**Superfícies de tipo espaço
com vetor curvatura média
nulo em L^3 e L^4**

Célia Mendes Carvalho Lopes

**DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA**

Área de Concentração: GEOMETRIA
Orientador: Prof. Dr. Plínio Amarante Quirino Simões

São Paulo, 12 de julho de 2002

Superfícies de tipo espaço com vetor curvatura média nulo em L^3 e L^4

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e defendida por Célia Mendes Carvalho Lopes
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, agosto de 2002.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Plinio Amarante Quirino Simões (Presidente) - IME-USP
- Prof. Dr. Antonio Carlos Asperti - IME-USP
- Prof. Dr. Valério Ramos Batista - IMECC-UNICAMP

*Ao Gizelton,
Aos meus pais Ceci e Plínio*

Resumo

Neste trabalho é desenvolvida a teoria de superfícies 2-dimensionais de tipo espaço do espaço de Minkowski 4-dimensional L^4 . Primeiramente, associamos, de modo natural, duas normais unitárias, uma espacial e outra temporal, globalmente definidas, em relação as quais são estudados os objetos geométricos da superfície. Além disso, explorando a estrutura holomorfa induzida pela pseudo-métrica do L^4 sobre a superfície, introduz-se a representação de Weierstrass para superfícies de tipo espaço do L^4 tendo vetor curvatura média identicamente nulo. Esta representação é, então, usada para a construção de exemplos e para mostrar que as superfícies de tipo espaço do L^3 tendo vetor curvatura média identicamente nulo (isto é, as superfícies máximas do L^3) são localmente essencialmente determinadas pelas superfícies mínimas do $\mathbb{R}^3$. Para finalizar são estudadas variações normais locais de uma superfície de tipo espaço do L^4 tendo vetor curvatura média nulo. Por meio da segunda variação da área mostra-se que para variações normais locais, se o vetor variação for de tipo tempo, a área da superfície deformada é menor do que a área da superfície original. Mas, se o vetor variação for de tipo espaço, a área da superfície deformada é maior do que a da superfície original.

Abstract

In this work, we develop the theory of 2-dimensional spacelike surfaces in the 4-dimensional Minkowski space L^4 . First, we associate, in a natural way, two unit normal vectors, one spacelike and one timelike, globally defined. That will be used to study the geometric objects of the surfaces. Also, using the holomorphic structure induced by the pseudometric of L^4 into the surface, we present the Weierstrass representation for spacelike surfaces of L^4 having null mean curvature vector. This representation is used to construct examples and to show that spacelike surfaces of L^3 with null mean curvature vector are locally determined by minimal surfaces of $\mathbb{R}^3$. Finally, we study the normal variation of a spacelike surface of L^4 with null mean curvature vector. In particular, it's shown that locally if the normal variation vector is timelike then the area of the deformed surface is smaller than the area of the original surface. But, if the normal variation vector is spacelike, then, locally, the area of the original surface is smaller than the area of the deformed surface.

Agradecimento

Gostaria de agradecer a todos que, direta ou indiretamente, me ajudaram durante este período em que fiz o mestrado. Em especial, gostaria de agradecer:

À banca examinadora, pelas enriquecedoras considerações e sugestões.

Ao prof. Dr. Plínio Simões, com quem aprendi muito durante todos estes anos. Obrigada pelo incentivo e apoio desde os tempos de iniciação científica.

Ao Gizelton, pelo carinho e compreensão, e por estar ao meu lado.

Aos meus pais Ceci e Plínio, minhas irmãs, meus avós e familiares, pelo apoio.

Às amigas Elisa Shimabukuro e Cláudia Sabba, pelo apoio, amizade e paciência. Vamos manter para sempre esta amizade.

Aos amigos Alexandre LyMBERopoulos, José Vilhena e Antonio Zeña pelas inúmeras ajudas.

Às minhas amigas do Santa Cruz: Simone Hashimoto, Luciana Bertini, Renata Martinelli, Priscila Bara, Andrea Cerqueira e Adriana de Campos. Vocês são as melhores amigas do mundo!

Aos amigos imeanos: Lane, Marcelo, Adriana, Monica, Marcus, Rodnei, Olga, Rudimar e tantos outros. Estamos todos no mesmo barco.

Aos professores Rosa Chaves, Cláudia Cândido, Daniel Tausk e Martha Monteiro, pelo apoio.

Ao CNPq, pelo qual tive bolsa durante parte do mestrado.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Os espaços L^3 e L^4	3
1.2 Triedro de Frenet em L^3	9
1.3 Superfícies de tipo espaço no L^4	11
1.3.1 As normais espacial e temporal de uma superfície de tipo espaço do L^4	13
1.3.2 As primeira e segunda formas fundamentais	15
1.3.3 Equações de estrutura de um referencial móvel de Minkowski de L^4 adaptado a uma superfície de tipo espaço do L^4	20
1.3.4 Curvaturas média, gaussiana e normal	23
2 Representação de Weierstrass no L^3 e L^4	33
2.1 Considerações gerais	33
2.2 Representação de Weierstrass no L^4	40
2.2.1 Representação de Weierstrass de L^3	45
2.3 Expressões para as normais τ e ν	49
2.4 Família a 1-parâmetro de superfícies mínimas em L^4 , determinada por uma superfície máxima do L^3	57
2.5 Exemplos de superfícies mínimas no L^4 e no L^3	62
2.6 Superfícies máximas de rotação e regradadas no L^3	72
3 Variação da área para $H \equiv 0$	84
3.1 Área de uma superfície	84
3.2 Análise da segunda variação da área para τ e ν	88
A Cálculos utilizando o programa Maple	93

Introdução

Em 1983, foi publicado um artigo de Osamu Kobayashi [12] sobre superfícies máximas no espaço de Minkowski L^3 . Este artigo foi a inspiração para o desenvolvimento desta dissertação, onde trabalhamos com superfícies de tipo espaço em L^4 .

Uma superfície S em $L^4 = (\mathbb{R}^4, -dx^0 + dx^1 + dx^2 + dx^3)$ é a imagem por uma imersão diferenciável de uma variedade 2-dimensional conexa e orientada M . Tal superfície será de tipo espaço se a métrica induzida for uma métrica riemanniana sobre M . Além disso, S será mínima se seu vetor curvatura média for identicamente nulo. Neste caso, se $S \subset L^3$, ela é máxima.

Como base para a elaboração deste trabalho desenvolvemos uma parte da teoria básica sobre superfícies de tipo espaço em L^4 (e em $L^3 \subset L^4$). De modo natural, associamos globalmente duas normais, uma temporal outra espacial, às superfícies de tipo espaço de L^4 . Tal associação é possível devido ao caráter do espaço L^4 , que tem componentes de tipo espaço, tempo e luz. Em $\mathbb{R}^4$, esta associação não seria possível.

Usaremos estas normais para estudar os objetos geométricos das superfícies, tais como as curvaturas gaussiana e normal.

Ainda no capítulo 1, desenvolvemos a teoria de superfícies usando conexões, equações de estrutura e referencial móvel.

No capítulo 2, exploramos a estrutura holomorfa induzida pela pseudo-métrica de L^4 sobre a superfície e introduzimos a representação de Weierstrass para superfícies de tipo espaço do L^4 com vetor curvatura média identicamente nulo. A partir desta representação no L^4 obtemos também as representações para o L^3 e para o $\mathbb{R}^3$. Tais representações são usadas para a construção de exemplos de superfícies mínimas em L^4 e máximas em L^3 .

Outro resultado importante obtido através da representação de Weierstrass é que as superfícies máximas de L^3 são localmente determinadas pelas superfícies mínimas de $\mathbb{R}^3$.

Algumas idéias para parte deste capítulo 2 foram tiradas do artigo, ainda em preparação, de Antonio Franco Filho e Plínio Simões [9].

Ainda no segundo capítulo, mostramos dois teoremas que caracterizam as superfícies máximas que são de rotação ou regradas em L^3 .

Por fim, no capítulo 3, estudamos a área de uma superfície mínima no L^4 . Para isto, analisamos variações normais locais de uma superfície mínima de L^4 . Por meio da segunda variação da área mostra-se que para variações normais locais, se o vetor variação for de tipo tempo, a área da superfície deformada é menor do que a área da superfície original. Mas, se o vetor variação for de tipo espaço, a área da superfície deformada é maior do que a da superfície original. Esta parte final foi motivada pelo artigo de V. A. Klyachin e V. M. Miklyukov [11] sobre critérios de instabilidade para superfícies com vetor curvatura média nulo no espaço de Lorentz L^4 .

Ao longo do trabalho coloco alguns esboços de superfícies máximas de L^3 . Estes desenhos foram feitos com o auxílio do programa Maple, versão 5.1 para UNIX. Ao final do trabalho encontra-se um apêndice com os comandos para as principais rotinas que foram utilizadas, e alguns exemplos de como utilizá-las.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Os espaços L^3 e L^4

O espaço de Lorentz L^n , $n \geq 2$, é o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, com o produto escalar definido a seguir.

Definição 1.1.1 *Sejam $x = (x^0, x^1, \dots, x^{n-1})$ e $y = (y^0, y^1, \dots, y^{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Então $(\cdot, \cdot)$ é o seguinte produto escalar*

$$\begin{aligned}(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &= -x^0 y^0 + \sum_{i=1}^{n-1} x^i y^i.\end{aligned}$$

Observação Com a definição acima temos que, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, o produto escalar $(\cdot, \cdot)$, é: *simétrico* ($(x, y) = (y, x)$), *bilinear* ($((ax + by), z) = a(x, z) + b(y, z)$ e $(z, ax + by) = a(z, x) + b(z, y)$), e *não degenerado* (se $(x, y) = 0, \forall y$, então $x = 0$).

De fato, ele é não degenerado, porque se $\{\partial_0, \partial_1, \dots, \partial_{n-1}\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$, então

$$\begin{aligned}0 &= (u, \partial_0) = -u^0 1 + \sum_{i=1}^{n-1} u^i 0 = -u^0 \\ 0 &= (u, \partial_i) = -u^0 0 + \sum_{j=1}^{n-1} u^j \delta_{ij} = u^i, \forall i = 1 \dots n-1,\end{aligned}$$

onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$$

Assim, $u = (u^0, u^1, \dots, u^{n-1}) = (0, 0, \dots, 0)$.

□

Note que, com a definição acima, (x, x) pode ser positivo, negativo ou zero, e por isso, o produto escalar não é um produto interno.

Definição 1.1.2 *Seja $v \in L^n$. Dizemos que*

1. v é de **tipo tempo**, se $(v, v) < 0$;
2. v é de **tipo luz**, se $v \neq 0$ e $(v, v) = 0$;
3. v é de **tipo espaço**, se $(v, v) > 0$, ou $v = 0$.

Além disso, temos que

1. v é **causal**, se $(v, v) \leq 0$ e $v \neq 0$;
2. v é **futuro dirigido**, se $dx^0(v) = v^0 > 0$ e v é causal;
3. v é **passado dirigido**, se $dx^0(v) = v^0 < 0$ e v é causal.

Definição 1.1.3 *Uma base $\{l_0, l_1, \dots, l_{n-1}\}$ do L^n é **ortogonal**, se $(l_i, l_j) = 0$, se $i \neq j$. Além disso, uma base $(e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ do L^n é **ortonormal**, se valem as seguintes condições:*

- $\{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\}$ é ortogonal,
- $(e_0, e_0) = -1$, e
- $(e_i, e_i) = 1, \forall i = 1 \dots n-1$.

Proposição 1.1.4 *Se $(l_0, l_1, \dots, l_{n-1})$ é uma base ortogonal do L^n tal que $(l_0, l_0) < 0$ e $(l_i, l_i) > 0, i = 1, \dots, n-1$, então $\forall v \in L^n$,*

$$v = \frac{(v, l_0)}{(l_0, l_0)} l_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(v, l_i)}{(l_i, l_i)} l_i$$

Demonstração

Seja $(l_0, l_1, \dots, l_{n-1})$ uma base ortogonal do L^n , então temos que existem $v^0, v^1, \dots, v^{n-1} \in$

$\mathbb{R}$ tal que $v = v^0 l_0 + \sum_{i=1}^{n-1} v^i l_i$. Desta forma, também vale que

$$\begin{aligned}
 (v, l_0) &= (v^0 l_0 + \sum_{i=1}^{n-1} v^i l_i, l_0) = \\
 &= v^0 (l_0, l_0) + \sum_{i=1}^{n-1} v^i (l_i, l_0) = v^0 (l_0, l_0) \\
 (v, l_j) &= (v^0 l_0 + \sum_{i=1}^{n-1} v^i l_i, l_j) = \\
 &= v^0 (l_0, l_j) + \sum_{i=1}^{n-1} v^i (l_i, l_j) = v^j (l_j, l_j), \forall j = 1 \dots n-1
 \end{aligned}$$

Logo, $\forall v \in L^n$,

$$v = \frac{(v, l_0)}{(l_0, l_0)} l_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(v, l_i)}{(l_i, l_i)} l_i \quad (1.1)$$

□

Corolário 1.1.5 *Se $(e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ é uma base ortonormal do L^n , pela proposição anterior, temos que $\forall v \in L^n$,*

$$v = -(v, e_0) e_0 + \sum_{i=1}^{n-1} (v, e_i) e_i \quad (1.2)$$

Sejam $(\partial_0, \partial_1, \dots, \partial_{n-1})$ a base canônica do $\mathbb{R}^n$, e $dx^0(\partial_0) = 1$, $dx^0(\partial_i) = 0$, $dx^i(\partial_0) = 0$, $dx^i(\partial_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Assim, $B = (\partial_0, \partial_1, \dots, \partial_{n-1})$ é uma base ortonormal de L^n , e $B^* = (dx^0, dx^1, \dots, dx^{n-1})$ a sua base dual.

Se $v = v^0 \partial_0 + \sum_{i=1}^{n-1} v^i \partial_i$ então

$$\begin{aligned}
 dx^0(v) &= dx^0(v^0 \partial_0 + \sum_{i=1}^{n-1} v^i \partial_i) \\
 &= v^0 dx^0(\partial_0) + \sum_{i=1}^{n-1} v^i dx^0(\partial_i) = v^0 \\
 dx^j(v) &= dx^j(v^0 \partial_0 + \sum_{i=1}^{n-1} v^i \partial_i) \\
 &= v^0 dx^j(\partial_0) + \sum_{i=1}^{n-1} v^i dx^j(\partial_i) = v^j
 \end{aligned}$$

Mas, $v = -(v, e_0)\partial_0 + \sum_{i=1}^{n-1}(v, \partial_i)\partial_i$, logo

$$\begin{aligned} dx^0(v) &= v^0 = -(v, \partial_0) \\ dx^j(v) &= v^j = (v, \partial_j) \end{aligned}$$

Vamos orientar o espaço L^4 pelo elemento de volume $dL^4 = -dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$, onde

$$(-dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)(v^0, v^1, v^2, v^3) = \begin{vmatrix} (v^0, e_0) & (v^1, e_0) & (v^2, e_0) & (v^3, e_0) \\ (v^0, e_1) & (v^1, e_1) & (v^2, e_1) & (v^3, e_1) \\ (v^0, e_2) & (v^1, e_2) & (v^2, e_2) & (v^3, e_2) \\ (v^0, e_3) & (v^1, e_3) & (v^2, e_3) & (v^3, e_3) \end{vmatrix}.$$

A orientação do L^4 induz sobre $L^3 = \{x \in L^4/x^3 = 0\}$ e sobre $\mathbb{R}^3 = \{x \in L^4/x^0 = 0\}$ orientações que têm como elemento de volume dL^3 e $d\mathbb{R}^3$, dados por $dL^3(v^0, v^1, v^2) := dL^4(v^0, v^1, v^2, \partial_3)$ e $d\mathbb{R}^3(v^1, v^2, v^3) := dL^4(\partial^0, v^1, v^2, v^3)$.

Além disso, se dL^n é o elemento de volume de L^n , e $B = (e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ é uma base de L^n então B é positiva se $dL^n(e_0, e_1, \dots, e_{n-1}) < 0$.

Definição 1.1.6 Dizemos que $\varepsilon = (e_0, e_1, e_2, e_3) = (e_0, e_i)_{1 \leq i \leq 4}$ é um **referencial** do L^4 se ε é uma base do L^4 tal que $(e_0, e_0) < 0$, $(e_i, e_i) > 0$ para $i=1, \dots, 4$. Tal referencial é **futuro dirigido** ou **passado dirigido** se e_0 é futuro dirigido, ou passado dirigido, respectivamente. Além disso, ε é um **referencial de Minkowski** se ε for ortonormal positivo futuro dirigido, isto é, $dL^4(e_0, e_1, e_2, e_3) < 0$ e $dx^0(e_0) > 0$.

No que se segue, usaremos a notação $\hat{u}$ para vetores do $\mathbb{R}^3$ e $\check{u}$ para vetores do L^3 . Ou seja, se $u = (u^0, u^1, u^2, u^3) \in L^4$, então $\hat{u} := (0, u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^3$, e $\check{u} := (u^0, u^1, u^2, 0) \in L^3$. Outra notação que também usaremos é $|x| = \sqrt{|(x, x)|}$.

Vamos definir o produto vetorial em L^4 .

Definição 1.1.7 O **produto vetorial** $\boxtimes$ de u, v, w em L^4 , é definido como a única solução de:

$$(\boxtimes(u, v, w), z) := dL^4(z, u, v, w), \forall z \in L^4,$$

onde dL^4 é o elemento de volume em L^4 e $u, v, w \in L^4$.

Se $B = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ é uma base ortonormal positiva do L^4 , então

$$\begin{aligned} (\boxtimes(u, v, w), z) &= \begin{vmatrix} (z, e_0) & (u, e_0) & (v, e_0) & (w, e_0) \\ (z, e_1) & (u, e_1) & (v, e_1) & (w, e_1) \\ (z, e_2) & (u, e_2) & (v, e_2) & (w, e_2) \\ (z, e_3) & (u, e_3) & (v, e_3) & (w, e_3) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} -z^0 & -u^0 & -v^0 & -w^0 \\ z^1 & u^1 & v^1 & w^1 \\ z^2 & u^2 & v^2 & w^2 \\ z^3 & u^3 & v^3 & w^3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Assim, sabendo que $\boxtimes(u, v, w) = -(\boxtimes(u, v, w), \partial_0) \partial_0 + (\boxtimes(u, v, w), \partial_1) \partial_1 + (\boxtimes(u, v, w), \partial_2) \partial_2 + (\boxtimes(u, v, w), \partial_3) \partial_3$, temos que

$$\begin{aligned} \boxtimes(u, v, w) = & \left(\begin{vmatrix} u^1 & v^1 & w^1 \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u^0 & v^0 & w^0 \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{vmatrix}, \right. \\ & \left. - \begin{vmatrix} u^0 & v^0 & w^0 \\ u^1 & v^1 & w^1 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u^0 & v^0 & w^0 \\ u^1 & v^1 & w^1 \\ u^2 & v^2 & w^2 \end{vmatrix} \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Para o produto vetorial do L^4 , valem as seguintes propriedades.

Proposição 1.1.8 *Sejam $x, y, v, w \in L^4$, e $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Então:*

1. $\boxtimes(u, v, w) : L^4 \times L^4 \times L^4 \rightarrow L^4$ é uma função 3-linear alternada;
2. $\boxtimes(u, v, w) \neq 0 \Leftrightarrow \{u, v, w\}$ é l.i.;
3. $\boxtimes(u, v, w) \perp u$, $\boxtimes(u, v, w) \perp v$ e $\boxtimes(u, v, w) \perp w$;
4. $\boxtimes(\partial_0, u, v) = \hat{u} \times \hat{v} = (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3)$, onde $\partial_0 = (1, 0, 0, 0)$ e $\times$ é o produto vetorial do $\mathbb{R}^3$ relativo à $-d\mathbb{R}^3 = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$, isto é, $\times$ é o produto usual do $\mathbb{R}^3$;
5. Se $(u, u) = (v, v) = (w, w) = 1$ e $(u, v) = (u, w) = (v, w) = 0$ então $\boxtimes(u, v, w)$ é de tipo tempo e $\left(\frac{\boxtimes(u, v, w)}{|\boxtimes(u, v, w)|}, u, v, w \right)$ é uma base ortonormal positiva de L^4 .

Demonstração

Vou demonstrar somente os itens 4 e 5, visto que os outros três são praticamente imediatos.

Item 4: De 1.3 temos:

$$\begin{aligned} \boxtimes(\partial_0, u, v) &= \left(\begin{vmatrix} 0 & u^1 & v^1 \\ 0 & u^2 & v^2 \\ 0 & u^3 & v^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & u^0 & v^0 \\ 0 & u^2 & v^2 \\ 0 & u^3 & v^3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & u^0 & v^0 \\ 0 & u^1 & v^1 \\ 0 & u^3 & v^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & u^0 & v^0 \\ 0 & u^1 & v^1 \\ 0 & u^2 & v^2 \end{vmatrix} \right) \\ &= \left(0, \begin{vmatrix} u^2 & v^2 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) \end{aligned}$$

Item 5:

De fato,

$$\begin{aligned} dL^4 \left(\frac{\boxtimes(u, v, w)}{|\boxtimes(u, v, w)|}, u, v, w \right) &= \frac{1}{|\boxtimes(u, v, w)|} dL^4(\boxtimes(u, v, w), u, v, w) \\ &= \frac{1}{|\boxtimes(u, v, w)|} (\boxtimes(u, v, w), \boxtimes(u, v, w)) < 0, \end{aligned}$$

pela lei da inércia (ver [15]).

□

A partir do produto vetorial de L^4 , podemos calcular o produto vetorial de L^3 .

Definição 1.1.9 *O produto vetorial $\boxtimes$ em L^3 é a única solução de:*

$$(x \boxtimes y, z) = dL^3(z, x, y), \forall z \in L^3,$$

onde dL^3 é o elemento de volume em L^3 e $x, y \in L^3$.

Mas, $dL^3(\check{v}^0, \check{v}^1, \check{v}^2) = dL^4(v^0, v^1, v^2, \partial_3)$. Portanto, se $x, y \in L^4$ então $\check{x} \boxtimes \check{y} = \boxtimes(\check{x}, \check{y}, \partial_3)$, onde $\partial_3 = (0, 0, 0, 1)$.

Assim, se $B = (e_0, e_1, e_2)$ é uma base ortonormal do L^3 , então

$$\begin{aligned} \check{x} \boxtimes \check{y} &= \begin{vmatrix} x^1 & y^1 \\ x^2 & y^2 \end{vmatrix} e_0 + -1 \begin{vmatrix} -x^0 & -y^0 \\ x^2 & y^2 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} -x^0 & -y^0 \\ x^1 & y^1 \end{vmatrix} e_2 = \\ &= \begin{vmatrix} e_0 & -e_1 & -e_2 \\ x^0 & x^1 & x^2 \\ y^0 & y^1 & y^2 \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Outra maneira de escrevermos a expressão acima é

$$\check{x} \boxtimes \check{y} = (x^1 y^2 - x^2 y^1, x^0 y^2 - x^2 y^0, x^1 y^0 - x^0 y^1)$$

A proposição 1.1.8 também é válida para vetores em L^3 .

Os subespaços vetoriais W de $\dim \geq 2$ de L^n podem ser de três tipos: tipo espaço, quando todos os seus vetores forem de tipo espaço; de tipo tempo, quando ele contém um vetor de tipo tempo; ou degenerado, se W contém um de tipo luz mas nenhum de tipo tempo. [17]

Proposição 1.1.10 *Sejam $u, v \in W$, onde W é um subespaço vetorial de tipo espaço do L^n , então*

$$\{u, v\} \text{ é linearmente independente} \iff \{\hat{u}, \hat{v}\} \text{ é linearmente independente.}$$

Demonstração

$\Leftarrow$) Suponha, por absurdo, que $\{u, v\}$ é linearmente dependente (l.d.). Então, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $u = \lambda v$. Assim,

$$\begin{cases} u^0 = \lambda v^0 \\ u^1 = \lambda v^1 \\ \vdots \\ u^{n-1} = \lambda v^{n-1} \end{cases} \implies \hat{u} = \lambda \hat{v} \implies \{\hat{u}, \hat{v}\} \text{ é l.d.}$$

Mas, isso é uma contradição pois $\{\hat{u}, \hat{v}\}$ é l.i. .

$\Rightarrow$) Suponha, por absurdo, que $\{\hat{u}, \hat{v}\}$ é l.d., então $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\hat{v} = \lambda \hat{u}$, ou seja,

$$\begin{cases} v^1 = \lambda u^1 \\ \vdots \\ v^{n-1} = \lambda u^{n-1} \end{cases}$$

Assim, temos $u = (u^0, u^1, \dots, u^{n-1})$ e $v = (v^0, v^1, \dots, v^{n-1}) = (v^0, \lambda u^1, \dots, \lambda u^{n-1})$.

Seja $w = \lambda u - v \in W$.

Deste modo, segue que

$$w = (\lambda u^0 - v^0, \lambda u^1 - \lambda u^1, \dots, \lambda u^{n-1} - \lambda u^{n-1}) = (\lambda u^0 - v^0, 0, 0, 0)$$

e, conseqüentemente,

$$(w, w) = -(\lambda u^0 - v^0)^2 + 0 + \dots + 0$$

Mas, como u e v são l.i. então $\nexists \lambda \in \mathbb{R}$, tal que $v = \lambda u$, logo, $(w, w) \neq 0$, pois senão, teríamos $v^0 = \lambda u^0$, além de $v^i = \lambda u^i, \forall i = 1 \dots n-1$, o que faria com que $v = \lambda u$, o que seria um absurdo.

Logo, $(w, w) = -(\lambda u^0 - v^0)^2 < 0$, o que é um absurdo, pois $w \in W$, e portanto $(w, w) > 0$.

Com isto, temos que $\{\hat{u}, \hat{v}\}$ é l.i.

□

1.2 Triedro de Frenet em L^3

Seja $c(t)$ uma curva no L^3 tal que $(c'(t), c'(t)) = 1$ e $(c''(t), c''(t)) > 0$. Sejam $k^2(t) := (c''(t), c''(t))$, $n(t) := \frac{c''(t)}{|k(t)|}$ e $b(t) := c'(t) \boxtimes n(t)$. Então,

$$\begin{cases} c''(t) = k(t)n(t) \\ n'(t) = -k(t)c'(t) + \tau(t)b(t) \\ b'(t) = \tau(t)n(t) \end{cases} \quad (1.5)$$

onde $\tau(t) := (b'(t), n(t))$.

De fato, como $(c'(t), c'(t)) = 1$ então $(c'(t), c''(t)) \equiv 0$ e $(c'(t), n(t)) = \left(c'(t), \frac{c''(t)}{|k(t)|}\right) = \frac{1}{|k(t)|}(c'(t), c''(t)) \equiv 0$.

Além disso, $(n(t), n(t)) = \left(\frac{c''(t)}{|k(t)|}, \frac{c''(t)}{|k(t)|}\right) = \frac{1}{|k(t)|^2}(c''(t), c''(t)) = 1$, já que $(c''(t), c''(t)) > 0$.

Resumindo, temos $c(t)$ uma curva no L^3 tal que $(c'(t), c'(t)) = 1$, $(c'(t), n(t)) = 0$ e $(n(t), n(t)) = 1$. Assim, $(c'(t) \boxtimes n(t), c'(t), n(t))$ é uma base ortonormal positiva, tal que $(b(t), b(t)) = -1$, onde $b(t) := c'(t) \boxtimes n(t)$. De fato, $(b(t), b(t)) = (c'(t) \boxtimes n(t), c'(t) \boxtimes n(t)) = -(c'(t), c'(t)) (n(t), n(t)) + (c'(t), n(t)) = -(1)(1) + 0 = -1$.

Assim, qualquer vetor pode ser escrito nesta base ortonormal, pela equação (1.2)

$$v = (v, c'(t)) c'(t) + (v, n(t)) n(t) - (v, b(t)) b(t). \quad (1.6)$$

Mas, $n(t) := \frac{c''(t)}{|k(t)|}$ então $c''(t) = k(t)n(t)$.

Além disso,

$$\begin{aligned} b(t) &= c'(t) \boxtimes n(t) \implies \\ b'(t) &= c''(t) \boxtimes n(t) + c'(t) \boxtimes n'(t) \\ &= k(t) n(t) \boxtimes n(t) + c'(t) \boxtimes n'(t) \\ &= 0 + c'(t) \boxtimes n'(t) \implies b'(t) \perp c'(t) \end{aligned}$$

Mas, $b'(t) = -(b', b)b + (b', n)n + (b', c')c' = (b', n)n$. Assim, existe $\tau(t)$ tal que $b'(t) = \tau(t)n(t)$, e $\tau(t) = (b'(t), n(t))$.

Ainda usando a expressão (1.6), temos que

$$n'(t) = (c'(t), n'(t)) c'(t) + (n(t), n'(t)) n(t) - (b(t), n'(t)) b(t)$$

Mas,

$$\begin{aligned} (c'(t), n(t)) = 0 &\implies (c''(t), n(t)) + (c'(t), n'(t)) = 0 \\ &\implies (c'(t), n'(t)) = -(c''(t), n(t)) = -k(t) \\ (n(t), n(t)) = 1 &\implies (n(t), n'(t)) = 0 \\ (b(t), n(t)) = 0 &\implies (b'(t), n(t)) + (b(t), n'(t)) = 0 \\ &\implies -(b(t), n'(t)) = (b'(t), n(t)) = \tau(t) \end{aligned}$$

Logo, $n'(t) = -k(t)c'(t) + \tau(t)b(t)$.

Resumindo, temos

$$\begin{cases} c''(t) = k(t)n(t) \\ n'(t) = -k(t)c'(t) + \tau(t)b(t) \\ b'(t) = \tau(t)n(t) \end{cases} \quad (1.7)$$

As expressões acima formam o **triedro de Frenet**.

1.3 Superfícies de tipo espaço no L^4

Seja M uma variedade 2-dimensional conexa e orientada e f uma imersão. O espaço vetorial tangente de M em p é indicado por $T_p M$; f_* é a função derivada de f ; e $f_*(T_p M)$ é um subespaço vetorial do L^4 , chamado de **espaço vetorial tangente** a $S = f(M)$ em $f(p)$.

Definição 1.3.1 *Seja M uma variedade 2-dimensional conexa e orientada. Se $\tau(M)$ é a topologia de M e se $p \in M$, seja $\tau_p(M) := \{U \in \tau(M) | p \in U\}$. Assim, para todo $p \in M$, existem $U \in \tau_p(M)$ conexo e $x : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ homeomorfismo entre U e $x(U)$ aberto do $\mathbb{R}^2$. Neste caso, (U, x) é um **sistema de coordenadas locais** ao redor de p , e se $x = x^1 + i x^2$, então x^1 e x^2 são **funções coordenadas locais** de M . A coleção $A = \{(U_\alpha, x_\alpha) | \alpha \in I\}$ de sistemas de coordenadas locais de M é um **atlas de classe C^k** , ao longo de M se*

1. $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$
2. Se $(U_\alpha, x_\alpha), (U_\beta, x_\beta) \in A$ tal que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ então $x_\beta \circ x_\alpha^{-1}$ e $x_\alpha \circ x_\beta^{-1}$ (chamadas **mudanças de coordenadas**) são homeomorfismos de classe C^k .

Um atlas de classe C^k ao longo de M é uma **estrutura de classe C^k** se satisfizer a seguinte propriedade

- Se (V, y) é um sistema de coordenadas locais tal que para todo $\alpha \in I$, $y \circ x_\alpha^{-1}$ e $x_\alpha \circ y^{-1}$ são homeomorfismos de classe C^k , sempre que $(U_\alpha, x_\alpha) \in A$ e $U_\alpha \cap V \neq \emptyset$, então $(V, y) \in A$.

Uma estrutura de classe C^k sobre M será indicada por $\Sigma^k(M)$. Além disso, se for C^∞ então denotamos $\Sigma^\infty(M)$ por $\Sigma(M)$. Se M estiver munida de uma estrutura de classe C^k , então dizemos que M é de classe C^k .

No que se segue, a menos de menção explícita, sempre consideraremos variedades e superfícies de classe C^∞ . O adjetivo diferenciável, neste caso, será um sinônimo para C^∞ .

Definição 1.3.2 $S \subset L^4$ é uma **superfície de tipo espaço** do L^4 , se

1. $S = f(M)$, onde M é uma variedade 2-dimensional conexa e orientada e f é uma imersão diferenciável (isto é C^∞);
2. $f^*(,)$ é uma métrica riemanniana sobre M .

Observação A partir daqui, sempre que escrevermos $S = f(M) \subset L^4$ suporemos que S é uma superfície de L^4 de tipo espaço.

O espaço vetorial tangente a S em $f(p)$ é não degenerado e, portanto, $L^4 = f_*(T_p M) \oplus (f_*(T_p M))^\perp$, onde $(f_*(T_p M))^\perp$ é o complemento ortogonal que será chamado de **espaço vetorial normal a S , no ponto $f(p)$** . Um vetor $N \in (f_*(T_p M))^\perp$, é dito **normal a S em $f(p)$** .

No caso do L^4 , o espaço normal a S em $f(p)$ é de dimensão 2, mas no L^3 , é de dimensão 1. Neste caso, os vetores normais serão temporais, já que $(f_*(T_p M))$ é de tipo espaço, e portanto $(f_*(T_p M))^\perp$ é de tipo tempo.

Se $S = f(M)$ é uma superfície diferenciável de tipo espaço do L^4 e $(U, w = u + iv) \in \Sigma_p(M)$, então defina

$$\begin{aligned} f_u(w) &:= \frac{\partial}{\partial u}(f \circ w^{-1})(w) \\ f_v(w) &:= \frac{\partial}{\partial v}(f \circ w^{-1})(w) \\ f_{uu}(w) &:= \frac{\partial^2}{\partial u^2}(f \circ w^{-1})(w) \\ f_{vv}(w) &:= \frac{\partial^2}{\partial v^2}(f \circ w^{-1})(w) \\ f_{uv}(w) &:= \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}(f \circ w^{-1})(w) \end{aligned}$$

Proposição 1.3.3 *Sejam $S = f(M)$ uma superfície de tipo espaço no L^3 e $(U, w = u + iv) \in \Sigma(M)$. Então, temos que*

$$\{f_u, f_v\} \text{ é l.i.} \iff \{\hat{f}_u, \hat{f}_v\} \text{ é l.i.}$$

Demonstração

O espaço vetorial tangente a S em $f(p)$ é de tipo espaço e, portanto, esta proposição é consequência da proposição 1.1.10. □

Corolário 1.3.4 *$S = f(M)$ é uma superfície de tipo espaço do L^4 se e somente se $\hat{S} := \hat{f}(M)$ é uma superfície do $\mathbb{R}^3$.*

Proposição 1.3.5 *Seja $S = f(M)$ uma superfície do L^4 de tipo espaço. Dado $p \in M$, $\exists (V, w = u + iv) \in \Sigma(M)$ tal que $p \in V$ e*

- $f(w) = (f^0(u, v), u, v, f^3(u, v))$ ou

- $f(w) = (f^0(u, v), f^1(u, v), u, v)$ ou
- $f(w) = (f^0(u, v), u, f^2(u, v), v)$

Demonstração

Localmente, temos que $\exists(U, w = u + iv) \in \Sigma(w)$ tal que $f(w) := (f \circ w^{-1})(w) = (f^0(w), f^1(w), f^2(w), f^3(w))$. Como f é uma imersão então temos que os vetores $f_u(w)$ e $f_v(w)$ são linearmente independentes. Mas, pela proposição (1.3.3), segue que $\hat{f}_u$ e $\hat{f}_v$ também o são, e, portanto, $\frac{\partial(f^1, f^2)}{\partial(u, v)}(w) \neq 0$ ou $\frac{\partial(f^1, f^3)}{\partial(u, v)}(w) \neq 0$ ou $\frac{\partial(f^2, f^3)}{\partial(u, v)}(w) \neq 0$. Suponha então que $\frac{\partial(f^1, f^2)}{\partial(u, v)}(w) \neq 0$. Do teorema da função inversa, temos que existe uma vizinhança $\tilde{V}$ de $w = (u, v)$ na qual a aplicação $F : (u, v) \mapsto (f^1, f^2)$ é um difeomorfismo.

