**Índice de classes de coincidências
em superfícies**

Daniel Vendrúscolo

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Topologia Algébrica**
Orientador: **Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves**

*Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio
financeiro da FAPESP, processo 97/13623-1.*

–São Paulo, 26 de Abril de 2002–

Índice de classes de coincidências em superfícies

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida e
defendida por Daniel Vendrúscolo
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 26 de Abril de 2002.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves (Orientador) - IME - USP
- Profa. Dra. Lucília Daruiz Borsari - IME - USP
- Prof. Dr. Carlos Biasi - ICMC - USP.
- Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Perger - UFSCar
- Prof. Dr. Derek Douglas Jack Hacon - PUC - RJ

Agradecimentos

Ao Prof. Daciberg pelo seu interesse e apoio, além de sua orientação indispensável e precisa.

Ao grupo de topologia algébrica do IME-USP: Daciberg, Lucília, Fernanda, Pedro, Claudemir e Toninho; pela melhor das convivências.

Aos grandes e sinceros amigos que fiz no IME; na esperança que essa amizade realmente nunca se perca.

Ao Bologna e ao Xirim, pois não há como não agradecer.

À Paula, pelo interesse e pela compreensão.

À Liane; que essa ajuda nunca me falte.

Resumo

Nesse trabalho demonstramos alguns resultados sobre limitações para o índice de uma classe de Nielsen de coincidência de aplicações entre superfícies. Usando a definição de índice para o caso não orientável mostramos que quando o domínio tem genus maior do que 1, é diferente do contra-domínio e nenhuma das aplicações é homotópica a um revestimento o índice para as classes de coincidência não é limitado. Além disso provamos que quando o domínio é o toro ou a garrafa de Klein, tais índices são limitados.

Abstract

In this work we present several results about bounds of coincidence indeces of Nielsen coincidence classes of maps between surfaces. We consider the definition of coincidence index in the non orientable case and we prove that when the domain does not have genus 1, is different from the counter-domain and both maps are not homotopic to a covering map, then the coincidence class index is not bounded. We also prove that when the domain is the torus or the Klein bottle these indices are bounded.

Índice

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iii
Introdução	vi
1 Homologia com Coeficientes Locais	1
1.1 Feixe de Grupos	1
1.2 Homologia com Coeficientes Locais	6
1.3 Homologia Relativa	8
1.4 Homologia de um Ponto de Vista Axiomático	9
1.4.1 Homotopias em $\mathbb{L}$	10
1.4.2 “Axiomas”	10
1.5 Sequência de Mayer-Vietoris	12
1.6 Cohomologia com Coeficientes Locais	18
1.6.1 Cohomologia de um Ponto de Vista Axiomático	19
1.7 Alguns Exemplos	20
1.7.1 O Plano Projetivo	21

1.7.2	A Garrafa de Klein	24
1.8	$H_n(M; \tilde{\mathbb{Z}})$	29
2	Preliminares	34
2.1	Grau de Aplicações	34
2.2	Aplicações Fiéis à Orientação	36
2.3	Classes de Coincidências	36
2.4	Índice e Número de Lefschetz	38
2.5	Número de Lefschetz em Superfícies	40
3	O caso orientável	44
3.1	Aplicações do Toro	46
3.1.1	Um pouco da geometria de S_g	47
3.1.2	Forma padrão de $f : S_1 \mapsto S_g$	48
4	O caso não orientável	54
4.1	Aplicações de $K_h \mapsto K_g$	54
4.1.1	A garrafa de Klein	54
4.1.2	$h \geq 1$	57
4.2	Aplicações de $K_h \mapsto P_g$	71
4.3	Outros Casos	78
4.4	Alguns Resultados com Limitação	78
4.4.1	Recobrimentos	78
4.4.2	$B_K(g, g, 0, 1)$ e $B_P(g, g, 0, 1)$	80
	Referências Bibliográficas	81

Introdução

O objetivo desse trabalho é apresentar alguns resultados sobre a limitação ou não dos índices de classes de Nielsen de coincidências para aplicações entre superfícies orientáveis ou não. O aparecimento dessa questão ocorreu, inicialmente, no contexto de ponto fixo.

Os primeiros resultados sobre limitação para índice de pontos fixos apareceram no estudo de homeomorfismos de superfícies (ver [Simon], [Pelikan & Slaminka] e [Jiang & Guo] por exemplo). Em [Jiang 2], [Kelly 1] e [Kelly 2] são apresentados alguns resultados sobre limitações para índices de classes de Nielsen de ponto fixo para auto-aplicações de superfícies com ou sem bordo.

Nesse contexto desponta naturalmente a questão sobre a validade de tais resultados para coincidências de um par de aplicações. Em [Brooks] ou [BBPT] podemos encontrar resultados sobre a limitação para índices de classes de coincidência para pares de aplicações no toro. Mais recentemente, em [Gonçalves & Jiang], encontramos resultados negativos sobre limitações para o índice de uma classe de coincidência em um grande espectro de casos para aplicações entre superfícies orientáveis, além de alguns resultados positivos em situações específicas.

Para superfícies não orientáveis a questão da limitação para o índice de classes de coincidência é precedida pela questão da definição de tal índice. Em [Dold] encontramos a definição de índice de ponto fixo para ENRs e sabe-se que tal definição não pode ser estendida para coincidências. Em [Gonçalves] obtemos uma versão, “via” obstrução, de um índice para coincidências não só para variedades não orientáveis mas para uma classe bem geral de aplicações de um complexo em uma variedade. Simultaneamente em [Dobreńko & Jezierski] desenvolveu-se uma definição “geométrica” de índice para classes de Nielsen de coincidências para aplicações entre variedades diferenciáveis. Na sequência, em [Jezierski], é apresentada uma versão de tal índice para variedades topológicas e em [Gonçalves & Jezierski]

encontramos uma “fusão” das duas vertentes quando uma das aplicações é *fiel à orientação*¹.

Para o estudo específico de superfícies, [Gonçalves & Oliveira] nos fornece fórmulas para o cálculo do número de Lefschetz quando uma das aplicações é *fiel à orientação*.

No início desse trabalho (Capítulo 1) apresentamos de maneira sucinta a teoria de Homologia com Coeficientes Locais que é a principal ferramenta para a construção de um índice de coincidência e de um número de Lefschetz no caso não orientável. No Capítulo 2 apresentamos alguns resultados de [Gonçalves & Jezierski] e [Gonçalves & Oliveira] que serão úteis posteriormente além da definição de grau de uma aplicação entre variedades não orientáveis ([Olm 2]).

No Capítulo 3 tratamos de algumas situações entre superfícies orientáveis que ainda não estavam completas na literatura e finalmente no Capítulo 4 apresentamos os resultados obtidos para aplicações entre superfícies não necessariamente orientáveis com a restrição de uma das aplicações ser *fiel à orientação*. Cabe ressaltar que os resultados obtidos são bastante semelhantes aos existentes para o caso orientável.

¹Definição na página 36

Homologia com Coeficientes Locais

Nesse capítulo apresentaremos a teoria básica de homologia e cohomologia com coeficientes locais, tal teoria será usada posteriormente quando estudarmos aplicações entre superfícies não orientáveis. As referências para esse tema são [Whitehead], [Baues], [Olum 1], [Olum 2], [Steenrod 1] e [Steenrod 2].

1.1 Feixe de Grupos

Sendo B um espaço topológico e denotando-se por $\Pi_1(B)$ a categoria cujos objetos são os pontos de B e os morfismos são dados por elementos dos conjuntos $\pi_1(B; b_1, b_2)$ (classe de homotopia das curvas em B de b_1 até b_2), podemos definir:

Definição 1.1. *Um feixe de grupos (abelianos) é um funtor contravariante G de $\Pi_1(B)$ em $\mathfrak{G}$ a categoria dos grupos, ($\mathfrak{A}$, a categoria dos grupos abelianos).*

Dessa forma para cada $b \in B$, $G(b)$ é um grupo (abeliano) e para cada classe $\xi \in \pi_1(B; b_1, b_2)$, $G(\xi) : G(b_2) \rightarrow G(b_1)$ é um homomorfismo de grupos (abelianos) satisfazendo:

1. se $\xi \in \pi_1(B; b) = \pi_1(B; b, b)$ é a identidade então

$$G(\xi) : G(b) \rightarrow G(b)$$

é a identidade.

2. se $\xi \in \pi_1(B; b_1, b_2)$ e $\eta \in \pi_1(B; b_2, b_3)$, então

$$G(\xi\eta) = G(\xi) \circ G(\eta) : G(b_3) \rightarrow G(b_1).$$

Segue daí que:

3. se $\xi \in \pi_1(B; b_1, b_2)$, então

$$G(\xi^{-1}) = G(\xi)^{-1} : G(b_1) \rightarrow G(b_2)$$

assim $G(\xi)$ é um isomorfismo.

Em outras palavras G pode ser pensado como um funtor que para qualquer ponto de B associa um grupo fixado (mas vistos de maneira distinta) e para cada classe de homotopia em $\pi_1(B; b_1, b_2)$ associa um automorfismo desse grupo (mas devemos ressaltar que $G(b_1)$ e $G(b_2)$ estão sendo vistos de maneira distinta).

No caso de G ser um funtor com imagem nos grupos abelianos dizemos que G é um **Sistema de Coeficientes Locais**.

Definição 1.2. Se G e H são feixes de grupos, um **homomorfismo de feixes de grupos** $\Phi : G \rightarrow H$ é uma transformação natural de funtores, ou seja, uma aplicação que para cada $b \in B$ associa $\phi(b) : G(b) \rightarrow H(b)$ um homomorfismo que torna o diagrama

$$\begin{array}{ccc} G(b_2) & \xrightarrow{G(\xi)} & G(b_1) \\ \Phi(b_2) \downarrow & & \downarrow \Phi(b_1) \\ H(b_2) & \xrightarrow{H(\xi)} & H(b_1) \end{array}$$

comutativo para qualquer $\xi \in \pi_1(B; b_1, b_2)$.

Definição 1.3. Φ é um isomorfismo de feixes de grupos se e somente se cada $\Phi(b)$ for um isomorfismo.

Observamos que se G é um feixe de grupos em B então $\pi_1(B, b_0)$ age em $G(b_0)$. Além disso se $\pi_1(B, b_0)$ age em um grupo G_0 e se B é conexo por caminhos, então existe um feixe G em B (único a menos de isomorfismos) tal que $G(b_0) = G_0$ e G induz a mesma ação em $G(b_0)$. Mais especificamente temos os seguintes resultados:

Teorema 1.4. Se B é conexo por caminhos, G e G' feixes em B e se $\phi : G(b_0) \rightarrow G'(b_0)$ é um isomorfismo que respeita a ação de $\pi_1(B, b_0)$. Então existe um único isomorfismo $\Phi : G \rightarrow G'$ tal que $\Phi(b_0) = \phi$.

Demonstração: Para cada $b \in B$ escolhemos um elemento $\xi(b) \in \pi_1(B; b_0, b)$; assumimos que $\xi(b_0) = 1$ (a identidade em $\pi_1(B, b_0)$).

Definimos $\Phi(b) : G(b) \rightarrow G'(b)$ por:

$$\Phi(b) = G'(\xi(b))^{-1} \circ \phi \circ G(\xi(b))$$

e assim, se $\eta \in \pi_1(B; b_1, b_2)$ temos

$$\Phi(b_1) \circ G(\eta) = G'(\xi(b_1))^{-1} \circ \phi \circ G(\xi(b_1)) \circ G(\eta) = G'(\xi(b_1))^{-1} \circ \phi \circ G(\xi(b_1)\eta)$$

e

$$G'(\eta) \circ \Phi(b_2) = G'(\eta) \circ G'(\xi(b_2))^{-1} \circ \phi \circ G(\xi(b_2)) = G'(\eta\xi(b_2)^{-1}) \circ \phi \circ G(\xi(b_2)).$$

Sendo $\alpha = \xi(b_1)\eta\xi(b_2)^{-1}$ temos que $\alpha \in \pi_1(B; b_0)$ e como ϕ respeita a ação de $\pi_1(B, b_0)$ temos:

$$\phi \circ G(\alpha) = G'(\alpha) \circ \phi$$

e assim:

$$\begin{aligned} \Phi(b_1) \circ G(\eta) &= G'(\xi(b_1))^{-1} \circ \phi \circ g(\alpha\xi(b_2)) \\ &= G'(\xi(b_1))^{-1} \circ \phi \circ G(\alpha) \circ G(\xi(b_2)) \\ &= G'(\xi(b_1))^{-1} \circ G'(\alpha) \circ \phi \circ G(\xi(b_2)) \\ &= G'(\xi(b_1)^{-1}\alpha) \circ \phi \circ G(\xi(b_2)) \\ &= G'(\eta\xi(b_2)^{-1}) \circ \phi \circ G(\xi(b_2)) \\ &= G'(\eta) \circ \Phi(b_2) \end{aligned}$$

Desse modo temos que Φ é uma transformação natural:

$$\begin{aligned} \Phi &= G'(\xi(b_0))^{-1} \circ \phi \circ G(\xi(b_0)) \\ &= G'(1)^{-1} \circ \phi \circ G(1) \\ &= \phi. \end{aligned} \tag{1.1}$$

A unicidade da Φ segue do fato que se $b \in B$ e se ξ é uma curva de b_0 até b o diagrama

$$\begin{array}{ccc} G(b) & \xrightarrow{G(\xi)} & G(b_0) \\ \Phi(b) \downarrow & & \downarrow \phi \\ G'(b) & \xrightarrow{G'(\xi)} & G'(b_0) \end{array}$$

é comutativo e teremos:

$$\Phi(b) = G'(\xi)^{-1} \circ \phi \circ G(\xi).$$

□

Teorema 1.5. *Se B é conexo por caminhos, $\mathbb{G}$ grupo no qual $\pi_1(B; b_0)$ age. Então existe G , feixe de grupos em B tal que $G(b_0) = \mathbb{G}$ e que induz a ação de $\pi_1(B; b_0)$ em $G(b_0)$.*

Demonstração: Novamente para cada $b \in B$ escolhemos um elemento $\xi(b) \in \pi_1(B; b_0, b)$, com $\xi(b_0) = 1$.

Se $G(b) = \mathbb{G}$ para todo $b \in B$ e se $\eta \in \pi_1(B; b_1, b_2)$ então $\xi(b_1)\eta\xi(b_2)^{-1} \in \pi_1(B; b_0)$, assim temos que:

$$\xi(b_1)\eta\xi(b_2)^{-1} : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$$

pois $\pi_1(B; b_0)$ age em $\mathbb{G}$.

Podemos então definir:

$$G(\eta) = \xi(b_1)\eta\xi(b_2)^{-1} : G(b_2) = \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G} = G(b_1).$$

Nessas condições temos que:

1. Se $b_1 = b_2$ e se $\eta = 1 \in \pi_1(B; b_1)$ então $\xi(b_1)\eta\xi(b_1)^{-1} = 1$, ou seja $G(\eta) = 1$.
2. Se $\delta \in \pi_1(B; b_2, b_3)$ temos que

$$(\xi(b_1)\eta\xi(b_2)^{-1})(\xi(b_2)\delta\xi(b_3)^{-1}) = \xi(b_1)\eta\delta\xi(b_3)^{-1}$$

ou seja $G(\eta\delta) = G(\eta) \circ G(\delta)$.

Portanto G é um feixe de grupos em B e se $b_1 = b_2 = b_0$, $\eta \in \pi_1(B; b_0)$ temos que $\xi(b_1)\eta\xi(b_2)^{-1} = \eta$, o que mostra que G induz a mesma ação em $G(b_0)$. $\square$

Vejam agora alguns exemplos:

Exemplo 1.6. *Um grupo $\mathbb{G}$ determina um feixe de grupos G constante:*

- $G(b) = \mathbb{G} \quad \forall b \in B$.
- $G(\xi) = id \quad \forall \xi \in \pi_1(B; b_1, b_2)$.

Definição 1.7. *Um feixe de grupos G é dito simples se G é isomorfo a um feixe constante.*

É fácil ver que:

Proposição 1.8. *Um feixe de grupos G é simples se, e somente se, $G(\xi)$ independe de ξ .* $\square$

Exemplo 1.9. G associa a cada ponto $b \in B$ o grupo de homotopia $\pi_n(B, b)$ e a cada elemento $\xi \in \pi_1(B; b)$ a ação usual de $\pi_1(B; b)$ em $\pi_n(B, b)$.

Esse feixe em B é denotado $\Pi_n(B)$.

Exemplo 1.10. Se $B \subset A$ podemos, de maneira análoga ao exemplo 1.9, construir o feixe $\Pi_n(A, B)$ em B .

Exemplo 1.11. Se $p : X \rightarrow B$ é uma fibração então os grupos de homologia $H_n(F_b)$ das fibras com a ação usual de $\pi_1(B)$ em $H_n(F_b)$ formam um sistema de coeficientes locais em B .

Lembrando que se $\xi \in \pi_1(X)$, $\text{signal}(\xi) = 1$ ou -1 conforme ξ preserve ou reverta a orientação local de X temos:

Exemplo 1.12. Se X é uma n -variedade conexa, tomando-se, para cada $x \in X$, $G(x) = H_n(X, X \setminus \{x\}; \mathbb{G})$ e tomando-se a ação de $\pi_1(X)$ em $G(x) = H_n(X, X \setminus \{x\}; \mathbb{G})$ dada por:

$$G(\xi)(g) = \begin{cases} g & \text{se } \text{signal}(\xi) = 1 \\ -g & \text{se } \text{signal}(\xi) = -1 \end{cases}$$

Então G é o sistema de coeficientes locais dado pela orientação de X com valores em G .

Observação 1.13. Quando $\mathbb{G} \approx \mathbb{Z}$ denotaremos G por $\tilde{\mathbb{Z}}$ e se $\mathbb{G} \approx \mathbb{Q}$, G será denotado $\tilde{\mathbb{Q}}$. Vale a pena observar que se X é orientável o sistema de coeficientes locais dado pela orientação de X coincide com o usual.

Observação 1.14. Se $\mathbb{G} \approx \mathbb{Z}_2$ o sistema de coeficientes locais induzido pela orientação corresponde ao feixe de grupos simples com valores em $\mathbb{Z}_2$.

Se A e B são espaços topológicos e $f : A \rightarrow B$ é uma aplicação a composição com f induz um funtor $F : \Pi_1(A) \rightarrow \Pi_1(B)$. Categoricamente falando Π_1 é um funtor dos espaços topológicos nos grupóides e $\Pi_1(f) = F$. Se G é um feixe de grupos em B temos que $G \circ F$ é um feixe de grupos em A (note que $G : \Pi_1(B) \rightarrow \mathfrak{G}$ e $G \circ F : \Pi_1(A) \rightarrow \mathfrak{G}$).

Definição 1.15. O feixe $f^*(G) = G \circ F$ sobre A é chamado feixe induzido pela f .

Teorema 1.16. Se $f : A \rightarrow B$ e $G : B \rightarrow C$ são aplicações e H é um feixe de grupos sobre C então $(g \circ f)^*(H) = f^*(g^*(H))$.

Demonstração: Segue diretamente da definição. $\square$

Se B é conexo por caminhos e admite recobrimento universal temos que se $b_0 \in B$ e se G é um feixe de grupos sobre B , tomando-se o subgrupo $K = \{\eta \in \pi_1(B, b_0) \mid G(\eta) = id \text{ em } G(b_0)\} \subset \pi_1(B, b_0)$ e usando a teoria de espaços de recobrimento temos que existe $p : \tilde{B} \rightarrow B$, recobrimento de B e $\tilde{b}_0 \in p^{-1}(b_0)$ tais que $p_*(\pi_1(\tilde{B}, \tilde{b}_0)) = K$. É fácil ver que:

Proposição 1.17. *Nas condições acima $p^*(G)$ é simples.* $\square$

Também é fácil ver que:

Proposição 1.18. *Seja $p : X \rightarrow B$ uma fibração com fibras n -simples. Se $f : B' \rightarrow B$ é uma aplicação e se $p' : X' \rightarrow B'$ é a fibração induzida por f então os sistemas de coeficientes locais $\pi_n(\mathfrak{F})$ e $\pi_n(\mathfrak{F}')$ estão relacionados pela expressão:*

$$\pi_n(\mathfrak{F}) = f^* \pi_n(\mathfrak{F}').$$

$\square$

Vale lembrar que na Proposição acima temos $X' = \{(b', x) \in B' \times X \mid f(b') = p(x)\}$ e temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & X \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

onde f' e p' são as projeções.

1.2 Homologia com Coeficientes Locais

Se X é um espaço topológico e G um sistema de coeficientes locais (um feixe de grupos abelianos), definimos $C_q(X; G)$ como o conjunto de todas as funções c definidas nos q -simplexos singulares de X que satisfazem:

1. Para cada q -simplexo singular $u : \Delta^q \rightarrow X$, $c(u)$ está definida e $c(u) \in G(u(e_0))$.
2. O conjunto dos q -simplexos singulares u tais que $c(u) \neq 0$ é finito.

Os elementos de $C_q(X; G)$ são as q -cadeias singulares com coeficientes em G .

Definição 1.19. Uma cadeia singular c é dita **elementar** se $c(u) \neq 0$ para, no máximo, um simplexo singular u .

Notação: c uma q -cadeia singular elementar será denotada $c = c(u) \cdot u$.

Cada $c \in C_q(X; G)$ pode ser escrito como uma soma finita:

$$c = \sum_{i=1}^m g_i u_i$$

onde u_i são simplexos singulares e $g_i \in G(u_i(e_0))$.

Para definirmos um “operador bordo” em $C_*(X; G)$ vamos introduzir alguma notação mais precisa.

Se $\mu : \Delta^n \rightarrow X$ é um simplexo singular temos que $\partial_i \mu$ é definido como a i -ésima face de μ (obtida “retirando-se o i -ésimo vértice de μ ”), mais formalmente temos que se e_i , $i = 0, \dots, n$, são os vértices de Δ^n tomando-se $d_i^n : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$ uma aplicação afim satisfazendo:

$$d_i^n(e_j) = \begin{cases} e_j & \text{se } j < i \\ e_{j+1} & \text{se } j \geq i, \end{cases}$$

obtemos :

$$\partial_i \mu = \mu \circ d_i^n.$$

Dessa forma observamos que:

$$\partial_i \mu(e_0) = \begin{cases} \mu(e_0) & \text{se } i > 0 \\ \mu(e_1) & \text{se } i = 0 \end{cases}$$

e uma definição para um “operador bordo” do tipo

$$\partial(g\mu) = \sum_{i=0}^n (-1)^i g \partial_i \mu$$

não é possível pois $g \in G(\mu(e_0))$ mas, em geral, $g \notin G(\partial_0 \mu(e_0))$.

Uma formulação que se mostrará útil é obtida se notarmos que se $\gamma : I \rightarrow X$ é dada por $\gamma(t) = \mu((1-t)e_1 + te_0)$ (curva de $\mu(e_1)$ até $\mu(e_0)$) então a classe de homotopia de γ induz um isomorfismo $G(\sigma_\mu) : G(\mu(e_0)) \rightarrow G(\mu(e_1))$ e assim podemos definir:

$$\partial(g\mu) = G(\sigma_\mu)(g) \cdot \partial_0 \mu + \sum_{i=1}^n (-1)^i g \partial_i \mu.$$

$\partial\partial(g\mu) = 0$ decorre do fato de $\sigma_{\partial_i\mu} = \sigma_\mu$ se $i > 1$ e $\sigma_{\partial_1\mu} = \sigma_{\partial_0\mu} \circ \sigma_\mu$ (pois as curvas correspondentes são homotópicas).

Dessa forma $C_*(X; G)$ é um complexo de cadeia e definimos:

$$H_q(X; G) = H_q(C_*(X; G))$$

o Grupo de Homologia com Coeficientes Locais em G .

Teorema 1.20. *Se o espaço X é conexo por caminhos e G é simples, então $H_q(X; G) = H_q(X; G_0)$ (grupo de homologia “tradicional”) onde $G_0 = G(x_0)$ para algum $x_0 \in X$.*

Demonstração: Decorre diretamente da definição de feixe simples. $\square$

Nesse sentido os grupos de homologia com coeficientes locais, que como veremos posteriormente refletem melhor a geometria do espaço, são uma generalização dos grupos de homologia ordinários.

1.3 Homologia Relativa

Se $A \subset X$ denotaremos por $i : A \hookrightarrow X$ a inclusão e por $G|_A$ o feixe i^*G induzido por ela. Se $c = \sum g_j \mu_j \in C_q(A; G|_A)$ temos que $\mu_j : \Delta^q \rightarrow A$ e $g_j \in (i^*G)(\mu_j(e_0)) = G((i \circ \mu_j)(e_0)) = G(\mu'_j(e_0))$, onde $\mu'_j = i \circ \mu_j : \Delta^q \rightarrow X$.

