_1^{(n)}$.

Proposição 4.23. *Suponha $\text{car}(K) = 2$. A constante $\lambda' \in K$, que ocorre nas extensões dos lugares de $S_1^{(n)}$ (conforme a proposição 4.21), satisfaz:*

$$(*) \quad \lambda' = \begin{cases} \beta , & \text{se } q > 2 \\ \beta + 1 , & \text{se } q = 2 \end{cases} ,$$

onde $\beta^q + \beta = \alpha^q$. Logo, $\lambda' \notin \mathbb{F}_q$, e nenhum destes lugares se decompõe em q outros de grau 1.

Demonstração. Como $\alpha^q + \alpha = 0$ e $\alpha \in K \setminus \{0\}$, e assumindo (*), temos:

$$\lambda' \in \mathbb{F}_q \iff (\lambda')^q = \lambda' \iff \beta^q = \beta \iff \alpha = 0 .$$

Logo, $\lambda' \notin \mathbb{F}_q$, ou seja, se $\text{car}(K) = 2$, então (pela proposição 4.21) os lugares de $S_1^{(n)}$ não terão extensões de grau 1 em F_{n+1} .

Agora, provaremos (*). Já vimos anteriormente que, se $P \in S_0^{(n-1)}$, $n \geq 4$, temos:

$$x_{n-1}^{q+1} = \wp(\gamma \cdot x_{n-3}^{(n-1)}) + \alpha^q + z ,$$

com $v_P(z) > 0$. Como $\wp(z_n) = x_{n-1}^{q+1}$, temos:

$$\wp(z_n) = \wp(\gamma \cdot x_{n-3}^{-(q+1)}) + \alpha^q + z \implies \wp(z_n - \gamma \cdot x_{n-3}^{-(q+1)}) = \alpha^q + z ,$$

com $v_P(z) > 0$. Veremos agora o que ocorre com os lugares P' que formam o $S_1^{(n)}$, isto é, são extensões dos lugares $P \in S_0^{(n-1)}$.

Observação: Doravante, por conveniência, denotaremos qualquer elemento de F_n que está em P' por z' .

Tomemos $P' \in S_1^{(n)}$ tal que $P' \mid P$. O teorema 3.29(a) ($\varphi_i(y) \in P_i$) nos garante que existe $\beta \in K$, com $\beta^q + \beta = \alpha^q$, tal que:

$$z_n - \gamma \cdot x_{n-3}^{-(q+1)} - \beta \in P' ,$$

isto é,

$$\boxed{z_n = \gamma \cdot x_{n-3}^{-(q+1)} + \beta + z' .}$$

Observe que, como $P' \in S_1^{(n)}$, estamos no caso $i = 1$ da demonstração do lema 4.13, mais precisamente em (2) da demonstração de tal lema.

Lembrando que $x_n^{q+1} = A^{q+1} \cdot B^{-1}$, onde $A := z_n \cdot x_{n-2}$ e $B := x_{n-1}^{q+1} \cdot x_{n-2}^{q+1}$, faremos um refinamento (modificação) de A^{q+1} e B^{-1} em relação ao que foi apresentado no lema 4.13.

- *Refinando A^{q+1} :*

Pelo item (I) do lema 4.12, temos que

$$x_{n-2} = x_{n-3}^q \cdot (1 + x_{n-3}^{q^2-1} \cdot t) ,$$

onde $v_{P'}(t) \geq 0$. Então:

$$\begin{aligned} A &= z_n \cdot x_{n-2} \\ &= (\gamma \cdot x_{n-3}^{-(q+1)} + \beta + z') \cdot x_{n-3}^q \cdot (1 + x_{n-3}^{q^2-1} \cdot t) \\ &= (\gamma \cdot x_{n-3}^{-1} + (\beta + z') \cdot x_{n-3}^q) \cdot (1 + x_{n-3}^{q^2-1} \cdot t) \\ &= \gamma \cdot x_{n-3}^{-1} + (\beta + z') \cdot x_{n-3}^q + \gamma \cdot t \cdot x_{n-3}^{q^2-2} + t \cdot (\beta + z') \cdot x_{n-3}^{q^2+q-1} \\ &= \gamma \cdot x_{n-3}^{-1} + x_{n-3}^q \cdot (\beta + z' + \gamma \cdot t \cdot x_{n-3}^{q^2-q-2} + t \cdot (\beta + z') \cdot x_{n-3}^{q^2-1}) . \end{aligned}$$