Logo, a aplicação inversa $F^{-1} : (f^1, f^2) \mapsto (u, v)$ é diferenciável, e conseqüentemente, isso vale também para a aplicação composta $\tilde{f} = f \circ F^{-1}$

$$(f^1, f^2) \mapsto (u, v) \mapsto f = (f^0, f^1, f^2, f^3).$$

Logo, a superfície $S = f(M)$ pode ser representada, localmente, por $S = \tilde{f}(\tilde{V})$, $w_0 \in \tilde{V}$, onde

$$\tilde{f}(f^1, f^2) = (f^0(f^1, f^2), f^1, f^2, f^3(f^1, f^2)).$$

□

Observação Como conseqüência da proposição acima, temos que, para estudar o comportamento local de uma superfície de tipo espaço, podemos assumir que ela é dada na **forma não-paramétrica** $f(w) = (f^0(u, v), u, v, f^3(u, v))$.

1.3.1 As normais espacial e temporal de uma superfície de tipo espaço do L^4

Vamos, agora, definir quem são as normais espacial e temporal de uma superfície $S \subset L^4$.

Se $S = f(M)$ é uma superfície de tipo espaço do L^4 , $(U, w = u + iv) \in \Sigma(M)$, temos que $f_u(w)$ e $f_v(w)$ são dois vetores do espaço tangente que são linearmente independentes e de tipo espaço. Como o vetor $\partial_0 = (1, 0, 0, 0)$ é sempre transversal a $f_*(T_p M)$, então $\{\partial_0, f_u(w), f_v(w)\}$ são linearmente independentes.

Além disso,

$$\begin{aligned} \boxtimes(\partial_0, f_u, f_v) &= \left(0, \frac{\partial(f^2, f^3)}{\partial(u, v)}, -\frac{\partial(f^1, f^3)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(f^1, f^2)}{\partial(u, v)}\right) \\ &= \hat{f}_u \times \hat{f}_v, \end{aligned}$$

onde $\hat{f}_u \times \hat{f}_v$ é o produto vetorial usual do $\mathbb{R}^3$, relativamente à $-d\mathbb{R}^3 = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$.

Assim, sejam

$$\tilde{\nu} := \boxtimes(\partial_0, f_u, f_v) = \hat{f}_u \times \hat{f}_v, e \quad (1.8)$$

$$\tilde{\tau} := \boxtimes(f_u, f_v, \tilde{\nu}). \quad (1.9)$$

Note que $\tilde{\tau}$ é de tipo tempo, já que ele é ortogonal a três vetores de tipo espaço que são l.i. entre si. Além disso, pela equação (1.3)

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}^0 &= \begin{vmatrix} f_u^1 & f_v^1 & \frac{\partial(f^2, f^3)}{\partial(u, v)} \\ f_u^2 & f_v^2 & -\frac{\partial(f^1, f^3)}{\partial(u, v)} \\ f_u^3 & f_v^3 & \frac{\partial(f^1, f^2)}{\partial(u, v)} \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial(f^2, f^3)}{\partial(u, v)} \frac{\partial(f^2, f^3)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial(f^1, f^3)}{\partial(u, v)} \frac{\partial(f^1, f^3)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial(f^1, f^2)}{\partial(u, v)} \frac{\partial(f^1, f^2)}{\partial(u, v)} \\ &= \left(\frac{\partial(f^2, f^3)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(f^1, f^3)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(f^1, f^2)}{\partial(u, v)} \right)^2 > 0 \end{aligned}$$

e, portanto, $\tilde{\tau} \neq 0$ é futuro dirigido.

Proposição 1.3.6 Se $(V, z = x + iy) \in \Sigma(M)$, $(U, w = u + iv) \in \Sigma(M)$ e $V \cap U \neq \emptyset$, então $f_x = \frac{\partial u}{\partial x} f_u + \frac{\partial v}{\partial x} f_v$, $f_y = \frac{\partial u}{\partial y} f_u + \frac{\partial v}{\partial y} f_v$ e $\boxtimes(\partial_0, f_x, f_y) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \boxtimes(\partial_0, f_u, f_v)$, isto é, $\tilde{\nu}(z) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \tilde{\nu}(w)$. Além disso, $\boxtimes(f_x, f_y, \tilde{\nu}(z)) = \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^2 \boxtimes(f_u, f_v, \tilde{\nu}(w))$.

Logo, se M é conexa, orientada e se $(U, w = u + iv)$ e $(V, z = x + iy)$ são sistemas de coordenadas positivos, ao longo de $U \cap V$, então $\nu(z) := \frac{\tilde{\nu}(z)}{|\tilde{\nu}(z)|} = \frac{\tilde{\nu}(w)}{|\tilde{\nu}(w)|} =: \nu(w)$, e também, $\tau(z) := \frac{\tilde{\tau}(z)}{|\tilde{\tau}(z)|} = \frac{\tilde{\tau}(w)}{|\tilde{\tau}(w)|} =: \tau(w)$.

Ou seja, τ e ν são vetores unitários globalmente definidos ao longo da superfície.

Definição 1.3.7 Se $S = f(M)$ é uma superfície de tipo espaço do L^4 , $(U, w = u + iv) \in \Sigma(M)$, então ν e τ são, respectivamente, as **normais espacial e temporal** da superfície S .

Em resumo, temos que $\tilde{\nu}$ é de tipo espaço, já que é ortogonal a ∂_0 que é de tipo tempo. Também, $\tilde{\nu}$ é ortogonal a f_u e a f_v . Além disso, $\tilde{\tau}$ é ortogonal a f_u , a f_v e a $\tilde{\nu}$, e $\tilde{\tau}$ é de tipo tempo futuro dirigido.

Seja $\mathcal{L} := (\tilde{\tau}, f_u, f_v, \tilde{\nu})$. Assim, por construção, $\mathcal{L}$ é uma base positiva para L^4 , em $f(U)$.

Observação ν é a normal da superfície do espaço de repouso do observador ∂_0 , isto é, ν é a normal de $\hat{S} = \hat{f}(M)$. [17]

Observação τ é o único campo de vetores unitário normal a S que é perpendicular a ν , de tipo tempo e futuro dirigido.

1.3.2 As primeira e segunda formas fundamentais

Sejam M uma variedade diferenciável (C^∞) e $\mathcal{X}(M)$ seu conjunto de campos de vetores tangentes C^∞ . Sejam ainda f uma imersão diferenciável, $S = f(M)$ uma superfície de tipo espaço no L^4 , $\mathcal{X}(f)$ o conjunto de campos de vetores C^∞ ao longo de f , $\mathcal{X}(f)^\top$ o conjunto de campos de vetores tangentes C^∞ ao longo de f , e $\mathcal{X}(f)^\perp$ o conjunto de campos de vetores normais C^∞ ao longo de f . Seja $C^\infty(M)$ o conjunto das funções de M em $\mathbb{R}$ que são C^∞ .

Definição 1.3.8 *Sejam $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável (isto é, $f \in C^\infty$), $X \in \mathcal{X}(M)$, e $p \in M$. Então $X_p[f] = X[f](p) := f_{*p}(X_p)$ é a derivada de f na direção de X_p em p .*

Definição 1.3.9 *Se $A, B \in \mathcal{X}(M)$, $[A, B](g) := A[B[g]] - B[A[g]]$, para toda $g \in C^\infty(M)$, é o colchete de Lie de A por B . Note que $[A, B] \in \mathcal{X}(M)$.*

Propriedades 1.3.10 *Sejam $A, B \in \mathcal{X}(M)$, então*

1. $[A, B] \equiv -[B, A]$;
2. $[A, A] \equiv 0$;

Demonstração

Seja $g \in C^\infty(M)$, então

1. $[B, A](g) = B[A[g]] - A[B[g]] = -\left(A[B[g]] - B[A[g]]\right) = -[A, B](g)$;
2. $[A, A](g) = A[A[g]] - A[A[g]] = 0$.

□

Definição 1.3.11 *Seja $(M, \Sigma(M))$ uma variedade diferenciável. Uma **conexão** afim sobre M é qualquer função $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ que satisfaz às seguintes condições:*

1. *Se $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, $g, h \in C^\infty(M)$, $\nabla_{hX+gY}Z = h\nabla_XZ + g\nabla_YZ$;*
2. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$;
3. $\nabla_X(gY) = X[g]Y + g\nabla_XY$, $g \in C^\infty(M)$.

Tal conexão é

4. simétrica se $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M), \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.

Além disso, se, sobre M , temos uma métrica pseudo-riemanniana $(,)$ então a conexão é

5. compatível com $(,)$ se $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M), Z[(X, Y)] = (\nabla_Z X, Y) + (X, \nabla_Z Y)$.

Teorema 1.3.12 Teorema Fundamental da Geometria Pseudo-Riemanniana
Seja $(M, (,))$ uma variedade pseudo-riemanniana. Então existe uma única conexão compatível e simétrica sobre M . Tal conexão é a **conexão de Levi-Civita**.

Demonstração

Para a demonstração deste teorema, ver [17]. □

Em particular, existe uma única conexão de Levi-Civita para L^4 .

Seja $\bar{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita do L^4 . Se $Z = Z^0 \partial_0 + \sum_{i=1}^3 Z^i \partial_i \in \mathcal{X}(M)$, então

$$\bar{\nabla}_Y Z = Y[Z^0] \partial_0 + \sum_{i=1}^3 Y[Z^i] \partial_i, \quad (1.10)$$

onde $Y \in \mathcal{X}(M)$.

Sejam $\bar{\nabla}$ e ∇ as conexões de Levi-Civita do L^4 e de $(M, f^*(,))$, respectivamente. Então

$$\begin{aligned} \nabla^f : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(f) &\longrightarrow \mathcal{X}(f) \\ (\nabla_X^f Y)(p) &:= \bar{\nabla}_{f_* X_p} \tilde{Y}, \end{aligned}$$

onde $\tilde{Y}$ é uma extensão de Y a uma vizinhança aberta do L^4 que contém $f(p)$, é uma conexão, isto é, satisfaz às condições 1, 2 e 3 da definição 1.3.11.

Note que $(\nabla_X^f Y)(p) := \bar{\nabla}_{f_* X_p} \tilde{Y} = (\bar{\nabla}_{f_* X_p} \tilde{Y})^\top + (\bar{\nabla}_{f_* X_p} \tilde{Y})^\perp$, onde $(\bar{\nabla}_{f_* X_p} \tilde{Y})^\top$ e $(\bar{\nabla}_{f_* X_p} \tilde{Y})^\perp$ são as projeções ortogonais do vetor $\bar{\nabla}_{f_* X_p} \tilde{Y}$, respectivamente, sobre os espaços vetoriais tangente e normal a S em $f(p)$.

Note também que $(\nabla_X^f Y)(p)$ não depende da particular extensão de Y . Isto devido à equação (1.10).

Além disso, seja

$$\begin{aligned} \nabla^\perp : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(f)^\perp &\longrightarrow \mathcal{X}(f)^\perp \\ \nabla_X^\perp Z &:= (\nabla_X^f Z)^\perp = (\bar{\nabla}_{f_* X} \tilde{Z})^\perp, \end{aligned}$$

onde $\tilde{Z}$ é uma extensão de Z a uma vizinhança aberta de L^4 . Deste modo, $\nabla^\perp$ é a conexão normal de S . Note que ela não depende da particular extensão de Z , por causa da equação (1.10).

Definição 1.3.13 Seja $S = f(M)$ uma superfície de tipo espaço no L^4 , $X \in \mathcal{X}(M)$. Então f_*X é definido por: se $p \in M$ e U é um aberto de M tal que $f|_U$ é um mergulho

$$(f_*X)(p) := (f|_U)_*X_p$$

Proposição 1.3.14 Sejam $S = f(M)$ uma superfície de tipo espaço do L^4 , $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $Z \in \mathcal{X}(f)$, então

1. Se $W \in \mathcal{X}(L^4)$ então $W \circ f \in \mathcal{X}(f)$;
2. $f_*X \in \mathcal{X}(f)$;
3. $\nabla_X^f Z = X[Z^0]\partial_0 + X[Z^1]\partial_1 + X[Z^2]\partial_2 + X[Z^3]\partial_3$;
4. $(\nabla_X^f f_*Y)^\top = f_*(\nabla_X Y)$;
5. $f_*([X, Y]) = \nabla_X^f f_*Y - \nabla_Y^f f_*X$.

Demonstração

Vamos demonstrar os itens 4 e 5.

Sejam U aberto de M , V aberto de L^4 tal que $f|_U$ é um mergulho, $V \cap S = f(U)$, (e_0, e_1, e_2, e_3) , $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ tais que $e_A \in \mathcal{X}(V)$, $(e_A, e_B) = \delta_{AB}$, $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \in \mathcal{X}(U)$, $f_*\tilde{e}_1 = e_1 \circ f$, $f_*\tilde{e}_2 = e_2 \circ f$. Então $\langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_1 \rangle = \langle \tilde{e}_2, \tilde{e}_2 \rangle \equiv 1$, $\langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \rangle \equiv 0$, onde $\langle, \rangle = f^*(,)$.

Em U , sejam $e_A(f) = e_A \circ f$. Então:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= X[Y^1]\tilde{e}_1 + Y^1\nabla_X\tilde{e}_1 + X[Y^2]\tilde{e}_2 + Y^2\nabla_X\tilde{e}_2 \\ &= X[Y^1]\tilde{e}_1 + Y^1(\langle \nabla_X\tilde{e}_1, \tilde{e}_1 \rangle \tilde{e}_1 + \langle \nabla_X\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \rangle \tilde{e}_2) \\ &\quad + X[Y^2]\tilde{e}_2 + Y^2(\langle \nabla_X\tilde{e}_2, \tilde{e}_1 \rangle \tilde{e}_1 + \langle \nabla_X\tilde{e}_2, \tilde{e}_2 \rangle \tilde{e}_2) \\ &= \{X[Y^1] + Y^1\langle \nabla_X\tilde{e}_1, \tilde{e}_1 \rangle + Y^2\langle \nabla_X\tilde{e}_2, \tilde{e}_1 \rangle\}\tilde{e}_1 \\ &\quad + \{X[Y^2] + Y^1\langle \nabla_X\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \rangle + Y^2\langle \nabla_X\tilde{e}_2, \tilde{e}_2 \rangle\}\tilde{e}_2 \\ &= \sum_{i=1}^2 \left\{ X[Y^i] + \sum_{j=1}^2 \langle \nabla_X\tilde{e}_j, \tilde{e}_i \rangle \right\} \tilde{e}_i \end{aligned}$$

Então, $f_*(\nabla_X Y) = \sum_{i=1}^2 \left\{ X[Y^i] + \sum_{j=1}^2 \langle \nabla_X\tilde{e}_j, \tilde{e}_i \rangle \right\} e_i \circ f$.

Porém, se $Z \in \mathcal{X}(f)$, $Z = Z^0 e_0 \circ f + \sum_{A=1}^3 Z^A e_A \circ f$. Sejam, $\alpha = 0, 3$, $k = 1, 2$, $\epsilon^0 = -1$, $\epsilon^3 = 1$. Assim,

$$\nabla_X^f Z = \sum_{A=0}^3 \left\{ X[Z^A]e_A(f) + Z^A \nabla_X^f e_A(f) \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{A=0}^3 \{X[Z^A]e_A(f)\} + \sum_{A=0}^3 \left\{ Z^A \sum_{B=0}^3 \{ \langle \nabla_X^f e_A(f), e_B(f) \rangle e_B(f) \} \right\} \\
&= \sum_{\alpha} \left\{ X[Z^\alpha] + \sum_{A=0}^3 \{ Z^A \epsilon^\alpha \langle \nabla_X^f e_A(f), e_\alpha(f) \rangle \} \right\} e_\alpha(f) \\
&\quad + \sum_k \left\{ X[Z^k] + \sum_{A=0}^3 \{ Z^A \langle \nabla_X^f e_A(f), e_k(f) \rangle \} \right\} e_k(f)
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\nabla_X^f f_* Y &= \sum_{\alpha} \left\{ \sum_{j=1}^2 \{ Y^j \epsilon^\alpha \langle \nabla_X^f e_j(f), e_\alpha(f) \rangle \} \right\} e_\alpha(f) \\
&\quad + \sum_k \left\{ X[Y^k] + \sum_{j=1}^2 \{ Y^j \langle \nabla_X^f e_j(f), e_k(f) \rangle \} \right\} e_k(f) \\
(\nabla_X^f f_* Y)^\top &= \sum_k \left\{ X[Y^k] + \sum_{j=1}^2 \{ Y^j \langle \nabla_X^f e_j(f), e_k(f) \rangle \} \right\} e_k(f)
\end{aligned}$$

Logo, $(\nabla_X^f f_* Y)^\top = f_*(\nabla_X Y)$. Isto prova o item 3.

Falta mostrar o item 4. Seja $\Phi(X, Y) := \nabla_X^f f_* Y - \nabla_Y^f f_* X - f_*([X, Y])$. Queremos mostrar que $\Phi \equiv 0$.

Mas, $\Phi(X, Y) = -\Phi(Y, X)$ e Φ é $C^\infty(M)$ bilinear.

Se $(U, w = u + i v) \in \Sigma(M)$, $f_* \partial_u = f_u = (f_u^0, f_u^1, f_u^2, f_u^3)$, $f_* \partial_v = f_v = (f_v^0, f_v^1, f_v^2, f_v^3)$, $(\partial_u, \partial_v) \equiv 0$, e $[\partial_u, \partial_v] = [\partial_v, \partial_u]$, então $\Phi(\partial_u, \partial_u) = \Phi(\partial_v, \partial_v) \equiv 0$. Além disso, $\Phi(\partial_u, \partial_v) = \nabla_{\partial_u}^f f_v - \nabla_{\partial_v}^f f_u - f_*[\partial_u, \partial_v] = f_{vu} - f_{uv} \equiv 0$.

Então, se $X = X^u \partial_u + X^v \partial_v$ e $Y = Y^u \partial_u + Y^v \partial_v$ temos $\Phi(X, Y) = X^u Y^u \Phi(\partial_u, \partial_u) + X^u Y^v \Phi(\partial_u, \partial_v) + X^v Y^u \Phi(\partial_v, \partial_u) + X^v Y^v \Phi(\partial_v, \partial_v) \equiv 0$.

□

Definição 1.3.15 *Seja $S = f(M)$ uma superfície de tipo espaço do L^4 . Sejam $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ e $\mu \in \mathcal{X}(f)^\perp$.*

A primeira forma fundamental de S é

$$\begin{aligned}
ds^2 &: \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathbb{R} \\
ds^2(X, Y) &:= (f_* X, f_* Y).
\end{aligned} \tag{1.11}$$

A segunda forma fundamental de S é

$$\begin{aligned} B : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \mathcal{X}(f)^\perp, \\ B(X, Y) &:= (\nabla_X^f f_* Y)^\perp \end{aligned} \quad (1.12)$$

O tensor de Weingarten de S é a função $C^\infty(M)$ – bilinear

$$\begin{aligned} A : \mathcal{X}(f)^\perp \times \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \mathcal{X}(M) \\ (\mu, X) &\longmapsto A^\mu(X), \end{aligned}$$

que é solução de

$$ds^2(A^\mu(X), Y) := (B(X, Y), \mu). \quad (1.13)$$

Proposição 1.3.16 *Sejam $S = f(M)$, $\bar{\nabla}$, ∇ as conexões de Levi-Civita de L^4 e de M , respectivamente. Sejam ainda B a segunda forma bilinear fundamental de f , e $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Então*

1. $B(X, Y) = \nabla_X^f f_* Y - f_*(\nabla_X Y)$ (equação de Gauss);
2. $B(X, Y) = B(Y, X)$;
3. $B(hX, Y) = hB(X, Y)$, onde $h \in C^\infty(M)$.

Demonstração

1. $B(X, Y) = (\nabla_X^f f_* Y)^\perp = \nabla_X^f f_* Y - (\nabla_X^f f_* Y)^\top = \nabla_X^f f_* Y - f_*(\nabla_X Y)$;
2. $B(X, Y) - B(Y, X) = (\nabla_X^f f_* Y)^\perp - (\nabla_Y^f f_* X)^\perp = \left(\nabla_X^f f_* Y - (\nabla_X^f f_* Y)^\top \right) - \left(\nabla_Y^f f_* X - (\nabla_Y^f f_* X)^\top \right) = \nabla_X^f f_* Y - f_*(\nabla_X Y) - \nabla_Y^f f_* X + f_*(\nabla_Y X) = (\nabla_X^f f_* Y - \nabla_Y^f f_* X) - f_*(\nabla_X Y - \nabla_Y X) = f_*([X, Y]) - f_*([X, Y]) \equiv 0$;
3. Direto das definições de B e de ∇ .

□

Observação A proposição anterior nos mostra que B é $C^\infty(M)$ – bilinear, isto é, B é um tensor.

Proposição 1.3.17 *Sejam $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ e $\mu \in \mathcal{X}(f)^\perp$. Seja A o operador de Weingarten de S . Então*

1. $A^\mu(p) : T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ é um operador linear auto-adjunto relativamente a $f^*(\cdot, \cdot)(p)$.
2. $f_*(A^\mu(X)) = -(\nabla_X^f \mu)^\top$
3. $\nabla_X^f \mu = -f_*(A^\mu X) + (\nabla_X^f \mu)^\perp$ (fórmula de Weingarten).

Demonstração

De fato, o primeiro item vale pois

$$ds^2(A^\mu(X), Y)(p) = (B(X, Y)(p), \mu(p)) = (B(Y, X)(p), \mu(p)) = ds^2(A^\mu(Y), X)(p)$$

E o segundo vale pois:

$$\begin{aligned} (f_* A^\mu(X), f_*(Y)) &= ds^2(A^\mu(X), Y) := (B(X, Y), \mu) = ((\nabla_X^f f_* Y)^\perp, \mu) \\ &= (\nabla_X^f f_* Y, \mu) = X[(f_* Y, \mu)] - (f_* Y, \nabla_X^f \mu) \\ &= (f_* Y, -\nabla_X^f \mu) = (f_* Y, (-\nabla_X^f \mu)^\top) = (-\nabla_X^f \mu)^\top, f_* Y). \end{aligned}$$

Mas, como isso vale para todo Y , $f_* A^\mu(X) = -(\nabla_X^f \mu)^\top$.

□

1.3.3 Equações de estrutura de um referencial móvel de Minkowski de L^4 adaptado a uma superfície de tipo espaço do L^4

Definição 1.3.18 *Um referencial móvel de Minkowski em V aberto de L^4 é uma 4-upla $\varepsilon_V = (e_0, e_i)$, $i = 1, 2, 3$ de campos de vetores C^∞ em V tal que $\forall p \in V$, $(e_0(p), e_i(p))$ é um referencial de Minkowski do L^4 . Além disso, a 4-upla $\varepsilon_V^* = (\theta^0, \theta^i)$, $i = 1, 2, 3$ de 1-formas diferenciáveis em V tal que $(\theta^0(p), \theta^i(p))$ é a base de $(L^4)^*$ dual de $(e_0(p), e_i(p))$ é chamada **co-referencial dual** de ε_V .*

Se M^2 é uma variedade diferenciável, $f : M \hookrightarrow L^4$ é uma imersão, $S := f(M)$ é uma superfície de tipo espaço do L^4 , V é um aberto do L^4 tal que $V \cap S \neq \emptyset$ e, se $U = f^{-1}(V)$, então $f|_U$ é um mergulho. Neste caso, dizemos que o referencial móvel de Minkowski $\varepsilon_V = (e_0, e_i)$, $i = 1, 2, 3$ é **adaptado** a S , ou a f , se $e_1(f), e_2(f) \in \mathcal{X}(f|_U)^\top$. Note que se o referencial é adaptado, temos que $e_0(f), e_3(f) \in \mathcal{X}(f|_U)^\perp$. Se $e_0(f) = \tau$ e $e_3(f) = \nu$, ele é **naturalmente adaptado** a S .

Se $\tilde{\varepsilon}_U = (\tilde{e}_0, \tilde{e}_i)$, $i = 1, 2, 3$ é tal que $f_*(\tilde{e}_1) = e_1 \circ f$, $f_*(\tilde{e}_2) = e_2 \circ f$, então $\tilde{\varepsilon}_U$ é um referencial móvel de $(M, f^*(\cdot, \cdot))$.

Note que, se $X \in \mathcal{X}(f)$,

$$\begin{aligned} X &= -(X, e_0(f))e_0(f) + (X, e_3(f))e_3(f) + (X, e_1(f))e_1(f) + (X, e_2(f))e_2(f) \\ &= X^\perp + X^\top, \text{ onde} \\ X^\perp &:= -(X, e_0(f))e_0(f) + (X, e_3(f))e_3(f) \\ X^\top &:= (X, e_1(f))e_1(f) + (X, e_2(f))e_2(f). \end{aligned}$$

Como, por definição, $\theta^0(e_0) = 1$, $\theta^0(e_i) = 0$, $\theta^i(e_0) = 0$, $\theta^i(e_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$, então se $X \in \mathcal{X}(V)$, $X = -(X, e_0)e_0 + \sum_{i=1}^n (X, e_i)e_i$, temos:

$$\begin{aligned} \theta^0(X) &= -(X, e_0), \\ \theta^i(X) &= (X, e_i). \end{aligned}$$

Definição 1.3.19 *Seja $X \in \mathcal{X}(V)$. As 1-formas de conexão de ε_V , são as 1-formas θ_i^0 e θ_j^i definidas por*

$$\begin{aligned} \theta_0^0(X) &:= \theta^0(\bar{\nabla}_X e_0), \\ \theta_i^0(X) &:= \theta^0(\bar{\nabla}_X e_i), \\ \theta_0^i(X) &:= \theta^i(\bar{\nabla}_X e_0), \\ \theta_j^i(X) &:= \theta^i(\bar{\nabla}_X e_j), \end{aligned}$$

Proposição 1.3.20 *Sejam θ_i^0 e θ_j^i as 1-formas de conexão de ε_V , então*

1. $\theta_0^0 \equiv 0$;
2. $\theta_i^0 \equiv \theta_{0^i}^i$;
3. $\theta_i^i \equiv 0$;
4. $\theta_j^i \equiv -\theta_i^j$.

Demonstração

De fato, as expressões acima valem pois, para $X \in \mathcal{X}(V)$:

1. $0 \equiv X[(e_0, e_0)] = 2(\bar{\nabla}_X e_0, e_0) = -2\theta^0(\bar{\nabla}_X e_0) = -2\theta_0^0(X)$;
2. $0 \equiv X[(e_0, e_i)] = (\bar{\nabla}_X e_0, e_i) + (e_0, \bar{\nabla}_X e_i) = \theta^i(\bar{\nabla}_X e_0) - \theta^0(\bar{\nabla}_X e_i) = \theta_0^i(X) - \theta_i^0(X)$;
3. análogo ao item 1;
4. análogo ao item 2. □

Portanto

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X e_0 &= \sum_i \theta_0^i(X) e_i \\ \bar{\nabla}_X e_i &= \theta_i^0(X) e_0 + \sum_{i \neq j} \theta_i^j(X) e_j\end{aligned}$$

Proposição 1.3.21 *Nas condições acima, e onde $\varepsilon_V = (e_0, e_i)$, temos que valem as seguintes expressões*

1. $d\theta^0 = -\sum_i \theta_i^0 \wedge \theta^i$;
2. $d\theta^i = -\theta_0^i \wedge \theta^0 - \sum_j \theta_j^i \wedge \theta^j$;
3. $d\theta_i^0 = -\sum_j \theta_j^0 \wedge \theta_i^j$;
4. $d\theta_j^i = -\theta_0^i \wedge \theta_j^0 - \sum_k \theta_k^i \wedge \theta_j^k$.

Demonstração

As duas primeiras equações, que são as **primeiras fórmulas de estrutura**, seguem do seguinte fato: para α uma 1-forma diferenciável, temos que $\forall X, Y \in \mathcal{X}(V)$, $(d\alpha)(X, Y) = X[\alpha(Y)] - Y[\alpha(X)] - \alpha([X, Y])$. Já as duas últimas expressões, as **segundas fórmulas de estrutura**, são consequência de: se α, β são 1-formas diferenciáveis e $(\alpha \otimes \beta)(u, v) = \alpha(u)\beta(v)$, então $\alpha \wedge \beta = \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha$, e do fato de $\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z \equiv 0$. $\square$

Definição 1.3.22 *Sejam α uma 1-forma diferenciável e $X \in \mathcal{X}(V)$. Então $\alpha \otimes p$ é a 1-forma tal que $(\alpha \otimes p)(u) := \alpha(u)p$.*

Lema 1.3.23 Lema de Cartan *Se V é um espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ sobre $\mathbb{R}$, $\theta^1, \dots, \theta^k, \alpha^1, \dots, \alpha^k$ 1-formas de V , $\theta^1, \dots, \theta^k$ são linearmente independentes e $\sum_{i=1}^k \alpha^i \wedge \theta^i = 0$, então existem $h_j^i \in \mathbb{R}$, tais que*

1. $\alpha^i = \sum_{j=1}^k h_j^i \theta^j$, para todo $1 \leq i \leq k$;
2. $h_j^i = h_i^j$, para todo $1 \leq i, j \leq k$.

Demonstração

Para a demonstração deste lema, ver [24]. $\square$

Se α é uma 1-forma diferenciável do L^4 e $S = f(M)$ é uma superfície do L^4 , $f^*\alpha$ é a 1-forma diferenciável de M , definida por $f^*\alpha = \alpha \circ f_*$, ou seja, se $X \in \mathcal{X}(M)$ então $(f^*\alpha)(X) = \alpha(f_*X)$.

Sejam então

$$\begin{aligned}\omega^0 &:= f^*\theta^0, \\ \omega^i &:= f^*\theta^i, \\ \omega_i^0 &:= f^*\theta_i^0, \\ \omega_j^i &:= f^*\theta_j^i.\end{aligned}$$

Sejam $\tilde{e}_1$ e $\tilde{e}_2$ tais que $f_*(\tilde{e}_1) := e_1(f)$ e $f_*(\tilde{e}_2) := e_2(f)$, então $\varepsilon_U = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ é um referencial móvel adaptado de M e $\varepsilon_U^* = (\omega^1, \omega^2)$ seu co-referencial dual. Além disso, ω_2^1 é a 1-forma de conexão de ε_U .

Uma vez que $d(f^*\alpha) = f^*d\alpha$ e $f^*\alpha \wedge f^*\beta = f^*(\alpha \wedge \beta)$ temos

1. $\omega^0 \equiv 0$;
2. $\omega^3 \equiv 0$;
3. $\omega_i^0 = \omega_0^i$;
4. $\omega_j^i = -\omega_i^j$;
5. $d\omega^0 = -\sum_i \omega_i^0 \wedge \omega^i$;
6. $d\omega^i = -\sum_j \omega_j^i \wedge \omega^j$;
7. $d\omega_i^0 = -\sum_j \omega_j^0 \wedge \omega_i^j$;
8. $d\omega_j^i = -\omega_0^i \wedge \omega_j^0 - \sum_k \omega_k^i \wedge \omega_j^k$.

1.3.4 Curvaturas média, gaussiana e normal

Seja $S = f(M)$ uma superfície orientada de tipo espaço do L^4 , onde B é sua segunda forma fundamental, e $\langle \cdot, \cdot \rangle = f^*(\cdot, \cdot)$.

Definição 1.3.24 Dado $p \in M$, sabemos que $B_p : T_p M \times T_p M \rightarrow (f_* T_p M)^\perp$ é bilinear. O vetor curvatura média da superfície S é $H(p) = \frac{1}{2} \text{tr}(B_p)$.

Se $\varepsilon_p = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ é uma base ortonormal de $T_p(M)$, então

$$H(p) = \frac{1}{2}[B(\tilde{e}_1, \tilde{e}_1) + B(\tilde{e}_2, \tilde{e}_2)].$$

Também temos, $H(p) \in (f_* T_p M)^\perp$ e $H \in \mathcal{X}(f)^\perp$.

Definição 1.3.25 Uma superfície de tipo espaço no L^4 é dita *mínima* se $\vec{H} \equiv 0$. Se $S \in L^3$, dizemos que tal superfície é *máxima*.

Definição 1.3.26 Sejam $S = f(M)$ uma superfície mínima de L^4 e ∇ a conexão de Levi-Civita de M . Então,

$$\begin{aligned} R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\rightarrow \mathcal{X}(M) \\ R(X, Y, Z) &= R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \end{aligned}$$

é o tensor de curvatura de ∇ .

Propriedades 1.3.27 Sejam $S = f(M)$ uma superfície mínima de L^4 , ∇ a conexão de Levi-Civita de M e R seu tensor de curvatura. Sejam $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$. Então,

1. $R(X, Y)Z$ tem caráter tensorial em X, Y, Z ;
2. $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$;
3. $(R(X, Y)Z, W) = -(R(X, Y)W, Z)$;
4. $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ (primeira identidade de Bianchi);
5. $(R(X, Y)Z, W) = (R(Z, W)X, Y)$
6. $(\nabla_Z R)(X, Y) + (\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) = 0$ (segunda identidade de Bianchi);
7. Se (v, w) e (x, y) são dois referenciais móveis de M tais que $v = ax + by$ e $w = cx + dy$, então $(R(v, w)v, w) = (ad - bc)^2 (R(x, y)x, y)$.

Demonstração

Ver [17].

□

Observação Se $\varepsilon = (e_1, e_2)$, $\tilde{\varepsilon} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ são dois referenciais móveis ortogonais de M , então $e_1 = \cos \theta \tilde{e}_1 + \sin \theta \tilde{e}_2$ e $e_2 = -\sin \theta \tilde{e}_1 + \cos \theta \tilde{e}_2$. Logo, cálculos diretos nos mostram que

$$\begin{aligned} (R(e_1, e_2)e_1, e_2) &= (\cos \theta \cos \theta - \sin \theta (-\sin \theta))^2 (R(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) \\ &= (R(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)\tilde{e}_1, \tilde{e}_2). \end{aligned}$$

Ou seja, o valor de $(R(e_1, e_2)e_1, e_2)$ não depende do particular referencial.

