Localização e Categorias Derivadas

Hernán Alonso Giraldo Salazar

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA DA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: Álgebra
Orientador: Prof. Dr. Héctor A. M. Goldschmidt

Durante a elaboração deste trabalho, o autor recebeu apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq.

— São Paulo, novembro de 2002 —

Localização e Categorias Derivadas

Hernán Alonso Giraldo Salazar

Este exemplar corresponde à
redação final da tese, devidamente
corrigida, defendida por Hernán
Alonso Giraldo Salazar e aprovada
pela comissão julgadora.

São Paulo, 18 de novembro de 2002.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Héctor A. M. Goldschmidt (orientador) — IME-USP
- Prof. Dr. Eduardo Nascimento Marcos — IME-USP
- Prof. Dr. Viktor Bekkert — UFMG
- Prof. Dr. Norai Romeu Rocco — UnB
- Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti — UNICAMP

*Dedicado a -
Minha mãe, pai e irmã
- meu passado, presente e futuro*

Resumo

Nossos objetivos com o presente trabalho serão, em primeiro lugar, mostrar uma relação entre a localização da categoria de módulos sobre um anel R , $(\underline{S}^{-1}(Mod-R))$, e a categoria dos módulos localizados, $Mod-S^{-1}R$, com $S^{-1}R$ o anel localizado a partir de S , onde S e $\underline{S}$ são sistemas multiplicativos para R e $Mod-R$, respectivamente. A relação consiste em exibir um funtor fiel e denso de $\underline{S}^{-1}(Mod-R)$ em $Mod-S^{-1}R$. Inicialmente, mostraremos que a construção da localização de uma categoria é essencialmente uma generalização do processo de localização de anéis associativos com unidade. Este último fato é bem conhecido, mas apresentaremos uma prova detalhada já que, na literatura, somente se fazem alguns comentários a respeito.

Em segundo lugar, e este será nosso principal resultado, mostrar a equivalência triangular de categorias trianguladas entre a categoria de homotopia da categoria formada pelos objetos Ext-injetivos de uma subcategoria co-resolving de uma categoria abeliana com suficientes injetivos, e a categoria derivada da subcategoria co-resolving.

Abstract

Our objectives with this work are the following, on the one hand, to show a relation between the localization of the category of modules over R , $(\underline{S}^{-1}(Mod-R))$, and the category of localized modules, $Mod-S^{-1}R$, where $S^{-1}R$ is the ring localized with respect to S and, where S and $\underline{S}$ are multiplicative systems for R and $Mod-R$ respectively. This relation is a faithful and dense functor from $\underline{S}^{-1}(Mod-R)$ to $Mod-S^{-1}R$. In this way, it follows that the construction of the localization of a category is essentially a generalization of the localization process for associative rings with unit. The last fact, is well known, but we give a proof, because in the literature the authors only mention it.

On the other hand, and this is our main result, we will show a triangular category equivalence between the homotopical category the Ext-injectives of a coresolving subcategory of an abelian category with enough injectives objects and the derived category of the coresolving subcategory.

Sumário

Introdução	vi
1 Conceitos Básicos	1
1.1 Produto Tensorial	1
1.2 Álgebras de Caminhos	5
1.3 Representações de uma Aljava	9
1.4 Equivalência entre $f.d.(k\Gamma)$ e $Rep\Gamma$	11
1.5 Seqüências de Auslander-Reiten	13
2 Localização de Anéis não Comutativos	18
2.1 Processo de Localização Básico Central	19
2.2 Processo de Localização Central	27
2.3 Processo de Localização	32
2.4 Exemplos e Relações com Anéis Quocientes	46
3 Categorias Derivadas	51
3.1 Complexos e a Categoria $K(\mathcal{A})$	51
3.2 Categorias Trianguladas	57
3.3 Localização de Categorias	63
3.4 A Categoria Derivada	70

4	Aplicações	72
4.1	Relações entre $\mathcal{S}^{-1}(Mod-R)$ e $Mod-S^{-1}R$	72
4.2	Equivalência entre $K^+(\mathcal{B})$ e $D^+(\mathcal{A})$	77
4.3	Exemplos de Categorias Derivadas	87
	Referências Bibliográficas	93

Agradecimentos

Para mim sempre foi difícil expressar e compartilhar meus pensamentos, ainda mais escreve-los. Mas gostaria de expressar meus agradecimentos a todas as pessoas que direta ou indiretamente me ajudaram durante o período do doutorado.

Em primeiro lugar, agradecer ao CNPq e em especial ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, que me deram o apoio financeiro e a formação acadêmica e profissional para meus estudos.

À minha mãe Ofelia Salazar e ao meu pai Alfredo Giraldo, ofereço meu muito obrigado pelo apoio ao longo dos anos. Ainda sem entender ao meu pai, quem falava para mim “hijo, pare de estudiar y vayase a trabajar”. Apesar disso, sempre esteve atento para me levar à escola na sua moto.

Gostaria de agradecer especialmente ao meu orientador, o Prof. Héctor Alfredo Merklen Goldschmidt, pela apoio e sugestões para o trabalho. Nele encontrei um profissional que ama a matemática e que trabalha pelo Instituto com grande empenho, dedicação e paciência, logrando uma grande simpatia entre funcionários, alunos e professores.

Sou grato a todos meus professores, em especial ao Prof. Eduardo Nascimento Marcos, Prof. Flávio Ulhoa Coelho e Prof^a. Gladys Chalom de Oliveira que, com grande empenho e dedicação, proporcionaram a minha formação acadêmica na área de Representações de Álgebras.

Agradecimentos especiais aos meus melhores amigos, Marcela, Edson e Leonardo com quem compartilhei momentos especiais da minha vida e por escutarem com paciência minhas preocupações e problemas. Também aos amigos Jairo Eloy, Paola, Sandra, e Domingo e aos colegas Clezio, Walter, Ângela, Cecília, Sônia, Nazareth e Fidel.

Sempre, infinito e muito mais, Hernán.

Introdução

A teoria de representações de álgebras avançou consideravelmente, a ponto de ser hoje uma área de grande notoriedade na pesquisa matemática. Entre os problemas que mais impulsionaram a teoria foi o de decidir a respeito das conjecturas de Brauer-Thrall, que datam da década de quarenta e são as seguintes:

Brauer-Thrall I. Se A é uma k -álgebra (k corpo) de tipo infinito (isto é, existe um número infinito de A -módulos indecomponíveis não isomorfos), então as dimensões sobre k , dos A -módulos indecomponíveis finitamente gerados, não são limitadas.

Brauer-Thrall II. Se A é uma k -álgebra de tipo infinito (k corpo infinito), então existe um número infinito de k -dimensões, tal que para cada dimensão, existe um número infinito de módulos indecomponíveis não isomorfos.

A primeira conjectura foi provada por Roiter [45] e Nazarova e Roiter afirmaram ter provado a segunda conjectura em [42].

A partir das décadas de sessenta e setenta foram introduzidas novas técnicas na teoria. Duas das técnicas mais utilizadas são: por um lado, Gabriel [19], utilizando métodos diagramáticos, mostrou uma correspondência entre álgebras de dimensão finita sobre corpos algebricamente fechados e aljvas (grafos orientados). Com isto, apresentou uma caracterização das álgebras hereditárias do tipo de representação finito (isto é, com um número finito de módulos indecomponíveis a menos de isomorfismo). Por outro lado, as noções de morfismos irredutíveis e seqüências quase cindidas (ou seqüências de Auslander-Reiten) na categoria dos módulos finitamente gerados sobre uma álgebra de Artin foram introduzidas por Auslander em [3] e por Auslander e Reiten em [4].

Estas técnicas passaram a ser utilizadas em outros contextos da teoria tais como: recobrimentos, teoria inclinante, bocses, categorias vector espaciais, posets, categorias derivadas, subcategorias homologicamente finitas, partições pré-projetivas e funtores finitamente apresentados.

Nos últimos anos D. Simson explorou as seqüências de Auslander-Reiten em po-

sets [48] e D. Happel os triângulos de Auslander-Reiten nas categorias triangulares em [26].

As categorias vector espaciais são uma generalização das representações de posets, bem como as categorias trianguladas com relação as categorias derivadas. As primeiras foram apresentadas por Nazarova e Roiter em [42] e, com estes conceitos, mantêm que provaram a conjectura de Brauer-Thrall II.

As categorias derivadas são uma “formalização para hiperhomologia” (ver [53]). Foram introduzidas no início dos anos sessenta por Grothendieck e Verdier e são de grande utilidade na geometria algébrica e na álgebra homológica. Suas primeiras aplicações apareceram na teoria de dualidade de conjuntos coerentes e conjuntos localmente compactos. Estes métodos de Grothendieck-Verdier foram adaptados ao estudo das equações diferenciais parciais por M. Sato em [47] e M. Kashiwara em [34]. As categorias derivadas tornaram-se uma linguagem estandar de análises microbológicas (ver [35], [46], e [8]) e através da prova da conjectura de Kazhdan-Lusztig, por Brylinski-Kashiwara (ver [9]), elas foram utilizadas na teoria de representações de grupos de Lie e grupos finitos de Chevalley, tendo um papel crucial nas subcategorias abelianas de categorias derivadas, as quais são moldadas para preservar esquemas (ver [7]).

Beilinson e Bernstein-Gelfand usaram as categorias derivadas para estabelecer uma relação entre esquemas coerentes no espaço projetivo e representações de certas álgebras de dimensão finita. Suas construções permitiram muitas generalizações (ver [20], [10], [31], [32] e [33]).

Em relação a representações de álgebras, as categorias derivadas foram introduzidas a partir de uma interpretação da teoria inclinante dada por D. Happel, estendendo a generalização clássica das equivalências de Morita, em termos de equivalências derivadas, as quais produzem vários invariantes. Assim, se temos dois anéis que têm equivalentes as categorias derivadas de módulos temos que: seus centros são isomorfos, suas cohomologias de Hochschild são isomorfas e, no caso de serem álgebras autoinjetivas sobre um corpo algebricamente fechado, elas têm o mesmo tipo de representação.

Além disso, as categorias derivadas são um caso especial de localização de categorias. E a localização de categorias é uma generalização da localização de anéis. Assim, os objetivos do presente trabalho serão, em primeiro lugar, mostrar uma relação entre a localização da categoria de módulos sobre um anel R , $(\underline{S}^{-1}(Mod-R))$, e a categoria dos módulos localizados, $Mod-S^{-1}R$, com $S^{-1}R$ o anel localizado a partir de S , onde S e $\underline{S}$ são sistemas multiplicativos para R e $Mod-R$, respectivamente. Para isto estudaremos as conhecidas localização de anéis e propriedades homológicas destes, depois mostraremos que a construção da localização de uma categoria é essencialmente uma generalização do processo de localização de anéis associativos com unidade.

Em segundo lugar, e este será nosso resultado principal, mostrar a equivalência triangular de categorias trianguladas entre a categoria de homotopia da categoria formada pelos objetos Ext-injetivos de uma subcategoria co-resolving de uma categoria abeliana com suficientes injetivos, e a categoria derivada da subcategoria co-resolving. Para este resultado, generalizaremos um resultado bem conhecido, o qual diz que: a categoria de homotopia da categoria dos objetos injetivos de uma categoria abeliana com suficientes injetivos $\mathcal{A}$ é trianguladamente equivalentemente à categoria derivada de $\mathcal{A}$ (ver [53]). Além disso, mostraremos outra equivalência triangulada (ver Teorema 4.26).

É bem conhecido o processo de localização de anéis, isto é, a partir de um anel R e de um sistema multiplicativo fechado $S \subset R$ obter um anel com divisão (nos elementos de S), o anel localizado $S^{-1}R$. As técnicas conhecidas utilizam a teoria de anéis ou a teoria de categorias.

Os métodos utilizando teoria de anéis datam da década de trinta. O anel localizado $S^{-1}R$ era obtido tomando S consistindo de elementos regulares (não divisores de zero), obtinha-se então o chamado anel de quocientes clássico (à direita) de R , isto é, (a) cada elemento regular $b \in R$ tem um inverso $b^{-1} \in S^{-1}R$; e (b) cada elemento $q \in S^{-1}R$ tem a forma $q = ab^{-1}$, com $a, b \in R$ e b regular.

Uma condição necessária e suficiente para um anel R com elementos regulares ter um anel de quocientes clássico à direita é a seguinte:

Se $a, b \in R$ e se b for regular, então existem $a_1, b_1 \in R$ com b_1 regular tal que $ab_1 = ba_1$ (ver [27], pag. 118). Se R for um anel comutativo com identidade, esta condição é satisfeita imediatamente. Se R for um domínio de integridade, não necessariamente comutativo, então a condição é a própria condição de Ore à direita (ou propriedade do múltiplo comum à direita): $aR \cap bR \neq 0$, para cada par de elementos não nulos $a, b \in R$. Neste caso, R é chamado um Domínio de Ore à direita, e seu anel de quocientes clássico é chamado corpo de quocientes à direita (ver [43]).

Se R for um anel comutativo e associativo (não necessariamente com unidade) e S for um sistema multiplicativo fechado, então sempre existirá um anel de quocientes clássico (ver [52]). No caso em que R é só associativo então a questão da existência de um anel de quocientes clássico com respeito a S consistindo de elementos regulares foi resolvida por K. Asano [1] e quando o sistema S contém divisores de zero foi resolvida por V.P. Elizarov [15].

Na década de cinquenta apareceram outros métodos mais gerais e a definição de anel quociente. O primeiro a considerar esta definição foi R. E. Johnson [28] (ver Definição 2.69) e depois Y. Utumi [51] deu uma definição mais geral para anel quociente (ver Definição 2.71). Depois estas foram generalizadas no contexto da teoria de módulos; isto é, o anel quociente de R.E. Johnson, foi chamado por Eckmann e

Schopf [14], de extensão essencial (ver Definição 2.68) e o anel quociente de Y . Utumi passou a ser chamado de extensão racional (ver Definição 2.70) por G.D. Findlay e J. Lambek [17]. Se R tiver um anel de quocientes clássico à direita $S^{-1}R$, então o R -módulo $S^{-1}R$ é uma extensão essencial do R -módulo à direita R_R , isto é, $S^{-1}R$ está contido na envolvente injetiva de R_R .

Em 1951, R. E. Johnson [28], demonstrou que um anel R com ideal singular nulo (ver Definição 2.73) tem um único anel quociente maximal (extensão essencial maximal), $\hat{R}$, o qual posteriormente provou-se ser (Johnson-Wong [29]) a envolvente injetiva de R_R . Em 1956 Y. Utumi [51], provou que para um anel R com ideal anulador nulo, então o anel quociente maximal (extensão racional maximal) $\bar{R}_R$ de R_R é um anel preservando a estrutura de módulo. Depois Lambek [37], observou que $\bar{R} \cong \text{Hom}_\Lambda(E, E)$, onde E é uma envolvente injetiva de R e $\Lambda = \text{Hom}_R(E, E)$; mas isto no caso de R ter ideal singular nulo, coincide com o anel de quociente de R.E Johnson.

Depois, um dos problemas considerados foi o de saber quais anéis permitiam uma construção de anéis de quocientes clássicos e anéis de quocientes, e em conhecer a estrutura destes anéis. Assim, por exemplo, num artigo em 1958, o qual faz a maior contribuição à teoria de estrutura para anéis não-comutativos satisfazendo a condição de máximo (anéis noetherianos à direita), A.W. Goldie [23] descobriu condições necessárias e suficientes no anel R para que seu anel de quocientes clássico $S^{-1}R$ seja semi-simples à direita e à esquerda. Em 1960, ele achou condições necessárias e suficientes em R para $S^{-1}R$ ser semi-simples à direita, (ver [24]). As condições são: R ser um anel semi-primo (isto é, não contém ideais nilpotentes) e satisfazer a condição de máximo nos ideais anuladores à direita e ideais complemento (um ideal complemento à direita está definido como um ideal à direita o qual é maximal com respeito a ter interseção nula com algum ideal à direita).

Um caso especial do teorema de Goldie [24] (também independentemente provado por Lesieur e Croisot [38]) estabelece que anéis primos noetherianos à direita (por exemplo, anel simples Noetherianos) tem anel de quocientes clássico à direita $S^{-1}R$, e que este anel é o anel pleno D_n de matrizes de ordem n sobre um corpo não necessariamente comutativo D . Pela primeira vez obteve-se uma conexão entre anéis primos noetherianos à direita e anéis primos artinianos à direita, já que o Teorema Wedderburn-Artin implica que um anel primo artiniano à direita A é um anel pleno simples de dimensão finita, $A = D_n$ onde D é um corpo.

Na década de sessenta apareceram os métodos de localização de categorias com o trabalho de P. Gabriel [18]. Estes métodos, mais gerais que os utilizados na teoria de anéis e módulos, em princípio só coincidiam para anéis comutativos. A partir desta época os métodos tomaram rumos distintos.

O trabalho ficou estruturado da seguinte forma:

No capítulo 1 apresentamos resultados básicos de produto tensorial e teoria de representações.

No capítulo 2 obtemos uma estrutura para a localização de anéis não comutativos com unidade, mesmo que o sistema multiplicativo tenha divisores de zero. Estudaremos algumas propriedades homológicas, junto com a relação entre a localização de anéis e anéis de quocientes. Muitos desses resultados são bem conhecidos pelos especialistas na área de teoria de anéis.

No capítulo 3 apresentamos as noções de categoria de homotopia, categoria triangulada e categoria derivada. Provaremos como a localização de categorias e a localização de anéis estão relacionadas (ver Teorema 3.30).

No capítulo 4 apresentamos todos nossos principais resultados (ver os Teoremas 4.3, 4.15 e 4.26). Finalizaremos mostrando dois exemplos de categorias derivadas.

Ao longo deste trabalho consideraremos a seguinte notação. Os complexos serão denotados pelas letras $X, Y, \dots$. Os módulos pelas letras $M, N, P, I, \dots$ onde as letras P e I são utilizadas para módulos projetivos e módulos injetivos, respectivamente. Para anéis e álgebras usaremos $A, B, \Lambda, R, S, \dots$. Categorias serão denotadas por $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$. Para nós, R significará um anel com unidade ($1 \in R$) e $R\text{-Mod}$ (resp. $\text{Mod-}R$) denotará a categoria dos R -módulos à esquerda (resp. à direita). As subcategorias plenas $R\text{-mod}$ e $R\text{-ind}$ (resp. $\text{mod-}R$ e $\text{ind-}R$) de $R\text{-Mod}$ são formadas pelos módulos finitamente gerados sobre R e pelos módulos indecomponíveis respectivamente.

Somente assumiremos um conhecimento básico de categorias e álgebra homológica (ver [54]).

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Neste capítulo introduziremos os conceitos básicos de produto tensorial, aljava, álgebras de caminhos, as representações de módulos sobre A , com $A = k\Gamma / \langle \rho \rangle$, a álgebra de caminhos de uma aljava com relações (Γ, ρ) . Isto nos permite obter uma descrição concreta dos módulos em termos dos espaços vetoriais e aplicações lineares. Depois mostraremos a equivalência que existe entre as representações dos módulos sobre A e a categoria dos $k\Gamma$ -módulos de dimensão finita. Aparecem os conceitos de morfismo irredutíveis, fonte e poço. Finalmente tratamos as seqüências de Auslander-Reiten. Os detalhes podem ser encontrados em [6], [11], [30] e [55].

Ao longo deste capítulo sempre consideramos R -módulos à esquerda salvo se especifique o contrário.

1.1 Produto Tensorial

Uma discussão mais detalhada do produto tensorial pode ser encontrada em [55].

Sejam M um módulo à direita, N um módulo à esquerda sobre o anel R , os quais denotaremos respectivamente por M_R e ${}_R N$. Definamos o $\mathbb{Z}$ -módulo livre F como:

$$F = \bigoplus_{M \times N} \mathbb{Z}_{(m,n)}, \quad \text{com } \mathbb{Z}_{(m,n)} \cong \mathbb{Z} \quad \text{para } m \in M \text{ e } n \in N.$$

Por construção, existe uma base canônica para F , os elementos desta base os denotamos por $[m, n]$. Seja $H \subseteq F$ o submódulo de F gerado pelos elementos da forma

$$[m + m', n] - [m, n] - [m', n],$$

$$[m, n + n'] - [m, n] - [m, n'],$$

$$[mr, n] - [m, rn],$$

para $m, m' \in M ; n, n' \in N$ e $r \in R$.

O *produto tensorial* de M e N denotado por $M \otimes_R N$, define-se como o $\mathbb{Z}$ -módulo quociente de F por H , isto é, $M \otimes_R N := F/H$. Denotaremos o elemento $\overline{(m_i, n_i)}$ por $m_i \otimes n_i$. Assim $M \otimes_R N$ é o $\mathbb{Z}$ -módulo gerado pelos elementos $m \otimes n$, para $m \in M$ e $n \in N$, que satisfazem as seguintes relações:

- (a) $(m + m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n$,
- (b) $m \otimes (n + n') = m \otimes n + m \otimes n'$,
- (c) $mr \otimes n = m \otimes rn$.

Para $m, m' \in M ; n, n' \in N$ e $r \in R$.

Definição 1.1 *Sejam $M_R, {}_R N$ R -módulos e G um grupo abeliano. Uma função $\varphi : M \times N \rightarrow G$ chama-se R -balanceada se satisfaz cada uma das seguintes propriedades:*

- (i) $\varphi(m + m', n) = \varphi(m, n) + \varphi(m', n)$,
- (ii) $\varphi(m, n + n') = \varphi(m, n) + \varphi(m, n')$,
- (iii) $\varphi(mr, n) = \varphi(m, rn)$.

Para $m, m' \in M ; n, n' \in N$ e $r \in R$.

Seja τ a função $\tau : M \times N \rightarrow M \otimes_R N$ definida por $\tau((m, n)) = m \otimes n$. Das propriedades do produto tensorial temos claramente que τ é R -balanceada. É fácil ver que o produto tensorial $M \otimes_R N$ dos R -módulos M_R e ${}_R N$ satisfaz uma propriedade universal, isto é:

Teorema 1.2 (*Propriedade universal do produto tensorial*).

Com a notação anterior: sejam $M_R, {}_R N$ R -módulos e G um grupo abeliano. Dada uma função R -balanceada $\varphi : M \times N \rightarrow G$, existe um único $\mathbb{Z}$ -homomorfismo de $\mathbb{Z}$ -módulos $\gamma : M \otimes_R N \rightarrow G$ que faz comutar o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\varphi} & G \\ \downarrow \tau & \nearrow \gamma & \\ M \otimes_R N & & \end{array}, \text{ isto é, } \gamma\tau = \varphi.$$

Por construção, o produto tensorial $M \otimes_R N$ dos R -módulos M_R e ${}_R N$ é somente um grupo abeliano. No entanto, se ${}_A M_R$ ou ${}_R N_B$ são bimódulos, pode-se definir estrutura de módulo em $M \otimes_R N$: Se ${}_A M_R$ é um A - R -bimódulo, então $M \otimes_R N$ tem estrutura de A -módulo à esquerda dada por $a(\sum m_i \otimes n_i) = \sum (am_i) \otimes n_i$, para $a \in A$. Similarmente se ${}_R N_B$ é R - B -bimódulo obtém-se, para $M \otimes_R N$, uma estrutura de B -módulo à direita.

A propriedade universal nos diz que se temos ${}_R M_R$ R -bimódulo e ${}_R N, {}_R W$ R -módulos, então para definir um R -homomorfismo de módulos de $M \otimes_R N$ a W basta definir uma função R -balanceada $\varphi : M \times N \rightarrow W$.

Teorema 1.3 (*Propriedades do Produto Tensorial*).

Sejam ${}_R M_R, {}_R N_R$ R -bimódulos e ${}_R W$ um R -módulo. Pode-se definir os seguintes R -isomorfismos canônicos:

- (i) $M \otimes_R N \cong N \otimes_R M$ o qual envia $m \otimes n$ em $n \otimes m$.
- (ii) $(M \otimes_R N) \otimes_R W \cong M \otimes_R (N \otimes_R W)$ o qual envia $(m \otimes n) \otimes w$ em $m \otimes (n \otimes w)$.
- (iii) $R \otimes_R M \cong M$ o qual envia $r \otimes m$ em rm .
- (iv) $(M \oplus N) \otimes_R W \cong (M \otimes_R W) \oplus (N \otimes_R W)$ o qual envia $(m, n) \otimes w$ em $(m \otimes w, n \otimes w)$.

Dados dois R -homomorfismos $f : {}_R M_R \rightarrow {}_R M'_R$ e $g : {}_R N \rightarrow {}_R N'$, é fácil ver que existe um único R -homomorfismo:

$$f \otimes g : (M \otimes_R N) \rightarrow (M' \otimes_R N') \quad \text{com} \quad f \otimes g(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n),$$

para $m \in M$ e $n \in N$, chamado *produto tensorial* dos morfismos f e g .

Da definição obtemos facilmente as seguintes propriedades:

Proposição 1.4 *Sejam ${}_R M_R, {}_R M'_R$ e ${}_R M''_R$ R -bimódulos e ${}_R N, {}_R N', {}_R N''$ R -módulos. Sejam $f : M \rightarrow M', g : N \rightarrow N', f' : M' \rightarrow M'', g' : N' \rightarrow N'', f_1, f_2 : M \rightarrow M'$ e $g_1, g_2 : N \rightarrow N'$ R -homomorfismos de módulos. Então*

- (i) $1_M \otimes 1_N = 1_{M \otimes N}; f \otimes 0 = 0 \otimes g = 0.$
- (ii) $(f' \otimes g')(f \otimes g) = f'f \otimes g'g.$
- (iii) $(f_1 + f_2) \otimes g = f_1 \otimes g + f_2 \otimes g$ e $f \otimes (g_1 + g_2) = f \otimes g_1 + f \otimes g_2.$

Proposição 1.5 *Sejam M_A um A -módulo, ${}_A N_B$ um A - B -bimódulo e ${}_B L$ um B -módulo. Então $(M \otimes_A N) \otimes_B L \cong M \otimes_A (N \otimes_B L)$, como isomorfismo de grupos abelianos.*

Definição 1.6 *Uma seqüência longa*

$$\cdots \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \xrightarrow{f_3} M_4 \xrightarrow{f_4} \cdots$$

onde cada M_i é um R -módulo e cada $f_i : M_i \rightarrow M_{i+1}$ é um R -homomorfismo de módulos, chama-se **seqüência longa exata** se para todo i

$$\cdots \rightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \rightarrow \cdots$$

tem-se que $\ker(f_i) = \text{Im}(f_{i-1})$.

Uma seqüência curta se define como uma seqüência da forma

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0,$$

e chama-se **seqüência curta exata** se satisfaz as seguintes condições:

1. O R -homomorfismo de módulos f é injetivo.
2. $\ker(g) = \text{Im}(f)$.
3. O R -homomorfismo de módulos g é sobrejetivo.

O produto tensorial é um funtor, vejamos algumas propriedades.

Teorema 1.7 *Sejam ${}_R M_R$, ${}_R M'_R$ e ${}_R M''_R$ R -bimódulos. O produto tensorial é um funtor exato à direita, isto é, dada uma seqüência curta exata*

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{\tau} M \xrightarrow{p} M'' \rightarrow 0$$

e um R -módulo ${}_R Q$ qualquer, então a seqüência

$$M' \otimes_R Q \xrightarrow{\tau \otimes I_{d_Q}} M \otimes_R Q \xrightarrow{p \otimes I_{d_Q}} M'' \otimes_R Q \rightarrow 0$$

é exata.

Em geral não se conserva a seqüência curta exata, isto é, o R -homomorfismo $\tau \otimes I_{d_Q}$ não necessariamente é injetivo.

Definição 1.8 *Com a notação acima, o R -módulo Q é chamado R -módulo **plano** se $\tau \otimes I_{d_Q}$ é injetivo.*

Proposição 1.9 *Seja $f : A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis e M_A um A -módulo plano. Então $(M \otimes_A B)_B$ é um B -módulo plano.*

Demonstração. Sejam ${}_B L$, ${}_B N$ B -módulos e $0 \rightarrow L \rightarrow N$ uma seqüência exata de B -módulos. Pelo Teorema 1.7, pela Proposição 1.5 e como M_A é um A -módulo plano, temos que a seguinte seqüência $0 \rightarrow (M \otimes_A B) \otimes_B L \rightarrow (M \otimes_A B) \otimes_B N$ é exata, $M \otimes_A B$ é um B -módulo plano. $\square$

1.2 Álgebras de Caminhos

Para definir as álgebras de caminhos precisaremos dos conceitos de aljavas, caminhos e relação entre caminhos, os quais daremos a seguir.

Definição 1.10 *Uma aljava $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$ é um grafo orientado, onde Γ_0 denotará o conjunto de vértices e Γ_1 o conjunto de flechas.*

Sejam $s, e : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_0$ as funções definidas por $s(\alpha) = i$ e $e(\alpha) = j$ onde $\alpha : i \rightarrow j$ é uma flecha do vértice i ao vértice j .

A nomenclatura nos sugere diagramas para representar aljavas, que é o que fazemos na prática.

Exemplo 1.11 Consideremos os seguintes diagramas.

- (a) Seja Γ a aljava $1 \bullet \xrightarrow{\alpha} 2 \bullet \xleftarrow{\beta} 1 \bullet \xrightarrow{\gamma} 2 \bullet \xrightarrow{\delta} 3 \bullet \xrightarrow{\delta} 4 \bullet$. Para esta aljava 1, 2, 3, 4 formam o conjunto de vértices, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ formam o conjunto de flechas e $s(\alpha) = 1$ e $e(\alpha) = 2$.

- (b) Seja Γ a aljava

Nesta aljava, existem infinitas flechas entre dois vértices.

Um **caminho** em Γ é uma sequência de flechas $p = \alpha_n \cdots \alpha_1$ tais que $e(\alpha_t) = s(\alpha_{t+1})$ para $1 \leq t \leq n - 1$. Denotaremos $l(p) = n$ o **comprimento** do caminho p . Por convenção, um caminho de comprimento zero (ou **caminho trivial**) é um caminho sem flechas associado a um vértice $i \in \Gamma_0$ e se denotará por ϵ_i , com $s(\epsilon_i) = e(\epsilon_i) = i$.

Dado um caminho $p = \alpha_n \cdots \alpha_1$ denotaremos por $s(p) = s(\alpha_1)$, o vértice inicial de p , e por $e(p) = e(\alpha_n)$, o vértice final de p . Quando p não é um caminho trivial e $s(p) = e(p)$ diremos que p é um **circuito orientado**.

No Exemplo 1.11 (a) temos que $\alpha, \alpha\beta\alpha$ e $\gamma\alpha\beta\gamma\gamma$ são exemplos de caminhos de comprimento 1, 3 e 5 respectivamente, sendo o último um circuito orientado. Os caminhos triviais são $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ e ϵ_4 .