Dessa forma podemos definir um monomorfismo $i_\# : C_q(A; G|_A) \rightarrow C_q(X; G)$ por:

$$i_\#(c) = \sum g_j \mu'_j \in C_q(X; G).$$

Como $C_q(A; G|_A)$ é um subgrupo de $C_q(X; G)$ temos que $C_*(A; G|_A)$ é um sub-complexo de cadeia.

Definimos então:

$$C_q(X, A; G) = \text{coker}(i_\#) = \frac{C_q(X; G)}{C_q(A; G|_A)}$$

e temos a sequência exata curta:

$$0 \rightarrow C_*(A; G|_A) \rightarrow C_*(X; G) \rightarrow C_*(X, A; G) \rightarrow 0.$$

Finalmente definindo $H_q(X, A; G) = H_q(C_*(X, A; G))$ obtemos os grupos de homologia relativos e, conseqüentemente, a sequência exata longa em homologia:

$$\cdots \rightarrow H_{q+1}(X, A; G) \xrightarrow{\partial_*} H_q(A; G|_A) \xrightarrow{i_*} H_q(X; G) \xrightarrow{j_*} H_q(X, A; G) \rightarrow \cdots$$

Se G e H são sistemas de coeficientes locais em X e se $\Phi : G \rightarrow H$ é um homomorfismo então Φ induz um homomorfismo $\Phi_{\#} : C_*(X; G) \rightarrow C_*(X; H)$ dado por:

$$\Phi_{\#}(\sum g_i \mu_i) = \sum \Phi(\mu_i(e_0)) g_i \mu_i.$$

Claramente $\Phi_{\#}$ é uma aplicação de cadeia. Além disso se $A \subset X$ então $\Phi_{\#}|_{C_*(A; G|_A)} : C_*(A; G|_A) \rightarrow C_*(A; H|_A)$ e assim Φ induz uma aplicação $\Phi_* : H_q(X, A; G) \rightarrow H_q(X, A; H)$.

Seja $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ e G um sistema de coeficientes locais em Y . f induz uma $f_{\#} : C_*(X; f^*G) \rightarrow C_*(Y; G)$ que, restrita a $C_*(A; f^*G|_A)$ tem imagem em $C_*(B; G|_B)$.

Se F é um sistema de coeficiente locais em X e $\Phi : F \rightarrow f^*G$ é um homomorfismo, podemos compor $\Phi_{\#}$ com $f_{\#}$ para obter uma aplicação de $C_*(X; F)$ em $C_*(Y; G)$; tal aplicação também pode ser restrita a $C_*(A; F|_A)$, ainda com imagem em $C_*(B; G|_B)$. Dessa forma a composta acima induz um homomorfismo de $H_q(X, A; F)$ em $H_q(Y, B; G)$.

1.4 Homologia de um Ponto de Vista Axiomático

Para traduzir as definições acima para a linguagem categórica precisamos de algumas definições e notações.

Definição 1.21. *Um espaço topológico X é Compactamente Gerado quando para qualquer $A \subset X$ que satisfaça: $A \cap C$ é fechado para todo $C \subset X$ compacto, temos que A é fechado em X .*

Seja $\mathbb{K}$ a categoria cujos elementos são os espaços compactamente gerados e cujos morfismos são as funções contínuas. Definimos $\mathbb{L}$ como a categoria formada pelas triplas $(X, A; G)$ como elementos, com (X, A) um par em $\mathbb{K}$ e G é um sistema de coeficientes locais em X .

Um morfismo $\phi : (X, A; G) \rightarrow (Y, B; H)$ de $\mathbb{L}$ é um par (ϕ_1, ϕ_2) tal que:

- $\phi_1 : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ é uma função contínua entre pares.
- $\phi_2 : G \rightarrow \phi_1^*H$ é um homomorfismo de sistemas de coeficientes locais.

Se $\psi : (Y, B; H) \rightarrow (Z, C; K)$ é outro morfismo de $\mathbb{L}$ então $\omega = \psi \circ \phi$ também é um morfismo de $\mathbb{L}$ com $\omega_1 = \psi_1 \circ \phi_1$ e $\omega_2 = (\phi_1^* \psi_2) \circ \phi_2$, onde $\phi_1^* \psi_2 : \phi_1^*H \rightarrow \phi_1^* \psi_1^*K$ é um homomorfismo tal que:

$$\phi_1^* \psi_2(x) = \psi_2(\phi_1(x)) : (\phi_1^*H)(x) = H(\phi_1(x)) \rightarrow (\phi_1^* \psi_1^*K)(x) = K(\omega_1(x)).$$

1.4.1 Homotopias em $\mathbb{L}$

Sejam $i_t : X \rightarrow I \times X$ e $p : I \times X \rightarrow X$ dadas por $i_t(x) = (t, x)$ e $p(t, x) = x$ temos:

Definição 1.22. O Prisma, $I \times (X, A; G)$ de um objeto $(X, A; G)$ de $\mathbb{L}$ é o objeto $(I \times X, I \times A; p^*G)$ também em $\mathbb{L}$.

Sejam $\phi, \psi : (X, A; G) \rightarrow (Y, B; H)$ aplicações em $\mathbb{L}$.

Definição 1.23. Uma Homotopia entre ϕ e ψ é uma aplicação $\lambda : I \times (X, A; G) \rightarrow (Y, B; H)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, tal que:

- $\lambda_1 : (I \times X, I \times A) \rightarrow (Y, B)$ é uma homotopia (ordinária) entre ϕ_1 e ψ_1 .
- $\lambda_2 : p^*G \rightarrow \lambda_1^*H$ é um homomorfismo de sistemas de coeficientes locais satisfazendo:

1. $i_0^* \lambda_2 = \phi_2 : G \rightarrow \phi^*H$.
2. $i_1^* \lambda_2 = \psi_2 : G \rightarrow \psi^*H$.

Dizemos que ϕ e ψ são homotópicas ($\phi \simeq \psi$) se existir uma homotopia entre elas.

Proposição 1.24. Homotopia é uma relação de equivalência nos morfismos de $\mathbb{L}$.

Demonstração: Decorre facilmente da definição. □

Também é fácil ver que:

Proposição 1.25. Se $\phi \simeq \psi : (X, A; F) \rightarrow (Y, B; G)$ e $\phi' \simeq \psi' : (Y, B; G) \rightarrow (Z, C; H)$ então:

$$\phi' \circ \phi \simeq \psi' \circ \psi : (X, A; F) \rightarrow (Z, C; H).$$

□

1.4.2 “Axiomas”

Definição 1.26. O Operador “Shift” é um funtor $R : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$ definido nos objetos de $\mathbb{L}$ por:

$$R(X, A; G) = (A, \emptyset; G|_A),$$

e para $\phi : (X, A; G) \rightarrow (Y, B; K)$ morfismo $R(\phi) = \psi$ satisfazendo:

- $\psi_1 : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ é a restrição de ϕ_1 . Em outras palavras:

$$j \circ \psi_1 = \phi_1 \circ i$$

onde $i : A \hookrightarrow X$ e $j : B \hookrightarrow Y$ são as inclusões.

- $\psi_2 = i^* \phi_2 : G|_A = i^* G \rightarrow i^* \phi_1^* H = \psi_1^* j^* H = \psi_1^*(H|_B)$.

Podemos agora considerar $H_q : \mathbb{L} \rightarrow \mathfrak{A}$ como uma seqüência de funtores, além disso temos $\partial_q : H_q \rightarrow H_{q-1} \circ R$ uma transformação natural. Definindo a inclusão em $\mathbb{L}$ de maneira natural $((X_1, A_1; G_1) \xrightarrow{k} (X, A; G)$ com $X_1 \subset X$, $A_1 \subset A$, k_1 a inclusão natural de X_1 em X , $G_1 = G|_{X_1}$ e $k_2 : G_1 \rightarrow G|_{X_1}$ a identidade) obtemos $H_q(k) : H_q(X_1, A_1; G_1) \rightarrow H_q(X, A; G)$ uma injeção. Podemos agora enunciar uma lista de propriedades análogas aos axiomas de Eilenberg-Steenrod.

Teorema 1.27. *Os funtores H_* e as transformações naturais ∂_* satisfazem as seguintes propriedades:*

1. **Exatidão** Se $(X, A; G)$ é um objeto em $\mathbb{L}$, i e j as inclusões apropriadas então a seqüência:

$$\cdots \rightarrow H_{q+1}(X, A; G) \xrightarrow{\partial_{q+1}} H_q(A; G|_A) \xrightarrow{H_q(i)} H_q(X; G) \xrightarrow{H_q(j)} H_q(X, A; G) \rightarrow \cdots,$$

é exata.

2. **Invariância** Se $\phi_0, \phi_1 : (X, A; G) \rightarrow (Y, B; H)$ são morfismos homotópicos em $\mathbb{L}$ então

$$H_q(\phi_0) = H_q(\phi_1) : H_q(X, A; G) \rightarrow H_q(Y, B; H),$$

para todo q .

3. **Excisão** Se $(X; X_1, X_2)$ é uma tríade em $\mathbb{K}$ tal que $X = \text{Int}X_1 \cup \text{Int}X_2$ e se G é um sistema de coeficientes locais em X , então a injeção $H_q(X_1, X_1 \cap X_2; G|_{X_1}) \rightarrow H_q(X, X_2; G)$ é um isomorfismo para todo q .

4. **Homologia do Ponto** Se $X = \{*\}$, um único ponto, então:

$$H_q(X; G) = \begin{cases} 0 & \text{se } q \neq 0 \\ G(*) & \text{se } q = 0. \end{cases}$$

5. **Aditividade** Se X é a união disjunta de uma família de abertos X_α , A um subconjunto de X , $A_\alpha = A \cap X_\alpha$, G um sistema de coeficientes locais em X e $G_\alpha = G|_{X_\alpha}$. Então as injeções

$$H_q(X_\alpha, A_\alpha; G_\alpha) \rightarrow H_q(X, A; G)$$

representam $H_q(X, A; G)$ como uma soma direta.

Demonstração: Análoga a demonstração feita no caso ordinário. □

1.5 Sequência de Mayer-Vietoris

Para construirmos a sequência de Mayer-Vietoris usaremos dois lemas algébricos:

Lema 1.28. *Se no seguinte diagrama de grupos abelianos e homomorfismos:*

os triângulos forem comutativos, h e k forem isomorfismos, $\text{Im}(i) = \text{Ker}(g)$ e $\text{Im}(j) = \text{Ker}(f)$ então os dois homomorfismos:

$$\phi : A \oplus B \rightarrow X \quad \text{e} \quad \psi : X \rightarrow C \oplus D$$

definidos por:

$$\begin{aligned}
 \phi(x, y) &= i(x) + j(y), \quad (x, y) \in A \oplus B; \\
 \psi(x) &= (f(x), g(x)), \quad x \in X
 \end{aligned}$$

são isomorfismos.

Demonstração: [Hu, I, 7.1, página 39].

□

Lema 1.29. *Se no seguinte diagrama de grupos abelianos e homomorfismos:*

os triângulos forem comutativos, k_1 e k_2 forem isomorfismos, $\text{Im}(i_1) = \text{Ker}(j_2)$ e $\text{Im}(i_2) = \text{Ker}(j_1)$ então:

1. O homomorfismo $i_1 \circ k_1^{-1} \circ j_1 + i_2 \circ k_2^{-1} \circ j_2 : H \rightarrow H$ é a identidade.
2. $h_1 \circ k_1^{-1} \circ l_1 + h_2 \circ k_2^{-1} \circ l_2 = g \circ f$.

Demonstração: [Hu, II, 9.1, página 106]. □

Trivialmente temos:

Corolário 1.30. Nas condições acima se $g \circ f = 0$ então $-h_1 \circ k_1^{-1} \circ l_1 = h_2 \circ k_2^{-1} \circ l_2$.

Seja $(X; X_1, X_2)$ é uma tríade em $\mathbb{K}$ tal que $X = \text{Int}X_1 \cup \text{Int}X_2$, sendo $C = X_1 \cap X_2$ e G um sistema de coeficientes locais¹ em X podemos definir, para todo q inteiro:

1. $\psi : H_q(C; G) \rightarrow H_q(X_1; G) \oplus H_q(X_2; G)$ dada por:

$$\psi(x) = (h_{1*}(x), -h_{2*}(x))$$

onde $h_{i*} : H_q(C; G) \rightarrow H_q(X_i; G)$ são os homomorfismos induzidos das inclusões $h_i : C \rightarrow X_i$.

2. $\phi : H_q(X_1; G) \oplus H_q(X_2; G) \rightarrow H_q(X; G)$ dada por:

$$\phi(x, y) = m_{1*}(x) + m_{2*}(y)$$

onde $m_{i*} : H_q(X_i; G) \rightarrow H_q(X; G)$ são os homomorfismos induzidos das inclusões $m_i : X_i \rightarrow X$.

Tomando-se o diagrama:

¹Por simplicidade de notação a restrição de G a qualquer subconjunto de X será denotada também como G

onde ∂ , ∂_1 , ∂_2 são operadores bordo e os demais homomorfismos são induzidos das respectivas inclusões podemos, usando o Lema 1.29, definir um homomorfismo $\Delta : H_q(X; G) \rightarrow H_{q-1}(C; G)$ tomando-se:

$$\Delta = -\partial_1 \circ k_{1*}^{-1} \circ l_{1*} = \partial_2 \circ k_{2*}^{-1} \circ l_{2*}.$$

Definição 1.31. A sequência:

$$\cdots \rightarrow H_q(C; G) \xrightarrow{\psi} H_q(X_1; G) \oplus H_q(X_2; G) \xrightarrow{\phi} H_q(X; G) \xrightarrow{\Delta} H_{q-1}(C; G) \rightarrow \cdots$$

é chamada Sequência de Mayer-Vietoris da tríade $(X; X_1, X_2)$.

Teorema 1.32. A sequência de Mayer-Vietoris de uma tríade $(X; X_1, X_2)$ é exata.

Demonstração: Notemos que o seguinte diagrama, obtido a partir dos homomorfismos induzidos das inclusões é comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & H_q(C; G) & & \\ & \swarrow h_{1*} & \downarrow i_* & \searrow h_{2*} & \\ H_q(X_1; G) & & & & H_q(X_2; G) \\ & \searrow m_{1*} & \downarrow & \swarrow m_{2*} & \\ & & H_q(X; G) & & \end{array}$$

1. A sequência é exata em $H_q(X; G)$

- $Im(\phi) \subset Ker(\Delta)$

Seja $u \in Im(\phi) \subset H_q(X; G)$, existe $(x, y) \in H_q(X_1; G) \oplus H_q(X_2; G)$ tal que $u = \phi(x, y) = m_{1*}(x) + m_{2*}(y)$, assim:

$$\begin{aligned} \Delta(u) &= \Delta(m_{1*}(x) + m_{2*}(y)) \\ &= \Delta(m_{1*}(x)) + \Delta(m_{2*}(y)) \\ &= (-\partial_1 \circ k_{1*}^{-1} \circ l_{1*} \circ m_{1*})(x) + (\partial_2 \circ k_{2*}^{-1} \circ l_{2*} \circ m_{2*})(y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

pois da sequência dos pares (X, X_i) temos que $l_{i*} \circ m_{i*} = 0$.

- $Ker(\Delta) \subset Im(\phi)$

Seja $u \in Ker(\Delta)$, assim:

$$(-\partial_1 \circ k_{1*}^{-1} \circ l_{1*})(u) = (\partial_2 \circ k_{2*}^{-1} \circ l_{2*})(u) = 0$$

Pela exatidão das seqüências de homologia dos pares (X_i, C) existem $x \in H_q(X_1; G)$ e $y \in H_q(X_2; G)$ tais que:

$$n_{1*}(x) = k_{2*}^{-1}(l_{2*}(u)) \quad \text{e} \quad n_{2*}(y) = k_{1*}^{-1}(l_{1*}(u))$$

onde $n_{i*} : H_q(X_i; G) \rightarrow H_q(X_i, C; G)$ são induzidas das inclusões $n_i : X_i \rightarrow (X_i, C)$.

Pelo Lema 1.29 o homomorfismo $e = i_{1*} \circ k_{1*}^{-1} \circ j_{1*} + i_{2*} \circ k_{2*}^{-1} \circ j_{2*}$ é a identidade de $H_q(X; G)$, assim, notando-se que $i_1 \circ n_2 = j \circ m_2$ e $i_2 \circ n_1 = j \circ m_1$, temos que:

$$\begin{aligned} j_*(u) &= e(j_*(u)) \\ &= (i_{1*} \circ k_{1*}^{-1} \circ j_{1*} + i_{2*} \circ k_{2*}^{-1} \circ j_{2*} \circ j_*)(u) \\ &= (i_{1*} \circ k_{1*}^{-1} \circ j_{1*} \circ j_*)(u) + (i_{2*} \circ k_{2*}^{-1} \circ j_{2*} \circ j_*)(u) \\ &= (i_{1*} \circ k_{1*}^{-1} \circ l_{1*})(u) + (i_{2*} \circ k_{2*}^{-1} \circ l_{2*})(u) \\ &= i_{1*}(n_{2*}(y)) + i_{2*}(n_{1*}(x)) \\ &= j_*(m_{2*}(y)) + j_*(m_{1*}(x)) \end{aligned}$$

Portanto;

$$j_*(u - m_{1*}(x) - m_{2*}(y)) = 0.$$

Pela exatidão da seqüência de homologia do par (X, C) existe um $w \in H_q(C; G)$ tal que:

$$i_*(w) = u - m_{1*}(x) - m_{2*}(y).$$

Tomando-se $x' = x + h_{1*}(w)$ obtemos:

$$\begin{aligned} \phi(x', y) &= m_{1*}(x') + m_{2*}(y) \\ &= m_{1*}(x) + m_{1*}(h_{1*}(w)) + m_{2*}(y) \\ &= m_{1*}(x) + i_*(w) + m_{2*}(y) \\ &= u. \end{aligned}$$

2. A seqüência é exata em $H_q(X_1; G) \oplus H_q(X_2; G)$:

- $Im(\psi) \subset Ker(\phi)$

Seja $(x, y) \in Im(\psi) \subset H_q(X_1; G) \oplus H_q(X_2; G)$, existe $u \in H_q(C; G)$ tal que $(x, y) = \psi(u) = (h_{1*}(u), -h_{2*}(u))$. Assim $x = h_{1*}(u)$ e $y = -h_{2*}(u)$.

Portanto:

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= m_{1*}(x) + m_{2*}(y) \\ &= m_{1*}(h_{1*}(u)) - m_{2*}(h_{2*}(u)) \\ &= i_*(u) - i_*(u) = 0. \end{aligned}$$

- $Ker(\phi) \subset Im(\psi)$

Seja $(x, y) \in Ker(\phi) \subset H_q(X_1; G) \oplus H_q(X_2; G)$, assim $\phi(x, y) = m_{1*}(x) + m_{2*}(y) = 0$

Portanto (usando a notação do ítem anterior):

$$\begin{aligned} i_{1*}(n_{2*}(y)) + i_{2*}(n_{1*}(x)) &= j_*(m_{2*}(y)) + j_*(m_{1*}(x)) \\ &= j_*(m_{2*}(y) + m_{1*}(x)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Usando o Lema 1.28² temos que o homomorfismo:

$$i_{1*} + i_{2*} : H_q(X_2; G) \oplus H_q(X_1; G) \rightarrow H_q(X; G)$$

é um isomorfismo e portanto:

$$n_{1*}(x) = 0 \text{ e } m_{2*}(y) = 0.$$

Pela exatidão das sequências de homologia dos pares (X_i, C) existem $w, v \in H_q(C; G)$ tais que:

$$h_{1*}(w) = x \text{ e } h_{2*}(v) = y.$$

Temos então que:

$$\begin{aligned} 0 &= \phi(x, y) \\ &= m_{1*}(h_{1*}(w)) + m_{2*}(h_{2*}(v)) \\ &= i_*(w + v). \end{aligned}$$

Pela exatidão da sequência do par (X, C) existe $t \in H_{q+1}(X, C; G)$ com $\partial(t) = w + v$. Novamente usando o Lema 1.28 existem $x' \in H_q(X_1, C; G)$ e $y' \in H_q(X_2, C; G)$ tais que:

$$t = i_{1*}(y') + i_{2*}(x').$$

²Podemos montar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} H_q(X_1, C; G) & & & & H_q(X_2, C; G) \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & H_q(X, C; G) & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ H_q(X, X_2; G) & & & & H_q(X, X_1; G) \end{array}$$

com os homomorfismos induzidos das inclusões

Assim:

$$\begin{aligned} w + v &= \partial(t) \\ &= \partial(i_{1*}(y') + i_{2*}(x')) \\ &= \partial_1(y') + \partial_2(x'). \end{aligned}$$

Tomando-se $s = w - \partial_2(x') = -[v - \partial_1(y')]$ obtemos:

$$\begin{aligned} \psi(s) &= (h_{1*}(s), -h_{2*}(s)) \\ &= (h_{1*}(w) - h_{1*}(\partial_2(x')), -[-h_{2*}(v) + h_{2*}(\partial_1(y'))]) \\ &= (h_{1*}(w), h_{2*}(v)) \\ &= (x, y). \end{aligned}$$

3. A sequência é exata em $H_{q-1}(C; G)$

- $Im(\Delta) \subset Ker(\psi)$

Seja $x \in Im(\Delta) \subset H_{q-1}(C; G)$, assim existe $w \in H_q(X; G)$ com $\Delta(w) = x$.

Pela exatidão das sequências dos pares (X_i, C) temos que $h_{1*} \circ \partial_2 = 0$ e $h_{2*} \circ \partial_1 = 0$ portanto:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= (h_{1*}(x), -h_{2*}(x)) \\ &= (h_{1*}(\Delta(w)), -h_{2*}(\Delta(w))) \\ &= ((h_{1*} \circ \partial_2 \circ k_{2*}^{-1} \circ l_{2*})(w), -(h_{2*} \circ \partial_1 \circ k_{1*}^{-1} \circ l_{1*})(w)) \\ &= (0, 0) \end{aligned}$$

- $Ker(\psi) \subset Im(\Delta)$

Seja $x \in Ker(\psi)$ assim $h_{1*}(x) = h_{2*}(x) = 0$. Pela exatidão das sequências dos pares (X_i, C) existem $a_i \in H_q(X_i, C; G)$ tais que:

$$\partial_1(a_2) = x \text{ e } \partial_2(a_1) = -x.$$

Logo

$$\begin{aligned} \partial(i_{1*}(a_2) + i_{2*}(a_1)) &= \partial(i_{1*}(a_2)) + \partial(i_{2*}(a_1)) \\ &= \partial_1(a_2) + \partial_2(a_1) \\ &= x - x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Pela exatidão da sequência de homologia do par (X, C) existe $w \in H_q(X; G)$ tal que:

$$j_*(w) = -i_{1*}(a_2) - i_{2*}(a_1).$$

Agora, notando-se que $j_{1*} \circ i_{1*} = k_{1*}$ e $j_{1*} \circ i_{2*} = 0$, temos que:

$$\begin{aligned}
 \Delta(w) &= -(\partial_1 \circ k_{1*}^{-1} \circ l_{1*})(w) \\
 &= -(\partial_1 \circ k_{1*}^{-1} \circ j_{1*} \circ j_*)(w) \\
 &= (\partial_1 \circ k_{1*}^{-1} \circ j_{1*})(i_{1*}(a_2) + i_{2*}(a_1)) \\
 &= (\partial_1 \circ k_{1*}^{-1} \circ j_{1*} \circ i_{1*})(a_2) + (\partial_1 \circ k_{1*}^{-1} \circ j_{1*} \circ i_{2*})(a_1) \\
 &= (\partial_1 \circ k_{1*}^{-1} \circ k_{1*})(a_2) + 0 \\
 &= \partial_1(a_2) \\
 &= x
 \end{aligned}$$

□

Observação 1.33. Note que nesse caso $H_1(X_1 \vee X_2; G)$ não necessariamente é isomorfo a $H_1(X_1; G|_{X_1}) \oplus H_1(X_2; G|_{X_2})$. Como exemplo podemos tomar a figura oito, $S^1 \vee S^1$, com $G \approx \mathbb{Z}$ e a ação de cada um dos geradores de $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ como o isomorfismo $(-id)$. Nessa situação obtemos $H_1(X_1; G|_{X_1}) = H_1(X_2; G|_{X_2}) = H_1(S^1; G|_{S^1}) = 0$ e $H_1(X_1 \vee X_2; G) = \mathbb{Z}$.

1.6 Cohomologia com Coeficientes Locais

Definimos $C^n(X; G)$ como o conjunto de todas as funções c que associam a cada simplexo singular $\mu : \Delta^n \rightarrow X$ um elemento $c(\mu) \in G(\mu(e_0))$. Claramente $C^n(X; G)$ é um grupo abeliano com a soma usual de funções pois $G(\mu(e_0))$ é abeliano.