Definição 1.3.28 *Sejam $S = f(M)$ uma superfície de tipo espaço do L^4 , e $\varepsilon = (e_1, e_2)$ um referencial de Minkowski para M , $p \in M$. Então, a **curvatura gaussiana** de S é dada por*

$$K(p) := -(R(e_1, e_2)e_1, e_2)(p) = (R(e_1, e_2)e_2, e_1)(p) \quad (1.14)$$

Teorema 1.3.29 *Sejam $S=f(M)$ uma superfície de tipo espaço de L^4 , $\varepsilon = (e_1, e_2)$ um referencial móvel para M . Então,*

$$d\omega_1^2(e_1, e_2) = \left(R(e_1, e_2)e_1, e_2 \right). \quad (1.15)$$

Demonstração

Como $d\omega_1^2$ é uma 2-forma, então

$$\begin{aligned} d\omega_1^2(e_1, e_2) &= e_1[\omega_1^2(e_2)] - e_2[\omega_1^2(e_1)] - \omega_1^2([e_1, e_2]) \\ &= e_1[(\nabla_{e_2}e_1, e_2)] - e_2[(\nabla_{e_1}e_1, e_2)] - (\nabla_{[e_1, e_2]}e_1, e_2) \\ &= (\nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_1, e_2) + (\nabla_{e_2}e_1, \nabla_{e_1}e_2) - (\nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_1, e_2) - (\nabla_{e_1}e_1, \nabla_{e_2}e_2) \\ &\quad - (\nabla[e_1, e_2]e_1, e_2) \\ &= (R(e_1, e_2)e_1, e_2) + 0 = (R(e_1, e_2)e_1, e_2) \end{aligned}$$

□

O teorema acima nos diz que

$$K(p) = -d\omega_1^2(e_1, e_2)(p). \quad (1.16)$$

Ou seja, a curvatura gaussiana de S é a única função $K : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para qualquer referencial móvel em M

$$d\omega_1^2 = -K\omega^1 \wedge \omega^2. \quad (1.17)$$

Proposição 1.3.30 *Seja $S = f(M)$ uma superfície de tipo espaço do L^4 e K sua curvatura gaussiana. Então*

$$K = -h_{11}^0 h_{22}^0 + h_{12}^0 h_{21}^0 - h_{11}^3 h_{22}^3 + h_{12}^3 h_{21}^3,$$

onde $h_{ij}^\alpha \in C^\infty(U)$ são funções tais que $h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha$ e $\omega_i^\alpha = \sum_j h_{ij}^\alpha \omega^j$.

Demonstração

Pelo lema de Cartan, temos que existem $h_{ij}^\alpha \in C^\infty(U)$ únicas tais que $h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha$ e

$\omega_i^\alpha = \sum_j h_{ij}^\alpha \omega^j$. Além disso, $d\omega_j^i = -\omega_0^i \wedge \omega_j^0 - \sum_k \omega_k^i \wedge \omega_j^k$. Logo,

$$\begin{aligned} d\omega_1^2 &= -\omega_0^1 \wedge \omega_2^0 - \omega_3^1 \wedge \omega_2^3 \\ &= \omega_1^0 \wedge \omega_2^0 + \omega_1^3 \wedge \omega_2^3 \\ &= (h_{11}^0 \omega^1 + h_{12}^0 \omega^2) \wedge (h_{21}^0 \omega^1 + h_{22}^0 \omega^2) + (h_{11}^3 \omega^1 + h_{12}^3 \omega^2) \wedge (h_{21}^3 \omega^1 + h_{22}^3 \omega^2) \\ &= (h_{11}^0 h_{22}^0 - h_{12}^0 h_{21}^0) \omega^1 \wedge \omega^2 + (h_{11}^3 h_{22}^3 - h_{12}^3 h_{21}^3) \omega^1 \wedge \omega^2 \\ &= [h_{11}^0 h_{22}^0 - h_{12}^0 h_{21}^0 + h_{11}^3 h_{22}^3 - h_{12}^3 h_{21}^3] \omega^1 \wedge \omega^2. \end{aligned}$$

Logo, $K = -h_{11}^0 h_{22}^0 + h_{12}^0 h_{21}^0 - h_{11}^3 h_{22}^3 + h_{12}^3 h_{21}^3$. □

Proposição 1.3.31 *Sejam $S = f(M)$ uma superfície, e K sua curvatura gaussiana. Seja $\varepsilon_V = (e_0, e_i)$, $i = 1, 2, 3$, um referencial móvel adaptado a S tal que $e_0(f), e_3(f) \in \mathcal{X}(f)^\perp$; $e_1(f), e_2(f) \in \mathcal{X}(f)^\top$. Então*

$$K = -\det A^{e_0} + \det A^{e_3}$$

Demonstração

Pela proposição 1.3.17 temos que

$$\begin{aligned} f_*(A^\mu(X)) &= -(\nabla_X^f \mu)^\top \\ &= -\omega_0^1 \otimes e_1(f) - \omega_0^2 \otimes e_2(f) \\ &= -(h_{11}^0 \omega^1 + h_{12}^0 \omega^2) \otimes e_1(f) - (h_{21}^0 \omega^1 + h_{22}^0 \omega^2) \otimes e_2(f). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} A^{e_0}(e_1) &= -h_{11}^0 e_1 - h_{21}^0 e_2 \\ A^{e_0}(e_2) &= -h_{12}^0 e_1 - h_{22}^0 e_2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} A^{e_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_{11}^0 & -h_{12}^0 \\ -h_{21}^0 & -h_{22}^0 \end{bmatrix}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} f_*(A^{e_3}) &= -(\nabla^f e_3)^\top \\ &= -\omega_3^1 \otimes e_1(f) - \omega_3^2 \otimes e_2(f) \\ &= \omega_1^3 \otimes e_1(f) + \omega_2^3 \otimes e_2(f) \\ &= (h_{11}^3 \omega^1 + h_{12}^3 \omega^2) \otimes e_1(f) + (h_{21}^3 \omega^1 + h_{22}^3 \omega^2) \otimes e_2(f). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} A^{\epsilon_3}(e_1) &= h_{11}^3 e_1 + h_{21}^3 e_2 \\ A^{\epsilon_3}(e_2) &= h_{12}^3 e_1 - h_{22}^3 e_2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left[A^{\epsilon_3} \right] = \begin{bmatrix} h_{11}^3 & h_{12}^3 \\ h_{21}^3 & h_{22}^3 \end{bmatrix}$$

Logo, pela proposição 1.3.30 temos

$$\begin{aligned} K &= -h_{11}^0 h_{22}^0 + h_{12}^0 h_{21}^0 - h_{11}^3 h_{22}^3 + h_{12}^3 h_{21}^3 \\ &= -\det A^{\epsilon_0} + \det A^{\epsilon_3} \end{aligned}$$

□

Corolário 1.3.32 *Se $S = f(M)$ é uma superfície de tipo espaço do L^4 e $\nu, \tau \in \mathcal{X}(f)^\perp$ são, respectivamente, as normais espacial e temporal de S , então*

$$K = -\det A^\tau + \det A^\nu. \quad (1.18)$$

Teorema 1.3.33 *Sejam $S = f(M)$ superfície mínima de tipo espaço de L^4 , $(U, w = u + i v) \in \Sigma(M)$ um sistema de coordenadas isotérmicos. Se $\lambda^2 \equiv \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right)$ e $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$, então*

$$K = -\frac{\Delta \ln \lambda}{\lambda^2}. \quad (1.19)$$

Demonstração

Sejam $e_1 := \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial u}$ e $e_2 := \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial v}$. Assim, $\varepsilon_U = (e_1, e_2)$ é um referencial móvel de M . Se (ω^1, ω^2) é o co-referencial dual a ε_U , então $\omega^1 = \lambda du$ e $\omega^2 = \lambda dv$. Logo, se $\lambda_u = d\lambda \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)$ e $\lambda_v = d\lambda \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)$ então $d\omega^1 = \lambda_v dv \wedge du$ e $d\omega^2 = \lambda_u du \wedge dv$.

Mas, se ω_1^2 é a 1-forma de conexão de ε_U , $d\omega^1 = -\omega_2^1 \wedge \omega^2$ e $d\omega^2 = -\omega_1^2 \wedge \omega^1$. Logo,

$$\begin{aligned} -\omega_2^1 \wedge \omega^2 &= -\lambda_v du \wedge dv = -\frac{\lambda_v}{\lambda^2} \omega^1 \wedge \omega^2 \\ \Rightarrow -(\omega_2^1 \wedge \omega^2)(e_1, e_2) &= -\frac{\lambda_v}{\lambda^2} \\ \Rightarrow -\omega_2^1(e_1) &= -\frac{\lambda_v}{\lambda^2} \\ -\omega_1^2 \wedge \omega^1 &= \lambda_u du \wedge dv = \frac{\lambda_u}{\lambda^2} \omega^1 \wedge \omega^2 \\ \Rightarrow (\omega_1^2 \wedge \omega^1)(e_1, e_2) &= \frac{\lambda_u}{\lambda^2} \\ \Rightarrow \omega_1^2(e_2) &= \frac{\lambda_u}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
\omega_1^2 &= -\frac{\lambda_v}{\lambda^2}\omega^1 + \frac{\lambda_u}{\lambda^2}\omega^2 \\
&= -\frac{\lambda_v}{\lambda}du + \frac{\lambda_u}{\lambda}dv \Rightarrow \\
d\omega_1^2 &= -\left(\frac{\lambda_v}{\lambda}\right)_v dv \wedge du + \left(\frac{\lambda_u}{\lambda}\right)_u du \wedge dv \\
&= \frac{1}{\lambda^2} \left[\left(\frac{\lambda_v}{\lambda}\right)_v + \left(\frac{\lambda_u}{\lambda}\right)_u \right] \omega^1 \wedge \omega^2.
\end{aligned}$$

Logo, em U,

$$\begin{aligned}
K &= -\frac{1}{\lambda^2} \left[\left(\frac{\lambda_v}{\lambda}\right)_v + \left(\frac{\lambda_u}{\lambda}\right)_u \right] \omega^1 \wedge \omega^2 \\
&= -\frac{\Delta \ln \lambda}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

□

Definição 1.3.34 *Sejam $S = f(M)$ uma superfície mínima de L^4 e $\nabla^\perp$ a conexão normal de M . Então,*

$$\begin{aligned}
R^\perp &: \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}^\perp(f) \rightarrow \mathcal{X}^\perp(M) \\
R^\perp(X, Y, \mu) &= R^\perp(X, Y)\mu = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \mu - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \mu - \nabla_{[X, Y]}^\perp \mu
\end{aligned}$$

é o tensor de curvatura da conexão normal $\nabla^\perp$.

Observação Se (e_0, e_1, e_2, e_3) e $(\bar{e}_0, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ são dois referenciais móveis adaptados a S então, existem β e α tais que

$$\begin{aligned}
e_0 &= \cosh(\alpha) \bar{e}_0 + \sinh(\alpha) \bar{e}_3 \\
e_3 &= \sinh(\alpha) \bar{e}_0 + \cosh(\alpha) \bar{e}_3 \\
e_1 &= \cos(\beta) \bar{e}_1 + \sin(\beta) \bar{e}_2 \\
e_2 &= -\sin(\beta) \bar{e}_1 + \cos(\beta) \bar{e}_2,
\end{aligned}$$

e cálculos diretos nos mostram que

$$\begin{aligned}
(R^\perp(e_1, e_2)e_0, e_3) &= (\cos^2(\beta) + \sin^2(\beta))(\cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha))(R^\perp(\bar{e}_1, \bar{e}_2)\bar{e}_0, \bar{e}_3) \\
&= (R^\perp(\bar{e}_1, \bar{e}_2)\bar{e}_0, \bar{e}_3)
\end{aligned}$$

Ou seja, $(R^\perp(e_1, e_2)e_0, e_3)$ não depende do particular referencial escolhido.

Definição 1.3.35 *Sejam $S = f(M)$ uma superfície de tipo espaço do L^4 , $\varepsilon = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ um referencial móvel adaptado a S . Então, a **curvatura normal** de S é dada por*

$$K_N = (R^\perp(e_1, e_2)e_0, e_3). \quad (1.20)$$

Teorema 1.3.36 *Sejam $S = f(M)$ uma superfície de tipo espaço de L^4 , $\varepsilon = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ um referencial móvel adaptado a S . Então*

$$d\omega_0^3(e_1, e_2) = \left(R^\perp(e_1, e_2)e_0, e_3 \right). \quad (1.21)$$

Demonstração

Como $d\omega_0^3$ é uma 2-forma, então

$$\begin{aligned} d\omega_0^3(e_1, e_2) &= e_1[\omega_0^3(e_2)] - e_2[\omega_0^3(e_1)] - \omega_0^3([e_1, e_2]) \\ &= e_1[(\nabla_{e_2}e_0, e_3)] - e_2[(\nabla_{e_1}e_0, e_3)] - (\nabla_{[e_1, e_2]}e_0, e_3) \\ &= (\nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_0, e_3) + (\nabla_{e_2}e_0, \nabla_{e_1}e_3) - (\nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_0, e_3) - (\nabla_{e_1}e_0, \nabla_{e_2}e_3) \\ &\quad - (\nabla[e_1, e_2]e_0, e_3) \\ &= (R(e_1, e_2)e_0, e_3) + 0 = (R(e_1, e_2)e_0, e_3) \end{aligned}$$

□

O teorema acima nos diz que

$$K_N = d\omega_0^3(e_1, e_2). \quad (1.22)$$

Ou seja, a curvatura normal de S é a única função K_N tal que para qualquer referencial móvel adaptado em S

$$d\omega_0^3 = K_N \omega^1 \wedge \omega^2. \quad (1.23)$$

Proposição 1.3.37 *Seja $S = f(M)$ uma superfície de tipo espaço do L^4 e K_N sua curvatura normal. Então*

$$K_N := h_{11}^0 h_{12}^3 - h_{12}^0 h_{11}^3 + h_{12}^0 h_{22}^3 - h_{22}^0 h_{12}^3$$

onde $h_{ij}^\alpha \in C^\infty(U)$ são funções tais que $h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha$ e $\omega_i^\alpha = \sum_j h_{ij}^\alpha \omega^j$.

Demonstração

Pelo lema de Cartan, temos que existem $h_{ij}^\alpha \in C^\infty(U)$ únicas tais que $h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha$ e

$\omega_i^\alpha = \sum_j h_{ij}^\alpha \omega^j$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\omega_1^0 &= \sum_j h_{1j}^0 \omega^j \\
&= h_{10}^0 \omega^0 + h_{11}^0 \omega^1 + h_{12}^0 \omega^2 + h_{13}^0 \omega^3 \\
&= h_{11}^0 \omega^1 + h_{12}^0 \omega^2 \\
\omega_1^3 &= h_{11}^3 \omega^1 + h_{12}^3 \omega^2 \\
\omega_2^0 &= h_{21}^0 \omega^1 + h_{22}^0 \omega^2 \\
&= h_{12}^0 \omega^1 + h_{22}^0 \omega^2 \\
\omega_2^3 &= h_{21}^3 \omega^1 + h_{22}^3 \omega^2 \\
&= h_{12}^3 \omega^1 + h_{22}^3 \omega^2
\end{aligned}$$

Além disso, $d\omega_j^i = -\omega_0^i \wedge \omega_j^0 - \sum_k \omega_k^i \wedge \omega_j^k$. Logo,

$$\begin{aligned}
d\omega_3^0 &= -\omega_1^0 \wedge \omega_3^1 - \omega_2^0 \wedge \omega_3^2 \\
&= \omega_1^0 \wedge \omega_1^3 + \omega_2^0 \wedge \omega_2^3 \\
&= (h_{11}^0 \omega^1 + h_{12}^0 \omega^2) \wedge (h_{11}^3 \omega^1 + h_{12}^3 \omega^2) + (h_{12}^0 \omega^1 + h_{22}^0 \omega^2) \wedge (h_{12}^3 \omega^1 + h_{22}^3 \omega^2) \\
&= (h_{11}^0 h_{12}^3 - h_{12}^0 h_{11}^3 + h_{12}^0 h_{22}^3 - h_{22}^0 h_{12}^3) \omega^1 \wedge \omega^2
\end{aligned}$$

Logo, $K_N = h_{11}^0 h_{12}^3 - h_{12}^0 h_{11}^3 + h_{12}^0 h_{22}^3 - h_{22}^0 h_{12}^3$.

□

Se $S = f(M)$ é uma superfície de L^4 , podemos expressar a curvatura normal em função dos vetores normais unitários τ e ν .

Teorema 1.3.38 *Seja $S = f(M)$ uma superfície de L^4 . Sejam τ e ν seus vetores normais unitários temporal e espacial, respectivamente. Então*

$$K_N = \frac{-4}{\lambda^2} \Im[(\nu_{\bar{w}}, \tau_w)] = \frac{4}{\lambda^2} \Im[(\nu_w, \tau_{\bar{w}})]$$

Demonstração

Pela equação 1.23, sabemos que K_N é a única função que satisfaz $d\omega_3^0 = K_N \omega^1 \wedge \omega^2$. Vamos então achar uma expressão para $d\omega_3^0$ em função de τ e ν .

Lembre que τ e ν são ortogonais, então

$$\begin{aligned}
(\tau, \nu) &= 0 \Rightarrow (\tau, \nu)_u = 0 \Rightarrow (\tau_u, \nu) = -(\tau, \nu_u) \\
(\tau, \nu) &= 0 \Rightarrow (\tau, \nu)_v = 0 \Rightarrow (\tau_v, \nu) = -(\tau, \nu_v)
\end{aligned}$$

Seja $(e_0, e_1, e_2, e_3) = (\tau, \frac{\partial u}{\lambda}, \frac{\partial v}{\lambda}, \nu)$ um referencial móvel para S.
Assim,

$$\begin{aligned}\omega^1(e_1) &= \frac{1}{\lambda} \omega^1(\partial_u) \Rightarrow \omega^1 = \lambda du \\ \omega^2(e_2) &= \frac{1}{\lambda} \omega^1(\partial_v) \Rightarrow \omega^2 = \lambda dv\end{aligned}$$

Sabemos que $\omega_3^0 = \omega_3^0(e_1)\omega^1 + \omega_3^0(e_2)\omega^2$. Mas,

$$\begin{aligned}\omega_3^0(e_1) &= (\nabla_{e_1} e_0, e_3) = \left(\nabla_{\frac{\partial u}{\lambda}} \tau, \nu \right) = \frac{1}{\lambda} (\nabla_{\partial_u} \tau, \nu) \\ &= \frac{1}{\lambda} (\tau_u, \nu) = \frac{-1}{\lambda} (\tau, \nu_u) \\ \omega_3^0(e_2) &= \frac{1}{\lambda} (\tau_v, \nu) = \frac{-1}{\lambda} (\tau, \nu_v)\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\omega_3^0 &= \frac{-1}{\lambda} (\tau, \nu_u) \omega^1 + \frac{-1}{\lambda} (\tau, \nu_v) \omega^2 \\ &= \frac{-1}{\lambda} (\tau, \nu_u) \lambda du + \frac{-1}{\lambda} (\tau, \nu_v) \lambda dv \\ &= -(\tau, \nu_u) du - (\tau, \nu_v) dv\end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned}d\omega_3^0 &= -(\tau, \nu_u)_v dv \wedge du - (\tau, \nu_v)_u du \wedge dv \\ &= \left[(\tau, \nu_u)_v - (\tau, \nu_v)_u \right] du \wedge dv \\ &= \left[(\tau_v, \nu_u) + (\tau, \nu_{uv}) - (\tau_u, \nu_v) - (\tau, \nu_{uv}) \right] du \wedge dv \\ &= \left[(\tau_v, \nu_u) - (\tau_u, \nu_v) \right] du \wedge dv \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \left[(\tau_v, \nu_u) - (\tau_u, \nu_v) \right] \omega^1 \wedge \omega^2\end{aligned}$$

Como K_N é a única função que satisfaz $d\omega_3^0 = K_N \omega^1 \wedge \omega^2$, então segue que

$$K_N = \frac{1}{\lambda^2} \left[(\tau_v, \nu_u) - (\tau_u, \nu_v) \right] \quad (1.24)$$

Além disso, sabemos que se $w = u + i v$, então

$$\begin{aligned}\partial_w &= \frac{1}{2}(\partial_u - i \partial_v) \\ \partial_{\bar{w}} &= \frac{1}{2}(\partial_u + i \partial_v)\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\partial_u &= \partial_w + \partial_{\bar{w}} \\ \partial_v &= i(\partial_w - \partial_{\bar{w}})\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}(\tau_v, \nu_u) &= i(\tau_w - \tau_{\bar{w}}, \nu_w + \nu_{\bar{w}}) \\ &= i[(\tau_w, \nu_w) + (\tau_w, \nu_{\bar{w}}) - (\tau_{\bar{w}}, \nu_w) - (\tau_{\bar{w}}, \nu_{\bar{w}})] \\ (\tau_u, \nu_v) &= i(\tau_w + \tau_{\bar{w}}, \nu_w - \nu_{\bar{w}}) \\ &= i[(\tau_w, \nu_w) - (\tau_w, \nu_{\bar{w}}) + (\tau_{\bar{w}}, \nu_w) - (\tau_{\bar{w}}, \nu_{\bar{w}})] \\ (\tau_v, \nu_u) - (\tau_u, \nu_v) &= i\left\{[(\tau_w, \nu_w) + (\tau_w, \nu_{\bar{w}}) - (\tau_{\bar{w}}, \nu_w) - (\tau_{\bar{w}}, \nu_{\bar{w}})] - \right. \\ &\quad \left. [(\tau_w, \nu_w) - (\tau_w, \nu_{\bar{w}}) + (\tau_{\bar{w}}, \nu_w) - (\tau_{\bar{w}}, \nu_{\bar{w}})]\right\} \\ &= 2i[(\nu_{\bar{w}}, \tau_w) - (\nu_w, \tau_{\bar{w}})] \\ &= 2i[(\nu_{\bar{w}}, \tau_w) - \overline{(\nu_{\bar{w}}, \tau_w)}] \\ &= 2[-2\Im(\nu_{\bar{w}}, \tau_w)] \\ &= -4\Im(\nu_{\bar{w}}, \tau_w) \\ &= 4\Im(\tau_{\bar{w}}, \nu_w)\end{aligned}$$

Logo,

$$K_N = \frac{-4}{\lambda^2} \Im(\nu_{\bar{w}}, \tau_w) \tag{1.25}$$

$$= \frac{4}{\lambda^2} \Im(\tau_{\bar{w}}, \nu_w) \tag{1.26}$$

E isso mostra o que queríamos.

□

Capítulo 2

Representação de Weierstrass no L^3 e L^4

Muitas vezes, estamos interessados em obter exemplos de superfícies mínimas (e máximas). Um modo de construir tais exemplos é através da Representação de Weierstrass, que liga a teoria das superfícies mínimas à teoria de funções analíticas de uma variável.

2.1 Considerações gerais

Seja $S = f(M)$ uma superfície de tipo espaço no L^3 . Sabemos que um vetor normal à S é de tipo tempo. Além disso, podemos escolhê-lo futuro dirigido, e portanto, se ele for unitário, então ele pertencerá a $H^2 := \{(x, y, z) \in L^3 / -x^2 + y^2 + z^2 = -1 \text{ e } x > 0\}$.

Consideremos $\mathbb{R}^2 = \{(0, y, z) \in L^3\}$ com sua estrutura natural de corpo, ou seja, $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$, onde $(0, a, b) = a + i b$. Assim, seja

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{C} \setminus \{|\zeta| = 1\} &\longrightarrow H^2 \\ \zeta = (0, a, b) = a + ib &\longmapsto (x, y, z), \end{aligned}$$

definida como a seguir.

A equação da reta que passa pelos pontos $(1, 0, 0) \in H^2$ e $(0, a, b) \in \mathbb{C}$ é dada por $(x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(0 - 1, a - 0, b - 0) = (1 - \lambda, \lambda a, \lambda b)$.

Mas, se $(x, y, z) \in H^2$, então

$$\begin{aligned} -x^2 + y^2 + z^2 = -1 &\Rightarrow -(1 - \lambda)^2 + (\lambda a)^2 + (\lambda b)^2 = -1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -1 + 2\lambda - \lambda^2 + \lambda^2 a^2 + \lambda^2 b^2 = -1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda(\lambda a^2 + \lambda b^2 + 2 - \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Se $\lambda = 0$, temos que $(x, y, z) = (1, 0, 0)$, senão, $\lambda = \frac{-2}{a^2+b^2-1} = \frac{-2}{|\zeta|^2-1}$, se $|\zeta| \neq 1$. Para este valor de λ , temos

$$\begin{aligned} x &= 1 - \lambda = 1 - \frac{-2}{|\zeta|^2-1} = \left(\frac{|\zeta|^2+1}{|\zeta|^2-1} \right); \\ y &= \lambda a = \frac{-2a}{a^2+b^2-1} = \frac{-2\Re\zeta}{|\zeta|^2-1}; \\ z &= \lambda b = \frac{-2b}{a^2+b^2-1} = \frac{-2\Im\zeta}{|\zeta|^2-1}. \end{aligned}$$

Note que, se $|\zeta|^2 > 1$ então $x > 0$. E, se $|\zeta|^2 < 1$ então $x < 0$.

Definição 2.1.1 A *projeção estereográfica hiperbólica* σ é dada por

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{C} \setminus \{|\zeta| = 1\} &\longrightarrow H^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -x^2 + y^2 + z^2 = -1\} \\ \zeta = (0, a, b) = a + ib &\longmapsto \begin{cases} \left(-\frac{|\zeta|^2+1}{|\zeta|^2-1}, \frac{-2\Re\zeta}{|\zeta|^2-1}, \frac{-2\Im\zeta}{|\zeta|^2-1} \right) & , |\zeta|^2 < 1 \\ \left(\frac{|\zeta|^2+1}{|\zeta|^2-1}, \frac{2\Re\zeta}{|\zeta|^2-1}, \frac{2\Im\zeta}{|\zeta|^2-1} \right) & , |\zeta|^2 > 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Observação Houve uma inversão de sinais para o caso $|\zeta|^2 < 1$, de modo que $x > 0$, sempre.

Seja $\langle, \rangle$ uma métrica riemanniana sobre M^m , uma variedade diferenciável de dimensão m , e seja ainda ∇ a sua conexão de Levi-Civita.

Definição 2.1.2 Seja $g \in C^\infty(M)$, o *gradiente* de g é o campo de vetores definido como sendo a única solução de $\langle \text{grad } g, X \rangle := dg(X)$, $\forall X \in \mathcal{X}(M)$.

Se $\varepsilon_U = \{e_i\}$ é um referencial móvel definido em U , aberto de M , com $\varepsilon_U^* = \{\omega^i\}$, seu co-referencial dual, temos

$$\text{grad } g = \sum_i \langle \text{grad } g, e_i \rangle e_i = \sum_i dg(e_i) e_i = \sum_i e_i[g] e_i.$$

Se $g_i := dg(e_i)$, temos que $dg = \sum_i g_i \omega^i$ e, $\text{grad } g = \sum_i g_i e_i$, em U .

Definição 2.1.3 Seja $X \in \mathcal{X}(M)$. O *divergente* de X é a função C^∞ definida por $\text{div } X = \text{traço}(X \mapsto \nabla X)$. Portanto, se $(e_1, \dots, e_m)$ é uma base ortonormal de $T_p M$, $\text{div } X(p) = \sum_{i=1}^m (\nabla_{e_i} X, e_i)$.

Além disso, se $\{\omega_j^i\}$ são as 1-formas de conexão de ε_U , e $X = \sum_i X^i e_i$, então

$$\text{div } X = \sum_i \langle \nabla_{e_i} \sum_j X^j e_j, e_i \rangle = \sum_i \sum_j e_i[X^i] + X^j \omega_j^i(e_i) = \sum_{i,j} (dX^i + X^j \omega_j^i)(e_i)$$

Definição 2.1.4 Se $g \in C^\infty(M)$, o *operador de Laplace* é definido por

$$\Delta_M g := \operatorname{div} \operatorname{grad} g$$

Assim, a partir das expressões obtidas para divergente e gradiente, temos que

$$\Delta_M g = \sum_{i,j} \{e_i[e_i[g]] - e_j[g]\omega_i^j(e_i)\} \quad (2.2)$$

Definição 2.1.5 Se $g \in C^\infty(M)$ satisfaz $\Delta_M g \equiv 0$, então g é *harmônica* (em relação à métrica).

Teorema 2.1.6 Se $S = f(M)$ é uma superfície do L^n , B é a segunda forma fundamental de f , H é o vetor curvatura média de S , $f = (f^0, \dots, f^{n-1})$, $\Delta_M f := (\Delta_M f^0, \dots, \Delta_M f^{n-1})$, então $\Delta_M f = 2H$.

Demonstração

Seja $\varepsilon_U = \{e_1, e_2\} = \{e_i\}$ um referencial móvel de M , em U , aberto de M , tal que $f|_U$ é um mergulho. Sejam (ω_i^j) as 1-formas de conexão de ε_U . Deste modo, a partir da equação (2.2) temos que

$$\begin{aligned} \Delta_M f &= \sum_{i,j} \{e_i[e_i[f]] - e_j[f]\omega_i^j(e_i)\} \\ &= \sum_{i,j} \{e_i[f_i] - f_j\omega_i^j(e_i)\} \\ &= \sum_{i,j} \{e_i[f_i^0] - f_j^0\omega_i^j(e_i)\}\partial_0 + \sum_{i,j,k} \{e_i[f_i^k] - f_j^k\omega_i^j(e_i)\}\partial_k \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde temos que $e_i[f] = df(e_i) =: f_i$ e $f = (f^0, f^k)$ para $k = 1 \dots n-1$.

Queremos comparar $\Delta_M f$ com o vetor curvatura média, que é dado por $H(p) = \frac{1}{2}[B(e_1, e_1) + B(e_2, e_2)]$.

Pela proposição (1.3.16), temos que

$$B(e_i, e_i) = \nabla_{e_i}^f f_* e_i - f_*(\nabla_{e_i} e_i). \quad (2.4)$$

Mas, temos que

$$\begin{aligned} f_* e_i &= f_*^0 e_i \partial_0 + \sum_k f_*^k e_i \partial_k \\ &= e_i[f^0]\partial_0 + \sum_k e_i[f^k]\partial_k \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_i}^f f_* e_i &= \nabla_{e_i}^f (e_i[f^0] \partial_0) + \sum_k \nabla_{e_i}^f (e_i[f^k] \partial_k) \\
&= e_i[e_i[f^0]] \partial_0 + e_i[f_0] \nabla_{e_i}^f \partial_0 + \sum_k e_i[e_i[f^k]] \partial_k + \sum_k e_i[f_k] \nabla_{e_i}^f \partial_k \\
&= e_i[e_i[f^0]] \partial_0 + \sum_k e_i[e_i[f^k]] \partial_k
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
f_*(\nabla_{e_i} e_i) &= \sum_j f_*(\omega_i^j(e_i) e_j) = \sum_j \omega_i^j(e_i) f_*(e_j) \\
&= \sum_j \omega_i^j(e_i) \{e_j[f^0] \partial_0 + \sum_k e_j[f^k] \partial_k\} \\
&= \sum_j \omega_i^j(e_i) f_j^0 \partial_0 + \sum_{j,k} \omega_i^j(e_i) f_j^k \partial_k
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Assim, a partir das equações (2.4), (2.5), (2.6), e (2.3) temos

$$\begin{aligned}
2H &= \sum_i B(e_i, e_i) = \sum_i \{\nabla_{e_i}^f f_* e_i - f_*(\nabla_{e_i} e_i)\} \\
&= \sum_i \left\{ e_i[e_i[f^0]] \partial_0 + \sum_k e_i[e_i[f^k]] \partial_k - \sum_j \omega_i^j(e_i) f_j^0 \partial_0 - \sum_{j,k} \omega_i^j(e_i) f_j^k \partial_k \right\} \\
&= \sum_i \left\{ e_i[e_i[f^0]] - \sum_j \omega_i^j(e_i) f_j^0 \right\} \partial_0 + \sum_{i,k} \left\{ e_i[e_i[f^k]] - \sum_j \omega_i^j(e_i) f_j^k \right\} \partial_k \\
&= \sum_i \left\{ e_i[f_i^0] - \sum_j f_j^0 \omega_i^j(e_i) \right\} \partial_0 + \sum_{i,k} \left\{ e_i[f_i^k] - \sum_j f_j^k \omega_i^j(e_i) \right\} \partial_k \\
&= \Delta_M f.
\end{aligned}$$

□

O resultado do teorema acima nos diz que uma superfície $S = f(M)$ de tipo espaço do L^n é mínima (máxima no L^3) se e somente se $\Delta_M f \equiv 0$, ou seja quando cada coordenada de $f = (f^0, f^1, \dots, f^{n-1})$ for uma função harmônica relativamente a $\langle, \rangle = f^*(,)$.

O nosso próximo objetivo é determinar um meio de obtermos expressões para superfícies máximas no L^3 e mínimas no L^4 , usando este fato. Para isso, primeiramente, vamos falar um pouco sobre estrutura holomorfa induzida pela imersão.

Teorema 2.1.7 *Existência de parâmetros isotérmicos (ver [3]).* Sejam U um aberto simplesmente conexo e $f : U \rightarrow L^4$ uma imersão de classe C^k , $k \geq 2$ (ou analítica real). Então existe um difeomorfismo $\varphi : U \rightarrow U$ de classe C^k (ou analítico real) tal que $\tilde{f} = f \circ \varphi$ é uma aplicação conforme.

Demonstração

Para a demonstração deste teorema, ver [22]. □

Seja $S = f(M)$ uma superfície de tipo espaço no L^n , onde M é conexa e orientada. Logo, $f^*(\cdot, \cdot)$ é uma métrica riemanniana sobre M . Como M é orientada, ela induz uma estrutura holomorfa, $\mathcal{H}(M)$, sobre M , determinada pelo atlas de coordenadas isotérmicas positivas (existem pelo teorema 2.1.7), isto é, se $(U, w = u + iv) \in \mathcal{H}(M)$ e $\tilde{f} := f(w) : w(U) \rightarrow L^n$, então $(\tilde{f}_u, \tilde{f}_u)^{\frac{1}{2}} = (\tilde{f}_v, \tilde{f}_v)^{\frac{1}{2}} =: \lambda > 0$, e $(\tilde{f}_u, \tilde{f}_v) = 0$. Portanto, $\mathcal{H}(M) = \{(U, w = u + iv)/U \text{ é um aberto de } M \text{ e } w \text{ é um sistema de coordenadas isotérmico positivo}\}$.

Note que $\mathcal{H}(M)$ torna M uma superfície de Riemann. No que se segue, a menos de menção explícita, sempre que considerarmos a superfície $S = f(M)$, consideraremos M com a estrutura holomorfa acima.

Relativamente a $(U, w = u + iv) \in \mathcal{H}(M)$, temos $\Delta_M = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right)$. Isto é, se $h \in C^\infty(M)$ então $(\Delta_M h)(w^{-1}) = \frac{1}{\lambda^2} \Delta \tilde{h} \circ w^{-1}$, onde $\tilde{h} = h(w)$.

Pondo

$$\begin{aligned}\tilde{h}_w &:= \frac{\partial}{\partial w} \tilde{h} := \frac{1}{2}(\tilde{h}_u - i\tilde{h}_v), \\ \tilde{h}_{\bar{w}} &:= \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \tilde{h} := \frac{1}{2}(\tilde{h}_u + i\tilde{h}_v),\end{aligned}$$

temos

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} = 4 \frac{\partial}{\partial w} \frac{\partial}{\partial \bar{w}} = 4 \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \frac{\partial}{\partial w}.$$

Logo,

$$(\Delta_M h) \circ (w^{-1}) = \frac{1}{\lambda^2} \Delta \tilde{h} = \frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial w} \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \tilde{h} = \frac{4}{\lambda^2} \tilde{h}_{w\bar{w}}.$$

Portanto, $h : M \rightarrow \mathbb{C}$ é harmônica se e somente se $h \circ w^{-1}$ é harmônica (no sentido clássico) em $w(U) \subset \mathbb{C}$.