Uma **relação** σ numa aljava Γ sobre um corpo k é uma combinação linear de caminhos $\sigma = a_1 p_1 + \cdots + a_n p_n$ com: $a_i \in k$, $e(p_i) = \cdots = e(p_n)$, $s(p_i) = \cdots = s(p_n)$ e $l(p_i)$ é no mínimo 2, para cada p_i . Se $\rho = \{\sigma_t\}_{t \in T}$ é um conjunto de relações em Γ sobre k , o par (Γ, ρ) é chamado, **aljava com relações** sobre k .

Exemplo 1.12 Seja Γ a aljava

São exemplos de relações nesta aljava $\beta_2\alpha_2 - \beta_1\alpha_1$, $\gamma\beta_1$, $\gamma\beta_1 + \gamma\beta_2$, $\eta_3\eta_2\eta_1$, $\eta_2\eta_1\eta_3\eta_2\eta_1$ entre outras. Pode-se escolher um sistema de relações, por exemplo, $\rho_1 = \{\beta_2\alpha_2, \beta_1\alpha_1\}$ ou $\rho_2 = \{\beta_2\alpha_2 - \beta_1\alpha_1, \eta_1\eta_3\eta_2, \delta\beta_1\}$.

Podemos agora definir as álgebras de caminhos.

Definição 1.13

Sejam k um corpo e Γ uma *aljava finita*, isto é, os conjuntos Γ_0 e Γ_1 são finitos. A partir de k e de Γ definiremos uma álgebra que denotaremos por $k\Gamma$. Consideremos o conjunto B formado por todos os caminhos de Γ , inclusive os caminhos triviais. Consideremos agora $k\Gamma$ o k -espaço vetorial com base B . Esta base B é chamada *base usual* de $k\Gamma$. Damos a estrutura de álgebra a $k\Gamma$ definindo a multiplicação nos elementos da base B . Para dois caminhos de B , $p_1 = \alpha_n \cdots \alpha_1$ e $p_2 = \beta_m \cdots \beta_1$ definimos:

$$p_1 \cdot p_2 = \begin{cases} \alpha_n \cdots \alpha_1 \beta_m \cdots \beta_1, & \text{se } e(\beta_m) = s(\alpha_1) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e por linearidade, estendemos esta multiplicação a todos os elementos. É fácil a verificação de $k\Gamma$ ser uma k -álgebra. Esta álgebra é chamada **álgebra de caminhos** de Γ . Quando temos (Γ, ρ) uma aljava com relações pode-se também considerar a k -álgebra $k(\Gamma, \rho) = k\Gamma / \langle \rho \rangle$, onde $\langle \rho \rangle$ denota o ideal em $k\Gamma$ gerado pelo conjunto de relações ρ . A álgebra $k\Gamma / \langle \rho \rangle$, da aljava com relações (Γ, ρ) , é chamada **álgebra de caminhos com relações**.

Exemplo 1.14 Seja k um corpo.

- (a) Seja $\Gamma: 1 \bullet \xrightarrow{\alpha} 2 \bullet$. Como espaço vetorial $k\Gamma$ tem base $B = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \alpha\}$ e portanto $\dim_k k\Gamma = 3$. A multiplicação dos elementos em B é $\epsilon_1\epsilon_2 = 0$, $\epsilon_i\epsilon_i = \epsilon_i$ para $i = 1, 2$, $\alpha\epsilon_1 = \epsilon_2\alpha = \alpha$ e $\alpha\alpha = \epsilon_1\alpha = \alpha\epsilon_2 = 0$. Não é difícil ver que $k\Gamma$ é isomorfa à álgebra de matrizes

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ k & k \end{pmatrix}$$

- (b) Seja $\Gamma: 1 \bullet \xrightarrow{\alpha} 2 \bullet \xrightarrow{\beta} 2 \bullet$. Neste caso $\dim_k k\Gamma = \infty$, já que

$$B = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \alpha, \beta, \beta\alpha, \beta^2, \beta^2\alpha, \beta^3, \dots\}$$

tem infinitos caminhos.

Antes de enunciarmos o Teorema de Gabriel, daremos algumas outras definições e observações.

Definição 1.15 (a) *Seja A uma k -álgebra e $A \cong P_1^{r_1} \oplus \cdots \oplus P_t^{r_t}$ a decomposição em A -módulos indecomponíveis, onde $P_i \not\cong P_j$ se $i \neq j$. No caso em que $r_i = 1$ para todo $i = 1, \dots, t$ então A é dita **álgebra básica**.*

(b) *Seja Γ uma aljava e k um corpo. Denotamos por J o ideal de $k\Gamma$ gerado por todas as flechas de Γ . Um ideal I de $k\Gamma$ é **admissível** se existe um $n > 0$ tal que $J^n \subset I \subset J^2$.*

Observação 1.16 *Seja k um corpo.*

(i) *Se Γ é uma aljava finita então a álgebra $k\Gamma$ é de dimensão finita sobre k se, e somente se, Γ não possui circuitos orientados.*

(ii) *$k\Gamma$ é uma álgebra associativa com elemento unidade*

$$1 = \sum_{i \in \Gamma} \epsilon_i \quad (\text{soma de caminhos triviais de } \Gamma)$$

(iii) *A álgebra $k\Gamma$ não é necessariamente comutativa.*

(iv) *O conjunto $\{\epsilon_i\}_{i \in \Gamma_0}$ é um sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos de $k\Gamma$.*

(v) *Seja J o ideal de $k\Gamma$ gerado pelas flechas de Γ . $J = \text{rad } k\Gamma$ se, e somente se, Γ não possui circuitos orientados. Além disso, o número de flechas de i até j é igual a $\dim_k(\epsilon_j J \epsilon_i)$.*

(vi) *Se $k\Gamma$ for de dimensão finita sobre k então $k\Gamma$ é uma álgebra básica.*

(vii) *$k\Gamma \epsilon_i$ é um projetivo indecomponível para todo $i \in \Gamma_0$.*

(viii) *Se Γ for uma aljava finita sem circuitos orientados, então todo ideal de $k\Gamma$ contido em J^2 é admissível.*

Descreveremos os módulos projetivos indecomponíveis para uma álgebra de caminhos $k\Gamma$ de dimensão finita sobre um corpo k . Da Observação 1.16 (vi) e (ii) temos que $k\Gamma$ é uma k -álgebra básica e $1 = \sum_{i \in \Gamma} \epsilon_i$ onde $\{\epsilon_i\}_{i \in \Gamma_0}$ é um sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos de $k\Gamma$. Logo $k\Gamma = k\Gamma \epsilon_i \oplus \cdots \oplus k\Gamma \epsilon_i$, e novamente, da Observação 1.16 (vii), $k\Gamma \epsilon_i = P_i$ é um projetivo indecomponível para o qual os caminhos p , com $s(p) = i$, formam uma k -base.

Se $k(\Gamma, \rho)$ é uma álgebra de caminhos com relações de dimensão finita sobre k , de forma similar à anterior, temos que $k\Gamma\bar{\epsilon}_i$ é um projetivo indecomponível, com k -base os elementos $\bar{p}$, com p um caminho tal que $s(p) = i$. Em resumo:

- Lema 1.17** (a) *Com a notação acima. Se $\langle \rho \rangle = 0$ teremos que $\epsilon_j P_i$ é um k -espaço vetorial com base formada por todos os caminhos dirigidos de i a j .*
- (b) *Se $\langle \rho \rangle \neq 0$ e existe uma relação de i a j então $\dim_k \epsilon_j P_i < \infty$ o número de caminhos dirigidos de i a j .*

Enunciamos um teorema muito importante na teoria de representações de álgebras que é o Teorema de Gabriel, em vista deste, pode-se caracterizar uma classe muito ampla de álgebras em termos de aljvas.

Teorema 1.18 *Seja A uma álgebra indecomponível, básica e de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k . Então existe uma aljava Γ_A e um epimorfismo de álgebras $\phi : k\Gamma_A \rightarrow A$ tal que $\ker \phi$ é um ideal admissível de $k\Gamma$.*

1.3 Representações de uma Aljava

Seja M um módulo sobre uma álgebra de caminhos $k\Gamma$. Então $M = \bigoplus_{i \in \Gamma_0} \epsilon_i M$ é uma decomposição de M numa soma finita de espaços vetoriais sobre k . Se α é uma flecha de i a j , então a multiplicação à esquerda por α induz uma aplicação linear de $\epsilon_i M$ a $\epsilon_j M$. Isto nos leva à seguinte definição, a que nos dá uma forma concreta de ver os módulos sobre álgebras de caminhos.

Definição 1.19 *Uma representação (V, f) de uma aljava Γ sobre um corpo k é um conjunto de espaços vetoriais $\{V(i) | i \in \Gamma_0\}$ junto com aplicações k -lineares $f_\alpha : V(i) \rightarrow V(j)$ para cada flecha $\alpha : i \rightarrow j$.*

Assumiremos que as representações são de dimensão finita, isto é, cada $V(i)$ é de dimensão finita sobre k .

Um morfismo $h : (V, f) \rightarrow (V', f')$ entre duas representações de Γ sobre k é uma coleção $\{h_i : V(i) \rightarrow V'(i) | i \in \Gamma_0\}$ de aplicações k -lineares tais que, para cada flecha $\alpha : i \rightarrow j$ em Γ , o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} V(i) & \xrightarrow{h_i} & V'(i) \\ f_\alpha \downarrow & & \downarrow f'_\alpha \\ V(j) & \xrightarrow{h_j} & V'(j). \end{array}$$

Se $h : (V, f) \rightarrow (V', f')$ e $g : (V', f') \rightarrow (V'', f'')$ são dois morfismos entre representações então a composição é definida pela coleção de aplicações $g_i h_i : V(i) \rightarrow V''(i)$. Assim obtemos a *categoria de representações* de Γ sobre k , a qual se denotará por $\text{Rep}\Gamma$. Introduziremos agora alguma terminologia básica de $\text{Rep}\Gamma$.

Dizemos que um objeto (V, f) é um *sub-objeto* de um objeto (V', f') em $\text{Rep}\Gamma$ se $V(i) \subset V'(i)$, para todo $i \in \Gamma_0$, e $f_\alpha = f'_\alpha|_{V(i)}$, para cada flecha $\alpha : i \rightarrow j$. Para um morfismo $h : (V, f) \rightarrow (V', f')$ definimos o kernel, $\ker h$ como o sub-objeto (W, f'') de (V, f) definido por $W(i) = \ker h_i$, para $i \in \Gamma_0$, e $f''_\alpha = f_\alpha|_{W(i)}$, para cada flecha $\alpha : i \rightarrow j$. É fácil ver que $f_\alpha(\ker h_i) \subset \ker h_j$ para cada flecha $\alpha : i \rightarrow j$. Definimos a imagem $\text{Im}h$ como o sub-objeto (U, g) de (V', f') definido por $U(i) = \text{Im}h_i$ para $i \in \Gamma_0$ e $g_\alpha = f'_\alpha|_{U(i)}$ para cada flecha $\alpha : i \rightarrow j$. O objeto (V, f) onde $V(i) = 0$ para todo $i \in \Gamma_0$ e $f_\alpha = 0$ para todo $\alpha \in \Gamma_1$ é o *objeto zero* em $\text{Rep}\Gamma$. É fácil ver que um morfismo $h : (V, f) \rightarrow (V', f')$ é um monomorfismo em $\text{Rep}\Gamma$ se, e somente se, $\ker h = 0$, e que h é um epimorfismo se, e somente se, $\text{Im}h = (V', f')$. Assim h é um isomorfismo se somente se $h_i : V(i) \rightarrow V'(i)$ é um isomorfismo para todo $i \in \Gamma_0$.

Uma *soma* de dois objetos (V, f) e (V', f') em $\text{Rep}\Gamma$ é o objeto (W, g) onde $W(i) = V(i) \oplus V'(i)$ para $i \in \Gamma_0$ e $g_\alpha = f_\alpha \oplus f'_\alpha$ para cada flecha $\alpha \in \Gamma_1$. Um objeto (V, f) se chamará *indecomponível* se não é isomorfo à soma de duas representações diferentes de zero. Um objeto $(V, f) \neq 0$ é *simples* se não tem sub-objetos próprios diferentes de zero. É claro que um objeto simples é indecomponível.

Para cada vértice $i \in \Gamma_0$ temos um objeto simples (S_i, f) dado por $S_i(i) = k$, $S_i(j) = 0$ para $i \neq j$ e $f_\alpha = 0$ para cada flecha $\alpha \in \Gamma_1$. É fácil provar que $\text{Rep}\Gamma$ é uma k -categoria abeliana (ver definição em [6]).

Exemplo 1.20 Seja k um corpo.

- (a) Sejam Γ a aljava $1 \bullet \xrightarrow[\beta]{\alpha} \bullet 2$, V a representação $k \xrightarrow[\alpha]{1} k$ e W a representação $k \xrightarrow[\alpha]{a^{-1}} k$, onde $a \neq 0 \in k$ e $k \xrightarrow{a} k$ é a aplicação definida pela multiplicação por a . É fácil ver que o morfismo $h : V \rightarrow W$ (dado por $h_1 = 1_k$ e $h_2 = k \rightarrow k$ multiplicação por a^{-1}) é um isomorfismo.
- (b) Seja Γ a aljava $1 \bullet \bigcup_{\alpha} \bullet$. Para cada $\lambda \in k$ existe uma representação simples $(S_\lambda, f_\alpha^\lambda)$ dada por $S_\lambda(1) = k$ e $f_\alpha^\lambda : k \rightarrow k$ a aplicação multiplicação por λ . Pode-se ver facilmente que se $\lambda \neq \lambda'$ então $(S_\lambda, f_\alpha^\lambda)$ e $(S_{\lambda'}, f_\alpha^{\lambda'})$ não são isomorfas em $\text{Rep}\Gamma$.

1.4 Equivalência entre $f.d.(k\Gamma)$ e $Rep\Gamma$

Mostraremos que as categorias $Rep\Gamma$ e $f.d.(k\Gamma)$ são equivalentes, onde $f.d.(k\Gamma)$ denota a categoria de $k\Gamma$ -módulos de dimensão finita sobre k . Começamos definindo os funtores $F : Rep\Gamma \rightarrow f.d.(k\Gamma)$ e $H : f.d.(k\Gamma) \rightarrow Rep\Gamma$.

Para (V, f) em $Rep\Gamma$ definimos $F(V, f) = \bigoplus_{i \in \Gamma_0} V(i)$ como k -espaço vetorial. Agora, para cada flecha $\alpha : i \rightarrow j$ temos uma aplicação linear $f_\alpha : V(i) \rightarrow V(j)$; denotemos por $\pi_i : F(V, f) \rightarrow V(i)$ a projeção e por $\xi_i : V(i) \rightarrow F(V, f)$ a inclusão, logo obtemos a aplicação, induzida por f_α , definida por $\bar{f}_\alpha = \xi_j f_\alpha \pi_i : F(V, f) \rightarrow F(V, f)$. Para um caminho trivial ϵ_i temos a aplicação induzida $\bar{f}_{\epsilon_i} = \xi_i f_{\epsilon_i} \pi_i : F(V, f) \rightarrow F(V, f)$ onde $f_{\epsilon_i} = 1_{V(i)} : V(i) \rightarrow V(i)$. Então podemos definir o homomorfismo de anéis $\bar{f} : k\Gamma_0 \rightarrow End_k(F(V, f))$ da seguinte forma, $\bar{f}(\epsilon_i) = \bar{f}_{\epsilon_i}$ para cada caminho trivial ϵ_i , $\bar{f}(\alpha) = \bar{f}_\alpha$ para cada flecha α , $\bar{f}(p) = \bar{f}_{\alpha_n} \cdots \bar{f}_{\alpha_1}$ para um caminho $p = \alpha_n \cdots \alpha_1$ e para os outros elementos em $k\Gamma$, $\bar{f}$ é definida por linearidade. Assim $F(V, f)$ adquire estrutura de $k\Gamma$ -módulo, uma discussão mais detalhada pode ser encontrada em [6].

Seja $h : (V, f) \rightarrow (V', f')$ um morfismo em $Rep\Gamma$. Então temos as aplicações $h_i : V(i) \rightarrow V'(i)$ para cada $i \in \Gamma_0$ e portanto a aplicação induzida de espaços vetoriais $\bar{h} : F(V, f) \rightarrow F(V', f')$. Para cada flecha $\alpha : i \rightarrow j$ em Γ_1 temos que $h_j f_\alpha = f'_\alpha h_i : V(i) \rightarrow V'(j)$. Portanto $\bar{h} \bar{f}_\alpha = \bar{f}'_\alpha \bar{h}$ e assim $\bar{h} \bar{f}_\sigma = \bar{f}'_\sigma \bar{h}$ para cada $\sigma \in k\Gamma$, isto é, $\bar{h}(\sigma v) = \sigma \bar{h}(v)$ para $v \in F(V, f)$, assim $\bar{h}$ é um $k\Gamma$ -homomorfismo. Definimos então $F(h) = \bar{h}$. Pode-se provar facilmente que $F : Rep\Gamma \rightarrow f.d.(k\Gamma)$ é um k -funtor.

Definamos $H : f.d.(k\Gamma) \rightarrow Rep\Gamma$. Seja C em $f.d.(k\Gamma)$. Como $1 = \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n$ é uma soma de idempotentes ortogonais em $k\Gamma$, temos que $C = \bigoplus_{i \in \Gamma_0} \epsilon_i C$. Para cada $\sigma \in k\Gamma$ temos a aplicação $\bar{f} : C \rightarrow C$ definida por $\bar{f}(c) = \sigma c$. Se $\alpha : i \rightarrow j$ é uma flecha em Γ temos $\alpha(\epsilon_i C) = \epsilon_j \alpha C \subset \epsilon_j C$, assim α induz por restrição uma aplicação k -linear $f_\alpha : \epsilon_i C \rightarrow \epsilon_j C$. Definimos $H(C)$ como a representação dada pelos k -espaços vetoriais $\epsilon_i C$, para cada $i \in \Gamma_0$, junto com as aplicações $f_\alpha : \epsilon_i C \rightarrow \epsilon_j C$, para cada flecha $\alpha : i \rightarrow j$.

Se $h : B \rightarrow C$ é um morfismo em $f.d.(k\Gamma)$ temos $h(\epsilon_i B) \subset \epsilon_i h(B) \subset \epsilon_i C$. Assim, temos por restrição uma aplicação k -linear $h_i : \epsilon_i B \rightarrow \epsilon_i C$. Para uma flecha $\alpha : i \rightarrow j$ temos $\alpha h(b) = h(\alpha b)$ para $b \in B$, e portanto $\alpha h_i(b) = h_j(\alpha b)$ para $b \in \epsilon_i B$, isto é, $f'_\alpha h_i(b) = h_j f_\alpha(b)$, definindo então $H(h) = \{h_i\}_{i \in \Gamma_0}$. É fácil provar que $H : f.d.(k\Gamma) \rightarrow Rep\Gamma$ é um k -funtor.

Podemos agora enunciar o Teorema sobre a equivalência entre $f.d.(k\Gamma)$ e $Rep\Gamma$.

Teorema 1.21 *Seja k um corpo e Γ uma aljava finita. Então os funtores $F : Rep\Gamma \rightarrow f.d.(k\Gamma)$ e $H : f.d.(k\Gamma) \rightarrow Rep\Gamma$ são equivalências inversas entre si.*

Para uma aljava com relações (Γ, ρ) sobre um corpo k , definimos a categoria $Rep(\Gamma, \rho)$ de representações como a subcategoria plena de $Rep\Gamma$, nos quais os objetos são da forma (V, f) com $f_\sigma = 0$ para cada relação σ em ρ . Assim obtemos a seguinte versão do Teorema anterior.

Proposição 1.22 *Sejam k um corpo e (Γ, ρ) uma aljava com relações sobre k . Então o funtor $F : Rep\Gamma \rightarrow f.d.(k\Gamma)$ induz uma equivalência de k -categorias entre $Rep(\Gamma, \rho)$ e $f.d.(k(\Gamma, \rho))$.*

A equivalência entre $Rep(\Gamma, \rho)$ e $f.d.(k(\Gamma, \rho))$ será vista como uma identificação. Descrevemos os objetos projetivos, injetivos e simples em $Rep(\Gamma, \rho)$ e os identificamos com os $k(\Gamma, \rho)$ -módulos projetivos, injetivos e simples respectivamente, no caso em que a álgebra de caminhos $k\Gamma$ (ou $k(\Gamma, \rho)$) seja de dimensão finita sobre k .

Já descrevemos os objetos simples S_i em $Rep(\Gamma, \rho)$, para cada $i \in \Gamma_0$, os quais estão em correspondência biunívoca com Γ_0 e portanto com os $K(\Gamma, \rho)$ -módulos simples (Proposição 1.22). Assim não existem outras representações simples em $Rep(\Gamma, \rho)$.

Sejam $P_i = k\Gamma\bar{\epsilon}_i$ o projetivo indecomponível que corresponde ao caminho trivial ϵ_i e $(V, f) = H(P_i)$. Então temos, por definição do funtor H , que $V(j) = \bar{\epsilon}_j P_i$. Sabemos que uma k -base para P_i , consiste de elementos $\bar{p}$, com p um caminho em Γ tal que $s(p) = i$. Pelo Lema 1.17 uma k -base para $V(j) = \epsilon_j P_i$ são aqueles $\bar{p}$ tais que $e(p) = j$. E se $\alpha : i' \rightarrow j'$ for uma flecha, então a aplicação $f_\alpha : V(i') \rightarrow V(j')$ está definida por $f_\alpha(\bar{p}) = \alpha\bar{p}$ quando $e(p) = i'$. Omitiremos a construção dos módulos injetivos.

Finalizaremos esta seção com a ilustração dos objetos simples, projetivos indecomponíveis e injetivos indecomponíveis, para os seguintes exemplos:

Exemplo 1.23 Seja k um corpo.

(a) Seja $\Gamma : 3 \bullet \xrightarrow{\beta} 2 \bullet \xrightarrow{\alpha} 1 \bullet$. Consideremos a k -álgebra de caminhos $k\Gamma$.

Os $k\Gamma$ -módulos projetivos indecomponíveis serão:

$$P_1 = S_1 : 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 1 \quad P_2 : 0 \longrightarrow 1 \xrightarrow{1} 1$$

$$P_3 : 1 \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{1} 1.$$

E os $k\Gamma$ -módulos injetivos indecomponíveis serão:

$$I_1 = P_3 : 1 \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{1} 1 \quad I_2 : 1 \xrightarrow{1} 1 \longrightarrow 0$$

$$I_3 = S_3 : 1 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0.$$

- (b) Seja (Γ, ρ) , dada por ${}_3\bullet \xrightarrow{\beta} {}_2\bullet \xrightarrow{\alpha} \bullet_1$, com $\rho = \alpha\beta = 0$. Consideremos a k -álgebra de caminhos com relações $k(\Gamma, \rho)$

Os $k(\Gamma, \rho)$ -módulos projetivos indecomponíveis serão:

$$P_1 = S_1 : 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 1 \quad P_2 : 0 \longrightarrow 1 \xrightarrow{1} 1$$

$$P_3 : 1 \xrightarrow{1} 1 \longrightarrow 0.$$

E os $k(\Gamma, \rho)$ -módulos injetivos indecomponíveis serão:

$$I_1 = P_2 : 0 \longrightarrow 1 \xrightarrow{1} 1 \quad I_2 : 1 \xrightarrow{1} 1 \longrightarrow 0$$

$$I_3 = S_3 : 1 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0.$$

1.5 Seqüências de Auslander-Reiten

Na década de setenta, M. Auslander e I. Reiten introduziram o conceito de seqüência quase cindida, hoje conhecida como seqüência de Auslander-Reiten (ver [4]). Vejamos alguns conceitos básicos sobre este assunto.

Seja $\mathcal{A}$ uma R -categoria abeliana com R um anel comutativo artiniano.

Definição 1.24 A categoria $\mathcal{A}$ é chamada de **Krull-Schmidt** se satisfaz as seguintes duas condições:

- (i) $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$ é finitamente gerado como R -módulo, para todo M e N em $\mathcal{A}$.
- (ii) $\text{End}_{\mathcal{A}}(M)$, com M indecomponível, é um anel local.

Um caso particular de uma R -categoria abeliana de Krull-Schmidt é $A\text{-mod}$, onde A é uma álgebra de Artin, isto é, A é uma álgebra sobre um anel artiniano comutativo, R , a qual é finitamente gerada como R -módulo (é fácil ver que uma k -álgebra de dimensão finita é uma álgebra de Artin).

Seja $\mathcal{A}$ uma R -categoria abeliana de Krull-Schmidt, vejamos as seguintes definições básicas.

Definição 1.25 (i) Um morfismo $f : M' \longrightarrow M$ chama-se **monomorfismo** (resp. **epimorfismo**) que cinde se existe $f' : M \longrightarrow M'$ tal que $f'f = 1_{M'}$ (resp. $ff' = 1_M$).

- (ii) Uma seqüência curta exata $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ chama-se **cindida à esquerda** (resp. **à direita**) se f é monomorfismo que cinde (resp. g epimorfismo que cinde). E é chamada **cindida** se é cindida à esquerda e cindida à direita.

Definição 1.26 (a) Um morfismo $f : N \rightarrow E$ em $\mathcal{A}$ chama-se **quase cindido à esquerda** se

- (i) f não é monomorfismo que cinde
e

- (ii) para todo $h : N \rightarrow L$ que não seja monomorfismo que cinde, existe $h' : E \rightarrow L$ tal que $h'f = h$.

(b) Um morfismo $g : E \rightarrow M$ em $\mathcal{A}$ chama-se **quase cindido à direita** se

- (i) g não é epimorfismo que cinde
e

- (ii) para todo $h : L \rightarrow M$ que não seja epimorfismo que cinde, existe $h' : L \rightarrow E$ tal que $gh' = h$.

(c) Um morfismo quase cindido à esquerda $f : N \rightarrow E$ em $\mathcal{A}$ chama-se **fonte** se para todo $h : E \rightarrow E$ tal que $hf = f$, tem-se que h é automorfismo.

(d) Um morfismo quase cindido à direita $g : E \rightarrow M$ em $\mathcal{A}$ chama-se **poço** se para todo $h : E \rightarrow E$ tal que $gh = g$, tem-se que h é automorfismo.

Proposição 1.27 Seja $f : B \rightarrow C$ um morfismo em $\mathcal{A}$.

(i) Se f é quase cindido à direita, então C é indecomponível em $\mathcal{A}$.

(ii) Se f é quase cindido à esquerda, então B é indecomponível em $\mathcal{A}$.

Definição 1.28 Uma seqüência curta exata $0 \rightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \rightarrow 0$ em $\mathcal{A}$, é uma **seqüência de Auslander-Reiten (S.A.R)** se

- (i) g é quase cindido à direita.
e

- (ii) f é quase cindido à esquerda.

O próximo resultado, um dos mais importantes da área, nos diz que, se temos uma álgebra de artin, A , então podemos garantir a existência das seqüências de Auslander-Reiten e sua unicidade. A prova pode ser encontrada em [6].

Teorema 1.29 (*Existência e Unicidade*)

Seja A uma álgebra de Artin e M indecomponível em $A\text{-mod}$.

- (i) Se M não é projetivo então existe uma única (a menos de isomorfismo) S.A.R terminando em M , assim $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$.
- (ii) Se M não é injetivo então existe uma única (a menos de isomorfismo) S.A.R começando em M , assim $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$.

Os morfismos que fazem parte das seqüências de Auslander-Reiten possuem propriedades importantes, por exemplo, relacionaremos estes com os morfismos poço e fonte.

Observação 1.30

- (i) Originalmente os morfismos fonte e poço foram chamados de “*minimal left* (resp. *right*) *almost split map*” por Auslander e Reiten, para álgebras artinianas. Posteriormente simplificados para “*source map*” e “*sink map*”.
- (ii) As condições da Definição 1.26 (c) e (d) garantem a minimalidade de tais morfismos. Note que se $g : E \longrightarrow M$ é um poço então $(g, 0) : E \oplus M \longrightarrow M$ é quase cindido à direita, mas não cumpre a condição (d). Por exemplo, $h = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : E \oplus M \longrightarrow E \oplus M$ é tal que $(g, 0)h = (g, 0)$ e este não é um automorfismo.

Para os próximos resultados consideraremos uma álgebra de artin A e tomaremos os A -módulos em $A\text{-mod}$.

Proposição 1.31 *Seja $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ uma S.A.R. Então*

- (a) g é poço e qualquer outro poço em M é isomorfo a g .
- (b) f é fonte e qualquer outra fonte em N é isomorfa a f .

Corolário 1.32 *Seja M um A -módulo indecomponível.*

- (i) *Se M não é projetivo e se $g : E \rightarrow M$ é um poço então g é um epimorfismo e $0 \rightarrow \ker g \xrightarrow{i} E \xrightarrow{g} M \rightarrow 0$ é uma S.A.R.*
- (ii) *Se M não é injetivo e se $f : M \rightarrow E$ é uma fonte então f é um monomorfismo e $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{\phi} \text{Coker } f \rightarrow 0$ é uma S.A.R.*

Podemos nos perguntar se existem morfismos poço chegando a um projetivo indecomponível ou morfismos fonte saindo de um injetivo indecomponível. O próximo resultado responde a esta pergunta. Com isto a propriedade principal de levantamento de morfismos de alguma forma generaliza-se a quase todos os módulos.

- Proposição 1.33** (a) *Se P é um projetivo indecomponível não simples então a inclusão $i : \text{rad } P \hookrightarrow P$ é um poço e qualquer outro poço em P é isomorfo a i .*
- (b) *Se I é um injetivo indecomponível não simples então a projeção natural $\phi : I \rightarrow I/\text{soc } I$ é uma fonte e qualquer outra fonte em I é isomorfa a ϕ .*

Corolário 1.34 *Seja A uma álgebra de Artin A e N' um A -módulo teremos:*

- (i) *Para cada A -módulo indecomponível M' existe um único morfismo poço $f : N' \rightarrow M'$.*
- (ii) *Para cada A -módulo indecomponível M'' existe um único morfismo fonte $f : M'' \rightarrow N'$.*

Também os morfismos que compõem as seqüências de Auslander-Reiten possuem certas propriedades de irreducibilidade. Vejamos alguns conceitos básicos.

Dada uma R -categoria abeliana e de Krull-Schmidt $\mathcal{A}$.

Definição 1.35 *Um morfismo $f : X \rightarrow Y$ em $\mathcal{A}$ é chamado irreduzível se f não é epimorfismo nem monomorfismo que cinde e para, toda decomposição de $f = gh$, tem-se que g é um epimorfismo que cinde ou h é um monomorfismo que cinde.*

É fácil ver que se $f : X \rightarrow Y$ é irreduzível então f é epimorfismo ou monomorfismo.