O **Operador Cobordo** $\delta : C^n(X; G) \rightarrow C^{n+1}(X; G)$ é definido por:

$$(-1)^n \delta c(u) = G(\sigma_\mu)^{-1} c(\partial_0 \mu) + \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i c(\partial_i \mu),$$

para cada $n + 1$ -simplexo singular μ .

δ é um homomorfismo e $\delta \circ \delta = 0$ de modo que $C^*(X; G)$ é um complexo de co-cadeia.

Se $A \subset X$, a restrição $i^\sharp : C^*(X; G) \rightarrow C^*(A; G|_A)$ é sobrejetora e definimos $C^*(X, A; G)$ como o núcleo de $i^\sharp$. $C^*(X, A; G)$ é um sub-complexo de $C^*(X; G)$ e assim podemos definir:

$$H^n(X, A; G) = H^n(C^*(X, A; G)).$$

1.6.1 Cohomologia de um Ponto de Vista Axiomático

Se $\mathbb{L}^*$ é a categoria cujos elementos são triplas $(X, A; G)$, onde (X, A) é um par em $\mathbb{K}$ e G é um sistema de coeficientes locais em X (mesmos elementos de $\mathbb{L}$). Um morfismo $\phi : (X, A; G) \rightarrow (Y, B; H)$ em $\mathbb{L}^*$ é um par (ϕ_1, ϕ_2) tal que:

- $\phi_1 : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ é uma aplicação de pares,
- $\phi_2 : \phi_1^* H \rightarrow G$ é um homomorfismo de sistemas de coeficientes locais.

Vale a pena ressaltar que a diferença entre $\mathbb{L}$ e $\mathbb{L}^*$ é o “sentido” do homomorfismo ϕ_2 :

- Em $\mathbb{L}$, $\phi_2 : G \rightarrow \phi_1^* H$,
- Em $\mathbb{L}^*$, $\phi_2 : \phi_1^* H \rightarrow G$.

Se $\phi : (X, A; G) \rightarrow (Y, B; H)$ e $\psi : (Y, B; H) \rightarrow (Z, C; K)$ são morfismo em $\mathbb{L}^*$ temos que $\omega = \psi \circ \phi$ é um morfismo de $\mathbb{L}^*$ tal que:

1. $\omega_1 = \psi_1 \circ \phi_1 : (X, A) \rightarrow (Z, C)$,
2. $\omega_2(x) = \phi_2(x) \circ \psi_2(\phi_1(x)) : \phi_1^* \psi_1^* K \rightarrow G$.

Novamente temos que $\phi : (X, A; G) \rightarrow (Y, B; H)$ induz uma aplicação de co-cadeia $\phi^\sharp : C^*(Y, B; H) \rightarrow C^*(X, A; G)$ dada por:

$$\phi^\sharp c(\mu) = \phi_2(\mu(e_0))(c(\phi_1(\mu))).$$

Que, por sua vez, induz:

$$\phi^* = H^n(\phi) : H^n(Y, B; H) \rightarrow H^n(X, A; G).$$

Assim $H^* : \mathbb{L}^* \rightarrow \mathfrak{A}$ são funtores contra-variantes. Além disso existem transformações naturais (“operador cobordo”):

$$\delta_n : H^n(A; G|_A) \rightarrow H^{n+1}(X, A; G).$$

De maneira análoga da vista em homologia, a inclusão induz um homomorfismo: $k^* : H^n(X, A; G) \rightarrow H^n(X_1, A_1; G|_{X_1})$, com $X_1 \subset X$ e $A_1 \subset A$. Também de maneira análoga definimos um prisma sobre elementos de $\mathbb{L}^*$ e a noção de homotopia em $\mathbb{L}^*$.

Obtemos novamente:

Teorema 1.34. *Os funtores H^q e as transformações δ_q satisfazem:*

1. **Exatidão** *Se $(X, A; G)$ é um objeto em $\mathbb{L}^*$, i e j as inclusões apropriadas então a seqüência:*

$$\cdots \rightarrow H^{q-1}(A; G|_A) \xrightarrow{\delta_{q-1}} H^q(X, A; G) \xrightarrow{H^q(j)} H^q(X; G) \xrightarrow{H^q(i)} H^q(A; G|_A) \rightarrow \cdots$$

é exata.

2. **Invariância** *Se ϕ^0 e $\phi^1 : (X, A; G) \rightarrow (Y, B; H)$ são homotópicas em $\mathbb{L}^*$ então:*

$$H^q(\phi^0) = H^q(\phi^1) : H^q(Y, B; H) \rightarrow H^q(X, A; G)$$

para todo q .

3. **Excisão** *Se $(X; X_1, X_2)$ é uma tríade em $\mathbb{K}$ tal que $X = \text{int}(X_1) \cup \text{int}(X_2)$ e se G é um sistema de coeficientes locais em X , então:*

$$k^* : H^q(X, X_2; G) \rightarrow H^q(X_1, X_1 \cap X_2; G|_{X_1})$$

é um isomorfismo para todo q .

4. **Cohomologia do ponto** *Se $X = \{*\}$, então:*

$$H^q(X; G) = \begin{cases} 0 & \text{se } q \neq 0 \\ G(*) & \text{se } q = 0. \end{cases}$$

5. **Aditividade** *Se X é a união disjunta de subespaços X_α , $A \subset X$, $A_\alpha = A \cap X_\alpha$, G um sistema de coeficientes locais em X e $G_\alpha = G|_{X_\alpha}$, então as injecções:*

$$H^n(X, A; G) \rightarrow H^n(X_\alpha, A_\alpha; G|_{X_\alpha})$$

são tais que $H^n(X, A; G) = \prod H^n(X_\alpha, A_\alpha; G|_{X_\alpha})$.

1.7 Alguns Exemplos

Para a realização de cálculos vamos utilizar a formulação celular da teoria conforme [Whitehead, Capítulo VI, seção 4, página 281]. Assim vamos calcular de maneira explícita os grupos de homologia e cohomologia do plano projetivo tanto com coeficientes usuais (em $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$) como com coeficientes locais induzidos da orientação local e os grupos de homologia da Garrafa de Klein com os diversos sistemas de coeficientes possíveis para valores em $\mathbb{Z}$.

1.7.1 O Plano Projetivo

Observamos que o plano projetivo é obtido a partir do disco D^2 com seu bordo identificado.

Figura 1.1: Plano Projetivo

Assim podemos construí-lo com:

- Uma 0-célula: $e^0 : \Delta^0 \rightarrow x_0$;
- Uma 1-célula: $e^1 : (\Delta^1, \partial\Delta_1) \rightarrow (h_1, x_0)$;
- Uma 2-célula: $e^2 : (\Delta^2, \partial\Delta_2) \rightarrow (h_2, h_1)$.

Denotando por $\tilde{\mathbb{Z}}$ o sistema de coeficientes induzido da orientação temos que:

$$C_i(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) = \langle \bar{e}^i \rangle \quad \text{onde} \quad \bar{e}^i(e^i) = 1 \in \mathbb{Z}$$

e

$$C_i(\mathbb{RP}^2; \tilde{\mathbb{Z}}) = \langle \tilde{e}^i \rangle \quad \text{onde} \quad \tilde{e}^i(e^i) = 1 \in \mathbb{Z}_{x_0}$$

No caso de coeficientes usuais temos os seguintes bordos:

- $\partial e^0 = 0$;

- $\partial \bar{e}^1 = \bar{e}^0 - \bar{e}^0 = 0;$
- $\partial \bar{e}^2 = \sum_{i=0}^2 (-1)^i \partial_i \bar{e}^2 = \bar{e}^1 - 0 + \bar{e}^1 = 2\bar{e}^1.$

Assim:

- $H_0(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z};$
- $H_1(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_2$
- $H_2(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) = 0$

Já no caso de coeficientes locais induzidos da orientação de $\mathbb{RP}^2$ temos:

- $\partial \tilde{e}^0 = 0;$
- $\partial \tilde{e}^1 = \tilde{e}^0 - h_1(\tilde{e}^0) = \tilde{e}^0 + \tilde{e}^0 = 2\tilde{e}^0;$
- $\partial \tilde{e}^2 = h_1^{-1}(\tilde{e}^1) - 0 + \tilde{e}^1 = -\tilde{e}^1 + \tilde{e}^1 = 0.$

Assim:

- $H_0(\mathbb{RP}^2; \tilde{\mathbb{Z}}) = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_2;$
- $H_1(\mathbb{RP}^2; \tilde{\mathbb{Z}}) = 0$
- $H_2(\mathbb{RP}^2; \tilde{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}$

De maneira absolutamente análoga obtemos que:

- $H_0(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ e $H_0(\mathbb{RP}^2; \tilde{\mathbb{Q}}) = 0;$
- $H_1(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Q}) = 0$ e $H_1(\mathbb{RP}^2; \tilde{\mathbb{Q}}) = 0;$
- $H_2(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Q}) = 0$ e $H_2(\mathbb{RP}^2; \tilde{\mathbb{Q}}) = \mathbb{Q}.$

Para o cálculo dos grupos de cohomologia temos que:

$$C^i(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) = \langle e_*^i \rangle \quad \text{onde} \quad e_*^i(e^i) = 1 \in \mathbb{Z}$$

e

$$C^i(\mathbb{RP}^2; \tilde{\mathbb{Z}}) = \langle e_{\#}^i \rangle \text{ onde } e_{\#}^i(e^i) = 1 \in \mathbb{Z}_{x_0}$$

com os seguintes cobordos:

- Coeficientes usuais

$$\begin{aligned} - \delta e_{\#}^0(e^1) &= \sum_{i=0}^1 e_{\#}^0(e^i) = 1 - 1 = 0; \\ - \delta e_{\#}^1(e^2) &= - \sum_{i=0}^2 (-1)^i e_{\#}^1(\partial_i e^2) = -[e_{\#}^1(e^1) - 0 + e_{\#}^1(e^1)] = -2; \\ - \delta e_{\#}^2 &= 0. \end{aligned}$$

- Coeficientes locais

$$\begin{aligned} - \delta e_{\#}^0(e^1) &= h_1^{-1}(\partial_0 e^1) - \partial_1 e^1 = -1 - 1 = -2; \\ - \delta e_{\#}^1(e^2) &= -[h_1^{-1}(\partial_0 e^2) - 0 + \partial_2 e^2] = -[-e^1 + e^1] = 0; \\ - \delta e_{\#}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Obtemos então:

- Coeficientes usuais

$$\begin{aligned} - H^0(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}; \\ - H^1(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) &= 0 \\ - H^2(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

- Coeficientes locais

$$\begin{aligned} - H^0(\mathbb{RP}^2; \tilde{\mathbb{Z}}) &= 0; \\ - H^1(\mathbb{RP}^2; \tilde{\mathbb{Z}}) &= \mathbb{Z}_2 \\ - H^2(\mathbb{RP}^2; \tilde{\mathbb{Z}}) &= \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Mais uma vez de maneira absolutamente análoga obtemos:

- $H^0(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ e $H^0(\mathbb{RP}^2; \tilde{\mathbb{Q}}) = 0$;
- $H^1(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Q}) = 0$ e $H^1(\mathbb{RP}^2; \tilde{\mathbb{Q}}) = 0$;
- $H^2(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Q}) = 0$ e $H^2(\mathbb{RP}^2; \tilde{\mathbb{Q}}) = \mathbb{Q}$.

1.7.2 A Garrafa de Klein

Denotaremos por K a garrafa de Klein temos que K pode ser obtida a partir de um retângulo com os lados identificados:

Figura 1.2: Garrafa de Klein

Para construir uma decomposição celular conveniente dividiremos K conforme a figura 1.3:

Figura 1.3: Divisão da Garrafa de Klein

Construímos, então, uma decomposição celular com:

- Uma 0-célula: $e^0 : \Delta^0 \rightarrow x_0$;
- Três 1-células:
 - $e_1^1 : (\Delta^1, \partial\Delta_1) \rightarrow (\alpha, x_0)$;
 - $e_2^1 : (\Delta^1, \partial\Delta_1) \rightarrow (\beta, x_0)$;
 - $e_3^1 : (\Delta^1, \partial\Delta_1) \rightarrow (\gamma, x_0)$;
- Duas 2-células:
 - $e_1^2 : (\Delta^2, \partial\Delta_2) \rightarrow (h_1, \alpha \cup \beta \cup \gamma)$.
 - $e_2^2 : (\Delta^2, \partial\Delta_2) \rightarrow (h_2, \alpha \cup \beta \cup \gamma)$.

Figura 1.4: Decomposição Celular da Garrafa de Klein

Que podemos representar pela figura:

De maneira genérica denotaremos por $\overline{e^i}$ os geradores dos grupos $C_i(K; *)$ tais que: $\overline{e_j^i}(a) = \begin{cases} 1 & \text{se } a = e_j^i \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$ para todos os sistemas de coeficientes que usaremos, analogamente e_{j*}^i denotará o gerador de $C^i(K; *)$ que satisfaz $e_{j*}^i(a) = \begin{cases} 1 & \text{se } a = e_j^i \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$ denotaremos ainda α^* β^* e γ^* os isomorfismos induzidos por essas curvas³ nos grupos associados aos seus pontos bases pelo sistema de coeficientes locais.

Com a notação acima temos os seguintes bordos:

- $\partial \overline{e^0} = 0;$
- $\begin{aligned} - \partial \overline{e_1^1} &= \alpha^*(\overline{e^0}) - \overline{e^0}; \\ - \partial \overline{e_2^1} &= \beta^*(\overline{e^0}) - \overline{e^0}; \\ - \partial \overline{e_3^1} &= \gamma^*(\overline{e^0}) - \overline{e^0}; \end{aligned}$
- $\begin{aligned} - \partial \overline{e_1^2} &= \alpha^*(\overline{e_1^1}) - \overline{e_3^1} + \overline{e_1^1}; \\ - \partial \overline{e_2^2} &= \gamma^*(\overline{e_1^1}) - \overline{e_2^1} + \overline{e_3^1}. \end{aligned}$

E co-bordos:

- $\begin{aligned} - \delta e_*^0(\overline{e_1^1}) &= \alpha^{*-1}(e_*^0(\overline{e^0})) - e_*^0(\overline{e^0}); \\ - \delta e_*^0(\overline{e_2^1}) &= \beta^{*-1}(e_*^0(\overline{e^0})) - e_*^0(\overline{e^0}); \\ - \delta e_*^0(\overline{e_3^1}) &= \gamma^{*-1}(e_*^0(\overline{e^0})) - e_*^0(\overline{e^0}); \end{aligned}$
- $\begin{aligned} * \delta e_{1*}^1(\overline{e_1^2}) &= -\alpha^*(e_{1*}^1(\overline{e_2^1})) + e_{1*}^1(\overline{e_3^1}) - e_{1*}^1(\overline{e_1^1}); \\ * \delta e_{1*}^1(\overline{e_2^2}) &= -\gamma^*(e_{1*}^1(\overline{e_1^1})) + e_{1*}^1(\overline{e_2^1}) - e_{1*}^1(\overline{e_3^1}); \end{aligned}$

³Da divisão feita temos que $\gamma \sim \alpha\beta$, assim $\gamma^* = \alpha^* \circ \beta^*$

- $* \delta e_{2*}^1(\overline{e_1^2}) = -\alpha^*(e_{2*}^1(\overline{e_2^1})) + e_{2*}^1(\overline{e_3^1}) - e_{2*}^1(\overline{e_1^1});$
- $* \delta e_{2*}^1(\overline{e_2^2}) = -\gamma^*(e_{2*}^1(\overline{e_1^1})) + e_{2*}^1(\overline{e_2^1}) - e_{2*}^1(\overline{e_3^1});$
- $* \delta e_{3*}^1(\overline{e_1^2}) = -\alpha^*(e_{3*}^1(\overline{e_2^1})) + e_{3*}^1(\overline{e_3^1}) - e_{3*}^1(\overline{e_1^1});$
- $* \delta e_{3*}^1(\overline{e_2^2}) = -\gamma^*(e_{3*}^1(\overline{e_1^1})) + e_{3*}^1(\overline{e_2^1}) - e_{3*}^1(\overline{e_3^1});$
- – $\delta e_1^2 = 0;$
- $\delta e_2^2 = 0.$

Como dito anteriormente calcularemos os grupos de homologia e cohomologia de K para sistemas com valores em $\mathbb{Z}$, como $\gamma^* = \alpha^* \circ \beta^*$, tais sistemas são descritos por α^* e por β^* . Em todos os casos os cálculos serão feitos a partir das sequências:

$$0 \rightarrow H_2(K, K^1; *) \xrightarrow{\phi} H_1(K^1, K^0; *) \xrightarrow{\psi} H_0(K^0; *) \rightarrow 0$$

para homologia e

$$0 \rightarrow H^0(K^0; *) \xrightarrow{\varphi} H^1(K^1, K^0; *) \xrightarrow{\theta} H^2(K^2, K^1; *) \rightarrow 0$$

em cohomologia.

Pela decomposição celular que fizemos tais sequências se escrevem como:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

para homologia e

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\theta} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

em cohomologia.

1. Sistema Trivial ($\alpha^* = \beta^* = id$) denotado $\mathbb{Z}$.

Temos que:

- – $\phi(1, 0) = (1, 1, -1);$
- $\phi(0, 1) = (1, -1, 1);$
- – $\psi(1, 0, 0) = 0;$
- $\psi(0, 1, 0) = 0;$
- $\psi(0, 0, 1) = 0;$

Portanto:

- $H_0(K; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z};$

- $H_1(K; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$;
- $H_2(K; \mathbb{Z}) = 0$.

Temos ainda:

- $\varphi(1) = (0, 0, 0)$;
- $\begin{aligned} - \theta(1, 0, 0) &= (-1, -1); \\ - \theta(0, 1, 0) &= (-1, 1); \\ - \theta(0, 0, 1) &= (1, -1); \end{aligned}$

Portanto:

- $H^0(K; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$;
- $H^1(K; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$;
- $H^2(K; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$.

2. Sistema dado pela orientação de K ($\alpha^* = id$ e $\beta^* = -id$), denotado $\tilde{\mathbb{Z}}$:

Temos que:

- $\begin{aligned} - \phi(1, 0) &= (1, 1, -1); \\ - \phi(0, 1) &= (-1, -1, 1); \end{aligned}$
- $\begin{aligned} - \psi(1, 0, 0) &= 0; \\ - \psi(0, 1, 0) &= -2; \\ - \psi(0, 0, 1) &= -2; \end{aligned}$

Portanto:

- $H_0(K; \tilde{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}_2$;
- $H_1(K; \tilde{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}$;
- $H_2(K; \tilde{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}$.

Temos ainda:

- $\varphi(1) = (0, 2, 2)$;
- $\begin{aligned} - \theta(1, 0, 0) &= (-1, 1); \\ - \theta(0, 1, 0) &= (-1, 1); \\ - \theta(0, 0, 1) &= (1, -1); \end{aligned}$

Portanto:

- $H^0(K; \widetilde{\mathbb{Z}}) = 0;$
- $H^1(K; \widetilde{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2;$
- $H^2(K; \widetilde{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}.$

3. ($\alpha^* = -id$ e $\beta^* = id$) Denotado $\overline{\mathbb{Z}}$:

Temos que:

- $\phi(1, 0) = (1, -1, -1);$
 $\phi(0, 1) = (-1, -1, 1);$
- $\psi(1, 0, 0) = -2;$
 $\psi(0, 1, 0) = 0;$
 $\psi(0, 0, 1) = -2;$

Portanto:

- $H_0(K; \overline{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}_2;$
- $H_1(K; \overline{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}_2;$
- $H_2(K; \overline{\mathbb{Z}}) = 0.$

Temos ainda:

- $\varphi(1) = (2, 0, 2);$
- $\theta(1, 0, 0) = (-1, 1);$
 $\theta(0, 1, 0) = (-1, 1);$
 $\theta(0, 0, 1) = (1, -1);$

Portanto:

- $H^0(K; \overline{\mathbb{Z}}) = 0;$
- $H^1(K; \overline{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2;$
- $H^2(K; \overline{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}.$

4. ($\alpha^* = -id$ e $\beta^* = -id$) Denotado $\overline{\mathbb{Z}}'$:

Temos que:

- $\phi(1, 0) = (1, -1, -1);$
 $\phi(0, 1) = (-1, -1, 1);$
- $\psi(1, 0, 0) = -2;$
 $\psi(0, 1, 0) = -2;$

$$- \psi(0, 0, 1) = 0;$$

Portanto:

- $H_0(K; \overline{\mathbb{Z}}') = \mathbb{Z}_2;$
- $H_1(K; \overline{\mathbb{Z}}') = \mathbb{Z}_2;$
- $H_2(K; \overline{\mathbb{Z}}') = 0.$

Temos ainda:

- $\varphi(1) = (2, 2, 0);$
- $- \theta(1, 0, 0) = (-1, -1);$
 $- \theta(0, 1, 0) = (1, 1);$
 $- \theta(0, 0, 1) = (1, -1);$

Portanto:

- $H^0(K; \overline{\mathbb{Z}}') = 0;$
- $H^1(K; \overline{\mathbb{Z}}') = \mathbb{Z}_2;$
- $H^2(K; \overline{\mathbb{Z}}') = \mathbb{Z}_2.$

Com os resultados obtidos podemos construir a seguinte tabela⁴:

S.C.L.	$\mathbb{Z}$	$\tilde{\mathbb{Z}}$	$\overline{\mathbb{Z}}$	$\overline{\mathbb{Z}}'$
H_0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
H_1	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
H_2	0	$\mathbb{Z}$	0	0
H^0	$\mathbb{Z}$	0	0	0
H^1	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
H^2	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$

1.8 $H_n(M; \tilde{\mathbb{Z}})$

O objetivo dessa seção é apresentar uma demonstração direta para o fato de que com o sistema de coeficientes locais dado pela orientação de uma variedade compacta e sem bordo, o grupo de homologia em dimensão máxima é não trivial. Para tanto seguiremos o caminho desenvolvido em [Vick, Capítulo 5].

⁴Note que aqui estão todos os sistemas de coeficientes locais possíveis, com imagem em $\mathbb{Z}$, para a garrafa de Klein

induzido da inclusão, que é um isomorfismo.

Assim tomando-se como base para uma topologia em Υ os conjuntos:

$$U_{V,\theta,k} = \{ \langle (j_{V,p*}(\theta), k) \rangle \mid p \in V \text{ e } k \in \mathbb{Z} \}$$

onde U percorre todas as bolas-próprias em M , θ percorre todas as classes em $H_n(M, M \setminus V; \tilde{\mathbb{Z}})$ e k todos os inteiros temos que, fixados V , θ e k a projeção natural de $U_{V,\theta,k}$ em M é um homeomorfismo local.

Definimos então $s : M \rightarrow \Upsilon$ dada por:

1. Escolhemos $x \in M$ e σ um gerador de $H_n(M, M \setminus x; \tilde{\mathbb{Z}})$:

$$s(x) = \langle (\sigma, 1) \rangle \in T_x \subset \Upsilon.$$

2. Dado $y \in M$ com $y \neq x$ tomamos α uma curva simples em M com $\alpha(0) = y$ e $\alpha(1) = x$. Sendo $U \subset M$ uma bola-própria em M tal que $\alpha(t) \in U$ para todo t definimos:

$$s(y) = \langle (j_{V,y*} \circ j_{V,x*}^{-1}(\sigma), \tilde{\mathbb{Z}}(\alpha)(1)) \rangle$$

lembrando que $\tilde{\mathbb{Z}}(\alpha) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ é o isomorfismo induzido por α no sistema de coeficientes locais $\tilde{\mathbb{Z}}$.