Observação Lembre ainda que se $h : M \rightarrow \mathbb{C}$, $h = r + is$ é $C^\infty(M)$, então h é holomorfa se e somente se $\tilde{h} = h(w)$ é holomorfa em $w(U)$, para todo $(U, w = u + iv) \in \mathcal{H}(M)$. Mas, $\tilde{h}$ é holomorfa se e somente se $\tilde{h}_{\bar{w}} \equiv 0$, onde $\tilde{h}_{\bar{w}} := r_{\bar{w}} + is_{\bar{w}}$.

Pelo Teorema 2.1.6, temos que

$$2H(w) = (\Delta_M f)(w) = \frac{1}{\lambda^2} \Delta \tilde{f}(w) = \frac{4}{\lambda^2} \tilde{f}_{w\bar{w}}. \quad (2.7)$$

Logo, S é uma superfície mínima (tem vetor curvatura média identicamente nulo) se e somente se $\tilde{f}_w = \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \tilde{f}$ é holomorfa em $w(U)$, para cada $(U, w = u + iv) \in \mathcal{H}(M)$.
Observação Lembremos ainda que se α é uma 1-forma C^∞ em M , então α é holomorfa se e somente se $\alpha =: \tilde{h}dw = (r + is)(du + idv) = (r du - s dv) + i(r dv + s du)$ implica que $\tilde{h}$ é holomorfa em $w(U)$, para todo $(U, w = u + iv) \in \mathcal{H}(M)$.

Assim, no caso em que temos $S = f(M)$ uma superfície de tipo espaço orientada e conexa, para todo $(U, w = u + iv) \in \mathcal{H}(M)$, a 1-forma definida por $\partial f := \tilde{f}_w dw$ é holomorfa, relativamente à estrutura holomorfa induzida pela imersão sobre M , se e somente se S tem vetor curvatura médio nulo.

Observação Sejam $S = f(M)$ uma superfície de tipo espaço do L^n orientada e conexa, $\Sigma(M)$ a estrutura diferenciável de M , $(U, w = u + iv) \in \Sigma(M)$. Seja, ainda, $\mathbb{C}^n$ o complexificado de $\mathbb{R}^n$. Seja $(\cdot, \cdot)^\mathbb{C} : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $(z, w)^\mathbb{C} = (\Re z, \Re w) - (\Im z, \Im w) + i[(\Im z, \Re w) + (\Re z, \Im w)]$. O produto hermitiano $((\cdot, \cdot)) : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ será então definido por $((z, w)) := (z, \bar{w})^\mathbb{C}$.

Assim, $4(\tilde{f}_w, \tilde{f}_w)^\mathbb{C} = (f_u - i f_v, f_u - i f_v)^\mathbb{C} = (f_u, f_u) - (f_v, f_v) - 2i(f_u, f_v)$. Logo, $(\tilde{f}_w, \tilde{f}_w)^\mathbb{C} = 0$ se e somente se $(f_u, f_v) = 0$ e $(f_u, f_u) \equiv (f_v, f_v) =: \lambda^2$, onde $\lambda : w(U) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função C^∞ e tal que $\lambda(w) > 0, \forall w$. Ou seja, $(U, w = u + iv) \in \Sigma(M)$ é parâmetro isotérmico se e somente se $(\tilde{f}_w, \tilde{f}_w)^\mathbb{C} \equiv 0$.

Além disso, se $(U, w = u + iv) \in \Sigma(M)$ é parâmetro isotérmico então $\frac{4}{\lambda^2} \tilde{f}_{w\bar{w}} = 2H(w)$ e $\tilde{f}_w : w(U) \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa se e somente se $H(w) \equiv 0$.

Proposição 2.1.8 *Seja $S = f(M)$ superfície conforme do L^4 (isto é, M com estrutura holomorfa). Assim, $\partial f, \bar{\partial} f$ definidas por: se $(U, w = u + iv) \in \mathcal{H}(M)$, $\partial f := f_w dw$ e $\bar{\partial} f := f_{\bar{w}} d\bar{w}$ são 1-formas diferenciáveis globalmente definidas em M .*

Demonstração

Sejam $(U, w = u + iv) \in \mathcal{H}(M)$ e $(V, z = x + iy) \in \mathcal{H}(M)$ tais que $U \cap V \neq \emptyset$. Assim,

$$\begin{aligned} f_w &= f_z \frac{dz}{dw} \Rightarrow f_w dw = f_z dz \\ f_{\bar{w}} &= f_{\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{d\bar{w}} \Rightarrow f_{\bar{w}} d\bar{w} = f_{\bar{z}} d\bar{z} \end{aligned}$$

□

Definição 2.1.9 *Uma 1-forma $\alpha = g dw$ é holomorfa se g é holomorfa.*

Proposição 2.1.10 *Sejam α e β 1-formas holomorfas em M , não nulas. Então, $\frac{\alpha}{\beta}$ é uma função meromorfa globalmente definida em M .*

Demonstração

Sejam $(U, w = u + i v) \in \mathcal{H}(M)$ e $(V, z = x + i y) \in \mathcal{H}(M)$ tais que $U \cap V \neq \emptyset$. Assim,

$$\alpha = g dw = \tilde{g} dz \text{ e } \beta = h dw = \tilde{h} dz,$$

onde

$$\tilde{g} = g \frac{dw}{dz} \text{ e } \tilde{h} = h \frac{dw}{dz}$$

Logo,

$$\frac{\tilde{g}}{\tilde{h}} = \frac{g \frac{dw}{dz}}{h \frac{dw}{dz}} = \frac{g}{h}$$

□

Definição 2.1.11 γ é um *caminho* em M , se γ é uma curva C^1 por partes.

Definição 2.1.12 Uma *1-forma* α é *fechada* em M se $d\alpha \equiv 0$.

Teorema 2.1.13 Seja α uma 1-forma fechada em M , então $\int_{\gamma} \alpha$ depende somente da classe de homotopia de γ , ou seja, se $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ e $\eta : [0, 1] \rightarrow M$ são duas curvas homotópicas relativamente a $\{0, 1\}$ então $\int_{\gamma} \alpha = \int_{\eta} \alpha$.

Demonstração

Ver [8].

□

Definição 2.1.14 Seja γ caminho fechado de M e α uma 1-forma fechada. Então, o *período de α relativamente à γ* é $P(\alpha, \gamma) := \int_{\gamma} \alpha$. Dizemos que α não tem períodos, se $P(\alpha, \gamma) = 0$, e que α não tem períodos reais, se $\Re P(\alpha, \gamma) = 0$

Observação Se $S = f(M)$ é uma superfície conforme, $(U, w = u + i v) \in \mathcal{H}(M)$ e $\partial f = f_w dw$ então $(\partial f, \partial f)^{\mathbb{C}} \equiv 0$ se $(f_w, f_w)^{\mathbb{C}} \equiv 0$.

Observação Se $h : M \rightarrow \mathbb{C}$ e $(U, w = u + i v) \in \mathcal{H}(M)$ então $dh = h_w dw + h_{\bar{w}} d\bar{w} = h_u du + h_v dv$. Além disso, $d(\partial f) = d(df) = d^2 f \equiv 0$, já que f é holomorfa.

Como ∂f é uma 1-forma fechada, então $\int_{\gamma} \partial f$ só depende da classe de homotopia de γ . Logo, $\int_{\gamma} \partial f = \int_{p_0}^p \partial f$. Além disso, se ∂f não tem períodos reais, então $f(p) = \Re \int_{p_0}^p \partial f + f(p_0)$ está bem definida.

Para obtermos uma expressão para superfícies de tipo espaço no L^4 com vetor curvatura médio nulo, é necessário que $\partial f_w : w(U) \rightarrow \mathbb{C}$ seja holomorfa.

Sejam U um aberto simplesmente conexo de $\mathbb{C}_w$, $w = u + i v$, e $F : U \rightarrow \mathbb{C}^4$ uma função holomorfa não constante. Deste modo, temos que $f := \Re F$, e $f^* := \Im F$ são funções harmônicas.

Se $(F_w, F_w)^{\mathbb{C}} \equiv 0$, como $(F_w, F_w)^{\mathbb{C}} = (2f_w, 2f_w) = (f_u - i f_v, f_u - i f_v)^{\mathbb{C}} = (f_u, f_u) - (f_v, f_v) - 2i(f_u, f_v)$, então $(f_u, f_u) \equiv (f_v, f_v) \equiv \lambda^2$ e $(f_u, f_v) \equiv 0$.

Mas, $((F_w, F_w)) = (F_w, \overline{F_w})^{\mathbb{C}} = (f_u - i f_v, f_u + i f_v)^{\mathbb{C}} = (f_u, f_u) + (f_v, f_v)$. Logo, se $(F_w, F_w)^{\mathbb{C}} \equiv 0$ então $((F_w, F_w)) = (F_w, \overline{F_w})^{\mathbb{C}} = 2\lambda^2$. Se $w = u + i v$ é parâmetro isotérmico para $S = f(U)$, superfície de L^4 , então $(f_u, f_u) = (f_v, f_v) = \lambda^2 > 0$.

Assim,

$$f(w) = \Re \int_{w_0}^w F_w dw + f(w_0) = \Re \int_{w_0}^w \partial F + f(w_0)$$

e

$$f^*(w) = \Im \int_{w_0}^w F_w dw + f^*(w_0) = \Im \int_{w_0}^w \partial F + f^*(w_0).$$

Mas, $F_w = F_u = -i F_v$, e portanto, por um lado,

$$F_w = F_u = f_u + i f_u^* = f_u - i f_v = 2f_w,$$

por outro lado,

$$\begin{aligned} F_w &= -i F_v = -i(f_v + i f_v^*) = -i(-f_u^* + i f_v^*) \\ &= i(f_u^* - i f_v^*) = i2f_w^*. \end{aligned}$$

Logo,

$$f(w) = 2\Re \int_{w_0}^w f_w dw + f(w_0)$$

e, também,

$$\begin{aligned} f^*(w) &= 2\Im i \int_{w_0}^w f_w^* dw + f^*(w_0) \\ &= 2\Re \int_{w_0}^w f_w^* dw + f^*(w_0). \end{aligned}$$

O resultado acima nos diz que, se $S = f(U)$ é uma superfície mínima de L^n (máxima de L^3), então S pode ser representada na forma

$$f(w) = 2\Re \int_{w_0}^w f_w dw + f(w_0).$$

2.2 Representação de Weierstrass no L^4

Teorema 2.2.1 *Sejam M uma variedade diferenciável 2-dimensional conexa e orientada, e $f : M \hookrightarrow L^4$ uma imersão conforme mínima. Então*

1. ∂f é holomorfa;
2. $(\partial f, \partial f)^{\mathbb{C}} \equiv 0$;
3. $(\partial f, \overline{\partial f})^{\mathbb{C}}(p) > 0, \forall p \in M$;
4. Dado $p_0 \in M$

$$f(p) = 2\Re \int_{p_0}^p \partial f + f(p_0).$$

Reciprocamente, se

1. se α é uma 1-forma holomorfa;
2. $(\alpha, \alpha)^{\mathbb{C}} \equiv 0$;
3. $(\alpha, \overline{\alpha})^{\mathbb{C}}(p) > 0, \forall p \in M$;
4. $\Re \int_{\gamma} \alpha = 0$ para todo caminho fechado de M , dado $p_0 \in M$ então

$$f(p) := 2\Re \int_{p_0}^p \alpha + c,$$

com $c \in L^4$, é uma imersão conforme mínima de M em L^4 .

Demonstração

Os três primeiros itens já foram feitos na seção anterior. Falta mostrar que a expressão de $f(p)$ é global.

Seja (M, Π) o recobrimento universal holomorfo de M com sua estrutura holomorfa $\mathcal{H}(M)$. Pelo Teorema de Koebe (ver [8]), M é biholomorfa a $\mathbb{C}$, ou a $\hat{\mathbb{C}}$, ou a D , onde $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, e D é o disco unitário. Mas, se $S = f(M)$ é máxima, então M é biholomorfa a $\mathbb{C}$ ou a D . Ou seja, $\tilde{M} = \mathbb{C}$ ou $\tilde{M} = D$.

Seja $(U, w = u + i v)$ uniformemente coberta por Π , tal que $p_0 \in U$. Seja $\tilde{U}$ uma componente conexa de $\Pi^{-1}(U)$ e $\tilde{p}_0 \in \Pi^{-1}(p_0) \cap \tilde{U}$. Assim, $(\tilde{U}, w \circ \Pi|_{\tilde{U}}) \in \mathcal{H}(\tilde{M})$.

Assim, $\widetilde{f \circ \Pi} = (f \circ \Pi) \circ (w \circ \Pi|_{\tilde{U}})^{-1} = f \circ w^{-1} = \tilde{f}$.

Logo, $(f \circ \Pi)_u(\tilde{q}) = f_u(q)$, $(f \circ \Pi)_v(\tilde{q}) = f_v(q)$, $(f \circ \Pi)_w(\tilde{q}) = f_w(q)$ e $\partial(f \circ \Pi)(\tilde{q}) = \partial f(q)$, para todo $q \in U$ e $\tilde{q} \in \Pi^{-1}(q) \cap \tilde{U}$.

Mas, como $f_{w\bar{w}} \equiv 0$ então $(f \circ \Pi)_{w\bar{w}} \equiv 0$ e $f \circ \Pi$ é harmônica. Logo, $f \circ \Pi$ é uma imersão conforme mínima de $\tilde{M}$ e $(f \circ \Pi)(\tilde{M}) = f(M)$.

Dado $p \in M$ e γ caminho de M ligando p_0 a p , seja $\tilde{\gamma}$ levantamento de γ de $\tilde{p}_0$ a $\tilde{p}$. Então $\tilde{p} \in \Pi^{-1}(p)$.

Como $f \circ \Pi$ é harmônica e $\tilde{M}$ é simplesmente conexo, existe $\widehat{f \circ \Pi}$ harmônica tal que $F = f \circ \Pi + i \widehat{f \circ \Pi}$ é holomorfa. Então $F(\tilde{p}) - F(\tilde{p}_0) = \int_{\tilde{\gamma}} \partial F = 2 \int_{\tilde{\gamma}} \partial(f \circ \Pi)$.

Mas, $\int_{\tilde{\gamma}} \partial(f \circ \Pi) = \int_{\gamma} \partial f$. Então, $(f \circ \Pi)(\tilde{p}) = 2\Re \int_{\tilde{\gamma}} \partial(f \circ \Pi) + f \circ \Pi(\tilde{p}_0) = 2\Re \int_{\gamma} \partial f + f \circ \Pi(\tilde{p}_0)$. Isto é, $f(p) = 2\Re \int_{\gamma} \partial f + f(p_0)$.

Se β é outro caminho de M ligando p_0 a p , então $\Re \int_{\gamma} \partial f = \Re \int_{\beta} \partial f$. Logo, $f(p) = 2\Re \int_{p_0}^p \partial f = f(p_0)$.

Reciprocamente, seja $f(p) := 2\Re \int_p^q \alpha + c$. Então, $f(p_0) = c$.

Dado $p \in M$, sejam $(U, w = u + i v) \in \mathcal{H}(M)$, com U simplesmente conexo e $p \in U$. Então, $g(q) := f(p) + 2 \int_p^q \alpha$, com $q \in U$, é holomorfa e $\partial g \equiv \alpha$ ao longo de U . Mas, $\Re g(q) = 2\Re \int_p^q \alpha + f(p) = 2\Re \int_p^q \alpha + 2\Re \int_{p_0}^p \alpha + f(p_0) = 2\Re \int_{p_0}^q \alpha + f(p_0) = f(q)$. Então, $f|_U \equiv \Re g|_U$.

Logo, f é harmônica em U . Também, $\partial f|_U \equiv \partial g|_U \equiv \alpha$. Logo, $(\partial f, \partial f)^{\mathbb{C}}|_U \equiv 0$, $(\partial f, \partial \bar{f})^{\mathbb{C}}|_U$ é sempre positiva. Então, f é uma imersão conforme mínima de M . $\square$

Seja então $S = f(M)$ uma superfície conforme do L^4 . S é mínima se e somente se ∂f é uma 1-forma holomorfa. Pondo $\partial f = \phi$ temos que $(\phi, \phi)^{\mathbb{C}} = (\partial f, \partial f)^{\mathbb{C}} = 0$. Se $\phi := (\phi^0, \phi^1, \phi^2, \phi^3)$ então

$$\begin{aligned} (\phi, \phi)^{\mathbb{C}} &= -(\phi^0)^2 + (\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 + (\phi^3)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [(\phi^3)^2 - (\phi^0)^2] + [(\phi^1)^2 - (\phi^2)^2] = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\phi^3 - \phi^0)(\phi^3 + \phi^0) + (\phi^1 - i \phi^2)(\phi^1 + i \phi^2) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\phi^0 - \phi^3)(\phi^0 + \phi^3) = (\phi^1 - i \phi^2)(\phi^1 + i \phi^2) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Se $\phi^1 - i \phi^2 \neq 0$

$$\begin{aligned} (\phi^0 - \phi^3)(\phi^0 + \phi^3) &= (\phi^1 - i \phi^2)(\phi^1 + i \phi^2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\phi^0 - \phi^3}{\phi^1 - i \phi^2} \frac{\phi^0 + \phi^3}{\phi^1 + i \phi^2} = \frac{\phi^1 + i \phi^2}{\phi^1 - i \phi^2} \end{aligned}$$

Sejam, então, $a := \frac{\phi^0 + \phi^3}{\phi^1 - i \phi^2}$ e $b := \frac{\phi^0 - \phi^3}{\phi^1 - i \phi^2}$. Deste modo, temos que se $\phi^1 - i \phi^2 \neq 0$

$$\begin{aligned} a + b &= \frac{\phi^0 + \phi^3}{\phi^1 - i \phi^2} + \frac{\phi^0 - \phi^3}{\phi^1 - i \phi^2} = \frac{2\phi^0}{\phi^1 - i \phi^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \phi^0 = \frac{\phi^1 - i \phi^2}{2}(a + b); \\ a - b &= \frac{\phi^0 + \phi^3}{\phi^1 - i \phi^2} - \frac{\phi^0 - \phi^3}{\phi^1 - i \phi^2} = \frac{2\phi^3}{\phi^1 - i \phi^2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \phi^3 = \frac{\phi^1 - i \phi^2}{2}(a - b); \\
a b &= \frac{\phi^0 + \phi^3}{\phi^1 - i \phi^2} \frac{\phi^0 - \phi^3}{\phi^1 - i \phi^2} = \frac{\phi^1 + i \phi^2}{\phi^1 - i \phi^2} \Rightarrow \\
1 + a b &= \frac{\phi^1 - i \phi^2}{\phi^1 - i \phi^2} + \frac{\phi^1 + i \phi^2}{\phi^1 - i \phi^2} = \frac{2\phi^1}{\phi^1 - i \phi^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \phi^1 = \frac{\phi^1 - i \phi^2}{2}(1 + a b); \\
1 - a b &= \frac{\phi^1 - i \phi^2}{\phi^1 - i \phi^2} - \frac{\phi^1 + i \phi^2}{\phi^1 - i \phi^2} = \frac{-2i \phi^2}{\phi^1 - i \phi^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \phi^2 = \frac{\phi^1 - i \phi^2}{2}i (1 - a b).
\end{aligned}$$

Assim, se $\eta = \phi^1 - i \phi^2$,

$$\phi = \frac{\eta}{2} \left((a + b), (1 + a b), i (1 - a b), (a - b) \right). \quad (2.8)$$

Para podermos integrar os termos de $\phi = \partial f$, precisamos que cada uma das coordenadas seja uma função holomorfa, ou seja, precisamos que se $\eta = c dw$, a e b sejam funções meromorfas, e que os produtos ηa e ηb sejam funções holomorfas.

Podemos então enunciar o seguinte teorema:

Teorema 2.2.2 *Sejam M uma superfície de Riemann, $a, b : M \rightarrow \mathbb{C}$ funções meromorfas e η uma 1-forma holomorfa de M tal que $\eta(a + b, 1 + a b, i (1 - a b), a - b)$ é uma 1-forma com valores em $\mathbb{C}^4$ holomorfa sem períodos reais e $\left(\eta(a + b, 1 + a b, i (1 - a b), a - b), \overline{\eta(a + b, 1 + a b, i (1 - a b), a - b)} \right)$ nunca se anula. Então*

$$f(p) = 2\Re \int_{p_0}^p \frac{\eta}{2} \left(a + b, 1 + a b, i (1 - a b), a - b \right) + d, \quad (2.9)$$

onde $d \in L^4$, é uma imersão conforme mínima de M em L^4 tal que $\partial f = \frac{\eta}{2}(a + b, 1 + a b, i (1 - a b), a - b)$ e $f(p_0) = d$. Reciprocamente, se $S = f(M)$ é uma imersão conforme mínima do L^4 , se ∂f não tem períodos reais, e se $a = \frac{\partial f^0 + \partial f^3}{\partial f^1 - i \partial f^2}$, $b := \frac{\partial f^0 - \partial f^3}{\partial f^1 - i \partial f^2}$ e $\eta = \partial f^1 - i \partial f^2 \neq 0$, então

$$f(p) = 2\Re \int_{p_0}^p \frac{\eta}{2} \left(a + b, 1 + a b, i (1 - a b), a - b \right) + f(p_0).$$

Definição 2.2.3 *Se S está dada pela expressão (2.9), então dizemos que S está dada pela representação de Weierstrass de parâmetros a , b , e η*

Observação Desenvolvemos uma expressão para representação de Weierstrass de L^4 para o caso em que $\phi^1 - i \phi^2 \neq 0$. Ou seja, para o caso em que $\partial f^1 - i \partial f^2 \neq 0$. Vejamos, então o caso em que $\partial f^1 - i \partial f^2 \equiv 0$.

Se $\partial f^1 - i \partial f^2 \equiv 0$ então $\partial f^1 + i \partial f^2 \neq 0$. Isto porque

$$\begin{cases} \partial f^1(p) - i \partial f^2(p) = 0 \\ \partial f^1(p) + i \partial f^2(p) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} f_u^1(p) = 0 \\ f_v^1(p) = 0 \end{cases} \implies \lambda(p) = 0.$$

Vimos que $(\partial f, \partial f)^{\mathbb{C}} \equiv 0$ implica $(\partial f^3 - \partial f^0)(\partial f^3 + \partial f^0) + (\partial f^1 - i \partial f^2)(\partial f^1 + i \partial f^2) \equiv 0$. Logo, se $\partial f^1 - i \partial f^2 \equiv 0$ então $\partial f^3 - \partial f^0 \equiv 0$ ou $\partial f^3 + \partial f^0 \equiv 0$. Ou seja, $\partial f^3 \equiv \pm \partial f^0$. Logo, $f^3 = \pm f^0 + \text{constante}$.

Vamos supor que $\partial f^3 \equiv \partial f^0$.

Sejam $a := \frac{\partial f^3 + \partial f^0}{\partial f^1 + i \partial f^2}$ e $\eta = \partial f^1 + i \partial f^2$. Assim,

$$\begin{aligned} \eta a &= \partial f^3 + \partial f^0 = \partial f^0 + \partial f^0 = 2\partial f^0 \\ \Rightarrow \partial f^0 &= \frac{1}{2}\eta a \\ \Rightarrow \partial f^3 &= \frac{1}{2}\eta a \\ \eta &= \partial f^1 + i \partial f^2 = i \partial f^2 + i \partial f^2 = 2i \partial f^2 \\ \Rightarrow \partial f^2 &= \frac{-i}{2}\eta \\ \Rightarrow \partial f^1 &= \frac{1}{2}\eta \end{aligned}$$

Logo, $\partial f = (\frac{\eta a}{2}, \frac{\eta}{2}, \frac{-i\eta}{2}, \frac{\eta a}{2})$. Note que, esta expressão é equivalente à expressão da representação de Weierstrass para L^4 no caso em que $b = 0$.

Observação Pela observação acima, temos que o fato de $S = f(M)$ ser uma superfície implica que ∂f sempre admite uma expressão da forma $\partial f = \frac{\eta}{2}(a + b, 1 + a b, i(1 - a b), a - b)$, como no Teorema 2.2.2.

Note que, para a representação de Weierstrass de L^4 , se $\eta = c dw$ temos

$$\begin{aligned} (\phi, \bar{\phi})^{\mathbb{C}} &= \frac{|c|^2}{4} [-(a + b)(\bar{a} + \bar{b}) + (1 + a b)(1 + \bar{a} \bar{b}) + \\ &\quad + i(1 - a b)(-i)(1 - \bar{a} \bar{b}) + (a - b)(\bar{a} - \bar{b})] \\ &= \frac{|c|^2}{4} [-2a \bar{b} - 2b \bar{a} + 2 + 2|a|^2|b|^2] \\ &= \frac{|c|^2}{2} [a\bar{a}b\bar{b} - a\bar{b} - b\bar{a} + 1] \\ &= \frac{|c|^2}{2} [a\bar{b}(\bar{a}b - 1) - (\bar{a}b - 1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{|c|^2}{2}(a\bar{b} - 1)(\bar{a}b - 1) \\
&= \frac{|c|^2}{2}(a\bar{b} - 1)\overline{(a\bar{b} - 1)} \\
&= \frac{|c|^2}{2}|a\bar{b} - 1|^2
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Assim, se $a\bar{b} \neq 1$ então $(\phi, \bar{\phi})^{\mathbb{C}} > 0$.

Mas, $4(\phi, \bar{\phi})^{\mathbb{C}} = 2\lambda^2$, logo $\lambda^2 = |c|^2|a\bar{b} - 1|^2 = |\eta|^2|a\bar{b} - 1|^2$.

Corolário 2.2.4 *Nas mesmas condições do Teorema 2.2.2, temos que se $b = a$, a expressão (2.9), é dada por*

$$f(w) = 2\Re \int_{p_o}^p \eta \left(a, \frac{1}{2}(1 + a^2), \frac{1}{2}i(1 - a^2), 0 \right)$$

E, a imagem de f está em $L^3 \subset L^4$. Assim, obtemos a representação de Weierstrass para o $L^3 \subset L^4$.

Por outro lado, se tivermos $b = -a$, na expressão (2.9), temos

$$f(w) = 2\Re \int_{p_o}^p \eta \left(0, \frac{1}{2}(1 - a^2), \frac{1}{2}i(1 + a^2), a \right)$$

Neste caso a imagem de f está em $\mathbb{R}^3 \subset L^4$, e temos a representação de Weierstrass para o $\mathbb{R}^3$.

2.2.1 Representação de Weierstrass de L^3

Como $L^3 \subset L^4$, podemos partir da representação de Weierstrass de L^4 e obter a representação de Weierstrass de L^3 . Para isto, basta tomarmos $a = b$. E assim, temos

$$f(p) = 2\Re \int_{p_o}^p \eta \left(a, \frac{1}{2}(1 + a^2), \frac{1}{2}i(1 - a^2), 0 \right)$$

e o teorema para superfícies com curvatura média nula em L^3 é

Teorema 2.2.5 *Sejam M uma superfície de Riemann, $a : M \rightarrow \mathbb{C}$ função meromorfa e η uma 1-forma holomorfa de M tal que $\eta(2a, 1 + a^2, i(1 - a^2))$ é uma 1-forma com valores em $\mathbb{C}^3$ holomorfa sem períodos reais e $\left(\eta(2a, 1 + a^2, i(1 - a^2)), \overline{\eta(2a, 1 + a^2, i(1 - a^2))} \right)$ nunca se anula. Então*

$$f(p) = 2\Re \int_{p_o}^p \frac{\eta}{2} \left(2a, 1 + a^2, i(1 - a^2) \right) + d,$$

onde $d \in L^3$, é uma imersão conforme mínima de M em L^3 tal que $\partial f = \frac{\eta}{2}(2a, 1 + a^2, i(1 - a^2))$ e $f(p_0) = d$. Reciprocamente, se $S = f(M)$ é uma imersão conforme mínima do L^3 , se ∂f não tem períodos reais, e se $a = \frac{\partial f^0}{\partial f^1 - i \partial f^2}$ e $\eta = \partial f^1 - i \partial f^2 \neq 0$, então

$$f(p) = 2\Re \int_{p_0}^p \frac{\eta}{2} (2a, 1 + a^2, i(1 - a^2)) + f(p_0).$$

Definição 2.2.6 A representação acima é a **Representação de Weierstrass de 1º tipo** para o L^3 .

Note que, neste caso, $\lambda^2 = |\eta|^2(1 - |a|^2)^2$.

Um importante resultado da representação acima é que o vetor unitário normal τ , que é futuro dirigido, é igual à composta da projeção estereográfica hiperbólica 2.1 com a função a .

Teorema 2.2.7 Seja $S = f(M)$ uma superfície máxima de $L^3 \subset L^4$ com parâmetros de Weierstrass $a(z)$ e η . Se τ é a sua normal unitária (temporal) futuro dirigida, $(U, z = u + i v) \in \mathcal{H}(M)$ e σ é a projeção estereográfica hiperbólica, então

$$\sigma(a(z)) = \tau = \begin{cases} \frac{f_u \boxtimes f_v}{\|f_u \boxtimes f_v\|}, & \text{se } |a| > 1 \\ -\frac{f_u \boxtimes f_v}{\|f_u \boxtimes f_v\|}, & \text{se } |a| < 1 \end{cases} \quad (2.11)$$

Demonstração

Como $\frac{\partial f}{\partial z}(z) = \frac{1}{2}(f_u - i f_v)(u, v)$ e $\partial f = \frac{\partial f}{\partial z}(z)dz = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \phi$ então $f_u - i f_v = 2\phi \implies f_u = 2\Re\phi$ e $f_v = -2\Im\phi$. Assim,

$$\begin{aligned} N &:= f_u \boxtimes f_v = \begin{vmatrix} \partial_0 & -\partial_1 & -\partial_2 \\ 2\Re\phi_0 & 2\Re\phi_1 & 2\Re\phi_2 \\ -2\Im\phi_0 & -2\Im\phi_1 & -2\Im\phi_2 \end{vmatrix} \\ &= 4 \begin{vmatrix} -e_0 & e_1 & e_2 \\ \Re\phi_0 & \Re\phi_1 & \Re\phi_2 \\ \Im\phi_0 & \Im\phi_1 & \Im\phi_2 \end{vmatrix} \\ &= 4(\Re\phi_2\Im\phi_1 - \Re\phi_1\Im\phi_2, \Re\phi_2\Im\phi_0 - \Re\phi_0\Im\phi_2, \\ &\quad \Re\phi_0\Im\phi_1 - \Re\phi_1\Im\phi_0) \\ &= -4(\Im\phi_2\overline{\phi_1}, \Im\phi_2\overline{\phi_0}, \Im\phi_0\overline{\phi_1}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Substituindo $\phi_0 = \eta a$, $\phi_1 = \frac{1}{2}\eta(1 + a^2)$, e $\phi_2 = \frac{i}{2}\eta(1 - a^2)$, e se $\eta = c dz$ obteremos

$$\phi_2\overline{\phi_1} = \left(\frac{i}{2}c(1 - a^2)\right) \overline{\frac{1}{2}c(1 + a^2)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{2}c(1-a^2)\frac{1}{2}\bar{c}(1+\bar{a}^2) \\
&= \frac{i|c|^2}{4}(1-a^2)(1+\bar{a}^2) \\
&= \frac{i|c|^2}{4}(1+\bar{a}^2-a^2-|a|^4) \\
&= \frac{i|c|^2}{4}(1-|a|^4-4i\Re a\Im a) \\
\Rightarrow \Im\phi_2\bar{\phi}_1 &= \frac{|c|^2}{4}(1-|a|^4); \tag{2.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_2\bar{\phi}_0 &= \left(\frac{i}{2}c(1-a^2)\right)\overline{(c\ a)} \\
&= \frac{i}{2}c(1-a^2)\bar{c}\bar{a} \\
&= \frac{i}{2}|c|^2\bar{a}(1-a^2) \\
&= \frac{i}{2}|c|^2(\bar{a}-a|a|^2) \\
&= \frac{i}{2}|c|^2[\Re a - \Re a|a|^2 + i(-\Im a - \Im a|a|^2)] \\
\Rightarrow \Im\phi_2\bar{\phi}_0 &= \frac{|c|^2}{2}\Re a(1-|a|^2); \tag{2.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_0\bar{\phi}_1 &= \overline{(c\ a)\frac{1}{2}c(1+a^2)} \\
&= \overline{c\ a}\frac{1}{2}\bar{c}(1+\bar{a}^2) \\
&= \frac{|c|^2}{2}(a+|a|^2\bar{a}) \\
&= \frac{|c|^2}{2}[\Re a + i\Im a + |a|^2(\Re a - i\Im a)] \\
\Rightarrow \Im\phi_0\bar{\phi}_1 &= \frac{|c|^2}{2}\Im a(1-|a|^2). \tag{2.15}
\end{aligned}$$

Substituindo as expressões (2.13), (2.14) e (2.15), em (2.12), temos que

$$\begin{aligned}
N &= -4\left(\frac{|c|^2}{4}(1-|a|^4), \frac{|c|^2}{2}\Re a(1-|a|^2), \frac{|c|^2}{2}\Im a(1-|a|^2)\right) \\
&= -|c|^2(1-|a|^2)((1+|a|^2), 2\Re a, 2\Im a). \tag{2.16}
\end{aligned}$$

Com isto,

$$(N, N) = \|N\|^2 = |c|^4(1-|a|^2)^2(4(\Re a)^2 + 4(\Im a)^2 - (1+|a|^2)^2)$$

$$\begin{aligned}
&= |c|^4(1 - |a|^2)^2(4|a|^2 - 1 - 2|a|^2 - |a|^4) \\
&= -|c|^4(1 - |a|^2)^4.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{f_u \boxtimes f_v}{\|f_u \boxtimes f_v\|} &= \frac{-|c|^2(1 - |a|^2)}{|c|^2(1 - |a|^2)^2} ((1 + |a|^2), 2\Re a, 2\Im a) \\
&= \left(\frac{1 + |a|^2}{|a|^2 - 1}, \frac{2\Re a}{|a|^2 - 1}, \frac{2\Im a}{|a|^2 - 1} \right).
\end{aligned}$$

Note que, se $|a| > 1$ então $\frac{1+|a|^2}{|a|^2-1} > 0$, e portanto, $\frac{f_u \boxtimes f_v}{\|f_u \boxtimes f_v\|}$ é futuro dirigido, e $\tau = \frac{f_u \boxtimes f_v}{\|f_u \boxtimes f_v\|} = \sigma(a)$. Mas, se $|a| < 1$ então $\frac{1+|a|^2}{|a|^2-1} < 0$, e portanto, $\frac{f_u \boxtimes f_v}{\|f_u \boxtimes f_v\|}$ é passado dirigido, e o vetor unitário normal que é futuro dirigido é

$$\tau = -\frac{f_u \boxtimes f_v}{\|f_u \boxtimes f_v\|} = \left(-\frac{1 + |a|^2}{|a|^2 - 1}, \frac{2\Re a}{|a|^2 - 1}, \frac{2\Im a}{|a|^2 - 1} \right) = \sigma(a).$$

De qualquer modo, se τ é o vetor unitário normal (temporal) futuro dirigido, então

$$\tau = \sigma(a). \tag{2.18}$$

□

Observação Se $S = f(M)$ é uma superfície máxima do $L^3 \subset L^4$ então o vetor normal espacial de S é $\nu = \boxtimes(\partial_0, f_u, f_v) = (0, 0, 0, 1)$, constante.