Portanto:

$$A = \gamma \cdot x_{n-3}^{-1} + x_{n-3}^q \cdot (\lambda' + z') ,$$

onde

$$(*) \quad \lambda' = \begin{cases} \beta & \text{se } q > 2 \\ \beta + 1 & \text{se } q = 2 \text{ (este caso segue da afirmação 2)} \end{cases}.$$

Logo:

$$\begin{aligned} A^{q+1} &= (\gamma^q \cdot x_{n-3}^{-q} + x_{n-3}^{q^2} \cdot (\lambda' + z')^q) \cdot (\gamma \cdot x_{n-3}^{-1} + x_{n-3}^q \cdot (\lambda' + z')) \\ &= \gamma^{q+1} \cdot x_{n-3}^{-(q+1)} + \gamma^q \cdot (\lambda' + z') + \underbrace{(\lambda' + z')^q \cdot x_{n-3}^{q^2} \cdot (\gamma \cdot x_{n-3}^{-1} + x_{n-3}^q \cdot (\lambda' + z'))}_{\in P'} \\ &= \gamma^2 \cdot x_{n-3}^{-(q+1)} + \gamma^q \cdot \lambda' + z'. \end{aligned}$$

• *Refinando B^{-1} :*

Sabemos que $B^{-1} = \gamma^{-1} + x_{n-2}^{q+1} \cdot s$, onde $v_{P'}(s) \geq 0$. Mas, na demonstração do lema 4.13 em (4), temos que $x_{n-2} = t \cdot x_{n-3}$, onde $v_{P'}(t) > 0$. Logo, $B^{-1} = \gamma^{-1} + x_{n-3}^{q+1} \cdot z'$. Finalmente, temos:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{q+1} &= A^{q+1} \cdot B^{-1} \\ &= (\gamma^2 \cdot x_{n-3}^{-(q+1)} + \gamma^q \cdot \lambda' + z')(\gamma^{-1} + x_{n-3}^{q+1} \cdot z') \\ &= \gamma \cdot x_{n-3}^{-(q+1)} + \gamma^{q-1} \cdot \lambda' + z' \cdot \underbrace{\gamma^{-1} + \gamma^2 \cdot z' + (\gamma^q \cdot \lambda' + z') \cdot z' \cdot x_{n-3}^{q+1}}_{\in P'} \\ &= \gamma \cdot x_{n-3}^{-(q+1)} + \lambda' + z'. \end{aligned}$$

Agora, pela afirmação 1, temos:

$$x_{n-3}^{-(q+1)} = \wp(x_{n-4}^{-(q+1)}) + z',$$

e, portanto,

$$x_{n+1}^{q+1} = \wp(\gamma \cdot x_{n-4}^{-(q+1)}) + \lambda' + z',$$

onde

$$\lambda' = \begin{cases} \beta & \text{se } q > 2 \\ \beta + 1 & \text{se } q = 2 \end{cases},$$

com $\beta^q + \beta = \alpha^q$.

■

Corolário 4.24. O número N_n de lugares de grau 1 em F_n é dado por $N_1 = q^2 + 1$ e $N_2 = q^3 + 1$ (que é, naturalmente, o número de pontos K -racionais da curva hermitiana; ver [4]). Além disso, conforme a paridade de q , temos ainda que:

(I) q ímpar:

$$N_n = (q^2 - 1) \cdot q^{n-1} + 2q \text{ para } n \geq 3 \text{ (que é a cota obtida anteriormente)} ;$$

(II) q par:

$$(i) N_3 = (q^2 - 1) \cdot q^2 + 2q;$$

$$(ii) N_4 = (q^2 - 1) \cdot q^3 + q^2 + q;$$

$$(iii) N_n = (q^2 - 1) \cdot q^{n-1} + 2q^2 \text{ para } n \geq 5.$$

Demonstração.

(I) q ímpar:

Segue da proposição 4.22.