Teorema 1.38. $s(y)$ *independe de α .*

Demonstração: Sejam α e α' duas curvas simple em M com $\alpha(0) = \alpha'(0) = y$ e $\alpha(1) = \alpha'(1) = x$ temos que:

- $j_{V,y*} \circ j_{V,x*}^{-1}(\sigma) = j_{V',y*} \circ j_{V',x*}^{-1}(\sigma) \Leftrightarrow \text{sin}(\alpha \cdot \alpha') = 1.$
- $j_{V,y*} \circ j_{V,x*}^{-1}(\sigma) = -(j_{V',y*} \circ j_{V',x*}^{-1}(\sigma)) \Leftrightarrow \text{sin}(\alpha \cdot \alpha') = -1.$
- $\tilde{\mathbb{Z}}(\alpha)(1) = \tilde{\mathbb{Z}}(\alpha')(1) \Leftrightarrow \text{sin}(\alpha \cdot \alpha') = 1.$
- $\tilde{\mathbb{Z}}(\alpha)(1) = -\tilde{\mathbb{Z}}(\alpha')(1) \Leftrightarrow \text{sin}(\alpha \cdot \alpha') = -1.$

Assim

- $\tilde{\mathbb{Z}}(\alpha)(1) = \tilde{\mathbb{Z}}(\alpha')(1) \Leftrightarrow j_{V,y*} \circ j_{V,x*}^{-1}(\sigma) = j_{V',y*} \circ j_{V',x*}^{-1}(\sigma)$
- $\tilde{\mathbb{Z}}(\alpha)(1) = -\tilde{\mathbb{Z}}(\alpha')(1) \Leftrightarrow j_{V,y*} \circ j_{V,x*}^{-1}(\sigma) = -(j_{V',y*} \circ j_{V',x*}^{-1}(\sigma))$

Teorema 1.35. *Se M é uma variedade n -dimensional, não compacta e sem bordo, então $H_n(M; \tilde{\mathbb{Z}}) = 0$.*

Demonstração: Veja [Vick, Teorema 5.5, página 134] para o caso de coeficientes usuais, o caso com coeficientes induzidos da orientação de M pode ser obtido de maneira similar. $\square$

Corolário 1.36. *Se M é uma variedade fechada (conexa, compacta e sem bordo) n -dimensional, então, para todo $p \in M$ a aplicação induzida da inclusão:*

$$i_{p*} : H_n(M; \tilde{\mathbb{Z}}) \rightarrow H_n(M, M \setminus p; \tilde{\mathbb{Z}})$$

é injetora.

Demonstração: Seja $z \in H_n(M; \tilde{\mathbb{Z}})$ com $i_{p*}(z) = 0$. Usando a sequência do par $(M, M \setminus p)$ concluímos que existe um elemento $z' \in H_n(M \setminus p; \tilde{\mathbb{Z}})$ tal que $j(z') = z$ onde j é a inclusão de $M \setminus p$ em M . Como $M \setminus p$ não é compacto, pelo Teorema 1.35 $H_n(M \setminus p; \tilde{\mathbb{Z}}) = 0$ e assim $z' = 0$ e portanto $z = 0$. $\square$

Corolário 1.37. *Se M é uma variedade n -dimensional, conexa e sem bordo então:*

$$H_n(M; \tilde{\mathbb{Z}}) = 0 \quad \text{ou} \quad H_n(M; \tilde{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}.$$

Demonstração: Pelo Corolário 1.36 temos que:

$$i_{p*} : H_n(M; \tilde{\mathbb{Z}}) \rightarrow H_n(M, M \setminus p; \tilde{\mathbb{Z}})$$

é injetora, como $H_n(M, M \setminus p; \tilde{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}$ temos que $H_n(M; \tilde{\mathbb{Z}}) = 0$ ou $H_n(M; \tilde{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}$. $\square$

Para provarmos que $H_n(M; \tilde{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}$ basta mostrar que existe uma classe de homologia em $H_n(M; \tilde{\mathbb{Z}})$ não trivial.

Em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definimos Rel como a relação de equivalência dada por $(a, b) \sim (-a, -b)$.

Para cada $p \in M$ definimos $T_p = \frac{H_n(M, M \setminus p; \tilde{\mathbb{Z}}) \times \mathbb{Z}}{Rel} \approx \frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{Rel}$ e tomamos o conjunto:

$$\Upsilon = \bigcup_{p \in M} T_p.$$

Para cada V uma bola-própria (um aberto de M cujo fecho é homeomorfo ao disco D^n)⁵ e para cada $p \in V$, existe:

$$j_{V,p*} : H_n(M, M \setminus V; \tilde{\mathbb{Z}}) \rightarrow H_n(M, M \setminus p; \tilde{\mathbb{Z}})$$

⁵Ver [Vick, página 138]

Como $j_{V,y*} \circ j_{V,x*}^{-1} = \pm id$, $\tilde{\mathbb{Z}}(\alpha) = \pm id$, $j_{V',y*} \circ j_{V',x*}^{-1} = \pm id$ e $\tilde{\mathbb{Z}}(\alpha') = \pm id$ obtemos o resultado desejado. $\square$

Definição 1.39. s é chamada uma orientação de M com respeito ao sistema de coeficientes locais $\tilde{\mathbb{Z}}$.

Vale a pena ressaltar que a construção de s , no caso de M ser orientável, corresponde a construção de uma orientação como em [Vick, Capítulo 5, página 138].

Lema 1.40. Sejam M uma variedade fechada e U um aberto de M , se um elemento $\theta \in H_n(M, U; \tilde{\mathbb{Z}})$ é tal que $j_{U,p*}(\theta) = 0$ para todo $p \in M \setminus U$ então $\theta = 0$.

Demonstração: Similar a demonstração de [Vick, Lema 5.8, página 139]. $\square$

Lema 1.41. Se M é uma variedade fechada e $s : M \rightarrow \Upsilon$ é uma orientação de M com respeito ao sistema de coeficientes locais $\tilde{\mathbb{Z}}$ então existe uma classe $\xi \in H_n(M; \tilde{\mathbb{Z}})$ tal que $\langle i_{p*}(\xi), 1 \rangle = s(p)$ para todo $p \in M$.

Demonstração: Da definição de s temos que dado $p \in M$ existe uma bola-própria V_p contendo p e um elemento $\sigma_p \in H_n(M, M \setminus \overline{V_p}; \tilde{\mathbb{Z}})$ tal que:

$$\langle j_{V_p,q*}(\sigma_p), 1 \rangle = s(q)$$

para todo $q \in V_p$.

Como M é compacta existe uma coleção finita $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ de bolas-próprias como as acima ($p_i \in V_i$ e $\sigma_{p_i} = \sigma_i$) cobrindo M . Faremos uma indução sobre esse número.

Suponha que exista um elemento $\xi_m \in H_n(M, M \setminus (\overline{V_1} \cup \overline{V_2} \cup \dots \cup \overline{V_m}); \tilde{\mathbb{Z}})$ tal que

$$\langle j_{\bigcup_{i=1}^m V_i,q*}(\xi_m), 1 \rangle = s(q)$$

para todo $q \in \bigcup_{i=1}^m V_i$.

Tomando-se a sequência de Mayer-Vietoris relativa:

$$\begin{array}{c}
\downarrow \\
H_n(M, M \setminus (\overline{V_1} \cup \overline{V_2} \cup \dots \cup \overline{V_{m+1}}); \tilde{\mathbb{Z}}) \\
\downarrow \phi \\
H_n(M, M \setminus (\overline{V_1} \cup \overline{V_2} \cup \dots \cup \overline{V_m}); \tilde{\mathbb{Z}}) \oplus H_n(M, M \setminus \overline{V_{m+1}}; \tilde{\mathbb{Z}}) \\
\downarrow \psi \\
H_n(M, M \setminus (\overline{V_1} \cup \overline{V_2} \cup \dots \cup \overline{V_{m+1}}) \cap \overline{V_m}; \tilde{\mathbb{Z}}) \\
\downarrow
\end{array}$$

Tomando-se $(\xi_m, -\sigma_{m+1}) \in H_n(M, M \setminus (\overline{V_1} \cup \overline{V_2} \cup \dots \cup \overline{V_m}); \tilde{\mathbb{Z}}) \oplus H_n(M, M \setminus \overline{V_{m+1}}; \tilde{\mathbb{Z}})$ e considerando:

$$\zeta = \psi(\xi_m, -\sigma_{m+1}) \in H_n(M, M \setminus (\overline{V_1} \cup \overline{V_2} \cup \dots \cup \overline{V_{m+1}}) \cap \overline{V_m}; \tilde{\mathbb{Z}})$$

temos que $j_{(\overline{V_1} \cup \overline{V_2} \cup \dots \cup \overline{V_{m+1}}) \cap \overline{V_m}, q*}(\zeta) = 0$ para todo $q \in \overline{V_1} \cup \overline{V_2} \cup \dots \cup \overline{V_{m+1}} \cap \overline{V_m}$.

Pelo Lema 1.40, $\zeta = 0$. Como a sequência acima é exata existe:

$$\xi_{m+1} \in H_n(M, M \setminus (\overline{V_1} \cup \overline{V_2} \cup \dots \cup \overline{V_{m+1}}); \tilde{\mathbb{Z}})$$

com $\phi(\xi_{m+1}) = (\xi_m, -\sigma_{m+1})$.

Observamos agora que:

$$\langle (j_{(\overline{V_1} \cup \overline{V_2} \cup \dots \cup \overline{V_{m+1}}), q*}(\xi_{m+1}), 1) \rangle = \langle (j_{\bigcup_{i=1}^{m+1} V_i, q*}(\xi_{m+1}), 1) \rangle = s(q),$$

o que completa a indução. $\square$

Teorema 1.42. *Se M é uma variedade n -dimensional fechada então $H_n(M; \tilde{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}$.*

Demonstração: Pelo Corolário 1.37 $H_n(M; \tilde{\mathbb{Z}}) = 0$ ou $H_n(M; \tilde{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}$, pelo Lema 1.41 existe uma classe ξ em $H_n(M; \tilde{\mathbb{Z}})$, tal que $\langle (i_{p*}(\xi), 1) \rangle = s(p)$.

Como $s(p) = \langle \sigma, 1 \rangle$ com σ um gerador de $H_n(M, M \setminus p; \tilde{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}$ a classe ξ é não trivial portanto $H_n(M; \tilde{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}$. $\square$

Preliminares

O objetivo desse capítulo é apresentar algumas definições, propriedades e resultados relativos à grau, índice de coincidência e número de Lefschetz para aplicações entre variedades não necessariamente orientáveis que nos serão úteis posteriormente. Assumiremos que o leitor tem alguma familiaridade com a teoria de coincidência de Nielsen e com a geometria das superfícies.

2.1 Grau de Aplicações

Como vamos tratar de superfícies não necessariamente orientáveis usaremos a definição de grau de uma aplicação entre duas variedades quaisquer apresentada em [Epstein].

Dadas M e N duas variedades compactas sem bordo e $f : M \mapsto N$ podemos construir o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 M' & \xrightarrow{f'} & N' \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \widetilde{M} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \widetilde{N} \\
 \downarrow p & & \downarrow \\
 M & \xrightarrow{\bar{f}} & \overline{N} \\
 & \searrow f & \downarrow \\
 & & N
 \end{array}$$

Onde:

- $p : \widetilde{M} \mapsto M$ é o recobrimento duplo orientável de M se M é não orientável ou é a identidade se M é orientável;
- $\overline{N}$ é o recobrimento de N associado a $f_{\#}(\pi_1(M)) \subseteq \pi_1(N)$;
- $\widetilde{N}$ é o recobrimento de N associado a $(f \circ p)_{\#}(\pi_1(\widetilde{M}))$;
- N' é o recobrimento duplo orientável de $\widetilde{N}$ se $\widetilde{N}$ for não orientável ou $N' = \widetilde{N}$ se $\widetilde{N}$ for orientável;
- M' é o recobrimento induzido por $\widetilde{f}$.

Definição 2.1. $f : M \mapsto N$ é do tipo 1 se uma das seguintes condições é satisfeita:

1. M e $\overline{N}$ são orientáveis;
2. M e $\overline{N}$ são não-orientáveis e $\widetilde{N}$ é orientável;

Definição 2.2. $f : M \mapsto N$ é do tipo 2 se uma das seguintes condições é satisfeita:

1. M é não-orientável, $\widetilde{N} \neq \overline{N}$ e $\widetilde{N}$ é não-orientável;
2. M é orientável e $\overline{N}$ é não-orientável;
3. M é não-orientável, $\widetilde{N} \neq \overline{N}$ e $\widetilde{N}$ é orientável;

Definição 2.3. $f : M \mapsto N$ é do tipo 3 se M é não-orientável e $\widetilde{N} = \overline{N}$.

Denotando por $\deg(f)$ e $\deg(f, \mathbb{Z}_2)$ respectivamente o grau usual de uma aplicação f entre variedades orientáveis e o grau *mod* 2 definido com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$ para uma f entre variedades quaisquer e tomando-se $j = |\pi_1(N) : f_{\#}(\pi_1(M))|$ (que corresponde ao número de folhas do recobrimento $\overline{N} \mapsto N$) podemos então definir¹ o grau de $f : M \mapsto N$:

$$\deg(f) = \begin{cases} 0 & \text{se } (j = \infty) \text{ ou } (f \text{ é do tipo 2) ou} \\ & (f \text{ é do tipo 3 e } \deg(\overline{f}, \mathbb{Z}_2) = 0); \\ j|\deg(\widetilde{f})| & \text{se } f \text{ é do tipo 1;} \\ j & \text{se } f \text{ é do tipo 3 e } \deg(\overline{f}, \mathbb{Z}_2) \neq 0. \end{cases}$$

Note que se M e N são orientáveis a definição corresponde a usual.

¹Para maiores detalhes ver [Epstein]

2.2 Aplicações Fiéis à Orientação

Dada M uma variedade n -dimensional sem bordo denotaremos por $\tilde{\mathbb{Z}}$ o sistema de coeficientes locais dado pela orientação de M com valores em $\mathbb{Z}$, ou seja $G(x) = \mathbb{Z}$ para todo $x \in M$ e $G(\alpha) : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ é tal que $G(\alpha)(1) = (-1)^{\text{signal}(\alpha)}$ para todo $\alpha \in \pi_1(M)$ (ver definição 1.12). Analogamente usaremos a notação $\tilde{\mathbb{Q}}$ quando $G(x) = \mathbb{Q}$.

Definição 2.4. Dadas duas variedades X e Y uma aplicação $f : X \mapsto Y$ é fiel à orientação² se: $\forall \alpha \in \pi_1(X)$ vale que $\text{signal}(\alpha) \cdot \text{signal}(f(\alpha)) = 1$.

Teorema 2.5. Se f é fiel a orientação então f induz um homomorfismo entre os grupos de homologia com coeficientes dados pelas orientações de X e de Y .

Demonstração: Basta observar que como f é fiel a orientação o sistema de coeficientes locais $\tilde{\mathbb{Z}}$ em X é isomorfo ao sistema $f^*(\tilde{\mathbb{Z}})$ induzido por f . $\square$

2.3 Classes de Coincidências

Apesar de lidarmos apenas com superfícies, apresentaremos algumas definições e propriedades básicas das classes de coincidências no contexto geral de complexos simpliciais.

Definição 2.6. Uma coincidência entre duas funções $f_1, f_2 : X \mapsto Y$ é um ponto $x \in X$ tal que $f_1(x) = f_2(x)$.

Chamaremos de $\text{Coin}(f_1, f_2)$ o conjunto das coincidências do par f_1, f_2 .

Sejam X e Y são poliedros conexos, X compacto, $p : \tilde{X} \rightarrow X$ e $q : \tilde{Y} \rightarrow Y$ seus recobrimentos universais. Denotando por $\mathfrak{D}(X)$ o grupo das aplicações $\gamma : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ tais que $\gamma \circ p = p \circ \text{id}$, temos que valem as seguintes proposições:

Proposição 2.7. Se $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ é um levantamento fixado de f existe $\tilde{f}_\pi : \mathfrak{D}(X) \rightarrow \mathfrak{D}(Y)$ endomorfismo tal que:

$$\tilde{f}_\pi(\gamma) \circ \tilde{f} = \tilde{f} \circ \gamma.$$

Demonstração: [Jiang 1, página 25]. $\square$

²Em inglês: *orientation true*

Proposição 2.8. *Se $\tilde{f}_1$ e $\tilde{f}_1'$ são levantamentos de $f_1 : X \rightarrow Y$ e $\tilde{f}_2$ e $\tilde{f}_2'$ são levantamentos de $f_2 : X \rightarrow Y$ então $p(\text{Coin}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)) = p(\text{Coin}(\tilde{f}_1', \tilde{f}_2'))$ se, e somente se, existirem $\gamma \in \mathfrak{D}(X)$ e $\alpha \in \mathfrak{D}(Y)$ tais que:*

$$\tilde{f}_1' = \alpha \circ \tilde{f}_1 \quad \text{e} \quad \tilde{f}_2' = \alpha \circ \tilde{f}_{2\pi}(\gamma) \circ \tilde{f}_2 \circ \gamma^{-1}.$$

Demonstração: [Oliveira, página 25]. □

Podemos então definir:

Definição 2.9. *Sejam $\tilde{f}_1$ e $\tilde{f}_1'$ levantamentos de f_1 ; $\tilde{f}_2$ e $\tilde{f}_2'$ levantamentos de f_2 . O par $(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ é equivalente à $(\tilde{f}_1', \tilde{f}_2')$ se existem $\gamma \in \mathfrak{D}(X)$ e $\alpha \in \mathfrak{D}(Y)$ tais que:*

$$\tilde{f}_1' = \alpha \circ \tilde{f}_1 \quad \text{e} \quad \tilde{f}_2' = \alpha \circ \tilde{f}_{2\pi}(\gamma) \circ \tilde{f}_2 \circ \gamma^{-1}.$$

As classes de equivalência assim determinadas são chamadas classes de levantamento de f_1 e f_2 .

Usando a proposição 2.8 podemos passar a noção de classe para as coincidências de f_1 e f_2 .

Definição 2.10. *O conjunto $p(\text{Coin}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)) \subset \text{Coin}(f_1, f_2)$, determinado pela classe $[(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)]$ é denominado classe de coincidência de f_1 e f_2 .*

Corolário 2.11. *$\text{Coin}(f_1, f_2)$ é a união disjunta de classes de coincidência.* □

Corolário 2.12. *Dois pontos $x_0, x_1 \in \text{Coin}(f_1, f_2)$ estão na mesma classe de coincidência de $f_1, f_2 : X \mapsto Y$ se, e somente se, existe uma curva ζ de x_0 até x_1 em X tal que $f_1 \circ \zeta \simeq f_2 \circ \zeta \text{ rel}\{0, 1\}$.*

Demonstração: [Oliveira, página 30]. □

Corolário 2.13. *Se $\mathbb{F} \subset \text{Coin}(f_1, f_2)$ é uma classe de coincidência então $\mathbb{F}$ é um aberto em $\text{Coin}(f_1, f_2)$.*

Demonstração: [Oliveira, página 30]. □

Corolário 2.14. *$\text{Coin}(f_1, f_2)$ contém somente um número finito de classes.*

Demonstração: [Oliveira, página 30]. □

Corolário 2.15. *Se $\mathbb{F}$ é uma classe de coincidência de f_1, f_2 então $\mathbb{F}$ é um compacto em X .*

Demonstração: [Oliveira, página 31]. □

Teorema 2.16. *Sejam $f_1, f_1', f_2, f_2' : X \rightarrow Y$, X e Y poliedros conexos, X compacto, $f_1 \simeq f_1'$ e $f_2 \simeq f_2'$ então as classes de coincidência de f_1, f_2 estão em correspondência biunívoca com as de f_1', f_2' .*

Demonstração: [Oliveira, página 31]. □

2.4 Índice e Número de Lefschetz

A situação apresentada aqui consiste de um caso particular dos resultados de [Gonçalves & Jezierski] pois lidamos com variedades sem bordo e nossos sistemas de coeficientes sempre têm valores em $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$. Assim para uma exposição detalhada consulte [Gonçalves & Jezierski].

Denotando por $z_{M,x}$ o gerador canônico de $H_n(M, M \setminus x; \tilde{\mathbb{Z}}) \approx \mathbb{Z}$ temos:

Lema 2.17 (Classe Fundamental). *Para todo conjunto compacto $C \subset M$ existe um único elemento $z_{M,C} \in H_n(M, M \setminus C; \tilde{\mathbb{Z}})$ tal que para todo $x \in C$ sua imagem pelo homomorfismo natural $H_n(M, M \setminus C; \tilde{\mathbb{Z}}) \mapsto H_n(M, M \setminus x; \tilde{\mathbb{Z}})$ é $z_{M,x}$.*

Demonstração: [Gonçalves & Jezierski, Lema 3.1, página 5]. $\square$

Observação 2.18. *Note que se M é compacta temos que $z_{M,M}$ é um gerador de $H_n(M, \tilde{\mathbb{Z}})$.*

Lema 2.19 (Dualidade de Poincaré). *Se M é uma n -variedade compacta e sem bordo então o produto cap:*

$$\cap z_M : H^p(M; \mathbb{Z}) \mapsto H_{n-p}(M; \tilde{\mathbb{Z}})$$

denotado D_M é um isomorfismo.

Demonstração: [Gonçalves & Jezierski, Corolário 3.3, página 6]. $\square$

Definindo $j_x : M \times M \mapsto M$ tal que $j_x(y) = (x, y) \forall x, y \in M$ e denotando por Δ a diagonal em $M \times M$ temos:

Lema 2.20 (Classe de Thom). *Se M é uma n -variedade sem bordo existe um único elemento $U_M \in H^n(M \times M, M \times M \setminus \Delta; (\mathbb{Z} \times \tilde{\mathbb{Z}}))$ cuja restrição a qualquer fibra é o dual da classe fundamental, ou seja $\langle (j_x)^*(U_M), z_{M,x} \rangle = 1$*

Demonstração: [Gonçalves & Jezierski, Lema 3.4, página 6] e [Spanier, 4.7]. $\square$

Tomando-se $\tilde{U}_M \in H^n(M \times M)$ a restrição da classe de Thom e denotando por d a inclusão $d(x) = (x, x) \in M \times M$ podemos definir:

Definição 2.21. *Dadas M, N n -variedades compactas e sem bordo e $f_1, f_2 : M \mapsto N$ aplicações com f_2 fiel à orientação, o índice do par (f_1, f_2) ($\text{ind}(f_1, f_2)$) é a imagem da classe fundamental z_M pela sequência de homomorfismos:*

$$H_n(M; \tilde{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{d_*} H_n(M \times M; \mathbb{Z} \times \tilde{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{(f_1 \times f_2)^*} H_n(N \times N; \mathbb{Z} \times \tilde{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\langle \tilde{U}_N, \cdot \rangle} \mathbb{Z}.$$

Ou seja $\text{ind}(f_1, f_2) = \langle \tilde{U}_N, (f_1 \times f_2)_ d_*(z_M) \rangle$.*

Nas condições acima temos f_2 fiel à orientação, assim f_2 induz homomorfismos $f_2^* : H_q(N; \mathbb{Q}) \mapsto H_q(M; \mathbb{Q})$, usando o Lema 2.19 podemos construir o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^q(N; \mathbb{Q}) & \xrightarrow{f_1^*} & H^q(M; \mathbb{Q}) \\ D_N^{-1} \uparrow & & \downarrow D_M \\ H_{n-q}(N; \mathbb{Q}) & \xleftarrow{f_{2*}} & H_{n-q}(M; \mathbb{Q}). \end{array}$$

Definição 2.22 (Número de Lefschetz). Dadas M, N n -variedades compactas e sem bordo e $f_1, f_2 : M \mapsto N$ aplicações com f_2 fiel à orientação tomamos:

$$L(f_1, f_2) = \sum_{q=0}^n (-1)^q \text{tr}(\theta_q)$$

onde $\theta_q : H^q(N; \mathbb{Q}) \mapsto H^q(M; \mathbb{Q})$ é descrita como a composta $D_N^{-1} \circ f_{2*} \circ D_M \circ f_1^*$.

Claramente $L(f_1, f_2)$ é um invariante homotópico.

Teorema 2.23 (Normalização). Nas condições da definição acima:

$$L(f_1, f_2) = \text{ind}(f_1, f_2).$$

Demonstração: [Gonçalves & Jezierski, Teorema 4.1, página 10]. □

Damos agora uma definição de índice “local” de coincidência do par (f_1, f_2) .

Definição 2.24. Dadas M, N n -variedades compactas e sem bordo e $f_1, f_2 : M \mapsto N$ aplicações com f_2 fiel à orientação, se $C \subset \text{Coin}(f_1, f_2)$ é aberto e fechado em $\text{Coin}(f_1, f_2)$ definimos o índice do par (f_1, f_2) em C ($\text{ind}(f_1, f_2, C)$) como a imagem de $z_{M,C}$ pela composição:

$$H_n(M, M \setminus C; \mathbb{Z}) \xrightarrow{(f_1, f_2)^*} H_n(N \times N, N \times N \setminus \Delta; \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \xrightarrow{\langle U_N, \cdot \rangle} \mathbb{Z}.$$

ou seja $\text{ind}(f_1, f_2, C) = \langle U_N, (f, g)_*(z_{M,C}) \rangle$.

Note que se $C \subset U \subset M$, com U um aberto temos $H_n(M, M \setminus C; \mathbb{Z}) \approx H_n(U, U \setminus C; \mathbb{Z})$, assim o índice do par (f_1, f_2) pode ser calculado localmente.