Chamemos, de acordo com o artigo de O. Kobayashi [12], a representação de Weierstrass obtida pela mudança de variável nos parâmetros de Weierstrass $\eta = \frac{-\Gamma(1+A)^2}{2}$ e $a = \frac{1-A}{A+1}$, de representação de Weierstrass de segundo tipo.

Isto é motivado pela mudança de variável na integral de linha dada por $w = \frac{1-z}{1+z}$, na representação de Weierstrass de primeiro tipo.

Neste caso, se $\eta = c(w)dw$

$$\begin{aligned}
f(p) &= 2 \int_{p_0}^p c(w) \left(a(w), \frac{1}{2}(1 + a^2(w)), \frac{i}{2}(1 - a^2(w)) \right) dw \\
&= 2 \int_{p_0}^p c(w(z)) \left(a(w(z)), \frac{1}{2}(1 + a^2(w(z))), \frac{i}{2}(1 - a^2(w(z))) \right) \frac{dz}{dw} dw.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
w &= \frac{1-z}{1+z} \Rightarrow \\
\frac{dw}{dz} &= \frac{-1(z+1) - (1-z)1}{(z+1)^2} = \frac{-2}{(z+1)^2} \Rightarrow \\
\frac{dz}{dw} &= \frac{-(z+1)^2}{2}
\end{aligned}$$

Para a mudança no par de Weierstrass dada por $\eta = \frac{-\Gamma(1+A)^2}{2}$ e $a = \frac{1-A}{A+1}$ temos, para cada coordenada

$$\begin{aligned}\eta a &= -\frac{\Gamma(1+A)^2}{2} \frac{1-A}{A+1} \\ &= \frac{\Gamma(A^2-1)}{2}; \\ \frac{1}{2}\eta(1+a(\zeta)^2) &= \frac{1-\Gamma(1+A)^2}{2} \left(1 + \left(\frac{1-A}{A+1}\right)^2\right) \\ &= \frac{-\Gamma(1+A^2)}{2}; \\ \frac{i}{2}\eta(1-a(\zeta)^2) &= \frac{i-\Gamma(1+A)^2}{2} \left(1 - \left(\frac{1-A}{A+1}\right)^2\right) \\ &= -i\Gamma A.\end{aligned}$$

Definição 2.2.8 *A Representação de Weierstrass de 2º tipo é dada por*

$$\Psi(z) := 2\Re \int \Gamma \left(\frac{(A^2-1)}{2}, \frac{-(1+A^2)}{2}, -i A \right). \quad (2.19)$$

Note que, com esta definição, e com a equação (2.18), temos que a aplicação normal de Gauss para Ψ é dada por $U_\Psi = \sigma(a(z)) = \sigma\left(\frac{1-A(z)}{A(z)+1}\right)$, onde σ é a projeção estereográfica dada pela expressão (2.1).

2.3 Expressões para as normais τ e ν

Na seção 1.3.1 obtivemos expressões para os vetores normais temporal e espacial para uma superfície de L^4 . Sabemos também que se uma superfície de L^4 tem vetor curvatura média nulo, então tal superfície pode ser expressa pela representação de Weierstrass, a partir dos parâmetros $a(z)$, $b(z)$ e $\eta = c(z)dz$. Assim, podemos obter expressões para τ e ν , a partir de $a(z)$, $b(z)$ e $c(z)$.

Teorema 2.3.1 *Seja $S = f(M)$ uma superfície mínima de L^4 , que na forma de representação de Weierstrass é obtida através de funções meromorfas $a(z)$, $b(z)$ e de uma 1-forma holomorfa $\eta = c(z)dz$, onde $(U, z = u + i v) \in \mathcal{H}(M)$. Sejam τ e ν os vetores*

normais temporal e espacial unitários de S , respectivamente. Então

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{1}{|1 - a\bar{b}|\sqrt{(1 + |a|^2)(1 + |b|^2)}} \left[(1 + |a|^2)(1 + |b|^2), (1 + |b|^2)\Re(a) + (1 + |a|^2)\Re(b), \right. \\ &\quad \left. (1 + |b|^2)\Im(a) + (1 + |a|^2)\Im(b), |a|^2 - |b|^2 \right] \\ \nu &= \frac{1}{|1 - a\bar{b}|\sqrt{(1 + |a|^2)(1 + |b|^2)}} \left[0, (1 + |b|^2)\Re(a) - (1 + |a|^2)\Re(b), \right. \\ &\quad \left. (1 + |b|^2)\Im(a) - (1 + |a|^2)\Im(b), |a|^2|b|^2 - 1 \right]\end{aligned}$$

Demonstração

Sabemos que, se $w = u + i v$, então $2f_w = (f_u - i f_v)$ e $2f_{\bar{w}} = (f_u + i f_v)$. Logo, $f_u = (f_w + f_{\bar{w}})$ e $f_v = i(f_w - f_{\bar{w}})$. Além disso, também temos que $f_{\bar{w}} = \overline{f_w}$.

Pelo Teorema 2.2.2 temos que existem funções meromorfas $a(z)$, $b(z)$ e uma 1-forma holomorfa $\eta = c(z)dz$ tal que $f(p) = 2\Re \int_{p_0}^p \frac{\eta}{2} (a + b, 1 + a\bar{b}, i(1 - a\bar{b}), a - b)$.

Se $\eta = c dw$ então

$$\begin{aligned}f_w &= \left(\frac{c}{2}(a + b), \frac{c}{2}(1 + a\bar{b}), \frac{c}{2}i(1 - a\bar{b}), \frac{c}{2}(a - b) \right) \\ f_{\bar{w}} &= \overline{f_w} = \left(\frac{\bar{c}}{2}(\bar{a} + \bar{b}), \frac{\bar{c}}{2}(1 + \bar{a}\bar{b}), \frac{\bar{c}}{2}i(1 - \bar{a}\bar{b}), \frac{\bar{c}}{2}(\bar{a} - \bar{b}) \right) \\ f_u &= f_w + f_{\bar{w}} = \left(\frac{c}{2}(a + b) + \frac{\bar{c}}{2}(\bar{a} + \bar{b}), \frac{c}{2}(1 + a\bar{b}) + \frac{\bar{c}}{2}(1 + \bar{a}\bar{b}), \right. \\ &\quad \left. \frac{c}{2}i(1 - a\bar{b}) - \frac{\bar{c}}{2}i(1 - \bar{a}\bar{b}), \frac{c}{2}(a - b) + \frac{\bar{c}}{2}(\bar{a} - \bar{b}) \right) \\ f_v &= i(f_w - f_{\bar{w}}) = i \left(\frac{c}{2}(a + b) - \frac{\bar{c}}{2}(\bar{a} + \bar{b}), \frac{c}{2}(1 + a\bar{b}) - \frac{\bar{c}}{2}(1 + \bar{a}\bar{b}), \right. \\ &\quad \left. \frac{c}{2}i(1 - a\bar{b}) + \frac{\bar{c}}{2}i(1 - \bar{a}\bar{b}), \frac{c}{2}(a - b) - \frac{\bar{c}}{2}(\bar{a} - \bar{b}) \right)\end{aligned}$$

Por definição, $\tilde{\nu} = \boxtimes(\partial_0, f_u, f_v)$. Utilizando a equação (1.3), temos que

$$\begin{aligned}\tilde{\nu} &= \left(\begin{vmatrix} 0 & f_u^1 & f_v^1 \\ 0 & f_u^2 & f_v^2 \\ 0 & f_u^3 & f_v^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & f_u^0 & f_v^0 \\ 0 & f_u^2 & f_v^2 \\ 0 & f_u^3 & f_v^3 \end{vmatrix}, \right. \\ &\quad \left. - \begin{vmatrix} 1 & f_u^0 & f_v^0 \\ 0 & f_u^1 & f_v^1 \\ 0 & f_u^3 & f_v^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & f_u^0 & f_v^0 \\ 0 & f_u^1 & f_v^1 \\ 0 & f_u^2 & f_v^2 \end{vmatrix} \right) =: (\tilde{\nu}_0, \tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2, \tilde{\nu}_3)\end{aligned}$$

É claro que $\tilde{\nu}_0 = 0$. Vamos calcular as outras três componentes.

$$\tilde{\nu}_1 := \begin{vmatrix} 1 & f_u^0 & f_v^0 \\ 0 & f_u^2 & f_v^2 \\ 0 & f_u^3 & f_v^3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 1 & \frac{c}{2}(a+b) + \frac{\bar{c}}{2}(\bar{a} + \bar{b}) & i\left(\frac{c}{2}(a+b) - \frac{\bar{c}}{2}(\bar{a} + \bar{b})\right) \\ 0 & \frac{c}{2}i(1-ab) - \frac{\bar{c}}{2}i(1-\bar{a}\bar{b}) & i\left(\frac{c}{2}i(1-ab) + \frac{\bar{c}}{2}i(1-\bar{a}\bar{b})\right) \\ 0 & \frac{c}{2}(a-b) + \frac{\bar{c}}{2}(\bar{a} - \bar{b}) & i\left(\frac{c}{2}(a-b) - \frac{\bar{c}}{2}(\bar{a} - \bar{b})\right) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \frac{c}{2}i(1-ab) - \frac{\bar{c}}{2}i(1-\bar{a}\bar{b}) & i\left(\frac{c}{2}i(1-ab) + \frac{\bar{c}}{2}i(1-\bar{a}\bar{b})\right) \\ \frac{c}{2}(a-b) + \frac{\bar{c}}{2}(\bar{a} - \bar{b}) & i\left(\frac{c}{2}(a-b) - \frac{\bar{c}}{2}(\bar{a} - \bar{b})\right) \end{vmatrix} \\
&= \frac{-1}{4} \left(c(1-ab) - \bar{c}(1-\bar{a}\bar{b}) \right) \left(c(a-b) - \bar{c}(\bar{a} - \bar{b}) \right) + \\
&\quad \frac{1}{4} \left(c(1-ab) + \bar{c}(1-\bar{a}\bar{b}) \right) \left(c(a-b) + \bar{c}(\bar{a} - \bar{b}) \right) \\
&= \frac{1}{4} \left[2|c|^2(1-ab)(\bar{a} - \bar{b}) + 2|c|^2(1-\bar{a}\bar{b})(a-b) \right] \\
&= \frac{|c|^2}{2} \left[\bar{a} - \bar{b} - |a|^2b + a|b|^2 + a - b - |a|^2\bar{b} + \bar{a}|b|^2 \right] \\
&= \frac{|c|^2}{2} \left[2\Re ea - 2\Re eb - |a|^2(2\Re eb) + |b|^2(\Re ea) \right] \\
&= |c|^2 \left[\Re ea(1 + |b|^2) - \Re eb(1 + |a|^2) \right] \\
\tilde{\nu}_2 &= - \begin{vmatrix} 1 & f_u^0 & f_v^0 \\ 0 & f_u^1 & f_v^1 \\ 0 & f_u^3 & f_v^3 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} 1 & \frac{c}{2}(a+b) + \frac{\bar{c}}{2}(\bar{a} + \bar{b}) & i\left(\frac{c}{2}(a+b) - \frac{\bar{c}}{2}(\bar{a} + \bar{b})\right) \\ 0 & \frac{c}{2}(1+ab) + \frac{\bar{c}}{2}(1+\bar{a}\bar{b}) & i\left(\frac{c}{2}(1+ab) - \frac{\bar{c}}{2}(1+\bar{a}\bar{b})\right) \\ 0 & \frac{c}{2}(a-b) + \frac{\bar{c}}{2}(\bar{a} - \bar{b}) & i\left(\frac{c}{2}(a-b) - \frac{\bar{c}}{2}(\bar{a} - \bar{b})\right) \end{vmatrix} \\
&= \frac{-i}{4} \left\{ \left[c(1+ab) + \bar{c}(1+\bar{a}\bar{b}) \right] \left[c(a-b) - \bar{c}(\bar{a} - \bar{b}) \right] - \right. \\
&\quad \left. \left[c(1+ab) - \bar{c}(1+\bar{a}\bar{b}) \right] \left[c(a-b) + \bar{c}(\bar{a} - \bar{b}) \right] \right\} \\
&= \frac{-i}{4} \left[-2|c|^2(1+ab)(\bar{a} - \bar{b}) + 2|c|^2(1+\bar{a}\bar{b})(a-b) \right] \\
&= \frac{-i|c|^2}{2} \left[-(\bar{a} - \bar{b} + |a|^2b - a|b|^2) + (a - b + |a|^2\bar{b} - \bar{a}|b|^2) \right] \\
&= \frac{-|c|^2}{2} \left[-2\Im ma + 2\Im mb + |a|^2(2\Im mb) + |b|^2(-2\Im ma) \right] \\
&= |c|^2 \left[\Im ma(1 + |b|^2) - \Im mb(1 + |a|^2) \right] \\
\tilde{\nu}_3 &= \begin{vmatrix} 1 & f_u^0 & f_v^0 \\ 0 & f_u^1 & f_v^1 \\ 0 & f_u^2 & f_v^2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 1 & \frac{\varepsilon}{2}(a+b) + \frac{\bar{\varepsilon}}{2}(\bar{a} + \bar{b}) & i\left(\frac{\varepsilon}{2}(a+b) - \frac{\bar{\varepsilon}}{2}(\bar{a} + \bar{b})\right) \\ 0 & \frac{\varepsilon}{2}(1+a\bar{b}) + \frac{\bar{\varepsilon}}{2}(1+\bar{a}b) & i\left(\frac{\varepsilon}{2}(1+a\bar{b}) - \frac{\bar{\varepsilon}}{2}(1+\bar{a}b)\right) \\ 0 & \frac{\varepsilon}{2}i(1-a\bar{b}) - \frac{\bar{\varepsilon}}{2}i(1-\bar{a}b) & i\left(\frac{\varepsilon}{2}i(1-a\bar{b}) + \frac{\bar{\varepsilon}}{2}i(1-\bar{a}b)\right) \end{vmatrix} \\
&= \frac{i}{4} \left\{ \left[c(1+ab) + \bar{c}(1+\bar{a}\bar{b}) \right] \left[c i(1-ab) + i \bar{c}(1-\bar{a}\bar{b}) \right] - \right. \\
&\quad \left. \left[c(1+ab) - \bar{c}(1+\bar{a}\bar{b}) \right] \left[c i(1-ab) - i \bar{c}(1-\bar{a}\bar{b}) \right] \right\} \\
&= \frac{-|c|^2}{4} \left[2(1+ab)(1-\bar{a}\bar{b}) + 2(1+\bar{a}\bar{b})(1-ab) \right] \\
&= \frac{-|c|^2}{2} \left[1 - |a|^2|b|^2 + 1 - |a|^2|b|^2 \right] \\
&= |c|^2 \left[|a|^2|b|^2 - 1 \right]
\end{aligned}$$

Assim obtemos a expressão de $\tilde{\nu} = (\tilde{\nu}_0, \tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2, \tilde{\nu}_3)$. Mas, $\nu = \frac{\tilde{\nu}}{|\tilde{\nu}|}$ e $(\tilde{\nu}, \tilde{\nu}) = |c|^4 |1 - a\bar{b}|^2 (1 + |a|^2)(1 + |b|^2)$. Logo, $|\tilde{\nu}| = |c|^2 |1 - a\bar{b}| \sqrt{(1 + |a|^2)(1 + |b|^2)}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\nu &= \frac{1}{|1 - a\bar{b}| \sqrt{(1 + |a|^2)(1 + |b|^2)}} \left[0, (1 + |b|^2)\Re(a) - (1 + |a|^2)\Re(b), \right. \\
&\quad \left. (1 + |b|^2)\Im(a) - (1 + |a|^2)\Im(b), |a|^2|b|^2 - 1 \right]
\end{aligned}$$

Falta mostrar o resultado para $\tilde{\tau}$.

Por definição, temos $\tilde{\tau} := \boxtimes(f_u, f_v, \tilde{\nu})$. Substituindo na expressão (1.3), obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau} &:= \left(\begin{vmatrix} f_u^1 & f_v^1 & \tilde{\nu}_1 \\ f_u^2 & f_v^2 & \tilde{\nu}_2 \\ f_u^3 & f_v^3 & \tilde{\nu}_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} f_u^0 & f_v^0 & \tilde{\nu}_0 \\ f_u^2 & f_v^2 & \tilde{\nu}_2 \\ f_u^3 & f_v^3 & \tilde{\nu}_3 \end{vmatrix}, \right. \\
&\quad \left. - \begin{vmatrix} f_u^0 & f_v^0 & \tilde{\nu}_0 \\ f_u^1 & f_v^1 & \tilde{\nu}_1 \\ f_u^3 & f_v^3 & \tilde{\nu}_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} f_u^0 & f_v^0 & \tilde{\nu}_0 \\ f_u^1 & f_v^1 & \tilde{\nu}_1 \\ f_u^2 & f_v^2 & \tilde{\nu}_2 \end{vmatrix} \right) =: (\tilde{\tau}_0, \tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2, \tilde{\tau}_3)
\end{aligned}$$

Para cada componente temos:

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}_0 &= \begin{vmatrix} f_u^1 & f_v^1 & \tilde{\nu}_1 \\ f_u^2 & f_v^2 & \tilde{\nu}_2 \\ f_u^3 & f_v^3 & \tilde{\nu}_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \frac{\varepsilon}{2}(1+a\bar{b}) + \frac{\bar{\varepsilon}}{2}(1+\bar{a}b) & i\left(\frac{\varepsilon}{2}(1+a\bar{b}) - \frac{\bar{\varepsilon}}{2}(1+\bar{a}b)\right) & |c|^2((1+|b|^2)\Re(a) - (1+|a|^2)\Re(b)) \\ \frac{\varepsilon}{2}i(1-a\bar{b}) - \frac{\bar{\varepsilon}}{2}i(1-\bar{a}b) & i\left(\frac{\varepsilon}{2}i(1-a\bar{b}) + \frac{\bar{\varepsilon}}{2}i(1-\bar{a}b)\right) & |c|^2((1+|b|^2)\Im(a) - (1+|a|^2)\Im(b)) \\ \frac{\varepsilon}{2}(a-b) + \frac{\bar{\varepsilon}}{2}(\bar{a}-\bar{b}) & i\left(\frac{\varepsilon}{2}(a-b) - \frac{\bar{\varepsilon}}{2}(\bar{a}-\bar{b})\right) & |c|^2(|a|^2|b|^2 - 1) \end{vmatrix} \\
&= |c|^2 \left[(1 + |b|^2)(1 + |a|^2) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}_1 &= \begin{vmatrix} f_u^0 & f_v^0 & \tilde{\nu}_0 \\ f_u^2 & f_v^2 & \tilde{\nu}_2 \\ f_u^3 & f_v^3 & \tilde{\nu}_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \frac{c}{2}(a+b) + \frac{\bar{c}}{2}(\bar{a} + \bar{b}) & i\left(\frac{c}{2}(a+b) - \frac{\bar{c}}{2}(\bar{a} + \bar{b})\right) & 0 \\ \frac{c}{2}i(1-a-b) - \frac{\bar{c}}{2}i(1-\bar{a}-\bar{b}) & i\left(\frac{c}{2}i(1-a-b) + \frac{\bar{c}}{2}i(1-\bar{a}-\bar{b})\right) & |c|^2((1+|b|^2)\Im(a) - (1+|a|^2)\Im(b)) \\ \frac{c}{2}(a-b) + \frac{\bar{c}}{2}(\bar{a} - \bar{b}) & i\left(\frac{c}{2}(a-b) - \frac{\bar{c}}{2}(\bar{a} - \bar{b})\right) & |c|^2(|a|^2|b|^2 - 1) \end{vmatrix} \\
&= |c|^2 \left[(1+|b|^2)\Re(a) + (1+|a|^2)\Re(b) \right] \\
\tilde{\tau}_2 &= - \begin{vmatrix} f_u^0 & f_v^0 & \tilde{\nu}_0 \\ f_u^1 & f_v^1 & \tilde{\nu}_1 \\ f_u^3 & f_v^3 & \tilde{\nu}_3 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} \frac{c}{2}(a+b) + \frac{\bar{c}}{2}(\bar{a} + \bar{b}) & i\left(\frac{c}{2}(a+b) - \frac{\bar{c}}{2}(\bar{a} + \bar{b})\right) & 0 \\ \frac{c}{2}(1+a-b) + \frac{\bar{c}}{2}(1+\bar{a}-\bar{b}) & i\left(\frac{c}{2}(1+a-b) - \frac{\bar{c}}{2}(1+\bar{a}-\bar{b})\right) & |c|^2((1+|b|^2)\Re(a) - (1+|a|^2)\Re(b)) \\ \frac{c}{2}(a-b) + \frac{\bar{c}}{2}(\bar{a} - \bar{b}) & i\left(\frac{c}{2}(a-b) - \frac{\bar{c}}{2}(\bar{a} - \bar{b})\right) & |c|^2(|a|^2|b|^2 - 1) \end{vmatrix} \\
&= |c|^2 \left[(1+|b|^2)\Im(a) + (1+|a|^2)\Im(b) \right] \\
\tilde{\tau}_3 &= \begin{vmatrix} f_u^0 & f_v^0 & \tilde{\nu}_0 \\ f_u^1 & f_v^1 & \tilde{\nu}_1 \\ f_u^2 & f_v^2 & \tilde{\nu}_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \frac{c}{2}(a+b) + \frac{\bar{c}}{2}(\bar{a} + \bar{b}) & i\left(\frac{c}{2}(a+b) - \frac{\bar{c}}{2}(\bar{a} + \bar{b})\right) & 0 \\ \frac{c}{2}(1+a-b) + \frac{\bar{c}}{2}(1+\bar{a}-\bar{b}) & i\left(\frac{c}{2}(1+a-b) - \frac{\bar{c}}{2}(1+\bar{a}-\bar{b})\right) & |c|^2((1+|b|^2)\Re(a) - (1+|a|^2)\Re(b)) \\ \frac{c}{2}i(1-a-b) - \frac{\bar{c}}{2}i(1-\bar{a}-\bar{b}) & i\left(\frac{c}{2}i(1-a-b) + \frac{\bar{c}}{2}i(1-\bar{a}-\bar{b})\right) & |c|^2((1+|b|^2)\Im(a) - (1+|a|^2)\Im(b)) \end{vmatrix} \\
&= |c|^2 \left[|a|^2 - |b|^2 \right]
\end{aligned}$$

Mas, $\tau = \frac{\tilde{\tau}}{|\tilde{\tau}|}$. E, $(\tilde{\tau}, \tilde{\tau}) = |c|^4 |1 - a\bar{b}|^2 (1 + |a|^2)(1 + |b|^2)$. Logo, $|\tilde{\tau}| = |c|^2 |1 - a\bar{b}| \sqrt{(1 + |a|^2)(1 + |b|^2)}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{1}{|1 - a\bar{b}| \sqrt{(1 + |a|^2)(1 + |b|^2)}} \left[(1 + |a|^2)(1 + |b|^2), (1 + |b|^2)\Re(a) + (1 + |a|^2)\Re(b), \right. \\
&\quad \left. (1 + |b|^2)\Im(a) + (1 + |a|^2)\Im(b), |a|^2 - |b|^2 \right].
\end{aligned}$$

□

Superfícies mínimas tais que $\phi^1 - i \phi^2 \equiv 0$

Já vimos, na página 44, como fica a representação de Weierstrass para as superfícies mínimas tais que $\phi^1 - i \phi^2 \equiv 0$. Vamos então estudar os objetos geométricos destas superfícies.

A curvatura gaussiana é dada por $K = -\frac{\Delta \ln \lambda}{\lambda^2}$, e, no caso acima, $\lambda^2 = |\eta|^2 > 0$. Se $\eta = c(w)dw$ então $|c| > 0$ e c é holomorfa. Logo, para domínios simplesmente conexos, existe uma função holomorfa $g(w)$ tal que $e^{g(w)} = c(w)$, isto é, $g(w) = \text{Log } c(w)$. Mas, $\text{Log } c(w) = \ln |c(w)| + i\theta(w)$. Logo, $\ln |c(w)| = \Re \text{Log } c(w)$. Como $c(w)$ é holomorfa então $\Re \text{Log } c(w)$ é harmônica e, portanto, $\Delta \ln |c(w)| = 0$. Logo, $K = 0$.

Sabemos que $K_N = \frac{-4}{\lambda^2} \Im(\nu_{\bar{w}}, \tau_w)$. Mas, se $\rho = \sqrt{1 + |a|^2}$ então

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{1}{\rho}(1 + |a|^2, \Re a, \Im a, |a|^2) \\ \nu &= \frac{1}{\rho}(0, \Re a, \Im a, -1).\end{aligned}$$

Sejam $\hat{\tau} := (1 + |a|^2, \Re a, \Im a, |a|^2)$ e $\hat{\nu} := (0, \Re a, \Im a, -1)$. Logo,

$$\begin{aligned}\hat{\tau}_w &= (a_w \bar{a}, \frac{1}{2} a_w, \frac{-i}{2} a_w, a_w \bar{a}) \\ \hat{\nu}_{\bar{w}} &= (0, \frac{1}{2} \bar{a}_{\bar{w}}, \frac{i}{2} \bar{a}_{\bar{w}}, 0) \\ \rho_w &= \frac{a_w \bar{a}}{2\rho} \\ \rho_{\bar{w}} &= \frac{a \bar{a}_{\bar{w}}}{2\rho} \\ (\nu_{\bar{w}}, \tau_w) &= \left(\left(\frac{1}{\rho} \right)_{\bar{w}} \hat{\nu} + \frac{1}{\rho} \hat{\nu}_{\bar{w}}, \left(\frac{1}{\rho} \right)_w \hat{\tau} + \frac{1}{\rho} \hat{\tau}_w \right) \\ &= \frac{1}{\rho^2} \left[-\rho_{\bar{w}}(\hat{\nu}, \hat{\tau}_w) - \rho_w(\hat{\nu}_{\bar{w}}, \hat{\tau}) + (\hat{\nu}_{\bar{w}}, \hat{\tau}_w) \right].\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}(\hat{\nu}, \hat{\tau}_w) &= \frac{-a_w \bar{a}}{2} \\ (\hat{\nu}_{\bar{w}}, \hat{\tau}) &= \frac{\bar{a}_{\bar{w}} a}{2} \\ (\hat{\nu}_{\bar{w}}, \hat{\tau}_w) &= \frac{\bar{a}_{\bar{w}} a_w}{2}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}(\nu_{\bar{w}}, \tau_w) &= -\frac{1}{\rho^2} \left[\frac{a \bar{a}_{\bar{w}} - a_w \bar{a}}{2\rho} + \frac{a_w \bar{a} \bar{a}_{\bar{w}} a}{2\rho} - \frac{\bar{a}_{\bar{w}} a_w}{2} \right] \\ &= \frac{|a_w|^2}{2\rho^2} = \frac{|a_w|^2}{2(1 + |a|^2)},\end{aligned}$$

que é um valor real. Logo, $\Im(\nu_{\bar{w}}, \tau_w) = 0$ e, portanto, $K_N = \frac{-4}{\lambda^2} \Im(\nu_{\bar{w}}, \tau_w) = 0$.

Falta calcularmos a segunda forma fundamental, que é dada por

$$\begin{aligned} B &= (f_{uu} du^2 + 2f_{uv} du dv + f_{vv} dv^2)^\perp \\ &= [-(f_{uu}, \tau) du^2 - 2(f_{uv}, \tau) du dv - (f_{vv}, \tau) dv^2] \tau + \\ &\quad [(f_{uu}, \nu) du^2 + 2(f_{uv}, \nu) du dv + (f_{vv}, \nu) dv^2] \nu. \end{aligned}$$

Mas, $\partial_w = \frac{1}{2}(\partial_u - i\partial_v)$ e $\partial_{\bar{w}} = \frac{1}{2}(\partial_u + i\partial_v)$. Logo, $\partial_u = \partial_w + \partial_{\bar{w}}$ e $\partial_v = i(\partial_w - \partial_{\bar{w}})$. Como f é harmônica então $f_{w\bar{w}} = f_{\bar{w}w} = 0$ e

$$\begin{aligned} f_u &= \partial_u f = (\partial_w + \partial_{\bar{w}})f = f_w + f_{\bar{w}} \\ f_v &= \partial_v f = i(\partial_w - \partial_{\bar{w}})f = i(f_w - f_{\bar{w}}) \\ f_{uu} &= (\partial_w + \partial_{\bar{w}})(\partial_w + \partial_{\bar{w}})f \\ &= \partial_w \partial_w f + \partial_w \partial_{\bar{w}} f + \partial_{\bar{w}} \partial_w f + \partial_{\bar{w}} \partial_{\bar{w}} f = f_{ww} + f_{\bar{w}\bar{w}} \\ f_{uv} &= i(\partial_w - \partial_{\bar{w}})(\partial_w + \partial_{\bar{w}})f = i(f_{ww} - f_{\bar{w}\bar{w}}) \\ f_{vv} &= i(\partial_w - \partial_{\bar{w}})i(\partial_w - \partial_{\bar{w}})f = -(f_{ww} + f_{\bar{w}\bar{w}}). \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} B &= [-(f_{uu}, \tau) du^2 - 2(f_{uv}, \tau) du dv - (f_{vv}, \tau) dv^2] \tau + \\ &\quad [(f_{uu}, \nu) du^2 + 2(f_{uv}, \nu) du dv + (f_{vv}, \nu) dv^2] \nu \\ &= [-(f_{ww} + f_{\bar{w}\bar{w}}, \tau) du^2 - 2i(f_{ww} - f_{\bar{w}\bar{w}}, \tau) du dv - (-(f_{ww} + f_{\bar{w}\bar{w}}), \tau) dv^2] \tau + \\ &\quad [(f_{ww} + f_{\bar{w}\bar{w}}, \nu) du^2 + 2i(f_{ww} - f_{\bar{w}\bar{w}}, \nu) du dv + (-(f_{ww} + f_{\bar{w}\bar{w}}), \nu) dv^2] \nu \\ &= [(f_{ww}, \tau) \tau - (f_{ww}, \nu) \nu] (-du^2 - 2i du dv + dv^2) + \\ &\quad [(f_{\bar{w}\bar{w}}, \tau) \tau - (f_{\bar{w}\bar{w}}, \nu) \nu] (-du^2 + 2i du dv + dv^2). \end{aligned}$$

Vimos que $\partial f = \left(\frac{\eta a}{2}, \frac{\eta}{2}, \frac{-i\eta}{2}, \frac{\eta a}{2}\right)$. Se $\eta = c(w)dw$ e $\partial f = f_w dw$ então

$$\begin{aligned} f_w &= \left(\frac{c a}{2}, \frac{c}{2}, \frac{-i c}{2}, \frac{c a}{2}\right) \\ f_{ww} &= \frac{1}{2}(c_w a + c a_w, c_w, -i c_w, c_w a + c a_w) \\ (f_{ww}, \tau) &= \frac{1}{2\rho} [-(c_w a + c a_w)(1 + |a|^2) + c_w \Re a - i c_w \Im a + (c_w a + c a_w)|a|^2] \\ &= \frac{1}{2\rho} [c_w(-a + \bar{a}) - c a_w] \\ (f_{ww}, \nu) &= \frac{1}{2\rho} [\Re a c_w - i \Im a c_w - c_w a - c a_w] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\rho}[c_w(-a + \bar{a}) - ca_w] = (f_{ww}, \tau) \\
f_{\bar{w}} &= \overline{(f_w)} = \overline{(f_w)} = \left(\frac{\bar{c} \bar{a}}{2}, \frac{\bar{c}}{2}, \frac{i \bar{c}}{2}, \frac{\bar{c} \bar{a}}{2} \right) \\
f_{\bar{w}\bar{w}} &= \frac{1}{2}(\bar{c}_{\bar{w}}\bar{a} + \bar{c} \bar{a}_{\bar{w}}, \bar{c}_{\bar{w}}, i\bar{c}_{\bar{w}}, \bar{c}_{\bar{w}}\bar{a} + \bar{c} \bar{a}_{\bar{w}}) \\
&= \frac{1}{2}(\bar{c}_w \bar{a} + \bar{c} \bar{a}_w, \bar{c}_w, i\bar{c}_w, \bar{c}_w \bar{a} + \bar{c} \bar{a}_w) = \overline{f_{ww}} \\
(f_{\bar{w}\bar{w}}, \tau) &= \frac{1}{2\rho}[-(\bar{c}_w \bar{a} + \bar{c} \bar{a}_w)(1 + |a|^2) + \bar{c}_w \Re a + i \bar{c}_w \Im a + (\bar{c}_w \bar{a} + \bar{c} \bar{a}_w)|a|^2] \\
&= \frac{1}{2\rho}[\bar{c}_w(a - \bar{a}) - \bar{c} \bar{a}_w] \\
(f_{\bar{w}\bar{w}}, \nu) &= \frac{1}{2\rho}[\Re a \bar{c}_w + i \Im a \bar{c}_w - \bar{c}_w \bar{a} - \bar{c} \bar{a}_w] \\
&= \frac{1}{2\rho}[\bar{c}_w(a - \bar{a}) - \bar{c} \bar{a}_w] = (f_{\bar{w}\bar{w}}, \tau) = \overline{(f_{ww}, \tau)} \\
\tau - \nu &= \frac{1}{\rho}(1 + |a|^2 - 0, \Re a - \Re a, \Im a - \Im a, |a|^2 - (-1)) \\
&= \rho(1, 0, 0, 1) = \sqrt{1 + |a|^2}(1, 0, 0, 1)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
B &= [(f_{ww}, \tau)\tau - (f_{ww}, \nu)\nu](-du^2 - 2i du dv + dv^2) + \\
&\quad [(f_{\bar{w}\bar{w}}, \tau)\tau - (f_{\bar{w}\bar{w}}, \nu)\nu](-du^2 + 2i du dv + dv^2) \\
&= [(f_{ww}, \tau)(\tau - \nu)](-du^2 - 2i du dv + dv^2) + \\
&\quad [\overline{(f_{ww}, \tau)}(\tau - \nu)](-du^2 + 2i du dv + dv^2) \\
&= -[(f_{ww}, \tau) + \overline{(f_{ww}, \tau)}](\tau - \nu)du^2 - 2i [(f_{ww}, \tau) - \overline{(f_{ww}, \tau)}](\tau - \nu)du dv + \\
&\quad [(f_{ww}, \tau) + \overline{(f_{ww}, \tau)}](\tau - \nu)dv^2 \\
&= -2\Re((f_{ww}, \tau))(\tau - \nu)du^2 + 4\Im((f_{ww}, \tau))(\tau - \nu)du dv + \\
&\quad 2\Re((f_{ww}, \tau))(\tau - \nu)dv^2 \\
&= 2\Re\left(\frac{1}{2\rho}[c_w(-a + \bar{a}) - ca_w]\right)\rho(1, 0, 0, 1)(-du^2 + dv^2) + \\
&\quad 4\Im\left(\frac{1}{2\rho}[c_w(-a + \bar{a}) - ca_w]\right)\rho(1, 0, 0, 1)du dv \\
&= \Re\left(c_w(-a + \bar{a}) - ca_w\right)(1, 0, 0, 1)(-du^2 + dv^2) + \\
&\quad 2\Im\left(c_w(-a + \bar{a}) - ca_w\right)(1, 0, 0, 1)du dv.
\end{aligned}$$

que pode ser não nulo.