(II) q par:

(i) $N_3 = (q^2 - 1) \cdot q^2 + 2q$, pois, quando $n = 3$, nada muda em relação ao caso q ímpar;

(ii) $N_4 = (q^2 - 1) \cdot q^3 + q^2 + q$, pois, comparado ao caso q ímpar, N_4 recebeu mais $q \cdot (q - 1)$ lugares de grau 1, que são extensões dos lugares de $S_0^{(3)}$;

(iii) para $n \geq 5$, teremos que $N_n = (q^2 - 1) \cdot q^{n-1} + 2q^2$, pois, comparado ao caso $q \equiv 1 \pmod{2}$, teremos um aumento de lugares que são extensões dos lugares de $S_0^{(n-1)}$ e $S_0^{(3)}$, isto é, teremos um aumento de $q \cdot (q - 1) + q \cdot (q - 1) = 2q^2 - 2q$ lugares de grau 1 em relação ao caso q ímpar.

■

Apêndice: Códigos Lineares

Definição 1. Um **código linear** C sobre um alfabeto $\mathbb{F}_q$ (corpo finito de q elementos) é um subespaço vetorial de $\mathbb{F}_q^n$. Se k é a dimensão de C sobre $\mathbb{F}_q$, dizemos que C é um código $[n; k]$.

Definição 2. (i) Se $a = (a_1, \dots, a_n)$ e $b = (b_1, \dots, b_n)$ são elementos de $\mathbb{F}_q^n$, definimos a função

$$d(a, b) := \#\{i : a_i \neq b_i\} ,$$

denominada **métrica de Hamming** em $\mathbb{F}_q^n$.

(ii) O **peso** de um elemento $a \in \mathbb{F}_q^n$ é definido por

$$\omega(a) := \#\{i : a_i \neq 0\} .$$

(iii) A **distância mínima** de um código C é dada por:

$$d(C) := \min\{\omega(a) : 0 \neq a \in C\} .$$

Um código $[n; k]$ com distância mínima d é dito um código $[n; k; d]$.

A distância mínima d de um código C está diretamente ligada à performance do código no que diz respeito à detecção e correção de erros. Neste sentido, temos o seguinte resultado:

Teorema 3. (ver [7]) Seja C um código linear de distância mínima d . Então C pode corrigir até $\varepsilon = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ erros, e detectar até $d - 1$ erros.

Em virtude do teorema acima, vemos que um código terá maior capacidade de correção de erros quanto maior for a sua distância mínima. Portanto, é fundamental para a teoria de códigos poder calcular d , ou pelo menos determinar uma cota mínima para ele.

Se C é um código $[n, k, d]$, dizemos que n , k e d são os parâmetros fundamentais de C .

Para a teoria, os códigos interessantes são aqueles que apresentam valores de k e d “grandes” em relação a n . No entanto, dados três inteiros positivos n , k e d , nem sempre existe um código C que tenha tais parâmetros, pois há uma interdependência complexa entre estes três números, e um dos problemas fundamentais da teoria de códigos é o de estudá-la.

Um exemplo simples desta interdependência é conhecido como “cota de Singleton”, que estabelece, em um código $[n; k; d]$ qualquer, a seguinte desigualdade:

$$k + d \leq n + 1 .$$

A demonstração segue de conceitos básicos de Álgebra Linear, e pode ser vista em [11] (página 41).

Em 1975, Goppa observou que seria possível utilizar corpos de funções algébricas sobre $\mathbb{F}_q$ para a construção de códigos. As propriedades destes códigos estão estreitamente relacionadas com as propriedades do corpo de funções correspondente. Nesta construção, o teorema de Riemann-Roch fornece estimativas (muito boas em alguns casos) para os parâmetros fundamentais.

Como ilustração, apresentamos a seguir a associação de um código feita a partir de um corpo de funções algébricas. Tal código é chamado de **código geométrico de Goppa**.

Inicialmente, fixaremos algumas notações a serem usadas nesta construção:

- $F/\mathbb{F}_q$ é um corpo de funções algébricas de gênero g ;
- $P_1, \dots, P_n$ são lugares dois a dois distintos de $F/\mathbb{F}_q$ de grau 1;
- $D = P_1 + P_2 + \dots + P_n$;
- G é um divisor de $F/\mathbb{F}_q$ tal que $\text{supp}(G) \cap \text{supp}(D) = \emptyset$.