Proposição 1.36 *Seja M um indecomponível em $\mathcal{A}$.*

- (a) Um morfismo $h : M \rightarrow X$ em $\mathcal{A}$ é irredutível se, e somente se, existe $h' : M \rightarrow X'$ tal que $(h, h')^t : M \rightarrow X \oplus X'$ é uma fonte em M .
- (b) Um morfismo $h : X \rightarrow M$ em $\mathcal{A}$ é irredutível se, e somente se, existe $h' : X' \rightarrow M$ tal que $(h, h') : X \oplus X' \rightarrow M$ é um poço em M .

Corolário 1.37 *Morfismos fontes e poços são irredutíveis.*

Capítulo 2

Localização de Anéis não Comutativos

Neste capítulo daremos uma estrutura explícita para a localização de anéis não comutativos com unidade, mesmo que o sistema multiplicativo tenha divisores de zero. A construção consiste em, a partir de um *sistema multiplicativo* S , definir uma relação de equivalência em $R \times S$, formando um conjunto $S^{-1}R$ das classes de equivalência, o qual, junto com operações de soma, multiplicação e o morfismo canônico ($\iota_S := \iota : R \longrightarrow S^{-1}R$), formam um anel chamado de *localização de R* a partir do sistema multiplicativo S . Também construiremos, para um R -módulo M , sua localização a qual denotaremos por $S^{-1}M$ e este será um $S^{-1}R$ -módulo. Estudaremos a propriedade universal, algumas características homológicas para o processo de localização e a relação entre a localização de anéis e anéis de quocientes. Toda esta apresentação sistemática foi feita para uma melhor compreensão do leitor não especializado.

Hoje em dia a teoria de localização de anéis tem sido muito desenvolvida e é bem conhecida por especialistas em teoria de anéis (especialmente na teoria de anéis de quocientes), inclusive se afastando bastante das terminologias e dos métodos clássicos. Por conveniência para os capítulos posteriores, preferiremos construir nosso anel de localização a partir de um sistema multiplicativo, S , da forma clássica (ver [50]), o qual denotaremos por $S^{-1}R$. Todos os resultados que apresentamos aqui são bem conhecidos na teoria de anéis (ver [13], [16], [39] e [50]).

Para nós R significará um anel qualquer com unidade ($1 \in R$) e $Z(R)$ o centro do anel R . Ao longo deste capítulo consideraremos R -módulos à direita salvo se especifique o contrário.

2.1 Processo de Localização Básico Central

Começaremos com a construção da localização do anel R para o caso em que o sistema multiplicativo está contido no centro do anel R . O processo é muito similar ao usado para anéis comutativos (ver [2]).

Definimos o sistema multiplicativo e a relação de equivalência da seguinte forma.

Definição 2.1 Um subconjunto $S \subseteq R$ é um *sistema multiplicativo central* se satisfizer as seguintes condições:

SM1 $S \subset Z(R)$.

SM2 $1 \in S$ e para $s, t \in S$ tem-se que $st \in S$.

Definição 2.2 Considere a seguinte relação, para (a, s) e (a', s') em $R \times S$,

$$(a, s) \equiv (a', s') \text{ se, e somente se, existe } u \in S \text{ tal que } (as' - a's)u = 0.$$

Esta relação em $R \times S$, a chamaremos de *relação básica de localização*.

Lema 2.3 A relação de localização básica é uma relação de equivalência.

Demonstração. Provaremos somente a propriedade transitiva, já que as propriedades reflexiva e simétrica são claras. Suponhamos que $(a, s) \equiv (a', s')$ e $(a', s') \equiv (a'', s'')$, logo existem $v, w \in S$ tais que

$$(as' - a's)v = 0$$

e

$$(a's'' - a''s')w = 0.$$

Multiplicando por ws'' e vs respectivamente e em seguida somando as igualdades resultantes obtemos $(as'' - a''s)wvs' = 0$. Portanto $(a, s) \equiv (a'', s'')$. $\square$

Denotemos por $\frac{a}{s}$ a classe de equivalência de (a, s) . Seja $S^{-1}R$ o conjunto destas classes de equivalência. Daremos a $S^{-1}R$ uma estrutura de anel com as operações usuais de soma e multiplicação, isto é:

Definição 2.4 Sejam $\frac{a}{s}$ e $\frac{b}{t}$ em $S^{-1}R$.

(1) **Soma:** $\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at+bs}{st}$.

(2) **Multiplicação:** $\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$.

É fácil ver que estas operações estão bem definidas e com elas $S^{-1}R$ é um anel com elemento unidade. O elemento unidade é $\frac{1}{1}$, o elemento nulo é $\frac{0}{1}$ e $(\frac{s}{1})^{-1} = \frac{1}{s}$ para todo $s \in S$. Para que $\frac{a}{1} = 0$ é necessário e suficiente que exista $t \in S$ tal que $at = 0$.

O morfismo canônico de R em $S^{-1}R$ é definido por $\iota(a) = \frac{a}{1}$. Ele é caracterizado pela seguinte propriedade universal.

Proposição 2.5 Seja $g : R \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis tal que, para todo $s \in S$, $g(s)$ é unidade em B e está em $Z(B)$. Então existe um único homomorfismo de anéis $h : S^{-1}R \rightarrow B$ tal que $h\iota = g$.

Demonstração. (i) Unicidade. Se existir h tal que $h\iota = g$, então $h(\frac{a}{1}) = h\iota(a) = g(a)$ para todo $a \in R$. Portanto, se $s \in S$, temos que $h(\frac{1}{s}) = h((\frac{s}{1})^{-1}) = g(s)^{-1}$, assim $h(\frac{a}{s}) = h(\frac{a}{1})h(\frac{1}{s}) = g(a)g(s)^{-1}$. Logo h está univocamente determinado por g .

(ii) Existência. Seja $h(\frac{a}{s}) = g(a)g(s)^{-1}$, para $\frac{a}{s} \in S^{-1}R$.

Sejam $\frac{a}{s}, \frac{a'}{s'}$ e $\frac{b}{t}$ em $S^{-1}R$.

Provaremos que h está bem definido. Suponhamos $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$, logo existe $t \in S$ tal que $(as' - a's)t = 0$. Logo $g(as' - a's)g(t) = 0$ e como $g(t)$ é unidade temos que $g(a)g(s)^{-1} = g(a')g(s')^{-1}$.

Agora provaremos que h é um homomorfismo de anéis. De fato $h(\frac{a}{s} + \frac{b}{t}) = h(\frac{at+bs}{st}) = g(at+bs)g(st)^{-1} = g(a)g(s)^{-1} + g(b)g(t)^{-1} = h(\frac{a}{s}) + h(\frac{b}{t})$. $\square$

Observação 2.6 Se g for um epimorfismo de anéis não precisamos da hipótese de $g(s)^{-1} \in Z(B)$ para todo $s \in S$, já que, $g(Z(R)) \subset Z(B)$ e como $S \subset Z(R)$, então para todo $s \in S$ temos que $g(s)^{-1} \in Z(B)$.

Segue-se facilmente que o anel $S^{-1}R$ e o homomorfismo canônico $\iota : R \rightarrow S^{-1}R$ têm as seguintes propriedades:

1. Se $s \in S$ então $\iota(s)$ é unidade em $S^{-1}R$ e está em $Z(S^{-1}R)$.
2. Se $\iota(a) = 0$ então $as = 0$ para algum $s \in S$.

3. Cada elemento de $S^{-1}R$ é da forma $\iota(a)\iota(s)^{-1}$ para algum $a \in R$ e $s \in S$.

Reciprocamente estas três condições determinam o anel $S^{-1}R$, salvo isomorfismo, isto é,

Corolário 2.7 *Se $g : R \rightarrow B$ for um homomorfismo de anéis satisfazendo as seguintes condições:*

- (i) *Se $s \in S$, então $g(s)$ é unidade em B e está em $Z(B)$ para todo $s \in S$.*
- (ii) *Se $g(a) = 0$, então $as = 0$ para algum $s \in S$.*
- (iii) *Cada elemento de B é da forma $g(a)g(s)^{-1}$ para algum $a \in R$ e $s \in S$.*

Então existe um único isomorfismo de anéis $h : S^{-1}R \rightarrow B$ tal que $h\iota = g$.

Demonstração. Pela Proposição 2.5 basta provar que $h : S^{-1}R \rightarrow B$ definida por $h(\frac{a}{s}) = g(a)g(s)^{-1}$, para $\frac{a}{s} \in S^{-1}R$, é injetora.

Suponhamos que $h(\frac{a}{s}) = 0$, então $g(a) = 0$. Logo, por hipótese existe $t \in S$ tal que $at = 0$. Portanto $\frac{a}{s} = 0$. $\square$

Para estudar algumas propriedades homológicas veremos que o processo de construção de $S^{-1}R$ pode-se estender a um R -módulo à direita M . Para isto definimos a relação em $M \times S$ como segue:

$$(m, s) \equiv (m', s') \text{ se, e somente se, existe } t \in S \text{ tal que } (ms' - m's)t = 0.$$

Esta é uma relação de equivalência e a prova é análoga à feita para o Lema 2.3.

Indicaremos por $\frac{m}{s}$ a classe do par (m, s) e por $S^{-1}M$ o conjunto destas classes de equivalência. Definimos uma estrutura de $S^{-1}R$ -módulo para $S^{-1}M$, assim:

$$\begin{aligned} \frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} &= \frac{ms' + m's}{ss'} \\ \frac{m}{t} \cdot \frac{a}{s} &= \frac{ma}{ts} \end{aligned}$$

Observemos que estas operações estão bem definidas e com elas $S^{-1}M$ é um $S^{-1}R$ -módulo. Em particular, $\frac{m}{1} = 0 = \frac{0}{1}$, se e somente se, existe $t \in S$ tal que $mt = 0$.

Podemos definir agora um funtor da categoria de $Mod-R$ para $Mod-S^{-1}R$.

Definição 2.8 Dado um R -homomorfismo $u : M \rightarrow N$. Ele induz um homomorfismo de $S^{-1}R$ -módulos da seguinte forma $S^{-1}u : S^{-1}M \rightarrow S^{-1}N$, definido por $S^{-1}u\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{u(m)}{s}$.

Para dois R -homomorfismos $u : M \rightarrow N$ e $v : N \rightarrow M'$, temos que $S^{-1}(vu) = S^{-1}(v)S^{-1}(u)$. Segue facilmente que S^{-1} é um funtor de $\text{Mod-}R$ em $\text{Mod-}S^{-1}R$ e o chamaremos **funtor de localização** com respeito a S .

Proposição 2.9 O funtor de localização S^{-1} é exato, isto é, dada uma seqüência curta exata de R -módulos

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

temos que a seqüência curta de $S^{-1}R$ -módulos

$$0 \longrightarrow S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}(f)} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}(g)} S^{-1}M'' \longrightarrow 0$$

é exata.

Demonstração. (i) $S^{-1}(f)$ é injetiva, já que, se $\frac{f(m)}{s} = \frac{0}{1}$ então existe $t \in S$ tal que $f(m)t = 0$. Como f é injetora temos que $mt = 0$, portanto $\frac{m}{s} = \frac{0}{1}$.

(ii) Claramente $S^{-1}(g)$ é sobrejetora.

(iii) Como $gf = 0$ temos que $S^{-1}(g)S^{-1}(f) = 0$, logo $\text{Im}S^{-1}(f) \subset \ker S^{-1}(g)$. Seja $\frac{m}{s} \in \ker S^{-1}(g)$ então $\frac{g(m)}{s} = \frac{0}{1}$, assim existe $t \in S$ tal que $g(m)t = 0$. Como $\ker g = \text{Im}f$ temos que existe m' tal que $f(m') = mt$. Portanto

$$\frac{m}{s} = \frac{f(m')}{st} = S^{-1}(f)\left(\frac{m'}{st}\right).$$

□

O funtor de localização S^{-1} comuta com somas finitas, intersecções finitas e quocientes. Mais precisamente,

Corolário 2.10 Sejam N e M' R -submódulos do R -módulo M e S^{-1} o funtor de localização. Então valem as seguintes afirmações:

(i) $S^{-1}(N + M') = S^{-1}N + S^{-1}M'.$

(ii) $S^{-1}(N \cap M') = S^{-1}N \cap S^{-1}M'.$

(iii) $S^{-1}(M/N) \cong S^{-1}M/S^{-1}N$ como $S^{-1}R$ -módulos.

Demonstração. (i) É óbvio que $\frac{m}{s} + \frac{p}{s} = \frac{ms+ps}{ss} = \frac{m+p}{s}$.

(ii) Da Proposição 2.9 temos que $S^{-1}(N \cap M') \subset S^{-1}N \cap S^{-1}M'$. Agora se $x \in S^{-1}N \cap S^{-1}M'$ então $x = \frac{y}{s} = \frac{z}{t}$ com $y \in N, z \in M'$ e $s, t \in S$. Assim existe $u \in S$ tal que $(yt - zs)u = 0$ Logo $w = ytu = zsu \in N \cap M'$ e então $\frac{y}{s} \in S^{-1}(N \cap M')$.

(iii) Temos a seguinte seqüência curta exata de R -módulos

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M/N \longrightarrow 0.$$

Logo pela Proposição 2.9 segue-se que a seqüência curta

$$0 \longrightarrow S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}(M/N) \longrightarrow 0$$

é exata, isto é $S^{-1}(M/N) \cong S^{-1}M/S^{-1}N$. □

Proposição 2.11 *Seja M um R -módulo, então $M \otimes_R S^{-1}R \cong S^{-1}M$ como $S^{-1}R$ -módulos. Tal $S^{-1}R$ -isomorfismo é natural.*

Demonstração. A aplicação

$$\begin{aligned} M \times S^{-1}R &\longrightarrow S^{-1}M \\ (m, \frac{a}{s}) &\longmapsto \frac{ma}{s} \end{aligned}$$

é R -balanceada e portanto pela propriedade universal do produto tensorial existe um R -homomorfismo

$$f : M \otimes_R S^{-1}R \longrightarrow S^{-1}M$$

Claramente f é sobrejetor. Sejam

$$\sum_{i=1}^n m_i \otimes \frac{a_i}{s_i} \text{ em } M \otimes_R S^{-1}R, \quad s = \prod_{i=1}^n s_i \quad \text{e} \quad t_i = \prod_{j \neq i} s_j,$$

logo

$$\sum_{i=1}^n m_i \otimes \frac{a_i}{s_i} = \sum_{i=1}^n m_i \otimes \frac{a_i t_i}{s} = \sum_{i=1}^n m_i a_i t_i \otimes \frac{1}{s}.$$

Assim cada elemento de $M \otimes_R S^{-1}R$ é da forma $m \otimes \frac{1}{s}$.

Se $f(m \otimes \frac{1}{s}) = \frac{m}{s} = 0$, então existe $t \in S$ tal que $mt = 0$, assim

$$m \otimes \frac{1}{s} = mt \otimes \frac{1}{st} = 0.$$

Portanto f é injetora. A naturalidade do $S^{-1}R$ isomorfismo é imediata. $\square$

Corolário 2.12 $S^{-1}R$ é um R -módulo plano.

Demonstração. Se $0 \rightarrow N \rightarrow M$ for uma seqüência exata de R -módulos, então pelas Proposições 2.9 e 2.11 temos que a seguinte seqüência

$$0 \longrightarrow N \otimes_R S^{-1}R \longrightarrow M \otimes_R S^{-1}R$$

é exata e portanto $S^{-1}R$ é um R -módulo plano. $\square$

Terminaremos esta seção com o estudo do exemplo seguinte, o qual nos permitirá obter algumas propriedades locais.

Exemplo 2.13 Dados R um anel e $\mathfrak{p}$ um ideal primo de R tal que $R \setminus \mathfrak{p} \subset Z(R)$, é fácil ver que $S = R \setminus \mathfrak{p}$ é um sistema multiplicativo central. Neste caso denotaremos $S^{-1}R$ por $R_{\mathfrak{p}}$ e, para um R -módulo M , $S^{-1}M$ por $M_{\mathfrak{p}}$. De agora em diante, assumiremos que para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de R , tem-se que $R \setminus \mathfrak{p} \subset Z(R)$.

Proposição 2.14 *Seja M um R -módulo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $M = 0$.
- (ii) $M_{\mathfrak{p}} = 0$ para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de R .
- (iii) $M_{\mathfrak{m}} = 0$ para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R .

Demonstração. As implicações (i) $\Rightarrow$ (ii) e (ii) $\Rightarrow$ (iii) são imediatas.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Sejam $M \neq 0$, $0 \neq x \in M$ e $\mathfrak{q} = \text{Ann}(x) = \{r \in R/xr = 0\}$. Logo $\mathfrak{q}$ está contido num ideal maximal $\mathfrak{m}$, pois $\mathfrak{q} \neq (1)$. Temos que $\frac{x}{1} \in M_{\mathfrak{m}}$ e como $M_{\mathfrak{m}} = 0$ logo $\frac{x}{1} = 0$, portanto existe $s \notin \mathfrak{m}$ tal que $xs = 0$, o qual é uma contradição com $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}$. $\square$

Proposição 2.15 *Seja $\phi : M \longrightarrow N$ um R -homomorfismo. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) ϕ é injetora. (resp. sobrejetora).
- (ii) $\phi_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \longrightarrow N_{\mathfrak{p}}$ é injetora para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de R . (resp. sobrejetora).
- (iii) $\phi_{\mathfrak{m}} : M_{\mathfrak{m}} \longrightarrow N_{\mathfrak{m}}$ é injetora para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R . (resp. sobrejetora).

Demonstração. Provaremos somente o caso no qual os morfismos são injetivos. A prova do caso dos morfismos sobrejetivos é análoga.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Se a seqüência

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\phi} N$$

é exata, pela Proposição 2.9 temos que, para todo ideal primo $\mathfrak{p}$, a seqüência

$$0 \longrightarrow M_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\phi_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}}$$

é exata e portanto $\phi_{\mathfrak{p}}$ é injetora.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) é trivial.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Seja $M' = \ker \phi$, então temos a seguinte seqüência exata

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \xrightarrow{\phi} N$$

e pela Proposição 2.9 temos que, para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$, a seqüência

$$0 \longrightarrow M'_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\phi_{\mathfrak{m}}} M_{\mathfrak{m}} \longrightarrow N_{\mathfrak{m}}$$

é exata. Logo $M'_{\mathfrak{m}} \cong \ker \phi_{\mathfrak{m}}$. Sabemos da hipótese que $\phi_{\mathfrak{m}}$ é injetora, logo pela Proposição 2.14 temos que $M' = 0$. $\square$

Observação 2.16 Tudo o que foi feito para R -módulos à direita pode-se fazer para R -módulos à esquerda, basta tomar a seguinte relação de equivalência:

$$(m, s) \equiv (m', s') \text{ se, e somente se, existe } t \in S \text{ tal que } t(s'm - sm') = 0$$

e definir as operações de soma e multiplicação da forma usual.

A partir da observação podemos provar que o funtor de localização S^{-1} , comuta com o produto tensorial.

Proposição 2.17 *Sejam M um R -módulo à direita e N um R -bimódulo então $S^{-1}M \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}N \cong S^{-1}(M \otimes_R N)$ e este $S^{-1}R$ -isomorfismo é natural.*

Demonstração. Das propriedades do produto tensorial e pela Proposição 2.11 temos que:

$$\begin{aligned} S^{-1}M \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}N &\cong (M \otimes_R S^{-1}R) \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}N \\ &\cong M \otimes_R (S^{-1}R \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}N) \\ &\cong M \otimes_R S^{-1}N \\ &\cong M \otimes_R (N \otimes_R S^{-1}R) \\ &\cong (M \otimes_R N) \otimes_R S^{-1}R \\ &\cong S^{-1}(M \otimes_R N) \end{aligned}$$

A prova da naturalidade é imediata. □

No caso do Exemplo 2.13, o isomorfismo da Proposição acima assume a seguinte forma:

$$M_{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}} \cong (M \otimes_R N)_{\mathfrak{p}}.$$

Finalizaremos esta seção com uma propriedade local para os módulos planos.

Proposição 2.18 *Para um R -módulo M , as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) M é um R -módulo plano.
- (ii) $M_{\mathfrak{p}}$ é um R -módulo plano para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de R .

(iii) $M_{\mathfrak{m}}$ é um R -módulo plano para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R .

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) Temos o morfismo canônico de anéis $\iota : R \rightarrow R_{\mathfrak{p}}$. Como M é um R -módulo plano, pela Proposição 1.9 temos que $M \otimes_R R_{\mathfrak{p}}$ é um $R_{\mathfrak{p}}$ -módulo plano e pela Proposição 2.11 $M_{\mathfrak{p}}$ é um $R_{\mathfrak{p}}$ -módulo plano. Como $R_{\mathfrak{p}}$ é um R -módulo plano (Corolário 2.12), então $M_{\mathfrak{p}}$ é um R -módulo plano.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) É óbvia.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Sejam $N \rightarrow L$ um R -homomorfismo e $\mathfrak{m}$ um ideal maximal de R . Se $N \rightarrow L$ for injetora, pela Proposição 2.15 temos que $N_{\mathfrak{m}} \rightarrow L_{\mathfrak{m}}$ é injetora. Da hipótese deduz-se que $M_{\mathfrak{m}}$ é um $R_{\mathfrak{m}}$ -módulo plano, $M_{\mathfrak{m}} \otimes_{R_{\mathfrak{m}}} N_{\mathfrak{m}} \rightarrow M_{\mathfrak{m}} \otimes_{R_{\mathfrak{m}}} L_{\mathfrak{m}}$ é injetora e usando a Proposição 2.17 temos que $(M \otimes_R N)_{\mathfrak{m}} \rightarrow (M \otimes_R L)_{\mathfrak{m}}$ é injetora. Novamente pela Proposição 2.15 temos que $M \otimes_R N \rightarrow M \otimes_R L$ é injetora e portanto M é um R -módulo plano. $\square$

2.2 Processo de Localização Central

Nesta seção faremos a construção da localização do anel R , no caso de ter um sistema multiplicativo central (ver Definição 2.1), mas generalizaremos a relação de equivalência, isto é, tomaremos a seguinte relação:

Definição 2.19 Dado um sistema multiplicativo central S , chamaremos **relação de localização à relação**, em $R \times S$, definida por

$$(a, s) \equiv (a', s') \text{ se, e somente se, existem } r \in S \text{ e } p, p' \in R \text{ tais que } r = sp = s'p' \text{ e } ap = a'p'.$$

Já que S é um sistema multiplicativo central, é fácil ver que a relação de localização é uma relação de equivalência. Denotemos por $\frac{a}{s}$ a classe de equivalência de (a, s) e por $S^{-1}R$ o conjunto destas classes de equivalência.

Daremos a $S^{-1}R$ uma estrutura de anel a partir das operações de soma e multiplicação definidas em 2.4.

Lema 2.20 As operações de soma e multiplicação dadas em 2.4 estão bem definidas.

Demonstração. Sejam $\frac{a}{s}, \frac{a'}{s'}$ e $\frac{b}{t}$ em $S^{-1}R$ e suponhamos que $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$. Temos então que existem $r \in S$ e $c, p, p' \in R$ tais que $r = sp = s'p'$ e $c = ap = a'p'$, logo $rt = stp = s'tp'$ e também $(ta + sb)p = tap + sbp = ta'p' + bs'p' = (ta' + s'b)p'$. Portanto $\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{a'}{s'} + \frac{b}{t}$.

Por outro lado temos que $s'asp = sa's'p'$, isto é, $abrs' = a'brs$. Fazendo $n = s'tr^2 \in S$, $l = rs'p$ e $l' = rs'p'$ temos que $n = stl = s'tl'$ e $d = abl = a'bl'$. Portanto $\frac{a}{s} \frac{b}{t} = \frac{a'}{s'} \frac{b}{t}$. $\square$

É fácil ver que, com estas operações $S^{-1}R$ é um anel com elemento unidade. O elemento unidade é $\frac{1}{1}$, o elemento nulo é $\frac{0}{1}$ e $(\frac{s}{1})^{-1} = \frac{1}{s}$.

O morfismo canônico de R em $S^{-1}R$ é definido por $\iota(a) = \frac{a}{1}$; é claro que ι é um homomorfismo de anéis e ele é caracterizado pela seguinte propriedade universal.

Proposição 2.21 *Seja $g : R \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis tal que, para todo $s \in S$, $g(s)$ é unidade em B e está em $Z(B)$. Então existe um único homomorfismo de anéis $h : S^{-1}R \rightarrow B$ tal que $h\iota = g$.*

Demonstração. Basta provar que $h(\frac{a}{s}) = g(a)g(s)^{-1}$ (onde $\frac{a}{s} \in S^{-1}R$) está bem definido. O resto da prova é análoga à feita na Proposição 2.5.

Suponhamos $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$, logo existem $r \in S$ e $p, p' \in R$ tais que $r = sp = s'p'$ e $ap = a'p'$. Temos as seguintes igualdades $g(s)^{-1}g(r) = g(p)$, $g(s')^{-1}g(r) = g(p')$ e $g(a)g(p) = g(a')g(p')$ e delas segue-se que $g(a)g(s)^{-1} = g(a')g(s')^{-1}$. $\square$

Segue-se facilmente que o anel $S^{-1}R$ e o homomorfismo $\iota : R \rightarrow S^{-1}R$ têm as seguintes propriedades:

1. Se $s \in S$ então $\iota(s)$ é unidade em $S^{-1}R$ e está em $Z(S^{-1}R)$.
2. Se $\iota(a) = 0$ então $sa = 0$ para algum $s \in S$.
3. Cada elemento de $S^{-1}R$ é da forma $\iota(a)\iota(s)^{-1}$ para algum $a \in R$ e $s \in S$.

Reciprocamente estas três condições determinam o anel $S^{-1}R$ salvo isomorfismo. Provaremos isto, no seguinte corolário.

Corolário 2.22 *Se $g : R \rightarrow B$ for um homomorfismo de anéis satisfazendo as seguintes afirmações:*

- (i) *Se $s \in S$ então $g(s)$ é unidade em $S^{-1}B$ e está em $Z(B)$.*

- (ii) Se $g(a) = 0$ então $sa = 0$ para algum $s \in S$.
- (iii) Cada elemento de B é da forma $g(a)g(s)^{-1}$ para algum $a \in R$ e $s \in S$.

Então existe um único isomorfismo de anéis $h : S^{-1}R \rightarrow B$ tal que $h\iota = g$.

Demonstração. Pela Proposição 2.21 basta provar que $h : S^{-1}R \rightarrow B$ definida por $h(\frac{a}{s}) = g(a)g(s)^{-1}$, para $\frac{a}{s} \in S^{-1}R$, é injetora.

Suponhamos que $h(\frac{a}{s}) = 0$, então $g(a) = 0$, por hipótese $ta = 0$ para algum $t \in S$. Fazendo $r = st \in S$ e $p' = st$ temos que $r = st = 1p'$ e $at = 0p'$. Portanto $\frac{a}{s} = 0$. $\square$

O processo de localização em S pode ser feito para um R -módulo M . Para isto definimos a relação em $M \times S$ como segue:

Definição 2.23 $(m, s) \equiv (m', s')$ se, e somente se, existem $r \in S$ e $p, p' \in R$ tais que $r = sp = s'p'$ e $mp = m'p'$.

Lema 2.24 Esta é uma relação de equivalência.

Demonstração. A demonstração é análoga à feita para o Lema 2.32. $\square$

Indica-se por $\frac{m}{s}$ a classe do par (m, s) e por $S^{-1}M$ o conjunto destas classes de equivalência. Definimos uma estrutura de $S^{-1}R$ -módulo para $S^{-1}M$ assim:

$$\begin{aligned} \frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} &= \frac{ms' + m's}{ss'} \\ \frac{m}{t} \cdot \frac{a}{s} &= \frac{ma}{ts} \end{aligned}$$

É claro que estas operações estão bem definidas e com elas $S^{-1}M$ é um $S^{-1}R$ -módulo. Isto nos permitirá estudar algumas propriedades homológicas.

De forma análoga à feita na Definição 2.8, define-se o funtor de localização S^{-1} .

Proposição 2.25 O funtor S^{-1} é exato, isto é, dada uma seqüência curta exata

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

Então a seqüência curta

$$0 \longrightarrow S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}(f)} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}(g)} S^{-1}M'' \longrightarrow 0$$

é exata.

Demonstração. (i) A aplicação $S^{-1}(f)$ é injetiva, já que, se $\frac{f(m)}{s} = \frac{0}{1}$, então existem $t \in S$ e $p, p' \in R$ tais que $t = sp = p'$ e $f(m)p = 0$ e como f é injetora temos que $mp = 0$. Portanto $\frac{m}{s} = \frac{0}{1}$.

(ii) Claramente $S^{-1}(g)$ é sobrejetora.

(iii) Como $gf = 0$ temos que $S^{-1}(g)S^{-1}(f) = 0$. Logo $Im S^{-1}(f) \subset ker S^{-1}(g)$. Seja $\frac{m}{s} \in ker S^{-1}(g)$, então $\frac{g(m)}{s} = \frac{0}{1}$, assim existem $t \in S$ e $l, l' \in R$ tais que $t = sl = l'$ e $g(m)l = 0$. Como $ker g = Im f$ temos que existe m' tal que $f(m') = ml$. Portanto

$$\frac{m}{s} = \frac{f(m')}{sl} = S^{-1}(f) \left(\frac{m'}{t} \right).$$

□

Corolário 2.26 O funtor de localização S^{-1} comuta com somas finitas, intersecções finitas e quocientes. Mais precisamente, se N e M' são R -submódulos do R -módulo M então

- (i) $S^{-1}(N + M') = S^{-1}N + S^{-1}M'$.
- (ii) $S^{-1}(N \cap M') = S^{-1}N \cap S^{-1}M'$.
- (iii) $S^{-1}(M/N) \cong S^{-1}M / S^{-1}N$ como $S^{-1}R$ -módulos.

Demonstração.

(i) É óbvio que $\frac{m}{s} + \frac{p}{s} = \frac{ms+ps}{ss} = \frac{m+p}{s}$.

(ii) Da Proposição 2.25 temos que $S^{-1}(N \cap M') \subset S^{-1}N \cap S^{-1}M'$. Agora se $x \in S^{-1}N \cap S^{-1}M'$ então $x = \frac{y}{s} = \frac{z}{t}$ com $y \in N$, $z \in M'$ e $s, t \in S$. Assim existem $u \in S$ e $p, p' \in R$ tais que $u = sp = tp'$ e $yp = zp'$. Logo $yp \in N \cap M'$, com $\frac{y}{s} = \frac{yp}{sp}$. Portanto $\frac{y}{s} \in S^{-1}(N \cap M')$.