Ou seja, a superfície mínima resultante do caso $\phi^1 - i \phi^2 \equiv 0$ é uma superfície tal que $K \equiv 0$, $K_N \equiv 0$ e B não necessariamente nula.

2.4 Família a 1-parâmetro de superfícies mínimas em L^4 , determinada por uma superfície máxima do L^3

A partir da representação de Weierstrass de L^4 , obtivemos expressões para superfícies mínimas de L^4 . Em particular, para $L^3 \subset L^4$ e para $\mathbb{R}^3 \subset L^4$.

Teorema 2.4.1 *Existe uma correspondência entre as superfícies máximas simplesmente conexas de tipo espaço do L^3 e as mínimas simplesmente conexas do $\mathbb{R}^3$.*

Demonstração

Sabemos que uma superfície máxima do L^3 pode ser expressa por uma representação de Weierstrass, obtida através de dois parâmetros $\tilde{a}$ e $\tilde{\eta}$, a primeira meromorfa, a segunda uma 1-forma holomorfa. Considere então a representação para superfícies do L^4 com curvatura média nula dada pela expressão (2.9), para as funções $a = \tilde{a}$, $b = e^{i\theta}\tilde{a}$, e $\eta = \tilde{\eta}$.

Note que, se $\theta = 0$, então $b = \tilde{a}$ e temos a representação original para as superfícies máximas do L^3 .

Por outro lado, se $\theta = \pi$, então $b = -\tilde{a}$ e obtemos a representação de Weierstrass para as superfícies mínimas do $\mathbb{R}^3$.

Ou seja, se partimos de uma superfície máxima de tipo espaço do L^3 , podemos, através de uma família de superfícies do L^4 com curvatura média nula, obter uma superfície mínima do $\mathbb{R}^3$.

Reciprocamente, dada uma superfície mínima do $\mathbb{R}^3$, sabemos que ela pode ser representada por uma representação de Weierstrass, através de duas funções. Construa a família de superfícies com curvatura média nula no L^4 , de modo análogo à que foi construída acima. Do mesmo modo, para $\theta = \pi$, temos a representação original da superfície mínima do $\mathbb{R}^3$, e se $\theta = 0$, temos a representação do L^3 . □

Observação A representação do Teorema 2.4.1 não nos garante uma unicidade na correspondência, já que uma mesma superfície pode ser obtida através de mais de uma representação de Weierstrass.

A representação original para o $\mathbb{R}^3$ é dada por

$$f(w) = 2\Re \int_{p_0}^p \eta \left(\frac{1}{2}(1 - a^2), \frac{1}{2}i(1 + a^2), a \right) \quad (2.20)$$

Se, análogo ao L^3 , fizermos a mudança de parâmetros dada por $a = \frac{1-A}{A+1}$ e $\eta = -\Gamma \frac{(A+1)^2}{2}$. deste modo, obtemos

$$\hat{f}(w) = 2\Re \int_{p_0}^p \Gamma \left(-A, -\frac{1}{2}i(1+A^2), \frac{1}{2}(1-A^2) \right) \quad (2.21)$$

Observando as expressões acima, vemos que (2.21) é apenas uma isometria de (2.20). Deste modo, vemos que o que seria uma representação de Weierstrass de segundo tipo do $\mathbb{R}^3$, acaba gerando a mesma superfície que a de primeiro tipo a menos de uma isometria. Assim, obtemos a mesma superfície, representada de dois modos diferentes.

Isto já não ocorre em L^3 . Comparando as expressões obtidas para as representações de primeiro e segundo tipos, temos que as superfícies obtidas não são isométricas, gerando, portanto, duas superfícies distintas.

Por exemplo, para a superfície de Enneper de primeiro e segundo tipos temos

$$\begin{aligned} Enneper1 &= \left(u^2 - v^2, u + \frac{1}{3}u^3 - uv^2, u^2v - \frac{1}{3}v^3 - v \right) \\ Enneper2 &= \left(-\frac{1}{3}u^3 + uv^2 + u, u + \frac{1}{3}u^3 - uv^2, -2uv \right), \end{aligned}$$

que não são isométricas, já que suas primeiras formas fundamentais não são iguais. De fato, para $Enneper1L3$ temos $ds^2 = (-2u^2 + 1 - 2v^2 + u^4 + 2u^2v^2 + v^4)(du + dv)$ e, para $Enneper2L3$ temos $ds^2 = 4u^2(du + dv)$.

De qualquer modo, seja $S = f(M) \subset L^3$ uma superfície máxima e (a, η) os seus parâmetros de Weierstrass. Suponhamos que M seja simplesmente conexa, então, para $\theta \in [0, 2\pi]$, seja $b := e^{i\theta}$. Assim, (a, b, η) são parâmetros de Weierstrass para uma família de superfícies mínimas $S(\theta)$ do L^4 , de acordo com o Teorema 2.2.2.

No que se segue, dada $S = f(M) \subset L^3$ máxima com M simplesmente conexa, a família $S(\theta)$ acima será chamada de θ -família associada a S .

Se $S(\theta)$ é uma família associada a S então $S(\pi) \subset \mathbb{R}^3$, $S(0) = S(2\pi) = S$, e para cada θ $S(\theta)$ é uma superfície mínima do L^4 .

Teorema 2.4.2 *Se $S = f(M)$ é superfície máxima do L^3 , simplesmente conexa e $S(\theta) = f(M)(\theta)$ a sua θ -família associada (ou seja, uma família de superfícies mínimas de L^4 , dadas pelos parâmetros de Weierstrass η , a e $b = e^{i\theta}a$), então*

1. $\lambda(\theta) = |\eta||1 - e^{-i\theta}|a|^2|$;
2. $\tau(\theta) = \frac{1}{|1 - e^{-i\theta}|a|^2|} \left(1 + |a|^2, \Re(1 + e^{i\theta}a), \Im(1 + e^{i\theta}a), 0 \right)$;
3. $\nu(\theta) = \frac{1}{|1 - e^{-i\theta}|a|^2|} \left(0, \Re(1 - e^{i\theta}a), \Im(1 - e^{i\theta}a), |a|^2 - 1 \right)$;

$$4. K(\theta) = \frac{4|a'|^2|\eta|^4[(1+|a|^4)\cos(\theta)-2|a|^2]}{\lambda^6};$$

$$5. K_N(\theta) = \frac{4|\eta|^4 \sin(\theta)|a'|^2(|a|^4-1)}{\lambda(\theta)^6}.$$

Demonstração

Vou demonstrar as expressões para as curvaturas gaussianas e normal.

Curvatura gaussianas:

Sabemos que $K = \frac{-\Delta \ln \lambda}{\lambda^2}$, e $\lambda = |\eta||1 - e^{-i\theta}|a|^2|$. Assim,

$$\begin{aligned} \ln \lambda &= \ln[|\eta||1 - e^{-i\theta}|a|^2|] = \ln |\eta| + \ln |1 - e^{-i\theta}|a|^2| \Rightarrow \\ \Delta \ln \lambda &= \Delta \ln |\eta| + \Delta \ln |1 - e^{-i\theta}|a|^2| \end{aligned}$$

Mas, η é uma 1-forma holomorfa. Assim, se $\eta = c dz$, então c é holomorfa e portanto $\ln |c| = \Re \log c$. Logo, $\ln |\eta| = \ln |c|$ é harmônica e $\Delta \ln |\eta| = 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} \ln |1 - e^{-i\theta}|a|^2|^2 &= \ln \left((1 - e^{-i\theta}|a|^2) \overline{(1 - e^{-i\theta}|a|^2)} \right) \\ &= \ln \left((1 - e^{-i\theta}|a|^2)(1 - e^{i\theta}|a|^2) \right) \\ &= \ln(1 - e^{-i\theta}|a|^2) + \ln(1 - e^{i\theta}|a|^2) \Rightarrow \\ \Delta \ln |1 - e^{-i\theta}|a|^2| &= \frac{\Delta \ln |1 - e^{-i\theta}|a|^2|^2}{2} \\ &= \frac{\Delta \ln(1 - e^{-i\theta}|a|^2) + \Delta \ln(1 - e^{i\theta}|a|^2)}{2} \\ \Delta \ln(1 - e^{-i\theta}|a|^2) &= 4 \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z} (1 - e^{-i\theta}|a|^2) \\ &= 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{-e^{-i\theta} a' \bar{a}}{1 - e^{-i\theta}|a|^2} \right) \\ &= \frac{-4e^{-i\theta}|a'|^2}{(1 - e^{-i\theta}|a|^2)^2} \\ \Delta \ln(1 - e^{i\theta}|a|^2) &= \frac{-4e^{i\theta}|a'|^2}{(1 - e^{i\theta}|a|^2)^2} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta \ln \lambda &= \Delta \ln |\eta| + \frac{\Delta \ln(1 - e^{-i\theta}|a|^2) + \Delta \ln(1 - e^{i\theta}|a|^2)}{2} \\ &= \frac{-2e^{-i\theta}|a'|^2}{(1 - e^{-i\theta}|a|^2)^2} + \frac{-2e^{i\theta}|a'|^2}{(1 - e^{i\theta}|a|^2)^2} \\ &= \frac{-4|a'|^2[(1 + |a|^4)\cos(\theta) - 2|a|^2]}{|1 - e^{-i\theta}|a|^2|^4} \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
K &= \frac{-\Delta \ln \lambda}{\lambda^2} \\
&= \frac{4|a'|^2[(1 + |a|^4)\cos(\theta) - 2|a|^2]}{|1 - e^{-i\theta}|a|^2|^4} \frac{1}{\lambda^2} \\
&= \frac{4|a'|^2|c|^4[(1 + |a|^4)\cos(\theta) - 2|a|^2]}{\lambda^6}
\end{aligned}$$

Curvatura Normal:

Sabemos que $K_N = \frac{4}{\lambda^2} \mathfrak{Im}(\nu_w, \tau_{\bar{w}})$. Mas

$$\begin{aligned}
\lambda(\theta) &= |\eta||1 - e^{-i\theta}|a|^2| \\
\tau(\theta) &= \frac{1}{|1 - e^{-i\theta}|a|^2|} \left(1 + |a|^2, \Re(1 + e^{i\theta}a), \Im(1 + e^{i\theta}a), 0 \right) \\
\nu(\theta) &= \frac{1}{|1 - e^{-i\theta}|a|^2|} \left(0, \Re(1 - e^{i\theta}a), \Im(1 - e^{i\theta}a), |a|^2 - 1 \right)
\end{aligned}$$

Sejam

$$\begin{aligned}
\rho &= |1 - e^{-i\theta}|a|^2| \\
\dot{\tau} &= \left(1 + |a|^2, \Re(1 + e^{i\theta}a), \Im(1 + e^{i\theta}a), 0 \right) \\
&= \left(1 + a\bar{a}, \frac{1}{2}[(1 + e^{-i\theta}\bar{a} + (1 + e^{i\theta})a)], \frac{i}{2}[(1 + e^{-i\theta}\bar{a} - (1 + e^{i\theta})a)], 0 \right) \\
\dot{\nu} &= \left(0, \Re(1 - e^{i\theta}a), \Im(1 - e^{i\theta}a), |a|^2 - 1 \right) \\
&= \left(0, \frac{1}{2}[(1 - e^{-i\theta}\bar{a} + (1 - e^{i\theta})a)], \frac{i}{2}[(1 - e^{-i\theta}\bar{a} - (1 - e^{i\theta})a)], a\bar{a} - 1 \right).
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\tau &= \tau(\theta) = \frac{1}{\rho} \dot{\tau} \Rightarrow \\
\tau_{\bar{w}} &= \left(\frac{1}{\rho} \right)_{\bar{w}} \dot{\tau} + \frac{1}{\rho} \dot{\tau}_{\bar{w}} \\
\nu &= \nu(\theta) = \frac{1}{\rho} \dot{\nu} \Rightarrow \\
\nu_w &= \left(\frac{1}{\rho} \right)_w \dot{\nu} + \frac{1}{\rho} \dot{\nu}_w
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
K_N(\theta) &= \frac{4}{\lambda^2} \Im(\nu_w, \tau_{\bar{w}}) \\
&= \frac{4}{\lambda^2} \Im \left(\left(\frac{1}{\rho} \right)_w \dot{\nu} + \frac{1}{\rho} \dot{\nu}_w, \left(\frac{1}{\rho} \right)_{\bar{w}} \dot{\tau} + \frac{1}{\rho} \dot{\tau}_{\bar{w}} \right) \\
&= \frac{4}{\lambda^2} \Im \left\{ \left(\frac{1}{\rho} \right)_w \frac{1}{\rho} (\dot{\nu}, \dot{\tau}_{\bar{w}}) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{\rho} \right)_{\bar{w}} (\dot{\nu}_w, \dot{\tau}) + \frac{1}{\rho^2} (\dot{\nu}_w, \dot{\tau}_{\bar{w}}) \right\}.
\end{aligned}$$

Fazendo as contas parciais, temos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\rho} \right)_w &= \frac{-1}{\rho^2} \rho_w = \frac{-1}{2\rho\rho^2} (1 - 2\cos(\theta)|a|^2 + |a|^4)_w \\
&= \frac{-1}{\rho^3} (-2\cos(\theta)a' \bar{a} + 2a a' \bar{a}^2) \\
&= \frac{-a' \bar{a}}{\rho^3} (-\cos(\theta) + |a|^2) \\
\left(\frac{1}{\rho} \right)_{\bar{w}} &= \frac{-a \bar{a}'}{\rho^3} (-\cos(\theta) + |a|^2) \\
\dot{\tau}_{\bar{w}} &= \left(a \bar{a}', \frac{1}{2}(1 + e^{-i\theta})\bar{a}', \frac{i}{2}(1 + e^{-i\theta})\bar{a}', 0 \right) \\
\dot{\nu}_w &= \left(0, \frac{1}{2}(1 - e^{i\theta})a', \frac{i}{2}(1 - e^{i\theta})a', a' \bar{a} \right) \\
(\dot{\nu}, \dot{\tau}_{\bar{w}}) &= \left(\left(0, \frac{1}{2}[(1 - e^{-i\theta})\bar{a} + (1 - e^{i\theta})a], \frac{i}{2}[(1 - e^{-i\theta})\bar{a} - (1 - e^{i\theta})a], a\bar{a} - 1 \right), \right. \\
&\quad \left. \left(a \bar{a}', \frac{1}{2}(1 + e^{-i\theta})\bar{a}', \frac{i}{2}(1 + e^{-i\theta})\bar{a}', 0 \right) \right) \\
&= \frac{1}{4} [(1 - e^{-i\theta})(1 + e^{-i\theta})\bar{a}\bar{a}' + (1 - e^{i\theta})(1 + e^{-i\theta})a\bar{a}'] \\
&\quad - \frac{1}{4} [(1 - e^{-i\theta})(1 + e^{-i\theta})\bar{a}\bar{a}' - (1 - e^{i\theta})(1 + e^{-i\theta})a\bar{a}'] \\
&= \frac{1}{2} (1 - e^{i\theta})(1 + e^{-i\theta})a\bar{a}' \\
&= -i \sin(\theta) a\bar{a}' \\
(\dot{\nu}_w, \dot{\tau}) &= \frac{1}{4} [(1 - e^{i\theta})(1 + e^{-i\theta})a'\bar{a} + (1 - e^{i\theta})(1 + e^{i\theta})a'a] \\
&\quad - \frac{1}{4} [(1 - e^{i\theta})(1 + e^{-i\theta})a'\bar{a} - (1 - e^{i\theta})(1 + e^{i\theta})a'a] \\
&= \frac{1}{2} (1 - e^{i\theta})(1 + e^{-i\theta})a'\bar{a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -i \operatorname{sen}(\theta) a' \bar{a} \\
(\dot{\nu}_w, \dot{\tau}_{\bar{w}}) &= (1 - e^{i\theta})(1 + e^{-i\theta}) \frac{|a'|^2}{4} + \frac{|a'|^2}{4} (1 - e^{i\theta})(1 + e^{-i\theta}) \\
&= \frac{|a'|^2}{2} (1 - e^{i\theta})(1 + e^{-i\theta}) \\
&= -i \operatorname{sen}(\theta) |a'|^2
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
K_N &= \frac{4}{\lambda^2} \Im \left[\frac{-a' \bar{a}}{\rho^3} (-\cos(\theta) + |a|^2) \frac{1}{\rho} (-i \operatorname{sen}(\theta) a \bar{a}') \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\rho} \left(\frac{-a \bar{a}'}{\rho^3} (-\cos(\theta) + |a|^2) \right) (-i \operatorname{sen}(\theta) a' \bar{a}) + \frac{1}{\rho^2} (-i \operatorname{sen}(\theta) |a'|^2) \right] \\
&= \frac{4}{\lambda^2} \Im \left\{ \frac{1}{\rho^4} [i \operatorname{sen}(\theta) |a'|^2 |a|^2 (-\cos(\theta) + |a|^2) + \right. \\
&\quad \left. i \operatorname{sen}(\theta) |a|^2 |a'|^2 (-\cos(\theta) + |a|^2) + \rho^2 (-i \operatorname{sen}(\theta)) |a'|^2] \right\} \\
&= \Im \left\{ \frac{4i \operatorname{sen}(\theta) |a'|^2}{\lambda^2 \rho^4} [2|a|^2 (-\cos(\theta) + |a|^2) - (1 - 2\cos(\theta) |a|^2 + |a|^4)] \right\} \\
&= \Im \left\{ \frac{4i \operatorname{sen}(\theta) |a'|^2}{\lambda^2 \rho^4} (|a|^4 - 1) \right\} \\
&= \frac{4 \operatorname{sen}(\theta) |a'|^2}{\lambda^2 \rho^4} (|a|^4 - 1) \\
&= \frac{4 \operatorname{sen}(\theta) |a'|^2 (|a|^4 - 1) |\eta|^4}{\lambda^6}
\end{aligned}$$

visto que $\lambda = |\eta| \rho$ e $\rho^4 = \frac{\lambda^4}{|\eta|^4}$.

□

2.5 Exemplos de superfícies mínimas no L^4 e no L^3

A partir da Representação de Weierstrass, podemos obter alguns exemplos de superfícies máximas no L^3 e mínimas no L^4 .

O catenóide

O catenóide do L^3 é a superfície obtida pelos parâmetros de Weierstrass $\eta = \frac{-ie^{-z}}{2}dz$ e $a(z) = ie^z$. Logo, substituindo na representação de primeiro tipo, temos

$$catenoide1L3(u, v) = \left(u, \frac{1}{2} \sin(v)(e^{-2u} - 1)e^u, -\frac{1}{2} \cos(v)(e^{-2u} - 1)e^u \right).$$

Figura 2.1: Catenóide do primeiro tipo no L^3

Esta superfície é de rotação, em torno de um eixo de tipo tempo, visto que ela pode ser expressa na forma

$$X(u, v) = (u, h(u) \sin(v), h(u) \cos(v)).$$

A família de superfícies, com curvatura média nula, que pode ser gerada pelos parâmetros de Weierstrass para o L^4 $\eta(z) = \frac{-ie^{-z}}{2}$ e $a(z) = ie^z$ e $b(z) = ie^z e^{i\theta}$ é, então, a família de catenóide para L^4 . Assim,

$$\begin{aligned} catenoideL4 = & \left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u \cos(\theta) - \frac{1}{2} \sin(\theta)v, \right. \\ & -\frac{1}{2}(-\sin(v) + e^{2u} \sin(v) \cos(\theta) + e^{2u} \cos(v) \sin(\theta))e^{-u}, \\ & \frac{1}{2}(-\cos(v) + e^{2u} \cos(v) \cos(\theta) - e^{2u} \sin(v) \sin(\theta))e^{-u}, \\ & \left. \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}u \cos(\theta) + \frac{1}{2} \sin(\theta)v \right). \end{aligned}$$

Se $\theta = 0$, temos o catenóide de primeiro tipo de L^3 . Se $\theta = \pi$, temos o catenóide usual de $\mathbb{R}^3$.

Neste caso, os vetores normais unitários temporal e espacial são, respectivamente, dados por

$$\begin{aligned}\tau &= \left(\frac{1 + e^{2u}}{\sqrt{1 - 2e^{2u} \cos(\theta) + e^{4u}}}, -\frac{e^u(\sin(v) + \sin(v + \theta))}{\sqrt{1 - 2e^{2u} \cos(\theta) + e^{4u}}}, \frac{e^u(\cos(v) + \cos(v + \theta))}{\sqrt{1 - 2e^{2u} \cos(\theta) + e^{4u}}}, 0 \right) \\ \nu &= \left(0, -\frac{e^u(\sin(v) - \sin(v + \theta))}{\sqrt{1 - 2e^{2u} \cos(\theta) + e^{4u}}}, \frac{e^u(\cos(v) - \cos(v + \theta))}{\sqrt{1 - 2e^{2u} \cos(\theta) + e^{4u}}}, \frac{e^{2u} - 1}{\sqrt{1 - 2e^{2u} \cos(\theta) + e^{4u}}} \right)\end{aligned}$$

Note que, para o L^3 , tais vetores são

$$\begin{aligned}\tau_{L^3} &= \left(\frac{1 + e^{2u}}{|1 - e^{2u}|}, -2\frac{e^u \sin(v)}{|1 - e^{2u}|}, 2\frac{e^u \cos(v)}{|1 - e^{2u}|}, 0 \right) \\ \nu_{L^3} &= \left(0, 0, 0, \frac{e^{2u} - 1}{|1 - e^{2u}|} \right) = (0, 0, 0, 1)\end{aligned}$$

Já para $\mathbb{R}^3$, temos

$$\begin{aligned}\tau_{\mathbb{R}^3} &= (1, 0, 0, 0) \\ \nu_{\mathbb{R}^3} &= \left(0, -2\frac{e^u \sin(v)}{1 + e^{2u}}, 2\frac{e^u \cos(v)}{1 + e^{2u}}, \frac{e^{2u} - 1}{1 + e^{2u}} \right)\end{aligned}$$

As curvaturas gaussiana e normal para a família de catenóide em L^4 são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned}K &= \frac{4(\cos(\theta) + \cos(\theta)e^{4\Re z} - 2e^{2\Re z})e^{4\Re z}}{|e^{2\Re z}e^{-i\theta} - 1|^6} \\ K_N &= \frac{4\sin(\theta)(e^{4\Re z} - 1)e^{4\Re z}}{|e^{2\Re z}e^{-i\theta} - 1|^6}\end{aligned}$$

Note que, como era de se esperar, as curvaturas normais para o $\mathbb{R}^3$ e para o L^3 , que correspondem a $\theta = \pi$ e $\theta = 0$ respectivamente, são identicamente nulas ($K_N \equiv 0$). Já para a curvatura gaussiana de L^3 e de $\mathbb{R}^3$ temos

$$\begin{aligned}K_{L^3} &= \frac{4(1 + e^{4\Re z} - 2e^{2\Re z})e^{4\Re z}}{|e^{2\Re z} - 1|^6} \\ &= \frac{16e^{4u}}{-6e^{4u} + 4e^{6u} + 4e^{2u} - 1 - e^{8u}} \\ K_{\mathbb{R}^3} &= \frac{4(-1 - e^{4\Re z} - 2e^{2\Re z})e^{4\Re z}}{|e^{2\Re z} + 1|^6} \\ &= \frac{-16e^{4u}}{-6e^{4u} + 4e^{6u} + 4e^{2u} - 1 - e^{8u}}\end{aligned}$$

Em L^3 também temos o catenóide de segundo tipo, que é dado pelos mesmos parâmetros de Weierstrass que o catenóide, mas na representação de Weierstrass de segundo tipo.

$$\begin{aligned} \text{catenoide2L3}(u, v) &= \left(\frac{1}{2} \sin(v)(e^{-2u} + 1)e^u, \frac{1}{2} \sin(v)(e^{-2u} - 1)e^u, -v \right) \\ &= (-\sin(v) \cosh(u), -\sin(v) \sinh(u), -v), \end{aligned}$$

lembrando que $2 \sinh(u) = e^u - e^{-u}$ e $2 \cosh(u) = e^u + e^{-u}$.

Assim, o catenóide de segundo tipo pode ser expresso na forma

$$X(u, v) = (h(v) \cosh(u), h(v) \sinh(u), v),$$

portanto, ela é uma superfície de rotação em torno de um eixo de tipo espaço.

Sua curvatura gaussiana é

$$K = \frac{1}{\cos^4(v) - 2 \cos^2(v) + 1}$$

Figura 2.2: Catenóide do segundo tipo no L^3

O helicóide

Outro exemplo de superfície máxima de L^3 é o helicóide, que é a superfície dada pelos parâmetros de Weierstrass de L^3 $\eta = \frac{e^{-z}}{2}dz$ e $a(z) = ie^z$, e portanto é a superfície conjugada ao catenóide.

$$helicoide1L3 := \left(-v, -\frac{1}{2} \cos(v)(e^{-2u} + 1)e^u, -\frac{1}{2} \sin(v)(e^{-2u} + 1)e^u \right)$$

Esta superfície é uma superfície regrada, ou seja, ela pode ser reparametrizada para ser expressa na forma

$$X(s, t) = c(t) + s n(t),$$

onde $c(t)$ é uma curva de tipo espaço, parametrizada pelo comprimento de arco, e $n(t)$ é normal a $c(t)$. Tal fato será explicado na próxima seção.

Figura 2.3: Helicóide do primeiro tipo no L^3

A família de superfícies com vetor curvatura média nula para o helicóide, em L^4 , é dada pelos parâmetros de Weierstrass de L^4 $\eta = \frac{e^{-z}}{2}dz$ e $a(z) = ie^z$ e $b(z) = ie^ze^\theta$, ou seja,

$$helicoideL4 = \left(\frac{-1}{2} \sin(\theta)u - \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}v \cos(\theta), \right.$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(-\cos(v) - e^{2u} \cos(v) \cos(\theta) + e^{2u} \sin(v) \sin(\theta) \right) e^{-u}, \\ & -\frac{1}{2} \left(\sin(v) + e^{2u} \sin(v) \cos(\theta) + e^{2u} \cos(v) \sin(\theta) \right) e^{-u}, \\ & \frac{1}{2} \sin(\theta) u - \frac{1}{2} v + \frac{1}{2} v \cos(\theta) \end{aligned}$$

Do mesmo modo que para o catenóide, podemos calcular os vetores normais unitários temporal e espacial para a família do helicóide de L^4 .

$$\begin{aligned} \tau &= \left(\frac{1 + e^{2u}}{\sqrt{1 - 2e^{2u} \cos(\theta) + e^{4u}}}, -\frac{e^u (\sin(v) + \sin(v + \theta))}{\sqrt{1 - 2e^{2u} \cos(\theta) + e^{4u}}}, \frac{e^u (\cos(v) + \cos(v + \theta))}{\sqrt{1 - 2e^{2u} \cos(\theta) + e^{4u}}}, 0 \right) \\ \nu &= \left(0, -\frac{e^u (\sin(v) - \sin(v + \theta))}{\sqrt{1 - 2e^{2u} \cos(\theta) + e^{4u}}}, \frac{e^u (\cos(v) - \cos(v + \theta))}{\sqrt{1 - 2e^{2u} \cos(\theta) + e^{4u}}}, \frac{e^{2u} - 1}{\sqrt{1 - 2e^{2u} \cos(\theta) + e^{4u}}} \right) \end{aligned}$$

Note que, os valores obtidos acima são exatamente os mesmos obtidos para o catenóide. Isto se justifica pois as duas superfícies são conjugadas, ou seja, para cada valor de θ , $catenoideL4(u, v) + i helicoidesL4(u, v)$ forma uma função analítica.

Assim, quando nos restringimos aos casos de L^3 e de $\mathbb{R}^3$, temos

$$\begin{aligned} \tau_{L^3} &= \left(\frac{1 + e^{2u}}{|1 - e^{2u}|}, -2 \frac{e^u \sin(v)}{|1 - e^{2u}|}, 2 \frac{e^u \cos(v)}{|1 - e^{2u}|}, 0 \right) \\ \nu_{L^3} &= \left(0, 0, 0, \frac{e^{2u} - 1}{|1 - e^{2u}|} \right) = (0, 0, 0, 1) \\ \tau_{\mathbb{R}^3} &= (1, 0, 0, 0) \\ \nu_{\mathbb{R}^3} &= \left(0, -2 \frac{e^u \sin(v)}{1 + e^{2u}}, 2 \frac{e^u \cos(v)}{1 + e^{2u}}, \frac{e^{2u} - 1}{1 + e^{2u}} \right) \end{aligned}$$

Além disso, como as curvaturas normais e gaussiana de uma superfície são determinadas pelos vetores τ e ν , então a família de superfícies do catenóide e do helicóide possuem a mesma curvatura gaussiana e também a mesma curvatura normal, já que seus vetores τ e ν são os mesmos, para cada θ .

Ainda em L^3 , podemos obter o helicóide de segundo tipo, que é a superfície obtida pelos mesmos parâmetros usados para o helicóide, mas na representação de Weierstrass de segundo tipo. Assim,

$$helicoides2L3 := \left(-\frac{1}{2} \cos(v)(e^{-2u} - 1)e^u, -\frac{1}{2} \cos(v)(e^{-2u} + 1)e^u, -u \right).$$

Esta superfície também é uma superfície regrada, e sua curvatura gaussiana é a mesma que a curvatura gaussiana do catenóide de segundo tipo em L^3 .

$$K = \frac{1}{1 - 2 \cos^2(v) + \cos^4(v)}.$$

Figura 2.4: Helicóide do segundo tipo no L^3

Superfície de Enneper

A superfície de Enneper é a superfície de curvatura média nula de L^4 , obtida quando usamos os parâmetros $\eta = 1dz$, $a(z) = z$, e $b(z) = e^{i\theta}z$ na representação de Weierstrass de L^4 . Assim, sua expressão é

$$\begin{aligned} EnneperL4 = & \left(\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\cos(\theta)(u^2 - v^2) - \sin(\theta)uv, \right. \\ & u + \frac{1}{3}\cos(\theta)(u^3 - 3uv^2) - \frac{1}{3}\sin(\theta)(3u^2v - v^3), \\ & -v + \frac{1}{3}\sin(\theta)(u^3 - 3uv^2) + \frac{1}{3}\cos(\theta)(3u^2v - v^3), \\ & \left. \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}\cos(\theta)(u^2 - v^2) + \sin(\theta)uv \right) \end{aligned}$$

Se $\theta = 0$, temos a superfície de Enneper de primeiro tipo para o L^3

$$Enneper1L3 := \left(u^2 - v^2, u + \frac{1}{3}u^3 - uv^2, -v + u^2v - \frac{1}{3}v^3 \right).$$

Se $\theta = \pi$, temos a superfície de Enneper usual de $\mathbb{R}^3$.

Figura 2.5: Enneper de primeiro tipo no L^3

Os vetores unitários normais temporal e espacial para a família da Enneper em L^4 são, respectivamente,

$$\begin{aligned}\tau &= \left(\frac{1 + u^2 + v^2}{\sqrt{1 - 2 \cos(\theta)u^2 - 2 \cos(\theta)v^2 + u^4 + 2u^2v^2 + v^4}}, \right. \\ &\quad \frac{u + \cos(\theta)u - \sin(\theta)v}{\sqrt{1 - 2 \cos(\theta)u^2 - 2 \cos(\theta)v^2 + u^4 + 2u^2v^2 + v^4}}, \\ &\quad \left. \frac{v + \cos(\theta)v + \sin(\theta)u}{\sqrt{1 - 2 \cos(\theta)u^2 - 2 \cos(\theta)v^2 + u^4 + 2u^2v^2 + v^4}}, 0 \right) \\ \nu &= \left(0, -\frac{-u + \cos(\theta)u - \sin(\theta)v}{\sqrt{1 - 2 \cos(\theta)u^2 - 2 \cos(\theta)v^2 + u^4 + 2u^2v^2 + v^4}}, \right. \\ &\quad -\frac{-v + \cos(\theta)v + \sin(\theta)u}{\sqrt{1 - 2 \cos(\theta)u^2 - 2 \cos(\theta)v^2 + u^4 + 2u^2v^2 + v^4}}, \\ &\quad \left. \frac{u^2 + v^2 - 1}{\sqrt{1 - 2 \cos(\theta)u^2 - 2 \cos(\theta)v^2 + u^4 + 2u^2v^2 + v^4}} \right)\end{aligned}$$

Note que, se restritos aos espaços vetoriais L^3 e $\mathbb{R}^3$, seus vetores normais são dados

por

$$\begin{aligned}\tau_{L^3} &= \left(\frac{1+u^2+v^2}{u^2+v^2-1}, 2\frac{u}{u^2+v^2-1}, 2\frac{v}{u^2+v^2-1}, 0 \right) \\ \nu_{L^3} &= (0, 0, 0, 1) \\ \tau_{\mathbb{R}^3} &= (1, 0, 0, 0) \\ \nu_{\mathbb{R}^3} &= \left(0, \frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{-1+u^2+v^2}{1+u^2+v^2} \right)\end{aligned}$$

Com, os valores de τ e ν calculados, podemos então calcular as curvaturas gaussianas e normal da superfície de Enneper.

$$\begin{aligned}K &= \frac{2[(1+|z|^4)\cos\theta - 2|z|^4]}{|1 - e^{-i\theta}|z|^2|^6} \\ K_N &= \frac{\text{sen}(\theta)(|z|^4 - 1)}{|1 - e^{-i\theta}|z|^2|^6}\end{aligned}$$

Assim, para os espaços L^3 e $\mathbb{R}^3$, temos que as curvaturas gaussianas são

$$\begin{aligned}K_{L^3} &= \frac{4(1-|z|^4)}{|1-|z|^2|^6} \\ &= \frac{4}{(1+u^4+2u^2v^2+v^4-2u^2-2v^2)^2} \\ K_{\mathbb{R}^3} &= \frac{-2(1-|z|^4)}{|1-|z|^2|^6} \\ &= \frac{-4}{(1+u^4+2u^2v^2+v^4-2u^2-2v^2)^2}\end{aligned}$$

Note que se $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ então $K_N = 0$.

No exemplo do helicóide, vimos que as superfícies catenóide e helicóide são conjugadas, ou seja, para cada valor de θ , $\text{catenóide}L4(u, v) + i \text{helicóide}L4(u, v)$ forma uma função analítica. Analogamente, podemos pensar em obter a superfície conjugada à superfície de Enneper, ela será dada pelos parâmetros de Weierstrass para L^4 $\eta(z) = idz$, $a(z) = z$, e $b(z) = e^{i\theta}z$. Sua expressão é

$$\begin{aligned}\text{Enneperconjugada}L4 &= \left(-uv - \frac{1}{2}\text{sen}(\theta)(u^2 - v^2) - \cos(\theta)uv, \right. \\ &\quad \left. -v - \frac{1}{3}\text{sen}(\theta)(u^3 - 3uv^2) - \frac{1}{3}\cos(\theta)(3u^2v - v^3), \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -u + \frac{1}{3} \cos(\theta)(u^3 - 3uv^2) - \frac{1}{3} \sin(\theta)(3u^2v - v^3), \\ & -uv + \frac{1}{2} \sin(\theta)(u^2 - v^2) + \cos(\theta)uv \end{aligned}$$

Seus vetores τ e ν coincidem com os vetores τ e ν da superfície de Enneper. Consequentemente, suas curvaturas gaussiana e normal também coincidem com aquelas da superfície de Enneper.