Definição 4. O código geométrico de Goppa $C_{\mathcal{L}}(D, G)$ associado aos divisores D e G é definido por:

$$C_{\mathcal{L}}(D, G) := \{(x(P_1), \dots, x(P_n)) : x \in \mathcal{L}(G)\} \subseteq \mathbb{F}_q^n .$$

Vemos que esta definição, de fato, faz sentido, pois, como $x \in \mathcal{L}(G)$ e $\text{supp}(G) \cap \text{supp}(D) = \emptyset$, temos que $v_{P_i}(x) \geq 0$, e, como $\deg(P_i) = 1$, temos que $x(P_i) \in \mathbb{F}_q$.

Considerando a função $f : \mathcal{L}(G) \longrightarrow \mathbb{F}_q^n$, dada por

$$f(x) := (x(P_1), \dots, x(P_n)) \in \mathbb{F}_q^n ,$$

temos que f é $\mathbb{F}_q$ -linear, e que $C_{\mathcal{L}}(D, G)$ é a imagem de $\mathcal{L}(G)$ por f , portanto, um subespaço vetorial de $\mathbb{F}_q^n$. Os resultados a seguir podem ser vistos em [11] (página 100).

Teorema 5. $C_{\mathcal{L}}(D, G)$ é um código $[n, k, d]$ com parâmetros $k = \dim(G) - \dim(G - D)$ e $d \geq n - \deg(G)$.

Corolário 6. Se $\deg(G) < n$, então a função $f : \mathcal{L}(G) \longrightarrow C_{\mathcal{L}}(D, G)$ é injetora, e temos que $C_{\mathcal{L}}(D, G)$ é um código $[n; k; d]$, com $d \geq n - \deg(G)$ e $k = \dim(G) \geq \deg(G) + 1 - g$. Portanto, $n + 1 - g \leq k + d \leq n + 1$.

Sendo C um código $[n; k; d]$, definimos a **taxa de correção de erros** e a **taxa de informação** de C pelos números

$$\delta(C) := \frac{d}{n} \quad \text{e} \quad R(C) := \frac{k}{n},$$

respectivamente.

Definição 7. Diremos que uma família de códigos sobre $\mathbb{F}_q$ é **assintoticamente boa** se contiver uma sequência de códigos C_i com parâmetros $[n_i; k_i; d_i]$ para $i \in \mathbb{N}$, com $\lim_{i \rightarrow \infty} n_i = \infty$, e tal que os limites

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \delta(C_i) \quad \text{e} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} R(C_i)$$

existem e são positivos.

Definiremos ainda os seguintes conjuntos:

$$V_q := \{(\delta(C); R(C)) \in [0, 1]^2 : C \text{ é um código sobre } \mathbb{F}_q\},$$

e $U_q \subseteq [0, 1]^2$ como sendo o conjunto dos pontos limites de V_q , ou seja,

$$U_q := \left\{ (x, y) \in [0, 1]^2 : \begin{array}{l} \text{existe uma sequência de códigos } C_i \text{ sobre} \\ \mathbb{F}_q \text{ tal que } \lim_{i \rightarrow \infty} (\delta(C_i), R(C_i)) = (x, y) \end{array} \right\}.$$

Uma proposição devida a Manin [11] (página 205), afirma que existe uma função contínua $\alpha_q : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$U_q = \{(\delta, R) : 0 \leq \delta \leq 1 \text{ e } 0 \leq R \leq \alpha_q(\delta)\},$$

e ainda $\alpha_q(0) = 1$, $\alpha_q(\delta) = 0$ para $1 - \frac{1}{q} \leq \delta \leq 1$, e α_q é decrescente no intervalo $0 \leq \delta \leq 1 - \frac{1}{q}$ (vide figura I a seguir).

Figura I: Interpretação geométrica de α_q .

Ao escolhermos $\delta \in]0; 1 - \frac{1}{q}[$, e em seguida $R \in]0; \alpha_q(\delta)[$, o resultado de Manin afirma

que (δ, R) é ponto limite de uma seqüência de códigos assintoticamente boa sobre $\mathbb{F}_q$.