2.5 Número de Lefschetz em Superfícies

Usaremos o termo *superfície* para uma variedade compacta, sem bordo de dimensão 2, orientável ou não. Denotaremos por S_g a superfície orientável de genus g (a soma conexa de g toros), por K a garrafa de Klein, por K_g a superfície não orientável obtida da soma conexa de g toros com uma garrafa de Klein, por P o plano projetivo real e por P_g a superfície não orientável obtida pela soma conexa de g toros e um plano projetivo.

Vale ressaltar que K_g pode ser descrita como a soma conexa de $2g + 2$ planos projetivos e da mesma forma P_g pode ser construída como a soma conexa de $2g + 1$ planos projetivos. O grupo fundamental de tais superfícies pode ser descrito por geradores e relações como:

- $\pi_1(S_g) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \rangle$
- $\pi_1(P_g) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, \gamma \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \gamma^2 \rangle \approx \langle \gamma_1, \dots, \gamma_{2g+1} \mid \prod_{i=1}^{2g+1} \gamma_i^2 \rangle$
- $\pi_1(K_g) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, \alpha, \beta \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \alpha \beta \alpha \beta^{-1} \rangle \approx \langle \gamma_1, \dots, \gamma_{2g+2} \mid \prod_{i=1}^{2g+2} \gamma_i^2 \rangle$

Note as representações acima são induzidas de como “construímos” tais superfícies, assim, γ_i é sempre uma curva que reverte orientação, α e β podem ser entendidas como as curvas canônicas da garrafa de Klein com β revertendo a orientação local.

Os resultados apresentados podem ser encontrados, em grande parte, em [Gonçalves & Oliveira], assim adotamos, quase sempre, as mesmas notações e definições desta referência.

Lema 2.25. *Os grupos de cohomologia das superfícies³ são dados por:*

- $$S_g \quad \begin{aligned} &\bullet H^0(S_g; \mathbb{Q}) \approx H^0(S_g; \tilde{\mathbb{Q}}) = \mathbb{Q}; \\ &\bullet H^1(S_g; \mathbb{Q}) \approx H^1(S_g; \tilde{\mathbb{Q}}) = \underbrace{\mathbb{Q} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}}_{2g \text{ vezes}}; \\ &\bullet H^2(S_g; \mathbb{Q}) \approx H^2(S_g; \tilde{\mathbb{Q}}) = \mathbb{Q}; \end{aligned}$$

³Note que no caso das superfícies orientáveis o sistema local induzido pela orientação é trivial, ou seja, coincide com o de coeficientes usuais (ver a observação 1.13 na página 5).

$$\begin{aligned}
K_g \quad & \bullet H^0(K_g; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}; \\
& \bullet H^1(K_g; \mathbb{Q}) = \underbrace{\mathbb{Q} \oplus \cdots \mathbb{Q}}_{2g+1 \text{ vezes}}; \\
& \bullet H^2(K_g; \mathbb{Q}) = 0; \\
& \bullet H^0(K_g; \tilde{\mathbb{Q}}) = 0; \\
& \bullet H^1(K_g; \tilde{\mathbb{Q}}) = \underbrace{\mathbb{Q} \oplus \cdots \mathbb{Q}}_{2g+1 \text{ vezes}}; \\
& \bullet H^2(K_g; \tilde{\mathbb{Q}}) = \mathbb{Q};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_g \quad & \bullet H^0(P_g; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}; \\
& \bullet H^1(P_g; \mathbb{Q}) = \underbrace{\mathbb{Q} \oplus \cdots \mathbb{Q}}_{2g \text{ vezes}}; \\
& \bullet H^2(P_g; \mathbb{Q}) = 0; \\
& \bullet H^0(P_g; \tilde{\mathbb{Q}}) = 0; \\
& \bullet H^1(P_g; \tilde{\mathbb{Q}}) = \underbrace{\mathbb{Q} \oplus \cdots \mathbb{Q}}_{2g \text{ vezes}}; \\
& \bullet H^2(P_g; \tilde{\mathbb{Q}}) = \mathbb{Q};
\end{aligned}$$

Demonstração: O caso S_g é conhecido. Para K_g e P_g o cálculo pode ser feito de maneira direta (ver [Gonçalves & Oliveira, Proposições 2.1 e 2.2, página 160]).
□

Tomando-se $\{a_1^*, b_1^*, \dots, a_g^*, b_g^*\}$ a base usual de $H^1(P_g; \mathbb{Q})$. Seja $\{\tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{a}_g, \tilde{b}_g\}$ a base de $H^1(P_g; \tilde{\mathbb{Q}})$ que é dual no sentido da dualidade de Poincaré (Lema 2.19) de $\{b_1^*, -a_1^*, \dots, b_g^*, -a_g^*\}$. Denotando por α^* e β^* os geradores provenientes de α e β da descrição do π_1 de K_g feita no início da seção, construímos de maneira análoga, $\{\tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{a}_g, \tilde{b}_g, \tilde{\alpha}\}$ uma base de $H^1(K_g; \tilde{\mathbb{Q}})$ que é dual de $\{b_1^*, -a_1^*, \dots, b_g^*, -a_g^*, \beta^*\}$.

Nessas condições temos:

Teorema 2.26. *Dadas $f_1, f_2 : K_g \mapsto K$ com f_2 fiel à orientação e tais que:*

$$\begin{aligned}
& \bullet f_2^*(\tilde{\alpha}) = \sum_{i=1}^g (\lambda_i \tilde{a}_i + \xi_i \tilde{b}_i) + \lambda \tilde{\alpha}; \\
& \bullet f_2^*(\beta^*) = \sum_{i=1}^g (m_i a_i^* + n_i b_i^*) + m \beta^*;
\end{aligned}$$

$$\bullet \quad f_1^*(\beta^*) = \sum_{i=1}^g (r_i a_i^* + s_i b_i^*) + r\beta^*.$$

Podemos concluir que:

$$L(f_1, f_2) = \sum_{i=1}^g \left(\det \begin{pmatrix} \lambda_i & \xi_i \\ m_i & n_i \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} \lambda_i & \xi_i \\ r_i & s_i \end{pmatrix} \right) + \lambda(m - r).$$

Demonstração: [Gonçalves & Oliveira, Teorema 2.5, página 163]. $\square$

Para simplificar a notação nos próximos casos definiremos algumas funções sobre matrizes $(2h \times 2g)$.

Se A é uma matriz de ordem $(2h \times 2g)$ então:

$$A_{2m-1, 2m}^{2l-1, 2l} = \begin{pmatrix} a_{2m-1, 2l-1} & a_{2m-1, 2l} \\ a_{2m, 2l-1} & a_{2m, 2l} \end{pmatrix}.$$

Se A e B são matrizes $(2h \times 2g)$ então:

1. $\varphi(A, B) = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^h \left(\det \left(A_{2j-1, 2j}^{2i-1, 2j} - B_{2j-1, 2j}^{2i-1, 2j} \right) - \det \left(B_{2j-1, 2j}^{2i-1, 2j} \right) - \det \left(A_{2j-1, 2j}^{2i-1, 2j} \right) \right);$
2. $\psi(A) = \sum_{j=1}^h \left(A_{2j-1, 2j}^{1, 2} \right).$

Teorema 2.27. Dadas $f_1, f_2 : K_h \mapsto K_g$ com f_2 fiel à orientação e tais que:

$$f_2^*(\cdot, \tilde{\mathbb{Q}}) = \begin{pmatrix} & \tilde{\xi}_1 \\ & M & \vdots \\ & & \tilde{\xi}_{2h} \\ \tilde{\lambda}_1 & \cdots & \tilde{\lambda}_{2g+1} \end{pmatrix}; \quad f_2^*(\cdot, \mathbb{Q}) = \begin{pmatrix} & \xi_1 \\ & M & \vdots \\ & & \xi_{2h} \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_{2g+1} \end{pmatrix};$$

$$f_1^*(\cdot, \mathbb{Q}) = \begin{pmatrix} & \beta_1 \\ & N & \vdots \\ & & \beta_{2h} \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_{2g+1} \end{pmatrix};$$

Podemos concluir que:

$$\begin{aligned} L(f_1, f_2) &= \varphi(N, M) + \psi(M) - \sum_{i=1}^g (\tilde{\lambda}_{2i-1} \alpha_{2i} - \tilde{\lambda}_{2i} \alpha_{2i-1}) \\ &\quad + \sum_{j=1}^h (\tilde{\xi}_{2j-1} \beta_{2j} - \tilde{\xi}_{2j} \beta_{2j-1}) - \tilde{\lambda}_{2g+1} \alpha_{2g+1} + \tilde{\lambda}_1 \lambda_2. \end{aligned}$$

Demonstração: [Gonçalves & Oliveira, Teorema 2.8, página 165]. $\square$

Teorema 2.28. Dadas $f_1, f_2 : K_h \mapsto P_g$ com f_2 fiel à orientação e tais que:

$$f_2^*(\cdot, \tilde{\mathbb{Q}}) = \begin{pmatrix} M \\ \tilde{\lambda}_1 & \cdots & \tilde{\lambda}_{2g} \end{pmatrix}; \quad f_2^*(\cdot, \mathbb{Q}) = \begin{pmatrix} M \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_{2g} \end{pmatrix};$$

$$f_1^*(\cdot, \mathbb{Q}) = \begin{pmatrix} N \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_{2g} \end{pmatrix};$$

Podemos concluir que:

$$L(f_1, f_2) = \varphi(N, M) + \psi(M) - \sum_{i=1}^g (\tilde{\lambda}_{2i-1} \alpha_{2i} - \tilde{\lambda}_{2i} \alpha_{2i-1}) + \tilde{\lambda}_1 \lambda_2.$$

Demonstração: [Gonçalves & Oliveira, Teorema 2.7, página 164]. $\square$

O caso orientável

Em [Gonçalves & Jiang] encontramos vários resultados sobre limitações de valores para índices de classes de coincidência em superfícies orientáveis. Particularmente foram estudadas aplicações $f_1, f_2 : S_h \mapsto S_g$ com $h \geq g$ e onde S_i é a superfície orientável de genus i .

Usando a notação de [Gonçalves & Jiang] definimos:

$$B(g, h, d_1, d_2) = \sup\{|ind(C)| \mid |deg(f_1)| = d_1, |deg(f_2)| = d_2\},$$

onde o supremo é tomado para todas as classes de coincidência C de todos os pares de aplicações $(f_1, f_2) : S_h \mapsto S_g$ com tais graus.

Destacamos os seguintes resultados:

Teorema 3.1. $B(1, h, d_1, d_2) = \infty$ para $h > 1$. [Gonçalves & Jiang, Proposição 9, página 83]

Teorema 3.2. Quando $2 \leq g \leq h$ e $0 \leq d_1, d_2 < \frac{h-1}{g-1}$ (nesse caso nem f_1 nem f_2 são homotópicas a um revestimento), então: $B(g, h, d_1, d_2) = \infty$. [Gonçalves & Jiang, Teorema 10, página 83]

Em geral o caso $d_2 = \frac{h-1}{g-1}$ continua em aberto apesar de sob algumas condições haver uma limitação [Gonçalves & Jiang, página 3 e Proposição 11].

Nessa seção discutiremos o caso $f_1, f_2 : S_h \mapsto S_g$ com $h \leq g$.

Teorema 3.3. Se $g \geq h \geq 2$ e $d_1 = d_2 = 0$, então $B(g, h, 0, 0) = \infty$.

Observação 3.4. Esse resultado poderia ser obtido a partir dos exemplos (o par ϕ_0, ψ_0) construídos na demonstração do Teorema 3.2 em [Gonçalves & Jiang], (onde o resultado para $g = h \geq 2$ já está escrito) e junto com 3.1 e 3.2 completa a demonstração de: $B(g, h, 0, 0) = \infty$ para qualquer par (g, h) com $g \geq 1$ $h \geq 2$.

Apresentamos aqui um exemplo detalhado para esse caso específico.

Demonstração: Sabemos [ZVC, página 78, Proposição 3.3.10] que toda $f : S_h \mapsto S_g$ de grau zero se fatora no 1-esqueleto de S_g , além disso que toda aplicação $\tilde{f} : \bigvee_{i=1}^{2h} S^1 \mapsto \bigvee_{i=1}^{2g} S^1$ pode ser estendida para uma $f : S_h \mapsto S_g$ se, e somente se, $\tilde{f}$ leva a relação que define o $\pi_1(S_h)$ no elemento nulo do $\pi_1(\bigvee_{i=1}^{2g} S^1)$, ou seja $\tilde{f}_\#(\prod_{i=1}^h [a_{2i-1}, a_{2i}]) = 1$.

Inicialmente tomemos $h = 2$ e $g = 2$. Sendo F_4 o grupo livre com 4 geradores denotados por $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, tomamos $\tilde{f}_i : F_4 \mapsto F_4$ homomorfismos tais que:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{f}_1 & & \tilde{f}_2 \\ a_1 & \mapsto & a_1^r \\ a_2 & \mapsto & a_1 \\ a_3 & \mapsto & a_2 \\ a_4 & \mapsto & 1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \tilde{f}_2 & & \\ a_1 & \mapsto & 1 \\ a_2 & \mapsto & a_2^{-1} \\ a_3 & \mapsto & 1 \\ a_4 & \mapsto & 1 \end{array}$$

Observamos que:

$$\tilde{f}_i([a_1, a_2] \cdot [a_3, a_4]) = 1$$

assim $\tilde{f}_i$ admite uma extensão $f_i : S_2 \mapsto S_2$.

Notemos que se $[w]_R$ é uma classe de Reidemeister associada a uma classe de Nielsen de coincidência então w é uma palavra em a_1 e a_2 (pois as imagens de $\tilde{f}_1$ e de $\tilde{f}_2$ estão contidas no subgrupo gerado por a_1 e por a_2), assim $w = w' \cdot a_1^n$ ou $w = w' \cdot a_2^n$ e temos:

$$w = w' \cdot a_2^n \sim f_2(a_2^n) \cdot w' \cdot a_2^n \cdot (f_1(a_3^n))^{-1} \sim w' \cdot a_2^n \cdot a_2^{-n} \sim w'.$$

$$w = w' \cdot a_1^n \sim f_2(a_2^n) \cdot w' \cdot a_1^n \cdot (f_1(a_2^n))^{-1} \sim a_2^{-n} \cdot w' \cdot a_1^n \cdot a_1^{-n} \sim a_2^{-n} \cdot w'.$$

Usando as relações acima um número suficiente de vezes obteremos:

$$w \sim a_2^k \sim f_2(a_3^k) \cdot a_2^k \cdot (f_1(a_3^k))^{-1} \sim a_2^k \cdot a_2^{-k} \sim 1$$

o que nos diz que o par (f_1, f_2) tem uma única classe de Nielsen de coincidência.

Como f_1^1 é dada pela matriz $\begin{pmatrix} r & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e f_2^1 é dada por $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ temos que ([Gonçalves & Jiang, Teorema 3, página 5]):

$$L(f_1, f_2) = r$$

Como existe uma única classe de Nilsen de coincidência temos que seu índice corresponde a $L(f_1, f_2)$ ([Vick]), assim fazendo-se $r \mapsto \infty$ concluímos que $B(2, 2, 0, 0) = \infty$.

Tomando-se, agora $f_1, f_2 : F_{2h} \mapsto F_{2g}$ da forma:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{f}_1 & & \tilde{f}_2 \\ a_1 & \mapsto & a_1^r \\ a_2 & \mapsto & a_1 \\ a_3 & \mapsto & a_2 \\ a_4 & \mapsto & 1 \\ a_5 & \mapsto & 1 \\ a_6 & \mapsto & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2h} & \mapsto & 1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \tilde{f}_2 & & \\ a_1 & \mapsto & 1 \\ a_2 & \mapsto & a_2^{-1} \\ a_3 & \mapsto & 1 \\ a_4 & \mapsto & 1 \\ a_5 & \mapsto & 1 \\ a_6 & \mapsto & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2h} & \mapsto & 1 \end{array}$$

Temos que:

$$\tilde{f}_i(\prod_{i=1}^h [a_{2i-1}, a_{2i}]) = 1$$

o que nos garante que tais homomorfismos admitem uma extensão $f_i : S_h \mapsto S_g$. Pelos mesmos argumentos usados anteriormente o par (f_1, f_2) tem uma única classe de Nielsen de coincidência com índice r . $\square$

3.1 Aplicações do Toro

Sabemos [Brooks, página 125] que se $f_1, f_2 : S_1 \mapsto S_1$, então $|ind(C)| \leq 1$ para toda classe de coincidência C do par f_1, f_2 . Vamos agora mostrar que esse resultado é verdadeiro para pares $f_1, f_2 : S_1 \mapsto S_g$, com $g > 1$.

3.1.1 Um pouco da geometria de S_g

Sabemos que o toro é uma superfície euclidiana que tem como revestimento universal o plano $\mathbb{R}^2$; assim fixaremos a projeção $p : \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ como a aplicação de recobrimento $\mathbb{R}^2 \mapsto S_1$.

A superfície S_g ($g > 1$) é hiperbólica e seu recobrimento universal é melhor descrito [Stillwell] como sendo o disco hiperbólico de Poincaré $\mathbb{D}^2$ (que é homeomorfo ao $\mathbb{R}^2$), com esse modelo podemos descrever a aplicação de recobrimento como sendo a projeção $q : \mathbb{D}^2 \mapsto \frac{\mathbb{D}^2}{\pi_1(S_g)}$ onde $\pi_1(S_g)$ é visto como um reticulado em $\mathbb{D}^2$.

Dessa maneira temos que, fixados $y_0 \in S_g$ e $\tilde{y}_0 \in q^{-1}(y_0)$, para cada $\alpha \in \pi_1(S_g)$, existe um único $\underline{y}_\alpha \in \mathbb{D}^2$ com a propriedade de que o segmento de reta (hiperbólica) orientado $\tilde{\alpha} = \tilde{y}_0 \underline{y}_\alpha$ é tal que $\langle q(\tilde{\alpha}) \rangle = \alpha$; por [Stillwell, página 158] temos que $\tilde{\alpha} \subset \tilde{\alpha}^k$ se $k \geq 1$.

Lema 3.5. *Dados $\alpha, \beta \in \pi_1(S_g)$ distintos, então existem $a, b : \{[0, 1], \{0, 1\}\} \mapsto \{S_g, y_0\}$ tais que:*

- $\langle a \rangle = \alpha$ e $\langle b \rangle = \beta$.
- $a([0, 1]) \cap b([0, 1])$ é finito.
- a e b são geodésicas de S_g (ver [Stillwell]).

onde y_0 é um ponto qualquer de S_g .

Demonstração: Se α e β são não triviais tomamos $\tilde{a} : [0, 1] \mapsto \tilde{\alpha}$ e $\tilde{b} : [0, 1] \mapsto \tilde{\beta}$ homeomorfismos tais que $\tilde{a}(0) = \tilde{b}(0) = \tilde{y}_0$; se α é trivial fazemos a a aplicação constante em y_0 . Tomamos então $a = q \circ \tilde{a}$ e $b = q \circ \tilde{b}$.

Observamos que $\mathbb{D}^2 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{V_i}$, onde cada V_i é uma vizinhança elementar de um elemento de $q^{-1}(y_0)$ com $V_i \cap V_j = \emptyset$ para $i \neq j$, $q|_{\overline{V_i}} : \overline{V_i} \mapsto S_1$ sobrejetora e $q|_{V_i}$ um homeomorfismo. Como $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ são segmentos de reta (hiperbólicas) com início no mesmo ponto $\tilde{y}_0$ e α, β são distintos $\tilde{\alpha} \cap \tilde{\beta} = \{\tilde{y}_0\}$. Além disso $\tilde{\alpha} \subset \bigcup_{k=1}^m \overline{V_{i_k}}$ e $\tilde{\beta} \subset \bigcup_{k'=1}^m \overline{V_{i_{k'}}}$ e para cada par i_k e $i_{k'}$ $q|_{\overline{V_{i_k}}}(\tilde{\alpha}) \cap q|_{\overline{V_{i_{k'}}}(\tilde{\beta})$ tem, no máximo, um ponto temos que $a([0, 1]) \cap b([0, 1])$ é finito.

Segue da definição de $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ que a e b são geodésicas. □

3.1.2 Forma padrão de $f : S_1 \mapsto S_g$

Definição 3.6. Dados $w \in \pi_1(S_g)$ e $r, s \in \mathbb{Z}$ e tomando-se a superfície S_1 como o quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ com os lados identificados, , definimos $f_{w,r,s} : S_1 \mapsto S_g$ como:

Caso 1 ($w \neq 0$, $r \cdot s > 0$)

1. $f_{w,r,s}(0 \times [0, \frac{1}{r}]) = w_i$ (com $\langle w_i \rangle = w$) um homeomorfismo local tal que ao “caminharmos” de $(0, 0)$ para $(0, \frac{1}{r})$ percorremos w_i no sentido positivo, se $r > 0$, ou negativo se $r < 0$.
2. Para $\frac{1}{r} < p \leq 1$, $f_{w,r,s}(0, p) = f_{w,r,s}(0, p')$ com $0 \leq p' < \frac{1}{r}$ e $p = p' + \frac{k}{r}$ com $k \in \mathbb{N}$.
3. Para $0 \leq q \leq \frac{1}{s}$, $f_{w,r,s}(q, 0) = f_{w,r,s}(0, \frac{sq}{r})$.
4. Para $\frac{1}{s} < q \leq 1$, $f_{w,r,s}(q, 0) = f_{w,r,s}(q', 0)$ com $0 \leq q' < \frac{1}{s}$ e $q = q' + \frac{k}{s}$ com $k \in \mathbb{N}$.
5. Para $x \neq 0 \neq y$ com $(y + \frac{s}{r}x) \leq 1$, $f_{w,r,s}(x, y) = f_{w,r,s}(0, y + \frac{s}{r}x)$.
6. Para $x \neq 0 \neq y$ com $(y + \frac{s}{r}x) > 1$, $f_{w,r,s}(x, y) = f_{w,r,s}((y-1)\frac{r}{s} + x, 1)$.

Caso 2 ($w \neq 0$, $r \cdot s < 0$)

1. $f_{w,r,s}(0 \times [0, \frac{1}{r}]) = w_i$ (com $\langle w_i \rangle = w$) um homeomorfismo local tal que ao “caminharmos” de $(0, 0)$ para $(0, \frac{1}{r})$ percorremos w_i no sentido positivo, se $r > 0$, ou negativo se $r < 0$.
2. Para $\frac{1}{r} < p \leq 1$, $f_{w,r,s}(0, p) = f_{w,r,s}(0, p')$ com $0 \leq p' < \frac{1}{r}$ e $p = p' + \frac{k}{r}$ com $k \in \mathbb{N}$.
3. Para $(1 - \frac{1}{s}) \leq q \leq 1$, $f_{w,r,s}(q, 0) = f_{w,r,s}(0, \frac{s}{r}(1 - q))$.
4. Para $0 \leq q < 1$, $f_{w,r,s}(q, 0) = f_{w,r,s}(q', 0)$ com $(1 - \frac{1}{s}) < q' \leq 1$ e $q' = q - \frac{k}{s}$ com $k \in \mathbb{N}$.
5. Para $x \neq 0 \neq y$ com $((1-x)\frac{s}{r} + y) \leq 1$, $f_{w,r,s}(x, y) = f_{w,r,s}(1, (1-x)\frac{s}{r} + y)$.
6. Para $x \neq 0 \neq y$ com $((1-x)\frac{s}{r} + y) > 1$, $f_{w,r,s}(x, y) = f_{w,r,s}((1-y)\frac{r}{s} + x, 1)$.

Caso 3 ($w \neq 0$, $s = 0$)

1. $f_{w,r,s}(0 \times [0, \frac{1}{r}]) = w_i$ (com $\langle w_i \rangle = w$) um homeomorfismo local tal que ao “caminharmos” de $(0, 0)$ para $(0, \frac{1}{r})$ percorremos w_i no sentido positivo, se $r > 0$, ou negativo se $r < 0$.

2. Para $\frac{1}{r} < p \leq 1$, $f_{w,r,s}(0, p) = f_{w,r,s}(0, p')$ com $0 \leq p' < \frac{1}{r}$ e $p = p' + \frac{k}{r}$ com $k \in \mathbb{N}$.
3. Para $x \neq 0$, $f_{w,r,s}(x, y) = f_{w,r,s}(0, y)$.

Caso 4 ($w \neq 0$, $r = 0$)

1. $f_{w,r,s}([0, \frac{1}{s}] \times 0) = w_i$ (com $\langle w_i \rangle = w$) um homeomorfismo local tal que ao “caminharmos” de $(0, 0)$ para $(0, \frac{1}{s})$ percorremos w_i no sentido positivo, se $s > 0$, ou negativo se $s < 0$.
2. Para $\frac{1}{s} < p \leq 1$, $f_{w,r,s}(p, 0) = f_{w,r,s}(p', 0)$ com $0 \leq p' < \frac{1}{s}$ e $p = p' + \frac{k}{s}$ com $k \in \mathbb{N}$.
3. Para $y \neq 0$, $f_{w,r,s}(x, y) = f_{w,r,s}(x, 0)$.