Se $\theta = 0$, temos a superfície de Enneper conjugada do L^3 ,

$$EnneperConjugada1L3 := \left(-2uv, -v - u^2v + \frac{1}{3}v^3, \frac{1}{3}u^3 - uv^2 - u \right).$$

Figura 2.6: Enneper conjugada de primeiro tipo no L^3

Além disso, em L^3 também temos a superfície de Enneper de segundo tipo e sua conjugada

$$\begin{aligned} Enneper2L3 &:= \left(-\frac{1}{3}u^3 + uv^2 + u, u + \frac{1}{3}u^3 - uv^2, -2uv \right); \\ EnneperConjugada2L3 &:= \left(u^2v - \frac{1}{3}v^3 - v, -v - u^2v + \frac{1}{3}v^3, -u^2 + v^2 \right). \end{aligned}$$

A superfície de Enneper de segundo tipo é uma superfície de rotação em torno de um eixo de tipo luz, ou seja, ela pode ser reparametrizada na forma

$$X(s, t) = (b + at^3 - t - s^2t, -2st, -s^2t + b + at^3 + t).$$

O porquê desta expressão ficará mais claro mais adiante.

Figura 2.7: Enneper de segundo tipo no L^3

A curvatura gaussiana de ambas é

$$K = \frac{1}{4u^4}.$$

A superfície de Enneper conjugada de segundo tipo é uma superfície regrada, e sua curvatura gaussiana tem a mesma expressão que a da curvatura gaussiana para a superfície de Enneper de segundo tipo, acima.

2.6 Superfícies máximas de rotação e regradas no L^3

Os próximos dois teoremas nos dizem exatamente quais são as superfícies máximas de tipo espaço do L^3 são superfícies de rotação ou regradas.

Figura 2.8: Enneper conjugada de segundo tipo no L^3

Teorema 2.6.1 *Se S é uma superfície máxima de tipo espaço do L^3 , e S também é uma superfície de rotação, então S é congruente a uma parte de alguma das seguintes superfícies:*

1. plano yz ;
2. catenóide de primeiro tipo;
3. catenóide de segundo tipo;
4. superfície de Enneper de segundo tipo

Demonstração

1º caso: Primeiramente, é claro que o plano yz é uma superfície de rotação em torno de um eixo de tipo tempo, e toda superfície plana de tipo espaço é congruente ao plano yz .

No que se segue, vamos assumir que a superfície em questão não é plana. Sabemos que uma rotação pode ser representada por de uma matriz ortogonal. Ou seja, uma matriz da forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

tal que cada linha e cada coluna formam vetores unitários, lembrando que no caso das primeiras linha e coluna, o vetor tem norma 1. Além disso, o produto entre dois vetores linhas distintos é zero. O mesmo vale para os vetores coluna. Isto decorre de $(Au, Av) = (u, v), \forall u, v \in L^3$. Podemos aplicar isso para a base $\{e_0, e_1, e_2\}$.

Com isso, já temos um sistema de equações a ser resolvido. O que vai diferenciar uma rotação da outra, vai ser o eixo que fica fixo. Sabemos que se v é o eixo de rotação, então $Av = v$.

2º caso: Se o eixo de rotação é um eixo de tipo tempo, então podemos assumir que tal eixo é representado pelo vetor $e_0 = (1, 0, 0)$. Neste caso, teremos $Ae_0 = e_0$, ou seja,

$$Ae_0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Deste modo, o nosso sistema acaba se resolvendo em

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

e tal que

$$\begin{cases} a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1 \\ a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1 \\ a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1 \\ a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1 \\ a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0 \\ a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0 \end{cases}$$

Logo, podemos transformar a matriz A em

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ 0 & -\cos(\theta) & \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

Neste caso, em que o eixo fixo é representado pelo vetor $(1, 0, 0)$, podemos supor que a curva que vai gerar a superfície de rotação é dada por $(t, f(t), 0)$, onde $f(t)$ é uma função diferenciável que não intercepta o eixo gerado por $(1, 0, 0)$. E, assim, a superfície será dada por

$$X(t, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ 0 & -\cos(\theta) & \sin(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ f(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ f(t) \sin(\theta) \\ -f(t) \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Ou seja, $X(t, \theta) = (t, f(t) \sin(\theta), -f(t) \cos(\theta))$.

Mas, uma superfície $X(t, \theta)$ será máxima se e somente se o vetor curvatura média for identicamente nulo, e isso ocorrerá se e só se $f(t)f''(t) - (f'(t))^2 + 1 = 0$ e $(f'(t))^2 - 1 > 0$. Resolvendo este sistema diferencial, temos que $f(t) = \frac{1}{a} \sinh(a(t+b))$. Substituindo esta $f(t)$, em $X(t, \theta)$, para $a = 1$ e $b = 0$, obtemos então

$$\begin{aligned} X(t, \theta) &= (t, \sinh(t) \sin(\theta), -\cosh(t) \sin(\theta)) \\ &= \left(t, -\frac{1}{2}(-1 + e^{-2t})e^t \sin(\theta), \frac{1}{2}(-1 + e^{-2t})e^t \cos(\theta) \right) \end{aligned}$$

que é uma superfície congruente a um pedaço do catenóide de primeiro tipo, o qual é a superfície obtida utilizando-se a representação de Weierstrass de primeiro tipo, para os parâmetros $\frac{-i e^{-z}}{2} dz$ e $i e^z$,

$$\begin{aligned} X(u, v) &= \left(u, \frac{1}{2}(-1 + e^{-2u})e^u \sin(v), -\frac{1}{2}(-1 + e^{-2u})e^u \cos(v) \right) \\ &= (u, -\sin(v) \sinh(u), \cos(v) \sinh(u)) \end{aligned}$$

3º caso: Se o eixo de rotação for um eixo de tipo espaço, podemos assumir que ele é representado pelo vetor $e_1 = (0, 1, 0)$. Neste caso, teremos $Ae_1 = e_1$. Fazendo contas análogas ao caso 2, obtemos que a matriz A é dada por

$$A = \begin{bmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) & 0 \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para este eixo de rotação fixo, podemos supor que a curva que vai gerar a superfície é dada por $(g(t), 0, t)$, e, portanto,

$$Y(t, \theta) = \begin{bmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) & 0 \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(t) \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(t) \cosh(\theta) \\ g(t) \sinh(\theta) \\ t \end{bmatrix}$$

Ou seja, $Y(t, \theta) = (g(t) \cosh(\theta), g(t) \sinh(\theta), t)$. Neste caso, a expressão para $H \equiv 0$ nos diz que $Y(t, \theta)$ dá uma superfície máxima se e somente se $g(t)g''(t) - (g'(t))^2 + 1 = 0$ e $(g'(t))^2 - 1 < 0$. Resolvendo este sistema diferencial, temos que $g(t) = \frac{1}{a} \sinh(a(t+b))$. Substituindo esta $g(t)$, em $Y(t, \theta)$, obtemos então para $a = 1$ e $b = 0$

$$Y(t, \theta) = (\sinh(t) \cosh(\theta), \sinh(t) \sinh(\theta), t)$$

que é congruente ao catenóide de segundo tipo, que é a superfície obtida utilizando-se a representação de Weierstrass de segundo tipo, para os parâmetros $\frac{-i e^{-z}}{2} dz$ e $i e^z$,

$$\begin{aligned} Y(u, v) &= \left(-\frac{1}{2} \sinh(v)(e^{-2u} + 1)e^u, \frac{1}{2} \sinh(v)(e^{-2u} - 1)e^u, -v \right) \\ &= (-\sinh(v) \cosh(u), -\sinh(v) \sinh(u), -v). \end{aligned}$$

4º caso: Se o eixo de rotação for um eixo de tipo luz, então tal eixo pode ser representado pelo vetor $e_0 + e_2 = (1, 0, 1)$. Neste caso, teremos $A(e_0 + e_2) = (e_0 + e_2)$, e a matriz A será dada por,

$$A = \begin{bmatrix} 1 + \frac{s^2}{2} & s & -\frac{s^2}{2} \\ s & 1 & -s \\ \frac{s^2}{2} & s & 1 - \frac{s^2}{2} \end{bmatrix}$$

onde $s \in \mathbb{R}$.

Para este eixo de rotação, podemos representar a curva que vai gerar a superfície por $(h(t) - t, 0, h(t) + t)$, isto por que queremos que a curva não intercepte o eixo gerado por $(1, 0, 1)$.

Neste caso, a superfície será dada por

$$Z(s, t) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{s^2}{2} & s & -\frac{s^2}{2} \\ s & 1 & -s \\ \frac{s^2}{2} & s & 1 - \frac{s^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(t) - t \\ 0 \\ h(t) + t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(t) - t - s^2 t \\ -2st \\ -s^2 t + h(t) + t \end{bmatrix}.$$

Neste caso, a superfície será máxima se e somente se $th''(t) - 2h'(t) = 0$, $t \neq 0$ e $h'(t) > 0$. A solução então obtida é $h(t) = at^3 + b$, para $a > 0$. Substituindo, então esta $h(t)$ em $Z(t, \theta)$, temos que a superfície em questão é dada por $Z(s, t) = (b + at^3 - t - s^2 t, -2st, -s^2 t + b + at^3 + t)$ que, para $a = \frac{1}{3}$ e $b = 0$, fica $Z(s, t) = (\frac{1}{3}t^3 - t - s^2 t, -2st, -s^2 t + \frac{1}{3}t^3 + t)$, que é congruente à superfície de Enneper de segundo tipo, que é a superfície obtida utilizando-se os parâmetros u e v , na segunda representação de Weierstrass de segundo tipo, resultante em

$$Z(u, v) = \left(-\frac{1}{3}u^3 + uv^2 + u, u + \frac{1}{3}u^3 - uv^2, -2uv \right).$$

□

Teorema 2.6.2 *Qualquer superfície máxima de tipo espaço regradada do L^3 é congruente a um pedaço de uma das seguintes:*

1. plano yz ;
2. helicóide de primeiro tipo;
3. helicóide de segundo tipo;
4. Enneper conjugada de segundo tipo.

Demonstração

Uma superfície máxima de tipo espaço-regrada pode ser parametrizada por

$$X(s, t) = c(t) + s n(t), \quad (2.22)$$

onde $c(t)$ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e $c'(t)$ é de tipo espaço, ou seja, $(c'(t), c'(t)) = 1$. Além disso, temos também que $(c'(t), n(t)) = 0$ e $(n(t), n(t)) = 1$. Portanto, temos que $(c''(t), c'(t)) = 0$ e $(n'(t), n(t)) = 0$. Assim, derivando $X(s, t)$ com relação a s e a t , obtemos

$$\begin{aligned} X_s &= n(t) \\ X_t &= c'(t) + s n'(t) \\ X_{ss} &= 0 \\ X_{st} &= n'(t) \\ X_{tt} &= c''(t) + s n''(t) \end{aligned}$$

Logo, os coeficientes das primeira e segunda formas são

$$\begin{aligned} g_{11} &= (X_s, X_s) = (n(t), n(t)) = 1 \\ g_{12} &= (X_s, X_t) = (n(t), c'(t) + s n'(t)) = (n(t), c'(t)) + s(n(t), n'(t)) = 0 \\ b_{11} &= -(X_{ss}, \frac{X_s \boxtimes X_t}{|X_s \boxtimes X_t|}) = 0 \\ b_{22} &= -(X_{tt}, \frac{X_s \boxtimes X_t}{|X_s \boxtimes X_t|}) \end{aligned}$$

Uma superfície é máxima se e somente se $H \equiv 0$. Mas

$$H = 0 \iff g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12} + g_{22}b_{11} = 0$$

No caso em questão, substituindo as expressões já encontradas, temos

$$H = 0 \iff b_{22} = 0 \iff (X_{tt}, X_s \boxtimes X_t) = 0.$$

Calculando $X_s \boxtimes X_t$ temos $X_s \boxtimes X_t = n(t) \boxtimes (c'(t) + s n'(t)) = n \boxtimes c' + s n \boxtimes n'$. Logo,

$$\begin{aligned} H = 0 &\iff (X_{tt}, X_s \boxtimes X_t) = 0 \\ &\iff (c'' + s n'', n \boxtimes c' + s n \boxtimes n') = 0 \\ &\iff (c'', n \boxtimes c') + s((c'', n \boxtimes n') + (n'', n \boxtimes c')) + s^2(n'', n \boxtimes n') = 0 \\ &\iff \begin{cases} (c'', n \boxtimes c') = 0 \\ (c'', n \boxtimes n') + (n'', n \boxtimes c') = 0 \\ (n'', n \boxtimes n') = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Para analisarmos melhor as expressões acima, vamos usar o equivalente ao triedro de Frenet, para o caso em que a curva é uma curva no L^3 tal que sua derivada é de tipo espaço, dada pelas equações (1.5).

Assim, temos

$$1. (c''(t), n(t) \boxtimes c'(t)) = (k(t)n(t), n(t) \boxtimes c'(t)) = 0$$

2.

$$\begin{aligned} (c'', n \boxtimes n') + (n'', n \boxtimes c') &= (kn, n \boxtimes n') + ((-k(t)c'(t) + \tau(t)b(t))', n \boxtimes c') \\ &= 0 + (-k'c' - kc'' + \tau'b + \tau b', n \boxtimes c') \\ &= (-k'c', n \boxtimes c') + (-kc'', n \boxtimes c') + (\tau'b, n \boxtimes c') + (\tau b', n \boxtimes c') \\ &= 0 + 0 + (\tau'b, n \boxtimes c') + 0 \\ &= (\tau'b, -b) = -\tau'(b, b) = \tau' \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} (n'', n \boxtimes n') &= (-k'c' - kc'' + \tau'b + \tau b', n \boxtimes (-kc' + \tau b)) \\ &= (-k'c' - kc'' + \tau'b + \tau b', n \boxtimes (-kc') + n \boxtimes (\tau b)) \\ &= (-k'c', n \boxtimes (-kc')) + (-kc'', n \boxtimes (-kc')) + \\ &\quad (\tau'b, n \boxtimes (-kc')) + (\tau b', n \boxtimes (-kc')) + \\ &\quad (-k'c', n \boxtimes (\tau b)) + (-kc'', n \boxtimes (\tau b)) + \\ &\quad (\tau'b, n \boxtimes (\tau b)) + (\tau b', n \boxtimes (\tau b)) \\ &= 0 + 0 + (\tau'b, n \boxtimes (-kc')) + 0 + (-k'c', n \boxtimes (\tau b)) + 0 + 0 + 0 \\ &= (-k'c', \tau n \boxtimes b) + (\tau'b, -kn \boxtimes c') \\ &= (-k'c', \tau c') + (\tau'b, -k(-b)) \\ &= -k\tau(c', c') + \tau'k(b, b) = -k'\tau + \tau'k \end{aligned}$$

Logo,

$$H = 0 \iff \begin{cases} (c'', n \boxtimes c') = 0 \\ (c'', n \boxtimes n') + (n'', n \boxtimes c') = 0 \\ (n'', n \boxtimes n') = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \tau' = 0 \iff \tau(t) = \tau(\text{constante}) \\ -k'\tau + \tau'k = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

Mas, $-k'(t)\tau(t) + \tau'(t)k(t) = 0$ e $\tau'(t) = 0$ então $-k'(t)\tau = 0$. Logo, ou $\tau = 0$ ou $k'(t) = 0$. Se $\tau = 0$ então teremos que a curva é plana, o que faz com que a superfície regrada seja congruente a um pedaço do plano yz .

Se $\tau \neq 0$ então $k'(t) = 0$ e portanto $k(t) = k = \text{constante}$.

Assim, temos ainda que analisar três casos:

$$1. |k| > |\tau| > 0;$$

$$2. |\tau| > |k| > 0;$$

$$3. |\tau| = |k| \neq 0$$

De qualquer modo, para a curva em questão, temos que o triedro de Frenet é dado por

$$\begin{cases} c''(t) = kn(t) \\ n'(t) = -kc'(t) + \tau b(t) \\ b'(t) = \tau n(t) \end{cases} \quad (2.25)$$

A partir disto, podemos achar uma equação diferencial que nos dará a solução procurada, que deverá ser analisada para cada um dos casos.

$$\begin{aligned} c''(t) = k n(t) &\implies c'''(t) = k n'(t) = k(-kc'(t) + \tau b(t)) = -k^2 c'(t) + k \tau b(t) \\ &\implies c^{(4)}(t) = -k^2 c''(t) + k \tau b'(t) = -k^2 c''(t) + k \tau (\tau n(t)) \\ &= -k^2 c''(t) + \tau^2 (k n(t)) \\ &= -k^2 c''(t) + \tau^2 c''(t) = (\tau^2 - k^2) c''(t) \end{aligned}$$

Logo, $c(t)$ é solução de

$$c^{(4)}(t) = (\tau^2 - k^2) c''(t), \quad (2.26)$$

onde $c(t) = (c_0(t), c_1(t), c_2(t))$, ou seja, a equação acima é $c_i^{(4)}(t) = (\tau^2 - k^2) c_i''(t)$, para $i=0,1,2$.

A equação característica de (2.26) é $\lambda^4 = (\tau^2 - k^2) \lambda^2$. Resolvendo isto, temos

$$\begin{aligned} \lambda^4 = (\tau^2 - k^2) \lambda^2 &\implies \lambda^4 - (\tau^2 - k^2) \lambda^2 = 0 \\ &\implies \lambda^2 [\lambda^2 - (\tau^2 - k^2)] = 0 \\ &\implies \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = \sqrt{\tau^2 - k^2} \\ \lambda_4 = -\sqrt{\tau^2 - k^2} \end{cases} \end{aligned}$$

Vamos então para cada um dos casos.

1º caso. Se $|k| > |\tau| > 0$ então $\tau^2 - k^2 < 0$ e portanto $\sqrt{\tau^2 - k^2} = i\sqrt{k^2 - \tau^2}$, logo, a solução geral da equação (2.26) é

$$\begin{aligned} c(t) &= A e^{\lambda_1 t} + t B e^{\lambda_2 t} + C e^{\lambda_3 t} + D e^{\lambda_4 t} \\ &= A + B t + C e^{i\sqrt{k^2 - \tau^2} t} + D e^{-i\sqrt{k^2 - \tau^2} t} \end{aligned}$$

Se analisarmos esta solução para os dados iniciais $A = (0, 0, 0)$, $B = (\frac{\tau}{\sqrt{k^2 - \tau^2}}, 0, 0)$, $C = (0, \frac{k}{2(k^2 - \tau^2)}, \frac{-i k}{2(k^2 - \tau^2)})$, $D = (0, \frac{k}{2(k^2 - \tau^2)}, \frac{i k}{2(k^2 - \tau^2)})$, então teremos que cada uma das componentes da curva $c(t)$ é dada por

$$\begin{aligned}
c_0(t) &= A_0 + B_0 t + C_0 e^{i \sqrt{k^2 - \tau^2} t} + D_0 e^{-i \sqrt{k^2 - \tau^2} t} \\
&= \frac{\tau}{\sqrt{k^2 - \tau^2}} t \\
c_1(t) &= A_1 + B_1 t + C_1 e^{i \sqrt{k^2 - \tau^2} t} + D_1 e^{-i \sqrt{k^2 - \tau^2} t} \\
&= \frac{k}{2(k^2 - \tau^2)} e^{i \sqrt{k^2 - \tau^2} t} + \frac{k}{2(k^2 - \tau^2)} e^{-i \sqrt{k^2 - \tau^2} t} \\
&= \frac{k}{(k^2 - \tau^2)} \left(\frac{e^{i \sqrt{k^2 - \tau^2} t} + e^{-i \sqrt{k^2 - \tau^2} t}}{2} \right) = \frac{k}{(k^2 - \tau^2)} \cos(\sqrt{k^2 - \tau^2} t) \\
c_2(t) &= A_2 + B_2 t + C_2 e^{i \sqrt{k^2 - \tau^2} t} + D_2 e^{-i \sqrt{k^2 - \tau^2} t} \\
&= \frac{-ik}{2(k^2 - \tau^2)} e^{i \sqrt{k^2 - \tau^2} t} + \frac{ik}{2(k^2 - \tau^2)} e^{-i \sqrt{k^2 - \tau^2} t} \\
&= \frac{k}{(k^2 - \tau^2)} \left(\frac{e^{i \sqrt{k^2 - \tau^2} t} - e^{-i \sqrt{k^2 - \tau^2} t}}{2i} \right) = \frac{k}{(k^2 - \tau^2)} \operatorname{sen}(\sqrt{k^2 - \tau^2} t)
\end{aligned}$$

Assim,

$$c(t) = \left(\frac{\tau}{\sqrt{k^2 - \tau^2}} t, \frac{k}{(k^2 - \tau^2)} \cos(\sqrt{k^2 - \tau^2} t), \frac{k}{(k^2 - \tau^2)} \operatorname{sen}(\sqrt{k^2 - \tau^2} t) \right)$$

Derivando com relação a t , obtemos

$$c'(t) = \left(\frac{\tau}{\sqrt{k^2 - \tau^2}}, \frac{-k \sqrt{k^2 - \tau^2}}{k^2 - \tau^2} \operatorname{sen}(\sqrt{k^2 - \tau^2} t), \frac{k \sqrt{k^2 - \tau^2}}{k^2 - \tau^2} \cos(\sqrt{k^2 - \tau^2} t) \right)$$

Note que desta forma $c'(t)$ é unitário. Além disso,

$$c''(t) = (0, -k \cos(\sqrt{k^2 - \tau^2} t), -k \operatorname{sen}(\sqrt{k^2 - \tau^2} t))$$

Mas, $c''(t) = kn(t)$, logo $n(t) = (0, -\cos(\sqrt{k^2 - \tau^2} t), \operatorname{sen}(\sqrt{k^2 - \tau^2} t))$. Logo, temos que

$$\begin{aligned}
X(s, t) &= c(t) + s n(t) \\
&= \left(\frac{\tau}{\sqrt{k^2 - \tau^2}} t, \frac{k}{(k^2 - \tau^2)} \cos(\sqrt{k^2 - \tau^2} t), \frac{k}{(k^2 - \tau^2)} \operatorname{sen}(\sqrt{k^2 - \tau^2} t) \right) \\
&\quad + s (0, -\cos(\sqrt{k^2 - \tau^2} t), \operatorname{sen}(\sqrt{k^2 - \tau^2} t)) \\
&= \left[\frac{\tau}{\sqrt{k^2 - \tau^2}} t, \left(\frac{k}{k^2 - \tau^2} - s \right) \cos(\sqrt{k^2 - \tau^2} t), \left(\frac{k}{k^2 - \tau^2} - s \right) \operatorname{sen}(\sqrt{k^2 - \tau^2} t) \right]
\end{aligned}$$

Se $v = \sqrt{k^2 - \tau^2}t$ e $\cosh u = \frac{k}{k^2 - \tau^2} - s$, então

$$X(u, v) = \left(\frac{\tau}{k^2 - \tau^2}v, \cosh(u) \cos(v), \cosh(u) \sin(v) \right),$$

que nos mostra que a superfície é congruente ao helicóide de primeiro tipo, que é a superfície gerada pela representação de Weierstrass de primeiro tipo, para os parâmetros $\frac{e^{-z}}{2}dz$ e $i e^z$, $X(u, v) = (-v, -\cos(v) \cosh(u), -\sin(v) \cosh(u))$.

2º caso. Se $|\tau| > |k| > 0$, então $\tau^2 - k^2 > 0$ e a solução geral para a equação (2.26) é

$$\begin{aligned} c(t) &= A e^{\lambda_1 t} + t B e^{\lambda_2 t} + C e^{\lambda_3 t} + D e^{\lambda_4 t} \\ &= A + B t + C e^{\sqrt{\tau^2 - k^2}t} + D e^{-\sqrt{\tau^2 - k^2}t} \end{aligned}$$

Se os dados iniciais forem $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, 0, \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - k^2}})$, $C = (\frac{k}{2(\tau^2 - k^2)}, \frac{k}{2(\tau^2 - k^2)}, 0)$, e $D = (-\frac{k}{2(\tau^2 - k^2)}, \frac{k}{2(\tau^2 - k^2)}, 0)$ então para cada uma das componentes de $c(t)$ teremos

$$\begin{aligned} c_0(t) &= A_0 + B_0 t + C_0 e^{\sqrt{\tau^2 - k^2}t} + D_0 e^{-\sqrt{\tau^2 - k^2}t} \\ &= \frac{k}{2(\tau^2 - k^2)} e^{\sqrt{\tau^2 - k^2}t} - \frac{k}{2(\tau^2 - k^2)} e^{-\sqrt{\tau^2 - k^2}t} \\ &= \frac{k}{\tau^2 - k^2} \left(\frac{e^{\sqrt{\tau^2 - k^2}t} - e^{-\sqrt{\tau^2 - k^2}t}}{2} \right) \\ &= \frac{k}{\tau^2 - k^2} \sinh(\sqrt{\tau^2 - k^2}t) \\ c_1(t) &= A_1 + B_1 t + C_1 e^{\sqrt{\tau^2 - k^2}t} + D_1 e^{-\sqrt{\tau^2 - k^2}t} \\ &= \frac{k}{2(\tau^2 - k^2)} e^{\sqrt{\tau^2 - k^2}t} + \frac{k}{2(\tau^2 - k^2)} e^{-\sqrt{\tau^2 - k^2}t} \\ &= \frac{k}{\tau^2 - k^2} \left(\frac{e^{\sqrt{\tau^2 - k^2}t} + e^{-\sqrt{\tau^2 - k^2}t}}{2} \right) \\ &= \frac{k}{\tau^2 - k^2} \cosh(\sqrt{\tau^2 - k^2}t) \\ c_2(t) &= A_2 + B_2 t + C_2 e^{\sqrt{\tau^2 - k^2}t} + D_2 e^{-\sqrt{\tau^2 - k^2}t} \\ &= \frac{\tau t}{\sqrt{\tau^2 - k^2}} \end{aligned}$$

Logo,

$$c(t) = \left(\frac{k}{\tau^2 - k^2} \sinh(\sqrt{\tau^2 - k^2}t), \frac{k}{\tau^2 - k^2} \cosh(\sqrt{\tau^2 - k^2}t), \frac{\tau t}{\sqrt{\tau^2 - k^2}} \right)$$

Assim,

$$\begin{aligned} c'(t) &= \left(\frac{k\sqrt{\tau^2 - k^2}}{\tau^2 - k^2} \cosh(\sqrt{\tau^2 - k^2}t), \frac{k\sqrt{\tau^2 - k^2}}{\tau^2 - k^2} \sinh(\sqrt{\tau^2 - k^2}t), \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - k^2}} \right) \\ c''(t) &= (k \sinh(\sqrt{\tau^2 - k^2}t), k \cosh(\sqrt{\tau^2 - k^2}t), 0) \end{aligned}$$

Note que $c'(t)$ é unitário, e como $c''(t) = k n(t)$ então $n(t) = (\sinh(\sqrt{\tau^2 - k^2}t), \cosh(\sqrt{\tau^2 - k^2}t), 0)$. Assim,

$$\begin{aligned} X(s, t) &= c(t) + s n(t) \\ &= \left(\frac{k}{\tau^2 - k^2} \sinh(\sqrt{\tau^2 - k^2}t), \frac{k}{\tau^2 - k^2} \cosh(\sqrt{\tau^2 - k^2}t), \frac{\tau t}{\sqrt{\tau^2 - k^2}} \right) \\ &\quad + s (\sinh(\sqrt{\tau^2 - k^2}t), \cosh(\sqrt{\tau^2 - k^2}t), 0) \\ &= \left(\left(\frac{k}{\tau^2 - k^2} + s \right) \sinh(\sqrt{\tau^2 - k^2}t), \left(\frac{k}{\tau^2 - k^2} + s \right) \cosh(\sqrt{\tau^2 - k^2}t), \frac{\tau t}{\sqrt{\tau^2 - k^2}} \right) \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $u = \sqrt{\tau^2 - k^2}t$ e $\cos(v) = \frac{\tau}{\tau^2 - k^2}u$, temos

$$X(u, v) = \left(\cos(v) \sinh(u), \cos(v) \cosh(u), \frac{\tau}{\tau^2 - k^2}u \right)$$

e, portanto, a superfície é congruente a um pedaço do helicóide de segundo tipo, que é a superfície gerada a partir da representação de Weierstrass de segundo tipo para os parâmetros de Weierstrass $\frac{e^{-z}}{2}dz$ e e^z , $X(u, v) = (-\cos(v) \sinh(u), -\cos(v) \cosh(u), -u)$.

3º caso. Se $|\tau| = |k| \neq 0$, então $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ e, portanto, a solução para a equação (2.26) é

$$\begin{aligned} c(t) &= A e^{\lambda_1 t} + B t e^{\lambda_2 t} + C t^2 e^{\lambda_3 t} + D t^3 e^{\lambda_4 t} \\ &= A + B t + C t^2 + D t^3. \end{aligned}$$

Se, para dados iniciais temos, $A = (0, 0, \frac{-1}{4})$, $B = (\frac{-3}{4}, \frac{-5}{4}, 0)$, $C = (0, 0, 1)$ e $D = (\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ então

$$\begin{aligned} c_0(t) &= A_0 + B_0 t + C_0 t^2 + D_0 t^3 \\ &= \frac{-3}{4}t - \frac{1}{3}t^3 \\ c_1(t) &= A_1 + B_1 t + C_1 t^2 + D_1 t^3 \\ &= \frac{-5}{4}t + \frac{1}{3}t^3 \\ c_2(t) &= A_2 + B_2 t + C_2 t^2 + D_2 t^3 \\ &= \frac{-1}{4}t + t^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}c(t) &= \left(\frac{-3}{4}t - \frac{1}{3}t^3, \frac{-5}{4}t + \frac{1}{3}t^3, \frac{-1}{4}t + t^2 \right) \\c'(t) &= \left(\frac{-3}{4} - t^2, \frac{-5}{4} + t^2, \frac{-1}{4} + 2t \right) \\c''(t) &= (-2t, 2t, 2) = -2(t, -t, -1)\end{aligned}$$

Seja $n(t) = (t, -t, -1)$. Note que $(n(t), n(t)) = -t^2 + (-t)^2 + (-1)^2 = 1$ e $(c'(t), c'(t)) = -\left(\frac{-3}{4} - t^2\right)^2 + \left(\frac{-5}{4} + t^2\right)^2 + \left(\frac{-1}{4} + 2t\right)^2 = 1$.

Assim,

$$\begin{aligned}X(s, t) &= c(t) + s n(t) \\&= \left(\frac{-3}{4}t - \frac{1}{3}t^3, \frac{-5}{4}t + \frac{1}{3}t^3, \frac{-1}{4}t + t^2 \right) + s(t, -t, -1)\end{aligned}$$

Sejam $s = u^2 - \frac{1}{4}$ e $t = v$. Logo,

$$\begin{aligned}X(s, t) &= \left(\frac{-3}{4}t - \frac{1}{3}t^3, \frac{-5}{4}t + \frac{1}{3}t^3, \frac{-1}{4}t + t^2 \right) + s(t, -t, -1) \\&= \left(\frac{-3}{4}t - \frac{1}{3}t^3, \frac{-5}{4}t + \frac{1}{3}t^3, \frac{-1}{4}t + t^2 \right) + (u^2 - \frac{1}{4})(t, -t, -1) \\&= \left(u^2v - \frac{1}{3}v^3 - v, -v - u^2v + \frac{1}{3}v^3, -u^2 + v^2 \right)\end{aligned}$$

que nos mostra que a superfície é congruente a um pedaço da superfície conjugada de Enneper de segundo tipo, que é gerada pelos parâmetros de Weierstrass $\eta(z) = i dz$ e $a(z) = z$.

□

Capítulo 3

Variação da área para $H \equiv 0$

Neste capítulo, vamos analisar o que ocorre com a área de uma superfície mínima do L^4 , quando deformamos tal superfície na direção de τ e de ν .

3.1 Área de uma superfície

Definição 3.1.1 *Seja $S = f(M)$ uma superfície regular do L^4 , de tipo espaço. A área de uma região R de S é dada pela integral do elemento de área dA de S , ou seja,*

$$\text{área}(R) = \int \int_{f^{-1}(R)} dA.$$

Seja $B = \{f_u, f_v\}$ base do plano tangente a S . Assim, o elemento de área dA é dado por

$$\begin{aligned} dA &= \left| \begin{pmatrix} f_u, f_u & f_v, f_u \\ f_u, f_v & f_v, f_v \end{pmatrix} \right|^{\frac{1}{2}} du \wedge dv \\ &= \left| \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \right|^{\frac{1}{2}} du \wedge dv \\ &= \sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} du \wedge dv, \end{aligned}$$

onde $g_{11} := (f_u, f_u)$, $g_{12} := (f_u, f_v)$ e $g_{22} := (f_v, f_v)$

Assim, $\text{área}(R) = \int \int_{f^{-1}(R)} \sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} du \wedge dv$.

Vamos, agora, definir a variação normal de uma superfície S em L^4 . Seja $s \mapsto S(s)$ uma família de superfícies. A variação normal representa como S se deforma na direção do campo normal $Z \in \mathcal{X}(f)^\perp$.

Definição 3.1.2 Sejam $F : D \rightarrow L^4$ uma imersão, $Q \subset D$ uma região limitada, $h : Q \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $h|_{\partial Q} \equiv 0$, $\epsilon > 0$ um número real e Z um campo normal unitário ao longo de F . A **variação normal** de F e Q , determinada por h , é a aplicação

$$\begin{aligned} F : (-\epsilon, \epsilon) \times Q &\rightarrow L^4 \\ F(s)(u, v) &= f(u, v) + s h(u, v) Z(u, v), \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde $(u, v) \in Q$ e $s \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Teorema 3.1.3 Sejam $S = f(M)$ uma superfície de tipo espaço de L^4 , $f : D \rightarrow L^4$ uma imersão, $Q \subset D$ uma região limitada, $h : Q \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $h|_{\partial Q} \equiv 0$ e Z um campo normal unitário ao longo de f . Seja $f(s)$ definida como acima. Então existe ϵ tal que para cada $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, $f(s)(M)$ é uma imersão e $S(s) = f(s)(M)$ é de tipo espaço.

Demonstração

Para simplificar a notação, usaremos $Z_u := \nabla_{\partial_u} Z$, e $Z_v := \nabla_{\partial_v} Z$.