(iii) A prova é análoga à feita para o Corolário 2.10 (iii).

□

Proposição 2.27 Seja M um R -módulo, então $M \otimes_R S^{-1}R \cong S^{-1}M$ como $S^{-1}R$ -módulos e este $S^{-1}R$ -isomorfismo é natural.

Demonstração. A aplicação

$$\begin{aligned} M \times S^{-1}R &\longrightarrow S^{-1}M \\ (m, \frac{a}{s}) &\longmapsto \frac{ma}{s} \end{aligned}$$

é R -balanceada e portanto pela propriedade universal do produto tensorial existe um R -homorfismo

$$f : M \otimes_R S^{-1}R \longrightarrow S^{-1}M$$

Claramente é sobrejetor. De igual forma à prova feita na Proposição 2.11 obtem-se que cada elemento de $M \times S^{-1}R$ é da forma $m \otimes \frac{1}{s}$.

Suponhamos que $\frac{m}{s} = \frac{0}{1}$, então existem $t \in S$ e $p, p' \in R$ tais que $t = sp = p'$ e $mp = 0$. Portanto,

$$m \otimes \frac{1}{s} = mp \otimes \frac{1}{sp} = 0.$$

A prova da naturalidade é imediata. □

Corolário 2.28 $S^{-1}R$ é um R -módulo plano.

Demonstração. A prova é igual à feita para o Corolário 2.12. □

Observação 2.29 Tudo o que foi feito para R -módulos à direita pode-se fazer para R -módulos à esquerda, basta tomar a seguinte relação de equivalência:

$$(m, s) \equiv (m', s') \text{ se, e somente se, existem } r \in S \text{ e } p, p' \in R \text{ tais que } r = ps = p's' \text{ e } pm = p'm'.$$

e definir as operações de soma e multiplicação da forma usual.

Da Observação acima obtém-se que o funtor de localização S^{-1} comuta com o produto tensorial.

Proposição 2.30 Sejam M um R -módulo à direita e N um R -bimódulo então $S^{-1}M \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}N \cong S^{-1}(M \otimes_R N)$ e este $S^{-1}R$ -isomorfismo é natural.

Demonstração. A prova é igual à feita para a Proposição 2.17. □

2.3 Processo de Localização

Nas duas seções anteriores o processo de localização de R , foi feito, para o caso de termos um sistema multiplicativo central. Agora, obteremos a localização para um sistema multiplicativo qualquer, ainda tendo divisores de zero. Para isto continuaremos com a relação de localização (ver Definição 2.19) e definiremos o sistema multiplicativo da seguinte forma.

Definição 2.31 Um subconjunto $S \subseteq R$ é um *sistema multiplicativo* se satisfaz as seguintes condições:

SM1 Para $s \in S$ e $u \in R$, se $su \in S$ tem-se que $u \in S$.

SM2 $1 \in S$ e para $s, t \in S$ tem-se que $st \in S$.

SM3 (Propriedade de Ore à direita). Para $s \in S$ e $u \in R$ tem-se que existem $t \in S$ e $v \in R$ tais que $sv = ut$.

SM4 Para todo $u, v \in R$ as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) Existe $t \in S$ tal que $ut = vt$.
- (ii) Existe $s \in S$ tal que $su = sv$.

Lema 2.32 Se S for um sistema multiplicativo então a relação de localização é uma relação de equivalência.

Demonstração. Provaremos somente a propriedade transitiva, já que as propriedades reflexiva e simétrica podem ser facilmente deduzidas. Suponhamos que $(a, s) \equiv (a', s')$ e $(a', s') \equiv (a'', s'')$, logo existem $r, t \in S$ e $p, p', q, q' \in R$ tais que:

$$r = sp = s'p', \quad ap = a'p'$$

e

$$t = s'q = s''q', \quad a'q = a''q'$$

Por SM3, para $s'q \in S$ e $s'p' \in R$, existem $t' \in S$ e $r' \in R$ tais que $s'qr' = s'p't'$. Já que $s' \in S$ por SM4 existe $u \in S$ tal que

$$qr'u = p't'u.$$

Fazendo $x = rt'u$ ($x \in S$), $y = pt'u$ e $y' = q'r'u$. Obtemos que $x = sy = s''y'$ e $ay = a''y'$ e portanto $(a, s) \equiv (a'', s'')$. $\square$

Denotemos por $\frac{a}{s}$ a classe de equivalência de (a, s) e seja $S^{-1}R$ o conjunto destas classes de equivalência. Agora definiremos as operações para dar a $S^{-1}R$ uma estrutura de anel.

Definição 2.33 Multiplicação:

Para $\frac{a}{s}, \frac{b}{t}$ em $S^{-1}R$, como $t \in S$ e $a \in R$ logo, por SM3, existem $r \in S$ e $c \in R$ tais que $tc = ar$, definimos:

$$\frac{b}{t} \cdot \frac{a}{s} = \frac{bc}{sr}$$

Lema 2.34 *A multiplicação acima, está bem definida.*

Demonstração. (a) Sejam $\frac{a}{s}, \frac{a'}{s'}$ e $\frac{b}{t}$ em $S^{-1}R$. Suponhamos que $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$, assim existem $u \in S$ e $x, x' \in R$ tais que

$$u = sx = s'x' \quad \text{e} \quad ax = a'x'.$$

Multiplicando $\frac{a}{s}$ e $\frac{a'}{s'}$ com $\frac{b}{t}$ obtemos respectivamente:

$$\frac{b}{t} \frac{a}{s} = \frac{bc}{sr}, \text{ para } r \in S \text{ e } c \in R \text{ tal que } tc = ar$$

e

$$\frac{b}{t} \frac{a'}{s'} = \frac{bc'}{s'r'}, \text{ para } r' \in S \text{ e } c' \in R \text{ tal que } tc' = a'r'.$$

Como $r, r' \in S$ e $x, x' \in R$ aplicando duas vezes SM3 existem respectivamente $p, p' \in S$ e $q, q' \in R$ tais que

$$rq = xp \quad \text{e} \quad r'q' = x'p'$$

Como $p' \in S$ e $p \in R$, de novo por SM3, existem $h \in S$ e $k \in R$ tais que

$$p'k = ph.$$

Agora

$$tcqh = arqh = axph = a'x'ph = a'x'p'k = a'r'q'k = tc'q'k.$$

Assim $tcqh = tc'q'k$ e como $t \in S$ por SM4 temos que existe $w \in S$ tal que

$$cqh = c'q'kw.$$

Fazendo $f = uphw$ que esta em S , $v = qhw$ e $v' = q'kw$. Obtemos que $f = srv = s'r'v'$ e $bcv = bc'v'$ e portanto

$$\frac{bc}{sr} = \frac{bc'}{s'r'}. \quad \text{isto é,} \quad \frac{b}{t} \frac{a}{s} = \frac{b'}{t'} \frac{a'}{s'}.$$

(b) Sejam $\frac{a}{s}, \frac{b}{t}$ e $\frac{b'}{t'}$ em $S^{-1}R$. Suponhamos que $\frac{b}{t} = \frac{b'}{t'}$, assim existem $u' \in S$ e $y, y' \in R$ tais que

$$u' = ty = t'y' \quad \text{e} \quad by = b'y'.$$

Utilizamos SM1, para obter que $y, y' \in S$.

Multiplicando $\frac{b}{t}$ e $\frac{b'}{t'}$ com $\frac{a}{s}$ obtemos respectivamente:

$$\frac{b}{t} \frac{a}{s} = \frac{bd}{sr_1}, \text{ para } r_1 \in S \text{ e } d \in R \text{ tal que } td = ar_1$$

e

$$\frac{b'}{t'} \frac{a}{s} = \frac{b'd'}{sr_2}, \text{ para } r_2 \in S \text{ e } d' \in R \text{ tal que } t'd' = a'r_2.$$

Como $y, y' \in S$ e $d, d' \in R$ aplicando duas vezes SM3 existem respectivamente $q_1'', q_2'' \in S$ e $q_1', q_2' \in R$ tais que

$$yq_1' = dq_1'' \quad \text{e} \quad y'q_2' = d'q_2''$$

Como $sr_2q_2'' \in S$ e $sr_1q_1'' \in R$, de novo por SM3, existem $p'' \in S$ e $p' \in R$ tais que

$$sr_2q_2''p' = sr_1q_1''p''.$$

Como $s \in S$ por SM4 existe $w' \in S$ tal que

$$r_2 q_2'' p' w' = r_1 q_1'' p'' w'.$$

É fácil ver que $u' q_1' p'' w' = u' q_2' p' w'$ e por SM4 existe $w'' \in S$ tal que

$$q_1' p'' w' w'' = q_2' p' w' w''.$$

Fazendo $g = sr_1 q_1'' p'' w' w''$ que esta em S , $l = q_1' p'' w' w''$ e $l' = q_2' p' w' w''$. Obtemos que $g = sr_1 l = sr_2 l'$ e $bdl = b'd'l'$ e portanto

$$\frac{bd}{sr_1} = \frac{b'd'}{sr_2}. \quad \text{isto é,} \quad \frac{b}{t} \frac{a}{s} = \frac{b'}{t'} \frac{a}{s}.$$

□

Lema 2.35 *A multiplicação, definida em 2.33, é associativa.*

Demonstração. Sejam $\frac{a}{s}$, $\frac{a'}{s'}$ e $\frac{a''}{s''}$ em $S^{-1}R$. Fazendo as multiplicações $\frac{a''}{s''} \left(\frac{a'}{s'} \frac{a}{s} \right)$ e $\left(\frac{a''}{s''} \frac{a'}{s'} \right) \frac{a}{s}$ obtemos respectivamente:

$$\frac{a'}{s'} \frac{a}{s} = \frac{a'r'}{sr}, \text{ onde } s'r' = ar, \text{ para } r \in S \text{ e } r' \in R,$$

$$\frac{a''}{s''} \frac{a'r'}{sr} = \frac{a''t'}{srt}, \text{ onde } s''t' = a'r't, \text{ para } t \in S \text{ e } t' \in R,$$

$$\frac{a''}{s''} \frac{a'}{s'} = \frac{a''m'}{s'm'}, \text{ onde } a'm' = s''m, \text{ para } m' \in S \text{ e } m \in R,$$

e

$$\frac{a''m'}{s'm'} \frac{a}{s} = \frac{a''mn}{sn'}, \text{ onde } s'm'n = an', \text{ para } n' \in S \text{ e } n \in R.$$

Como $sn' \in S$ e $str \in R$ por SM3 existem $f \in S$ e $f' \in R$ tais que

$$sn'f' = srtf.$$

Como $s \in S$ e $srtf = sn'f'$ logo por SM4 existe $w \in S$ tal que

$$rtfw = n'f'w.$$

Agora, multiplicando esta ultima igualdade por a , e, no resultado substituímos, an' e ar , obtendo $s'r'tfw = s'm'nfw$. Como $s' \in S$, por SM4 existe $u \in S$ tal que

$$r'tfwu = m'nfwu.$$

Multiplicando por a' e substituindo $a'm'$ e $a'r't$ obtemos $s''t'fwu = s''mnfwu$. Como $s'' \in S$ mais uma vez por SM4 temos que existe $u' \in S$ tal que

$$t'fwuu' = mnfwuu'.$$

Fazendo $v = srtfwuu' \in S$, $l = fwuu'$ e $l' = f'fwuu'$. Tem-se que $v = srtl = sn'l'$ e $a''t'l = a''mnl'$ e portanto

$$\frac{a''t'}{srt} = \frac{a''mn}{s'n'}, \quad \text{isto é,}$$

$$\frac{a''}{s''} \left(\frac{a'}{s'} \frac{a}{s} \right) = \left(\frac{a''}{s''} \frac{a'}{s'} \right) \frac{a}{s}.$$

□

Definição 2.36 Soma:

Sejam $\frac{a}{s}, \frac{b}{t}$ em $S^{-1}R$, como $t \in S$ e $s \in R$ logo, por SM3, existem $u \in S$ e $v \in R$ tais que $su = tv$ ($su \in S$). Seja $x = su = tv$ e $y = au + bv$, definimos

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} := \frac{y}{x} = \frac{au + bv}{su}.$$

Lema 2.37 *Esta soma está bem definida.*

Demonstração. Sejam $\frac{a}{s}, \frac{a'}{s'}, \frac{b}{t}$ em $S^{-1}R$ e suponhamos que $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$, isto é, existem $r \in S$ e $p, p' \in R$ tais que $r = sp = s'p'$ e $ap = a'p'$.

Somando $\frac{a}{s}$ e $\frac{a'}{s'}$ com $\frac{b}{t}$ obtemos respectivamente:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{y}{x}, \text{ onde } x = su = tv \text{ e } y = au + bv \text{ para } u \in S \text{ e } v \in R$$

e

$$\frac{a'}{s'} + \frac{b}{t} = \frac{y'}{x'}, \text{ onde } x' = s'u' = tv' \text{ e } y' = a'u' + bv' \text{ para } u' \in S \text{ e } v' \in R.$$

Aplicando respectivamente SM3 a $u, u' \in S$ e $p, p' \in R$ temos que existem $r_1'', r_2'' \in S$ e $r_1', r_2' \in R$ tais que

$$ur_1' = pr_1'' \quad \text{e} \quad u'r_2' = p'r_2''.$$

Como $r_2'' \in S$ e $r_1'' \in R$ de novo por SM3 temos que existem $n_1 \in S$ e $n_2 \in R$ tais que

$$r_1''n_1 = r_2''n_2.$$

Agora $tv'r_1'n_1 = sur_1'n_1 = spr_1''n_1 = s'p'r_1''n_1 = s'p'r_2''n_2 = s'u'r_2'n_2 = tv'r_2'n_2$. Como $t \in S$ por SM4 existe $m_1 \in S$ tal que

$$vr_1'n_1m_1 = v'r_2'n_2m_1.$$

Fazendo $v = rr_1''n_1m_1 \in S$, $l = r_1'n_1m_1$ e $l' = r_2'n_2m_1$ obtemos que $v = xl = x'l'$ e $yl = y'l'$ e portanto

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}.$$

□

Lema 2.38 *A soma, definida em 2.36, é comutativa.*

Demonstração. Sejam $\frac{a}{s}$ e $\frac{b}{t}$ em $S^{-1}R$. Então valem as seguintes relações:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{y}{x}, \text{ onde } x = su = tv \text{ e } y = au + bv \text{ para } u \in S \text{ e } v \in R$$

e

$$\frac{b}{t} + \frac{a}{s} = \frac{y'}{x'}, \text{ onde } x' = tu' = sv' \text{ e } y' = bu' + av' \text{ para } u' \in S \text{ e } v' \in R.$$

Por SM3 para $x' \in S$ e $x \in R$ existem $w_1 \in S$ e $w_2 \in R$ tais que

$$xw_1 = x'w_2.$$

Substituindo x e x' obtemos $suw_1 = sv'w_2$ e por SM4 existe $q \in S$ tal que $uw_1q = v'w_2q$, já que $s \in S$.

Logo $tw_1q = xw_1q = x'w_2q = tu'w_2q$, como $t \in S$, usando novamente SM4 temos que existe $p \in S$ tal que $vw_1qp = u'w_2qp$.

Fazendo $r = xw_1qp \in S$, $l = w_1qp$ e $l' = w_2qp$. Assim, $r = xl = x'l'$ e $yl = y'l'$. Portanto

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}.$$

□

Lema 2.39 *A soma, definida em 2.36, é associativa.*

Demonstração. Sejam $\frac{a}{s}$, $\frac{a'}{s'}$ e $\frac{a''}{s''}$ em $S^{-1}R$. Fazendo as somas de $(\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'}) + \frac{a''}{s''}$ e $\frac{a}{s} + (\frac{a'}{s'} + \frac{a''}{s''})$ obtemos respectivamente:

$$\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{y_1}{x_1},$$

onde $x_1 = su_1 = s'v_1$ e $y_1 = au_1 + a'v_1$ para $u_1 \in S$ e $v_1 \in R$,

$$\frac{y_1}{x_1} + \frac{a''}{s''} = \frac{y_2}{x_2},$$

onde $x_2 = x_1u_2 = s''v_2$ e $y_2 = y_1u_2 + a''v_2$ para $u_2 \in S$ e $v_2 \in R$,

$$\frac{a'}{s'} + \frac{a''}{s''} = \frac{y_3}{x_3},$$

onde $x_3 = s'u_3 = s''v_3$ e $y_3 = a'u_3 + a''v_3$ para $v_3 \in S$ e $u_3 \in R$

e

$$\frac{a}{s} + \frac{y_3}{x_3} = \frac{y_4}{x_4},$$

onde $x_4 = x_3 u_4 = s v_4$ e $y_4 = y_3 u_4 + a v_4$ para $u_4 \in S$ e $v_4 \in R$.

Para $u_1, v_3 \in S$ e $v_4, v_2 \in R$ aplicando duas vezes SM3 existem respectivamente $q'_1, q'_2 \in S$ e $q''_1, q''_2 \in R$ tais que

$$v_4 q'_1 = u_1 q''_1 \quad \text{e} \quad v_2 q'_2 = v_3 q''_2.$$

Logo para $u_2, u_4 \in S$ e $q''_1, q''_2 \in R$ e usando novamente SM3 existem $p''_1, p''_2 \in S$ e $p'_1, p'_2 \in R$ tais que

$$u_2 p'_1 = q''_1 p''_1 \quad \text{e} \quad u_4 p'_2 = q''_2 p''_2.$$

Aplicando mais uma vez SM3 para $q'_2 p''_2 \in S$ e $p'_1 \in R$ temos que existem $n' \in S$ e $n'' \in R$ tais que

$$p'_1 n' = q'_2 p''_2 n''.$$

Agora,

$$s' u_3 u_4 q'_1 p''_1 n' = x_3 u_4 q'_1 p''_1 n' = s v_4 q'_1 p''_1 n' = s u_1 q''_1 p''_1 n' = s u_1 u_2 p'_1 n' = s' v_1 u_2 q'_2 p''_2 n''.$$

Temos que $s' \in S$ e $s' u_3 u_4 q'_1 p''_1 n' = s' v_1 u_2 q'_2 p''_2 n''$. Logo por SM4, existe $m \in S$ tal que

$$u_3 u_4 q'_1 p''_1 n' m = v_1 u_2 q'_2 p''_2 n'' m.$$

Temos o seguinte:

$$x_3 u_4 q'_1 p''_1 n' m = s v_4 q'_1 p''_1 n' m = s u_1 q''_1 p''_1 n' m = x_1 q''_1 p''_1 n' m = x_1 u_2 p'_1 n' m = x_1 u_2 q'_2 p''_2 n'' m$$

e

$$x_3 u_4 p'_2 n'' m = s'' v_3 u_4 p'_2 n'' m = s'' v_3 q''_2 p''_2 n'' m = s'' v_2 q'_2 p''_2 n'' m = x_1 u_2 q'_2 p''_2 n'' m.$$

Assim temos $x_3 u_4 q'_1 p''_1 n' m = x_3 u_4 p'_2 n'' m$ e $x_3 \in S$. Aplicando novamente SM4, existe $t \in S$ tal que

$$u_4 q'_1 p''_1 n' m t = u_4 p'_2 n'' m t.$$

Finalmente fazendo $r = sv_4q'_1p''_1n'mt \in S$, $l = q'_1p''_1n'mt$ e $l' = q'_2p''_2n''mt$. Tem-se que $r = x_4l = x_2l'$ e $y_4l = y_2l'$ e portanto

$$\frac{x_4}{y_4} = \frac{x_2}{y_2}, \quad \text{isto é,}$$

$$\left(\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'}\right) + \frac{a''}{s''} = \frac{a}{s} + \left(\frac{a'}{s'} + \frac{a''}{s''}\right).$$

□

Observação 2.40 O elemento unidade é $\frac{1}{1}$, o elemento nulo é $\frac{0}{1}$ e $\left(\frac{s}{1}\right)^{-1} = \frac{1}{s}$.

Lema 2.41 A multiplicação distribui com respeito à soma.

Demonstração A prova deste lema será omitida pois os argumentos são os mesmos que os utilizados nas provas anteriores. □

De tudo o anterior obtemos o seguinte teorema.

Teorema 2.42 $(S^{-1}R, +, \cdot)$ é um anel com unidade.

Observação 2.43 Se $S \subset Z(R)$.

- (i) Se S é um sistema multiplicativo central (ou sistema multiplicativo) temos que: $S^{-1}R = 0$ se, e somente se, $0 \in S$.
- (ii) As relações de equivalência, definidas em 2.2 e em 2.19, são equivalentes.
- (iii) As operações de soma, definidas em 2.4 (1) e em 2.36, são equivalentes.
- (iv) As operações de multiplicação, definidas em 2.4 (2) e em 2.33, são equivalentes.

O homomorfismo canônico de anéis $\iota : R \longrightarrow S^{-1}R$ está definido por $\iota(a) = \frac{a}{1}$

Lema 2.44 $\iota : R \longrightarrow S^{-1}R$ é um homomorfismo de anéis.

Com a proposição a seguir, mostraremos que o homomorfismo ι satisfaz a propriedade universal.

Proposição 2.45 *Seja $g : R \longrightarrow B$ um homomorfismo de anéis tal que, para todo $s \in S$, $g(s)$ é unidade em B . Então existe um único homomorfismo de anéis $h : S^{-1}R \longrightarrow B$ tal que $h\iota = g$.*

Demonstração. Basta provar que $h(\frac{a}{s}) = g(a)g(s)^{-1}$ (onde $\frac{a}{s}$ em $S^{-1}R$) é um homomorfismo de anéis, o resto da prova é análoga à feita na Proposição 2.21.

Temos que:

$$\frac{ba}{ts} = \frac{bc}{sr}, \quad \text{para } s \in S \text{ e } c \in R \text{ tal que } tc = ar.$$

Da última igualdade temos que $g(c)g(r)^{-1} = g(t)^{-1}g(a)$. Logo $h(\frac{ba}{ts}) = h(\frac{bc}{sr}) = g(bc)g(sr)^{-1} = g(b)g(c)g(r)^{-1}g(s)^{-1} = g(b)g(t)^{-1}g(a)g(s)^{-1} = h(\frac{b}{t})h(\frac{a}{s})$. $\square$

É fácil ver que o anel $S^{-1}R$ e o homomorfismo $\iota : R \longrightarrow S^{-1}R$ tem as seguintes propriedades:

1. Se $s \in S$ então $\iota(s)$ é unidade em $S^{-1}R$.
2. Se $\iota(a) = 0$ então $sa = 0$ para algum $s \in S$.
3. Cada elemento de $S^{-1}R$ é da forma $\iota(a)\iota(s)^{-1}$ para algum $a \in R$ e $s \in S$.

Reciprocamente estas três condições determinam o anel $S^{-1}R$ salvo isomorfismo, isto é,

Corolário 2.46 *Se $g : R \longrightarrow B$ um homomorfismo de anéis tal que*

- (i) *Se $s \in S$ então $g(s)$ é unidade em $S^{-1}B$.*
- (ii) *Se $g(a) = 0$ então $sa = 0$ para algum $s \in S$.*
- (iii) *Cada elemento de B é da forma $g(a)g(s)^{-1}$ para algum $a \in R$ e $s \in S$.*

Então existe um único isomorfismo de anéis $h : S^{-1}R \longrightarrow B$ tal que $h\iota = g$.

Demonstração. Pela Proposição 2.45 basta provar que $h : S^{-1}R \longrightarrow B$ definida por $h(\frac{a}{s}) = g(a)g(s)^{-1}$, para $\frac{a}{s} \in S^{-1}R$, é injetora.

Suponhamos que $h(\frac{a}{s}) = 0$ então $g(a) = 0$, por hipóteses $ta = 0$ para algum $t \in S$, por SM4 existe $t' \in S$ tal que $at' = 0$. Fazendo $r = st' \in S$ e $p' = st'$ temos que $r = st' = 1p'$ e $at' = 0p'$ portanto $\frac{a}{s} = 0$. $\square$

O processo de localização em S , pode-se efetuar com um R -módulo M em vez do anel. Para isto definimos a relação em $M \times S$ como em 2.23.

Indica-se por $\frac{m}{s}$ a classe do par (m, s) e por $S^{-1}M$ o conjunto destas classes de equivalência. Damos uma estrutura a $S^{-1}M$ de $S^{-1}R$ -módulo com as seguintes definições de adição e multiplicação:

Definição 2.47 Multiplicação:

Para $\frac{m}{t}$ em $S^{-1}M$ e $\frac{a}{s}$ em $S^{-1}R$, como $t \in S$ e $a \in R$, logo por SM3, existem $t \in S$ e $c \in R$ tais que $tc = ar$. Definimos:

$$\frac{m}{t} \cdot \frac{a}{s} := \frac{mc}{sr}$$

Definição 2.48 Soma:

Sejam $\frac{m}{t}, \frac{m'}{t'}$ em $S^{-1}M$, como $s \in S$ e $t \in R$ logo, por SM3, existem $u \in S$ e $v \in R$ tais que $x = tu = t'v$ ($tu \in S$). Seja $x = tu = t'v$ e $y = mu + m'v$. Definimos

$$\frac{m}{t} + \frac{m'}{t'} := \frac{y}{x} = \frac{mu + m'v}{tu}.$$

Da mesma forma que para o feito em anéis temos que estas operações dão uma estrutura a $S^{-1}M$ de $S^{-1}R$ -módulo. Similarmente à Definição 2.8 teremos o funtor de localização S^{-1} .

Proposição 2.49 *O funtor S^{-1} é exato, isto é, dada uma seqüência curta exata*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

Então a seqüência curta

$$0 \longrightarrow S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}(f)} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}(g)} S^{-1}M'' \longrightarrow 0$$

é exata.

Demonstração. Igual à Proposição 2.25. □

Corolário 2.50 *O funtor de localização S^{-1} comuta com somas finitas, intersecções finitas e quocientes. Mais precisamente, se N e M' são R -submódulos do R -módulo M então*

- (i) $S^{-1}(N + M') = S^{-1}N + S^{-1}M'$.
- (ii) $S^{-1}(N \cap M') = S^{-1}N \cap S^{-1}M'$.
- (iii) $S^{-1}(M/N) \cong S^{-1}M/S^{-1}N$ como $S^{-1}R$ -módulos.

Demonstração. Sejam $\frac{n}{s}$ e $\frac{p}{s}$ em $S^{-1}N$ e $S^{-1}M'$ respectivamente.

(i) Basta provar que $\frac{n+p}{s} = \frac{n}{s} + \frac{p}{s}$. Mas

$$\frac{n}{s} + \frac{p}{s} = \frac{y}{x},$$

onde $x = sv = su$ e $y = nv + pu$ para $u \in S$ e $v \in R$.

Como $x \in S$ e $s \in R$ por SM3 existem $q \in S$ e $q' \in R$ tais que $xq' = sq$ logo $svq' = sq$ e como $s \in S$ por SM4 existe $w \in S$ tal que

$$vq'w = qw.$$

Do anterior temos $suq'w = sqw$ e novamente, como $s \in S$, por SM4 existe $w' \in S$ tal que

$$uq'ww' = qww'.$$

Fazendo $r = sqww' \in S$, $l = qww'$ e $l' = q'ww'$ temos $r = sl = xl'$ e $(n+p)l = yl'$.

A prova de (ii) e (iii) é a mesma à feita para o Corolário 2.26 (ii) e (iii) respectivamente. □

Proposição 2.51 *Seja M um R -módulo então $M \otimes_R S^{-1}R \cong S^{-1}M$ como $S^{-1}R$ -módulos e este $S^{-1}R$ -isomorfismo é natural.*

Demonstração. A prova é similar à feita para a Proposição 2.27, somente basta observar que

$$\frac{at}{st} = \frac{at}{st} = \frac{a}{s}$$

e

$$\frac{a}{1} \frac{1}{s} = \frac{a}{s}.$$

E a prova disto é similar às feitas acima. □

Corolário 2.52 $S^{-1}R$ é um R -módulo plano.

Demonstração. Similar à prova feita para o Corolário 2.28. □

Retomando o Exemplo 2.13, isto é, dado R um anel e $\mathfrak{p}$ um ideal primo de R tal que $S = R \setminus \mathfrak{p}$ seja um sistema multiplicativo (por exemplo, quando $S \subset Z(R)$). Utilizando a mesma notação, obtemos os seguintes resultados.

Proposição 2.53 *Seja M um R -módulo. Então as seguintes são equivalentes:*

- (i) $M = 0$.
- (ii) $M_{\mathfrak{p}} = 0$ para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de R .
- (iii) $M_{\mathfrak{m}} = 0$ para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R .

Demonstração. Similar à prova feita para a Proposição 2.14. □

Proposição 2.54 *Seja $\phi : M \longrightarrow N$ um R -homomorfismo. Então as seguintes são equivalentes:*

1. ϕ é injetora. (resp. sobrejetora).
2. $\phi_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \longrightarrow N_{\mathfrak{p}}$ é injetora para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de R . (resp. sobrejetora).
3. $\phi_{\mathfrak{m}} : M_{\mathfrak{m}} \longrightarrow N_{\mathfrak{m}}$ é injetora para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R . (resp. sobrejetora).

Demonstração. Similar à prova feita para a Proposição 2.15. □

Observação 2.55 Tudo o que foi feito para R -módulos à direita pode-se fazer para R -módulos à esquerda. Mudamos a Definição 2.31 somente em SM3 assim:

SM2' Para $s \in S$ e $u \in R$ tem-se que existe $t \in S$ e $v \in R$ tais que $vs = tu$.

Também mudamos a relação de equivalência:

$$(m, s) \equiv (m', s') \text{ se, e somente se, existem } r \in S \text{ e } p, p' \in R \text{ tais que } r = ps = p's' \text{ e } pm = p'm'.$$

e as operações de soma e multiplicação assim:

Multiplicação:

Para $\frac{m}{t}, \frac{a}{s}$ em $S^{-1}M$, como $t \in S$ e $a \in R$ logo, por SM3, existem $r \in S$ e $c \in R$ tais que $ct = ra$, definimos:

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{m}{t} = \frac{cm}{rs}$$

Soma:

Sejam $\frac{m}{t}, \frac{m'}{t'}$ em $S^{-1}M$, como $t' \in S$ e $t \in R$ logo, por SM3, existem $u \in S$ e $v \in R$ tais que $x = ut = vt'$ ($ut \in S$). Seja $x = ut = vt'$ e $y = um + vm'$, logo

$$\frac{m}{t} + \frac{m'}{t'} := \frac{y}{x} = \frac{um + vm'}{ut}.$$

Observação 2.56 É claro que se M é um R -bimódulo então $S^{-1}M$ é um $S^{-1}R$ -bimódulo.