Caso 5 ($w = 0$ ou $r = s = 0$)

$f_{w,r,s}$ constante no ponto base de S_g

Observe que $\langle a_1 \rangle$ e $\langle a_2 \rangle$ são os geradores de $\pi_1(S_g)$ e temos que:

1. $(f_{w,r,s})_{\#}(\langle a_1 \rangle) = \langle w \rangle^r$;
2. $(f_{w,r,s})_{\#}(\langle a_2 \rangle) = \langle w \rangle^s$.

Intuitivamente $f_{w,r,s}$ é definida como um homeomorfismo local sobre uma curva da classe w em um pedaço do bordo do quadrado e depois estendida sobre a_1 e a_2 por r e s “repetições” desse homeomorfismo, no interior do quadrado $f_{w,r,s}$ é constante nas retas com coeficiente angular $\frac{-s}{r}$ (casos 1 e 3) e $\frac{s}{r}$ (caso 2).

Lema 3.7. Dada $f : S_1 \mapsto S_g$ com $g \geq 2$, existem $w \in \pi_1(S_g)$ e $r, s \in \mathbb{R}$ tais que f é homotópica a $f_{w,r,s}$.

Demonstração: Observamos que $f_{\#}(\pi_1(S_1)) = \langle f_{\#}(a_1), f_{\#}(a_2) \rangle \subset \pi_1(S_g)$ assim, pelo *Freiheitssatz* [MKS, Teorema 4.10, página 252], $f_{\#}(\pi_1(S_1))$ é livre com um único gerador, portanto $f_{\#}(\pi_1(S_1)) \approx \mathbb{Z}$. Desse modo temos que existem $w \in \pi_1(S_g)$ e $r, s \in \mathbb{R}$ tais que $f_{\#}(\langle a_1 \rangle) = \langle w \rangle^r$ e $f_{\#}(\langle a_2 \rangle) = \langle w \rangle^s$.

Como a classe de homotopia preservando ponto base de f é unicamente determinada¹ por $f_{\#}$ temos que f é homotópica a $f_{w,r,s}$. $\square$

Teorema 3.8. Se $g \geq 2$, $B(g, 1, 0, 0) = 1$.

¹ S_1 é um espaço $K[\pi, 1]$.

Figura 3.1: Forma padrão da f ; caso 1 (com $s > r$)

Demonstração: Sejam $f_1, f_2 : S_1 \mapsto S_g$, pelo Lema 3.7 podemos supor $f_1 = f_{w,r,s}$ e $f_2 = f_{\alpha,p,q}$, podemos ainda supor que a imagem de f_1 e de f_2 estão contidas em duas curvas geodésicas w_0 e α_0 de S_g (ver [Stillwell]). Temos então que:

Caso 1 ($w^k \neq \alpha^{k'}, \forall k, k' \in \mathbb{Z}$ com $rq \neq sp$) ou ($r = p = 0$) ou ($q = s = 0$).

Como $w \neq \alpha$ e a imagem de f_1 e de f_2 estão contidas em duas curvas geodésicas de S_g pelo Lema 3.5 temos que $w_0 \cap \alpha_0$ é finito, assim $w_0 \cap \alpha_0 = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ logo

$$Coin(f_1, f_2) = \bigcup_{i=1}^n (f_1^{-1}(y_i) \cap f_2^{-1}(y_i))$$

como $f_1^{-1}(y_i)$ e $f_2^{-1}(y_i)$ são a união de um número finito de segmentos de reta com coeficientes angulares distintos (quando identificamos S_1 com o quadrado) temos que $Coin(f_1, f_2)$ é finito.

Agora se $\gamma : I \mapsto S_1$ é uma curva tal que $\gamma(0) = c_1$ e $\gamma(1) = c_2$ com $c_1, c_2 \in Coin(f_1, f_2)$ temos que se $\tilde{\gamma} : I \mapsto \mathbb{R}^2$ é um levantamento de γ com $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{c}_1$ e $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{c}_2$ então $\tilde{\gamma}$ é homotópica (relativamente aos seus extremos) a uma curva $\bar{\gamma} : I \mapsto \mathbb{R}^2$ que é um homeomorfismo cuja imagem é um segmento de reta entre $\tilde{c}_1$ e $\tilde{c}_2$.

Assim temos que γ é homotópica (relativamente aos seus extremos) a $p \circ \bar{\gamma} : I \mapsto S_1$ e $f_i \circ p \circ \bar{\gamma}$ é constante ou um homeomorfismo local para $i = 1, 2$.

Considerando $y_{i_1} = f_1(c_1) = f_2(c_1)$ como o ponto base de S_g temos que f_1 e f_2 admitem levantamentos $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{D}^2$ com $\tilde{f}_1(\tilde{c}_1) = \tilde{f}_2(\tilde{c}_1) = \tilde{y}_{i_1}$ onde

$p(\widetilde{y}_{i_1}) = y_{i_1}$ e com $\widetilde{f}_i \circ \overline{\gamma}$, $i = 1, 2$, constante ou um homeomorfismo local com imagem em um segmento de reta (hiperbólico) $\widetilde{w}_0$ ou $\widetilde{\alpha}_0$.

Como $\widetilde{w}_0 \cap \widetilde{\alpha}_0 = \widetilde{c}_1$ temos que $\widetilde{f}_1(\widetilde{c}_2) \neq \widetilde{f}_2(\widetilde{c}_2)$ o que mostra que c_1 e c_2 não estão na mesma classe de coincidência do par (f_1, f_2) .

Observamos, agora, que se $c \in \text{Coin}(f_1, f_2)$ podemos definir ² uma vizinhança euclidiana U de c onde f_1 e f_2 se comportam como projeções $p(x, y) = (\pm x, 0)$ e $p(x, y) = (0, \pm y)$, em qualquer dessas situações $(f_1 - f_2)|_U$ é um homeomorfismo, portanto $|\text{ind}(c)| = 1$ o que encerra o caso 1.

Caso 2 ($w^k \neq \alpha^{k'}, \forall k, k' \in \mathbb{Z}$ com $rq = sp$)

Como no caso anterior temos que $w_0 \cap \alpha_0 = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ e

$$\text{Coin}(f_1, f_2) = \bigcup_{i=1}^n (f_1^{-1}(y_i) \cap f_2^{-1}(y_i))$$

mas nesse caso $f_1^{-1}(y_i) = f_2^{-1}(y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Com uma pequena translação de f_2 no sentido de a temos $\text{Coin}(f_1, f_2) = \emptyset$. Isso mostra que se C é uma classe de coincidência do par (f_1, f_2) temos que $\text{ind}(C) = 0$.

Caso 3 ($\exists k, k' \in \mathbb{Z}$ com $w^k = \alpha^{k'}$)

Temos então que existe $\beta \in \pi_1(S_g)$ tal que:

$$\begin{aligned} f_1(a_1) &= \beta^{r'} & f_1(a_2) &= \beta^{s'} \\ f_2(a_1) &= \beta^{p'} & f_2(a_2) &= \beta^{q'} \end{aligned}$$

Podemos novamente supor que $f_1 = f_{\beta, r', s'}$ e $f_2 = f_{\beta, p', q'}$ ambas com imagem sobre um laço $\beta_0 \in S_g$ ($< \beta_0 > = \beta$).

Se $r'q' = s'p'$ podemos tomar β_1 uma pequena perturbação de β de modo que $\beta \cap \beta_1$ seja finito, nesse caso temos f_2 é homotópica a uma $f'_2 : S_1 \mapsto S_g$ também da forma $f_{\beta, p', q'}$ mas com imagem em β_1 . O mesmo argumento usado no caso 2 mostra que é possível tomar f'_2 tal que $\text{Coin}(f_1, f'_2) = \emptyset$ e portanto $\text{ind}(C) = 0$ par toda classe de coincidência C do par (f_1, f_2) .

Se $r'q' \neq s'p'$ tomamos $\widetilde{\beta}_0 \in \mathbb{D}^2$ um levantamento de β_0 com $\widetilde{\beta}_0$ contido em uma reta (hiperbólica) λ , tomando-se o ponto base de S_g , y_0 de modo que $\widetilde{y}_0$ seja um dos extremos de $\widetilde{\beta}_0$ podemos identificar (ver [Stillwell, página 158]) $\beta \in \pi_1(S_g)$ com uma translação de $\mathbb{D}^2$, λ^* com eixo em λ .

²Note que c é um ponto onde duas pré-imagens de um mesmo ponto, se encontram transversalmente.

Dado $\epsilon > 0$ tomamos $W = \{\tilde{y} \in \mathbb{D}^2 \mid \text{dist}(\tilde{y}, \lambda) = \epsilon\}^3$ e escolhendo $\tilde{y}_1 \in W$ tal que $\text{dist}(\tilde{y}_0, \tilde{y}_1) = \epsilon$ podemos definir λ_1 como sendo a componente conexa de W que contem $\tilde{y}_1$.

Por [Stillwell, página 158] temos que λ_1 é invariante por λ^* , tomamos então:

$$\tilde{\beta}_1 = \{\tilde{y} \in \lambda_1 \mid \text{dist}(\tilde{y}, \tilde{\beta}_0) = \epsilon\}.$$

Observamos que $\tilde{y}_1$ e $\lambda^*(\tilde{y}_1)$ são os extremos de $\tilde{\beta}_1$ (ver figura 3.2), além disso, $q(\tilde{y}_1) = q(\lambda^*(\tilde{y}_1))$, portanto $q(\tilde{\beta}_1)$ é um laço em S_g e tomando-se ϵ suficientemente pequeno podemos supor que $\langle q(\tilde{\beta}_1) \rangle = \beta$, ou seja β_0 e $q(\tilde{\beta}_1)$ são curvas livremente homotópicas.

Figura 3.2: Levantamento $\tilde{\beta}_0$ de β_0

Agora se $x_0 \in \text{Coin}(f_1, f_2)$ tomamos $f_1(x_0) = y_0$ como ponto base de S_g , temos que $f_1(S_1) \subset \beta_0$, $f_2(S_1) \subset \beta_0$ e o par f_1, f_2 admite levantamentos $\tilde{f}_i : S_1 \mapsto \mathbb{D}^2$, tais que $\tilde{f}_i(S_1) \subset \lambda$, $i = 1, 2$.

³A distância usada é a hiperbólica

Como λ_1 é invariante por λ^* podemos criar uma homotopia $H(x, t) : S_1 \times I \mapsto \mathbb{D}^2$ tal que $H(x, 0) = \tilde{f}_2$, $H(x, 1)$ tem sua imagem em λ_1 , $H(x_0, I)$ percorre o segmento de reta κ que une $\tilde{y}_0$ até $\tilde{y}_1$ e $H(\lambda^*(x_0), I)$ percorre $\lambda^*(\kappa)$, como β_0 e $q(\tilde{\beta}_1)$ são curvas livremente homotópicas temos que $q(H(x, t))$ é uma homotopia em S_g entre f_2 e $f'_2 = H(x, 1)$, observamos agora que ao final da homotopia as imagens dos levantamentos de f_1 e f'_2 são disjuntas, assim a classe de coincidência C que contém x_0 é não essencial, portanto $ind(C) = 0$.

□

O caso não orientável

Nesse capítulo apresentamos alguns resultados sobre a limitação de índices de classes de coincidência quando pelo menos uma das superfícies é não orientável. As definições de grau de aplicação e de índice de coincidências podem ser encontradas no capítulo 2 (Preliminares), usaremos a notação e as definições ali apresentadas. Em todos os casos estudados f_2 será fiel à orientação o que nos permite definir $L(f_1, f_2)$ e $ind(f_1, f_2, C)$.

4.1 Aplicações de $K_h \mapsto K_g$

Definimos de maneira análoga ao caso orientável:

$$B_K(g, h, d_1, d_2) = \sup\{|ind(f_1, f_2, C)| \mid |deg(f_1)| = d_1, |deg(f_2)| = d_2\},$$

onde o supremo é tomado para todas as classes de coincidência C de todos os pares de aplicações¹ $(f_1, f_2) : K_h \mapsto K_g$ com tais graus e f_2 fiel à orientação.

4.1.1 A garrafa de Klein

Fixaremos: $\pi_1(K) = \langle \alpha, \beta \mid \alpha \cdot \beta \cdot \alpha \cdot \beta^{-1} \rangle$, $p : S_1 \mapsto K$ a aplicação de recobrimento do toro na garrafa de Klein com $\pi_1(S_1) = \langle a, b \mid a \cdot b \cdot a^{-1} \cdot b \rangle$, assim $p(a) = \alpha$ e $p(b) = \beta^2$.

Teorema 4.1. $-1 \leq B_K(0, 0, d_1, d_2) \leq 1$, $\forall d_1, d_2 \geq 0$.

Demonstração: Tomemos $f_1, f_2 : K \mapsto K$ com f_2 fiel à orientação assim: $f_{2\#}(\alpha) = \alpha^r$ e $f_{2\#}(\beta) = \alpha^s \beta^{2q+1}$.

¹Para a definição de K_h ver a seção 2.5 na página 40.

Caso 1 f_1 não é fiel à orientação.

Temos que $f_{1\#}(\alpha) = 1$, $f_1(\beta) = \alpha^t \beta^{2p}$ e f_1, f_2 se levantam para aplicações $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : S_1 \mapsto S_1$ tais que: $\tilde{f}_{1\#}(a) = 1$, $\tilde{f}_{1\#}(b) = a^{2t} b^{2p}$, $\tilde{f}_{2\#}(a) = a^r$, $\tilde{f}_{2\#}(b) = b^{2q+1}$.

Note que a identidade da garrafa de Klein se levanta para a identidade ou para uma aplicação $\theta : S_1 \mapsto S_1$ com $\theta(a) = a^{-1}$ e $\theta(b) = b$ (para detalhes ver [Gonçalves & Kiihl, Proposição 10.7, página 86]).

Seja $x_0 \in \text{Coin}(f_1, f_2)$ e $\tilde{x}_0, \tilde{x}_0' \in S_1$ com $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_0') = x_0$, se $\tilde{x}_0 \in \text{Coin}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ e γ é uma curva em S_1 com início em $\tilde{x}_0$ e término em $\tilde{x}_0'$ temos que $p(\gamma) \in \frac{\pi_1(K)}{p_{\#}(\pi_1(S_1))}$, assim $\tilde{x}_0' \in \text{Coin}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ se e somente se $\tilde{f}_1(\gamma) \circ \tilde{f}_2(\gamma)^{-1} \in \pi_1(S_1)$ ou seja $f_{1\#}(p(\gamma)) \circ f_{2\#}(p(\gamma))^{-1} \in p_{\#}(\pi_1(S_1))$.

Mas como $\tilde{x}_0$ e $\tilde{x}_0'$ estão na mesma fibra de p , $p(\gamma) = \alpha^k \beta^{2l+1}$ e temos que

$$\begin{aligned} f_{1\#}(p(\gamma)) \circ f_{2\#}(p(\gamma))^{-1} &= \alpha^{t(2l+1)} \beta^{(2l+1)(2p)} \beta^{-(2l+1)(2q+1)} \alpha^{-kr-s} \\ &= \alpha^{k'} \beta^{2q'+1} \notin p_{\#}(\pi_1(S_1)). \end{aligned}$$

Logo $\tilde{x}_0' \notin \text{Coin}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$, de fato $\tilde{x}_0' \in \text{Coin}(\theta \circ \tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ pois sabemos que $\tilde{f}_1(\tilde{x}_0')$ e $\tilde{f}_2(\tilde{x}_0')$ estão em $p^{-1}(f_1(x_0))$ que só tem dois elementos. Assim as classes de coincidência de $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ estão em correspondência biunívoca com as classes de coincidência de f_1, f_2 através da p .

Como p é fiel à orientação se C é uma classes de coincidência de f_1, f_2 , $|\text{ind}(f_1, f_2, C)| = |\text{ind}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, p^{-1}(C))|$ mas $-1 \leq |\text{ind}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, p^{-1}(C))| \leq 1$ [Brooks, página 125] e portanto $-1 \leq |\text{ind}(f_1, f_2, C)| \leq 1$.

Caso 2 f_1 também é fiel à orientação.

Nesse caso temos que $f_{1\#}(\alpha) = \alpha^m$, $f_1(\beta) = \alpha^t \beta^{2p+1}$ e f_1, f_2 se levantam para aplicações $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : S_1 \mapsto S_1$ tais que: $\tilde{f}_{1\#}(a) = a^m$, $\tilde{f}_{1\#}(b) = b^{2p+1}$, $\tilde{f}_{2\#}(a) = a^r$, $\tilde{f}_{2\#}(b) = b^{2q+1}$.

Fazendo o mesmo raciocínio do caso anterior obtemos que se $\tilde{x}_0 \in \text{Coin}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ então $\tilde{x}_0' \in \text{Coin}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ também, se $\tilde{x}_0$ e $\tilde{x}_0'$ não estiverem na mesma classe de coincidência de $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ então teremos que se C é a classe que contem x_0 então $|\text{ind}(f_1, f_2, C)| = |\text{ind}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{C})|$ onde $\tilde{C}$ é a classe de coincidência de $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ que contem $\tilde{x}_0$.

Obsevamos que se $\tilde{x}_0$ e $\tilde{x}_0'$ estão na mesma classe de coincidência² todos os pares $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ de pontos tais que $p(\tilde{x}_1) = p(\tilde{x}_2) \in \text{Coin}(f_1, f_2)$ estão, os dois, na mesma classe de $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ ou de $\theta \circ \tilde{f}_1, \tilde{f}_2$.

²Então existe uma curva γ em S_1 com início em $\tilde{x}_0$ e término em $\tilde{x}_0'$ tal que $\tilde{f}_1(\gamma) \circ \tilde{f}_2(\gamma)^{-1}$ é homotopicamente trivial, mas nesse caso $f_{2\#}(p(\gamma)) \circ f_{1\#}(p(\gamma))^{-1}$ também será homotopicamente

Como p é um homeomorfismo local fiel à orientação se $\tilde{C}$ é a classe de coincidência do par $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ (ou de $\theta \circ \tilde{f}_1, \tilde{f}_2$) que contem $\tilde{x}_0$, $|\text{ind}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{C})| = 2|\text{ind}(f_1, f_2, C)|$ (ou $|\text{ind}(\theta \circ \tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{C})| = 2|\text{ind}(f_1, f_2, C)|$).

Como $|\text{ind}(f_1, f_2, C)|$ é inteiro [Gonçalves & Jezierski, Remark 2, página 22] e $-1 \leq |\text{ind}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{C})|, |\text{ind}(\theta \circ \tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{C})| \leq 1$ temos que $\text{ind}(f_2, f_1, C) = 0$. $\square$

Definição 4.2. ³ Dados $w \in \pi_1(K_g)$, $s \in \mathbb{Z}$ e tomando-se a garrafa de Klein como o quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ com os lados identificados, $\begin{smallmatrix} \beta \\ \alpha \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}$, definimos $f_{w,s} : K \mapsto K_g$ como:

1. $f_{w,s}([0, \frac{1}{s}] \times 0) = \bar{w}$ (com $\langle \bar{w} \rangle = w$) um homeomorfismo local tal que ao “caminharmos” de $(0, 0)$ para $(\frac{1}{s}, 0)$ percorremos $\bar{w}$ no sentido positivo, se $s > 0$, ou negativo se $s < 0$.
2. Para $\frac{1}{s} < q \leq 1$, $f_{w,s}(q, 0) = f_{w,s}(q', 0)$ com $0 \leq q' < \frac{1}{s}$ e $q = q' + \frac{k}{s}$ com $k \in \mathbb{N}$.
3. Para $y > 0$, $f_{w,s}(x, y) = f_{w,s}(x, 0)$.

Observe que a pré-imagem de um ponto qualquer de K_g por uma aplicação na forma $f_{w,s}$ é a união de um número finito de segmentos de retas verticais ou é vazia.

Teorema 4.3. ⁴ $B_K(g, 0, 0, 0) = 0$ para $g \geq 1$.

Demonstração: Seja $f : K \mapsto K_g$ uma aplicação, Sabemos que $\pi_1(K_g)$ é um grupo que pode ser descrito por $2g + 2$ geradores e uma única relação:

$$\pi_1(K_g) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g, \alpha, \beta \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \alpha \cdot \beta^{-1} \rangle$$

Observamos que $f_{\#}(\pi_1(K_g))$ é gerado por dois elementos $w' = f_{\#}(\alpha)$ e $w'' = f_{\#}(\beta)$ que satisfazem a relação:

$$w' \cdot w'' \cdot w' \cdot w''^{-1} = 1.$$

trivial, como $p(\gamma) = \alpha^k \beta^{2l+1}$ temos que:

$$\begin{aligned} f_{1\#}(p(\gamma)) \circ f_{2\#}(p(\gamma))^{-1} &= \alpha^{km+t} \beta^{(2l+1)(2p+1)} \beta^{-(2l+1)(2p+1)} \alpha^{-kr} \\ &= \alpha^{k(m-r)+t-s} \beta^{(2l+1)(2p-2q)}. \end{aligned}$$

De onde concluímos que $p = q$, nesse caso teremos $L(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2) = 0$ o que nos garante que todas as classes de coincidência do par $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ têm índice zero.

³Compare com a Definição 3.6

⁴Compare com o Teorema 3.8

Usando *Freiheitssatz* [MKS, Teorema 4.10, página 252] temos que $f_{\#}(\pi_1(K))$ é livre com um único gerador, assim existe $w \in \pi_1(K_g)$ tal que $w' = w^r$ e $w'' = w^s$ com $r, s \in \mathbb{Z}$ e temos, pela relação acima:

$$w^r \cdot w^s \cdot w^r \cdot w^{-s} = 1$$

assim $r = 0$ e $f_{\#}(\alpha) = 1$ o elemento trivial, dessa forma, como K é um espaço de Eilenberg-MacLane do tipo $K[\pi_1]$, f é homotópica a uma aplicação $f_{w,s}$.

Tomando-se um par $f_1, f_2 : K \mapsto K_g$ temos que $f_1 \sim f_{w_1,s}$ e $f_2 \sim f_{w_2,r}$ escolhendo $\overline{w_1}, \overline{w_2}$ curvas em K_g tais que: $\langle \overline{w_1} \rangle = w_1$, $\langle \overline{w_2} \rangle = w_2$ e $\overline{w_1} \cap \overline{w_2} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ seja finito podemos supor que

$$f_{w_1,s}(K) \subset \overline{w_1} \text{ e } f_{w_2,r}(K) \subset \overline{w_2}$$

nessas condições:

$$Coin(f_{w_1,s}, f_{w_2,r}) = \bigcup_{i=1}^n (f_{w_1,s}^{-1}(p_i) \cap f_{w_2,r}^{-1}(p_i))$$

De fato se $Coin(f_{w_1,s}, f_{w_2,r}) \neq \emptyset$ com uma translação suficientemente pequena de $f_{w_2,r}$ no sentido de β teremos $Coin(f_{w_1,s}, f_{w_2,r}) = \emptyset$. Isso mostra que se C é uma classe de coincidência do par $(f_{w_1,s}, f_{w_2,r})$ temos que $ind(f_{w_1,s}, f_{w_2,r}, C) = 0$; como $f_1 \sim f_{w_1,s}$ e $f_2 \sim f_{w_2,r}$ o mesmo vale para o par f_1, f_2 . $\square$

4.1.2 $h \geq 1$

Teorema 4.4. $B_K(0, h, d_1, d_2) = \infty$ para $h > 1$, $\forall d_1, d_2 \geq 0$.

Demonstração: Com as mesmas considerações feitas no início da demonstração do Teorema 3.3 (página 44) e lembrando que

$$\pi_1(K_h) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_h, b_h, \alpha, \beta \mid \prod_{i=1}^h [a_i, b_i] \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \alpha \cdot \beta^{-1} \rangle$$

podemos definir $\bar{f}_i : \pi_1(K_h) \mapsto \pi_1(K)$ homomorfismos⁵ tais que:

⁵Observe que $\bar{f}_i(\prod_{i=1}^h [a_i, b_i] \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \alpha \cdot \beta^{-1}) = 1$

$\bar{f}_1$			$\bar{f}_2$		
a_1	$\mapsto$	1	a_1	$\mapsto$	1
b_1	$\mapsto$	α	b_1	$\mapsto$	1
a_2	$\mapsto$	1	a_2	$\mapsto$	α^n
b_2	$\mapsto$	β^2	b_2	$\mapsto$	1
a_3	$\mapsto$	1	a_3	$\mapsto$	1
b_3	$\mapsto$	1	b_3	$\mapsto$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_h	$\mapsto$	1	a_h	$\mapsto$	1
b_h	$\mapsto$	1	b_h	$\mapsto$	1
α	$\mapsto$	α^{d_1}	α	$\mapsto$	α^{d_2}
β	$\mapsto$	β^{-1}	β	$\mapsto$	β

Como K_h é um espaço de Eilenberg-MacLane do tipo $K[\pi_1]$ existem $f_i : K_h \mapsto K$ com $f_{i\#} = \bar{f}_i$.