Sabemos que $f(M)$ é uma imersão. Logo, se $(U, w = u + i v) \in \mathcal{H}(M)$ então f_u e f_v são linearmente independentes., ou seja, se $f_u = (f_u^0, f_u^1, f_u^2, f_u^3)$ e $f_v = (f_v^0, f_v^1, f_v^2, f_v^3)$ então existem $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$ tal que

$$\begin{vmatrix} f_u^i & f_u^j \\ f_v^i & f_v^j \end{vmatrix} \neq 0.$$

Partindo da variação normal, temos

$$f(s)(u, v) = f(u, v) + s h(u, v) Z(u, v) \implies \begin{cases} f(s)_u = f_u + s h_u Z + s h Z_u = f_u + o(s); \\ f(s)_v = f_v + s h_v Z + s h Z_v = f_v + o(s). \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{vmatrix} f_u^i(s) & f_u^j(s) \\ f_v^i(s) & f_v^j(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_u^i + o(s) & f_u^j + o(s) \\ f_v^i + o(s) & f_v^j + o(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_u^i & f_u^j \\ f_v^i & f_v^j \end{vmatrix} + o(s).$$

Como, $\begin{vmatrix} f_u^i & f_u^j \\ f_v^i & f_v^j \end{vmatrix} \neq 0$ então existe $\epsilon > 0$ tal que se $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ então

$$\begin{vmatrix} f_u^i & f_u^j \\ f_v^i & f_v^j \end{vmatrix} + o(s) \neq 0.$$

Logo, se $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ então $\begin{vmatrix} f_u^i(s) & f_u^j(s) \\ f_v^i(s) & f_v^j(s) \end{vmatrix} \neq 0$ e portanto $f_u(s), f_v(s)$ são linearmente independentes, e conseqüentemente $f(s)(M)$ é uma imersão.

Falta mostrar que existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(s)(M)$ é de tipo espaço.

Como Z é unitário, isto é, $(Z, Z) = \pm 1$, então $(Z, Z_u) = (Z, Z_v) = 0$. Além disso, Z é normal e f_u e f_v são tangentes, logo $(Z, f_u) = (Z, f_v) = 0$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
g_{11}(s) &= (f(s)_u, f(s)_u) \\
&= (f_u + sh_u Z + sh Z_u, f_u + sh_u Z + sh Z_u) \\
&= g_{11} + sh_u(Z, f_u) + sh(Z_u, f_u) + sh_u(Z, f_u) + s^2 h_u^2(Z, Z) + \\
&\quad s^2 h h_u(Z, Z_u) + sh(Z_u, f_u) + s^2 h h_u(Z_u, Z) + s^2 h^2(Z_u, Z_u) \\
&= g_{11} + 2sh(Z_u, f_u) + s^2 h_u^2(Z, Z) + s^2 h^2(Z_u, Z_u) \\
g_{12}(s) &= (f(s)_u, f(s)_v) \\
&= (f_u + sh_u Z + sh Z_u, f_v + sh_v Z + sh Z_v) \\
&= g_{12} + sh((f_u, Z_v) + (f_v, Z_u)) + s^2(h_u^2(Z, Z) + h^2(Z_u, Z_v)) \\
g_{22}(s) &= (f(s)_v, f(s)_v) \\
&= (f_v + sh_v Z + sh Z_v, f_v + sh_v Z + sh Z_v) \\
&= g_{22} + 2sh(Z_v, f_v) + s^2 h_v^2(Z, Z) + s^2 h^2(Z_v, Z_v)
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
g_{11}(s)g_{22}(s) &= (g_{11} + 2sh(Z_u, f_u) + s^2 h_u^2(Z, Z) + \\
&\quad s^2 h^2(Z_u, Z_u))(g_{22} + 2sh(Z_v, f_v) + s^2 h_v^2(Z, Z) + s^2 h^2(Z_v, Z_v)) \\
&= g_{11}g_{22} + s(2g_{11}h(f_v, Z_v) + 2g_{22}h(f_u, Z_u)) + \\
&\quad s^2(g_{11}h_v^2(Z, Z) + g_{11}h^2(Z_v, Z_v) + 4h^2(f_u, Z_u)(f_v, Z_v) + \\
&\quad g_{22}h_u^2(Z, Z) + g_{22}h^2(Z_u, Z_u)) + O(s^3) \\
(g_{12}(s))^2 &= (g_{12} + sh((f_u, Z_v) + (f_v, Z_u)) + s^2(h_u^2(Z, Z) + h^2(Z_u, Z_v)))^2 \\
&= g_{12}^2 + s(hg_{12}(f_u, Z_v) + hg_{12}(f_v, Z_u)) + \\
&\quad s^2(g_{12}h_u^2(Z, Z) + g_{12}h^2(Z_u, Z_v) + h^2(f_u, Z_v)^2 + h^2(f_u, Z_v)(f_v, Z_u) + \\
&\quad h^2(f_v, Z_u)(f_u, Z_v) + h^2(f_v, Z_u)^2) + O(s^3) \\
g_{11}(s)g_{22}(s) - (g_{12}(s))^2 &= g_{11}g_{22} + s(2g_{11}h(f_v, Z_v) + 2g_{22}h(f_u, Z_u)) + \\
&\quad s^2(g_{11}h_v^2(Z, Z) + g_{11}h^2(Z_v, Z_v) + 4h^2(f_u, Z_u)(f_v, Z_v) + g_{22}h_u^2(Z, Z) + \\
&\quad g_{22}h^2(Z_u, Z_u)) + O(s^3) - (g_{12}^2 + s(hg_{12}(f_u, Z_v) + hg_{12}(f_v, Z_u)) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& s^2 \left(g_{12} h_u^2(Z, Z) + g_{12} h^2(Z_u, Z_v) + h^2(f_u, Z_v)^2 + h^2(f_u, Z_v)(f_v, Z_u) + \right. \\
& \left. h^2(f_v, Z_u)(f_u, Z_v) + h^2(f_v, Z_u)^2 \right) + O(s^3) \\
& = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 + \\
& s \left(2g_{11} h(f_v, Z_v) + 2g_{22} h(f_u, Z_u) - h g_{12}(f_u, Z_v) - h g_{12}(f_v, Z_u) \right) + \\
& s^2 \left(g_{11} h_v^2(Z, Z) + g_{11} h^2(Z_v, Z_v) + 4h^2(f_u, Z_u)(f_v, Z_v) + \right. \\
& g_{22} h_u^2(Z, Z) + g_{22} h^2(Z_u, Z_u) - g_{12} h_u^2(Z, Z) - g_{12} h^2(Z_u, Z_v) - \\
& \left. h^2(f_u, Z_v)^2 - 2h^2(f_u, Z_v)(f_v, Z_u) - h^2(f_v, Z_u)^2 \right) + O(s^3)
\end{aligned}$$

Ou seja, $g_{11}(s)g_{22}(s) - (g_{12}(s))^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 + o(s)$. Mas, como $f(M)$ é de tipo espaço então (f_u, f_v) é positiva definida e, portanto, $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0$. Logo, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que se $s \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ então $g_{11}(s)g_{22}(s) - (g_{12}(s))^2 > 0$.

Além disso, $g_{11}(s) = g_{11} + o(s)$. Mas $g_{11} > 0$. Logo, existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que se $s \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$ então $g_{11}(s) > 0$.

Seja $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Assim, se $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ então $g_{11}(s)g_{22}(s) - (g_{12}(s))^2 > 0$ e $g_{11}(s) > 0$. Logo, $(f_u(s), f_v(s))$ é positiva definida e $f(s)(M)$ é de tipo espaço. $\square$

Seja $A(s) = \text{área}(f(s)(Q)) = \int_Q \sqrt{g_{11}(s)g_{22}(s) - (g_{12}(s))^2} du dv$, onde $g_{11}(s) = (f(s)_u, f(s)_u)$, $g_{12}(s) = (f(s)_u, f(s)_v)$ e $g_{22}(s) = (f(s)_v, f(s)_v)$.

Note que, em $s = 0$, estamos com todas as condições da superfície $S = f(M)$, ou seja, dentre outras coisas, temos que $A(0) = \text{área}(\text{região de } S)$.

Vamos, agora, expandir a expressão da área da família de superfícies, para compararmos com aquela em $s = 0$.

S é uma superfície de tipo espaço e, portanto, podemos supor que temos parâmetros isotérmicos, ou seja, $g_{11} = g_{22} = \lambda^2$ e $g_{12} = 0$. Assim, a partir das expressões obtidas acima, temos

$$\begin{aligned}
g_{11}(s)g_{22}(s) - (g_{12}(s))^2 &= \lambda^4 + s \left(2\lambda^2 h(f_v, Z_v) + 2\lambda^2 h(f_u, Z_u) \right) + \\
& s^2 \left(\lambda^2 h_v^2(Z, Z) + \lambda^2 h^2(Z_v, Z_v) + 4h^2(f_u, Z_u)(f_v, Z_v) + \right. \\
& \lambda^2 h_u^2(Z, Z) + \lambda^2 h^2(Z_u, Z_u) - \\
& \left. h^2(f_u, Z_v)^2 - 2h^2(f_u, Z_v)(f_v, Z_u) - h^2(f_v, Z_u)^2 \right) + O(s^3)
\end{aligned}$$

Note que, como $(f_u, Z) = 0$ então $0 = (f_u, Z)_u = (f_{uu}, Z) + (f_u, Z_u)$. Logo, $(f_u, Z_u) = -(f_{uu}, Z)$. Analogamente, $(f_u, Z_v) = -(f_{uv}, Z)$, $(f_v, Z_u) = -(f_{vu}, Z)$ e

$(f_v, Z_v) = -(f_{vv}, Z)$. Do Teorema 2.1.6 temos que $f_{uu} + f_{vv} = 2\lambda^2 H$, onde H é a curvatura média da superfície. Logo, $(f_u, Z_u) + (f_v, Z_v) = -((f_{uu}, Z) + (f_{vv}, Z)) = -2\lambda^2(H, Z)$.

Seja $\star = \lambda^2 h_v^2(Z, Z) + \lambda^2 h^2(Z_v, Z_v) + 4h^2(f_u, Z_u)(f_v, Z_v) + \lambda^2 h_u^2(Z, Z) + \lambda^2 h^2(Z_u, Z_u) - h^2(f_u, Z_v)^2 - 2h^2(f_u, Z_v)(f_v, Z_u) - h^2(f_v, Z_u)^2$. Assim,

$$g_{11}(s)g_{22}(s) - (g_{12}(s))^2 = \lambda^4 + s\left(2\lambda^4 h(-2(H, Z))\right) + s^2(\star) + O(s^3)$$

Deste modo, temos que

$$\begin{aligned} A(s) &= \int \int_Q \sqrt{g_{11}(s)g_{22}(s) - (g_{12}(s))^2} du dv \\ &= \int \int_Q \sqrt{\lambda^4 + s\left(2\lambda^4 h(-2(H, Z))\right) + s^2(\star) + O(s^3)} du dv \\ A'(s) &= \int \int_Q \frac{-4\lambda^4 h(H, Z) + 2s\star + O(s^2)}{2\sqrt{\lambda^4 + s\left(2\lambda^4 h(-2(H, Z))\right) + s^2(\star) + O(s^3)}} du dv \\ A'(0) &= \int \int_Q \frac{1}{2\lambda^2} (-4\lambda^4 h(H, Z)) du dv \\ &= \int \int_Q -2h(H, Z) dM \end{aligned}$$

Deste modo, temos o seguinte teorema imediato:

Teorema 3.1.4 *Seja $S = f(M)$ uma superfície regular de tipo espaço no L^n . Seja $f(s)(u, v)$ a variação normal dada como na equação (3.1), para uma família de superfícies $S(s)$. Seja também $A(s)$, para cada s , a área para tal família, onde $A(0)$ é a área de S . Assim, se $H \equiv 0$ então para toda h , $A'(0) = 0$.*

3.2 Análise da segunda variação da área para τ e ν

A partir do Teorema 3.1.4, já sabemos que se uma superfície é mínima em L^n então $A'(0) = 0$, ou seja, é ponto crítico para o funcional área. O próximo passo neste trabalho é analisar a segunda variação da área para τ e para ν , para $s = 0$.

Na seção anterior, vimos que

$$A'(s) = \int \int_Q \frac{-4\lambda^4 h(H, Z) + 2s\star + O(s^2)}{2\sqrt{\lambda^4 + s\left(2\lambda^4 h(-2(H, Z))\right) + s^2(\star) + O(s^3)}} du dv,$$

onde $\star = \lambda^2 h_v^2(Z, Z) + \lambda^2 h^2(Z_v, Z_v) + 4h^2(f_u, Z_u)(f_v, Z_v) + \lambda^2 h_u^2(Z, Z) + \lambda^2 h^2(Z_u, Z_u) - h^2(f_u, Z_v)^2 - 2h^2(f_u, Z_v)(f_v, Z_u) - h^2(f_v, Z_u)^2$.

Assim, se $H \equiv 0$ então

$$\begin{aligned} A'(s) &= \int \int_Q \frac{1}{2\sqrt{\lambda^4 + s^2(\star)} + O(s^3)} 2s \star + O(s^2) du dv \\ A''(s) &= \int \int_Q \frac{\star \left(\sqrt{\lambda^4 + s^2(\star)} + O(s^3) \right)^2 - (s\star)(2s\star)}{\left(\sqrt{\lambda^4 + s^2(\star)} + O(s^3) \right)^3} + O(s^2) du dv \\ A''(0) &= \int \int_Q \frac{\star \lambda^4}{(\lambda^2)^3} du dv = \int \int_Q \frac{\star}{\lambda^2} du dv. \end{aligned}$$

Para analisarmos o sinal de $A''(0)$, vamos ter, então, de analisar $\star$.

$$\begin{aligned} \star &= \lambda^2 h_v^2(Z, Z) + \lambda^2 h^2(Z_v, Z_v) + 4h^2(f_u, Z_u)(f_v, Z_v) + \lambda^2 h_u^2(Z, Z) + \\ &\quad \lambda^2 h^2(Z_u, Z_u) - h^2(f_u, Z_v)^2 - 2h^2(f_u, Z_v)(f_v, Z_u) - h^2(f_v, Z_u)^2 \\ &= \lambda^2 (h_u^2 + h_v^2)(Z, Z) + \lambda^2 h^2 \left((Z_u, Z_u) + (Z_v, Z_v) \right) + \\ &\quad 4h^2(f_u, Z_u)(f_v, Z_v) - h^2 \left((f_u, Z_v) - (f_v, Z_u) \right)^2 \\ &= \lambda^2 (h_u^2 + h_v^2)(Z, Z) + \lambda^2 h^2 \left((Z_u, Z_u) + (Z_v, Z_v) \right) + \\ &\quad 4h^2(f_{uu}, Z)(f_{vv}, Z) - h^2 \left(-(f_{uv}, Z) + (f_{vu}, Z) \right)^2 \\ &= \lambda^2 (h_u^2 + h_v^2)(Z, Z) + \lambda^2 h^2 \left((Z_u, Z_u) + (Z_v, Z_v) \right) + 4h^2(f_{uu}, Z)(f_{vv}, Z) \\ &= \lambda^2 \|\nabla h\|^2(Z, Z) + h^2 \left[\lambda^2 \left((Z_u, Z_u) + (Z_v, Z_v) \right) + 4(f_{uu}, Z)(f_{vv}, Z) \right] \end{aligned}$$

Seja $m_0 \in M$ um ponto qualquer de M e $V \subset M$ uma vizinhança com fecho compacto de m_0 . Note que $\lambda^2 \left((Z_u, Z_u) + (Z_v, Z_v) \right) + 4(f_{uu}, Z)(f_{vv}, Z)$ é uma função contínua em V . Assim, seja

$$c = \sup_V \left(\frac{\lambda^2 \left((Z_u, Z_u) + (Z_v, Z_v) \right) + 4(f_{uu}, Z)(f_{vv}, Z)}{\lambda^2} \right).$$

Assim,

$$A''(0) \leq \int \int_V \left(\|\nabla h\|^2(Z, Z) + ch^2 \right) dM$$

Para analisarmos o sinal de $A''(0)$ vamos precisar dos resultados a seguir.

Proposição 3.2.1 Se S é uma variedade diferenciável de dimensão m , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $(\cdot, \cdot)$ são métricas riemannianas sobre S , tal que $(\cdot, \cdot) = \rho^2 \langle \cdot, \cdot \rangle$ (isto é, $d\tilde{s}^2 = \rho^2 ds^2$), onde $\rho : S \rightarrow \mathbb{R}$ é C^∞ , com $\rho(p) > 0 (\forall p \in S)$, Δ_S e $\widetilde{\Delta}_S$ são os operadores de Laplace-Beltrami relativos a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $(\cdot, \cdot)$, respectivamente, então se $f \in C^\infty(S)$, temos:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta}_S f &= \frac{1}{\rho^2} \Delta_S f + \frac{m-2}{\rho^2} (d \ln \rho)(\text{grad } f) \\ \text{se } m = 2 \rightarrow \widetilde{\Delta}_S f &= \frac{1}{\rho^2} \Delta_S f\end{aligned}\tag{3.2}$$

Para o problema

$$\begin{cases} \Delta h - \mu h = 0 & \text{em } M \\ h = 0 & \text{em } \partial M, \end{cases}$$

temos que o menor dos autovalores é obtido como sendo

$$\lambda_1(\Delta_S) = \lambda_1(\widetilde{\Delta}_S) = \inf \frac{\int_Q (\widetilde{\Delta}_S h) h \, d\tilde{A}}{\int_Q h^2 \, d\tilde{A}}$$

onde os ínfimos são tomados sobre todas as funções reais h não nulas, no espaço das funções diferenciáveis. [5]

Teorema 3.2.2 Desigualdade de Faber-Krahn. Dado $\Omega \in L^n$ um domínio. Seja $\lambda_1(\Omega)$ o primeiro autovalor associado ao problema

$$\begin{cases} \Delta h - \mu h = 0 & \text{em } \Omega \\ h = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Seja Ω^* a bola centrada em 0 cujo volume é igual ao volume de Ω . Então

$$\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(\Omega^*).$$

Demonstração

Uma prova para este teorema pode ser encontrada em [5]. □

Teorema 3.2.3 Seja $S=f(M)$ uma superfície de tipo espaço no L^4 com vetor curvatura média identicamente nulo. Seja $f(s)(u, v)$ a variação normal dada como na equação 3.1, para uma família de superfícies $S(s)$. Seja também $A(s)$, para cada s , a área para a superfície $S(s)$, onde $A(0)$ é a área de S . Se $Z = \tau$ então existe $\varepsilon > 0$ tal que se $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ então $A(s) < A(0)$; E, se $Z = \nu$ então existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que se $s \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$ então $A(s) > A(0)$.

Demonstração

1º caso: Suponhamos que $Z = \tau$. Neste caso, $(Z, Z) = -1$ e

$$\begin{aligned} A''(0) &\leq \int \int_V \left(-\|\nabla h\|^2 + ch^2 \right) dM \\ &= - \int \int_V \left(\|\nabla h\|^2 - ch^2 \right) dM \end{aligned}$$

Como é bem conhecido (ver [5]), $\lambda_1 = \lambda_1(V) = \inf_{h \in C^\infty} \left(\frac{\int \int_V \|\nabla h\|^2 dM}{\int \int_V h^2 dM} \right)$ é o primeiro autovalor associado ao problema $\Delta h - ch = 0$. Note que, como h se anula no bordo, então

$$\int \int_V \|\nabla h\|^2 dM = \int \int_V h_u^2 + h_v^2 dM = \int \int_V h \Delta h dM,$$

onde Δh é o laplaciano de h , logo,

$$\int \int_V \left(-\|\nabla h\|^2 + ch^2 \right) dM = \int \int_V \left(h \Delta h + ch^2 \right) dM = \int \int_V h(\Delta h + ch) dM.$$

A desigualdade de Faber-Krahn nos permite supor que a vizinhança V é uma bola centrada em 0. Assim, seja ρ o diâmetro da vizinhança V . Considere a métrica $d\tilde{s}^2 = \rho^2 ds^2$, então, pela proposição 3.2.1 temos $\tilde{\Delta} h = \frac{1}{\rho^2} \Delta h$. E, λ_1 e $\tilde{\lambda}_1$ os primeiros autovalores associados a $\Delta h - \mu h = 0$ e a $\tilde{\Delta} h - \tilde{\mu} h = 0$.

Ou seja, $\Delta h - \lambda_1 h = 0$ e $\tilde{\Delta} h - \tilde{\lambda}_1 h = 0$.

Mas, $\Delta h - \lambda_1 h = 0 \Rightarrow \rho^2 \tilde{\Delta} h - \lambda_1 h = 0 \Rightarrow \tilde{\Delta} h - \frac{\lambda_1}{\rho^2} h = 0$, ou seja, $\frac{\lambda_1}{\rho^2}$ é o primeiro autovalor associado ao problema do laplaciano. E, se $\rho \rightarrow 0$ então $\frac{\lambda_1}{\rho^2} \rightarrow \infty$, ou seja, o autovalor do problema tende a infinito.

Além disso,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_1(V) = \inf_{h \in C^\infty} \left(\frac{\int \int_V \|\nabla h\|^2 dM}{\int \int_V h^2 dM} \right) \Rightarrow \\ \lambda_1 &\leq \left(\frac{\int \int_V \|\nabla h\|^2 dM}{\int \int_V h^2 dM} \right) \Rightarrow \\ \int \int_V \|\nabla h\|^2 dM &\geq \lambda_1 \int \int_V h^2 dM \Rightarrow \\ - \int \int_V \|\nabla h\|^2 dM &\leq \int \int_V -\lambda_1 h^2 dM \end{aligned}$$

Logo,

$$A''(0) \leq - \int \int_V \left(\|\nabla h\|^2 - ch^2 \right) dM$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int \int_V \left(-\lambda_1 h^2 + ch^2 \right) dM \\
&= - \int \int_V \left(\lambda_1 h^2 - ch^2 \right) dM \\
&= - \int \int_V h^2 (\lambda_1 - c) dM
\end{aligned}$$

Se diminuo a vizinhança V , diminuo seu diâmetro e portanto $\lambda_1 \rightarrow \infty$ e, portanto, $A''(0) \leq 0$, ou seja, $A(0)$ é um ponto de máximo para o funcional área. Logo, uma variação em S na direção do vetor normal τ não aumenta a área da superfície.

2º caso: Suponhamos que $Z = \nu$. Neste caso, $(Z, Z) = 1$ e

$$\begin{aligned}
A''(0) &= \int \int_V \left(\|\nabla h\|^2 + \frac{\lambda^2 \left((Z_u, Z_u) + (Z_v, Z_v) \right) + 4(f_{uu}, Z)(f_{vv}, Z)}{\lambda^2} h^2 \right) dM \\
&\geq \int \int_V \left(\|\nabla h\|^2 - \left| \frac{\lambda^2 \left((Z_u, Z_u) + (Z_v, Z_v) \right) + 4(f_{uu}, Z)(f_{vv}, Z)}{\lambda^2} h^2 \right| \right) dM \\
&\geq \int \int_V \left(\|\nabla h\|^2 - \frac{\lambda^2 \left((Z_u, Z_u) + (Z_v, Z_v) \right) + 4(f_{uu}, Z)(f_{vv}, Z)}{\lambda^2} h^2 \right) dM \\
&\geq \int \int_V (\|\nabla h\|^2 - ch^2) dM
\end{aligned}$$

Seja $\lambda_1 = \lambda_1(V) = \inf_{h \in C^\infty} \left(\frac{\int \int_V \|\nabla h\|^2 dM}{\int \int_V h^2 dM} \right)$. Do mesmo modo que no primeiro caso, temos $\int \int_V \|\nabla h\|^2 dM \geq \lambda_1 \int \int_V h^2 dM$.

Logo,

$$\begin{aligned}
A''(0) &\geq \int \int_V (\|\nabla h\|^2 - ch^2) dM \\
&\geq \int \int_V (\lambda_1 h^2 - ch^2) dM \\
&= \int \int_V h^2 (\lambda_1 - c) dM.
\end{aligned}$$

Mas, como antes, se diminuo o diâmetro da vizinhança V , então $\lambda_1 \rightarrow \infty$ e, portanto, $A''(0) \geq 0$, ou seja, $A(0)$ é um ponto de mínimo para o funcional área, ou seja, uma variação em S na direção do vetor normal ν não diminui a área da superfície. $\square$

Apêndice A

Cálculos utilizando o programa Maple

Para obtermos exemplos de superfícies mínimas em L^4 utilizamos a representação de Weierstrass, desenvolvida no capítulo 2. Algumas vezes utilizei o software de computação simbólica **Maple** para computar as expressões das parametrizações das superfícies e esboçá-las. Este software possui versões que podem ser executadas em plataformas UNIX (Linux, Solaris etc.) e Windows, sendo que nas duas primeiras temos duas versões totalmente equivalentes, uma em modo texto e outra em modo gráfico. Utilizei a versão 5.1 para sistemas UNIX.

No Maple, um procedimento que gera a representação de Weierstrass de L^4 é

```
> WeierstrassL4 := proc(c,a,b)
local x1, x2, x3, x4, X;
x1:=evalc(2*Re(subs(z=u+I*v, int(c/2*(a+b),z))));
x2:=evalc(2*Re(subs(z=u+I*v, int(c/2*(1+a*b),z))));
x3:=evalc(2*Re(subs(z=u+I*v, int(I*c/2*(1-a*b),z))));
x4:=evalc(2*Re(subs(z=u+I*v, int(c/2*(a-b),z))));
X:=[x1,x2,x3,x4];
end;
```

Assim, por exemplo, se quisermos obter a expressão para a *theta*-família do catenóide de L^4 , que é a superfície obtida pelos parâmetros de Weierstrass $\eta(z) = \frac{-ie^{-z}}{2}$, $a(z) = ie^z$ e $b(z) = e^{i\theta}ie^z$, digitamos no Maple

```
> catenoideL4:=simplify(WeierstrassL4((-I*exp(-z))/2,I*exp(z),
exp(I*theta)*I*exp(z)));
```

E a resposta é

$$\begin{aligned} \text{catenoideL4} &:= \left[\frac{1}{2} u + \frac{1}{2} u \cos(\theta) - \frac{1}{2} \sin(\theta) v, \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} (-\sin(v) e^{(-2u)} + \sin(v) \cos(\theta) + \cos(v) \sin(\theta)) e^u, \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}(\cos(v)e^{(-2u)} - \cos(v)\cos(\theta) + \sin(v)\sin(\theta))e^u, \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}u\cos(\theta) + \frac{1}{2}\sin(\theta)v]$$

Podemos, também calcular a norma de vetores em L^n . A rotina no Maple é

```
> ProdEsc:= proc(X,Y)
local soma, i;
if nops(X) = nops(Y) then do
soma :=0;
soma := - X[1]*Y[1];
for i from 2 to (nops(X)) do soma:=soma+X[i]*Y[i] od;
RETURN(soma);
od;
else print('Vetores de tamanhos diferentes');fi;
end;
```

Se a superfície estiver parametrizada por parâmetros isotérmicos, podemos então calcular o valor de λ . Mas, primeiro temos que garantir que o programa entenda quais variáveis são complexas. Para isso declaramos

```
> assume(a, complex);
> assume(b, complex);
> assume(c, complex);
> assume(u,real); assume(v,real);
assume(theta>=0);additionally(theta<=2*Pi);
```

Agora, definimos $\lambda(z)$

```
> lambda:=proc(c,a,b)
RETURN(1/2 * abs(c)* abs(a * conjugate(b) - 1));
end;
```

Vimos um teorema que relaciona a curvatura gaussiana de uma superfície com λ . Em linguagem de Maple temos

```
> KL4 :=proc(c,a,b)
local l,laplaciano;
l := simplify(eval(evalc(subs(z=u+I*v, lambda(c,a,b)))));
laplaciano := diff(log(l), u, u) + diff(log(l), v, v);
RETURN(- laplaciano /(l*l));
end;
```

Nesta dissertação também obtivemos expressões para os normais τ e ν em função dos parâmetros de Weierstrass $a(z)$ e $b(z)$. Podemos avaliar suas expressões utilizando o maple com o procedimento

```
> tau:= proc(a,b);
RETURN( evalm(1/(abs(1-a*conjugate(b)))*sqrt((1+abs(a)^2)*(1+abs(b)^2)))*
[(1+abs(b)^2)*(1+abs(a)^2),
(1+abs(b)^2)*(Re(a))+(1+abs(a)^2)*(Re(b)),
(1+abs(b)^2)*(Im(a)) + (1+abs(a)^2)*(Im(b)),
abs(a)^2 - abs(b)^2]));
end;
```

```

> nu := proc(a,b);
RETURN(evalc(evalm(1/(abs(1-a*conjugate(b))*sqrt((1+abs(a)^2)*
(1+abs(b)^2)))*[0,
(1+abs(b)^2)*Re(a) - (1+abs(a)^2)*Re(b),
(1+abs(b)^2)*Im(a) - (1+abs(a)^2)*Im(b),
(abs(a)^2)*(abs(b)^2 - 1)])));
end:

```

A partir dos vetores normais τ e ν podemos calcular as curvaturas gaussianas e normal para uma superfície de L^4 .

```

> Kn := proc(c,a,b)
local Tu, Tv, Nu, Nv, L;
Tu := [diff(evalc(subs(z=u+I*v, tau(a,b)[1])),u),
diff(evalc(subs(z=u+I*v, tau(a,b)[2])),u),
diff(evalc(subs(z=u+I*v, tau(a,b)[3])),u),
diff(evalc(subs(z=u+I*v, tau(a,b)[4])),u)];
Tv := [diff(evalc(subs(z=u+I*v, tau(a,b)[1])),v),
diff(evalc(subs(z=u+I*v, tau(a,b)[2])),v),
diff(evalc(subs(z=u+I*v, tau(a,b)[3])),v),
diff(evalc(subs(z=u+I*v, tau(a,b)[4])),v)];
Nu := [diff(evalc(subs(z=u+I*v, nu(a,b)[1])),u),
diff(evalc(subs(z=u+I*v, nu(a,b)[2])),u),
diff(evalc(subs(z=u+I*v, nu(a,b)[3])),u),
diff(evalc(subs(z=u+I*v, nu(a,b)[4])),u)];
Nv := [diff(evalc(subs(z=u+I*v, nu(a,b)[1])),v),
diff(evalc(subs(z=u+I*v, nu(a,b)[2])),v),
diff(evalc(subs(z=u+I*v, nu(a,b)[3])),v),
diff(evalc(subs(z=u+I*v, nu(a,b)[4])),v)];
L := 1/2*abs(subs(z=u+I*v,c))*abs(subs(z=u+I*v,a*conjugate(b)) - 1);
RETURN(evalm(1/(L*L)*(ProdEsc(Nu,Tv)-ProdEsc(Nv,Tu))));
end:

```

O procedimento acima devolve como resposta a curvatura normal em função de u e v , onde $z = u + i v$. Mas, podemos também obter a expressão da curvatura normal para a θ -família de uma superfície, através dos parâmetros de Weierstrass.

```

> KNL4z:= proc(c,a,b)
RETURN(4*abs(c)^4 * sin(theta) * abs(diff(a,z))^2 * (abs(a)^4 - 1) /
lambda(c,a,b)^6);
end:

```

Para a θ -família associada temos um procedimento para o cálculo da curvatura gaussiana.

```

> KL4 :=proc(c,a,b)
local l,laplaciano;
l := simplify(eval(evalc(subs(z=u+I*v, lambda(c,a,b)))));
laplaciano := diff(log(l), u, u) + diff(log(l), v, v);
RETURN(- laplaciano /(l*l));

```

end:

Note que, como $L^3 \subset L^4$ e $\mathbb{R}^3 \subset L^4$ então, se quisermos obter as expressões para os objetos geométricos em L^3 ou em $\mathbb{R}^3$, basta calculá-los para a θ -família associada, e depois substituir $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, respectivamente.

Por exemplo, para a θ -família associada ao catenóide, o vetor norma τ é

```
> simplify(tau(I*exp(z), exp(I*theta)*I*exp(z)));
```

$$\left[\frac{1 + e^{(2\Re(z))}}{\%1}, -\frac{\Im(e^z) + \Im(e^{(z+I\theta^-)})}{\%1}, \frac{\Re(e^z) + \Re(e^{(z+I\theta^-)})}{\%1}, 0 \right]$$

$\%1 := |1 - e^{(2\Re(z))} e^{(-I\theta^-)}|$

Assim, para o catenóide de L^3 o vetor τ é

```
> simplify(subs(theta=0,subs(z=u+I*v,simplify(tau(I*exp(z),
exp(I*theta)*I*exp(z))))));
```

$$\left[\frac{1 + e^{(2u^-)}}{|1 - e^{(2u^-)}|}, -2 \frac{e^{u^-} \sin(v^-)}{|1 - e^{(2u^-)}|}, 2 \frac{e^{u^-} \cos(v^-)}{|1 - e^{(2u^-)}|}, 0 \right]$$

Referências Bibliográficas

- [1] J. L. Barbosa and M. do Carmo. On the size of a stable minimal surface in $\mathbb{R}^3$. *Amer. J. Math.*, 98:515–528, 1976.
- [2] J. L. Barbosa and M. do Carmo. Stability of minimal surfaces and eigenvalues of the laplacian. *Math. Z.*, 173:13–28, 1980.
- [3] J. L. M. Barbosa and A. G. Colares. *Minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$* . Lecture Notes in Mathematics 1195. Springer-Verlag, 1986.
- [4] P. Bérard. *Analysis on Riemannian Manifolds and Geometric Applications: An Introduction*. Monografias de matemática. IMPA, 42 1986.
- [5] P. H. Bérard. *Lectures on Spectral Geometry*. 15º colóquio brasileiro de matemática. IMPA, 1985.
- [6] A. Romero F. J. M. Estudillo. Generalized maximal surfaces in Lorentz-Minkowski space L^3 . *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 111:515–524, 1992.
- [7] A. Romero F. J. M. Estudillo. On the curvature of maximal surfaces in the 3-dimensional Lorentz-Minkowski space. *Math. Helvetici*, 69:1–4, 1994.
- [8] O. Forster. *Lectures on Riemann surfaces*. Springer-Verlag, 1981.
- [9] A. Franco-Filho and P. Simões. The Gauss map of spacelike surfaces of the Minkowski space. Em preparação.
- [10] V. P. Gorokh. The stability of a minimal surface in a pseudo-euclidian space. *J. Soviet Math.*, 53:491–493, 1991.
- [11] V. A. Klyachin and V. M. Miklyukov. Criteria of instability of surfaces of zero mean curvature in wrapped Lorentz products. *Sbornik: Mathematics*, 187-11:1643–1663, 1996.

- [12] O. Kobayashi. Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space L^3 . *Tokyo J. Math.*, 6-2:297–309, 1983.
- [13] O. Kobayashi. Maximal surfaces with conelike singularities. *J. Math. Soc. Japan*, 36:609–617, 1984.
- [14] M. Koiso. *The stability and the Gauss map of minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$* . Lecture Notes in Mathematics - Differential Geometry of submanifolds. Springer-Verlag, 1090:77-92 1984.
- [15] E. L. Lima. *Álgebra Linear*. Coleção Matemática Universitária. IMPA, 1995.
- [16] G. L. Naber. *The geometry of Minkowski spacetime: an introduction to the mathematics of special theory of relativity*. Springer-Verlag, 1992.
- [17] B. O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry with applications to relativity*. Academic Press, 1983.
- [18] J. Oprea. *Differential Geometry and its Applications*. Prentice Hall, 1997.
- [19] R. Osserman. Global properties of classical minimal surfaces. *Duke. Math. J.*, 32:565–573, 1965.
- [20] R. Osserman. *A Survey of minimal surfaces*. Dover Publications, 1986.
- [21] T. Radó. Contributions to the theory of minimal surface. *Acta Litt. Sci. Univ. Szeged*, 6:1–20, 1932.
- [22] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry vol. 4*. Publish or Perish, INC., 1979.
- [23] W. Strauss. *Partial Differential equation: an introduction*. Wiley, 1992.
- [24] F. W. Warner. *Foundations of Diff Manifolds and Lie groups*. Scott, Fresman, 1971.