Das Observações acima obtemos a seguinte proposição.

Proposição 2.57 Sejam M um R -módulo e N um R -bimódulo então $S^{-1}M \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}N \cong S^{-1}(M \otimes_R N)$ e este $S^{-1}R$ -isomorfismo é natural.

Demonstração. Similar à prova feita para a Proposição 2.30. □

De novo, do Exemplo 2.13, tem-se que a Proposição acima e a Proposição 2.30 ficam da forma:

$$M_{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}} \cong (M \otimes_R N)_{\mathfrak{p}}$$

e temos, também

Proposição 2.58 *Para um R -módulo M as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. M é um R -módulo plano.
2. $M_{\mathfrak{p}}$ é um R -módulo plano para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de R .
3. $M_{\mathfrak{m}}$ é um R -módulo plano para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R .

Demonstração. Similar à prova feita para a Proposição 2.18. □

2.4 Exemplos e Relações com Anéis Quocientes

Nesta seção daremos alguns exemplos de localização de anéis. Para facilitar discussões mais detalhadas damos as respectivas referências. Depois observaremos a relação da localização de anéis com os anéis quocientes. Começaremos com as seguintes definições.

Definição 2.59 *Sejam R um anel e M um conjunto.*

Denotaremos por $An_R^e(M) := \{r \in R / rM = 0\}$, o **anulador à esquerda** de M , $An_R^d(M) := \{r \in R / Mr = 0\}$, o **anulador à direita** de M e por $An_R(M) := An_R^e(M) \cap An_R^d(M)$, o **anulador** de M . Um elemento $x \in R$ é chamado **regular** se $An_R^e(x) = An_R^d(x) = 0$, isto é, não é divisor de zero nem à esquerda nem à direita. Denotaremos por S_{tr} o conjunto formado por todos os elementos regulares de R e por S_r um subconjunto de S_{tr} .

Dado um anel B contendo R , dizemos que B é um **anel de quocientes clássico à direita** de R , se satisfaz as seguintes duas condições: (a) cada elemento regular $b \in R$ tem um inverso $b^{-1} \in B$; e (b) cada elemento $q \in B$ tem a forma $q = ab^{-1}$, com $a, b \in R$ e b regular.

Observemos que, no caso de S_{tr} ser um sistema multiplicativo, então $S_{tr}^{-1}R$ é um anel de quocientes clássico, também chamado, em [49], de **anel de quocientes total**.

Um anel R será chamado de **Domínio de Ore**, se R é um domínio de integridade e se S_{tr} satisfaz SM3.

Exemplo 2.60 *Seja R um anel com elementos regulares. Se R é um anel comutativo então S_{tr} e S_r são sistemas multiplicativos e podem ser construídas as localizações $S_{tr}^{-1}R$ e $S_r^{-1}R$ de R . Em particular $S_{tr}^{-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Q}$.*

Se R é um Domínio de Ore, então S_{tr} é um sistema multiplicativo, obtendo assim o anel de localização $S_{tr}^{-1}R$ de R , e neste caso é chamado **corpo de quocientes** de R (ver [43]).

Exemplo 2.61 Malvec em [41], mostrou que existem anéis sem divisores próprios de zero os quais não podem ser mergulhados isomorficamente num corpo, não necessariamente comutativo.

Exemplo 2.62 No Exemplo 2.13, se $S = R \setminus \mathfrak{p} \subset Z(R)$, temos que S é um sistema multiplicativo. Além disso,

$$\mathfrak{m} = \left\{ \frac{a}{s} : a \in \mathfrak{p} \text{ e } s \in S \right\}$$

é o único ideal maximal em $R_{\mathfrak{p}}$, isto é, $R_{\mathfrak{p}}$ é um anel local.

Em particular se

(i) $R = \mathbb{Z}$ e $\mathfrak{p} = (p)$, com $p \in \mathbb{Z}$ um número primo. Então $\mathbb{Z}_{\mathfrak{p}}$ é o conjunto de todos os números racionais $\frac{m}{n}$ onde n é primo relativo com m .

(ii) $R = k[x_1, \dots, x_n]$ for o anel de polinômios nas variáveis x_i sobre o corpo k e $\mathfrak{p}$ um ideal primo. Então $R_{\mathfrak{p}}$ é o anel de todas as funções racionais $\frac{f}{g}$ onde $g \notin \mathfrak{p}$. Se V é a variedade definida pelo ideal $\mathfrak{p}$, pode-se identificar $R_{\mathfrak{p}}$ com o anel de todas as funções racionais em k^n através da variedade V .

Exemplo 2.63 Cohn, P.M. apresentou um exemplo de localização de um anel não comutativo, para quando o sistema multiplicativo é o complemento de um ideal primo (ver [12]).

Exemplo 2.64 Sejam $r \in Z(R)$ e $S = \{r^n\}_{n \geq 0}$ é claro que S é um sistema multiplicativo central. Em particular se $R = \mathbb{Z}$, e $r \neq 0$. Então $S^{-1}\mathbb{Z}$ é o conjunto de todos os números racionais $\frac{m}{n}$ onde n é uma potência de r .

Exemplo 2.65 (ver [17]).

(a) Seja k um corpo, R o anel de matrizes diagonais infinitas sobre k , onde os elementos da diagonal são iguais, a menos um número finito.

(b) Sejam k um corpo finito e

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} / \alpha + \gamma = \beta + \delta, \text{ com } \alpha, \gamma, \beta \text{ e } \delta \in k \right\}.$$

Em ambos, (a) e (b), qualquer elemento regular de R têm inverso em R . Portanto $S_{tr}^{-1}R = R$.

Exemplo 2.66 (ver [49], Teoremas 2.28 e 2.43).

Seja R um anel e suponhamos que $S_{tr}^{-1}R$ existe e é artiniano. Então

- (a) $S_{tr}^{-1}(R_n) = (S_{tr}^{-1}R)_n$, onde R_n denota o anel das matrizes quadradas de ordem n sobre R .
- (b) $S_{tr}^{-1}(R[x_1, \dots, x_n]) = (S_{tr}^{-1}R)[x_1, \dots, x_n]$.

Por exemplo, se $R = \mathbb{Z}[x]/\langle x^3 \rangle$ então

$$S_{tr}^{-1}R = \{p + qx + tx^2 \mid p, q, t \in \mathbb{Q}\}.$$

Exemplo 2.67 Seja A uma R -álgebra noetheriana (isto é, A é finitamente gerada como R -módulo, com R um anel comutativo noetheriano). A é livre de torção, se para r regular em R , tem-se que $ra \neq 0$ para todo $0 \neq a \in A$.

Seja A uma R -álgebra noetheriana livre de torção com $S_{tr}^{-1}R$ artiniano, então $S_{tr}^{-1}A = A \otimes_R S_{tr}^{-1}R$. (ver [49], Teorema 3.11).

Em particular temos:

- (a) Sejam G um grupo finito e R anel comutativo noetheriano, tal que $S_{tr}^{-1}R$ é artiniano. Sabemos que $\Gamma = \Gamma(G, R)$, o anel de grupo de G sobre R , é uma álgebra finitamente gerada e livre de torção sobre R . Assim $S_{tr}^{-1}\Gamma = \Gamma \otimes_R S_{tr}^{-1}R$.
- (b) Seja R anel Noetheriano comutativo com unidade tal que $S_{tr}^{-1}(R)$ é artiniano. Se M é um R -módulo finitamente gerado livre de torção, então

$$S_{tr}^{-1}(\text{Hom}_R(M, M)) = \text{Hom}_R(M, M) \otimes_R S_{tr}^{-1}R.$$

Finalizaremos com a relação que existe entre a localização de anéis e anéis quocientes. Para mais detalhes ver [16].

Definição 2.68 Dado um R -módulo M e $N \subset M$ um submódulo, então M chama-se **extensão essencial** de N , se para cada submódulo $M' \neq 0$ temos que $M' \cap N \neq 0$.

Definição 2.69 (Johnson). Se R é um subanel de B , chamaremos B de **anel de quociente à direita** de R , se para cada $0 \neq b \in B$ existem $a, a' \in R$, com $a' \neq 0$, tal que $ba = a'$.

Observemos que, no caso particular de $N = R$ e $M = B$, a Definição 2.68 é equivalente à Definição 2.69, isto é, a noção de extensão essencial é uma generalização do anel quociente de Johnson.

Definição 2.70 *Dado um R -módulo M e $N \subset M$ um submódulo, então M chama-se **extensão racional** de N , se para cada submódulo B de M , com $N \subset B \subset M$, e $f \in \text{Hom}_R(B, M)$ têm-se que: $f(N) = 0$ se, e somente se, $f = 0$ (ou equivalentemente $\text{Hom}_R(B/N, M) = 0$ para cada submódulo B de M).*

Definição 2.71 (Utumi). *Se R é um subanel de B , chamaremos B de **anel de quocientes à direita** de R , se para $0 \neq b$ e $d \in B$ existe um elemento $a \in R$ tal que $ba \neq 0$ e $da \in R$.*

Observemos que, no caso particular de $N = R$ e $M = B$, a Definição 2.70 é equivalente à Definição 2.71, isto é, a noção de extensão racional é uma generalização de anel quociente de Utumi. Além disso, é fácil ver que se M é uma extensão racional de N , então M é uma extensão essencial de N . O seguinte exemplo mostra que o recíproco nem sempre é verdadeiro.

Exemplo 2.72 *Seja k um corpo, $B = k[x]/\langle x^4 \rangle$ e $R = \langle \bar{1}, \bar{x}^2, \bar{x}^3 \rangle$. Logo B como R -módulo é uma extensão essencial de R , mas não é extensão racional de R .*

Precisaremos da seguinte definição para obtermos uma condição que nos permitirá obter a equivalência entre extensões racionais e essenciais.

Definição 2.73 *Dado um R -módulo M , seja*

$$\text{Sing}(M) = \{x \in M \mid R \text{ é uma extensão essencial de } \text{An}_R^d(x)\}.$$

*O submódulo $\text{Sing}(M)$ é chamado de **submódulo singular** de M .*

Proposição 2.74 *Seja M um R -módulo e $N \subset M$ um submódulo de M . Se $\text{Sing}(N) = 0$, então M é extensão essencial de N se, e somente se, M é extensão racional de N .*

Em particular, se $\text{Sin}(R) = 0$ então os anéis quocientes, Utumi e Johnson, coincidem.

Proposição 2.75 *Seja R um Domínio de Ore e S_{tr} o conjunto de todos elementos regulares de R . Então o anel de quocientes maximal, B , de R coincide com a localização de R pelo sistema multiplicativo S_{tr} .*

Demonstração. Seja $0 \neq b \in B$, como $Sin(R) = 0$, pela Proposição 2.74 temos que B é uma extensão essencial de R . Logo $bR \cap R \neq 0$, assim existem $s, a \in R$ com $bs = a \neq 0$. Não é difícil ver que $s \in S_{tr}$ e que têm inverso em B . Logo $b = as^{-1}$. Pelo Corolário 2.46 temos que $B = S_{tr}^{-1}R$. $\square$

O seguinte exemplo mostrará que a localização de um anel por um sistema multiplicativo pode ser um subanel próprio do anel de quocientes.

Exemplo 2.76 (a) No Exemplo 2.65 (a), mostramos que $S_{tr}^{-1}R = R$, para o anel R de matrizes diagonais infinitas sobre um corpo k , onde os elementos da diagonal são iguais, a menos um número finito.

Seja N o anel de todas as matrizes diagonais infinitas sobre k , com todos os elementos da diagonal iguais a 0, a menos um número finito. O anel quociente maximal, B , de R , é o anel de endomorfismos de N_R , e não é difícil ver que este é o anel de todas as matrizes diagonais infinitas.

(b) No Exemplo 2.65 (b), mostramos que $S_{tr}^{-1}R = R$, para o anel

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} / \alpha + \gamma = \beta + \delta, \text{ com } \alpha, \gamma, \beta \text{ e } \delta \in k \right\},$$

onde k é um corpo finito.

Seja $N = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} \right\rangle$, para α e γ em k . Logo N é o menor ideal de R tal que $\text{Ann}_R^e(N) = 0$. Portanto $B = \text{End}_R(N)$, mas $\text{End}_R(N)$ é o anel de todas as matrizes de ordem 2 sobre k .

Exemplo 2.77 Sejam R um anel e B seu anel de quocientes maximal. Goldie mostrou, em [24], que $S^{-1}R = B$, se R é um anel noetheriano semi-primo (isto é, um anel noetheriano sem ideais nilpotentes).

Capítulo 3

Categorias Derivadas

Neste capítulo introduziremos as noções de categoria de homotopia, categoria triangulada e categoria derivada. As demonstrações e conceitos omitidos podem ser encontrados em [54], [25] e [21]. Na seção 3.3, estudaremos as relações da localização de categorias com a localização de anéis, estabelecendo e demonstrando um teorema (Teorema 3.30) que nos permitirá descrever dita relação. Este último fato, é bem conhecido mas apresentaremos uma prova detalhada já que, na literatura, somente se fazem alguns comentários a respeito.

Ao longo deste capítulo consideraremos R -módulos à direita salvo se especificar o contrário.

3.1 Complexos e a Categoria $K(\mathcal{A})$

Os métodos homológicos foram introduzidos por D. Hilbert em seu estudo da teoria clássica de invariantes. Ele considerou, em particular, o seguinte problema: Seja $\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j = 0$, com $i = 1, \dots, n$ e $a_{ij} \in k[t_1, \dots, t_r]$, um sistema homogêneo de equações lineares com coeficientes no anel de polinômios em várias variáveis sobre um corpo k . Todas as soluções polinomiais são combinações lineares (com coeficientes polinomiais) de um subconjunto finito de soluções. No entanto, em geral não existem soluções linearmente independentes sobre $k[t_1, \dots, t_r]$. As relações lineares entre os elementos de um sistema gerador de soluções são combinações lineares de um conjunto finito de relações e, novamente pode suceder que não exista um sistema livre de geradores para estas relações. Hilbert chamou *syzygies* tais relações.

O teorema essencial de Hilbert estabelece que para o anel $k[t_1, \dots, t_r]$ a cadeia de syzygies acaba depois de $r + 1$ passos; isto generaliza o fato de que o espaço de

soluções de um sistema linear sobre o corpo k ($r = 0$) tem base.

Usando uma linguagem mais moderna, consideremos um anel A , um A -módulo a esquerda M finitamente gerado, e uma seqüência longa exata de A -módulos livres (chamada *resolução livre* de M)

$$\cdots \longrightarrow F^{-n} \xrightarrow{d^{-n}} F^{-n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} F^0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0.$$

Escolhendo os geradores $(f_1^i, \dots, f_{k_i}^i)$ do módulo livre F^i podemos descrever, o problema acima considerado por Hilbert, assim:

- $\epsilon(f_1^0), \dots, \epsilon(f_{k_0}^0)$ são geradores do A -módulo M (pois ϵ é uma sobrejetora);
- $d^{-1}(f_1^{-1}), \dots, d^{-1}(f_{k_{-1}}^{-1})$ são geradores do primeiro A -módulo syzygie, isto é, das relações entre os geradores anteriores (pois, d^{-1} leva F^{-1} no $\ker \epsilon$ o qual consiste justamente destas relações);
- $d^{-2}(f_1^{-2}), \dots, d^{-2}(f_{k_{-2}}^{-2})$ são geradores do segundo A -módulo syzygie, e assim por diante. O leitor interessado em alguns desses cálculos pode encontra-los em [22].

Uma das principais técnicas em álgebra homológica é substituir o A -módulo M pela sua resolução livre, a qual é única na categoria de homotopia. Começemos com algumas definições gerais.

Definição 3.1 Dada uma categoria aditiva $\mathcal{A}$, um **complexo** X em $\mathcal{A}$ consiste de duas seqüências infinitas $(X^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ e $(d_X^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ onde X^n é um objeto em $\mathcal{A}$ e d_X^n (chamada **diferencial**) é um morfismo em $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X^n, X^{n+1})$ com a seguinte condição $d_X^n d_X^{n+1} = 0$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Um complexo será representado pela seguinte seqüência:

$$\cdots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

Sejam X e Y complexos. Um **morfismo** f de X a Y é uma seqüência $(f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de morfismos f^n em $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X^n, Y^n)$ com a condição $d_Y^n f^n = f^{n+1} d_X^n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Isto é, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{d_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow f^{n-1} & & \downarrow f^n & & \downarrow f^{n+1} \\ \cdots & \longrightarrow & Y^{n-1} & \xrightarrow{d_Y^{n-1}} & Y^n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y^{n+1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

A categoria dos complexos com os morfismos acima definidos será denotada por $C(\mathcal{A})$.

Exemplo 3.2

- (a) Seja M um objeto em uma categoria abeliana $\mathcal{A}$. Se $\mathcal{A}$ tem suficientes objetos projetivos (resp. suficientes injetivos), então podemos associar a M um complexo formado por sua resolução projetiva (resp. resolução injetiva). A exatidão da resolução implica que a condição sobre os diferenciais é satisfeita.
- (b) Seja $X \in \text{mod-}\mathbb{Z}$ o complexo definido por $X^0 = X^1 = \mathbb{Z}$, d_X^0 a multiplicação por dois, d_X^1 a projeção canônica e d_X^n zero em qualquer outro caso. Isto é,

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

- (c) Consideremos o seguinte morfismo de complexos em $\text{mod-}\mathbb{Z}$

$$\begin{array}{ccccccc} X : & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \\ & & & & & \downarrow 1 & \downarrow \cdot 2 \\ Y : & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow \mathbb{Z}_3 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \end{array}$$

É claro que f é um morfismo do complexo X ao complexo Y .

Definição 3.3 Um complexo Y é chamado **subcomplexo** do complexo X se, para cada n , $Y^n \subset X^n$ e $d_Y^n = d_X^n|_{Y^n}$, isto é, quando a inclusão $i = (i^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é um morfismo de Y a X . Neste caso pode-se formar o complexo X/Y dado pela sequência $(X^n/Y^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ e os diferenciais são as projeções canônicas, o qual chamaremos complexo **quociente**.

Proposição 3.4 Se $\mathcal{A}$ é uma categoria aditiva (resp. abeliana) então $C(\mathcal{A})$ é uma categoria aditiva (resp. abeliana).

Demonstração. Para $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ e $g = (g^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ em $\text{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X, Y)$, $f + g$ é por definição a sequência $(f_n + g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. O objeto zero em $C(\mathcal{A})$ é o complexo onde X^n e d_X^n são todas zero. Dados os complexos $X_1, \dots, X_m$ em $C(\mathcal{A})$ o coproduto (soma direta) é o complexo $Z = (Z^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ onde $Z^n = \bigoplus_{i=1}^m X_i^n$ e os diferenciais estão definidos por $d_Z^n = \bigoplus_{i=1}^m d_{X_i}^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Portanto $C(\mathcal{A})$ é uma categoria aditiva. Se $\mathcal{A}$ for abeliana, dado um morfismo $f : X \longrightarrow Y$ claramente o $\ker f$ é o subcomplexo $(\ker(f^n))_{n \in \mathbb{Z}}$ e o $\text{coker } f$ é o complexo $(\text{coker}(f^n))_{n \in \mathbb{Z}}$. Assim facilmente temos que $C(\mathcal{A})$ é uma categoria abeliana. $\square$

Observação 3.5 Existe um funtor pleno e fiel $In_j : \mathcal{A} \rightarrow C(\mathcal{A})$ o qual associa, para M , um objeto em $\mathcal{A}$, o complexo $In_j(M)$ definido por $X^j = M$ e os outros X^n junto com todos os diferenciais tomados como zero.

Definição 3.6 Dada uma categoria aditiva $\mathcal{A}$, sejam X e Y complexos e f e g morfismos de X a Y . Uma **homotopia** entre f e g é uma seqüência $(s^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de morfismos $s^n : X^n \rightarrow Y^{n-1}$ tal que para cada n , temos a seguinte igualdade: $f^n - g^n = d_Y^{n-1} s^n + s^{n+1} d_X^n$, isto é:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{d_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \searrow s^n & & \downarrow f^n - g^n & & \nearrow s^{n+1} \\
 \cdots & \longrightarrow & Y^{n-1} & \xrightarrow{d_Y^{n-1}} & Y^n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y^{n+1} \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

Quando existe uma homotopia entre os morfismos f e g , então dizemos que eles são **homotópicos** e o denotaremos por $f \sim g$. Um morfismo $f \in Hom_{C(\mathcal{A})}(X, Y)$ é uma **equivalência homotópica** se existe um morfismo $g \in Hom_{C(\mathcal{A})}(Y, X)$ tal que $gf \sim id_X$ e $fg \sim id_Y$.

Exemplo 3.7 Dada uma categoria aditiva $\mathcal{A}$ e M em $\mathcal{A}$, seja X o complexo definido por $X^0 = X^1 = M$, $d_X^0 = id_M$ e zero em qualquer outro caso. Fazendo $s^1 = id_M$ e zero para os outros s^n , temos uma homotopia entre o homomorfismo identidade de X e o homomorfismo zero de X :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{id_M} & M \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \\
 & & \searrow 0 & & \downarrow id_M - 0 & & \nearrow id_M - 0 \\
 \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{id_M} & M \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

No Exemplo acima, a identidade do complexo X é homotópica a zero, neste caso o complexo X diz-se **homotópico a zero**.

Daremos a definição de categoria de homotopia, a qual é essencial para a construção da categoria derivada.

Definição 3.8 Dada uma categoria aditiva $\mathcal{A}$ e a categoria $C(\mathcal{A})$, para dois complexos X e Y denotamos por $Ht(X, Y)$ o conjunto dos morfismos de X a Y os quais são

homotópicos a zero. A coleção de todos $Ht(X, Y)$ forma um ideal em $C(\mathcal{A})$. Denotemos por $K(\mathcal{A})$ o quociente da categoria $C(\mathcal{A})$ pelo ideal $Ht(X, Y)$; isto é, $K(\mathcal{A})$ é a categoria que tem os mesmos objetos de $C(\mathcal{A})$, e os morfismos são $Hom_{K(\mathcal{A})}(X, Y) = Hom_{C(\mathcal{A})}(X, Y)/Ht(X, Y)$. A categoria quociente é chamada *categoria de homotopia*.

Observação 3.9 Se $\mathcal{A}$ é uma categoria aditiva, segue-se facilmente que $K(\mathcal{A})$ é uma categoria aditiva. Mas, se $\mathcal{A}$ é uma categoria abeliana, não necessariamente $K(\mathcal{A})$ é uma categoria abeliana (ver [25]).

Terminaremos esta seção com mais algumas definições e exemplos básicos.

Definição 3.10 Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. Para um complexo X em $C(\mathcal{A})$ e um inteiro n , $Z^n(X) = \ker d_X^n$ é chamado *n -cociclo*, $B^n(X) = \text{Im} d_X^{n-1}$ é chamado *n -cobordo* e o quociente $H^n(X) = Z^n(X)/B^n(X)$ é chamado *n -ésima cohomologia* de X . Complexos com todas as cohomologias zero são chamados exatos ou *acíclicos*. Desta forma temos, para cada n um funtor H^n de $C(\mathcal{A})$ em $\mathcal{A}$.

Exemplo 3.11

- (a) Os complexos no Exemplo 3.2 (a) todos tem cohomologia M concentrada no grau zero enquanto o complexo no Exemplo 3.7 tem cohomologia zero.
- (b) Seja $X \in \text{mod-}\mathbb{Z}$ o complexo com entradas $M = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ em cada grau e todos os diferenciais a multiplicação por dois. Este complexo é acíclico, mas não é homotópico a zero, já que, se temos o diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{\cdot 2} & M & \xrightarrow{\cdot 2} & M \\
 \downarrow \text{id}_M - 0 & \nearrow ? & \downarrow \text{id}_M - 0 & \nearrow ? & \downarrow \text{id}_M - 0 \\
 M & \xrightarrow{\cdot 2} & M & \xrightarrow{\cdot 2} & M
 \end{array}$$

não é possível que existam as flechas para a homotopia, pois a imagem da composição da multiplicação por dois com qualquer aplicação precisa estar contida no sub-módulo $2 \cdot M$ e o mesmo é verdade para a composição do outro lado. Mas dois sub-módulos do sub-módulo próprio $2 \cdot M$ nunca podem gerar o módulo M .

Dada $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana, pode-se para $n \in \mathbb{Z}$, ver a n -ésima cohomologia como um funtor $H^n(-) : C(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$.

Lema 3.12 Sejam $f, g \in Hom_{C(\mathcal{A})}(X, Y)$. Se $f \sim g$ então $H^n(f) = H^n(g)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Observação 3.13 Seja $h : C(\mathcal{A}) \rightarrow K(\mathcal{A})$ o funtor canônico. É fácil ver que cada H^n se fatora através de h , induzindo um funtor de $K(\mathcal{A})$ em $\mathcal{A}$, que continuaremos denotando por H^n .

Proposição 3.14 Seja $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ uma seqüência exata curta em $C(\mathcal{A})$ (ver Proposição 3.4). Então existe uma aplicação natural $\delta^n : H^n(Z) \rightarrow H^{n+1}(X)$, chamada de *morfismo de conexão* tal que

$$\cdots \rightarrow H^n(X) \xrightarrow{H^n(f)} H^n(Y) \xrightarrow{H^n(g)} H^n(Z) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(X) \xrightarrow{H^{n+1}(f)} \cdots$$

é uma seqüência longa exata.

Definição 3.15 Dada uma categoria aditiva $\mathcal{A}$, um complexo X em $C(\mathcal{A})$ é chamado *limitado inferiormente* (resp. *limitado superiormente* e resp. *limitado*) se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $X^i = 0$ para todo $i < k$ (resp. $i > K$ e resp. $|i| > k$). Os complexos limitados inferiormente (resp. limitados superiormente e resp. limitados) formam uma subcategoria plena de $C(\mathcal{A})$ a qual serão denotada por $C^+(\mathcal{A})$ (resp. $C^-(\mathcal{A})$ e resp. $C^b(\mathcal{A})$). Também serão denotadas por $K^+(\mathcal{A})$, $K^-(\mathcal{A})$ e $K^b(\mathcal{A})$ as subcategorias plenas de $K(\mathcal{A})$ correspondentes a $C^+(\mathcal{A})$, $C^-(\mathcal{A})$ e $C^b(\mathcal{A})$ respectivamente.

Definição 3.16 Dada $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana e dado $f : X \rightarrow Y$ um morfismo em $C(\mathcal{A})$. Se f induz um isomorfismo na cohomologia, isto é, $H^n(f) : H^n(X) \rightarrow H^n(Y)$ é um isomorfismo em $\mathcal{A}$ para qualquer inteiro n , então f é chamada de um *quase isomorfismo*, brevemente *qis*. Os objetos X e Y são chamados *quase isomorfos*.

Exemplo 3.17

- (a) Existe um quase isomorfismo entre duas resoluções projetivas (resp. injetivas) de um objeto em $\mathcal{A}$, quando $\mathcal{A}$ é uma categoria com suficientes projetivos (resp. injetivos).
- (b) Um epimorfismo $f : P_0 \rightarrow M$, com P_0 projetivo numa categoria abeliana $\mathcal{A}$ com suficientes projetivos, induz um morfismo da resolução projetiva de M no complexo concentrado em grau zero $In_0(M)$.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & P_3 & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{g} P_0 \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow f \\ \cdots & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow M \longrightarrow 0 \end{array}$$

Este morfismo é um quase isomorfismo.

- (c) O único morfismo de complexos $X \rightarrow 0$ (resp. $0 \rightarrow X$) é um quase isomorfismo se, e somente se, X é acíclico.

3.2 Categorias Trianguladas

As categorias trianguladas não precisam ser abelianas (de fato, as categorias trianguladas abelianas são semisimples ver [21]), mas, para elas, temos a noção de triângulo que é um bom substituto para a noção de seqüência curta exata.

A seguir definiremos as categorias trianguladas e estudaremos algumas propriedades.

Definição 3.18 Dada uma categoria aditiva $\mathcal{A}$. Um funtor aditivo $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, que seja automorfismo de categorias, chama-se *funtor de translação*. Um *triângulo* em $\mathcal{A}$ é uma sêxtupla (X, Y, Z, f, g, h) onde $X, Y, Z \in \mathcal{A}$, $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Z)$ e $h \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Z, T(X))$. Um triângulo será representado pela seguinte seqüência

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X)$$

ou pelo diagrama

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ h \swarrow & & \nwarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Um *morfismo* do triângulo (X, Y, Z, f, g, h) ao triângulo (X', Y', Z', f', g', h') é uma tripla (u, v, w) de morfismos $u \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X')$, $v \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Y')$ e $w \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Z, Z')$ tais que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & T(X) \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow T(u) \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & T(X') \end{array}$$

Definição 3.19 Uma categoria aditiva $\mathcal{A}$ junto com um funtor de translação T e uma família de triângulos $\mathcal{T}$ (chamados *triângulos distinguidos*), é uma *categoria triangulada* se satisfaz os seguintes axiomas:

TR1 A coleção de triângulos distinguidos é fechada para isomorfismos de triângulos.

TR2 Para cada objeto X em $\mathcal{A}$, o triângulo

$$X \xrightarrow{id_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow T(X)$$

é distinguido.

TR3 Para cada $f \in Hom_{\mathcal{A}}(X, Y)$, existe um triângulo distinguido da seguinte forma

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow T(X)$$

TR4 O triângulo

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X)$$

é distinguido se, e somente se, o triângulo

$$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X) \xrightarrow{-T(f)} T(Y)$$

é distinguido.

TR5 Se $(X, Y, Z, f, g, h), (X', Y', Z', f', g', h') \in \mathcal{T}$ e $u \in Hom_{\mathcal{A}}(X, X'), v \in Hom_{\mathcal{A}}(Y, Y')$ satisfazem $vf = f'u$. Então existe $w \in Hom_{\mathcal{A}}(Z, Z')$ tal que

$$(u, v, w) : (X, Y, Z, f, g, h) \longrightarrow (X', Y', Z', f', g', h')$$

é um morfismo de triângulos, isto é, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & T(X) \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow T(u) \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & T(X') \end{array}$$

TR6 (Axioma do Octoedro) Se $(X, Y, Z', f, g, h), (Y, Z, X', f', g', h')$ e $(X, Z, Y', f'', g'', h'') \in \mathcal{T}$ tal que $f'' = f'f$. Então existe $u \in Hom_{\mathcal{A}}(Z', Y')$ e $v \in Hom_{\mathcal{A}}(Y', X')$ tais que $(Z', Y', X', u, v, T(g)h') \in \mathcal{T}$ e $(1_X, f', u), (f, 1_Z, v)$ são morfismos de triângulos, isto é, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z' & \xrightarrow{h} & T(X) \\
\downarrow 1_X & & \downarrow f' & & \downarrow u & & \downarrow T(1_X) \\
X & \xrightarrow{f''} & Z & \xrightarrow{g''} & Y' & \xrightarrow{h''} & T(X) \\
\downarrow f & & \downarrow 1_Z & & \downarrow v & & \downarrow T(f) \\
Y & \xrightarrow{f'} & Z & \xrightarrow{g'} & X' & \xrightarrow{h'} & T(Y) \\
& & & & \downarrow T(g)h' & \nearrow T(g) & \\
& & & & T(Z') & &
\end{array}$$

O axioma TR6 pode-se pensar como uma classe do primeiro teorema de isomorfismos: Se imaginamos o termo final do triângulo como um quociente, isto é, na hipótese temos que $Z' \cong Y/X$, $X' \cong Z/Y$ e $Y' \cong Z/X$. Então TR6 diz que $X' \cong Y'/Z'$. O nome do axioma TR6 é porque ele pode ser representado pelo seguinte diagrama;

Observação 3.20 Algumas propriedades dos triângulos.