Observamos que f_1 e f_2 são fiéis à orientação e admitem levantamentos: $\tilde{f}_i : S_{2h+1} \mapsto S_1$ para os recobrimentos duplos orientáveis que podem ser descritos pelos seus homomorfismos induzidos no grupo fundamental $\tilde{f}_{i\#} : \pi_1(S_{2h+1}) \mapsto \pi_1(S_1)$ como:

$\tilde{f}_1$			$\tilde{f}_2$		
a_1	$\mapsto$	1	a_1	$\mapsto$	1
b_1	$\mapsto$	c	b_1	$\mapsto$	1
a_2	$\mapsto$	1	a_2	$\mapsto$	c^n
b_2	$\mapsto$	d	b_2	$\mapsto$	1
a_3	$\mapsto$	1	a_3	$\mapsto$	1
b_3	$\mapsto$	1	b_3	$\mapsto$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{h+1}	$\mapsto$	1	a_{h+1}	$\mapsto$	1
b_{h+1}	$\mapsto$	c	b_{h+1}	$\mapsto$	c^n
a_{h+2}	$\mapsto$	1	a_{h+2}	$\mapsto$	1
b_{h+2}	$\mapsto$	d	b_{h+2}	$\mapsto$	1
a_{h+3}	$\mapsto$	1	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
b_{h+3}	$\mapsto$	1	a_{2h}	$\mapsto$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	b_{2h}	$\mapsto$	1
a_{2h}	$\mapsto$	1	c	$\mapsto$	c^{d_2}
b_{2h}	$\mapsto$	1	d	$\mapsto$	d
c	$\mapsto$	c^{d_1}			
d	$\mapsto$	d^{-1}			

Onde $p : S_{2h+1} \mapsto K_h$ é o recobrimento duplo orientável de K_h , $\pi_1(S_{2h+1})$ é dado por $\langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{2h}, b_{2h}, c, d \mid \prod_{i=1}^h [a_i, b_i] \cdot [c, d] \rangle$ e p pode ser descrita por:

- $p(a_i) = a_i, p(b_i) = b_i$ se $i \leq h$;
- $p(a_i) = a_{i-h}, p(b_i) = b_{i-h}$ se $i > h$;
- $p(c) = \alpha$;
- $p(d) = \beta^2$.

Verificamos que $\tilde{f}_i$ tem grau d_i e assim ([GKZ, Definição 1.3, página 5]) $\deg(f_i) = d_i$

Notemos que⁶: $f_2^*(\tilde{\alpha}) = n\tilde{a}_2 + d_2\tilde{\alpha}$, $f_2^*(\beta) = \beta$ e $f_1^*(\beta) = 2b_2 - \beta$. Usando Teorema 2.26, página 41, temos que:

$$L(f_1, f_2) = 2 \cdot (d_1 - n).$$

Mas sabemos que se $w \in \pi_1(K)$, $w = \alpha^p \cdot \beta^q$ e temos:

$$w = \alpha^p \cdot \beta^q \sim f_1(a_2^{-p}) \cdot \alpha^p \cdot \beta^q \cdot (f_2(a_2^{-p}))^{-1} = \alpha^{-p} \cdot \alpha^p \cdot \beta^q = \beta^q$$

Como $q = 2q'$ ou $q = 2q' + 1$ e

$$\beta^q \sim f_1(\beta^{-q'}) \cdot \beta^q \cdot (f_2(\beta^{-q'}))^{-1} = \beta^{-q'} \cdot \beta^q \cdot \beta^{-q'}$$

temos que se $q = 2q'$ então $\beta^q \sim 1$ e se $q = 2q' + 1$ temos $\beta^q \sim \beta$.

Temos portanto somente duas classes de Reidemeister cuja soma dos índices é $|2 \cdot (d_1 - n)|$ [Gonçalves & Jezierski, Teorema 4.5, página 13; Definição 5.1, página 19; Teorema 5.5, página 21] o que significa $B_K(0, h, d_1, d_2) = \infty$. $\square$

Teorema 4.5. $B_K(g, h, 0, 0) = \infty$ para $h, g \geq 1$.

Demonstração:

Caso 1 ($g = h = 1$) Usando as mesmas notações acima, definimos $f_1, f_2 : K_1 \mapsto K_1$ satisfazendo⁷:

⁶usando a notação de [Gonçalves & Oliveira]

⁷Novamente observe que $f_{i\#}([a_1, b_1] \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \alpha \cdot \beta^{-1}) = 1$

$$\begin{array}{ccc}
& f_{1\#} & \\
a_1 & \mapsto & 1 \\
b_1 & \mapsto & \beta^n \\
\alpha & \mapsto & 1 \\
\beta & \mapsto & 1.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
& f_{2\#} & \\
a_1 & \mapsto & \alpha \\
b_1 & \mapsto & 1 \\
\alpha & \mapsto & 1 \\
\beta & \mapsto & \beta
\end{array}$$

Observamos que se w é uma classe de Reidemeister associada a uma classe de Nielsen w é uma palavra em α e β e temos:

$$w = w' \cdot \alpha^k \sim f_1(a_1^k) \cdot w' \cdot \alpha^k \cdot (f_2(a_1^k))^{-1} \sim w' \cdot \alpha^k \cdot \alpha^{-k} \sim w'.$$

$$w = w' \cdot \beta^k \sim f_1(\beta^k) \cdot w' \cdot \beta^k \cdot (f_2(\beta^k))^{-1} \sim w' \cdot \beta^k \cdot \beta^{-k} \sim w'.$$

Assim $w \sim 1$, o que nos garante que o par (f_1, f_2) tem uma única classe de Nielsen; C .

Na notação de [Gonçalves & Oliveira] temos que:

$$f_2^{*1}(\cdot, \mathbb{Q}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_2^{*1}(\cdot, \tilde{\mathbb{Q}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{e } f_1^{*1}(\cdot, \mathbb{Q}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e pelo Teorema 2.27, página 42, temos que $L(f_1, f_2) = n$, assim $|ind(f_1, f_2, C)| = n$.

Caso 2 ($g = 1$ e $h = 2$) Como no caso anterior definimos $f_1, f_2 : K_2 \mapsto K_1$ satisfazendo:

$$\begin{array}{ccc}
& f_{1\#} & \\
a_1 & \mapsto & 1 \\
b_1 & \mapsto & b_1^{-n} \\
a_2 & \mapsto & 1 \\
b_2 & \mapsto & 1 \\
\alpha & \mapsto & 1 \\
\beta & \mapsto & 1.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
& f_{2\#} & \\
a_1 & \mapsto & a_1 \\
b_1 & \mapsto & 1 \\
a_2 & \mapsto & b_1 \\
b_2 & \mapsto & 1 \\
\alpha & \mapsto & 1 \\
\beta & \mapsto & \beta
\end{array}$$

Nesse caso se w é uma classe de Reidemeister associada a uma classe de Nielsen então w é um palavra em a_1, b_1 e β e temos:

$$w = w' \cdot a_1^k \sim f_1(a_1^k) \cdot w' \cdot a_1^k \cdot (f_2(a_1^k))^{-1} \sim w' \cdot a_1^k \cdot a_1^{-k} \sim w'.$$

$$w = w' \cdot b_1^k \sim f_1(b_2^k) \cdot w' \cdot a_2^k \cdot (f_2(b_2^k))^{-1} \sim w' \cdot b_1^k \cdot b_1^{-k} \sim w'.$$

$$w = w' \cdot \beta^k \sim f_1(\beta^k) \cdot w' \cdot \beta^k \cdot (f_2(\beta^k))^{-1} \sim w' \cdot \beta^k \cdot \beta^{-k} \sim w'.$$

Novamente $w \sim 1$ e temos uma única classe de Nilsen com índice $L(f_1, f_2)$, como:

$$f_2^{*1}(\cdot, \mathbb{Q}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_2^{*1}(\cdot, \tilde{\mathbb{Q}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{e } f_1^{*1}(\cdot, \mathbb{Q}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

usando o Teorema 2.27, página 42, temos $L(f_1, f_2) = n$.

Caso 3 ($g \geq 1$ e $h > 2$) Esse caso é uma generalização do caso anterior, podemos tomar:

	$f_{1\#}$		$f_{2\#}$
a_1	$\mapsto 1$	a_1	$\mapsto a_1$
b_1	$\mapsto b_1^{-n}$	b_1	$\mapsto 1$
a_2	$\mapsto 1$	a_2	$\mapsto b_1$
b_2	$\mapsto 1$	b_2	$\mapsto 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_h	$\mapsto 1$	a_h	$\mapsto 1$
b_h	$\mapsto 1$	b_h	$\mapsto 1$
α	$\mapsto 1$	α	$\mapsto 1$
β	$\mapsto 1$	β	$\mapsto \beta$

O mesmo raciocínio usado no Caso 2 mostra que existe uma única classe de Nielsen no par (f_1, f_2) com índice n .

Notemos que nos 3 casos $|f_{i\#}(\pi_1(K_h)) : \pi_1(K_g)| = \infty$, assim em todos os casos $\deg(f_i) = 0$. $\square$

Teorema 4.6. $B_K(g, h, d_1, d_2) = \infty$ para $h \geq g \geq 1$, $1 \leq d_1 \leq \frac{h}{g} - 1$ e $1 \leq d_2 < \frac{h}{g} - 1$.

Demonstração: Denotando:

$$\pi_1(K_n) = \langle \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2n+2} \mid \prod_{i=1}^{2n+2} \gamma_i^2 \rangle$$

definimos $f_{1\#} : \pi_1(K_h) \mapsto \pi_1(K_g)$:

Se $d_1 \neq 1$:

	$f_{1\#}$
γ_1	$\mapsto 1$
γ_2	$\mapsto \gamma_1$
γ_3	$\mapsto \gamma_2$
$\vdots$	$\vdots$
γ_{2g+1}	$\mapsto \gamma_{2g}$
γ_{2g+2}	$\mapsto \gamma_{2g+1}$
γ_{2g+3}	$\mapsto \gamma_{2g+1}^{-1} (\gamma_{2g+1} \gamma_{2g+2})^{d_1}$
γ_{2g+4}	$\mapsto (\gamma_{2g+1} \gamma_{2g+2})^{-(d_1-1)} \gamma_1 (\gamma_{2g+1} \gamma_{2g+2})^{d_1-1}$
γ_{2g+5}	$\mapsto (\gamma_{2g+1} \gamma_{2g+2})^{-(d_1-1)} \gamma_2 (\gamma_{2g+1} \gamma_{2g+2})^{d_1-1}$
$\vdots$	$\vdots$
γ_{4g+3}	$\mapsto (\gamma_{2g+1} \gamma_{2g+2})^{-(d_1-1)} \gamma_{2g} (\gamma_{2g+1} \gamma_{2g+2})^{d_1-1}$
γ_{4g+4}	$\mapsto (\gamma_{2g+1} \gamma_{2g+2})^{-(d_1-2)} \gamma_1 (\gamma_{2g+1} \gamma_{2g+2})^{d_1-2}$
$\vdots$	$\vdots$
γ_{6g+3}	$\mapsto (\gamma_{2g+1} \gamma_{2g+2})^{-(d_1-2)} \gamma_{2g} (\gamma_{2g+1} \gamma_{2g+2})^{d_1-2}$
γ_{6g+4}	$\mapsto (\gamma_{2g+1} \gamma_{2g+2})^{-(d_1-3)} \gamma_1 (\gamma_{2g+1} \gamma_{2g+2})^{d_1-3}$
$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$
$\gamma_{(2d_1-2)g+3}$	$\mapsto (\gamma_{2g+1} \gamma_{2g+2})^{-2} \gamma_{2g} (\gamma_{2g+1} \gamma_{2g+2})^2$
$\gamma_{(2d_1-2)g+4}$	$\mapsto (\gamma_{2g+1} \gamma_{2g+2})^{-1} \gamma_1 (\gamma_{2g+1} \gamma_{2g+2})$
$\vdots$	$\vdots$
γ_{2d_1g+3}	$\mapsto (\gamma_{2g+1} \gamma_{2g+2})^{-1} \gamma_{2g}^{1-k} (\gamma_{2g+1} \gamma_{2g+2})$
γ_{2d_1g+4}	$\mapsto 1$
γ_{2d_1g+5}	$\mapsto 1$
$\vdots$	$\vdots$
γ_{2h-1}	$\mapsto 1$
γ_{2h}	$\mapsto 1$
γ_{2h+1}	$\mapsto 1$
γ_{2h+2}	$\mapsto (\gamma_{2g+1} \gamma_{2g+2})^{-1} \gamma_{2g}^k (\gamma_{2g+1} \gamma_{2g+2})$

Que satisfaz:

$$\begin{aligned}
 f_{1\#}(\gamma_{2g+2}^2 \gamma_{2g+3}^2) &= \gamma_{2g+1}^2 \gamma_{2g+1}^{-1} (\gamma_{2g+1} \gamma_{2g+2})^{d_1} \gamma_{2g+1}^{-1} (\gamma_{2g+1} \gamma_{2g+2})^{d_1} \\
 &= \prod_{i=0}^{d_1-1} (\gamma_{2g+1} \gamma_{2g+2})^{-i} \gamma_{2g+1}^2 \gamma_{2g+2}^2 (\gamma_{2g+1} \gamma_{2g+2})^i.
 \end{aligned}$$

Se $d_1 = 1$:

	$f_{1\#}$	
γ_1	$\mapsto$	1
γ_2	$\mapsto$	γ_3
γ_3	$\mapsto$	γ_4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
γ_{2g}	$\mapsto$	γ_{2g+1}
γ_{2g+1}	$\mapsto$	γ_{2g+2}
γ_{2g+2}	$\mapsto$	γ_1
γ_{2g+3}	$\mapsto$	γ_2^{1-k}
γ_{2g+4}	$\mapsto$	1
γ_{2g+5}	$\mapsto$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
γ_{2h}	$\mapsto$	1
γ_{2h+1}	$\mapsto$	1
γ_{2h+2}	$\mapsto$	γ_2^k

Definimos também:

Se $d_2 \neq 1$:

	$f_{2\#}$	
γ_1	$\mapsto$	γ_1
γ_2	$\mapsto$	γ_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
γ_{2g+1}	$\mapsto$	γ_{2g+1}
γ_{2g+2}	$\mapsto$	γ_{2g+2}
γ_{2g+3}	$\mapsto$	γ_1
γ_{2g+4}	$\mapsto$	γ_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
γ_{4g+2}	$\mapsto$	γ_{2g}
γ_{4g+3}	$\mapsto$	$(\gamma_{2g+1}\gamma_{2g+2})^{-1}\gamma_1(\gamma_{2g+1}\gamma_{2g+2})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
γ_{6g+2}	$\mapsto$	$(\gamma_{2g+1}\gamma_{2g+2})^{-1}\gamma_{2g}(\gamma_{2g+1}\gamma_{2g+2})$
γ_{6g+3}	$\mapsto$	$(\gamma_{2g+1}\gamma_{2g+2})^{-2}\gamma_1(\gamma_{2g+1}\gamma_{2g+2})^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\gamma_{(2d_2-2)g+2}$	$\mapsto$	$(\gamma_{2g+1}\gamma_{2g+2})^{-(d_2-3)}\gamma_{2g}(\gamma_{2g+1}\gamma_{2g+2})^{d_2-3}$
$\gamma_{(2d_2-2)g+3}$	$\mapsto$	$(\gamma_{2g+1}\gamma_{2g+2})^{-(d_2-2)}\gamma_1(\gamma_{2g+1}\gamma_{2g+2})^{d_2-2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
γ_{2d_2g+2}	$\mapsto$	$(\gamma_{2g+1}\gamma_{2g+2})^{-(d_2-2)}\gamma_{2g}(\gamma_{2g+1}\gamma_{2g+2})^{d_2-2}$
γ_{2d_2g+3}	$\mapsto$	γ_1
γ_{2d_2g+4}	$\mapsto$	γ_1^{-1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
γ_{2h-1}	$\mapsto$	γ_1
γ_{2h}	$\mapsto$	γ_1^{-1}
γ_{2h+1}	$\mapsto$	$(\gamma_{2g+1}\gamma_{2g+2})^{d_2-1}\gamma_{2g+2}^{-1}$
γ_{2h+2}	$\mapsto$	γ_{2g+2}

Note que:

$$\begin{aligned}
 f_{2\#}(\gamma_{2h+1}^2\gamma_{2h+2}^2) &= (\gamma_{2g+1}\gamma_{2g+2})^{d_2-1}\gamma_{2g+2}^{-1}(\gamma_{2g+1}\gamma_{2g+2})^{d_2-1}\gamma_{2g+2}^{-1}\gamma_{2g+2}^2 \\
 &= \prod_{i=d_2-2}^0 (\gamma_{2g+1}\gamma_{2g+2})^i \gamma_{2g+1}^2 \gamma_{2g+2}^2 (\gamma_{2g+1}\gamma_{2g+2})^{-i}.
 \end{aligned}$$

Se $d_2 = 1$:

$$\begin{array}{ccc}
 & f_{2\#} & \\
 \gamma_1 & \mapsto & \gamma_1 \\
 \gamma_2 & \mapsto & \gamma_2 \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 \gamma_{2g+1} & \mapsto & \gamma_{2g+1} \\
 \gamma_{2g+2} & \mapsto & \gamma_{2g+2} \\
 \gamma_{2g+3} & \mapsto & \gamma_1 \\
 \gamma_{2g+4} & \mapsto & \gamma_1^{-1} \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 \gamma_{2h+1} & \mapsto & \gamma_1 \\
 \gamma_{2h+2} & \mapsto & \gamma_1^{-1}
 \end{array}$$

Assim temos que $f_{i\#}(\prod_{j=1}^{2h+2} \gamma_i^2) = 1$ para $i = 1, 2$. o que garante que $f_{i\#}$ são homomorfismos e podem ser estendidos para aplicações $f_i : K_h \mapsto K_g$. Por construção $\deg(f_1) = d_1$, $\deg(f_2) = d_2$ e f_2 é fiel à orientação.

Notemos ainda que se $w \in \pi_1(K_h)$ e pode ser escrita como uma palavra em $\langle \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t \rangle$ com $t \leq 2g+2$ então $f_{2\#}(w) = w$ e $f_{1\#}(w)$ pode ser escrita como uma palavra em $\langle \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{t-1} \rangle$.

Assim se $w \in \pi_1(K_g)$, w é uma palavra em $\langle \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2g+2} \rangle$, tomando-se $w' \in \pi_1(K_h)$ a mesma palavra temos que:

$$w \sim f_{1\#}w'^{-1} \cdot w \cdot f_{2\#}w'^{-1} \sim f_{1\#}w'^{-1}$$

que pode ser escrita como uma palavra em $\langle \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2g} \rangle$, repetindo-se o mesmo argumento, no máximo, $2g$ vezes temos que $w \sim 1$ o que mostra que existe uma única classe de Reidemeister para o par (f_1, f_2) . Mais uma vez usaremos que o índice dessa classe é dado por $L(f_1, f_2)$, mais ainda, vamos mostrar que alterando-se o parâmetro k usado na definição de $f_{1\#}$ podemos obter $L(f_1, f_2)$ tão grande quanto se queira.

Para o cálculo de $L(f_1, f_2)$ precisamos descrever como tais homomorfismos se comportam em relação a conjuntos geradores de $H_1(K_h, \mathbb{Z})$ e $H_1(K_g, \mathbb{Z})$ com as propriedades descritas na demonstração da Proposição 2.2 de [Gonçalves & Oliveira, página 160].

Tomando-se o seguinte sistema de geradores de $H_1(K_n, \mathbb{Z})$:

$$\{\gamma_1\gamma_2, \gamma_2^{-1}\gamma_{2n+2}, \gamma_3\gamma_4, \gamma_4^{-1}\gamma_{2g+2}, \dots, \gamma_{2n}^{-1}\gamma_{2n+2}, \gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1} \dots \gamma_{2n}^{-1}\gamma_{2n+1}\gamma_{2n+2}, \gamma_{2n+2}^{-1}\}$$

podemos descrever $f_1 : H_1(K_h) \mapsto H_1(K_g)$ matricialmente como a transposta do produto $T^{-1} \cdot M_1 \cdot T$ onde M_1 no caso $d_1 \neq 1$ é a matriz $(2g+2) \times (2h+2)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & & 0 & 0 & & & & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & & & & 0 & 1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & & & & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & I_{2g}^{(1)} & \vdots & \vdots & I_{2g}^{(2)} & \cdots & \cdots & I_{2g}^{(d_1-1)} & & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 0 & & & & & & & 0 & \cdots & 1-k & 0 & k \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & d_1-1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e T é a matriz quadrada de ordem $2h$ ou $2g$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dessa maneira obtemos, para $d_1 \neq 1$ (na notação de [Gonçalves & Oliveira]):

Para $d_1 = 1$:

$$f_{1\#}(\cdot, \mathbb{Q}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -k & -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1-k \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 & 0 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1-k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & -1 & 0 & -1-k \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -k & -1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & -1-k \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1-k & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1-k \\ 0 & -1+k & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1+k \\ 0 & -k & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1-k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1-k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1-k \\ -2 & -2k & -2 & 0 & -2 & 0 & \cdots & -2 & 0 & -1 & -2k \\ 0 & k & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix},$$

De maneira análoga $f_2 : H_1(K_h) \mapsto H_1(K_g)$ é descrita pela transposta do produto $T^{-1} \cdot M_2 \cdot T$ onde M_2 é a matriz, no caso $d_2 \neq 1$, $(2g+2) \times (2h+2)$:

$$\begin{pmatrix} & & & & & & & & 1 & -1 & \cdots & 1 & -1 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ I_{2g+2} & I_{2g}^{\{1\}} & I_{2g}^{\{2\}} & I_{2g}^{\{3\}} & \cdots & \cdots & I_{2g}^{\{d_2-1\}} & & 0 & 0 & & 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ & & & & & & & & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ & & & & & & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e no caso $d_2 = 1$, M_2 é a matriz $(2g+2) \times (2h+2)$:

$$\begin{pmatrix} & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & \cdots & 0 \\ I_{2g+2} & \vdots & & \vdots \\ & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Obtemos assim que, para $d_2 \neq 1$:

$$f_2^{*1}(\cdot, \mathbb{Q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{2g-2}^{\{1\}} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_{2g-2}^{\{2\}} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_{2g-2}^{\{3\}} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_{2g-2}^{\{d_2\}} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_2^{*1}(\cdot, \bar{\mathbb{Q}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{2g-2}^{\{1\}} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_{2g-2}^{\{2\}} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_{2g-2}^{\{3\}} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_{2g-2}^{\{d_2\}} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & \cdots & -2 & 0 & d_2-2 \end{pmatrix}.$$

Para $d_2 = 1$ teremos:

$$f_2^{*1}(\cdot, \mathbb{Q}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 \\ -1 & -1 & & & \cdot \\ \vdots & \vdots & I_{2g-4} & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & & \cdot \\ -1 & -1 & & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_2^{*1}(\cdot, \bar{\mathbb{Q}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & & 0 \\ -1 & -1 & & & \cdot \\ \vdots & \vdots & I_{2g-4} & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & & \cdot \\ -1 & -1 & & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -2 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos então, por cálculos diretos usando [Gonçalves & Oliveira, Teorema 2.8, página 165]:

$$L(f_1, f_2) = \begin{cases} -3 + 4k & \text{se } d_2 = 1, d_1 = 1, g \geq 2; \\ -2 + 4k & \text{se } d_2 = 1, d_1 > 1, g \geq 2; \\ d_2 - 1 + 4k & \text{se } d_2 > 1, d_1 = 1, g \geq 2; \\ -2(d_2 - d_1) - 1 + 4k & \text{se } d_1 \geq d_2 - 1 > 1, g = 2, d_1 \neq h - 2; \\ d_2 - d_1 + 4k & \text{se } d_2 \geq d_1 > 1, g \geq 3; \\ 2(d_2 - d_1) + 4k & \text{se } (d_1 \geq d_2 > 1, g \geq 3) \text{ ou } (g = 2, d_1 = h - 2); \end{cases}$$

□

4.2 Aplicações de $K_h \mapsto P_g$

Definimos agora:

$$B_{KP}(g, h, d_1, d_2) = \sup\{|ind(f_1, f_2, C)| \mid deg(f_1) = d_1, deg(f_2) = d_2\},$$

onde o supremo é tomado para todas as classes de coincidência C de todos os pares de aplicações⁸ $(f_1, f_2) : K_h \mapsto P_g$ com tais graus e f_2 fiel à orientação.