O fato de conhecermos muito pouco sobre a função α_q nos traz o seguinte problema: imaginemos que, dado $\delta \in]0, 1 - \frac{1}{q}[$, queiramos tomar $R \in [0, 1]$ tal que $0 < R \leq \alpha_q(\delta)$; isto, *a priori* não é fácil, caso não tenhamos pelo menos uma cota inferior razoável para $\alpha_q(\delta)$. Daí, surge a idéia de nos valermos de funções simples para estimar $\alpha_q(\delta)$. Nesta direção, se apresenta a cota de **Gilbert-Varshamov**, que afirma que, para $\delta \in [0, 1 - \frac{1}{q}]$, temos:

$$\alpha_q(\delta) \geq 1 - H_q(\delta) ,$$

onde

$$H_q(x) = \begin{cases} 0 , & \text{se } x = 0 \\ \log \frac{(q-1)}{x^{1-x} \cdot (1-x)^{1-x}} , & \text{se } 0 < x < 1 - \frac{1}{q} \end{cases} .$$

Durante três décadas, pensou-se que $\alpha_q(\delta) = 1 - H_q(\delta)$.

Com a construção dos códigos geométricos de Goppa (o código $C_L(D, G)$ apresentado como ilustração) é possível mostrar (vide [11], página 207) que, se $A(q) > 1$, então $\alpha_q(\delta) \geq (1 - A(q)^{-1}) - \delta$ no intervalo $0 \leq \delta \leq 1 - A(q)^{-1}$.

Por outro lado, sabemos que, se q é um quadrado, então $A(q) = \sqrt{q} - 1$, e conseqüentemente

$$\alpha_q(\delta) \geq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{q} - 1}\right) - \delta \text{ para } 0 \leq \delta \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{q} - 1} .$$

Esta cota é chamada de **cota de Tsfasman-Vladut-Zink**, e o mais interessante desta cota é que, para $q \geq 49$, ela é melhor que a cota de Gilbert-Varshamov, num certo intervalo (ver figura II abaixo).

Figura II: Comparação entre as cotas de Gilbert-Varshamov e de Tsfasman-Vladut-Zink para $q = 64$.

Referências Bibliográficas

- [1] Bombiere, E., *Hilbert's 8th problem an analogue in mathematical developments arising from Hilbert's problems*, F.Brouder, Ed. Proc. Sym. Pure Math., vol.28, AMS, 1976, 269-274.
- [2] Drinfeld, V. G., Vladut, S. G., *Sobre o número de pontos de uma curva algébrica* (em russo), Func. Anal. and Appl. **17**, (1983), 68-69.
- [3] Garcia, A., Stichtenoth, H., *A tower of Artin-Schreier extensions of functions fields attaining the Drinfeld-Vladut bound*, Invent. Math. **121**, (1995), 211-222 .
- [4] Garcia, A., *Pontos Racionais em Curvas Sobre Corpos Finitos*, 20° Colóquio Brasileiro de Matemática, 1995.
- [5] Goppa, V. D., *Algebraico-Geometric codes*, Math. U.S.S.R., Izvestya **21**, (1983), 75-91.
- [6] Goppa, V. D., *Codes and algebraic curves*, Math. U.S.S.R., Izvestya **21**, (1983), 75-91.
- [7] Hefez, A. , Vilella, M. L., *Códigos corretores de erros*, IMPA, 2002.
- [8] Ihara, Y., *Some remarks on the number of rational points of algebraic curves over finite fields*, J. Fac. Sci. Tokyo, **28**, (1981), 721-724.
- [9] Schoof, R., *Algebraic curves over F_2 with many rational points*, J. of Number Th., **41**, (1992), 6-14 .
- [10] Serre, J.-P., *Sur le nombre des points rationels d'une courbe algébrique sur un corps fini*. C., R. Acad. Sci. Paris, **296**, (1983), 397-402.
- [11] Stichtenoth, H., *Algebraic Function Fields and Codes*, Springer Universitext, 1993.
- [12] Tsfasman, M. A., Vladut, S. G., Zink, T., *Modular Curves, Shimura Curves and Goppa Codes, Better than Varshamov-Gilbert Bound*, Math. Nachr., **109**, (1982), 21-28.
- [13] Weil, A., *Courbes Algébriques et Variétés Abeliennes*, Hermann, Paris, 1971.
- [14] Xing, C. P., *Multiple Kummer extensions of prime divisors of degree one in function fields*, J. of Pure and Appl. Algebra, **84**, (1993), 85-93.