- (a) De TR3 e TR4 todo morfismo em $\mathcal{A}$ é um lado qualquer de um triângulo distinguido.
- (b) De TR4 e TR5 se $(X, Y, Z, f, g, h), (X', Y', Z', f', g', h') \in \mathcal{T}$ e $v \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Y'), w \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Z, Z')$ satisfazem $wg = g'v$. Então existe $u \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X')$ tal que $(u, v, w) : (X, Y, Z, f, g, h) \rightarrow (X', Y', Z', f', g', h')$ é um morfismo de triângulos.

Proposição 3.21 *A composição de dois morfismos consecutivos num triângulo distinguido é o morfismo nulo.*

Definição 3.22 Dada uma categoria triangulada $\mathcal{A}$ e uma categoria abeliana $\mathcal{A}b$, um funtor aditivo $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}b$ é um *funtor cohomológico* se F associa a todo triângulo distinguido,

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X),$$

uma seqüência exata longa

$$\dots \longrightarrow F^n(X) \xrightarrow{u^*} F^n(Y) \xrightarrow{v^*} F^n(Z) \xrightarrow{w^*} F^{n+1}(X) \longrightarrow \dots$$

em $\mathcal{A}b$.

Proposição 3.23 *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria triangulada. Para todo M em $\mathcal{A}$ os funtores:*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, -) : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow \mathcal{A}b$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, M) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}b$$

são funtores cohomológicos.

Corolário 3.24 *Na situação do axioma TR5, se os morfismos u e v são isomorfismos então w é isomorfismo.*

Daremos dois exemplos importantes de categorias trianguladas. Em primeiro lugar construiremos a estrutura triangulada para a categoria de homotopia de uma categoria aditiva (ver Definição 3.8). Em segundo lugar fazemos o mesmo para a categoria estável de uma categoria Frobenius (um caso particular, é a categoria dos módulos finitamente gerados sobre uma álgebra finito dimensional autoinjética).

Exemplo 3.25 Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria aditiva e $K(\mathcal{A})$ a categoria de homotopia de $\mathcal{A}$.

Para um inteiro k , o funtor de translação (por k) $[k]$ é um automorfismo da categoria $C(\mathcal{A})$ (ver Definição 3.1) o qual envia o complexo X ao complexo $X[k]$ definido por $X[k]^n := X^{n+k}$ e $d_{X[k]}^n := (-1)^k d_X^{n+k}$. Assim a translação por um inteiro positivo k movimenta o complexo à esquerda. $[k]$ induz um automorfismo em $K(\mathcal{A})$ denotado igualmente.

Sejam X, Y objetos em $C(\mathcal{A})$ e $f : X \rightarrow Y$ um morfismo. O *cone* de f é o complexo C_f em $C(\mathcal{A})$ definido por: $C_f := Y \oplus X[1]$ e

$$d_{C_f}^n := \begin{pmatrix} d_Y^n & f^{n+1} \\ 0 & -d_{X[1]}^n \end{pmatrix} \quad \text{para cada inteiro } n.$$

Consideremos o triângulo (X, Y, C_f, q, p) onde q e p são a inclusão canônica e a projeção canônica respectivamente. Aplicando o funtor h (ver Observação 3.13) a este triângulo, abusando da linguagem, obtemos o triângulo (X, Y, C_f, q, p) chamado triângulo estândar construído sobre o morfismo f (dois triângulos estândar construídos sobre morfismos homotópicos são isomorfos em $K(\mathcal{A})$).

Seja $\mathcal{T}$ a família de triângulos em $K(\mathcal{A})$ que são isomorfos a um triângulo estândar, isto é, $(X, Y, C_f, q, p) \in \mathcal{T}$ se, e somente se, existe $f \in \text{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X, Y)$ e o seguinte diagrama comuta em $K(\mathcal{A})$

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xrightarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{\gamma} & X[1] \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow u[1] \\ X' & \xrightarrow{f} & Y' & \xrightarrow{q} & C_f & \xrightarrow{p} & X'[1] \end{array}$$

com u, v e w isomorfismos em $K(\mathcal{A})$.

É fácil ver que $K(\mathcal{A})$ (ver [25]), com o funtor de translação $[1]$ e com essa família de triângulos distinguidos $\mathcal{T}$ é uma categoria triangulada.

Exemplo 3.26 Para mais detalhes deste exemplo ver [26]. Seja $\mathcal{B}$ uma categoria aditiva mergulhada como subcategoria plena e fechada para extensões numa categoria abeliana $\mathcal{A}$.

Seja $\mathcal{S}$ o conjunto das seqüências curtas exatas em $\mathcal{A}$ com termos em $\mathcal{B}$. Segue-se (ver [44]) que o par $(\mathcal{B}, \mathcal{S})$ é chamado *categoria exata*. Um morfismo $f : X \rightarrow Y$ em $\mathcal{B}$ é chamado *monomorfismo próprio* se existe a seguinte seqüência curta exata em $\mathcal{S}$

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0.$$

Um objeto I em $\mathcal{B}$ é chamado $\mathcal{S}$ -injetivo se para todo monomorfismo próprio $f : X \rightarrow Y$ e um morfismo $h : X \rightarrow I$ em $\mathcal{B}$ existe $g : Y \rightarrow I$ tal que $gf = h$.

Nos dizemos que a categoria exata $(\mathcal{B}, \mathcal{S})$ tem suficientes objetos $\mathcal{S}$ -injetivos se para cada X em $\mathcal{B}$ existe um monomorfismo próprio $i : X \rightarrow I$ com I $\mathcal{S}$ -injetivo em $\mathcal{B}$. Dualmente pode-se obter, dos conceitos acima, os conceitos para projetivos.

Uma categoria exata $(\mathcal{B}, \mathcal{S})$ é chamada uma *categoria Frobenius* se $(\mathcal{B}, \mathcal{S})$ tem suficientes objetos $\mathcal{S}$ -injetivos e objetos $\mathcal{S}$ -projetivos e, além disso, se os objetos $\mathcal{S}$ -injetivos coincidem com os objetos $\mathcal{S}$ -projetivos.

Seja $\underline{\mathcal{B}}$ a categoria com os mesmos objetos de $\mathcal{B}$ e os morfismos definidos por:

$$\text{Hom}_{\underline{\mathcal{B}}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{B}}(X, Y) / I(X, Y),$$

onde $I(X, Y)$ é o subgrupo dos morfismos de X a Y o quais se fatoram sobre um $\mathcal{S}$ -injetivo.

Dada $(\mathcal{B}, \mathcal{S})$ uma categoria de Frobenius, para $X \in \mathcal{B}$ temos a seguinte seqüência curta exata em $\mathcal{B}$

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{i} I_X \xrightarrow{\phi} TX \longrightarrow 0,$$

onde I_X é $\mathcal{S}$ -injetivo.

Para um morfismo $f : X \longrightarrow Y$ em $\mathcal{B}$ existe um único morfismo denotado por Tf tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{i} & I_X & \xrightarrow{i'} & TX \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow f_{I_X} & & \downarrow Tf \\ 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{j} & I_Y & \xrightarrow{j'} & TY \longrightarrow 0. \end{array}$$

Assim definimos o funtor de translação $T : \underline{\mathcal{B}} \longrightarrow \underline{\mathcal{B}}$ tal que $T(X) = TX$ para $X \in \mathcal{B}$ e $T(f) = Tf$ para $f \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(X, Y)$.

Sejam $X, Y \in \mathcal{B}$ e $f \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(X, Y)$. Consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow i & & \downarrow g \\ I'_X & \longrightarrow & C_f \\ \downarrow i & & \downarrow h \\ TX & \xrightarrow{1} & TX, \end{array}$$

onde $0 \longrightarrow X \xrightarrow{i} I_X \xrightarrow{i'} TX \longrightarrow 0$ esta em $\mathcal{S}$, I_X é $\mathcal{S}$ -injetivo e C_f é a soma amalgamada de f e i .

Temos então o triângulo (X, Y, C_f, f, g, h) em $\mathcal{B}$, e o chamaremos triângulo estândar quando é considerado em $\underline{\mathcal{B}}$. Seja $\mathcal{T}$ a família de triângulos em $\underline{\mathcal{B}}$ que são isomorfos a triângulos estândar.

É fácil ver que $\underline{\mathcal{B}}$, com o funtor de translação T e a família de triângulos distinguidos $\mathcal{T}$, é uma categoria triangulada.

3.3 Localização de Categorias

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria e $\underline{\mathcal{S}}$ uma classe de morfismos em $\mathcal{A}$, satisfazendo certas propriedades, o qual chamaremos de sistema multiplicativo (ver Definição 3.28). Construiremos, a partir de $\underline{\mathcal{S}}$, uma categoria $\underline{\mathcal{S}}^{-1}\mathcal{A}$ que, junto com o funtor canônico $(\iota_{\underline{\mathcal{S}}} : \mathcal{A} \rightarrow \underline{\mathcal{S}}^{-1}\mathcal{A})$, formam a categoria, chamada localizada de $\mathcal{A}$ com respeito ao sistema multiplicativo $\underline{\mathcal{S}}$. Primeiro descreveremos $\underline{\mathcal{S}}^{-1}\mathcal{A}$. Para isso precisaremos das seguintes definições.

Sejam $\mathcal{D}, \mathcal{J}$ duas categorias e $\mathcal{D}^{\mathcal{J}}$ a categoria dos funtores de $\mathcal{J}$ a $\mathcal{D}$. Definiremos o funtor $\Delta : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^{\mathcal{J}}$ da seguinte forma, se $M \in \mathcal{D}$ então $\Delta(M)$ é o funtor constante (isto é, $(\Delta(M))_j = M$ para todo $j \in \mathcal{J}$). O *colimite* do funtor $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{D}$, é um objeto de $\mathcal{D}$, denotado por $\text{colim}_{k \in \mathcal{J}} F_k$, junto com uma transformação natural de F a $\Delta(\text{colim}_{k \in \mathcal{J}} F_k)$, a qual tem a propriedade universal dentro das transformações naturais de F a $\Delta(M)$, com $M \in \mathcal{D}$.

A categoria $\mathcal{J} \neq \emptyset$, será chamada *filtrada* se satisfizer as seguintes condições:

- (1) Para todo $i, j \in \mathcal{J}$ existem $k \in \mathcal{J}$ e morfismos $u : i \rightarrow k$ e $v : j \rightarrow k$.
- (2) Para dois morfismos $u, v : i \rightarrow j$ existem $k \in \mathcal{J}$ e um morfismo $w : j \rightarrow k$ tal que $wu = wv$.

Um *colimite filtrado* em $\mathcal{D}$, é o colimite do funtor $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{D}$, onde $\mathcal{J}$ é uma categoria filtrada. Nos denotaremos por $\varinjlim_{j \in \mathcal{J}} F_j$, tal colimite filtrado.

Exemplo 3.27 (a) Seja $\mathcal{J}$ um conjunto parcialmente ordenado (poset), isto é, um conjunto com uma relação $(\leq)$ reflexiva, transitiva e antisimétrica.

(b) Seja $\mathcal{J}'$ um conjunto quase ordenado, ou seja, um conjunto com uma relação $(\leq)$ reflexiva e transitiva.

Em ambos, os casos (a) e (b), podemos dar a estes conjuntos uma estrutura de categoria, de forma que os objetos serão os elementos dos conjuntos e, o conjunto dos morfismos, do elemento i ao elemento j será o seguinte: o conjunto unitário, se $i \leq j$, ou o conjunto vazio, caso contrário. Além disto, se os conjuntos $\mathcal{J}$ e $\mathcal{J}'$ são dirigidos (isto é, para cada par de elementos i, j existe um elemento k talque $i \leq k$ e $j \leq k$), vemos facilmente que $\mathcal{J}$ e $\mathcal{J}'$ são categorias filtradas. Neste caso o colimite filtrado sobre $\mathcal{J}$, ou $\mathcal{J}'$, é chamado de **limite direto** e é denotado por $\varinjlim F_i$ (ver [54] e [55]).

Definição 3.28 Dada uma categoria $\mathcal{A}$. Um *sistema multiplicativo* é uma família $\underline{\mathcal{S}}_{\mathcal{A}}$ (ou simplesmente $\underline{\mathcal{S}}$) de morfismos em $\mathcal{A}$ que satisfaz as seguintes condições:

SM1 Se $s, t \in \underline{\mathcal{S}}$ então $st \in \underline{\mathcal{S}}$, sempre que exista a composta.

SM2 Se M for um objeto em $\mathcal{A}$ então $1_M \in \underline{\mathcal{S}}$.

SM3 Sejam M, N e L objetos em $\mathcal{A}$. Se $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$ e $s \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(L, N) \cap \underline{\mathcal{S}}$, tem-se que existem $g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(K, L)$ e $t \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(K, M) \cap \underline{\mathcal{S}}$ tais que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{g} & L \\ \downarrow t & & \downarrow s \\ M & \xrightarrow{f} & N. \end{array}$$

SM4 Para todo $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$ as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) Existe $s \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(N, N') \cap \underline{\mathcal{S}}$ tal que $sf = sg$
- (ii) Existe $t \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M', M) \cap \underline{\mathcal{S}}$ tal que $ft = gt$

Seja $M \in \mathcal{A}$ e $\underline{\mathcal{S}}$ um sistema multiplicativo. Denotaremos por $\mathcal{I}_M$, a categoria cujos objetos são os morfismos $s : L \rightarrow M$, com $s \in \underline{\mathcal{S}}$. Os objetos de $\mathcal{I}_M$ serão denotados por (L, s) . Um morfismo $f : (L, s) \rightarrow (L', t)$ em $\mathcal{I}_M$, é um morfismo $f : L \rightarrow L'$ em $\mathcal{A}$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f} & L' \\ & \searrow s & \swarrow t \\ & M & \end{array}$$

Seja $N \in \mathcal{A}$ e consideremos o funtor $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, N)$ de $\mathcal{I}_M^{\text{op}}$ em Ens (onde $\mathcal{I}_M^{\text{op}}$ é a categoria oposta de $\mathcal{I}_M$ e Ens é a categoria dos conjuntos) definido por: $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, N)(L, s) :=$

$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(L, N)$ para $(L, s) \in \mathcal{I}_M^{op}$. Se $f : (L, s) \rightarrow (L', t)$ é um morfismo em $\mathcal{I}_M^{op}$ então $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, N)(f) := \text{Hom}_{\mathcal{A}}(f, N)$.

Agora, pelas propriedades do sistema multiplicativo $\underline{\mathcal{S}}$, temos que $\mathcal{I}_M$ é uma categoria filtrada. Nosso interesse será o colimite filtrado do funtor $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, N)$, isto é, $\varinjlim_{(L, s) \in \mathcal{I}_M^{op}} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(L, N)$.

Definição 3.29 A localização da categoria $\mathcal{A}$, com relação ao sistema multiplicativo $\underline{\mathcal{S}}$, $\underline{\mathcal{S}}^{-1}\mathcal{A}$, é definida como segue:

(i) Os objetos de $\underline{\mathcal{S}}^{-1}\mathcal{A}$, são os mesmos objetos de $\mathcal{A}$.

(ii) Para M, N em $\mathcal{A}$ temos que

$$\text{Hom}_{\underline{\mathcal{S}}^{-1}\mathcal{A}}(M, N) = \varinjlim_{(L, s) \in \mathcal{I}_M^{op}} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(L, N).$$

Descreveremos agora os morfismos em $\underline{\mathcal{S}}^{-1}\mathcal{A}$, de tal forma que poderemos obter $\underline{\mathcal{S}}^{-1}\mathcal{A}$ de forma análoga à feita no Capítulo 2, para a localização de anéis.

Sejam $M, N \in \mathcal{A}$, denotaremos por $T_{M, N}$ o conjunto dos diagramas da forma

$$M \xleftarrow{s} L \xrightarrow{f} N,$$

com $s \in \underline{\mathcal{S}}$ e $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(L, N)$. Dois elementos em $T_{M, N}$

$$M \xleftarrow{s} L_1 \xrightarrow{f} N$$

e

$$M \xleftarrow{t} L_2 \xrightarrow{g} N$$

são equivalentes se, e somente se, existirem $r \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(L_3, M)$, $h \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(L_3, N)$, $p \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(L_3, L_1)$ e $p' \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(L_3, L_2)$, tais que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccc} & & L_1 & & \\ & s \swarrow & \uparrow p & \searrow f & \\ M & \xleftarrow{r} & L_3 & \xrightarrow{h} & N \\ & \nwarrow t & \downarrow p' & \nearrow g & \\ & & L_2 & & \end{array} \quad (3.1)$$

É fácil ver que esta é uma relação de equivalência. Denotaremos por $Hom_{\mathcal{A}_{\underline{S}}}(M, N)$ o conjunto das classes de equivalência dos elementos de $T_{M,N}$. Chamaremos os elementos de $Hom_{\mathcal{A}_{\underline{S}}}(M, N)$ de *frações* e, serão denotados por $\frac{f}{s}$, isto é,

$$\frac{f}{s} := M \xleftarrow{s} L \xrightarrow{f} N.$$

Teorema 3.30 *Com a notação anterior, consideremos: $\mathcal{A}$ uma categoria; $\underline{S}$ um sistema multiplicativo; a categoria $\mathcal{I}_M$ e o conjunto $Hom_{\mathcal{A}_{\underline{S}}}(M, N)$, com M e N em $\mathcal{A}$. Então*

$$Hom_{\mathcal{A}_{\underline{S}}}(M, N) = \varinjlim_{(L,s) \in \mathcal{I}_M^{op}} Hom_{\mathcal{A}}(L, N) = Hom_{\underline{S}^{-1}\mathcal{A}}(M, N).$$

Demonstração. Sejam M e N em $\mathcal{A}$ e consideremos o conjunto $Hom_{\mathcal{A}_{\underline{S}}}(M, N)$. Tomamos os funtores $Hom_{\mathcal{A}}(-, N) : \mathcal{I}_M^{op} \rightarrow Ens$ e $\Delta(Hom_{\mathcal{A}_{\underline{S}}}(M, N)) : \mathcal{I}_M^{op} \rightarrow Ens$, onde $\Delta(Hom_{\mathcal{A}_{\underline{S}}}(M, N))$ é o funtor constante, isto é, $\Delta(Hom_{\mathcal{A}_{\underline{S}}}(M, N))(L, s) = Hom_{\mathcal{A}_{\underline{S}}}(M, N)$, para todo (L, s) em $\mathcal{I}_M^{op}$ e, $\Delta(Hom_{\mathcal{A}_{\underline{S}}}(M, N))(f) = 1_{Hom_{\mathcal{A}_{\underline{S}}}(M, N)}$, para todo morfismo em $\mathcal{I}_M^{op}$.

Definiremos uma transformação natural, λ de $Hom_{\mathcal{A}}(-, N)$ a $\Delta(Hom_{\mathcal{A}_{\underline{S}}}(M, N))$. Para (L, s) em $\mathcal{I}_M^{op}$ damos a seguinte aplicação

$$\begin{array}{ccc} \lambda_{(L,s)} : Hom_{\mathcal{A}}(L, N) & \longrightarrow & Hom_{\mathcal{A}_{\underline{S}}}(M, N) \\ f & \longmapsto & \lambda_{(L,s)}(f) = \frac{f}{s} \end{array}$$

De fato, λ é uma transformação natural, já que se $f : (L, s) \rightarrow (L', t)$ é um morfismo em $\mathcal{I}_M^{op}$, segue-se facilmente que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathcal{A}}(L', N) & \xrightarrow{\lambda_{(L',t)}} & Hom_{\mathcal{A}_{\underline{S}}}(M, N) \\ \uparrow Hom_{\mathcal{A}}(f, N) & \nearrow \lambda_{(L,s)} & \\ Hom_{\mathcal{A}}(L, N) & & \end{array}$$

Da definição de colimite filtrado, resta provar que λ tem a propriedade universal entre as transformações naturais de $Hom_{\mathcal{A}}(-, N)$ a $\Delta(D)$, sendo D um conjunto. Seja μ uma transformação natural de $Hom_{\mathcal{A}}(-, N)$ a $\Delta(D)$, com D um conjunto. Construiremos uma aplicação $g : Hom_{\mathcal{A}_{\underline{S}}}(M, N) \rightarrow D$ tal que, para todo (L, s) em $\mathcal{I}_M^{op}$, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathcal{A}}(L, N) & \xrightarrow{\lambda_{(L,s)}} & Hom_{\mathcal{A}_{\underline{S}}}(M, N) \\ & \searrow \mu_{(L,s)} & \downarrow g \\ & & D. \end{array}$$

Definamos $g : \text{Hom}_{\mathcal{A}_{\underline{S}}}(M, N) \longrightarrow D$, por $g(\frac{h}{s}) = \mu_{(L, s)}(h)$, para $\frac{h}{s}$ em $\text{Hom}_{\mathcal{A}_{\underline{S}}}(M, N)$. É claro que o diagrama comuta e, não é difícil ver, que g está bem definida e é única.

Portanto temos que

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}_{\underline{S}}}(M, N) = \varinjlim_{(L, s) \in \mathcal{I}_M^{op}} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(L, N).$$

□

A seguinte observação mostrará a relação entre a localização de anéis e a localização de categorias.

Observação 3.31 *Um anel R , associativo e com unidade, pode-se considerar como uma categoria aditiva $\mathcal{R}$, ou seja, $\mathcal{R}$ têm somente um objeto, $\{*\}$, e $\text{Hom}_{\mathcal{R}}(*, *) := R$. Logo, ao tomarmos um sistema multiplicativo, S , (ver Definição 2.31) em R , ele é um sistema multiplicativo, $\underline{S}$, em $\mathcal{R}$ (ver Definição 3.28). É fácil ver que as relações de equivalência (dadas na Definição 2.19 e no diagrama 3.1) são equivalentes. Portanto ao considerar $S^{-1}R$ como uma categoria, ela é isomorfa a $\underline{S}^{-1}\mathcal{R}$.*

De agora em diante, denotaremos os morfismos, na categoria localizada $\underline{S}^{-1}\mathcal{A}$, de $\text{Hom}_{\mathcal{A}_{\underline{S}}}(M, N)$, ou seja as frações, como foi indicado acima.

A composição de frações esta definida como segue. Para compor

$\frac{f}{s} : M \xleftarrow{s} U \xrightarrow{f} N$ e $\frac{g}{t} : N \xleftarrow{t} V \xrightarrow{g} L$, utilizando SM3, obtemos $h \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(K, V)$ e $r \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(K, U) \cap \underline{S}$, tais que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{h} & V \\ \downarrow r & & \downarrow t \\ U & \xrightarrow{f} & N. \end{array}$$

A composta é a classe da fração $\frac{gh}{sr} : M \xleftarrow{sr} K \xrightarrow{gh} L$. Esta operação está bem definida, é associativa, e, para cada objeto M em $\mathcal{A}$, a fração

$\frac{1_M}{1_M} : M \xleftarrow{1_M} M \xrightarrow{1_M} M$ é o elemento unidade.

Veremos que o funtor canônico $\iota_{\underline{S}} : \mathcal{A} \longrightarrow \underline{S}^{-1}\mathcal{A}$ é caracterizado pela seguinte propriedade universal.

Teorema 3.32 *Se $\underline{S}$ é um sistema multiplicativo em uma categoria $\mathcal{A}$, então existem $\underline{S}^{-1}\mathcal{A}$ e um funtor $\iota_{\underline{S}} : \mathcal{A} \rightarrow \underline{S}^{-1}\mathcal{A}$ tal que:*

- (i) *Se $s \in \underline{S}$ então $\iota_{\underline{S}}(s)$ é um isomorfismo em $\underline{S}^{-1}\mathcal{A}$.*
- (ii) *Se $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$, é um funtor que leva elementos de $\underline{S}$ em isomorfismos em $\mathcal{C}$, então existe um único funtor $G : \underline{S}^{-1}\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{F} & \mathcal{C} \\ & \searrow \iota_{\underline{S}} & \nearrow G \\ & \underline{S}^{-1}\mathcal{A} & \end{array}$$

Observação 3.33

- (a) Quando o sistema multiplicativo $\underline{S}$, de uma categoria $\mathcal{A}$, é um conjunto, então sempre existe a localização $\underline{S}^{-1}\mathcal{A}$ (ver [40]). Nós evitaremos esta discussão teórica. Para mais detalhes ver [54].
- (b) Pode-se definir uma fração em uma categoria $\mathcal{A}$, a partir do diagrama seguinte

$$\frac{f}{s} : \quad M \xrightarrow{f} L \xleftarrow{s} N$$

e obter a localização $\underline{S}^{-1}\mathcal{A}$, dualizando a relação de equivalência para $\text{Hom}_{\underline{S}^{-1}\mathcal{A}}(M, N)$ e mudando a condição SM3 pela seguinte condição

SM3' Sejam M, N e L objetos em $\mathcal{A}$. Se $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(N, M)$ e $s \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(N, L) \cap \underline{S}$, tem-se que existem $g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(L, K)$ e $t \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, K) \cap \underline{S}$ tais que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} K & \xleftarrow{g} & L \\ \uparrow t & & \uparrow s \\ M & \xleftarrow{f} & N \end{array}$$

No que segue, estudaremos algumas propriedades da categoria $\underline{S}^{-1}\mathcal{A}$ e o funtor canônico $\iota_{\underline{S}} : \mathcal{A} \rightarrow \underline{S}^{-1}\mathcal{A}$.

Corolário 3.34 *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria aditiva, as seguintes afirmações são satisfeitas.*

- (i) Se L for o objeto zero em $\mathcal{A}$ então $\iota_{\underline{\mathcal{S}}}(L)$ é o objeto zero em $\underline{\mathcal{S}}^{-1}\mathcal{A}$.
- (ii) Se o produto $M \times N$ existir em $\mathcal{A}$ então $\iota_{\underline{\mathcal{S}}}(M \times N) \cong \iota_{\underline{\mathcal{S}}}(M) \times \iota_{\underline{\mathcal{S}}}(N)$ em $\underline{\mathcal{S}}^{-1}\mathcal{A}$.
- (iii) Suponha que $\mathcal{A}$ tem objeto zero. Então para qualquer M em $\mathcal{A}$:

$$\iota_{\underline{\mathcal{S}}}(M) \cong 0 \text{ em } \underline{\mathcal{S}}^{-1}\mathcal{A}, \text{ se e somente se, } \underline{\mathcal{S}} \text{ contém o morfismo zero } M \xrightarrow{0} M.$$

Proposição 3.35 *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria aditiva então $\underline{\mathcal{S}}^{-1}\mathcal{A}$ é uma categoria aditiva e o funtor canônico $\iota_{\underline{\mathcal{S}}}(s)$ é aditivo.*

Proposição 3.36 *Seja $u \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$ onde $\mathcal{A}$ é uma categoria aditiva. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $\iota_{\underline{\mathcal{S}}}(u) = 0$.
- (ii) Existe $s \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(L, M) \cap \underline{\mathcal{S}}$ tal que $us = 0$.
- (iii) Existe $t \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(N, L') \cap \underline{\mathcal{S}}$ tal que $tu = 0$.

Veremos a seguir que as categorias localizadas de categorias trianguladas, continuarão sendo trianguladas.

Corolário 3.37 *Se $u \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$ é um monomorfismo (resp. epimorfismo) então $\iota_{\underline{\mathcal{S}}}(u)$ é um monomorfismo (resp. epimorfismo) em $\underline{\mathcal{S}}^{-1}\mathcal{A}$.*

Definição 3.38 Dadas duas categorias aditivas $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$, com os respectivos funtores de translação T e T' , o funtor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ é dito **funtor graduado** se $FT = T'F$. F é chamado **δ -funtor**, se F é um funtor graduado e F transforma triângulos distinguidos de $\mathcal{A}$ em triângulos distinguidos em $\mathcal{A}'$.

Observação 3.39 Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria aditiva triangulada pelo funtor de translação T . $\mathcal{T}$ a família de triângulos distinguidos e $\underline{\mathcal{S}}$ um sistema multiplicativo em $\mathcal{A}$. O sistema multiplicativo $\underline{\mathcal{S}}$, é compatível com a estrutura triangular em $\mathcal{A}$ se, além de satisfazer SM1, SM2, SM3 e SM4, satisfaz:

SM5 $s \in \underline{\mathcal{S}}$ se, e somente se, $T(s) \in \underline{\mathcal{S}}$.

SM6 Na situação do axioma TR5, se os morfismos $u, v \in \underline{\mathcal{S}}$ então $w \in \underline{\mathcal{S}}$.

Teorema 3.40 *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria aditiva triangulada, e $\underline{\mathcal{S}}$ um sistema multiplicativo em $\mathcal{A}$ compatível com a estrutura triangulada. Então a categoria $\underline{\mathcal{S}}^{-1}\mathcal{A}$ tem estrutura triangulada tal que o funtor canônico $\iota_{\underline{\mathcal{S}}} : \mathcal{A} \rightarrow \underline{\mathcal{S}}^{-1}\mathcal{A}$ é um δ -funtor.*

3.4 A Categoria Derivada

As categorias derivadas foram introduzidas no início dos anos sessenta por Grothendieck e Verdier (ver [53]) e são de grande utilidade na geometria algébrica, álgebra homológica e topologia algébrica. Existem muitas similaridades entre álgebra homológica e topologia algébrica, por exemplo, as noções de cadeia de homotopia e cones têm suas origens em topologia simplicial.

Nesta seção voltamos sobre todos os conceitos definidos na Seção 3.1. Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. A categoria derivada $D(\mathcal{A})$ de uma categoria abeliana é o análogo algébrico da categoria de homotopia de espaços topológicos. $D(\mathcal{A})$ é obtida da categoria $K(\mathcal{A})$ (a qual é obtida de $C(\mathcal{A})$ igualando equivalências homotópicas) fazendo a localização pelos quase isomorfismos (qis).