Teorema 4.7. $B_{KP}(g, h, 0, 0) = \infty$ se $h \geq 2$ e $g \geq 1$.

Demonstração: Novamente definiremos um par de homomorfismos $f_{1\#}, f_{2\#}$ em π_1 que se estende como aplicações (f_1, f_2) entre as superfícies requeridas (que são espaços de Eilenberg-MacLane do tipo $K[\pi_1]$).

Usando a notação anterior para $\pi_1(K_h)$ e denotando:

$$\pi_1(P_g) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g, \gamma \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \cdot \gamma^2 \rangle,$$

tomamos $f_{1\#}, f_{2\#} : \pi_1(K_2) \mapsto \pi_1(P_1)$ dados por:

$f_{1\#}$	$f_{2\#}$
$a_1 \mapsto 1$	$a_1 \mapsto a_1$
$b_1 \mapsto b_1^{-n}$	$b_1 \mapsto 1$
$a_2 \mapsto 1$	$a_2 \mapsto b_1$
$b_2 \mapsto 1$	$b_2 \mapsto 1$
$\alpha \mapsto 1$	$\alpha \mapsto 1$
$\beta \mapsto 1.$	$\beta \mapsto \gamma$

⁸Para as definições de K_h e P_g ver a seção 2.5 na página 40.

Dessa forma teremos:

$$f_2^{*1}(\cdot, \mathbb{Q}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_2^{*1}(\cdot, \tilde{\mathbb{Q}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{e } f_1^{*1}(\cdot, \mathbb{Q}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -n \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

O mesmo argumento usado para $f_1, f_2 : K_2 \mapsto K_1$ mostra que temos uma única classe de Nielsen com índice n (para calcular $L(f_1, f_2)$ usamos o Teorema 2.28 da página 43).

Como foi feito no caso de $f_1, f_2 : K_2 \mapsto K_1$ esse exemplo pode ser estendido para $f_1, f_2 : K_h \mapsto P_g$ com $h \geq 2$ e $g \geq 1$. $\square$

Para aplicações de grau não nulo devemos observar que segundo [GKZ, Teorema 2.5 (c)] se $f : K_h \mapsto P_g$ é fiel à orientação temos que:

$$\chi(K_h) \equiv \deg(f)\chi(P_g) \pmod{2}$$

e portanto $\deg(f)$ é par. Como supomos f_2 fiel à orientação temos que d_2 será sempre par.

Teorema 4.8. $B_{KP}(g, h, d_1, d_2) = \infty$ se $h \geq 2$, $g \geq 1$, $d_1 > 0$ e $d_2 > 0$

Demonstração: Tomando-se as seguintes funções descritas no grupo fundamental⁹ das superfícies:

⁹Com as mesmas notações usadas anteriormente.

	$f_{1\#}$	
γ_1	$\mapsto$	1
γ_2	$\mapsto$	γ_1
γ_3	$\mapsto$	γ_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
γ_{2g+1}	$\mapsto$	γ_{2g}
γ_{2g+2}	$\mapsto$	$\gamma_{2g}^{-1}(\gamma_{2g}\gamma_{2g+1})^{d_1}$
γ_{2g+3}	$\mapsto$	$(\gamma_{2g}\gamma_{2g+1})^{-(d_1-1)}\gamma_1(\gamma_{2g}\gamma_{2g+1})^{d_1-1}$
γ_{2g+4}	$\mapsto$	$(\gamma_{2g}\gamma_{2g+1})^{-(d_1-1)}\gamma_2(\gamma_{2g}\gamma_{2g+1})^{d_1-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
γ_{4g+1}	$\mapsto$	$(\gamma_{2g}\gamma_{2g+1})^{-(d_1-1)}\gamma_{2g-1}(\gamma_{2g}\gamma_{2g+1})^{d_1-1}$
γ_{4g+2}	$\mapsto$	$(\gamma_{2g}\gamma_{2g+1})^{-(d_1-2)}\gamma_1(\gamma_{2g}\gamma_{2g+1})^{d_1-2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\gamma_{(2d_1-2)g+4}$	$\mapsto$	$(\gamma_{2g}\gamma_{2g+1})^{-2}\gamma_{2g-1}(\gamma_{2g}\gamma_{2g+1})^2$
$\gamma_{(d_1-1)(2g-1)+3}$	$\mapsto$	$(\gamma_{2g}\gamma_{2g+1})^{-2}\gamma_{2g-1}(\gamma_{2g}\gamma_{2g+1})^2$
$\gamma_{(d_1-1)(2g-1)+4}$	$\mapsto$	$(\gamma_{2g}\gamma_{2g+1})^{-1}\gamma_1(\gamma_{2g}\gamma_{2g+1})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\gamma_{d_1(2g-1)+3}$	$\mapsto$	$(\gamma_{2g}\gamma_{2g+1})^{-1}\gamma_{2g-1}^{1-k}(\gamma_{2g}\gamma_{2g+1})$
$\gamma_{d_1(2g-1)+4}$	$\mapsto$	1
$\gamma_{d_1(2g-1)+5}$	$\mapsto$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
γ_{2h}	$\mapsto$	1
γ_{2h+1}	$\mapsto$	1
γ_{2h+2}	$\mapsto$	$(\gamma_{2g}\gamma_{2g+1})^{-1}\gamma_{2g-1}^k(\gamma_{2g}\gamma_{2g+1})$

	$f_{2\#}$	
γ_1	$\mapsto$	γ_1
γ_2	$\mapsto$	γ_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
γ_{2g+1}	$\mapsto$	γ_{2g+1}
γ_{2g+2}	$\mapsto$	γ_1
γ_{2g+3}	$\mapsto$	γ_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
γ_{4g}	$\mapsto$	γ_{2g-1}
γ_{4g+1}	$\mapsto$	$(\gamma_{2g}\gamma_{2g+1})^{-1}\gamma_1(\gamma_{2g}\gamma_{2g+1})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
γ_{6g-1}	$\mapsto$	$(\gamma_{2g}\gamma_{2g+1})^{-1}\gamma_{2g-1}(\gamma_{2g}\gamma_{2g+1})$
γ_{6g}	$\mapsto$	$(\gamma_{2g}\gamma_{2g+1})^{-2}\gamma_1(\gamma_{2g}\gamma_{2g+1})^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\gamma_{(d_2-1)(2g-1)+2}$	$\mapsto$	$(\gamma_{2g}\gamma_{2g+1})^{-(d_2-3)}\gamma_{2g-1}(\gamma_{2g}\gamma_{2g+1})^{d_2-3}$
$\gamma_{(d_2-1)(2g-1)+3}$	$\mapsto$	$(\gamma_{2g}\gamma_{2g+1})^{-(d_2-2)}\gamma_1(\gamma_{2g}\gamma_{2g+1})^{d_2-2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\gamma_{d_2(2g-1)+2}$	$\mapsto$	$(\gamma_{2g}\gamma_{2g+1})^{-(d_2-2)}\gamma_{2g-1}(\gamma_{2g}\gamma_{2g+1})^{d_2-2}$
$\gamma_{d_2(2g-1)+3}$	$\mapsto$	γ_1
$\gamma_{d_2(2g-1)+4}$	$\mapsto$	γ_1^{-1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
γ_{2h-1}	$\mapsto$	γ_1
γ_{2h}	$\mapsto$	γ_1^{-1}
γ_{2h+1}	$\mapsto$	$(\gamma_{2g}\gamma_{2g+1})^{d_2-1}\gamma_{2g+1}^{-1}$
γ_{2h+2}	$\mapsto$	γ_{2g+1}

Temos que ambas definem homomorfismos no grupo fundamental, portanto se estendem para aplicações $f_1, f_2 : K_h \mapsto P_g$, além disso f_2 é fiel à orientação, $\deg(f_1) = d_1$ e $\deg(f_2) = d_2$.

Usando o mesmo raciocínio usado na demonstração do Teorema 4.6 verificamos que o par (f_1, f_2) tem somente uma classe de Reidemeister, cujo índice pode ser calculado pelo número de Lefschetz.

Considerando os seguintes conjuntos de geradores para $H_1(K_h; \mathbb{Z})$ e $H_1(P_g; \mathbb{Z})$:

$$\{\gamma_1\gamma_2, \gamma_2^{-1}\gamma_{2h+2}, \gamma_3\gamma_4, \gamma_4^{-1}\gamma_{2h+2}, \dots, \gamma_{2h}^{-1}\gamma_{2h+2}, \gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1} \cdots \gamma_{2h}^{-1}\gamma_{2h+1}\gamma_{2h+2}, \gamma_{2h+2}^{-1}\}$$

e

$$\{\gamma_1\gamma_2, \gamma_2^{-1}\gamma_{2g+1}, \gamma_3\gamma_4, \gamma_4^{-1}\gamma_{2g+1}, \dots, \gamma_{2g}^{-1}\gamma_{2g+1}, \gamma_{2g+1}\}$$

Podemos descrever¹⁰ os homomorfismos induzidos em cohomologia pela f_1 como:

$$f_1^{*1}(\cdot, \mathbb{Q}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & L^{(1)} & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -d_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & k & d_1 - 1 + k \\ & & & J^{(2)} & & & \\ & & & L^{(3)} & & & \\ & & & J^{(4)} & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & L^{(d_1-1)} & & & \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & k & k \\ & & & & & \vdots & \vdots \\ & & I_{2g-2} & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1-k & 1-k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & k & k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & k & k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -k & -k \end{pmatrix}.$$

no caso de d_1 ser par e

¹⁰Utilizando novamente as idéias da demonstração do Teorema 4.6

$$f_1^{*1}(\cdot, \mathbb{Q}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & L^{(1)} & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -d_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & k & 5+k \\ & & & J^{(2)} & & & \\ & & & L^{(3)} & & & \\ & & & J^{(4)} & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & J^{(d_1-1)} & & & \\ -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & k & k \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & \dots & k & k \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-k & 1-k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1+2k & -1+2k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & k & k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & k & k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -k & -k \end{pmatrix}.$$

para d_1 ímpar.

Onde¹¹:

$$L = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & k & k \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & \dots & k & k \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1+k & -1+k \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & k & k \\ & & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & k & k \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bem como, para f_2 teremos:

¹¹Tanto L como J são matrizes $(2g-1) \times (2g)$.

$$f_2^{*1}(\cdot, \mathbb{Q}) = \begin{pmatrix} I_{2g} \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ L' \\ J' \\ L' \\ \vdots \\ L' \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}, \quad f_2^{*1}(\cdot, \tilde{\mathbb{Q}}) = \begin{pmatrix} I_{2g} \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ L' \\ J' \\ L' \\ \vdots \\ L' \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -d_2 & 0 & \dots & -d_2 & -2(d_2-1) \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Onde:

$$L' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad J' = \begin{pmatrix} & & & & 0 & 0 \\ & & & & \vdots & \vdots \\ & I_{2g-2} & & & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Agora, com cálculos diretos, usando [Gonçalves & Oliveira, Teorema 2.7, página 164] obtemos¹²:

¹²Note que de acordo com a observação feita na página 72 d_2 é sempre par, assim $L(f_1, f_2)$ será sempre inteiro

$$L(f_1, f_2) = \begin{cases} \frac{3d_2}{2} - d_1 + (d_2 - 3)k & \text{se } g \geq 2, d_1 > d_2; \\ \frac{d_2}{2} + (d_2 - 3)k & \text{se } g \geq 2, d_2 \geq d_1; \\ \frac{5d_2}{2} - d_1 - 3 + (d_2 - 3)k & \text{se } g = 2, d_1 > d_2; \\ \frac{d_2}{2} + d_1 - 3 + (d_2 - 3)k & \text{se } g = 2, d_2 \geq d_1. \end{cases}$$

□

4.3 Outros Casos

Estudamos até aqui os casos onde o domínio das aplicações é uma superfície do tipo K_n e o contra-domínio é não orientável. Caso o domínio seja não orientável e o contra-domínio orientável as técnicas aqui apresentadas não podem ser utilizadas pois nesse caso a suposição de f_2 ser fiel à orientação não se realiza.

Para aplicações entre duas superfícies do tipo P_n ou quando o domínio for uma superfície orientável resultados semelhantes podem ser obtidos usando-se as mesmas técnicas.

4.4 Alguns Resultados com Limitação

4.4.1 Recobrimentos

O resultado que apresentaremos nessa subseção é uma adaptação, que engloba o caso não orientável, de [Gonçalves & Jiang, Proposição 11, página 86] onde uma das aplicações é um recobrimento. Aqui, com as mesmas hipóteses de [Gonçalves & Jiang], obtemos um limitante para o índice de uma classe de coincidência entre superfícies orientáveis ou não. Lembramos que um recobrimento sempre é fiel a orientação.

Teorema 4.9. *Sejam S_A e S_B duas superfícies compactas e sem bordo, $f : S_A \mapsto S_B$ uma aplicação contínua e $p : S_A \mapsto S_B$ um recobrimento. Se existe um subgrupo $K \subset \pi_1(S_A)$ tal que:*

- $[\pi_1(S_A) : K] = n < \infty$;
- $f_\pi(K) \subset p_\pi(K)$

então para toda classe de coincidência de Nielsen, C , do par (f, p) , $|\text{ind}(f, p, C)| \leq |2n\chi(S_A) - 1|$.

Demonstração: Nas condições acima sejam¹³ $x_0 \in \text{Coin}(f, p) \subset S_A$ e C a classe de coincidência que contem x_0 .

Como $[\pi_1(S_A) : K] = n < \infty$; existe uma superfície compacta sem bordo S_K e uma aplicação de recobrimento, $q : (S_K, x'_0) \mapsto (S_A, x_0)$, de ordem n . Notemos que $\chi(S_K) = n\chi(S_A)$ e $q_\#(\pi_1(S_K, x'_0)) = K$.

Se $\overline{x_0} = f(x_0) = p(x_0)$, existe uma aplicação $f' : S_K \mapsto S_K$ que torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} (S_K, x'_0) & \xrightarrow{f'} & (S_K, x'_0) \\ \downarrow q & & \downarrow q \\ & (S_A, x_0) & \\ & \downarrow p & \\ (S_A, x_0) & \xrightarrow{f} & (S_B, \overline{x_0}) \end{array}$$

Denotaremos por C' a classe de coincidência do par (f', id) que contém o ponto x'_0 .

Notemos que $\text{Coin}(f', id)$ se inclui naturalmente em $\text{Coin}(p \circ q \circ f', p \circ q)$ e como $p \circ q$ é um recobrimento, pelo [Gonçalves & Jiang, Lema 1(iv), páginas 75 e 76,], C' é uma classe de coincidência do par $(p \circ q \circ f', p \circ q)$. Assim, pela comutatividade do diagrama acima C' é uma classe de coincidência do par $(f \circ q, p \circ q)$. Naturalmente $|\text{ind}(f', id, C')| = |\text{ind}(f \circ q, p \circ q, C')|$.

Como q é um recobrimento, usando [Gonçalves & Jiang, Lema 2(iii), página 76] concluímos que C' cobre C , n' vezes com $1 \leq n' \leq n$. Usando [Dobreńko & Jezierski, Lema 2.1, corolário 2.2 e Lema 2.3, páginas 77 e 78] e [Gonçalves & Jezierski, Lema 5.3, página 20] obtemos que $|\text{ind}(f \circ q, p \circ q, C')| = n'|\text{ind}(f, p, C)|$ também no caso não orientável¹⁴. Assim obtemos que $|\text{ind}(f, p, C)| \leq |\text{ind}(f \circ q, p \circ q, C')| = |\text{ind}(f', id, C')|$.

Como C' é uma classe de coincidência do par (f', id) , C' pode ser vista como uma classe de ponto fixo de $f' : S_K \mapsto S_K$ e, por [Jiang 2, Teorema 2, página 477], $|\text{ind}(f', id, C')| \leq |2\chi(S_K) - 1|$; portanto $|\text{ind}(f, p, C)| \leq |2n\chi(S_A) - 1|$. $\square$

¹³Caso $\text{Coin}(f, p) = \emptyset$ nada temos a demonstrar.

¹⁴Cabe lembrar aqui a equivalência do semi-índice definido em [Dobreńko & Jezierski] e do valor absoluto do índice usado aqui (ver [Gonçalves & Jezierski]).

4.4.2 $B_K(g, g, 0, 1)$ e $B_P(g, g, 0, 1)$

De maneira análoga a definição de $B_K(g, h, d_1, d_2)$ feita na seção 4.1 na página 54 podemos definir: $B_P(g, h, d_1, d_2)$ para aplicações entre duas superfícies do tipo P_n . Podemos agora enunciar:

Teorema 4.10. $B_K(g, g, 0, 1) = 2g - 1$ e $B_P(g, g, 0, 1) = 2g$ para $g \geq 1$.

Demonstração: Seja M_n a superfície não orientável que admite como recobrimento duplo orientável a superfície S_n (de *genus* n). Dado um par $f_1, f_2 : M_n \mapsto M_n$, tal que f_2 tem grau ± 1 , sabemos que f_2 é homotópica a um homeomorfismo f'_2 e que a inclusão $\text{Coin}(f_1, f_2) \mapsto \text{Fix}((f'_2)^{-1} \circ f_1)$ preserva índices de classes de Nielsen, além disso $|\deg(f_1)| = |\deg((f'_2)^{-1} \circ f_1)|$. Assim podemos lidar com o par (f_1, f_2) como sendo o par $((f'_2)^{-1} \circ f_1, id)$ o que nos permite recorrer a definição e as propriedades do índice de classes de ponto fixo. Por simplicidade de notação denotaremos $(f'_2)^{-1} \circ f_1$ como f .

- Primeiramente vamos mostrar que dada $C \subset \text{Fix}(f)$ uma classe de Nielsen então $|\text{ind}(C)| \leq n$. Para tanto notamos que se $\deg(f) = 0$, f se fatora no 1-esqueleto de M_n e por [Lyndon & Schupp, Proposição 6.6, página 53] temos que $f_{\#}(\pi_1(M_n))$ é um subgrupo livre de posto, no máximo¹⁵, $\frac{n+1}{2}$, assim podemos fatorar f pela união por um ponto¹⁶ de, no máximo, $\frac{n+1}{2}$ cópias de S^1 . Usando os resultados de [Jiang 2] e a propriedade comutativa do índice de classes de ponto fixo obtemos que $|\text{ind}(C)| \leq n$.
- Construiremos agora um exemplo nas condições do Teorema com $|\text{ind}(C)| = n$. Para n ímpar e considerando $f : \bigvee_i^{\frac{n+1}{2}} S^1 \mapsto \bigvee_i^{\frac{n+1}{2}} S^1$, a aplicação que leva cada cópia de S^1 em si mesma com grau 2 deixando um único ponto fixo na intersecção das cópias de S^1 , podemos tomar $\bigvee_i^{\frac{n+1}{2}} S^1 \subset M_n$ e temos que f se estende a uma aplicação $\tilde{f} : M_n \mapsto M_n$ de grau zero, com uma única classe de ponto fixo C , usando-se o número de Lefschetz obtemos que $|\text{ind}(C)| = n$.

Observamos agora que:

$$M_n = \begin{cases} K_{\frac{n-1}{2}} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ P_{\frac{n}{2}} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

o que finaliza a demonstração. □

¹⁵Note que $\pi_1(M_n)$ tem $n + 1$ geradores $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+1}\}$ que satisfazem a relação $\gamma_1^2 \gamma_2^2 \dots \gamma_{n+1}^2 = 1$

¹⁶O "bouquet", denotado $\bigvee S^1$.

Referências Bibliográficas

- [Baues] Baues, Hans J. *Obstruction Theory - On Homotopy Classification of Maps*, Lectures Notes in Math. 628, Springer-Verlag; 1977.
- [Brooks] Brooks, R.B. S. *Coincidence, Roots and Fixed Points*, Doctorial Dissertation, University of California, 1967.
- [BBPT] Brooks, R.B. S.; Brown, R. F.; Pak, J.; Taylor, P. H. *Nielsen numbers of maps of tori*, Proc. Amer. Math. Soc. 52 (1975), 398–400.
- [Dobrenko & Jezierski] Dobrenko, R.; Jezierski, J. *The coincidence Nielsen theory on non-orientable manifolds*, Rocky Mountain J. math. 23 (1993), 67–85.
- [Dold] Dold, A. *Fixed Point Index and Fixed Point Theorem for Euclidean Neighborhood Retracts*. Topology 4(1965), 1–8.
- [Epstein] Epstein, D. B. A.; *The Degree of a Map*, Proc. London Math. Soc. (3), 16 (1966), 369–383.
- [Gonçalves] Gonçalves, Daciberg L. *Coincidence Theory for Maps from a Complex into a Manifold*. Topology Appl. 92 (1999), 63–79.
- [Gonçalves & Jezierski] Gonçalves, Daciberg L.; Jezierski, J. *Lefschetz coincidence formula on non-orientable manifolds*, Fund. Math. 153 (1997), 01–23.
- [Gonçalves & Jiang] Gonçalves, Daciberg L.; Jiang, Boju. *The index of coincidence Nielsen classes of maps between surfaces*, Topology Appl. 116 (2001), 73–89.
- [Gonçalves & Kiihl] Gonçalves, Daciberg L.; Kiihl, José Carlos de S. *Teoria do Índice*, 14º Colóquio Brasileiro de Matemática, Instituto de Matemática Pura e Aplicada do CNPq, 1983.

- [GKZ] Gonçalves, Daciberg L.; Kudryavtseva, Elena; Zieschang, H. *Roots of mappings on nonorientable surfaces and equations in free groups*, a aparecer em Manuscripta Mathematica.
- [Gonçalves & Oliveira] Gonçalves, Daciberg L.; Oliveira, Edson, *The Lefschetz coincidence number for maps among compact surfaces*, Far East J. Math. Sci., Special Vol., Part II (1997) 147–166.
- [Hu] Hu, Sze-Tsen; *Homology Theory: A First Course in Algebraic Topology*, Holden-Day; 1966.
- [Jezierski] Jezierski, J. *The Nielsen coincidence theory on topological manifolds*, Fund. Math. 143 (1993), 167–178.
- [Jiang 1] Jiang, Boju. *Lectures on Nielsen Fixed Point Theory*. Contemporary Mathematics, vol 14; 1982.
- [Jiang 2] Jiang, Boju; *Bounds for fixed points on surfaces*, Math. Ann. 311 (1998), 467–478.
- [Jiang & Guo] Jiang, Boju; Guo, Jianhan. *Fixed Points of Surface Diffeomorphisms*, Pacific J. Math. 160 (1993), 67–89.
- [Kelly 1] Kelly, Michael R. *A bound on the fixed-point index for surface mappings*. Ergod. Th. & Dynam. Sys. 17 (1997), 1394–1408.
- [Kelly 2] Kelly, Michael R. *Bounds on the fixed point indices for self-maps of certain simplicial complexes*. Topology Appl. 108 (2000), 179–196.
- [Lyndon & Schupp] Lyndon, Roger C.; Schupp, Paul E. *Combinatorial Group Theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 89, Springer-Verlag; 1977.
- [MKS] Magnus, W.; Karrass, A.; Solitar, D. *Combinatorial Group Theory*, Interscience; 1966.
- [Oliveira] Oliveira, Edson de. *Teoria de Nielsen para Coincidência e Algumas Aplicações*. Tese de Doutorado, USP, 1987.
- [Olum 1] Olum, Paul. *Obstructions to Extensions and Homotopies*, Annals of Math. 52 (1950), 1–50.
- [Olum 2] Olum, Paul. *Mappings of Manifolds and the Notion of Degree*, Annals of Math. 58 (1953), 458–480.

-
- [Pelikan & Slaminka] Pelikan S.; Slaminka, E. E. *A bound for the fixed point index of area-preserving homeomorphisms of two-manifolds*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 7 (1987), 463–479.
- [Simon] Simon, S. *A bound for the fixed point index of an area-preserving map with applications to mechanics*. Inventiones Math. 26 (1974), 187–200
- [Spanier] Spanier, E. *Duality in topological manifolds*, Colloque de Topologie Tenu à Bruxelles, Centre Belge de Recherches Mathématiques, 1966, 91–111.
- [Steenrod 1] Steenrod, Norman *Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press; 1961.
- [Steenrod 2] Steenrod, Norman *Homology with Local Coefficients*, Annals of Math. 44 (1943), 610–627.
- [Stillwell] Stillwell, John. *Geometry of Surfaces*, Springer-Verlag; 1992.
- [Vick] Vick, James W. *Homology Theory An Introduction to Algebraic Topology*, Academic Press; 1973.
- [Whitehead] Whitehead, George W. *Elements of Homotopy Theory*, Springer-Verlag; 1978.
- [ZVC] Zieschang, H.; Vogt, E.; Coldewey, H-D. *Surface and Planar Discontinuous Groups*, Lectures Notes in Math. 835, Springer-Verlag; 1980.