Vejam os uma idéia do que acontece na categoria derivada antes de formalizá-la. A Observação 3.5 e o Exemplo 3.2 (a) dão duas formas de olhar um objeto em $K(\mathcal{A})$. Na categoria derivada $D(\mathcal{A})$ que construiremos, estas duas formas vão ser isomorfas, assim como também o quase isomorfismo do Exemplo 3.17 (a) passará a ser um isomorfismo.

Podemos nos perguntar quando um morfismo de complexos $f : X \rightarrow Y$ é zero na categoria derivada $D(\mathcal{A})$. Uma condição necessária e suficiente é a seguinte:

Existe um qis, $s : Y \rightarrow Y'$, tal que sf é homotópico a zero (*)

(ou equivalentemente, existe um qis, $t : X' \rightarrow X$, tal que ft é homotópico a zero).

De fato, se $f \sim 0$ então f satisfaz (*), mas o recíproco não é verdadeiro, já que, se tomamos o complexo X do Exemplo 3.11 (b), $f = 1_X$ e $g : X \rightarrow 0$ então obtemos g quase isomorfismo (ver Exemplo 3.17 (c)), com $gf = 0$. Mas f não é homotópico a zero.

Agora se f satisfaz (*) então f induz a aplicação zero na categoria derivada $D(\mathcal{A})$, mas o recíproco não é certo, pois se consideramos o morfismo do Exemplo 3.2 (c) que induz o morfismo zero na categoria derivada $D(\mathcal{A})$ (ou $H^n(f) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$) e não existe um qis, $t : X' \rightarrow X$, tal que $ft \sim 0$.

A seguir, daremos a definição formal de categoria derivada. Veremos que ela tem estrutura de categoria triangulada. Para mais detalhes ver [25] ou [54].

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. Denotamos por $Qis_{\mathcal{A}}$ (ou simplesmente Qis) a classe de todos os quase isomorfismos de $K(\mathcal{A})$.

Definição 3.41 A localização de $K(\mathcal{A})$ relativa ao sistema multiplicativo Qis será chamada a categoria derivada da categoria abeliana $\mathcal{A}$ e a denotamos por $D(\mathcal{A})$.

Para a seguinte proposição ver Definição 3.28, a Observação 3.39 e o Exemplo 3.25.

Proposição 3.42 *A família Q_i s é um sistema multiplicativo em $K(\mathcal{A})$, compatível com a estrutura triangulada de $K(\mathcal{A})$.*

Teorema 3.43 *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. A categoria $D(\mathcal{A})$ é aditiva e triangulada.*

Capítulo 4

Aplicações

Neste capítulo apresentaremos, nas duas primeiras seções, nossos resultados principais. Na última seção apresentaremos exemplos de categorias derivadas, introduzindo os conceitos de triângulo de Auslander-Reiten, aljava com translação, aljava de Auslander-Reiten e enunciaremos o Teorema de Happel sobre a existência dos triângulos de Auslander-Reiten, os detalhes podem ser encontrados em [26].

4.1 Relações entre $\mathcal{S}^{-1}(Mod-R)$ e $Mod-S^{-1}R$

Nesta seção mostramos a relação entre a localização da categoria dos R -módulos ($\mathcal{S}^{-1}(Mod-R)$), a partir de uma classe especial de morfismos, que satisfarão as condições de sistema multiplicativo (ver Definição 3.28), e a categoria dos módulos sobre a localização de um anel ($Mod-S^{-1}R$), isto é, exibiremos um funtor fiel e denso de $\mathcal{S}^{-1}(Mod-R)$ em $Mod-S^{-1}R$. Começaremos com o seguinte processo.

Dados R um anel, S um sistema multiplicativo central (ver Definição 2.1) e $Mod-R$ a categoria dos R -módulos à direita, definimos o R -homorfismo h_{M_s} por:

$$\begin{aligned} h_{M_s} : M &\longrightarrow M \\ m &\longmapsto ms. \end{aligned}$$

Seja $\mathcal{S}$ o conjunto dos R -homomorfismos h_{M_s} , para $s \in S$. $\mathcal{S}$ satisfaz os axiomas da Definição 3.28, pois:

SM1 Se $h_{M_s}, h_{M_{s'}}$ estão em $\mathcal{S}$, então $h_{M_s} h_{M_{s'}}$ está em $\mathcal{S}$, já que $h_{M_s} h_{M_{s'}} = h_{M_{ss'}}$.

SM2 Dado um R -módulo M , temos que $1_{M_1} = 1_M$, portanto $1_M \in \mathcal{S}$.

SM3 Para $f \in Hom_R(M, N)$ e h_{N_s} em $\underline{\mathcal{S}}$, tem-se que existem $f \in Hom_R(M, N)$ e h_{N_s} em $\underline{\mathcal{S}}$ tais que $h_{N_s}f = fh_{M_s}$. Ou seja, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ h_{M_s} \downarrow & & \downarrow h_{N_s} \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

SM4 Para todo $f, g \in Hom_R(M, N)$ e $s \in S$, é fácil ver que, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) Existe $h_{N_s} \in \underline{\mathcal{S}}$ tal que $h_{N_s}f = h_{N_s}g$
- (ii) Existe $h_{M_s} \in \underline{\mathcal{S}}$ tal que $fh_{M_s} = gh_{M_s}$

Sabemos que $\underline{\mathcal{S}}^{-1}(Mod-R)$ (ver Seção 3.3) é a categoria onde $Obj \underline{\mathcal{S}}^{-1}(Mod-R) = Obj Mod-R$ e os morfismos em $Hom_{\underline{\mathcal{S}}^{-1}(Mod-R)}(M, N)$ são as frações, ou seja, são os diagramas da forma

$$M \xleftarrow{h_{M_s}} M \xrightarrow{f} N,$$

com $s \in \underline{\mathcal{S}}$ e $f \in Hom_{Mod-R}(M, N)$, com a relação de equivalência que foi dada no Diagrama (3.1).

O seguinte exemplo exhibe um caso particular de relação de equivalência entre os morfismos em $Hom_{\underline{\mathcal{S}}^{-1}(Mod-R)}(M, N)$.

Exemplo 4.1 Sejam $f, f' \in Hom_R(M, N)$ e $s, s' \in S$. Logo $\frac{f}{h_{M_s}} = \frac{f's'}{h_{M_{ss'}}}$, já que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ & \swarrow h_{M_s} & \uparrow h_{M_{s'}} & \searrow f & \\ M & & M & \xrightarrow{fh_{M_{s'}}} & N \\ & \swarrow h_{M_{ss'}} & \downarrow 1_M & \searrow f's' & \\ & & M & & \end{array}$$

O Funtor de Localização S^{-1} foi definido em (2.8) da seguinte forma:

$$S^{-1} : \quad Mod - R \longrightarrow Mod - S^{-1}R$$

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & S^{-1}M \\ \downarrow u & & \downarrow S^{-1}(u) \\ N & \longrightarrow & S^{-1}N. \end{array}$$

Onde $S^{-1}(u)(\frac{m}{t}) = \frac{u(m)}{t}$, para todo $\frac{m}{t} \in S^{-1}M$. Este funtor tem as seguintes propriedades:

- Lema 4.2** (i) Sejam M um R -módulo, $s \in S$ e $h_{M_s} \in \underline{S}$. Temos que $S^{-1}(h_{M_s})$ é um isomorfismo em $Mod-S^{-1}R$ e $(S^{-1}(h_{M_s}))^{-1} = h_{(S^{-1}M)_{\frac{1}{s}}}$.
- (ii) Para um R -homomorfismo $u : M \longrightarrow M'$ na categoria $mod-R$ tal que $S^{-1}u = 0$ tem-se que existem h_{M_s} e $h_{M'_s}$, tais que $uh_{M_s} = 0$ e $h_{M'_s}u = 0$.

Demonstração. (i) Para h_{M_s} temos que $S^{-1}(h_{M_s}) : S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}M$ está definido por $S^{-1}(h_{M_s})(\frac{m}{t}) = \frac{ms}{t}$. É claro que $h_{(S^{-1}M)_{\frac{1}{s}}}$ é o inverso para $S^{-1}(h_{M_s})$.

(ii) Seja M em $mod-R$, logo $M = \langle m_1, \dots, m_t \rangle$, para $m_i \in M$ com $1 \leq i \leq t$. Se $S^{-1}(u) = 0$, temos que existem $s_i \in S$ tais que $u(m_i)s_i = 0$ para $1 \leq i \leq t$. Seja

$$s = \prod_{i=1}^t s_i.$$

É fácil ver que $uh_{M_s} = 0$ e $h_{M'_s}u = 0$. □

Pelo Lema 4.2 (i) e pelo Teorema 3.32 existe um único funtor $G : \underline{S}^{-1}(Mod - R) \longrightarrow Mod - S^{-1}R$ tal que $G\iota_{\underline{S}} = S^{-1}$, isto é, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} Mod - R & \xrightarrow{S^{-1}} & Mod - S^{-1}R \\ & \searrow \iota_{\underline{S}} & \nearrow G \\ & \underline{S}^{-1}(Mod - R) & \end{array}$$

Da prova feita para o Teorema 3.32, pode-se ver que o funtor G está definido como segue:

$$\underline{S}^{-1}(Mod - R) \xrightarrow{G} Mod - S^{-1}R$$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad} & S^{-1}M \\ \alpha \downarrow & & \downarrow G(\alpha) \\ M' & \xrightarrow{\quad} & S^{-1}M', \end{array}$$

onde $\alpha = \frac{f}{h_{M_s}}$, com $f : M \rightarrow M'$ um R -homomorfismo e a imagem de α por G está definida por $G(\alpha) = S^{-1}(f)(S^{-1}h_{M_s})^{-1}$, isto é, $G(\alpha)(\frac{m}{t}) = \frac{f(m)}{ts}$.

O teorema seguinte mostra a relação entre $\underline{S}^{-1}(Mod-R)$ e $Mod-S^{-1}R$.

Teorema 4.3 O funtor $G : \underline{S}^{-1}(Mod - R) \rightarrow Mod - S^{-1}R$ é fiel e denso.

Demonstração. Claramente G é denso.

G é fiel, já que, se $\frac{f}{h_{M_s}}, \frac{f'}{h_{M_{s'}}} \in Hom_{\underline{S}^{-1}(Mod-R)}(M, N)$ com $s, s' \in S$ e supondo que $S^{-1}(f)(S^{-1}h_{M_s})^{-1} = S^{-1}(f')(S^{-1}h_{M_{s'}})^{-1}$, então $\frac{f(m)}{s} = \frac{f'(m)}{s'}$, para $\frac{m}{1} \in S^{-1}M$. Assim existem $t \in S$ e $p, p' \in R$ tais que $t = sp = s'p'$ e $f(m)p = f'(m)p'$. Portanto, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ & \swarrow h_{M_s} & \uparrow h_{M_p} & \searrow f & \\ M & & M & & N \\ & \swarrow h_{M_{s'}} & \downarrow h_{M_{p'}} & \searrow f' & \\ & & M & & \end{array}$$

isto é, $\frac{f}{h_{M_s}} = \frac{f'}{h_{M_{s'}}}$.

□

Anteriormente estudamos as relações entre $\underline{S}^{-1}(Mod-R)$ e $Mod-S^{-1}R$, no caso de termos um sistema multiplicativo central S . Agora estudaremos esta relação para o caso de um sistema multiplicativo (ver Definição 2.31).

Seja $\mathcal{B}$ uma subcategoria plena de uma categoria $\mathcal{A}$. Se $\underline{\mathcal{S}}_{\mathcal{A}}$ for um sistema multiplicativo em $\mathcal{A}$, podemos fazer $\underline{\mathcal{S}}_{\mathcal{B}} = Mor_{\mathcal{B}} \cap \underline{\mathcal{S}}_{\mathcal{A}}$. Se $\underline{\mathcal{S}}_{\mathcal{B}}$ for um sistema multiplicativo em $\mathcal{B}$ podemos definir a categoria localizada $\underline{\mathcal{S}}_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathcal{B})$ e o funtor canônico $\iota_{\underline{\mathcal{S}}_{\mathcal{B}}} : \mathcal{B} \rightarrow \underline{\mathcal{S}}_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathcal{B})$.

O funtor inclusão $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A}$ induz um único funtor $F_{\underline{\mathcal{S}}}$ que faz o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{A} \\ \downarrow \iota_{\underline{\mathcal{S}}_{\mathcal{B}}} & & \downarrow \iota_{\underline{\mathcal{S}}_{\mathcal{A}}} \\ \underline{\mathcal{S}}_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathcal{B}) & \xrightarrow{F_{\underline{\mathcal{S}}}} & \underline{\mathcal{S}}_{\mathcal{A}}^{-1}(\mathcal{A}) \end{array}$$

As provas dos seguintes dois resultados podem ser encontradas em [54].

Proposição 4.4 *Com a notação anterior, se uma das seguintes condições for satisfeita:*

- (i) *Para todo $s \in Hom_{\mathcal{A}}(X, Y) \cap \underline{\mathcal{S}}_{\mathcal{A}}$, com Y em $\mathcal{B}$, então existe $f \in Hom_{\mathcal{A}}(Z, X)$, com Z em $\mathcal{B}$, tal que $sf \in \underline{\mathcal{S}}_{\mathcal{B}}$, ou*
- (ii) *Para todo $s \in Hom_{\mathcal{A}}(X, Y) \cap \underline{\mathcal{S}}_{\mathcal{A}}$, com X em $\mathcal{B}$, então existe $f \in Hom_{\mathcal{A}}(Y, Z)$, com Z em $\mathcal{B}$, tal que $fs \in \underline{\mathcal{S}}_{\mathcal{B}}$,*

então o funtor $F_{\underline{\mathcal{S}}}$ será fiel e pleno.

Se o funtor $F_{\underline{\mathcal{S}}}$ for pleno e fiel teremos que $\underline{\mathcal{S}}_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathcal{B})$ pode ser identificada a uma subcategoria plena de $\underline{\mathcal{S}}_{\mathcal{A}}^{-1}(\mathcal{A})$.

Exemplo 4.5 *Se $D(\mathcal{A})$ existir e as subcategorias plenas $K^+(\mathcal{A})$, $K^-(\mathcal{A})$ e $K^b(\mathcal{A})$ de $K(\mathcal{A})$ (ver Definição 3.15) forem as localizações por morfismos homotópicos a zero, então suas localizações por quase isomorfismos serão as subcategorias plenas $D^+(\mathcal{A})$, $D^-(\mathcal{A})$ e $D^b(\mathcal{A})$ de $D(\mathcal{A})$.*

Corolário 4.6 *Se o funtor $F_{\underline{\mathcal{S}}}$, acima definido, for pleno e fiel e se para qualquer objeto $X \in \mathcal{A}$ existir um morfismo $s : X \rightarrow Y \in \underline{\mathcal{S}}$ com $Y \in \mathcal{B}$, então $\underline{\mathcal{S}}_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathcal{B})$ e $\underline{\mathcal{S}}_{\mathcal{A}}^{-1}(\mathcal{A})$ serão equivalentes.*

Se, em adição, tivermos que $\underline{\mathcal{S}} \cap \mathcal{B}$ consiste de isomorfismos, então

$$\mathcal{B} \cong \underline{\mathcal{S}}_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathcal{B}),$$

Portanto, $\mathcal{B}$ e $\underline{\mathcal{S}}_{\mathcal{A}}^{-1}(\mathcal{A})$ são equivalentes.

O seguinte exemplo mostra a relação entre $\underline{S}^{-1}(\text{mod-}R)$ e $\text{mod-}S^{-1}R$.

Exemplo 4.7 *Seja R um anel e S um sistema multiplicativo. Seja $\underline{S}$ o conjunto dos R -homomorfismos f , em $\text{mod-}R$, tais que $S^{-1}(f)$ é um isomorfismo. Seja $f : M \rightarrow N$ um R -homomorfismo em $\text{mod-}R$. É claro que, se $f \in \underline{S}$, então f é um isomorfismo. Portanto, $\underline{S}$ é um sistema multiplicativo (ver Definição 3.28). Logo, do Corolário anterior tem-se que $\underline{S}^{-1}(\text{mod-}R)$ é equivalente a $\text{mod-}S^{-1}R$.*

4.2 Equivalência entre $K^+(\mathcal{B})$ e $D^+(\mathcal{A})$

Nesta seção mostramos a equivalência triangular de categorias trianguladas entre a categoria de homotopia, da categoria formada pelos objetos *Ext*-injetivos de uma subcategoria co-resolving de uma categoria abeliana $\mathcal{A}$ com suficientes injetivos, e a categoria derivada da subcategoria co-resolving. Para este resultado, generalizaremos um resultado bem conhecido, o qual diz que: a categoria de homotopia da categoria dos objetos injetivos de uma categoria abeliana com suficientes injetivos $\mathcal{A}$ é trianguladamente equivalentemente à categoria derivada de $\mathcal{A}$ (ver [53]). Além disso, mostraremos outra equivalência triangulada que pode ser aplicada para certa subcategoria associada a um objeto inclinante (ver Teorema 4.26).

Ao longo desta seção quando falarmos de equivalência ou equivalência triangular, queremos dizer, funtores que são equivalências e, que levam triângulos em triângulos.

Começemos com as seguintes noções.

Seja $\mathcal{B}$ uma subcategoria plena e aditiva da categoria abeliana $\mathcal{A}$. Seja $\mathcal{U} \neq \emptyset$ um conjunto (ou classe) de objetos da categoria $\mathcal{A}$. Dizemos que $\mathcal{U}$ *co-gera* a subcategoria $\mathcal{B}$ se, para qualquer objeto $V \in \mathcal{B}$, existir um monomorfismo $V \hookrightarrow U$, com $U \in \text{add}(\mathcal{U})$, onde $\text{add}(\mathcal{U})$ é a menor das categorias aditivas que contém os somandos diretos de objetos de $\mathcal{U}$. Se $\mathcal{U}$ for finito chama-se de *co-gerador finito* de $\mathcal{B}$. No caso de $\mathcal{U}$ estar formada por todos os objetos injetivos de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{U}$ co-gerar $\mathcal{A}$, dizemos que $\mathcal{A}$ *tem suficientes injetivos*.

Definição 4.8 *Um objeto $V \in \mathcal{A}$ é chamado de *Ext*-injetivo em $\mathcal{B}$, se temos $\text{Ext}_{\mathcal{B}}^1(-, V) = 0$. Denotaremos por $\mathcal{B}^{\perp_1}$ a categoria aditiva formada pelos objetos *Ext*-injetivos em $\mathcal{B}$.*

Para uma subcategoria $\mathcal{B}$ associamos a subcategoria

$$\mathcal{B}^{\perp} = \{V \in \mathcal{A} / \text{Ext}_{\mathcal{B}}^i(-, V) = 0, \quad \text{para todo } i > 0\}.$$

Definição 4.9 (a) Dizemos que uma subcategoria $\mathcal{B}$ é **fortemente fechada para co-núcleos de monomorfismos (f.f.c.m.)** se, $\mathcal{B}$ é fechada para co-núcleos de monomorfismos da forma $A \hookrightarrow V$, com $A \in \mathcal{A}$ e $V \in \mathcal{B}$.

(b) Seja $\mathcal{B}$ uma subcategoria plena e aditiva da categoria abeliana com suficientes injetivos $\mathcal{A}$. Chamaremos $\mathcal{B}$ de **co-resolving**, se satisfizer as seguintes três condições:

- (i) A categoria $\mathcal{B}$ contém os objetos injetivos de $\mathcal{A}$.
- (ii) A categoria $\mathcal{B}$ é fechada para extensões.
- (iii) A categoria $\mathcal{B}$ é fechada para conúcleos de monomorfismos.

O seguinte teorema permite obter uma resolução para um complexo limitado inferiormente, no sentido de termos um quase isomorfismo para um outro complexo.

Teorema 4.10 Seja $\mathcal{B}$ uma subcategoria plena e aditiva de uma categoria abeliana $\mathcal{A}$. Se $\mathcal{U}$ co-gera $\mathcal{A}$, então para $X \in C^+(\mathcal{B})$ existem $Y \in C^+(\mathcal{U})$ e um quase isomorfismo de X a Y .

Demonstração. Seja $X \in C^+(\mathcal{B})$, sem perda de generalidade podemos supor que $B^n = 0$ se $n < 0$. Construiremos um complexo Y com entradas $U^n \in \mathcal{U}$ e um quase isomorfismo $u : X \rightarrow Y$. Suponhamos que o complexo foi construído até grau n , com $n \geq 0$, tal que u^q é monomorfismo para $q \leq n$ e é um quase isomorfismo para $q \leq n-1$. Consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & B^{n-1} & \xrightarrow{d_X^{n-1}} & B^n & \xrightarrow{d_X^n} & B^{n+1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow u^{n-1} & & \downarrow u^n & & \vdots \\
 \cdots & \longrightarrow & U^{n-1} & \xrightarrow{d_Y^{n-1}} & U^n & & \\
 & & & & \downarrow \pi & & \downarrow g \\
 & & & & U^n / \text{Im} d_Y^{n-1} & \xrightarrow{f} & (U^n / \text{Im} d_Y^{n-1}) \wedge B^{n+1}
 \end{array}$$

Onde $(U^n / \text{Im} d_Y^{n-1}) \wedge B^{n+1}$ é a soma amalgamada de πu^n e d_X^n . Logo $g d_X^n = f \pi u^n$ e $f \pi d_Y^{n-1} = 0$.

Mostremos que g é injetora. Seja $x \in B^{n+1}$ tal que $g(x) = \overline{(0, x)} = 0$, onde $\overline{(0, x)}$ é a classe do elemento em $(U^n / \text{Im} d_Y^{n-1}) \wedge B^{n+1}$, assim existe $z \in B^n$ tal que $(\pi u^n(z), d_X^n(z)) = (0, x)$. Logo $d_X^n(z) = x$ e existe $y \in U^{n-1}$ talque $d_Y^{n-1}(y) = u^n(z)$. Desta última igualdade e da construção feita até n , existe $u \in B^{n-1}$ tal que $\pi' u^{n-1}(u) = \pi'(y)$ e $d_X^{n-1}(u) = z$, com $\pi' : U^{n-1} \rightarrow U^{n-1} / \text{Im} d_Y^{n-2}$. Portanto $x = d_X^n(z) = d_X^n d_X^{n-1}(u) = 0$.

Agora, mostraremos que u^n é um isomorfismo na n -ésima cohomologia. Seja $\alpha \in H^n(X)$, com $x \in \ker d_X^n$ como representante, tal que $H^n(u^n)(\alpha) = 0$. Logo existe $y \in U^{n-1}$ tal que $d_Y^{n-1}(y) = u^n(x)$, assim existe $z \in B^{n-1}$ tal que $\pi' u^{n-1}(z) = \pi'(y)$ e $d_X^{n-1}(z) = x$. Portanto $\alpha = 0$. Logo u^n é monomorfismo.

Se $\beta \in H^n(Y)$, com $y \in \ker f\pi$ como representante, isto é, $\overline{(\pi(y), 0)} = 0$, assim existe $z \in B^n$ tal que $\pi u^n(z) = \pi(y)$ e $d_X^n(z) = 0$, se α é a classe de z então $H^n(u^n)(\alpha) = \beta$. Portanto u^n é um epimorfismo.

Finalmente por hipótese existe $U^{n+1} \in \mathcal{U}$ e um monomorfismo

$$k : (U^n / \text{Im} d_Y^{n-1}) \bigwedge B^{n+1} \hookrightarrow U^{n+1}.$$

Tomando $u^{n+1} = kg$ e $d_Y^n = kf\pi$, obtemos o passo $n+1$ da indução. $\square$

É fácil ver que, se a categoria $\mathcal{C}$ é $B^{\perp_1}$ ou $B^{\perp}$, então as subcategorias plenas $K^*(\mathcal{C})$, com $(* = \phi, +, -, b)$, são subcategorias trianguladas de $K^*(\mathcal{A})$ e que o sistema multiplicativo $Qisc = Qis_{\mathcal{A}} \cap Mor(K^*(\mathcal{C}))$ é um sistema multiplicativo em $K^*(\mathcal{C})$ compatível com a estrutura triangulada (ver [25]).

Lema 4.11 *Seja $\mathcal{B}$ f.f.c.m. (ver Definição 4.9 (a)). Se $X \in C(\mathcal{B})$ for um complexo acíclico em $C(\mathcal{A})$ e $Y \in C^+(\mathcal{B}^{\perp_1})$, então $\text{Hom}_{K(\mathcal{B})}(X, Y) = 0$.*

Demonstração. Seja $u \in \text{Hom}_{C(\mathcal{B})}(X, Y)$, mostraremos que $u \sim 0$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que as entradas do complexo Y são $U^p = 0$ para $p < 0$. Suponhamos que foi definida a homotopia k até k^p para $p \leq q$, com $q \geq 0$.

Definamos $k_1^{q+1} : \text{Im} d_X^q \rightarrow U^q$ por $k_1^{q+1}(x) = u^q(x') - d_Y^{q-1}k^q(x')$, para $x \in \text{Im} d_X^q$ e com $x' \in B^q$ tal que $d_X^q(x') = x$.

k_1^{q+1} esta bem definida, ja que se $x'' \in B^q$ é tal que $d_X^q(x'') = x$, existe $x''' \in B^{q-1}$ tal que $d_X^{q-1}(x''') = x' - x''$. Portanto $u^q(x' - x'') - d_Y^{q-1}k^q(x' - x'') = d_Y^{q-1}u^{q-1}(x''') - d_Y^{q-1}(u^{q-1}(x''') - d_Y^{q-2}k^{q-1}(x''')) = 0$, portanto $u^q(x') - d_Y^{q-1}k^q(x') = u^q(x'') - d_Y^{q-1}k^q(x'')$.

Como $U^q \in B^{\perp_1}$ podemos estender k_1^{q+1} a $k^{q+1} : B^{q+1} \rightarrow U^q$, a qual satisfaz a condição requerida. $\square$

Lema 4.12 *Se $\mathcal{B}$ for f.f.c.m. e $u \in \text{Hom}_{C^+(\mathcal{B}^{\perp_1})}(X, Y)$ é um quase isomorfismo (qis), então u é uma equivalência homotópica.*

Demonstração. Consideremos o triângulo estandar (ver Exemplo 3.25)

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{q} C_u \xrightarrow{p} X[1]$$

Como u é quase isomorfismo, não é difícil ver que C_u é um complexo acíclico (ver [25]), assim pelo Lema 4.11, p é homotópico a zero. Logo existe uma homotopia k , isto é, $dk + kd = p$, assim temos o morfismo $v = kq \in \text{Hom}_{C^+(\mathcal{B}^{\perp_1})}(Y, X)$.

Para cada $n \in \mathbb{Z}$, definimos $s^n = k^{n-1}q_X^n : U^{n+1} \rightarrow U^n$, onde q_X é o morfismo inclusão de X (com entradas U^n) em C_u . Temos que $1_{U^{n+1}} - v^{n+1}u^{n+1} = d_X^n s^{n+1} + s^{n+2}d_X^{n+1}$ e portanto $vu \sim 1_X$. É claro que v é um quase isomorfismo, e aplicando o mesmo raciocínio para v obtemos um morfismo $w \in \text{Hom}_{C^+(\mathcal{B}^{\perp_1})}(X, Y)$ tal que $wv \sim 1_Y$. Portanto $uv \sim 1_Y$. $\square$

Proposição 4.13 *O funtor canônico de localização*

$$\iota_{\mathcal{B}^{\perp_1}}^+ : K^+(\mathcal{B}^{\perp_1}) \rightarrow D^+(\mathcal{B}^{\perp_1})$$

é um isomorfismo de categorias.

Demonstração. Do Lema 4.12 o funtor $1_{K^+(\mathcal{B}^{\perp_1})}$ transforma quase isomorfismos em isomorfismos, assim pela propriedade universal do funtor $\iota_{\mathcal{B}^{\perp_1}}^+$, existe um único funtor $G : D^+(\mathcal{B}^{\perp_1}) \rightarrow K^+(\mathcal{B}^{\perp_1})$ tal que $G\iota_{\mathcal{B}^{\perp_1}}^+ = 1_{K^+(\mathcal{B}^{\perp_1})}$.

A propriedade universal do funtor $\iota_{\mathcal{B}^{\perp_1}}^+$ mostra que $\iota_{\mathcal{B}^{\perp_1}}^+ G = 1_{D^+(\mathcal{B}^{\perp_1})}$. $\square$

Temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} K^+(\mathcal{B}^{\perp_1} \cap \mathcal{B}) & \xrightarrow{J} & K^+(\mathcal{B}) \\ \downarrow \iota_{\mathcal{B}^{\perp_1} \cap \mathcal{B}}^+ & & \downarrow \iota_{\mathcal{B}}^+ \\ D^+(\mathcal{B}^{\perp_1} \cap \mathcal{B}) & & D^+(\mathcal{B}) \end{array}$$

Onde J é o funtor inclusão e $\iota_{\mathcal{B}}^+$ é o funtor canônico de localização. Pela propriedade universal de $\iota_{\mathcal{B}}^+$ existe $F : D^+(\mathcal{B}^{\perp_1} \cap \mathcal{B}) \rightarrow D^+(\mathcal{B})$ tal que $F\iota_{\mathcal{B}^{\perp_1} \cap \mathcal{B}}^+ = \iota_{\mathcal{B}}^+ J$.

Proposição 4.14 *O funtor $F : D^+(\mathcal{B}^{\perp_1} \cap \mathcal{B}) \rightarrow D^+(\mathcal{B})$ é pleno e fiel.*

Demonstração. Seja $s \in \text{Hom}_{K^+(\mathcal{B})}(X, Y) \cap \text{Qis}_{\mathcal{B}}$, com $X \in K^+(\mathcal{B}^{\perp_1} \cap \mathcal{B})$. De forma similar que o feito no Lema 4.12 se constrói $f \in \text{Hom}_{K^+(\mathcal{B})}(Y, X)$ tal que $fs = 1_X$ em $K^+(\mathcal{B}^{\perp_1} \cap \mathcal{B})$ e pela Proposição 4.4 temos que F é fiel e pleno. $\square$

Finalmente teremos a seguinte equivalência triangular.

Teorema 4.15 *Seja $\mathcal{B}$ uma subcategoria f.f.c.m. da categoria abeliana com suficientes injetivos $\mathcal{A}$ e tal que $\mathcal{B}^\perp \cap \mathcal{B}$ cogera $\mathcal{B}$ então o funtor $G = F_{\mathcal{B}^\perp \cap \mathcal{B}}^+ : K^+(\mathcal{B}^\perp \cap \mathcal{B}) \rightarrow D^+(\mathcal{B})$ é uma equivalência.*

Em particular, se $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ temos que $K^+(\mathcal{I})$ e $D^+(\mathcal{A})$ são equivalentes, onde $\mathcal{I}$ é a subcategoria plena aditiva dos objetos injetivos de $\mathcal{A}$.

Demonstração. Pelas Proposições 4.13 e 4.14 temos que G é fiel e pleno. Seja $X \in D^+(\mathcal{B})$, pelo Teorema 4.10 temos que existem $Y \in K^+(\mathcal{B}^\perp \cap \mathcal{B})$ e um quase isomorfismo de X em Y , portanto G é denso. $\square$

Corolário 4.16 *Se $\mathcal{B}$ for uma subcategoria f.f.c.m. de uma categoria abeliana com suficientes injetivos $\mathcal{A}$ e tal que $\mathcal{B}^\perp \cap \mathcal{B}$ cogera $\mathcal{B}$. Então $K^+(\mathcal{B}^\perp \cap \mathcal{B})$ e $D^+(\mathcal{B})$ são equivalentes.*

Corolário 4.17 *Se $\mathcal{B}$ for co-resolving e fechada para subobjetos então $K^+(\mathcal{B}^\perp \cap \mathcal{B})$ é equivalente a $D^+(\mathcal{B})$.*

Em particular, $K^+(\mathcal{B}^\perp \cap \mathcal{B})$ e $D^+(\mathcal{B})$ são equivalentes.

Observação 4.18 *Todos os resultados anteriores podem-se dualizar, isto é, tomando $\mathcal{U}$ como gerador, objetos Ext-projetivos, $\mathcal{B}$ "resolving", $\mathcal{B}$ fortemente fechada para núcleos de epimorfismos (f.f.n.e.) e $\mathcal{A}$ com suficientes projetivos.*

Agora estudaremos a outra equivalência triangular. Para isso introduziremos a seguinte terminologia.

Dada uma categoria abeliana $\mathcal{A}$ com suficientes injetivos e $\mathcal{B}$ uma subcategoria plena e aditiva. Nos chamaremos a subcategoria $\mathcal{B}$ **auto-ortogonal** se $\text{Ext}_{\mathcal{B}}^i(-, -) = 0$ para todo $i > 0$.

Definição 4.19 *Seja T um objeto da categoria abeliana com suficientes injetivos e projetivos e de Krull-Schmidt (ver Definição 1.24) $\mathcal{A}$. T é chamado um objeto **inclinante** se satisfizer as seguintes condições:*

1. $dp(T) < \infty$, ou seja, a dimensão projetiva é finita.
2. $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(T, T) = 0$, para todo $i > 0$.

3. Existe uma seqüência longa exata da forma seguinte

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow T_t \longrightarrow 0,$$

para todo objeto injetivo indecomponível I de $\mathcal{A}$, com $T_i \in \text{add}(T)$.

Uma $\mathcal{B}$ -aproximação à esquerda de M , com $M \in \mathcal{A}$, é um morfismo $f^M : M \longrightarrow V$, com $V \in \mathcal{B}$ tal que para qualquer morfismo $g : M \longrightarrow V'$, com $V' \in \mathcal{B}$, existe $g' : V \longrightarrow V'$ tal que $g'f^M = g$. Chamaremos a $\mathcal{B}$ de *co-variantemente finita*, se para qualquer $M \in \mathcal{A}$ existe uma $\mathcal{B}$ -aproximação à esquerda.

Observação 4.20

(a) (ver [5]). Para um objeto $T \in \mathcal{A}$ com a propriedade, $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(T, T) = 0$, para todo $i > 0$, associamos a subcategoria $T^\perp$ consistindo dos objetos B , tais que $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(T, B) = 0$ para todo $i > 0$. Sabemos que $T^\perp$ é uma subcategoria co-resolving de $\mathcal{A}$. Além disso: T é inclinante se, e somente se, $T^\perp$ é co-variantemente finita e qualquer objeto C em $\mathcal{A}$ tiver uma seqüência longa exata finita em $T^\perp$, da seguinte forma

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow T^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow T^n \longrightarrow 0,$$

com $T^i \in T^\perp$.

(b) (ver [21] III.6.14a.). É fácil ver que, para $i > 0$

$$\text{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(X, Y) = \text{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, Y),$$

para X e Y complexos concentrados.

A seguir teremos alguns isomorfismos entre os morfismos na categoria de homotopia e os morfismos na categoria derivada.

Lema 4.21 (Happel [26]). Se $\mathcal{B}$ é auto-ortogonal então

$$\text{Hom}_{K^b(\mathcal{B})}(X, Y) \cong \text{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(X, Y).$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponhamos que o complexo X é da forma

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow U^0 \xrightarrow{d_X^0} \cdots \longrightarrow U^r \xrightarrow{d_X^r} 0 \longrightarrow \cdots$$

Suponhamos que X for um complexo concentrado em grau zero, isto é, $X = U^0[0]$. Se Y é concentrado no grau i , isto é, $Y = V[i]$ com $V \in \mathcal{B}$, logo

$$\operatorname{Hom}_{K^b(\mathcal{B})}(U^0[0], V[i]) = \begin{cases} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(U^0, V), & \text{se } i=0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Por outro lado $\operatorname{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(X, Y) = \operatorname{Ext}_{\mathcal{A}}^i(U^0, V)$ (Observação 4.20 (b)), mas por hipóteses $\operatorname{Ext}_{\mathcal{B}}^i(U^0, V) = 0$ para $i > 0$. Portanto $\operatorname{Hom}_{K^b(\mathcal{B})}(X, Y) = \operatorname{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(X, Y)$.

Se Y é da seguinte forma

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow V^i \xrightarrow{d_Y^i} \cdots \longrightarrow V^m \xrightarrow{d_Y^m} 0 \longrightarrow \cdots$$

Logo d_Y^i induz um morfismo $f : V^i[i-1] \rightarrow Y'$, com Y' o seguinte complexo

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow V^{i+1} \xrightarrow{d_Y^{i+1}} \cdots \xrightarrow{d_Y^{m-1}} V^m \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Consideremos o seguinte triângulo estandar

$$V^i[i-1] \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{q} C_f \xrightarrow{p} V^i[i].$$

Mas $C_f = X$ e aplicando os funtores $\operatorname{Hom}_{K^b(\mathcal{B})}(X, -)$ e $\operatorname{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(X, -)$, pela Proposição 3.23 e pela hipótese de indução temos o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{K^b(\mathcal{B})}(X, Y') & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{K^b(\mathcal{B})}(X, Y) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{K^b(\mathcal{B})}(X, V^i[i]) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow = \\ \cdots & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(X, Y') & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(X, Y) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(X, V^i[i]) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Finalmente pelo Lema do 5 temos que

$$Hom_{K^b(\mathcal{B})}(X, Y) \cong Hom_{D^b(\mathcal{A})}(X, Y).$$

□

Lema 4.22 Se $\mathcal{B}$ é auto-ortogonal e $X \in C^b(\mathcal{B})$ então

$$Hom_{K^+(\mathcal{B})}(X, Y) \cong Hom_{D^+(\mathcal{A})}(X, Y).$$

Demonstração. Seja $X \in C^b(\mathcal{B})$ e $Y \in C^+(\mathcal{B})$. É fácil ver o limite inverso $\varprojlim Y(n) = Y$, onde $Y(n)$ é da seguinte forma

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow Y^0 \xrightarrow{d_Y^0} \cdots \xrightarrow{d_Y^{n-1}} Y^n \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots.$$

Pelo Lema 4.21 temos que

$$Hom_{K^+(\mathcal{B})}(X, Y(n)) \cong Hom_{D^+(\mathcal{A})}(X, Y(n)),$$

e tomando limite inverso obtemos que

$$Hom_{K^+(\mathcal{B})}(X, Y) \cong Hom_{D^+(\mathcal{A})}(X, Y).$$

□

Lema 4.23 Dado $\mathcal{B}$ auto-ortogonal e f.f.c.m. (ver Definição 4.9). Seja $X \in C^{+,b}(\mathcal{B})$ tal que $H^i(X) \neq 0$ no máximo um i e $H^j(X) = 0$ para $j \neq i$. Então

$$Hom_{K^{+,b}(\mathcal{B})}(X, Y) \cong Hom_{D^{+,b}(\mathcal{A})}(X, Y).$$

Demonstração. (i) Se X for acíclico, então pelo Lema 4.11 temos que

$$Hom_{K^{+,b}(\mathcal{B})}(X, Y) = 0 = Hom_{D^{+,b}(\mathcal{A})}(X, Y).$$

(ii) Se X é tal que $H^i(X) \neq 0$ para algum i e $H^k(X) = 0$ para $k \neq i$.

(a) Se Y for concentrado, isto é, $Y = V[j]$ onde $V \in \mathcal{B}$.

Logo

$$Hom_{K^+,b(\mathcal{B})}(X, V[j]) = \begin{cases} Hom_{K^+,b(\mathcal{B})}(X, V[i]), & \text{se } i=j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e $Hom_{D^+,b(\mathcal{A})}(X, Y) \cong Hom_{D^+,b(\mathcal{A})}(H^i(X)[i], V[j])$, já que $X \cong H^i(X)$ em $D^+,b(\mathcal{A})$.

Como $H^j(X) = 0$ para $j \neq i$ segue que

$$Hom_{D^+,b(\mathcal{A})}(H^i(X)[i], V[j]) = \begin{cases} Hom_{D^+,b(\mathcal{A})}(H^i(X)[i], V[i]), & \text{se } i=j \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mas, é bem conhecido que $Hom_{D^+,b(\mathcal{A})}(H^i(X)[i], V[i]) \cong Hom_{\mathcal{A}}(H^i(X), V)$ (ver [25]), basta mostrar que $Hom_{K^+,b(\mathcal{B})}(X, V[i]) \cong Hom_{\mathcal{A}}(H^i(X), V)$.

Definamos o seguinte morfismo

$$\begin{aligned} \varphi : Hom_{K^+,b(\mathcal{B})}(X, V[i]) &\longrightarrow Hom_{\mathcal{A}}(H^i(X), V) \\ f^i &\longmapsto H^i(f^i) \end{aligned}$$

Claramente φ esta bem definida e é injetora. Utilizando argumentos análogos aos feitos na prova do Lema 4.11, obtemos que φ é sobrejetora.

(b) Se Y for limitado, tomando o menor j tal que $V^j \neq 0$. Claramente d_Y^j induz um morfismo $f : V^j[j+1] \longrightarrow Y'$, com Y' da seguinte forma

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow V^{j+1} \xrightarrow{d_Y^{j+1}} \cdots \xrightarrow{d_Y^{m-1}} V^m \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Similarmente ao feito para a prova do Lema 4.21, tem-se que

$$Hom_{K^+,b(\mathcal{B})}(X, Y) \cong Hom_{D^+,b(\mathcal{A})}(X, Y).$$

(c) Se $Y \in C^{+,b}(\mathcal{B})$, de (a), (b) e um raciocínio análogo à prova feita para o Lema 4.22 temos finalmente que

$$Hom_{K^+,b(\mathcal{B})}(X, Y) \cong Hom_{D^+,b(\mathcal{A})}(X, Y).$$

□

Lema 4.24 Dada $\mathcal{B}$ auto-ortogonal e f.f.c.m., seja $X \in C^{+,b}(\mathcal{B})$ talque $H^i(X) \neq 0$, $H^j(X) \neq 0$ e $H^k(X) = 0$ para $k \neq i$ e j . Então

$$Hom_{K^{+,b}(\mathcal{B})}(X, Y) \cong Hom_{D^{+,b}(\mathcal{A})}(X, Y).$$

Demonstração. O resultado segue facilmente utilizando indução sobre o número de índices entre i e j .

Proposição 4.25 Dada $\mathcal{B}$ auto-ortogonal e f.f.c.m., então

$$Hom_{K^{+,b}(\mathcal{B})}(X, Y) \cong Hom_{D^{+,b}(\mathcal{A})}(X, Y).$$

Demonstração. Sejam $Y \in C^+(\mathcal{B})$ e $X \in C^{+,b}(\mathcal{B})$. A prova será feita por indução no número de cohomologias diferentes de zero em X . Os primeiros passos da indução foram feitos nos Lemas 4.23 e 4.24.

Tomemos r sendo o segundo menor índice tal que $H^r(X) \neq 0$.

Logo d_X^r induz um morfismo $f : X_r[1] \rightarrow X'$, com $X_r[1]$ e X' da forma

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow X^0 \xrightarrow{d_X^0} \cdots \longrightarrow X^r \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots,$$

e

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow X^{r+1} \xrightarrow{d_X^{r+1}} \cdots \longrightarrow X^n \longrightarrow X^{n+1} \longrightarrow \cdots.$$

Consideremos o seguinte triângulo estandar

$$X_r[1] \xrightarrow{f} X' \xrightarrow{q} C_f \xrightarrow{p} X_r[0].$$

Mas $C_f = X$ e aplicando os funtores $Hom_{K^{+,b}(\mathcal{B})}(-, Y)$ e $Hom_{D^{+,b}(\mathcal{A})}(-, Y)$, pela Proposição 3.23, pela hipótese de indução temos o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \text{Hom}_{K^{+,b}(\mathcal{B})}(X_r[0], Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_{K^{+,b}(\mathcal{B})}(X, Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_{K^{+,b}(\mathcal{B})}(X', Y) \longrightarrow \cdots \\
& & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow = \\
\cdots & \longrightarrow & \text{Hom}_{D^{+,b}(\mathcal{A})}(X_r[0], Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_{D^{+,b}(\mathcal{A})}(X, Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_{D^{+,b}(\mathcal{A})}(X', Y) \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

Finalmente, pelo Lema do 5, temos que

$$\text{Hom}_{K^{+,b}(\mathcal{B})}(X, Y) \cong \text{Hom}_{D^{+,b}(\mathcal{A})}(X, Y).$$

□

Teremos portanto a seguinte equivalência triangular.

Teorema 4.26 *Seja $\mathcal{B}$ uma subcategoria plena e aditiva da categoria abeliana $\mathcal{A}$. Se $\mathcal{B}$ co-gera $\mathcal{A}$, é auto-ortogonal e f.f.c.m., então $K^{+,b}(\mathcal{B})$ e $D^{+,b}(\mathcal{A})$ são equivalentes.*

Demonstração. O resultado segue facilmente da Proposição 4.25 e do Teorema 4.10.

□

Sejam T um objeto inclinante de uma categoria abeliana com suficientes injetivos e de Krull-Schmidt $\mathcal{A}$ e

$${}^{\perp}T = \{V \in \mathcal{A} / \text{Ext}_{\text{add}T}^i(V, -) = 0 \text{ para todo } i > 0\}.$$

Corolário 4.27 *Com a notação acima e com $\mathcal{C} = {}^{\perp}T \cap T^{\perp}$. Se $\mathcal{C}$ for fechada para subobjetos então $K^{+,b}(\mathcal{C})$ é equivalente a $D^{+,b}(\mathcal{A})$.*

Demonstração. O resultado segue facilmente da Observação 4.20 (a) e do Teorema 4.26. □

4.3 Exemplos de Categorias Derivadas

Em representações de álgebras, as categorias derivadas foram introduzidas a partir de uma interpretação da teoria inclinante dada por D. Happel ([26]), estendendo a

generalização clássica das equivalências de Morita, em termos de equivalências derivadas. Nesta seção apresentaremos dois exemplos de categorias derivadas. Para isso, utilizaremos a teoria de representações de álgebras, a descrição que Happel fez, em [26], da aljava da categoria derivada de uma álgebra hereditária e o Teorema de Rickard (ver [36]). Ao longo desta seção os módulos serão módulos à esquerda.

Começaremos introduzindo a seguinte terminologia.

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria triangulada e de *Krull-Schmit* (ver Definição 1.24). Para a seguinte definição precisamos das noções dadas na Definição 1.26.

Definição 4.28 *Um triângulo*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X) \quad (4.1)$$

em $\mathcal{A}$ é chamado **triângulo de Auslander-Reiten (T.A.R)** se satisfaz as seguintes condições:

AR1 X, Z são indecomponíveis.

AR2 $h \neq 0$.

AR3 g é quase cindido à direita.

Dizemos que $\mathcal{A}$ tem triângulos de Auslander-Reiten se, para todo objeto indecomponível, $Z \in \mathcal{A}$, existir um triângulo de Auslander-Reiten descrito no diagrama (4.1).

Pode-se fazer uma definição dual, onde a condição AR3, é substituída por:

AR3' f é quase cindido à esquerda.

A seguir enunciaremos algumas propriedades importantes dos triângulos de Auslander-Reiten.

Proposição 4.29 *Seja $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X)$ um T.R.A.*

(i) Z é único, salvo isomorfismo de triângulos.

(ii) f e g são morfismos irredutíveis. (ver Definição 1.35).

Proposição 4.30 *Seja $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X)$ um triângulo em $\mathcal{A}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) O triângulo é de Auslander-Reiten.
- (ii) f é fonte (ou equivalentemente, g é poço).

O seguinte resultado mostrará que as k -álgebras de dimensão finita e dimensão global finita, sobre um corpo k algebricamente fechado, possuem triângulos de Auslander-Reiten.

Teorema 4.31 *Seja A uma k -álgebra de dimensão finita e dimensão global finita. Então, a categoria derivada $D^b(A)$ tem triângulos de Auslander-Reiten.*

Estudaremos a seguir, as aljavas da categoria derivada de uma k -álgebra hereditária, sobre um corpo k algebricamente fechado.

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria de Krull-Schmit. Associamos a $\mathcal{A}$ uma aljava $\Gamma_{\mathcal{A}}$ onde os vértices da aljava $\Gamma_{\mathcal{A}}$ são as classes de isomorfismos $[X]$ dos objetos indecomponíveis X de $\mathcal{A}$ e as flechas entre dois vértices representam os morfismos irredutíveis entre eles.

O seguinte lema mostra que o conhecimento dos triângulos de Auslander-Reiten numa categoria triangulada $\mathcal{A}$ tem informação sobre $\Gamma_{\mathcal{A}}$.

Lema 4.32 *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria triangulada, de Krull-Schmit e com triângulos de Auslander-Reiten. Sejam X, M objetos indecomponíveis em $\mathcal{A}$ e $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X)$ um T.A.R. Seja*

$$Y = \bigoplus_{i=1}^r Y_i^{d_i}, \quad \text{com } Y_i \text{ indecomponível e } Y_i \neq Y_j \text{ para } i \neq j.$$

Então $\text{Irr}(X, M) \neq 0$ se, e somente se, $M \cong Y_i$ para algum i , onde $\text{Irr}(X, M) = \text{rad}(X, M)/\text{rad}^2(X, M)$.

Uma **aljava com translação** $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \tau)$ é dada por uma aljava (Γ_0, Γ_1) (ver Definição 1.10) e τ uma aplicação injetora de Γ'_0 em Γ_0 com $\Gamma'_0 \subset \Gamma_0$ tal que para qualquer $z \in \Gamma'_0$ e qualquer $y \in \Gamma_0$ o número de flechas de y a z é igual ao número de flechas de τz a y . A aplicação τ chama-se **translação**. Sempre tomaremos aljavas localmente finitas, isto é, cada vértice só tem um número finito de flechas saindo e chegando. Os vértices em Γ_0 os quais não pertencem a Γ'_0 são chamados **vértices projetivos**, aqueles que não pertencem à imagem de τ são chamados **vértices injetivos**. Se $\Gamma'_0 = \Gamma_0$ a aljava com translação é chamada **estável**.

Exemplo 4.33 *Seja A uma álgebra de artin.*

Seja M um A -módulo indecomponível. No caso de M não ser projetivo sabemos (ver Teorema 1.29), que existe uma seqüência de Auslander-Reiten (S.A.R.) terminando em M :

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0 \quad (*)$$

Lembremos que o A -módulo N é indecomponível (pela Proposição 1.27 (ii)). Denotamos tal N por τM . Devido à unicidade de $(*)$, τM é único, a menos de isomorfismo. O módulo τM é chamado **translado de Auslander-Reiten** de M .

Por outro lado, se M não for injetivo então existe uma única S.A.R. começando em M : $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ e N é um A -módulo indecomponível, denotado por $\tau^- M$ e chama-se **translado inverso de Auslander-Reiten** de M .

A aljava Γ_A , junto com o translado de Auslander-Reiten, é chamada **aljava de Auslander-Reiten** de A .

Corolário 4.34 *Seja A uma k -álgebra de dimensão finita e dimensão global finita. Então $\Gamma_{D^b(A)}$ tem estrutura de aljava com translação estável.*

Utilizando o Lema 4.32 é fácil obter a estrutura de $\Gamma_{D^b(k\Delta)}$, onde $k\Delta$ é a álgebra de caminhos da aljava Δ , (ver Definição 1.13). Seja $\Gamma = \Gamma_{k\Delta}$ a aljava de Auslander-Reiten de $k\Delta$. Denotamos por Γ_i uma cópia de Γ , para cada $i \in \mathbb{Z}$. Denotamos por $\bar{\Gamma}$ a aljava obtida da seguinte forma. Consideramos uma união disjunta dos Γ_i . Depois unimos estas Γ_i agregando flechas de maneira que, se tivermos uma flecha de b para a na aljava Δ , então colocaremos uma flecha do módulo I_a em Γ_i ao módulo projetivo P_b em Γ_{i+1} .

Proposição 4.35 *Com a notação acima, $\Gamma_{D^b(k\Delta)} = \bar{\Gamma}$.*

Exemplo 4.36 Consideremos a álgebra de caminhos dada pela seguinte aljava Δ :

$$1 \bullet \longrightarrow \bullet_2 \longrightarrow \bullet_3 .$$

Do Exemplo 1.23 (a) obtivemos os módulos projetivos e injetivos. Logo, a aljava de Auslander-Reiten $\Gamma_{k\Delta}$ é a seguinte:

Portanto a aljava da categoria derivada de $k\Delta$, $\Gamma_{D^b(k\Delta)}$, é a seguinte:

Exemplo 4.37 Consideremos a álgebra de caminhos dada pela aljava com relações (Δ, ρ) :

$$1 \bullet \xrightarrow{\alpha} \bullet_2 \xrightarrow{\beta} \bullet_3,$$

com $\rho = \beta\alpha = 0$. Os módulos projetivos e injetivos foram descritos no Exemplo 1.23 (b). Assim,

é a aljava de Auslander-Reiten da álgebra $A = k\Gamma / \langle \rho \rangle$.

Mas, pelo Teorema de Rickard (ver [36]), podemos afirmar que a categoria derivada de A é equivalente à categoria derivada da álgebra do Exemplo anterior. Portanto, $\Gamma_{D^b(A)}$ tem a seguinte forma:

Referências Bibliográficas

- [1] Asano, K. *Über die quotientbildung von schieftringen*, J. Math. Soc. Japan vol 1 (1949), 73-78.
- [2] Atiyah, M.F. and Macdonald, I.G. *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Reading, Mass. 1969.
- [3] Auslander, M. *Representation theory of artin algebras II*, Comm. Algebra 1 (1974), 269-310.
- [4] Auslander, M. and Reiten, I. *Representation theory of artin algebras III, IV, V, VI*, Comm. in Algebra 3 (1975), 239-294; 5 (1977), 443-518; 5 (1977), 519-554 and 2 (1977), 279-291.
- [5] Auslander, M. and Reiten, I. *Applications of contravariantly finite subcategories*, Advances in Mathematics 86 (1991), 111-152.
- [6] Auslander, M.; Reiten, I. and Smalø, S. *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge University Press, 1995.
- [7] Beilinson, A.; Bernstein, J. and Deligne, P. *Faisceaux Pervers*, Astérisque 100, 1982.
- [8] Borel, A. *Algebraic D-modules*, Perspectives in Mathematics 2, Academic Press, Boston, 1987.
- [9] Brylinski, J.-L. and Kashiwara, M. *Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems*, Inv. Math. 64 (1981), 387-410.
- [10] Buchweitz, R. -O. *The comparison Theorem*, Appendix to Buchweitz, R. -O.; Eisenbud, D. and Herzog, J. *Cohen-Macaulay Modules and quadrics, in Singularities, representations of algebras, and vector bundles*, (Lambrech 1985), Springer LNM 1273 (1987), 96-116.

- [11] Coelho, F. *Uma Introdução à Teoria de Representações de Álgebras*, XII Escola de Álgebra, São Paulo, 1992, 56 pp.
- [12] Cohn, P.M. *Free Rings and Their Relations*, Academic Press, London - New York, 1971.
- [13] Divinsky, N.J. *Rings and Radical*, University of Toronto Press, 1965.
- [14] Eckmann, B. and Schopf, A. *Über injektive moduln*, Arch. der Math. **4** (1956), 75-78.
- [15] Elizarov, V. P. *Rings of quotient of associative rings* Izv. Akad. Nauk. SSSR **24** (1960), 153-170. Amer. Math. Soc. Transl. **52** (1966), 151-170.
- [16] Faith, C. *Algebra: Rings, Modules and Categories I*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.
- [17] Findlay, G. and Lambek, J. *A generalized ring of qoutients I*, Can. Math. Bull. **1** (1958), 77-85, 155-167.
- [18] Gabriel, P. *Des Catégories Abéliennes*, Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 323-448.
- [19] Gabriel, P. *Unzerlegbare Darstellungen I*, Manuscripta Math. **6** (1972), 71-103.
- [20] Geigle, W. and Lenzing, H. *A class of weighted projective curves arising in representation theory of finite dimensional algebras*, in *Singularities, representations of algebras, and vector bundles*, (Lambrecht 1985), Springer LNM **1273** (1987), 265-297.
- [21] Gelfand, S. I. and Manin, Y. I. *Method of Homological Algebra*, Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 1996.
- [22] Giraldo, H. *Algebra Homológica Construtiva*, monografía, Universidad de Antioquia, 1997.
- [23] Goldie, A. W. *The structure of prime rings under ascending chain conditions*, Proc. London Math. Soc. (3) **8** (1958), 589-608.
- [24] Goldie, A. W. *Semi-prime rings with maximum condition*, Proc. London Math. Soc. (3) **10** (1960), 201-220.
- [25] Grivel, P.-P. *Catégories dérivées et foncteurs dérivées*, in A. Borel et al., *Algebraic D-modules*, Perspectives in Mathematics, vol. **2**, Academic Press, Orlando, Florida, (1987), 1-108.
- [26] Happel, D. *Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras*, London Math. Soc. Lecture Note Series **119** Cambridge University Press, 1988.

- [27] Jacobson, N. *Theory of Rings*, Amer. Math. Soc. Surveys, New York, 1943.
- [28] Johnson, R. E. *The extended centralizer of a ring over module*, Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951), 891-895.
- [29] Johnson, R. E. and Wong, E. T. *Self-injective rings*, Can. Math. Bull **2** (1959), 167-173.
- [30] Jones, A.R. e Merklen, H. *Representações de álgebras: métodos diagramáticos*, Publicações do IME-USP, São Paulo, 1984, 196 pp.
- [31] Kapranov, M. M. *The derived category of coherent sheaves on Grassmannians*, Funkts. Anal. Prilozh. **17** (1983), 78-79. English Translation: Funct. Anal. Appl. **17** (1983), 145-146.
- [32] Kapranov, M. M. *The derived category of coherent sheaves on a quadric*, Funkts. Anal. Prilozh. **20** (1986), 67. English Translation: Funct. Anal. Appl. **20** (1986), 141-142.
- [33] Kapranov, M. M. *On the derived categories of coherent sheaves on some homogeneous*, Invent. Math. **92** (1988), 479-508.
- [34] Kashiwara, M. *Algebraic study of systems of partial differential equations*, Thesis, University of Tokyo, 1970.
- [35] Kashiwara, M. and Schapira, P. *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren 292, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1990.
- [36] König, S. and A. Zimmermann, *Derived Equivalences for Group Rings*, Lect. Notes in Math. **1685**, Springer-Verlag, 1998.
- [37] Lambek, J. *On the Utumi's ring of quotients*, Can. J. Math. **15** (1963), 363-370.
- [38] Lesieur L. and Croisot *Sur les anneaux premier noetherien à gauche*, Ann. Sci Ecole Norm. Sup. **76** (1959), 161-183.
- [39] McConnell, J.C. and Robson, J.C. *Noncommutative Noetherian Rings*, John Wiley & Sons, 1987.
- [40] MacLane, S. *Homology*, Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1963.
- [41] Malcev, A. *On the immersion of an algebraic ring into a group*, Math. Ann. **113** (1937), 687.
- [42] Nazarova, L.A. and Roiter, A.V. *Categorical matrix problems and the Brauer-Thrall conjecture*, preprint. Int. Math. Acad. Sci. Kiev 1973; English translation Mitt. Math. Sem. Giessen **115** (1975).

- [43] Ore, O. *Linear equations in non-commutative fields*, Ann. of Math. v. 32 (1931), 463-477.
- [44] Quillen, D. *Higher algebraic k-theory I*, Springer Lectures Notes 341 (1973), 85-147.
- [45] Roiter, A.V. *The unboundedness of the dimension of the indecomposable representation of algebras that have a infinite number of indecomposable representation*, Izv. Acad. Nauk SSR 32 (1968), 1275-1282.
- [46] Sato, M. *On the derived category of mixed Hodge modules*, Proc. Japan Acad. (A) 62 (1986), 364-366.
- [47] Sato, M. *Hyperfunctions and partial differential equations*, Proc. Inter. Conference on Functional analysis and related topics, Tokyo 1969, 91-94, Univ. Tokyo Press, 1969.
- [48] Simson, D. *Linear Representations of Partially Ordered Sets and Vector Space Categories*, Gordon and Breach, London, 1992.
- [49] Small, L. W. *Orders in Artinian Rings*, J. Algebra 4 (1966), 13-41. Corrections Ibid. 505-507.
- [50] Stenström, B. *Rings of Quotients*, Springer-Verlag. Berlin, Heilderberg, New York, 1975.
- [51] Utumi, Y. *On quotient rings*, Osaka Math. J. 8 (1956), 1-18.
- [52] Uzkov, A. I. *On rings of quotient of commutative rings*, Mat. Sb. (N.S.) 22 (64) (1948), 439-441; English transl, Amer. Math. Soc. Transl., No. 3 Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1949; reprint, Amer. Math. Soc. Transl. (1) 1 (1962), 470-473. MR 10, 97.
- [53] Verdier, J.L. *Catégories dérivées, état 0*, Springer Lecture Notes 569 (1977), 262-311.
- [54] Weibel, C.A. *An introduction to homological algebra*, Cambridge studies in advanced mathematics 38, Cambridge University Press, 1994.
- [55] Wisbauer, R. *Foundations of Module and Ring Theory*, Algebra, Logic and Applications Series 3, Breach Science Publishers, 1991.